

# MODERN CONTROL PRINCIPLES AND APPLICATIONS

*Jay C. Hsu, Ph. D.*

*Bell Telephone Laboratories, Incorporated*

*Andrew U. Meyer, Ph. D.*

*Department of Electrical Engineering  
Newark College of Engineering*

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

*New York*

*San Francisco*

*Toronto*

*London*

*Sydney*

Д. СЮ, А. МЕЙЕР

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО  
УПРАВЛЕНИЯ  
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

*Перевод с английского*  
В. С. БОЧКОВА, Е. В. ГУРЕЦКОЙ,  
Н. М. КИСЕЛЕВОЙ и В. Г. ПОТЕМКИНА

Под редакцией  
доктора технических наук  
профессора Ю. И. ТОПЧЕЕВА

Д. С ю, А. М е й е р. Современная теория автоматического управления и ее применение. *Перевод с английского.* Под ред. д-ра техн. наук проф. Ю. И. Т о п - ч е е в а. М., «Машиностроение», 1972, стр. 544.

Книга посвящена систематическому изложению современной детерминированной теории автоматического управления. В ней рассмотрены уравнения динамики и способы их решения, точные и приближенные методы анализа систем, оптимальные системы, основанные на классических вариационных методах, принципах максимума и динамического программирования.

Значительное число примеров и упражнений, приведенных в книге, позволяют глубже освоить теорию и ее применение к решению практических задач.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей и аспирантов, занимающихся вопросами автоматического управления в различных областях техники.

Ил. 211. Табл. 5. Список лит. 298 назв.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие к русскому изданию . . . . .	8
Предисловие к английскому изданию . . . . .	10
Условные обозначения . . . . .	13

## Р а з д е л I

### ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

<b>Глава 1. - Современные системы автоматического управления . . . . .</b>	<b>15</b>
--	-----------

1.1. Роль математики в современной теории автоматического управления (15). 1.2. Линейные и нелинейные системы управления (16). 1.3. Устойчивость и оптимальность (19). 1.4. Системы высокого порядка и приближенные методы их расчета (20). 1.5. Роль вычислительных машин в практике проектирования систем управления (21). 1.6. Исторический очерк развития теории автоматического управления (22). 1.7. Содержание книги (24).

<b>Глава 2. Исследование систем с помощью переменных состояния . . . . .</b>	<b>26</b>
--	-----------

2.1. Система автоматического управления (26). 2.2. Представление динамики объекта в векторно-матричной форме (28). 2.3. Операторная форма записи линейных систем (32). 2.4. Уравнения состояния линейных стационарных систем, передаточная функция которых не содержит нулей (33). 2.5. Уравнения состояния линейных стационарных систем с числителем передаточной функции порядка  $l$ , где  $1 \leq l \leq n$  (38). 2.6. Уравнения состояния линейных стационарных систем с числителем передаточной функции, порядка  $l > n$  (41). 2.7. Уравнения состояния линейных систем с переменными параметрами (41). 2.8. Уравнения состояния системы для случая нескольких входов и выходов (42). 2.9. Характеристическое уравнение для стационарных систем (43). 2.10. Краткое содержание (43). 2.11. Задачи для упражнений (44). 2.12. Указания на литературу (46).

<b>Глава 3. Решение уравнений состояния . . . . .</b>	<b>47</b>
---	-----------

3.1. Некоторые определения (47). 3.2. Достаточные условия существования и единственности решения системы уравнений относительно переменных состояния (49). 3.3. Решение линейных уравнений состояния (51). 3.4. Определение переходной матрицы линейной стационарной системы (55). 3.5. Передаточные функции линейных стационарных систем (61). 3.6. Управляемость и наблюдаемость линейных систем с постоянными параметрами (63). 3.7. Линейные нестационарные системы (68). 3.8. Сопряженная система уравнений (69). 3.9. Линейные системы, которые не могут быть описаны через переменные состояния (72). 3.10. Краткое содержание (73). 3.11. Задачи для упражнений (74). 3.12. Указания на литературу (76).

<b>Глава 4. Системы второго порядка и фазовая плоскость . . . . .</b>	<b>77</b>
---	-----------

4.1. Некоторые примеры траекторий на фазовой плоскости (78). 4.2. Состояния равновесия и зоны равновесных состояний автономных систем (82). 4.3. Различные виды положений равновесия автономных линейных систем второго порядка (84). 4.4. Предельные циклы и другие виды траекторий движения автономных нелинейных систем (89). 4.5. Фазовые траектории консервативных систем (92). 4.6. Построение фазовых траекторий (94). 4.7. Определение времени протекания переходных процессов по фазовым траекториям (97). 4.8. Краткое содержание (98). 4.9. Задачи для упражнений (99). 4.10. Указания на литературу (101).

## Р а з д е л II

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

<b>Глава 5. Линеаризация и устойчивость в малом . . . . .</b>	<b>103</b>
---	------------

5.1. Понятие устойчивости (103). 5.2 Устойчивость в малом (устойчивость по Ляпунову) автономных нелинейных систем (104). 5.3. Линеаризация (107). 5.4. Первый метод Ляпунова анализа устойчивости систем относительно положения равновесия (110). 5.5. Линеаризация относительно траектории. Чувствительность и анализ ошибок (115).

5.6. Устойчивость траекторий системы. Равномерная асимптотическая устойчивость (119). 5.7. Орбитальная устойчивость и устойчивость зон равновесных состояний (125). 5.8. Предельные циклы в системах второго порядка и их орбитальная устойчивость (126). 5.9. Введение в анализ устойчивости в большом. Гипотезы Айзермана и Калмана (130). 5.10. Краткое содержание (133). 5.11. Задачи для упражнений (134). 5.12. Указания на литературу (137).

**Глава 6. Гармоническая линеаризация и эквивалентная передаточная функция . . . . . 138**

6.1. Сущность метода гармонической линеаризации (139). 6.2. Метод гармонической линеаризации для систем управления с однозначными нелинейностями (143). 6.3. Эквивалентные передаточные функции двузначных нелинейностей (154). 6.4. Общий метод определения эквивалентных передаточных функций однозначных нелинейностей (157). 6.5. Исследование скачкообразного резонанса методом гармонической линеаризации (162). 6.6. Запас по амплитуде в нелинейной системе и его применение в задачах стабилизации систем управления нелинейными корректирующими устройствами (166). 6.7. Анализ и стабилизация систем управления высокого порядка (171). 6.8. Случай, когда метод гармонической линеаризации не применим (174). 6.9. Краткое содержание (175). 6.10. Задачи для упражнений (176). 6.11. Указания на литературу (178).

**Глава 7. Эквивалентная линеаризация при двухчастотном входном сигнале. Колебательные сервомеханизмы . . . . . 179**

7.1. Вводные замечания о методе эквивалентной двухчастотной линеаризации. Уравнения баланса для постоянной составляющей (180). 7.2. Эквивалентная передаточная функция для двухчастотного входного сигнала и исследование субгармонических колебаний (183). 7.3. Другие применения эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала (187). 7.4. Определение эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала на основе представления однозначных нелинейностей в интегральной форме (191). 7.5. Колебательные сервомеханизмы (196). 7.6. Краткое содержание (202). 7.7. Задачи для упражнений (203). 7.8. Указания на литературу (204).

**Глава 8. Точные методы анализа релейных систем управления . . . . . 205**

8.1. Переходные процессы в релейной системе при произвольной форме входного сигнала (207). 8.2. Основные уравнения для отыскания периодического движения и условия их существования (208). 8.3. Модифицированное z-преобразование с опережением (210). 8.4. Метод Цыпкина исследования автоколебаний (216). 8.5. Другой способ построения годографа Цыпкина (223). 8.6. Вынужденные колебания в релейных системах управления (225). 8.7. Устойчивость колебаний в релейных системах управления (227). 8.8. Краткое содержание (231). 8.9. Задачи для упражнений (232). 8.10. Указания на литературу (233).

**Глава 9. Устойчивость в большом и второй метод Ляпунова . . . . . 234**

9.1. Функции Ляпунова (234). 9.2. Теоремы об устойчивости в малом для автономных систем (237). 9.3. Теоремы об устойчивости в большом и устойчивости в целом (242). 9.4. Функции Ляпунова для линейных автономных систем (245). 9.5. Задача Лурье (246). 9.6. Применение второго метода Ляпунова к анализу нестационарных систем (250). 9.7. Другие приложения второго метода Ляпунова (255). 9.8. Краткое содержание (258). 9.9. Задачи для упражнений (259). 9.10. Указания на литературу (262).

**Глава 10. Точные методы анализа устойчивости нелинейных систем. Частотный критерий В. М. Попова и его развитие . . . . . 263**

10.1. Некоторые свойства основной системы (264). 10.2. Понятие об асимптотически устойчивом управлении и асимптотически устойчивом выходном сигнале (268). 10.3. Основная теорема и некоторые ее применения (271). 10.4. Условия асимптотической устойчивости в целом (276). 10.5. Степень устойчивости как характеристика демпфирующих свойств системы (277). 10.6. Преобразование сдвига полюсов и круговой критерий (278). 10.7. Преобразование сдвига нулей (288). 10.8. Применение номограмм замыкания при использовании критерия Попова (291). 10.9. Краткое содержание (299). 10.10. Задачи для упражнений (300). 10.11. Указания на литературу (302).

**Глава 11. Анализ устойчивости систем при действии входных сигналов . . . . . 304**

11.1. Лемма Беллмана—Гренвилла и ее применение для анализа устойчивости (305). 11.2. Устойчивость и ограниченность решений линейных нестационарных систем при входных воздействиях (308). 11.3. Практическая устойчивость — устойчивость в малом при ограниченных входном и выходном сигналах (310). 11.4. Устойчивость в целом при ограниченных входном и выходном сигналах одноконтурных систем управления (314). 11.5. Устойчивость вынужденных решений (319). 11.6. Устойчивость периодических решений (323). 11.7. Применение теоремы о неподвижной точке сжатого отображения (327). 11.8. Краткое содержание (334). 11.9. Задачи для упражнений (336). 11.10. Указания на литературу (337).

## Раздел III

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

**Глава 12. Качество и оптимальность . . . . . 339**

12.1. Задачи оптимального управления, формулировки и примеры (341). 12.2. Частотный метод оптимизации линейной стационарной системы (344). 12.3. Решение оптимальных задач с закрепленными крайцами для линейных нестационарных систем (347). 12.4. Задачи оптимального быстрогодействия (349). 12.5. Задачи, оптимальные по расходу топлива (354). 12.6. Некоторые другие типы задач оптимального управления (355). 12.7. Краткое содержание (356). 12.8. Задачи для упражнений (356). 12.9. Указания на литературу (357).

<b>Глава 13. Вариационное исчисление и оптимальное управление . . . . .</b>	<b>358</b>
13.1. Уравнения Эйлера—Лагранжа и другие необходимые условия локального минимума (358). 13.2. Задачи линейного оптимального управления (372). 13.3. Задача управления конечным состоянием. Задача Майера (378). 13.4. Задача оптимального управления с обобщенным показателем качества. Задача Больца (383). 13.5. Задачи с ограничениями типа неравенств (385). 13.6. Краткое содержание (388). 13.7. Задачи для упражнений (389). 13.8. Указания на литературу (391).	
<b>Глава 14. Принцип максимума Понтрягина . . . . .</b>	<b>392</b>
14.1. Решение задачи оптимального быстрогодействия и ее геометрическая интерпретация (393). 14.2. Оптимальное по быстродействию управление линейной системой (397). 14.3. Принцип максимума (400). 14.4 Принцип максимума как достаточное условие оптимальности (409). 14.5. Схема доказательства принципа максимума (409). 14.6. Применение принципа максимума к некоторым классам задач (415). 14.7. Расширение области применения принципа максимума (421). 14.8. Краткое содержание (423). 14.9. Задачи для упражнений (423). 14.10. Указания на литературу (425).	
<b>Глава 15. Динамическое программирование . . . . .</b>	<b>426</b>
15.1. Эвристический подход к решению задач оптимального управления (426). 15.2. Принцип оптимальности (430). 15.3. Динамическое программирование для непрерывных систем. Уравнение Беллмана (432). 15.4. Синтез оптимального управления в системах с линейными объектами и квадратичным критерием качества (436). 15.5. Связь динамического программирования с принципом максимума (443). 15.6. Динамическое программирование для случая, когда производная $\frac{\partial \mathcal{J}^*(x, t)}{\partial x}$ разрывна (447). 15.7. Динамическое программирование как достаточное условие оптимальности (448). 15.8. Краткое содержание (451). 15.9. Задачи для упражнений (452). 15.10. Указания на литературу (454).	
<b>Глава 16. Вырожденные и особые задачи управления . . . . .</b>	<b>455</b>
16.1 Особые задачи оптимального управления (455). 16.2. Вырожденные управления в задаче оптимального быстрогодействия (457). 16.3. Вырожденные управления в оптимальных задачах по расходу топлива (460). 16.4. Вырожденные управления в других оптимальных задачах (462). 16.5. Свойство вырожденных решений (467). 16.6. Необходимое условие оптимальности вырожденных решений (468). 16.7. Краткое содержание (470). 16.8. Задачи для упражнений (471). 16.9. Указания на литературу (472).	
<b>Глава 17. Практическое применение оптимального управления и его возможности . . . . .</b>	<b>473</b>
17.1. Численные методы определения оптимальных решений (474). 17.2. Изучение структуры оптимального управления (486). 17.3. Квазиоптимальные системы управления (489). 17.4. Класс современных систем управления (492). 17.5. Краткое содержание (495). 17.6. Указания на литературу (595).	

## ПРИЛОЖЕНИЯ

<b>Приложение I. Векторы и матрицы . . . . .</b>	<b>497</b>
<b>Приложение II. Обычное <math>z</math>-преобразование и модифицированное <math>z</math>-преобразование с опережением . . . . .</b>	<b>507</b>
<b>Приложение III. Математические основы . . . . .</b>	<b>518</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>531</b>
<b>Литература, добавленная при переводе книги . . . . .</b>	<b>539</b>
<b>Именной указатель . . . . .</b>	<b>542</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>545</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый вниманию читателей перевод книги известных американских ученых Д. Сю и А. Мейера «Современная теория автоматического управления и ее применение» вызовет значительный интерес у научных работников, инженеров и аспирантов, занимающихся теорией автоматического управления. По сути дела эта книга является одной из первых, где систематически и в доступной форме изложены методы представления уравнений динамики систем управления с помощью переменных состояния и способы их решения; точные и приближенные методы анализа устойчивости нелинейных систем управления; основы теории оптимальных систем, использующие классические начала вариационного исчисления, принцип максимума Понтрягина и динамического программирования Беллмана. Большое внимание уделяют авторы книги частотным методам анализа устойчивости нелинейных систем, а также определению области их устойчивости при действии входных сигналов. Наряду с классическими методами теории оптимальных систем излагаются вопросы особых, вырожденных и квазиоптимальных задач управления.

Весь материал книги расположен в порядке возрастающей трудности. В первых главах применяется математический аппарат, широко распространенный в теории автоматического регулирования. В последующих главах используется современный математический аппарат теории множеств, линейных векторных пространств, функционального анализа и теории импульсных систем управления. Для тех, кто недостаточно знаком с этими разделами математики, приведены приложения I—III\*, где даны основные положения теории матриц, обычного и модифицированного  $z$ -преобразований и функционального анализа.

Книга снабжена большим количеством примеров расчета систем автоматического управления, часть из которых представляет самостоятельный интерес. Для более углубленного изучения материала в конце каждой главы приведены задачи для самостоятельных упражнений. Общее количество таких задач составляет более двухсот.

В конце каждой главы авторы дают обзор литературы с изложением оригинальных работ в рассматриваемых направлениях. Все это безусловно повышает ценность данной книги.

---

\* Приложения см. в конце книги (стр. 497).

При переводе книги были устранены отдельные опечатки и неточности; некоторые обозначения и термины заменены общепринятыми в отечественной литературе. Был также добавлен список литературы за счет наиболее интересных и оригинальных работ, изданных в СССР.

Книга представляет собой обработанный курс лекций, прочитанный авторами для специалистов компании «Белл», аспирантам и студентам Ньюаркского инженерного колледжа и университета штата Юта. Она написана простым и ясным языком и предназначена для широкого круга научно-технических работников, занимающихся вопросами автоматического управления в различных областях техники.

*Ю. ТОПЧЕЕВ*



## ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга предназначена для читателей, желающих достаточно подробно ознакомиться с прикладной стороной современной теории автоматического управления без трудоемкой проработки огромного числа публикаций в этой области.

В настоящее время существует мнение, что для изучения новых вопросов теории автоматического управления необходимо прежде всего хорошо овладеть современными разделами математики. Но это справедливо лишь до некоторой степени. Хотя ничем нельзя заменить строгие математические доказательства, но нам все же кажется, что существо новых теорий можно донести до читателя, не погружаясь глубоко в специальную математическую терминологию. На протяжении первых глав мы намеренно избегали пользоваться теориями множеств, линейных векторных пространств и др. Вместо этого в соответствующих местах текста вводятся необходимые математические понятия, что позволяет глубже уяснить роль этих понятий при решении конкретных задач.

Изложение материала ведется, как правило, на эвристической основе, которая подкрепляется необходимыми математическими выкладками. Но там, где это действительно требовалось, мы без всяких компромиссов привлекали строгий математический аппарат. В порядке следования глав математический уровень изложения постепенно нарастает, и наиболее трудный материал приходится на последнюю часть книги.

Книга адресована широкому кругу инженеров, аспирантов и студентов, всем желающим овладеть современной теорией автоматического управления. Материалом для нее послужил курс лекций, прочитанный авторами для сотрудников компании «Белл», а позднее — в Ньюаркском инженерном колледже и в университете штата Юта.

Наиболее важными понятиями теории автоматического управления являются понятия устойчивости и качества. Общеизвестен тот факт, что при достаточно высоком коэффициенте усиления разомкнутой системы замкнутая система даже при отсутствии входного сигнала неустойчива. Если все звенья системы работают на линейных участках своих характеристик, то условия возникновения неустойчивости хорошо известны. Однако этого нельзя сказать в отношении нелинейных систем, поэтому изложение новых теорий, позволяющих исследовать устойчивость некоторых классов нелинейных систем, является одним из основных направлений данной книги.

Даже для случая линейных систем среди конструкторов нет единого мнения, какую систему следует считать хорошей. Этот вопрос часто сводится к разработке критериев качества (на практике одного критерия бывает недостаточно). Современная теория оптимальных систем ограничивает эту дискуссию, ставя вопрос по-иному. А именно, принимается некоторый подходящий

критерий качества и ищется методом синтеза система управления, в наилучшей мере удовлетворяющая этому критерию. Если эта система с инженерной точки зрения не вполне приемлема, то она все же представляет собой важный шаг в решении задачи, так как указывает направление, в котором следует вести разработку. Вопросы теории оптимальных систем рассматриваются в книге достаточно глубоко. При этом особое внимание уделяется преимуществам и недостаткам соответствующих теорий в их практическом использовании.

Характерная особенность нашего изложения заключается в показе целесообразности обращаться при исследовании нелинейных систем к частотным методам. Интерес к частотным методам в теоретическом плане заметно ослабел, когда инженеры «переоткрыли» метод исследования с помощью фазового пространства. Однако они вскоре поняли, что большинство нелинейных систем содержат линейную часть с постоянными параметрами. Поэтому при использовании для линейной части частотных представлений оказалось возможным получить новые результаты и лучше понять физику явлений. Так, В. М. Попов и другие авторы получили в частотной области новые критерии устойчивости. В теории оптимальных систем также разработаны новые эффективные способы исследования в частотной области.

Важным преимуществом частотных методов в случае линейных систем с постоянными параметрами является развиваемая ими интуиция у конструктора в оценке свойств системы. Мы старались показать, как эту интуицию можно использовать и для оценки свойств нелинейной системы.

Главными предпосылками для усвоения излагаемого материала являются знакомство с курсом линейной теории автоматического регулирования и некоторые познания в области дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного\*. У читателя мы предполагали уровень подготовки, близкий к уровню знаний аспиранта первого года обучения. Для изучения книги желательны знание теории матриц, вариационного исчисления и теории импульсных систем автоматического управления, но если читателю эти разделы математики не знакомы, он сможет работать с книгой, пользуясь ее приложениями.

Где это представлялось возможным, мы пытались делиться с читателем нашим практическим опытом. С этой целью в дополнение ко многим замечаниям по тексту включено большое число примеров. Они подкрепляются задачами для упражнений различной степени трудности. ■

---

\* Читатель может ознакомиться с теорией автоматического регулирования по следующим книгам: 1) Техническая кибернетика. Под ред. В. В. Солодовникова. Теория автоматического регулирования. Книги 1, 2, «Машиностроение», М., 1967; книга 3, «Машиностроение», М., 1969.

2) Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, М., 1962.

3) Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. «Наука», М., 1966.

4) Кузовков Н. Т. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. «Машиностроение», М., 1968.

С теорией дифференциальных уравнений можно ознакомиться по книгам:

1) Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, М., 1962.

2) Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. «Наука», М., 1966.

С теорией функций комплексного переменного можно ознакомиться по книгам:

1) Фукс Б. А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. «Физматгиз», 1969.

2) Еграфов М. А. Аналитические функции. «Наука», М., 1968 (Прим. ред.).

Из-за недостатка места две темы в настоящей книге, к сожалению, не рассмотрены. Одна из них — дискретные системы, а другая — системы со случайными сигналами и параметрами. С отсутствием первой темы в какой-то мере можно примириться, так как с некоторой натяжкой результаты, справедливые для непрерывных систем, можно распространить и на дискретные системы. Отсутствие второй темы — более серьезное обстоятельство, так как на практике системы, свободные от случайных сигналов и параметров, не встречаются. Однако задачи, относящиеся к таким системам, чрезвычайно трудны, так что ясное понимание систем без случайных факторов является необходимой предпосылкой изучения систем со случайными факторами. Мы полагаем, что тематика, выбранная для рассмотрения в книге, создает необходимую базу для изучения систем со случайными сигналами и параметрами.

Но даже и при указанном исключении из рассмотрения обширной тематики осветить все важные вопросы нелинейной теории детерминированных систем не представляется возможным. Поэтому мы старались расширить круг этих вопросов за счет примечаний, сносок и задач для упражнений. С учетом характера рассматриваемых тем и манеры изложения решения хотя бы некоторых примеров, приводимых для упражнений, следует расценивать как неотъемлемую часть усилий по изучению предлагаемого материала.

Чтобы читатель активно рассуждал вместе с авторами, текст обильно пересыпан обращениями к читателю («почему», . . ., «покажите, что» и т. д.). Эти обращения предназначены для проверки усвоения читателем материала, и в большинстве случаев ответы на них не являются трудными.

Литература приводится в конце книги, причем соответствующие ссылки даны в тексте цифрами, заключенными в скобки. Ссылки разделяются на две категории. Непосредственно относящиеся к основному материалу главы приводятся вместе с краткой аннотацией в конце этой главы. Более специальные работы указываются в сносках. Такая система ссылок находится в соответствии с нашим намерением ввести читателя в круг задач современной теории автоматического управления, потребовав наименьших усилий с его стороны. Приводимый список литературы не претендует на полноту.

Мы признательны многим лицам, оказавшим нам помощь при подготовке текста. Особую благодарность приносим нашим коллегам Г. А. Форду, В. С. Граммелю, Х. Хеффесу, Дж. М. Хольцману, С. Хорингу, С. Х. Кингу, И. С. Лиму, Дж. С. Лозьеру, В. О. Мэрви, М. А. Мюррей-Лассо, Дж. А. Стайлзу, Х. С. Тонгу, П. П. Янгу и Х. С. Витценхаузену за ценные замечания. Мы благодарны С. Акселби и Дж. Г. Тракселу за тщательный просмотр книги и многочисленные советы. Мы отдаем должное нашим слушателям из телефонной лаборатории компании «Белл», Ньюаркского инженерного колледжа и университета штата Юта, так как их острые вопросы способствовали улучшению изложения материала. Мы обязаны миссис Гертруде Мартин, прочитавшей гранки всей книги и оказавшей неоценимую помощь при ее редактировании, мисс Нэнси Кэмпбел и ее группе машинисток математического текста, в особенности мисс Норме Локвуд, квалифицированно выполнившим печатание рукописи, а также С. В. Кристу и его сотрудикам, подготовившим иллюстративный материал.

*Джей С. Сю  
Андрю У. Мейер*

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\equiv$  — равный тождественно (стр. 43) \*.

$\approx$  — приближенное равенство (стр. 141).

$\triangleq$  — по определению (стр. 29).

$|a|$  — абсолютное значение скалярной величины  $a$  (стр. 50).

$|x|$  — норма вектора  $x$  (стр. 48).

$\|A\|$  — норма матрицы  $A$  (стр. 135).

$\hat{x}$  — амплитуда синусоидального сигнала  $x(t)$  (стр. 141).

$\in$  — знак принадлежности (стр. 265).

$\text{sign}[x(t)]$  — знак функции  $x(t)$  (стр. 80).

$\text{sat}[x(t)]$  — соответствует функции (стр. 450)  $\begin{cases} +1 & \text{при } x > 1; \\ x & \text{при } |x| \leq 1; \\ -1 & \text{при } x < -1. \end{cases}$

$\text{dez}[x(t)]$  — соответствует функции (стр. 415)  $\begin{cases} +1 & \text{при } x > 1; \\ 0 & \text{при } -1 < x < 1; \\ -1 & \text{при } x < -1. \end{cases}$

$\arg z$  — угол, определяющий значение фазы комплексного числа  $a + jb$ , тангенс которого  $\text{tg } z = \frac{b}{a}$  (стр. 164).

$\overline{x(t)}$  — среднее значение величины  $x(t)$  (стр. 157).

$\nabla V(x)$  — градиент функции  $V(x)$ , обозначаемый также через  $\text{grad} V(x)$  (стр. 235).

$\sum$  — знак суммирования (стр. 30).

$\prod$  — знак произведения (стр. 36).

$\text{Re}[z]$  — действительная часть комплексной переменной  $z$  (стр. 144).

$\text{Im}[z]$  — мнимая часть комплексной переменной  $z$  (стр. 144).

$\{x : x \in A\}$  — множество всех значений  $x$ , принадлежащих  $A$  (стр. 394).

$\frac{df}{dx}$  — матрица Якоби (стр. 116).

$\frac{\partial H}{\partial x}$  — вектор,  $i$ -я компонента которого равна  $\frac{\partial H}{\partial x_i}$  (стр. 432).

$\min[a, b]$  — наименьшее из значений  $a$  или  $b$  (стр. 50).

$\max_{t_1 \leq t \leq t_2} [x(t)]$  — наибольшее значение функции  $x(t)$  на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_2$  (стр. 328).

$\mu_{-1}(t)$  — единичная ступенчатая функция, равная нулю при  $t < 0$  и равная 1 при  $t \geq 0$  (стр. 207).

$\mu_0(t)$  — единичная импульсная функция, равная нулю при  $t \neq 0$  (стр. 55).

# Раздел I

## ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ



### СОВРЕМЕННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

### ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

### СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

## СОВРЕМЕННЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Начавшаяся эра освоения человечеством космического пространства привела к созданию целого ряда нелинейных систем автоматического управления для космических летательных аппаратов. Расчеты и проектирование такого рода систем представляют значительные трудности. Поэтому при проектировании инженер часто полагается на свою интуицию и свои знания в других областях науки и техники. Однако теория автоматического управления неуклонно развивается за счет совершенствования ее математического аппарата. И современный инженер должен овладевать новыми разделами математики, хорошо понимая при этом физическую сущность работы нелинейной системы и ее элементов. Большие возможности в проектировании нелинейных систем имеют цифровые, аналоговые и комбинированные (аналогово-цифровые) вычислительные машины. Современный инженер должен также хорошо знать такие математические методы программирования, как электротехнику, радиотехнику, электронику.

### 1.1. РОЛЬ МАТЕМАТИКИ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время в теории управления наблюдаются две наиболее характерные тенденции: это все возрастающий интерес инженеров к отдельным разделам математики и усиливающийся интерес самих математиков к задачам управления. Появляется большое число публикаций, связанных с задачами управления, представляющих самостоятельный интерес для математиков. Многие хорошо известные результаты пересматриваются специалистами по теории управления заново, а, в свою очередь, математики разрабатывают новые методы, специально приспособленные для решения задач управления. При этом изящество математических построений не должно быть самоцелью. Важнее показать те преимущества, которые могут извлечь инженеры из уже имеющихся результатов математической теории. Если инженер видит, что к поставленной задаче применимы известные математические результаты, то вопрос проектирования системы управления решается более успешно. Но при этом остается одна трудность — описать систему математически.

При описании систем инженер часто прибегает к эксперименту, где опыт и физическая интуиция играют более важную роль, нежели дедуктивные умозаключения. Даже в том случае, когда математическое описание системы завершено в такой степени, что могут быть использованы известные математические результаты, эксперимент и ясный физический смысл оказывают неоценимую услугу в дальнейшей разработке конкретных методов решения

поставленной задачи. Поэтому инженерам следует рекомендовать приспособлять задачу к методу, а не наоборот, так как уверенность в правильности математической постановки — это уже результат, а не только средство его достижения. Такой подход, как правило, чрезвычайно трудоемок и не всегда справедлив, поскольку определяется уровнем так называемой «инженерной интуиции».

Какова же в таком случае роль математики при проектировании и исследовании систем управления? Математика, с точки зрения инженера, это не что иное, как последовательность полезных правил. Эти правила можно успешно использовать, если четко представлять границы их применимости. Когда система описана полностью, то математики могут судить об устойчивости и показателях качества системы в данных конкретных условиях ее работы. Иногда оказывается возможным определить наилучшую систему по отношению к заданному критерию качества. Нет сомнения, что для применения всех этих полезных правил исследователь должен хорошо ориентироваться в широком круге современных математических проблем.

В предлагаемой книге используется следующий математический аппарат: векторно-матричный — для анализа динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями<sup>1</sup>; некоторые топологические положения для рассмотрения оптимальных задач и вопросов устойчивости<sup>2</sup>; приближенные вычисления, основанные на методах Рунге и Галеркина<sup>3</sup>; метод модифицированного  $z$ -преобразования<sup>4</sup>; элементы функционального анализа<sup>5</sup>; основы вариационного исчисления<sup>6</sup> и его двух современных направлений — принципа максимума<sup>7</sup> и динамического программирования<sup>8</sup> и, наконец, некоторые численные методы, связанные с хорошо зарекомендовавшими себя методами Ньютона и Раффсона и методом наискорейшего спуска.

Значение того или иного математического метода определяется тем, насколько он позволяет продвинуться в решении поставленной задачи. Иногда, при применении нового метода становится яснее какая-то сторона задачи, и на этой основе возникает эффективный способ ее решения. Поэтому там, где это возможно, мы даем сразу несколько способов решения одной и той же задачи. Другая важная сторона при рассмотрении того или иного математического приема — это указание границ его применимости. Мы предпринимаем серьезную попытку в этом направлении, понимая, что только так можно правильно осветить истинные возможности теории управления.

## § 1.2. ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В дальнейшем будем рассматривать системы управления, динамика которых хорошо описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями  $n$ -го порядка. Если в состав системы входит линейное устройство, то соотно-

---

С математическим аппаратом, используемым в этой книге, читатель может ознакомиться в следующих книгах:

<sup>1</sup> Ш и л о в Г. Е. Введение в теорию линейных пространств. Гостехиздат, 1956.

<sup>2</sup> А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Х а й к и н С. Э. Теория колебаний. Физматгиз, 1959.

<sup>3</sup> Б е р е з и н И. С., Ж и д к о в Н. П. Методы вычислений, т. 1, 2. Физматгиз, 1962.

<sup>4</sup> Ц ы п к и н Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963.

<sup>5</sup> К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд-во «Наука», М., 1968.

<sup>6</sup> Г е л ь ф а н д И. М., Ф о м и н С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.

<sup>7</sup> Б о л т я н с к и й Б. Г. Математические методы оптимального управления. Изд-во «Наука», М., 1969.

<sup>8</sup> Б е л л м а н Р. Динамическое программирование. Изд-во иностр. лит., М., 1960 (Прим. ред.).

шение между его выходным и входным сигналами можно представить с помощью импульсной переходной функции, а следовательно, всю систему управления описать интегральным уравнением. Это позволяет нам рассматривать как линейную систему, например, линию электропередач, описание которой задается линейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

Линейные системы имеют целый ряд преимуществ, позволяющих достаточно просто описать их поведение, и самое важное, что для них справедлив принцип суперпозиции, предполагающий выполнение свойств аддитивности и однородности как по входному сигналу, так и по начальным условиям\*. Принцип суперпозиции позволяет считать, что линейная система по отношению к произвольным начальным условиям может быть:

- а) устойчивой, когда выходной сигнал, уменьшаясь, стремится к нулю;
- б) неустойчивой, когда выходная величина неограниченно растет;
- в) колебательной, когда на выходе имеют место колебания, амплитуда которых пропорциональна величине начальных отклонений.

Важным подклассом линейных систем являются стационарные системы. У них связь между входным и выходным сигналами не изменяется с течением времени, а это значит, что, если при нулевых начальных условиях сигнал  $r(t)$  вызывает реакцию  $y(t)$ , то  $r(t - T)$  вызывает  $y(t - T)$  при любом фиксированном  $T$ . Ввиду этого свойства линейные стационарные системы могут быть достаточно просто проанализированы с привлечением преобразования Лапласа. Хорошо известные частотные методы составляют основное средство анализа, хотя при этом их можно с успехом дополнить методами анализа во временной области. Среди линейных стационарных систем следует выделить системы, динамика которых описывается обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Следует отметить, что линейные стационарные системы — это единственные системы, для анализа которых развита общая математическая теория.

Когда мы подходим к изучению более сложных систем, в частности нелинейных, положение дел не так удовлетворительно. Начиная с 50-х годов, были развиты некоторые эффективные подходы к решению нелинейных задач. Однако практическая ценность полученных результатов в значительной степени ограничена. Отметим, что наиболее важные результаты касаются систем, сводимых к одноконтурным, часть элементов которых линейна. Блок-схема такой системы показана на рис. 1.1, а. Ограничения, налагаемые на нелинейную часть такой системы, определяются тем, какой результат требуется, — приближенный или точный, количественный или качественный. Во многих случаях нелинейная часть — это либо коэффициент усиления, либо реле, реагирующее на сигнал ошибки системы (рис. 1.1, б). В тех же случаях, когда решение ищется в виде последовательных приближений, нелинейный элемент может иметь более общий вид.

Результаты теории не налагают на линейную часть системы никаких ограничений, хотя на практике из-за вычислительных трудностей часто в качестве линейной части рассматривается динамическое звено низкого порядка.

---

\* Система аддитивна по входному сигналу, если при нулевых начальных условиях входной сигнал  $r_1(t)$  вызывает на выходе реакцию  $y_1(t)$ , а сигнал  $r_2(t)$  определяет выходной сигнал  $y_2(t)$ , и при этом входной сигнал  $r_1(t) + r_2(t)$  приводит к выходному сигналу  $y_1(t) + y_2(t)$ . Система однородна по входному сигналу, если при нулевых начальных условиях входной сигнал  $r_1(t)$  вызывает сигнал  $y_1(t)$ , а  $kr_1(t)$  определяет на выходе  $ky_1(t)$  при любом действительном  $k$  (эти два свойства неэквивалентны, см. [206]). Определение системы, которая аддитивна и однородна по отношению к начальным условиям, следует непосредственно из вышесказанного.



Вообще говоря, если в процессе проектирования предусматривается применение методов синтеза во временной области, то требуемый объем вычислений быстро увеличивается с ростом порядка системы, и существует граница, выше которой применять указанный подход нецелесообразно. Если же решение ищется частотными методами, то вычислительные трудности увеличиваются значительно медленнее с ростом порядка системы, и поэтому систему высокого порядка следует изучать, используя частотные методы.

В инженерной практике метод эквивалентных частотных характеристик всегда играл важную роль при оценке качественной картины решения. Однако недавно был разработан целый ряд методов получения точного решения нелинейной задачи в частотной области, в основу которых положен оригинальный результат В. М. Попова, изложенный в гл. 10 и 11. Необходимо

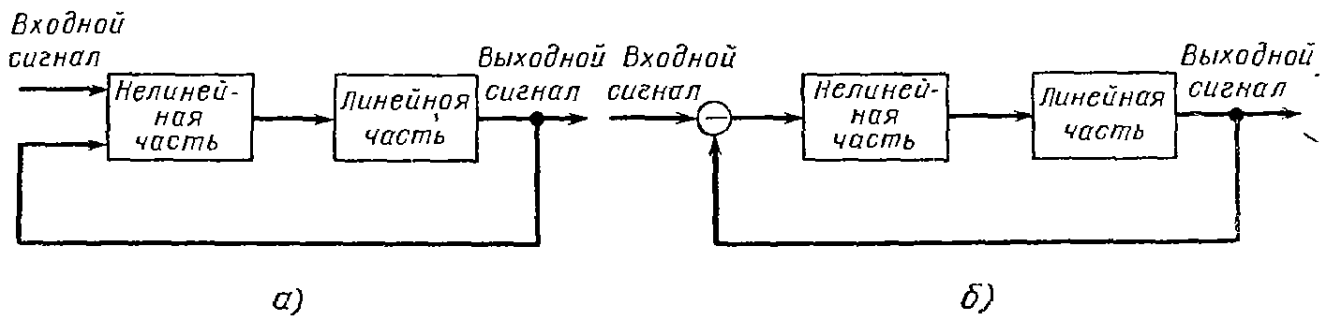


Рис. 1.1. Схемы систем управления с линейными элементами:

а — блок-схема; б — структурная схема

отметить, что такой подход имеет традиционные преимущества над методами, оперирующими во временной области, а именно: простоту использования, отсутствие вычислительных трудностей даже для систем высокого порядка и, наконец, удобство понимания существа задачи.

У читателя может возникнуть вопрос: почему же анализ нелинейных систем развивается столь медленно? Ответ заключается в том, что существует слишком много случаев, когда нелинейная система «ведет себя не так, как надо». Перечислим некоторые из них.

1. Неограниченность реакции на конечном интервале времени. Выходной сигнал неустойчивой линейной системы неограниченно растет, когда время стремится к бесконечности, в то время как в нелинейной системе выходная реакция может стремиться к бесконечности на конечном интервале. Нетрудно видеть, что выходной сигнал системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка вида  $\dot{x} = x^2$  с начальным условием  $x(0) = x_0$ , будет стремиться к бесконечности при  $t = \frac{1}{x_0}$ .

2. Состояние равновесия в нелинейных системах  $x$ . Выходной сигнал устойчивой линейной системы в отсутствие входного воздействия неизбежно стремится к нулю. Это совсем не обязательно для нелинейных систем. Например, триггер имеет лишь одно устойчивое состояние независимо от начальных условий. Можно привести пример, когда существует целая зона равновесных состояний, и система может находиться в любом из них.

3. Предельный цикл. Для того чтобы в линейной стационарной системе существовали незатухающие колебания, пара полюсов должна располагаться на мнимой оси. Амплитуда колебаний в этом случае определяется начальными условиями. В нелинейных системах колебания имеют определенную амплитуду и частоту независимо от начальных условий.

Такие колебания характеризуют предельный цикл. Следует отметить, что устойчивые колебания всегда связаны с предельным циклом.

4. **Субгармонические, гармонические или почти периодические колебания при гармоническом входном сигнале.** В устойчивой линейной системе синусоидальный входной сигнал определяет выходной сигнал той же частоты. Поведение нелинейной системы при синусоидальном входном сигнале может быть совершенно иным. Поскольку на выходе нелинейного элемента могут иметь место дополнительные гармоники, то частота выходного сигнала кратна частоте входного. Иногда в таких системах возникают субгармонические колебания, когда период выходного сигнала кратен периоду входного (т. е. частота сигнала на выходе во много раз ниже частоты сигнала на входе). Еще больший интерес представляет возможность возникновения в некоторых нелинейных системах почти периодических движений при синусоидальном сигнале на входе.

5. **Неоднозначность поведения.** В некоторых нелинейных системах при отсутствии входного воздействия выходной сигнал в зависимости от начальных условий стремится к одному или нескольким устойчивым состояниям, или к предельному циклу. Кроме того, в системе может существовать несколько предельных циклов. Для систем, на входе которых действует гармонический сигнал, выходной сигнал может представлять гармонические, субгармонические либо почти периодические колебания в зависимости от амплитуды и частоты входного сигнала. Неоднозначность поведения проявляется также за счет явлений, указанных в пунктах 6—8.

6. **Скачкообразный резонанс.** В некоторых нелинейных системах при периодическом входном сигнале, когда амплитуда и частота этого сигнала плавно изменяются, на выходе наблюдается скачок амплитуды. Такое явление называется явлением скачкообразного резонанса.

7. **Синхронизация, или явление захвата частоты.** Когда нелинейная система управляется синусоидальным входным сигналом малой амплитуды, на выходе возникают колебания кратной частоты. При увеличении входного сигнала существует момент, когда частота выходного сигнала скачком уменьшается до частоты входного. Это явление используется, например, в телевизионных приемниках.

8. **Скачкообразный резонанс по амплитуде и частоте.** В нелинейных системах может наблюдаться явление скачкообразного изменения как амплитуды, так и частоты выходного сигнала.

### 1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Очень часто поведение системы описывается лишь двумя словами: система устойчива. Устойчивость системы означает, что малые изменения входного сигнала, начальных условий или параметров системы не приводят к значительным отклонениям выходной координаты. Вообще говоря, это минимальное требование, которому должна удовлетворять система.

Устойчивость линейных стационарных систем определяется и анализируется сравнительно просто. Существующие для этих целей критерии устойчивости Рауса и Гурвица обеспечивают не только необходимые, но и достаточные условия устойчивости. Если линейная стационарная система удовлетворяет условиям устойчивости, то это означает, что, во-первых, при отсутствии входного сигнала выходной стремится к нулю независимо от величины начальных условий и, во-вторых, когда вход системы ограничен, то выходная реакция также ограничена.

В нелинейных системах может быть несколько равновесных состояний и наблюдаются другие необычные явления, поэтому понятие устойчивости

для них определяется не так просто. Более того, устойчивость при наличии или отсутствии выходного сигнала — это два совершенно различных понятия. Поскольку устойчивость — почти всегда необходимая предпосылка для получения желаемого качества процессов управления, то всю первую часть книги мы посвятим изучению этого свойства.

Определив, исходя из условий устойчивости, возможный диапазон изменения параметров, можно затем улучшить качество системы в известных пределах. При этом возникает совершенно новая область исследований, к которой относятся оптимальные системы. Данному направлению будет посвящена большая часть второй половины книги. Основная масса пригодных для практики результатов получена в области оптимального управления линейными стационарными системами при относительно простом условии — ограниченности управляющего сигнала. Был предложен ряд вычислительных алгоритмов для отыскания особых решений в системах более общего вида, но эффективность этих методов еще полностью не оценена.

Оптимальные системы полезны и в том отношении, что они определяют эталон, по которому следует сравнивать проектируемые системы. Такое сравнение позволяет инженеру наметить правильные пути улучшения предлагаемой системы. Во второй части книги делается попытка дать справедливую оценку значимости и состоянию развития оптимальных систем управления.

#### **1.4. СИСТЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА**

Современному инженеру приходится иметь дело с системами, для описания которых необходимо вводить сотни и тысячи переменных. Иногда стремятся показать, что анализ сложных систем можно проводить теми же методами, которые развиты для простых систем. Это неверно, так как анализ систем высокого порядка вызывает дополнительные осложнения, возникновение которых почти невозможно предвидеть, когда анализируются лишь системы низкого порядка. Таким образом, проблема размерности проявляется в большей степени, чем это представляется на первый взгляд.

Именно необходимость рассчитывать системы высокого порядка определяет два подхода: академический и инженерный. Академический подход сводится к тому, что действительные объекты заменяются моделями, описываемыми уравнениями низкого порядка. Однако часто оказывается, что таким образом спроектированная система неидентична действительной. И все-таки при том ограниченном запасе методов, которыми мы располагаем, системы высокого порядка рассчитывать можно и притом успешно. По крайней мере, если существо метода найдено правильно, то анализ систем высокого порядка зачастую становится возможным. В этом-то и заключается инженерный подход.

Рассмотрим указанный вопрос применительно к задачам, затронутым в книге. Прежде всего хорошо известно, что проблема устойчивости всегда вызывает споры, а дать точное определение устойчивости для сложной системы еще труднее. В распоряжении у инженера имеется много точных методов, основанных на втором методе Ляпунова и методе В. М. Попова, которые дают возможность оценить степень устойчивости во многих простых задачах. Здесь долг инженера — приблизить точные результаты к тем, которые можно получить, используя приближенные методы (например, к результатам, которые найдены с помощью метода гармонической линеаризации). А на практике инженер может испробовать различные приближенные методы так, как это сделано в гл. 6.

Отметим, что если порядок системы достаточно высок, то нецелесообразно и невозможно оптимизировать систему. Однако все-таки можно попытаться улучшить ее качество путем понижения размерности задачи. Иногда даже удается оценить, в какой мере можно повысить качество системы. Поскольку бывает трудно ввести критерий качества, который учитывает все требования, предъявляемые к системе, часто отдается предпочтение квазиоптимальному управлению.

В заключение следует сказать, что при синтезе систем высокого порядка необходимо понять существо задачи, а не выписывать современные теории. С этой точки зрения должное сочетание точных и приближенных методов может дать весьма эффективный порядок синтеза систем автоматического управления.

### 1.5. РОЛЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН В ПРАКТИКЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Век освоения космоса открывает эру широкого использования больших вычислительных машин как аналоговых, так и цифровых. Инженер, работающий в области управления, несомненно, получает большую пользу от имеющихся в его распоряжении вычислительных устройств, применяя их для проектирования систем управления. Однако на машины не следует слепо полагаться. Ошибки в программировании приводят к ошибкам и в результатах. Это наиболее очевидная опасность, часто встречающаяся на практике. При счете на цифровых машинах достаточно просто ошибиться в выборе метода интегрирования, а при моделировании на аналоговых машинах заранее неизвестна форма сигналов. Поэтому весьма полезен тщательный анализ проведения всего процесса моделирования системы. Даже в том случае, если система промоделирована правильно, инженер получает возможность реализовать лишь отдельные решения задачи, зависящие от начальных условий и вида входного сигнала. Поэтому, чтобы быть уверенным в том, что в процессе нормальной эксплуатации системы ее поведение соответствует действительности, необходимо накопить большой экспериментальный материал\*.

Дискуссия об эффективности применения вычислительных машин постепенно сокращается. Сейчас ни у кого не вызывает сомнения, что для управления нужны не только устройства, работающие в ускоренном масштабе времени, но и в ряде случаев вычислительная машина в контуре управления. Распространенное мнение о том, что развитие вычислительных машин с перестраиваемой структурой отстает от развития машин с фиксированной структурой, не может оставаться неизменным, так как оно свидетельствует лишь о слабом применении автоматизации программирования.

Особенно эффективно применение вычислительных машин для моделирования. Почти наверное, любая сложная система, которая встречается на практике, будет неприемлема для точного анализа, но ее можно промоделировать, а затем анализировать методом последовательных приближений. По крайней мере, опытный инженер, хорошо знакомый с методами анализа нелинейных систем, может осуществить исключительно эффективное сочетание аналитических методов и математического моделирования. Развивающийся таким образом процесс научного поиска будет носить индуктивный характер, а процесс исследования будет экспериментальным.

---

\* В последнее время для этих целей стал применяться метод статистического моделирования систем управления на цифровых или комбинированных вычислительных машинах, охватывающих все режимы эксплуатации системы (нормальные и аварийные) (Прим. ред.).

Совершенно неотделимо от процессов моделирования использование машин для вычислительных целей. Сейчас с помощью вычислительных машин можно строить корневые годографы, диаграммы Найквиста и Боде для линейных стационарных систем высокого порядка. Вычислительные устройства строят графики и правят рукописи; универсальные устройства при работе в ускоренном масштабе времени позволяют инженерам производить вычисления прямо в контуре. Такого рода управляющие устройства исключительно удобны в оптимальных контурах управления, где, как правило, необходимо выполнять итеративные операции счета.

Можно с уверенностью сказать, что разумное применение машин лишь начинается. Большие возможности заложены в создании систем, где вычислительное устройство является неотъемлемой частью контура управления. Такие системы могут существенно расширить диапазон применения автоматических систем. Это та область, в которой, наконец, могут быть реализованы многие результаты теории оптимального управления.

Вычислительные устройства удобнее всего использовать в системах:

- а) для предсказания входного сигнала;
- б) для моделирования объекта управления в ускоренном масштабе времени;
- в) для проведения необходимых расчетов по адаптации системы к изменяющемуся входному сигналу.

Системы последнего типа уже существуют, и мы рассмотрим их в гл. 17.

## 1.6. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Интересно проследить хронологическое и историческое развитие теории автоматического управления<sup>1</sup>. Основные результаты теории были получены еще до второй мировой войны, а широкое их практическое применение для расчета линейных систем автоматического регулирования началось несколько позже. В 1950 г. после завершения разработки метода корневого годографа построение теории для линейных стационарных одномерных систем было в основном закончено<sup>2</sup>. Что же касается аналитических методов расчета нелинейных систем, то к этому времени они лишь зарождались. Использовался только метод фазовой плоскости, приспособленный для анализа систем второго порядка; кроме того, были отдельные попытки применить приближенные методы, например, метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова для анализа нелинейных систем. К началу 50-х годов, по крайней мере, пять представителей в различных странах добились успеха в разработке приближенных методов расчета замкнутых систем. В результате этих работ был

<sup>1</sup> Предлагаемый вниманию читателей краткий исторический очерк развития теории автоматического управления не охватывает даже ее основные этапы. Как известно [210], [286], развитие этой замечательной науки началось еще в прошлом столетии, когда выдающиеся русские ученые И. А. Вышнеградский и А. М. Ляпунов заложили строгие математические основы теории автоматического регулирования [286] — науки, которая стала основополагающей для теории управления. Первый этап развития теории управления, заключающийся в решении проблемы устойчивости линейных систем, был завершен еще до начала второй мировой войны. К моменту ее окончания был закончен и второй этап, заключающийся в решении проблем качества и точности процессов управления. Третий этап, посвященный методам синтеза систем управления, стал формироваться только в 50—60-х годах и до сих пор не получил своего полного завершения. Более подробно с историей развития теории автоматического регулирования в СССР можно ознакомиться по книге «Техническая кибернетика». Книга 1, под ред. В. В. Солодовникова. «Машиностроение». М., 1967 (Прим. ред.).

<sup>2</sup> Теория многомерных линейных систем управления практически еще не разработана.

создан метод гармонической линеаризации \*, который и в настоящее время остается одним из самых удобных в инженерной практике. В то же время Я. З. Цыпкин \*\* в Советском Союзе и Хамель \*\*\* во Франции сумели в достаточной степени завершить разработку теории релейных систем.

В эти же годы в США внимание ученых привлекла работа А. М. Ляпунова, выполненная еще в 90-х годах прошлого столетия; особое внимание привлек к себе второй метод Ляпунова. Вслед за этим в США стали активно переводить и изучать советскую литературу по математике и теории управления. Стало ясно, что советские ученые всегда уделяли работе А. М. Ляпунова большое внимание \*\*\*\*. Тем временем в области оптимальных систем разрабатывались два совершенно новых подхода. Это метод динамического программирования Беллмана в США и принцип максимума Понтрягина в СССР \*\*\*\*\*. Оба принципа были сформулированы и разработаны в 1956 г. \*\*\*\*\*.

В 1959 г. румынский ученый В. М. Попов разработал точный метод анализа устойчивости одного класса нелинейных систем в частотной области. Этот подход вместе с его последующими разработками вновь привлек внимание ученых и инженеров к частотным методам. Одновременно польский ученый Р. Куликовский и другие исследователи предприняли попытку использовать методы функционального анализа для изучения систем управления, чем внесли существенный вклад в развитие оптимального управления. Сандберг и Зеймс применили функциональный анализ для изучения устойчивости и получили важные результаты.

\* Метод гармонической линеаризации или гармонического баланса Крылова—Боголюбова основан на использовании асимптотических разложений, представляющих развитие теории возмущений. Теоретической основой этого метода являются работы: 1) К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н. Основные проблемы нелинейной механики. Изв. АН УССР, 1933, № 4; 2) К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н. Новые методы нелинейной механики и их применение к изучению работы электронных генераторов. М., ОНТИ, 1934; 3) К р ы л о в Н. М., Б о г о л ю б о в Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд. АН УССР, Киев, 1937. Дальнейшее развитие этих методов в СССР принадлежит Е. П. Попову и Л. С. Гольдфарбу. См. например, П о п о в Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, М., 1954. П о п о в Е. П., П а л ь т о в И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, М., 1960. Г о л ь д ф а р б Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика, т. VIII, 1947, № 5. За рубежом к первым работам по гармонической линеаризации можно отнести: 1) К о с c h e n b u r g e r R. J. A frequency response method for analyzing contactor servomechanisms. Trans AIEE, 1947, pt. IIA; 1950, pt. II; 2) M a g n u s K. Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungssysteme. VDI—Forschungschef. B21 (1955), (Düsseldorf, 1955), N 451 (Прим. ред.).

\*\* Работы Я. З. Цыпкина в области релейных систем обобщены в книге «Теория релейных систем автоматического регулирования». Гостехиздат, 1955 (Прим. ред.).

\*\*\* См., например, H a m e l [59].

\*\*\*\* См., например, 1) Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения. М.—Л., Гостехиздат, 1956; 2) М а л к и н И. Г. Проблема существования функций Ляпунова. Изв. Казанского физ.-мат. общества, т. V, 1931; 3) М а л к и н И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Математ. сборник, т. 3, вып. 1, 1938; Некоторые основные теоремы устойчивости движения в критических случаях. Прикладн. матем. и механ., т. 6, вып. 6, 1942. 4) М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1952. 5) Л у р ь е А. И., П о с т н и к о в В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. Прикл. матем. и механ. т. 8, № 3, 1944. 6) Е р у г и н Н. П. Методы Ляпунова и вопросы устойчивости в целом. Прикл. матем. и механ., т. 17, вып. 4, 1953. 7) З у б о в В. И. Методы Ляпунова и их применение. Изд. ЛГУ, 1957 (Прим. ред.).

\*\*\*\*\* См. 1) Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., П о н т р я г и н Л. С. К теории оптимальных процессов. «Докл. АН СССР», т. 110, 1956, № 1. 2) П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961, № 3 (Прим. ред.).

\*\*\*\*\* И лишь позднее стали широко известны труды группы исследователей Чикагского университета, возглавляемой Блиссом. Их исследования по вариационному исчислению, выполненные в 30-х годах, весьма близки к принципу максимума (см. гл. 13).

Книга состоит из трех частей. В первой части (гл. 2—4) рассматриваются основные понятия и положения. Значительное внимание уделяется анализу систем управления с помощью переменных состояний. Приводятся некоторые способы решения уравнений в переменных состояниях. Для компактности записей используется векторно-матричный математический аппарат. Учитывая, что во многих университетах США все это читается студентам старших курсов, читатель, знакомый со способами составления уравнений систем управления в переменных состояниях и методами их решения, может сразу же перейти к изучению материалов гл. 5.

Во второй части книги (гл. 5—11) излагаются основные методы анализа устойчивости систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями. Она начинается с рассмотрения способов линеаризации вблизи состояния равновесия или вблизи опорной траектории. Далее излагается анализ устойчивости линеаризованных систем (первый метод Ляпунова). Рассматривается также важный критерий равномерно асимптотической устойчивости для нестационарных систем. Наконец, указывается на орбитальную устойчивость и ее практические приложения.

В гл. 6 и 7 излагаются очень мощные приближенные методы анализа нелинейных систем: это методы гармонической и обобщенной эквивалентной линеаризаций. Если помнить о границах применимости этих методов, то с их помощью можно более широко истолковывать результаты, полученные точными методами. Мы покажем при этом, как область применимости точных методов может быть расширена. В гл. 8 изучается класс релейных систем. Излагаются некоторые новые подходы, касающиеся этого важного класса систем. Гл. 9 освещает второй метод Ляпунова, его достоинства и недостатки.

Метод В. М. Попова и его развитие изучается в гл. 10. При этом система описывается интегральными уравнениями, и в основном указанный подход использует идеи функционального анализа. Мы покажем, что фундаментальная теория В. М. Попова и хорошо известный частотный критерий очень просто связаны некоторым билинейным преобразованием, осуществляющим сдвиг полюсов. В гл. 11 излагаются некоторые новые результаты по устойчивости относительно входного сигнала. Для получения результатов, использующих неравенства, приводится теорема о неподвижной точке.

В гл. 12—17 обсуждаются результаты современной теории оптимальных систем. Некоторые фундаментальные положения и интуитивные предположения, ведущие к одному из способов постановки и решения задач оптимального управления, излагаются в гл. 12. Основные результаты классического вариационного исчисления в форме, приемлемой для решения оптимальных задач, приводятся в гл. 13. Показано, что, добавляя достаточное число переменных, почти все задачи оптимального управления можно решить на основе вариационного исчисления. Однако принцип максимума более приспособлен для решения специальных задач теории управления; при его использовании те же результаты получаются более простыми способами. В гл. 14 приводится геометрическая трактовка принципа максимума. Представляется, что наилучшее понимание этого принципа может быть достигнуто именно при такой интерпретации.

Принцип динамического программирования, разработанный Беллманом, — это еще один чрезвычайно полезный метод решения задач оптимального управления. При этом проблема оптимального управления рассматривается исходя из критерия оптимальности, определенного в пространстве состояния. С этой точки зрения весьма удобно изучаются линейные оптималь-

ные системы. Некоторые трудности, возникающие при решении задач оптимального управления, обсуждаются в гл. 16 и 17. В гл. 16 рассматриваются так называемые особые задачи управления, для которых необходимые условия оптимальности удовлетворяются весьма просто, но, однако, оптимальную задачу следует решать другими способами. Вот почему, действуя опрометчиво; можно получить неверные результаты в оптимальном управлении. В гл. 17 излагаются некоторые вычислительные аспекты оптимального управления. Глава оканчивается изложением вопроса практической реализации оптимальных законов.

В конце книги имеется три приложения. В приложении I приводятся основные результаты матричного исчисления. В приложении II дается краткий обзор методов  $z$ -преобразования и улучшенного  $z$ -преобразования, которые мы используем в гл. 8. В приложении III приводится полное доказательство основных положений метода В. М. Попова, а также приводятся другие полезные математические результаты.



## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Исследование системы управления во временной области с помощью переменных состояний предпочтительнее как по методическим соображениям, так и благодаря удобству обозначений и простоте проведения анализа. Преимущество методического характера обуславливается возможностью охарактеризовать систему понятием «состояние системы», которому соответствует точка в определенном евклидовом пространстве. В этом случае поведение системы во времени характеризуется траекторией, описываемой этой точкой. Применение матриц и векторов позволяет записывать в более компактном виде как уравнения системы управления, так и их решение.

Если система содержит переменные во времени параметры или нелинейные элементы, то возможность применения хорошо известных частотных методов (после соответствующего преобразования системы) становится ограниченной. Однако во временной области уравнения могут быть исследованы хотя бы численным методом с использованием вычислительных машин. В этом случае представление системы в пространстве состояний оказывается особенно удобным.

Способ переменных состояний как таковой не является новым. Он тесно связан с формализованными методами анализа динамики систем, основанными на принципе Лагранжа—Гамильтона. В своем новом виде этот способ, будучи применен к линейным (не обязательно стационарным) системам, позволяет с успехом использовать многие математические приемы, разработанные для качественного исследования динамических систем. Ниже будут изложены основные положения способа переменных состояний. Этот материал послужит в дальнейшем основой для разработки методов исследования систем управления во временной области.

### 2.1. СИСТЕМА АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Блок-схема типовой системы автоматического управления приведена на рис. 2.1. Объект — это часть системы, подлежащая управлению. Примерами таких объектов могут служить антенна в замкнутой системе сопровождения спутника Земли, ракета в радиолокационной системе управления и др. Обычно объект соответствует части системы, имеющей мощный выход, что обуславливается выполняемой задачей: поворотом рефлектора антенны, направлением вектора скорости ракеты на цель и др.

Динамические характеристики объекта (располагаемые или максимальные управляющие моменты, резонансные характеристики конструкции и т. д.) обычно зависят от имеющейся в наличии аппаратуры управления. В этой

книге будем предполагать, что конструктор не имеет возможности изменить параметры объекта.

Объект управления может иметь несколько входов и выходов. Его выходами являются доступные измерению величины, характеризующие работу объекта. Входы представляют собой величины, которыми можно управлять при помощи внешних по отношению к объекту средств.

В правильно сконструированной системе каждый вход должен влиять на один или несколько выходов. При управлении радиолокационной антенной входами являются сигналы, действующие на электродвигатели или гидравлические исполнительные органы радиолокатора, а выходами — углы азимута и возвышения антенны и скорости их изменения. В случае управления ракетой входами являются сигналы на перемещение поверхностей управления или на изменение направления тяги двигателей, а выходами — положение и скорость ракеты.

Будем представлять входы объекта как  $r$  функций времени  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ , а выходы — как  $m$  функций времени  $y_1(t), \dots, y_m(t)$ .

Регулятор системы представляет собой устройство, предназначенное обеспечивать желаемый характер работы системы. Его выходы (управляющие сигналы) являются входами объекта  $u_1(t), \dots, u_r(t)$ . Задача регулятора заключается в выработке сигналов  $u(t)$ , обеспечивающих требуемую работу объекта. Под требуемой работой здесь понимается следующее. В системе существует (по меньшей мере в неявной форме) ряд желаемых значений  $z_1(t), \dots, z_m(t)$ , к которым должны стремиться действительные значения выходных сигналов. Следовательно, регулятор должен вырабатывать управляющие сигналы  $u(t)$  в зависимости от желаемых значений  $z(t)$  выходных сигналов. Если выходы регулятора не зависят от действительных значений выходных сигналов объекта  $y(t)$ , то сочетание «регулятор—объект» образует разомкнутую систему автоматического управления. Если же при выработке управляющих сигналов регулятор использует сигналы  $y(t)$ , то говорят, что имеется обратная связь. Сочетание «регулятор—объект» образует в этом случае замкнутую систему автоматического управления.

Практически все системы автоматического управления могут быть представлены блок-схемой, показанной на рис. 2.1. В качестве примера рассмотрим следящую систему с интегро-дифференцирующим контуром в прямой цепи. Этот контур является составной частью регулятора, входом которого служит желаемое значение выходного сигнала. Выполняя линейные преобразования над разностью между желаемым и действительным значениями выходного сигнала, регулятор вырабатывает управляющий сигнал.

Главной задачей инженера является проектирование регулятора, пригодного для данного объекта. Но прежде чем переходить к решению этой задачи, необходимо рассмотреть возможные способы описания объекта и остальной части системы. Ниже будет предполагаться, что читатель знаком с частотным методом описания линейных объектов с постоянными параметрами. Настоящая глава посвящена методу описания системы во временной области.

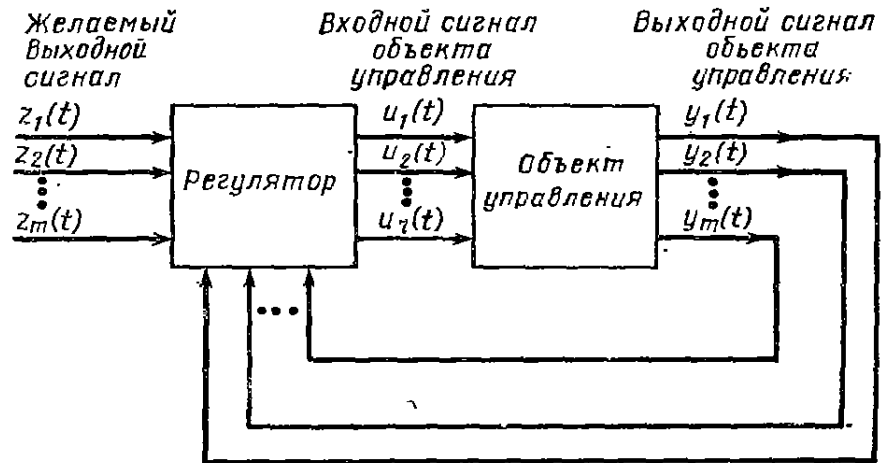


Рис. 2.1. Типичная блок-схема системы автоматического управления

## 2.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТА В ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

По большей части мы будем иметь дело с объектами, описываемыми следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_r(t); t) \quad (2.1a)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Переменные  $x_i(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) связаны с  $m$  выходами  $y_j(t)$  ( $j = 1, \dots, \dots, m$ ) уравнениями следующего вида:

$$y_j = g_j(x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_r(t); t). \quad (2.1b)$$

Уравнения (2.1) представляют весьма общую и удобную форму описания динамической системы. Например, дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}, \dots, y; u_1, \dots, u_r; t\right) \quad (2.2a)$$

можно привести к виду (2.1), полагая

$$x_1 = y; \quad x_2 = \frac{dy}{dt}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}};$$

тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; & \dot{x}_2 &= x_3; & \dots; & \dot{x}_{n-1} &= x_n; \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_{n-1}; u_1, \dots, u_r; t); \\ y &= x_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.2b)$$

**Пример 2.1.** Рассмотрим ракету, вертикально стартующую под действием силы тяги. К другим силам, действующим на объект, относится аэродинамическое сопротивление, предполагаемое пропорциональным квадрату скорости, и сила тяжести. Мгновенное значение тяги пропорционально  $\frac{dm(t)}{dt}$ , где  $m(t)$  — мгновенная масса ракеты. Обозначая через  $h$  высоту ракеты над точкой старта, получим следующее уравнение движения ракеты:

$$m(t) \frac{d^2 h}{dt^2} + k \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 + m(t) g = c \frac{dm(t)}{dt},$$

где  $k$  и  $c$  — положительные постоянные.

Если производится управление величиной  $\frac{dm(t)}{dt}$ , то она является входным сигналом. Вводя обозначения:  $x_2(t) = \frac{dh}{dt}$ ;  $x_3(t) = m(t)$  и  $u(t) = c \left[ \frac{dm(t)}{dt} \right]$ , записываем уравнение движения ракеты в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(t); \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{x_3(t)} x_2^2(t) - g + \frac{u(t)}{x_3(t)}; \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{c} u(t). \end{aligned}$$

Если в качестве выходного сигнала рассматривать высоту  $h(t)$ , то уравнение (2.1b) для выходного сигнала принимает вид  $y(t) = x_1(t)$ . Если на выходе принимать скорость  $\frac{dh}{dt}$ , то  $y(t) = x_2(t)$ .

Возвращаясь к общим уравнениям (2.1), можно при помощи блок-схемы на рис. 2.2 более подробно изобразить протекание сигналов. На этой блок-схеме система представляется функциональными генераторами и интеграторами. По своему виду эта блок-схема получается такой же, как и используемая схема при аналоговом моделировании системы. Сравнивая ее с блок-схемой, показанной на рис. 2.1, видим, что между входными  $u_i(t)$  и выходными  $y_i(t)$  сигналами в рассматриваемой схеме имеем вспомогательные переменные  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Действительные выходы системы являются линейными комбинациями вспомогательных переменных.

Будем рассматривать сначала уравнения (2.1) как уравнения, определяющие новые переменные. Следует отметить, что переменные  $x(t)$  представляют собой минимальное число величин, которые согласно уравнению (2.1) позволяют выразить выходные сигналы объекта через его входные сигналы и время. Переменные  $x(t)$  представляют собой нечто большее, чем выходные сигналы в обычном смысле. Мы будем называть переменные  $x(t)$  переменными состояния системы. Число  $n$  будет рассматриваться как порядок системы уравнения (2.1).

Уравнения (2.1) образуют уравнения системы, записанные через переменные состояния. Рассматривая эту систему более подробно, можно подметить следующие свойства. Если состояние системы  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  известно в некоторый момент времени  $t_0$  и если входные сигналы системы  $u_1(t), \dots, u_r(t)$  определены для  $t_0 \leq t \leq t_1$ , то состояние системы в момент  $t_1$  может быть найдено. Это свойство имеет место для всех значений  $t_0$  и  $t_1$ .

До сих пор мы достигли немногого, преобразуя систему от вида (2.2а) к виду (2.2б). Однако преимущества сразу выявятся, если ввести в рассмотрение векторы и матрицы. Заметим, что состояние системы может быть представлено вектором в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ . Назовем этот вектор вектором состояния  $x(t)$  системы\*:

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

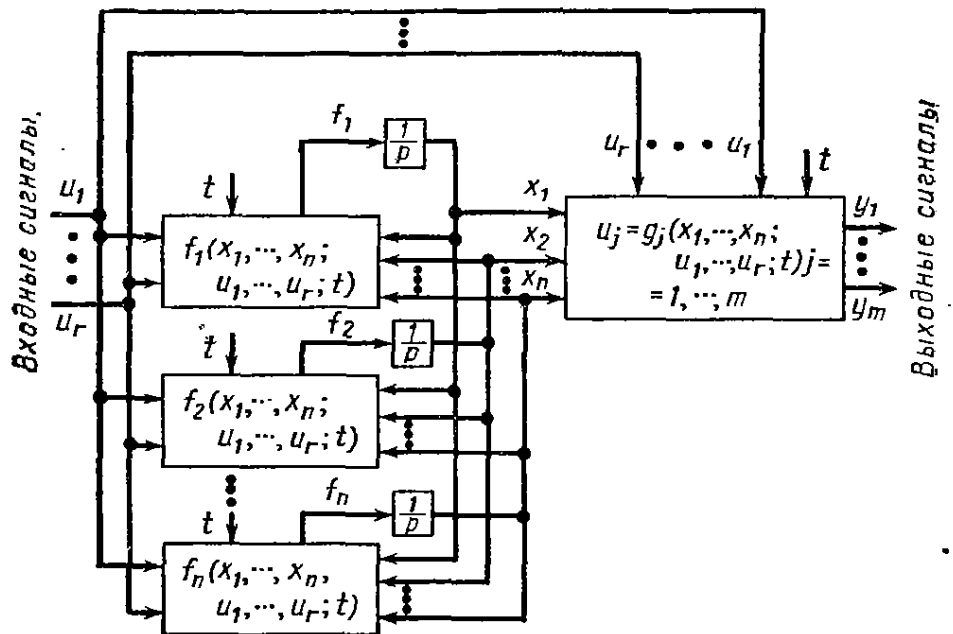


Рис. 2.2. Блок-схема системы, описываемой уравнениями (2.1а) и (2.1б)

Аналогичным образом мы можем рассматривать последовательности переменных  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $u_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ),  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и  $g_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), как вектор-столбцы в евклидовых пространствах  $E_n$ ,  $E_r$  и  $E_m$  соответственно.

\* Полужирными строчными буквами  $x, y, z$  обозначают векторные величины, а полужирными прописными буквами  $A, B, C$  — матрицы. Символ  $\triangleq$  обозначает равенство «по определению».

Тогда

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Используя выражения (2.3) и (2.4), уравнение (2.1) запишем в следующей компактной форме\*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) можно представить в виде блок-схемы, показанной на рис. 2.3. На этой схеме векторные величины изображены стрелками в виде двойных линий. Блок между  $\dot{\mathbf{x}}$  и  $\mathbf{x}$  представляет операцию  $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{p}\right) I \dot{\mathbf{x}}$

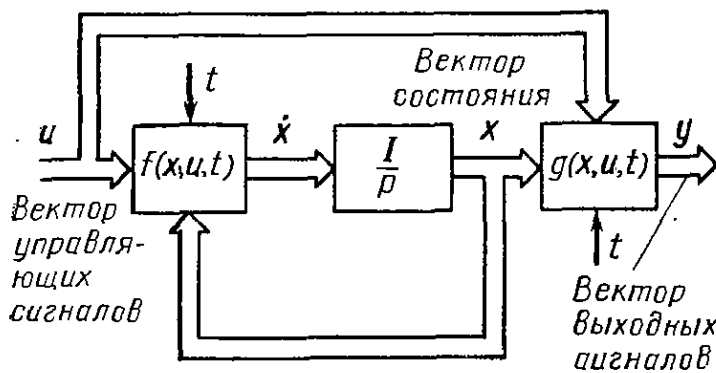


Рис. 2.3. Блок-схема системы, описываемой уравнениями (2.1а) и (2.1б) при записи их в матричной форме

существуют такие функции времени  $a_{ij}(t)$  и  $b_{ik}(t)$  ( $i, j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r$ ), что выполняется условие

$$\begin{aligned} \dot{f}_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) = & \\ = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r b_{ik}(t) u_k(t), & \end{aligned} \quad (2.6)$$

и, кроме того, существуют параметры

$$c_{ij}(t), d_{ik}(t) \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r),$$

для которых справедливо соотношение

$$\begin{aligned} g_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) = & \\ = \sum_{j=1}^n c_{ij}(t) x_j(t) + \sum_{k=1}^r d_{ik}(t) u_k(t). & \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.5) принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}(t) \mathbf{x} + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}, \quad (2.8)$$

\* Здесь  $\dot{\mathbf{x}}$  обозначает  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ , что соответствует группе уравнений

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, \dots, n).$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(t) \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}; \quad B(t) \triangleq \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}(t) & \dots & b_{mr}(t) \end{bmatrix}; \\ C(t) \triangleq \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & \dots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}; \quad D(t) \triangleq \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1r}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & \dots & d_{mr}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Здесь  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $D(t)$  — переменные во времени матрицы соответственно типа  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$  и  $m \times r$ .

Интерес представляет частный случай, когда объект имеет один входной  $u$  и один выходной  $y$  сигналы. При этом они являются одномерными векторами или скалярами. Тогда уравнения (2.8) могут быть записаны в виде

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u; \quad y = c^T(t)x + d(t)u, \quad (2.10)$$

где

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}; \quad c(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

а  $c^T(t)$  — транспонированный\* по отношению к вектору  $c(t)$  вектор.

Соотношения (2.5), (2.8) и (2.10) будем рассматривать как уравнения состояния системы. Следует заметить, что уравнения состояния системы не единственны, т. е. существует не одна группа переменных состояния, при помощи которых поведение системы может быть описано полностью\*\*. Однако любые две системы переменных состояния связаны между собой однозначно. Уравнение состояния, получающееся при одном выборе переменных состояния, по своей форме может оказаться проще, чем при другом выборе переменных состояния. Здесь часто большую роль играет интуиция проектировщика.

Проиллюстрируем на конкретном примере практические приемы сведения уравнений к виду (2.1).

**Пример 2.2.** Угловые колебания искусственного спутника Земли со струйными исполнительными органами описываются следующими динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{(J_3 - J_2)}{J_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1(t)}{J_1}; & \dot{\omega}_2 &= -\frac{(J_1 - J_3)}{J_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2(t)}{J_2}; \\ \dot{\omega}_3 &= -\frac{(J_2 - J_1)}{J_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3(t)}{J_3}. \end{aligned}$$

\* См. приложение I.

\*\* Здесь, конечно, не имеются в виду тривиальные случаи расположения тех же уравнений, но в другом порядке.

Здесь  $J_i$ ;  $\omega_i$ ;  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — соответственно моменты инерции, составляющие угловой скорости и приложенного момента по главным осям искусственного спутника Земли.

Если в качестве переменных состояния выбрать составляющие угловой скорости по главным осям  $\omega_1$ ;  $\omega_2$ ;  $\omega_3$ , то динамические уравнения Эйлера принимают уже рассмотренный вид (2.1а), где  $x_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), а, например,  $f_1$  определяется выражением

$$f_1 = - \left( \frac{J_3 - J_2}{J_1} \right) x_2 x_3 + \frac{u_1(t)}{J_1}, \text{ и т. д. } \quad \text{!}$$

Составляющие угловой скорости могут быть измерены при помощи соответственно расположенных скоростных гироскопов, тогда их можно принять в качестве выходных сигналов. Если гироскопы идеальны и правильно ориентированы, то выходные сигналы будут совпадать с переменными состояния, т. е.  $y_i = x_i = \omega_i$ . Если же гироскопы идеальны, но установлены с перекосом, то каждый гироскоп реагирует и на угловые скорости вокруг двух других осей, так что выходные сигналы будут линейной комбинацией переменных состояния. Другими словами, сигнал  $y_i$  имеет вид

$$y_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3,$$

где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — постоянные ( $i = 1, 2, 3$ ), а функции  $g_i$  принимают вид уравнений (2.7).

Если же гироскопы установлены правильно, но каждый из них имеет нелинейность типа «ограничение», что является типичным для реальных приборов, то функции  $g_i$  будут нелинейны, причем нелинейная характеристика имеет вид, показанный на рис. 2.4.

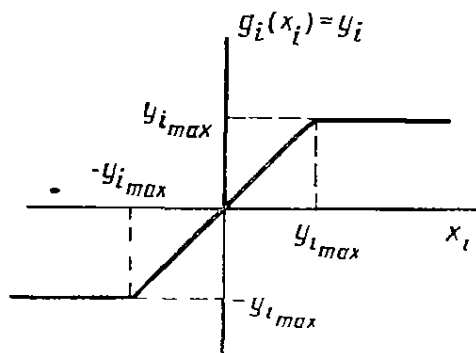


Рис. 2.4 Нелинейная характеристика

### 2.3. ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Линейная система  $n$ -го порядка с одним входным и одним выходным сигналами описывается обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка вида

$$L(p, t) y = M(p, t) u; \quad (2.12)$$

где  $y$  — выходной сигнал системы;

$u$  — входной сигнал системы;

$p$  — оператор  $\left( p \triangleq \frac{d}{dt} \right)$ .

Операторы  $L(p, t)$  и  $M(p, t)$  представляют собой полиномы относительно  $p$  с переменными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} L(p, t) &= \sum_{i=0}^n a_{n-i}(t) p^i; \\ M(p, t) &= \sum_{j=0}^l c_{l-j}(t) p^j. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

В случае стационарной системы уравнения (2.12) принимают вид

$$L(p) y = M(p) u, \quad (2.14)$$

где  $L(p)$  и  $M(p)$  — полиномы с постоянными коэффициентами;

$$L(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^i; \quad M(p) = \sum_{j=0}^l c_{l-j} p^j. \quad (2.15)$$

Систему (2.14) можно представить в обычном виде (рис. 2.5, а), где передаточная функция  $G(s) = \frac{M(s)}{L(s)}$  характеризует систему в области изображений по Лапласу. Во многих случаях нет необходимости переходить в область

изображений. Можно систему представить блоком с  $G(p) \triangleq \frac{M(p)}{L(p)}$  (рис. 2.5, б) и считать, что этот блок обозначает те же действия, что и предусматриваемые дифференциальным уравнением (2.14). Другими словами,  $G(p)$  — операторное звено, но во временной области.

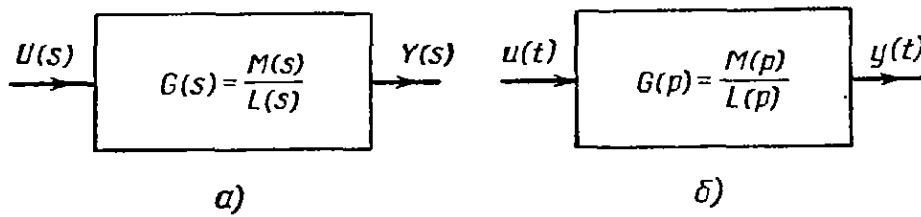


Рис. 2.5. Представление уравнений (2.14) в виде блок-схемы, составленной относительно:

а — изображений переменных; б — оригиналов переменных (как функций времени)

Рассмотрим основные способы получения уравнений в переменных состояния вида (2.8) для систем, описываемых дифференциальными уравнениями (2.12) или (2.14).

#### 2.4. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ, ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖИТ НУЛЕЙ

Для системы вида (2.14) корни полинома  $L(p)$  являются полюсами, а корни полинома  $M(p)$  — нулями. Если  $M(p)$  сводится к постоянной величине, то можно сказать, что система не имеет членов в числителе, характеризующих динамику, и входной сигнал непосредственно не фигурирует в выражении для выходного сигнала  $y(t)$  [т. е. в уравнении (2.10) имеем  $d = 0$ ]. Для этого случая существует несколько простых методов получения уравнений состояния системы, некоторые из которых рассматриваются ниже.

##### 1. Метод разложения на простые дроби (канонические формы)

Без потери общности рассмотрим систему  $G(p) = \frac{1}{L(p)}$ , описываемую уравнением

$$L(p) y = u. \quad (2.16)$$

Полагая, что  $L(p)$  имеет простые нули, можно написать

$$L(p) = \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i), \quad (2.17)$$

где  $\lambda_i$  — полюсы функции  $G(p)$  или корни полинома  $L(\lambda_i)$ .

Разлагая  $\frac{1}{L(p)}$  на простые дроби, получим

$$\frac{1}{L(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - \lambda_i}, \quad (2.18)$$

откуда

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - \lambda_i} \right) u(t) = y(t).$$

Если положить

$$x_i(t) = \frac{1}{p - \lambda_i} u(t), \quad (2.19)$$



$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t). \quad (2.20)$$

Согласно уравнению (2.19) переменная  $x_i$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{x}_i - \lambda_i x_i = u, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

Система уравнений (2.21) эквивалентна уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (2.22)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Имеем также

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2.24)$$

где  $\mathbf{c}$  — вектор, составляющими которого служат вычеты, т. е.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

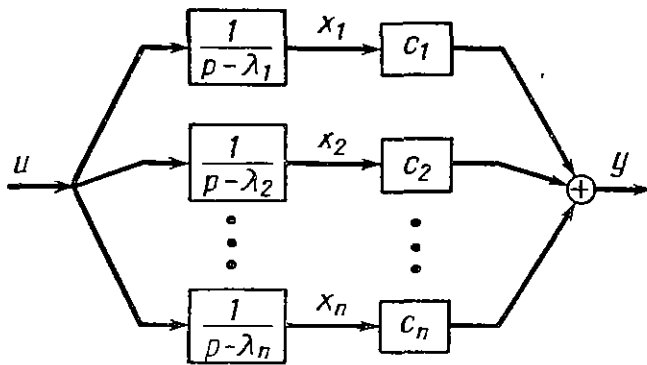


Рис. 2.6. Структурная схема стационарной системы, записанной в канонической форме

Описанный метод получения уравнений состояния имеет то преимущество, что связан с получением  $\mathbf{\Lambda}$ -матрицы, которая, будучи диагональной, значительно упрощает последующие выкладки. Кроме того, здесь в явной форме фигурируют собственные значения, или полюсы системы.

Блок-схема системы, соответствующая уравнениям (2.22) и (2.24), показана на рис. 2.6. Из этой схемы видно, что каждая составляющая функции  $G(p)$  представляется отдельной ветвью.

Нетрудно видеть, что для применимости метода не обязательно, чтобы все корни были действительными. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — комплексные сопряженные корни, то выходные сигналы  $x_1$  и  $x_2$  соответствующих ветвей также будут комплексными сопряженными.

**Пример 2.3.** Рассмотрим систему, описываемую уравнением  $(p^2 + 1)y = u$ . Производя разложение на простые дроби, получим

$$\frac{1}{p^2 + 1} = \frac{-j/2}{p - j} + \frac{j/2}{p + j},$$

где  $j = \sqrt{-1}$ .

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -j/2 \\ j/2 \end{bmatrix}.$$

Необходимо, однако, заметить, что во многих случаях бывает неудобно вводить в рассмотрение комплексные переменные состояния. Одна из причин этого заключается в том, что мы лишаемся возможности представлять систему в  $n$ -мерном пространстве состояний, вследствие чего рекомендуется избегать применения мнимых величин при написании уравнений состояния. Поэтому описанное каноническое представление обычно не применяют, если имеются комплексные полюсы.

Если система имеет кратные корни, то, как показано ниже, метод разложения на простые дроби остается справедливым.

**Пример 2.4.** Рассмотрим систему, для которой  $M(p) = 1$  и  $L(p) = (p - \lambda_1)^2 (p - \lambda_2)$ . В данном случае

$$G(p) = \frac{c_1}{(p - \lambda_1)^2} + \frac{c_2}{(p - \lambda_1)} + \frac{c_3}{(p - \lambda_2)},$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad c_2 = -\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = -c_3.$$

Блок-схема системы показана на рис. 2.7, а соответствующие уравнения состояния имеют вид

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2; \quad \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + u; \quad \dot{x}_3 = \lambda_2 x_3 + u$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

выходной сигнал определяется уравнением  $y = c^T x$ ,

где

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

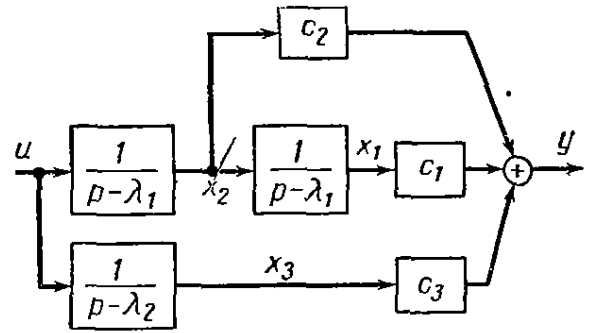


Рис. 2.7. Структурная схема системы, описываемой уравнением (2.4)

В общем случае  $L(p) = (p - \lambda_1)^{k_1} (p - \lambda_2)^{k_2} \dots (p - \lambda_r)^{k_r}$  (где  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ ) метод разложения на простые дроби, как нетрудно видеть, придает матрице  $A$  системы жорданову каноническую форму, т. е.

$$A = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix} \triangleq \Lambda_J, \quad (2.25)$$

где каждый диагональный элемент  $J_{k_i}(\lambda_i)$  представляет матрицу типа

$$J_{k_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & h_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & h_{i2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & h_{ik_i} & \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

где каждый из элементов  $h_{i1}, \dots, h_{ik_i}$  — или единица, или ноль.

Составляющие вектора  $b$ , соответствующие  $k_1$ -й,  $(k_1 + k_2)$ -й,  $\dots$ ,  $\dots$ ,  $(\sum_{i=1} k_i)$ -й позициям, равны единице, а все остальные — нулю.

Блок-схема, соответствующая каждой из подматриц  $J_{k_i}(\lambda_i)$ , показана на рис. 2.8 ( $c_j, k_i$  — вычеты).

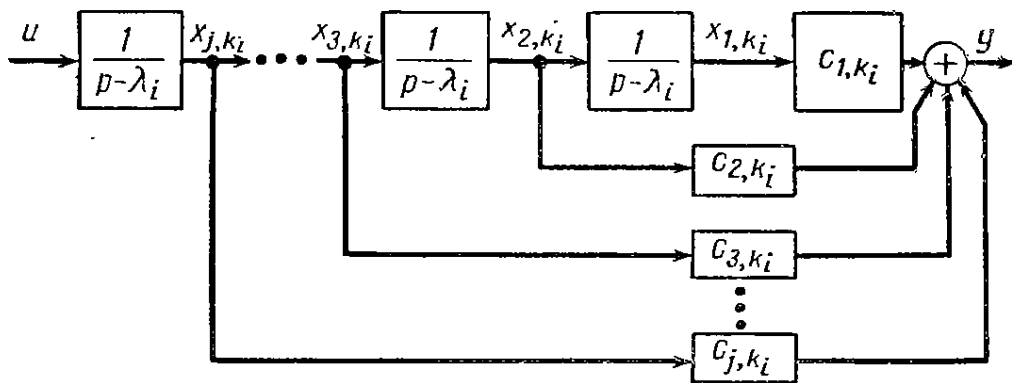


Рис. 2.8. Структурная схема линейной стационарной системы, матрица  $A$  которой имеет жорданову форму  $\Lambda_J$

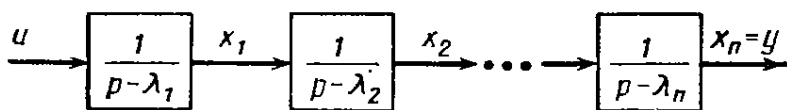
Уравнения состояния, матрица  $A$  которых или диагональная  $\Lambda$  из собственных значений, или жорданова  $\Lambda_J$ , будут называться каноническими уравнениями состояния. В этом случае система представляется в простой форме, удобной для последующих выкладок.

## 2. Метод простых множителей

Если функция  $G(p)$  разложима на множители, ее можно представить в виде

$$G(p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(p - \lambda_i)}. \quad (2.27)$$

Соответствующая блок-схема показана на рис. 2.9. Принимая в качестве переменных состояния указанные на этом рисунке переменные, имеем



$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u; \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + x_1; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}, \end{aligned} \right\} (2.28)$$

Рис. 2.9. Структурная схема линейной стационарной системы, функция  $G(p)$  которой разложена на множители.

причем выходной сигнал равен  $x_n$ . При записи уравнений состояния в матричной форме соответствующие матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & & \\ \cdot & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & 1 & \lambda_n \end{bmatrix}; \quad (2.29)$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Как нетрудно видеть, применимость этого метода не ограничивается случаем простых корней.

### 3. Метод, применяемый при аналоговом моделировании

При аналоговом моделировании система  $G(p) = \frac{1}{L(p)}$  реализуется различными обратными связями. При этом используются суммирующие, инвертирующие и интегрирующие звенья. Уравнения состояния можно записать, основываясь на этом представлении системы. В данном случае раскладывать  $L(p)$  на множители нет необходимости.

Пример 2.5. Возможная реализация функции

$$\frac{y}{u} = \frac{1}{p^3 + ap^2 + bp + c} \quad (2.31)$$

показана на рис. 2.10. Если в качестве переменных состояния принять переменные, приведенные на рис. 2.10, то уравнения можно записать в виде

$$\dot{x}_1 = x_2 - ax_1; \quad \dot{x}_2 = x_3 - bx_1; \quad \dot{x}_3 = -cx_1 + u; \quad y = x_1.$$

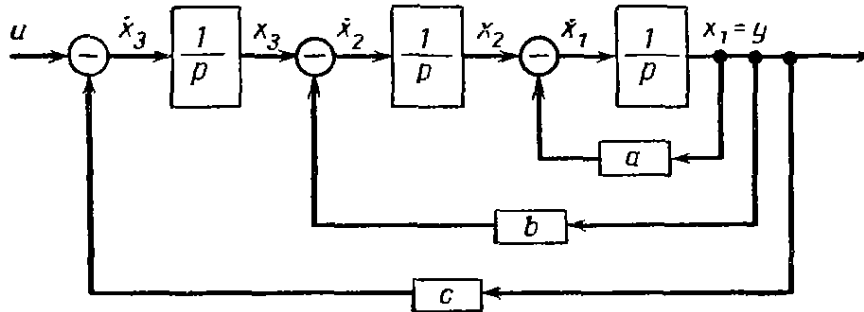


Рис. 2.10. Блок-схема аналогового моделирования объекта, описываемого уравнением (2.31)

Следовательно

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### 4. Нормальная форма

Классический подход заключается в том, что в качестве переменных состояния принимаются выходной сигнал и  $n - 1$  его производных. Преимущество такого подхода — простота представления результатов, когда собственные значения различны. Кроме того, как мы уже видели ранее [см. уравнение (2.2)], такое представление возможно для нелинейного дифференциального уравнения общего вида. Если  $n = 2$ , то выходной сигнал может быть представлен классическим фазовым портретом на фазовой плоскости; более подробно это рассматривается в гл. 4. Если  $n > 2$ , выходной

сигнал может быть представлен траекториями в  $n$ -мерном «фазовом пространстве» \*. Выбирая при  $L(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-1} p^i$  в качестве переменных состояния

$$x_1 = y; \quad x_2 = \dot{x}_1; \quad x_3 = \dot{x}_2; \quad \dots; \quad x_n = \dot{x}_{n-1},$$

получим для уравнений состояния следующую матрицу:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

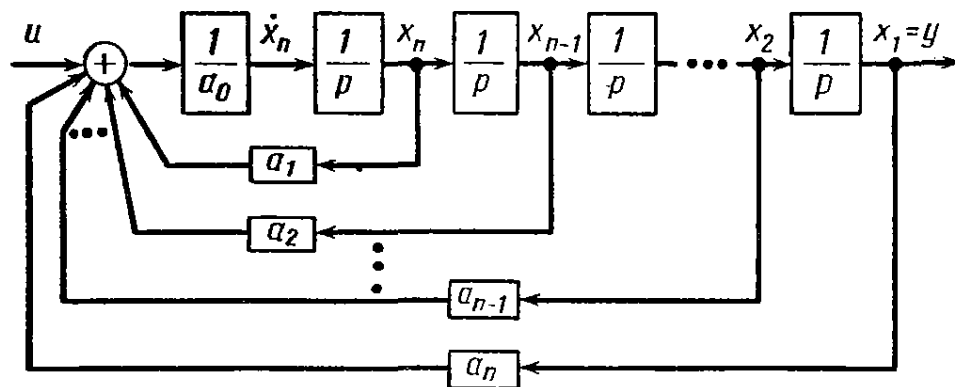


Рис. 2.11. Блок-схема аналогового моделирования объекта, уравнение которого записано в нормальной форме

В матричном уравнении имеем

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следуя Заде и Дезоеру [206], будем называть эти переменные нормальными переменными состояния.

При аналоговом моделировании система представляется, как показано на рис. 2.11.

## 2.5. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЧИСЛИТЕЛЕМ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $l$ ,

ГДЕ  $1 \leq l \leq n$

Если числитель  $M(p)$  передаточной функции имеет порядок, меньший или равный порядку  $L(p)$ , то система по-прежнему может быть описана уравнениями (2.18), (2.20).

\* По этой причине некоторые авторы называют выбранные таким образом переменные состояния фазовыми координатами. Однако мы не будем здесь применять эту терминологию.

## 1. Метод разложения на простые дроби

В данном случае по сравнению с ранее рассмотренным в § 2.4 каких-либо существенных отличий не наблюдается, если не считать возможности появления в разложении постоянного члена, когда порядок  $M(p)$  равен порядку  $L(p)$  ( $l = n$ ). Следовательно, имеем

$$y = c^T x + du,$$

где  $d$  — постоянная.

Все остальные величины сохраняют тот же вид, как в предыдущем случае.

## 2. Метод разложения на простые множители

Выражая  $G(p)$  через нули и полюсы, получим

$$G(p) = k \prod_{i=1}^l \frac{(p - \gamma_i)}{(p - \lambda_i)} \prod_{i=i+1}^n \frac{1}{(p - \lambda_i)},$$

где  $\gamma_i$  — нули функции  $G(p)$ . Так как  $\frac{p - \gamma_i}{p - \lambda_i} = 1 + \frac{\lambda_i - \gamma_i}{p - \lambda_i}$ , то передаточной функции  $G(p)$  можно поставить в соответствие блок-схему, показанную

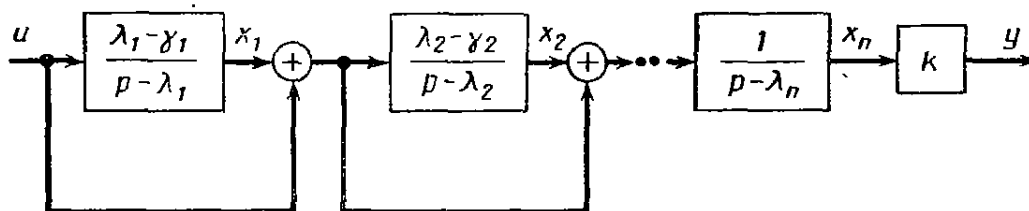


Рис. 2.12. Структурная схема линейного стационарного объекта с разложенной на множители функцией  $G(p)$ , степени числителя и знаменателя которой удовлетворяют условию  $l < n$

на рис. 2.12. Выбирая в качестве переменных состояния переменные, приведенные на рис. 2.12, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + (\lambda_1 - \gamma_1) u; \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + (\lambda_2 - \gamma_2) x_1 + (\lambda_2 - \gamma_2) u; \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}; \\ y &= k x_n, \end{aligned}$$

откуда достаточно просто можно найти соответствующие матрицы.

## 3. Метод, применяемый при аналоговом моделировании

Нетрудно видеть, что для учета числителя необходимо на схеме рис. 2.11 добавить лишь соответствующие прямые связи.

Например, система

$$\frac{y}{u} = \frac{dp^3 + ep^2 + fp + g}{p^3 + ap^2 + bp + c}$$

реализуется схемой, показанной на рис. 2.13.

Основываясь на этой схеме, можно сразу написать уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e - ad \\ f - bd \\ g - cd \end{bmatrix} u;$$

$$y = c^T x + du,$$

где

$$c^T = (1 \ 0 \ 0).$$

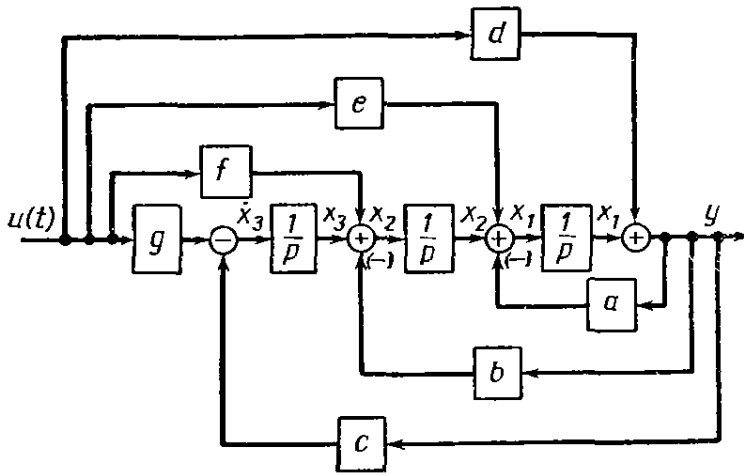


Рис. 2.13. Представление линейного стационарного объекта в виде структурной схемы с прямыми и обратными связями

Заметим, что  $A$  и  $c$  не отличаются от матриц в примере 2.5, в то время как  $b$  претерпевает изменение;  $y$  становится теперь явной функцией от  $u$ .

#### 4. Нормальная форма

В данном случае можно избежать использования производных  $u(t)$  и, кроме того, уравнение состояния в нормальной форме

можно получить соответствующей заменой переменных.

Пример 2.6. Рассмотрим систему

$$\frac{y}{u} = \frac{p+a}{(p+b)(p+c)}$$

или в другой форме

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (b+c) \frac{dy}{dt} + (bc)y = \frac{du}{dt} + au. \quad (2.33)$$

Вместо обычной замены  $x_1 = y$ ,  $\frac{dx_1}{dt} = x_2$  и т. д. положим

$$y = x_1 + k_0 u; \quad (2.34)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + k_1 u; \quad (2.35)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -(b+c)x_2 - (bc)x_1 + k_2 u. \quad (2.36)$$

Из уравнения (2.34) имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + k_0 \frac{du}{dt}. \quad (2.37)$$

Используя уравнение (2.35), находим

$$x_2 = \frac{dy}{dt} - k_0 \frac{du}{dt} - k_1 u. \quad (2.38)$$

Из уравнения (2.37) можно получить

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt} + k_0 \frac{d^2u}{dt^2} + k_1 \frac{du}{dt}, \quad (2.39)$$

а из уравнений (2.36), (2.38), (2.39) найдем

$$\frac{d^2y}{dt^2} - k_0 \frac{d^2u}{dt^2} - k_1 \frac{du}{dt} = -(b+c) \left[ \frac{du}{dt} - k_0 \frac{du}{dt} - k_1 u \right] - (bc) [y - k_0 u] + k_2 u. \quad (2.40)$$

Приводя подобные члены и сравнивая с уравнением (2.33), определим

$$k_0 = 0; \quad k_1 = 1; \quad k_2 = a - (b + c).$$

Таким образом, при указанной замене уравнение состояния для системы, описываемой уравнением (2.33), принимает вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -bc & -(b+c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} u.$$

Для общего случая имеем

$$L(p) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^i; \quad M(p) = \sum_{j=0}^n b_{n-j} p^j, \quad (2.41)$$

где полином  $L(p)$  снормирован, т. е.  $a_0 = 1$ . Читателю предлагается показать, что уравнение состояния в нормальной форме имеет матрицу  $A$  того же вида, что и в выражении (2.32), а вектор  $b$  будет

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_n \end{bmatrix}$$

и выходной сигнал  $y = x_1 + k_0 u$ , где

$$k_0 = b_0; \quad k_i = b_i - \sum_{m=0}^{i-1} a_{i-m} k_m.$$

## 2.6. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЧИСЛИТЕЛЕМ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПОРЯДКА $l > n$

Если степень числителя превосходит степень знаменателя, то уравнения состояния будут содержать производные входного сигнала, так что уравнения состояния примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b_1 u + b_2 \dot{u} + \dots + b_k \frac{d^k u}{dt^k}; \\ y &= c^T x + du. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

В данном случае функцию  $G(p)$  необходимо записать в следующей форме:

$$G(p) = d_0 p^r + \dots + d_r p + \frac{b_0 p^n + \dots + b_n}{a_0 p^n + \dots + a_n}. \quad (2.43)$$

Рациональная часть может быть разложена при использовании какого-либо из рассмотренных методов. Остающаяся часть определяет появление в уравнении (2.42) производных от  $u$ .

## 2.7. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В этом случае система описывается уравнением (2.12). Методы, основанные на использовании разложения на простые дроби, здесь малоприменимы. Однако методы, применяемые при моделировании, и метод приведения к нормальной форме могут быть использованы. В частности, если числитель имеет



тот же порядок, что и знаменатель, то можно воспользоваться методом, изложенным в п. 4 § 2.5. При этом параметры  $k_0, k_1, \dots, k_n$  рассматриваются как функции времени.

Можно показать\*, что при

$$L(p, t) = \sum_{i=0}^n a_{n-i}(t) p^i,$$

где  $a_n = 1$ , и

$$M(p, t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i}(t) p^i,$$

имеем

$$k_0(t) = b_0(t); \quad k_i(t) = b_i(t) - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{i-m} C_{n+k-i}^{n-i} a_{i-m-k}(t) p^k k_m(t). \quad (2.44)$$

Здесь символ  $C_n^r$  обозначает число сочетаний из  $n$  элементов по  $r$ , т. е.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (2.45)$$

## 2.8. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕСКОЛЬКИХ ВХОДОВ И ВЫХОДОВ

Принимая во внимание все изложенное выше, нетрудно получить уравнения состояния для системы с несколькими входами и выходами. В данном случае для характеристики системы вместо векторов  $b$  и  $c$  должны использоваться матрицы  $B$  и  $C$ .

**Пример 2.7.** Рассмотрим систему с двумя входами и тремя выходами (рис. 2.14). Заметим, что система имеет шестой порядок. Следуя методу нормальных координат, принимаем в качестве переменных состояния

$$x_1 = z_1; \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1; \quad x_3 = z_2; \quad x_4 = \dot{z}_2; \quad x_5 = z_3; \quad x_6 = \dot{x}_5 = \dot{z}_4.$$

Основываясь на приведенной схеме, получим

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx,$$

где

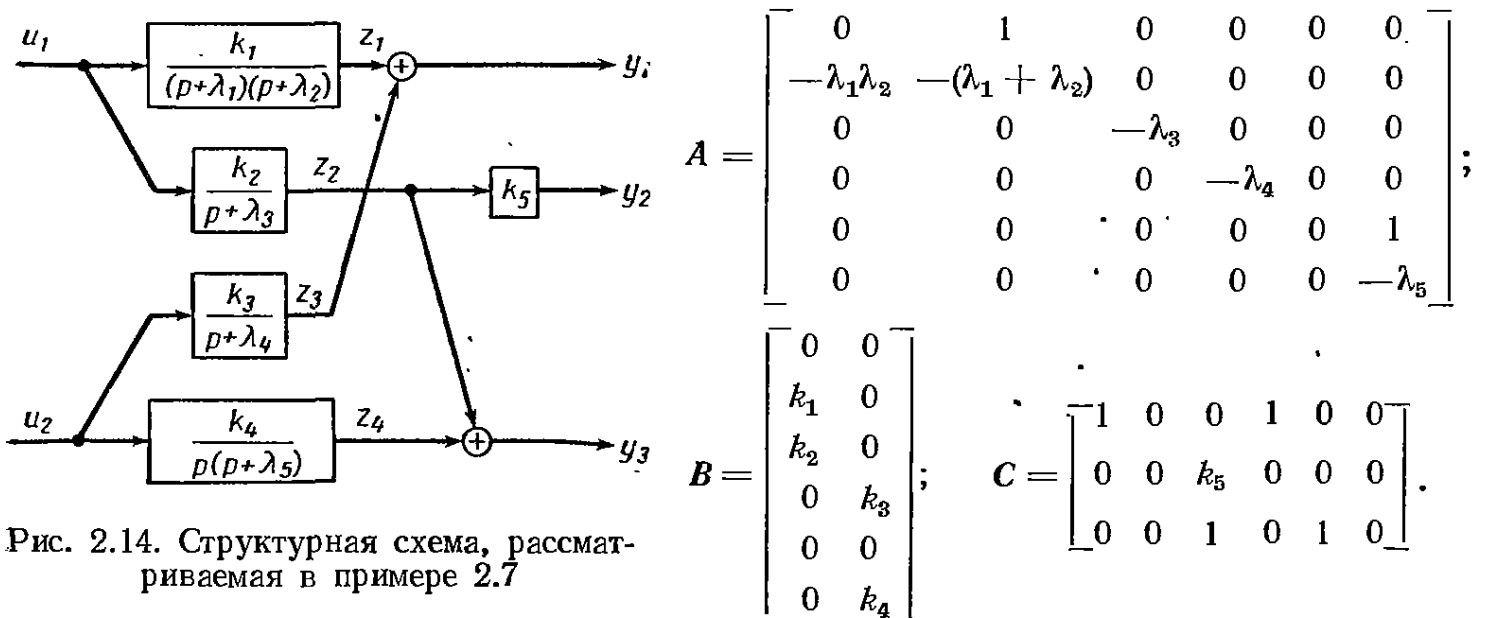


Рис. 2.14. Структурная схема, рассматриваемая в примере 2.7

\* См. [206] стр. 357 и [113] стр. 190.

Хорошо известно, что для стационарных систем вида (2.14) уравнение

$$L(\lambda) = 0, \quad (2.46)$$

где  $\lambda$  — комплексная переменная — является характеристическим уравнением системы, а корни уравнения (2.46) — полюсы системы.

Если система (2.14) описывается уравнением состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.47)$$

то можно показать (упражнение для самостоятельного выполнения), что характеристическое уравнение можно записать в следующей детерминантной форме\*:

$$|A - \lambda I| = 0. \quad (2.48)$$

Следовательно,

$$L(\lambda) \equiv |A - \lambda I|.$$

Корни уравнения (2.48) [и, следовательно, полюсы системы (2.34)] известны в матричном исчислении как собственные значения или как характеристические числа матрицы  $A$ . Уравнение (2.48) получается при нахождении такого вектора  $v$  в пространстве состояний, который преобразуется матрицей  $A$  с точностью до постоянного множителя сам в себя. Другими словами,

$$Av = \lambda v, \quad (2.49)$$

где  $\lambda$ , как и в случае уравнения (2.48), — скалярная комплексная величина. Векторы, удовлетворяющие уравнению (2.49), называются собственными векторами матрицы  $A$ . Более полное рассмотрение основ матричного исчисления приводится в приложении I.

## 2.10. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Почти все системы, описываемые дифференциальными уравнениями, можно характеризовать векторными уравнениями (2.5):

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad y = g(x, u, t).$$

В частности, линейные системы описываются следующими матричными уравнениями (2.8):

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u; \quad y = C(t)x + D(t)u.$$

Уравнения (2.5) и (2.8) известны как уравнения состояния системы. Вид этих уравнений, вообще говоря, не однозначен. Выбор той или иной формы их записи зависит от исследуемой задачи.

Различные способы выбора переменных состояния рассмотрены в §§ 2.5 и 2.6.

\* Это справедливо лишь, когда в функции  $G(p)$  не происходит сокращения нуля с полюсом. Сокращение нуля и полюса можно рассматривать как случайное обстоятельство, когда система  $n$ -го порядка ведет себя для стороннего наблюдателя при нулевых начальных условиях, как система  $(n - 1)$ -го порядка. Когда это имеет место, вычет сократившегося полюса равен нулю, так что каноническая схема передачи сигналов должна иметь одну прямую цепь разомкнутой. Если данную ветвь не учитывать, то получим матрицу  $A$  порядка  $(n - 1) \times (n - 1)$ . Случай сокращения полюса и нуля рассмотрим в следующей главе при введении понятия управляемости системы.

В случае линейных систем с постоянными параметрами особое значение имеют следующие два способа:

1) нормальная форма, когда элементами вектора состояния являются выходной сигнал и его первые  $n - 1$  производные;

2) каноническая форма, когда координаты  $x$  представляют составляющие собственных колебаний.

В случае линейных систем с переменными параметрами нормальная форма представления возможна, а каноническая невозможна.

Если имеется «динамика, соответствующая числителю» [т. е. полином  $M(p, t)$  в выражении (2.12) или полином  $M(p)$  в выражении (2.14) не сводятся к постоянным величинам], получение нормальной формы представления усложняется. В этом случае необходимо вводить переменную  $x_1$ , являющуюся некоторой линейной комбинацией выходного и входного сигналов. В качестве переменных состояния используют величину  $x_1$  и ее  $n - 1$  производные (см. пример 2.6 в § 2.7). При анализе систем с несколькими входами и выходами их также целесообразно описать через переменные состояния.

## 2.11. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

2.1. Получите уравнение состояния для цепи с бесконечной полосой пропускания, описываемой передаточной функцией

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1 - \tau_1 p}{1 + \tau_1 p},$$

в которое не входили бы производные от  $u$ . Представьте результаты в виде схемы передачи сигналов от  $u$  к  $y$ .

2.2. Для системы, рассмотренной в примере 2.3, получите уравнения состояния в нормальной форме и найдите матрицу, преобразующую канонический вектор состояния  $(x_1, x_2)$  в нормальный вектор состояния  $(y_1, y_2)$ .

2.3. Покажите, что для линейной системы с передаточной функцией

$$G(p) = \frac{\sum_{i=0}^n b_{n-i} p^i}{\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} p^i + p^n}$$

уравнения состояния в нормальной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{bmatrix} u,$$

где выходной сигнал определяется выражением  $y = x_1 + k_0 u$ ,

а постоянные  $k_i$  — выражениями  $k_0 = b_0$ ;

$$k_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} k_j a_{i-j} \quad (i = 1, \dots, n).$$

2.4. Рассмотрите линейную стационарную систему с одним входом  $u(t)$  и одним выходом  $y(t)$ , связь между входом и выходом которой определяется соотношениями

$$y(t) = G(p) u(t); \quad G(p) = \frac{(p+1)(p+4)}{(p+3)^3(p+2)^2}.$$

Получите для этой системы уравнения состояния и постройте соответствующую структурную схему прохождения сигналов в случае:

- канонических уравнений состояния;
- уравнений состояния, полученных методом простых дробей;
- уравнений состояния в нормальной форме.

2.5. Управляемая при помощи аэродинамических рулей ракета движется в вертикальной плоскости (рис. 2.15). Для малых величин угла атаки  $\alpha$  и угла отклонения рулевой поверхности линеаризованные уравнения состояния имеют вид \*

$$\dot{\theta} \stackrel{\Delta}{=} \omega;$$

$$\dot{\omega} = \frac{Q}{J} C_{m\alpha} \alpha + \frac{Q}{J} C_{m\delta} \delta;$$

$$\dot{\alpha} = \omega - \left[ \frac{QC_{L\alpha}}{mV} + \frac{T}{mV} \right] \alpha - \frac{Q}{mV} C_{L\delta} \delta;$$

$$a_N = \frac{QC_{N\alpha}}{mg} \alpha + \frac{QC_{N\delta}}{mg} \delta.$$

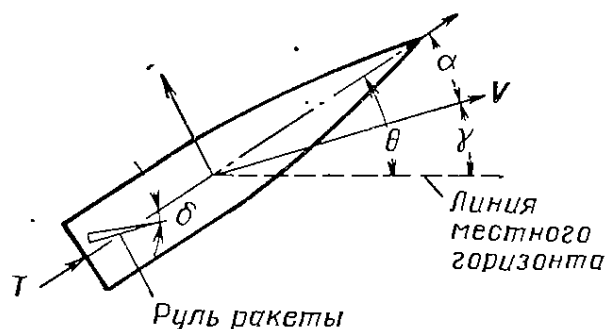


Рис. 2.15. Ракета, рассматриваемая в упражнении 2.5

Первое уравнение определяет угловую скорость  $\omega$ ; второе уравнение представляет сумму всех членов, вызывающих угловое ускорение; третье уравнение соответствует всем силам, перпендикулярным к вектору скорости. Величины  $J$ ,  $m$  и  $V$ , которые представляют соответственно момент инерции относительно оси тангажа, массу и скорость ракеты, а также тягу  $T$  и скоростной напор  $Q$ , предполагаются постоянными. Динамические коэффициенты  $C_{m\alpha}$ ,  $C_{m\delta}$ ,  $C_{N\alpha}$ ,  $C_{N\delta}$ ,  $C_{L\alpha}$  и  $C_{L\delta}$  также постоянны. Величина  $a_N$  представляет поперечное ускорение ракеты, выраженное в единицах  $g$ .

Читателю предлагается:

- получить передаточную функцию  $G(p)$ , связывающую вход  $\delta(t)$  с выходом  $a_N(t)$ ;
  - по результатам пункта а) написать уравнения состояния в нормальной форме;
  - по результатам пункта а) написать уравнения состояния в канонической форме.
- В задаче используются следующие обозначения:

$$A_\delta = \frac{C_{m\delta}}{J}; \quad B_\delta = \frac{C_{L\delta}}{mV}; \quad C_\delta = -\frac{C_{N\delta}}{mg};$$

$$a_0 = -\frac{Q}{J} C_{m\alpha}; \quad a_1 = \frac{Q}{mV} C_{L\alpha} + \frac{T}{mV};$$

$$c_0 = -\frac{Q}{J} \left( \frac{C_{m\delta} C_{N\alpha}}{C_{N\delta}} - C_{m\alpha} \right);$$

$$c_1 = \frac{Q}{mV} (C_{N\alpha} - C_{L\alpha}) - \frac{T}{mV}$$

и предполагается, что  $C_{N\delta} = C_{L\delta}$ .

2.6. Докажите, что для матрицы  $A$ , записанной в нормальной форме [см. (2.32)], характеристическое уравнение (2.48) имеет вид

$$\lambda^n + \frac{a_1}{a_0} \lambda^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} \lambda^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_0} \lambda^2 + \frac{a_{n-1}}{a_0} \lambda + \frac{a_n}{a_0} = 0.$$

2.7. При помощи первого метода выведите уравнения состояния простого маятника, состоящего из массы  $m$ , сосредоточенной на конце невесомой нити длиной  $l$ .

2.8. Найдите уравнения состояния схемы, состоящей из источника напряжения  $e(t)$  с параллельно подключенными к нему сопротивлением, емкостью и индуктивностью. Решите задачу, предполагая, что:

- сопротивление, емкость и индуктивность постоянны и имеют соответственно значения  $r$  ом;  $c$  фарад и  $l$  генри;
- емкость и сопротивление переменны и имеют соответственно значения  $c(t)$  фарад;  $r(t)$  ом. Индуктивность  $l$  генри остается постоянной.

\* Вывод этих уравнений приведен в гл. 5.

2.9. Для системы, представленной в виде

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 9 \frac{d^2y}{dt^2} + 23 \frac{dy}{dt} + 15y = \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} + 2u,$$

используя все описанные в § 2.5 способы, получите уравнения состояния, в которые не входили бы в явной форме производные от  $u(t)$ .

2.10. Рассмотрите систему

$$G(p) = \frac{M(p)}{(p - \lambda_1)^3},$$

где  $M(p)$  — полином третьей степени относительно  $p$  с постоянными коэффициентами:

а) выберите переменные состояния таким образом, чтобы матрица  $A$  приняла жорданову каноническую форму;

б) наложите условия на  $M(p)$ , при которых в каждом случае один элемент  $h_{jk}$  жордановой матрицы  $\Lambda_J$  [см. (2.36)] исчезает. При каких условиях исчезает больше одного элемента  $h_{ij}$ ?

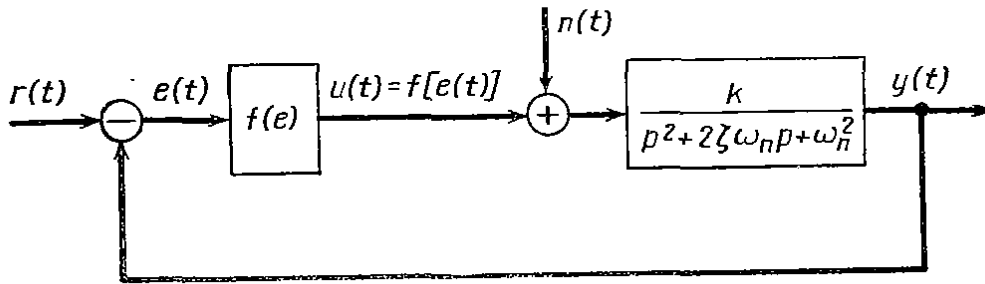


Рис. 2.16. Структурная схема нелинейной системы, рассматриваемой в упражнении 2.11

2.11. Получите уравнения состояния для нелинейной системы, показанной на рис. 2.16, где  $n(t)$  — шумовая помеха,  $f(e)$  — нелинейная функция, связывающая  $u(t)$  с  $e(t)$ .

2.12. Линеаризованные уравнения движения искусственного спутника Земли относительно осей крена и рыскания, как известно, связаны между собой и имеют следующий вид:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + 4\Omega^2 (J_3 - J_2) \theta_1 + \Omega (J_1 - J_3 + J_2) \dot{\theta}_2 = u_1(t);$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + \Omega^2 (J_3 - J_1) \theta_2 + \Omega (J_3 - J_1 - J_2) \dot{\theta}_1 = u_2(t),$$

где  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — моменты инерции спутника относительно осей крена, рыскания и тангажа соответственно;  $\Omega$  — орбитальная угловая скорость спутника;  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — малые углы отклонения соответственно по крену и рысканию;  $u_1$  и  $u_2$  — управляющие моменты вокруг осей крена и рыскания соответственно;

а) покажите, что при  $J_3 > J_1 > J_2$  неуправляемая система не имеет собственных значений в правой полуплоскости;

б) найдите простой способ развязки движений по крену и рысканию при помощи линейных обратных связей по соответствующим переменным состояниям.

## 2.12. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Материал настоящей главы более подробно рассматривается в работах [39], [151], [182], [188] и [206]. Первые четыре книги являются хорошими вводными курсами по способу переменных состояния. В них имеется большое число примеров и упражнений. Последняя книга характеризуется более строгим и полным рассмотрением теории линейных систем. В ней содержится немало положений, дающих повод для размышления и тем, кто полагает, что теорию линейных систем знает в совершенстве.

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Одно из преимуществ векторно-матричного представления уравнений вида (2.5) или (2.8) заключается в том, что состояние системы можно представлять в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, где  $n$  — порядок системы (число переменных состояния). Это пространство будем называть пространством состояний системы. При возрастании независимой переменной (времени) можно ожидать, что изображающая точка системы опишет в пространстве состояний траекторию, принадлежащую семейству решений системы дифференциальных уравнений. Наше знакомство с линейными системами позволяет далее ожидать, что траектория будет зависеть от вида (предыстории) входного сигнала и от начальных условий. Для большинства физических систем можно ожидать, что траектория будет единственной. Другими словами, один и тот же входной сигнал, действующий на систему при одинаковых начальных условиях, вызывает одну и ту же реакцию. Однако другим входным сигналам будут соответствовать другие решения.

Глава начинается с введения терминологии и определений, необходимых для описания динамики системы через переменные состояния. Затем рассматриваются вопросы существования и единственности решений этих уравнений. Далее анализируются линейные системы, определяются решения этих уравнений; вводятся очень важные понятия управляемости и наблюдаемости. В заключении главы показано, как можно использовать понятие присоединенной системы уравнений для анализа одного класса линейных систем.

### 3.1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $\square$

Как уже отмечалось, векторы  $x$  и  $y$  представляют соответственно состояние и выходной сигнал объекта. Вектор  $u$  — управляющая функция. Порядок или число степеней свободы системы обозначаются через  $n$ ; это наименьший порядок дифференциального уравнения, которым может быть описана динамика системы.

Каждое состояние системы удобно представлять в виде соответствующей точки в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Координатами этого пространства служат величины  $x_1, x_2, \dots, x_n^*$ . Это пространство мы будем называть пространством состояний системы. Нулевое состояние  $x_i = 0, i = 1, \dots, n$  будем рассматривать как начало пространства состояний или просто как начало. Такое состояние будет представляться нулевым вектором  $0$ .

---

\* Строго математически следует проводить различие между состоянием системы и координатами пространства состояний, в котором представляется траектория состояний. Поэтому некоторые авторы обозначают эти величины разными символами. Однако авторы настоящей книги полагают, что поскольку на это обстоятельство обращено внимание читателя, путаницы не будет и при одинаковых обозначениях.

Определим евклидову норму или просто норму состояния  $\|\mathbf{x}\|$  как функцию вида

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

В описанном выше пространстве состояний норма состояния представляется расстоянием (в  $n$ -мерном пространстве) состояния системы от начала.

Если для всех  $t$  имеем  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ , то говорят, что объект совершает свободное движение. Замкнутая система, входной сигнал которой тождественно равен нулю, называется свободной системой.

Состояние  $\mathbf{x}_e$  свободной динамической системы называется равновесным состоянием\*, если при движении вблизи этой точки система в отсутствие внешних сил не удаляется от него. Математически равновесные состояния системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  соответствуют всем точкам  $\mathbf{x}_e$ , для которых соблюдается условие

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \text{ для всех } t. \quad (3.2)$$

Если этому условию удовлетворяют точки, покрывающие целую окрестность пространства состояний, то будем называть эту окрестность зоной равновесных состояний.

Пример 3.1. Система

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1$$

эквивалентна гармоническому осциллятору

$$(p^2 + 1)x_1 = 0.$$

Она имеет в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  — положение равновесия. Следует отметить, что и большинство свободных линейных систем могут иметь в качестве равновесного состояния лишь начало координат (см. пример 3.4).

Пример 3.2. Для системы

$$\dot{x}_1 = g_1(\mathbf{x}); \quad \dot{x}_2 = g_2(\mathbf{x}),$$

где  $g_1(\mathbf{x})$  и  $g_2(\mathbf{x})$  подчиняются условиям

$$g_i(\mathbf{x}) = 0; \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1;$$

$$g_i(\mathbf{x}) \neq 0; \quad x_1^2 + x_2^2 > 1 \quad (i = 1, 2);$$

весь круг  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$  является зоной равновесных состояний.

Система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}$  стационарна, если  $\mathbf{f}$  явно не зависит от времени. Это обычно означает, что система не имеет параметров, изменяющихся во времени. В противном случае система будет нестационарной.

Автономной называется свободная и стационарная система. Если состояние системы не является равновесным или входной сигнал не нулевой, то состояние системы будет изменяться во времени. Изменение состояния системы во времени будем называть движением состояния системы или просто движением системы. При данном начальном состоянии  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ,  $t = t_0$  состояния, принимаемые при  $t > t_0$ , будут обозначаться как  $\mathbf{x}(t)$  или более точно как  $\mathbf{x}(\mathbf{u}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ . Совокупность точек, пробегаемых вектором  $\mathbf{x}(\mathbf{u}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$  при возрастании  $t$ , называется траекторией состояний системы.

Чтобы отличать траекторию состояний свободной системы [ $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ ] от траектории системы, находящейся под действием внешних сил [ $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{0}$ ],

\* В литературе вместо «равновесное состояние» применяется иногда термин «особая точка».

будем называть траекторию свободной системы свободной траекторией. Там, где можно перепутать, будем обозначать свободную траекторию системы как  $x(t; x_0, t_0)$ .

Нетрудно заметить, что траектория состояний системы соответствует частному решению уравнений (2.5) и (2.8), получающемуся при заданных начальных условиях  $x = x_0$ ;  $t = t_0$  и заданном входном сигнале системы  $u(t)$ .

### 3.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Прежде чем применять математический аппарат для анализа системы, необходимо убедиться, что математическая модель, которая выбрана для исследования, отражает характерные свойства исходной системы. В противном случае применение того или иного метода будет малоэффективным. Первый вопрос, который возникает при описании системы дифференциальными уравнениями, заключается в том, существует ли вообще решение, и если существует, то является ли оно единственным (т. е. при заданных условиях решение одно и только одно).

Существование решения для создаваемых людьми систем гарантируется, так как любая система предназначается для выполнения какой-то функции. Тем не менее можно создать такую математическую модель системы, когда описывающие ее уравнения не имеют решения.

Более важным является вопрос об единственности решения. Характер поведения физических систем может быть не единственным, и соответственно математическая модель должна иметь не единственное решение. Если такой случай имеет место, то многие из известных математических методов становятся непригодными.

Ниже определяются достаточные \* условия существования и единственности решения системы уравнений относительно переменных состояния. Эти условия используются в последующих главах, когда разбираются математические методы, предварительным условием применимости которых является единственность решения.

Заметим, что известное нам воздействие  $u(t)$  может рассматриваться как переменный параметр. Другими словами, система с заданным воздействием  $u(t)$  считается полностью эквивалентной ряду других систем, в которых  $u(t) \equiv 0$ , и с точки зрения существования и единственности решения может исследоваться теми же методами.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x} = f(x, t); \quad x = x_0 \text{ при } t = t_0 \quad (3.3)$$

или эквивалентную систему

$$\dot{x} = f(x, u(t), t); \quad x = x_0 \text{ при } t = t_0, \quad (3.4)$$

---

\* Так как в последующем будут использоваться необходимые и достаточные условия, рассмотрим кратко эти понятия. Если  $A$  — необходимое условие появления события  $B$ , то при появлении события  $B$  событие  $A$  также должно появиться. Однако появление события  $A$  не гарантирует, что событие  $B$  тоже появится. Иногда это формулируют так: событие  $B$  появляется только при появлении события  $A$ . Если  $A$  — достаточное условие появления  $B$ , то при появлении  $A$  должно появиться и  $B$ , однако появление  $B$  не гарантирует появления  $A$ . Иногда это формулируют так: событие  $B$  появляется, если появляется событие  $A$ . Если  $A$  — необходимое и достаточное условие появления  $B$ , то если  $A$  появляется, то появляется и  $B$ , и наоборот. Можно, следовательно, сказать, что  $B$  появляется в том и только в том случае, когда появляется событие  $A$ .



где  $u(t)$  — вектор, определенный для всех  $t \geq t_0$ . Достаточные условия существования и единственности решения системы (3.3) определяются следующей теоремой.

**Теорема 3.1.** Пусть в системе (3.3) функция  $f(x, t)$  определена в области  $R$  переменных состояния, характеризуемой  $\|x - x_0\| \leq b$ , в интервале  $|t - t_0| \leq c$  ( $b > 0, c > 0$ ) и в отношении  $x$  и  $t$  непрерывна\* в этой области. Если для любых двух векторов состояния  $x_\alpha, x_\beta$  удовлетворяется условие

$$\|f(x_\alpha, t) - f(x_\beta, t)\| \leq k \|x_\alpha - x_\beta\|, \quad (3.5)$$

где  $\infty > k > 0$ , то для системы (3.3) в области  $R$  при  $\|t - t_0\| \leq a$  существует единственное решение. Здесь  $a$  удовлетворяет условию

$$a \leq \min \left\{ c, \frac{b}{M} \right\}^{**}, \quad (3.6)$$

где  $M$  — максимум функции  $\|f(x, t)\|$  в области  $R$  для интервала  $\|t - t_0\| \leq c$ .

Условие (3.5) называется условием Липшица, а константа  $k$  — константой Липшица.

Если областью  $R$  является лишь небольшая окрестность  $(x_0, t_0)$ , то говорят, что система удовлетворяет локальному условию Липшица. Если же константы  $b, c$ , использованные в формулировке теоремы, могут принимать бесконечно большие значения, то говорят, что система удовлетворяет глобальным условиям Липшица.

Сформулированную теорему можно доказать, используя принцип сжатого отображения. Это доказательство дается в гл. 11.

В случае стационарной системы первого порядка  $\dot{x} = f(x)$  для любых значений  $x_\alpha$  и  $x_\beta$ , взятых из представляющей интерес области значений  $x$ , условия Липшица можно записать в виде

$$\frac{|f(x_\alpha) - f(x_\beta)|}{|x_\alpha - x_\beta|} \leq k;$$

это означает, что прямая, соединяющая любые две точки кривой  $f(x)$ , не может иметь наклон, абсолютное значение которого превышало бы  $k$ . Если, в частности,  $f(x)$  дифференцируема и наибольшее значение  $|df(x)/dx|$  в представляющей интерес области  $x$  равно  $k$ , то для рассматриваемого случая  $k$  является константой Липшица. Заметим, однако, что условия Липшица могут применяться и в тех случаях, когда  $f(x)$  не является непрерывно дифференцируемой.

Если для случая  $n = 2$  построить поверхность  $f(x_1, x_2)$  над плоскостью  $x_1, x_2$ , то при учете

$$\frac{\|f(x_\alpha) - f(x_\beta)\|}{\|x_\alpha - x_\beta\|} \leq k$$

описанная выше интерпретация с использованием наклонов остается применимой. То же самое можно сказать и в отношении  $n$ -мерного случая.

**Пример 3.3.** Функция  $f(x) = \sqrt{x}$  не удовлетворяет условию Липшица в точке  $x_0 = 0$ , так как при  $x = 0$  константа Липшица  $k$  должна быть  $\infty$ .

\* Определение непрерывности в пространстве состояний аналогично даваемому для функций  $n$  переменных и может быть сформулировано следующим образом: функция  $f(x, t)$  непрерывна в точке  $t = t_1$ ; если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при  $\|x_1 - x_2\| < \delta$  имеет место  $\|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_1)\| < \varepsilon$ .

\*\* Символ  $\min\{a, b\}$  означает «наименьшая из двух величин  $a, b$ ».

**Пример 3.4.** Функция  $f(x) = x^2$  не удовлетворяет глобальному условию Липшица при некотором  $x_0$ , хотя локальное условие Липшица легко найти для любого интервала конечной длины (покажите это самостоятельно).

**Пример 3.5.** Докажите, что некоторая разрывная по  $x$  функция не удовлетворяет условию Липшица в точке разрыва.

В некоторых имеющих практическое значение случаях  $f(x, t)$  имеет разрывы по переменной  $t$  на конечном (или счетном) множестве точек. Тогда к интервалам времени, не содержащим разрывов, теорема 3.1 применима, так что на этих интервалах существует единственное решение.

В случае свободной линейной системы, соответствующей уравнениям (3.3), имеем

$$\dot{x} = A(t)x; \quad x = x_0 \text{ при } t = t_0. \quad (3.7)$$

Соответствующая теорема существования и единственности формулируется следующим образом.

**Теорема 3.2.** Если  $A(t)$  интегрируема в смысле Римана\* на некотором интервале времени, то на этом интервале для системы (3.7) существует единственное решение\*\*. Если, в частности,  $A(t)$  разрывна лишь в конечном числе точек, то существование и единственность решения гарантируются.

Теперь ясно, что существование и единственность решения всегда гарантируются, если линейная система стационарна. Это отчасти объясняет, почему так просто можно получать решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если существование и единственность решения линейной свободной системы гарантируются, то, как будет показано в следующем разделе, существование и единственность выходного сигнала при заданном входном  $u(t)$  также гарантируются.

Система, удовлетворяющая требованиям существования и единственности решения в области  $R(x_0, t_0)$ , обладает следующими свойствами:

1) для всех начальных условий  $x_0$  в области  $R$  и для всех значений времени в интервале  $|t - t_0| \leq c$  существует траектория системы с этими же начальными данными;

2) если в области  $R$  и в определенном интервале времени имеется два решения с одинаковыми начальными условиями, то эти решения в области  $R$  и в указанном интервале времени идентичны;

3) траектории системы относительно начальных условий  $x_0$  и начальных моментов  $t_0$  должны быть непрерывны. Предлагаем ответить, почему.

Так как траектории автономных систем не зависят от начального момента  $t_0$ , указанное выше свойство в пункте 2 означает, что траектория автономной системы, удовлетворяющей требованиям существования и единственности, не имеет точек самопересечения.

В последующем будем предполагать, что рассматриваемые системы таковы, что единственность решения гарантируется.

### 3.3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Для самого общего случая системы уравнений (2.5) нельзя указать единого подхода к отысканию решения, если не наложить дополнительных ограничений. Действительно, для таких систем, за исключением некоторых

\* Матрица  $A(t)$  интегрируема в смысле Римана, если каждый ее элемент интегрируем.

\*\* Однако в точках разрыва  $A(t)$  производная  $\dot{x}(t)$  и, следовательно, уравнение (3.7) не определены.

случаев, когда решение может быть найдено в замкнутой форме; получение решения связано с применением численных методов.

В случае линейной системы (2.8) положение совсем иное. Хотя в нестационарном случае решение получается непросто, можно все же выразить решение через так называемую переходную матрицу системы. Для линейных систем с постоянными параметрами (стационарный случай) может быть найдено точное решение.

Пусть даны линейные уравнения в переменных состояния (2.8) и начальные условия  $x_0$ . Требуется найти  $x(t)$ , или более точно  $x(u, t; x_0, t_0)$ , при заданном  $u$  в интервале  $[t_0, t]$ . Для решения этой задачи используем метод вариации произвольной постоянной, часто применяемый при решении линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами.

**Пример 3.6.** Применим метод вариации произвольной постоянной для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами, имеющего вид

$$\dot{x} = a(t)x + u(t); \quad x(t_0) = x_0.$$

Обычный подход заключается в том, что ищется решение однородного уравнения (или решение свободной, т. е. при  $u(t) \equiv 0$ , системы). После разделения переменных и интегрирования это решение получим в виде

$$x(t) = k \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] = k\Phi(t, t_0),$$

где  $k$  — постоянная.

Выражение

$$\Phi(t, t_0) \triangleq \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right]$$

обладает следующими свойствами: 1) удовлетворяет уравнению  $\Phi^* = a(t)\Phi$ ; 2) удовлетворяет граничному условию  $\Phi(t_0, t_0) = 1$ .

Чтобы найти частное решение методом вариации произвольной постоянной, считаем величину  $k$  функцией времени, т. е.  $x(t) = k(t)\Phi(t, t_0)$ . Беря производную по времени, получим

$$\dot{x}(t) = \frac{dk(t)}{dt} \Phi(t, t_0) + k(t) \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0),$$

но при учете

$$x(t) = k(t)\Phi(t, t_0)$$

имеем

$$\dot{x}(t) = a(t)k(t)\Phi(t, t_0) + u(t).$$

Производя сравнение соответствующих членов, найдем

$$\frac{dk(t)}{dt} \Phi(t, t_0) = u(t),$$

откуда

$$k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) u(\tau) d\tau = k(t_0) + \int_{t_0}^t \exp \left( - \int_{t_0}^{\tau} a(v) dv \right) u(\tau) d\tau.$$

Так как

$$k(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0) x(t_0) = x(t_0),$$

определим окончательно

$$x(t) = k(t)\Phi(t, t_0) = x_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) + \left\{ \exp \left( \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) \right\} \int_{t_0}^t \left\{ \exp \left( - \int_{t_0}^{\tau} a(v) dv \right) \right\} u(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Рассмотрим теперь линейную систему  $n$ -го порядка, описываемую уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}. \quad (3.9)$$

Мы можем использовать тот же подход, что и в случае системы первого порядка. При помощи уравнения

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0); \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (3.10)$$

введем в рассмотрение матрицу  $\Phi(t, t_0)$  типа  $n \times n$ , называемую переходной матрицей. Будем далее искать решение в форме  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{k}(t)$ , где параметр  $\mathbf{k}$  предполагается функцией времени. Имеем

$$\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, t_0) \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} \mathbf{k}(t). \quad (3.11)$$

Подставляя в уравнение (3.9), получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \Phi(t, t_0) \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{k} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \mathbf{k} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t). \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$\Phi(t, t_0) \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t), \quad (3.13)$$

откуда

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{c} + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(t_1, t_0) \mathbf{B}(t_1) \mathbf{u}(t_1) dt_1, \quad (3.14)$$

где

$$\mathbf{c} = \mathbf{k}(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_0) \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0). \quad (3.15)$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t, t_0) \mathbf{k}(t) = \\ &= \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(t_1, t_0) \mathbf{B}(t_1) \mathbf{u}(t_1) dt_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Рассмотрим более подробно переходную матрицу. Прежде всего будем интересоваться условиями, гарантирующими существование  $\Phi^{-1}(t, t_0)$ . Из уравнения (3.10) видно, что  $i$ -й столбец переходной матрицы может трактоваться как вектор  $\mathbf{y}_i(t, t_0)$ , удовлетворяющий уравнению  $\dot{\mathbf{y}}_i = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}_i$ . Здесь вектор  $\mathbf{y}_i(t_0, t_0)$  имеет в строке, соответствующей рассматриваемой координате, единицу, а во всех остальных строках — нуль. Отсюда следует, что при существовании и единственности\* матрицы  $\Phi(t, t_0)$  столбцы этой матрицы образуют  $n$  независимых решений  $\mathbf{y}_i(t, t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$  системы  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ . Мы можем использовать этот факт для доказательства, что при всех  $t$  матрица  $\Phi(t, t_0)$  не особая, т. е., что определитель матрицы  $\Phi(t, t_0)$  нигде не обращается в нуль. Допустим, что существует  $t_1$ , для которого  $|\Phi(t_1, t_0)| = 0$ . Тогда (см. приложение I) при  $t = t_1$  столбцов  $\mathbf{y}_i(t_1, t_0)$

\* Существование и единственность  $\Phi$  эквивалентны, конечно, существованию и единственности векторов  $\mathbf{y}$ , удовлетворяющих уравнению  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ .

будут линейно зависимыми, так что мы можем найти систему из  $n$  ненулевых постоянных, удовлетворяющую соотношению

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i(t_1, t_0) = \mathbf{0}.$$

Поскольку мы имеем дело с линейной системой  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ , можно согласно принципу суперпозиции считать вектор  $c_1 \mathbf{y}_1(t, t_0)$  и вектор  $-\sum_{i=2}^n c_i \mathbf{y}_i(t, t_0)$  двумя решениями, принимающими при  $t = t_1$  одинаковые значения. Согласно теореме о единственности это возможно лишь, если оба вектора идентичны при всех  $t$ . Это также означает

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i(t_0, t_0) = \mathbf{0},$$

что при ненулевых  $c_i$  невозможно в силу исходного предположения о свойстве вектора  $\mathbf{y}_i(t_0, t_0)$ . Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.3.** На любом интервале времени, где матрица  $\mathbf{A}(t)$  интегрируема в смысле Римана, переходная матрица, удовлетворяющая уравнению (3.10), не особая.

Если условия теоремы 3.3 выполнены, то  $\Phi^{-1}(t, t_0)$  существует.

Из уравнения (3.16) следует, что свободные колебания  $\mathbf{x}(t)$ , соответствующие начальным условиям  $\mathbf{x}(t_0)$ , определяются выражением

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0). \quad (3.17)$$

Следовательно, переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$  переводит свободную систему из начальной точки  $\mathbf{x}(t_0)$  в точку  $\mathbf{x}(t)$  траектории свободной системы, соответствующую моменту  $t$ .

Из уравнения (3.17) вытекают дальнейшие свойства переходной матрицы. В силу единственности решения  $\mathbf{x}(t)$  можно записать

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \mathbf{x}(t_0) \text{ и } \mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1) \mathbf{x}(t_1), \quad (3.18)$$

и, следовательно, для любых  $t_0, t_1, t_2$

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0). \quad (3.19)$$

Из уравнения (3.19) с учетом того, что  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ , имеем

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0, t) \Phi(t, t_0) = \mathbf{I}; \quad (3.20)$$

отсюда

$$\Phi^{-1}(t_0, t) = \Phi(t, t_0). \quad (3.21)$$

Учитывая (3.19), можно выражение (3.16) переписать в другом виде:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, t_1) \mathbf{B}(t_1) \mathbf{u}(t_1) dt_1. \quad (3.22)$$

Если имеется лишь один входной сигнал  $u(t)$ , то можно уравнение (3.22) записать в следующей развернутой форме:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(t, t_0) x_j(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(t, t_1) b_j(t_1) u(t_1) dt_1, \quad (3.23)$$

где  $\Phi_{ij}$  — элемент матрицы  $\Phi$  в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце;  $b_j$  —  $j$ -я компонента вектора  $\mathbf{b}$ .

Пусть все начальные условия нулевые, т. е.  $x_j(t_0) = 0$  для всех  $j$ . Пусть далее в момент  $\tau$  к системе прикладывается единичный импульс. Если  $\mu_0(t)^*$  — единичный импульс, то

$$x_i(t) = \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(t, t_1) b_j(t_1) \mu_0(t_1 - \tau) dt_1 = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(t, \tau) b_j(\tau) \quad (t \geq t_0). \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) характеризует реакцию по  $i$ -й переменной состояния на импульс, прикладываемый в момент  $\tau$ . Таким образом, можно заключить, что между переходной матрицей и импульсной переходной функцией системы существует тесная связь.

### 3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Для линейных стационарных систем переходная матрица в большинстве случаев легко может быть найдена. В данном случае уравнение (3.10) принимает вид

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0); \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \quad (3.25)$$

где  $A$  — постоянная матрица.

Для линейной стационарной системы первого порядка имеем

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[ \int_{t_0}^t a d\tau \right] = e^{a(t-t_0)}.$$

Это выражение дает повод искать решение системы уравнений в аналогичной форме, т. е. в виде экспоненциальной функции от матрицы  $A$ .

Определим экспоненциальную функцию матрицы  $A$  и истекшего времени  $t - t_0$  следующим выражением:

$$e^{A(t-t_0)} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}, \quad (3.26)$$

где

$$A^0 \triangleq I.$$

Если далее определить производную от матрицы как матрицу производных от ее элементов, то станет ясно, что при

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (3.27)$$

уравнение (3.25) удовлетворяется тождественно.

Следовательно, для случая стационарной системы общее решение (3.22) сводится к виду

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_1)} B(t_1) u(t_1) dt_1, \quad (3.28)$$

\*  $\mu_0(t)$  обладает следующими свойствами:  $\mu_0(t) \equiv 0$  при  $t \neq 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \mu_0(t_1 - t) dt_1 = f(t)$  для всех  $t$  и для функции  $f(t)$ .

а при отсутствии внешнего воздействия  $u(t)$ , т. е. для автономной системы, решение принимает вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0). \quad (3.29)$$

Однако мы пока не дали выражения  $e^{A(t-t_0)}$  в замкнутой форме. Чтобы сделать это, мы должны найти элементы  $\Phi_{11}(t-t_0)$ ,  $\Phi_{12}(t-t_0)$ , ... матрицы

$$\Phi(t-t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t-t_0) & \dots & \Phi_{1n}(t-t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{n1}(t-t_0) & \dots & \Phi_{nn}(t-t_0) \end{bmatrix} = [\Phi_{ij}(t-t_0)].$$

Выражение (3.26) показывает, что теоретически  $\Phi(t-t_0)$  можно определить при помощи бесконечного матричного ряда вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n (t-t_0)^n}{n!}.$$

Однако в общем случае такой путь практически мало пригоден. Для частных случаев существуют более удобные методы. Рассмотрим некоторые из них.

**1. Матрица  $A$  — диагональная.** Это, например, имеет место, когда система  $n$ -го порядка состоит из  $n$  не связанных одна с другой систем первого порядка или когда при простых полюсах  $G(p)$  используется разложение на простые дроби, как это было описано в гл. 2. В данном случае  $A = \Lambda$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица, элементами которой служат собственные значения (или полюсы функции  $G(p)$ ). Для этой матрицы можно записать

$$\Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n^n \end{bmatrix},$$

и, непосредственно используя выражение (3.26), получим

$$e^{\Lambda(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

Этот результат достаточно ясен, если перейти к системе несвязанных дифференциальных уравнений первого порядка.

**2. Собственные значения матрицы  $A$  различны, но  $A$  — не диагональная.** Случай 1 наводит на мысль, что когда  $A$  не диагональная, мы должны стараться найти постоянную матрицу  $P$ , которая преобразует матрицу  $A$  в диагональную  $\Lambda$ , т. е.  $\Lambda = P^{-1}AP$  (см. приложение I). Отсюда  $P\Lambda P^{-1} = A$ , и поскольку  $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ , имеем

$$e^{A(t-t_0)} = P e^{\Lambda(t-t_0)} P^{-1}.$$

Это эквивалентно преобразованию

$$\Phi(t, t_0) = P\theta(t, t_0), \quad (3.30)$$

при помощи которого уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi; \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

преобразуется в уравнение

$$P \frac{d\theta}{dt} = AP\theta$$

или

$$\frac{d\theta}{dt} = P^{-1}AP\theta = \Lambda\theta; \quad \theta(t_0, t_0) = P^{-1}. \quad (3.31)$$

Так как теперь матрица  $P^{-1}AP$  диагональная, элементы  $\theta_{ij}$  матрицы  $\theta$ , как и в случае 1, легко могут быть найдены. Из соотношения  $\Phi = P\theta$  можно заключить, что каждый элемент  $\Phi_{ij}$  должен быть линейной комбинацией членов  $e^{\lambda_i(t-t_0)}$ .

Простой способ нахождения матрицы  $P$  в данном случае состоит в том, что сначала находятся  $n$  собственных векторов  $v_i$  (см. § 2, 9), удовлетворяющих уравнению

$$Av_i = \lambda_i v_i; \quad i = 1 \dots, n, \quad (3.32)$$

а затем формируется матрица  $P$ , столбцами которой служат  $n$  векторов  $v_i$ . Справедливость такого способа становится ясной, если соотношение  $P^{-1}AP = \Lambda$  переписать как

$$AP = P\Lambda. \quad (3.33)$$

Если матрица  $P$  сформирована, как описано выше, то нетрудно видеть, что уравнение (3.33) сводится к уравнениям (3.32).

Если уравнения системы записаны в нормальной форме, то матрица  $A$  принимает вид (3.32) [см. § 2.4 п. 4]. В этом случае матрицей, преобразующей матрицу  $A$  в диагональную матрицу  $\Lambda$ , будет матрица Вандермонда

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Матрицей, преобразующей систему из канонической формы в нормальную, является матрица  $VC$ , где  $C$  — диагональная матрица  $[c_1, \dots, c_n]$  [см. приложение II]. Чтобы показать это, выпишем выходной сигнал  $y$  и  $n-1$  его производных:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n c_i x_i; & \frac{dy}{dt} &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i, \dots; \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{d^{n-1}x_i}{dt^{n-1}} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^{n-1} x_i. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$



Выражая нормальный вектор состояния

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}$$

через канонический вектор состояния

$$\mathbf{x}_C = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

получим

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \dots & c_n \\ c_1 \lambda_1 & c_2 \lambda_2 & \dots & c_n \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 \lambda_1^{n-1} & c_2 \lambda_2^{n-1} & \dots & c_n \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_C = V C \mathbf{x}_C.$$

Поскольку  $\mathbf{x}_N$  и  $\mathbf{x}_C$  — векторы состояния системы соответственно в нормальной и канонической форме, следовательно, мы доказали вторую часть нашего утверждения. Теперь можно записать

$$V C \Lambda (V C)^{-1} = V C \Lambda C^{-1} V^{-1} = A_N,$$

где  $A_N$  — матрица  $A$  системы, записанной в нормальной форме. Так как  $C \Lambda C^{-1} = \Lambda$ , то  $V \Lambda V^{-1} = A_N$ , что доказывает первую часть нашего утверждения.

**3. Метод преобразования Лапласа.** Этот метод применим как при простых, так и кратных корнях.

Пусть  $X(s) = \mathcal{L} [x(t)]$ , где  $\mathcal{L}$  — оператор преобразования Лапласа, а  $x(t)$  определена на положительной полуоси, начиная с  $t_0 = 0$ . Тогда уравнение  $\dot{x} = Ax$  при  $x(0) = x_0$  принимает вид

$$sX(s) - x_0 = AX(s), \quad (3.36)$$

откуда находим

$$(sI - A)X(s) = x_0; \quad X(s) = (sI - A)^{-1} x_0.$$

Так как

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

то

$$\mathcal{L} [\Phi(t, 0)] = \mathcal{L} [e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

или

$$\Phi(t, 0) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}]. \quad (3.37)$$

Следовательно, для нахождения  $\Phi(t, 0)$  необходимо вычислить матрицу, обратную матрице  $(sI - A)$ , и для каждого элемента этой матрицы осуществить обратное преобразование Лапласа.

**Пример 3.7.** Рассмотрим систему

$$G(p) = \frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)}.$$

При записи ее в нормальной форме получим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha + \beta) \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица Вандермонда имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta^2 \end{bmatrix},$$

так что

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} & \frac{1}{\alpha\beta} \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)} & \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)} \\ 0 & \frac{\alpha}{\beta(\beta - \alpha)} & \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)} \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно найти переходную матрицу  $\Phi(t, 0)$ . Итак,

$$\Phi(t, 0) = Ve^{At}V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha - \beta)} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\beta(\beta - \alpha)} & \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha(\alpha - \beta)} + \frac{e^{-\beta t}}{\beta(\beta - \alpha)} \\ 0 & \frac{\beta e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{\alpha e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} & \frac{e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} + \frac{e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} \\ 0 & \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} e^{-\beta t} & \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} + \frac{\beta e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Этот же результат мы можем получить, используя преобразования Лапласа. Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha + \beta) \end{bmatrix}; \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & \alpha\beta & s + (\alpha + \beta) \end{bmatrix};$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{s + (\alpha + \beta)}{s(s + \alpha)(s + \beta)} & \frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)} \\ 0 & \frac{s + (\alpha + \beta)}{(s + \alpha)(s + \beta)} & \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)} \\ 0 & \frac{-\alpha\beta}{(s + \alpha)(s + \beta)} & \frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{(\alpha + \beta)/\alpha\beta}{s} - \frac{\beta/[\alpha(\beta - \alpha)]}{s + \alpha} + \frac{\alpha/[\beta(\beta - \alpha)]}{s + \beta} & \frac{1/\alpha\beta}{s} + \frac{1/[\alpha(\alpha - \beta)]}{s + \alpha} + \\ & & + \frac{1/[\beta(\beta - \alpha)]}{s + \beta} \\ 0 & \frac{\beta/(\beta - \alpha)}{s + \alpha} + \frac{\alpha/(\alpha - \beta)}{s + \beta} & \frac{1/(\beta - \alpha)}{s + \alpha} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{s + \beta} \\ 0 & \frac{\alpha\beta/(\alpha - \beta)}{s + \alpha} + \frac{\alpha\beta/(\beta - \alpha)}{s + \beta} & \frac{\alpha/(\alpha - \beta)}{s + \alpha} + \frac{\beta/(\beta - \alpha)}{s + \beta} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что в результате преобразования  $\mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$  приходим к тому же выражению переходной матрицы, т. е. к выражению (3.38).

**Пример 3.8.** Для системы, приведенной на рис. 3.1, найти: а) переходную матрицу; б) переходный процесс по переменным состояниям при  $r(t) = 0$  и  $x_1(0) = 4, x_2(0) = 2$ ; в) реакцию системы на входной сигнал  $r(t) = \cos 2t$ , прикладываемый в момент  $t = 0$  при начальных условиях  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ .

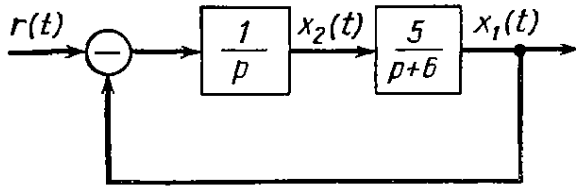


Рис. 3.1. Структурная схема системы, рассматриваемой в примере 3.8

Уравнения системы имеют вид

$$\dot{x}_1 = -6x_1 + 5x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + r(t),$$

так что

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения системы (полосы) можно получить, записав определитель

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 5 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 6) + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5).$$

Следовательно,  $\lambda = -1, -5$ .

Чтобы найти переходную матрицу, сформируем сначала из предварительно найденных собственных векторов преобразующую матрицу  $P$ . Написав соответственно для  $\lambda = -1$  и  $\lambda = -5$  уравнение  $Az = \lambda z$ , находим с точностью до постоянного множителя следующие

собственные векторы:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Следовательно,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Путем проверки можно убедиться, что

$$\Lambda = P^{-1}AP.$$

Переходную матрицу можно сформировать с помощью следующего преобразования:

$$\Phi(t, 0) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{-5t} & 5e^{-t} - 5e^{-5t} \\ -e^{-t} + e^{-5t} & 5e^{-t} - e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Если  $r(t) \equiv 0$ ;  $x_1(0) = 4$  и  $x_2(0) = 2$ , то переходный процесс определяется выражением

$$x(t) = \Phi(t, 0)x(0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-5t} \\ \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

И, наконец, при  $r(t) = \cos 2t$  и  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  реакция системы с момента  $t = 0$  определяется согласно уравнению (3.22) выражением

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \int_0^t \Phi(t, \tau) b(\tau) r(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \int_0^t (5e^{-(t-\tau)} - 5e^{-5(t-\tau)}) \cos 2\tau d\tau \\ \frac{1}{4} \int_0^t (5e^{-(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}) \cos 2\tau d\tau \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{29} \left( 12 \sin 2t + \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{25}{4} e^{-5t} \right) \\ \frac{1}{29} \left( 14 \sin 2t + 6 \cos 2t - \frac{29}{4} e^{-t} + \frac{5}{4} e^{-5t} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Перед тем как закончить этот раздел, заметим, что, поскольку для линейных стационарных систем функция  $\Phi(t, t_0)$  имеет вид  $e^{A(t-t_0)}$ , то эта функция не изменяется при сдвиге во времени. Без потери общности можно считать  $t_0 = 0$ . Поэтому переходную матрицу линейной инвариантной во времени системы будем иногда обозначать как  $\Phi(t)$ .

### 3.5. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Матричная запись весьма удобна и для представления системы в области изображений по Лапласу. В случае стационарной многомерной системы будем обозначать изображения по Лапласу входных сигналов  $u_1(t), u_2(t), \dots, \dots, u_r(t)$  по традиции как  $U_1(s), U_2(s), \dots, U_r(s)$ . Ряд из  $r$  переменных в области изображений можно представить  $r$ -мерным вектором  $U(s)$ . Аналогичным образом вектор состояния можно в области изображений представить  $n$ -мерным вектором  $X(s)$ , а выходные сигналы  $m$ -мерным вектором  $Y(s)$ . Соотношение между этими векторами устанавливается передаточными матрицами  $H(s)$  и  $G(s)$  типа  $n \times r$  и  $m \times r$  согласно следующим уравнениям:

$$X(s) = H(s) U(s); \quad (3.39)$$

$$Y(s) = G(s) U(s). \quad (3.40)$$

Напомним, что передаточная функция, связывающая входной и выходной сигналы, определяется как преобразование Лапласа от реакции системы на входной сигнал в виде единичного импульса при нулевых начальных условиях и при равенстве нулю всех других внешних сигналов. Следовательно, элемент  $h_{ij}(s)$  матрицы  $H(s)$  представляет собой преобразования по Лапласу импульсной переходной функции по  $i$ -й переменной состояния в отношении  $j$ -го входного сигнала при равенстве нулю всех других входных сигналов.

Представляет интерес установить взаимосвязь между матричными передаточными функциями системы  $H(s), G(s)$ , введенными согласно уравнениям (3.39) и (3.40), и матрицами во временной области  $A, B, C$  и  $D$ , определенными по уравнениям (2.8).

Можно убедиться, что практически все формулы для преобразований по Лапласу при скалярной форме записи справедливы и для случая записи в матричной форме. Рассмотрим, например, систему  $\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx + Du$ . Преобразуя по Лапласу обе части первого уравнения при нулевых начальных условиях, получим

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

или

$$[sI - A]X(s) = BU(s).$$

Следовательно,

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s). \quad (3.41)$$

Преобразуя по Лапласу обе части уравнения  $\dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t)$ , получим

$$Y(s) = CX(s) + DU(s), \quad (3.42)$$

так что

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s). \quad (3.43)$$

Из уравнений (3.39)—(3.43) найдем

$$H(s) = [sI - A]^{-1}B; \quad (3.44)$$

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D. \quad (3.45)$$

Уравнения (3.44), (3.45) определяют путь получения передаточной функции системы из уравнений, записанных через переменные состояния.

Пример 3.9. Для системы, рассмотренной в примере 2.4, имеем

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = c^T = [c_1 \ c_2 \ c_3]; \quad d = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(s) &= [c_1 \ c_2 \ c_3] \begin{bmatrix} (s-\lambda_1) & -1 & 0 \\ 0 & (s-\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & (s-\lambda_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [c_1 \ c_2 \ c_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)} + \frac{c_3}{(s-\lambda_2)}. \end{aligned}$$

Пример 3.10. Рассмотрим теперь систему из примера 2.6. Располагая матрицами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , получим

$$\therefore (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 & s + (\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s + \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s + \lambda_5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + \lambda_1 + \lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s + \lambda_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s + \lambda_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s + \lambda_5)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s + \lambda_5} \end{bmatrix}.$$

$$H(s) = (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{k}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 \\ \frac{k_1 s}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & 0 \\ \frac{k_2}{s + \lambda_3} & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{s + \lambda_4} \\ 0 & \frac{k_4}{s(s + \lambda_5)} \\ 0 & \frac{k_4}{s + \lambda_5} \end{bmatrix}$$

и

$$G(s) = C [sI - A]^{-1} B = CH(s) = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} & \frac{k_3}{s + \lambda_4} \\ \frac{k_2 k_5}{s + \lambda_3} & 0 \\ \frac{k_2}{s + \lambda_3} & \frac{k_4}{s(s + \lambda_5)} \end{bmatrix}$$

Матрицы  $H(s)$  и  $G(s)$  можно также получить непосредственно из схемы, приведенной на рис. 2.14.

### 3.6. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Управление объектом можно трактовать как способ создания такой управляющей функции  $u(t)$ , при которой выходной сигнал воспроизводит некоторую заданную функцию времени. Возникает вопрос: что гарантирует возможность такого управления в любом случае. Этот вопрос приводит к более общему понятию об управляемости объекта.

**Определение 3.1.** Система  $\dot{x} = f(x, u, t)$  называется полностью управляемой, если из любого начального состояния  $x(t_0)$  ее можно перевести в любое конечное состояние  $x(t_1)$  при помощи некоторого входного сигнала  $u(t)$  в течение конечного интервала  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Определение понятия полной управляемости достаточно просто, однако это понятие до сих пор применяется только в отношении линейных стационарных систем.

Заметим, что согласно определению 3.1 любое состояние объекта зависит по меньшей мере от одной составляющей вектора входного сигнала. Это лучше всего можно продемонстрировать на примере линейной стационарной системы, записанной в канонической форме\*.

Рассмотрим сначала случай, когда объект имеет один входной сигнал, а его собственные значения различны. Уравнения системы имеют в данном случае вид

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + b_1 u; \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_2 u; \quad \dots; \quad \dot{x}_n = \lambda_n x_n + b_n u, \quad (3.46)$$

и могут быть представлены схемой (рис. 3.2).

Координата  $x_i$  подвергается влиянию со стороны управляющего сигнала и лишь в том случае, если соответствующий коэффициент усиления  $b_i$  не

\* См. также работу [76].

равен нулю. Так как при любом выборе переменных состояния эти переменные можно выразить в виде линейных комбинаций переменных состояния, фигурирующих при канонической форме записи, то можно сделать следующее заключение. Если сигнал  $u$  влияет на любую координату системы, записанной в канонической форме, то он будет влиять и на любую координату при записи уравнений системы в других переменных состояния.

Если ни один из коэффициентов  $b_i$  не равен нулю, то условия полной управляемости системы (3.46) выполняются при любых  $\lambda_i$ .

При равенстве нулю коэффициента  $b_i$  передаточная функция системы имеет нуль в точке  $\lambda_i$ . Другими словами, полюс и нуль в точке  $\lambda_i$  сокращаются. Таким образом, неуправляемость объекта обуславливается сокращением нуля и полюса.

Рассмотрим теперь случай кратных корней. Если корень  $\lambda_i$  имеет кратность  $m$ , то согласно канонической форме Жордана можно записать следующую систему  $m$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_i x_k + x_{k+1} + b_k u; \\ \dot{x}_{k+1} &= \lambda_i x_{k+1} + x_{k+2} + b_{k+1} u; \\ &\vdots \\ \dot{x}_{k+m-1} &= \lambda_i x_{k+m-1} + b_{k+m-1} u. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Уравнениям (3.47) соответствует структурная схема, показанная на рис. 3.3.

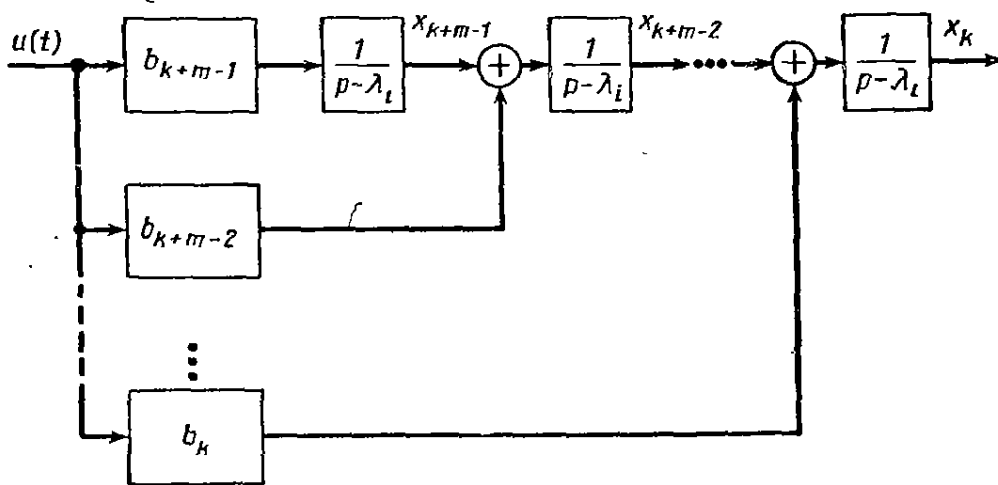


Рис. 3.3. Структурная схема системы, описываемой уравнениями (3.47)

Заметим, что при  $b_{k+m-1} = 0$  теряется возможность управления переменной состояния  $x_{k+m-1}$ . Если, однако, другие коэффициенты  $b_i$  (в их число не входит  $b_{k+m-1}$ ) равны нулю, то возможность управления каждой из переменных состояния вследствие наличия передачи по главной цепи

сохраняется. Таким образом, другие коэффициенты  $b_i$  несущественны, если речь идет об управляемости системы.

Следовательно, линейная стационарная система полностью управляема, если: 1) каждому простому полюсу  $\lambda_i$  соответствует в уравнениях (3.46) отличный от нуля коэффициент  $b_i$  и 2) каждому полюсу  $\lambda_i$  кратности  $m$  соответствуют в уравнениях (3.47) отличный от нуля коэффициент  $b_{k+m-1}$ .

В случае нескольких входных сигналов, т. е. когда  $u(t)$  — вектор, то объект полностью управляем, если каждая из переменных объекта зависит по меньшей мере от одной из составляющих входного сигнала  $u(t)$  \*.

Описанные выше эвристические требования можно сформулировать в виде следующей теоремы [99].

**Теорема 3.4.** Необходимое и достаточное условие полной управляемости линейной стационарной системы  $\dot{x} = Ax + Bu$  заключается в том, что матрица  $K \stackrel{\Delta}{=} [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B]$  типа  $n \times nr$  должна иметь ранг  $n$  (см. приложение I) \*\*.

Необходимые условия теоремы нетрудно доказать. Например, для системы с одним входным сигналом и простыми корнями при записи в канонической форме матрица  $A$  диагональная и, следовательно, такими же являются матрицы  $A^2, \dots, A^n$ . Если один из элементов  $b$ , например  $k$ -й элемент, равен нулю, то, как мы знаем, система неуправляема, а матрица  $K = [b | Ab | A^2b | \dots | A^{n-1}b]$  типа  $n \times n$  имеет  $k$  строк, состоящих из нулей. Следовательно, ранг матрицы не превышает  $n - 1$ , так что требование теоремы 3.4 не выполняется.

Для системы с простыми корнями и несколькими входными сигналами, не влияющими, однако, на  $k$ -ю переменную состояния, матрица  $B$  при записи в канонической форме имеет  $k$ -ю строку, состоящую из нулей. Следовательно, в матрице  $K$  типа  $n \times nr$   $k$ -я строка также будет состоять из нулей. Определитель матрицы  $K$  равен нулю, так что и в данном случае ранг матрицы  $K$  не может превысить  $n - 1$ .

Необходимость сформулированного условия управляемости можно продемонстрировать также и для системы с кратными корнями (см. упражнение 3.3).

Доказательство достаточности сформулированного условия требует большей изобретательности. Прежде всего заметим, что для перевода системы из состояния  $x_0$  при  $t_0$  в состояние  $x_1$  при  $t_1$  входной сигнал должен быть таким, чтобы [см. выражение (3.22)]

$$x_1 = \Phi(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Сигнал  $u(t)$ , определенный таким образом на интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$ , совпадает с сигналом, переводящим систему из начала  $0$  в состояние  $x_2 \stackrel{\Delta}{=} x_1 - \Phi(t_1, t_0) x_0$  в течение этого же интервала. Если определить состояние  $x_3$  с помощью соотношения  $x_1 \stackrel{\Delta}{=} \Phi(t_1, t_0) x_3$ , то, рассуждая аналогично

\* Если каждая из переменных состояния линейного объекта подвергается влиянию со стороны каждой составляющей управляющего сигнала  $u(t)$ , то объект имеет некоторые дополнительные положительные свойства. Это рассматривается в гл. 14, где понятие управляемости распространяется на линейные системы с переменными параметрами.

\*\*  $[B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B]$  — матрица типа  $n \times nr$ , первые  $r$  столбцов которой состоят из элементов матрицы  $B$ , а следующие  $r$  столбцов — из элементов матрицы  $AB, \dots$  и т. д.



ным образом, приходим к выводу, что упомянутый сигнал  $u(t)$  совпадает с сигналом, необходимым для перевода системы за интервал  $t_0 \leq t \leq t_1$  из состояния  $x_0 - x_3$  в начало. Таким образом, понятию управляемости линейной инвариантной во времени системы можно дать следующие эквивалентные определения.

**Определение 3.2 (вариант А).** Линейная инвариантная во времени система  $\dot{x} = Ax + Bu$  полностью управляема, если эта система может быть переведена из состояния  $0$  в момент  $t = 0$  в конечное состояние  $x(t_1) = x_1$  при помощи некоторого сигнала  $u(t)$ , определенного на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ .

**Определение 3.2 (вариант Б).** Линейная инвариантная во времени система  $\dot{x} = Ax + Bu$  полностью управляема, если эта система может быть переведена из некоторого начального состояния  $x_0$  при  $t = 0$  в начало  $0$  при помощи некоторого сигнала  $u(t)$ , определенного на конечном интервале  $0 \leq t \leq T$ .

Достаточность сформулированного теоремой 3.4 условия управляемости системы с одним входным сигналом можно показать, основываясь на определении 3.2 (вариант А). Из этого определения вытекает, что существует сигнал  $u(t)$ , через который состояние  $x_1$  в момент  $t_1 > 0$  может быть выражено формулой

$$x_1 = \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau) bu(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} bu(\tau) d\tau = e^{At_1} \int_0^{t_1} e^{-A\tau} bu(\tau) d\tau. \quad (3.48)$$

Согласно теореме Келли—Гамильтона (см. приложение I)

$$e^{-At} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j.$$

Следовательно, уравнение (3.48) можно записать в виде

$$x_1 = e^{At_1} \int_0^{t_1} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(\tau) A^j bu(\tau) d\tau = e^{At_1} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_0^{t_1} \alpha_j(\tau) u(\tau) d\tau \right) A^j b. \quad (3.49)$$

Поскольку выражение (3.49) должно быть справедливо для любого  $x_1$ , приходим к выводу, что векторы  $b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b$  (всего их  $n$ ) должны быть линейно независимы (см. приложение I), так как в противном случае нельзя найти сигнал  $u(t)$ , который удовлетворял бы уравнению (3.49). Но требование линейной независимости указанных  $n$  векторов сводится к тому, чтобы матрица  $K$ , использованная при формулировке теоремы 3.4, имела ранг  $n$ .

Для произвольной матрицы  $B$  типа  $n \times r$  достаточность теоремы 3.4 может быть доказана аналогичным образом.

С понятием управляемости тесно связано понятие наблюдаемости системы. Наблюдаемость системы устанавливает, возможно ли определить значения переменных состояния системы, относящихся к прошлому, по результатам наблюдения за одним лишь выходным сигналом. Дадим определение этого понятия для линейных стационарных систем.

**Определение 3.3.** Линейная стационарная система, описываемая уравнениями  $\dot{x} = Ax + Bu$ ;  $y = Cx + Du$ , полностью наблюдаема, если возможно определить начальное состояние  $x(0)$  системы по следующим данным:

а) по матрицам  $A$  и  $C$ ; б) по выходному сигналу  $y(t)$  от начальных условий  $x(0)$  при  $u(t) \equiv 0$ , заданному на конечном интервале  $[0, T]$ .

Для записанной в канонической форме системы, имеющей один выходной сигнал

$$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости является отличие от нуля всех коэффициентов  $c_i$ . Если записанная в канонической форме система имеет несколько выходных сигналов

$$y_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} x_i; \quad j = 1, \dots, m,$$

то необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости является связь через ненулевой коэффициент каждой из переменных состояния по меньшей мере с одним из выходных сигналов, так что для каждого  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) по меньшей мере один из коэффициентов  $c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{mi}$  не должен равняться нулю.

Наряду с теоремой 3.4 можно также сформулировать следующие результаты.

**Теорема 3.5.** Необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости линейной стационарной системы  $\dot{x} = Ax + Bu$ ;  $y = Cx + Du$  является то, чтобы матрица  $^* [C^* | A^* C^* | A^{*2} C^* | \dots | A^{*(n-1)} C^*]$  типа  $n \times nm$  имела ранг  $n$ .

Заканчивая рассмотрение понятий управляемости и наблюдаемости линейных стационарных объектов, заметим, что несмотря на приемлемость данные выше определения несколько искусственны. Это обусловливается тем, что определение управляемости связано с использованием матриц  $A$  и  $B$ , а наблюдаемости — матриц  $A$  и  $C$ . Однако ранее уже было показано, что для рассматриваемой системы эти матрицы не являются какими-либо уникальными. Поэтому одна и та же система одним инженером может быть отнесена к наблюдаемым, но не управляемым, а другим — к управляемым, но не наблюдаемым.

**Пример 3.11.** Рассмотрим записанную в канонической форме систему с одним входным и одним выходным сигналами, в которой имеет место сокращение нуля и полюса. Если переменные состояния выбрать в соответствии с выражениями (2.19), то один из коэффициентов  $c_i$  в уравнении (2.20) обращается в нуль, и система ненаблюдаема. Если, однако, положить  $x_i = \frac{c_i}{p-x_i} u$ , то система будет управляема. Но поскольку  $y$  определяется теперь выражением

$\sum_{i=1}^n x_i$ , то система оказывается наблюдаемой.

Данный пример может привести к заключению, что анализ возможен лишь для систем, обладающих как свойством полной управляемости, так и свойством полной наблюдаемости. Это действительно очень часто имеет место, но не всегда. Для большинства встречающихся на практике систем выходной сигнал является единственной представляющей интерес величиной. Выходной сигнал непосредственно измеряется, и по нему судят о поведении системы. В данном случае исходные переменные состояния не всегда играют важную роль. Мы вернемся к этому вопросу в гл. 10. В тех случаях, когда сигнал  $u(t)$  по амплитуде ограничен, понятие полной управляемости не означает действительную управляемость. Этот вопрос рассматривается в гл. 14.

\*  $A^*$  обозначает матрицу, сопряженную по отношению к  $A$  (см. приложение I).

До сих пор мы имели дело лишь с линейными стационарными системами, для которых многие результаты уже хорошо известны. Рассмотрим теперь, какие результаты существуют в отношении линейных систем, изменяющихся во времени (нестационарных). В частности, возможно ли для таких систем в любом случае найти переходную матрицу в замкнутой форме? К сожалению, ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, переходная матрица представляет собой не что иное, как более упорядоченную запись в области времени классических результатов, известных для дифференциальных уравнений. Если система линейных дифференциальных уравнений имеет классическое решение в замкнутой форме, то и переходная матрица выражается в замкнутой форме.

Рассмотрим несколько известных результатов. Имея в виду, что для линейной нестационарной системы первого порядка, рассмотренной в примере 3.6, переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$  типа  $1 \times 1$  выражается как

$$\exp\left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right),$$

можно предположить, что в общем случае линейной нестационарной системы высокого порядка  $\dot{x} = A(t)x$  переходная матрица имеет вид

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right).$$

Несмотря на ошибочность такого предположения в общем случае, оно оказывается иногда правильным. Это предположение справедливо (кроме рассмотренного ранее варианта, когда  $A(t)$  не зависит от  $t$ ) еще и тогда [35], когда матрица  $A(t)$  коммутативна с матрицей

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau,$$

т. е.

$$\left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right] A(t) = A(t) \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau\right] \text{ для всех } t_0 \text{ и } t. \quad (3.50)$$

Отметим, что соотношение (3.50) выполняется, когда матрица  $A(t)$  диагональная\*.

Справедливо следующее утверждение, не имеющее, вообще говоря, большого практического интереса: в общем случае линейной нестационарной системы переходная матрица может быть получена методом итераций, сводящимся к повторному интегрированию, в виде бесконечного ряда, называемого рядом Неймана (см. упражнение 3.5).

Переходная матрица в замкнутом виде может быть найдена для большинства линейных нестационарных систем, интегрируемых классическими методами. Рассмотрим в связи с этим пример.

\* К другому специальному варианту, описываемому выражением (3.50) относится случай, когда матрица  $A(t)$  такова, что  $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$  для всех  $t_1$  и  $t_2$  — см. [106].

Пример 3.12. Линейное дифференциальное уравнение Эйлера [83] в общем случае имеет вид

$$a_0 t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t), \quad (3.51)$$

где  $a_0, \dots, a_n$  — постоянные. При помощи подстановки  $t = e^\tau$  или  $\tau = \ln t$  оно может быть преобразовано в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{d\tau}; \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{t} \cdot \frac{dx}{d\tau} \right) = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{t^2} \left( \frac{d^2 x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} \right); \\ &\vdots \\ \frac{d^n x}{dt^n} &= \frac{1}{t^n} \cdot \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d}{d\tau} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left( \frac{d}{d\tau} - (n-1) \right) x. \end{aligned} \right\} (3.52)$$

Подставляя соотношение (3.52) в уравнение (3.51), приходим к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Решая его, можно для элементов переходной матрицы получить выражения в виде функций от  $\tau - \tau_0$ , подставляя  $\tau = \ln t$  и производя преобразования, — переходную матрицу как функцию  $t$ .

Рассмотрим уравнение

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 6t \frac{dx}{dt} + 6x = 0.$$

В области  $\tau$  оно сводится к виду

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 5 \frac{dx}{d\tau} + 6x = 0.$$

Переходя к нормальным координатам, находим

$$\Phi(\tau, \tau_0) = \begin{bmatrix} 3e^{-2(\tau-\tau_0)} - 2e^{-3(\tau-\tau_0)} & e^{-2(\tau-\tau_0)} - e^{-3(\tau-\tau_0)} \\ -6e^{-2(\tau-\tau_0)} + 6e^{-3(\tau-\tau_0)} & -2e^{-2(\tau-\tau_0)} + 3e^{-3(\tau-\tau_0)} \end{bmatrix}.$$

Отсюда относительно переменной  $t$  (после подстановки  $\tau = \ln t$ ) получим

$$\begin{bmatrix} x \\ t \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 - 2 \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 & \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 - \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 \\ -6 \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 + 6 \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 & -2 \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 + 3 \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_0) \\ t_0 \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, переходная матрица для нормальных координат  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$  имеет вид

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 3 \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 - 2 \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 & \frac{t_0^3}{t^2} - \frac{t_0^4}{t^3} \\ -6 \frac{t_0^2}{t^3} + 6 \frac{t_0^3}{t^4} & -2 \left( \frac{t_0}{t} \right)^2 + 3 \left( \frac{t_0}{t} \right)^3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что  $\Phi(t_0, t_0) = I$ . Это указывает на правильность полученного результата.

### 3.8. СОПРЯЖЕННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Системе, описываемой уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (3.53)$$

можно поставить в соответствие сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad (3.54)$$

где  $A^*(t)$  — матрица, сопряженная относительно  $A(t)$ .

Сопряженная система может быть использована для получения решений некоторого класса задач и для наглядного пояснения особенностей линейной системы. Иногда она используется с целью облегчения расчетов. В части III настоящей книги сопряженная система найдет важное применение.

Для исследования некоторых свойств сопряженной системы рассмотрим пример.

**Пример 3.13.** Сопряженное уравнение для стационарной системы первого порядка  $\dot{x} = ax + bu$  имеет вид  $\dot{\psi} = -a\psi$ . Заметим, что по своей структуре это уравнение такое же,

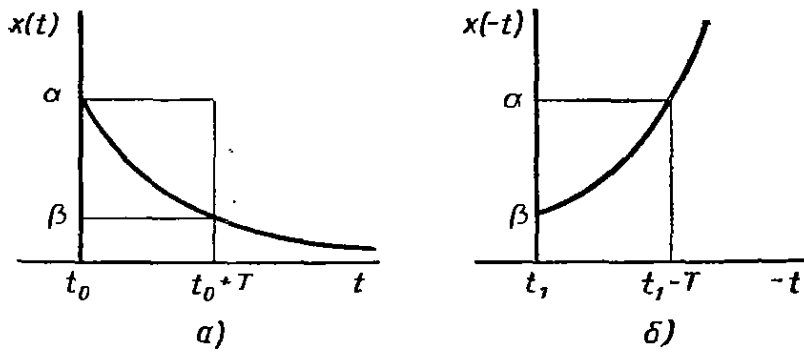


Рис. 3.4. Реакции стационарной системы первого порядка:

$a$  — обычная;  $b$  — обращенная во времени реакция системы, характеризуемой рис. 3.4,  $a$

(спустя  $T$  сек, т. е. при  $t = t_0 + T$ ,  $x(t_0 + T) = \beta$ ), то можно ожидать, что переходный процесс сопряженной системы, вызванный начальными условиями  $\beta$ , имеет вид, приведенный на рис. 3.4, б (через  $T$  сек ордината процесса должна равняться  $\alpha$ ). Такая картина сохраняется для любых  $t_0$  и  $T$  (для любых  $\alpha$  и  $\beta$ ). Эти наглядные представления можно сформулировать в виде некоторого условия, налагаемого на систему. Если  $\Phi(t, t_0)$  и  $\Psi(t, t_0)$  — соответственно одномерные переходные матрицы исходной и обращенной систем, то сказанное выше можно выразить уравнением

$$\Phi(t_1, t_0) = \Psi(t_0, t_1). \quad (3.55)$$

Таким образом, для линейной стационарной системы первого порядка сопряженная система в точности совпадает со свободной исходной системой при обращении в последней времени, как это показано нами для уравнения (3.55).

Для линейной нестационарной системы понятие обращенного времени проиллюстрировать значительно труднее. Однако для системы первого порядка с переходной матрицей  $\Phi(t, t_0)$  исходной системы и переходной матрицей  $\Psi(t, t_0)$  сопряженной системы можно показать, что уравнение (3.55) остается справедливым.

**Пример 3.14.** Решение системы  $\dot{x} = tx$  имеет вид

$$x = x_0 \left[ \exp \left( \frac{t^2 - t_0^2}{2} \right) \right],$$

а решение сопряженной системы  $\dot{\psi} = -t\psi$  — вид

$$\Psi = \Psi_0 \left[ \exp \left( \frac{t_0^2 - t^2}{2} \right) \right].$$

Из графиков решений еще не сразу ясно, что одно из них является обращением другого. Поскольку, однако,

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left( \frac{t^2 - t_0^2}{2} \right)$$

как линейное уравнение  $\dot{x} = ax$  свободной линейной системы, если не считать знака «минус» перед постоянной  $a$ . Поскольку для рассматриваемой системы первого порядка обращение времени и движения системы эквивалентно изменению знака перед  $\dot{x}$ , заключаем, что сопряженная система дает результат, совпадающий с результатом при обращении движения исходной свободной системы.

Можно более точно указать, что означает обращение системы во времени. Интуитивно ясно, что если переходный процесс, вызванный начальными условиями  $x(t_0) = \alpha$  при  $t = t_0$ , имеет вид, показанный на рис. 3.4, а



Рассмотрим импульс, соответствующий  $j$ -й компоненте в сопряженной системе, т. е. рассмотрим реакцию  $\Psi$  системы  $\dot{\Psi} = -A^T(t)\Psi + v(t)$ , где  $v(t)$  — вектор,  $j$ -й элемент которого представляет собой импульс  $\mu(t_0)$ , а все остальные элементы — нули;  $n$ -я составляющая вектора  $\Psi$  может быть тогда сразу записана как  $\psi_n = \xi_{nj}(t, t_0)$ , и согласно уравнению (3.58) получим

$$\psi_n(t, t_0) = \Phi_{jn}(t_0, t). \quad (3.60)$$

Мы видим, что, используя импульсную переходную функцию сопряженной системы, можно получить  $\Phi_{jn}$  с инвертированным порядком следования  $t_0$  и  $t$ . Это как раз то, что требуется, если отвлечься от факта нереализуемости  $\Phi_{jn}(t_0, t)$  для  $t_0 < t$ .

Однако, обращая время в сопряженной системе, находящейся под действием импульса, (т. е. производя подстановку  $\tau = t_1 - t$ , что соответствует обращению сопряженной системы), мы получим желаемый результат, если будем оперировать с  $\psi_n(t_1 - \tau, t_1)$ \*

Если для получения  $b_n(t_1 - \tau)$  обратить  $b_n(t)$ , то произведение  $\psi_n(t_1 - \tau, t_1) b_n(t_1 - \tau)$  даст  $x_j(t_1, t_0)$  как функцию  $t_0$ .

Заметим, что использование метода сопряженных систем встречает определенные трудности, в частности, при моделировании системы. Во-первых, при устойчивости исходной системы сопряженная система неустойчива и, следовательно, чувствительна к шумовым помехам и к неточностям в значениях параметров. Во-вторых, при нетривиальных задачах (например, линейная изменяющаяся во времени система с несколькими входами и выходами) использование сопряженной системы, аналогичное приведенному в примере 3.15, потребует значительно более сложных выкладок, чем в случае непосредственного исследования исходной системы.

При рассмотрении задач оптимизации (гл. 13—17) мы будем весьма часто использовать сопряженные системы.

### 3.9. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ, КОТОРЫЕ НЕ МОГУТ БЫТЬ ОПИСАНЫ ЧЕРЕЗ ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Существует класс линейных систем, которые не могут быть описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями конечного порядка. Примером таких систем являются системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Применительно к этим системам метод переменных состояния мало удобен. Поскольку, однако, система линейна, ее можно характеризовать импульсной переходной функцией  $g(t)$  и соотношение между входным и выходным сигналами выразить через интеграл свертки

$$y(t) = y(t_0) + \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.61)$$

где, как обычно,  $u(t)$  — входной, а  $y(t)$  — выходной сигналы.

**Пример 3.16.** Предположим, что нормированное напряжение на расстоянии  $x$  от конца идеализированной передающей  $RC$ -линии представляется функцией  $v(x, t)$ ; известно, что для этой линии справедливо следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \quad (3.62)$$

Реакция линии в точке  $x = x_1$  на входное напряжение  $v(0, t)$  (прикладывается на конце  $x = 0$ ) определяется уравнением

$$v(x_1, t) = v_0(x_1, t) + \int_0^t g(x_1, t - \tau) v(0, \tau) d\tau, \quad (3.63)$$

\* Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе [113].

по своему виду совпадающим с уравнением (3.61). Здесь  $v(x_1, t)$  — переходный процесс системы от начальных условий. Заметим, что даже при  $v(0, t) \equiv 0$  напряжение  $v(x_1, t)$  нельзя найти, если неизвестна функция  $v(x, 0)$  начального (при  $t = 0$ ) распределения напряжения вдоль передающей линии. Для линейной же системы с сосредоточенными параметрами требуется, как мы знаем, лишь конечное число начальных условий. Так как функция распределения напряжения соответствует системе с бесконечным числом степеней свободы, то приходим к заключению, что системы с распределенными параметрами, например передающая линия, могут быть представлены лишь в бесконечномерном пространстве состояний.

При исследовании связи между входом и выходом можно использовать интеграл свертки (3.63). В частности, для системы (3.62) можно проверить [см. упражнение 3.15], что переходный процесс от начальных условий определяется соотношением

$$v_0(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left( e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4t}} \right) v(\xi, 0) d\xi, \quad (3.64)$$

откуда импульсная переходная функция получается в следующем виде:

$$g(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (x \geq 0). \quad (3.65)$$

Интересно отметить, что для фиксированного значения  $x$  передаточная функция системы не является более отношением полиномов от  $s$ . В данном случае имеем

$$G(s) = \mathcal{L}[g(x, t)] = e^{-x\sqrt{s}}. \quad (3.66)$$

### 3.10. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей главе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с решением уравнений состояния системы. Найденное решение описывает траекторию в пространстве состояний системы.

Наиболее общим достаточным условием, которому должна удовлетворять система  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , чтобы иметь единственное решение, является условие Липшица (3.5). Для линейной системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  достаточным условием существования единственного решения является интегрируемость  $A(t)$  в смысле Римана.

В этом случае решение можно получить как функцию от переходной матрицы  $\Phi(t, t_0)$ , используя уравнения (3.16) или (3.22).

Переходная матрица линейной стационарной системы теоретически всегда может быть получена, причем для этого может быть использован любой из методов, рассмотренных в разделе 3.4. Однако для линейной изменяющейся во времени системы переходную матрицу можно получить только в отдельных случаях, часть из которых рассмотрена в § 3.7.

Связь между матричным уравнением в переменных состояния линейной инвариантной во времени системы и передаточной функцией этой системы рассмотрена в § 3.5.

Вопрос о том, существует ли управляющий сигнал  $u(t)$ , переводящий систему  $\dot{x} = f(x, u, t)$  из некоторого данного состояния в некоторое другое, зависит от свойства управляемости системы. Ответ на этот вопрос существует только для линейной стационарной системы. Основным положением здесь является то, влияет ли на данную переменную состояния данная составляющая управляющего сигнала. Исследование управляемости линейной стационарной системы сводится к определению ранга матрицы, зависящей от  $A$  и  $B$  (см. теорему 3.4).

Возможность определения начального состояния системы по записи выходного сигнала на конечном интервале времени зависит от свойства наблюдаемости системы. Этот вопрос опять полностью разрешим только в слу-



чае линейных стационарных систем, причем необходимые и достаточные условия определяются теоремой 3.5.

Любой линейной системе  $\dot{x} = A(t)x$  соответствует сопряженная система  $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ . Последняя в некотором смысле эквивалентна обратной во времени исходной системе. Сопряженная система бывает иногда полезной при выполнении расчетов и играет важную роль при решении задач оптимизации. Она рассматривается в § 3.8.

Общего метода решения нелинейной системы, если не считать численных методов, не существует. Даже в классе линейных систем имеются системы, не поддающиеся описанию уравнениями в переменных состояния.

### 3.11. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

3.1. Для системы  $\frac{1}{p^2 + 1}$  выберите переменные состояния, при которых элементы матрицы  $A$  получаются комплексными. Найдите матрицы  $A$ ,  $P$  и  $e^{At}$ . Найдите сопряженную систему. Все повторить при новых переменных состояния, выбранных из условия обеспечения действительных элементов матрицы  $A$ .

3.2. Покажите, что матрица  $\Phi^{-1}(t, t_0)$  может быть найдена из матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} \Phi^{-1}(t, t_0) = -\Phi^{-1}(t, t_0) A$$

при начальных условиях  $\Phi^{-1}(t_0, t_0) = I$  [У к а з а н и е. Целесообразно начать с рассмотрения  $\frac{d}{dt} (\Phi^{-1}(t, t_0) \Phi(t, t_0))$ ].

3.3. Для системы, характеризуемой матрицами

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

покажите, что матрица  $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$  при  $b_3 = 0$  является особой.

3.4. Сформулируйте условия, наложение которых на линейную автономную систему делает начало координат единственным равновесным состоянием.

3.5. Покажите, что в общем случае линейной нестационарной системы  $\dot{x} = A(t)x$  переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$  может быть получена в виде ряда Неймана

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = & I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \\ & + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \int_{t_0}^{\tau_2} A(\tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 + \dots \end{aligned}$$

(У к а з а н и е: дифференцируйте обе части этого выражения по  $t$ ).

3.6. Если на систему действует входной сигнал стандартного вида (например, синусоидальный), то эту систему можно преобразовать в свободную, добавляя новые переменные состояния. Например, синусоидальный сигнал с частотой  $a$  можно рассматривать как выходной сигнал автономной системы  $\frac{1}{p^2 + a^2}$ , если соответствующим образом выбрать начальные условия. Следовательно, за счет добавления двух новых переменных состояния рассматриваемая система, находящаяся под действием входного сигнала, преобразуется в автономную систему.

Используя изложенный подход, найдите реакцию системы  $\frac{k}{p(p+a)}$  на входной сигнал  $A \sin \omega t$  путем определения переходной матрицы преобразованной системы. Сравните получающиеся при этом затраты труда со случаем непосредственного применения уравнения (3.22).

### 3.7. Для линейной системы

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = z_1 + u$$

получите:

- передаточную функцию  $G(s)$ , связывающую входной  $u$  и выходной  $y$  сигналы;
  - уравнения состояния в канонической форме, используя переменные состояния  $x_1, x_2$ ;
  - уравнения состояния в нормальной форме, используя переменные состояния  $y_1, y_2$ ;
- кроме этого, для исходных  $(z_1, z_2)$ , канонических  $(x_1, x_2)$  и нормальных  $(y_1, y_2)$  переменных состояния исследуйте полную управляемость в отношении входного сигнала  $u$  и полную наблюдаемость в отношении выходного сигнала  $y$ .

3.8. Для линейной системы, описываемой уравнением

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = [0, 1, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

найдите:

- переходную матрицу  $\Phi(t, t_0)$ ;
- импульсную переходную функцию  $g(t)$  по выходному сигналу  $y$  в отношении входного сигнала  $u$ ;
- переходный процесс  $y(t)$  от начальных условий (при нулевом входном сигнале).

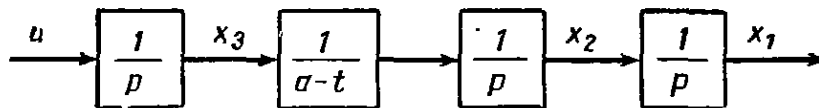


Рис. 3.5. Структурная схема системы, рассматриваемой в упражнении 3.10

Кроме этого, определите, является ли система полностью управляемой в отношении входного сигнала  $u$  и полностью наблюдаемой в отношении выходного сигнала  $y$ .

3.9. Каждая из функций  $f_1(x), \dots, f_4(x)$  удовлетворяет условиям  $f(x) = 1$  при  $x > 1$  и  $f(x) = -1$  при  $x < -1$ . В интервале  $-1 \leq x \leq 1$  функции различны и выражаются соответственно  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = 0$ ;  $f_3(x) = x^3$ ;  $f_4(x) = \arcsin \frac{\pi}{2} x$ .

Установите, удовлетворяются ли для каждой из функций условия Липшица в большом. В случае удовлетворения этих условий найдите постоянную Липшица.

3.10. Для системы, показанной на рис. 3.5, найдите переходную матрицу  $\Phi(t, t_0)$ . Постройте кривую  $x_1(t)$  для случая, когда  $u(t)$  — единичный импульс. Прodelайте это для различных значений  $t_0$ , где  $t_0$  — время приложения импульса.

3.11. Покажите, что для любой постоянной квадратной матрицы  $A$  имеет место  $Ae^{At} = e^{At}A$ .

3.12. Для системы, изображенной на рис. 2.16, найдите переходную матрицу  $e^{At}$  для случая, когда нелинейная функция  $u(t) = f(e(t))$  заменена постоянным коэффициентом усиления  $k$ , т. е.  $u(t) = ke(t)$ .

Найдите реакцию системы в следующих случаях:

- $n(t) = 0$ ,  $r(t)$  — единичная ступенчатая функция;
- $r(t) = 0$ ,  $n(t)$  — единичный импульс;
- $r(t)$  — импульс при  $t = 0$ , а  $n(t)$  — импульс при  $t = t_1 > 0$ .

3.13. Докажите, что в случае постоянной матрицы  $A$  типа  $n \times n$  каждый элемент матрицы  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  представляет собой рациональную функцию  $s$ , знаменатель которой имеет степень  $n$ , а числитель — степень, всегда меньшую  $n$  (см. приложение I).

3.14. Пусть для системы, описываемой уравнением  $t^2\ddot{x} + 4t\dot{x} + 2x = u(t)$ ,  $x(t, t_0)$  — импульсная переходная функция для  $t \geq t_0$ , где  $u(t)$  — импульс, прикладываемый в момент  $t_0$ . Рассчитайте и постройте кривые  $x(t, 0)$ ;  $x(t, 2)$ ;  $x(t, 4)$ ;  $x(t, 6)$  как функции  $t$ .

Из кривых по пункту а) получите и постройте кривые  $x(2, t_0)$ ;  $x(3, t_0)$  как функции  $t_0$ .

3.15. Проверьте, что выражения (3.63) и (3.65) удовлетворяют уравнению (3.62). Докажите справедливость формулы (3.66).

3.16. Для каждой из приводимых ниже линейных систем найдите переходную матрицу и определите реакцию  $y(t)$  на единичный импульс по  $u(t)$ , а также установите, является ли система управляемой, а выходной сигнал наблюдаемым:

а)  $\dot{x}_1 = -x_1 - u; \quad \dot{x}_2 = x_1 + u; \quad y = x_2;$

б)  $\dot{x}_1 = u; \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2; \quad y = \dot{x}_1 + x_2;$

в)  $\dot{x}_1 = -3x_1 + 5u; \quad \dot{x}_2 = -8x_1 - 5x_2; \quad y = x_1 + x_2;$

г)  $\dot{x}_1 = -5x_1 - 8u; \quad \dot{x}_2 = 5x_1 + 3x_2 + 5u; \quad y = x_2.$

3.17. Покажите, что для линейного стационарного объекта  $\dot{x} = Ax + Bu$  матричная передаточная функция  $N(s)$ , определяемая выражением (3.44), инвариантна в отношении выбора переменных состояния.

3.18. Сформулируйте условия, при которых матричная передаточная функция  $N(s)$ , даваемая выражением (3.44), однозначно определяет матрицы  $A$  и  $B$  системы, записанной в нормальной форме.

3.19. Для ракеты в примере 3.5 исследуйте полную управляемость в следующих переменных состоянии:

а) переменные состояния  $(\theta, \omega, \alpha);$

в) нормальные переменные состояния  $(a_N, \dot{a}_N, \ddot{a}_N);$

с) канонические переменные состояния.

Исследуйте полную наблюдаемость выходного сигнала  $a_N(t)$  в каждом из указанных случаев (за входной сигнал во всех случаях принимается  $\delta(t)$ ).

### 3.12. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Работы [381, 11511, 11821, 11881 и 12061] продолжают оставаться лучшими руководствами по материалу, рассмотренному в этой главе. Можно также рекомендовать монографии [781 — гл. 1 и 2 и 11841 — гл. 1—4. Кроме того, полезным руководством по общим математическим вопросам теории линейных систем, включая методы исследования во временной и частотной областях, является работа [1021].

## СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ

Существует несколько причин, в силу которых изучение фазового пространства двух измерений, или фазовой плоскости, является необходимым. Одно из основных достоинств фазовой плоскости — ее наглядность. Кроме того, многие практически важные и достаточно сложные динамические системы можно сравнительно точно аппроксимировать системами второго порядка и в дальнейшем анализировать поведение последних на фазовой плоскости. Фазовая плоскость широко использовалась уже в конце прошлого столетия в работах по классической механике, и в частности, в работах А. Пуанкаре \*.

Как и всякий метод, метод фазовой плоскости имеет ограниченный диапазон применения. Наиболее существенное ограничение заключается в том, что указанный метод неприемлем для анализа систем, которые не удастся свести к системам второго порядка \*\*. Второе важное ограничение — это возможность достаточно просто анализировать лишь поведение автономных стационарных систем. Если же входное воздействие не равно нулю или система нестационарна, то траектории пересекаются и зависят от большого числа параметров, поэтому не удастся получить не только количественного, но и качественного описания динамики системы \*\*\*.

---

\* Работой А. Пуанкаре (Poincaré A. Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste, Vols I и II, Paris, Gauthier — Villars, 1892—1893 и в особенности работой Леaute M. H. Memoire sur les Oscillations a Longues périodes dans les machines actionnees par des Moteurs Hydrauliques et sur les Moyens de Prévenir ces Oscillations. Journ. de Recole Polytech, 1885.) были заложены теоретические основы метода фазовой плоскости. Однако их широкое практическое применение в автоматике началось после работ А. А. Андропова и его учеников, существенно развивших этот метод. См., например, 1) Андронов А. А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. «Доклады VI съезда русских физиков», 1928, стр. 23—24. 2) Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Ч. 1, ОНТИ, М.—Л., 1937 или Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний, 2-е изд. переработ. и доп. Н. А. Железцовым. М., Физматгиз, 1959. 3) Андронов А. А. Собрание трудов. М., изд. АН СССР, 1956 (Прим. ред.).

\*\* В настоящее время существует целый ряд методов, позволяющих анализировать системы в фазовом пространстве (например, метод сечения пространства параметров подвижной фазовой плоскостью, разработанный Р. А. Нелепиным). См.: 1) Нелепин Р. А. «Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем. Изд-во «Судостроение», Л., 1967. 2) Нелинейные системы автоматического управления. Под общ. ред. Е. П. Попова. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1970 (Прим. ред.).

\*\*\* Однако следует отметить, что анализ на фазовой плоскости достаточно прост и в том случае, когда стационарная система второго порядка возбуждается входным сигналом типа единичного скачка или функции, изменяющейся по линейному закону. Тогда с помощью метода фазовой плоскости удастся анализировать и простейшие нестационарные системы.

В этой главе мы обсудим приемы анализа систем на фазовой плоскости. Начав с примера, перейдем к анализу отдельных точек и целых зон равновесия. Затем рассмотрим фазовые траектории линейной системы и приступим к изучению предельных циклов в нелинейных системах, попутно остановившись на многообразии видов поведения нелинейных систем. В заключение изложим методы построения фазовых портретов.

#### 4.1. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ТРАЕКТОРИЙ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Прежде всего рассмотрим одну линейную систему второго порядка, чтобы показать целесообразность ее анализа с помощью фазовой плоскости.

**Пример 4.1.** Рассмотрим задачу управления движением искусственного спутника Земли в плоскости тангажа. В процессе управления требуется непрерывно осуществлять ориентацию антенны спутника на выбранные звездные ориентиры (рис. 4.1). Управление положением достигается с помощью пары двигателей, работающих в релейном режиме, что позволяет создать максимальный управляющий момент величиной  $T$  или иметь нулевое управление. Пусть звездный ориентир расположен под углом  $\theta$  к оси телескопа, тогда уравнение движения спутника под действием управляющего момента  $\tau$  от реактивных двигателей можно записать в виде

$$J\ddot{\theta} = \tau, \quad (4.1)$$

где  $J$  — момент инерции искусственного спутника Земли;  $\tau$  — управляющий момент, который может принимать значения  $+Ju$ ,  $-Ju$  или  $0$ .

Пусть  $u = \frac{\tau}{J}$  и

$$x_1 = \theta; \quad x_1(t_0) = x_{10}; \quad x_2 = \dot{\theta}; \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad (4.2)$$

тогда уравнение (4.1) можно преобразовать к виду

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u. \quad (4.3)$$

Структурная схема такой системы показана на рис. 4.2. Рассмотрим, пользуясь рис. 4.2, следующие случаи.

**Случай 1:**  $u = 0$ . Уравнения (4.3) сводятся к системе  $\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = 0$ , решение которой имеет вид

$$x_2 = x_{20}; \quad x_1 = x_{10} + x_{20}t.$$

Траектории этой системы на фазовой плоскости (фазовый портрет), зависящие от начальных условий  $x_{10}$  и  $x_{20}$ , показаны на рис. 4.3, а.

Траектории являются прямыми линиями, параллельными оси  $x_1$ . Движение по траекториям, расположенным над осью  $x_1$ , происходит с течением времени в направлении роста координаты  $x_1$ ; движение по траекториям в нижней полуплоскости — в направлении убывания координаты  $x_1$ . На самой оси  $x_1$  движения не происходит, поскольку  $x_2 = \dot{x}_1 = 0$ . Все это означает, что в отсутствие управляющего момента искусственный спутник будет вращаться с постоянной угловой скоростью, определяемой начальными условиями.

Для рассматриваемого случая условия равновесия выполняются, если  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$  и, следовательно, ось  $x_1$  является зоной равновесных состояний.

**Случай 2:**  $u = +U$ . Интегрируя уравнения системы (4.3), получим

$$x_1 = x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}Ut^2; \quad x_2 = x_{20} + Ut.$$

где  $x_{10}$  и  $x_{20}$  — начальные условия.

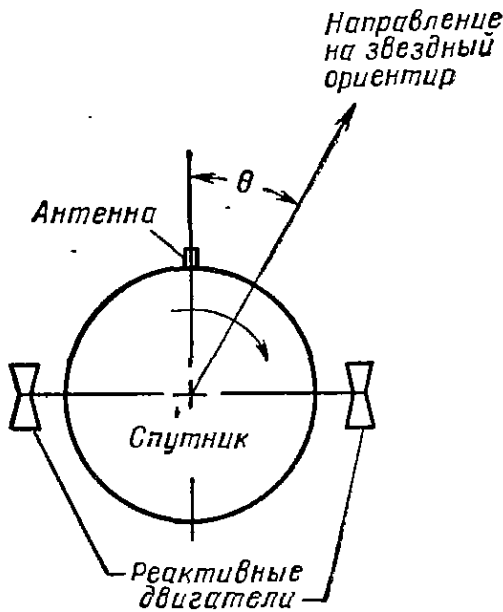


Рис. 4.1. Схема управления положением искусственного спутника Земли в плоскости тангажа при его ориентации на звезду

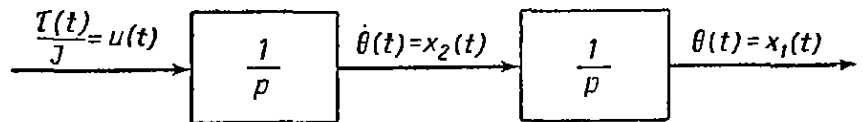


Рис. 4.2. Структурная схема искусственного спутника Земли как объекта управления

Поскольку траектории движения следует строить на плоскости в координатах  $x_2$  и  $x_1$ , то необходимо исключить время. Это можно выполнить следующим образом. Запишем соотношение

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = \frac{x_2}{U} \quad \text{при } u = +U; \quad (4.4)$$

интегрируя полученное дифференциальное уравнение, получим

$$\frac{x_2^2}{2} - Ux_1 = c \quad \text{для } u = +U, \quad (4.5)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования.

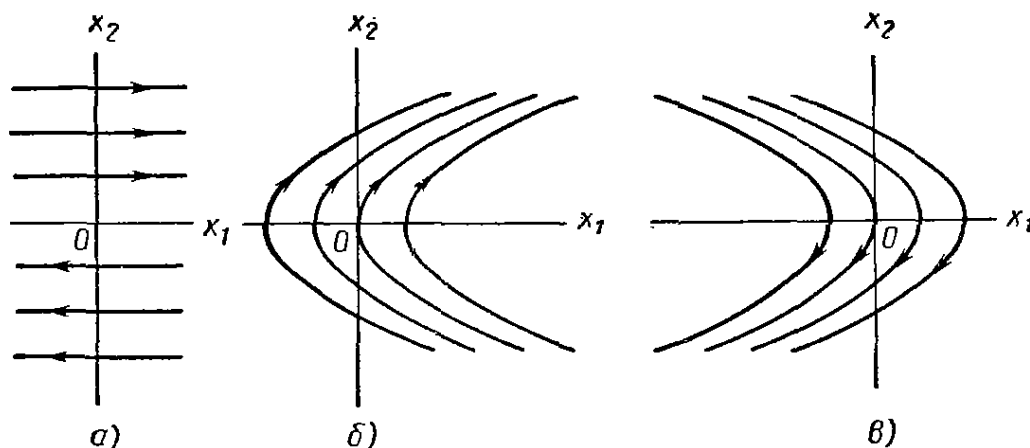


Рис. 4.3. Траектории движения спутника Земли в координатах  $(x_1, x_2)$ :

$a$  — при  $u = 0$ ;  $b$  — при  $u = +U$ ;  $v$  — при  $u = -U$

Таким образом, траектории системы представляют параболы, изображенные на рис. 4.3, б. Нетрудно заметить, что все эти параболы имеют одинаковый вид.

Из рис. 4.3, б также видно, что есть лишь одна парабола, проходящая через начало координат. Если начальные условия таковы, что изображающая точка расположена ниже оси  $x_1$  на параболе, проходящей через начало координат, то, приложив момент  $+U$  при движении к началу координат и выключив реактивные двигатели при достижении начала координат, мы осуществим требуемую ориентацию телескопа, установленного на искусственном спутнике Земли, на звезду. При других начальных условиях, используя только положительный управляющий момент, этого добиться нельзя.

Следует также отметить, что в рассматриваемом случае при  $u = +U$  на фазовой плоскости не существует ни одного положения равновесия.

С л у ч а й 3:  $u = -U$ . Этот случай подобен случаю 2.

Заменяя в уравнениях (4.4) и (4.5)  $+U$  на  $-U$ , получим

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{U} \quad \text{для } u = -U. \quad (4.6)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{x_2^2}{2} + Ux_1 = c \quad \text{при } u = -U, \quad (4.7)$$

где, как и раньше,  $c$  — постоянная интегрирования.

Фазовый портрет представляет семейство парабол, показанных на рис. 4.3, в. Лишь в том случае, когда в начальный момент времени изображающая точка расположена на кривой, проходящей через начало координат рис. 4.3, в, можно достичь начала координат, приложив единственное управление  $-U$ . В этом случае также отсутствуют положения равновесия на всей фазовой плоскости.

С л у ч а й 4. Замкнув объект управления с помощью обратной связи и реле, мы получим простейшую систему автоматического управления (рис. 4.4). Здесь осуществлена связь

выходного сигнала  $x_1(t)$  (угловое положение спутника  $\theta(t)$ ) с управляющим сигналом  $u(t)$  или, по существу, с реактивным моментом  $\tau(t) = \frac{u(t)}{J}$  с помощью реле

$$u(t) = -U \operatorname{sign} x_1(t), \quad (4.8)$$

где  $\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

Выбирая требуемые сочетания траекторий на рис. 4.3, б и в с учетом управления (4.8), получим фазовый портрет системы с обратной связью, как показано на рис. 4.5. Каждая из фазовых траекторий является замкнутой и определяется начальными условиями. Таким обра-

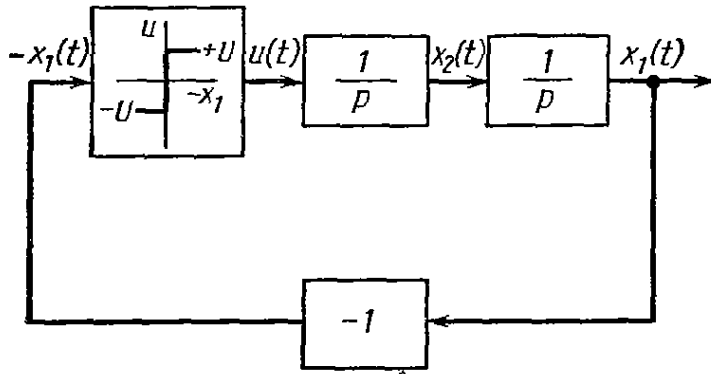


Рис. 4.4. Простейшая структурная схема системы управления искусственным спутником Земли

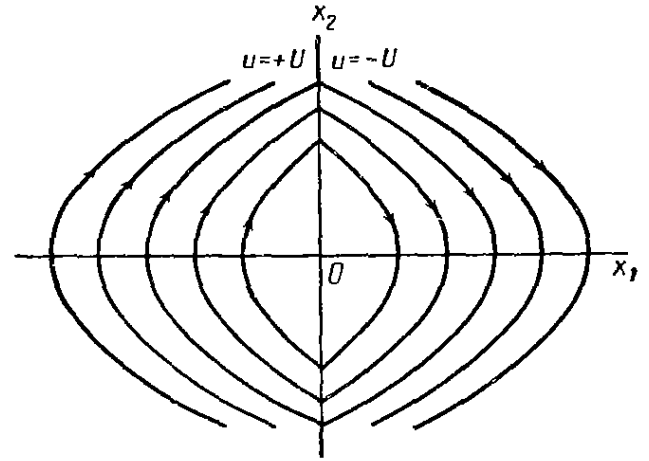


Рис. 4.5. Фазовый портрет для системы управления, изображенной на рис. 4.4

зом, в системе возникает и не прекращается движение в предельном цикле до тех пор, пока топливо не будет израсходовано полностью. При этом спутник совершает незатухающие колебания относительно положения равновесия. Колебания в значительной степени присущи именно нелинейным системам, и поэтому при рассмотрении нелинейных систем их анализу уделяется большое внимание.

**С л у ч а й 5.** Введем в систему управления (рис. 4.4) идеальное дифференцирующее звено первого рода  $(p+a)$ . Это сделано для того, чтобы в системе не возникали колебания,

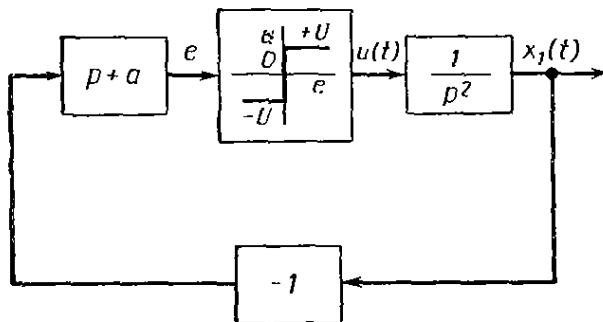


Рис. 4.6. Система управления искусственного спутника Земли с включенной идеальной фазопережающей цепью  $p+a$

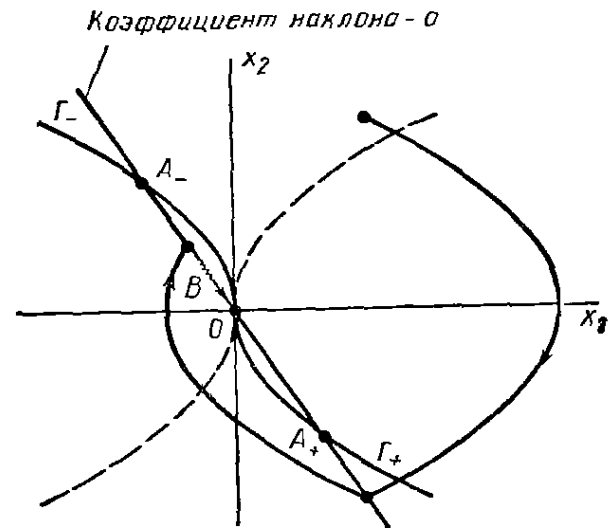


Рис. 4.7. Типовые траектории движения искусственного спутника Земли (волнистой линией на участке В обозначено движение в скользящем режиме)

а координаты  $x_1$  и  $x_2$  монотонно приближались к началу координат. Тогда телескоп будет непрерывно отслеживать положение звездного ориентира.

Допустим, что сигнал, прежде чем включить двигатель, подвергается фазопережающей линейной коррекции. В этом случае в системе реализуется элемент предсказания. Для того чтобы оставаться в рамках систем второго порядка, рассмотрим идеальную фазопережающую цепь вида  $p+a$ . Тогда система управления искусственного спутника Земли может быть представлена структурной схемой, показанной на рис. 4.6.

Для данной схемы управление принимает вид

$$u(t) = -U \operatorname{sign}(\dot{x}_1 + ax_1) = -U \operatorname{sign}(x_2 + ax_1). \quad (4.9)$$

Это означает, что вместо прежней линии переключения, которой была ось  $x_2$ , формируется линия переключения в виде прямой

$$x_2 + ax_1 = 0, \quad (4.10)$$

имеющая наклон  $a$ . Последняя лежит во втором и четвертом квадрантах при  $a > 0$ , как показано на рис. 4.7.

Траектории движения могут быть найдены путем интегрирования следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; & \dot{x}_2 &= -U \text{ при } x_2 + ax_1 > 0; \\ \dot{x}_1 &= x_2; & \dot{x}_2 &= +U \text{ при } x_2 + ax_1 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Линия переключений делит все фазовое пространство на две полуплоскости, в каждой из которых траектории определяются уравнениями (4.5) или (4.7). Сшивая отдельные части парабол, можно получить полную траекторию движения изображающей точки при произвольных начальных условиях. Выполняя эти построения, мы обнаруживаем, что в системе возникает скользящий режим (рис. 4.7).

Рассмотрим параболы, проходящие через начало координат, и, в частности, те их части, которые обозначены как  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ . Линия переключения при  $a > 0$  обязательно пересекает эти ветви парабол в точках  $A_+$  и  $A_-$  соответственно. Поэтому существуют такие области начальных условий, при движении из которых изображающая точка, прежде чем попасть на линию переключения, пересекает линию  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ . Сменив знак управления, изображающая точка пересекает ту же линию  $\Gamma$ , но ближе к началу координат. И так происходит до тех пор, пока изображающая точка не окажется на линии переключения между точками  $A_-$  и  $A_+$ . В этом случае, прежде чем попасть на линию  $\Gamma$ , точка попадает на линию переключения. Сразу после переключения реле траектория будет опять направлена к линии переключения, и реле переключится вновь. Таким образом, реле будет непрерывно переключаться, пока изображающая точка расположена на этой линии. В системе возникает скользящий режим\*. Из физических соображений ясно, что и в скользящем режиме движение направлено к началу координат вдоль линии переключения. Таким образом, мы выполнили поставленную перед нами цель задемфировать движение системы. Однако выбранный нами путь оказывается недостаточно эффективным.

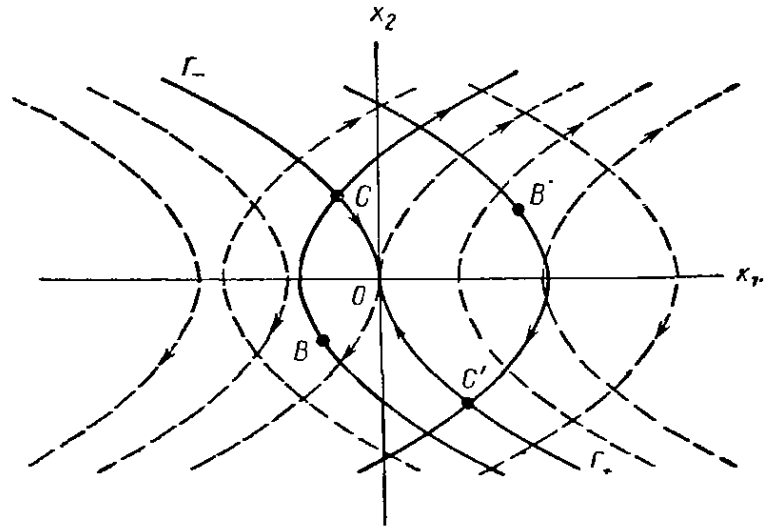


Рис. 4.8. Траектории движения системы с оптимальным демпфированием, когда знак управляющего воздействия изменяется при пересечении с линиями переключения  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$

**С л у ч а й 6.** Рассмотрим теперь схему, обеспечивающую «оптимальное» демпфирование в системе управления при любых начальных условиях  $(x_{10}, x_{20})$ . Как и раньше, управление  $u(t)$  может принимать лишь значения  $+U$ ,  $-U$  или  $0$ . Переносим траектории рис. 4.3, б, в на рис. 4.8, получим множество кривых. Заметим, что начала координат можно достичь лишь по двум из этих траекторий, обозначенных, как и на рис. 4.7, через  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ .

Будем считать, что мы начинаем движение из некоторой произвольной точки  $B$  фазовой плоскости рис. 4.8. Наиболее разумным управлением для достижения начала координат будет управление  $u = +U$ , которое приведет вектор состояния системы в точку  $C$  на ветви  $\Gamma_-$ . В этот момент управляющее воздействие следует сменить на  $u = -U$ , что заставит изображающую точку двигаться вдоль  $\Gamma_-$ . В тот момент, когда изображающая точка достигнет начала координат, управление следует положить равным  $0$ . Аналогичная стратегия лишь при обратных знаках управляющих моментов приведет изображающую точку в начало координат из точки  $B'$ .

Из рис. 4.8 следует, что как только фазовая траектория достигает кривых  $\Gamma_+$  или  $\Gamma_-$ , управление меняет знак, и дальнейшее движение к началу координат происходит вдоль этих кривых. Таким образом, в данном случае линией переключения является объединение кри-

\* Частота и амплитуда этого «дребезга» (скользящего режима) на практике определяются динамическими свойствами неучтенных элементов системы. Если порядок рассматриваемой системы на самом деле равен двум, то частота переключений бесконечна, а амплитуда равна нулю. В этом случае говорят, что происходит скольжение вдоль линии переключения.



вых  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ . Такой способ управления позволяет провести изображающую точку из произвольных начальных условий в начало координат.

Если начальная точка  $(x_{10}, x_{20})$  расположена левее линии переключения, то выбираем управление  $u = +U$ , которое сохраняется вплоть до попадания на линию переключения. Затем оно изменяется на  $u = -U$ , пока изображающая точка не достигает начала координат; после чего управление полагаем равным  $u = 0$ . Если вектор начального состояния системы  $(x_{10}, x_{20})$  лежит правее линии переключения, то последовательность управляющих воздействий остается той же, но изменяется знак этих воздействий. Уравнение линии переключения можно получить из уравнений (4.5) и (4.7) при  $c = 0$  в виде

$$Ux_{1s} + \frac{1}{2} |x_{2s}| x_{2s} = 0, \quad (4.12)$$

где  $(x_{1s}, x_{2s})$  — фазовые координаты линии переключения. При этом управляющее воздействие в функции фазовых координат формируется следующим образом:

$$u = -U \operatorname{sign} \left[ Ux_1 + \frac{1}{2} |x_2| x_2 \right] = \begin{cases} +U, & x_1 < \frac{|x_2| x_2}{2U}; \\ -U, & x_1 > \frac{|x_2| x_2}{2U}. \end{cases} \quad (4.13)$$

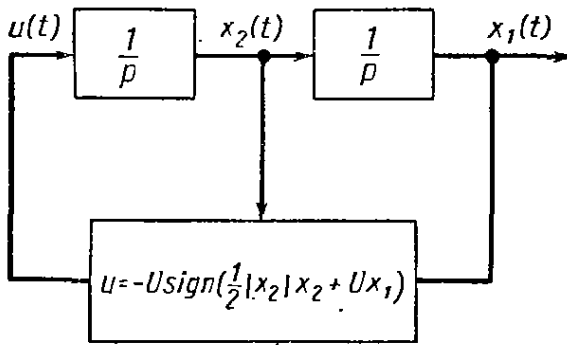


Рис. 4.9. Реализация структурной схемы системы управления спутником Земли, обеспечивающая «оптимальное демпфирование»

С учетом соотношения (4.13) уравнение (4.3) принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -U \operatorname{sign} \left[ Ux_1 + \frac{1}{2} |x_2| x_2 \right]. \quad (4.14)$$

Отметим, что спроектированная таким образом система с обратной связью не имеет входа. Поскольку ее поведение не зависит от времени, то это автономная система. Структурная схема такой системы показана на рис. 4.9.

Если управляющий момент ограничен величиной  $U$ , то следует ожидать, что рассматриваемая система есть в некотором смысле наилучшая система, поскольку в любой момент времени в ней реализуется предельный уровень управления. Как будет показано ниже, такая система управления является оптимальной в том смысле, что из любых начальных условий начало координат достигается за минимальное время.

Рассмотрение такого рода оптимальных систем будет продолжено в гл. 12 и последующих главах.

## 4.2. СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ЗОНЫ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ АУТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Как уже было показано в гл. 3, состояние равновесия  $x_e$  определяется из условия

$$\dot{x} = 0 \text{ при } x = x_e. \quad (4.15)$$

Для автономной системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (4.16)$$

состояние равновесия определяется из условия

$$f_1(x_{1e}, x_{2e}) = 0; \quad f_2(x_{1e}, x_{2e}) = 0. \quad (4.17)$$

Из примера 4.1 видно, что возможен случай, когда каждая точка некоторой линии является положением равновесия, т. е. существует целая зона равновесных состояний. Правда, в рассмотренном примере это имело место при некоторых исключительных условиях, когда  $u = 0$ . Однако и в ряде используемых на практике нелинейных систем такие зоны существуют. Рассмотрим два примера.

Пример 4.2. Так называемое «кулоново трение» приближенно описывает действие силы трения на тяжелое тело, которое перемещается по некоторой плоской поверхности. Важным свойством характеристики кулонова трения является ее разрывная зависимость от скорости перемещения тела. Допустим, что система, изображенная на рис. 4.10, начинает движение, тогда ее уравнение движения при условии, что пружина и демпфер имеют линейные характеристики, можно записать в виде

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x + f(\dot{x}) = 0; \quad a_1, a_2 > 0. \quad (4.18)$$

Здесь нелинейная функция  $f(\dot{x})$  характеризует кулоново трение. Если силой трения покоя можно пренебречь, то

$$f(\dot{x}) = \begin{cases} +c, & \dot{x} > 0; \\ -c, & \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (4.19a)$$

где  $c$  — константа. При такой идеализации  $f(0)$  не определено, но из физических соображений ясно, что эта сила находится в пределах от  $-c$  до  $+c$  в зависимости от конкретных условий. Следовательно,

$$-c \leq f(0) \leq c. \quad (4.19b)$$

В этом случае положениями равновесия являются все те точки, для которых выполняется условие  $a_2 x + f(0) = 0$ . Поскольку  $-c \leq f(0) \leq +c$ , то положения равновесия  $x_e$  должны лежать на оси  $\dot{x} = 0$  между точками  $x = -\frac{c}{a_2}$  и  $x = \frac{c}{a_2}$ .

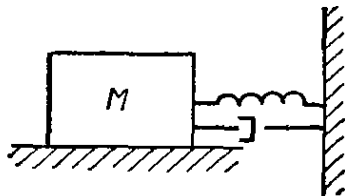


Рис. 4.10. Механическая система (масса, пружина и жидкостное трение)

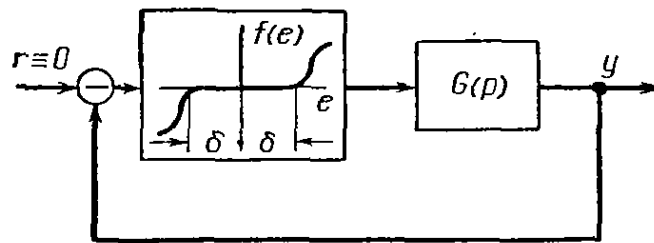


Рис. 4.11. Схема нелинейной системы управления (к примеру 4.3)

Эта зона равновесных состояний на оси  $x \left\{ -\frac{c}{a_2} < x < \frac{c}{a_2} \right\}$  обладает свойством устойчивости. Допустим, что, находясь в указанной области, изменилась скорость  $\dot{x}$ , став  $\dot{x} > 0$ ; тогда в силу уравнения (4.18) и соотношения (4.19)  $\ddot{x} < 0$  и скорость начнет уменьшаться, стремясь к нулю, т. е. к положению равновесия. Аналогичное явление имеет место, если возмущение  $x < 0$ . На основании этого заключаем, что область  $\left\{ \dot{x} = 0; -\frac{c}{a_2} < x < \frac{c}{a_2} \right\}$  является зоной равновесия (см. упражнение 4.1).

Пример 4.3. Обратимся к системе, показанной на рис. 4.11. В нее входят линейный элемент с передаточной функцией  $G(p)$  и нелинейный элемент с характеристикой  $f(e)$ , причем  $f(e) = 0$  при  $-\delta \leq e \leq \delta$ .

Если  $G(p)$  описывает линейную систему второго порядка с одним интегралом, то уравнения такой системы в нормальной форме будут

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -ax_2 + f(-x_1); \quad y = x_1 = -e.$$

В этом случае положения равновесия определяются из условия  $f(-x_1) = 0$ . Последнее означает, что отрезок  $\{x_2 = 0; -\delta \leq x_1 \leq \delta\}$  является зоной равновесных состояний.

Отметим, что, исключая время в уравнениях (4.16), можно получить дифференциальное уравнение только относительно переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Деля одно из уравнений (4.16) на другое, получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (4.20)$$

Производная  $\frac{dx_2}{dx_1}$  представляет тангенс угла наклона фазовой траектории к оси  $x_1$ . Из уравнений (4.17) и (4.20) следует, что в точках  $x_{1e}, x_{2e}$ , соответствующих положениям равновесия, направление фазовых траекто-

рий не определено; в любой другой точке фазовой плоскости оно определено однозначно. Тогда анализ поведения вблизи положений равновесия позволяет говорить о свойствах этого равновесного состояния. В следующем разделе мы проанализируем траектории линейных систем вблизи положения равновесия.

### 4.3. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ АВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для линейных автономных систем, описываемых уравнением  $\dot{x} = Ax$ , фазовые координаты положения равновесия  $x_e$  определяются из условия  $Ax_e = 0$ . Заметим, что решение  $x_e = 0$  является единственным решением данного уравнения, когда определитель матрицы  $A$  не равен нулю. На основании этого получим следующую теорему.

**Теорема 4.1.** Начало координат линейной автономной системы  $\dot{x} = Ax$  есть единственное положение равновесия при условии  $|A| \neq 0$ .

В частности, если все собственные значения матрицы системы отличны от нуля, то начало координат — единственное положение равновесия (почему?). Если это так, то достаточно проанализировать траектории системы лишь в окрестности начала координат. Кроме того, в этом случае оказывается возможным, по крайней мере качественно, оценить характер траекторий системы на всей фазовой плоскости, анализируя их поведение вблизи начала координат.

Из последующего изложения будет ясно, что анализ траекторий линейных систем удобнее проводить при описании их в канонической форме, поскольку при таком представлении каждая составляющая общего движения определяется одним из собственных значений. Однако, как правило, в качестве фазовых координат выбираются выходная координата системы  $y$  и ее скорость  $\dot{y}$ , что соответствует нормальной форме записи уравнений системы. Связь между нормальной и канонической формами записи определяется линейным преобразованием\* (в частном случае, когда все  $\lambda$  — различные корни, матрицей преобразования является матрица Вандермонда, как это было показано в гл. 3). Кроме того, начало координат в нормальных фазовых координатах соответствует началу координат в канонических фазовых координатах. Естественно ожидать, что основные черты поведения фазовых траекторий вблизи начала координат сохраняются при переходе от одной системы координат к другой; при этом изменяется лишь форма кривых. Тогда без ограничения общности, можно изучать траектории системы лишь в канонической системе координат. Уравнения системы второго порядка с различными полюсами в канонической форме запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1; & x_1(0) &= x_{10}; \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2; & x_2(0) &= x_{20}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Решение системы (4.21) очевидно и равно

$$x_1(t) = x_{10}e^{\lambda_1 t}; \quad x_2(t) = x_{20}e^{\lambda_2 t}. \quad (4.22)$$

**С л у ч а й 1.** Оба собственных значения не равны нулю и представляют собой действительные числа одного знака. Из уравнений (4.21) следует

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{x_2}{x_1}, \quad (4.23)$$

\* В общем случае это преобразование не будет ортогональным и, следовательно, не эквивалентно простому повороту осей (см. приложение I).

откуда найдем

$$x_2 = cx_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (4.24)$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

Уравнение (4.24) определяет вид фазовых траекторий, которые изображены на рис. 4.12, *а* для случая  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , а на рис. 4.12, *б* — для случая  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .

Положения равновесия в начале координат, как они показаны на рис. 4.12, называются узловыми точками (узлами). Это устойчивые узлы, так как собственные числа  $\lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ). Если же собственные числа

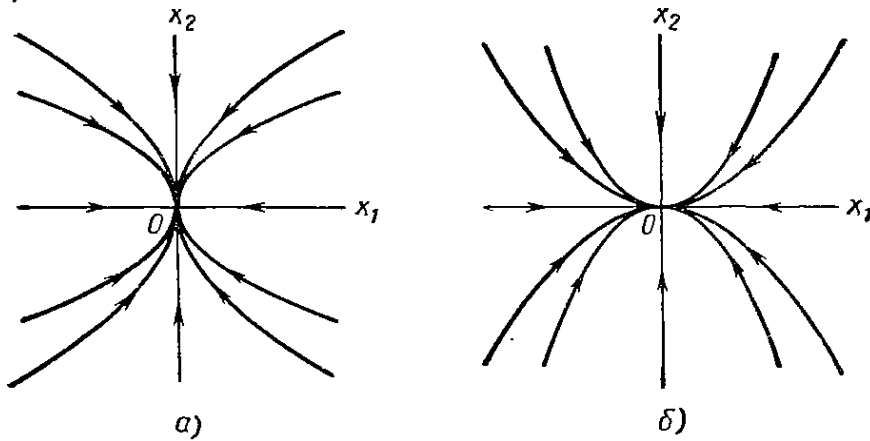


Рис. 4.12. Вид фазовых траекторий в канонических координатах для системы второго порядка, имеющей собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

*а* — при  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ; *б* — при  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

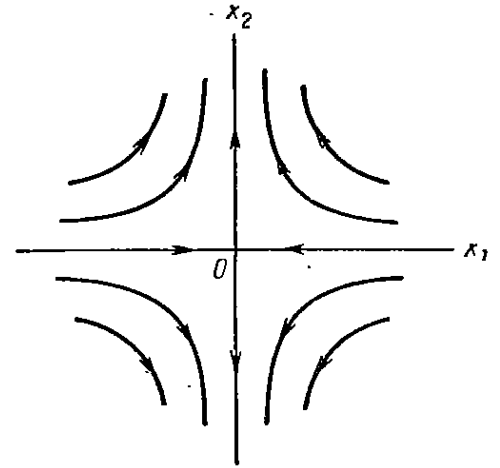


Рис. 4.13. Вид фазовых траекторий в канонических координатах для системы второго порядка, имеющей собственные значения, удовлетворяющие условию  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

положительны, то узлы неустойчивы, и хотя вид фазовых траекторий сохраняется, однако движение по ним направлено в противоположную сторону.

**С л у ч а й 2.** Оба собственных значения не равны нулю — действительные числа разных знаков. Из уравнений (4.22) или (4.24) для этого случая следует, что фазовый портрет имеет вид, показанный на рис. 4.13. Такой тип положения равновесия называется седловой точкой. Этим отмечается тот факт, что всякое движение, приближающееся к этой точке, в конце концов направлено от нее. Нет необходимости дополнительно пояснять, что седловая точка неустойчива.

**С л у ч а й 3.** Собственные значения — комплексно-сопряженные числа. Если использовать каноническую форму записи уравнений, то получим

$$\dot{x}_1 = (\alpha + j\beta) x_1; \quad \dot{x}_2 = (\alpha - j\beta) x_2. \quad (4.25)$$

Эти уравнения имеют следующие решения:

$$x_1 = x_{10} e^{\alpha t} e^{j\beta t} = x_{10} e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t);$$

$$x_2 = x_{20} e^{\alpha t} e^{-j\beta t} = x_{20} e^{\alpha t} (\cos \beta t - j \sin \beta t).$$

Таким образом, канонические координаты  $x_1$  и  $x_2$  комплексно-сопряженные. Поскольку координаты — комплексные числа, то изобразить фазовый портрет, оказывается, достаточно сложно. Поэтому целесообразно выполнить следующее преобразование.

Пусть

$$x_1 = z_1 + jz_2; \quad x_2 = z_2 - jz_2, \quad (4.26)$$

где числа  $z_1$  и  $z_2$  предполагаются действительными.

Определяя их по соотношениям (4.26), получим

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2) = z_{10} e^{\alpha t} \cos \beta t; \\ z_2 &= \frac{1}{2j} (x_1 - x_2) = -z_{20} e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Вводя плоскость комплексного переменного с координатами  $z_1$  и  $jz_2$ , мы приходим к выводу, что решение

$$x_1(t) = z_1(t) + jz_2(t) = x_{10} e^{\alpha t} e^{j\beta t};$$

$$x_1(0) = x_{10} = z_{10} + jz_{20}$$

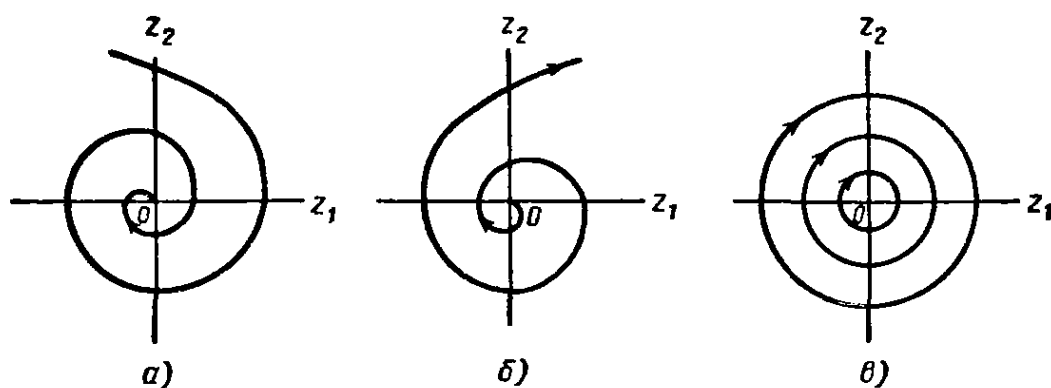


Рис. 4.14. Вид фазовых траекторий для системы, описываемой уравнениями (4.27):

*a* — при  $\alpha < 0$ ; *б* — при  $\alpha > 0$ ; *в* — при  $\alpha = 0$

определяет в этих координатах логарифмическую спираль. Если  $\alpha < 0$ , то движение по спирали будет направлено к началу координат, а фазовый портрет имеет вид, показанный на рис. 4.14, *a*. Если  $\alpha > 0$ , то движение по спирали направлено от начала координат (рис. 4.14, *б*). Если  $\alpha = 0$ , то фазовые траектории являются замкнутыми кривыми с центром в начале координат, как показано на рис. 4.14, *в*.

Положение равновесия при  $\alpha < 0$  называется устойчивым фокусом, при  $\alpha > 0$  — неустойчивым фокусом, а при  $\alpha = 0$  — центром.

Когда  $\alpha = 0$ , движение в системе периодическое, а его период одинаков по любой траектории и равен  $2\pi/\beta$ .

**С л у ч а й 4.** Ненулевые кратные полюсы. Как уже говорилось в гл. 2, для этого случая матрицу  $A$  необходимо записать в жордановой канонической форме. В этом случае движение в системе удовлетворяет уравнению

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

где  $k$  — постоянная величина, возможно равная нулю. Тогда решение имеет вид

$$x_1(t) = kx_{20}te^{\lambda t} + x_{10}e^{\lambda t}; \quad x_2(t) = x_{20}e^{\lambda t}. \quad (4.29)$$

Из системы (2.28) нетрудно получить дифференциальное уравнение для фазовых траекторий в виде

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda x_2}{\lambda x_1 + kx_2} = \frac{1}{\frac{k}{\lambda} + \frac{x_1}{x_2}}. \quad (4.30)$$

Уравнение (4.30) можно решить графически (см. § 4.5) и получить траектории, показанные на рис. 4.15, а и 4.15, б и зависящие от знака корня. Как и в первом случае, положение равновесия для этой системы есть узел.

**С л у ч а й 5.** Будем считать, что один или оба собственных значения нулевые. В этом случае фазовые портреты, в некотором смысле вырожденные, и положения равновесия располагаются не только в начале координат. Можно выделить два случая:

1. Один из корней нулевой, тогда уравнения (4.21) принимают вид

$$\dot{x}_1 = 0; \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2.$$

В этом случае каждая точка  $(x_1, x_2) = (c, 0)$  является положением равновесия, где  $c$  — произвольная постоянная.

2. Оба собственных значения нулевые. Тогда для канонической формы (4.28) при  $\lambda = 0$  получим

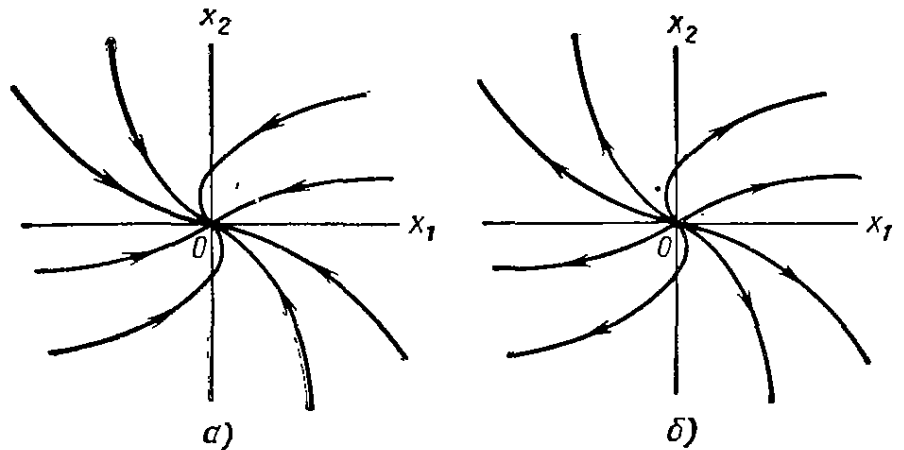


Рис. 4.15. Вид фазовых траекторий для системы второго порядка, представленной в виде уравнения (4.28):

а — при  $\lambda < 0$ ; б — при  $\lambda > 0$

$$\dot{x}_1 = kx_2; \quad \dot{x}_2 = 0,$$

откуда имеем

$$x_1(t) = x_{10} + kx_{20}t; \quad x_2(t) = x_{20}.$$

Каждая точка  $(x_1, x_2) = (c, 0)$  является положением равновесия, где  $c$  — произвольная постоянная. Если к тому же  $k = 0$ , то  $\dot{x}_1 = 0$ ;  $\dot{x}_2 = 0$  и любая точка фазовой плоскости является точкой равновесия. Фазовые траектории для перечисленных случаев показаны на рис. 4.16. Отметим, что для любого графика каждая точка оси  $x_1$  является положением равновесия.

Построив траектории для канонической системы координат, преобразуем их к нормальной системе координат. Как уже было отмечено, матрица преобразования в этом случае не является ортогональной.

В качестве примера рассмотрим случай различных действительных полюсов. Тогда «нормальные» координаты  $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  связаны с каноническими  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  преобразованием

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Из уравнения (4.31) следует, что линия  $x_1 = 0$  преобразуется в прямую  $y_2 = \lambda_2 y_1$ ; в то время как прямая  $x_2 = 0$  переходит в прямую  $y_2 = \lambda_1 y_1$ . В общем случае эти прямые не ортогональны. Тем не менее общий характер фазовых траекторий вдоль этих линий сохраняется. Эта зависимость позволяет построить узлы и седловые точки на фазовой плоскости в нормальных

координатах. Допустим, что начало координат — устойчивый узел. Это означает, что  $\lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ). Пусть  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . В канонических координатах все траектории в конце концов касаются оси  $x_2$  (см. рис. 4.12, а), и, следовательно, при переходе к нормальным координатам они будут

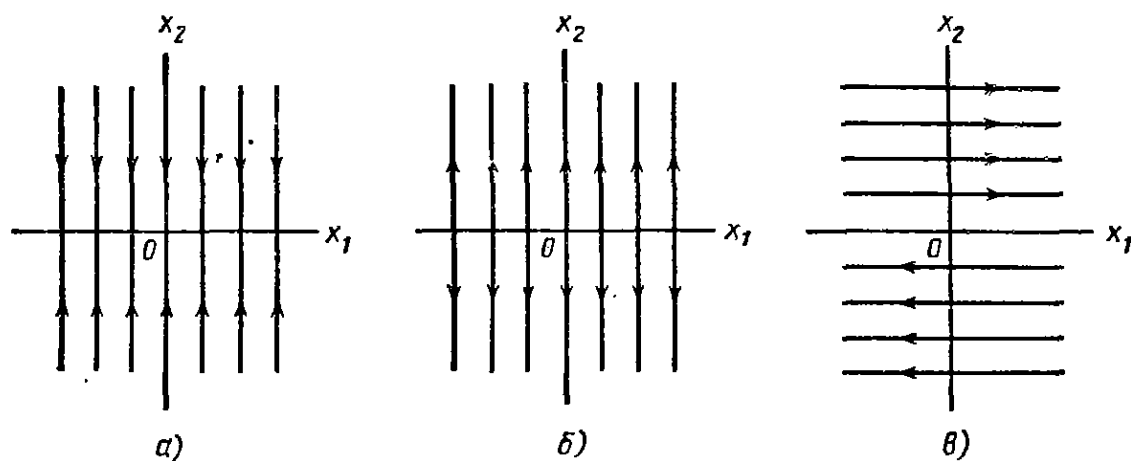


Рис. 4.16. Вид фазовых траекторий в канонических координатах для систем второго порядка:

а — при  $\lambda_1 = 0; \lambda_2 < 0$ ; б — при  $\lambda_1 = 0; \lambda_2 > 0$ ; в — при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

касательны к линии, соответствующей оси  $x_2$  (или к линии  $x_1 = 0$ ), т. е. к прямой  $y_2 = \lambda_2 y_1$ . Кроме того, ни одна траектория не пересекает ни прямой  $x_1 = 0$ , ни прямой  $x_2 = 0$ . С учетом сказанного нетрудно убедиться, что фазовый портрет на рис. 4.17, а есть образ фазового портрета рис. 4.12, а, но в нормальных координатах.

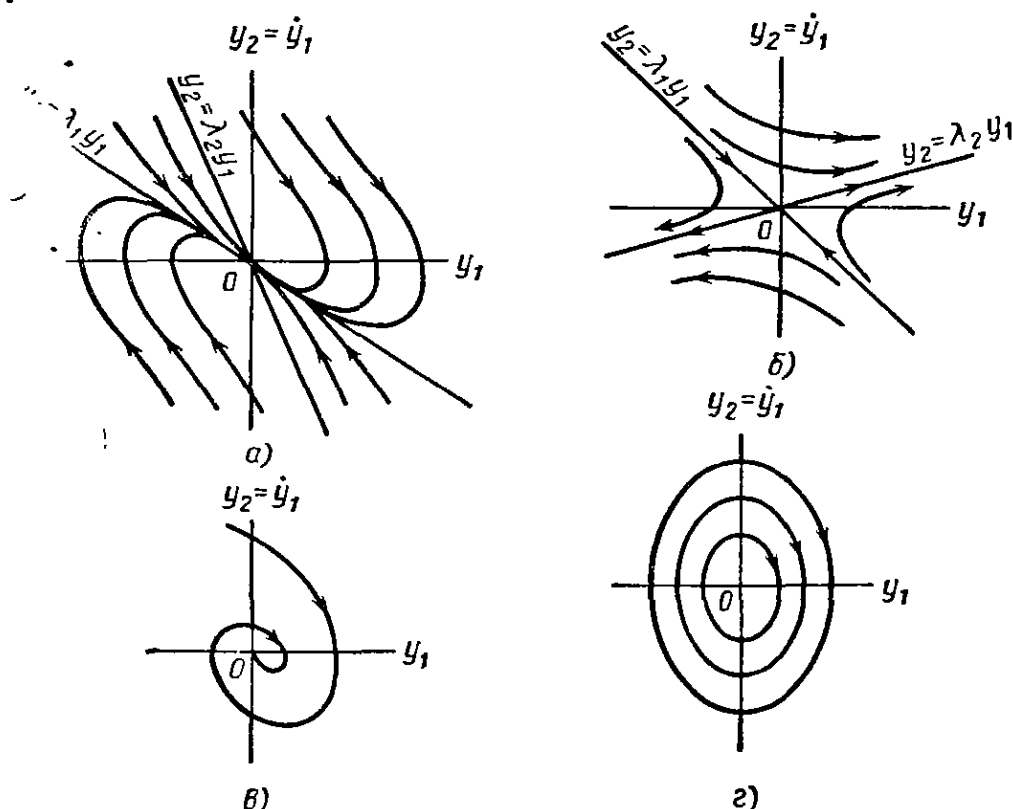


Рис. 4.17. Виды фазовых траекторий в нормальных координатах для систем второго порядка:

а — при  $\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0$ ; б — при  $\lambda_1 < 0; \lambda_2 > 0$ ; в — при  $\lambda_1 = \text{Re } \lambda + j \text{Im } \lambda; \lambda_2 = \text{Re } \lambda - j \text{Im } \lambda$ , где  $\text{Re } \lambda < 0$ ; г — тот же случай, что и в, но при  $\text{Re } \lambda = 0$

В случае седловой точки (см. рис. 4.13), когда  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 > 0$ , видно, что оси  $x_1$  и  $x_2$  являются асимптотами гиперболических траекторий. Это свойство сохраняется и после выполнения преобразования (4.31). Фазовый портрет такой системы в нормальных координатах показан на рис. 4.17, б.

Если  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) — комплексно-сопряженные корни, то нетрудно видеть, что фазовый портрет системы в нормальных координатах будет таким, как на рис. 4.17, в (при  $\text{Re } \lambda_i < 0$ ). Если все корни чисто мнимые, то фазовый портрет изображен на рис. 4.17, г.

Знание поведения траекторий линейных систем вблизи начала координат важно по многим причинам и в первую очередь потому, что это позволяет судить и о траекториях нелинейных систем вблизи их положений равновесия. Для того чтобы воспользоваться полученными результатами, достаточно лишь линеаризовать нелинейную систему. Методы линеаризации более подробно будут изложены в гл. 5.

#### 4.4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ И ДРУГИЕ ВИДЫ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Невырожденные линейные автономные системы обладают рядом весьма привлекательных свойств. Во-первых, в таких системах есть лишь одно положение равновесия, во-вторых, их поведение вблизи положения равновесия определяет качественную картину траекторий во всем фазовом пространстве. Аналогичные свойства, к сожалению, не присущи нелинейным автономным системам. Мы отметим лишь два явления, которые отличают нелинейные автономные явления от линейных, а именно: существование предельных циклов и различный характер движения в разных областях фазового пространства для одной и той же системы.

В линейных автономных системах второго порядка колебания могут существовать лишь при единственном сочетании параметров. Малое отклонение в значениях параметров приводит к затуханию автоколебаний. Если в системе существуют колебания, то фазовыми траекториями такой системы являются замкнутые кривые с центром в начале координат, как это показано на рис. 4.17, г. Расстояние замкнутой траектории и, следовательно, амплитуда автоколебаний не остаются постоянными при изменении начальных условий.

В нелинейных автономных системах колебания также могут иметь место. Более интересно то, что в этом случае параметры колебаний могут не зависеть от начальных условий. Такие колебания определяют в системе предельный цикл, который и используется для реализации на практике таких устройств, как генераторы. Колебания в предельном цикле, как правило, мало чувствительны к изменению параметров, а иногда существует целая область изменения параметров, внутри которой колебания не срываются.

Если не быть слишком строгим, то предельный цикл в системе можно отождествить с замкнутой кривой  $C$  в фазовом пространстве, обладающей одним из следующих свойств:

1. Все траектории системы в окрестности  $C$  постепенно приближаются к этой замкнутой кривой при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 4.18, а).
2. Любая траектория, начинаясь произвольно близко к  $C$ , удаляется от  $C$  при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 4.18, б).
3. Все траектории в окрестности  $C$  разделяются на два взаимно исключающих семейства. Траектории одного семейства направлены к  $C$  при  $t \rightarrow \infty$ ; остальные траектории удаляются от  $C$  при  $t \rightarrow \infty$  (рис. 4.18, в).

Как правило, предельный цикл первого типа называется устойчивым предельным циклом; второго типа — неустойчивым предельным циклом и, наконец, третьего типа — полуустойчивым предельным циклом. Как мы покажем в следующей главе, одно слово «устойчивый» еще не определяет в полной мере характера устойчивости. Для характеристики предельных



циклов необходимо ввести предельный орбитальный устойчивый цикл. Анализ предельных циклов в автономных системах второго порядка можно выполнить с большой наглядностью.

**Пример 4.4.** Пусть система описывается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2 - 1); \quad \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2 - 1). \quad (4.32)$$

В такой системе существует устойчивый предельный цикл на окружности единичного радиуса. Чтобы убедиться в этом, перейдем к полярным координатам

$$\frac{dr}{dt} = -r(r^2 - 1); \quad \frac{d\theta}{dt} = -1.$$

Если  $r < 1$ , то силы, действующие на систему, будут вызывать рост  $r$ ; если  $r > 1$ , то  $r$  будет уменьшаться; когда  $r = 1$ , то никаких сил, вызывающих изменение  $r$ , нет, и движение по кривой  $r = 1$ ,  $\theta = \theta_0 + t$  может сохраняться неограниченно долго.

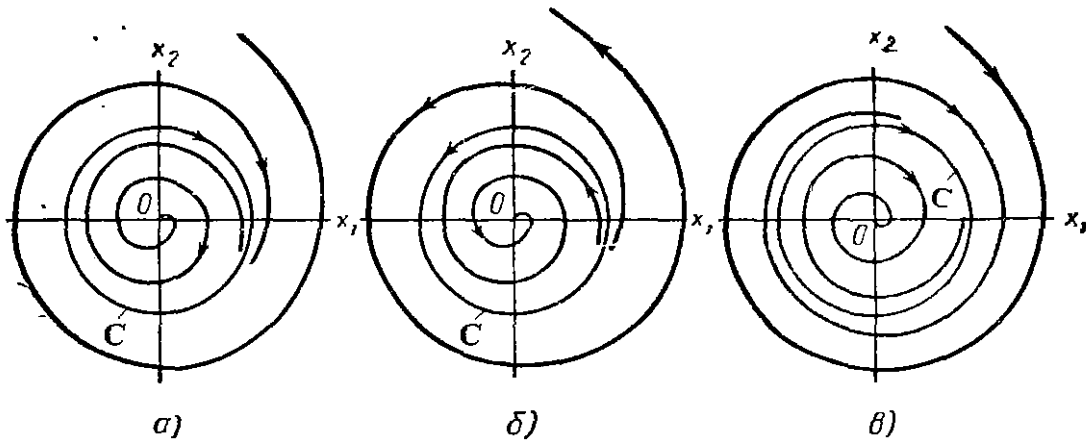


Рис. 4.18. Виды предельных циклов в нелинейных системах:

*a* — устойчивый предельный цикл  $C$ ; *б* — неустойчивый предельный цикл  $C$ ;  
*в* — полуустойчивый предельный цикл  $C$

Аналогично можно показать, что в системе

$$\frac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^2 - 1); \quad \frac{dy}{dt} = -x + y(x^2 + y^2 - 1). \quad (4.33) *$$

существует неустойчивый предельный цикл.

Можно показать, что в системе

$$\frac{dx}{dt} = y - x(x^2 + y^2 - 1)^2; \quad \frac{dy}{dt} = -x - y(x^2 + y^2 - 1)^2 \quad (4.34) **$$

существует полуустойчивый предельный цикл.

Наряду с существованием предельных циклов в нелинейной системе может наблюдаться сразу несколько видов поведения. Такое явление либо имеет место в системе с несколькими положениями равновесия, либо разный тип траекторий наблюдается в нескольких областях фазовой плоскости в окрестности равновесных состояний. В последнем случае граничная траектория, отделяющая области с различными видами движения, называется сепаратрисой.

\* В этом случае имеем

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1); \quad \frac{d\theta}{dt} = -1 \quad (\text{Прим. ред.})$$

\*\* Здесь имеем

$$\frac{dr}{dt} = -r(r^2 - 1)^2; \quad \frac{d\theta}{dt} = -1 \quad (\text{Прим. ред.}).$$

Следующий нетривиальный пример иллюстрирует, как проявляется на практике многообразие траекторий одной и той же нелинейной системы.

**Пример 4.5 [88].** Рассмотрим систему, состоящую из последовательного соединения электродвигателя с генератором, показанную на рис. 4.19. Если такая система рассчитана правильно, то скорость электродвигателя оказывается не зависящей от нагрузки. Для данной схемы примем следующие допущения:

1. Магнитные цепи обеих машин имеют вид показанный на рис. 4.20.
2. Оба устройства насыщаются при одном уровне тока, но не обязательно при одинаковых уровнях магнитного потока.
3. Генератор вращается с постоянной скоростью

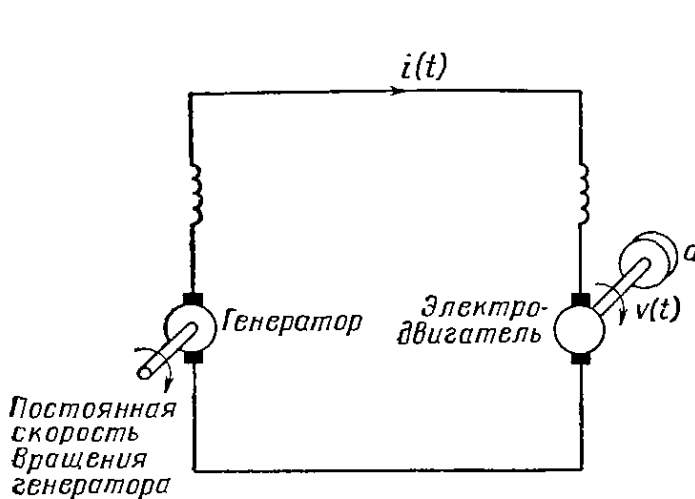


Рис. 4.19. Система, состоящая из последовательно соединенных электродвигателя и генератора

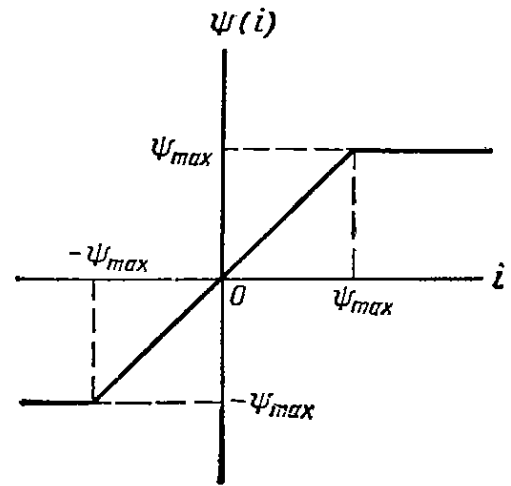


Рис. 4.20. Кривая намагничивания для электродвигателя и генератора

При этом уравнения движения системы будут

$$\left. \begin{aligned} ai(t) + T \frac{di(t)}{dt} &= [M - \xi v(t)] \psi(t) - T_E \frac{d\psi(t)}{dt}; \\ \psi(t) i(t) &= d + bv(t) + T_J \frac{dv(t)}{dt}; \\ \psi(t) &= \psi[i(t)], \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

где  $i(t)$  — ток в цепи;  $v(t)$  — скорость вращения электродвигателя;  $\psi(t) = \psi[i(t)]$  — магнитный поток

Зависимость  $\psi[i(t)]$  от тока  $i(t)$  показана на рис. 4.20.

Оставшиеся величины являются параметрами этой системы. В частности  $d$  характеризует постоянный момент нагрузки на электродвигателе;  $b$  определяет момент нагрузки на электродвигателе, пропорциональный угловой скорости его вращения.

Уравнения (4.35) определяют существенно нелинейную систему второго порядка, и ее поведение при различных комбинациях параметров достаточно сложно [88]. Сейчас нас интересуют лишь некоторые специальные случаи движения. Допустим, что параметры системы имеют следующие значения:  $\xi = 1$ ;  $\psi_{\max} = 1,5$ ;  $M = 1$ ;  $a = 0,2$ ;  $T_J = 50$  мсек;  $T = 30$  мсек;  $T_E = 60$  мсек;  $b = 5$ ;  $d = 0$ . Тогда положения равновесия определяются из условий

$$0,2i = (1 - v)\psi; \quad \psi i = 5v. \quad (4.36)$$

Если решать систему уравнений (4.36), используя кривую намагничивания со значением  $\psi_{\max} = 1,5$ , то мы получим три положения равновесия. Первое в начале координат  $i = 0$ ;  $v = 0$ . Второе и третье расположено в точках  $i = \pm 2,31$ ;  $v = 0,692$ . Фазовый портрет, полученный моделированием на аналоговой вычислительной машине, показан на рис. 4.21. Видно, что первое положение равновесия в начале координат напоминает седловую точку, в то время как второе и третье похожи на устойчивые фокусы. Весьма интересный случай будет иметь место, если положить  $b = 0$  и  $d = 1$ , сохранив значения остальных параметров прежними\*.

\* Для этого случая  $\psi_{\max} = 1$  (Прим. ред.).

В этом случае состояние равновесия из начала координат уходит в бесконечность, в точку с координатами  $i = 0, v = -\infty$ , в то время как второе и третье равновесия располагаются в точках  $i = \pm 1,00; v = 0,8$ . Фазовый портрет системы показан на рис. 4.22. Здесь мы сталкиваемся с необычным явлением; в непосредственной близости от двух последних положений равновесия расположены области, заполненные замкнутыми кривыми. Однако вне этих областей все траектории представляют спирали, направленные к двум замкнутым кривым, подобным предельному циклу. Эти замкнутые кривые и определяют на фазовой плоскости сепаратрисы, которые выделяют области с разными видами траекторий.

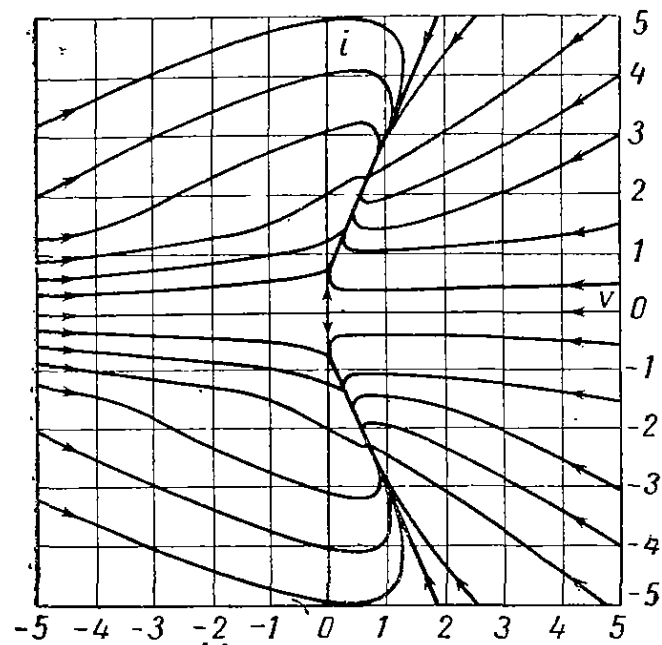


Рис. 4.21. Фазовый портрет системы (рис. 4.19) в координатах  $(i, v)$  при  $\xi = 1; \psi_{\max} = 1,5; M = 1,0; a = 0,2; T_J = 50$  мсек;  $T = 30$  мсек;  $T_E = 60$  мсек;  $b = 5; d = 0$

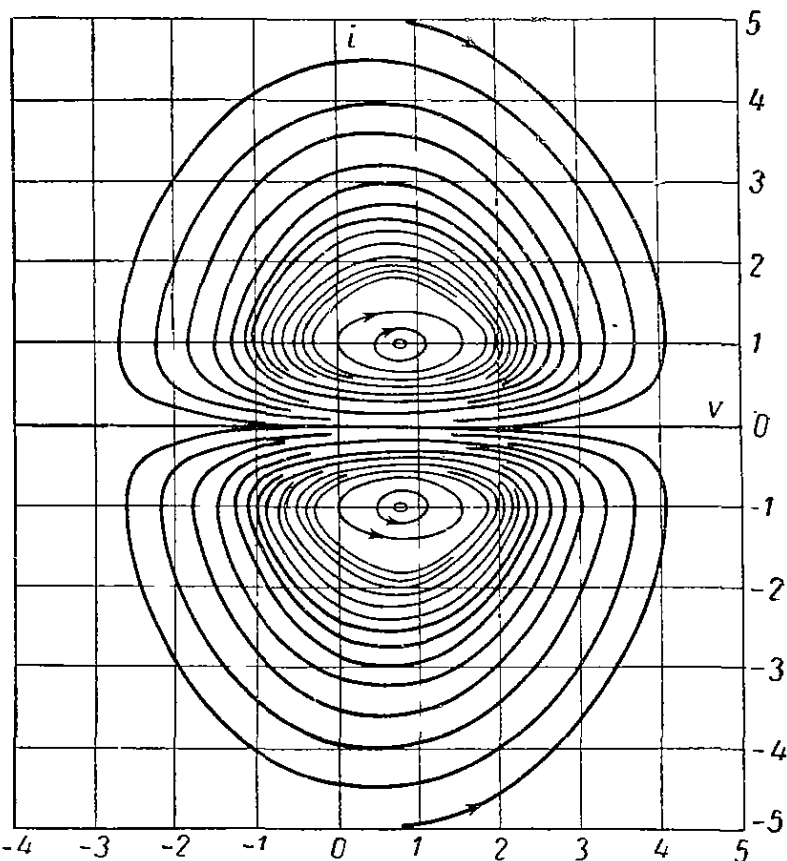


Рис. 4.22. Фазовый портрет системы (рис. 4.10) при  $\psi_{\max} = 1,0; b = 0$  и  $d = 1$ ; остальные параметры сохраняются прежними (см. рис. 4.21)

#### 4.5. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

Консервативными системами называются системы, динамика которых описывается дифференциальным уравнением вида  $\ddot{x} + f(x) = 0$ , в котором отсутствует член с координатой  $x$ , определяющий меру демпфирования или потери энергии в системе. Следовательно, в консервативных системах запас энергии остается неизменным. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнения системы в виде  $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = -f(x_1)$ , или иначе

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1)}{x_2} \quad (4.37)$$

Уравнение (4.37) можно проинтегрировать и получить

$$\frac{x_2^2}{2} + \int_{x_{10}}^{x_1} f(x) dx = E, \quad (4.38)$$

где  $E$  — постоянная интегрирования.

Первый член уравнения (4.38) определяет кинетическую энергию системы, второй — потенциальную энергию. Координата  $x_{10}$  определяет положение равновесия, относительно которого измеряется потенциальная энергия, а значение постоянной  $E$  — полную энергию системы. Понятно, что последняя величина зависит от начальных условий. Для каждого заданного значения  $E$  уравнение (4.38) определяет траекторию системы.

Построение фазовых траекторий консервативной системы весьма наглядно. Чтобы убедиться в этом, следует прежде всего построить функцию

$$P(x_1) = \int_{z_{10}}^{x_1} f(x) dx$$

в зависимости от  $x_1$ . Тогда, переписывая уравнение (4.38) в виде

$$x_2 = \pm [E - p(x_1)]^{\frac{1}{2}},$$

нетрудно заметить, что для каждого значения  $E$  можно построить зависимость  $x_2$  от  $x_1$  и, следовательно, траекторию системы. Пусть  $P(x_1)$  определяется из графика, приведенного на рис. 4.23, а, где  $P_{\min}$  — минимальное значение  $P$ .

Прежде всего отметим, что величина полной энергии  $E$  не может быть меньше  $P_{\min}$ . Если  $E = P_{\min}$ , то для  $x_2$  существует единственное решение  $x_2 = 0$ , и, следовательно, значение  $x_1$ , при котором  $P(x_1) = P_{\min}$ , является положением равновесия (точка  $x_{1e}$  на рис. 4.23, б).

Пусть  $E$  хотя бы незначительно превосходит  $P_{\min}$ , тогда существуют траектории, при движении по которым кинетическая энергия положительна. Поскольку кинетическая энергия пропорциональна  $x_2^2$ , то траектория системы представляет замкнутую кривую, симметричную относительно оси  $x_1$  (кривая а на рис. 4.23, б) соответствует полной энергии  $E = E_1$ , рис. 4.23, а). Заметим, что условию  $P(x_1) = E_1$  удовлетворяют два значения координаты  $x_1$ , обозначенные через  $x_{11}$  и  $x_{12}$ . Они определяют предельные отклонения координаты  $x_1$  от положения равновесия, когда полная энергия равна  $E_1$ . Поскольку  $x_1 = x_2$ , то направление движения изображающей точки по траекториям определить нетрудно; на рисунке они отмечены стрелкой. В заключение сделаем вывод о том, что минимум потенциальной энергии соответствует положению равновесия, которое имеет сходство с центром.

Теперь допустим что  $P(x_1) = E_4$  и  $E_4 > E_1$ . Это значение полной энергии соответствует локальному максимуму функции  $P(x_1)$  (рис. 4.23). Состояние  $x_{2e}$ , где  $P(x_{2e}) = E_4$ , является положением равновесия. Если  $E$  чуть меньше  $E_4$ , скажем, равно  $E_3$ , то нетрудно прикинуть, что фазовый портрет вблизи точки  $x_1 = x_{2e}$ ;  $x_2 = 0$  изображается кривыми в и г (рис. 4.23, б). Эти кривые не проходят через точку  $x_{2e}$ , поскольку условие  $P(x_1) = E_3$  определяет интервал  $(x_{13}, x_{14})$ , внутри которого отсутствуют траектории системы. Следовательно, состояние  $(x_{2e}, 0)$ , можно сопоставить с седловой точкой. Траектория, проходящая через точку  $(x_{2e}, 0)$  обозначена буквой д. Аналогично можно показать, что точка перегиба функции  $P(x_1)$  с горизонтальной касательной также соответствует положению равновесия. В этой точке  $P(x_1) = E_2$ , и соответствующая фазовая траектория обозна-

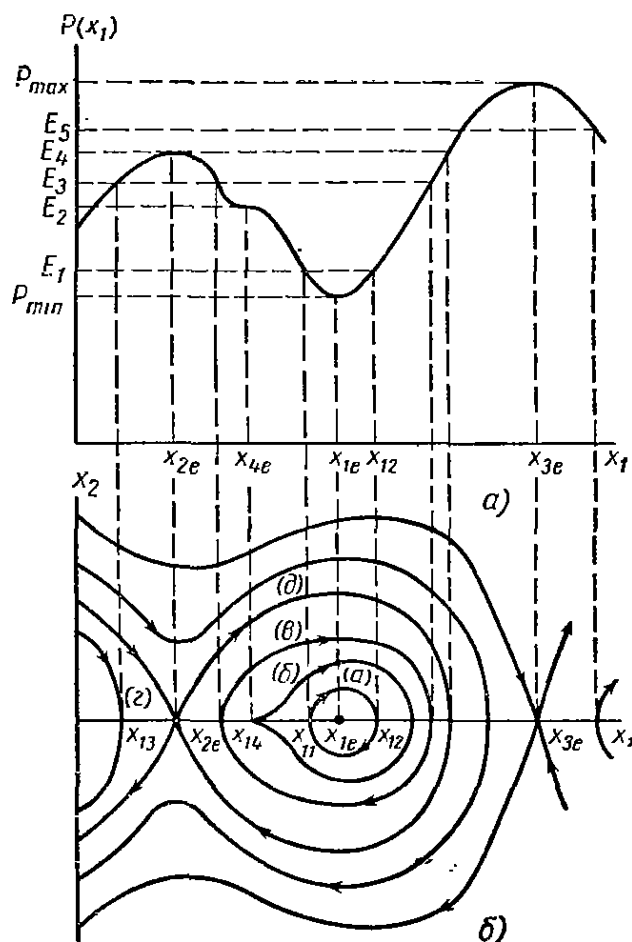


Рис. 4.23. Графический способ построения фазового портрета для консервативной системы:

а — зависимость  $P = P(x_1)$ ; б — фазовый портрет

чена буквой  $b$ . Итак, если график  $P(x_1)$  для консервативной системы построен, достроить фазовую траекторию не представляет труда. Мы предлагаем читателю убедиться в правильности построения кривых на рис. 4.23, б. Результаты проведенного анализа сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.2.** (Ж. Л. Лагранж). В консервативной системе второго порядка, удовлетворяющей уравнениям  $\dot{x}_1 = x_2$ ;  $\dot{x}_2 = -f(x_1)$ , положения равновесия находятся в точках, для которых потенциальная энергия

$$P(x_1) = \int_{x_{10}}^{x_1} f(x) dx,$$

как функция  $x_1$  соответствует либо локальному минимуму, либо точке перегиба с нулевым наклоном касательной. Траектории системы вблизи положения равновесия не расходятся от него только в том случае, если этой точке соответствует локальный минимум потенциальной энергии. Нетрудно показать, что только такое положение равновесия устойчиво, остальные неустойчивы. Это положение будет строго доказано в следующей главе.

#### 4.6. ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Поскольку решение дифференциального уравнения, соответствующего линейной автономной системе, всегда можно найти, то по этим решениям нетрудно построить и фазовые траектории системы. Для общего же случая нелинейных автономных систем (не консервативных) следует искать новые способы.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \quad (4.39)$$

Ниже кратко исследуются различные способы построения фазовых траекторий для этой системы.

##### 1. Отыскание фазовых траекторий на основе решения дифференциальных уравнений

Если уравнение (4.39) удастся решить непосредственно, то полученное решение определяет параметрическое задание траектории. Этот метод не требует комментариев. Иногда оказывается проще вместо интегрирования исходной системы проинтегрировать дифференциальное уравнение первого порядка, полученное в результате исключения времени, а именно:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (4.40)$$

Если уравнение (4.40) удастся проинтегрировать, то в результате получим аналитическое выражение для траекторий в функции фазовых координат.

##### 2. Отыскание траекторий с помощью аналоговых и цифровых вычислительных машин

Если указанные выше дифференциальные уравнения не удастся решить аналитически, то часто это возможно сделать с помощью вычислительных машин. Аналоговый вычислитель и координатор для построения кривых в плоскости ( $X - Y$ ) может оказаться весьма гибким средством для решения поставленной задачи.

Но даже в том случае, когда инженер может воспользоваться вычислительной техникой, он может внести ошибки в процессе программирования. Поэтому мы остановимся лишь на ряде тех методов, которые позволяют быстро оценить правильность решений, выданных вычислительной машиной.

### 3. Метод изоклин

Рассмотрим систему (4.39), и пусть

$$m(x_1, x_2) = \frac{\Delta dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}. \quad (4.41)$$

По определению  $m(x_1, x_2)$  характеризует наклон касательной к траектории в точке  $(x_1, x_2)$ . Тогда метод изоклин заключается в построении целого поля касательных в предположении, что в малой окрестности рассматриваемой точки ее наклон постоянен. После этого можно без труда построить траектории.

Простейший способ построения поля касательных заключается в том, чтобы отыскать линии, соответствующие определенному наклону  $m$  касательной к искомой траектории. Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим следующий пример.

**Пример 4.6.** Голландский математик Балтазар Ван-дер-Поль при изучении одного класса осцилляторов показал, что их поведение можно описать уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1. \quad (4.42)$$

Теперь это уравнение обычно называют уравнением Ван-дер-Поля. Для этой системы имеем

$$m = \frac{dx_2}{dx_1} = -\mu(x_1^2 - 1) - \frac{x_1}{x_2}$$

или, записывая относительно  $x_2$ , получим

$$x_2 = \frac{x_1}{\mu(1 - x_1^2) - m}.$$

Пусть  $\mu = 0,2$ , тогда кривая для  $m = 0$  определяется уравнением

$$x_2 = \frac{x_1}{0,2(1 - x_1^2)}.$$

Теперь требуется построить ее на фазовой плоскости. В точках этой линии проводим отрезки горизонтальных прямых, определяя тем самым направление фазовых траекторий (рис. 4.24).

Кривая для  $m = -1$  будет определяться уравнением  $x_2 = \frac{x_1}{1,2 - 0,2x_1^2}$ . В точках этой

кривой проводим короткие отрезки с наклоном  $-1$ .

Продолжая этот процесс, получим поле касательных, как показано на рис. 4.24. Из построения видно, что вблизи начала координат траектории раскручиваются, но в конце концов оказывается, что они стремятся к замкнутой траектории, или предельному циклу. Траектории, начинающиеся вне области, ограниченной предельным циклом, также со временем сходятся к нему. Таким образом, при выбранном значении  $\mu$  система имеет устойчивый предельный цикл.

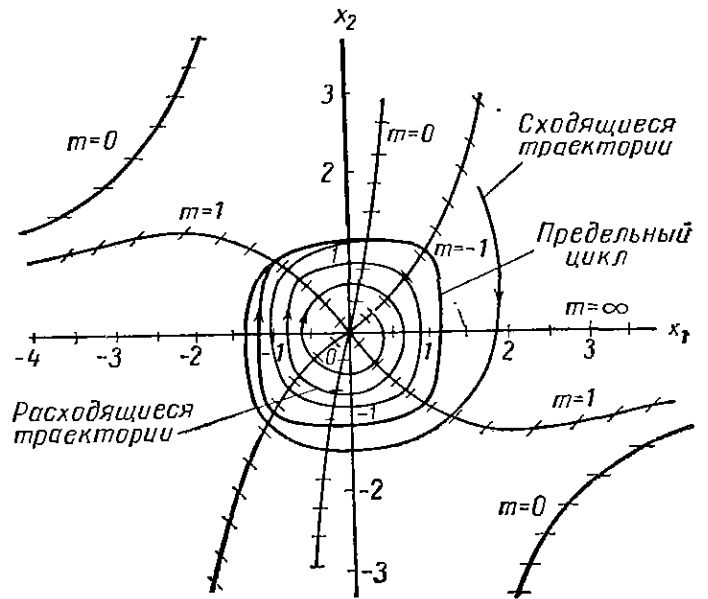


Рис. 4.24. Построение фазового портрета по методу изоклин для системы примера 4.6

#### 4. Дельта-метод

Этот метод наиболее приспособлен для получения отдельной траектории. Пусть система описывается уравнениями вида

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -f(x_1, x_2). \quad (4.43)$$

Добавляя и вычитая во втором уравнении величину  $\omega_0^2 x_1$ , получим

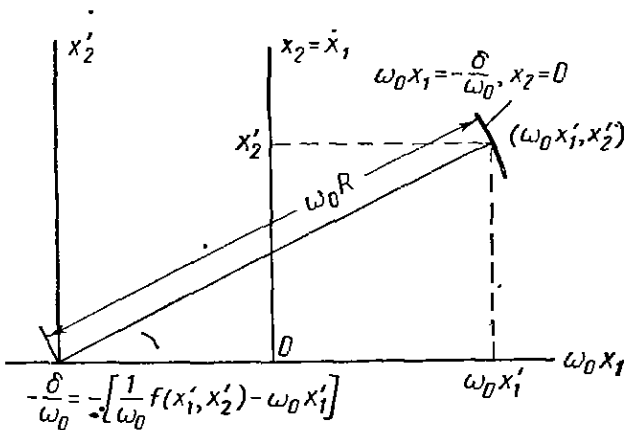
$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - \delta(x_1, x_2), \quad (4.44)$$

где

$$\delta(x_1, x_2) \stackrel{\Delta}{=} f(x_1, x_2) - \omega_0^2 x_1. \quad (4.45)$$

Снова предполагаем, что  $\delta(x_1, x_2)$  постоянна в малой окрестности точки  $(x_1, x_2)$  на фазовой плоскости, тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\omega_0^2 x_1 + \delta(x_1, x_2)}{x_2}, \quad (4.46)$$



и при интегрировании получим (с условием, что  $\delta$  — постоянная величина)

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} + \delta(x_1, x_2) x_1 = \text{const.}$$

Это уравнение можно представить в виде

$$x_2^2 + \left[ \omega_0 x_1 + \frac{\delta(x_1, x_2)}{\omega_0} \right]^2 = R^2. \quad (4.47)$$

Рис. 4.25. Построение фазового портрета с помощью дельта-метода

Данное соотношение означает, что малый участок траектории вблизи точки  $(\omega_0 x_1, x_2)$  можно заменить дугой окружности радиуса  $R$  с центром в точке

$$\left[ -\frac{\delta(x_1, x_2)}{\omega_0}, 0 \right],$$

если в качестве фазовых координат принять координаты  $(\omega_0 x_1, x_2)$ . Построения, связанные с дельта-методом, приведены на рис. 4.25.

#### 5. Метод Пелла

Метод Пелла \* [157] целесообразно использовать для построения отдельных траекторий автономных систем второго порядка, которые можно описать уравнением вида \*\*  $\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0$ . Для этого класса систем, полагая  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-g(x_2) - f(x_1)}{x_2}, \quad (4.48)$$

и в этом случае цель остается прежней: отыскать наклон  $\frac{dx_2}{dx_1}$  в заданной точке  $(x_1, x_2)$ . После того как построен малый отрезок с заданным наклоном,

\* В отечественной литературе этот метод чаще называют методом Льенара (Прим. ред.).

\*\* Этот метод можно развить и на системы более общего вида. См., например, работы [166] и [195].

аппроксимация траектории в этой точке заканчивается, и следует перейти к следующей точке.

Для нахождения  $\frac{dx_2}{dx_1}$  воспользуемся следующим приемом:

1. Используем отрицательную полуось  $x_1$  для построения кривой  $g(x_2)$ , а отрицательную полуось  $x_2$  для построения  $f(x_1)$ , как это показано на рис. 4.26.

2. Из произвольной точки плоскости  $(a, b)$  опустим на оси  $x_1$  и  $x_2$  перпендикуляры и продлим их до пересечения с кривыми  $g(x_2)$  и  $f(x_1)$ , как показано на рис. 4.26.

3. Откладываем отрезок длиной  $|f(a)|$  вдоль оси  $x_1$  из точки  $a$  в отрицательном направлении, если ордината  $f(a)$  положительна, и наоборот. Получим точку  $C$ .

4. Из точки  $C$  откладываем отрезок длиной  $|g(b)|$  также вдоль оси  $x_1$  в отрицательном направлении, если ордината  $g(b)$  положительна, и наоборот. Получим точку  $D$ .

5. Точку  $D$  соединяем прямой линией с точкой  $(a, b)$ . Маленький отрезок перпендикуляра к проведенной прямой в точке  $(a, b)$  и является участком касательной к искомой траектории.

Обоснование этого построения заключается в том, что прямая, соединяющая точку  $D$  с точкой  $(a, b)$ , имеет наклон  $\frac{x_2}{f(x_1) + g(x_2)}$ . Тогда отрезок прямой, перпендикулярный к проведенной линии, имеет отрицательный наклон и точно соответствует правой части уравнения (4.48).

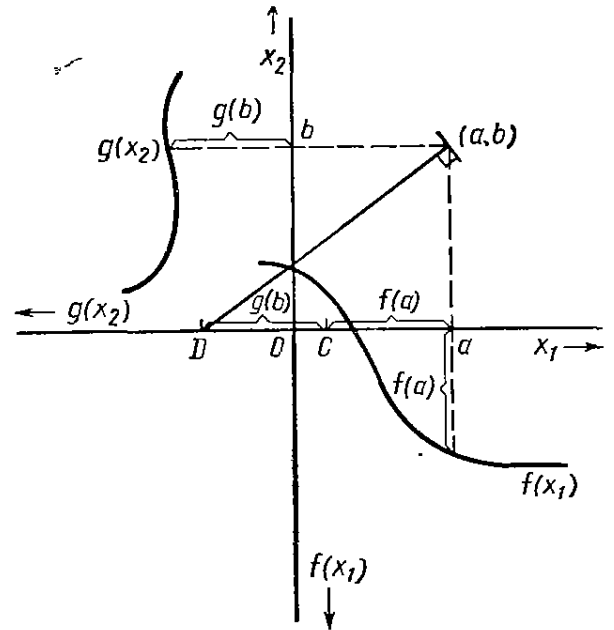


Рис. 4.26. Построение фазового портрета по методу Пелла

#### 4.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРОТЕКАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ФАЗОВЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Поскольку в основу построения фазовых траекторий заложена идея исключения времени, то после того как они построены, возникает задача восстановить временные характеристики процесса. Рассмотрим три метода, приемлемые для систем вида

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (4.49)$$

1. Интегрирование выражения

$$\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{\dot{x}} dx = t_1 - t_0. \quad (4.50)$$

Это условие достаточно очевидно, и его графическая интерпретация показана на рис. 4.27, а.

2. Интегрирование выражения вида

$$\int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t_1)} \frac{d\dot{x}}{f(x, \dot{x})} = \int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t_1)} \frac{dt}{dx} dx = t_1 - t_0. \quad (4.51)$$



Графически это означает, что мы определяем площадь под кривой  $\frac{1}{f(x, \dot{x})}$ ,

как это показано на рис. 4.27, б.

3. Можно выполнить построения, исходя из графического изображения траекторий. В основе этих построений лежит дельта-метод. Смысл метода заключается в том [см. уравнение (4.44)], что для малой дуги, проведенной вдоль траектории из точки  $-\frac{\delta}{\omega_0}$ , мы получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \delta = 0 \quad (4.52)$$

Тогда на отрезке дуги в угле  $\theta$  скорость перемещения фазовой точки, как это следует из интегрирования (4.52), приближенно определяется как

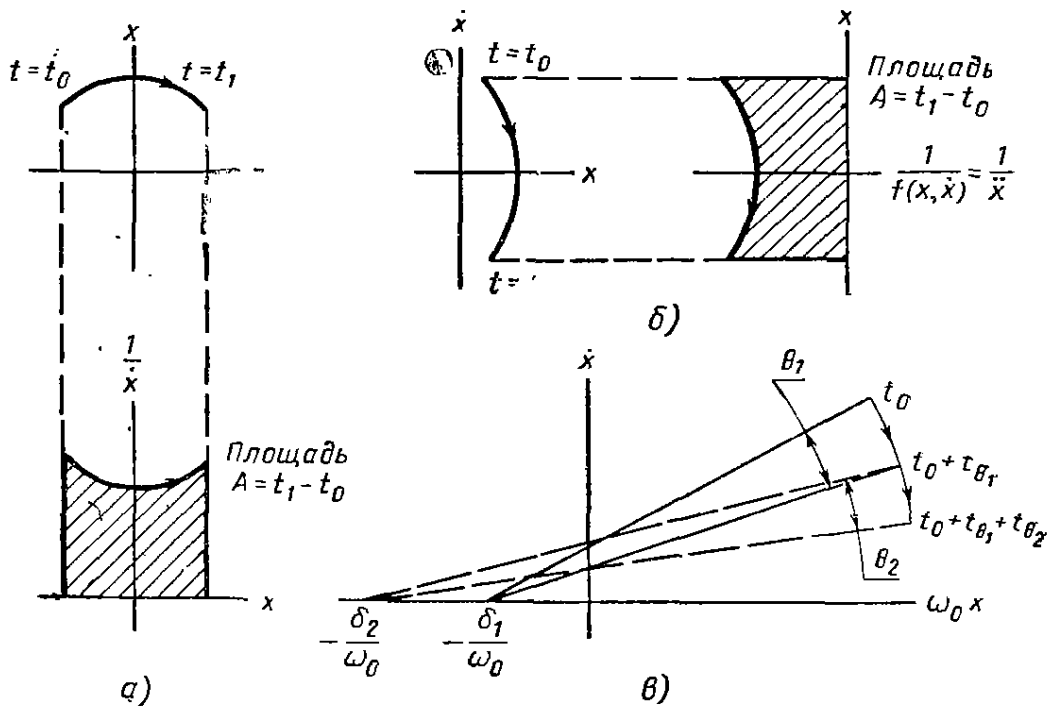


Рис. 4.27. Графическое определение времени протекания переходного процесса по фазовым траекториям, построенным в координатах  $(x, \dot{x})$ :

а — на основе уравнения (4.50); б — на основе уравнения (4.51); в — с использованием соотношения (4.52)

$\omega_0 t$ . И для малых углов  $\theta$  справедливо  $\omega_0 t_\theta = \theta$ ; поэтому  $t_\theta = \frac{\theta}{\omega_0}$ , где  $t_\theta$  — приближенная оценка времени, необходимого для движения по дуге  $\theta$  (рис. 4.27, в).

Если траекторию можно разбить на  $m$  дуг с углами  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  (рис. 4.27, в), то ясно, что полное время движения по такой траектории равно

$$\frac{\sum_{i=1}^m \theta_i}{\omega_0}.$$

#### 4.8. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Практически любые стационарные системы второго порядка можно с успехом анализировать на фазовой плоскости. В процессе многолетней практики было разработано большое число методов построения фазовых траекторий и способов анализа таких систем.

В частности, совсем просто строить фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка (см. § 4.3). Отметим, что при достаточно общих условиях (теорема 4.1) для таких систем существует единственное положение равновесия в начале координат. Знание траекторий линейной системы вблизи начала координат окажет большую услугу при линеаризации нелинейных систем.

Для нелинейных автономных систем второго порядка характерно существование либо предельного цикла, либо множества положений равновесия (даже зон равновесия), и, наконец, для одной и той же нелинейной системы может существовать несколько видов траекторий (§ 4.4). Общие методы построения фазовых портретов разработаны только для консервативных систем (§ 4.5).

Однако известно большое число методов, которые позволяют произвести приближенное построение фазовых траекторий (§ 4.6). Независимая переменная — время, как правило, не обозначается на фазовых траекториях, но существуют методы, которые позволяют оценить время протекания переходных процессов по фазовым портретам (§ 4.7).

Пределы применимости метода фазовой плоскости очевидны; он неприемлем для анализа систем высокого порядка и неавтономных систем\*.

#### 4.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

4.1. Уравнение  $\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = -B \operatorname{sign} \dot{\theta}$  описывает динамику системы с кулоновым трением. Постройте фазовые траектории этой системы.

4.2. Постройте фазовые траектории в нормальных координатах для следующих систем:

а)  $\ddot{x} + \dot{x}x + x = 0$ ;

б)  $\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0$ .

Дайте наглядную интерпретацию полученным результатам.

4.3. Методом изоклин постройте фазовые траектории для линейной автономной системы второго порядка с кратными действительными корнями, меньшими нуля.

У к а з а н и е Воспользуйтесь каноническими переменными, для которых

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где  $k$  — постоянная и  $\lambda < 0$ .

Какое влияние оказывает постоянная  $k$  на форму фазовых траекторий и каков физический смысл этих изменений? Рассмотрите частный случай  $k = 0$ . Каково дифференциальное уравнение системы в этом случае?

4.4. Для системы уравнений (О. Перрон)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 4y \sqrt{|xy|}; \\ \dot{y} &= -y + 4x \sqrt{|xy|} \end{aligned}$$

а) найти все положения равновесия;

б) построить фазовые траектории.

4.5. Проанализируйте введение корректирующего фильтра вида  $p - 1$  для задачи управления положением искусственного спутника Земли, рассмотренной в § 4.1:

а) постройте линию переключения;

б) проанализируйте некоторые характерные фазовые траектории.

4.6. Существенное свойство системы, которое не рассматривалось при анализе движения искусственного спутника Земли в § 4.1, заключается в том, что наряду с точкой  $\theta = 0$ ;  $\dot{\theta} = 0$  положением равновесия является любая точка  $\theta = 2n\pi$ ;  $\dot{\theta} = 0$  ( $n = 1, \dots$ ). Продумайте, как это свойство сказывается на результатах примера 4.1, п. 6. (У. Л. Нельсон).

4.7. Обратимся к системе, показанной на рис. 4.28. Найдите фазовый портрет в плоскости  $(e, \dot{e})$  (Р. Калман).

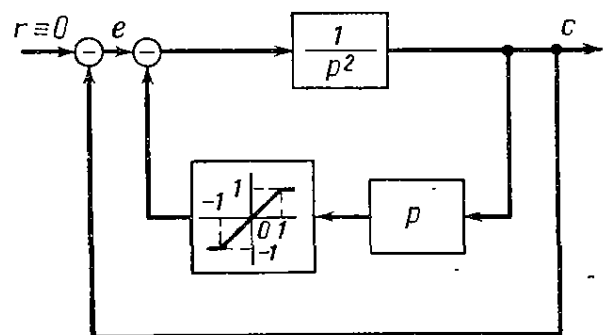


Рис. 4.28. Структурная схема системы управления для примера 4.7

\* См. сноску на стр. 77.

4.8. Оцените вид траекторий движения простого маятника  $\ddot{x} + g \operatorname{sign} x = 0$  в нормальных координатах. Ответьте на следующие вопросы:

- являются ли траектории системы одинаковыми во всем фазовом пространстве;
- если вид траекторий различен, то каковы сепаратрисы системы;
- существует ли в системе предельный цикл?

4.9. Для системы, показанной на рис. 4.29, найдите фазовые траектории в нормальных координатах, если  $0 < a < b < c$ ;  $k > 0$ .

4.10. Для системы, удовлетворяющей условию  $\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{p + 4,5}{p^2 + p + 9}$  при  $u = +U$ , где  $U$  — постоянная:

а) постройте фазовые портреты в нормальных координатах как для  $u = +U$ , так и для  $u = -U$ ; определите, каковы положения равновесия в каждом случае;

б) что происходит с вектором состояния  $(y, \dot{y})$  в момент  $t_1$ , когда управляющее воздействие переключается с  $u = +U$  на  $u = -U$ ? Постройте характерную траекторию для случая, когда  $u(t) = +U$  при  $0 < t < t_1$  и  $u(t) = -U$  при  $t \geq t_1$ ;

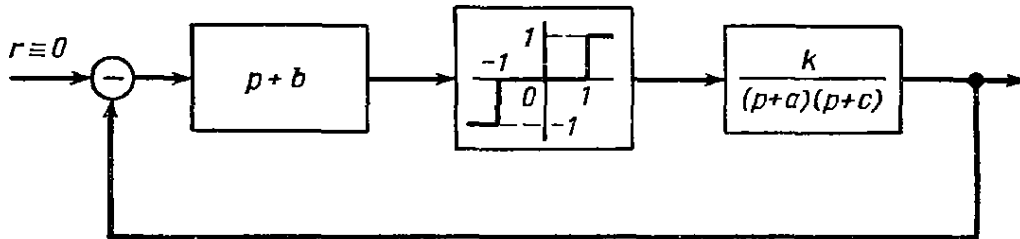


Рис. 4.29. Структурная схема системы управления для примера 4.9

в) выберите в качестве вектора состояния  $(z_1, z_2)$ , где  $z_1 = y$ , такой вектор, чтобы уравнения системы в координатах  $(z_1, z_2)$  содержали лишь управляющий сигнал  $u(t)$ , но не содержали его производной  $\dot{u}(t)$ . Для этих уравнений вновь выполните задания пунктов а) и б).

4.11. Для следующих систем первого порядка изобразите траектории системы как зависимость координаты  $x$  от времени  $t$ .

а)  $\dot{x} = \sin x$ ;

б)  $\dot{x} = \sin^2 x$ ;

в)  $\dot{x} = x(x-1)(x-2)$ ;

г)  $\dot{x} = \begin{cases} x^{3/2}, & 0 \leq x \leq 1; \\ (x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2; \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$

4.12. Найдя уравнения фазовых траекторий в полярных координатах  $(r, \theta)$ , покажите, что системы

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1};$$

$$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

имеют бесконечное число предельных циклов.

4.13. У консервативной системы  $\ddot{x} + f(x) = 0$  определите выражение для касательной к траектории через координаты  $x$  и  $\dot{x}$ .

4.14. Уравнение  $t^2 \ddot{x} + tx + (t^2 - n^2)x = 0$  известно как уравнение Бесселя. Определите:

а) является ли система линейной и автономной;

б) положения равновесия;

в) можно ли быстро построить фазовые траектории.

4.15. Для линейной системы  $\ddot{x} + 2ax + bx = 0$  прикиньте в плоскости параметров  $a$  и  $b$  области устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Проанализируйте виды положений равновесия для различных областей и на границах этих областей.

4.16. Рассмотрим военное сражение, когда каждая сторона успешно противостоит другой. В таких случаях скорость потерь каждой стороны пропорциональна числу солдат соответствующей стороны. Допустим, что число людей, участвующих в сражении, настолько велико

что может быть описано непрерывными переменными  $x_1$  и  $x_2$ . При этом переменные  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям Ланкастера

$$\dot{x}_1 = k_1 x_1 x_2; \quad \dot{x}_2 = -k_2 x_1 x_2.$$

Предлагаем читателю:

а) найти закон изменения  $x_1$ , при котором  $x_2$  стремится к нулю, если  $k_1 > k_2$  и  $x_1, x_2 \geq 0$  при  $k_1 k_2 > 0$ ;

б) найти положения равновесия и оценить их устойчивость, полагая, что  $x_1$  и  $x_2$  могут стать отрицательными.

4.17. Для системы с обратной связью

$$-e(t) = \frac{1}{p(p+1)} u(t),$$

где

$$u(t) = \begin{cases} 1, & e > 2; \\ 0, & |e| \leq 2; \\ -1, & e < -2, \end{cases}$$

постройте траектории в координатах  $(e, \dot{e})$  и найдите положения равновесия. Проанализируйте их устойчивость.

#### 4.10. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Прекрасно написанная книга [3] оказала огромное влияние на развитие интереса к нелинейным системам. Она остается до сих пор одной из лучших книг, освещающих классические методы А. Пуанкаре и других исследователей. Главы 1—3, касающиеся фазовой плоскости и связанных с ней разделов, читаются очень легко. В книге приводится большое число примеров. Более современной является книга [30], которая также богата примерами.

К числу лучших книг по нелинейным системам, изданных до 1961 г., следует отнести книгу [63]. На стр. 315—345 и 370—393 этой книги рассмотрены чрезвычайно интересные примеры построения фазовых портретов для нелинейных систем второго порядка (не обязательно автономных). Читателю следует рекомендовать также книгу [112], в которой графическими методами анализируются системы третьего порядка. В этой книге содержится обширная библиография, включающая 735 работ по анализу нелинейных систем, выполненных до 1975 г.

Для желающих более глубоко ознакомиться с математической стороной вопроса рекомендуем гл. 2 книги [161], гл. 16 в работе [35] и гл. 2—4 книги [179] \*.

\* К числу интересных работ по применению метода фазовой плоскости и нелинейным дискретным самонастраивающимся системам, а также системам со случайными параметрами можно отнести монографии [281], [287] (Прим. ред.

## Р а з д е л II

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ



## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ В МАЛОМ

### ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

### ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВХОДНОМ СИГНАЛЕ, КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СЕРВОМЕХАНИЗМЫ

### ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

### УСТОЙЧИВОСТЬ В БОЛЬШОМ И ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

### ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ В. М. ПОПОВА И ЕГО РАЗВИТИЕ

### АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ В МАЛОМ

### 5.1. ПОНЯТИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Понятие устойчивости наиболее просто ввести для случая стационарных линейных систем. При этом удастся сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости (например, критерий Рауса и Гурвица). В таких системах единственным положением равновесия будет начало координат, если выполняются следующие два условия: характеристическое уравнение системы не имеет полюсов с нулевой действительной частью, а входной сигнал равен нулю.

Тогда можно дать два эквивалентных условия устойчивости (неустойчивости) начала координат системы:

1. Система устойчива (неустойчива) при отсутствии входного сигнала, если при произвольных начальных условиях фазовые траектории стремятся к началу координат (уходят в бесконечность).

2. Система устойчива (неустойчива) при ограниченном входном сигнале, если выходной сигнал ограничен (не ограничен).

Первое условие определяет поведение свободной системы в переходном процессе; второе — поведение системы, когда входной сигнал не равен нулю. Оба условия устойчивости эквивалентны для линейных стационарных систем, и если инженер ограничивается рассмотрением лишь таких систем, то приведенных сведений об устойчивости ему вполне достаточно.

В нелинейных системах такой простой связи между этими двумя типами устойчивости нет, так как свободное движение системы может существенно отличаться от вынужденного.

**Пример 5.1.** Рассмотрим нелинейную систему первого порядка, описываемую уравнением вида

$$\dot{x}(t) = \frac{a}{u(t) - 1} x(t),$$

где  $a > 0$  (предлагается самостоятельно убедиться, что эта система нелинейна). При  $u(t) \equiv 0$  система устойчива. Однако, если  $u(t) \neq 0$ , то всякий раз, как только управление  $u(t)$  становится равным 1,  $x(t)$  стремится к бесконечности; если  $u(t)$  — постоянная величина, большая единицы, то реакция также не ограничена. Следовательно, нельзя гарантировать ограниченность реакции при ограниченном управлении.

Можно предположить, что вопрос об устойчивости будет решен более эффективно в рамках первого определения. И действительно, в этом направлении получено много интересных результатов; поэтому в дальнейшем будем придерживаться определения устойчивости, данного для свободной системы. Однако и в этом случае при анализе нелинейных систем возникают трудности. Например, система, описываемая уравнением Ван-дер-Поля, неустойчива в «малом» относительно положении равновесия, но при этом всякое дви-

жение со временем переходит в предельный цикл. Если амплитуда предельного цикла оказывается малой, то такое поведение системы при больших сигналах оказывается приемлемым. Таким образом, система, неустойчивая при малых отклонениях от положения равновесия, практически устойчива, когда эти отклонения становятся значительными.

Теперь несколько слов о нелинейных системах, имеющих множество состояний равновесия. Может случиться, что все траектории движения выходят из одного положения равновесия и часть этих траекторий заканчивается в другом положении равновесия. Такое поведение можно наблюдать при последовательном соединении элемента с «отрицательным сопротивлением» и осциллятора.

Подведем некоторые итоги в наших рассуждениях.

Во-первых, в отличие от линейных систем для нелинейных систем следует говорить об устойчивости относительно положения равновесия, а не об устойчивости вообще. Во-вторых, даже для свободной системы информация об устойчивости, полученная лишь из анализа фазовых траекторий вблизи положения равновесия, может оказаться недостаточной для суждения об устойчивости во всем фазовом пространстве. Другими словами, устойчивость в малом еще не определяет устойчивости во всем фазовом пространстве, и эти две задачи следует изучать отдельно. В-третьих, даже при анализе устойчивости в малом следует различать две возможности: либо все траектории системы никогда не покидают некоторой определенной окрестности положения равновесия, либо все траектории асимптотически приближаются к рассматриваемому положению равновесия.

В этой и следующей главах мы обсудим каждую из перечисленных выше возможностей более подробно.

## 5.2 УСТОЙЧИВОСТЬ В МАЛОМ (УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ) АВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Понятие устойчивости, введенное русским математиком А. М. Ляпуновым, устанавливает, что свободное движение системы ограничено в определенном смысле. Мы рассмотрим это свойство применительно к автономной системе\*.

Пусть в фазовом пространстве  $\varepsilon$ -окрестность положения равновесия  $\mathbf{x}_e$  задается  $n$ -мерной сферой  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$ . Говорят, что положение равновесия устойчиво (или устойчиво в малом), если система, начиная движение из произвольной  $\delta$ -окрестности (обычно малой), все время остается внутри некоторой  $\varepsilon$ -окрестности. Иными словами, состояние равновесия устойчиво, если при малых возмущениях от этого положения последующее движение происходит в некоторой окрестности, размеры которой зависят только от величины возмущения. Более строго: пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  — начальное состояние системы в момент  $t = t_0$ , тогда справедливо следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 5.1.** Устойчивость по Ляпунову [130].

Состояние равновесия автономной динамической системы устойчиво (в смысле Ляпунова), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , зависящее лишь от  $\varepsilon$ , и при этом из условия  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| < \delta$  следует, что  $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_e\| < \varepsilon$  для всех  $t > t_0$ .

Попробуем придать этому определению конструктивную форму. Инженеру для того, чтобы проанализировать устойчивость системы в смысле

\* Вид устойчивости, обсуждаемый в этом параграфе, может наблюдаться в произвольной свободной системе, но наиболее характерен такой тип устойчивости для автономных систем. См. § 5.6.

Ляпунова, следует для всякого, выбранного им наугад,  $\varepsilon$  подобрать такое  $\delta$ , которое определяет окрестность начала координат и притом такую, что, находясь в ней в начальный момент времени, изображающая точка никогда не покинет выбранную  $\varepsilon$ -окрестность. Это положение иллюстрируется с помощью рис. 5.1

**Пример 5.2.** Для линейной стационарной системы второго порядка, характеризуемой парой чисто мнимых полюсов, начало координат устойчиво в смысле Ляпунова, поскольку траектории свободного движения представляют замкнутые кривые, максимальное расстояние которых от начала координат определяется только начальными условиями и, в частности, зависит от наименьшего расстояния кривой от начала координат\*. Следовательно, если выбрать произвольное  $\varepsilon$ , например  $\varepsilon_1$ , то тем самым мы зададим максимальное удаление траекторий от начала координат, но тогда величина  $\delta$  должна быть меньше, чем минимальное расстояние кривой от начала координат. Выбранное таким образом  $\delta$  будет удовлетворять определению устойчивости.

**Пример 5.3.** Обратимся вновь к уравнению Ван-дер-Поля. Положение равновесия, находящееся внутри области предельного цикла, неустойчиво в смысле Ляпунова, поскольку какую бы  $\varepsilon$ -окрестность внутри области, ограниченной траекторией предельного цикла от начала координат, мы ни взяли, нельзя найти величины  $\delta$ , удовлетворяющей условиям устойчивости.

Анализ таких положений равновесия, как устойчивый фокус или узел, к которым сходятся все траектории, позволяет дать более узкое определение устойчивости с учетом асимптотического поведения. Это определение по-прежнему связано с малыми отклонениями от положения равновесия.

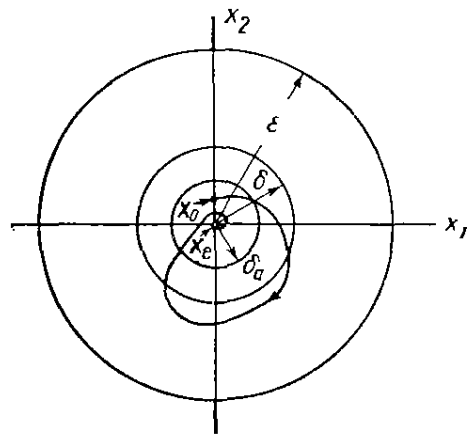


Рис. 5.2. Асимптотическая устойчивость:

положение равновесия  $x_e$  асимптотически устойчиво; если в дополнение к условиям устойчивости существует такое  $\delta_a$ , что все траектории, начинающиеся в  $\delta_a$ -окрестности  $x_e$ , стремятся к  $x_e$  при  $t \rightarrow \infty$

А. М. Ляпунов определил также условия, при которых система неустойчива.

**Определение 5.3.** Положение равновесия  $x_e$  свободной динамической системы неустойчиво, если существует такое  $\varepsilon$ , что необходимого  $\delta$ ,

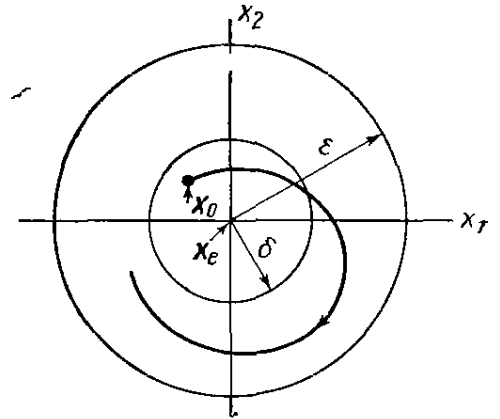


Рис. 5.1. Устойчивость по Ляпунову:

положение равновесия  $x_e$  устойчиво, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое, что траектория, которая начинается в  $\delta$ -окрестности  $x_e$ , все время остается в  $\varepsilon$ -окрестности  $x_e$

\* В данном случае наименьшее расстояние от траектории до начала координат определяется величиной начальной скорости при нулевом значении координаты положения (Прим. ред.).



удовлетворяющего условиям определения 5.1, подобрать нельзя. Это определение достаточно очевидно. Отметим однако, что траектория неустойчивой системы всегда уйдет из любой наперед заданной окрестности начала координат, но это вовсе не означает, что такая траектория удалится бесконечно далеко от  $x_e$ . Таким образом, начало координат в уравнении Ван-дер-Поля неустойчиво независимо от того, насколько мал предельный цикл.

Нельзя не отметить, что определения Ляпунова свойств устойчивости и асимптотической устойчивости — это локальные понятия, так как

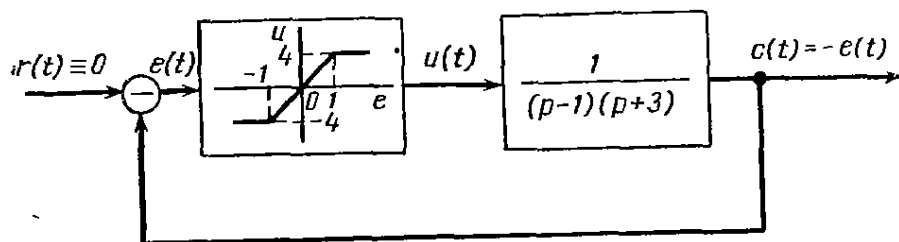


Рис. 5.3. Структурная схема управления примера 5.4

они определяют устойчивое движение лишь в малом или в малой окрестности начала координат. Отметим также, и на это уже указывалось ранее, что величина  $\varepsilon$ -окрестности не существенна, а определяющим фактором служит  $\delta$ -окрестность.

Если найдено  $\delta_1$ , удовлетворяющее условиям устойчивости при выбранном  $\varepsilon_1$ , то это же самое  $\delta_1$  удовлетворяет и определению для всех  $\varepsilon > \varepsilon_1$ . Поэтому следует выбирать лишь малые  $\varepsilon$  и по ним отыскивать  $\delta^*$ .

В дальнейшем мы будем говорить об устойчивости в малом и асимптотической устойчивости в малом, имея в виду данные нами определения устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Следует отметить, что анализ устойчивости относительно произвольного положения равновесия можно заменить анализом другой системы, полученной в результате введения переменной  $x - x_e$ , относительно начала координат. Без ограничения общности всюду, в дальнейшем, будем изучать устойчивость системы относительно начала координат, если не сделана иная оговорка.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 5.4.** Пусть имеем систему, показанную на рис. 5.3. Ее фазовый портрет в координатах  $(e, \dot{e})$  приведен на рис. 5.4. Для этой системы все траектории, которые начинаются в области

$$\sqrt{e^2 + \dot{e}^2} \leq 1, \quad (5.1)$$

стремятся к началу координат. Более того, для всякого  $\varepsilon$  можно найти  $\delta$ , чтобы удовлетворить условиям Ляпунова. Отсюда следует, что начало координат асимптотически устойчиво.

Отметим, однако, что траектории, начинающиеся вне области, задаваемой уравнением (5.1), могут уходить и в бесконечность, как показано на рис. 5.4. В этом случае начало координат неустойчиво в большом. Такой результат нельзя получить, изучая лишь поведение траекторий в окрестности положения равновесия. Это обусловлено существованием других — неустойчивых состояний равновесия. Все станет яснее, когда мы подробно проанализируем эту систему в § 5.4.

Из сказанного следует, что анализ устойчивости в малом таит опасности, но в то же время именно этот тип устойчивости можно исследовать, используя столь распространенный в инженерной практике метод линеари-

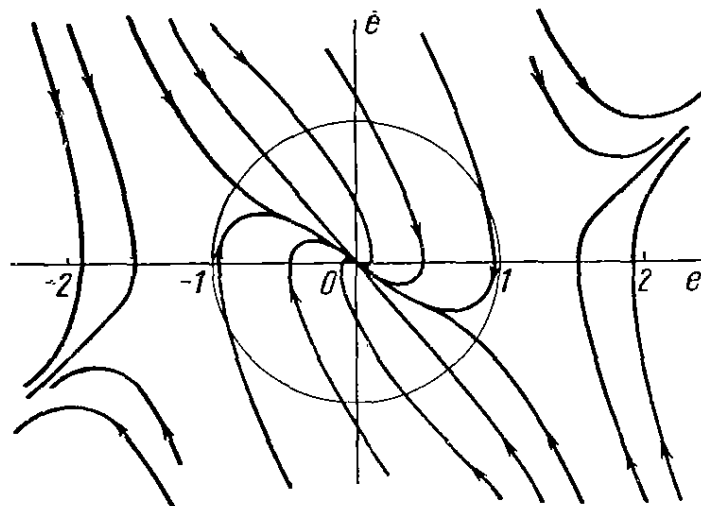


Рис. 5.4. Часть фазового портрета для системы управления примера 5.4

\* Из определения устойчивости также следует, что  $\delta$ , соответствующее данному  $\varepsilon$ , должно быть меньше или равно  $\varepsilon$ .

зации. В следующем параграфе метод линеаризации исследован подробно; установлена его связь с анализом устойчивости и даны некоторые обобщения.

Важный вопрос устойчивости в большом обсуждается в § 5.9 и детально излагается в гл. 9—11.

### 5.3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

При решении задач анализа и синтеза всегда прибегают к линеаризации. Например, рассчитывая ламповый или полупроводниковый усилитель, линеаризуют его характеристику вблизи рабочей точки для определения параметров, влияющих на коэффициент усиления. Этот метод называют иногда методом возмущений.

В этом параграфе мы подробно изложим процесс линеаризации. При линеаризации системы оказывается возможным воспользоваться для анализа устойчивости первым методом Ляпунова, которому посвящается следующий параграф. Для того чтобы уяснить существо метода, рассмотрим в качестве примера систему первого порядка.

**Пример 5.5.** Для системы  $\dot{x} = -\sin x$  состояния равновесия расположены в точках с координатами  $x = \pi n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Непосредственное интегрирование определяет следующее решение:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x_0}{2} e^{-(t-t_0)},$$

из которого следует, что состояния  $x_e = 2m\pi$ ,  $m = 0, 1, \dots$  устойчивы, в то время как состояния  $x_e = (2m+1)\pi$ ,  $m = 0, 1, \dots$  неустойчивы. Этот результат, конечно, можно установить, изучая лишь фазовый портрет системы. Тем не менее сначала линеаризуем систему относительно начала координат и проследим последовательность действий, которая приводит нас к цели.

Предположим, что при  $t = t_0$  вследствие какого-либо возмущения состояние системы  $x(t)$  отклоняется от равновесного  $x_e$  на величину  $\delta x(t)$ . Имеем

$$x(t) = x_e + \delta x(t) \text{ для } t > t_0. \quad (5.2)$$

Это означает, что для рассматриваемой системы

$$\frac{d}{dt}(x_e + \delta x) = -\sin(x_e + \delta x). \quad (5.3)$$

Правая часть уравнения (5.3) может быть представлена в виде ряда Тейлора относительно положения равновесия  $x_e$ , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_e + \delta x) &= -\sin x + \frac{d}{dx}(-\sin x) \Big|_{x=x_e} \delta x + \dots = \\ &= -\sin x_e - \cos x_e \delta x + \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где члены второго порядка и выше в явном виде не выписаны.

Следует ожидать, что при достаточно малых  $\delta x$  поведение системы вблизи  $x_e$  можно описать уравнением (5.4), пренебрегая членами более высокого порядка, т. е.

$$\frac{d}{dt}(x_e + \delta x) \approx -\sin x_e - \cos x_e \delta x. \quad (5.5)$$

Вычитая из этого уравнения тривиальное решение  $\frac{d}{dt}x_e = -\sin x_e$ , которое выполняется для положения равновесия, получим

$$\frac{d}{dt} \delta x \stackrel{\Delta}{=} \dot{\delta x} \approx -\cos x_e \delta x; \quad (5.6)$$

это и есть линеаризованное уравнение движения относительно возмущения  $\delta x$ . Заметим, что когда  $x_e = 0$  или  $2m\pi$ ,  $m = 1, \dots$ , уравнение (5.6) сводится к виду  $\dot{\delta x} = -\delta x$ , и асимптоти-

ческая устойчивость выполняется, поскольку  $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta x = 0$ . Однако при  $x_e = (2m + 1)\pi$  уравнение (5.6) преобразуется к виду  $\delta \dot{x} = \delta x$ , что соответствует расходящемуся процессу, и, следовательно, такие положения равновесия неустойчивы.

Итак, в рассмотренном случае анализ линеаризованной системы позволяет решить полностью вопрос об устойчивости исходной нелинейной системы.

Теперь достаточно просто распространить процедуру линеаризации на системы  $n$ -го порядка при постоянных входных сигналах. Рассмотрим стационарную линейную систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5.7)$$

где функция  $f(x, u)$  предполагается непрерывно дифференцируемой по каждой из переменных  $x$  и  $u$ .

Если управление тождественно равно нулю или постоянному вектору  $u_0$ , то положения равновесия, задаваемые вектором  $x_e$ , определяются из уравнения

$$0 = f(x_e, u_0). \quad (5.8)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_e + \delta x(t); & u(t) &= u_0 + \delta u(t); \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_e + \delta \dot{x}(t); & \delta \dot{x}(t) &\stackrel{\Delta}{=} \frac{d}{dt} \delta x(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где  $\delta x(t)$  и  $\delta u(t)$  — возмущения по  $x_e$  и  $u_0$  соответственно, а  $\delta \dot{x}(t)$  есть производная по времени от  $\delta x(t)$ .

Подставляя соотношение (5.9) в первоначальное уравнение (5.7) и вычитая выражение (5.8), получим уравнение возмущенного движения системы в виде

$$\delta \dot{x}(t) = f(x_e + \delta x(t), u_0 + \delta u(t)). \quad (5.10)$$

Поскольку функция  $f$  предполагается непрерывно дифференцируемой по своим аргументам, уравнение (5.10) можно представить в виде

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_0) \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_0) \delta u + h(x_e, u_0, \delta x, \delta u), \quad (5.11)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_0)$  и  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_0)$  задаются матрицами Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_0) \stackrel{\Delta}{=} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\substack{x=x_e \\ u=u_0}}; \quad (5.12a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_0) \stackrel{\Delta}{=} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{array} \right]_{\substack{u=u_0 \\ x=x_e}} \quad (5.12b)$$

и  $h(x_e, u_0, \delta x, \delta u)$ , или сокращенно  $h(\delta x, \delta u)$ , представляет остаточный член.

Теперь предположим, что если  $\delta x$  и  $\delta u$  стремятся к нулю, то  $h$  стремится к 0 быстрее, чем линейные члены в правой части уравнения (5.11). Точнее говоря, будем считать\*, что

$$\lim_{\substack{\|\delta x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta u\| \rightarrow 0}} \frac{h(\delta x, \delta u)}{\|\delta x\|} = \lim_{\substack{\|\delta x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta u\| \rightarrow 0}} \frac{h(\delta x, \delta u)}{\|\delta u\|} = 0, \quad (5.13)$$

тогда в достаточно малой окрестности  $x_e$  и для малых  $\|\delta u\|$ , поведение возмущенной системы можно описать линеаризованным уравнением

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_0) \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_0) \delta u. \quad (5.14)$$

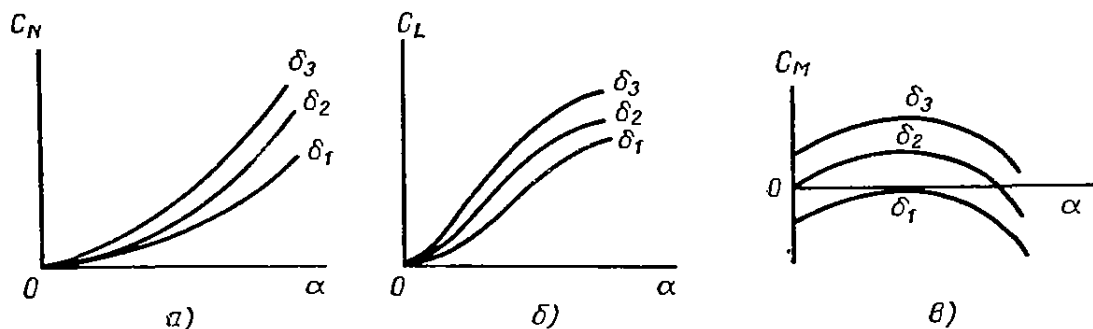


Рис. 5.5. Типовые зависимости для безразмерных аэродинамических коэффициентов примера 5.6:

a — для  $C_N$ ; б — для  $C_L$ ; в — для  $C_M$

Поскольку полученное уравнение линейно и стационарно, то его анализ значительно упрощается. При этом можно воспользоваться любым из известных методов исследования линейных систем. Обратимся к примеру.

**Пример 5.6.** Линеаризованные уравнения движения ракеты. На рис. 2.15 показана простейшая крылатая ракета, движущаяся в плоскости после завершения этапа разгона. Теперь мы подготовлены к тому, чтобы вывести линеаризованные уравнения движения ракеты. Полные уравнения движения задаются в виде

$$J\ddot{\theta} = A l Q C_M(\alpha, \delta); \quad (5.15a)$$

$$mV\dot{\gamma} = A Q C_L(\alpha, \delta); \quad (5.15б)$$

$$mga_N = A Q C_N(\alpha, \delta), \quad (5.15в)$$

где  $C_M$ ;  $C_L$ ;  $C_N$  — безразмерные коэффициенты момента, подъемной силы, перпендикулярной к вектору скорости, и нормальной силы соответственно;

$A$ ,  $l$  — приведенная площадь и длина соответственно; в нашем примере полагаем  $A$  и  $l$  равными единице.

Безразмерные коэффициенты задаются в виде кривых в функции величин  $\alpha$  и  $\delta$ , полученных в результате аэродинамических продувок. На рис. 5.5 показаны типовые зависимости для коэффициентов  $C_M$ ,  $C_L$  и  $C_N$ .

Первое уравнение есть уравнение моментов, второе — уравнение сил по направлению к нормали вектора скорости снаряда и третье — уравнение боковых сил.

Этих уравнений вполне достаточно, чтобы описать динамику ракеты. В частности, попробуем оценить влияние малого отклонения управляющих органов на изменение кривизны траектории  $\dot{\theta}$  и величину поперечного ускорения  $a_N$ . Поскольку  $\theta = \alpha + \gamma$ , выберем  $\dot{\theta}$  и  $\alpha$  в качестве переменных состояния. Тогда из первых двух уравнений получим

$$-\frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{Q}{J} C_M(\alpha, \delta); \quad \frac{d}{dt} \alpha = -\frac{Q}{mV} C_L(\alpha, \delta) + \dot{\theta}. \quad (5.16)$$

\* Если  $f(x, u)$  можно представить рядом Тейлора относительно переменных  $x_e$  и  $u_0$  и  $h(\delta x, \delta u)$  содержит члены со степенями  $\delta x$  и  $\delta u$  второй степени и выше, то в этом случае можно считать, что уравнение (5.13) удовлетворяется.

Условие балансировки заключается в том, что значения величин  $\alpha = \alpha_T$ ;  $\delta = \delta_T$  и  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_T$  обращают левые части уравнения (5.16) в нуль, т. е.

$$0 = \frac{Q}{J} c_M(\alpha_T, \delta_T); \quad 0 = -\frac{Q}{mV} C_L(\alpha_T, \delta_T) + \dot{\theta}_T. \quad (5.17)$$

Совокупность значений  $\alpha_T$ ,  $\delta_T$  и  $\dot{\theta}_T$  таким образом определяет положение равновесия\* в рассматриваемой системе. В частности, из физических соображений следует, что совокупность  $\alpha_T = \delta_T = \dot{\theta}_T = 0$  должна соответствовать положению равновесия. Для анализа движения системы относительно  $\alpha_T = \delta_T = \dot{\theta}_T = 0$  обозначим  $\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}$ ;  $\delta\alpha = \alpha$  и т. д. Линеаризованные уравнения в этом случае можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \dot{\theta} &= \frac{Q}{J} \left[ \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha + \frac{\partial C_M}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \delta \right]; \\ \frac{d}{dt} \alpha &= -\frac{Q}{mV} \left[ \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} \delta \right] + \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Следуя принятым обозначениям, получим

$$\begin{aligned} C_{M\alpha} &\triangleq \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \quad C_{M\delta} \triangleq \frac{\partial C_M}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}; \quad C_{L\alpha} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \\ &C_{L\delta} \triangleq \frac{\partial C_L}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Запишем уравнения

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{Q}{J} (C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta} \delta); \quad \frac{d}{dt} \alpha = -\frac{Q}{mV} C_{L\alpha} \alpha - \frac{Q}{mV} C_{L\delta} \delta + \dot{\theta}, \quad (5.20)$$

позволяющие найти величины  $\alpha$  и  $\dot{\theta}$  в функции от  $\delta$ .

Если в качестве выходной координаты использовать величину поперечного ускорения, то следует воспользоваться уравнением (5.15в). Линеаризуя его вблизи точки  $\alpha_T = \delta_T = \dot{\theta}_T = 0$ , получим

$$mga_N = Q (C_{N\alpha} \alpha + C_{N\delta} \delta), \quad (5.21)$$

где, как и раньше,

$$C_{N\alpha} \triangleq \frac{\partial C_N}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \quad C_{N\delta} \triangleq \frac{\partial C_N}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0}. \quad (5.22)$$

Частные производные обычно вычисляются непосредственно по кривым, полученным в результате продувки. Уравнения (5.20) и (5.21) представляют собой линеаризованные уравнения движения ракеты при малых отклонениях от положения равновесия.

#### 5.4. ПЕРВЫЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Первый метод Ляпунова — это по существу теорема, определяющая условия, при выполнении которых устойчивость исходной системы можно анализировать с помощью простых уравнений, полученных в результате линеаризации. Теорема изложена в первой части широко известной диссертации, завершенной в 1892 г. великим русским математиком А. М. Ляпуновым [130].

Теорема в том виде, как она обычно формулируется, справедлива лишь для автономных систем, и поэтому прежде чем приступить к изложению

\* Читателю следует помнить, что в этом простейшем примере рассматривается движение ракеты в однородной атмосфере. В противном случае состояние равновесия будет зависеть от времени, и трудности в анализе существенно возрастут.

первого метода Ляпунова, остановимся на той роли, которую играют входные воздействия в задаче устойчивости.

Если для системы  $\dot{x} = f(x, u)$  вектор управления  $u$  постоянен, то в этом случае такую систему можно анализировать как систему без входного сигнала, у которой положение равновесия иное, нежели в первоначальной системе. Другими словами, система  $\dot{x} = f(x, u)$  при  $u = k$  (постоянная) движется так же, как автономная система  $\dot{x} = f(x, k)$ , положение равновесия которой определяется условием  $f(x_e, k) = 0$ . Ясно, что для линейной системы  $\dot{x} = Ax + Bu$ , когда управляющие воздействия постоянны и существует матрица  $A^{-1}$ , обратная  $A$ , положение равновесия эквивалентной системы находится в точке  $x_e = A^{-1}Bk$ .

Если управление  $u(t)$  зависит от времени, то в общем случае невозможно найти такое преобразование, которое определяло бы единственное положение равновесия. Поэтому идеи Ляпунова нельзя переносить непосредственно на системы с произвольным входным сигналом. Однако иногда удается отыскать частное решение, и в этом случае можно проанализировать устойчивость частного решения. Данный вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе. А пока критерий устойчивости можно применять лишь к автономным системам или стационарным системам с постоянными входными сигналами.

Относительно этих систем первый метод Ляпунова гласит следующее:

**Теорема 5.1.** Пусть для автономной системы  $\dot{x} = f(x)$  уравнение возмущенного движения относительно положения равновесия  $x_e$  имеет вид

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial f(x_e)}{\partial x} \delta x + h(x_e, \delta x) \quad \text{и} \quad \lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} \frac{h(x_e, \delta x)}{\|\delta x\|} = 0. \quad (5.23)$$

В этом случае:

а) если уравнение линеаризованной системы  $\delta\dot{x} = \frac{\partial f(x_e)}{\partial x} \delta x$  имеет собственные значения с отрицательными действительными частями, то положение равновесия  $x_e$  асимптотически устойчиво;

б) если уравнение характеризуется одним или более собственными значениями с положительной вещественной частью, то равновесное состояние  $x_e$  неустойчиво;

в) если линеаризованное уравнение системы имеет одно или более собственных значений с нулевой действительной частью, а остальные — с отрицательной, то устойчивость даже в малом\* положения равновесия  $x_e$  нельзя установить, используя лишь уравнение линеаризованной системы.

Доказательство теоремы будет приведено в гл. 9, в которой излагается второй метод Ляпунова.

Исходя из высказанных положений следует ожидать, что вблизи состояния равновесия фазовый портрет рассматриваемой системы будет похож на фазовый портрет линеаризованной системы. В частности для нелинейных систем второго порядка фазовые траектории вблизи положения равновесия будут определяться линеаризованным уравнением при условии, что собственные значения этого уравнения не расположены на мнимой оси. Тот или иной характер положения равновесия зависит от расположения полюсов линеаризованной системы и определяется так же, как это делалось в предыдущей главе.

\* В литературе такие случаи носят название критических.

Обратимся теперь к примерам.

Пример 5.7. Вновь рассмотрим систему примера 5.4 (см. рис. 5.3). Уравнения состояния имеют вид

$$x_1 \overset{\Delta}{=} e; \quad x_2 \overset{\Delta}{=} \dot{e}; \quad \dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_1 - f(x_1);$$

$$f(x_1) = \begin{cases} 4, & x_1 \geq 1; \\ 4x_1, & -1 \leq x_1 \leq 1; \\ -4, & x_1 \leq -1. \end{cases} \quad (5.24)$$

У такой системы существуют три положения равновесия

$$\begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Для того чтобы получить линеаризованные уравнения относительно каждого положения равновесия, введем следующие переменные:

$$\delta x_1 = x_1 - x_{1e}; \quad \delta x_2 = x_2 - x_{2e}. \quad (5.26)$$

Рассмотрим прежде всего положение равновесия  $x_{1e} = 0; x_{2e} = 0$ . Для этого случая из уравнений (5.24) и (5.26) следует, что

$$\delta \dot{x}_1 = \delta x_2; \quad \delta \dot{x}_2 = -2\delta x_2 - \delta x_1. \quad (5.27)$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$

имеет двойной корень  $\lambda = -1$ . Таким образом (см. гл. 4), такое положение равновесия есть устойчивый узел. Фазовые траектории, расположенные в непосредственной близости от начала координат, будут направлены к положению равновесия (см. рис. 5.4).

Рассмотрим теперь положение равновесия в точке  $x_{1e} = \frac{4}{3}; x_{2e} = 0$ . Для этого случая в результате линеаризации получим

$$\delta \dot{x}_1 = \delta x_2; \quad \delta \dot{x}_2 = -2\delta x_2 + 3\delta x_1. \quad (5.28)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

имеет полюсы в точках  $\lambda = +1; \lambda = -3$ . Следовательно, такое положение равновесия есть седловая точка и поэтому неустойчиво. Точно так же можно показать, что положение равновесия  $(x_{1e}, x_{2e}) = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$  является седловой точкой и, следовательно, неустойчиво в смысле Ляпунова (см. упражнение 5.17).

Пример 5.8. Проанализируем устойчивость в малом при движении ракеты в примере 5.6. Допустим, что условие (5.23) выполняется, тогда уравнения (5.20) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} p & -\frac{Q}{J} C_{M\alpha} \\ -1 & p + \frac{Q}{mV} C_{L\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Q}{J} C_{M\delta} \\ -\frac{Q}{mV} C_{L\delta} \end{bmatrix} \delta. \quad (5.29)$$

Из уравнения (5.29) следует, что

$$\dot{\theta} = \frac{A_\delta Q (p + a_2) \delta}{p^2 + a_1 p + a_0}; \quad (5.30a)$$

$$\alpha = \frac{B_\delta Q (p + b_2) \delta}{p^2 + a_1 p + a_0}, \quad (5.30b)$$

где

$$A_{\delta} = \frac{C_{M\delta}}{J}; \quad B_{\delta} = -\frac{1}{mV} C_{L\delta}; \quad a_0 = -\frac{Q}{J} C_{M\alpha};$$

$$a_1 = \frac{1}{mV} C_{L\alpha}; \quad a_2 = \frac{1}{mV} \left[ 1 - \frac{C_{M\alpha} C_{L\delta}}{C_{M\delta} C_{L\alpha}} \right]; \quad b_2 = -\frac{mV}{J} \cdot \frac{C_{M\delta}}{C_{L\delta}}.$$

Уравнения (5.30а) и (5.30б) позволяют проанализировать устойчивость в малом при возмущении ракеты относительно балансирующего положения (положения равновесия)  $\alpha_T = \delta_T = \theta_T = 0$ . Справедливость такого анализа обусловлена возможностью применить первый метод Ляпунова.

Характеристическое уравнение неуправляемой ракеты следует из уравнения (5.30) и имеет вид

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \quad (5.31)$$

Движение ракеты лишь в том случае асимптотически устойчиво в малом, если  $a_1$  и  $a_2$  положительны. Оказывается, именно это условие является главным при разработке крылатой ракеты. Физически положительность  $a_0$  и  $a_1$  означает, что центр давления (т. е. точка приложения результирующей силы, которая вызывает требуемый момент) лежит позади центра масс ракеты. В этом случае говорят, что ракета статически устойчива.

Если же  $a_0$  или  $a_1$ , или оба вместе отрицательны, то центр давления лежит впереди центра масс, и в этом случае говорят, что ракета неустойчива.

При проектировании автопилота неуправляемая ракета, рассматриваемая до сих пор, и представляет тот объект, которым следует управлять. Автопилот при этом предназначен для того, чтобы улучшить запас устойчивости и обеспечить требуемое качество системы. Статическая же устойчивость или неустойчивость лишь означает, обладает ли объект, которым необходимо управлять, указанным свойством\*.

**Пример 5.9.** Оценим устойчивость положений равновесия системы «электродвигатель—генератор» (пример 4.5). Нормальный вид уравнений движения определяется уравнением (4.35), т. е.

$$\left. \begin{aligned} ai(t) + T \frac{di(t)}{dt} &= [M - \xi v(t)] \psi(t) - T_E \frac{d\psi(t)}{dt}; \\ \psi(t) i(t) &= d + bv(t) + T_J \frac{dv(t)}{dt}; \quad \psi(t) = \psi(i(t)). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Приравняв величины  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$  и  $\frac{dv}{dt}$  нулю, получим координаты точек равновесия  $i_e$ ,  $\psi_e$ ,  $v_e$ , или

$$ai_e = (M - \xi v_e) \psi_e; \quad \psi_e i_e = d + bv_e; \quad \psi_e = \psi_e(i_e). \quad (5.33)$$

Вводя величину

$$\gamma = d + \frac{b}{\xi} (M - a), \quad (5.34)$$

получим следующие положения равновесия для различных участков кривой намагничивания (см. рис. 4.20):

$$\begin{bmatrix} v_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi} (M - a) \\ \sqrt{\gamma} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi} (M - a) \\ -\sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ если } 0 \leq \gamma < \psi_{\max}^2; \quad (5.35a)$$

$$\begin{bmatrix} v_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ если } \gamma \leq 0; \quad (5.35б)$$

$$\begin{bmatrix} v_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\psi_{\max}^2 M - ad}{ab + \xi \psi_{\max}^2} \\ \pm \frac{bM + \xi d}{ab + \xi \psi_{\max}^2} \psi_{\max} \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} -\frac{d}{b} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ если } \gamma \geq \psi_{\max}^2. \quad (5.35в)$$

\* Следует отметить, что применять статически неустойчивые ракеты при их пуске с самолетов нежелательно, так как в случае отказа автопилота ракета становится снова неустойчивой и возможно ее столкновение с собственным самолетом (Прим. ред.).



Из этих уравнений видно, что для  $0 \leq \gamma < \psi_{\max}^2$  установившаяся скорость электродвигателя не зависит от момента нагрузки \*. В этом состоит основное требование, предъявляемое к системе «электродвигатель—генератор». В области  $\gamma < 0$  последняя система оказывается разомкнутой. Если  $\gamma \geq \psi_{\max}^2$ , то достигается область насыщения кривой намагничивания и установившаяся скорость электродвигателя зависит от параметров нагрузки  $d$  и  $b$ .

Отсюда следует, что для того, чтобы система удовлетворяла заданным условиям в допустимой области изменения параметров нагрузки  $b$  и  $d$ , должно выполняться соотношение  $0 < \gamma < \psi_{\max}^2$ . Если оно выполняется, то система будет иметь три положения равновесия, определяемые уравнением (5.35а).

Теперь можно приступить к анализу устойчивости в малом этих положений равновесия. Здесь  $i_e^2 = \psi_e^2 < \psi_{\max}^2$ . Пусть

$$i = i_e + \delta i; \quad \psi = \psi_e + \delta \psi; \quad v = v_e + \delta v. \quad (5.36)$$

Заметим, что при  $i_e^2 < \psi_{\max}^2$  и для малых  $\delta \psi$  из кривой намагничивания следует  $\delta \psi = \delta i$ . Учитывая это при подстановке в уравнения (5.35а) и (5.32) и пренебрегая произведениями малых величин, получим линеаризованные уравнения, справедливые для малых сигналов.

Итак,

$$\begin{bmatrix} (T + T_E) p & \xi i_e \\ -2i_e & b + T_J p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i \\ \delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.37a)$$

при

$$i_e = \pm \sqrt{d + \frac{b}{\xi} (M - a)} \neq 0; \quad v_e = \frac{1}{\xi} (M - a)$$

и

$$\begin{bmatrix} \left[ -\frac{\xi}{b} \left( d + \frac{b}{\xi} (M - a) \right) + (T + T_E) p \right] & 0 \\ 0 & b + T_J p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta i \\ \delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.37b)$$

при  $i_e = 0$ ;  $v_e = -\frac{d}{b}$ , где, как и раньше,  $p$  — оператор  $\frac{d}{dt}$ .

Характеристические уравнения для систем (5.37а) и (5.37б) равны соответственно

$$p^2 + \frac{b}{T_J} p + \frac{2\xi\gamma}{T_J(T + T_E)} = 0; \quad (5.38a)$$

$$\left( p - \frac{\xi\gamma}{T + T_E} \right) \left( p + \frac{b}{T_J} \right) = 0. \quad (5.38b)$$

Поскольку все величины:  $\xi$ ,  $T$  и  $T_J$  положительны, то уравнения (5.38а) и (5.38б) определяют при  $0 < \gamma < \psi_{\max}^2$  лишь два положения равновесия при  $i_e = \pm \sqrt{\gamma}$ ;  $v_e = \frac{1}{\xi(M - a)}$ , каждое из которых:

- а) либо устойчивый узел при  $b^2 (T + T_E) \geq 8T_J \xi \gamma$ ;
- б) либо устойчивый фокус, если  $b^2 (T + T_E) < 8T_J \xi \gamma$ ;
- в) либо центр, если  $b (T + T_E) = 0$ .

Из уравнения (5.37б) также следует, что существует единственная седловая точка при  $i_e = 0$ ;  $v = -\frac{d}{b}$ . Более того, из уравнений (5.35б) и (5.38) при  $\gamma < 0$  следует, что при  $i_e = 0$  и  $v_e = -\frac{d}{b}$  имеем устойчивый узел.

В качестве системы, линеаризованное уравнение которой имеет собственное значение с нулевой действительной частью и, следовательно, не определяет устойчивость, рассмотрим пример.

**Пример 5.10.** Система первого порядка имеет уравнение  $\dot{x} = kx^m$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , которому соответствует тривиальное линеаризованное уравнение  $\delta \dot{x} = 0$ . Собственное значение

\* Установившийся момент вращения определяется величиной  $d + bv_e$ .

ние, соответствующее этому уравнению, равно нулю, и первый метод Ляпунова неприменим. Легко видеть в результате элементарного интегрирования, что начало координат системы  $\dot{x} = kx^m$  при  $m > 1$  (асимптотически) устойчиво, если только  $k < 0$  и  $m$  нечетно, и неустойчиво, если  $m$  четно или  $m$  нечетно, но  $k > 0$ . Таким образом, действительное движение системы нельзя определить, используя линеаризованное уравнение.

Основной недостаток метода линеаризации заключается в том, что даже в тех случаях, когда первый метод Ляпунова применим, мы можем лишь получить достоверные сведения о поведении системы в некоторой малой области положения равновесия, размеры которой неизвестны. Поэтому для оценки области, в которой справедливы линеаризованные уравнения, приходится обращаться к инженерной интуиции, а иногда к моделированию системы или другим средствам.

### 5.5. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРАЕКТОРИИ. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И АНАЛИЗ ОШИБОК

Изложенную выше методику линеаризации относительно положения равновесия можно без труда обобщить, проводя линеаризацию относительно некоторого решения или траектории системы. Этот прием с успехом применяется, например, в задачах космической навигации, когда известна расчетная траектория космического корабля. Линеаризовав исходные уравнения, оказывается возможным определить управляющие воздействия, которые будут удерживать космический аппарат вблизи расчетной траектории. В то же время анализируя полученные линеаризованные уравнения, можно оценить влияние ошибок при задании начальных условий и параметров объекта; в дальнейшем, если это необходимо, можно найти коэффициенты чувствительности.

Если такие задачи при анализе не ставятся, то проблема теряет смысл. Отметим также, что возникающие при линеаризации линейные уравнения, как правило, нестационарны, так что точных решений получить не удастся, и поэтому требуется использовать вычислительные машины для отыскания переходной матрицы и других показателей. Кроме того, имеющиеся теоретические результаты исследования линейных нестационарных систем, с одной стороны, немногочисленны, а с другой — сложны в приложениях и требуют введения понятия равномерной асимптотической устойчивости. Наконец, и это самое главное, в случае нестационарной системы надо постоянно помнить о степени малости, задавая себе вопрос, достаточно ли малы изменения переменных и остаются ли последние в области, где линеаризованные уравнения справедливы. Если возникают какие-либо сомнения, то решения линеаризованного уравнения должны непрерывно сравниваться с численным решением первоначального нелинейного уравнения.

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему общего вида

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (5.39)$$

Предположим, мы сумели найти частное решение этой системы  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$ , обозначаемое впредь через  $x_1(t)$ . Частное решение, обусловленное управлением  $u_1(t)$ , можно отыскать аналитически либо численными методами. Теперь рассмотрим, как влияют малые возмущения по переменным  $x$  или  $u$  (или же по обеим вместе) на движение системы. Пусть, как и прежде,

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + \delta x(t); & u(t) &= u_1(t) + \delta u(t); \\ \dot{x}(t) &= \dot{x}_1(t) + \delta \dot{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

и  $f(x, u, t)$  непрерывно дифференцируема по переменным  $x$  и  $u$ . Тогда из уравнения

$$\dot{x}_1(t) + \delta \dot{x}(t) = f(x_1 + \delta x, u_1 + \delta u, t), \quad (5.41)$$

ограничиваясь при разложении выражения в правой части лишь первыми степенями  $\delta x$  и  $\delta u$  и вычитая опорное решение, удовлетворяющее уравнению

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1(t), u_1(t), t),$$

получим

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, u_1, t) \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(x_1, u_1, t) \delta u + h(x_1, u_1, \delta x, \delta u, t), \quad (5.42)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, u_1, t)$  и  $\frac{\partial f}{\partial u}(x_1, u_1, t)$  определяются матрицами Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, u_1, t) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\substack{x(t) = x_1(t) \\ u(t) = u_1(t)}}; \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_1, u_1, t) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{array} \right]_{\substack{x(t) = x_1(t) \\ u(t) = u_1(t)}}, \quad (5.44)$$

а выражение  $h(x_1, u_1, \delta x, \delta u, t)$ , или сокращенно  $h(\delta x, \delta u, t)$ , как и прежде, представляет остаточный член.

Отметим, что матрицы Якоби  $\frac{\partial f(x_1, u_1, t)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f(x_1, u_1, t)}{\partial u}$ , вычисленные вдоль траектории  $x(t) = x_1(t)$  и  $u(t) = u_1(t)$ , не зависят непосредственно от  $x(t)$  и  $u(t)$ , но являются функциями времени  $t^*$ .

Поэтому введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, u_1, t); \quad \frac{\partial f}{\partial u}(t) \triangleq \frac{\partial f}{\partial u}(x_1, u_1, t). \quad (5.45)$$

Тогда уравнение (5.42) переписывается в виде

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(t) \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(t) \delta u + h(\delta x, \delta u, t).$$

Допустим,  $h$  таково, что условие

$$\lim_{\substack{\|\delta x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta u\| \rightarrow 0}} \frac{h(\delta x, \delta u, t)}{\|\delta x\|} = \lim_{\substack{\|\delta x\| \rightarrow 0 \\ \|\delta u\| \rightarrow 0}} \frac{h(\delta x, \delta u, t)}{\|\delta u\|} = 0 \quad (5.46)$$

\* Рассматриваемые матрицы Якоби не зависят от времени, если во-первых, система стационарна и, во-вторых, частное решение  $x_1(t)$  не зависит явно от времени. При таком подходе изложенное в разделе 5.3 можно рассматривать как особый случай, связанный с линеаризацией системы стационарных уравнений относительно частного решения  $x_1(t) \equiv x_e$ .

выполняется для всех  $t$ . В этом случае следует ожидать, что поведение системы в малой окрестности решения  $\mathbf{x}_1(t)$  для достаточно малых  $\delta \mathbf{u}$  будет описываться линеаризованным уравнением

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(t) \delta \mathbf{u}. \quad (5.47)$$

Для решения полученного линейного нестационарного уравнения (5.47) можно использовать методы, описанные в гл. 3. В частности, можно отыскать общее решение уравнения (5.47) в виде выражения (3.22) [см. гл. 3]:

$$\delta \mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \delta \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\tau) \delta \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (5.48)$$

где, как и прежде,  $\Phi(t, t_0)$  — переходная матрица системы (5.47), удовлетворяющая матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(t) \Phi(t, t_0); \quad \Phi(t_0, t_0) = I. \quad (5.49)$$

Из соотношения (5.48) следует ряд весьма интересных свойств переходной матрицы. Для любого момента времени справедливо

$$\delta \mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \delta \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\tau) \delta \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (5.50)$$

В этом выражении лишь первый член в правой части зависит от  $\delta \mathbf{x}(t_0)$  и единичное возмущение  $i$ -й компоненты  $\delta \mathbf{x}(t_0)$  вызовет изменение  $j$ -й компоненты вектора  $\delta \mathbf{x}(t_1)$ , величина которого равна  $\Phi_{ji}(t_1, t_0)$ . Таким образом, переходной матрице  $\Phi(t_1, t_0)$  можно придать смысл матрицы чувствительности, которая связывает возмущение вектора  $\delta \mathbf{x}$  в момент  $t_0$  с изменением этого же вектора в момент  $t_1$  при условии, что  $\delta \mathbf{u}$  остается неизменным.

Аналогично интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\tau) \delta \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (5.51)$$

определяет матрицу чувствительности вектора  $\delta \mathbf{x}$  к изменению только вектора  $\delta \mathbf{u}(t)$ . Например, если  $i$ -я составляющая вектора  $\delta \mathbf{u}$  в момент  $t_2$  является единичным импульсом, то изменение  $j$ -й составляющей вектора  $\delta \mathbf{x}(t_1)$  в момент времени  $t_1$  определяется величиной

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{jk}(t_1, t_2) \left[ \frac{\partial f(t_2)}{\partial \mathbf{u}} \right]_{ki}.$$

Если возмущение  $i$ -й компоненты  $\delta \mathbf{u}$  в момент  $t_2$  равно единичной функции, то изменение  $j$ -й компоненты  $\delta \mathbf{x}(t_1)$  равно

$$\int_{t_2}^{t_1} \Phi_{jk}(t_1, \tau) \left[ \frac{\partial f(t)}{\partial \mathbf{u}} \right]_{ki} d\tau,$$

где  $\left[ \frac{\partial f(t)}{\partial \mathbf{u}} \right]_{ki}$  есть член  $k$ -й строки  $i$ -го столбца матрицы  $\frac{\partial f(t)}{\partial \mathbf{u}}$ .

Если в результате действия возмущений происходят малые изменения параметров, то эти изменения можно учесть точно так же, как это было сделано выше. Рассмотрим систему, которая описывается уравнением

$$\dot{x} = f [x, p(t), t], \quad (5.52)$$

где вектор  $p(t)$  объединяет совокупность параметров: коэффициента усиления, постоянных времени и т. д., влияние изменения которых и требуется оценить.

Если  $f$  — непрерывно-дифференцируемая функция по переменным  $p$  и  $x$ , то правую часть уравнения (5.52) можно разложить в ряд и получить выражение относительно возмущений  $\delta x$  и  $\delta p$

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(t) \delta x + \frac{\partial f}{\partial p}(t) \delta p + h(\delta x, \delta p), \quad (5.53)$$

где по-прежнему  $\frac{\partial f}{\partial x}(t)$  и  $\frac{\partial f}{\partial p}(t)$  — соответствующие матрицы Якоби, вычисленные в точках частного решения.

Тогда с точки зрения поведения в малом уравнение (5.52) можно заменить линейной частью выражения (5.53). Между прочим, отметим, что в линейном смысле возмущение вектора параметров  $\delta p$  играет роль управляющей функции.

**Пример 5.11.** Уравнения углового движения искусственного спутника Земли при действии управляющего момента (например, момента силы тяги) относительно главных осей инерции спутника задаются уравнениями Эйлера в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{J_3 - J_2}{J_1} \omega_2 \omega_3 + \frac{u_1(t)}{J_1}; \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{J_1 - J_3}{J_2} \omega_3 \omega_1 + \frac{u_2(t)}{J_2}; \\ \dot{\omega}_3 &= -\frac{J_2 - J_1}{J_3} \omega_1 \omega_2 + \frac{u_3(t)}{J_3}, \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

где  $J_i$ ,  $\omega_i$ ,  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — соответственно составляющие момента инерции, угловой скорости и управляющего момента относительно одной из главных осей спутника.

Если  $J_1 = J_2 = J$ , то из уравнений (5.54) видно, что решение при  $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) \equiv 0$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \sin(\beta t + \alpha) \\ \omega_0 \cos(\beta t + \alpha) \\ \omega_{30} \end{bmatrix}, \quad (5.55)$$

где  $\omega_0$ ,  $\omega_{30}$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные величины, которые равны:

$$\beta = \frac{J_1 - J_3}{J_1} \omega_{30}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2};$$

$$\omega_{10} = \omega_1(0); \quad \omega_{20} = \omega_2(0); \quad \omega_{30} = \omega_3(0).$$

Линеаризованные уравнения движения для исходной системы (5.54) относительно траектории (5.55) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}_1 &= \beta \delta \omega_2 + k \cos(\beta t + \alpha) \delta \omega_3 + \frac{\delta u_1(t)}{J}; \\ \delta \dot{\omega}_2 &= -\beta \delta \omega_1 - k \sin(\beta t + \alpha) \delta \omega_3 + \frac{\delta u_2(t)}{J}; \\ \delta \dot{\omega}_3 &= \frac{\delta u_3(t)}{J_3}, \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

где  $k = \omega_0 \frac{J - J_3}{J}$ .

При  $\delta u_3$  и  $\delta \omega_3$ , равных нулю, влияние  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  можно определить, решая лишь первые два уравнения, поскольку в этом случае они отделяются от третьего. Окончательные линейризованные уравнения будут верными, поскольку при невозмущенной координате  $\omega_3$  уравнения (5.54) не только разделяются, но и становятся линейными. В заключение отметим, что всегда линейризация исходного линейного уравнения приводит к точно такому же уравнению.

**Пример 5.12.** Пусть на систему примера 5.11 в момент  $t = 0$  действовало возмущение  $\delta \omega_{30}$  (что эквивалентно импульсному воздействию по координате  $\delta u_3(t)$ ). При  $\delta u_1 = \delta u_2 = 0$  влияние  $\delta \omega_3$  можно оценивать как эквивалентное возмущение управляющих воздействий в двух первых уравнениях системы (5.56), точное решение которых теперь можно отыскать. В частности, получим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} k \cos(\beta t + \alpha) \\ -k \sin(\beta t + \alpha) \end{bmatrix},$$

откуда

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} \cos \beta(t - \tau) & \sin \beta(t - \tau) \\ -\sin \beta(t - \tau) & \cos \beta(t - \tau) \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \end{bmatrix} = k \delta \omega_{30} \int_0^t \begin{bmatrix} \cos \beta(t - \tau) & \sin \beta(t - \tau) \\ -\sin \beta(t - \tau) & \cos \beta(t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta \tau + \alpha) \\ -\sin(\beta \tau + \alpha) \end{bmatrix} d\tau.$$

Из последнего соотношения найдем

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_1 &= k \delta \omega_{30} [\cos(\beta t + \alpha)] t; \\ \delta \omega_2 &= -k \delta \omega_{30} [\sin(\beta t + \alpha)] t. \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

Величины  $\delta \omega_1$  и  $\delta \omega_2$ , возрастают неограниченно, что означает неограниченность самих величин  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Этого, конечно, не может быть, поскольку момент количества движения после импульсного воздействия остается постоянным. Зная вид решения и помня, что система консервативна, мы можем определить тот интервал времени, в течение которого линейное приближение определяет верное решение задачи (см. упражнение 5.18).

**Пример 5.13.** Для системы, рассмотренной в двух последних примерах, оценим влияние возмущения по параметру  $J_1$ , возникающего при  $t = 0$ , т. е.  $J_1 = J + \delta J_1$ , а  $J_2 = J$  и  $J_3$  остаются невозмущенными. Линейризованные уравнения, соответствующие выражению (5.53), принимают вид (при условии  $\delta u_1 = \delta u_2 = \delta u_3 = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}_1 &= \beta \delta \omega_2 + k \cos(\beta t + \alpha) \delta \omega_3 - \frac{k}{J} \omega_{30} \cos(\beta t + \alpha) \delta J_1; \\ \delta \dot{\omega}_2 &= -\beta \delta \omega_1 - k \sin(\beta t + \alpha) \delta \omega_3 - \frac{\omega_0}{J} \omega_{30} \sin(\beta t + \alpha) \delta J_1; \\ \delta \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{J_3} \omega_0^2 \sin(\beta t + \alpha) \cos(\beta t + \alpha) \delta J_1 = \frac{\omega_0^2}{2J_3} \sin 2(\beta t + \alpha) \delta J_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

В первую очередь следует определить решение третьего уравнения относительно  $\delta \omega_3$ . Затем, подставляя это решение в первые два уравнения, найдем  $\delta \omega_1$  и  $\delta \omega_2$ . Предлагаем читателю самостоятельно проделать эти действия. Однако отметим, что третье уравнение указывает на возникновение колебаний по координате  $\delta \omega_3$  с частотой  $2\beta$ , когда  $J_1$  получает приращение  $\delta J_1$ , что приводит к динамической асимметрии спутника ( $J_1 \neq J_2$ ). Этот результат подтверждает исследования Пуансо [62] для свободного движения несимметричного искусственного спутника Земли. Кроме того, из полученных линейных уравнений следует неограниченный рост координат  $\delta \omega_1$  и  $\delta \omega_2$ , что невозможно.

## 5.6. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМЫ. РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Как следует из предыдущего параграфа, нам не представило особого труда сформулировать понятие устойчивости в малом траекторий произвольной системы. Теперь перенесем на этот случай идеи Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Пусть, как и прежде в параграфе 5.5,  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  есть опорная траектория. Это означает, что траектория в пространстве состояний определяется управляющим сигналом  $u_1(t)$ , действующим на систему (5.39), начиная с момента времени  $t_0$ , когда  $x(t_0) = x_0$ . Зафиксировав  $u_1(t)^*$ , можно изучать влияние возмущения  $\delta x(t_0) = \delta x_0$  на начальное состояние системы. Пусть  $x(u_1(t), t, x_0 + \delta x_0, t_0)$  — возмущенная траектория системы; тогда понятия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову можно сформулировать следующим образом.

**О п р е д е л е н и е 5.4.** Траектория системы  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  устойчива (в смысле Ляпунова), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$  и, возможно, от  $t_0$  такое, что для всякой возмущенной траектории  $x(u_1(t), t, x_0 + \delta x_0, t_0)$  из условия  $\|\delta x_0\| < \delta$  следует  $\|x_1(t) - x(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t > t_0$ .

**О п р е д е л е н и е 5.5.** Траектория  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  асимптотически устойчива, если:

- а) это траектория устойчива;
- б) существует  $\delta_a$ , возможно зависящее от  $t_0$ , и такое, что из условия  $\|\delta x_0\| < \delta_a$  следует  $\|\delta x(t)\| = \|x_1(t) - x(t)\| \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow \infty$ .

**О п р е д е л е н и е 5.6.** Траектория  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  неустойчива, если существует такое  $\varepsilon$ , что нужного  $\delta$ , которое удовлетворяет определению 5.4, подобрать нельзя.

Эти определения получены непосредственно из данных ранее определений об устойчивости относительно точки равновесия. Отметим, что простота новых определений обманчива. Укажем, по крайней мере, два примера, в которых нежелательно использовать данные определения.

**П р и м е р 5.14.** Из определения 5.5 следует, что всякий предельный цикл может быть, самое большее, лишь устойчивым, но никак не асимптотически устойчивым, хотя практически из условия устойчивости следует, что происходит возвращение на тот же предельный цикл. Рассмотрим возмущение  $\delta x$  относительно траектории предельного цикла. Это возмущение приводит к тому, что возмущенная траектория через некоторое время вновь входит в тот же предельный цикл. Очевидно из определения предельного цикла, что  $\delta x$  не может стремиться к нулю, и по определению 5.5 предельный цикл асимптотически неустойчив.

**П р и м е р 5.15.** Многие консервативные системы, период колебаний которых определяется расстоянием изображающей точки от положения равновесия, будут по определению иметь неустойчивые траектории, хотя с практической точки зрения движение по такой траектории «устойчиво».

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли по круговой орбите радиуса  $R$  под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра окружности. Допустим, что возмущение по положению и скорости спутника привело к тому, что он стал двигаться по новой орбите радиуса  $R + \delta R$ . Нетрудно себе представить, что малые возмущения приведут к малым изменениям траектории. Тогда можно установить, что круговая орбита устойчива в смысле Ляпунова. Однако проанализируем изменение угловой скорости. Круговую орбиту можно рассматривать как орбиту, угловое движение по которой с постоянной скоростью обусловлено силой притяжения, т. е.

$$m\omega^2 R = m \frac{k}{R^2},$$

где  $m$  — масса спутника;

$k$  — гравитационная постоянная;

$\omega$  — угловая скорость движения спутника по орбите.

Из приведенного выражения следует, что величина  $\omega$  пропорциональна  $R^{-\frac{3}{2}}$ , поэтому разным орбитам соответствуют разные периоды обращения. С ростом времени расстояние между двумя спутниками, движение одного из которых является возмущенным, может достичь  $2R$ , и это не зависит от расстояния между орбитами  $\delta R$ , которое может быть сколь угодно малым. Таким образом, орбита спутника неустойчива в смысле Ляпунова. Аналогично можно

\* Это необходимо, поскольку определение устойчивости, данное Ляпуновым, относится к системам без входного воздействия.

показать, что угловое движение математического маятника относительно произвольной траектории (за исключением тривиального случая движения относительно положения равновесия) неустойчиво в смысле Ляпунова.

Два последних примера свидетельствуют о том, что требования Ляпунова к устойчивости и асимптотической устойчивости оказываются весьма жесткими, если речь идет об устойчивости относительно траекторий. Эти условия удастся ослабить после введения в следующем параграфе понятия орбитальной устойчивости. В то же время можно показать, что для некоторых нестационарных, нелинейных и пелинейных нестационарных систем требования Ляпунова к устойчивости и асимптотической устойчивости недостаточно справедливы.

**Пример 5.16.** Рассмотрим линейную систему с переменными параметрами  $\dot{x} + \frac{1}{t} x = 0$ , которая описывается уравнением Эйлера первого порядка (пример 3.12). Интегрируя, получим решение в виде

$$x(t) = \frac{t_0}{t} x(t_0).$$

Заметим, что при  $t > t_0$   $x(t)$  всегда меньше, чем  $x(t_0)$ , и более того,  $x(t) \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow \infty$ ; таким образом, начало координат асимптотически устойчиво. Однако, если оценить скорость сходимости системы к положению равновесия, то мы заметим, что чем больше значения  $t_0$ , тем меньше скорость сходимости (например, при  $t_0 = 1$  требуется 9 сек, чтобы функция  $x(t)$  уменьшилась до величины  $0,1x(t_0)$ . Однако, если  $t_0 = 1000$  сек, то требуется 9000 сек, чтобы достичь того же конечного значения). Из этого примера видно, что с точки зрения практики асимптотическая устойчивость здесь означает просто устойчивость.

Обобщая, можно сказать, что поведение любой системы, описываемой дифференциальным уравнением Эйлера, будет именно таким, если начало координат системы асимптотически устойчиво. Помимо того, что в нестационарных системах скорость сходимости зависит от  $t_0$ , может оказаться, что реакция системы на некоторое возмущение  $\delta x$  будет неограниченно расти с изменением  $t_0$ , и поэтому невозможно подобрать число  $\delta$ , единое для всех  $t_0$ . Следовательно, величина  $\delta$  в определении устойчивости по Ляпунову должна быть функцией  $t_0$ .

**Пример 5.17 (Массера).** Рассмотрим линейную нестационарную систему  $\dot{x} = (6t \sin t - 2t) x$ ; интегрируя ее, получим общее решение для всех  $t_0 > 0$  в виде

$$x(t) = x(t_0) \exp(6 \sin t - 6t \cos t - t^2 - 6 \sin t_0 + 6t_0 \cos t_0 + t_0^2).$$

Если обозначить  $T = t - t_0$ , то можно показать, что отношение  $\frac{x(t)}{x(t_0)}$  ограничено величиной  $\exp[12 + T(6 - T)]$  для всех  $T > 6$  и, следовательно, стремится к нулю, когда  $T \rightarrow \infty$ . Теперь возьмем  $T = \pi$ , а  $t_0 = 2\pi n$ ; тогда, обозначив  $x_0 = x(2\pi n)$ , получим

$$\frac{x((2n + 1)\pi)}{x_0} = \exp[(4n + 1)(6 - \pi)\pi].$$

Когда  $n \rightarrow \infty$ , отношение  $\frac{x}{x_0} \rightarrow \infty$ , а это значит, что чем позже во времени подействовало возмущение, тем большая реакция соответствует ему в момент времени через  $\pi$  сек после момента действия возмущения.

Из примеров 5.16 и 5.17 следует, что при рассмотрении нестационарных систем необходимо дать другие определения устойчивости, при которых скорость сходимости к равновесному состоянию или другие свойства не зависели бы от момента действия возмущения  $t_0$ . Указанный смысл вложен в понятие равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости.

Когда возмущенная траектория обладает следующим свойством:  $\|\delta x(t)\| \rightarrow 0$  равномерно относительно  $\delta x_0$ , то это значит, что существует



некоторая конечная граница (зависящая от  $\|\delta x_0\|$ ) времени, после истечения которого норма  $\|\delta x\|$  становится меньше или равна некоторой величине, единой для всевозможных  $\delta x_0$ . Таким образом, время перехода системы в некоторую фиксированную область не зависит от конкретного смысла вектора  $\delta x_0$  и даже не зависит от его направления, а определяется лишь величиной (или нормой)  $\delta x_0$ . В этом смысле линейная система асимптотически устойчива, если для любого числа  $\mu$  всегда существует другое число  $T$ , зависящее от  $\mu$ ,  $\delta x_0$  и  $t_0$ , такое, что все траектории  $\delta x(t)$ , начиная с момента времени  $t_0 + T$ , будут находиться на расстоянии  $\mu$  и ближе от начала координат, при условии, когда  $\delta x_0$  принадлежит сфере радиуса  $\delta_a(t_0)$  с центром в начале координат. В этом случае время перехода  $T$  фактически не зависит от точного значения  $\delta x_0$ , а зависит лишь от максимума величины  $\delta x_0$ , обозначаемой  $\delta_a$ , таким образом, можно записать, что  $T(\mu, \delta_a(t_0), t_0)$ . Для линейных систем при одном и том же значении  $\mu$ , если  $\delta'_a > \delta_a$ , получим  $T(\mu, \delta'_a, t_0) > T(\mu, \delta_a, t_0)$ . Это означает, что траектория линейной асимптотически устойчивой системы стремится к началу координат равномерно относительно  $\delta x_0$  (см. гл. 11). Нелинейная система может оказаться асимптотически устойчивой, однако траектории не будут стремиться при этом к началу координат равномерно относительно  $\delta x_0$ . Могут существовать, например, отдельные направления (или гиперплоскости), такие, что  $T(\mu, \delta x_0, t_0) \rightarrow \infty$ , когда выбранное  $\delta x_0$  располагается на упомянутых линиях или гиперплоскостях (следовательно, скорость движения есть функция направления от первоначальной точки  $\delta x_0$  и, в частности, существуют направления, вдоль которых скорость движения равна 0)\*. В этих случаях не существует верхней границы  $T$ , какова бы ни была величина окрестности  $\delta_a$ .

Условие  $\|\delta x(t)\| \rightarrow 0$  равномерно относительно  $x_0$ , означает, что сходимость определяется только нормой начального состояния  $\|x_0\|$ . Таким образом, время перехода  $T$ , как оно определено выше, зависит только от  $\delta_a$ , которая ограничивает  $\|x_0\|$ .

Выражение  $\|\delta x(t)\| \rightarrow 0$  равномерно относительно  $t_0$  означает, что сходимость не зависит от момента  $t_0$ . Следовательно, и  $T$  не зависит от  $t_0$ . Тогда системы, у которых скорость движения стремится к 0 при  $t_0 \rightarrow \infty$  (как это было в примере 5.16), не будут стремиться к положению равновесия равномерно по  $t_0$ .

После такого предварительного обсуждения можно ввести следующие понятия.

**О п р е д е л е н и е 5.7.** Траектория  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  равномерно устойчива, если она устойчива в смысле определения 5.4 и  $\delta$  не зависит от  $t_0$ .

**О п р е д е л е н и е 5.8.** Траектория  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  равномерно эквивасимптотически устойчива, если:

- а) она устойчива;
- б) всякое возмущенное движение при  $\|\delta x_0\| < \delta_a$  таково, что  $\|\delta x\| \rightarrow 0$  равномерно относительно переменных  $\delta x_0$ .

**О п р е д е л е н и е 5.9.** Траектория  $x_1(u_1(t), t; x_0, t_0)$  равномерно асимптотически устойчива, если:

- а) она равномерно устойчива;
- б) всякое возмущенное движение при  $\|\delta x_0\| < \delta_a$  таково, что  $\|\delta x\| \rightarrow 0$  равномерно относительно переменных  $\delta x_0$  и  $t_0$ .

Можно отметить, что асимптотически устойчивая линейная стационарная система стремится к положению равновесия таким образом, когда ее координаты экспоненциально убывают со временем (см. гл. 11) и, следова-

\* См., например, работу [13].

тельно, такая система равномерно асимптотически устойчива\*. При анализе равномерной асимптотической устойчивости полезно применять следующую теорему, которая позволяет судить об устойчивости опорной траектории нелинейной нестационарной системы по устойчивости ее линеаризованного решения.

**Т е о р е м а 5.2.** [73]. Рассмотрим нелинейную нестационарную систему, описываемую уравнением (5.39), которое можно представить в виде ряда по возмущениям относительно опорной траектории при некотором фиксированном управлении  $u_1(t)$ , т. е.

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, u_1, t) \delta x + h(\delta x, t),$$

где  $h(\delta x, t)$  содержит члены второго порядка и выше. Пусть  $\frac{\|h(\delta x, t)\|}{\|\delta x\|} \rightarrow 0$  равномерно по  $t$ , когда  $\|\delta x\| \rightarrow 0$ ; в этом случае равномерная асимптотическая устойчивость начала координат линеаризованной системы вида  $\delta \dot{x} = \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial x} \delta x$  обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость траектории  $x_1(t)$ \*\*.

Доказательство этой теоремы будет дано в гл. 11. Обсуждение вопроса о равномерной асимптотической устойчивости линейных нестационарных систем мы оставляем до гл. 9, где будет изложен второй метод Ляпунова.

Теорема 5.2 дает лишь достаточные условия, что связано с большой степенью общности рассматриваемой системы. В тех случаях, когда речь идет о движении самолетов или ракет, якобиан  $\frac{\partial f(t)}{\partial x}$  линеаризованной системы является гладкой функцией времени с относительно малой скоростью изменения. В этом случае при проектировании автопилотов с успехом пользуются методом «замороженных коэффициентов». Этот метод заключается в том, что в каждой точке опорной траектории переменные параметры фиксируются и осуществляется линеаризация стационарной системы. Проектирование ведется путем анализа последовательности «замороженных» точек.

Описанную выше методику, конечно, нельзя использовать для анализа всех систем, но она оказывается справедливой во многих случаях, встречающихся на практике, если выполняются следующие условия:

- 1) коэффициенты линеаризованной системы изменяются незначительно в течение переходного процесса либо изменяются монотонно;
- 2) собственные значения линеаризованной системы расположены в удалении от мнимой оси.

В этом случае поведение системы, устойчивой в малом, можно достаточно точно описать линеаризованными уравнениями с «замороженными» коэффициентами. Однако следует быть очень осмотрительными, когда элементы матрицы Якоби оказываются периодическими функциями или собственные значения уравнений линеаризованной системы близки к мнимой оси. Обратимся к примеру\*\*\*.

\* По крайней мере, всякая асимптотически устойчивая стационарная система одновременно и равномерно асимптотически устойчива.

\*\* Беллман приводит в работе [14] интересный пример, в котором показано, что для выполнения условий теоремы просто асимптотической устойчивости линеаризованной системы недостаточно.

\*\*\* См. также упражнение 5.22.

Пример 5.18. Этот пример принадлежит Виноградову [168]. Рассмотрим следующую систему:  $\dot{x} = A(t)x$ , где

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 - 9 \cos^2 6t + 12 \sin 6t \cos 6t & 12 \cos^2 6t + 9 \sin 6t + 9 \sin 6t \cos 6t \\ -12 \sin^2 6t + 9 \sin 6t \cos 6t & -1 - 9 \sin^2 6t - 12 \sin 6t \cos 6t \end{bmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение  $|A - \lambda I| = 0$ , видим, что коэффициенты матрицы  $A(t)$  подобраны таким образом, что собственные значения, или характеристические числа, постоянны и равны  $\lambda_1 = -1$ ;  $\lambda_2 = -10$  для всех  $t$ . Отсюда можно заключить, что начало координат системы асимптотически устойчиво, хотя в действительности точное решение системы (в этом нетрудно убедиться) имеет вид

$$x_1 = a_1 e^{2t} (\cos 6t + 2 \sin 6t) + a_2 e^{-13t} (\sin 6t - 2 \cos 6t);$$

$$x_2 = a_1 e^{2t} (2 \cos 6t - \sin 6t) + a_2 e^{-13t} (2 \sin 6t + \cos 6t).$$

Присутствие члена вида  $e^{2t}$  означает, что система неустойчива.

Иногда бывает желательно получить точное уравнение, описывающее движение, или точное уравнение для переменной  $\delta x$ , обусловленное возмущением. Используя переменные, вводимые соотношением (5.40), можно записать

$$\delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_1 = f(\delta x + x_1, u_1, t) - f(x_1, u_1, t). \quad (5.59)$$

Поскольку  $x_1$  и  $u_1$  предполагаются известными, то правая часть уравнения (5.59) является функцией только переменных  $\delta x$  и  $t$ . Тогда можно записать, что

$$\delta \dot{x} = g(\delta x, t) \quad (5.60)$$

и

$$g(\delta x, t) = f(\delta x + x_1, u_1, t) - f(x_1, u_1, t). \quad (5.61)$$

Уравнение (5.60) описывает изменение возмущения  $\delta x$  со временем. Заметим, что из выражения (5.61) следует

$$g(0, t) = 0, \quad (5.62)$$

и поэтому для любого момента времени  $\delta x \equiv 0$  есть положение равновесия системы (5.60).

Тогда ясно, что устойчивость в малом относительно траектории сводится к устойчивости возмущенной переменной  $\delta x$  относительно начала координат в соответствии с уравнениями (5.60) и (5.61). В частности, траектория равномерно асимптотически устойчива, если начало координат соответствующего уравнения в возмущениях равномерно асимптотически устойчиво.

Пример 5.19. Для примера 5.11, применяя принятый порядок линеаризации уравнений (5.54), получим

$$\delta \dot{\omega}_1 = \frac{J_3 - J_2}{J_1} (\omega_{20} \delta \omega_3 + \omega_{30} \delta \omega_2 + \delta \omega_2 \delta \omega_3);$$

$$\delta \dot{\omega}_2 = -\frac{J_1 - J_3}{J_2} (\omega_{10} \delta \omega_3 + \omega_{30} \delta \omega_1 + \delta \omega_1 \delta \omega_3);$$

$$\delta \dot{\omega}_3 = -\frac{J_2 - J_1}{J_3} (\omega_{20} \delta \omega_1 + \omega_{10} \delta \omega_2 + \delta \omega_1 \delta \omega_2),$$

где  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{20}$ ,  $\omega_{30}$  — известные решения, относительно которых и записываются уравнения в возмущениях по величинам  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Управления  $u_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) предполагаются невозмущенными.

Понятие об устойчивости траекторий, данное в предыдущем разделе, иногда оказывается непригодным. Главным образом это имеет место, когда траектории являются замкнутыми, поскольку в этих случаях в силу данных выше определений выполняется требование одинакового периода движения по близким траекториям. С этой точки зрения более приемлемым будет требование орбитальной устойчивости\*, которое связано лишь с устойчивостью относительно замкнутой траектории в целом и не связано ни с одной из конкретных точек этой кривой.

Пусть  $\rho(x, C)$  — минимальное эвклидово расстояние от точки  $x$  до замкнутой кривой  $C$ . Введем определение.

**О п р е д е л е н и е 5.10.** Замкнутая траектория  $C$  системы  $\dot{x} = f(x, t)$  орбитально устойчива, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , такое, что всякое решение системы  $x(t)$  с  $\rho(x(t_0), C) < \delta$  удовлетворяет  $\rho(x(t), C) < \varepsilon$  для всех  $t > t_0$ .

**О п р е д е л е н и е 5.11.** Замкнутая траектория  $C$  системы  $\dot{x} = f(x, t)$  орбитально асимптотически устойчива, если:

- а) она орбитально устойчива;
- б) для всех траекторий, достаточно близких к  $C$ ,  $\rho(x(t), C) \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow \infty$ .

Данные выше определения позволяют установить понятие устойчивости зоны равновесных состояний. Заметим, что траектория системы, которая начинается в зоне равновесия или на замкнутой траектории, будет оставаться в этой зоне или на траектории для всех моментов времени  $t$ . Математически зоны равновесия и замкнутые траектории образуют инвариантные множества, определяемые следующим образом.

**О п р е д е л е н и е 5.12.** Инвариантное множество системы есть множество точек, обладающих следующим свойством: если состояние системы в момент времени  $t_0$  есть  $x(t_0)$  на  $\mathfrak{M}$ , то  $x(t)$  остается на  $\mathfrak{M}$  для всех  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

Используя это понятие, В. И. Зубов [209] дал следующие определения устойчивости инвариантного множества. Пусть  $\mathfrak{M}$  — инвариантное множество, устойчивость которого надо исследовать, а  $\rho(x, \mathfrak{M})$  — минимальное расстояние от точки  $x$  до инвариантного множества  $\mathfrak{M}$ . В этом случае можно дать следующие определения.

**О п р е д е л е н и е 5.13.** Инвариантное множество  $\mathfrak{M}$  устойчиво относительно свободной системы  $\dot{x} = f(x, t)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\delta > 0$ , такое, что для всех  $t > t_0$  из условия  $\rho(x(t_0), \mathfrak{M}) < \delta$  следует  $\rho(x(t), \mathfrak{M}) < \varepsilon$ .

**О п р е д е л е н и е 5.14.** Инвариантное множество асимптотически устойчиво, если

- а) оно устойчиво;
- б)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x(t), \mathfrak{M}) = 0$ .

**П р и м е р 5.20.** Из определения 5.10 следует, что движение искусственного спутника Земли в примере 5.15 орбитально устойчиво. Аналогично орбитально устойчиво и движение математического маятника. Однако оба движения были неустойчивы в смысле Ляпунова.

\* Впервые понятие орбитальной устойчивости было введено Н. Е. Жуковским (Прим. ред.).

Оказывается возможным анализировать орбитальную устойчивость и по линеаризованным уравнениям. Поскольку изложение этих идей требует дополнительных определений, то мы вернемся к ним в гл. 11.

Можно лишь отметить, что классическое определение устойчивости предельного цикла (см. гл. 4) соответствует орбитальной асимптотической устойчивости. В следующем параграфе излагаются некоторые полезные результаты исследования орбитальной асимптотической устойчивости предельных циклов в системах второго порядка.

## 5.8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим четыре важнейших теоремы о существовании предельных циклов.

Первая теорема принадлежит А. Пуанкаре и связывает факт существования предельного цикла с типом особых точек, расположенных в области фазового пространства, ограниченной кривой предельного цикла.

Пусть число  $N$  обозначает количество особых точек типа «узел», «центр» и «фокус» внутри области, ограниченной траекторией предельного цикла, а  $S$  — число седловых точек в той же области. В этом случае справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.3.** (А. Пуанкаре). Если в системе второго порядка существует предельный цикл, то  $N - S = 1$  \*. Читатель сам может без труда убедиться в справедливости этого утверждения, проанализировав ряд фазовых портретов. Полное доказательство теоремы можно найти в книге Е. А. Коддингтона и Н. Левинсона [35].

Следующая теорема принадлежит И. Бендиксону [16]; ее иногда называют первой теоремой Бендиксона, и в ней формулируется достаточное условие отсутствия предельного цикла.

**Теорема 5.4.** (И. Бендиксон). Если система второго порядка описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

и при этом существуют частные производные функций  $f_1(x_1, x_2)$  и  $f_2(x_1, x_2)$  по каждой из переменных, то предельный цикл не существует в той области  $\mathcal{R}$  фазовой плоскости, где  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  не стремится к нулю и не изменяет знака.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вдоль всякой траектории на фазовой плоскости справедливо соотношение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \quad (5.63)$$

которое можно переписать в виде

$$f_2 dx_1 - f_1 dx_2 = 0. \quad (5.64)$$

В частности, условия (5.63) и (5.64) выполняются и для предельного цикла.

---

\* Числа  $N$  и  $S$  можно определить по отношению к области, ограниченной произвольной замкнутой кривой, а не только траекторией предельного цикла. Поэтому разность  $N - S$  часто называют индексом Пуанкаре.

Допустим, что предельный цикл существует, и проинтегрируем выражение (5.64) по замкнутому контуру:

$$\oint_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = 0, \quad (5.65)$$

где  $C$  — траектория предельного цикла.

Воспользуемся теоремой Стокса \*, которая связывает интеграл по замкнутому контуру с интегралом по площади, ограниченной этим контуром. Тогда можно записать

$$\oint_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2, \quad (5.66)$$

где интеграл в правой части берется по площади, ограниченной траекторией предельного цикла.

Учитывая (5.65), правая часть выражения (5.66) должна стремиться к нулю, но этого не может быть, поскольку подынтегральное выражение  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$  по условиям теоремы не стремится к нулю и не меняет знака. Это противоречит предположению о существовании предельного цикла, что и доказывает теорему.

Следующая теорема также принадлежит Бендиксону; ее иногда называют второй теоремой Бендиксона.

**Теорема 5.5.** (И. Бендиксон). Если траектория автономной системы второго порядка все время остается внутри ограниченной области  $\mathcal{R}$  и при этом не стремится к положению равновесия, то такая траектория либо представляет кривую предельного цикла, которая обладает свойством орбитальной асимптотической устойчивости, либо стремится к предельному циклу с тем же свойством.

Теорема достаточно очевидна, но доказательство несколько сложно и поэтому нами опущено \*\*.

Обратимся к примеру.

**Пример 5.21.** Для лампового генератора, изображенного на рис. 5.6, а, выполняется следующее условие:

$$e_g = M p i_L = M p \frac{i_b}{LCp^2 + RCp + 1}, \quad (5.67)$$

где

$$p = \frac{d}{dt}.$$

Пусть

$$x_1 = \frac{e_g}{e_0}; \quad i_b = \frac{\sqrt{LC}}{M} e_0 f(x_1), \quad (5.68)$$

где  $e_0$  — постоянная величина;

$f(x_1)$  — нелинейная характеристика, показанная на рис. 5.6, б \*\*\*.

При этих условиях соотношение (5.67) запишется в виде

$$x_1 = \frac{\omega_0 p f(x_1)}{p^2 + 2\omega_0 \xi_0 p + \omega_0^2}, \quad (5.69)$$

\* Эту теорему иногда связывают и с именем Гаусса.

\*\* См. [16].

\*\*\* Отметим, что  $f(0) \neq 0$ .

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (5.70)$$

Проделаем теперь следующее:

- 1) проанализируем существование и устойчивость особых точек;
- 2) определим то значение усиления  $k$ , которое является необходимым условием для существования предельного цикла;
- 3) найдем необходимое и достаточное условие, накладываемое на величину  $k$ , которое обеспечивает предельный цикл.

Структурная схема для этой системы показана на рис. 5.6, в. Анализируя работу генератора, можно предположить, что начало координат  $x_1 = \dot{x} = 0$  является положением равно-

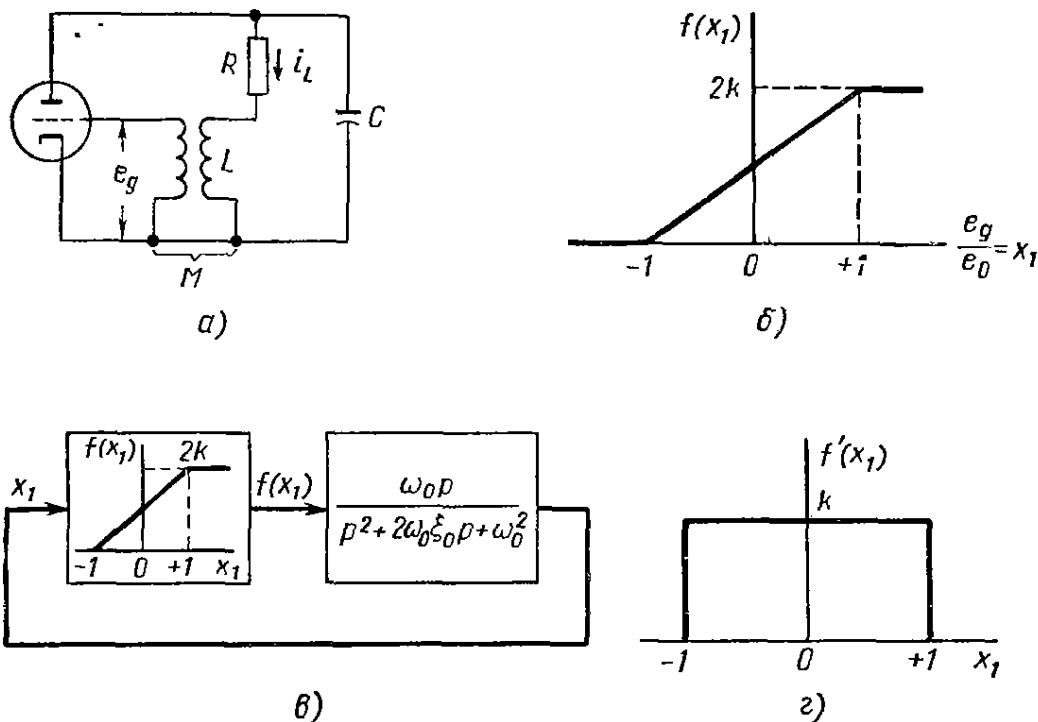


Рис. 5.6. Ламповый генератор:

$a$  — принципиальная схема лампового генератора;  $b$  — характеристика лампы  $f(x_1) = \frac{Mi_e}{\sqrt{Lc}} e_0$  в зависимости от  $x_1 = \frac{e_g}{e_0}$ ;  $v$  — структурная схема лампового генератора, изображенного на рис. 5.6,  $a$ ;  $z$  — зависимость

$$f'(x_1) = \frac{df(x_1)}{dx_1} \text{ в функции от } x_1$$

весия. Ведь действительно ввиду дифференцирующих свойств линейной части постоянная составляющая тока (ток покоя) не вызывает увеличения постоянной составляющей сигнала на выходе; но в силу положительной обратной связи можно ожидать, что начало координат неустойчиво. Из уравнения (5.69) нетрудно получить следующую систему:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -2\xi_0\omega_0x_2 - \omega_0^2x_1 + \omega_0 \frac{d}{dt} f(x_1). \quad (5.71)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt} f(x_1) = \frac{df(x_1)}{dx_1} \dot{x}_1 = \frac{df(x_1)}{dx_1} x_2 = f'(x_1) x_2, \quad (5.72)$$

где

$$f'(x_1) = \frac{df(x_1)}{dx_1}. \quad (5.73)$$

Зависимость  $f'(x_2)$  показана на рис. 5.6,  $z$ . Из рис. 5.6,  $b$  или 5.6,  $z$  следует, что

$$f'(x_1) = \begin{cases} 0, & |x_1| > 1; \\ k, & |x_1| \leq 1. \end{cases} \quad (5.74)$$

С учетом выражений (5.72) и (5.73) уравнения (5.71) примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -(2\xi_0 - f'(x_1)) \omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1 \quad (5.75)$$

или

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -g(x_1) \omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1, \quad (5.76)$$

где

$$g(x_1) = \begin{cases} 2\xi_0, & |x_1| > 1; \\ 2\xi - k, & |x_1| \leq 1. \end{cases} \quad (5.77)$$

Полагая  $\dot{x}_1 = 0$  и  $\dot{x}_2 = 0$ , из уравнения (5.76) следует, что

$$\begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

есть единственное положение равновесия.

Система линейна для  $|x_1| \leq 1$ . Тогда для малых по отношению к состоянию  $x_e = 0$  отклонений характеристическое уравнение запишем в виде

$$\begin{vmatrix} p & -1 \\ \omega_0^2 & p + (2\xi_0 - k) \omega_0 \end{vmatrix} = p^2 + \omega_0 (2\xi_0 - k) p + \omega_0^2 = 0. \quad (5.79)$$

Из уравнения (5.79) следует, что положение равновесия в начале координат:

а) асимптотически устойчиво, если  $k < 2\xi_0$ ; (5.80)

б) неустойчиво, если  $k > 2\xi_0$ .

Поскольку система линейна для всех  $x_1$ , удовлетворяющих условию  $|x_1| \leq 1$ , то при  $k = 2\xi_0$  начало координат устойчиво в смысле Ляпунова. Таким образом, первая из поставленных задач решена.

Уравнение (5.76) можно записать в виде

$$\dot{x}_1 = f_1(x_2); \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \quad (5.81)$$

где

$$f_1(x_2) = x_2; \quad f_2(x_1, x_2) = -g(x_1) \omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1. \quad (5.82)$$

С учетом выражения (5.77) и уравнения (5.82) получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -g(x_1) \omega_0 = \begin{cases} -2\xi_0 \omega_0, & |x_1| > 1; \\ -(2\xi_0 - k) \omega_0, & |x_1| \leq 1. \end{cases} \quad (5.83)$$

Тогда в силу первой теоремы Бендиксона необходимое условие существования предельного цикла заключается в том, чтобы

$$k > 2\xi_0. \quad (5.84)$$

Таким образом, и вторая из поставленных проблем решена.

Из соотношений (5.80) и (5.84) следует, что условие  $k > 2\xi_0$  — не только необходимое условие существования предельного цикла, но и одновременно необходимое и достаточное условие неустойчивости положения равновесия (в данном случае начала координат). Сейчас покажем, что указанное условие является также и достаточным условием существования предельного цикла.

Прежде всего отметим, что при  $k > 2\xi_0$  начало координат либо неустойчивый фокус, либо неустойчивый узел. Кроме того, поскольку это единственное положение равновесия, то индекс Пуанкаре равен 1 и предельный цикл в системе возможен. Так как при  $k > 2\xi_0$  начало координат — неустойчивая точка равновесия, то траектории, которые начинаются вблизи этой точки, будут уходить от нее, стремясь либо к предельному циклу, либо к бесконечности. Если траектории не выходят за пределы ограниченной области фазовой плоскости, то они должны входить в предельный цикл по второй теореме Бендиксона. Таким образом, остается показать, что при  $k > 2\xi_0$  траектории не выходят за пределы некоторой ограниченной области фазовой плоскости.

Из уравнений (5.76) и (5.77) следует, что для области  $|x_1| > 1$  всякое движение асимптотически устойчиво по отношению к «виртуальному положению равновесия» \*  $(x_{1e}, x_{2e}) =$

\* «Виртуальным положением равновесия» называется такое положение равновесия, которое расположено вне той области фазовой плоскости, для которой оно является положением равновесия. Например, в рассматриваемом случае виртуальное положение равновесия для области  $|x_1| > 1$  расположено в точке  $(x_{1e}, x_{2e}) = (0, 0)$ , которая лежит вне области  $|x_1| > 1$ . В этом частном случае оказывается, что  $(x_{1e}, x_{2e}) = (0, 0)$  одновременно и положение равновесия для области  $|x_1| < 1$ , в которой оно и лежит. Однако в общем случае виртуальные положения равновесия отличаются от действительных положений равновесия [98].



$= (0, 0)$ . Таким образом, траектории располагаются в ограниченной области фазовой плоскости. Это означает, что всякая траектория должна асимптотически стремиться к устойчивому предельному циклу, если  $k > 2\xi_0$ . Таким образом, условие  $k > 2\xi_0$  есть необходимое и достаточное условие существования предельного цикла. Последняя теорема этого раздела принадлежит Пуанкаре [36].

**Теорема 5.6.** Замкнутая траектория  $C$  автономной системы второго порядка  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ ;  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$  орбитально асимптотически устойчива, если контурный интеграл

$$\int_C \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dt$$

отрицателен. Доказательство теоремы 5.6 требует введения представлений о характеристических показателях, и поэтому оно опущено.

### 5.9. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ В БОЛЬШОМ. ГИПОТЕЗЫ АЙЗЕРМАНА И КАЛМАНА

До сих пор рассматривалась лишь устойчивость в малом. Однако без привлечения дополнительных представлений границы, в которых справедлив такой анализ, остаются неизвестными. Другими словами, действительные размеры  $\delta$ -окрестности в определении устойчивости по Ляпунову (или  $\delta_a$ -окрестности в случае асимптотической устойчивости) остаются неизвестными априори и, следовательно, в некоторых случаях могут оказаться чрезвычайно малыми. Однако область может оказаться и больше, чем ожидал проектировщик системы (см. задачу 5.5).

Понятие устойчивости в большом значительно более приемлемо для инженерных целей, поскольку область  $\mathcal{R}$  выполнения этих условий определена заранее.

**Определение 5.15.** Положение равновесия  $x_e$  свободной системы асимптотически устойчиво в большом по отношению к ограниченной области  $\mathcal{R}$ , если

- а)  $x_e$  устойчиво;
- б) всякая траектория системы, начинающаяся в  $\mathcal{R}$ , стремится к  $x_e$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если область  $\mathcal{R}$  охватывает все пространство состояний, то имеем дело с асимптотической устойчивостью в целом\*.

**Определение 5.16.** Положение равновесия  $x_e$  свободной динамической системы асимптотически устойчиво в целом, если

- а)  $x_e$  устойчиво;
- б) всякая траектория системы стремится к  $x_e$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Как и прежде, можно ввести понятия: «почти асимптотической устойчивости в целом; равномерной асимптотической устойчивости в большом; орбитальной асимптотической устойчивости в целом». Мы опускаем определения перечисленных понятий, однако некоторыми из них будем в дальнейшем пользоваться.

К сожалению, до сих пор получено очень мало результатов, касающихся свойств асимптотической устойчивости в большом и асимптотической устойчивости в целом\*\*, и эти результаты никак не связаны с первым методом Ляпунова.

\* Применение терминов «асимптотическая устойчивость в большом» и «асимптотическая устойчивость в целом» не является общепринятым. Многие авторы используют их как тождественные.

\*\* Некоторые методы, принадлежащие Ляпунову и В. М. Попову, позволяющие глубже изучать такие типы устойчивости, будут изложены в гл. 9 и 10.

Однако можно надеяться, что при достаточных ограничениях на тип исследуемой системы удастся получить некоторые результаты. В 1949 г. М. А. Айзерман рассмотрел системы вида, изображенного на рис. 5.7. Система состоит из линейной части и некоторого безынерционного нелинейного элемента  $f(e)$ . Ограничение, которому должен удовлетворять нелинейный элемент  $f(e)$ , заключается в том, что каждая нелинейная зависимость должна лежать в сегменте, ограниченном прямыми  $k_1 e$  и  $k_2 e$ , и, следовательно, должны выполняться следующие условия:

$$f(0) = 0; 0 \leq k_1 \leq \frac{f(e)}{e} \leq k_2. \quad (5.85)$$

Если  $f(e)$  представляет собой просто коэффициент усиления, то  $u = ke$ , и система линейна. Допустим, что такая линейная система с обратной связью устойчива для всех  $k$ , удовлетворяющих неравенству  $k_1 \leq k \leq k_2$ . Возникает следующая проблема. Можно ли утверждать, что при выполнении последнего условия исходная нелинейная система асимптотически устойчива в целом для всех нелинейностей  $f(e)$  типа (5.85)?

М. А. Айзерман выдвинул гипотезу, считая, что ответ на поставленный вопрос должен быть утвердительным. Следует отметить, что условие (5.85) и тот факт, что  $k_1$  и  $k_2$  определяют границы устойчивости для соответствующей линейной системы, позволяют сделать вывод об устойчивости в малом исходной нелинейной системы\*. В этом смысле высказанная гипотеза есть попытка распространить результаты анализа устойчивости в малом на исследование асимптотической устойчивости в целом некоторого специального класса нелинейных систем, которые мы называем системами Айзермана. Если бы гипотеза М. А. Айзермана оказалась справедливой, то это бы означало, что при рассмотрении определенного класса нелинейных систем вопрос об устойчивости можно было бы полностью решить, исследуя систему лишь при предельных значениях наклона нелинейной характеристики  $\frac{f(e)}{e}$ .

Однако оказывается, что гипотеза М. А. Айзермана ошибочна [42], [51], [160], [200]. Более строгой, чем гипотеза М. А. Айзермана, является гипотеза Калмана [95]. По отношению к системе, приведенной на рис. 5.7, гипотезу Калмана можно сформулировать следующим образом: допустим, что наклон функции  $f(e)$  ограничен сверху и снизу следующим образом:

$$k'_1 \leq \frac{d}{de} f(e) = f'(e) < k'_2. \quad (5.86)$$

Если линейная система, у которой  $f(e) = ke$ , устойчива для всех  $k$ , удовлетворяющих условию  $k'_1 \leq k \leq k'_2$ , то исходная нелинейная система асимптотически устойчива в целом для каждой нелинейности  $f(e)$ , удовлетворяющей условию (5.86).

Из условий (5.85) и (5.86) видно, что для одной и той же нелинейности  $f(e)$  значения величин  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k'_1$  и  $k'_2$  связаны условием  $k'_1 \leq k_1 \leq k_2 \leq k'_2$ .

\* За исключением тех критических случаев, когда по крайней мере одно из неравенств (5.85) переходит в равенство.

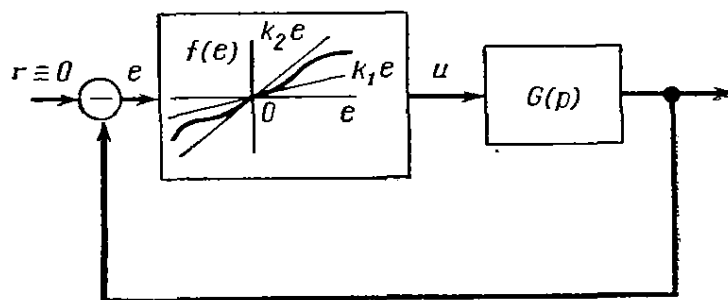


Рис. 5.7. Структурная схема системы управления, поясняющая проблему М. А. Айзермана. Здесь  $f(e)$  — нелинейность, удовлетворяющая условию (5.85)

Это означает, что из выполнения гипотезы Калмана следует выполнение гипотезы Айзермана. Однако обратное неверно.

В силу более жестких ограничений можно ожидать, что гипотеза Калмана справедлива всегда. Однако недавно было показано, что гипотеза Калмана также ошибочна. В частности Р. Е. Фиттс [51] рассмотрел систему (см. рис. 5.7), для которой

$$G(p) = \frac{p^2}{[(p+0,5)^2 + 0,9^2] [(p+0,5)^2 + 1,1^2]}; \quad f(e) = e^3. \quad (5.87)^*$$

Линейная система при  $f(e) = ke$  будет устойчива для всех  $k$ , удовлетворяющих условию  $-0,7124 \leq k < \infty$  (убедитесь в этом). Тогда при  $f(e) = e^3$  условия гипотезы Айзермана (5.85) и условия гипотезы Калмана (5.86) выполняются. Однако Фиттс в результате моделирования на аналоговой установке показал, что в системе возникают автоколебания \*\*, и, следовательно, гипотезы Калмана и Айзермана не выполняются. Вильямс [200] дал аналитическое доказательство того, что указанные гипотезы ошибочны.

Однако следует отметить, что ошибочность этих гипотез проявляется лишь при анализе в некотором смысле необычных систем. Действительно, для линейной системы с обратной связью, когда  $G(p)$  определяется из выражения (5.87) и  $f(e) = ke$ , можно показать, что корни характеристического уравнения  $1 + kG(\lambda) = 0$  с ростом  $k$  приближаются к мнимой оси плоскости  $\lambda$ . Заметим, что по мере роста  $k$  степень устойчивости системы становится меньше. Для нелинейной функции  $f(e) = e^3$ , рассмотренной Р. Е. Фиттсом, система приближается к границе устойчивости по мере увеличения сигнала  $|e|$ . По крайней мере экспериментальные результаты Фиттса подтвердили именно это, поскольку колебания в системе возникали лишь при достаточно больших начальных возмущениях.

Интуитивно ясно, что мера, в которой справедливы гипотезы Айзермана и Калмана, связана со степенью устойчивости линейной системы управления \*\*\* при  $f(e) = ke$ , когда  $k$  удовлетворяет либо условию (5.85), либо условию (5.86). С инженерной точки зрения как гипотеза Айзермана, так и более строгая гипотеза Калмана могут служить прекрасными эмпирическими правилами.

Заслуживает внимания еще одно замечание. Почти во всех случаях, когда вследствие применения гипотезы следуют ошибочные результаты; неустойчивость всегда проявляется в возникновении автоколебаний. По крайней мере чаще всего элемент насыщения в системе, в конце концов, ограничивает амплитуды всех сигналов, и тогда автоколебания являются единственным способом проявления неустойчивости.

Поскольку в настоящее время отсутствует общий путь определения асимптотической устойчивости в целом, а неустойчивость на практике проявляется в виде автоколебаний, то нам необходимо найти условия существования в системе предельного цикла. Этот вопрос и будет рассматриваться в последующих трех главах.

---

\* Функция  $G(p)$  относится к определенному виду линейных элементов, рассмотренных в работе Фиттса [51].

\*\* Фиттс [51] также показал, что, анализируя систему методом гармонической линеаризации в предположении о двухчастотных колебаниях (гл. VII), можно выявить автоколебания в системе. Такой же подход лежит в основе метода Вильямса.

\*\*\* Степени устойчивости линейных систем управления определяются по наикратчайшим расстояниям от мнимой оси до корней (в левой полуплоскости) характеристического уравнения  $kG(\lambda) + 1 = 0$  для ряда значений коэффициентов  $k$ .

В нелинейных системах наблюдается большое многообразие различных типов движений. В связи с этим при введении понятия устойчивости для нелинейных систем следует проявлять значительную осторожность. Если в системе имеется несколько изолированных положений равновесия, то необходимо анализировать устойчивость для каждого из этих положений.

Понятия, введенные А. М. Ляпуновым для исследования устойчивости (определение 5.1) и асимптотической устойчивости (определение 5.2), позволяют анализировать движение системы в окрестности положения равновесия. Эти определения характеризуют свойство устойчивости в малом. Границы области устойчивости при этом заранее неизвестны.

Для автономных систем устойчивость в малом изолированного положения равновесия может быть исследована в результате линеаризации системы относительно положения равновесия при условии, что линеаризация возможна и полученные линейные уравнения имеют лишь собственные значения с отрицательной действительной частью. Справедливость полученных при этом результатов опирается на первый метод Ляпунова (теорема 5.1). Можно осуществить линеаризацию и относительно некоторой траектории системы. Как правило, в этом случае возникают нестационарные линейные уравнения. Если уравнение системы нестационарно, то понятия устойчивости следует видоизменить. Это связано с тем, что, с одной стороны, время отработки заданного уровня может сильно зависеть от момента приложения возмущений (пример 5.16); с другой стороны, реакция системы в некоторый момент времени неограниченно растет по мере изменения начальных условий (пример 5.17). Если наложить на систему требование равномерной асимптотической устойчивости (определение 5.9), то обе из указанных возможностей исключаются из рассмотрения.

Для того чтобы установить свойство равномерной асимптотической устойчивости траектории системы, необходимо исследовать линеаризованное уравнение на равномерную асимптотическую устойчивость (теорема 5.2). Что касается анализа траекторий, в частности замкнутых траекторий, то понятия Ляпунова об асимптотической устойчивости оказываются слишком ограниченными. С этой точки зрения ни один предельный цикл не обладает свойством асимптотической устойчивости. Для анализа таких траекторий оказывается полезным ввести понятие орбитальной асимптотической устойчивости (определение 5.10). Это понятие распространяется на анализ произвольных замкнутых траекторий и зон равновесия (определение 5.14). В § 5.8 приводятся некоторые теоремы существования предельных циклов в системах второго порядка и их орбитальной асимптотической устойчивости. Глава завершается обзором проблем, связанных с определением асимптотической и асимптотической устойчивости в целом для нелинейных систем управления. Понятия об этих типах устойчивости вводятся при помощи определений (5.15) и (5.16). Выдвигаются две гипотезы: гипотеза Айзермана и гипотеза Калмана, которые позволяют связать свойство асимптотической устойчивости в целом некоторого класса нелинейных систем с устойчивостью линейной системы. В общем случае обе гипотезы ошибочны; однако их несправедливость проявляется в исключительных случаях, и их можно рассматривать как полезные для практики эмпирические правила. Показано также, что неустойчивость в нелинейных системах проявляется в виде автоколебаний, обсуждению которых будут посвящены три последующие главы.

## 5.11 ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

5.1. Система, описываемая уравнением  $\dot{y} = y^2 - u$ ;  $y(0) = 0$ , имеет частное решение:

$$y_1(t) = -\frac{(1 - e^{2t})}{1 + e^{2t}} \text{ для } u = 1;$$

Читателю предлагается

- найти линеаризованное уравнение системы относительно этого решения;
- ответить на вопрос, можно ли по полученному уравнению при  $u = 0$  определить устойчивость в малом относительно положения равновесия  $y = 0$ ?
- показать, что в системе  $\dot{y} = y^2$ , которая не удовлетворяет обобщенному условию Липшица, координата  $y(t)$  стремится к бесконечности, когда  $t \rightarrow t_0$ .

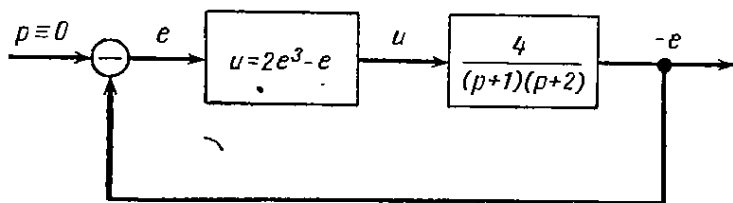


Рис. 5.8. Структурная схема системы управления для примера 5.2

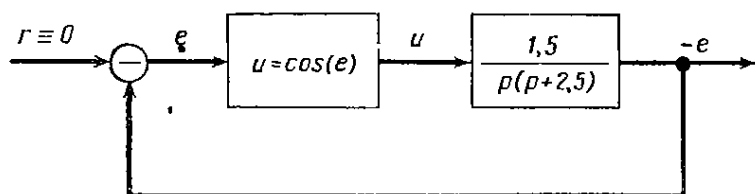


Рис. 5.9. Структурная схема системы управления для примера 5.3

5.2. Рассмотрите систему, приведенную на рис. 5.8.

Читателю предлагается:

- написать уравнения в координатах  $e$  и  $\dot{e}$ ;
- найти все равновесные состояния системы и определить их устойчивость.

5.3. Рассмотрите систему, показанную на рис. 5.9.

Читателю предлагается:

- написать уравнения состояния системы в координатах  $e$  и  $\dot{e}$ ;
- найти все равновесные состояния системы и определить их устойчивость.

5.4. Радиальное движение летательного аппарата в поле силы тяжести задается уравнением

$$\left( \ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} \right) = -\frac{k}{r^n},$$

где  $r$  — радиус летательного аппарата от центра приложения сил;  
 $m$  — масса летательного аппарата;  
 $L$  — кинетический момент;

$m, k, L$  и  $n$  — постоянные (причем  $n$  — целое число).

- найдите условие для  $r$ , при котором летательный аппарат описывает круговую орбиту;
- покажите, что условие  $n < 3$  является необходимым для орбитальной устойчивости кругового движения.

5.5. Эта задача (И. Малкин) дает возможность показать, что условие асимптотической устойчивости не следует считать обязательным. В некоторых случаях область устойчивости слишком мала для практического применения. Возможно и обратное: система может иметь неустойчивое положение равновесия, но быть устойчивой при больших сигналах;

а) дайте физическую интерпретацию того, что начало координат системы, описываемой уравнением  $\dot{x} = -0,01x + x^3$ , является асимптотически устойчивым. Покажите, что для  $x_0 | > 0,1$  система имеет бесконечное множество решений;

б) покажите, что начало координат системы  $\dot{x} = 0,01x - x^3$  неустойчиво. При этом какое бы ни было значение  $x_0$ , решение системы стремится к значению либо  $+0,1$ , либо  $-0,1$ . Изобразите характерные траектории системы в координатах  $x, t$ .

5.6. Снаряд единичной массы вылетает со скоростью  $v_0$  под углом  $\theta$  к горизонту и движется лишь под действием силы тяготения с ускорением  $g$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Читателю предлагается:

- записать переходную матрицу данной задачи;
- найти коэффициент чувствительности, определяющий изменение дальности полета от изменения начального угла  $\theta$ ;
- определить коэффициент чувствительности, устанавливающий величину изменения дальности полета от ускорения  $g$ .

5.7. Система удовлетворяет дифференциальному уравнению  $\dot{x} + \left(1 + \frac{1}{t}\right) x = 0$ .

Является ли начало координат системы на интервале  $0 < t_0 \leq t$ :

- устойчивым;
- асимптотически устойчивым;
- эквивасимптотически устойчивым;
- равномерно устойчивым.

Что происходит, если  $t_0 < 0$ ?

5.8. Движение системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} + \frac{x}{1+t} = 0.$$

Является ли начало координат системы для интервала времени  $0 < t_0 \leq t$ :

- а) устойчивым;
- б) асимптотически устойчивым;
- в) эквивасимптотически устойчивым;
- г) равномерно асимптотически устойчивым.

5.9. Исследовать движение искусственного спутника Земли (пример 5.11), если  $J_1 > J_2 > J_3$ :

- а) определите положения равновесия, если  $u \equiv 0$ ;
- б) исследуйте устойчивость положений равновесия.

5.10. Покажите, что система

$$\dot{x}_1 = \frac{3x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2}{x_1^2 + x_2^2};$$
$$\dot{x}_2 = \frac{3x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

имеет, по крайней мере, один предельный цикл в области

$$1 < x_1^2 + x_2^2 < 5.$$

5.11. Используя понятие об индексе Пуанкаре (теорема 5.3), определите, существует ли для каждой из указанных систем предельный цикл:

- а)  $\dot{x} = 2x^2 - y^2$ ;  $\dot{y} = 1 - x^2 + y^2$ ;
- б)  $\dot{x} = x(1+x) + 4y$ ;  $\dot{y} = x\left(1 + \frac{x}{4}\right) + y$ .

5.12. Для системы

$$\dot{x} = x^3 + xy^2 - x;$$
$$\dot{y} = x^2y + y^3 - y;$$

- а) найдите положения равновесия;
- б) покажите, что в системе отсутствуют замкнутые траектории;
- в) установите, что система неустойчива вне единичного круга  $x^2 + y^2 = 1$ .

5.13. Эта задача и следующая ставят своей целью показать, что асимптотическая устойчивость линейной системы, описываемой стационарными дифференциальными уравнениями, определяет также и равномерную асимптотическую устойчивость в целом. Более того, реакция такой системы на произвольные начальные условия всегда ограничена убывающей экспонентой.

Докажите следующую теорему.

**Теорема 5.7.** Пусть все собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  для системы с постоянными параметрами расположены в области  $\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha$ , тогда каждый элемент  $\Phi_{ij}(t, 0)$  переходной матрицы  $\Phi(t, 0) = L^{-1} [(sI - A)^{-1}]$  будет ограничен следующим образом  $|\Phi_{ij}(t, 0)| \leq k_{ij} e^{-\alpha t}$ . Аналогично ограничена и производная  $|\dot{\Phi}_{ij}(t, 0)| \leq k'_{ij} e^{-\alpha t}$ .

5.14. Пусть норма матрицы  $A$  определена так:

$$\|A\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

имея это в виду, докажите следующую теорему.

**Теорема 5.8.** Пусть все собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  для системы с постоянными параметрами расположены в области  $\operatorname{Re} \lambda_i < \alpha$ , тогда существуют такие положительные числа  $M$  и  $M'$ , что

$$\|\Phi(t, 0)\| \leq M e^{-\alpha t};$$

$$\|\dot{\Phi}(t, 0)\| \leq M' e^{-\alpha t}$$

(указание: следует воспользоваться теоремой 5.7).

5.15. Рассмотрим уравнения Вольтерра

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_1 x_2 - k_3 x_1;$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_1 x_2 - k_4 x_2,$$

где  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  — произвольные константы.

а) найдите положения равновесия системы и установите их устойчивость;

б) отметим, что эти уравнения включают как частный случай и уравнения Ланкастера (см. упражнение 4.16). Эти уравнения могут описывать некоторую игровую ситуацию. Найдите условие, которому должен удовлетворять вектор начальных условий  $x(t_0)$  в зависимости от параметров  $k$ , чтобы  $x_1 \rightarrow 0$  или  $x_2 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

5.16. Контур фазовой задержки в теории связи описывается уравнением

$$\ddot{x} + (a + b \cos x) \dot{x} + c \sin x = 0.$$

Пусть  $a > b > 0$  и  $c > 0$ ; является ли начало координат системы устойчивым в малом? Используя построение на фазовой плоскости, найдите на ней область асимптотической устойчивости.

5.17. Дополните фазовый портрет (см. рис. 5.4) в окрестности двух других положений равновесия  $e = 4/3; \dot{e} = 0$  и  $e = 4/3; \dot{e} = 0$ .

5.18. Найдите точное решение задачи в примере 5.12 и сравните его с линеаризованным решением, приведенным в примере.

5.19. Буксировку одного автомобиля другим можно описать следующим уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = V - A \exp\left(\frac{-\alpha}{y(t-T)}\right),$$

где  $y$  — расстояние между автомобилями;  
 $V$  — постоянная скорость ведущего автомобиля;  
 $A, T$  и  $\alpha$  — действительные положительные константы.

а) что надо знать о начальных условиях, чтобы найти единственное решение  $y(t)$  для всех  $t \geq 0$ ?

б) найдите положение равновесия системы. Определите, при каких значениях  $\frac{V}{A}$  из диапазона  $0 \leq \frac{V}{A} \leq \infty$ , положение равновесия  $Y > 0$ ;

в) покажите, что положение равновесия  $Y$  асимптотически устойчиво только в том случае, если  $\frac{\alpha TV}{Y^2} < \frac{\pi}{2}$ .

5.20. Исследуйте линейную стационарную систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$y = x_3 - x_2;$$

а) управляема ли эта система; наблюдаема ли она?

б) исследуйте устойчивость начала координат при  $u = 0$ ;

в) исследуйте устойчивость начала координат, когда управление  $u$  формируется в виде  $u = ky$ .

5.21. Покажите, что начало координат линейной стационарной системы, передаточная функция  $G(s)$  которой имеет сократимые нуль и полюс в правой полуплоскости, нельзя сделать устойчивым, формируя линейную обратную связь.

5.22. Исследуйте одноконтурную нестационарную систему управления, описываемую уравнением (Р. Бейкер и А. Берген)

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = -k(t)y(t);$$

а) нарисуйте структурную схему этой системы;

б) покажите, что система устойчива при  $k(t) = 100$  и  $k(t) = 0$ .

в) покажите, что для

$$k(t) = \begin{cases} 100 & i \leq t \leq i + \tau \quad (i = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{вне отрезка,} \end{cases}$$

реакция  $y(t)$  будет неограниченной для  $\tau = 0,17$  при начальных условиях  $y(0) = 0; \dot{y}(0) = 1$ .

## 5.12. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Оригинальное изложение идей устойчивости можно найти в работе А. М. Ляпунова [130]. Другие результаты этой главы чрезвычайно разбросаны по многим книгам. Например, отдельные вопросы затрагиваются в работах, где излагается второй метод Ляпунова. Одной из лучших работ в этом направлении является книга [98], в которой широко обсуждаются различные определения устойчивости и результаты линеаризации нестационарных нелинейных систем. Прекрасное изложение математических основ теории устойчивости дается в работе [36].



## ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

В этой главе проблема устойчивости рассматривается применительно к тем случаям, когда приходится иметь дело с прикладными задачами, теоретическая основа для решения которых либо разработана мало, либо совсем не разработана. Инженер решает такие задачи, используя хорошо зарекомендовавшие себя на практике, но не имеющие строгих математических обоснований методы.

В гл. 5 было показано, как можно анализировать поведение автономных систем управления вблизи изолированных точек равновесия. Если же рассматриваемая система управления нестационарна, то задача существенно усложняется. Еще большие теоретические трудности вызывает анализ устойчивости систем управления в большом. Для реальных систем с насыщением выяснение этого типа устойчивости равносильно определению условий, при которых в системе возникают автоколебания. Это означает, что необходимо проверить, существует ли устойчивый предельный цикл при значительных уровнях сигналов. Если да, то система неустойчива в большом. Таким образом, инженер заменяет трудную задачу определения устойчивости в большом выяснением вопроса, возникает ли в системе предельный цикл. К сожалению, точные методы для выявления предельных циклов используются редко, но даже там, где они применяются, эти методы трудоемки; поэтому важное значение приобретают приближенные методы. Эти методы — результат огромного инженерного опыта.

Общая черта всех приближенных методов заключается в том, что, как правило, неизвестны условия, при которых применение метода оправдано. Иногда удается найти контрпример, показывающий, что приближенный метод применять нельзя. Безусловный критерий возможности применения приближенного метода заключается в том, что условия, при которых метод несправедлив, невозможны или практически маловероятны.

В этой главе рассматривается метод гармонической линеаризации — наиболее мощный из приближенных методов, применяемых в практике проектирования систем автоматического управления. Этот метод весьма удобен при определении условий возникновения автоколебаний. Его можно применить и для анализа вынужденных колебаний, в частности, для нахождения условий существования скачкообразного резонанса\*.

---

\* В последнее время метод гармонической линеаризации стал применяться для определения показателей динамической точности и качества процессов управления в нелинейных системах [272], [281], [295], а также исследования скользящих режимов, вибрационной линеаризации, захватывания и т. п. [227], [254], [256], [261]. Существенным образом расширен и класс систем управления, проектирование которых стало возможным благодаря применению метода гармонической линеаризации. Это дискретные, самонастраивающиеся и с перестраиваемой структурой системы управления (*Прим. ред.*).

При изучении метода воспользуемся подходом, который неоднократно будет применяться в последующем изложении и который заключается в том, что мы предполагаем известным вид сигнала в некоторой точке замкнутой системы. Сделав такое предположение, можно определить вид сигнала в каждой точке контура и найти условия, при которых указанное предположение является верным.

В некоторых случаях удастся определить точные условия, налагаемые на параметры системы, при которых предполагаемое решение имеет место. Однако чаще оказывается, что точное решение отыскать трудно, и поэтому отыскивается приближенное решение. При этом делается характерное допущение, присущее как методу гармонической линеаризации, так и его обобщению — методу эквивалентной линеаризации, которое заключается в замене нелинейного элемента элементом с линейными свойствами\*.

Очень важно понять сущность метода гармонической линеаризации, поскольку он обладает большими возможностями, которые окончательно еще не исследованы. В своем изложении мы отступаем от обычного подхода, желая дать новую трактовку методу гармонической линеаризации.

В §§ 6.6 и 6.7 вводится понятие запаса устойчивости по амплитуде в нелинейной системе, которое весьма полезно при анализе систем высокого порядка. При этом оказывается возможным осуществить в системе нелинейную коррекцию. Для определения в нелинейной системе запаса устойчивости по амплитуде достаточно подвергнуть ее «автоколебательной проверке». Эта методика, с успехом использованная авторами на практике, позволила еще глубже уяснить существо метода гармонической линеаризации. В заключение рассматриваются случаи, когда метод гармонической линеаризации несправедлив. Это чаще всего происходит в том случае, когда нарушаются самые общие условия применимости указанного метода.

## 6.1. СУЩНОСТЬ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Для того чтобы читатель смог уяснить сущность метода гармонической линеаризации, свое изложение мы начнем с примера.

**Пример 6.1.** Рассмотрим систему, удовлетворяющую уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (6.1)$$

и определим условия возникновения предельного цикла. Если цикл существует, то найдем частоту и амплитуду колебаний. Уравнение системы через переменные состояния, при условии  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\mu(x_1^2 - 1)x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Проанализируем уравнения (6.1) и (6.2). В уравнении (6.1) выделим член  $\mu(x^2 - 1)$ , который определяет демпфирование. Для  $\mu > 0$ , в области  $x^2 \ll 1$ ;  $\dot{x} \neq 0$ , демпфирование отрицательно. Это означает, что система неустойчива. Так как ясно, что начало координат  $x = 0$ ;  $\dot{x} = 0$  — единственная точка равновесия, то мы вправе ожидать, что состояние равновесия неустойчиво в малом. Кроме этого, для  $x^2 \gg 1$ ;  $\dot{x} \neq 0$  демпфирование значительно по величине и положительно, и, следовательно, при  $\mu > 0$  система устойчива.

Таким образом, если движение происходит достаточно далеко от начала координат, то система ведет себя так, как если бы начало координат было устойчивым. Это как раз тот случай, который полностью определяет возможность существования предельного цикла для  $\mu > 0$ . Аналогично можно показать, что для  $\mu < 0$  начало координат будет устойчиво в малом и

\* Как показано в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (см. сноску на стр. 23), такая замена нелинейного элемента позволяет сохранить у линеаризованного элемента основные свойства нелинейности, а именно: переменность наклона его линейной характеристики от амплитуды входного сигнала (*Прим. ред.*).

неустойчиво в большом, а следовательно, в системе управления существует неустойчивый предельный цикл.

Можно дать и грубую количественную оценку параметров предельного цикла. Из уравнения (6.2) видно, что предельный цикл существует в окрестности точек, удовлетворяющих условию  $x_1^2 = 1$ . Действительно, если мы представляем предельный цикл как некоторую границу между областями устойчивого и неустойчивого движения, то естественно ожидать, что колебания происходят вблизи точек  $|x_1| = 1$ .

После такого беглого анализа можно приступить к детальному рассмотрению примера. Из уравнения (6.2) видно, что единственной особой точкой этого уравнения является начало координат системы  $x_e = 0$ .

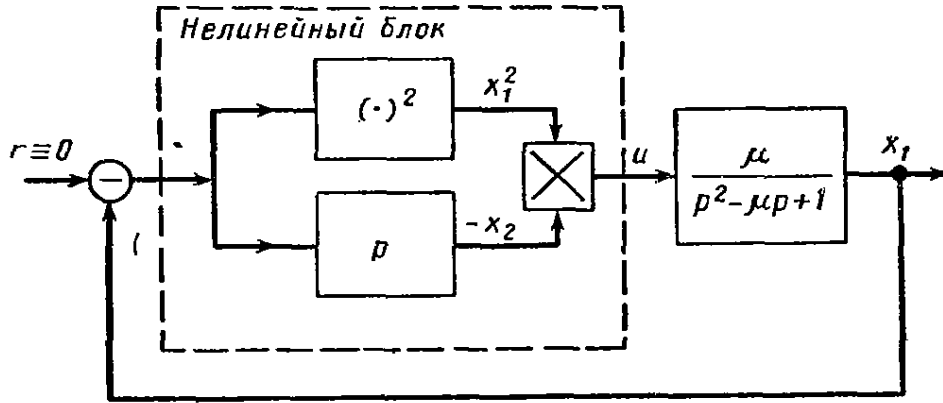


Рис. 6.1. Структурная схема системы, составленная по уравнению Ван-дер-Поля (6.2)

Полагая  $x_1 - x_{1e} = \delta x_1$  и  $x_2 - x_{2e} = \delta x_2$ , получим уравнения, линеаризованные относительно положения равновесия:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Отсюда находим, что характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0, \quad (6.4)$$

а корни этого уравнения будут

$$\lambda = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 1}. \quad (6.5)$$

Таким образом, система неустойчива в малом, если  $\mu > 0$ . В частности, для  $\frac{\mu^2}{4} < 1$  начало координат — неустойчивый фокус, а для  $\frac{\mu^2}{4} \geq 1$  начало координат — неустойчивый узел.

Теперь определим, где проходят траектории. В общем случае существуют три возможности движения из неустойчивого положения равновесия. Во-первых, траектория может идти в другое равновесное состояние; во-вторых, может уходить в бесконечность; и, в-третьих, может стремиться к предельному циклу. Так как изучаемая система имеет лишь одно положение равновесия, то первый случай невозможен. Что же касается второго и третьего, то из приведенного нами беглого анализа наиболее вероятным следует считать движение к предельному циклу. Рассмотрим структурную схему, показанную на рис. 6.1, где нелинейный блок включает в себя все нелинейности системы. Оставшаяся линейная часть системы неустойчива, хотя согласно частотным характеристикам она пропускает лишь низкие частоты.

Предположим, что по координате  $x_1$  имеют место синусоидальные колебания. В результате нелинейного преобразования в сигнале появятся дополнительные гармоники. Однако, если эти гармоники в достаточной степени ослабляются линейной частью системы, то на выходе остается лишь первая гармоника сигнала. Если результирующая амплитуда первой гармоники сигнала в обратной цепи соответствует первоначальной амплитуде сигнала  $x_1$ , то в системе могут возникнуть автоколебания.

Рассмотрим подробнее нелинейный элемент на рис. 6.1, входной сигнал которого —  $x_1$ , а выходной  $u$ . Предположим, что  $x_1$  имеет вид

$$x_1 = \hat{x}_1 \sin \omega t = x_{1n}(t); \quad (6.6) *$$

\* Мы используем символ  $\hat{x}$  для обозначения амплитуды синусоидального сигнала  $x(t)$ , а индекс  $n$  — для обозначения периодического сигнала там, где это необходимо.

тогда

$$\dot{x}_1 = \hat{x}_1 \omega \cos \omega t,$$

а выходной сигнал

$$\begin{aligned} u &= -x_1^2 \dot{x}_1 = -\hat{x}_1^2 (\sin^2 \omega t) (\hat{x}_1 \omega \cos \omega t) = -\hat{x}_1^3 \omega \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) \cos \omega t = \\ &= -\frac{\hat{x}_1^3 \omega}{4} (\cos \omega t - \cos 3\omega t). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из выражения (6.7) видно, что выходной сигнал содержит третью гармонику.

Предполагая, что третья гармоника достаточно ослаблена линейной частью системы, получим следующее приближенное соотношение:

$$u \approx -\frac{\hat{x}_1^3}{4} \omega \cos \omega t = -\frac{\hat{x}_1^2}{4} \cdot \frac{d}{dt} (\hat{x}_1 \sin \omega t) = -\frac{\hat{x}_1^2}{4} p x_1. \quad (6.8)$$

Таким образом, если третьей гармоникой можно пренебречь, то прежний нелинейный элемент заменяется эквивалентным в соответствии с равенством (6.8). Его можно рассматривать как дифференцирующее устройство с коэффициентом усиления, пропорциональным  $\hat{x}_1^2$ . Итак, исходную нелинейную систему можно заменить эквивалентной линейной, у которой коэффициент усиления зависит от амплитуды. Тогда наша задача сводится к тому, чтобы исследовать, при каких условиях существуют автоколебания вида  $\hat{x}_1 \sin \omega t$  для сигнала  $x_1$  эквивалентной линейной системы. Эквивалентная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$\frac{\mu \hat{x}_1^2 \frac{p}{4}}{p^2 - \mu p + 1}, \quad (6.9)$$

а характеристическое уравнение замкнутой системы равно

$$\frac{1}{4} \mu \hat{x}_1^2 \lambda + \lambda^2 - \mu \lambda + 1 = 0. \quad (6.10)$$

Решая его относительно  $\lambda$ , получим

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \hat{x}_1^2 - 1 \right) \mu \pm \sqrt{\frac{1}{4} \mu^2 \left( \frac{1}{4} \hat{x}_1^2 - 1 \right)^2 - 1}. \quad (6.11)$$

Для существования в контуре автоколебаний  $x = \hat{x}_1 \sin \omega t$  нужно, чтобы собственные значения или корни характеристического уравнения были чисто мнимыми. Следовательно, при  $\frac{1}{4} \hat{x}_1^2 = 1$  имеем  $\hat{x}_1 = 2$ , где  $\lambda = \pm j$  и  $\omega = 1$ .

Итак, мы установили, что в системе существуют колебания с амплитудой, равной 2, и частотой 1 рад/сек.

Интересно заметить, что из приближенного решения получены значения амплитуды  $\hat{x}_1$  и частоты  $\omega$  автоколебаний, не зависящие от  $\mu$ . На первый взгляд, такой результат неверен. Но из рис. 6.2 и 6.3, где показаны результаты моделирования уравнения Ван-дер-Поля для четырех значений  $\mu$  ( $\mu = 0; 1; 2; 8$ ), видно, что при выбранных значениях  $\mu$  приближение оказывается достаточно хорошим.

Постараемся обосновать этот результат, оценив ошибку, которая возникает при допущении о синусоидальном характере колебаний [равенство (6.6)].

Из соотношения (6.7) следует, что выходной сигнал нелинейного элемента содержит третью гармонику с амплитудой, равной амплитуде первой гармоники. Видно, что, проходя через линейный блок с передаточной функцией  $\frac{\mu}{p^2 - \mu p + 1}$  (см. рис. 6.1), амплитуда первой

гармоники не изменяется, тогда как третья гармоника ослабляется в  $\frac{\mu}{\sqrt{64 + (3\mu)^2}}$  раз.

Для  $\mu = 1$  ослабление сигнала по третьей гармонике составляет более 18 дБ, тогда как первая гармоника не ослабляется вовсе. Таким образом, амплитуда третьей гармоники на входе нелинейного блока (см. рис. 6.1) оказывается почти на порядок меньше амплитуды первой гармоники. Для  $\mu \ll 1$  предполагаем, что аппроксимация будет еще лучше, тогда как для  $\mu \gg 1$  хуже. Это подтверждается результатами экспериментов, показанными на рис. 6.2 и 6.3.

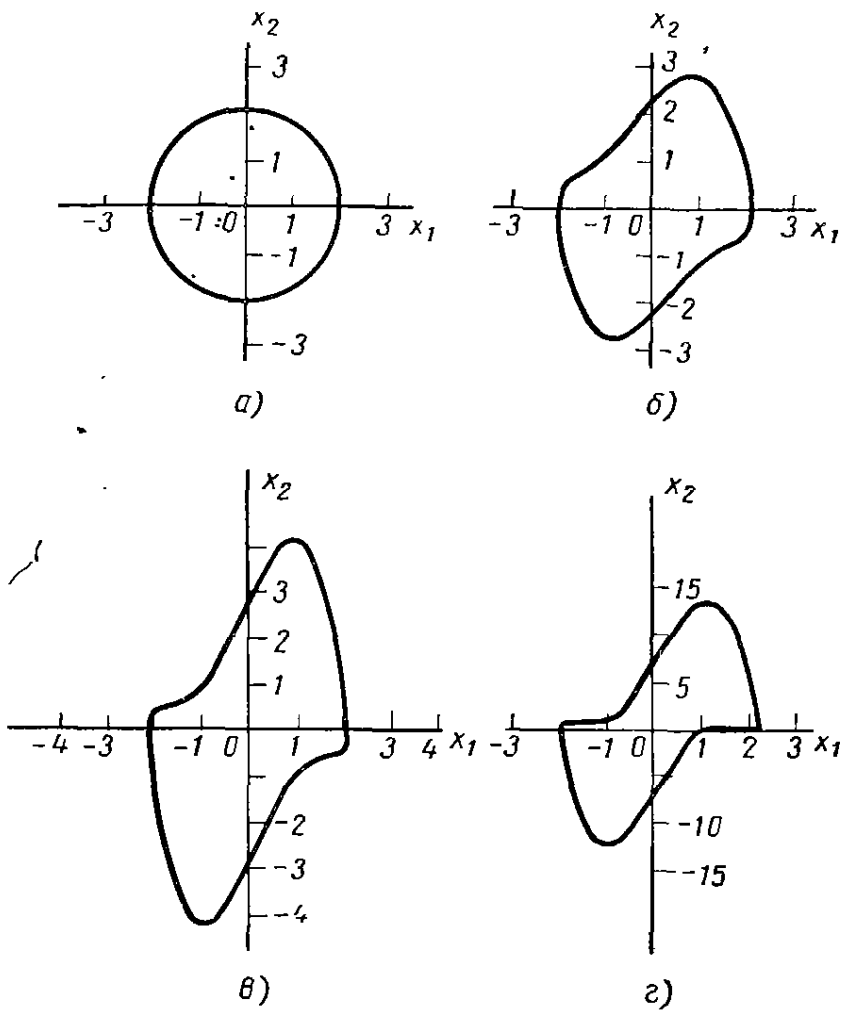


Рис. 6.2. Виды предельных циклов для уравнения Ван-дер-Поля, полученные экспериментальным путем с различными значениями параметра  $\mu$ :

*а*—при  $\mu=0$ ; *б* — при  $\mu=1$ ; *в* — при  $\mu=2$ ; *г* — при  $\mu=8$

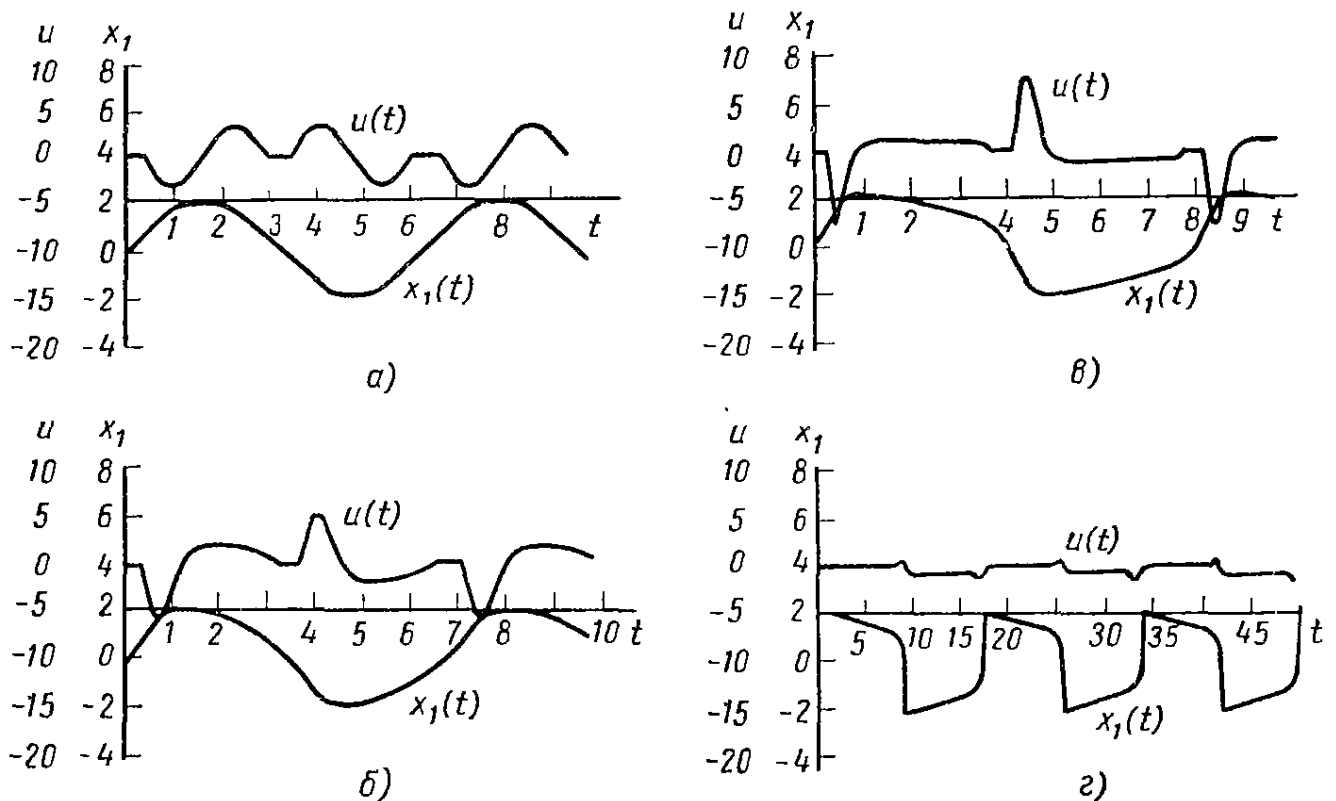


Рис. 6.3. Характеристики переходных процессов  $x_1(t)$  и  $u(t)$  для системы, изображенной на рис. 6.1, которые получены в результате математического моделирования:

*а* — при  $\mu = 0$ ; *б* — при  $\mu = 1$ ; *в* — при  $\mu = 2$ ; *г* — при  $\mu = 8$

Из-за отсутствия третьей гармоникой сигнал в точке  $x_1$  несинусоидальный. Но предыдущие рассуждения показывают, что при  $\mu \rightarrow 0$  форма сигнала должна приближаться к синусоидальной, а для  $\mu \rightarrow \infty$  форма сигнала должна в значительной мере отличаться от синусоиды. Все это действительно подтверждается результатами экспериментов (см. рис. 6.2 и 6.3).

Последний вопрос, на который нам хотелось бы ответить, заключается в следующем. Обладает ли полученный предельный цикл асимптотической орбитальной устойчивостью?

На этот вопрос можно ответить, проанализировав уравнение (6.11). Предположим, что  $\hat{x}_1$  превысила значение амплитуды 2. Тогда из уравнения (6.11) следует, что  $\lambda$  имеет отрицательную действительную часть. А это означает, что замкнутая система устойчива. И амплитуда колебаний  $\hat{x}_1$  убывает. Если же  $\hat{x}_1$  становится меньше 2, то равенство (6.11) показывает, что система становится неустойчивой, а следовательно,  $\hat{x}_1$  будет уменьшаться. Таким образом, заключаем, что предельный цикл обладает асимптотической орбитальной устойчивостью.

Изложенный выше способ определения устойчивости предельного цикла равносильен анализу методом корневого годографа, когда в качестве переменного параметра выбирается амплитуда автоколебаний  $\hat{x}_1$ . Поскольку предполагается, что в системе существуют автоколебания вида  $x_1 = \hat{x}_1 \sin \omega t$ , то имеет смысл строить лишь часть годографа вблизи мнимой оси. Корневой годограф гармонически линеаризованной системы в функции  $\hat{x}_1$  показан на рис. 6.4. Устойчивость предельного цикла можно установить рассуждениями, аналогичными предыдущим.

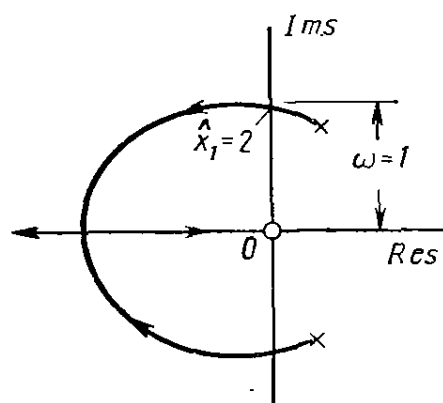


Рис. 6.4. Корневой годограф гармонически линеаризованного уравнения Ван-дер-Поля

На практике после выполнения гармонической линеаризации дальнейший анализ системы можно проводить с помощью логарифмических частотных характеристик или частотного годографа\*. Все это станет читателю яснее из материала следующего параграфа.

## 6.2. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ОДНОЗНАЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В примере 6.1 мы познакомились с методом гармонической линеаризации. У этого метода есть свои истоки. К. Магнус [131], например, показал, что метод связан со многими классическими подходами к анализу нелинейных систем; в частности, с методами Ритца и Галеркина, переменного параметра, возмущений и гармонического баланса\*\*. Интересно также отметить, что метод гармонической линеаризации — это первый метод, который одновременно применили для анализа нелинейных систем, по меньшей мере, пять исследователей в разных странах\*\*\* в период с 1947 по 1950 годы.

В этом разделе мы хотим выявить основу метода гармонической линеаризации, связанную с передачей первой гармоники входного сигнала. В одном из последующих разделов мы попытаемся осветить этот метод с другой точки зрения, а именно, исходя из условия минимума среднеквадратической ошибки приближения.

Рассмотрим автономную систему  $S$  (рис. 6.5), где предполагается, что нелинейности системы могут быть представлены одним блоком  $\mathcal{N}$ . Оставшаяся часть системы  $G(p)$  предполагается линейной и стационарной. Поскольку мы будем часто иметь дело с системами, структура которых подобна рис. 6.5, то в дальнейшем такую структуру будем называть стандартной.

\* Оба эти метода отличаются простотой и не требуют больших затрат времени при определении автоколебаний в нелинейных системах управления, имеющих высокий порядок передаточной функции линейной части (Прим. ред.).

\*\* Подробное обсуждение этих методов см., например, в работах [37], [143].

\*\*\* См. работы [49], [57], [108], [153] и [192].

Как видно из рис. 6.5, к стандартному виду приводятся все одноконтурные системы управления. Многоконтурные системы управления со стационарной частью и выделенным нелинейным элементом можно также привести с помощью известных преобразований к одноконтурной системе вида рис. 6.5\*.

Из примера предыдущего параграфа следует, что для рассматриваемого метода характерно:

1) предположение о существовании в точке  $e$  колебаний некоторой частоты;

2) определение условий, при которых эти колебания существуют.

Последнее допущение связано с тем, что не учитывается влияние всех гармоник, которые возникают на выходе нелинейности. Сохраняются лишь характеристики нелинейности, связанные с передачей амплитуды и фазы основной частоты.

Все сказанное выше равносильно тому, что мы заменяем нелинейный элемент  $\mathfrak{N}$ , предполагаемый стационарным, другим нелинейным стационарным элементом  $\mathfrak{N}'$ , обладающим свойством передавать входной сигнал

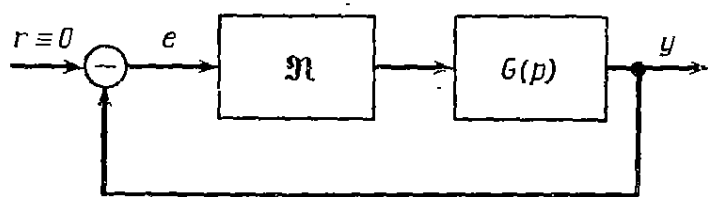


Рис. 6.5. Структурная схема одноконтурной автономной нелинейной системы управления  $S$

$e(t) = \hat{e} \sin \omega t$  первой гармоники точно так же, как и элемент  $\mathfrak{N}$ , но при этом какой бы ни была частота входного сигнала, на выходе  $\mathfrak{N}'$  высшие гармоники отсутствуют. Заменяв нелинейность  $\mathfrak{N}$  нелинейностью  $\mathfrak{N}'$ , можно приступить к точному анализу

системы  $S'$ , определяя условия, при которых предполагаемые колебания  $e(t) = \hat{e} \sin \omega t$  могут существовать.

Заметим, что при любой амплитуде  $\hat{e}$  и частоте  $\omega$  входного сигнала  $e(t)$  нелинейность  $\mathfrak{N}'$  полностью определяется эквивалентной передаточной функцией  $N(\hat{e}, \omega) = |N(\hat{e}, \omega)| e^{j\Phi}$ , где, как обычно, действительное число  $|N(\hat{e}, \omega)|$  определяет усиление (ослабление) амплитуды  $\hat{e}$  при прохождении через нелинейность  $\mathfrak{N}'$ , а величина  $\Phi = \arctg \frac{\text{Im} N(\hat{e}, \omega)}{\text{Re} N(\hat{e}, \omega)}$  определяет фазовый сдвиг входной синусоиды при прохождении через нелинейность  $\mathfrak{N}'$ .

Таким образом, если входной сигнал равен  $e(t) = \hat{e} \sin \omega t$ , то выходной сигнал нелинейности  $\mathfrak{N}'$  есть

$$u(t) = \hat{e} |N(\hat{e}, \omega)| \sin(\omega t + \Phi). \quad (6.12)$$

Для того чтобы определить условие, при котором в системе  $S'$  могут существовать колебания  $e(t) = \hat{e} \sin \omega t$ , следует определить значения величин  $\hat{e}$  и  $\omega$ , при которых эквивалентное усиление разомкнутой системы  $S'$  становится равным  $-1$ . Это условие заключается в том, что

$$N(\hat{e}, \omega) G(j\omega) = -1, \quad (6.13) **$$

где  $G(j\omega)$  — частотная характеристика линейной части  $G(p)$ .

\* Подробнее см. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 3, часть 1, под ред. В. В. Солодовникова. «Машиностроение», М., 1969 (Прим. ред.).

\*\* В отечественной литературе соотношение (6.13) называется условием Гольдфарба (Прим. ред.).

Отметим, что по отношению к нелинейности  $\mathfrak{N}$  не имеет смысла говорить об усилении и фазовом сдвиге при синусоидальном входе. Однако по отношению к нелинейности  $\mathfrak{N}'$  это становится верным. Кроме того, поскольку  $N(\hat{e}, \omega)$  для нелинейности  $\mathfrak{N}'$  можно вычислить, условие (6.13) проверяется различными способами. В частности, можно воспользоваться хорошо известными линейными методами.

1. Фиксируя амплитуду  $\hat{e}$ , можно построить годограф передаточной функции разомкнутой системы, приняв в качестве параметра частоту  $\omega$ . Построить семейство таких годографов для различных значений  $\hat{e}$ . Значения амплитуды  $\hat{e}$  и частоты  $\omega$ , при которых кривая проходит через точку  $-1; j0$ , определяют амплитуду и частоту автоколебаний в точке  $e$  (рис. 6.6). Отметим, что необходимо строить график лишь вблизи точки  $-1; j0$ . При некотором практическом навыке значения  $\hat{e}$  и  $\omega$ , которые определяют автоколебания, могут быть получены в результате небольшого числа проб.

2. Точно такой же подход справедлив и при анализе с помощью семейства логарифмических частотных характеристик  $N(\hat{e}, \omega) G(j\omega)$ . Значения амплитуды  $e$  и частоты  $\omega$  автоколебаний в системе соответствуют точке, в которой амплитуда равна 1 и фаза равна  $-\pi$ .

3. В некоторых случаях (в частности, когда  $N(\hat{e}, \omega)$  действительное число) удобно использовать корневой годограф функции  $NG(s)$ . При этом следует найти те значения  $N$ , при которых полюсы  $NG(s)$  расположены на мнимой оси.

Что касается первого способа, то иногда удобнее равенство (6.13) записать в виде

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(\hat{e}, \omega)} \quad (6.14)$$

и построить правую и левую части выражения (6.14) на плоскости  $G(j\omega)$ . Функция в левой части дает обычную амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы, в то время как функция в правой части равенства (6.14) определяет двухпараметрическое семейство кривых. В общем случае будет несколько пересечений кривых, соответствующих правой и левой частям. Прежде всего мы попытаемся определить те точки пересечения, которым соответствуют одинаковые частоты. Таким образом определяются возможные частоты колебаний. Значения амплитуды  $\hat{e}$ , определяемые правой частью уравнения, дают амплитуду колебаний. Такой метод удобен лишь для простых нелинейностей  $N(\hat{e}, \omega)$ . Иногда пытаются показать, что изложенный нами способ является единственным для определения автоколебаний. Однако это просто неверно. В дальнейшем будут даны и другие способы определения амплитуд и частот автоколебаний.

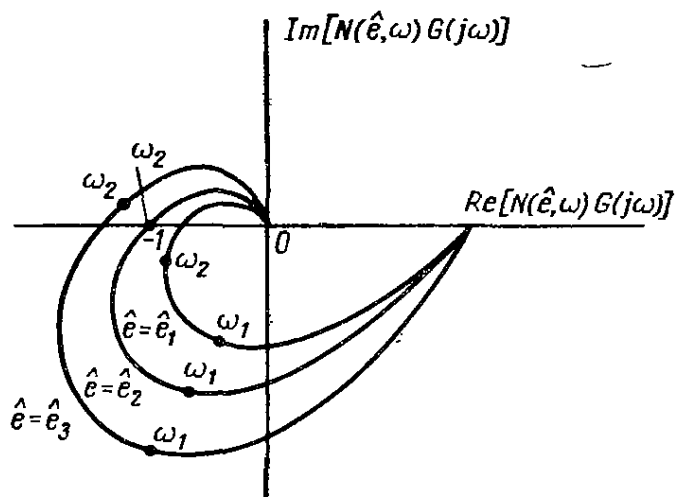


Рис. 6.6. Годографы, построенные по функции  $N(\hat{e}, \omega) G(j\omega)$  в зависимости от  $\omega$  при трех различных значениях амплитуды  $\hat{e}$



В заключение отметим еще раз, что в нашем распоряжении имеется возможность анализировать автоколебания в системах автоматического управления. В дальнейшем везде будем предполагать, что точные условия возникновения автоколебаний в системе  $S'$  определяют приближенные условия возникновения автоколебаний в системе  $S$ . В частности, комплексная величина  $N(\hat{e}, \omega)$  называется эквивалентной передаточной функцией нелинейности  $\mathfrak{N}$ . В действительности, из-за того что нелинейность заменяется характеристикой, которая описывается в терминах «усиления» и «фазы», указанная процедура часто называется «эквивалентной линеаризацией». Такое название, однако, не совсем точное, так как свойства аддитивности и однородности

при этом не соблюдаются\*.

Пример 6.2. Найдем эквивалентную передаточную функцию для нелинейности типа насыщения, которая задается соотношением

$$f(e) = \begin{cases} \frac{A}{B} e, & -B < e < B; \\ A, & B \leq e; \\ -A, & -B \geq e. \end{cases} \quad (6.15)$$

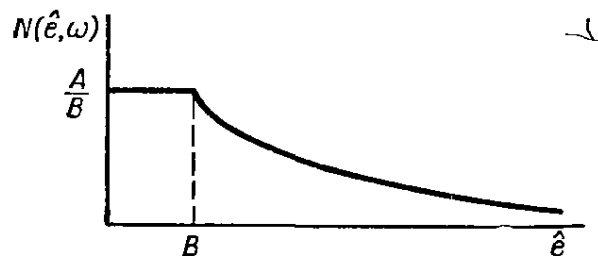


Рис. 6.7. Эквивалентный коэффициент усиления для нелинейности, описываемой уравнением (6.15)

Обозначим входной гармонический сигнал через  $\hat{e} \sin \omega t$  и заметим, что если  $\hat{e}$  меньше  $B$ , то система работает в линейной области, а ее эквивалентное усиление равно отношению  $\frac{A}{B}$ .

Когда  $\hat{e}$  превосходит  $B$ , то амплитуда выходного сигнала не более чем в  $\frac{A}{B}$  раз превышает входную, но никогда не превосходит величины  $A$ . Если  $\hat{e}$  возрастает и далее, то выходной сигнал приобретает прямоугольную форму с постоянной амплитудой  $A$ . Амплитуда основной частоты для прямоугольной волны с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$  и амплитудой  $A$  равна  $\frac{4A}{\pi}$ , что имеет место, когда  $\hat{e} \rightarrow \infty$ . Эквивалентный передаточный коэффициент, таким образом, равен  $\frac{4A}{\pi \hat{e}}$ , которая

стремится к нулю. Значения эквивалентного коэффициента передачи изменяются непрерывно, как это показано на рис. 6.7. При этом эквивалентная передаточная функция не зависит от частоты, а из-за симметрии выходного сигнала также следует, что фазовый сдвиг ее равен нулю.

При входном сигнале  $e = \hat{e} \sin \omega t$  выходной сигнал  $u(t)$  равен

$$u(t) = \begin{cases} \frac{A}{B} \hat{e} \sin \omega t, & n\pi - \arcsin \frac{B}{\hat{e}} < \omega t < n\pi + \arcsin \frac{B}{\hat{e}}; \\ A, & 2n\pi + \arcsin \frac{B}{\hat{e}} \leq \omega t \leq (2n+1)\pi - \arcsin \frac{B}{\hat{e}}; \\ -A, & (2n-1)\pi + \arcsin \frac{B}{\hat{e}} \leq \omega t \leq 2n\pi - \arcsin \frac{B}{\hat{e}}; \end{cases} \quad (6.16)$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для определения эквивалентной передаточной функции необходимо найти разложение в ряд Фурье выходного сигнала  $u(t)$ . Пусть

$$u(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \alpha_2 \sin \omega t + \dots + \beta_0 + \beta_1 \cos \omega t + \beta_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (6.17)$$

\* По этой причине и сам термин «эквивалентная передаточная функция» недостаточно оправдан. Отсутствие более удачной терминологии заставило переводчиков книги сохранить это название (Прим. ред.).

Поскольку функция  $f(e)$  нечетно симметричная, сразу следует, что

$$\left. \begin{aligned} \beta_n &= 0, & n &= 0, \dots; \\ \alpha_{2m} &= 0, & m &= 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Нас интересует лишь  $\alpha_1$ , равное

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (6.19)$$

Интегрируя (6.19) и используя соотношение (6.16), получим

$$\alpha_1 = \frac{\widehat{Ae}}{B\pi} \left\{ 2 \arcsin \left( \frac{B}{\widehat{e}} \right) - \sin \left[ 2 \arcsin \frac{B}{\widehat{e}} \right] \right\} + \frac{4A}{\pi} \cos \left[ \arcsin \frac{B}{\widehat{e}} \right]. \quad (6.20)$$

Эквивалентный комплексный коэффициент передачи для характеристики, описываемой соотношением (6.15), тогда равен  $\frac{\alpha_1}{\widehat{e}}$  или

$$N(\widehat{e}, \omega) = N(\widehat{e}) = \frac{A}{B\pi} \left\{ 2 \arcsin \frac{B}{\widehat{e}} - \sin \left[ 2 \arcsin \frac{B}{\widehat{e}} \right] \right\} + \frac{4A}{\widehat{e}\pi} \cos \left[ \arcsin \frac{B}{\widehat{e}} \right], \quad (6.21)$$

которая, как это видно, является действительной величиной, не зависящей от частоты  $\omega$  входного сигнала.

Если зафиксировать  $A$ , то, устремив  $B$  к нулю в равенстве (6.21) после раскрытия неопределенности по правилу Лопиталья, получим

$$N(\widehat{e}) = \frac{4A}{\widehat{e}\pi}. \quad (6.22)$$

При устремлении  $B$  к нулю в уравнении (6.15) получается характеристика идеального реле; отсюда следует, что идеальное реле с уровнем  $A$  будет иметь эквивалентную передаточную функцию вида (6.22).

**Пример 6.3.** Обратимся вновь к примеру 5.21. Определим существование и устойчивость предельного цикла, принимая параметры равными

$$\omega_0 = 10 \text{ рад/сек}; \quad \xi_0 = 0,105; \quad k = 1,0.$$

Пусть

$$f(x_1) = k + n(x_1), \quad (6.23)$$

где  $n(x_1)$  — симметричная характеристика вида

$$n(x_1) = \begin{cases} k & x_1 \geq 1; \\ kx_1, & |x_1| < 1; \\ -k, & x_1 \leq -1. \end{cases} \quad (6.24)$$

Допустим, что

$$x_1(t) = \widehat{x}_1 \sin \omega t = x_{1n}(t), \quad (6.25)$$

тогда эквивалентная передаточная функция для характеристики  $n(x_1)$  в соответствии с выражением (6.21) будет равна

$$N(\widehat{x}_1) = \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{1}{\widehat{x}_1} + \frac{1}{\widehat{x}_1} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\widehat{x}_1} \right)^2} \right). \quad (6.26)$$

Из соотношения (5.69) следует, что

$$x_1(t) = \frac{\omega_0 p f(x_1(t))}{p^2 + 2\omega_0 \xi_0 p + \omega_0^2}.$$

Теперь

$$pf(x_1(t)) = \frac{d}{dt} f(x_1(t)) = \frac{d}{dt} [k + n(x_1(t))] = pn(x_1(t)). \quad (6.27)$$

Заменяя  $n(x_1)$  эквивалентной величиной  $N(x_1)$ , получим

$$x_{1n}(t) = \frac{\omega_0 N(\hat{x}_1) p}{p^2 + 2\omega_0 \xi_0 p + \omega_0^2} x_{1n}(t). \quad (6.28)$$

Из выражения (6.28) можно получить следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + [2\xi_0 - N(\hat{x}_1)] \omega_0 \lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (6.29)$$

Таким образом, характеристическому уравнению могут удовлетворять чисто мнимые корни  $\lambda = \pm j\omega_0$ , если  $N(\hat{x}_1) = 2\xi_0$ .

Из условия гармонического баланса следует, что существует предельный цикл с амплитудой  $\hat{x}_{10}$ , задаваемой условием

$$N(x_{10}) = 2\xi_0. \quad (6.30)$$

Интересно отметить, что лишь при  $k > 2\xi_0$  выполняется условие гармонического баланса. Ранее в примере 5.21 было показано, что это условие является необходимым и достаточным для существования предельного цикла. Таким образом, в этом частном случае условие существования предельного цикла, получаемое из метода гармонической линеаризации является правильным.

Для того чтобы установить устойчивость предельного цикла, отметим, что эквивалентный коэффициент передачи нелинейности типа насыщения уменьшается с ростом амплитуды  $\hat{x}_1$  (рис. 6.7). Если амплитуда  $\hat{x}_1$  превышает  $\hat{x}_{10}$ , то эквивалентный коэффициент передачи уменьшается. Это в соответствии с уравнением (6.29) указывает на устойчивость системы. По той же причине при уменьшении  $\hat{x}_1$  по сравнению с  $\hat{x}_{10}$ ,  $N(\hat{x}_1)$  становится больше  $N(\hat{x}_{10})$ , поэтому в силу уравнения (6.9) система неустойчива. Отсюда следует, что предельный цикл обладает свойством асимптотической орбитальной устойчивости. Для заданных численных значений параметров имеем

$$2\xi_0 = 0,21 = N(\hat{x}_{10}) = \frac{1}{\pi} \left\{ 2 \arcsin \frac{1}{\hat{x}_{10}} - \sin \left[ 2 \arcsin \frac{1}{\hat{x}_{10}} \right] + \frac{4}{\hat{x}_{10}} \cos \left[ \arcsin \frac{1}{\hat{x}_{10}} \right] \right\}.$$

Решая последнее уравнение графически относительно  $\hat{x}_{10}$ , получим  $\hat{x}_{10} = 6,00$ .

Нелинейная характеристика, описываемая уравнением (6.15), при  $A = B = 1$  называется нелинейностью с единичным уровнем ограничения и обозначается как  $l(e)$ . Свойства этой характеристики чрезвычайно важны, так как позволяют оценить влияние нелинейностей с другим уровнем ограничения и иными статическими характеристиками (см. например, упражнение 6.3). Из уравнения (6.26) следует, что передаточная функция для  $l(e)$ , обозначаемая как  $N_l(\hat{e})$ , равна

$$N_l(\hat{e}) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1}{\hat{e}} + \frac{1}{\hat{e}} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\hat{e}} \right)^2} \right]. \quad (6.31)$$

Числовые значения для  $N_l(\hat{e})$  с пятью десятичными знаками приведены в табл. 6.1. В табл. 6.2 приводятся эквивалентные функции для однозначных нелинейностей (см. строки 1—19).

Числовые значения эквивалентного передаточного коэффициента для нелинейности типа насыщения  $N_l(\hat{x})$  \*\* (по Матнусу)

$\hat{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,00000	0,96755	0,92037	0,87163	0,82474	0,78090	0,74040	0,70319	0,66906	0,63775
2	0,60900	0,58254	0,55815	0,53561	0,51474	0,49537	0,47735	0,46055	0,44487	0,43018
3	0,41642	0,40348	0,39131	0,37984	0,36901	0,35877	0,34907	0,33988	0,33115	0,32286
4	0,31496	0,30744	0,30026	0,29341	0,28686	0,28059	0,27459	0,26884	0,26333	0,25803
5	0,25294	0,24804	0,24333	0,23880	0,23443	0,23022	0,22615	0,22222	0,21843	0,21476
6	0,21122	0,20779	0,20447	0,20125	0,19813	0,19511	0,19217	0,18933	0,18656	0,18388
7	0,18127	0,17873	0,17627	0,17387	0,17153	0,16926	0,16704	0,16489	0,16279	0,16074
8	0,15874	0,15679	0,15489	0,15303	0,15122	0,14945	0,14772	0,14603	0,14437	0,14276
9	0,14118	0,13963	0,13812	0,13664	0,13519	0,13378	0,13239	0,13103	0,12969	0,12839
10	0,12711	0,12586	0,12463	0,12342	0,12224	0,12108	0,12008	0,11994	0,11882	0,11772
11	0,11559	0,11455	0,11353	0,11253	0,11154	0,11058	0,11058	0,10962	0,10869	0,10777
12	0,10598	0,10511	0,10425	0,10340	0,10257	0,10175	0,10175	0,10094	0,10015	0,09937
13	0,09784	0,09710	0,09636	0,09564	0,09493	0,09423	0,09423	0,09353	0,09285	0,09218
14	0,09087	0,09022	0,08959	0,08896	0,08835	0,08774	0,08774	0,08714	0,08655	0,08596
15	0,08482	0,08426	0,08370	0,08316	0,08262	0,08209	0,08209	0,08156	0,08104	0,08053
16	0,07952	0,07903	0,07854	0,07806	0,07759	0,07712	0,07712	0,07665	0,07620	0,07574
17	0,07485	0,07441	0,07398	0,07356	0,07313	0,07272	0,07272	0,07230	0,07190	0,07149
18	0,07070	0,07031	0,06892	0,06854	0,06916	0,06879	0,06842	0,06805	0,06769	0,06733
19	0,06698	0,06663	0,06628	0,06594	0,06560	0,06526	0,06493	0,06460	0,06428	0,06395
20	0,06363	0,06061	0,05785	0,05534	0,05303	0,05092	0,04896	0,04715	0,04546	0,04389
30	0,04243	0,04106	0,03978	0,03858	0,03744	0,03637	0,03537	0,03441	0,03350	0,03264
40	0,03183	0,03105	0,03031	0,02961	0,02893	0,02829	0,02768	0,02709	0,02652	0,02598
50	0,02546	0,02496	0,02448	0,02402	0,02358	0,02315	0,02273	0,02233	0,02195	0,02158
60	0,02122	0,02087	0,02053	0,02021	0,01989	0,01959	0,01929	0,01900	0,01872	0,01845
70	0,01819	0,01793	0,01768	0,01744	0,01720	0,01697	0,01675	0,01653	0,01632	0,01612
80	0,01591	0,01572	0,01553	0,01534	0,01516	0,01498	0,01480	0,01463	0,01447	0,01430
90	0,01415	0,01399	0,01384	0,01369	0,01354	0,01340	0,01326	0,01313	0,01299	0,01286
100	0,01273	...	...	...	...	...	...	...	...	...

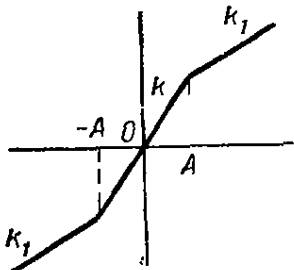
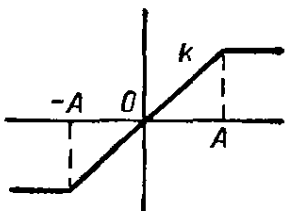
Интервал  $20 \leq \hat{x} \leq 100$  с шагом 1,0Интервал  $1 \leq \hat{x} \leq 20$  с шагом 0,1

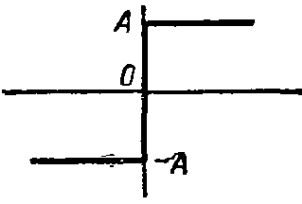
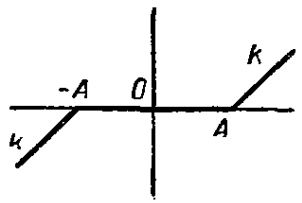
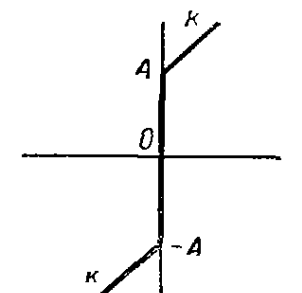
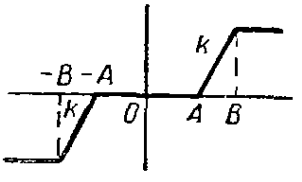
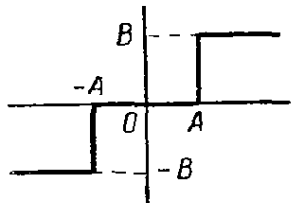
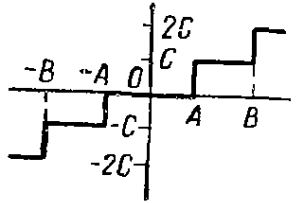
\* См. шокку под табл. 6.2 на стр. 153.

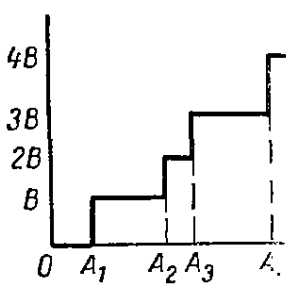
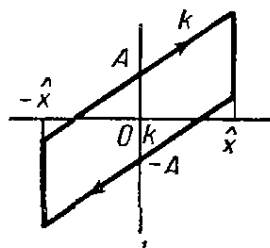
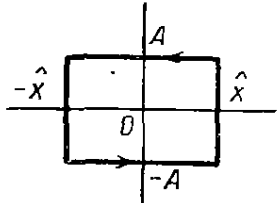
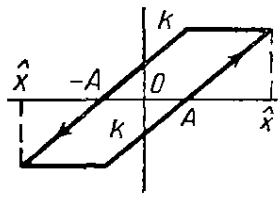
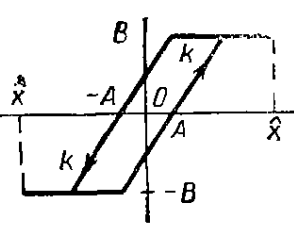
$$** \text{Здесь } N_l(\hat{x}) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{1}{\hat{x}} \right) + \frac{1}{\hat{x}} \sqrt{1 - \left( \frac{1}{\hat{x}} \right)^2} \right].$$

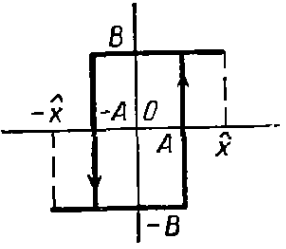
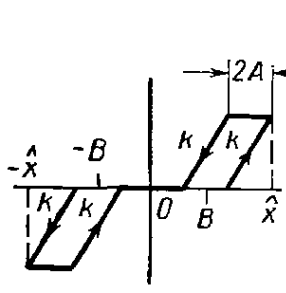
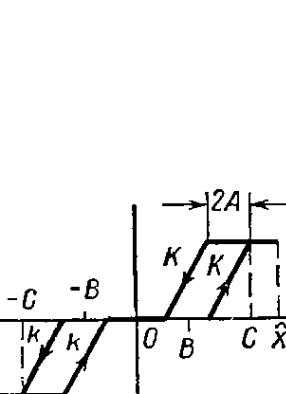
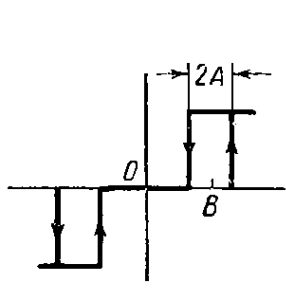
## Коэффициенты линеаризации типовых нелинейностей

Входной сигнал  $\hat{x} \sin \omega t$  при прохождении через нелинейности  $f(x)$  или  $\mathcal{F}[x(t)]$  определяет эквивалентную передаточную функцию  $N(\hat{x})$

Номер по порядку	$f(x)$ или $\mathcal{F}[x(t)]$	$\text{Re } N(\hat{x})$	$\text{Im } N(\hat{x})$
1	Постоянная	0	0
2	$x^{2n} (n = 1, 2, 3, \dots)$	0	0
3	$x$	1	0
4	$x^3$	$\frac{3}{4} \hat{x}^2$	0
5	$x^5$	$\frac{5}{8} \hat{x}^4$	0
6	$x^{2n-1} (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} \dots \frac{3}{4} \hat{x}^{2n-2}$	0
7	$x x $	$\frac{8}{3\pi} \hat{x}$	0
8	$x^3 x $	$\frac{32}{15\pi} \hat{x}^3$	0
9	$x^{2n-1} x  (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{4}{\pi} \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \frac{2n-4}{2n-3} \dots \frac{2}{3} \hat{x}^{2n-1}$	0
10	$\sin x$	$\frac{2}{\hat{x}} J_1(\hat{x}) = 1 - \frac{1}{8} \hat{x}^2 + \frac{1}{192} \hat{x}^4 - \frac{1}{9216} \hat{x}^6 + \frac{1}{737,280} \hat{x}^8 \dots$ где $J_1$ — функция Бесселя I-го рода	0
11**		$k$ для $\frac{\hat{x}}{A} \leq 1$ $k_1 + (k - k_1) N_1\left(\frac{\hat{x}}{A}\right)$ для $\frac{\hat{x}}{A} \geq 1$	0
12		$k$ для $\frac{\hat{x}}{A} \leq 1$ $k N_1\left(\frac{\hat{x}}{A}\right)$ для $\frac{\hat{x}}{A} \geq 1$	0

Номер по порядку	$f(x)$ или $\mathcal{F}[x(t)]$	$\text{Re } N(\hat{x})$	$\text{Im } N(\hat{x})$
13		$\frac{4A}{\pi \hat{x}}$	0
14		$0 \text{ для } \frac{\hat{x}}{A} \leq 1$ $k \left[ 1 - N_I \left( \frac{\hat{x}}{A} \right) \right] \text{ для } \frac{\hat{x}}{A} \geq 1$	0
15		$k + \frac{4A}{\pi \hat{x}}$	0
16		$k \left[ 1 - N_I \left( \frac{\hat{x}}{A} \right) \right] \text{ для } 1 \leq \frac{\hat{x}}{A} \leq \frac{B}{A}$ $k \left[ N_I \left( \frac{\hat{x}}{B} \right) - N_I \left( \frac{\hat{x}}{A} \right) \right] \text{ для } \frac{\hat{x}}{A} \geq \frac{B}{A}$	0
17		$0 \text{ для } \hat{x} \leq A$ $\frac{4B}{\pi \hat{x}} \sqrt{1 - \left( \frac{A}{\hat{x}} \right)^2} \text{ для } \hat{x} \geq A$	0
18		$0 \text{ для } \hat{x} \leq A$ $\frac{4C}{\pi \hat{x}} \sqrt{1 - \left( \frac{A}{\hat{x}} \right)^2} \text{ для } A \leq \hat{x} \leq B$ $\frac{4C}{\pi \hat{x}} \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{A}{\hat{x}} \right)^2} + \sqrt{1 - \left( \frac{A}{\hat{x}} \right)^2} \right] \text{ для } \hat{x} \geq B$	0

Номер по порядку	$f(x)$ или $\mathcal{F}[x(t)]$	$\text{Re } N(\hat{x})$	$\text{Im } N(\hat{x})$
19		$\frac{4B}{\pi\hat{x}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{A_i}{\hat{x}}\right)^2} \text{ для } \hat{x} \geq A_i$	0
20		k	$\frac{4A}{\pi\hat{x}}$
21		0	$-\frac{4A}{\pi\hat{x}}$
22		$0 \text{ для } \frac{\hat{x}}{A} \leq 1$ $\frac{k}{2} \left[ 1 - N_I \left( \frac{\frac{\hat{x}}{A}}{2 - \frac{\hat{x}}{A}} \right) \right] \text{ для } \frac{\hat{x}}{A} \geq 1$	$0 \text{ для } \hat{x} \leq A$ $\frac{4kA(A - \hat{x})}{\pi\hat{x}^2} \text{ для } \hat{x} \geq A$
23		$0 \text{ для } \frac{\hat{x}}{A} \leq 1$ $\frac{k}{2} \left[ 1 - N_I \left( \frac{\frac{\hat{x}}{A}}{2 - \frac{\hat{x}}{A}} \right) \right] \text{ для } 1 \leq \frac{\hat{x}}{A} \leq \frac{B}{A}$ $\frac{k}{2} \left[ N_I \left( \frac{\hat{x}}{B} \right) - N_I \left( \frac{\frac{\hat{x}}{A}}{2 - \frac{B}{A}} \right) \right] \text{ для } \hat{x} \geq B$	$0 \text{ для } \hat{x} \leq A$ $\frac{4kA(A - \hat{x})}{\pi\hat{x}^2} \text{ для } A \leq \hat{x} \leq B$ $\frac{4kA(A - B)}{\pi\hat{x}^2} \text{ для } \hat{x} \geq B$

Номер по порядку	$f(x)$ или $\mathcal{F}[x(t)]$	$\text{Re } N(\hat{x})$	$\text{Im } N(\hat{x})$
24		$0 \text{ для } \hat{x} \leq A$ $\frac{4B}{\pi \hat{x}} \sqrt{1 - \left(\frac{A}{\hat{x}}\right)^2} \text{ для } \hat{x} \geq A$	$0 \text{ для } \hat{x} \leq A$ $-\frac{4AB}{\pi \hat{x}^2} \text{ для } \hat{x} \geq A$
25		$0 \text{ для } \hat{x} \leq A + B$ $\frac{k}{2} \left[ 1 - N_l\left(\frac{\hat{x}}{A+B}\right) - N_l\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}-2A}\right) - N_l\left(\frac{\hat{x}}{A+B}\right) \right]$ $\text{для } \hat{x} \geq A + B$	$0 \text{ для } \hat{x} \leq A + B$ $\frac{4kA(A+B-\hat{x})}{\pi \hat{x}^2} \text{ для } \hat{x} \geq A + B$
26		$0 \text{ для } \hat{x} \leq A + B$ $\frac{k}{2} \left[ 1 - N_l\left(\frac{\hat{x}}{A+B}\right) + N_l\left(\frac{\hat{x}}{\hat{x}-2A}\right) - N_l\left(\frac{\hat{x}}{B-A}\right) \right]$ $\text{для } A+B \leq \hat{x} \leq C$ $\frac{k}{2} \left[ \left( N_l\left(\frac{\hat{x}}{C}\right) - N_l\left(\frac{\hat{x}}{A+B}\right) + l\left(\frac{\hat{x}}{C-2A}\right) - N_l\left(\frac{\hat{x}}{B-A}\right) \right) \right]$ $\text{для } \hat{x} \geq C$	$0 \text{ для } \hat{x} \leq A + B$ $\frac{4kA(A+B-\hat{x})}{\pi \hat{x}^2} \text{ для } A+B \leq \hat{x} \leq C$ $\frac{4kA(A+B-C)}{\pi \hat{x}^2} \text{ для } \hat{x} \geq C$
27		$0 \text{ для } \hat{x} \leq A + B$ $\frac{2C}{\pi \hat{x}} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{B-A}{\hat{x}}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{B+A}{\hat{x}}\right)^2} \right]$ $\text{для } \hat{x} \geq A + B$	$0 \text{ для } \hat{x} \leq A + B$ $-\frac{4AC}{\pi \hat{x}^2} \text{ для } \hat{x} \geq A + B$

\* Таблицы 6.1 и 6.2 заимствованы из статьи К. Магнус'а. Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungs-Systeme. «VDI — Forschungsheft, 1955.

\*\* Здесь и везде далее в таблице под  $k$  понимается соответствующий коэффициент наклона прямой к нелинейности.



### 6.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ДВУЗНАЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

До сих пор рассматривались эквивалентные коэффициенты усиления лишь для однозначных нелинейностей. Под однозначным безынерционным нелинейным элементом понимается такой элемент, реакция которого на входной сигнал мгновенна и соответствует его статической характеристике, показанной на рис. 6.8, а. Достаточно часто элементы, встречающиеся в системах управления, являются двузначными нелинейными инерционными

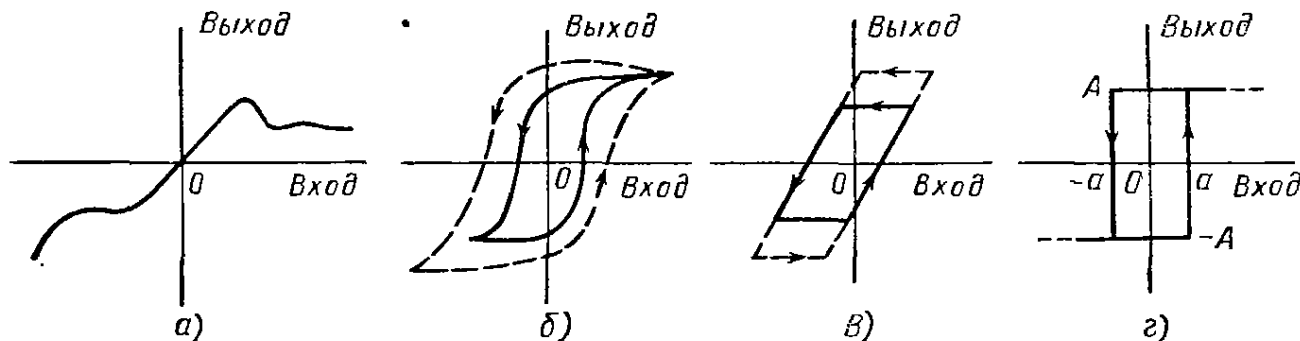


Рис. 6.8. Характеристики нелинейностей:

а — однозначная (с нулевой памятью); б — двузначная (типа «гистерезис»); в — двузначная (типа «люфт»); г — двузначная (релейная с гистерезисом)

элементами. Следовательно, связь между входом и выходом не определяется однозначно статической характеристикой нелинейности, а зависит от начального состояния элемента и предыстории входного сигнала. Примерами такого типа нелинейностей являются элементы типа «гистерезис», «люфт» и реле с гистерезисом. Они показаны на рис. 6.8, б, 6.8, в и 6.8, г для одного периода входного сигнала заданной амплитуды. Для больших амплитуд эти характеристики принимают вид, показанный на рисунке пунктиром. Для релейного элемента с гистерезисом оказывается, что его характеристика не меняется при увеличении входного сигнала.

Поскольку выходной сигнал двузначной нелинейности зависит от предыстории входного сигнала, то соотношение между входом и выходом для такого элемента математически можно описать только посредством функционала, который можно назвать функцией от функции, когда входной функции ставится в соответствие выходная величина. Если входную и выходную функции времени обозначить через  $x(t)$  и  $y(t)$ , то функционал, их связывающий, запишется так:

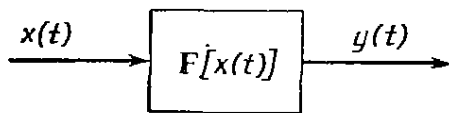


Рис. 6.9. Изображение на структурных схемах нелинейного элемента, представляющего собой функционал

$$y(t) = \mathcal{F}[x(t)]. \quad (6.32)$$

В дальнейшем, используя структурную схему (рис. 6.9), будем помнить, что соотношение между выходом и входом задается соотношением (6.32).

**Пример 6.4.** Рассмотрим релейный элемент с гистерезисом (см. рис. 6.8, г). При синусоидальном входном сигнале выходной представляет последовательность прямоугольных импульсов, не зависящую от амплитуды входного сигнала, если она превышает половину ширины петли гистерезиса (величина  $a$  на рис. 6.8, г и рис. 6.10). Поскольку частота повторения прямоугольных импульсов равна частоте входного сигнала, то прямоугольный импульс пересекает нулевой уровень с запаздыванием по отношению ко входу. Это означает, что эквивалентная передаточная функция характеризуется фазовым сдвигом, а в частности, фазовым запаздыванием.

Если быть более точным, то при входной амплитуде, равной  $a$ , первая гармоника выходного сигнала будет иметь отставание в  $90^\circ$ . Однако это отставание будет уменьшаться с ростом амплитуды  $a$  входного сигнала, и в пределе оно стремится к нулю. Кроме этого, эквивалентная

амплитудная характеристика рассматриваемого нелинейного элемента во многом подобна идеальной релейной характеристике, в которую переходит релейная характеристика с гистерезисом при стремлении величины  $a$  к нулю.

Для того чтобы получить аналитическое выражение для эквивалентной передаточной функции, будем считать, что входной сигнал синусоидален, и, разложив в ряд Фурье выходной сигнал, найдем члены, зависящие лишь от первой гармоники. Прделаем это на конкретном примере.

Пример 6.5. Предположим, что начальное значение выходной координаты нелинейной характеристики (см. рис. 6.8,  $z$  и рис. 6.10) равно  $-A$ , тогда при входном сигнале  $\hat{e} \sin \omega t$  получим для одного периода колебаний  $0 \leq \omega t \leq 2\pi$  следующее выражение для сигнала  $u(t)$ :

$$u(t) = \begin{cases} -A, & \pi + \arcsin \frac{a}{\hat{e}} < \omega t < \arcsin \frac{a}{\hat{e}}; \\ +A, & \arcsin \frac{a}{\hat{e}} < \omega t < \pi + \arcsin \frac{a}{\hat{e}}. \end{cases}$$

Разлагая  $u(t)$  в ряд Фурье

$$u(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \beta_1 \cos \omega t + \dots,$$

получим \*

$$\alpha_1 = \frac{A}{\pi} \left[ - \int_{-\pi + \arcsin \frac{a}{\hat{e}}}^{\arcsin \frac{a}{\hat{e}}} \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\arcsin \frac{a}{\hat{e}}}^{\pi + \arcsin \frac{a}{\hat{e}}} \sin \omega t d(\omega t) \right] = \frac{4A}{\pi} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\hat{e}^2}};$$

$$\beta_1 = \frac{A}{\pi} \left[ - \int_{-\pi + \arcsin \frac{a}{\hat{e}}}^{\arcsin \frac{a}{\hat{e}}} \cos \omega t d(\omega t) + \int_{\arcsin \frac{a}{\hat{e}}}^{\pi + \arcsin \frac{a}{\hat{e}}} \cos \omega t d(\omega t) \right] = -\frac{4Aa}{\pi \hat{e}}.$$

Эти соотношения верны, если  $e > a$ ; тогда амплитуда первой гармоники выходного сигнала равна

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = \frac{4A}{\pi},$$

а фаза определяется соотношением

$$\arctg \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \arctg \frac{a}{\sqrt{\hat{e}^2 - a^2}} = \arcsin \frac{a}{\hat{e}};$$

отсюда следует, что эквивалентная передаточная функция имеет вид

$$N(\hat{e}) = \frac{4A}{\pi \hat{e}} e^{-j \arcsin \frac{a}{\hat{e}}}.$$

Подобное явление уменьшения фазового сдвига, когда амплитуда возрастает, встречается довольно часто. Читатель может проверить такое

\* Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  в отечественной литературе принято называть первыми коэффициентами гармонической линеаризации (Прим. ред.).

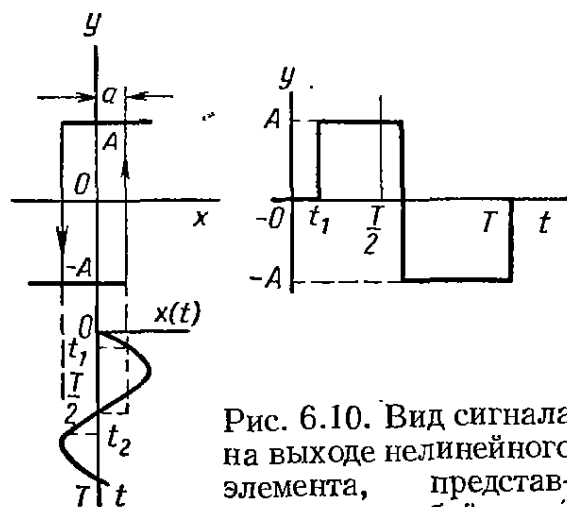


Рис. 6.10. Вид сигнала на выходе нелинейного элемента, представляющего собой релé с гистерезисом (при входном синусоидальном сигнале)

утверждение, рассматриваемые другие двузначные нелинейности. Отметим также, что при  $a = 0$  рассматриваемая нелинейная характеристика переходит в релейную. Однако следует быть осторожным в определении знака фазового сдвига, который зависит от того, является ли линейный двузначный элемент «пассивным» или «активным».

Чтобы лучше понять высказанную мысль, мы прежде всего дадим определения терминам — пассивный и активный. Двузначная нелинейность называется пассивной, если за один период входного сигнала нелинейная характеристика обходится против часовой стрелки (рис. 6.11, а). Если же при тех же условиях нелинейная характеристика обходится по часовой стрелке, то двузначный нелинейный элемент является активным

(рис. 6.11, б). Исходя из этих определений нетрудно понять, что пассивная нелинейность всегда приводит к фазовому запаздыванию, а активная — к фазовому опережению.

Мы видели, что некоторые однозначные нелинейности не приводят к фазовому сдвигу, а некоторые двузначные нелинейности его вызывают. Это наводит на мысль, что эквивалентная передаточная функция однозначной нелинейности есть действительная величина. Последнее положение мы и сформулируем в качестве теоремы.

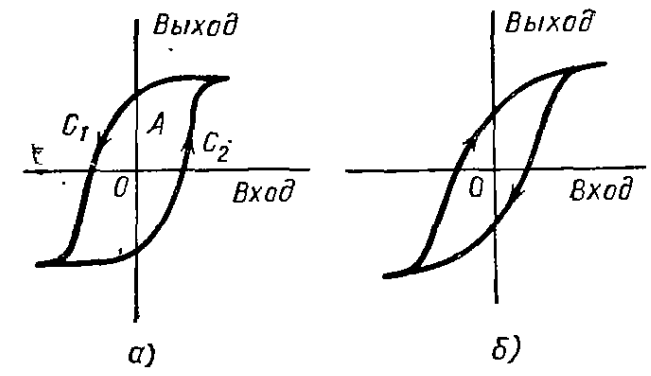


Рис. 6.11. Гистерезисные характеристики нелинейных элементов:  
а — для пассивного; б — для активного

**Теорема 6.1.** Эквивалентная передаточная функция любой однозначной нелинейности есть действительное число.

**Доказательство.** Рассмотрим некоторую произвольную нелинейность (например, рис. 6.11, а), на входе которой действует гармонический сигнал  $x(t) = x_n(t) = \hat{x} \sin \omega t$ , тогда выходной сигнал  $u(t)$  можно представить рядом Фурье

$$u(t) = \alpha_1 \sin \omega t + \beta_1 \cos \omega t + \dots$$

По определению эквивалентная передаточная функция задается соотношением

$$N(\hat{x}) \triangleq \frac{\alpha_1}{\hat{x}} + j \frac{\beta_1}{\hat{x}}, \tag{6.33}$$

где

$$\alpha_1 \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}[x_n(t)] \sin \omega t d(\omega t); \tag{6.34a}$$

$$\beta_1 \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}[x_n(t)] \cos \omega t d(\omega t). \tag{6.34б}$$

Поскольку  $\frac{dx_n(t)}{d(\omega t)} = \hat{x} \cos \omega t$ , соотношение (6.34б) можно записать в следующем виде:

$$\beta_1 = \frac{1}{\hat{x}\pi} \left[ \int_{C_1} \mathcal{F}[x_n(t)] dx_n(t) + \int_{C_2} \mathcal{F}[x_n(t)] dx_n(t) \right] = \frac{1}{\hat{x}\pi} \int_{C_1+C_2} \mathcal{F}[x_n(t)] dx_n(t) \tag{6.35}$$

кривые  $C_1$  и  $C_2$  показаны на рис. 6.11, а.

Очевидно, что выражение в скобках в соотношении (6.35) определяет площадь  $A$ , ограниченную кривыми  $C_1$  и  $C_2$ . Отсюда следует, что

$$\beta_1 = \frac{A}{\pi \hat{x}^2} \text{ или } \text{Im } N(\hat{x}) = \frac{A}{\pi \hat{x}^2}. \quad (6.36)$$

Таким образом, мнимая часть эквивалентной передаточной функции  $N(\hat{x})$  пропорциональна площади, ограничиваемой гистерезисной характеристикой. Для однозначных нелинейностей отсюда следует, что  $\text{Im } N(\hat{x}) = 0$ . Этим и доказана теорема.

Отметим, что, вообще говоря, площадь  $A$ , ограничиваемая характеристикой пассивного нелинейного элемента, есть мера энергии, которая рассеивается за один период. Таким образом, вводя пассивную нелинейность в систему, мы тем самым увеличиваем степень демпфирования.

Эквивалентные передаточные функции для некоторых часто встречающихся двузначных нелинейностей приведены в табл. 6.2 (строки и 20—27).

#### 6.4. ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЗНАЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

До сих пор понятие эквивалентной передаточной функции использовалось лишь для случая синусоидального входного сигнала. Сейчас мы рассмотрим еще одну трактовку эквивалентной линеаризации, которая применима для более широкого класса входных сигналов. Ясным по интуиции и аналитически приемлемым по своим выкладкам является определение эквивалентной передаточной функции на основе минимизации среднего квадрата ошибки воспроизведения заданного входного сигнала. При таком подходе входными сигналами могут быть различные периодические и даже случайные сигналы. При синусоидальном входном сигнале мы получим результаты, соответствующие методу гармонической линеаризации. Это следует непосредственно из условия ортогональности функций, по которым строится разложение Фурье. Наконец, указанный подход без труда переносится на случай, когда имеется несколько входных сигналов.

Рассмотрим однозначные нелинейности, описываемые следующим соотношением:

$$y = f(x). \quad (6.37)$$

Предполагая, что входной сигнал имеет вполне определенную форму  $x(t) = x_1(t)$  (в частности, это может быть периодическая функция  $x_n(t)$ ), отыщем эквивалентный элемент, который обеспечивает следующее равенство:

$$y_1(t) = N(x_1) x_1, \quad (6.38)$$

где матрица эквивалентных передаточных функций  $N$ , зависящая от некоторых параметров вектора  $x_1(t)$ , выбирается таким образом, чтобы минимизировать среднее значение квадрата разности между действительным входом  $f(x_1)$  и приближенным выходом (6.38). Это означает, что если

$$\varepsilon(t) \stackrel{\Delta}{=} f(x_1) - N(x_1) x_1, \quad (6.39)$$

то  $N(x_1)$  выбираем так, чтобы минимизировать средний квадрат некоторой нормы для ошибки

$$\overline{\|\varepsilon(t)\|^2} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|\varepsilon(t)\|^2 dt. \quad (6.40)$$

Такой подход иллюстрируется с помощью рис. 6.12. Отметим, что

$$\begin{aligned} \|\bar{\varepsilon}\|^2 &= \sum_{i=1}^n \overline{\left[ f_i(x_i) - \sum_{j=1}^n N_{ij}(x_1) x_{1j} \right]^2} = \\ &= \overline{(f - Nx_1)^T (f - Nx_1)} = \overline{f^T f} - \overline{(f^T Nx_1 + x_1^T N^T f)} + \\ &\quad + \overline{x_1^T N^T N x_1}, \end{aligned} \quad (6.41)$$

где черта сверху означает усреднение по определению (6.40).

Минимизацию величины  $\|\bar{\varepsilon}\|^2$  по параметрам  $N_{ij}$  можно выполнить, беря частные производные  $\partial \|\bar{\varepsilon}\|^2 / \partial N_{ij}$  и приравнявая их к нулю. В результате получим

$$-2\overline{f_i x_{1j}} + \left( 2 \sum_{k=1}^n \overline{N_{ik} x_{1k}} \right) x_{1j} = 0. \quad (6.42)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \overline{N_{ik} x_{1k} x_{1j}} &= \overline{f_i x_{1j}}; \\ (i, j &= 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Поскольку величины  $\overline{x_{1k} x_{1j}}$  и  $\overline{f_i x_{1j}}$  можно вычислить, то из уравнения (6.43) находим эквивалентные передаточные функции  $N_{ik}$ .

**Пример 6.6.** Рассмотрим случай одномерной нелинейности. Здесь  $N$  — скаляр, и уравнение (6.43) принимает вид

$$N \overline{x_1^2} = \overline{f x_1} \quad \text{или} \quad N = \frac{\overline{f x_1}}{\overline{x_1^2}}. \quad (6.44)$$

Если входной сигнал  $x_1 = \hat{x} \sin \omega t$ , то для вычисления  $N$  по соотношению (6.44) имеем

$$\overline{f x_1} = \frac{\hat{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\hat{x} \sin \omega t)] \sin \omega t d(\omega t)$$

и

$$\overline{x_1^2} = \frac{\hat{x}^2}{2}.$$

Таким образом, функция

$$N(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{x}} \int_0^{2\pi} [f(\hat{x} \sin \omega t)] \sin \omega t d(\omega t) \quad (6.45)$$

определяет эквивалентную передаточную функцию, рассмотренную в предыдущем параграфе.

**Пример 6.7.** Рассмотрим случай нелинейности с двумя входами  $x_{11}$  и  $x_{12}$  и одним выходом. В этом случае

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \overline{(N_{11} x_{11} + N_{12} x_{12} - f(x_{11}, x_{12}))^2} = \\ &= \overline{N_{11}^2 x_{11}^2} + \overline{N_{12}^2 x_{12}^2} + \overline{f^2} + 2\overline{N_{11} N_{12} x_{11} x_{12}} - 2\overline{N_{11} x_{11} f} - 2\overline{N_{12} x_{12} f}. \end{aligned}$$

Для отыскания минимума найдем  $\partial \overline{\varepsilon^2} / \partial N_{11}$  и  $\partial \overline{\varepsilon^2} / \partial N_{12}$  и приравняем их нулю. Это даст

$$N_{11} \overline{x_{11}^2} + \overline{N_{12} x_{11} x_{12}} = \overline{x_{11} f}, \quad (6.46a)$$

$$N_{11} \overline{x_{11} x_{12}} + \overline{N_{12} x_{12}^2} = \overline{x_{12} f}. \quad (6.46b)$$

Если  $x_{11} = \alpha \sin(\omega t + \Phi_1)$ , а  $x_{12} = \beta \sin(\omega t + \Phi_2)$ , то

$$\overline{x_{11}^2} = \frac{\alpha^2}{2}; \quad \overline{x_{12}^2} = \frac{\beta^2}{2}; \quad \overline{x_{11}x_{12}} = \frac{\alpha\beta}{2} \cos(\Phi_1 - \Phi_2); \quad (6.47)$$

к тому же

$$\overline{x_{11}f} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\alpha \sin(\omega t + \Phi_1), \beta \sin(\omega t + \Phi_2))] \sin(\omega t + \Phi_1) d(\omega t); \quad (6.48a)$$

$$\overline{x_{12}f} = \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\alpha \sin(\omega t + \Phi_1), \beta \sin(\omega t + \Phi_2))] \sin(\omega t + \Phi_2) d(\omega t). \quad (6.48b)$$

Подставляя выражения (6.47) и (6.48) в соотношения (6.46а, б), можно определить эквивалентные передаточные функции  $N_{11}$  и  $N_{12}$ .

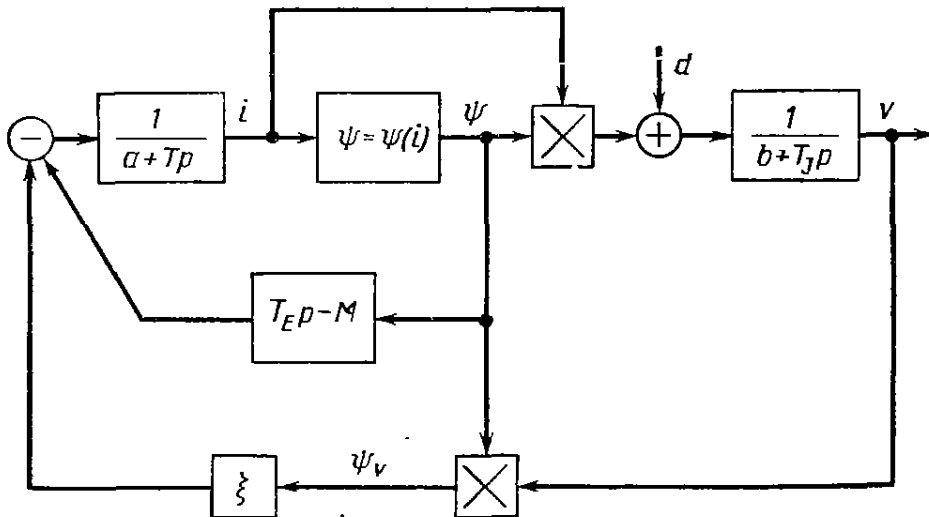


Рис. 6.13. Структурная схема системы: серийный электродвигатель с генератором (для примера 6.8)

Мы уже рассмотрели пример нелинейности с двумя входными сигналами, входящей в уравнение Ван-дер-Поля (см. § 6.1), которое описывает систему с обратной связью с нелинейным членом, задаваемым соотношением

$$f(x_1, x_2) = \mu x_1^2 x_2; \quad \dot{x}_1 = x_2.$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$f(x_{11}, x_{12}) = -\frac{\mu\alpha^2\beta}{2} \left[ \sin(\omega t + \Phi_2) + \frac{1}{2} \sin(\omega t + 2\Phi_1 - \Phi_2) - \frac{1}{2} \sin(3\omega t + 2\Phi_1 + \Phi_2) \right],$$

где без ограничения общности можно положить  $\Phi_1 = 0$ ; тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \overline{x_{11}f} &= -\frac{3}{8} \mu\alpha^3\beta \cos \Phi_2; \\ \overline{x_{12}f} &= -\frac{\mu\alpha^2\beta^2}{4} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \Phi_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Поскольку  $x_2 = \dot{x}_1$ , то  $\Phi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Учитывая это и подставляя соотношения (6.47) и (6.49)

в выражение (6.46), получим  $N_{11} = 0$  и  $N_{12} = -\frac{\mu\alpha^2}{4}$ , что согласуется с результатами § 6.1 при  $\alpha = x_1$ .

**Пример 6.8.** Рассмотрим периодические движения в системе с последовательным соединением электродвигателя и генератора, которая использовалась как в примере 4.5, так и в примере 5.8.

Уравнениям системы в нормальной форме (5.32) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 6.13, откуда видно, что в системе есть три нелинейности.

Предположим что высшие гармоники, генерируемые нелинейностями, будут в значительной степени ослабляться линейными элементами системы; так что можно считать сигналы  $i$  и  $v$  равными

$$\left. \begin{aligned} i &= i_0 + \hat{i} \sin \omega t; \\ v &= v_0 + \hat{v} \sin (\omega t + \Phi). \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

Для получения соотношения между входом и выходом нелинейностей  $\psi(i)$  и  $i\psi(i)$  определим коэффициенты передачи  $N_{11}(i_0, \hat{i})$ ;  $N_{21}(i_0, \hat{i})$ ;  $N_{20}(i_0, \hat{i})$  и  $N_{10}(i_0, \hat{i})$  такие, что

$$\psi(i) = \psi_0 + \hat{\psi} \sin \omega t + \dots = N_{10}(i_0, \hat{i}) i_0 + N_{11}(i_0, \hat{i}) \hat{i} \sin \omega t + \dots \quad (6.51)$$

и

$$\psi(i) i = N_{20}(i_0, \hat{i}) i_0 + N_{21}(i_0, \hat{i}) \hat{i} \sin \omega t + \dots \quad (6.52)$$

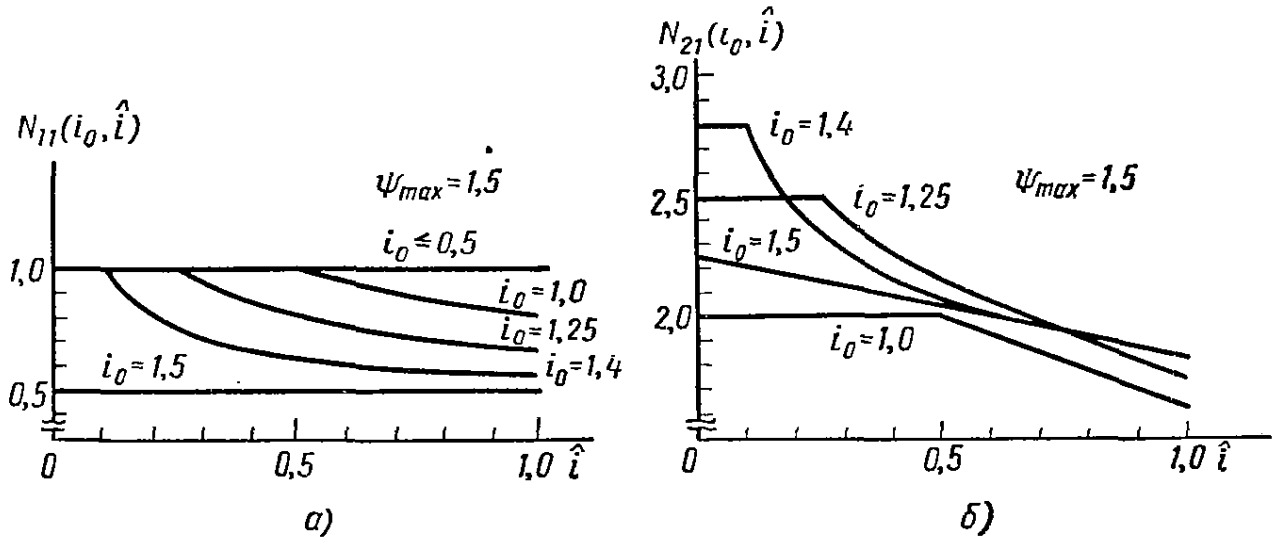


Рис. 6.14. Зависимости  $N_{11}(i_0, \hat{i})$  и  $N_{21}(i_0, \hat{i})$  от  $\hat{i}$  (для примера 6.8)

Третья нелинейность это произведение  $\psi v$ . На основании выражений (6.50) и (6.51) получим

$$\begin{aligned} \psi(i) v &= (\psi_0 + \hat{\psi} \sin \omega t) (v_0 + \hat{v} \sin (\omega t + \Phi)) + \dots = \\ &= \psi_0 v_0 + \frac{\hat{\psi} \hat{v}}{2} \cos \Phi + v_0 \hat{\psi} \sin \omega t + \psi_0 \hat{v} \sin (\omega t + \Phi) + \\ &+ \dots = N_{10} i_0 v_0 + \frac{1}{2} N_{11} \hat{i} \hat{v} \cos \Phi + v_0 N_{11} \hat{i} \sin \omega t + N_{10} i_0 \hat{v} \sin (\omega t + \Phi) + \dots \end{aligned} \quad (6.53)$$

Эквивалентные передаточные функции для переменной составляющей  $N_{11}(i_0, \hat{i})$  и  $N_{21}(i_0, \hat{i})$  можно найти из идеализированной кривой намагничивания (см. рис. 4.20). Это даст нам следующие зависимости:

$$N_{11}(i_0, \hat{i}) = 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi} - \frac{\alpha}{\pi}; \quad (6.54a)$$

$$N_{21}(i_0, \hat{i}) = i_0 (1 + N_{11}) + \frac{\hat{i}}{\pi} \left( \alpha \cos \alpha - \frac{5}{4} \sin \alpha + \frac{1}{12} \sin 3\alpha \right), \quad (6.54b)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{\psi_{\max} - |i_0|}{\hat{i}}, & \psi_{\max} - |i_0| \leq \hat{i}; \\ 0, & \psi_{\max} - |i_0| > \hat{i}. \end{cases} \quad (6.55)$$

Кривые  $N_{11}$  и  $N_{21}$  в функции  $\hat{i}$  для различных  $i_0$  показаны на рис. 6.14, а, б:

Удобно изучать постоянную и переменную составляющие раздельно\*, чтобы выяснить их влияние на установившееся движение в системе. С этой целью структурную схему рис. 6.13 нужно преобразовать в соответствии с выражениями (6.51) и (6.53) к виду, показанному на рис. 6.15, а и 6.15, б.

Для  $\hat{i} = 0$  постоянная составляющая определяется из соотношения (5.35). Рассмотрим лишь случай  $|i_{dc}| = |i_0| < \Psi_{\max}$ , тогда получим

$$\left. \begin{aligned} i_{dc} = \psi_{dc} = i_0 = \pm V\sqrt{\gamma}; \quad N_{10}(i_0, 0) = 1; \\ N_{20}(i_0, 0) = i_0; \quad v_{dc} = v_0 = \frac{1}{\xi}(M - a). \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

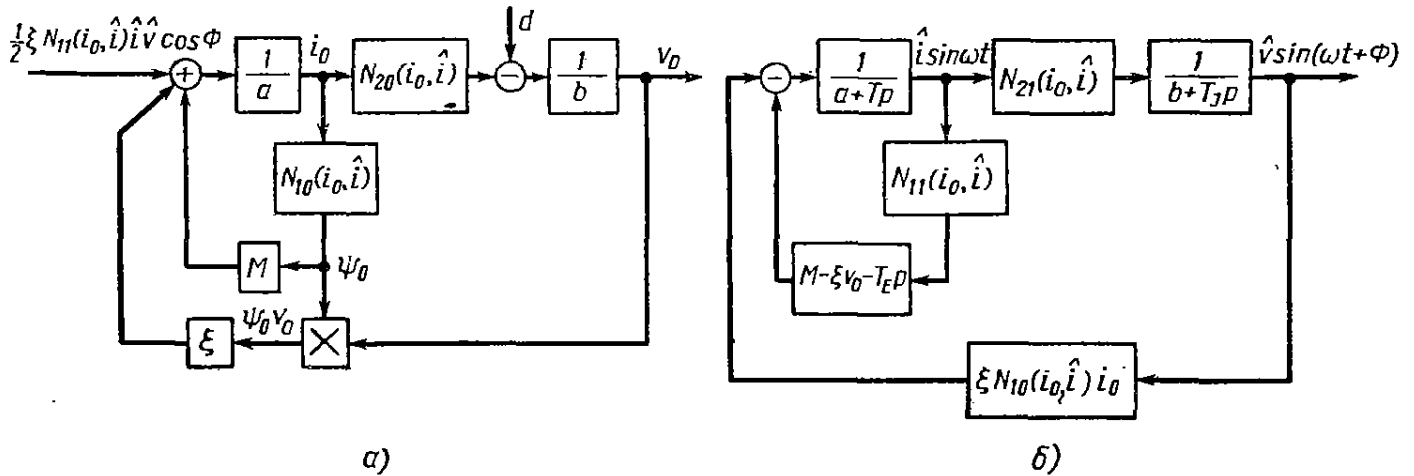


Рис. 6.15. Структурные схемы систем управления примера 6.8:  
а — по постоянной составляющей; б — по переменной составляющей

В присутствии автоколебаний значение постоянной составляющей будет медленно изменяться (рис. 6.15, а), чтобы вновь обеспечить равновесие в системе. Такое смещение постоянной составляющей вызовет изменение эквивалентной передаточной функции по переменной составляющей. В рассматриваемом случае для обычно встречающихся численных значений влияние постоянного смещения на амплитуду и частоту автоколебаний несущественно, и им можно пренебречь. В следующем разделе мы рассмотрим случай, когда необходимо учитывать одновременно переменную и постоянную составляющие.

Исходя из сказанного, можно предположить, что соотношение (6.56) будет справедливо и при  $\hat{i} \neq 0$ . При этом, учитывая лишь первые гармоники в уравнениях (6.51)—(6.53) и используя соотношения (6.56), получим

$$\begin{bmatrix} a(1 - N_{11}) + (T + N_{11}T_E)p & \xi i_0 \\ -N_{21} & (b - T_J)p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \sin \omega t \\ \hat{v} \sin(\omega t + \Phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.57)^*$$

Уравнение (6.57) получено в предположении о существовании гармонических колебаний. Для того чтобы убедиться в справедливости этого предположения, необходимо показать, что характеристическое уравнение для (6.57) имеет чисто мнимые корни. Запишем характеристическое уравнение в следующем виде:

$$T_J(T + N_{11}T_E)\lambda^2 + [b(T + N_{11}T_E) + a(1 - N_{11})T_J]\lambda + ab(1 - N_{11}) + \xi i_0 N_{21} = 0. \quad (6.58)$$

\* Здесь принято обозначать  $i_{dc}$  — постоянная составляющая тока (Прим. ред.).

\*\* Заметим, что при  $\hat{i} \rightarrow 0$  и  $\hat{v} \rightarrow 0$  уравнение (6.57) совпадает с (5.37), если заменить  $\hat{i} \sin \omega t$  на  $\delta i$  и  $\hat{v} \sin(\omega t + \Phi)$  на  $\delta v$ . Предлагаем читателю самостоятельно пояснить этот результат.



Корни уравнения (6.58) равны

$$\lambda = \frac{b(T + N_{11}T_E) + a(1 - N_{11})T_J}{2T_J(T + N_{11}T_E)} \left\{ -1 \pm \right. \\ \left. \pm \left[ 1 - \frac{4T_J(T + N_{11}T_E)[ab(1 - N_{11}) + \xi i_0 N_{21}]}{[b(T + N_{11}T_E) + a(1 - N_{11})T_J]^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (6.59)$$

Из условий задачи следует, что  $\xi \geq 1$ ;  $a \geq 0$ ;  $b \geq 0$ ;  $T_J \geq 0$ ;  $T \geq 0$  и  $T_E \geq 0$ . Более того, из выражений (6.54) следует, что  $0 \leq N_{11} \leq 1$  и  $N_{21}i_0 > 0$ . Поэтому всегда справедливы следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} b(T + N_{11}T_E) + a(1 - N_{11})T_J &\geq 0; \\ ab(1 - N_{11}) + \xi i_0 N_{21} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

Из соотношений (6.59) и (6.60) видно, что корни характеристического уравнения могут иметь либо нулевые, либо отрицательные вещественные части. Периодическое же решение возможно лишь в том случае, когда действительные части нулевые, т. е. при выполнении условия:

$$b(T + N_{11}T_E) + a(1 - N_{11})T_J = 0. \quad (6.61)$$

Это условие будет выполняться, если величиной  $b$  можно пренебречь, а  $N_{11} = 1$ . Примем  $b = 0$ , тогда из выражений (6.54) следует, что существует область малых значений  $\hat{i}$ , для которых  $N_{11} = 1$ . В этой области траектории системы имеют вид замкнутых кривых с центром в точке равновесия ( $i_e = i_0$ ); ( $v_e = v_0$ ). Вне этой области  $\hat{i} > \psi_s - i_0$  и  $N_{11} < 1$ . Следовательно,  $\text{Re } \lambda < 0$  и траектории имеют вид закручивающихся спиралей. Ясно, что в этом случае существует сепаратриса, разделяющая эти два движения. Все это поясняется фазовым портретом на рис. 4.22.

Если  $b \neq 0$ , то из выражения (6.59) следует, что  $\text{Re } \lambda < 0$ , и, следовательно, движение устойчиво. Однако метод гармонической линеаризации справедлив лишь для чисто мнимых корней, поэтому мы не будем предпринимать даже попытки анализировать результаты, когда  $\text{Re } \lambda < 0$ . Характерный для рассматриваемого случая фазовый портрет показан на рис. 4.21. Более подробный анализ поведения системы проведен в работе [88].

## 6.5. ИССЛЕДОВАНИЕ СКАЧКООБРАЗНОГО РЕЗОНАНСА МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Метод гармонической линеаризации позволяет изучать поведение замкнутой нелинейной системы при определенном виде входного сигнала. Анализируя такие системы, необходимо помнить о том, что характер переходных процессов в них может быть чрезвычайно разнообразным. Если предположить, что управляющее воздействие синусоидально, то сигнал на выходе такой системы может:

- 1) иметь частоту, не зависящую от частоты входного воздействия автоколебания;
- 2) иметь период, кратный периоду входного сигнала, — субгармонические колебания;
- 3) иметь частоту, кратную частоте входного сигнала, — гармонические колебания;
- 4) не иметь определенной частоты — почти периодические колебания\*;
- 5) иметь ту же частоту, что и входной сигнал, — вынужденные колебания.

Для большинства систем управления приемлем лишь случай 5. Тогда случаи 1 — 4 характеризуют нежелательное поведение системы, но ин-

\* Почти периодические колебания возникают, например, в системе, которая находится на границе автоколебаний, когда частота входного сигнала и частота автоколебаний не пропорциональны; такие колебания не имеют определенной частоты, хотя на первый взгляд кажется, что эти колебания периодические (см., например, [72]).

женер всегда должен помнить о таких случаях, чтобы избежать их появления на практике. Вообще говоря, случаи 1) — 4) имеют место, лишь когда соответствующая свободная система находится на границе автоколебаний. Случай 2, например, характерен лишь для систем, период автоколебаний которых кратен периоду входного сигнала, тогда как случай 3) связан с тем, что частота автоколебаний кратна частоте входного сигнала. Поведение первого типа присуще только осциллятору.

Замкнутая система, включающая линейный объект и простую нелинейность, может находиться на границе устойчивости по двум причинам. Объект третьего порядка и выше может проявлять тенденцию к колебаниям из-за наличия в контуре нелинейности или из-за того, что объект имеет на некоторой частоте резонансный пик. Если инженер предостерег себя от этих двух возможностей, то, как правило, частота выходного сигнала соответствует частоте входного. И все-таки даже в этом случае возможен еще один тип аномального поведения нелинейной системы. Это явление скачкообразного резонанса.

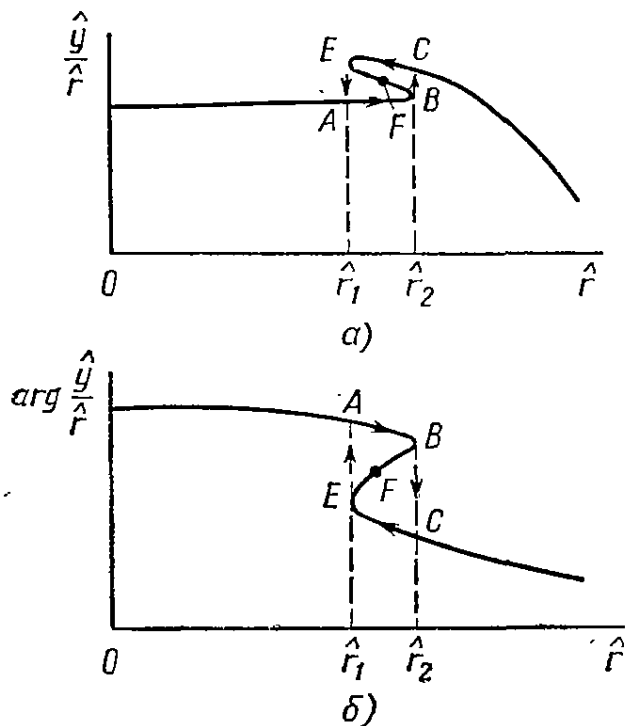


Рис. 6.16. Явление скачкообразного резонанса в нелинейной системе

Если  $\hat{y}$  — амплитуда первой гармоники выходного сигнала, а  $\hat{r}$  и  $\omega$  — соответственно амплитуда и частота входного синусоидального воздействия, то явление скачкообразного резонанса заключается в следующем (рис. 6.16).

При фиксированном  $\omega$ , когда  $\hat{r}$  медленно возрастает, отношение  $\frac{\hat{y}}{\hat{r}}$  плавно изменяется вплоть до  $\hat{r}_2$ , затем наблюдается скачок в значении  $\frac{\hat{y}}{\hat{r}}$ . Точно такое же явление обычно наблюдается и на фазовой характеристике, как это показано на рис. 6.16.

Когда амплитуда  $\hat{r}$  уменьшается от значений, больших  $\hat{r}_2$ , то скачок происходит уже при амплитуде  $\hat{r}_1$ . Обычно  $\hat{r}_1$  меньше, чем  $\hat{r}_2$ . Явление скачкообразного резонанса можно наблюдать также и при изменении лишь частоты входного сигнала. В этом случае соответствующие характеристики амплитуды и фазы как функции частоты подобны изображенным на рис. 6.16, а, б.

Явление скачкообразного резонанса во многих случаях можно проанализировать методом гармонической линеаризации при условии, что приняты меры для предотвращения явлений 1) — 4), о которых метод гармонической линеаризации не несет никакой полезной информации.

В этом параграфе мы рассмотрим лишь случай системы, содержащей нелинейность типа насыщения. Структурная схема такой системы показана на рис. 6.17, где входное воздействие  $r(t) = \hat{r} \sin \omega t$  и нелинейность  $\mathfrak{N}$

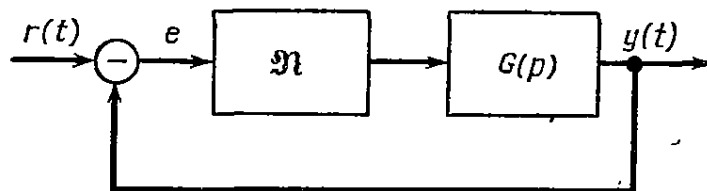


Рис. 6.17. Простейшая одноконтурная структурная схема нелинейной системы управления для исследования явления скачкообразного резонанса

имеет единственный уровень ограничения (§ 6.2). Сделаем следующие предположения:

1. В системе не возникают субгармоники.
  2. Частотная характеристика  $G(j\omega)$  соответствует устойчивому объекту и хорошо фильтрует высокие частоты.
  3. При отсутствии входного сигнала замкнутая система устойчива.
- При таких предпосылках метод гармонической линейаризации должен дать достаточно точную оценку вынужденных колебаний.

Пусть входной сигнал  $r(t) = \hat{r} \sin(\omega t + \theta)$ , а первые гармоники установившихся значений  $e(t)$  и  $y(t)$  соответственно равны  $\hat{e} \sin(\omega t + \delta)$  и

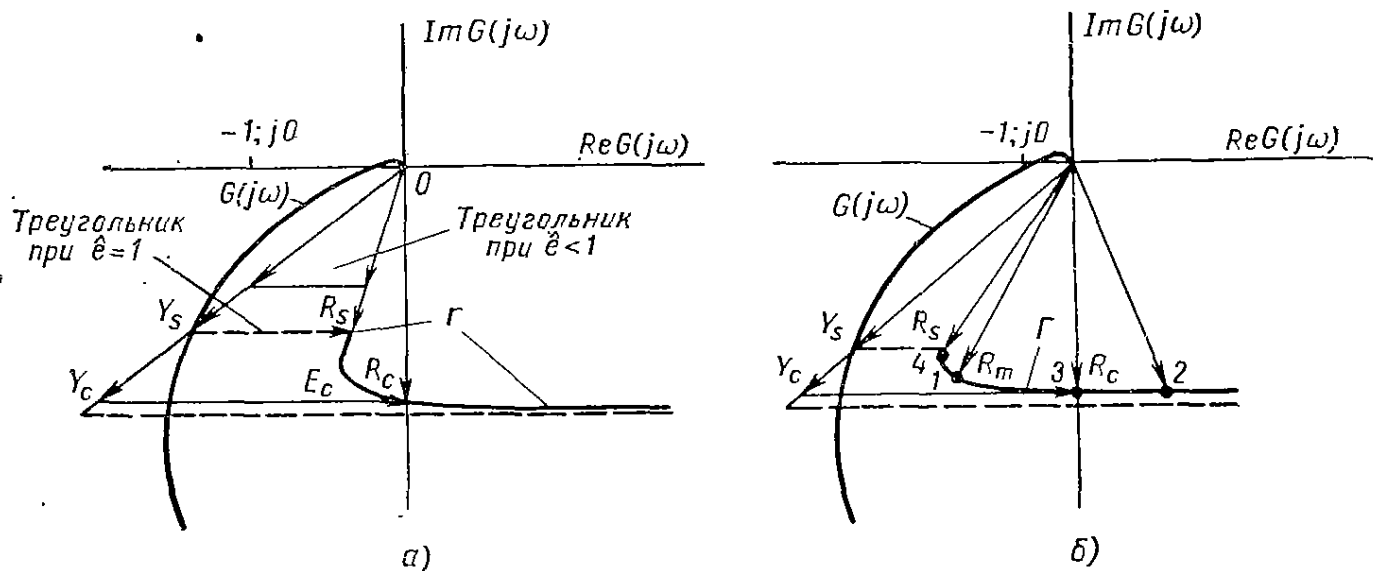


Рис. 6.18. Построение Лозьера на плоскости  $G(j\omega)$  для выявления скачкообразного резонанса в системе управления с нелинейностью типа ограничения:

*a* — при  $\hat{e} = 1$  (система управления работает в линейной части нелинейной характеристики); *б* —  $\hat{e} > 1$  (система управления работает в области насыщения нелинейной характеристики)

$\hat{y} \sin(\omega t + \Phi)$ . При исследовании явления скачкообразного резонанса в такой системе целесообразно использовать подход, предложенный Лозьером [128].

Если предположения метода гармонической линейаризации выполняются, то

$$R(\omega) = E(\omega) + Y(\omega), \quad (6.62)$$

где  $R(\omega)$ ,  $E(\omega)$  и  $Y(\omega)$  — векторы, соответствующие гармоническим сигналам  $r(t)$ ,  $e(t)$  и  $y(t)$ . Примем за вектор отсчета  $E(\omega)$ , тогда  $\delta = 0$  и указанный вектор параллелен действительной оси. Теперь не представляет труда определить условия скачкообразного резонанса, воспользовавшись геометрическим построением на плоскости  $G(j\omega)$ . Если  $\delta = 0$ , то фаза вектора  $Y$  равна фазе  $G(j\omega)$ ; используя принятые обозначения, получим

$$\arg Y = \arg [G(j\omega)]. \quad (6.63)$$

Проведем геометрические построения, когда изменяется амплитуда  $\hat{e}$ . Если  $\hat{e} = 1$ , то это соответствует достижению уровня насыщения. При этом векторы  $Y$  и  $G(j\omega)$  совпадают. Условие (6.62) определяет треугольник векторов, показанный на рис. 6.18, *a*. Такое построение проводят прямо на плоскости  $G(j\omega)$ , используя годограф частотной характеристики  $G(j\omega)$ .

При  $\hat{e} < 1$  система работает в линейной зоне; в этом случае треугольник построения подобен треугольнику векторов для случая  $\hat{e} = 1$  (рис. 6.18, *a*).

Когда  $\hat{e} > 1$ , то система периодически выходит на ограничение. Используя эквивалентную передаточную функцию нелинейного звена, можно записать

$$R(\omega) = E(\omega) + N(\hat{e}) \hat{e} G(j\omega), \quad (6.64)$$

где, согласно § 6.2, для нелинейности с единичным уровнем ограничения имеем

$$N(\hat{e}) = \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \frac{1}{\hat{e}} - \frac{1}{\hat{e}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\hat{e}}\right)^2} \right]. \quad (6.65)$$

Равенство (6.64), в сущности, определяет условие баланса по первой гармонике. Из него видно, что анализ удобнее проводить, приняв за аргумент амплитуду  $\hat{e}$ . Исходя из этого обозначим  $R$  через  $R(\omega, \hat{e})$ .

Используя соотношения (6.64) и (6.65), можно построить годограф  $R(\omega, \hat{e})$  для заданного  $\omega$  и для  $1 \leq \hat{e} < \infty$ . Такой годограф обозначен на рис. 6.18, *a* буквой  $\Gamma$ . Поскольку  $N(\hat{e}) \hat{e}$  — монотонно возрастающая функция, ограниченная сверху величиной  $\frac{4}{\pi}$ , то можно предположить, что годограф имеет вид, изображенный на рисунке.

Заметим, что для системы, структурная схема которой показана на рис. 6.17, можно построить годограф  $\Gamma$  для каждой фиксированной частоты  $\omega$ . Такое геометрическое построение позволяет выявить явление скачкообразного резонанса на определенной частоте  $\omega$ .

Для частного случая, изображенного на рис. 6.18, *a*, обозначим вектор  $R(\omega, 1)$  через  $R_s$ , а точку, где годограф  $\Gamma$  пересекает мнимую ось, — через  $R_c$ . Прежде всего проанализируем, что происходит при увеличении амплитуды  $r$ .

Если  $|R_s|$  станет больше  $|R_c|$ , то существует значение  $|R|$ , обозначенное, как  $|R_m|$ , которое лежит на отрезке годографа  $\Gamma$  между  $R_s$  и  $R_c$  и обладает тем свойством, что оно является максимальным из всех  $|R|$  на этом отрезке. Если  $|R|$  превысит хотя бы незначительно  $|R_m|$ , то условие (6.64) удовлетворяется только в том случае, когда вектор  $R$  изменит скачком свое направление, перейдя из точки 1 в точку 2 (рис. 6.18, *b*). Однако такое изменение вектора  $R$  приведет к скачку модуля векторов  $Y$  и  $E$ . Этот результат соответствует скачку  $ABC$  (см. рис. 6.16). Таким образом, рабочая точка системы не может находиться на сегменте  $\Gamma$  между  $R_m$  и  $R_c$ .

Посмотрим теперь, что происходит, если  $r$  уменьшается, имея начальное значение, большее чем  $|R_m|$ . Из рис. 6.18, *b* видно, что всякая точка годографа  $\Gamma$ , лежащая правее  $R_c$ , может быть рабочей точкой системы. Но поскольку  $R_c$  определяет теперь минимум, то как только  $R$  уменьшается до значения  $R_c$ , происходит мгновенный перескок из точки 3 в точку 4, при котором вектор  $R$  меняет лишь направление. При этом  $Y$  и  $E$  должны скачком изменить амплитуду. Это соответствует скачку  $CEA$  (см. рис. 6.16).

Отметим, что точки отрезка  $BFE$  как амплитудной, так и фазовой характеристик на рис. 6.16 представляют возможные точки работы системы, но в действительности система в них не работает. Это неустойчивые точки.

Исходя из геометрической интерпретации явления скачкообразного резонанса можно сделать следующие выводы (упражнение 6.10)\*.

\* При условии, что метод гармонической линеаризации применим. Это предположение сохраняет силу на протяжении всей главы.

1. Явление скачкообразного изменения  $\hat{y}$  в функции от  $\hat{r}$  при фиксированном  $\omega$  происходит лишь в том случае, если  $\text{Re } R_s < 0$  и существует вектор  $R_m$  с максимальной амплитудой.

2. Если  $\text{Re } G(j\omega) > -1$  для всех  $\omega$ , то явления скачкообразного резонанса не наблюдается.

3. Достаточное условие скачкообразного резонанса на частоте  $\omega$  связано с попаданием годографа  $G(j\omega_1)$  в область  $B$  (рис. 6.19), которая ограничена справа двумя прямыми, обозначенными через  $\Lambda$ ; когда это условие выполняется, скачкообразный резонанс может быть обусловлен любым возмущением в системе, даже если до этого система работала в линейной области.

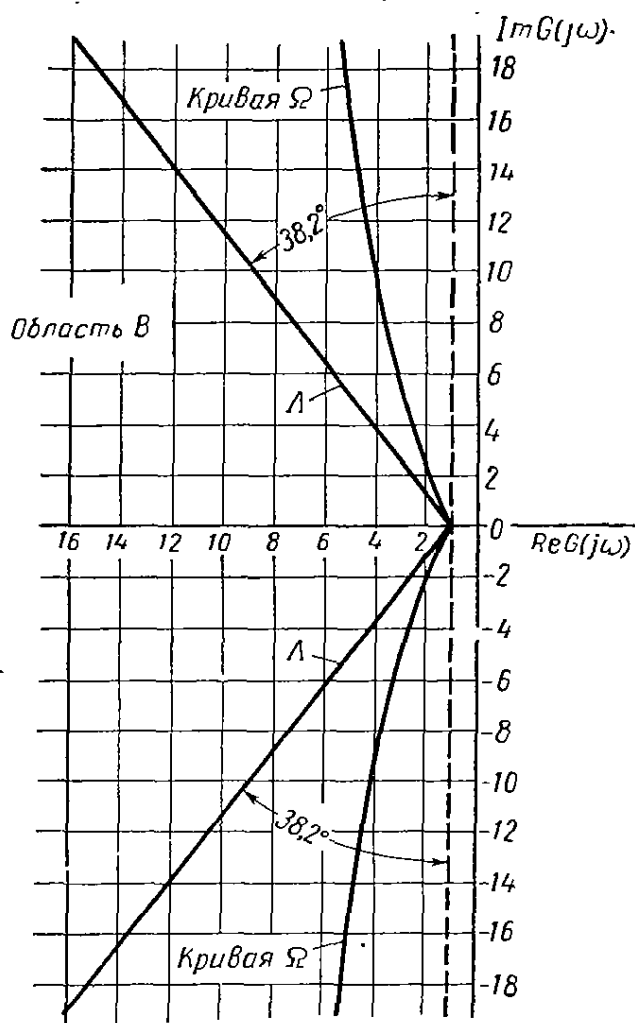


Рис. 6.19. Кривые, определяющие область существования скачкообразного резонанса

ничена справа двумя прямыми, обозначенными через  $\Lambda$ ; когда это условие выполняется, скачкообразный резонанс может быть обусловлен любым возмущением в системе, даже если до этого система работала в линейной области.

Поскольку условия 1) и 2) являются необходимыми и достаточными для существования скачкообразного резонанса, то они определяют и единственным образом границу области, где это явление имеет место. Последняя может быть построена графически или определена численно. На рис. 6.19 граница обозначена через  $\Omega$ . Как правило, скачкообразный резонанс — явление нежелательное, и поэтому годограф  $\Omega$  определяет ограничение, которое налагается на частотную характеристику  $G(j\omega)$  для предотвращения такого явления. Ограничение заключается в том, что годограф  $G(j\omega)$  для всех  $\omega$  должен располагаться правее кривой  $\Omega$ . В этом случае существует единственная эквивалентная передаточная функция замкнутой системы (рис. 6.17) при заданном синусоидальном входном сигнале  $r(t)$ . Она зависит как от амплитуды, так и от частоты (см. упражнение 6.11).

Оказывается возможным перенести предлагаемый метод анализа и на другие нелинейности и построить годограф  $\Omega$  для этих систем\*. Дальнейшее развитие указанной методики дано в работах Хатанака [71] и Фукума и Мацубара [55].

## 6.6. ЗАПАС ПО АМПЛИТУДЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ УСТРОЙСТВАМИ

В этом параграфе рассмотрим пример, иллюстрирующий изложение материала предыдущего параграфа и обобщающего большой класс систем, часто встречающихся на практике. Изучим сначала систему с обратной связью, в состав которой входит рулевой привод. Структурная схема такой системы показана на рис. 6.20.

\* В гл. 11 мы покажем, что кривая  $\Omega$ , полученная на основе метода гармонической линеаризации, всегда определяет большую область возможных расположений годографа  $G(j\omega)$ , нежели при анализе точными методами.

Нелинейный привод является одной из основных причин, ухудшающих свойства системы управления. Некоторые его, на первый взгляд существенные, преимущества оказываются обманчивыми. Так, например, диапазон входных амплитуд, при которых привод в целом ведет себя как усилительное звено, очень незначителен. Поэтому, когда проектировщик оценивает свойства привода только с точки зрения усиления, то может впоследствии обнаружить, что хотя система и устойчива в малом, но в силу любой случайности (например, при появлении входного сигнала) она становится неустойчивой или в ней возникают нежелательные колебания. Даже если этого не произойдет, качество действительной системы будет значительно отличаться от предполагаемого. Ниже мы покажем, что при этом происходит

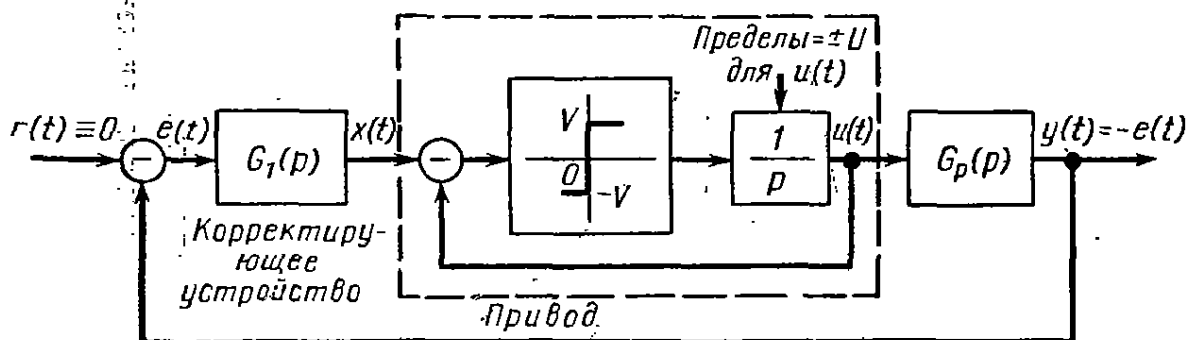


Рис. 6.20. Структурная схема системы управления с рулевым приводом

и какие меры может предпринять проектировщик, чтобы исключить возможность возникновения колебаний.

Вообще говоря, в правильно спроектированной системе как положение, так и скорость рулевого привода должны находиться как можно дольше на уровне ограничения для того, чтобы максимально использовать возможности привода. Когда сигнал управления значителен, привод, в основном, характеризуется уровнями ограничения по положению и скорости; например, в гидравлическом приводе такие ограничения соответствуют максимальному ходу плунжера и максимальному расходу рабочей жидкости.

Для значительных по уровню сигналов хорошее приближение к действительному поведению привода может дать его модель, показанная на структурной схеме рис. 6.20\*. Для отдельно изображенной на рис. 6.21, а модели привода эквивалентная передаточная функция показана на рис. 6.21, б\*\* (см. также упражнение 6.12).

Пример 6.9. Проанализируем систему, структурная схема которой показана на рис. 6.20, если привод имеет характеристики, изображенные на рис. 6.21, б, а передаточная функция объекта задана соотношением

$$G_p(p) = \frac{3 \left[ 1 + \left( \frac{p}{0,2} \right) \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{p}{45} \right) + \left( \frac{p^2}{9} \right) \right] \left[ \left( 1 + \left( \frac{p}{60} \right) \right) \right] \left[ 1 + \left( \frac{p}{300} \right) \right]} \quad (6.66)$$

Сначала рассмотрим, что произойдет, если спроектировать систему исходя из того, что она работает при малых сигналах управления. Для таких уровней сигнала привод можно описать усилительным звеном с единичным коэффициентом усиления. Тогда можно найти корректирующую цепь, которая обеспечит удовлетворительное качество процессов в замкнутой системе.

\* Отметим, что на рис. 6.20 показано как ограничение по положению привода, равное  $\pm U$ , так и ограничение по скорости  $\pm V$ .

\*\* Кривая, показанная штриховой линией на рис. 6.21, б, представляет частотные характеристики привода с обратной связью, справедливые лишь при малых входных сигналах. При значительной амплитуде эквивалентные частотные характеристики будут в большей степени соответствовать рассматриваемой модели.

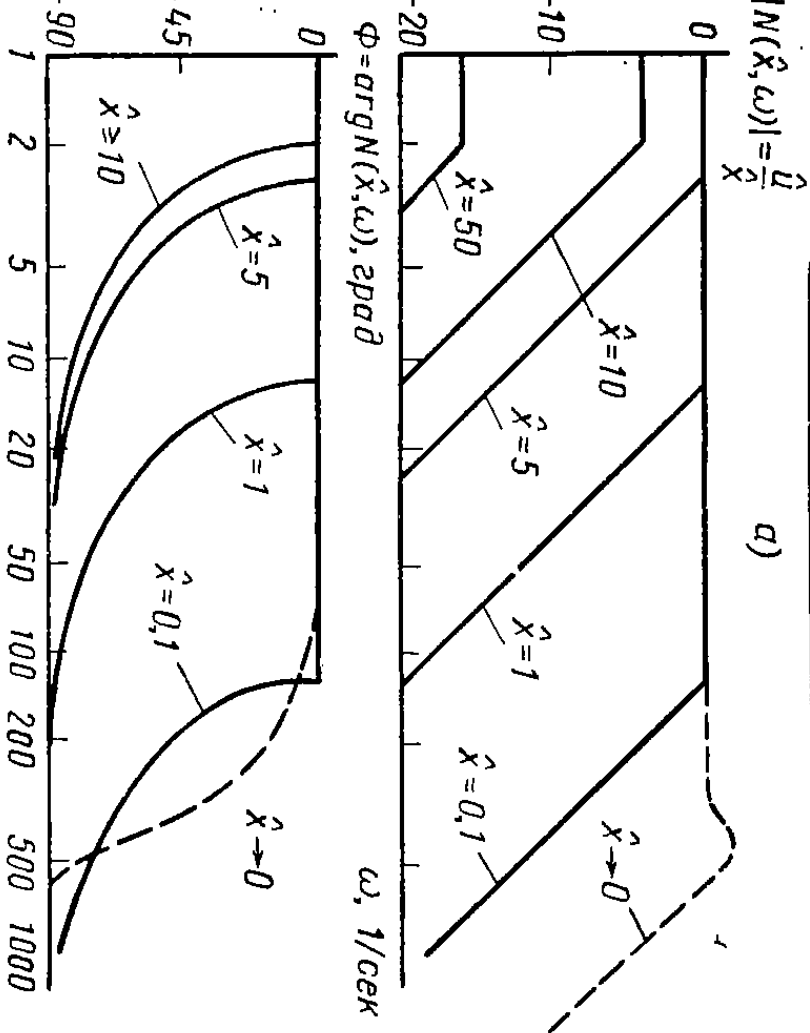
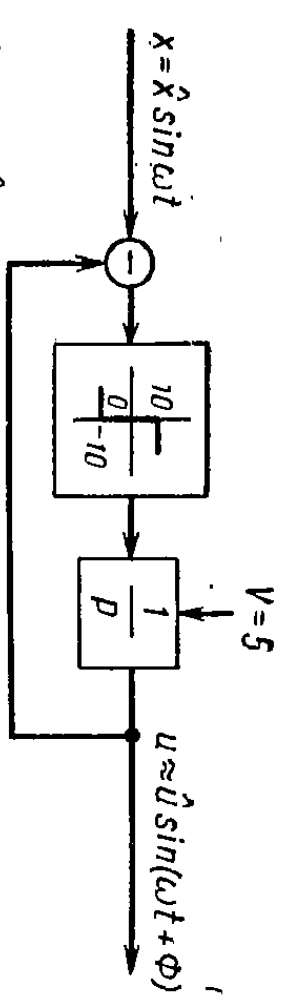


Рис. 6.21. Нелинейный привод:

а — структурная схема; б — амплитудная и фазовая характеристика нелинейного привода, полученные по его эквивалентной передаточной функции

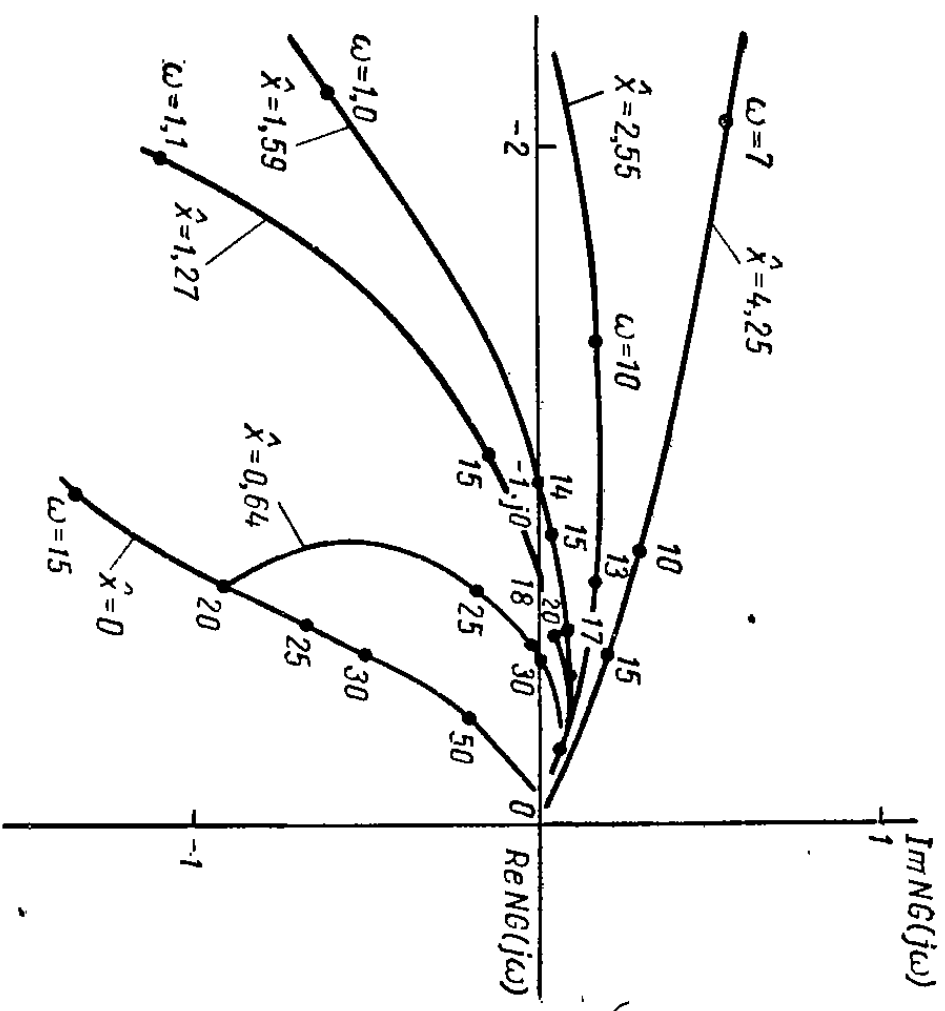


Рис. 6.22. Амплитудно-фазовые кривые (годографы)  $N(x, \omega) G(j\omega)$  при ряде значений  $x$  (для примера 6.9)

Возможный вид корректирующего звена можно определить так:

$$G_1(p) = 10,53 \left[ \frac{1 + \left(\frac{p}{6}\right)}{1 + \left(\frac{p}{0,1}\right)} \right]. \quad (6.67)$$

В этом случае передаточная функция линейной части разомкнутого контура всей системы задается соотношением

$$G(s) \stackrel{\Delta}{=} G_p(s) G_1(s).$$

С учетом эквивалентной передаточной функции нелинейного привода годограф частотной характеристики всего разомкнутого контура  $N(\hat{x}, \omega) G(j\omega)$  показан на рис. 6.22. Из рисунка видно, что для малых амплитуд  $\hat{x}$  система удовлетворительна. Однако при увеличении амплитуды  $\hat{x}$  наблюдается резкое ухудшение качества системы. Действительно, при  $\hat{x} = 1,6$  и  $\omega_0 = 14$  1/сек в системе возникают неустойчивые автоколебания. Таким образом, метод гармонической линеаризации позволяет заключить, что система, устойчивая при малых сигналах, становится неустойчивой, когда амплитуда сигнала возрастает.

Из возможных способов устранения неустойчивости указанного типа рассмотрим следующие:

1. Необходимо уменьшить коэффициент усиления разомкнутого контура настолько, чтобы частотный годограф для всех  $\hat{x}$  пересекал отрицательную часть действительной оси справа от точки  $-1; j0$  (см. рис. 6.22).
2. Спроектировать линейный фильтр, который позволяет достичь тех же результатов.
3. Ввести в контур нелинейный элемент с характеристикой типа «ограничение» для того, чтобы амплитуда  $\hat{x}$  не превышала критической.

Рассмотрение годографа (см. рис. 6.22) показывает, что способы 1) и 2) позволяют стабилизировать систему управления, но в ущерб качеству и точности переходных процессов при малых сигналах. Способ же 3) или комбинация 1) и 3) могут дать простой и эффективный метод стабилизации при сохранении удовлетворительного качества системы и при малых сигналах. Лучше всего это пояснить исходя из понятия запаса по амплитуде для нелинейной системы. Напомним, что для линейных систем с обратной связью эффективность того или иного способа обеспечения устойчивости определяется запасом устойчивости по амплитуде, который определяет диапазон возможного увеличения усиления разомкнутого контура, приводящего к неустойчивости замкнутой системы. Это позволяет определить запас устойчивости по амплитуде и в нелинейной системе как такую величину усиления, которая приводит к возникновению автоколебаний в замкнутой системе при заданной амплитуде в некоторой точке системы\*.

Для рассматриваемой системы запас по амплитуде  $K_c$  может быть получен из годографа частотной характеристики (см. рис. 6.22). Для заданной амплитуды  $\hat{x}$  запас  $K_c$  есть величина

$\frac{1}{|N_A(\hat{x}, \omega_0) G_1(j\omega_0) G_p(j\omega_0)|}$ , определяемая на той частоте, где фазовая характеристика разомкнутого контура пересекает уровень  $-180^\circ$ , т. е.

$$K_c(\hat{x}) = \frac{1}{|N_A(\hat{x}, \omega_0) G_1(j\omega_0) G_p(j\omega_0)|}, \quad (6.68a)$$

где  $\omega_0$  определяется условием

$$\arg [N_A(\hat{x}, \omega_0) G_1(j\omega_0) G_p(j\omega_0)] = -180^\circ. \quad (6.68b)$$

Результаты расчета представлены на рис. 6.23, где показана зависимость запаса по амплитуде в нелинейной системе  $K_c = K_c(\hat{x})$  как функция амплитуды  $\hat{x}$ . Здесь также указаны значения частоты  $\omega_0$ , где фазовый сдвиг частотной характеристики разомкнутого контура равен  $-180^\circ$ . Отметим, что для  $\hat{x} \geq 1,6$  запас по амплитуде в децибелах становится отрицательной величиной, что и определяет неустойчивость для больших сигналов.

\* Определение запаса устойчивости по амплитуде в нелинейной системе безусловно основано на том же предположении, которое лежит в основе интерпретации понятия устойчивости в методе гармонической линеаризации.



Используя рис. 6.23, можно получить кривые, определяющие запас устойчивости по амплитуде в нелинейной системе в зависимости от амплитуды других сигналов. Например, интересно построить такую зависимость от амплитуды  $\hat{y}$  выходного сигнала. Соотношение между  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$  задается выражением

$$\hat{y} = |N_A(\hat{x}, \omega_0) G_p(j\omega_0)| = \frac{\hat{x}}{K_c(\hat{x}) |G_1(j\omega_0)|}, \quad (6.69)$$

где  $G_1(p)$  определяется по (6.67). Кривая  $K_c = K_c(\hat{y})$ , показанная на рис. 6.24, может быть таким образом получена из кривой  $K_c = K_c(\hat{x})$  (см. рис. 6.23).

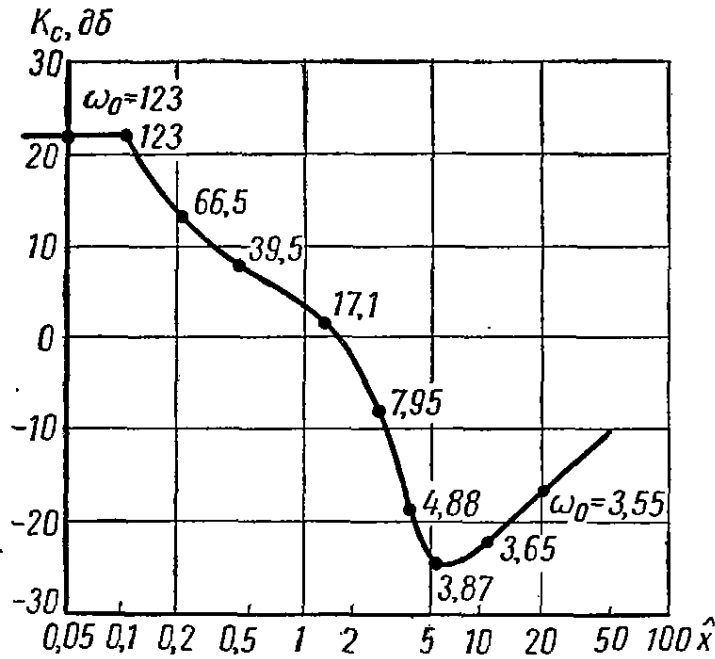


Рис. 6.23. Запасы устойчивости нелинейной системы  $K_c(\hat{x})$  по амплитуде для примера 6.9

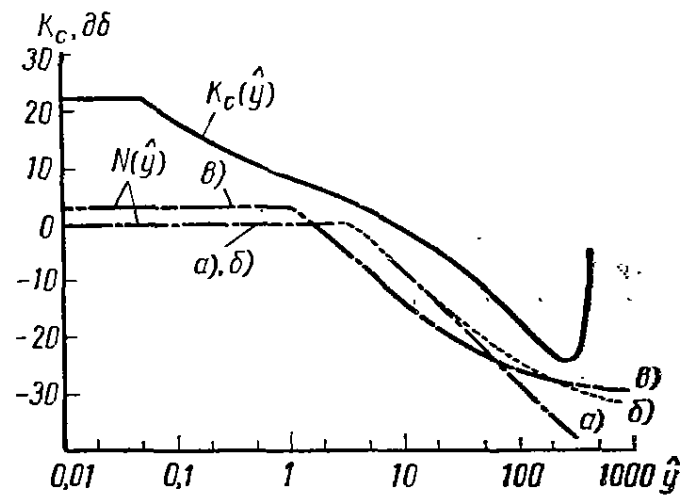


Рис. 6.24. Запасы устойчивости  $K_c$  и эквивалентный коэффициент передачи для нелинейного корректирующего устройства в зависимости от амплитуды выходного сигнала  $\hat{y}$

Теперь можно стабилизировать систему, преобразуя сигнал ошибки нелинейным звеном. Структурная схема системы с нелинейной компенсацией показана на рис. 6.25. Влияние нелинейной коррекции  $e = f(e_1)$  можно проанализировать, изображая эквивалентный коэффициент передачи  $N(e_1) = N(\hat{y})$  вместе с кривой  $K_c(\hat{y})$  для системы без нелинейной коррекции

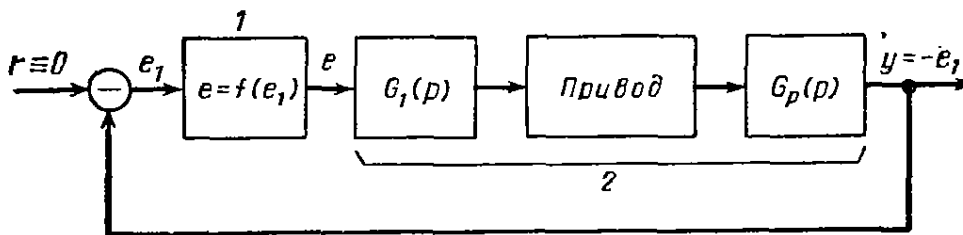


Рис. 6.25. Структурная схема системы управления с нелинейным корректирующим устройством:

1 — нелинейное корректирующее устройство; 2 — прямая цепь структурной схемы (рис. 6.20)

на рис. 6.26. Поскольку кривая  $K_c(\hat{y})$  указывает, на сколько можно увеличить коэффициент усиления в системе без нелинейности  $f(e_1)$ , чтобы не возникли колебания, то нелинейный элемент должен вызвать уменьшение запаса по амплитуде с ростом его эквивалентного усиления.

Таким образом, как показано на рис. 6.26, запас устойчивости по амплитуде с нелинейностью  $f(e_1)$  задается выражением

$$K'_c(\hat{y}) = \frac{K_c(\hat{y})}{N(\hat{y})}$$

или

$$K'_c(\hat{y})|_{\partial\delta} = K_c(\hat{y})|_{\partial\delta} - N(\hat{y})|_{\partial\delta}. \quad (6.70)$$

Следовательно, задача нелинейной стабилизации заключается в том, чтобы найти такую нелинейную функцию  $e = f(e_1)$ , эквивалентный коэффициент передачи  $N(\hat{e}_1) = N(\hat{y})$  которой располагается ниже кривой  $K_c(\hat{y})$ , но не слишком низко, чтобы обеспечить удовлетворительную точность

Для нашего примера рассмотрим три нелинейных функциональных элемента, показанных на рис. 6.27. Их эквивалентные передаточные функции изображены на рис. 6.24: кривые а), б) и в). Все три кривые расположены ниже кривой  $K_c(\hat{y})$ , определяющей существующий запас устойчивости по амплитуде.

Рис. 6.24 показывает, что простое корректирующее устройство в виде нелинейного элемента с ограничением а) всегда обеспечивает удовлетворительное решение. Для больших амплитуд коэффициент усиления разомкнутого контура можно увеличить, вводя вместо ограничителя а) нелинейный элемент б). Нелинейный элемент в) позволяет осуществить большие усиления при малых амплитудах за счет уменьшения усиления при больших амплитудах. Таким образом, звено б) целесообразнее вводить, если предполагается, что система будет в основном работать в области больших амплитуд, а звено в) в том случае, когда амплитуды малы.

Данная интерпретация построена на эвристической основе, поскольку сам метод гармонической линеаризации требует более строгих обоснований. Таковыми могут быть результаты моделирования. И все-таки указанный подход достаточно разумен и весьма привлекателен на практике. Авторы с большим успехом использовали его при работе с достаточно сложными системами, встречающимися в промышленности. Однако в этой области еще предстоит провести огромную аналитическую и практическую работу.

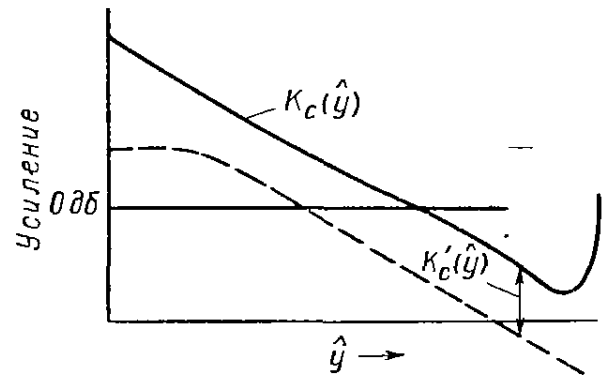


Рис. 6.26. Запасы по амплитуде для систем с нелинейным корректирующим устройством и без него в децибелах (дБ) и эквивалентный коэффициент передачи нелинейного корректирующего устройства:

$K_c(\hat{y})$  — запас устойчивости по амплитуде для системы без нелинейного корректирующего устройства;  $K_c'(\hat{y})$  — запас устойчивости по амплитуде с нелинейным корректирующим устройством; эквивалентная передаточная функция линейного корректирующего устройства обозначена штриховой линией

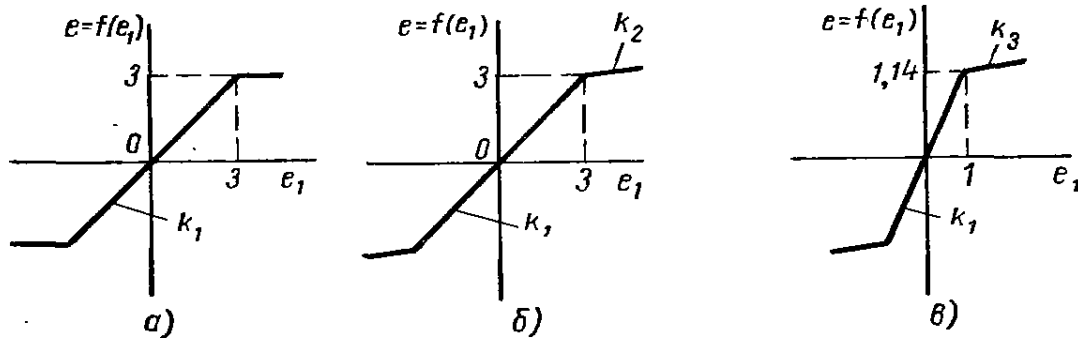


Рис. 6.27. Три типа характеристик нелинейных корректирующих устройств для системы, рассматриваемой в примере 6.9. Эквивалентные коэффициенты передачи нелинейностей показаны на рис. 6.24:

а — типа ограничения с наклоном  $k_1 = 1$ ; б — с двумя наклонами характеристики  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0,020$ ; в — с двумя наклонами характеристики  $k_1 = 1$ ,  $k_3 = 0,028$

Главное — это получить кривую запаса по амплитуде в реальной нелинейной системе. В следующем параграфе мы покажем, как можно это сделать и при этом достаточно просто, зная частотные характеристики нелинейной системы.

## 6.7. АНАЛИЗ И СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Опыт проектирования систем управления выявляет следующее: как только порядок системы начинает измеряться десятками и выше, большинство методов оказываются неприемлемыми. У инженера остается един-

ственный выход — проектировать линейную систему и тем самым оградить себя от непредвиденных неприятностей. Однако такой метод проектирования не всегда соответствует поставленной задаче. Тогда единственно возможным методом, который теоретически пригоден и для системы высокого порядка, является метод эквивалентной линеаризации. Мы говорим «теоретически», потому что в системах высокого порядка вероятность аномальных явлений увеличивается и опасность получения неверного результата при использовании эквивалентной линеаризации также возрастает.

Одной из важнейших характеристик системы высокого порядка является ее поведение в режиме автоколебаний. В большинстве систем можно вызвать колебания; наблюдая затем амплитуду, частоту, а иногда и форму этих колебаний, можно сделать важные выводы о работе такой системы.

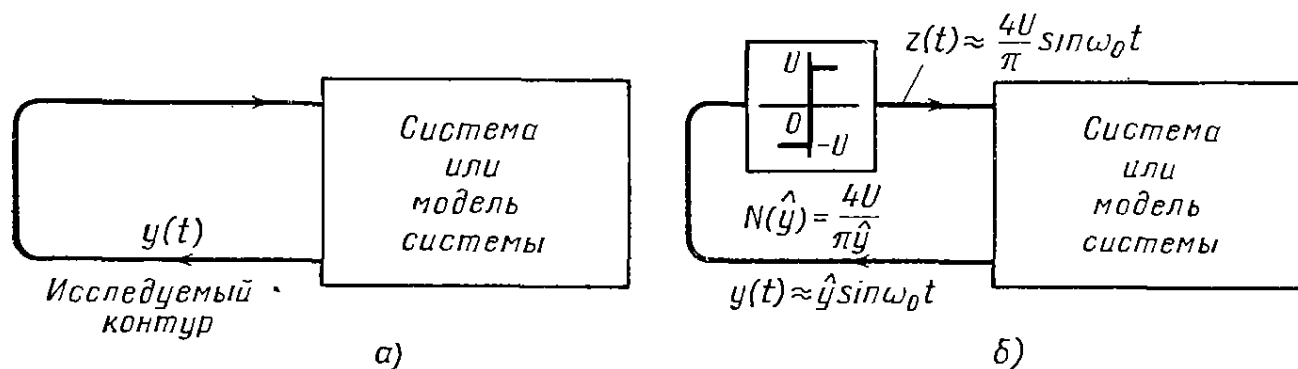


Рис. 6.28. Возбуждение колебаний для анализа и стабилизации сложных систем управления:

а — контур для измерений; б — введение в контур для измерений идеального реле

Очевидный способ выявления аномального поведения системы — это увеличение одного из её коэффициентов усиления, скажем  $K$ , от расчетного значения  $K_0$  до  $K_1$ , при котором в системе возникают автоколебания. Когда автоколебания установятся, надо медленно понижать усиление. Как правило, величина коэффициента усиления, при котором колебания исчезают, равна  $K_2 < K_1$ . Но иногда  $K_2$  даже меньше  $K_0$ . Это означает, что в расчетных условиях система устойчива лишь в малом и неустойчива в большом, и, следовательно, любое сколько-нибудь значительное возмущение вызывает в системе колебания. Это верный признак того, что система рассчитана неверно. Примером такой системы может служить система, рассмотренная в последнем разделе. Нет необходимости говорить, что если во внутреннем контуре системы возникает скачкообразный резонанс (см. § 6.5), то изменения в поведении системы еще значительнее.

Простой способ проверки, изложенный выше, не позволяет выявить полную картину устойчивого и неустойчивого поведения. Амплитуда и частота колебаний вероятнее всего определяются уровнем насыщения\* линейного элемента с усилением  $k$ , если только этот уровень не настолько велик, что некоторые из элементов системы входят в насыщение раньше. Поскольку мы уже выяснили, что устойчивость системы удобно определять исходя из запаса устойчивости по амплитуде, то сейчас мы предложим простой способ отыскания последнего.

Рассмотрим сложную систему управления, в которой сигнал одного из контуров пригоден для измерения (рис. 6.28, а). Поместим в этот контур идеальное реле с уровнем  $U$  (рис. 6.28, б). Почти определенно в такой системе возникнут колебания простой формы\*\*. Сделав те же предположения,

\* Всякий реальный усилительный элемент имеет некоторый уровень насыщения.

\*\* См. гл. 8, в которой рассматриваются релейные системы.

которые свойственны методу гармонической линеаризации; будем считать, что на входе реле сигнал имеет форму  $\hat{y} \sin \omega_0 t$  \*.

Эквивалентный коэффициент передачи реле для амплитуды  $\hat{y}$  обеспечивает такое усиление, что в контуре возникают автоколебания амплитуды  $\hat{y}$ . Следовательно, эквивалентный коэффициент передачи реле определяет запас устойчивости по амплитуде  $K_c(\hat{y})$  в зависимости от амплитуды автоколебаний  $\hat{y}$ . Поскольку эквивалентный коэффициент передачи реле равен  $\frac{4U}{\pi \hat{y}}$ ,

то график этой величины в зависимости от  $\hat{y}$  для различных уровней реле  $U$  позволяет построить требуемую кривую запаса устойчивости по амплитуде.

Следовательно, указанный способ проверки, который мы будем называть проверкой системы на автоколебания, позволяет получить зависимость амплитуды колебаний  $\hat{y}$  от уровня реле  $U$ . По этим данным можно построить эквивалентный гармонический коэффициент передачи реле в зависимости от амплитуды входного сигнала, или  $K_c(\hat{y}) = \frac{4U}{\pi \hat{y}}$  в зависимости от  $\hat{y}$ . Та-

ким образом, кривая, подобная кривой  $K_c(\hat{y})$  на рис. 6.26, может быть получена при проверке системы на автоколебания. Типовая зависимость  $\hat{y}$  от  $U$  показана на рис. 6.29.

При выполнении проверки системы на автоколебания можно определить и частоту автоколебаний  $\omega_0$  для каждого значения амплитуды  $\hat{y}$ , воспользовавшись осциллограммами. В линейной системе частота  $\omega_0$  определяет частоту, при которой фазовая характеристика разомкнутой системы равна  $-180^\circ$  и одновременно дает грубую оценку полосы пропускания замкнутой системы \*\*. Развивая такой подход на нелинейные системы, можно говорить о частоте  $\omega_0$ , при которой фазовый сдвиг первой гармоники эквивалентной передаточной функции разомкнутой системы равен  $-180^\circ$ . В рассматриваемом случае частота  $\omega_0$  является функцией от амплитуды колебаний. Эта частота также может быть определена без труда в процессе проверки системы на автоколебания (т. е. с помощью возбуждения в ней автоколебаний). Например, для системы, показанной на рис. 6.20, кривая  $f_0$  в зависимости от  $\hat{y}$ , полученная в результате возбуждения автоколебаний («автоколебательной проверки»), изображена на рис. 6.30.

Невозможно найти какую-нибудь приемлемую интерпретацию кривой  $f_0 = f_0(\hat{y})$ . В частности, нецелесообразно ее трактовать  $f_0(\hat{y})$  в смысле «полосы пропускания» для разных амплитуд. И все-таки эта кривая позволяет оценивать переходные характеристики системы. Например, мы можем рассматривать  $\frac{1}{2f_0}$  как меру времени переброса системы, т. е. такого времени, которое требуется, чтобы выходной сигнал изменился от  $\hat{y}$  до  $-\hat{y}$ . Однако всякая точная оценка процесса должна исходить из переходной реакции реальной системы или ее модели.

\* Сигнал  $y(t)$  в процессе колебаний, как правило, осциллографируют для проверки, что он синусоидален (т. е.  $y(t) = \hat{y} \sin \omega t$ ).

\*\* Необходимо быть очень осторожным в установлении такой связи между частотой среза замкнутой системы и частотой  $f_0$  разомкнутой системы. Эти частоты вовсе не всегда оказываются близкими.

Автоколебательная проверка дает хотя и грубую, но все-таки информацию, исходя из метода гармонической линеаризации. Предполагается, что такой подход будет более точен, если выполняется условие фильтра. Однако это условие не всегда выполняется, и поэтому на эквивалентные амплитудно-фазовые характеристики по первой гармонике могут оказывать влияние высшие гармоники входного сигнала. Проникновение в физическую сущность и проведение соответствующих замеров сигналов в процессе «автоколебательной проверки» может помочь выявить влияние высших гармоник.

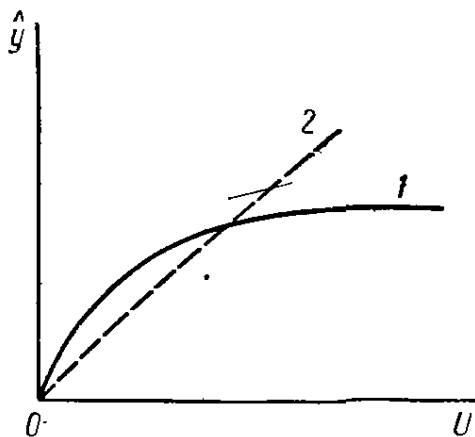


Рис. 6.29. Типовая зависимость  $\hat{y}$  от  $U$  при создании контрольных автоколебаний (запас устойчивости по амплитуде  $K_c(\hat{y}) = \frac{4U}{\pi \hat{y}}$ ):

1 — реальная система; 2 — линейная система

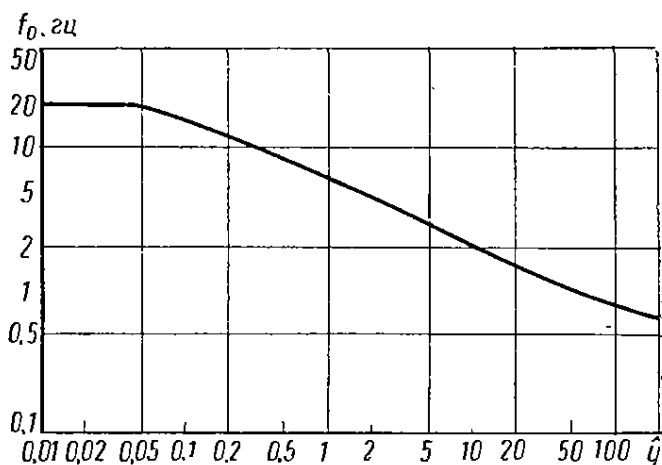


Рис. 6.30. Зависимость частоты основной гармоники автоколебаний  $f_0$  от  $\hat{y}$ , полученная при проверке системы на автоколебания и определении «времени переброса» в системе

«Автоколебательная проверка» дает возможность определить запасы устойчивости по амплитуде, связанные со свойствами системы по отношению к гармоническому сигналу, но при этом остается открытым вопрос о других типах неустойчивых движений в системе. Таким образом, получаемые результаты эквивалентны использованию метода гармонической линеаризации. Однако «автоколебательная проверка» не позволяет выявить характер неустойчивости. Правда, в большинстве практических случаев в этом и нет необходимости.

### 6.8. СЛУЧАИ, КОГДА МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕ ПРИМЕНИМ

Мы уже упоминали о том, что метод гармонической линеаризации, будучи приближенным, не всегда применим. Рассмотрим те случаи, когда этот метод не дает верного решения. Нетрудно показать, что для однозначных нелинейностей случаи, когда метод гармонической линеаризации справедлив, встречаются столь же часто, как и случаи, когда выполняется гипотеза Айзермана. Если быть более конкретными, то легко показать (упражнение 6.15), что во всех случаях, когда гипотеза Айзермана не выполняется в силу существования предельного цикла, метод гармонической линеаризации также несправедлив. Так, например, последний метод не решает вопроса о существовании предельного цикла для системы, описываемой уравнением (5.87). Любая система, для которой доказано, что нарушается гипотеза Айзермана [42], [51] и [160], служит одновременно и контрпримером для метода гармонической линеаризации.

Поскольку метод гармонической линейаризации можно применять к анализу систем с двузначными нелинейностями, то ясно, что он справедлив для большего числа случаев, нежели гипотеза Айзермана. Несправедливость этой гипотезы и метода гармонической линейаризации связана с тем, что характеристика линейной части системы имеет значительные резонансные пики. Это и есть те самые случаи, о которых всегда предупреждают инженеров, призывая их быть осторожными при использовании метода гармонической линейаризации.

Можно дать физически разумное объяснение, почему в рассматриваемых случаях метод гармонической линейаризации несправедлив (см. упражнение 6.16). Это будет сделано в следующей главе при изучении метода эквивалентной линейаризации при двухчастотном входном сигнале.

## □ 6.9. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Метод гармонической линейаризации и связанные с ним различные приемы весьма удобны для анализа и синтеза широкого класса систем управления и, в частности, систем высокого порядка. Эти методы дают возможность выяснить существование и устойчивость колебаний, присущих предельному циклу, если нелинейная система находится в свободном состоянии. Методы являются приближенными и требуют, чтобы высшие гармоники, генерируемые нелинейностями, не оказывали существенного влияния на работу системы. В этом случае ими можно пренебречь и учитывать лишь первую гармонику предполагаемых колебаний в контуре. Затем, выписав необходимые условия автоколебаний, можно отыскать либо аналитически, либо графически амплитуду и частоту этих колебаний, если они существуют. Обычно такие методы применимы для систем с четко выделенной линейной и нелинейной частями (см. рис. 6.5). Когда вид нелинейности достаточно прост (например, однозначная кусочно-линейная характеристика или простая нелинейность с гистерезисом), то эквивалентная передаточная функция может быть определена из табл. 6.2, тогда линейные методы, связанные с использованием частотного годографа или логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик, можно с успехом применить для определения условий автоколебаний.

Широкое использование метода гармонической линейаризации связано главным образом с тем, что метод позволяет анализировать сложные системы. Во-первых, можно определить условие скачкообразного резонанса в системах, показанных на рис. 6.5, при синусоидальном входном сигнале. Явление скачкообразного резонанса по фазе в замкнутой системе, включающей элемент с насыщением, было впервые объяснено Лозьером [128] (§ 6.5). Во-вторых, метод гармонической линейаризации позволяет оценить запасы устойчивости нелинейной системы как для малых, так и больших сигналов в системе, вводя понятие запас устойчивости по амплитуде в нелинейной системе. Такую характеристику можно найти для замкнутой нелинейной системы в свободном состоянии, если она состоит из одного или большего числа внутренних контуров. Этот подход позволяет также осуществить в контуре нелинейную коррекцию, как это подробно рассмотрено в § 6.6. Если запас устойчивости по амплитуде в нелинейной системе определяется так, как это обычно принято, то это чрезвычайно трудоемкий процесс. В § 6.7 дается удобный прием определения этой характеристики для систем высокого порядка. Такой подход был с успехом использован авторами на практике. Однако, несмотря на все сказанное, возможности метода гармонической линейаризации еще далеко не исчерпаны.

6.1. Рассмотрите систему  $m\ddot{x} + kx|x| = 0$ :

- получите общее решение в фазовой плоскости (отметим, что система консервативна);
- используя метод гармонической линеаризации, определите возможность автоколебаний в системе; если они существуют, найдите их период и амплитуду;
- сравните результаты пункта б) с точным решением, полученным при непосредственном интегрировании исходного уравнения.

6.2. Выведите эквивалентные передаточные функции для нелинейностей 6; 11 и 23 (см. табл. 6.2).

6.3. Как следует преобразовать систему, структурная схема которой содержит нелинейность с произвольным уровнем ограничения (см. рис. 6.5)?

$$n = \begin{cases} kx, & |x| \leq a; \\ ka, & x > a; \\ -ka, & x < -a, \end{cases}$$

чтобы можно было при выводе использовать результат для нелинейности с единичным уровнем ограничения, указанный в табл. 6.2.

6.4. Исследуйте систему с идеальным реле амплитуды  $U$  и с передаточной функцией линейной части (см. рис. 6.5)

$$G(p) = \frac{B \left[ 1 - \left( \frac{p}{b} \right) \right]}{p(p+a)} :$$

а) определите существование и устойчивость в малом всех возможных положений равновесия;

б) исследуйте существование и устойчивость всех предельных циклов методом эквивалентной линеаризации;

в) определите положения равновесия и амплитуды и частоты предельных циклов для следующей последовательности параметров:

$$U = 2; \quad B = 10 \text{ 1/сек}^2; \quad b = 25 \text{ 1/сек}; \quad a = 1 \text{ 1/сек};$$

г) для постоянного входного сигнала найдите среднее значение выхода в установившемся состоянии.

6.5. Рассмотрите линейную стационарную систему порядка  $n$  с парами различных чисто мнимых полюсов. Пусть числовые значения полюсов будут несоизмеримы, т. е., если полюсы равны  $p = \pm j\rho_1, \pm j\rho_2, \dots$ , то отношение  $\frac{\rho_i}{\rho_k}$  при  $i \neq k$  не является отношением целых чисел. Изучите свободное движение системы в каждой точке фазовой плоскости. Является ли оно: устойчивым; орбитально устойчивым; периодическим; ограниченным?

6.6. Для системы из примера 6.3 найдите графически амплитуду и частоту автоколебаний, построив годограф амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы и зависимость  $\frac{1}{N(\hat{x}_1)}$  (см. раздел 6.2), пользуясь уравнением (6.15).

6.7. Для структурной схемы системы, изображенной на рис. 6.5 с нелинейностью типа «люфт» (строка 22 в табл. 6.2) и для

$$G(p) = \frac{40}{p(p+1)(p+4)} :$$

а) используя метод гармонической линеаризации, определите диапазон изменения коэффициента наклона  $k$  нелинейной характеристики, когда автоколебания не существуют; аргументируйте сделанные предположения;

б) для значений  $k$ , при которых автоколебания существуют, постройте кривые зависимости частоты  $\omega_0$  и относительной амплитуды  $\frac{\hat{e}}{A}$  автоколебаний от величины  $k$  в дб;

в) объясните, что происходит, когда значения  $k$  лежат ниже или выше той области, где существуют автоколебания;

г) определите состояния равновесия и их устойчивость для всех трех диапазонов изменения коэффициента  $k$  (указание: для анализа эквивалентной передаточной функции использовать метод корневого годографа).

6.8. Метод гармонической линеаризации основывается на предположении о том, что высшие гармоники на выходе нелинейного элемента затем фильтруются линейной частью кон-

тура. Покажите, что иногда он справедлив, даже если это предположение и не выполняется. Рассмотрите структурную схему рис. 6.5, содержащую нелинейность типа «люфт с насыщением» (строка 23 в табл. 6.2) при  $k = 1$ ,  $V = 4$ . Допустим, что  $G(p)$  определяет запаздывание в виде  $2e^{-p}$ :

а) используя метод гармонической линеаризации, определите область изменения величины  $A$ , когда автоколебания не возникают;

б) покажите, что из физических соображений все движения будут стягиваться к области равновесия по координате  $e$ , если  $A > 1$ ; определите эту область (у к а з а н и е: примите  $e(t) = e_0$  для  $0 \leq t < 1$ );

в) сравните приближенные результаты пункта а) и точные результаты пункта б) и объясните, как следует интерпретировать информацию, полученную из анализа методом гармонического баланса.

6.9. Линейный объект с распределенными параметрами, управляемый приводом, показан на рис. 6.31; предлагаем читателю самостоятельно проделать следующее:

а) для  $R = 0$  и  $K = 100$  исследуйте существование и устойчивость автоколебаний в системе методом гармонической линеаризации; определите частоту  $\omega_0$  и амплитуду  $y_0$  колебаний на выходе системы;

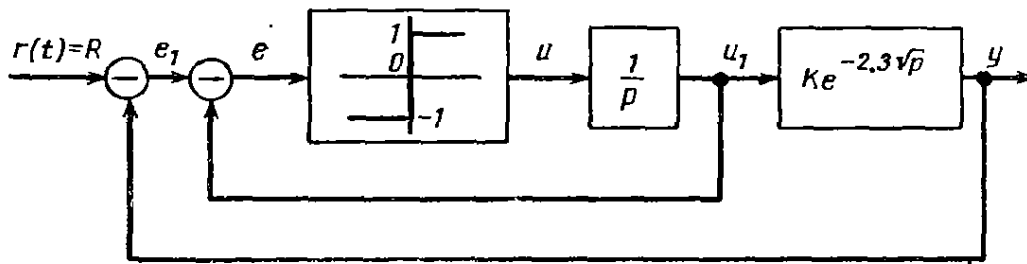


Рис. 6.31. Структурная схема системы управления для примера 6.9

б) покажите, что результат пункта а) не изменяется при любом  $R \neq 0$ ; определите среднее значение  $y$  выходной координаты в зависимости от входа  $R$  в состоянии установившихся колебаний;

в) определите коэффициент усиления  $K$ , обеспечивающий запас по амплитуде в 6 дб;

г) рассмотрите преимущества и недостатки системы с автоколебаниями при  $K = 100$  и системы без колебаний, полученной в пункте в), анализируя переходную и установившуюся реакции системы на входной сигнал  $r(t)$  (никаких вычислений при этом производить не требуется).

6.10. Используя геометрические построения раздела 6.5, доказать утверждения 1), 2), 3) на стр. 166. Покажите, что область  $V$  задается границами, которые изображены на рис. 6.19.

6.11. Для системы, приведенной на рис. 6.5, с нелинейностью, имеющей единичный уровень насыщения, и при  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  рассчитайте и постройте эквивалентные логарифмические амплитудные  $|\hat{y}/\hat{r}|$  и фазовые  $\arg [y/r]$  характеристики замкнутой системы для следующих частот;  $\omega = 0,2; 1; 3,5$  (у к а з а н и е: используйте геометрическое построение § 6.5).

6.12. Для модели привода, изображенной на рис. 6.20, покажите, что эквивалентную передаточную функцию привода, охваченную обратной связью, можно приближенно определить, как

$$N(\hat{x}, \omega) = N_1(\hat{x}) N_2(\hat{y}, \omega),$$

где

$$\hat{y} = \hat{x} N_1(\hat{x}); \quad N_1(\hat{x}) = \begin{cases} 1, & \hat{x} \leq V; \\ \frac{2}{\pi} \left[ \arcsin \left( \frac{V}{\hat{x}} \right) + \frac{V}{\hat{x}} \sqrt{1 - \left( \frac{V}{\hat{x}} \right)^2} \right], & \hat{x} \geq V; \end{cases}$$

$$|N_2(\hat{y}, \omega)| = \begin{cases} 1, & \omega \hat{y} \leq \frac{4}{\pi} V; \\ \frac{4V}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega \hat{y}}, & \omega \hat{y} > \frac{4}{\pi} V; \end{cases}$$

$$\arg N_2(\hat{y}, \omega) = -\arccos |N_2(y, \omega)|.$$



6.13. Покажите с помощью метода гармонической линеаризации, что уравнение Вольтерра (задача 5.15) не определяет предельного цикла.

6.14. Для системы, изображенной на рис. 6.32, исследуйте методом гармонической линеаризации существование колебаний. Определите области устойчивости, если они существуют. Найдите амплитуду и частоту колебаний на выходе схемы.

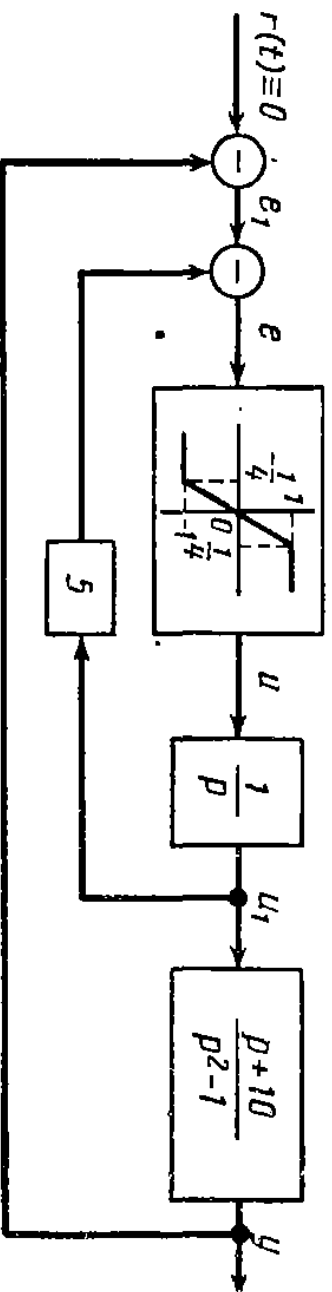


Рис. 6.32. Структурная схема системы управления для примера 6.14

6.15. Допустим, что структурная схема системы имеет вид, приведенный на рис. 6.5. Характеристика нелинейности удовлетворяет условию Айзермана (см. § 5.9). Покажите, что метод гармонической линеаризации не позволяет установить существование предельного цикла в системе.

6.16. Исходя из физических соображений, покажите, почему для системы, задаваемой уравнением (5.87), метод гармонической линеаризации несправедлив.

## 6.11. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Лучшее изложение метода гармонической линеаризации — гл. 9 в работе [58]. Все изложенное в ней дополняет наши рассуждения. Читателю следует посоветовать также хорошо усвоить в гл. 6 § 6.6—6.11.

В гл. 4 и 5 работы [63] излагается совершенно особый подход к методу гармонической линеаризации. Работа [128], опубликованная в 1956 г., открывает возможность для анализа явления скачкообразного резонанса. Указанный в работе подход обобщен на однозначные [71] и двузначные [55] нелинейности.

## ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ПРИ ДВУХЧАСТОТНОМ ВХОДНОМ СИГНАЛЕ. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СЕРВОМЕХАНИЗМЫ

В гл. 6 были рассмотрены условия существования и устойчивости автоколебаний, возникающих в автономной системе. При этом предполагалось, что выполняются условия гармонического баланса лишь для основной частоты автоколебаний, а все остальные явления, возникающие из-за нелинейности системы, не учитывались. Такой метод остается до настоящего времени одним из наиболее эффективных в исследовании автоколебаний и вынужденных колебаний, причем область его приложений оказалась шире, а точность выше, чем это следовало из первоначальных предпосылок. Даже в тех случаях, когда третьей гармоникой автоколебаний по сравнению с основной пренебречь нельзя, использование понятия эквивалентной передаточной функции оказывается целесообразным. Если результаты, полученные на основе метода гармонической линеаризации, вызывают сомнение, то надо проверить, не содержит ли система дополнительные гармоники или субгармоники основной частоты. Если они имеются, то их можно учесть, предположив, что входной сигнал содержит две составляющие \*, и затем решить уравнения баланса для каждой из них; эта идея лежит в основе многих классических методов, использующих аппроксимации более высоких порядков \*\*, в том числе и в основе метода эквивалентной линеаризации по двум входным сигналам, предложенного Дж. Вестом [196]. Следует отметить, что такой подход связан со значительными трудностями в вычислениях. При этом, когда учитываются две гармоники, основная трудность состоит в подсчете их взаимного влияния при прохождении сигналов через нелинейность. Определить это влияние и установить условия равновесия для составляющих в замкнутом контуре представляет не простую проблему даже для однозначных элементарных нелинейностей, поскольку в этом случае число переменных увеличивается до четырех.

Вследствие взаимного влияния может быть получена эквивалентная передаточная функция, зависящая от фазы и для однозначной нелинейности. Преимущество такого подхода заключается в том, что сохраняя больше чем одну составляющую, можно исследовать некоторые явления, не поддающиеся анализу методом обычной гармонической линеаризации. Это в первую очередь относится к проблемам генерации субгармоник и синхронизации. Кроме

---

[\* См. изложение метода гармонической линеаризации при учете систематической составляющей [254], [272], [281] (Прим. ред.).

\*\* См. изложение метода обобщенной гармонической линеаризации [270], [286], [292] (Прим. ред.).

того, оказывается, что автоколебания в системах с установившейся постоянной составляющей можно легко исследовать с помощью метода эквивалентной линеаризации и по двум входным сигналам.

Действительно, если частоты или амплитуды двух гармонических составляющих в достаточной мере отличаются друг от друга, то возникает очень маленькая ошибка, если предположить, что нижняя гармоника есть просто постоянная составляющая. Это предположение позволяет многие задачи решить более просто. На основе метода эквивалентной линеаризации по двум входным сигналам можно проанализировать интересный класс систем, известных как колебательные сервомеханизмы. Можно предположить, что метод эквивалентной двухчастотной линеаризации окажется точнее метода гармонической линеаризации. Однако еще не было проведено исследований по оценке справедливости метода эквивалентной линеаризации по двум входным сигналам.

### 7.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О МЕТОДЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ДВУХЧАСТОТНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ. УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ДЛЯ ПОСТОЯННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Для того чтобы оценить достоинства метода эквивалентной линеаризации по двум входным сигналам, рассмотрим случай несимметричной однозначной нелинейности. Внимательный читатель уже заметил, что в гл. 6 большинство исследованных нелинейностей были нечетно симметричными, т. е.  $f(x) = -f(-x)$ . Лишь в одном случае (пример 6.3) была рассмотрена несимметричная нелинейность, за которой следовал объект, обладающий дифференцирующими свойствами, так что постоянная составляющая, обусловленная такой нелинейностью, в выходном сигнале объекта не присутствовала, и, следовательно, положением равновесия по-прежнему оставалось начало координат. Такие примеры выбирались не случайно, так как в тех случаях, когда нелинейности не являются нечетно симметричными или в установившемся режиме появляются постоянные составляющие, расчет автоколебаний значительно усложняется (пример 6.8).

В каждом из этих случаев на входе нелинейности появляется постоянная составляющая, так что амплитуда основной гармоники на выходе нелинейности оказывается зависящей не только от амплитуды синусоидального входного сигнала, но и от амплитуды постоянной составляющей. Кроме того, в случае несимметричной нелинейности на выходе появляется постоянная составляющая, которая зависит от входной постоянной составляющей и входной синусоидальной составляющей. Таким образом, приходится определять три неизвестных: амплитуду и частоту колебательной составляющей и величину постоянной составляющей (смещение).

Напомним одно важное свойство, которое связано с прохождением сигналов через несимметричные однозначные нелинейности (теорема 6.1): несимметричные однозначные нелинейности не вызывают фазового сдвига по основной гармонике выходного сигнала.

Рассмотрим следующий пример.

**Пример 7.1.** Исследуем возможность возникновения автоколебаний в релейной системе управления, изображенной на рис. 7.1, с различными типами линейного элемента  $G(p)$ . При этом реле предполагается несимметричным ( $A \neq B$ ).

Прежде всего рассмотрим случай, когда  $G(p)$  содержит интегрирующее звено. Тогда, если во входном сигнале в  $G(p)$  имеется постоянная составляющая, то выходной сигнал системы становится неограниченно большим. Работоспособная же релейная система управления должна иметь такие автоколебания, чтобы в сигнале  $u(t)$  не было постоянных составляющих. Таким образом, если в системе присутствуют какие-нибудь колебания на основной частоте, то они должны обеспечивать равные положительные и отрицательные периоды работы реле

в течение периода колебаний. Это показано на рис. 7.2 в виде графиков, из которых видно, что  $u(t)$  не содержит постоянной составляющей, а входной сигнал  $e(t)$  представляет синусоиду, показанную на рис. 7.2. Сигналы  $e(t)$  и  $y(t)$  содержат постоянную составляющую, которая накапливается в течение переходного процесса, прежде чем в системе установятся автоколебания. В том случае, когда передаточная функция  $G(p)$  имеет хотя бы одно интегрирующее звено, применение метода эквивалентной линеаризации оказывается достаточно простым. Прежде всего определим основную гармонику сигнала  $u(t)$ , а затем, используя свойства передаточной функции  $G(p)$ , определим период  $T$  этих колебаний.

Трудности возрастают, когда  $G(p)$  не содержит интегрирующих звеньев. В этом случае наряду с автоколебаниями в системе появляется постоянная составляющая, которая содержится в сигналах по всему замкнутому контуру. Естественно предположить, что в этом случае входной сигнал должен включать как постоянную, так и синусоидальную составляющие, а именно:

$$e(t) = \alpha + \beta \sin \omega t. \quad (7.1)$$

Очевидно, что постоянная составляющая изменяет форму выходного сигнала, а, следовательно, и амплитуду основной гармоники. Это нетрудно показать, воспользовавшись разложением в ряд Фурье.

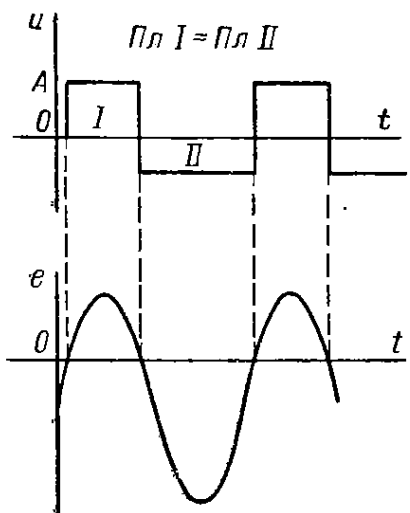
Входной сигнал (7.1), проходя через релейный элемент (см. рис. 7.1), будет вызывать его переключение, когда  $\alpha + \beta \sin \omega t = 0$ . Имея это в виду, получим следующее выражение для выходного сигнала:

$$u(t) = \begin{cases} +A, & -\arcsin \frac{\alpha}{\beta} \leq \omega t < \pi + \arcsin \frac{\alpha}{\beta}; \\ -B, & \pi + \arcsin \frac{\alpha}{\beta} \leq \omega t \leq 2\pi - \arcsin \frac{\alpha}{\beta}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Используя разложение сигнала  $u(t)$  в ряд Фурье, найдем постоянную составляющую этого сигнала в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) d(\omega t) &= \frac{A}{2\pi} \left( \pi + 2 \arcsin \frac{\alpha}{\beta} \right) - \frac{B}{2\pi} \left( \pi - 2 \arcsin \frac{\alpha}{\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (A - B) + \frac{1}{\pi} \left( A \arcsin \frac{\alpha}{\beta} + B \arcsin \frac{\alpha}{\beta} \right); \end{aligned} \quad (7.3)$$

для гармонических составляющих справедливы следующие соотношения:



$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos \omega t d(\omega t) &= -\frac{B}{\pi} \int_0^{-\arcsin \frac{\alpha}{\beta}} \cos \omega t d(\omega t) + \\ &+ \frac{A}{\pi} \int_{-\arcsin \frac{\alpha}{\beta}}^{\pi + \arcsin \frac{\alpha}{\beta}} \cos \omega t d(\omega t) - \frac{B}{\pi} \int_{\pi + \arcsin \frac{\alpha}{\beta}}^{2\pi} \cos \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ B \frac{\alpha}{\beta} + 0 - B \frac{\alpha}{\beta} \right] = 0; \end{aligned} \quad (7.4)$$

Рис. 7.2. Выходной сигнал с реле  $u(t)$  и сигнал ошибки  $e(t)$  релейной системы управления, показанной на рис. 7.1

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin \omega t d(\omega t) = -\frac{B}{\pi} \int_0^{-\arcsin \frac{\alpha}{\beta}} \sin \omega t d(\omega t) +$$

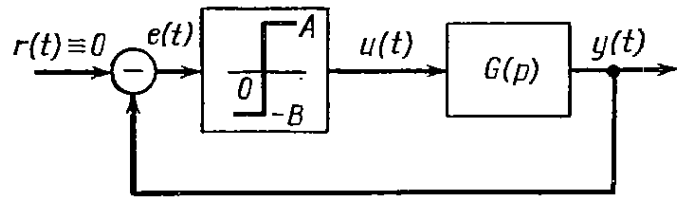


Рис. 7.1. Система управления с несимметричным реле

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A}{\pi} \int_{-\arcsin \frac{\alpha}{\beta}}^{\pi + \arcsin \frac{\alpha}{\beta}} \sin \omega t d(\omega t) - \frac{B}{\pi} \int_{\pi + \arcsin \frac{\alpha}{\beta}}^{2\pi} \sin \omega t d(\omega t) = \\
 & = \frac{1}{\pi} \left[ 2B \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} + 2A \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \right] = \frac{2}{\pi} (B + A) \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}. \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

Из выражения (7.4) следует, что в рассматриваемом случае косинусоидальная составляющая равна нулю. Это же следует и из теоремы 6.1. Синусоидальная составляющая выходного сигнала отлична от нуля.

Учитывая взаимное влияние при прохождении через нелинейность постоянной и переменной составляющих, найдем условия, при которых в контуре существуют как постоянная, так и переменная составляющие.

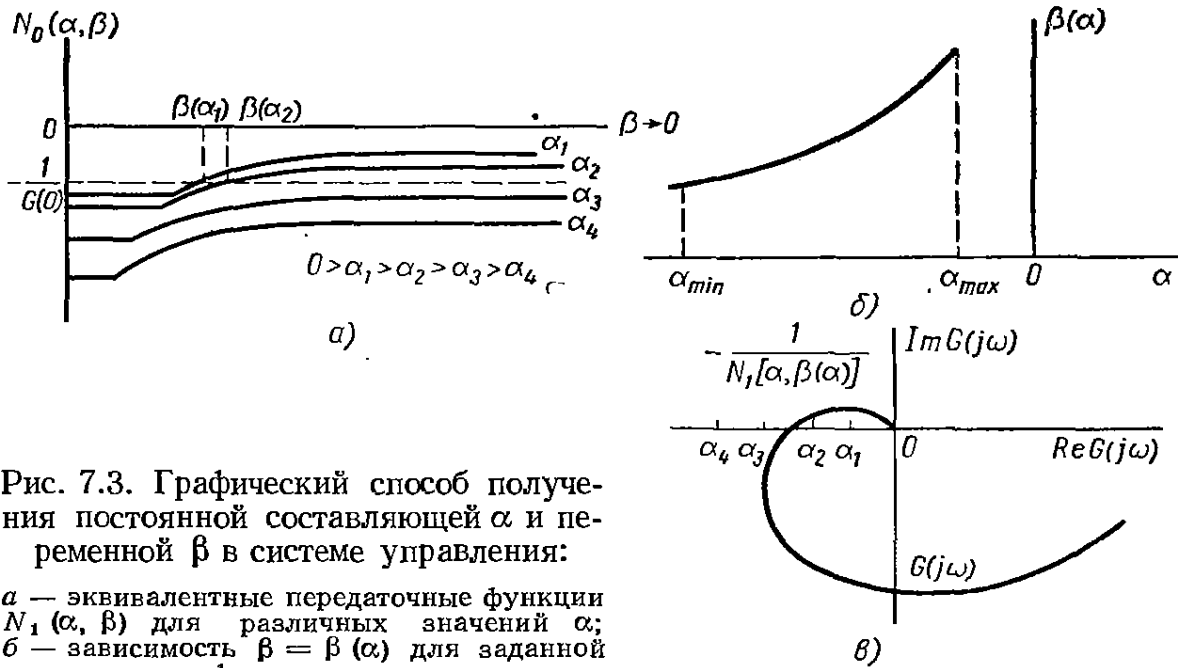


Рис. 7.3. Графический способ получения постоянной составляющей  $\alpha$  и переменной  $\beta$  в системе управления:

а — эквивалентные передаточные функции  $N_1(\alpha, \beta)$  для различных значений  $\alpha$ ;  
 б — зависимость  $\beta = \beta(\alpha)$  для заданной

$N_0(\alpha, \beta) = -\frac{1}{G_0}$  (получена из рис. 7.3, а); в — амплитудно-фазовый годограф  $G(j\omega)$

для определения значения  $\alpha$  по пересечению с функцией  $-\frac{1}{N_1[\alpha, \beta(\alpha)]}$

Тогда можно определить эквивалентную передаточную функцию по постоянной составляющей  $N_0(\alpha, \beta)$  как отношение постоянных сигналов на выходе и входе, т. е.

$$N_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) d(\omega t) \right] = \frac{1}{2\alpha} (A - B) + \frac{1}{\pi\alpha} \left( A \arcsin \frac{\alpha}{\beta} + B \arcsin \frac{\alpha}{\beta} \right). \quad (7.6)$$

Аналогичным образом определим эквивалентную передаточную функцию по первой гармонике:

$$\begin{aligned}
 N_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\beta} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin \omega t d(\omega t) + j \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos \omega t d(\omega t) \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi\beta} (B + A) \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}. \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

Тогда условия баланса по постоянной и переменной составляющим запишутся в виде уравнений\*

$$N_0(\alpha, \beta) G(0) = -1; \quad (7.8a)$$

$$N_1(\alpha, \beta) G(j\omega) = -1. \quad (7.8б)$$

\* Следует заметить, что уравнения (7.8a) и (7.8б), по сути дела, определяют три уравнения, поскольку соотношение (7.8a) скалярное, а (7.8б) — комплексное. Эти три уравнения и служат для определения величин  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\omega$ .

Если передаточная функция  $G(p)$  не содержит интегрирующих звеньев, то величина  $G(0)$  находится просто. Далее уравнения (7.8a) и (7.8б) можно решить графически или как-нибудь иначе. Прежде всего следует найти из уравнения (7.8a) зависимость величины  $\beta$  от  $\alpha$ . Подставляя  $\beta(\alpha)$  в уравнение (7.8б), можно найти искомые величины  $\omega$  и  $\alpha$ , а по  $\alpha$  и  $\beta$ .

Графический способ такого решения показан на рис. 7.3. Прежде всего строится функция  $N_0(\alpha, \beta)$  для различных величин  $\alpha$  от  $\beta$  (рис. 7.3, а). Затем проводятся горизонтальные линии, соответствующие значению  $-\frac{1}{G(0)}$ . Точки пересечения кривой  $N_0(\alpha, \beta)$  с этими прямыми определяют функцию  $\beta(\alpha)$  (рис. 7.3, а и 7.3, б)\*. И, наконец, используем уравнение (7.8б) в виде

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N_1[\alpha, \beta(\alpha)]}, \quad (7.9)$$

где функция  $N_1[\alpha, \beta(\alpha)]$  определяется для каждого  $\alpha$  из уравнения (7.7). Ее отрицательная ветвь размещается на отрицательной части действительной оси. Далее строится амплитудно-фазовая частотная характеристика  $G(j\omega)$  (рис. 7.3, в).

Величины  $N_0(\alpha, \beta)$  и  $N_1(\alpha, \beta)$  называются эквивалентными передаточными функциями для двухчастотного входного сигнала.

## 7.2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ДВУХЧАСТОТНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА И ИССЛЕДОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В общем случае для определения эквивалентной передаточной функции по двум составляющим сигнала, действующего на входе нелинейности  $f(x)$ , используется следующее выражение:

$$x = \alpha \sin(\omega t + \Phi) + \alpha_h \sin h\omega t. \quad (7.10)$$

Как и раньше, рассмотрим эквивалентные передаточные функции по каждой составляющей и учтем их взаимное влияние, обусловленное действием нелинейности.

Если в предыдущем случае эквивалентная передаточная функция для однозначной нелинейности принимала действительные значения, то при двух синусоидальных составляющих входного сигнала передаточная функция принимает комплексные значения. В частности, если отношение частот есть рациональное число вида  $\frac{m}{n}$  ( $m$  и  $n$  — целые числа), то эквивалентная передаточная функция безынерционной нелинейности для двухчастотного входного сигнала указывает на появление фазового сдвига.

Проиллюстрируем сказанное, используя понятие эквивалентной передаточной функции для определения в системе субгармонических колебаний. Обратим внимание на следующее явление: если в системе возможно появление субгармоники частоты  $\frac{\omega_1}{n}$  при подаче на вход синусоидального сигнала с частотой  $\omega_1$ , то, как правило, в системе возникают автоколебания с частотой, близкой к частоте  $\frac{\omega_1}{n}$ .

Условие существования  $\frac{1}{n}$ -го субгармонического колебания эквивалентно двум требованиям:

- а) балансу  $\frac{1}{n}$ -ой субгармоники внутри контура;
- б) балансу составляющей основной частоты.

\* Заметим, что при  $A > B$  существуют только отрицательные значения  $\alpha$ , удовлетворяющие уравнению (7.8a), причем имеется лишь ограниченный диапазон значений  $\alpha$ , при которых прямые  $-\frac{1}{G(0)}$  пересекают характеристику  $N_0(\alpha, \beta)$  (пример 7.8).

При вычислении составляющих следует учитывать их взаимное влияние при прохождении через нелинейность. Это можно сделать, используя известное понятие эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.2. Уравнение Дуффинга имеет вид

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + ay^3 = R \sin(\omega_1 t + \theta),$$

и ему соответствует структурная схема, показанная на рис. 7.4, а. Это частный случай более общей системы, изображенной на рис. 7.4, б. Приведенный класс систем характеризуется тем, что в цепь обратной связи включена нелинейность типа кубической параболы:

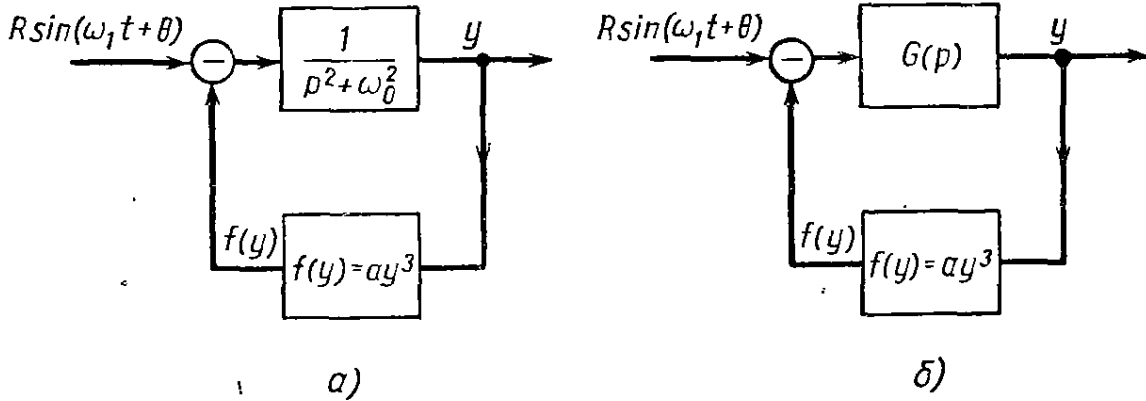


Рис. 7.4. Структурные схемы:

а — для уравнения Дуффинга; б — для системы с нелинейностью в виде кубической функции

Предположим, что сигнал  $y(t)$  можно записать в виде

$$y(t) = \alpha_1 \sin(\omega t + \Phi) + \alpha_h \sin h\omega t,$$

тогда сигнал на выходе нелинейности  $f(y)$  будет равен

$$\begin{aligned} f(y) = ay^3(t) = & \frac{3a}{4} (\alpha_1^2 + 2\alpha_h^2) \alpha_1 \sin(\omega t + \Phi) + \frac{3a}{4} (2\alpha_1^2 + \alpha_h^2) \alpha_h \sin h\omega t - \\ & - \frac{a\alpha_1^3}{4} \sin(3\omega t + 3\Phi) - \frac{a\alpha_h^3}{4} \sin 3h\omega t - \frac{3}{4} a\alpha_1^2 \alpha_h \{ \sin[(h-2)\omega t - 2\Phi] + \\ & + \sin[(h+2)\omega t + 2\Phi] \} + \frac{3}{4} a\alpha_1 \alpha_h^2 \{ \sin[(2h-1)\omega t - \Phi] - \sin[(2h+1)\omega t + \Phi] \}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Допустим, что мы хотим получить субгармонику  $1/3$  \*. В этом случае  $h = 3$ . Группируя члены в выражении (7.11), можно получить эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала в виде

$$\begin{aligned} N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) \alpha_1 \sin(\omega t + \Phi) = & \frac{3}{4} a\alpha_1 [\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2] \sin(\omega t + \Phi) - \\ & - \alpha_1 \alpha_3 \sin(\omega t - 2\Phi); \end{aligned} \quad (7.12a)$$

$$N_3(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) \alpha_3 \sin 3\omega t = \frac{3a}{4} (2\alpha_1^2 + \alpha_3^2) \alpha_3 \sin 3\omega t - \frac{a\alpha_1^3}{4} \sin(3\omega t + 3\Phi), \quad (7.12б)$$

или через комплексные величины

$$N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) = \frac{3a}{4} [(\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2 - \alpha_1 \alpha_3 \cos 3\Phi) + j\alpha_1 \alpha_3 \sin 3\Phi]; \quad (7.13a)$$

$$N_3(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) = \frac{3a}{4} \left[ (2\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \frac{\alpha_3^3}{3\alpha_3} \cos 3\Phi - \left( \frac{\alpha_1^2}{3\alpha_3} \sin 3\Phi \right) \right]. \quad (7.13б)$$

\* Исследование условий возникновения в системе каждой из субгармоник представляет совершенно самостоятельную задачу.

Отметим, что в отличие от примера, рассмотренного в § 7.1, здесь обе функции комплексные.

Условия существования субгармонических колебаний заключаются в следующем.

1. Должны существовать амплитуды  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  и фаза  $\Phi$  такие, чтобы удовлетворялось следующее уравнение:

$$N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) G\left(j \frac{\omega_1}{3}\right) = -1. \quad (7.14a)$$

Другими словами, параметры  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  и  $\Phi$  должны быть такими, чтобы в системе поддерживались автоколебания с частотой  $\frac{\omega_1}{3}$ .

2. Параметры  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  и  $\Phi$  к тому же должны быть такими, чтобы при входном сигнале  $R \sin(\omega_1 t + \Phi)$  амплитуда выходной составляющей с частотой  $\omega_1$  была равна величине  $\alpha_3$ . После несложных преобразований условие баланса колебаний с частотой  $\omega_1$  можно представить в виде следующего комплексного уравнения:

$$N_3(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) G(j\omega_1) - \frac{R}{\alpha_3} (\cos \theta + j \sin \theta) G(j\omega_1) = 1. \quad (7.14б)$$

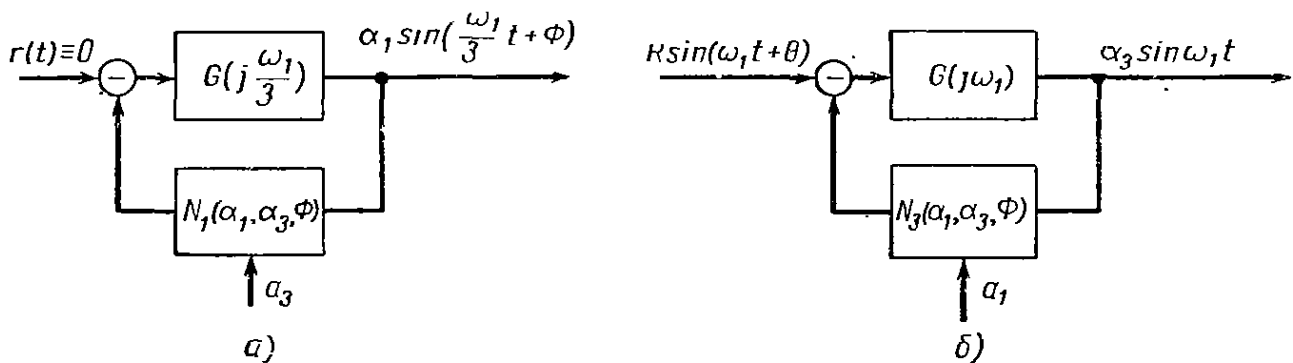


Рис. 7.5. Структурные схемы:

а — для уравнения, приведенного в виде (7.14а); б — для уравнения, приведенного в виде (7.14б)

Уравнениям (7.14а, б) соответствуют структурные схемы, приведенные на рис. 7.5, а, б. Когда  $R$  и  $\omega_1$  заданы, из уравнений (7.14) можно получить четыре трансцендентных уравнения для нахождения четырех неизвестных  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\Phi$  и  $\theta$ . Если полученная система уравнений может быть решена, то задача определения субгармонических колебаний имеет приближенное решение, обусловленное применением эквивалентных передаточных функций для двухчастотного входного сигнала, когда всеми частотами, кроме задающей и субгармоники  $1/3$  пренебрегают.

Уравнению Дуффинга соответствует частотная характеристика  $G(j\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$ , которая принимает лишь действительные значения для всех  $\omega$ . Это означает, что  $\theta$  и  $\Phi$  равны нулю, а уравнения (7.13) и (7.14) сводятся к двум алгебраическим:

$$\frac{3a}{4} [\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3] = \frac{\omega_1^2}{9} - \omega_0^2, \quad (7.15a)$$

$$\frac{3a}{4} \left[ (2\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \frac{\alpha_1^3}{2\alpha_3} \right] = \frac{R}{\alpha_3} - (\omega_0^2 - \omega_1^2). \quad (7.15б)$$

Из этих уравнений определяются неизвестные  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ .

Интересно проследить изменение характера субгармонических колебаний в уравнении Дуффинга по мере того, как влияние нелинейности уменьшается.

Уравнение (7.15а) можно записать в виде

$$\frac{27a}{4} [\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3] + 9\omega_0^2 = \omega_1^2 \quad (7.16a)$$

и использовать для исключения из уравнения (7.15б) величины  $\omega_1$ . Тогда уравнение (7.15б) примет вид

$$R + \frac{a}{4} [\alpha_1^3 + 21\alpha_1^2\alpha_3 - 27\alpha_1\alpha_3^2 + 51\alpha_3^3] = -8\alpha_3\omega_0^2. \quad (7.16б)$$



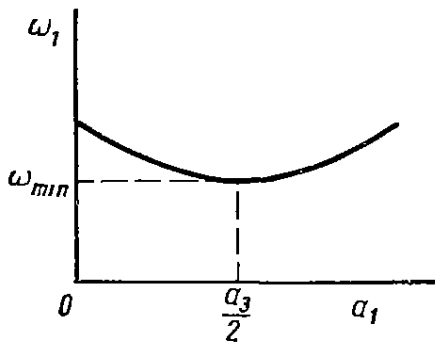
Предположим, что коэффициент  $a$  в кубической зависимости мал, тогда можно приближенно найти амплитуды  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  и оценить форму субгармонических колебаний.

Если  $a = 0$ , то из уравнения (7.15б) следует, что  $\omega_1 = 3\omega_0$ , а значение  $\alpha_{30}$  определяется по формуле

$$\alpha_{30} = -\frac{R}{8\omega_0^2}. \quad (7.17)$$

Для малых, но ненулевых значений  $a$  можно приближенно считать, что величина  $\alpha_3$  определяется как результат подстановки выражения (7.17) в левую часть соотношения (7.16б):

$$\omega_1 \quad \alpha_3 \approx \alpha_{30} - \frac{a}{32\omega_0^2} (\alpha_1^3 + 21\alpha_1^2 - 27\alpha_1\alpha_{30}^2 + 51\alpha_{30}^3). \quad (7.18)$$



Анализ уравнений (7.16а) и (7.18) позволяет сделать некоторые качественные и количественные выводы относительно свойств субгармонических колебаний в уравнении Дуффинга при малых значениях величины  $a$ . Рассмотрим случай, когда  $a > 0$ . На рис. 7.6 показана кривая  $\omega_1$  от  $\alpha_1$ , полученная по уравнению (7.16а) при  $a > 0$ . Из рис. 7.6 видно, что существует минимальное значение  $\omega = \omega_{\min}$ , ниже которого не может пройти кривая. Это означает, что в системе не может быть субгармонического резонанса  $\left(\frac{1}{3}\right)$ -го порядка для  $\omega_1$  ниже  $\omega_{\min}$ .

Рис. 7.6. Кривая  $\omega_1 = f(\alpha_1)$ , полученная по уравнению (7.16а) при  $a > 0$

Можно установить, что  $\omega_{\min}$  возникает при  $\alpha_1 = \frac{\alpha_3}{2}$  и определяется следующим соотношением:

$$\omega_{\min} = 3 \left( \omega_0^2 + \frac{21}{16} a \alpha_3^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.19)$$

Из соотношения (7.19) следует, что минимальная задающая частота для возбуждения субгармонического резонанса  $\left(\frac{1}{3}\right)$ -го порядка всегда должна быть больше  $3\omega_0$ . Последнее и показывает, что субгармоническая частота  $\left(\frac{1}{3}\right)$ -го порядка будет всегда выше, чем резонансная частота  $\omega_0$  линейной системы.

Для данных значений  $R$  и  $\omega_1$  можно определить  $\alpha_1$  по кривой, изображенной на рис. 7.6. Подставив значение  $\alpha_1$  в уравнение (7.19), определим приближенное значение  $\alpha_3$ .

Уравнение Дуффинга, в котором отсутствует затухание и поэтому нет фазового сдвига, является особым случаем более общей системы, показанной на рис. 7.4, б. При этом полное решение должно состоять из решения четырех совместных трансцендентных уравнений (7.14), что представляет определенные трудности. Однако, как это было показано Дж. Вестом в работе [196], уравнения (7.14а) позволяют установить достаточные условия отсутствия субгармонических колебаний (или, что то же самое, необходимые условия их существования).

Перепишем уравнение (7.14а) в виде

$$G \left( j \frac{\omega_1}{3} \right) = -\frac{1}{N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi)},$$

где 
$$-\frac{1}{N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi)} = -\frac{4}{3a[(\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_3 \cos 3\Phi) + j\alpha_1\alpha_3 \sin 3\Phi]}. \quad (7.20)$$

Дж. Вест показал, что для заданных  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  и угла  $\Phi$ , изменяющегося от 0 до  $2\pi$ , функция  $-\frac{1}{N_1}$  будет описывать окружность на комплексной

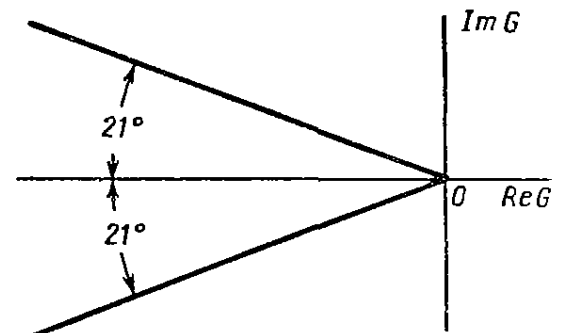


Рис. 7.7. Область в плоскости  $G(j\omega) - 159^\circ < \arg G(j\omega) < 159^\circ$  для системы, изображенной на рис. 7.4, б, где отсутствуют субгармонические колебания

плоскости. Более того, все такие окружности будут лежать внутри сектора, который показан на рис. 7.7 (см. упражнение 7.9). Отсюда видно, что метод эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала дает достаточное условие отсутствия субгармонических колебаний, которое заключается в том, что амплитудно-фазовый годограф  $G(j\omega)$  не входит в упомянутый сектор. Напротив, необходимое условие существования субгармонических колебаний заключается в том, что годограф  $G(j\omega)$  входит в этот сектор.

### 7. 3. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ДВУХЧАСТОТНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА

#### 1. Определение дополнительной гармонической составляющей автоколебаний

Применение эквивалентной передаточной функции по двум входным сигналам наиболее целесообразно в тех случаях, когда требуется оценить влияние третьей гармоники автоколебаний. Для нелинейной системы, представленной в стандартной форме (см. рис. 6.5), предполагается, что сигнал на входе нелинейности равен

$$e(t) = \alpha_1 \sin(\omega t + \Phi) + \alpha_3 \sin 3\omega t. \quad (7.21)$$

Условия существования автоколебаний в системе можно записать в виде четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\Phi$  и  $\omega$ :

$$N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) G(j\omega) = -1; \quad N_3(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) G(3j\omega) = -1. \quad (7.22)$$

Решение уравнений (7.22) является не простой задачей. Возникающие трудности иногда удается преодолеть, выбрав удобную форму для эквивалентных передаточных функций  $N_1$  и  $N_3$  по первой и третьей гармоникам. Далее можно считать, что решения уравнений (7.22) находятся графически как пересечение годографов передаточной функции  $G(j\omega)$  и обратных эквивалентных характеристик

$$-1/[N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi)] \text{ и } -1/[N_3(\alpha_1, \alpha_3, \Phi)].$$

Остается трудность, связанная с определением функций  $N_1$  и  $N_3$ , которые зависят от величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  и могут быть изображены графически, как семейство функций  $-(1/N_1)$  и  $-(1/N_3)$ , причем для каждого  $\alpha_1$  надо изобразить графики функций  $-(1/N_1)$  и  $-(1/N_3)$  для различных значений  $\alpha_3$  и  $\Phi$ . Таким образом, получается два семейства графиков, что значительно усложняет анализ.

Для нелинейностей, которые подчиняются закону  $f(e) = ke^n$ , эквивалентная передаточная функция для двухчастотного входного сигнала выражается через гармонический ряд с конечным числом членов и может быть найдена методом итераций. Как правило, начальные значения  $\alpha_1$  и  $\omega$  для процесса итераций находятся по методу обычной эквивалентной линеаризации. Однако могут быть такие случаи (задача 7.3), когда метод обычной гармонической линеаризации указывает на отсутствие автоколебаний, в то время как в реальной системе управления они есть\*. При учете первой и

\* См., например: 1) Т о п ч е е в Ю. И. О надежности нелинейных систем автоматического управления, склонных к автоколебаниям. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 7. М., «Машиностроение», 1967.

2) Нелинейные системы автоматического управления под ред. Е. П. Попова. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1970 (Прим. ред.).

третьей гармоник удаётся расчётным путем показать, что в системе возникают автоколебания.

Для нелинейной характеристики типа идеального реле эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала можно найти следующим образом: поскольку гармоники выходного сигнала зависят только от отношения  $\alpha_1/\alpha_3$ , а не от их абсолютных величин, то эквивалентная передаточная функция определяется по двум кривым:  $-1/(\alpha_3 N_1)$  и  $-1/(\alpha_1 N_3)$ .

Нормированные отрицательные обратные значения эквивалентной передаточной функции  $-1/(\alpha_3 N_1)$  и  $-1/(\alpha_1 N_3)$  для релейной характеристики с единичным уровнем были построены Боненном [23] (рис. 7.8, а, б). Они позволяют построить результирующую кривую только в функции отношения амплитуд

$$k = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}. \quad (7.23)$$

Эти графики позволяют найти значения  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\Phi$  и  $\omega$  для системы управления с нелинейностью типа реле (см. рис. 6.5), используя следующую процедуру:

1) находя обычный эквивалентный коэффициент передачи для реле, определяем приближенно амплитуду  $\alpha$  и частоту  $\omega_1$  колебаний;

2) найденная амплитуда является первым приближением величины  $\alpha_1$ ; далее строим графики  $G(j\omega)/\alpha_1$  и определяем значения  $k$  и  $\Phi$  по величине  $G(j \cdot 3\omega_1)/\alpha_1$  при условии, что график  $G(j\omega)/\alpha_1$  наложен на графики  $-1/(\alpha_1 N_3)$ ;

3) по значению  $k$  находим  $\alpha_3$  и строим график  $G(j\omega)/\alpha_3$ ; после этого определяем значения  $k$  и  $\Phi$  в точке  $G(j\omega_1)/\alpha_3$ ;

4) операции пунктов 2) и 3) повторяем до тех пор, пока значения  $k$  и  $\Phi$  для двух последовательных шагов не будут примерно одинаковыми. При некотором навыке все эти действия можно проделать за короткое время.

Теперь сделаем несколько общих замечаний. На рис. 7.8, а и б изображены годографы для диапазона изменений  $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$  от  $k = 0,5$  до  $k = 4$ .

На практике преобладают объекты управления, динамические свойства которых описываются низкочастотными фильтрами. Для таких систем амплитуда третьей гармоники будет всегда меньше  $\frac{1}{4}$  амплитуды основной гармоники. Таким образом, требуется довольно сложный объект (например, объект с резонансом вблизи третьей гармоники) для того, чтобы существенное влияние оказывала именно третья гармоника.

**Пример 7.3.** Рассмотрим систему управления (см. рис. 6.5), включающую объект с передаточной функцией  $G(p) = 160/[p(p+4)(p+10)]$ , и нелинейность типа ограничителя. Передаточная функция  $G(p)$  определяет фильтр низких частот. Фазовая характеристика  $G(p)$  достигает  $-180^\circ$  при частоте  $\omega = 6,3$ . Для однозначных нелинейностей эта частота представляет собой также и частоту автоколебаний. Амплитуда автоколебаний определяется при этом следующим образом: коэффициент передачи  $G(p)$  при  $\omega = 6,3$  приблизительно равен 0,32. Это означает, что  $N = 1/0,32$ , где  $N = 4/\pi\hat{e}$  (см. табл. 6.2); амплитуда автоколебаний  $\hat{e} = 0,405$ .

Используя  $\hat{e}$  в качестве первой оценки для  $\alpha_1$  и пересчитывая годограф  $G(j\omega)$  в  $G(j\omega)/\alpha_1$ , нетрудно заметить, что точка  $G(j \cdot 3\omega_1)/\alpha_1$  попадает в область, ограниченную окружностью  $k = 4$  (рис. 7.8, б). Последнее означает, что амплитуда третьей гармоники значительно меньше четверти амплитуды первой гармоники.

Хотя кривые для  $k > 4$  не показаны, можно оценить величину третьей гармоники с большой степенью точности. Предлагаем это проделать самостоятельно в качестве упражнения (см. упражнение 7.1).

Гармоники, отличные от третьей, могут быть найдены таким же образом при условии, что известна соответствующая эквивалентная передаточная функция для двухчастотного входного сигнала.

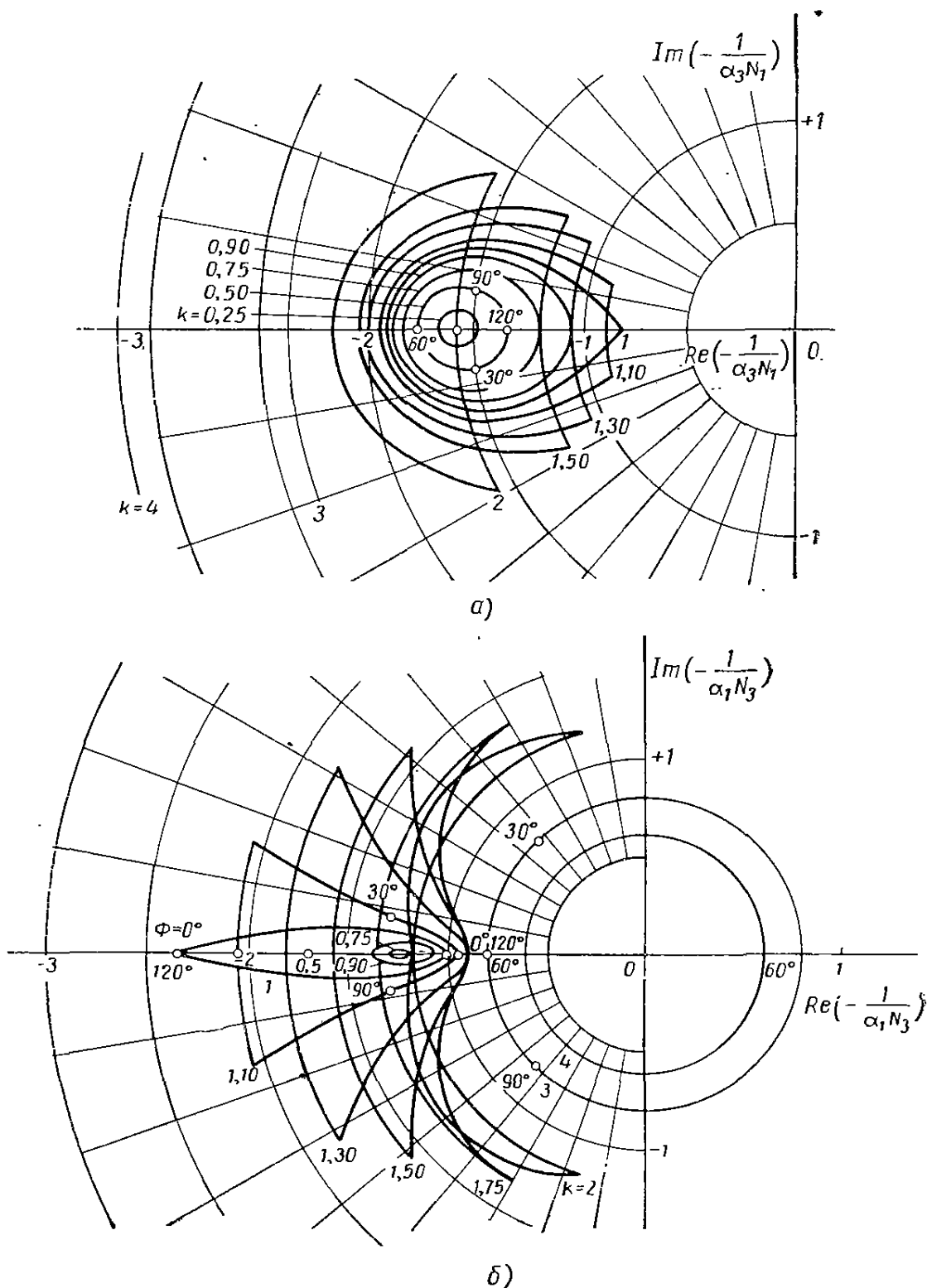


Рис. 7.8. Нормированные отрицательные обратные эквивалентные передаточные функции для двух сигналов идеального реле с единичным выходным сигналом, где  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  — амплитуды первой и третьей гармоник входного сигнала:

а — график основной эквивалентной передаточной функции  $N_1(\alpha_1, \alpha_3)$ ; б — график эквивалентной передаточной функции по третьей гармонике  $N_3(\alpha_1, \alpha_3)$  при различных соотношениях  $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$

## 2. Определение условий синхронизации

Явление синхронизации относится к очень своеобразному виду нелинейных колебаний. Оно возникает в тех случаях, когда система, в которой установились автоколебания с периодом  $T_1$ , подвергается периодическому воздействию с периодом  $T_2 \neq T_1$  (обычно  $T_2 < T_1$ ). Когда входной сигнал имеет малую амплитуду, выходной сигнал системы содержит обе частотные

составляющие  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  и  $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$  и их гармоники. Если  $T_1$  и  $T_2$  не пропорциональны, то выходной сигнал не будет периодическим. С увеличением амплитуды входного сигнала может наступить такой момент, когда выходной сигнал станет периодической функцией с периодом  $T_2$ .

Другими словами, выходной сигнал будет синхронизирован с входным\*.

Таким образом, когда имеет место явление синхронизации, в системе не только прекращаются автоколебания с частотой  $\omega_1$ , но и возникают колебания с частотой  $\omega_2$  или кратной ей, и, следовательно, синхронизация или вынужденные колебания наиболее вероятны в том случае, когда  $\omega_1$  близко к  $\omega_2$  или кратно  $\omega_2$ .

Пусть в системе возникли автоколебания с периодом  $T_1$ , затем на ее вход подали сигнал  $R \left[ \sin \left( \frac{2\pi}{T_2} \right) t \right]$ ; области синхронизации при этом определяются отношением  $T_1/T_2$  в зависимости от  $R$ . Эти области на рис. 7.9 заштрихованы. Отсюда видно, что при возникновении явления синхронизации период автоколебаний уменьшается. Покажем, как можно проанализировать вынужденные колебания или явление синхронизации, используя понятие эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала.

Системе, приведенной на рис. 6.5, прежде всего должны быть свойственны автоколе-

бания. Это означает, что существует частота  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ , при которой выполняется следующее условие:

$$N(\hat{e}) G(j\omega_1) = -1,$$

где  $N(\hat{e})$  — обычная эквивалентная передаточная функция.

Теперь для входного сигнала  $R \sin \left[ \left( \frac{2\pi}{T_2} \right) t + \theta \right]$  необходимо потребовать, чтобы  $3T_2 < T_1$ , если нам нужно исследовать синхронизацию с периодом, близким к  $3T_2$ . Для сигнала на входе нелинейности в виде

$$e(t) = \alpha_1 \sin \left[ \left( \frac{2\pi}{3T_2} \right) t + \Phi \right] + \alpha_3 \left[ \sin \left( \frac{2\pi}{T_2} \right) t \right]$$

можно сразу же написать следующие два уравнения, пользуясь понятием эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала:

$$N_1(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) G \left( j \frac{2\pi}{3T_2} \right) = -1, \quad (7.24a)$$

$$N_3(\alpha_1, \alpha_3, \Phi) G \left( j \frac{2\pi}{T_2} \right) = \frac{R}{\alpha_3} (\cos \theta + j \sin \theta) - 1. \quad (7.24b)$$

\* Следует отметить, что явление синхронизации широко используется для получения телевизионного изображения.

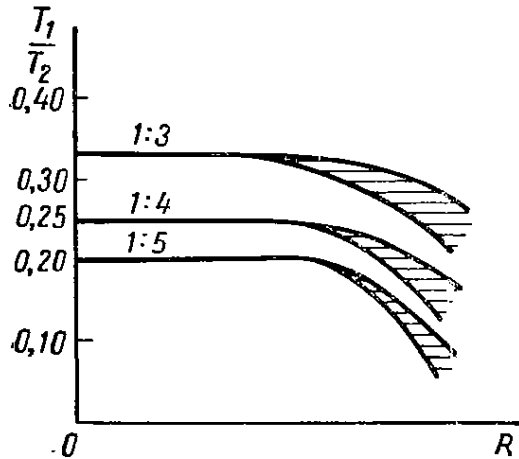


Рис. 7.9. Зоны синхронизации в типовой автоколебательной системе при нескольких отношениях  $\frac{T_1}{T_2}$

Заметим, что решение уравнений (7.22) для определения третьей гармоники и уравнений (7.24) для определения условий вынужденных колебаний может оказаться очень трудным. При этом, возможно, придется прибегать к численным методам решения, используя цифровые вычислительные машины.

Для упрощения вычислений могут быть использованы следующие положения. Рассмотрим эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала

$$e(t) = \alpha_1 \sin(\omega t + \theta) + \alpha_h \sin h\omega t,$$

где  $h$  — целое число.

Если  $h$  достаточно велико, т. е. частоты далеки друг от друга, то можно считать, что значения фазы  $\theta$  становятся малыми, а эквивалентные передаточные функции  $N_1$  и  $N_h$  принимают действительные значения. Для наших целей составляющую более низкой частоты можно аппроксимировать постоянным сигналом. Это позволяет использовать методы, изложенные в § 7.1.

Если отношение амплитуд  $\alpha_1/\alpha_h$  достаточно велико, то функции  $N_1$  и  $N_h$  вновь можно считать действительными и использовать те же приближения.

#### 7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ДВУХЧАСТОТНОГО ВХОДНОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОЗНАЧНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Определить эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала — это значит найти составляющие выходного сигнала нелинейного элемента, когда входной сигнал состоит из двух синусоидальных составляющих. Требуется найти составляющие выхода только при значениях частот входного сигнала и тем не менее для большинства нелинейностей это сделать достаточно трудно.

Полезный подход, пригодный для анализа однозначных нелинейностей, когда частоты входного сигнала  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы \* либо когда амплитуда или частота одной составляющей значительно больше, чем другой, заключается в представлении соотношения между входным и выходным сигналами в интегральной форме. Эта форма записи, кажущаяся на первый взгляд довольно громоздкой, во многих случаях после ряда преобразований может быть сведена к известным функциям, таким как гипергеометрические функции или эллиптические интегралы. Этот подход широко использовался Беннетом, Райсом и другими авторами \*\*.

Прежде всего рассмотрим интеграл вида

$$f(e) = \int_0^{\infty} \frac{\sin e\lambda}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & e > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & e < 0, \end{cases} \quad (7.25)$$

\* Это имеет место, когда отношение  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  не является рациональным числом.

\*\* См. работу [81], в которой изложен этот метод более детально.

который определяет релейную функцию со значениями  $\pm \left(\frac{\pi}{2}\right)^*$ . Используя соотношение (7.25), можно описать следующие нелинейности:

1) идеальную релейную характеристику

$$f_1(e) = \frac{2U}{\pi} = \int_0^{\infty} \frac{\sin e\lambda}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} U, & e > 0; \\ -U, & e < 0; \end{cases} \quad (7.26)$$

2) идеальную характеристику однополупериодного выпрямителя

$$f_2(e) = \frac{e}{2} + \frac{e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin e\lambda}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} e, & e > 0; \\ 0, & e < 0; \end{cases} \quad (7.27)$$

3) релейную характеристику с зоной нечувствительности

$$\begin{aligned} f_3(e) &= \frac{U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e-c)\lambda + \sin(e+c)\lambda}{\lambda} d\lambda = \\ &= \frac{2U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin e\lambda \cos c\lambda}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} U, & e > c; \\ 0, & -c < e < c; \\ -U, & e < -c; \end{cases} \end{aligned} \quad (7.28)$$

\* Для того чтобы показать это, рассмотрим интеграл  $I(v, e) = \int_0^{\infty} [\exp(-v\lambda)] \times$   
 $\times [(\sin e\lambda)/\lambda] d\lambda$ , который после дифференцирования по параметру равен  $\frac{\partial I}{\partial v} =$   
 $= - \int_0^{\infty} [\exp(-v\lambda)] (\sin e\lambda) d\lambda = - \frac{e}{v^2 + e^2}$ .

Следовательно,

$$I(v, e) = - \int [e/(v^2 + e^2)] dv + k = -\text{arctg}(v/e) + k.$$

Так как  $\lim_{v \rightarrow \infty} I(v, e) = 0$ , то получим

$$k = \lim_{v \rightarrow \infty} \text{arctg}\left(\frac{v}{e}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & e > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & e < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$I(v, e) = \int_0^{\infty} [\exp(-v\lambda)] [(\sin e\lambda)/\lambda] d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{v}{e}\right), & e > 0; \\ -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{v}{e}\right), & e < 0, \end{cases}$$

и поэтому

$$I(0, e) = f(e) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & e > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & e < 0. \end{cases}$$

4) характеристику с ограничением

$$\begin{aligned}
 f_4(e) &= \frac{e+U}{2} + \frac{e+U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e+U)\lambda}{\lambda} d\lambda - U - \\
 &\quad - \frac{e-U}{2} - \frac{e-U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(e-U)\lambda}{\lambda} d\lambda = \\
 &= \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos e\lambda \sin U\lambda}{\lambda} d\lambda + \frac{2U}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin e\lambda \cos U\lambda}{\lambda} d\lambda = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin e\lambda \sin U\lambda}{\lambda^2} d\lambda = \begin{cases} -U, & e < -U; \\ e, & -U < e < U; \\ U, & e > U. \end{cases} \quad (7.29)
 \end{aligned}$$

Для всех приведенных выше функций  $e$  представляет собой входной сигнал;  $f(e)$  — сигнал на выходе нелинейности. Для того чтобы найти эквивалентную передаточную функцию по входным сигналам  $x$  и  $y$ , необходимо найти амплитуду и фазу выходного сигнала при соответствующих частотах.

Для определенности рассмотрим характеристику идеального реле в виде (7.26). Пусть входной сигнал  $e$ , действующий на нелинейность, равен

$$e(x, y) = P (\cos x + k \cos y), \quad (7.30)$$

где  $x = \omega_1 t + \theta_1$ ;  $y = \omega_2 t + \theta_2$ .

Имея в виду, что амплитуда  $P$  в случае идеальной релейной характеристики не влияет на выходной сигнал  $f(e)$ , представим его в следующем виде:

$$f(x, y) = \begin{cases} +U, & \cos x + k \cos y > 0; \\ -U, & \cos x + k \cos y < 0. \end{cases} \quad (7.31)$$

Функция  $f(x, y)$ , очевидно, является периодической по обоим аргументам  $x$  и  $y$ , т. е.

$$f(x, y) = f(x \pm 2m\pi, y \pm 2n\pi); \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (7.32)$$

Такие функции могут быть разложены в двойные ряды Фурье\*:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_{\pm mn} \cos(mx \pm ny) + B_{\pm mn} \sin(mx \pm ny)], \quad (7.33)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 A_{\pm mn} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos(mx \pm ny) dy dx; \\
 B_{\pm mn} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin(mx \pm ny) dy dx; \\
 A_{00} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) dy dx; \\
 B_{00} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

\* См., например, работу [77]. В уравнении (7.33) форма записи  $A_{\pm mn} \cos(mx \pm ny)$  используется для обозначения членов  $A_{mn} \cos(mx + ny) + A_{mn} \cos(mx - ny)$ . То же относится к форме записи  $B_{\pm mn} \sin(mx \pm ny)$ .



Из условий симметричности имеем  $B_{\pm mn} \equiv 0$  для всех  $m$  и  $n$ ; более того,  $A_{+mn} = A_{-mn}$ . Следовательно, можно отбросить знаки «+» и «-» перед индексом.

Подставляя теперь выражение (7.26) в формулу (7.34), получим

$$A_{mn} = \frac{U}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{\sin(\cos x + k \cos y) \lambda d\lambda}{\lambda} \right] \cos(mx + ny) dy dx. \quad (7.35)$$

Изменив порядок интегрирования, найдем

$$A_{mn} = \frac{U}{\pi^3} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy \{ \sin[(\cos x + k \cos y) \lambda \cos(mx + ny)] \}. \quad (7.36)$$

Последнее выражение после интегрирования примет вид

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{4U}{\pi} (-1)^{\frac{m+n-1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{J_n(k\lambda) J_m(\lambda)}{\lambda} d\lambda, & \text{если } m + n - \text{нечетные;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7.37)^*$$

Известно, что \*\*

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(a\lambda) J_m(b\lambda)}{\lambda^r} d\lambda = \frac{a^n \Gamma\left(\frac{n+m-r+1}{2}\right)}{2^r b^{n-r+1} \Gamma\left(\frac{-n+m+r+1}{2}\right) \Gamma(n+1)} \times \\ \times F\left[\frac{n+m-r+1}{2}, \frac{n-m-r+1}{2}, n+1, \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \\ \text{при } n+m-r+1 > 0, r > -1 \text{ и } 0 < a < b; \quad (7.38a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(a\lambda) J_m(b\lambda)}{\lambda^r} d\lambda = \\ = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{r-1} \Gamma(r) \Gamma\left(\frac{n+m-r+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{-n+m+r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+m+r+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+r+1}{2}\right)} \\ \text{при } n+m+1 > 0, r > 0 \text{ и } a = b; \quad (7.38b)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(a\lambda) J_m(b\lambda)}{\lambda^r} d\lambda = \frac{b^m \Gamma\left(\frac{n+m-r+1}{2}\right)}{2^r a^{m-r+1} \Gamma\left(\frac{n-m+r+1}{2}\right) \Gamma(m+1)} \times$$

\* Здесь были использованы следующие тождества:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin \Phi) \cos 2n\Phi d\Phi = J_{2n}(z);$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(z \sin \Phi) \sin(2n+1)\Phi d\Phi = J_{2n+1}(z),$$

где  $J_n(x)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $n$ .

\*\* См., например, работу [132].

$$\times F \left[ \frac{n+m-r+1}{2}, \frac{-n+m-r+1}{2}, m+1, \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]$$

$$\text{при } n+m-r+1 > 0, r > -1 \text{ и } 0 < b < a, \quad (7.38\text{в})$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  — гипергеометрическая функция и  $\Gamma(x)$  — гамма-функция\*. Таким образом,

$$A_{mn} = \frac{2U}{\pi} (-1)^{\frac{(m+n-1)}{2}} \frac{k^n \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-n+m}{2}\right) \Gamma(n+1)} \times \\ \times F\left(\frac{n+m}{2}, \frac{n-m}{2}, n+1, k^2\right) \text{ при } k < 1; \quad (7.39\text{а})$$

$$A_{mn} = \frac{2U}{\pi} (-1)^{\frac{(m+n-1)}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-n+m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+n+m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+2}{2}\right)} \\ \text{при } k = 1; \quad (7.39\text{б})$$

$$A_{mn} = \frac{2U}{\pi} (-1)^{\frac{(m+n-1)}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{k^m \Gamma\left(\frac{n-m+2}{2}\right) \Gamma(m+1)} \times \\ \times F\left[\frac{n+m}{2}, \frac{m-n}{2}, m+1, \left(\frac{1}{k}\right)^2\right] \text{ при } k > 1. \quad (7.39\text{в})$$

Предположим, что входные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы, т. е. отношение  $\omega_1/\omega_2$  не является рациональным числом; тогда эквивалентная передаточная функция для двухчастотного входного сигнала с составляющими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равна  $A_{10}/P$  и  $A_{01}/kP$  соответственно. Для идеального реле имеем

$$A_{10} = \frac{4U}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, k^2\right); \quad A_{01} = \frac{2Uk}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, k^2\right). \quad (7.40)$$

Следует напомнить, что коэффициенты  $A_{10}$  и  $A_{01}$  не являются исчерпывающими для определения выходного сигнала, когда составляющие частоты входного сигнала соизмеримы. Например, если  $x = \omega t + \theta$ ,  $y = 3\omega t$ , то коэффициенты  $A_{10}, A_{21}, A_{41}, A_{72}, \dots$  определяют составляющие различных частот выходного сигнала, когда входной сигнал имеет частоту  $\omega$ . Аналогично все коэффициенты  $A_{01}, A_{30}, A_{61}, A_{92}, \dots$  определяют компоненты выходного сигнала, когда входной имеет частоту  $3\omega$ . Кроме того, фазовые соотношения, связанные с этими компонентами, также необходимо учитывать всякий раз, когда входные частоты соизмеримы. Коэффициент  $A_{mn}$  при  $k < 1$  изменяется в основном пропорционально  $k^n$ , и если  $k$  достаточно малое число, то значением  $A_{mn}$  для  $n > 3$  можно пренебречь.

Одна из областей применения, где представление об эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала может оказаться полезным, — это теория колебательных сервомеханизмов.

\* См., например, работу [197].

В § 6.6 было показано, что одним из наиболее важных показателей, характеризующих эффективность системы управления, являются автоколебания, которые происходят при значительном увеличении усиления системы, связанном с получением заданного верхнего предела полосы пропускания системы, а, следовательно, и малого времени протекания в ней переходных процессов. Эта полоса пропускания и время протекания переходных процессов в системе недостижимы, так как их получение означало бы неустойчивость системы. В частности, если система в целом линейна, то в ней необходимо обеспечить запас устойчивости по амплитуде в 10 дБ или более, а также соответствующий запас устойчивости по фазе.

Интересно отметить, что в нелинейных системах эта величина запаса устойчивости иногда является ненужной. Действительно, в случае колебательного сервомеханизма система колеблется со своей собственной частотой.

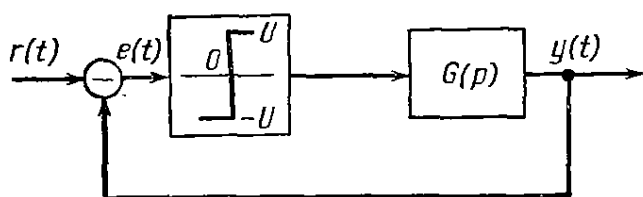


Рис. 7.10. Системы управления с идеальным реле. Эта схема составляет основу любого колебательного сервомеханизма

Ограничения характеристики реле используются для того, чтобы помешать выходному сигналу расти до недопустимых значений. Конечным результатом является максимальное использование полосы пропускания системы, так как усиление эквивалентной системы затем устанавливается автоматически в пределах 6 дБ или меньше критического усиления. Это является примером

умелого проектирования системы, в которой нелинейность намеренно вводится для улучшения характеристики системы.

Методику расчета колебательного сервомеханизма обычно приписывают Лозьеру [135], [189]. Достоинства такого подхода лучше всего оценить с помощью эквивалентной передаточной функции для двухчастотного сигнала.

Рассмотрим релейную систему, изображенную на рис. 7.10, с уровнем реле  $U = 1$ . Допустим, что в этой системе при отсутствии входного сигнала  $r(t)$  возникают автоколебания с частотой  $\omega_0$ . Изучим ее поведение, когда на вход подан сигнал  $r(t)$ . Для упрощения вычислений предположим, что  $r(t)$  изменяется достаточно медленно по сравнению с частотой автоколебаний  $\omega_0$ , так что за несколько циклов  $\omega_0$  сигнал  $r(t)$ , в сущности, можно считать постоянным.

Кроме того, допустим, что амплитуда  $r(t)$  мала.

При условии, что  $G(j\omega)$  характеризует фильтр низких частот, входной сигнал, подаваемый на реле  $e(t)$ , можно аппроксимировать следующим образом:

$$e(t) = \alpha + \beta \sin \omega_0 t, \quad (7.41)$$

где  $\alpha$  — средняя величина входного сигнала за несколько циклов колебаний системы.

Если  $r(t)$  — постоянная величина, то может быть использован результат раздела 7.1, где из формулы (7.6), полагая  $A = B$ , получим соотношения

$$N_{dc}(\alpha, \beta) = \frac{2A}{\pi\alpha} \arcsin \frac{\alpha}{\beta}; \quad (7.42a)$$

$$N_{\omega_0}(\alpha, \beta) = \frac{4A}{\pi\beta} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}. \quad (7.42b)$$

\* См. работы [57], [114], [135], [189].

Если  $\alpha/\beta \rightarrow 0$ , то  $N_{dc} \rightarrow 2A/\pi\beta$ , а  $N_{\omega_0} \rightarrow 4A/\pi\beta$ . При  $\alpha/\beta < 0,8$  будем иметь

$$1 > \frac{N_{dc}}{N_{\omega_0}} > \frac{1}{2}. \quad (7.43)$$

Из соотношения (7.43) видно, что при  $\alpha/\beta < 0,8$  эквивалентное усиление  $N_{dc}$  по постоянной составляющей будет всегда меньше усиления по переменной составляющей, которое и определяет предельное усиление системы. Однако  $N_{dc}$  может быть не более чем на 6 дБ ниже предельного усиления. Так как в линейной системе обычно требуется запас устойчивости около 10 дБ или больше, то колебательный сервомеханизм может достичь предельного усиления.

Действительно, если функция  $r(t) = R \sin \omega_s t$  и  $\omega_s \ll \omega_0$ , или если две частоты несоизмеримы, то при  $k = \beta/\alpha > 1$  составляющие выходного сигнала реле можно определить по соотношению (7.39в). Поскольку гипергеометрическая функция  $F(a, b, c, x)$  может быть представлена в виде ряда

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots, \quad (7.44)$$

то для  $\alpha/\beta < 1$  получим

$$N_{\omega_0} = \frac{2U}{\pi\beta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \\ = \frac{2U}{\pi\beta} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{3}{64} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 + \dots\right]; \quad (7.45a)$$

$$N_{\omega_s} = \frac{4U}{\pi\beta} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) = \\ = \frac{4U}{\pi\beta} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \frac{3}{64} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 - \dots\right]. \quad (7.45б)$$

Из последних соотношений снова следует, что  $N_{\omega_s}/N_{\omega_0} \rightarrow 1/2$ , когда  $\alpha/\beta \rightarrow 0$ , т. е.  $N_{\omega_s}$  может быть не более чем на 6 дБ ниже предельного усиления.

Отметим еще некоторые особенности колебательного сервомеханизма, которые оказываются исключительно полезными при их практическом использовании. Во-первых, этот класс систем обладает своего рода адаптацией, так как в случае объектов управления высокого порядка в системе сохраняются колебания во всем диапазоне изменения параметров. В частности, если линейная часть  $G(j\omega)$  такова, что ее амплитудно-фазовая характеристика пересекает отрицательную часть мнимой оси почти под прямым углом, то частота автоколебаний будет относительно независимой от изменений ее параметров.

Во-вторых, из-за высокой частоты автоколебаний можно ожидать, что переходный процесс в системе будет достаточно быстрым.

Покажем на примерах, как проявляются перечисленные свойства.

**Пример 7.4.** Рассмотрим систему, приведенную на рис. 7.10. Если  $G(p) = B [1 - (p/b)]/[p(p+a)]$ , то нетрудно показать (предлагаем проделать это самостоятельно), что для этой системы при отсутствии сигнала на входе на выходе будут колебания с амплитудой  $\hat{y} = 4BU/\pi ab$  и частотой  $\omega_0 = \sqrt{ab}$ .

Поставим следующие вопросы:

1. Каково среднее значение выходного сигнала  $y(t)$  системы в установившемся состоянии, если входной сигнал постоянен и равен  $R$ ?

2. Сколь быстро будет отслеживать система ступенчатый входной сигнал  $r(t)$ , если  $U = 2$ ,  $B = 10 \text{ сек}^{-2}$ ,  $b = 25 \text{ сек}^{-1}$  и  $a = 1 \text{ сек}^{-1}$ .

3. Каковы преимущества и недостатки этого типа автоколебательного сервомеханизма по сравнению с обычным сервомеханизмом, где реле заменяется линейным усилителем с коэффициентом  $k$  и имеющим насыщение при  $u = \pm U$ ? Допустим, что усиление  $k$  таково, что замкнутая система устойчива, а ее относительный коэффициент демпфирования равен  $\xi = 0,48$ .

**Решение.** 1. В силу интегрирующих свойств линейного элемента сигнал  $e$  на входе линейного элемента имеет нулевое среднее значение. Это означает, что в установившемся состоянии среднее значение  $y(t)$  равно  $R$ .

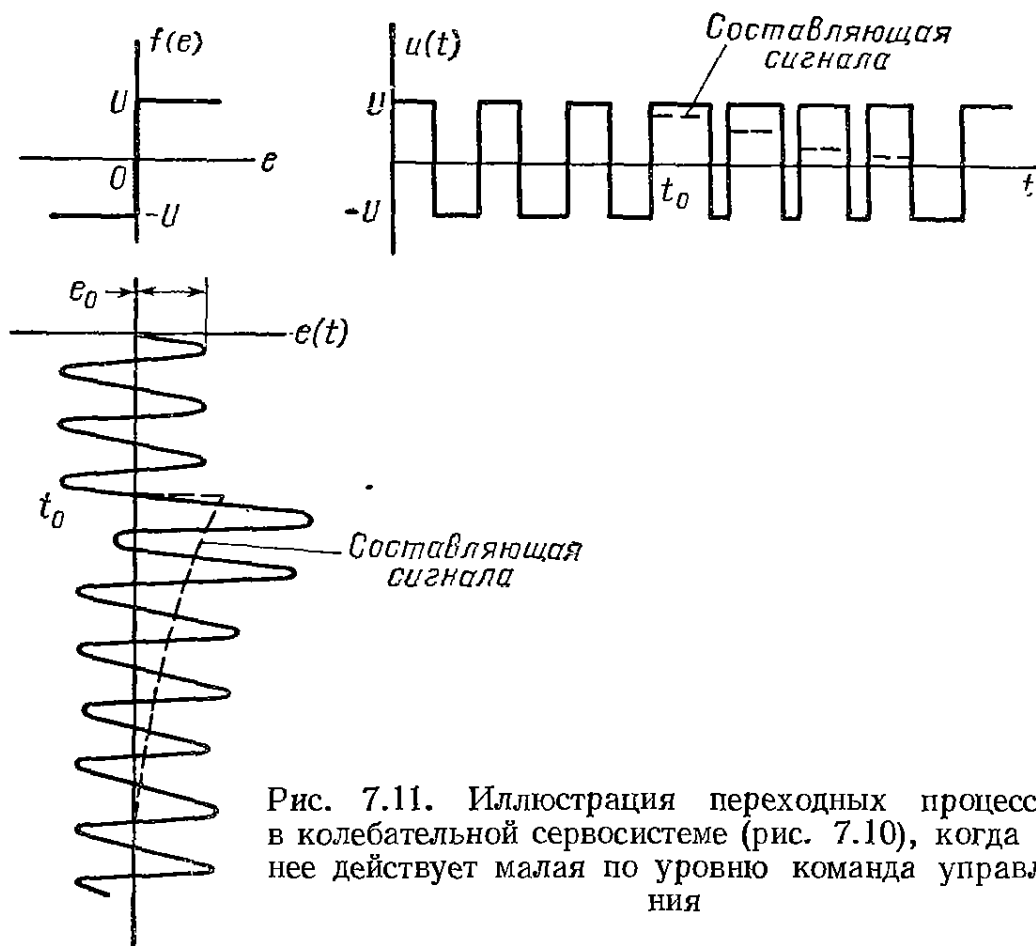


Рис. 7.11. Иллюстрация переходных процессов в колебательной сервосистеме (рис. 7.10), когда на нее действует малая по уровню команда управления

2. Пусть входные сигналы (см. рис. 7.10) имеют следующий вид:

$$r(t) = R_0; \quad t < t_0; \quad r(t) = R_0 + R_1; \quad t > t_0. \quad (7.46)$$

Предположим, что при  $t = t_0$  система находится в установившемся состоянии: ее выходной сигнал  $y$  имеет среднюю величину  $\bar{y} = R_0$ , а сигнал на входе реле в среднем равен нулю.

Далее при  $t = t_0$  входной сигнал изменяется скачком на  $R_1$ . Пусть  $\hat{e}_0$  — амплитуда автоколебаний на выходе, тогда сначала рассмотрим случай малых ступенчатых изменений входного сигнала  $|R_1| < \hat{e}_0$ . Из рис. 7.11 можно заметить, что переходный процесс от прежнего равновесного состояния (средняя величина  $y = R_0$  при  $t < t_0$ ) стремится к новому положению равновесия (средняя величина  $y = R_0 + R_1$ ). Последнее связано с непрерывным периодическим переключением реле. Можно ожидать, что время перехода будет порядка величины периода автоколебаний.

Рассмотрим случай  $|R_1| > \hat{e}_0$  (см. рис. 7.10). Если  $R_1 > 0$ , то  $e(t)$  будет оставаться больше нуля до тех пор, пока  $y$  не увеличится настолько, чтобы свести сигнал  $e$  до нуля. В этот момент вновь возникают колебания. Теперь положим  $R_1 \gg \hat{e}_0$ ; тогда время переходного процесса будет приблизительно равно времени, в течение которого выход линейного объекта изменяется от величины  $R_0$  до  $R_0 + R_1$ , когда на входе линейного объекта сигнал равен  $U$ . Приблизительно переходный процесс описывается функцией

$$\left. \begin{aligned}
 y(t - t_0) &\approx R_0 + \frac{UB \left(1 + \frac{a}{b}\right)}{a^2} [e^{-a(t-t_0)} - 1] + \\
 &+ \frac{UB}{a} (t - t_0); \quad t_0 \leq t \leq t_0 + t_1; \\
 y(t_1) &\approx R_0 + R_1; \quad R_1 \gg \hat{e}_0,
 \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

где  $t_1$  — время протекания переходного процесса.

С учетом численных значений параметров уравнения (7.47) принимают вид

$$\left. \begin{aligned}
 y(t - t_0) &\approx R_0 + 20,8 [e^{-(t-t_0)} - 1] + 20(t - t_0); \\
 y(t_1) &\approx R_0 + R_1; \quad t_0 \leq t \leq t_0 + t_1.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

Амплитуда автоколебаний приближенно равна  $\hat{e}_0 \approx 1,0$ .

Рассмотрим теперь ступенчатое изменение сигнала, большее чем  $\hat{e}_0$ , например  $R_1 = 8$ ; тогда по уравнению (7.48) определим  $t_1 = 1,1$  сек.

Переходный процесс в рассматриваемой системе при ступенчатом изменении сигнала  $R_1 = 8$  был получен на аналоговой вычислительной машине [кривая  $y_1(t)$ , рис. 7.12, а]. До того момента, когда на систему был подан ступенчатый входной сигнал, в системе имели место устойчивые автоколебания. Рис. 7.12, а позволит определить ряд характеристик системы, которые приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Сравнение измеренных и вычисленных величин для примера 7.4

Характеристики системы	Измеренные величины	Вычисленные величины
Амплитуда $\hat{e}_0$ . . . . .	1,2	1,0
Частота $\omega_0$ . . . . .	4,3 сек <sup>-1</sup>	5,0 сек <sup>-1</sup>
Время переходного процесса * при ступенчатом изменении входного сигнала $R_1 = 8$ . . . . .	1,3 сек	1,1 сек

\* Здесь время протекания переходного процесса определяется до момента, когда выходной сигнал  $y$  достигает величины  $R_0 + R_1$ .

3. Возможность управления объектом зависит от имеющейся мощности. Следовательно, когда сравнивается работа различных типов сервомеханизмов при одном и том же объекте, важно, чтобы предельное значение управляющего воздействия сохранялось одним и тем же. В нашей задаче величина управления  $u$  ограничена уровнем  $\pm U$ .

Для линейных сервомеханизмов с насыщением по уровню  $\pm U$  коэффициент усиления  $k$  можно выбрать таким, чтобы при работе на линейном участке система была устойчивой и имела приемлемое затухание. Характеристическое уравнение при работе в линейной зоне равно  $p^2 + [a - (kB/b)]p + kB = 0$ , или

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0, \quad (7.49)$$

где

$$\omega_n = \sqrt{kB}; \quad \xi = \frac{a - \frac{\omega_n^2}{b}}{2\omega_n} = \frac{a - \frac{kB}{b}}{2\sqrt{kB}}. \quad (7.50)$$

Пусть  $k = 0,1$ ,  $B = 10$  сек<sup>-2</sup>, а  $\omega_n = 1$  сек<sup>-1</sup> и  $\xi = 0,48$ . Эта система была также промоделирована на аналоговой вычислительной машине. Переходный процесс при ступенчатом изменении  $R_1 = 8$  описывается кривой  $y_2(t)$  (см. рис. 7.12, а).

Сравнивая характеристики переходного процесса колебательного сервомеханизма  $y_1(t)$  и линейной системы  $y_2(t)$  (см. рис. 7.12, а), отметим, что переходный процесс в линейной системе имеет большую длительность, нежели в автоколебательном сервомеханизме. Причина

этого заключается в том, что колебательный сервомеханизм использует всю мощность управления. Линейный сервомеханизм с насыщением не использует в полной мере имеющуюся мощность.

Теперь рассмотрим некоторые адаптивные свойства колебательного сервомеханизма. В реальных условиях параметры объекта управления могут изменяться в широких пределах, причем закон изменения их может быть и неизвестен. Типичным примером такого поведения

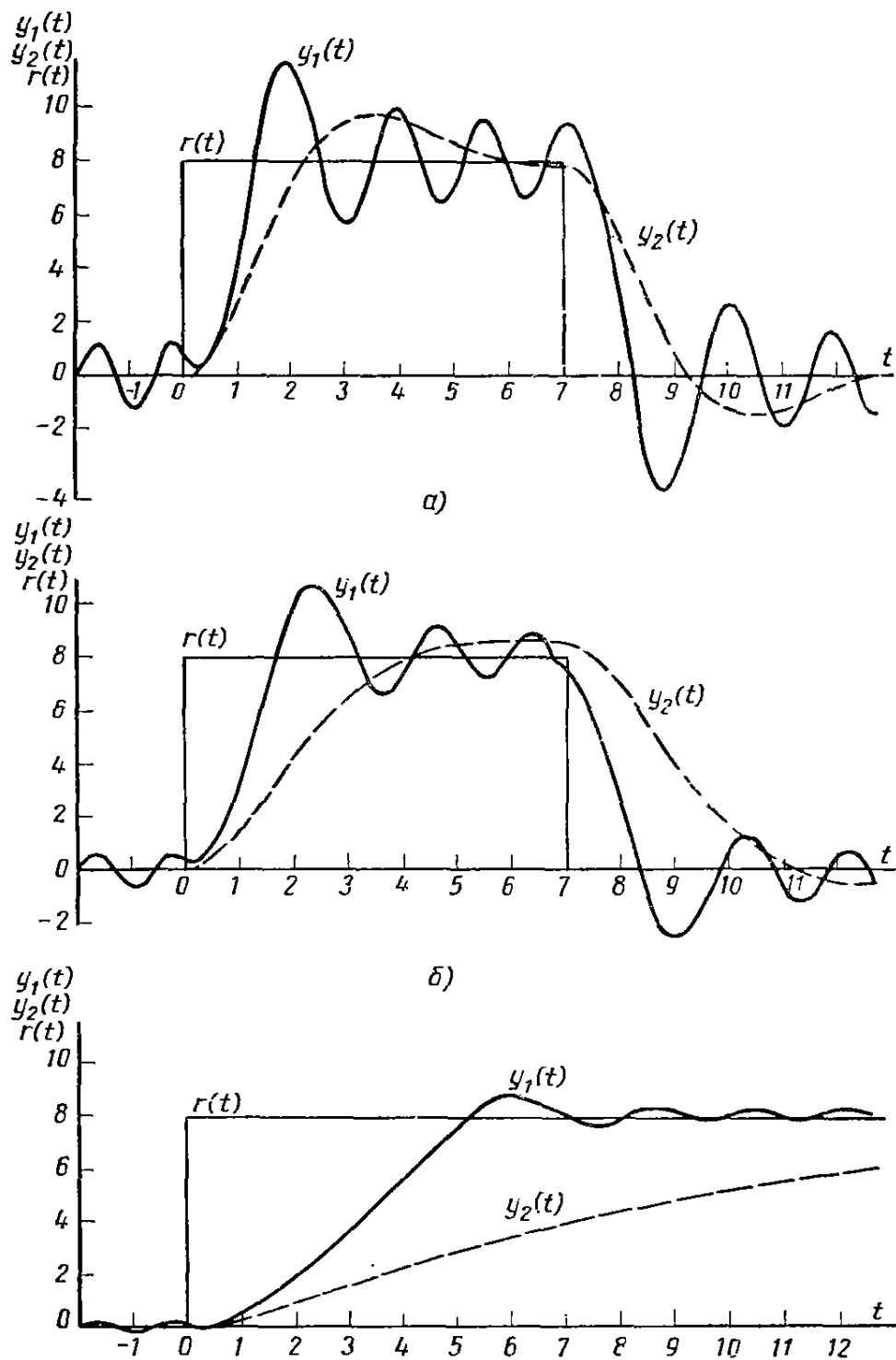


Рис. 7.12. Переходные процессы в колебательной  $y_1(t)$  и линейной  $y_2(t)$  сервосистеме (пример 7.4) при действии ступенчатого входного сигнала:

а — при  $B = 10 \text{ сек}^2$ ; б — при  $B = 5 \text{ сек}^2$ ; в — при  $B = 1 \text{ сек}^2$

является полет ракеты при изменяющихся условиях внешней среды. Причем, когда проектируется линейное управляющее устройство с учетом ограничения управляющего воздействия, нужно сначала определить возможные диапазоны изменения параметров объекта, а затем найти такое усиление управляющего устройства, которое обеспечивает устойчивую работу всей системы.

На рис. 7.12, б, в показаны переходные процессы в системе при коэффициентах объекта усиления  $B = 5 \text{ сек}^{-2}$  и  $B = 1 \text{ сек}^{-2}$ . При этом видно, что переходный процесс при автоколебательном сервомеханизме протекает значительно быстрее, чем при линейном. В автоколебательных системах независимо от величины параметров объекта управления эквивалентный

коэффициент усиления реле будет регулировать величину предельного коэффициента усиления. Это значит, что установившаяся амплитуда колебаний  $\hat{e}_0$  будет функцией параметров объекта управления\*. Последнее хорошо видно из рис. 7.12, б и в.

Рассмотрим поведение колебательного сервомеханизма с другой точки зрения. Предположим, что, спустя некоторое число циклов, входной сигнал  $r(t)$  изменился, но незначительно. Тогда приближенно можно считать, что  $r(t)$  представляет постоянную величину. Если бы сигнал  $r(t)$  поддерживался равным  $R$ , то сигнал  $\bar{y}(t) = R$ . Таким образом, если  $r(t)$  изменяется достаточно медленно, то сигнал на входе реле может быть представлен в виде  $e_s + \hat{e}_0 \sin \omega_0 t$ , где  $e_s/\hat{e}_0$  мало. В этом случае соотношения (7.42) будут справедливыми. Из соотношения (7.42а) нетрудно получить эквивалентную передаточную функцию по постоянной составляющей в виде  $N_s(e_s, \hat{e}_0) \approx (2U/\pi e_s) \arcsin(\hat{e}_s/e_0)$ ; причем зависимость постоянных

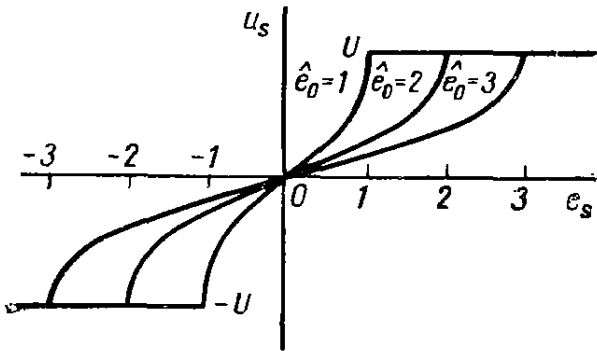


Рис. 7.13. Зависимость между постоянной составляющей выходного и входного сигналов для идеального реле при переменных амплитудах колебательной составляющей  $\hat{e}_0$

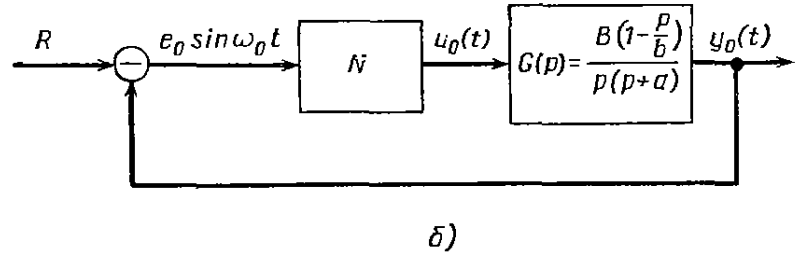
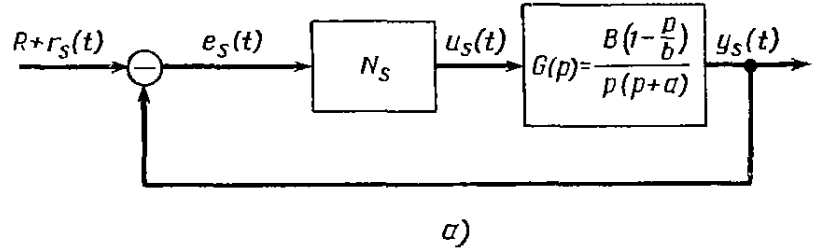


Рис. 7.14. Структурная схема системы управления примера 7.4:

а — для низкочастотной составляющей; б — для высокочастотной составляющей

составляющей выхода и входа показана на рис. 7.13. Из рисунка видно, что с ростом переменной составляющей характеристика реле линейризуется.

Обозначая эквивалентную передаточную функцию по постоянной составляющей через  $N_s$ , а по переменной составляющей через  $N_{\omega_0}$ , получим

$$\frac{2U}{\pi \hat{e}_0} < N_s < \frac{U}{\hat{e}_0}; \quad |e_s| < \hat{e}_0 \quad (7.51a)$$

или

$$\frac{1}{2} < \frac{N_s}{N_{\omega_0}} < 1; \quad e_s < 0,8 \hat{e}_0. \quad (7.51б)$$

Две эквивалентные структурные схемы системы — одна по переменной составляющей, другая по постоянной составляющей показаны на рис. 7.14, а и б, где  $R$  — постоянная составляющая входного сигнала, а  $r_s(t)$  — медленно меняющаяся компонента.

Неравенство (7.15б) показывает еще раз, что при определенных значениях отношения  $|e_s|/\hat{e}_0$  эквивалентное усиление по постоянному сигналу всегда меньше, чем по переменной составляющей, которое, в свою очередь, характеризует предельное усиление системы. Тем не менее эквивалентное усиление по постоянному сигналу никогда не может более, чем на 6 дб, отличаться от предельного усиления.

\* Частота автоколебаний в данном случае изменяется незначительно (Прим. ред.).



В заключение отметим следующие основные достоинства колебательного сервомеханизма:

- 1) эквивалентная система для постоянного сигнала всегда устойчива; более того, она всегда будет работать немного ниже предела устойчивости;
- 2) небольшие скачки ступенчатого входного сигнала отрабатываются в течение периода автоколебаний.

Иногда автоколебания сервомеханизма являются нежелательными, то тогда надо стремиться сделать амплитуду автоколебаний как можно меньшей. Может оказаться, что колебательный сервомеханизм представляет собой подсистему большей системы и колебания его выходного сигнала будут отфильтровываться элементами большей системы. Тогда в выходном сигнале большей системы эти колебания не будут наблюдаться. И, наконец, во многих случаях малая переменная составляющая может улучшить работу системы, так как она уменьшает влияние нелинейностей, таких, как люфт и сухое трение\*.

Как правило, переменная составляющая поступает в систему извне. Высокочастотный сигнал на входе реле оказывает линеаризирующее действие, причем усиление низкочастотного сигнала зависит от амплитуды высокочастотного управляющего сигнала. Таким образом, имеется простой способ получения требуемого усиления системы.

## 7.6. Краткое содержание

Эквивалентная передаточная функция для двухчастотного входного сигнала представляет собой логическое расширение того же понятия для случая одночастотного входного сигнала. Она определяет эквивалентное усиление по двум различным составляющим сигнала, который проходит через заданную нелинейность. Тот факт, что используются две частотные составляющие, а не одна, делает эквивалентную линеаризацию по двухчастотному входному сигналу более точной, чем обычная линеаризация. При вычислении эквивалентных передаточных функций для двухчастотного входного сигнала принимаются во внимание амплитуды входного и выходного сигнала и сдвиг фазы по обеим составляющим. Всеми остальными составляющими пренебрегают.

Вообще говоря, вычисление эквивалентной передаточной функции для двух входных сигналов даже для простых однозначных нелинейностей — достаточно трудоемкая задача. Только простейшие нелинейности типа степенных функций и идеальное реле позволяют получить эквивалентные передаточные функции в замкнутой форме. Для случая других нелинейностей эквивалентные передаточные функции для двухчастотного входного сигнала можно определить с помощью цифровых вычислительных машин, используя численные методы.

Эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала можно применить для исследования субгармонических колебаний (§ 7.2), для нахождения дополнительных гармоник автоколебаний (§ 7.3) и для анализа явления синхронизации (§ 7.3).

Если одна из частотных составляющих, которая должна быть проанализирована, является постоянной, то применение эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала становится намного проще. Это показано в § 7.1. Действительно, когда частота одной составляющей

---

\* В системах управления с гидравлическими усилителями переменная составляющая уничтожает явление облитерации («залипания» плунжера гидравлического усилителя) и тем самым обеспечивает работоспособность системы (Прим. ред.).

значительно выше другой, то в качестве основной составляющей можно выбрать постоянную составляющую, что значительно упрощает расчеты. Используя этот факт, можно проанализировать работу целого класса систем, известных как колебательные сервомеханизмы (§ 7.5). Данный класс систем обнаруживает свойства адаптации, связанные с нечувствительностью частоты автоколебаний к изменениям параметров объекта.

Если частоты составляющих входного сигнала несоизмеримы или их амплитуды или частоты значительно отличаются, то эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала для случая некоторых типовых нелинейностей можно определить, описав нелинейность в интегральной форме (§ 7.4). В остальных случаях следует прибегать к помощи вычислительных машин.

## 7.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

7.1. Объясните, почему обратная эквивалентная передаточная функция для двухчастотного сигнала  $1/(\alpha_1 N_3)$  для идеального реле, изображенная на рис. 7.8, б, представляет собой окружности для  $k \geq 3$ , и найдите амплитуду составляющей третьей гармоники в примере 7.3.

7.2. Проанализируйте решение уравнения Дуффинга (пример 7.2) при  $a < 0$ . Возможно ли в системе

- появление субгармонических колебаний;
- явление синхронизации?

7.3. Рассмотрите автономную систему (Фитце), показанную на рис. 6.5, состоящую из линейного объекта

$$G(p) = \frac{p^2}{[(p + 0,01)^2 + (0,9)^2] [(p + 0,01)^2 + (1,1)^2]}$$

и нелинейности  $f(e) = 10e^3$  [51]. Покажите, что:

- для этой системы выполняется гипотеза Калмана. Докажите, что применение метода гармонической линеаризации исключает возможность автоколебаний;
- используя эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала, покажите, что в системе возникают автоколебания вида  $e = \alpha \sin(\omega t + \Phi) + \beta \sin 3\omega t$ . Найдите величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  и  $\Phi$ .

7.4. Определите эквивалентную передаточную функцию для двухчастотного входного сигнала, если нелинейность задана функцией

$$f(e) = e |e|;$$

сигнал на входе имеет вид

$$e(t) = \alpha_1 \sin(\omega t + \Phi) + \alpha_h \sin h\omega t.$$

Найдите  $N_1(\alpha_1, \alpha_h, \Phi)$  и  $N_h(\alpha_1, \alpha_h, \Phi)$  для  $h = 2, 3, 4$ .

7.5. Рассмотрите, при каких условиях система, показанная на рис. 6.5, имеет предельный цикл, если пользоваться эквивалентной передаточной функцией для двухчастотного сигнала, а не обычной эквивалентной передаточной функцией.

7.6. В качестве примера, раскрывающего трудности, с которыми связано применение эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала, рассмотрите задачу определения амплитуды третьей гармоники автоколебаний, которые описываются уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + 10(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

7.7. Для системы, показанной на рис. 7.15, найдите постоянную составляющую, амплитуду и частоту колебаний для  $R = 0$  и  $R = 8$ . Оцените величину третьей гармоники колебаний.

7.8. Проанализируйте систему из примера 7.1, если  $A = 2$ ,  $B = 1$  и  $G(p) = 60/[(p + 1)(p + 2)(p + 3)]$ , построив кривые, подобные изображенным на рис. 7.3, а, б, в.

7.9. Докажите следующие утверждения относительно эквивалентной передаточной функции (7.20):

- для заданных величин  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ , когда  $\Phi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , годограф  $-(1/N_1)$  описывает окружность на плоскости комплексного переменного;
- все эти окружности расположены внутри сектора, показанного на рис. 7.7.

7.10. Составьте блок-схему программы для цифровой вычислительной машины для вычисления и построения годографов  $-(1/N_1)$  и  $-(1/N_2)$  эквивалентной передаточной функции для нелинейности типа ограничения. Покажите, что годографы необходимо нормировать. Обсудите порядок построения сеток кривых  $-(1/N_2)$  и  $-(1/N_1)$  для удобства проектирования систем управления.

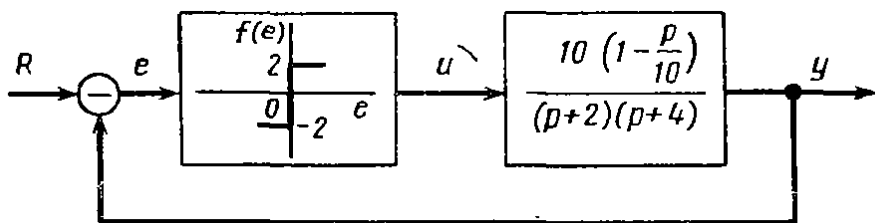


Рис. 7.15. Структурная схема колебательного сервомеханизма к упражнению 7.7

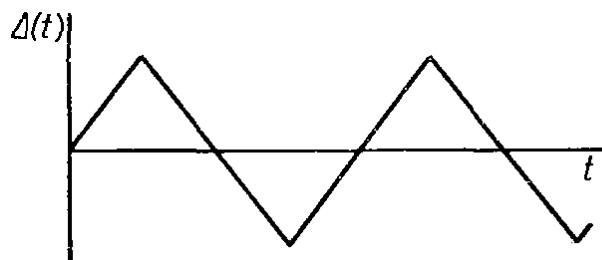


Рис. 7.16. Треугольный симметричный сигнал, используемый в упражнении 7.11

7.11. Предположим, что входной сигнал симметричного идеального реле имеет вид  $r_s(t) + \Delta(t)$ , где  $r_s(t)$  — медленно меняющаяся составляющая сигнала и  $\Delta(t)$  — симметричный периодический сигнал треугольной формы (рис. 7.16). Покажите, что из определения эквивалентной передаточной функции для двухчастотного сигнала следует, что всякий раз, когда амплитуда  $r_s(t)$  меньше, чем  $\Delta(t)$ , эквивалентное усиление реле по медленно меняющейся составляющей  $r_s(t)$  линейно.

## 7.8. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Дж. Вест и его ученики предложили новое понятие эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала и проделали огромную работу, обобщив ее в гл. 10 и 11 работы [196].

Отметим важную, но малоизвестную статью З. Боненна [23] об эквивалентной линеаризации при двухчастотном входном сигнале.

Принцип работы колебательного сервомеханизма рассматривался в работах [135] и [189]. В работе [189] приведен обзор науки об автоматическом управлении. Хотя эта работа написана в 1954 г., ее не следует оставлять без внимания.

Дж. С. Лозьер, которому принадлежит разработка метода расчета колебательных сервомеханизмов, опубликовал лишь часть результатов в открытой литературе [128].

Колебательные сервомеханизмы были широко исследованы в диссертации А. Гелба, существо которой изложено в работе [57]. Адаптивные свойства колебательных сервомеханизмов используются в системах управления летательными аппаратами [180].

## ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Обычная эквивалентная передаточная функция и эквивалентная передаточная функция для двухчастотного входного сигнала являются приближенными, и поэтому всегда существует сомнение в применимости этих методов.

Как правило, в системах трудно выделить линейную и нелинейную части. В этих случаях вообще не представляется возможным пользоваться приближенными методами. И в качестве основного метода исследований применяются точные методы, которые также основываются на математических моделях. Сами же математические модели не всегда могут служить точным аналогом реальной системы. Тогда динамические процессы в реальной системе и модели сильно различаются. И применять точный метод не имеет смысла.

В этой и следующих главах будут рассматриваться точные методы анализа и синтеза систем управления. Эти методы можно разделить на два класса: методы, обеспечивающие точное количественное решение, и методы, дающие качественное решение. Главы, посвященные второму методу Ляпунова и методу В. М. Попова, позволяют получать лишь качественные результаты. Здесь основное внимание сосредоточено на анализе устойчивости систем управления и определения достаточных условий устойчивости.

В третьей части книги излагаются методы, дающие количественные решения на основе условий оптимальности. Эти условия позволяют во многих случаях синтезировать оптимальные законы управления.

Данная глава посвящена точным методам анализа релейных систем управления. С помощью этих методов удастся установить не только условия существования предельных циклов или субгармоник, но и определить величины периодов и амплитуд этих колебаний.

В настоящее время релейные системы управления получили широкое распространение. Этому способствовало в значительной мере и то, что реле является весьма простым и достаточно быстродействующим силовым устройством управления. Быстрота срабатывания реле и позволяет при надлежащем подборе остальных устройств управления получать системы, оптимальные по быстродействию. К числу недостатков релейных систем управления следует отнести их склонность к колебаниям. В правильно спроектированной системе такие явления можно избежать; примером могут служить релейные сервомеханизмы, синтез которых изложен в гл. 7.

Будем рассматривать релейные системы, структурная схема которых представлена на рис. 8.1. Релейные устройства в таких системах могут иметь зону нечувствительности, гистерезис или одновременно то и другое. Соответствующие этим случаям релейные характеристики показаны на рис. 8.2.

Изложение материала данной главы аналогично изложению метода эквивалентной линеаризации. Здесь также сначала предполагается та или иная форма решения, а затем устанавливается возможность его существования. Следует сразу же отметить, что бывает очень трудно установить заранее форму решения. Однако встречающиеся на практике релейные характеристики ограничивают формы выходного сигнала некоторыми типовыми (рис. 8.3).

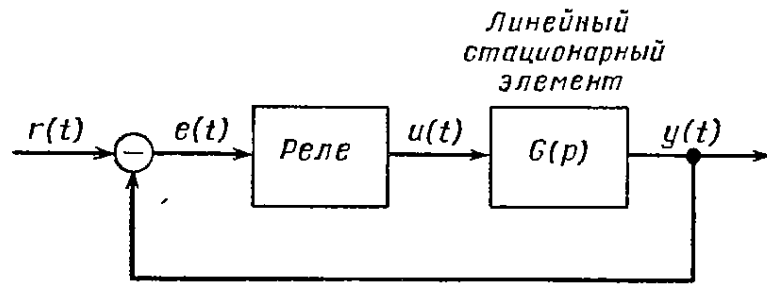


Рис. 8.1. Структурная схема релейной системы управления

В релейных системах управления полезно выделить те параметры, которые определяют форму выходного сигнала или сигнала внутри самой системы. Эти параметры определяют период колебаний и тип предельного цикла. Они рассматриваются отдельно от такой группы параметров, как усиление, полюсы или нули линейной передаточной функции.

Эти параметры определяют период колебаний и тип предельного цикла. Они рассматриваются отдельно от такой группы параметров, как усиление, полюсы или нули линейной передаточной функции.

Эти параметры определяют период колебаний и тип предельного цикла. Они рассматриваются отдельно от такой группы параметров, как усиление, полюсы или нули линейной передаточной функции.

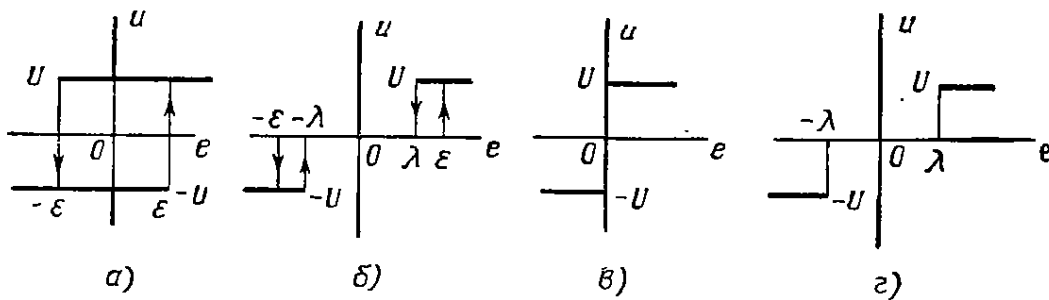


Рис. 8.2. Виды релейных характеристик:

а — реле с гистерезисом; б — реле с зоной нечувствительности и гистерезисом; в — идеальное реле; г — реле с зоной нечувствительности

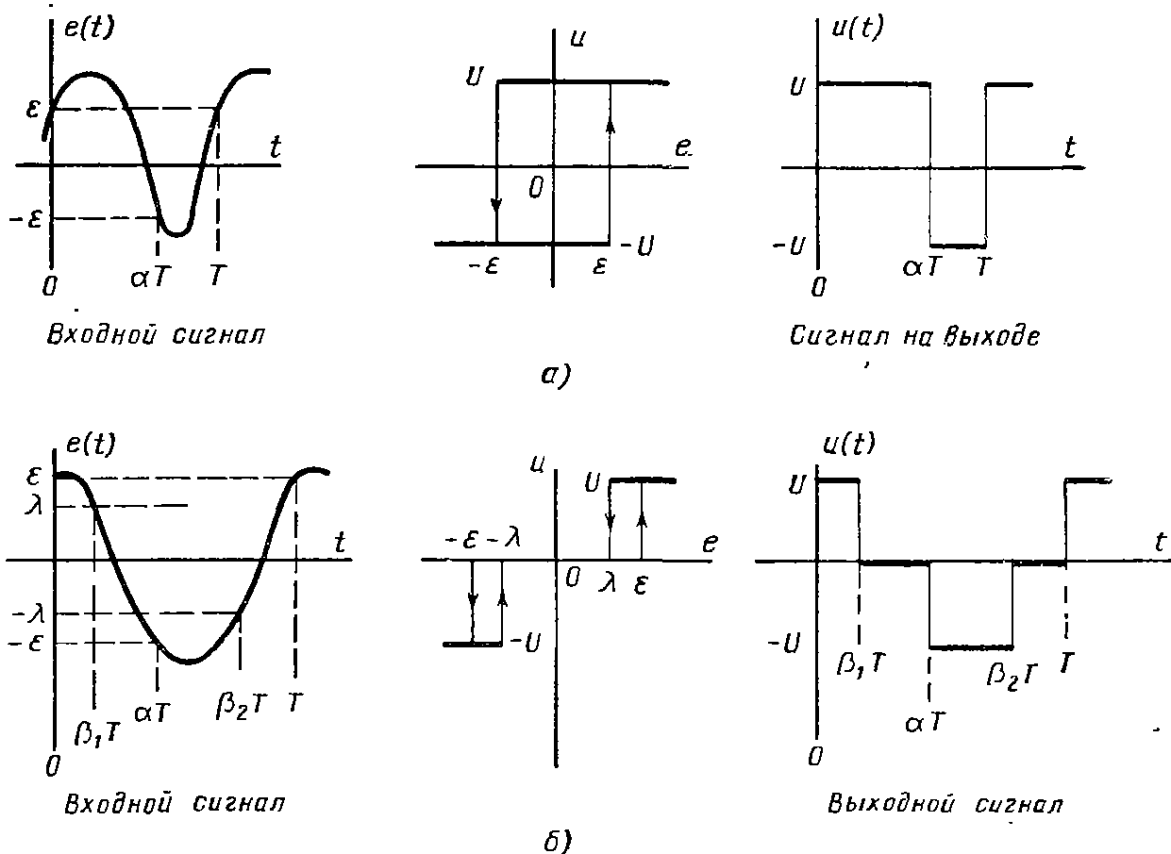


Рис. 8.3. Сигналы на входе и выходе различных типов реле:

а — с гистерезисом; б — с зоной нечувствительности и гистерезисом

Предполагая, что в релейной системе возникают колебания, можно представить следующие постановки задач анализа и синтеза:

1) Анализ. Параметры системы и форма сигнала на выходе реле заданы. Требуется определить значения амплитуды и частоты периодических колебаний.

2) Синтез. Задан меандровый сигнал на выходе реле. Требуется определить параметры системы управления, при которых периодические колебания обладают определенными характеристиками.

Некоторые методы анализа импульсных систем с большим успехом могут применяться для исследования релейных систем. В первую очередь это следует отнести к обычному и модифицированному  $z$ -преобразованиям\*. Для читателей, не знакомых с этими видами преобразований, в конце книги приведено приложение II, где изложены теоретические основы методов  $z_m$ - и  $z$ -преобразований.

### 8.1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЕ ВХОДНОГО СИГНАЛА

Прежде чем исследовать периодические режимы в релейных системах управления, необходимо определить уравнения движения системы в общем виде. При этом следует помнить, что если входной сигнал и начальные условия известны, то можно определить характеристики релейной системы. На рис. 8.1 изображена структурная схема с релейной характеристикой, показанной на рис. 8.2, а\*\*.

Выходной сигнал реле в этом случае имеет вид (рис. 8.3, а)

$$u(t) = Uk \left[ \mu_{-1}(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \mu_{-1}(t - t_k) \right], \quad (8.1)$$

где  $k = \pm 1$  указывает на полярность сигнала реле при  $t = 0$ ;  $\mu_{-1}$  — единичная ступенчатая функция\*\*\*,  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — временная последовательность моментов включения реле.

Реакцию линейного элемента на этот сигнал запишем в виде

$$y(t) = y_0(t) + Uk \left[ h(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h(t - t_k) \right], \quad (8.2)$$

где

$$h(t) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] = \begin{cases} \int_0^t g(\tau) d\tau, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

представляет собой характеристику переходного процесса линейного элемента. Здесь  $g(t)$  — импульсная переходная функция, а  $y_0(t)$  — реакция на начальные условия. Входной сигнал реле в соответствии с рис. 8.1 равен

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad (8.4)$$

\* В настоящей книге используется одна из форм модифицированного  $z$ -преобразования — модифицированное  $z$ -преобразование с опережением (Прим. ред.).

\*\* Анализ систем управления с другими релейными характеристиками может быть выполнен по этой же методике.

\*\*\* Здесь имеем

$$\mu_{-1}(t) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Если моменты переключения  $t_k$  известны, то временная функция  $y(t)$  определяется соотношением (8.2). Таким образом, задача построения переходного процесса заключается в определении моментов включения. Для релейной характеристики, показанной на рис. 8.2, а, моменты переключения определяются из уравнений

$$e(t_k) = \varepsilon k (-1)^k; \dot{e}(t_k) k (-1)^k > 0, \quad (8.5)$$

которые нетрудно получить, анализируя рис. 8.3, а.

При заданных входном сигнале  $r(t)$  и реакции на начальные условия  $y_0(t)$  уравнения (8.2), (8.4) и (8.5) позволяют получить моменты переключения и реакцию  $y(t)$  между переключениями. Введем обозначение

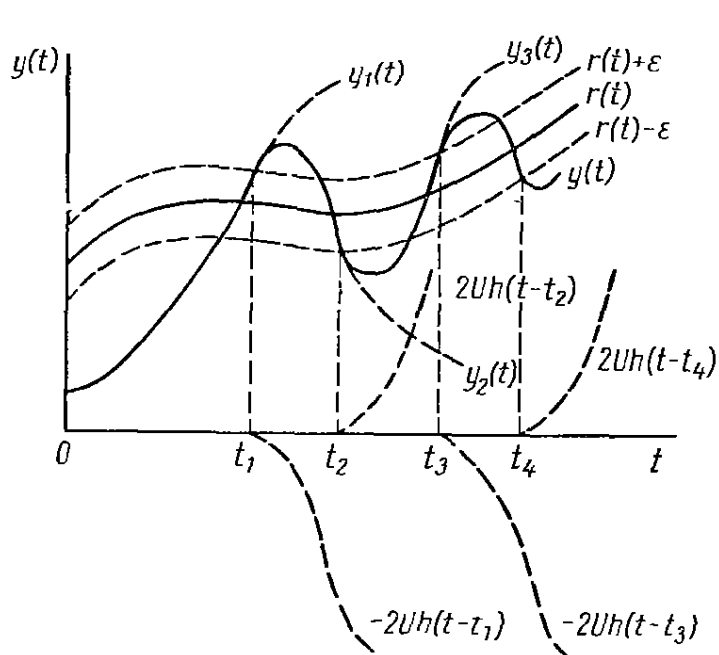


Рис. 8.4. Графический способ определения сигнала на выходе релейной системы управления с помощью метода суперпозиции [см. выражения (8.7) — (8.10)]

$$y_{n+1}(t) = y_0(t) + Uk \left[ h(t) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k h(t - t_k) \right]. \quad (8.6)$$

Сравнивая уравнения (8.2) и (8.6), найдем, что

$$y_{n+1}(t) = y(t); \quad 0 \leq t \leq t_{n+1}. \quad (8.7)$$

Тогда уравнения (8.6) можно записать в следующем виде:

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + 2Uk (-1)^n h(t - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

Из уравнений (8.4) и (8.5) следуют соотношения для определения моментов переключения

$$y_{n+1}(t_{n+1}) = r(t_{n+1}) - k (-1)^{n+1} \varepsilon, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Из уравнений (8.2) и (8.4) найдем

$$k = \text{sign} |r(0) - y_0(0)|. \quad (8.10)$$

Уравнения (8.7) — (8.10) полностью определяют выходной сигнал системы управления. Они используются для графического или аналитического построения переходных процессов. Определяющим условием для применения того или иного метода построения переходного процесса является сложность системы управления. Графический способ отыскания переходного процесса в релейной системе показан на рис. 8.4.

## 8.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ И УСЛОВИЯ ИХ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Для релейного элемента без зоны нечувствительности выходной сигнал запишем в виде

$$u_{\text{п}}(t) = U \sum_{k=0}^{\infty} \{ \mu_{-1}(t - kT) - 2\mu_{-1}[t - (k + \alpha)T] + \mu_{-1}[t - (k + 1)T] \}; \quad (8.11a)$$

$$u_{\pi}(t) = U \sum_{k=0}^{\infty} \{ \mu_{-1}(t - kT) - \mu_{-1}[t - (k + \beta_1)T] - \\ - \mu_{-1}[t - (k + \alpha)T] + \mu_{-1}[t - (k + \beta_2)T] \}. \quad (8.116)$$

В данном случае  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — параметры сигнала, которые следует найти, используя уравнения системы. Если эти параметры удастся вычислить, то периодическое движение предполагаемой формы действительно существует.

Заметим, что если найдены колебания вида (8.11), то это еще не означает, что другие виды колебаний не существуют. Таким образом, теоретически должны быть проверены все возможные в системе виды колебаний. Наиболее часто в релейных системах встречаются колебания, описываемые уравнениями (8.11). В данной главе мы ограничимся рассмотрением этого вида колебаний. Подобные колебания в теории релейных систем принято именовать главными колебаниями\*.

Главные колебания, как это следует из уравнений (8.11), являются несимметричными. Очень часто встречается особый случай симметричных колебаний, для которого имеем  $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $\beta_2 = \frac{1}{2} + \beta_1$ . Например, рассмотрим систему управления, состоящую из реле (см. рис. 8.3, а) и линейного объекта, передаточная функция которого  $G(p)$  имеет полюс при  $p = 0$ . Вследствие этого сигнал  $u(t)$  имеет нулевое среднее значение и  $\alpha = \frac{1}{2}$ . И вообще в произвольной системе управления с обратной связью при отсутствии возмущающего воздействия можно ожидать установления симметричных колебаний.

Предположение о симметричных колебаниях упрощает аналитические расчеты для систем с реле. Когда анализируется реле без зоны нечувствительности, то требуется определить только один параметр  $T$ ; если учесть влияние зоны нечувствительности, то появляется дополнительный параметр  $\beta_1$ . Предполагая, что в системе имеются только симметричные колебания, получим

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta_2 = \frac{1}{2} + \beta_1. \quad (8.12)$$

Для предполагаемого периодического сигнала на выходе реле вида (8.11) можно определить установившуюся составляющую на выходе линейного элемента  $y(t)$ , а затем сравнить  $y(t)$  с входным сигналом  $r(t)$  и установить, удовлетворяются ли условия переключения реле. Пусть  $e_{\pi}(t)$  представляет собой периодический входной сигнал для реле с периодом  $T$ . Из рис. 8.3 видно, что для реле без зоны нечувствительности условия переключения реле будут

$$\left. \begin{aligned} e_{\pi}(0) &= \varepsilon \text{ при } \dot{e}_{\pi}(0) > 0; \\ e_{\pi}(\alpha T) &= -\varepsilon \text{ при } \dot{e}_{\pi}(\alpha T) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.13a)$$

Для реле с зоной нечувствительности эти условия запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} e_{\pi}(0) &= \varepsilon \text{ при } \dot{e}_{\pi}(0) > 0; \quad e_{\pi}(\beta_1 T) = \lambda \text{ при } \dot{e}_{\pi}(\beta_1 T) < 0; \\ e_{\pi}(\alpha T) &= -\varepsilon \text{ при } \dot{e}_{\pi}(\alpha T) < 0; \quad e_{\pi}(\beta_2 T) = -\lambda \text{ при } \dot{e}_{\pi}(\beta_2 T) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.136)$$

\* Результаты этой главы можно распространить для анализа более сложных видов колебаний, однако при этом вычислительные трудности невероятно возрастают.



Эти зависимости обычно именуется условиями переключения. Для симметричных колебаний найдем, что некоторые из этих условий являются излишними.

Выражения (8.13 а, б) — необходимые условия для возникновения колебаний. Дополнительно к этому нужно также установить, что  $e_{\pi}(t)$  не имеет такой формы, которая вызывает включения реле в моменты времени, отличные от предполагаемых. Это означает, что для реле без зоны нечувствительности выполняются условия

$$\left. \begin{aligned} e_{\pi}(t) > -\varepsilon \text{ при } 0 \leq t < \alpha T; \\ e_{\pi}(t) < \varepsilon \text{ при } \alpha T \leq t < T, \end{aligned} \right\} \quad (8.14a)$$

а для реле с зоной нечувствительности — условия

$$\left. \begin{aligned} e_{\pi}(t) > \lambda \text{ при } 0 \leq t < \beta_1 T; \\ -\varepsilon < e_{\pi}(t) < \lambda \text{ при } \beta_1 T < t < \alpha T; \\ e_{\pi}(t) < -\lambda \text{ при } \alpha T \leq t < \beta_2 T; \\ -\lambda < e_{\pi}(t) < \varepsilon \text{ при } \beta_2 T < t < T. \end{aligned} \right\} \quad (8.14б)$$

Назовем зависимости (8.14а, б) условиями непрерывности. И в этом случае найдем, что для симметричных колебаний некоторые из условий (8.14) являются лишними. Условия (8.13) и (8.14) являются необходимыми и достаточными условиями для существования автоколебаний. На практике часто достаточно проверить справедливость только необходимых условий переключения (8.13), после чего получают параметры периодического сигнала, и с их помощью можно вычислить периодическую характеристику  $e_{\pi}(t) = r_{\pi}(t) - y_{\pi}(t)$ , которая и должна удовлетворять условиям (8.14).

### 8.3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ $z$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

Э. Джури [89] показал, как модифицированное  $z$ -преобразование\* может быть использовано для определения периодических процессов в системах управления с линейными объектами, на которые действует периодический сигнал. Можно распространить этот метод на более широкий класс стационарных линейных объектов с передаточными функциями  $G(p)$ , содержащими полюсы при  $p = 0$  или даже в правой полуплоскости [141]. В последнем случае начальные условия должны обеспечивать существование периодических колебаний в системе.

Рассмотрим основные колебания, определяемые уравнением (8.11). Применяя к ним преобразование Лапласа, получим\*\*:

1) для реле без зоны нечувствительности

$$\begin{aligned} U_{\pi}(s) &= \frac{U}{s} (1 - 2e^{-\alpha Ts} + e^{-Ts}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sTk} = \\ &= \frac{U(1 - 2e^{-\alpha Ts} + e^{-Ts})}{s(1 - e^{-Ts})} \text{ при } \operatorname{Re} s > 0; \end{aligned} \quad (8.15a)$$

\* Модифицированное  $z$ -преобразование и модифицированное  $z$ -преобразование с опережением в основном одинаковы. Первое из них отличается от второго наличием множителя  $z^{-1}$ . Здесь и в дальнейшем будет применяться модифицированное  $z$ -преобразование с опережением. Свойства обычного и модифицированных  $z$ -преобразований изложены в приложении II.

\*\* Здесь использовано следующее соотношение:  $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-sTk} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$ , которое справедливо, когда  $\operatorname{Re} s > 0$ .

2) для реле с зоной нечувствительности

$$U_{\Pi}(s) = \frac{U}{s} (1 - e^{-\beta_1 Ts} - e^{-\alpha Ts} + e^{-\beta_2 Ts}) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sTk} = \frac{U(1 - e^{\beta_1 Ts} - e^{-\alpha Ts} + e^{-\beta_2 Ts})}{s(1 - e^{-sT})} \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 0. \quad (8.156)$$

Преобразование Лапласа выходного сигнала линейного элемента запишем в виде

$$Y(s) = Y_0(s) + U_{\Pi}(s) G(s), \quad (8.16)$$

где  $Y_0(s)$  — преобразование Лапласа реакции объекта  $y_0(t)$  на начальные условия.

Уравнение (8.16) можно записать в виде

$$Y(s) = Y_0(s) + \frac{U_1(s) G(s)}{1 - e^{-sT}}, \quad (8.17)$$

где

$$U_1(s) = U_{\Pi}(s) [1 - e^{-sT}]. \quad (8.18)$$

Из уравнения (8.15) для реле без зоны нечувствительности получим

$$U_1(s) = \frac{U}{s} (1 - 2e^{-\alpha Ts} - e^{-Ts}) \quad (8.19a)$$

и для реле с зоной нечувствительности

$$U_1(s) = \frac{U}{s} (1 - e^{-\beta_1 Ts} - e^{-\alpha Ts} + e^{-\beta_2 Ts}). \quad (8.19б)$$

Определим функцию  $Y_1(s)$  с помощью следующего выражения:

$$Y(s) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y_1(s)}{1 - e^{-sT}} = Y_1(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sTk}. \quad (8.20)$$

Приравнивая выражения (8.17) и (8.20), получим

$$Y_1(s) = (1 - e^{-sT}) Y_0(s) + U_1(s) G(s). \quad (8.21)$$

Обобщим полученные результаты в виде теоремы.

**Теорема 8.1.** Если функция  $Y_1(s)$  является аналитической\* в области  $\operatorname{Re} s \geq 0$ , то на выходе системы существуют установившиеся колебания  $y_{\Pi}(t)$  в виде

$$y_{\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_1(t + kT), \quad 0 \leq t < T. \quad (8.22)$$

Для доказательства найдем обратное преобразование Лапласа уравнения (8.20); в результате получим

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_1(t - kT). \quad (8.23)$$

Из определения преобразования Лапласа и аналитичности функции  $Y_1(s)$  в области  $\operatorname{Re} s \geq 0$  следует, что  $|y_1(t)| = |\mathcal{L}^{-1} Y_1(s)| < \gamma e^{-\delta t}$

\* Будем считать, что функция  $Y(s)$  комплексной переменной  $s$  аналитична в области комплексной плоскости, если она определена и дифференцируема внутри этой же области.

для некоторых  $\gamma, \delta > 0$ . Это значит, что ряд (8.23) сходится к периодическому установившемуся решению с периодом  $T$ , когда  $t \rightarrow \infty$ . Иначе говоря,

$$y_{\Pi}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} y(t + NT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_1[t + (N + k)T], \quad 0 \leq t < T,$$

откуда следует уравнение (8.22).

Уравнение (8.23) можно переписать в виде

$$y_{\Pi}(mT) = \lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{Y}_1(z, m); \quad 0 \leq m < 1, \quad (8.24)$$

где  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  — модифицированное  $z$ -преобразование с опережением функции  $y_1(t)$ , которое определяется следующим выражением:

$$\mathcal{Y}_1(z, m) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} y_1[(k + m)T^+] z^{-k}, \quad 0 \leq m < 1. \quad (8.25)^*$$

Уравнение (8.24) позволяет равноправно использовать таблицы любого из модифицированных  $z$ -преобразований \*\*. Предел при  $z \rightarrow 1$  существует, если  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  аналитична в области  $|z| \geq 1$  [см. уравнение (II.16) приложения II]. Это автоматически выполняется, если линейный элемент системы устойчив, т. е. когда все полосы  $G(s)$  и  $Y_0(s)$  лежат в области  $\operatorname{Re} s < 0$ . С другой стороны, необходимо выбрать такие начальные условия, при которых члены  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  с особенностями в области  $|z| \geq 1$  исключаются. Это лучше всего проиллюстрировать на конкретном примере.

**Пример 8.1.** Проанализируем колебания в системе управления (см. рис. 8.1) с реле без зоны нечувствительности (см. рис. 8.2, а). Для нее имеем

$$r(t) = R; \quad G(s) = \frac{a^3}{s^2(s+a)}; \quad (8.26)$$

$$Y_0(s) = \frac{x_{10}}{s} + \frac{x_{20}}{s^2} + \frac{x_{30}}{s+a}, \quad a > 0,$$

где  $R$  — постоянная величина;  $x_{10}, x_{20}, x_{30}$  — начальные условия при  $t = 0$ . Для определения главных колебаний в системе из уравнений (8.19а) и (8.21) получим следующее соотношение:

$$Y_1(s) = (1 - e^{-sT}) \left( \frac{x_{10}}{s} + \frac{x_{20}}{s^2} + \frac{x_{30}}{s+a} \right) + U(1 - 2e^{-\alpha Ts} + e^{-Ts}) \frac{a^3}{s^3(s+a)}. \quad (8.27)$$

Отметим, что полюс передаточной функции  $G(s)$  при  $s = 0$  определяет нулевое значение сигнала на входе линейного элемента, и, следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{2}. \quad (8.28)$$

\* См. приложение II.

\*\* Необходимо отметить, что выражение (8.24) справедливо и в том случае, если  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  — модифицированное  $z$ -преобразование. Это возможно потому, что в пределе при  $z \rightarrow 1$  оба модифицированных  $z$ -преобразования идентичны. Таким образом, обе таблицы применимы. В литературе на равных правах используются оба вида преобразований. В работах [90, 190] приводятся таблицы того и другого  $z$ -преобразования.

Применяя модифицированное  $z$ -преобразование с опережением\* к выражению (8.27) и используя соотношение (8.28), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(z, m) = & \frac{T \left( \frac{UTa^2}{4} + x_{20} \right)}{z-1} + U \left( \frac{T^2a^2m^2}{2} - aTm + 1 \right) + x_{20}Tm + \\ & + x_{10} - \frac{2Ue^{-aTm}}{z - e^{-aT}} \left( z - e^{-\frac{aT}{2}} \right) + (z-1)(U + x_{30}) \times \\ & \times \frac{e^{-aTm}}{z - e^{-aT}} \text{ для } 0 \leq m < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (8.29a)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_1(z, m) = & \frac{T \left( \frac{Ta^2U}{4} + x_{20} \right)}{z-1} - \frac{U}{2} \left\{ [Ta(1-m) + 1]^2 + \right. \\ & \left. + 1 - \frac{T^2a^2}{2} \right\} + Tmx_{20} + x_{10} + 2Ue^{-aTm} \left( e^{-\frac{aT}{2}} - 1 \right) \times \\ & \times \frac{z}{z - e^{-aT}} + (U + x_{30}) e^{-aTm} \frac{z-1}{z - e^{-aT}} \text{ для } \frac{1}{2} \leq m < 1. \end{aligned} \quad (8.29b)$$

Чтобы функция  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  была аналитической в области  $|z| \geq 1$ , нужно члены вида  $\frac{A}{z-1}$  приравнять нулю. Тогда получим

$$x_{20} = -\frac{Ta^2U}{4}. \quad (8.30)$$

Из соотношения (8.30) видно, что предел в выражениях (8.29a) и (8.29b) при  $z \rightarrow 1$  существует. Используя соотношения (8.24), получим

$$\begin{aligned} y_{II}(mT) = & x_{10} + U \left[ 1 - aTm - \frac{T^2a^2}{4} m(1-2m) \right] - \\ & - 2Ue^{-aTm} \frac{1 - e^{-\frac{aT}{2}}}{1 - e^{-aT}}, \quad 0 \leq m < \frac{1}{2}; \\ y_{II}(mT) = & x_{10} + \frac{U}{2} \left\{ \frac{T^2a^2}{2} (1-m) - [Ta(1-m) + 1]^2 - 1 \right\} + \\ & + 2Ue^{-aTm} \frac{e^{-\frac{aT}{2}} - 1}{1 - e^{-aT}}, \quad \frac{1}{2} \leq m < 1. \end{aligned} \quad (8.31)$$

При  $r(t) = R$ , используя выражения (8.31) и (8.13a), получим следующие условия переключения:

$$\left. \begin{aligned} y_{II}(0) &= R - \varepsilon = x_{10} - U\zeta(aT); \\ y_{II}\left(\frac{T}{2}\right) &= R - \varepsilon = x_{10} - \frac{Ta}{2}U + U\zeta(aT), \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

где

$$\zeta(aT) \triangleq \frac{\left(1 - e^{-\frac{aT}{2}}\right)^2}{1 - e^{-aT}} = \frac{\text{sh}^2\left(\frac{aT}{4}\right)}{\text{sh}\left(\frac{aT}{2}\right)}. \quad (8.33)$$

\* При взятии модифицированного  $z$ -преобразования с опережением следует воспользоваться теоремой сдвига [см. соотношения (II.12) и (II.13) в приложении II].

Из выражений (8.32) и (8.33) следует, что

$$x_{10} = R + \frac{aT}{4} U \quad (8.34)$$

и

$$\zeta(aT) = \frac{\varepsilon}{U} + \frac{aT}{4}. \quad (8.35)$$

Заметим, что можно всегда найти величину  $x_{10}$ , которая будет удовлетворять выражению (8.34). Однако из графика функции  $\zeta(aT)$ , изображенного на рис. 8.5, определим

$$\frac{4\zeta(aT)}{aT} \begin{cases} < 1 \text{ при } aT \neq 0; \\ = 1 \text{ при } aT = 0. \end{cases} \quad (8.36)$$

Отсюда видно, что для положительных  $\varepsilon$ ,  $U$  и  $a$  нельзя найти положительное  $T$ , удовлетворяющее выражению (8.35). Таким образом, наше предположение неверно, и, следовательно, в такой системе колебания существовать не могут.

**Пример 8.2.** Рассмотрим теперь ту же систему, заменив отрицательную обратную связь положительной. Нетрудно видеть (рис. 8.1, 8.2, а), что это соответствует замене знака  $U$  в уравнении реле. Таким образом, подставим  $U = -V$ ;  $V > 0$ . Тогда выражение (8.35) приводится к виду

$$\zeta(aT) = -\frac{\varepsilon}{V} + \frac{aT}{4}.$$

Этому условию можно удовлетворить, и, следовательно, при положительной обратной связи в системе могут существовать колебания. Однако при этом  $\varepsilon > 0$ , т. е. должен существовать гистерезис.

**Пример 8.3.** Рассмотрим систему с отрицательной обратной связью из примера 8.1,

принимая  $a < 0$ . Из выражения (8.27) следует, что объект управления неустойчив, так как полюс  $s = -a > 0$ . Это, в свою очередь, определяет полюс  $|z| = |e^{-aT}| > 1$  функции  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  (8.29). Таким образом, чтобы сделать функцию  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  аналитической в области  $|z| \geq 1$ , нужно не только исключить все члены вида  $\frac{A}{z-1}$ , как это сделано в примере 8.1,

но и исключить все члены вида  $\frac{B}{z - e^{-aT}}$ . Сделав это как в выражении (8.29а), так и в (8.29б), получим (упражнение 8.4)

$$x_{30} = -U\zeta(aT), \quad (8.37)$$

где  $\zeta(aT)$  — функция, определяемая соотношением (8.33). Условия (8.37) при этом удовлетворяются.

С учетом (8.37) функция  $\mathcal{Y}_1(z, m)$  будет аналитической при  $|z| \geq 1$ , и ее предел при  $z \rightarrow 1$  существует. В результате снова получим выражение (8.31), как и в примере 8.1. Условия переключения (8.34) и (8.35) сохраняются теми же, что и для случая  $a < 0$ . В заключение отметим, что условие (8.34) выполняется.

Имеем  $\zeta(-aT) = -\zeta(aT)$ ; если  $\varepsilon > 0$  и  $U > 0$ , то из выражения (8.35) следует, что величина  $T > 0$  может быть определена только при  $a < 0$ . Поэтому в системах управления двух последних примеров колебания могут существовать. Однако здесь снова должно выполняться условие  $\varepsilon > 0$ , т. е. нелинейность должна иметь гистерезис.

Как для примера 8.2, так и для примера 8.3 необходимые условия переключения (8.13а) выполняются. Для полной уверенности следует удовлетворять также условию (8.14 а). Последнее можно выполнить для конкретных численных величин, используя условие (8.31) (упражнения 8.2 и 8.5).

Заметим, что в примерах этого раздела возникающие в системах колебания не зависят от постоянного выходного сигнала  $R$ . Это обусловлено полюсом передаточной функции  $G(s)$  в точке  $s = 0$ . Интегрирующее свойство

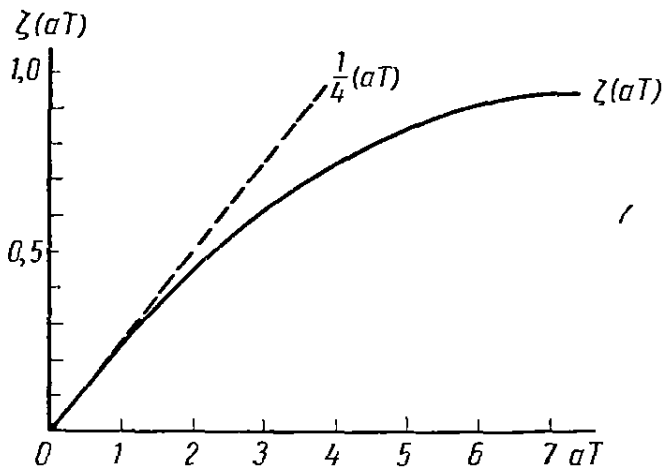


Рис. 8.5. График функции  $\zeta(aT)$ , построенный по выражению (8.33)

объекта приводит к симметричным колебаниям (т. е.  $\alpha = \frac{1}{2}$ ), и, следовательно,  $u(t)$  и  $e(t)$  в установившемся состоянии имеют нулевое среднее значение. А это значит, что установившаяся средняя величина выходного сигнала  $y(t)$  должна иметь постоянную величину, равную  $R$ , иначе говоря, в установившемся состоянии выполняется условие

$$\bar{y}(t) = R; \quad (8.38)$$

это свойство было использовано в гл. 7, когда рассматривались колебательные сервомеханизмы с реле.

Установим теперь полезное соотношение, которое связывает выражение (8.24) с рядом Фурье. Это соотношение будет использовано в следующем параграфе при изучении метода Цыпкина.

Сделаем следующие предположения о свойствах передаточной функции  $G(s)$  и реакции объекта  $Y_0(s)$  на начальные условия:

- 1) функция  $h(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^t g(\tau) d\tau$  непрерывна при  $0 \leq t < \infty$ ;
- 2) функция  $y_0(t)$  также непрерывна при  $0 \leq t < \infty$ ;
- 3) передаточные функции  $G(s)$  и  $Y_0(s)$  не имеют особенностей при  $s = \pm j \frac{2n\pi}{T}$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ , но могут иметь полюс в точке  $s = 0$ .

Из выражений (8.24) и (II.28 а) приложения II получим

$$y_{\Pi}(mT) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_1(j\omega_0 n) e^{j2\pi mn}, \quad n \neq 0, \quad (8.39)^*$$

где  $\omega_0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{2\pi}{T}$ .

Подставляя выражение (8.21) в (8.39) и учитывая условие 3), имеем

$$y_{\Pi}(mT) = Y_0 + \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_1(j\omega_0 n) G(j\omega_0 n) e^{j2\pi mn}, \quad n \neq 0, \quad (8.40)$$

где  $Y_0$  — среднее значение сигнала  $y_{\Pi}(mT)$ , определяемое соотношением

$$Y_0 = \overline{y_{\Pi}(mT)} = \lim_{s \rightarrow 0} [TsY_0(s) + U_1(s)G(s)]. \quad (8.41)$$

Если функции  $G(s)$  и  $Y_0(s)$  имеют полюсы при  $s = 0$ , то колебания в системе симметричны, т. е. средние значения выходного сигнала реле  $u(t)$  и его входного сигнала  $e(t)$  равны нулю. Таким образом (см. рис. 8.1), среднее значение выходного сигнала системы  $y(t)$  должно быть равно

$$y(t) = \begin{cases} r(t), & \text{если } G(s) \text{ не имеет полюса при } s = 0; \\ Y_0 = \overline{r(t)}, & \text{если } G(s) \text{ имеет полюс при } s = 0. \end{cases} \quad (8.42a)^{**}$$

\* Из выражений (8.19а), (8.21) и предположений о виде передаточных функций  $G(s)$  и  $Y_0(s)$  можно определить функцию  $y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)]$  [см. выражение (8.20)]; эта функция также непрерывна при  $0 < t < \infty$ .

Поэтому при  $m > 0$  членом  $\frac{1}{2} [y_1(mT^+) - y_1(mT^-)]$  можно пренебречь.

Таким образом, из выражения (II.28а) приложения II видно, что формула (8.39) справедлива во всем интервале  $0 < m < 1$ .

Из выражения (8.22) следует, что периодическая функция  $y_{\Pi}(t)$  непрерывна, поэтому формула (8.39) справедлива для произвольных значений  $m$ .

\*\* Если  $G(s)$  имеет полюс при  $s = 0$ , то  $Y_0(s)$  также имеет полюс.

Если  $G(s)$  и  $Y_0(s)$  не имеют особенностей при  $s = 0$ , то  $\lim_{s \rightarrow 0} s Y_0(s) = 0$ .

В этом случае из выражения (8.41) можно получить

$$Y_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} U_1(s) G(s) \quad (8.426)$$

Можно предполагать, что среднее значение  $Y_0$  выходного сигнала  $y(t)$  связано со значением входного сигнала  $r(t)$  тем же соотношением. В действительности связь средних значений выходного и входного сигналов может быть установлена с учетом предельного цикла колебаний по формуле (8.13) и определяется параметром  $\alpha$  для реле без зоны нечувствительности и параметрами  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  для реле с зоной нечувствительности. При  $r(t) = 0$  среднее значение сигнала на выходе равно нулю, т. е.  $Y_0 = 0$ , что видно из выражения (8.19) и с учетом симметричности колебаний ( $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $\beta_2 = \frac{1}{2} + \beta_1$ ).

Прежде чем закончить этот параграф, следует указать, что если  $Y_1(s)$  целая функция\*, которая получена путем надлежащего подбора начальных условий, исключающего все сомножители, содержащие особые точки [91], то

$$y_1(t) = \begin{cases} y_n(t), & 0 \leq t < T; \\ 0 & \text{при остальных значениях } t. \end{cases}$$

В этом заключается основа метода целых функций, который дает иной подход для анализа колебаний в релейных системах. Этот метод имеет то преимущество, что при его использовании не нужно обращаться к модифицированному  $z$ -преобразованию. Однако необходимо обращать внимание на выбор начальных условий, дающих целую функцию. При применении модифицированного  $z$ -преобразования с опережением существенны лишь те начальные условия, которые уничтожают члены, соответствующие полюсам функции  $G(s)$  в области  $\operatorname{Re} s > 0$ .

#### 8.4. МЕТОД ЦЫПКИНА ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Среди всех методов, которые могут быть использованы для исследования периодических колебаний в релейных системах управления, основными, по-видимому, являются методы Цыпкина [191] и Хамела [59]. Здесь главное внимание обращается на метод Цыпкина, который позволяет получить оценку степени приближения при применении эквивалентной передаточной функции. Для знакомства с методом Хамела и его связи с методом Цыпкина отсылаем читателя к книге Жилля, Пелегрена и Декольна [59].

В методе Цыпкина используется только одно условие переключения (8.13), обеспечивающее существование периодического режима работы. Условия переключения определяют характеристики сигнала (период  $T$  и параметры предельного цикла  $\alpha, \beta_1$  и  $\beta_2$ ), необходимые для периодического режима работы системы. Следует также отметить, что при соблюдении условия переключения (8.13), как правило, соблюдаются и условия непрерывности (8.14). Если возникает сомнение, то необходимо с помощью хорошо известных линейных методов построить реакцию  $y_n(t)$  и проверить условия непрерывности.

Ограничим рассмотрение метода Цыпкина только в части определения периодических колебаний. Более того, здесь будут рассматриваться только симметричные колебания, когда  $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $\beta_2 = \frac{1}{2} + \beta_1$ . В предыдущем

\* Под целой функцией понимается функция комплексного переменного аналитическая на всей плоскости  $s$ .

параграфе было установлено, что это действительно так, если передаточная функция  $G(s)$  имеет полюс в точке  $s = 0$  или если входной сигнал  $r(t) = 0$ . В дальнейшем будем считать, что выполняется последнее условие. Такое допущение не должно вызывать сомнений в общности получаемых результатов, так как если  $G(s)$  имеет полюс при  $s = 0$  и  $r(t) = R$ , то на основании предыдущего параграфа этой главы можно считать, что периодический выходной сигнал  $y_{п}(t)$  будет иметь постоянную составляющую  $Y_0$ , равную  $R$ . Таким образом, условия переключения (8.13) не зависят от величины  $R$ .

Для симметричных колебаний, когда  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2} + \beta_1$  и  $y(t) = -e(t)$ , условия переключения (8.13) для реле без зоны нечувствительности приобретают вид

$$y_{п}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \varepsilon, \quad \dot{y}_{п}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) > 0; \quad (8.43a)$$

для реле с зоной нечувствительности

$$\left. \begin{aligned} y_{п}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \varepsilon; \quad y_{п}\left(\gamma \frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\lambda; \\ \dot{y}_{п}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) > 0; \quad \dot{y}_{п}\left(\gamma \frac{\pi}{\omega_0}\right) > 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.43b)$$

где  $\gamma = 2\beta_1$  и  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  — круговая частота автоколебаний. При симметричных колебаниях остальные соотношения в условиях переключения (8.13) являются лишними.

Основное достоинство метода Цыпкина заключается в том, что условия переключения (8.43) находятся с использованием частотной характеристики  $G(j\omega)$  объекта управления. Для этого строится годограф некоторой функции комплексного переменного, называемый годографом Цыпкина. Если для некоторой системы эта кривая построена, то существование периодического решения определяется достаточно быстро, поскольку представление условий (8.43) в графической форме с помощью годографа Цыпкина является весьма наглядным.

Рассмотрим систему управления, включающую реле без зоны нечувствительности. Для анализа Я. З. Цыпкин предложил ввести следующую функцию:

$$J(\omega) \stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{\omega} \dot{y}_{п}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - jy_{п}\left(\frac{\pi}{\omega}\right); \quad (8.44)$$

эта функция называется функцией Цыпкина. Она определена для всех круговых частот  $\omega$ , и ее годограф на комплексной плоскости называется годографом Цыпкина.

Если  $\omega_0$  — частота автоколебаний системы, то условия переключения (8.43), выраженные через функцию  $J(\omega)$ , можно представить в виде

$$\operatorname{Re} J(\omega_0) < 0; \quad \operatorname{Im} J(\omega_0) = -\varepsilon; \quad (8.45)$$

это непосредственно следует из выражения (8.43 а). После построения графика  $J(\omega)$  как функции от  $\omega$  на комплексной плоскости можно определить частоту автоколебаний из простого геометрического построения. Такое построение показано на рис. 8.6.

Круговая частота  $\omega_0$  является единственным неизвестным, которое необходимо определить. Для этого построим  $J(\omega)$  как функцию  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

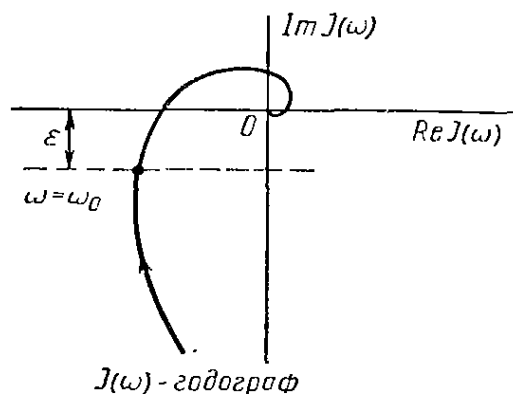


Рис. 8.6. Типовой годограф Цыпкина [выражение (8.44)] для системы управления с реле, имеющим гистерезис (рис. 8.2, а), и построение линии  $-\varepsilon$  для нахождения основной частоты автоколебаний



Прежде всего разложим  $y_{\pi}(t)$  в ряд Фурье. В случае симметричных колебаний, когда  $r(t) = 0$ ,  $Y_0 = 0$  и  $\alpha = \frac{1}{2}$ , из выражений (8.19а) и (8.40) найдем, что

$$y_{\pi}(t) = \frac{\omega}{2\pi} U \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{G(j\omega n)}{j\omega n} (1 - e^{-j\pi n})^2 e^{j\omega n t}.$$

Поскольку

$$(1 - e^{-j\pi n})^2 = \begin{cases} 4; & \pm n = 1, 3, 5, \dots; \\ 0; & \pm n = 0, 2, 4, \dots, \end{cases}$$

то

$$y_{\pi}(t) = \frac{2\omega}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{G[j\omega(2n-1)]}{j\omega(2n-1)} e^{j\omega(2n-1)t} - \frac{G[-j\omega(2n-1)]}{j\omega(2n-1)} e^{-j\omega(2n-1)t} \right\}$$

и

$$\dot{y}_{\pi}(t) = \frac{2\omega}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ G[j\omega(2n-1)] e^{j\omega(2n-1)t} + G[-j\omega(2n-1)] e^{-j\omega(2n-1)t} \right\}.$$

Для аналитической функции комплексного переменного справедливо следующее утверждение: функция комплексного аргумента, сопряженного данному, равна функции, сопряженной данной\*. Используя указанное свойство к приведенным выше уравнениям, получим

$$\left. \begin{aligned} y_{\pi}(t) &= \frac{4U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{G[j\omega(2n-1)]}{2n-1} e^{j\omega(2n-1)t} \right\}; \\ \dot{y}_{\pi}(t) &= \frac{4U}{\pi} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ G[j\omega(2n-1)] e^{j\omega(2n-1)t} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

В частности

$$\left. \begin{aligned} y_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{4U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{G[j\omega(2n-1)]}{2n-1}; \\ \dot{y}_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{4U}{\pi} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} G[j\omega(2n-1)]. \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

Таким образом, функция Цыпкина  $J(\omega)$ , определенная выражением (8.44), становится

$$J(\omega) = \frac{4U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re} G[j(2n-1)\omega] + j \frac{\operatorname{Im} G[j(2n-1)\omega]}{2n-1} \right\}. \quad (8.48)$$

\* При условии, что аналитическая функция принимает действительное значение для действительных аргументов. Эти условия выполняются для правых частей приведенных соотношений, т. е. для  $y_{\pi}(t)$  и  $\dot{y}_{\pi}(t)$ .

Уравнение (8.48) показывает, что для данной частоты  $\omega_1$  функция  $J(\omega)$  может быть построена по амплитудно-фазовой частотной характеристике  $G(j\omega)$  путем сложения векторов  $G(j\omega_1)$ :

$$\text{Re } G(j \cdot 3\omega_1) + j \frac{\text{Im } G(j \cdot 3\omega_1)}{3};$$

$$\text{Re } G(j \cdot 5\omega_1) + j \frac{\text{Im } G(j \cdot 5\omega_1)}{5}$$

и т. д.

Это построение показано на рис. 8.7. Для любой реальной системы значения действительных и мнимых частей функции  $G[j(2n - 1)\omega]$  становятся малыми после нескольких членов.

Построив график  $J(\omega)$ , можно определить основную частоту колебаний  $\omega_0$  по уравнению (8.45), как показано на рис. 8.6.

Если берется только первый член ряда (8.48), то условия (8.45) сводятся к соотношениям, которые возникают при использовании эквивалентной передаточной функции. Действительно, допустим, что справедливо условие

$$\frac{\pi}{4U} J(\omega) \cong G(j\omega), \quad (8.49)$$

которое на практике верно для больших величин  $\omega$ . Выражение (8.49) соответствует приближенному значению

$$y_{\pi}(t) = \frac{4U}{\pi} |G(j\omega)| \sin[\omega t + \theta(\omega)], \quad (8.50)$$

$$\text{где } \theta(\omega) = \arg G(j\omega) \quad (8.51)$$

Из условия переключения (8.45) следует, что на частоте колебаний  $\omega_0$  справедливо соотношение

$$|G(j\omega_0)| \sin[\theta(\omega_0)] = -\frac{\pi}{4U} \varepsilon \quad \text{или} \quad \sin[\theta(\omega_0)] = -\frac{\pi\varepsilon}{4U |G(j\omega_0)|}.$$

Пусть  $\hat{y}_0 \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{4U}{\pi}\right) |G(j\omega)|$  представляет собой амплитуду первой гармоники колебаний выходного сигнала  $y_{\pi}(t)$ . Тогда  $\sin[\theta(\omega_0)] = -\frac{\varepsilon}{\hat{y}_0}$  и  $\theta(\omega_0) = \pi + \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{\hat{y}_0}\right)$ . Поэтому

$$G(j\omega_0) = |G(j\omega_0)| \exp[j\theta(\omega_0)] = -\frac{\pi\hat{y}_0}{4U} \exp\left[j \arcsin \frac{\varepsilon}{\hat{y}_0}\right]. \quad (8.52)$$

Условие (8.52) при использовании аппроксимации (8.49) совпадает с необходимым условием, полученным при использовании метода эквивалентной передаточной функции, т. е.

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(\hat{y}_0)}, \quad (8.53)$$

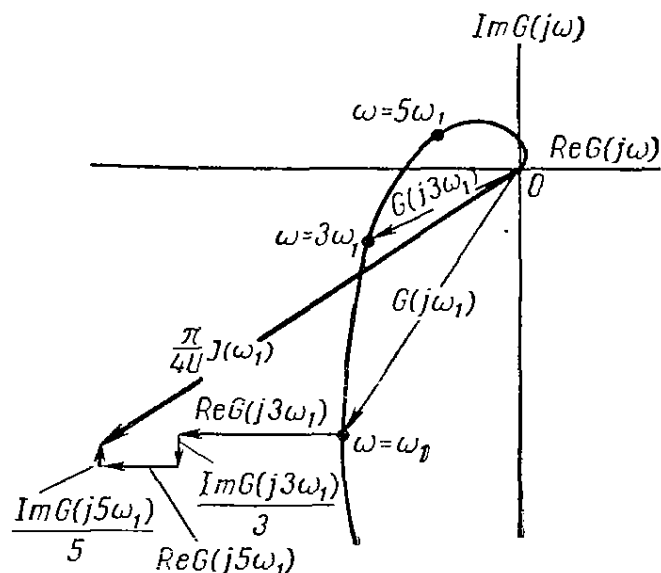


Рис. 8.7. Построение годографа Цыпкина  $J(\omega)$  на основании амплитудно-фазовой частотной характеристики и выражения (8.48)

где

$$N(\hat{y}_0) = \frac{4U}{\pi \hat{y}_0} \exp\left(-j \arcsin \frac{\varepsilon}{\hat{y}_0}\right)$$

эквивалентная передаточная функция для реле с гистерезисом, определенная ранее в § 6.3.

Теперь рассмотрим систему управления с реле, обладающим гистерезисом и зоной нечувствительности. И в этом случае пригоден метод Цыпкина, хотя условия, вытекающие из его применения, становятся более сложными. Здесь приходится пользоваться двумя функциями Цыпкина, которые можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} J_1(\omega) &\stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{\omega} \dot{y}_n\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - jy_n\left(\frac{\pi}{\omega}\right); \\ J_2(\omega) &\stackrel{\Delta}{=} -\frac{1}{\omega} \dot{y}_n\left(\gamma \frac{\pi}{\omega}\right) - jy_n\left(\gamma \frac{\pi}{\omega}\right). \end{aligned} \right\} \quad (8.54)$$

Если  $\omega_0$  — частота автоколебаний, то условия переключения при использовании функции  $J_1(\omega)$  и  $J_2(\omega)$  следуют из выражений (8.43 б) и (8.54):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} J_1(\omega_0) &= -\varepsilon; & \operatorname{Im} J_2(\omega_0) &= \lambda; \\ \operatorname{Re} J_1(\omega_0) &< 0; & \operatorname{Re} J_2(\omega_0) &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

Заметим, что в соотношениях (8.55) ограничения, налагаемые на функцию  $J_1(\omega)$ , совпадают с неравенствами для функции  $J(\omega)$  для реле без зоны нечувствительности. Однако из-за разных форм периодических процессов на выходе реле функции  $J(\omega)$  и  $J_1(\omega)$  не являются тождественными. Для того чтобы получить выражения для  $J_1(\omega)$  и  $J_2(\omega)$ , используем тот же подход, как и при отыскании функции  $J(\omega)$ .

Определим  $y_n(t)$  как функцию от  $\omega$ . Тогда для случая симметричных колебаний  $\left[r(t) = 0; Y_0 = 0; \alpha = \frac{1}{2}; \gamma = 2\beta_1 \text{ и } \beta_2 = \frac{1}{2(1+\gamma)}\right]$  из выражений (8.19 а) и (8.40) следует

$$y_n(t) = \frac{\omega}{2\pi} U \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{G(j\omega n)}{j\omega n} (1 - e^{-i\pi\gamma n}) (1 - e^{-j\pi n}) e^{j\omega n t}.$$

Следуя процедуре вывода формулы (8.46), получим

$$\left. \begin{aligned} y_n(t) &= \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{G[j(2n-1)\omega]}{2n-1} [1 - e^{-j\pi(2n-1)\gamma}] e^{j(2n-1)\omega t} \right\}; \\ \dot{y}_n(t) &= \frac{2U}{\pi} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ G[j(2n-1)\omega] [1 - e^{-j\pi(2n-1)\gamma}] e^{j(2n-1)\omega t} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.56)$$

Заметим, что в частном случае, когда  $\gamma = 2\beta_1 = 1$ , выражения (8.55) приводятся к выражениям (8.46). Последнее следовало ожидать, так как это

соответствует нулевому значению зоны нечувствительности. Для  $t = \frac{\pi}{\omega}$  и

$t = \frac{\gamma\pi}{\omega}$  получаем из выражения (8.56) следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} y_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{G[j(2n-1)\omega]}{2n-1} [1 - e^{-j\pi(2n-1)\gamma}] \right\}; \\ \dot{y}_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{2U}{\pi} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ G[j(2n-1)\omega] [1 - e^{-j\pi(2n-1)\gamma}] \}; \\ y_{\pi}\left(\gamma\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ \frac{G[j(2n-1)\omega]}{2n-1} [1 - e^{j\pi(2n-1)\gamma}] \right\}; \\ \dot{y}_{\pi}\left(\gamma\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{2U}{\pi} \omega \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ G[j(2n-1)\omega] [1 - e^{j\pi(2n-1)\gamma}] \}. \end{aligned} \right\} \quad (8.57)$$

Сравнивая выражения (8.57) и (8.54), получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} J_1(\omega) &= \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin [(2n-1)\gamma\pi]}{2n-1} \operatorname{Re} G[j(2n-1)\omega] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \cos (2n-1)\gamma\pi}{2n-1} \operatorname{Im} G[j(2n-1)\omega] \right\}; \\ \operatorname{Re} J_1(\omega) &= \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \{ [1 - \cos (2n-1)\gamma\pi] \operatorname{Re} G[j(2n-1)\omega] - \\ &\quad - \sin [(2n-1)\gamma\pi] \operatorname{Im} G[j(2n-1)\omega] \}; \\ \operatorname{Im} J_2(\omega) &= -\frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin [(2n-1)\gamma\pi]}{2n-1} \operatorname{Re} G[j(2n-1)\omega] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - \cos [(2n-1)\gamma\pi]}{2n-1} \operatorname{Im} G[j(2n-1)\omega] \right\}; \\ \operatorname{Re} J_2(\omega) &= \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \{ [1 - \cos (2n-1)\gamma\pi] \operatorname{Re} G[j(2n-1)\omega] + \\ &\quad + \sin [(2n-1)\gamma\pi] \operatorname{Im} G[j(2n-1)\omega] \}. \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

Следует заметить, что  $J_1(\omega)$  и  $J_2(\omega)$  зависят как от  $G(j\omega)$ , так и от параметра  $\gamma$ . Более того, из выражения (8.58) следует, что построение  $J_1(\omega)$  и  $J_2(\omega)$  даже при заданном значении  $\gamma$  представляет задачу более сложную, чем построение  $J(\omega)$  для реле без зоны нечувствительности. Для того чтобы найти два параметра  $\omega_0$  и  $\gamma$ , необходимо использовать выражение (8.55).

Способ определения  $\omega_0$  и  $\gamma$  при помощи графиков  $J_1(\omega)$  и  $J_2(\omega)$  достаточно прост и аналогичен применению эквивалентной передаточной функции для двухчастотного входного сигнала при анализе управления с несимметричными безынерционными нелинейностями. Для этого построим семейство функций  $J_1(\omega)$  аргумента  $\omega$ , где  $\gamma$  является параметром. Каждая из точек пересечения одной из этих кривых с линией  $\operatorname{Im} J_1(\omega) = -\varepsilon$  дает два значения  $\omega_0$  и  $\gamma$ , которые определяют кривую  $\omega_a(\gamma)$ .

Таким образом, можно получить другую кривую  $\omega_b(\gamma)$ , пользуясь точками пересечения кривых  $J_2(\omega)$  (с  $\gamma$  в качестве параметра) с линией  $\text{Im}J_2(\omega) = \lambda$ . Пересечение кривых  $\omega_a(\gamma)$  и  $\omega_b(\gamma)$  определяет искомые значения величин  $\omega_0$  и  $\gamma_1$ .

**Пример 8.4.** Рассмотрим систему управления, изображенную на рис. 8.1 при  $r = 0$ . Реле имеет характеристику, показанную на рис. 8.2, б, с параметрами  $U = 1$ ;  $\varepsilon = 0,2$ ;  $\lambda = 0,1$ . Линейная часть системы описывается передаточной функцией вида

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)}.$$

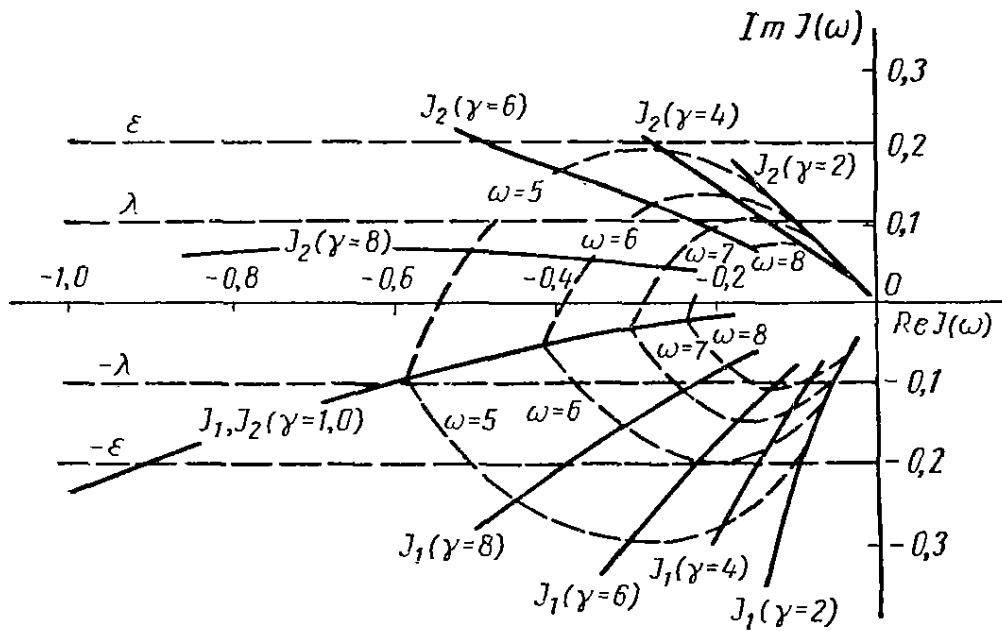


Рис. 8.8. Нодограф Цыпкина для системы управления с реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (пример 8.4):  $J_1(\omega)$  и  $J_2(\omega)$  — семейства нодографов для различных значений  $\gamma$

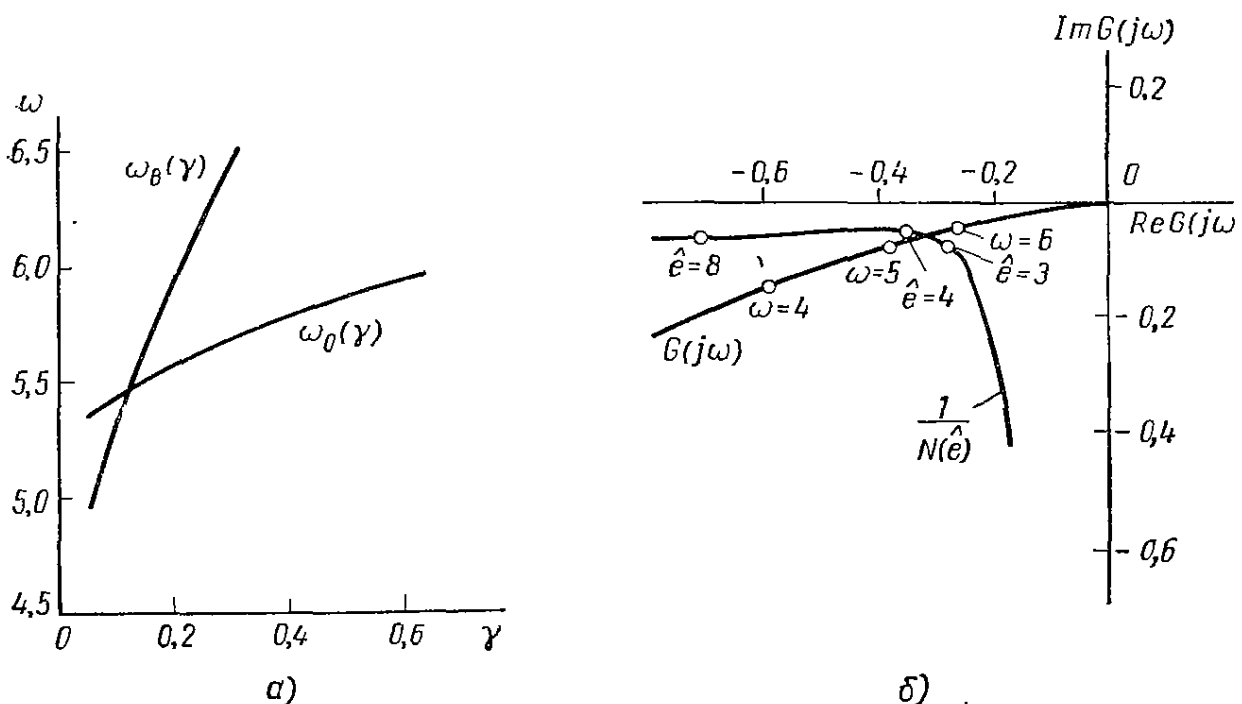


Рис. 8.9. Определение  $\omega_0$ :

а — с помощью кривых  $\omega_a(\gamma)$  и  $\omega_b(\gamma)$ ; б — с помощью эквивалентной передаточной функции

Требуется определить частоту колебаний и соответствующую величину параметра  $\gamma_1$  и сравнить эти величины с полученными на основе метода эквивалентной передаточной функции.

Годографы Цыпкина для системы управления построены на рис. 8.8\*. По пересечению кривой  $J_1(\omega)$  с линией  $\text{Im} J_1(\omega) = -\varepsilon$  и кривой  $J_2(\omega)$  с линией  $\text{Im} J_2(\omega) = \lambda$  определяем графики  $\omega_a(\gamma)$  и  $\omega_b(\gamma)$ . Эти графики построены на рис. 8.9, а; далее находим, что  $\omega_0 = 5,5$  и  $\gamma_1 = 0,1$ .

Обратная эквивалентная передаточная функция построена на рис. 8.9, б, где также показана амплитудно-фазовая частотная характеристика. Так как нелинейность имеет гистерезис, то функция  $\left(-\frac{1}{N(\hat{e})}\right)$  имеет фазовую характеристику, зависящую от амплитуды  $\hat{e}$ .

Поэтому характеристика  $N(\hat{e})$  имеет действительную и мнимую части вида

$$\text{Re } N(\hat{e}) = \frac{2U}{\pi} \left[ \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\hat{e}}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\hat{e}}} \right]; \quad \text{Im } N(\hat{e}) = -\frac{2U}{\pi \hat{e}^2} (\varepsilon - \lambda).$$

Из рис. 8.9, б находим  $\omega_0 \approx 5,5$  рад/сек и  $\hat{e}_0 \approx 0,36$ . Отметим, что частота автоколебаний, полученная упрощенным методом, совпадает с ранее вычисленной частотой. Однако величина амплитуды автоколебаний  $\hat{e}_0$  является нереальной (так как при этом  $\gamma_0$  составляет 0,6). Пользуясь значением  $\gamma_0$ , полученным по кривой Цыпкина, по соотношениям (8.56) определяют истинную величину основной составляющей  $e_{\pi}(t) = -y_{\pi}(t)$ , равную 0,2.

Таким образом, определение параметров предельного цикла, основанное на методе эквивалентной передаточной функции, может привести к неверным результатам при анализе некоторых систем управления.

### 8.5. ДРУГОЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ГОДОГРАФА ЦЫПКИНА

В этом параграфе будет найдена простая зависимость между  $J(\omega)$  и  $z$ -преобразованием передаточной функции линейного элемента. Это позволит отказаться от суммирования бесконечных рядов.

Ограничимся рассмотрением случая реле без зоны нечувствительности, хотя это можно сделать и для реле с зоной нечувствительности. До сих пор в этой главе не требовалось, чтобы линейный элемент был устойчивым. Однако в этом параграфе введем ограничение на передаточные функции  $G(s)$  и  $Y_0(s)$ , требуя их аналитичности при  $\text{Re } s \geq 0$ , за исключением, может быть, простого полюса при  $s = 0$ . Проанализируем только симметричные колебания.

Как и раньше, положим

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad \text{и} \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right].$$

Тогда для основного тона колебаний, начинающихся при  $t = -NT$ , можно воспользоваться выражением (8.11 а), где  $\alpha = \frac{1}{2}$  и  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , и записать

$$u_{\pi}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} U \sum_{k=-N}^{\infty} (-1)^k \left\{ \mu_{-1}\left(t - k \frac{\pi}{\omega}\right) - \mu_{-1}\left[t - (k+1) \frac{\pi}{\omega}\right] \right\}. \quad (8.59)$$

\* Поскольку требуется знать лишь значения годографа  $J_1(\omega)$  вблизи величины  $(-\varepsilon)$ , а годографа  $J_2(\omega)$  вблизи величины  $\lambda$ , то необходимые вычисления можно существенно сократить и использовать для вычисления сумм (8.58) настольные вычислительные машины.

Переходная характеристика линейного элемента и ее производная в момент времени при  $t = \frac{\pi}{\omega}$  принимают следующие значения:

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ y_0\left(t + N \frac{\pi}{\omega}\right) + \sum_{k=-N}^0 (-1)^k \left[ h\left((1-k)\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^+\right) - h\left((2-k)\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^+\right) \right] \right\} + U h\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^+ =$$

$$= y_0(\infty) - 2U \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k h\left(k \frac{\pi}{\omega}\right)^+ + 2U h(0^+); \quad (8.60a)$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \dot{y}_0(\infty) - 2U \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g\left(k \frac{\pi}{\omega}\right)^+ + 2U g(0^+). \quad (8.60b)$$

Поскольку мы предположили, что  $Y_0(s)$  и  $G(s)$  — аналитические функции в  $\text{Re } s \geq 0$ , за исключением возможно простого полюса при  $s = 0$ , то существует предел функции  $y_0(\infty)$  и  $\dot{y}_0(\infty)$ , и он равен нулю. Кроме того, в силу (8.3) имеем  $h(0^+) = 0$ . Сходимость бесконечных рядов (8.60) становится очевидной, если их переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= y_0(\infty) - 2U \lim_{z \rightarrow -1} \mathcal{H}'(z); \\ \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= 2U \left[ g(0^+) - \lim_{z \rightarrow -1} \mathcal{G}'(z) \right], \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

где  $\mathcal{H}'(z)$  и  $\mathcal{G}'(z)$  представляют собой  $z$ -преобразования функций  $h(t)$  и  $g(t)$  с выбранным интервалом  $\frac{T}{2}$  или  $\frac{\pi}{\omega}$ . Таким образом, получим

$$\mathcal{H}'(z) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} h\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) z^{-k}; \quad \mathcal{G}'(z) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(k \frac{\pi}{\omega}\right) z^{-k}. \quad (8.62)$$

Функции  $H(s)$  и  $G(s)$  — аналитические в области  $\text{Re } s \geq 0$ , за исключением, быть может, точки  $s = 0$ , поэтому их  $z$ -преобразование является аналитической функцией в области  $|z| \geq 1$ , исключая, возможно, точку  $z = +1$ . Таким образом, пределы функций  $\mathcal{H}'(z)$  и  $\mathcal{G}'(z)$  в соотношениях (8.61) при  $z \rightarrow -1$  существуют и обеспечивают сходимость ряда (8.59).

С учетом выражения (8.61) функция Цыпкина, определенная формулой (8.44), равна

$$J(\omega) = \frac{2U}{\omega} [\mathcal{G}'(-1) - g(0)] + j[2U \mathcal{H}'(-1) - y_0(\infty)]. \quad (8.63)$$

Поскольку функции  $\mathcal{G}'(z)$  и  $\mathcal{H}'(z)$  зависят от  $\omega$ , то и выражения  $\mathcal{G}'(-1)$  и  $\mathcal{H}'(-1)$  зависят от  $\omega$ . Для того чтобы их зависимость от  $\omega$  стала явной, следует при записи соотношения (8.63) использовать импульсные передаточные функции  $G'^*(s)$  и  $H'^*(s)$ , период дискретности которых равен  $\frac{\pi}{\omega}$ . Эти функции равны

$$G'^*(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{G} \left[ \exp\left(\frac{s\pi}{\omega}\right) \right]; \quad H'^*(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{H} \left[ \exp\left(\frac{s\pi}{\omega}\right) \right]. \quad (8.64)$$

Из выражений (8.64) следует, что  $G^*(j\omega) = \mathcal{G}'(e^{j\pi}) = \mathcal{G}'(-1)$  и  $H'^*(j\omega) = \mathcal{H}'(-1)$ ; следовательно, выражение (8.63) можно переписать в виде

$$J(\omega) = \frac{2U}{\omega} = [G'^*(j\omega) - g(0)] + j[2UH'^*(j\omega) - y_0(\infty)]. \quad (8.65)$$

Тем самым получена искомая формула.

Условия переключения (8.45) можно переписать в виде

$$\frac{2U}{\omega} [G'^*(j\omega) - g(0^+)] < 0; \quad 2UH'^*(j\omega) - y_0(\infty) = -\varepsilon. \quad (8.66)$$

## 8.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Метод Цыпкина можно распространить на случай анализа вынужденных колебаний релейных систем. Напомним, что вынужденные колебания существуют независимо от других видов колебаний, например автоколебаний или субгармонических колебаний, и их надо исследовать отдельно.

Рассмотрим снова систему управления, изображенную на рис. 8.1. Но в этом случае будем считать, что  $r(t)$  имеет следующий вид:

$$r(t) = r_{\pi}(\omega_0 t - \Phi), \quad (8.67)$$

где  $r_{\pi}(\omega_0 t - \Phi)$  — периодическая функция с периодом  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ , абсолютная величина которой меньше или равна постоянной  $A$ . Имея это в виду, найдем

$$e(t) = r_{\pi}(\omega_0 t - \Phi) - y(t). \quad (8.68)$$

Если реле не имеет зоны нечувствительности, то для получения сигнала  $u(t)$  в виде периодической функции с периодом  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  условия переключения периодической функции  $e_{\pi}(t)$  должны подчиняться выражению (8.13 а). Итак, имеем

$$e_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = r_{\pi}(\pi - \Phi) - y_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\varepsilon; \quad (8.69a)$$

$$\frac{1}{\omega_0} \dot{e}_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = \dot{r}_{\pi}(\pi - \Phi) - \frac{1}{\omega} \dot{y}_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) < 0. \quad (8.69б)$$

Чтобы пользоваться функцией Цыпкина, запишем выражение

$$R(\pi - \Phi) = \dot{r}_{\pi}(\pi - \Phi) + jr_{\pi}(\pi - \Phi) \quad (8.70)$$

и одновременно выражение

$$J(\omega) = -\frac{1}{\omega_0} \dot{y}_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - jy_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right). \quad (8.71)$$

Объединяя выражения (8.70) и (8.71), получим новые условия переключения в виде

$$\text{Im}[R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] = -\varepsilon; \quad \text{Re}[R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] < 0. \quad (8.72)$$

Условия, записанные в форме (8.72), позволяют пользоваться следующим графическим построением. Построим, как и раньше, годограф  $J(\omega)$ , затем построим кривую  $R(\pi - \Phi)$  в зависимости от  $\Phi$ . Если кривая  $R(\pi - \Phi)$  у точки  $J(\omega_0)$  пересекает линию  $-\varepsilon$  левее оси  $\text{Im} J(\omega)$ , то в системе возникают вынужденные колебания. Соответствующее построение показано на рис. 8.10.

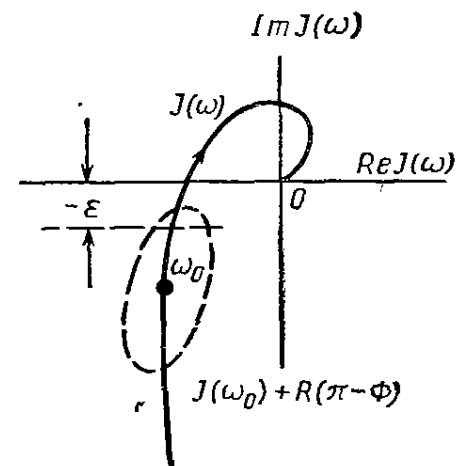


Рис. 8.10. Определение вынужденных колебаний по годографу Цыпкина для реле без зоны нечувствительности



Кривая  $R(\pi - \Phi)$  строится по формуле (8.70) и представляет собой фигуру Лиссажу для входного сигнала  $r_{\pi}(t)$ . Типичная кривая  $R(\pi - \Phi)$  для треугольного сигнала на выходе реле (рис. 8.11, а) показана на рис. 8.11, в. При синусоидальном сигнале  $r_{\pi}(t)$  кривая  $R(\pi - \Phi)$  является эллипсом. При более сложной форме сигнала на выходе реле кривая  $R(\pi - \Phi)$  может пересекать себя.

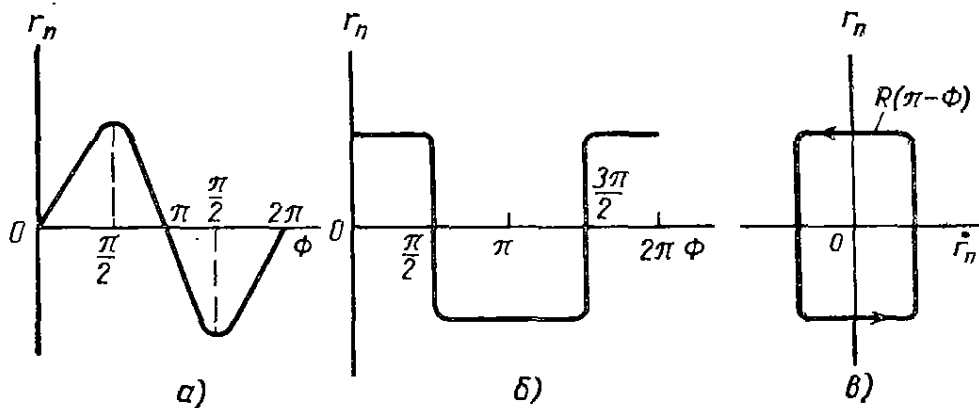


Рис. 8.11. Виды сигналов на выходе реле и типичная кривая  $R(\pi - \Phi)$ :

а—треугольный сигнал; б—прямоугольный сигнал; в—кривая  $R(\pi - \Phi)$

При анализе вынужденных колебаний необходимо различать несколько случаев, которые поясняются рис. 8.12, а—д. Рис. 8.12, а показывает, что в системе управления нет вынужденных колебаний, однако могут быть другие виды колебаний. Рис. 8.12, б показывает, что возможны два вида автоколебаний, соответствующих двум различным величинам фазового угла  $\Phi$ . Сле-

$$\Delta = J(\omega_0) + R(\pi - \Phi)$$

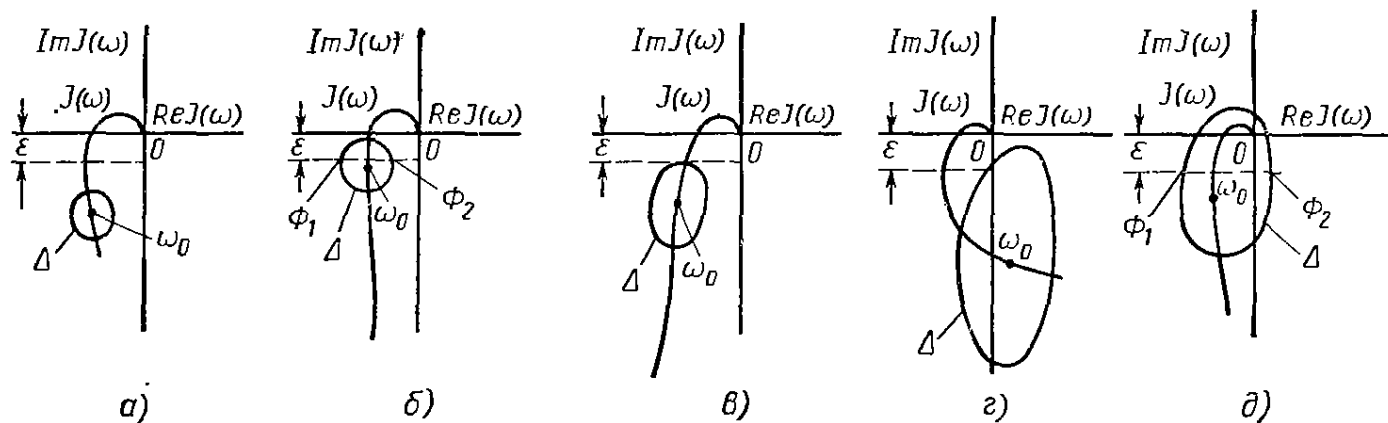


Рис. 8.12. Различные случаи расположения годографа Цыпкина и кривой  $R(\pi - \Phi)$  для определения вынужденных колебаний:

а — вынужденные колебания отсутствуют; б — два вида вынужденных колебаний; в — вынужденные колебания с различными амплитудами; г — вынужденные колебания с большой амплитудой

дует заметить, что только в одном случае колебания устойчивы (см. следующий параграф). На рис. 8.12, в кривая  $R(\pi - \Phi)$  касательна к прямой  $-\epsilon$ , это соответствует минимальной амплитуде входного сигнала, при котором возникают вынужденные колебания. Рис. 8.12, г соответствует такому расположению кривых, когда годограф  $R(\pi - \Phi)$  пересекает линию  $-\epsilon$ , касаясь мнимой оси. Рис. 8.12, д соответствует случаю, когда амплитуда вынужденных колебаний является большой и тем не менее возникают колебания одной частоты.

Все сказанное выше нетрудно распространить на случай анализа системы управления, включающей реле с зоной нечувствительности. Здесь условия переключения будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Im} [R(\pi - \Phi) + J_1(\omega_0)] &= -\varepsilon; \operatorname{Re} [R(\pi - \Phi) + J_1(\omega_0)] < 0; \\ \operatorname{Im} [R(\gamma\pi - \Phi) + J_2(\omega_0)] &= \lambda; \operatorname{Re} [R(\gamma\pi - \Phi) + J_2(\omega_0)] < 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.73)$$

Сущность графического построения заключается в том, чтобы построить кривую  $R(\pi - \Phi)$  при частоте  $\omega_0$  и кривую  $J_1(\omega)$  для каждого  $\gamma$  и проверить, удовлетворяет ли кривая  $R(\pi - \Phi)$  двум первым условиям (8.73).

Далее строим кривые  $R(\gamma\pi - \Phi)$  на частоте  $\omega_0$  и  $J_2(\omega)$  для каждого  $\omega_0$  и рассматриваем, удовлетворяет ли кривая  $R(\gamma\pi - \Phi)$  вторым двум условиям (8.73). Если существует ряд значений  $\gamma$ , которые одновременно удовлетворяют всем четырем условиям (8.72), то в системе возможны вынужденные колебания.

### 8.7. УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость колебаний, автоколебаний и вынужденных колебаний может быть исследована на основе применения теории возмущения к периодическим движениям. Значительный интерес представляет тот факт, что полученная в результате такого приближения система является импульсной системой, устойчивость которой анализируется хорошо известными способами. Эти важные результаты также были получены Цыпкиным [191].

Вполне естественно, что систему управления можно представить импульсной, когда к ней прикладываются малые возмущающие сигналы. Это происходит потому, что малые возмущения вызывают положительные и отрицательные пульсации, которые в пределе можно аппроксимировать импульсами.

Рассмотрим реле без зоны нечувствительности; предположим, что  $g(0) = 0$ ,  $h(0) = 0$  и функции  $g(t)$  и  $h(t)$  всюду непрерывны\*.

Предположим, что в системе существуют установившиеся периодические колебания с заданными  $r_{\pi}(t)$ ,  $e_{\pi}(t)$ ,  $u_{\pi}(t)$  и  $y_{\pi}(t)$ . Рассмотрим малые возмущения  $\delta r(t)$ ,  $\delta e(t)$ ,  $\delta u(t)$  и  $\delta y(t)$  соответствующих функций (рис. 8.13, а, б). Разность между возмущенными  $u(t)$  и невозмущенными  $u_{\pi}(t)$  колебаниями показана на рис. 8.13, в. Как видно из этого рисунка, она состоит из отдельных прямоугольных импульсов, приложенных в моменты времени, близкие к  $t = \frac{n\pi}{\omega}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), причем  $e\left(\frac{n\pi}{\omega}\right) = 0$ .

Если  $\delta e(t) \rightarrow 0$ , то эти импульсы можно считать возникающими в моменты времени  $t = \frac{n\pi}{\omega}$ .

Для получения зависимости, связывающей  $\delta u\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)$  с  $\delta e\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)$ , воспользуемся тем, что переключение реле с (—) на (+) может произойти в соответствии с рис. 8.14, а, а переключение в обратном направлении произойдет по рис. 8.14, б. Ширина импульса  $\delta u\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)$  обозначается через  $\delta\tau\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)$  и приблизительно равна

$$\delta\tau\left(\frac{n\pi}{\omega}\right) \approx -\frac{\delta e\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)}{\dot{e}_{\pi}\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)} = -\frac{\delta e\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)}{\left|\dot{e}_{\pi}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\right|} (-1)^n, \quad (8.74)$$

\* Если  $G(p)$  — рациональная функция, то это значит, что число полюсов должно быть, по крайней мере, на два больше числа нулей.

где использовано соотношение

$$\left| \dot{e}_n \left( \frac{n\pi}{\omega} \right) \right| = \left| \dot{e}_n \left( \frac{\pi}{\omega} \right) \right| \text{ для всех } n.$$

В пределе можем записать

$$\delta u(t) = \frac{2U}{\left| \dot{e}_n \left( \frac{\pi}{\omega} \right) \right|} \sum_{k=0}^{\infty} \delta e \left( \frac{k\pi}{\omega} \right) \mu_0 \left( t - \frac{k\pi}{\omega} \right), \quad (8.75)$$

где  $\mu_0(t)$  — единичный импульс при  $t = 0$ . Уравнение (8.75) вместе с соотношениями для переменных  $\delta u(t)$ ,  $\delta y(t)$  и  $\delta r(t)$  описывает импульсную систему управления, изображенную на рис. 8.15.

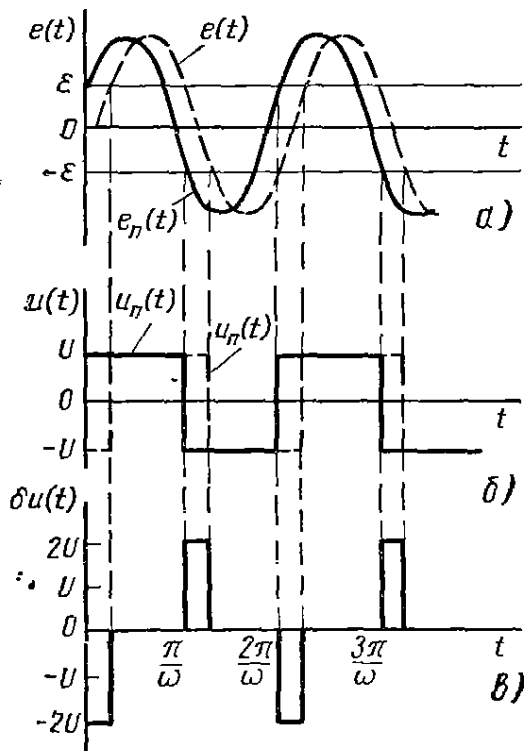


Рис. 8.13. Виды сигналов  $e(t)$ ,  $e_n(t)$ ,  $u(t)$ ,  $u_n(t)$  и  $\delta u(t)$  при действии малых возмущений на релейные системы управления

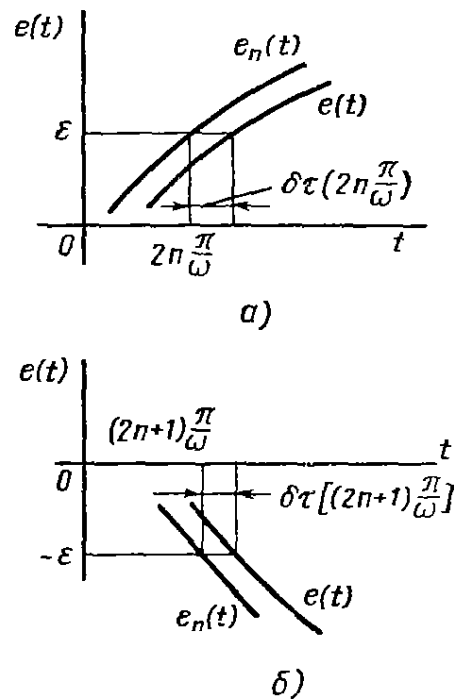


Рис. 8.14. Соотношения между  $\delta e \left( \frac{n\pi}{\omega} \right)$  и шириной пульсации  $\delta\tau \left( \frac{n\pi}{\omega} \right)$ :

$a$  — при переключении реле с (—) на (+);  $b$  — при переключении реле с (+) на (—)

Докажем теорему.

**Теорема 8.2.** Для системы управления, включающей реле без зоны нечувствительности (см. рис. 8.1), устойчивость автоколебаний (входной сигнал  $r(t) \equiv 0$ ) или внутренних колебаний при периодическом входном сигнале  $r_n(t)$  равносильна устойчивости линейной дискретной системы (рис. 8.15).

Отметим, что период прерывания импульсной системы (рис. 8.15) равен  $\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ . Тогда обратное модифицированное  $z$ -преобразование с опережением равно

$$\mathcal{G}'(z, m) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} g \left[ \left( m + k \right) \frac{\pi}{\omega} \right] z^{-k}. \quad (8.76)$$

Для  $m = 0$  — функция  $\mathcal{G}(z, m)$  переходит в функцию  $\mathcal{G}'(z)$ , определяемую выражением (8.62).

На основании теорем 8.2 и II.4 приложения II сформулируем следующую теорему.

**Теорема 8.3.** В системах управления (см. рис. 8.1) с реле без зоны нечувствительности при условии, что

1) линейный элемент описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и является полностью управляемым и наблюдаемым;

2) для любых  $m$  функция  $\mathcal{G}'(z, m)$  имеет те же полюсы, что и функция  $\mathcal{G}'(z, 0) = \mathcal{G}'(z)$ ;

3) все нули функции

$$1 + \frac{2U}{\left| \dot{e}_{\pi} \left( \frac{\pi}{\omega} \right) \right|} \mathcal{G}'(z) = 0 \quad (8.77)$$

лежат в области  $|z| < 1$  ( $|z| > 1$ ), автоколебания или вынужденные колебания асимптотически устойчивы (неустойчивы).

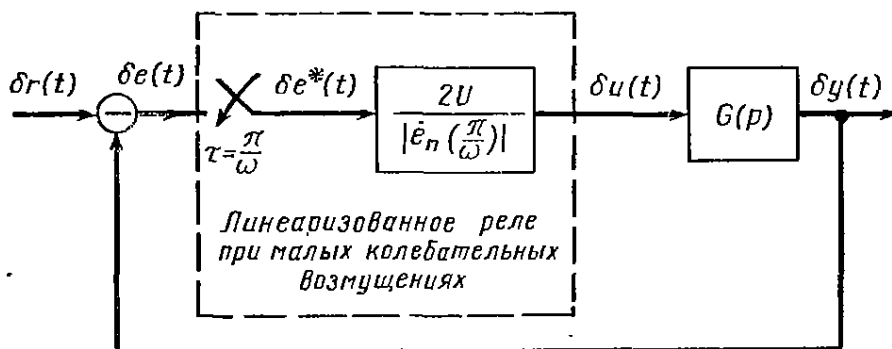


Рис. 8.15. Структурная схема дискретной системы, эквивалентная релейной системе управления, показанной на рис. 8.1

Заметим, что условия 1) и 2) в формулировке теоремы 8.3 удовлетворяются в большинстве практических задач. Если все корни уравнения (8.77) лежат внутри круга  $|z| < 1$ , за исключением одного или более корней при  $|z| = 1$ , то так же, как и при анализе на основе первого метода Ляпунова, здесь требуются дополнительные исследования.

Раз допускается, что  $g(0) = 0$ , то можно к исследованиям привлекать критерий устойчивости, основанный на использовании функции Цыпкина  $J(\omega)$ . Из выражения (8.65) имеем

$$G^*(j\omega) = \frac{\omega}{2U} \operatorname{Re} J(\omega). \quad (8.78)$$

Рассмотрим теперь случай, когда все полюсы передаточной функции  $G(s)$  расположены в области  $\operatorname{Re} s < 0$ , за исключением, быть может, простого полюса при  $s = 0$ . Для импульсной системы управления, изображенной на рис. 8.15, амплитудно-фазовый критерий устойчивости требует выполнения условия

$$\frac{2U}{\left| \dot{e}_{\pi} \left( \frac{\pi}{\omega} \right) \right|} G'^*(j\omega) > -1. \quad (8.79)$$

Это означает, что  $\frac{\omega}{\left| \dot{e}_{\pi} \left( \frac{\pi}{\omega} \right) \right|} \operatorname{Re} J(\omega) > -1$

или

$$\operatorname{Re} J(\omega) > - \frac{\left| \dot{e}_{\pi} \left( \frac{\pi}{\omega} \right) \right|}{\omega}. \quad (8.80)$$

Условие (8.80) можно использовать для определения устойчивости вынужденных колебаний, когда они являются двухчастотными; например, в случае, показанном на рис. 8.12, б, где

$$\frac{\dot{e}_n \left( \frac{\pi}{\omega} \right)}{\omega} = \dot{r}_n \left( \frac{\pi}{\omega} \right) - \frac{\dot{y}_n \left( \frac{\pi}{\omega} \right)}{\omega} = \operatorname{Re} [R(\pi - \Phi) + J(\omega)], \quad (8.81)$$

поэтому условие (8.80) превращается в

$$\operatorname{Re} J(\omega_0) > -|\operatorname{Re} [R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)]|$$

и условие устойчивости удовлетворяется только тогда, когда

$$\operatorname{Re} [R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] < \operatorname{Re} J(\omega_0). \quad (8.82)$$

Таким образом, для случая, показанного на рис. 8.12, б, вынужденные колебания при  $\Phi_1$  устойчивые, а при  $\Phi_2$  неустойчивые. Вообще колебания, определяемые пересечением кривой  $R(\pi - \Phi)$  с линией  $-\epsilon$ , лежащей влево от точки  $J(\omega_0)$ , всегда будут устойчивыми. Если же эта точка пересечения лежит вправо от точки  $J(\omega_0)$ , то колебания будут неустойчивыми.

Сделаем общее заключение о свойствах вынужденных колебаний в системе управления с реле без зоны нечувствительности по методу Цыпкина.

1) Условия существования вынужденных колебаний:

$$\operatorname{Re} [R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] < 0;$$

$$\operatorname{Im} [R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] = -\epsilon.$$

2) Условие устойчивости:

$$\operatorname{Re} [R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] < \operatorname{Re} J(\omega_0).$$

3) Условие неустойчивости:

$$\operatorname{Im} [R(\pi - \Phi) + J(\omega_0)] > \operatorname{Re} J(\omega_0).$$

К сожалению, вышеприведенные зависимости не позволяют судить об устойчивости автоколебаний, когда  $R(\pi - \Phi) = 0$ , и условие (8.82) вырождается.

Таким образом, случай автоколебаний требует дополнительного анализа в окрестности точки  $z = -1$  единичного круга для характеристического уравнения (8.77). В этом случае имеем следующую теорему.

**Теорема 8.4.** Рассмотрим релейную систему (см. рис. 8.1) при  $r(t) \equiv 0$  с реле без зоны нечувствительности, полностью управляемую и наблюдаемую с линейным объектом, имеющим передаточную функцию  $G(s)$  с полюсами  $\operatorname{Re} s < 0$ , за исключением, быть может, простого полюса  $s = 0$ . Если  $\frac{\partial \operatorname{Im} J(\omega)}{\partial \omega} > 0$  в точке, где  $J(\omega)$  пересекает линию  $\operatorname{Im} J(\omega) = -\epsilon$ , то автоколебания не только устойчивы, но и обладают свойством орбитальной асимптотической устойчивости.

Доказательство этой теоремы приведено в гл. 11.

Для случая, показанного на рис. 8.16, автоколебания при  $\omega_1$  и  $\omega_3$  устойчивы, а при  $\omega_2$  неустойчивы.

Используя метод Цыпкина, нетрудно определить необходимые условия существования субгармонических колебаний\*.

\* Заинтересованный читатель может ознакомиться с этими результатами в работах [173] и [60].

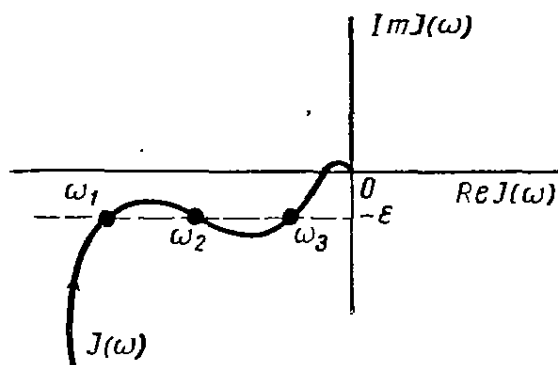


Рис. 8.16. Годограф  $J(\omega)$  и линия  $-\epsilon$ . В точках  $\omega_1$  и  $\omega_3$  наблюдаются устойчивые колебания, а в точке  $\omega_2$  — неустойчивые

В главе были рассмотрены точные методы расчета релейных систем управления, имеющих структурную схему, показанную на рис. 8.1, с релейными характеристиками, изображенными на рис. 8.2. В § 8.1 изложен способ определения переходной реакции, если известны начальные условия, реакция линейного элемента на ступенчатый входной сигнал и характеристики релейного элемента. При этом возможно либо численное, либо графическое решение задачи. Другие параграфы этой главы посвящены исследованию периодических процессов в релейных системах. Основа всех методов, изложенных в этой главе, заключается в первоначальном предположении о форме решения с последующим обоснованием условий, при которых такое решение может существовать.

В § 8.2 рассматриваются два типа условий, определяющих существование в релейной системе периодических колебаний. Первое представляет собой условие переключения (8.13) и второе — условие непрерывности (8.14). Материал этой главы ограничен определением основных колебаний, показанных на рис. 8.3.

Для исследования существования периодических колебаний в системах управления предложены два метода. Один из них — метод модифицированного  $z$ -преобразования с опережением, рассмотренный в § 8.3, основан на том, что установившийся периодический процесс на выходе линейного элемента, вызванный меандровыми колебаниями на выходе реле, можно описать с помощью модифицированного  $z$ -преобразования в виде выражений (8.24) и (8.25). Эти выражения определяются параметрами периодического сигнала и передаточной функцией линейного элемента. С целью упрощения преобразований могут быть использованы стандартные таблицы модифицированного  $z$ -преобразования с опережением. Теорема 8.1 является основой для всей теории, изложенной в § 8.3.

Метод Цыпкина, приводимый в § 8.4, заключается в определении условий переключения в результате построения некоторой кривой, называемой годографом Цыпкина. Этот годограф строится по выражениям (8.44) и (8.45) соответственно для реле без зоны и с зоной нечувствительности. Годограф Цыпкина основан на разложении в ряд Фурье выходного реле за период работы. Все это можно получить не только из амплитудно-фазовой частотной характеристики  $G(j\omega)$  линейного элемента (§ 8.5), но также с помощью  $z$ -преобразований  $G(s)$  [см. в § 8.6 выражения (8.63) и (8.65)].

Модифицированное  $z$ -преобразование с опережением облегчает получение условий переключения и позволяет находить выражения для периодических колебаний на выходе системы управления, что может быть использовано для анализа условий непрерывности (8.14). Следует заметить, что метод Цыпкина ограничивается исследованием условий переключения. Тем не менее если известны значения параметров сигнала, удовлетворяющие условиям переключения, то трудная задача определения условий непрерывности упрощается. К счастью, почти во всех реальных системах условия непрерывности удовлетворяются, если выдержаны условия переключения.

В методе модифицированного  $z$ -преобразования с опережением необходимо рассматривать те начальные условия, которые соответствуют особенностям передаточной функции  $G(s)$  в области  $\operatorname{Re} s \geq 0$ . Метод Цыпкина не требует такого рассмотрения. Однако при его использовании должны быть установлены условия существования симметричных основных колебаний. Иначе он не может быть применен без использования модифицированных методов.

Хотя метод модифицированного  $z$ -преобразования с опережением легко распространяется на случай исследования вынужденных колебаний, метод Цыпкина более изящен. Для его применения строится кривая выходного сигнала при периодическом входном сигнале данной формы [см. выражение (8.70)]. Условия переключения для этого случая даются выражениями (8.72) и (8.73), а также иллюстрируются рис. 8.12.

В § 8.7 рассматривается устойчивость периодических колебаний как при действии входного сигнала, так и без него. Показано, что устойчивость периодических колебаний в малом эквивалентна устойчивости линейной импульсной системы, изображенной на рис. 8.15. Условия устойчивости колебаний, полученные для этой импульсной системы, можно также определить и по годографу Цыпкина. Сказанное распространяется и на случай вынужденных колебаний [условие (8.82)] и автоколебаний (теорема 8.4). Дальнейшее распространение этих методов для анализа колебаний, отличных от основных, или для случая реле с другими характеристиками (здесь не рассмотренными), хотя и является заманчивым, однако может привести к довольно громоздким вычислениям.

### 8.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

8.1. Для системы управления, приведенной в примере 8.1, реакция которой на начальные условия равна

$$y_0(t) = -0,407 + 0,207e^{-t},$$

найти переходный процесс  $y(t)$  с помощью метода, описанного в § 8.1.

8.2. Для системы управления, приведенной в примере 8.1, определите, удовлетворяются ли условия непрерывности, заданные выражением (8.14а).

8.3. В примере 8.1 покажите, что если для предельного цикла не указывается  $\alpha$ , то условие (8.28) будет автоматически удовлетворяться в силу аналитичности в области  $|z| \geq 1$  функции  $\mathcal{U}_1(z, m)$ .

8.4. Проверьте выражение (8.37). Покажите, что выражение (8.31) справедливо не только для  $a > 0$ , но и для  $a < 0$ .

8.5. Исследуйте условия непрерывности [выражение (8.14а)] для системы, приведенной в примере 8.2 при  $a = 2$ ;  $U = 10$ ;  $\varepsilon = 1/2$ . Повторите это же для  $a = -2$ .

8.6. Исследуйте основные колебания релейной системы управления (см. рис. 8.1) с реле, показанным на рис. 8.2, а, если задано

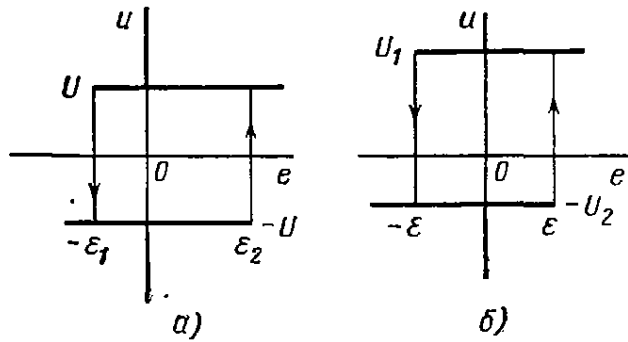


Рис. 8.17. Релейные характеристики с гистерезисом для примера 8.10:

а — симметричная; б — несимметричная

$$G(s) = \frac{a^2}{s(s+a)}; \quad a > 0;$$

$$Y_0(s) = \frac{x_{10}}{s} + \frac{x_{20}}{s+a} \quad \text{и} \quad r(t) = R.$$

Покажите, каким необходимым условиям нужно удовлетворить, чтобы в системе существовали автоколебания.

8.7. Для системы управления из предыдущей задачи и если  $U = 1$ ;  $\varepsilon = 1/2$ ;  $a = 1$  и  $R = 6,5$  определите период автоколебаний и выражение для  $y_n(t)$ . Проверьте, удовлетворяются ли при этом условия непрерывности.

8.8. Исследуйте устойчивость автоколебаний в системах управления, приведенных в примерах 8.1, 8.2 и 8.3.

У к а з а н и е. Для этого воспользуйтесь теоремами 8.2 и 8.3.

8.9. Исследуйте существование и устойчивость автоколебаний в системах управления, приведенных в примерах 8.2 и 8.3, используя годограф Цыпкина.

8.10. Рассмотрите релейную систему, изображенную на рис. 8.1, если  $r(t) \equiv 0$ . Для каждой из релейных характеристик, показанных на рис. 8.17:

а) напишите условия переключения для основного периодического режима;

б) если  $G(p)$  имеет полюс при  $p = 0$ , то какова средняя величина  $y(t)$  на выходе системы;

в) поясните применение каждого из методов исследования автоколебаний.

8.11. Рассмотрите систему управления, приведенную на рис. 8.1 с идеальным реле (см. рис. 8.2, е). При каком типе линейного стационарного элемента метод эквивалентной передаточной функции указывает на отсутствие автоколебаний, а годограф Цыпкина на их присутствии? Ответьте на тот же вопрос, если реле имеет характеристику, показанную на рис. 8.2, а.

8.12. Выведите выражение (8.46), не пользуясь модифицированным  $z$ -преобразованием с опережением.

8.13. Постройте годограф Цыпкина для объектов управления, имеющих следующие передаточные функции:

$$а) \frac{1}{(s+2)(s+4)};$$

$$б) \frac{s+2}{s^2(s+4)};$$

$$в) \frac{1}{s(s^2+s+2)}.$$

Построение выполните двумя способами: приближенным, используя амплитудно-фазовые характеристики исходных передаточных функций; и точным, используя формулу (8.48).

## 8.10. УКАЗАНИЕ НА ЛИТЕРАТУРУ

Наиболее подробно теория релейных систем управления изложена в книге [191]. Материалы этой книги были использованы в § 8.4—8.6. Последнее представило определенные трудности, так как до сих пор нет перевода этой книги на английский язык.

Метод, достаточно близкий по своим идеям к методу Цыпкина, был разработан Хамелом. Для изучения метода Хамела и его связи с методом Цыпкина отошлем читателя к работе [591].

Таблицы для обоих видов модифицированного  $z$ -преобразования можно найти в книгах [901 и [1901].

В настоящей главе не рассматривался метод для нахождения периодического процесса из условий переключения, записанных в виде матричных уравнений. С этим методом можно ознакомиться по работе [143]. Дальнейшее развитие данной методики, удобной для применения в релейных системах управления, дано в работе [1111].



## УСТОЙЧИВОСТЬ В БОЛЬШОМ И ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

В гл. 5 были введены понятия асимптотической устойчивости в большом и в целом и было отмечено, что для этих случаев отсутствует единый подход, который, например, подобно первому методу Ляпунова позволял бы установить факт устойчивости на основе линеаризации. Вызывает затруднения анализ устойчивости в большом даже в случае простейшей системы, включающей линейный стационарный объект и безынерционную нелинейность, поскольку несправедливы ни гипотеза Айзермана, ни гипотеза Калмана.

Можно, правда, при достаточно сильных ограничениях обосновать ряд методов, дающих достаточные условия устойчивости в большом. К числу таких фундаментальных методов следует отнести второй метод Ляпунова, метод Попова и некоторые подходы, использующие идеи функционального анализа, в основном принцип сжатых отображений. Перечисленные методы и составляют предмет обсуждения данной и последующих двух глав.

Первоначально второй метод Ляпунова [130] был предложен как метод для анализа устойчивости в малом. Точнее говоря, он был предназначен для установления факта устойчивости (в смысле Ляпунова) положения равновесия динамической системы. Основное достоинство метода заключается в том, что он позволяет судить об устойчивости, не отыскивая при этом точного решения системы исходных уравнений. В дальнейшем было показано, что метод позволяет установить свойство устойчивости в большом и асимптотической устойчивости в целом. Интенсивные исследования ученых многих стран позволили еще в большей мере расширить область применения указанного метода; и лишь недавно интерес ученых стал несколько ослабевать, поскольку выявились принципиальные ограничения, связанные с таким подходом.

В этой главе мы прежде всего изучим метод Ляпунова в применении к анализу устойчивости в малом; затем используем его для анализа устойчивости в большом. Далее покажем, как можно, используя метод Ляпунова, получить практически важные результаты, но вместе с тем и укажем на те ограничения, которые присущи данному методу и выявлены к настоящему времени.

### 9.1. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Идея, лежащая в основе второго метода Ляпунова, достаточно проста и наглядна. Рассмотрим произвольную физически возможную автономную систему. По мере того, как полная энергия системы монотонно уменьшается, она приближается к положению равновесия. Это обусловлено тем, что энер-

гия есть неотрицательная функция состояния системы, минимум которой определяется состоянием покоя системы в одном из устойчивых положений равновесия.

Не следует переоценивать значения полной энергии при оценке устойчивости; любая другая неотрицательная функция состояния системы была бы также приемлема для этих целей.

Обратимся к автономной системе второго порядка вида

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Ради общности рассуждений допустим, что осуществлена такая замена переменных, при которой рассматриваемое нами положение равновесия переведено в начало координат и, следовательно, выполняется условие

$$f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0.$$

Допустим, что известна функция состояния системы  $V(x_1, x_2)$ , которая положительна всюду, за исключением начала координат, где эта функция равна 0. Если изобразить функцию  $x_3 = V(x_1, x_2)$  в координатах  $(x_1, x_2, x_3)$ , то в окрестности начала координат ее геометрический образ напоминает чашу (рис. 9.1).

Если к тому же удастся показать, что движение системы в окрестности начала координат происходит в направлении убывания функции  $V$  независимо от начальных условий  $(x_{10}, x_{20})$ , то это означает, что начало координат рассматриваемой системы асимптотически устойчиво.

Если же движение системы таково, что функция  $V$  не возрастает, т. е. либо уменьшается, либо равна константе, то может оказаться, что существует множество положений равновесий, в каждом из которых функция  $V = \text{const}$ . Поскольку такие возможности нельзя исключить из рассмотрения, то в общем случае и нельзя гарантировать асимптотическую устойчивость системы относительно начала координат, хотя есть основания ожидать, что начало координат будет, по меньшей мере, устойчиво. Заметим, что справедливо следующее соотношение:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2).$$

Такое представление позволяет установить связь производной функции  $V$  с системой исходных дифференциальных уравнений. Поскольку функции  $V$  и  $f_i$  известны, то для определения свойства устойчивости достаточно проанализировать полученную выше производную  $\frac{dV}{dt}$ , не отыскивая точного решения системы дифференциальных уравнений.

Если все сказанное выше распространить на системы  $n$ -го порядка, то это и образует основу второго метода Ляпунова. В дальнейшем будем считать, что каждой системе  $n$ -го порядка поставлена в соответствие функция  $V(\mathbf{x})$ , удовлетворяющая следующим условиям:

1. Функция  $V(\mathbf{x})$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка в некоторой (открытой) области  $\mathcal{R}$ , включающей начало координат и удовлетворяющей условию  $\|\mathbf{x}\| < a$ , где  $a > 0$  (предпола-

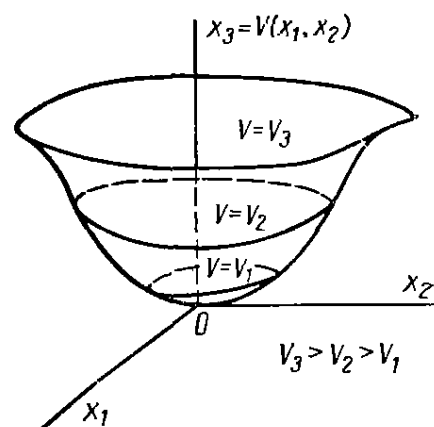


Рис. 9.1. Всюду положительная, за исключением начала координат  $x_1 = x_2 = 0$ , функция  $V(x_1, x_2)$

гается, что в каждой точке области  $\mathcal{R}$  рассматриваемая система имеет единственное решение).

2. Функция  $V(\mathbf{x})$  является в области  $\mathcal{R}$  определенно положительной функцией\*.

3. Производная по времени функции  $V$  вдоль траекторий системы  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$  является знакоотрицательной функцией в области  $\mathcal{R}$ . Как уже говорилось выше,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = (\text{grad } V)^T \dot{\mathbf{x}} = (\nabla V)^T f(\mathbf{x}), \quad (9.1)$$

при этом  $\text{grad } V \equiv \dot{\nabla} V$  и представляет  $n$ -мерный вектор,  $i$ -я компонента которого равна  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ .

Функция, удовлетворяющая всем перечисленным свойствам, называется функцией Ляпунова.

При  $n = 2$  функция Ляпунова имеет простую геометрическую интерпретацию, о которой упоминалось в начале этого параграфа.

Однако, к сожалению, не существует общего метода, который позволял бы достаточно просто определять знакоопределенность выбранной скалярной функции  $V(\mathbf{x})$ . Именно этот факт значительно ограничивает применимость достаточно сильных теорем этого метода, о которых будет идти речь ниже. Более того, при этом существенно ограничивается число способов построения функций Ляпунова. Читателю, последовательно изучающему материал данной книги, следует в дальнейшем не забывать об этих трудностях.

Рассмотрим следующие два важных случая, когда оказывается возможным выявить свойство знакоопределенности функции  $V(\mathbf{x})$ .

1. Если  $V(\mathbf{x})$  есть квадратичная форма переменных  $x_i$ , равная (см. приложение I)

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j, \quad (9.2)$$

где  $k_{ij}$  — действительные числа, то, следуя результатам § 1.7 (приложение I), можно записать

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}, \quad (9.3)$$

\* Функция  $V(\mathbf{x})$  определенно положительна (отрицательна), если  $V(\mathbf{0}) = 0$ , и  $V(\mathbf{x}) > 0$  при  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  или, в общем случае, знакоопределенна.

Функция  $V(\mathbf{x})$  знакоположительна (знакоотрицательна), если  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) и равна нулю в начале координат, а также, по крайней мере, еще в одной точке области  $\mathcal{R}$ ; в общем случае такие функции называются знакопостоянными.

Если функция  $V(\mathbf{x})$  определенно положительна (знакоположительна), то  $-V(\mathbf{x})$  определенно отрицательна (знакоотрицательна).

Если функция не является ни знакопостоянной, ни знакоопределенной, то она называется знакопеременной. Например, для системы третьего порядка функции

$$V_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 \text{ и } V_2(\mathbf{x}) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^2$$

являются определенно положительными.

Функция  $V_3(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - x_3^4$  определенно положительна в области  $\mathcal{R}$ , определяемой неравенством  $|x_3| < \sqrt{3}$ .

Функция  $V_4(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + x_3^2$  знакоположительна, поскольку она равна нулю при  $x_1 = -x_2$ ,  $x_3 = 0$ .

Функция  $V_5(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3^2$  знакопеременна.

где  $q_{ij} = k_{ij}$  при  $i = j$ ;

$$q_{ij} = \frac{1}{2}(k_{ij} + k_{ji}) = q_{ji} \text{ при } i \neq j.$$

Теперь воспользуемся теоремой 1.2 приложения I: квадратичная форма (9.2) положительно определенная тогда и только тогда, когда все определители  $|Q_1|, \dots, |Q_n|$  матрицы  $Q$  положительны\*.

2. Если  $V(\mathbf{x})$  — однородная функция степени  $k$ , т. е.  $V(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k V(x_1, \dots, x_n)$ , то  $V(\mathbf{x})$  знакопеременна при нечетном  $k$ .

Пример 9.1. Рассмотрим

$$V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2 = [x_1 x_2 x_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Определители  $|Q_1|, \dots, |Q_3|$  равны

$$|Q_1| = |2| > 0; \quad |Q_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 > 0;$$

$$|Q_3| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -24 < 0.$$

Поскольку определитель  $|Q_3|$  отрицателен, то функция  $V(\mathbf{x})$  не является определенно положительной.

Пример 9.2. Рассмотрим функцию

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1x_2x_3 + 18x_1^2x_3 + 7x_2x_3^2,$$

которая является однородной функцией третьего порядка и, следовательно, является знакопеременной.

## 9.2. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В МАЛОМ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Ниже сформулированы четыре теоремы Ляпунова, касающиеся устойчивости автономных систем. В дополнение приводится также теорема Четаева о неустойчивости, которая во многих случаях оказывается полезнее соответствующих теорем Ляпунова. Все теоремы сопровождаются доказательствами, хотя при надлежащем проникновении в существо функций Ляпунова эти доказательства становятся очевидными. Кроме того, приводится большое число примеров, иллюстрирующих содержание всех теорем.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что в результате преобразования координат положение равновесия находится в начале координат фазового пространства и, следовательно, задана система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{f}(0) = 0. \quad (9.4)$$

**Теорема 9.1** (первая теорема Ляпунова об устойчивости).

Если в некоторой области  $\mathcal{R}$ , включающей начало координат, для системы (9.4) существует функция Ляпунова, то начало координат устойчиво.

\* Важно отметить, что обратная теорема неверна, т. е. квадратичная форма (9.2) необязательно отрицательно определена, когда все определители  $|Q_1|, \dots, |Q_n|$  отрицательны. Однако можно утверждать, что квадратичная форма (9.2) отрицательно определена тогда и только тогда, когда определители  $|Q_1|, \dots, |Q_n|$  матрицы  $(-Q)$  положительны.

Доказательство. Теорема становится очевидной, если ее переформулировать следующим образом: начало координат для системы (9.4) устойчиво, если вдоль траекторий этой системы функция Ляпунова  $V$  является невозрастающей. Поскольку, по определению, функция  $V$  определена положительно, то из сказанного вытекает, что траектории системы должны оставаться внутри ограниченной области, включающей начало координат. Ради строгости рассуждений допустим, что область  $\mathcal{R}$  задана условием  $\|\mathbf{x}\| < h$ , и пусть  $V(\mathbf{x})$  — найденная функция Ляпунова. Рассмотрим точки на поверхности сферы радиуса  $\varepsilon$  с центром в начале координат ( $\varepsilon < h$ ). На этих точках в силу непрерывности функции  $V$  существует нижняя граница  $l$  такая, что  $V(x_1, \dots, x_n) \geq l$ , когда  $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$ ; при этом ввиду того, что функция  $V$  определена положительно,  $l > 0$ .

Теперь не представляет труда подобрать значение  $\delta \leq \varepsilon$  (см. определение 5.1) такое, что в окрестности  $\|\mathbf{x}\| < \delta$  функция  $V(\mathbf{x}) < l$ . Это всегда можно сделать, так как функция  $V$  непрерывна и обращается в нуль лишь в начале координат.

Поскольку предполагается, что  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ , то это означает, что для всех  $t > t_0$   $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) < l$ . Следовательно,  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t > t_0$ , что и доказывает теорему.

**Теорема 9.2** (вторая теорема Ляпунова об устойчивости). Если для системы дифференциальных уравнений (9.4) существует в области  $\mathcal{R}$ , включающей начало координат, функция Ляпунова  $V(\mathbf{x})$  такая, что ее производная  $\dot{V}$  определена отрицательная функция, то начало координат асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** Сформулированная теорема очевидна, так как если вдоль траекторий системы функция  $V$  всюду убывает, то в силу положительной определенности функции  $V$  все траектории должны заканчиваться в начале координат, которое является точкой абсолютного минимума функции  $V$ . Прежде всего начало координат устойчиво, поскольку  $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$  для  $t > t_0$ . Требуется лишь показать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ . Поскольку  $V(\mathbf{x})$  монотонно убывает в  $\mathcal{R}$ , то это означает, что  $V(\mathbf{x})$  стремится к некоторому пределу  $A$ . Остается доказать, что  $A = 0$ .

Допустим, что  $A \neq 0$ ; это означает, что  $\|\mathbf{x}(t)\|$  не стремится к нулю, и, следовательно, существует положительное число  $B$  такое, что  $\|\mathbf{x}(t)\| > B > 0$ . В данном случае можно найти еще одну константу  $C$  такую, что  $\frac{dV}{dt} \leq -C$ , так как  $\frac{dV}{dt}$  определена отрицательная функция. Тогда можно записать

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(t_0)) + \int_0^t \frac{dV}{dt} dt \leq V[\mathbf{x}(t_0)] - (t - t_0)C.$$

С течением времени правая часть неравенства становится отрицательной, что противоречит условию положительной определенности функции  $V(\mathbf{x})$ . Полученное противоречие доказывает теорему, так как  $A = 0$ , и, следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ .

Важно отметить, что теоремы 9.1 и 9.2 (и большинство других теорем второго метода Ляпунова) дают лишь достаточные условия, а это означает, что если для заданной системы дифференциальных уравнений не удастся подобрать функцию Ляпунова, то это еще не означает, что система неустойчива. Это лишь говорит о том, что предпринятая нами попытка оказалась неудачной.

Сформулируем три теоремы о неустойчивости, которые часто бывают полезны на практике.

**Теорема 9.3** (первая теорема Ляпунова о неустойчивости).

Если для системы дифференциальных уравнений (9.4) существует непрерывная функция  $V(\mathbf{x})$ , имеющая непрерывные частные производные в области  $\mathcal{R}$ , включающей начало координат, такая, что  $V_1(0) = 0$ , а ее производная по времени  $\dot{V}_1$  определено положительна вдоль траекторий системы, но при этом в любой окрестности начала координат  $V_1$  не является знакоотрицательной функцией, то начало координат неустойчиво.

**Доказательство.** Физический смысл теоремы совершенно очевиден. Выберем область  $\mathcal{R} : \|\mathbf{x}\| < \varepsilon$ . Теперь необходимо показать, что сколь бы малое  $\delta$  мы ни взяли (такое, что  $\|\mathbf{x}\| < \delta$ ), найдется  $\mathbf{x}_0$  и момент времени  $t_1$ , когда  $\|\mathbf{x}(t_1)\| \geq \varepsilon$  или  $\|\mathbf{x}(t_1)\|$  окажется вне границ области  $\mathcal{R}$ .

Выберем  $\mathbf{x}_0$  такое, что  $V(\mathbf{x}_0) > 0$ . Поскольку  $\dot{V} > 0$ , то выполняется  $V(\mathbf{x}(t)) > V(\mathbf{x}_0)$ , и, следовательно, существует  $A > 0$  такое, что  $\|\mathbf{x}(t)\| > A$ . К тому же существует  $B > 0$  такое, что  $V(\mathbf{x}(t)) \geq B$ , поскольку траектории движения направлены от начала координат, где  $V = 0$ . Следовательно, мы имеем

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \geq V(\mathbf{x}_0) + (t - t_0)B,$$

что означает неограниченный рост функции  $V(\mathbf{x}(t))$ . Однако, если  $\|\mathbf{x}(t)\|$  все время остается в области  $\mathcal{R}$ , то функция  $V$  ограничена; следовательно, существует момент времени  $t_1$ , когда  $\|\mathbf{x}(t)\|$  выходит из области  $\mathcal{R}$ , что и доказывает теорему.

**Теорема 9.4** (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). Если для системы дифференциальных уравнений (9.4) в окрестности  $\mathcal{R}$  начала координаты существует функция  $V_1(\mathbf{x})$  такая, что  $V_1 = 0$  и  $\dot{V}_1$  вдоль траекторий системы имеет вид

$$\dot{V}_1 = \lambda V_1 + W(\mathbf{x}),$$

где  $\lambda > 0$  и  $W(\mathbf{x}) \geq 0$  в области  $\mathcal{R}$ , и если в произвольной окрестности начала координат функция  $V_1(\mathbf{x})$  не является знакоотрицательной, то начало координат неустойчиво.

**Доказательство.** Как и ранее, выберем  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$  такое, что  $V_1(\mathbf{x}_0) > 0$ . Допустим, что функция  $W(\mathbf{x})$  знакоположительна, тогда для всех  $t$   $\dot{V}_1(\mathbf{x}(t)) \geq \lambda V_1(\mathbf{x}(t))$ . Таким образом, для этого частного случая функция  $\dot{V}_1$  всегда положительна и, кроме того,  $\dot{V}_1(\mathbf{x}(t)) \geq \lambda V_1(\mathbf{x}(t)) \geq \lambda V_1(\mathbf{x}_0)$ , следовательно, выполняется неравенство  $V_1(\mathbf{x}(t)) \geq (\lambda + 1) \times V_1(\mathbf{x}_0) (t - t_0)$  и  $V_1$ , неограниченно возрастая, определяет неустойчивое движение.

Более сильной теоремой о неустойчивости, нежели перечисленные теоремы Ляпунова, является теорема Четаева [118]. Идея этой теоремы заключается в следующем. Как правило, для неустойчивых систем можно отыскать такую функцию Ляпунова  $V_1(\mathbf{x})$ , что начало координат системы принадлежит границе двух областей. В одной области функции  $V_1$  и  $\dot{V}_1$  обе определено положительны; в другой функция  $V_1$  определено положительна, а функция  $\dot{V}_1$  определено отрицательна. Если в данном случае удастся показать, что траектории не переходят из одной области в другую, то это и означает, что система неустойчива.

**Теорема 9.5** (теорема Четаева о неустойчивости). Пусть  $\mathcal{R}$  — произвольная окрестность начала координат, а  $\mathcal{R}_1$  — область внутри  $\mathcal{R}$ . Допустим, что найдена функция  $V(\mathbf{x})$ , такая, что:

- 1) функция имеет непрерывные частные производные первого порядка в области  $\mathcal{R}_1$ ;
- 2) функции  $V(\mathbf{x})$  и  $\dot{V}(\mathbf{x})$  определены положительно в области  $\mathcal{R}_1$ , состоящей из внутренних точек области  $\mathcal{R}$ ;
- 3) на границе  $\mathcal{R}_1$   $V(\mathbf{x}) = 0$ ;
- 4) начало координат принадлежит границе области  $\mathcal{R}_1$ . В этих предположениях начало координат неустойчиво.

**Доказательство** (рис. 9.2). Условия теоремы означают, что траектории системы, начинающиеся в области  $\mathcal{R}_1$ , не могут пересекать границу  $\Omega$  этой области, объединяющую внутренние точки области  $\mathcal{R}$ . Однако из условия теоремы также следует, что изображающая точка должна покинуть область  $\mathcal{R}_1$  и это может произойти лишь при движении по границе  $\mathcal{R}_1$ , не совпадающей с  $\Omega$ . Таким образом существуют две разновидности граничных точек области  $\mathcal{R}_1$ : одни являются внутренними точками области  $\mathcal{R}$ , образуя границу  $\Omega$ ; другие, являясь граничными для обеих областей, образуют линию  $\Omega_1$ .

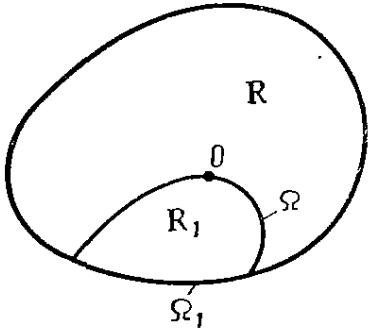


Рис. 9.2. Геометрическая интерпретация условий теоремы Четаева о неустойчивости. Область  $\mathcal{R}_1$  принадлежит области  $\mathcal{R}$ ; при этом они расположены по разные стороны от границы  $\Omega$  и по одну и ту же сторону от границы  $\Omega_1$ .

**Пример 9.3.** Уравнение движения математического маятника единичной массы можно записать в виде

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0, \quad (9.5)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  
 $L$  — длина маятника.

Для анализа устойчивости определим функцию  $V$  следующим образом:

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{g}{L} (1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2. \quad (9.6)$$

Заметим, что функция  $V(\theta, \dot{\theta})$  определена положительно для всех  $|\theta| < 2\pi$ , и

$$\frac{dV(\theta, \dot{\theta})}{dt} = \frac{g}{L} \sin \theta \cdot \dot{\theta} + \dot{\theta} \left( -\frac{g}{L} \sin \theta \right) \equiv 0.$$

Введенная таким образом функция  $V$  является функцией Ляпунова, и, следовательно, по теореме 9.1 положение равновесия математического маятника устойчиво.

Функция  $V(\theta, \dot{\theta})$ , удовлетворяющая уравнению (9.6), пропорциональна полной энергии системы, которая по определению является определено положительной функцией. Кроме того, поскольку система (9.5) консервативна (см. гл. 4), то ее полная энергия будет сохраняться, и, следовательно, функция тождественно равна нулю. Этот пример показывает, что все консервативные системы устойчивы, поскольку их полная энергия является функцией Ляпунова.

**Пример 9.4.** Допустим, что движение математического маятника задемпфировано так, что уравнение движения принимает вид

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0; \quad k > 0. \quad (9.7)$$

Снова задаваясь функцией Ляпунова  $V(\theta, \dot{\theta})$ , по уравнению (9.6), находим, что

$$\dot{V} \equiv -k\dot{\theta}^2 \quad (9.8)$$

и является знакоотрицательной функцией, так как  $\dot{V}$  отрицательна всюду, кроме точек с координатами  $\dot{\theta} \equiv 0$ , где  $\dot{V} = 0$ . Таким образом, очевидно, что решение дифференциального уравнения (9.7) устойчиво. Кроме того, отметим, что лишь при  $\theta = 0$  выполняется условие  $\dot{\theta} \equiv 0$ . Следовательно, можем сделать вывод, что система (9.7) обладает и свойством асимптотической устойчивости.

**Следствие 9.1.** Если в области  $\mathcal{R}$ , включающей начало координат, существует функция Ляпунова, производная по времени от которой в силу уравнений движения является знакоотрицательной функцией, и если можно показать, что ни одна из точек, где  $\dot{V} = 0$ , кроме начала координат, не является положением равновесия, то начало координат асимптотически устойчиво.

**Пример 9.5.** Первый метод Ляпунова был изложен в гл. 5; основополагающее значение имела теорема 5.1, теперь есть возможность доказать ее.

Пусть задана система вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (9.9)$$

где  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} (\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\|) = 0$ , т. е.  $\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\| \rightarrow 0$  быстрее, чем  $\|\mathbf{x}\|$ .

**Случай 1.** Пусть собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  для линеаризованной системы (9.9) вида  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  являются действительными, различными и отрицательными; тогда линеаризованная система асимптотически устойчива и остается показать, что исходная нелинейная система (9.9) также асимптотически устойчива.

Во-первых, следуя гл. 3, находим преобразование  $\mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{x}$  такое, что

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \mathbf{h}'(\mathbf{y}), \quad (9.10)$$

где, как и ранее,  $\mathbf{\Lambda}$  есть диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$ . Допустим, что

$$V(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

тогда

$$\dot{V}(\mathbf{y}) = 2 \sum_{i=1}^n y_i \dot{y}_i = 2 \sum_{i=1}^n \{y_i [\lambda_i y_i + h'_i(\mathbf{y}, t)]\} = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 + g(\mathbf{y}, t), \quad (9.11)$$

где  $g(\mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^n y_i h'_i(\mathbf{y}, t)$ .

Заметим, что  $|g(\mathbf{y}, t)| \rightarrow 0$  быстрее, чем  $\|\mathbf{y}\|^2$ , для каждого  $i$ . Таким образом, в достаточно малой окрестности начала координат первый член в правой части соотношения (9.11) будет доминирующим и  $\dot{V}(\mathbf{y})$  будет определено отрицательной функцией. Следовательно, по теореме 9.2 начало координат асимптотически устойчиво.

**Случай 2.** Пусть некоторые из корней, скажем  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  ( $l < n$ ), положительны и различны, а остальные отрицательны и тоже различны. Тогда линеаризованная система неустойчива. Чтобы показать, что нелинейная система также неустойчива, возьмем

$$V = y_1^2 + \dots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \dots - y_n^2,$$

тогда

$$\dot{V} = 2(\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_l y_l^2 - \lambda_{l+1} y_{l+1}^2 - \dots - \lambda_n y_n^2) + g(\mathbf{y}, t).$$

В некоторых точках, вблизи начала координат, а именно в тех, где  $y_{l+1} = y_{l+2} = \dots = y_n = 0$ ,  $V > 0$ ; к тому же  $\dot{V}$  в точках, очень близких к началу координат, определено положительная функция и, следовательно, по теореме 9.3 начало координат неустойчиво. Случай комплексных корней рассмотрен в упражнении 9.3.

**Пример 9.6.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = ax_1^2 + bx_2^3; \quad \dot{x}_2 = -cx_2 + dx_1^3, \quad \text{где } a, b, c, d > 0.$$



В результате линеаризации получим систему с полюсами в точках 0 и  $(-1)$ . Здесь мы имеем критический случай, когда первый метод Ляпунова применять нельзя. Определим функцию  $V = x_1 - \left(\frac{1}{2}\right) x_2^2$ , для которой с учетом уравнений системы получим

$$\dot{V} = \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = (ax_1^2 + bx_2^3) - x_2(-cx_2 + dx_2^3).$$

Рассмотрим рис. 9.3. В незаштрихованной области, ограниченной кривой  $x_1 = \frac{1}{2} x_2^2$ , в точках которой  $V = 0$ , функция  $V > 0$ . Кроме того, внутри этой области в точках, достаточно близких к началу координат, знак функции  $\dot{V}$  будет определяться знаком функции  $ax_1^2 + cx_2^2$ , и, следовательно,  $\dot{V}$  в этой области определенно положительная функция. Условия теоремы Четаева о неустойчивости, таким образом, выполняются, и начало координат неустойчиво, согласно теореме 9.5.

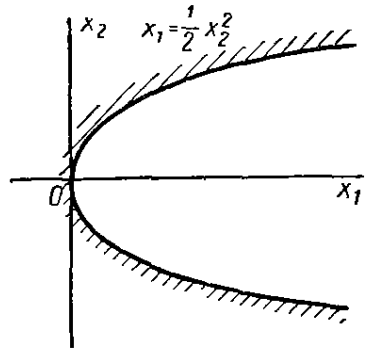


Рис. 9.3. Функция Ляпунова для примера 9.6

Пример 9.7. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4); \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4).$$

В результате линеаризации можно получить  $\dot{x}_1 = x_2$ ;  $\dot{x}_2 = -x_1$ . Корни характеристического уравнения комплексно сопряжены и равны  $\lambda = \pm j$ . Вновь имеем дело с критическим случаем, когда первый метод Ляпунова неприменим. Определим функцию Ляпунова следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2); \quad \dot{V} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4).$$

Тогда обе функции  $V$  и  $\dot{V}$  определенно положительны. Условия теоремы 9.3 выполнены, и, следовательно, начало координат неустойчиво.

### 9.3. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В БОЛЬШОМ И УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ

Основное преимущество второго метода Ляпунова заключается в том, что этот подход нетрудно распространить для анализа асимптотической устойчивости в большом и асимптотической устойчивости в целом [118].

Ведь если в процессе анализа или синтеза системы оказалось возможным установить свойство асимптотической устойчивости в большом или, быть может, даже в целом, то уверенность проектировщика в работоспособности такой системы еще более возрастает, хотя следует ясно представлять, что изучаемая математическая модель системы редко оказывается справедливой во всем фазовом пространстве или при произвольных начальных условиях. И в этом смысле установление факта устойчивости в целом может вызвать ложное чувство успокоенности. Вот почему анализ устойчивости в большом полностью оправдан только в том случае, когда изучаемая модель адекватна объекту во всем диапазоне исследуемых начальных условий.

Сформулируем основную теорему об асимптотической устойчивости в большом, предварительно совместив положение равновесия системы с началом координат.

**Теорема 9.6.** Пусть в ограниченной окрестности начала координат  $\mathcal{R}_k$  функция  $V(x)$  для системы (9.4) меньше постоянной величины  $k$ . Если в области  $\mathcal{R}_k$  функция  $V(x)$  есть функция Ляпунова, производная по времени от которой  $\dot{V}(x)$  определенно отрицательна, то начало координат (положение равновесия системы) асимптотически устойчиво в большом в области  $\mathcal{R}_k$ .

Доказательство почти аналогично доказательству теоремы 9.2, и мы предлагаем читателю проделать его самостоятельно.

Справедливо также следствие.

**С л е д с т в и е 9.2.** Теорема 9.6 остается верной и в том случае, если  $\dot{V}(\mathbf{x})$  — знакоотрицательная функция в области  $\mathcal{R}_k$ , но при этом удается показать, что не существует других положений равновесия, кроме начала координат.

Если  $\mathcal{R}_k$  совпадает со всем фазовым пространством, то следует говорить об асимптотической устойчивости в целом; при этом справедлива следующая теорема.

**Теорема 9.7** (Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский)\*. Если во всем фазовом пространстве существует для системы 9.4 функция Ляпунова  $V(\mathbf{x})$ , обладающая тем свойством, что  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , когда  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , и ее производная по времени  $\dot{V}(\mathbf{x})$  определено отрицательна, то начало координат асимптотически устойчиво в целом.

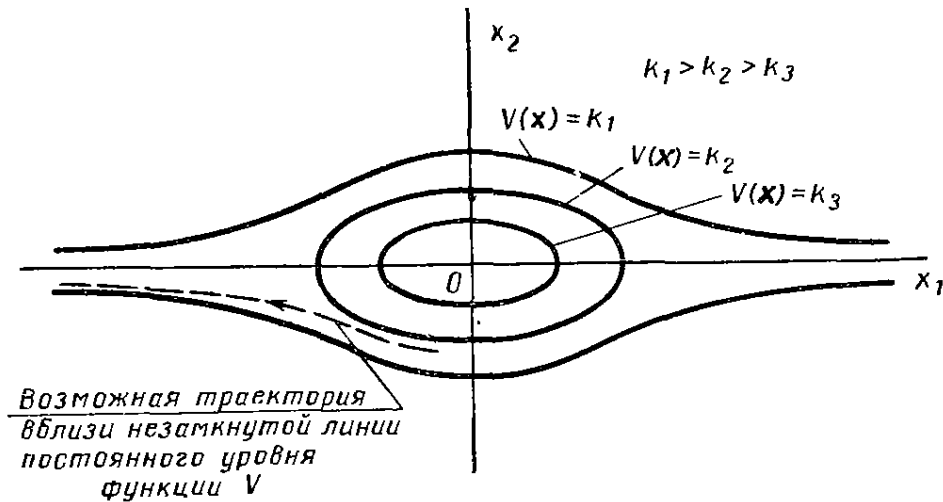


Рис. 9.4. Возможная траектория вблизи незамкнутой линии постоянного уровня функции  $V$  (штриховая линия)

**С л е д с т в и е 9.3.** Если в условиях теоремы 9.7  $\dot{V}(\mathbf{x})$  — знакоотрицательная функция и при этом не существует других положений равновесия, кроме начала координат, то асимптотическая устойчивость в целом начала координат сохраняется.

Доказательство теоремы 9.7 не представляет труда. По сравнению с предыдущими теоремами в ней лишь используется дополнительное требование, заключающееся в том, что функция  $V(\mathbf{x})$  должна стремиться к бесконечности по мере того, как расстояние изображающей точки  $\mathbf{x}$  от начала координат стремится к бесконечности независимо от направления движения. По существу это требование должно означать, что поверхности равного уровня функции  $V(\mathbf{x})$  являются замкнутыми во всем фазовом пространстве. В противном случае может оказаться, что траектории системы уходят в бесконечность, хотя функция  $V(\mathbf{x})$  определено положительна, а ее производная по времени  $\dot{V}(\mathbf{x})$  определено отрицательна.

**П р и м е р 9.8.** Допустим, что в достаточном удалении от начала координат линии одного уровня оказались незамкнутыми. Заметим, что линии постоянного уровня обязательно замкнуты вблизи начала координат при условии, что функция  $V(\mathbf{x})$  определено положительна, а ее производная  $\dot{V}(\mathbf{x})$  определено отрицательна. На рис. 9.4 показаны соответствующие кривые постоянного уровня для системы второго порядка. Здесь же приведена возможная траектория системы, уходящая в бесконечность, которая приближается к линии постоянного уровня, но никогда не совпадает с ней.

\* См. Барбашин Е. А. «Введение в теорию устойчивости». «Наука». М., 1967. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. «Об устойчивости движения в целом». ДАН СССР, 1952, т. 86, вып. 3 (Прим. ред.).

Например, для функции  $V(\mathbf{x})$  вида

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n V_i(x_i),$$

когда один или более, но не все  $V_i$  имеют конечный предел при  $x_i \rightarrow \infty$  (например,  $V_i(x_i) = \frac{x_i^2}{1+x_i^2}$ ), существуют незамкнутые поверхности постоянного уровня (покажите это).

**Пример 9.9.** Вернемся вновь к анализу движения математического маятника (пример 9.3). Поскольку выбранная выше функция Ляпунова

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{g}{L}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2$$

совпадает с полной энергией системы, то существует достаточно большая область, в которой функция  $V$  не имеет максимума\*. Указанная область ограничена сепаратрисой, т. е. траекторией, которая начинается сколь угодно близко к точке  $\theta_0 = \pm\pi$ ;  $\dot{\theta}_0 = 0$ . В этой области функция  $V$  ограничена значением  $2\frac{g}{L}$ , которое равно величине потенциальной энергии в точке  $\theta_0 = \pm\pi$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$ . Таким образом, условия следствия 9.2 выполняются, и поэтому положение равновесия задемпфированного математического маятника асимптотически устойчиво в большом в указанной области.

В данной конкретной задаче нам удалось отыскать область асимптотической устойчивости в большом, которая совпадает со всей областью начальных условий в силу специфики самой задачи. Как правило, этого не случается.

**Пример 9.10.** Управление углом тангажа спутника, который стабилизирован гравитационными силами\*\*. При движении по круговой орбите спутника, имеющего гантельную форму, возникают медленные колебания относительно центра масс. Это связано с тем, что существует небольшая разница в силах гравитации, действующих на нижнюю и верхнюю гантели; возникающий при этом стабилизирующий момент и приводит к указанным колебаниям. Было предложено большое число схем, в которых для стабилизации использовались гравитационные силы. Покажем, каким образом можно за счет активных сил задемпфировать возникающие из-за градиента гравитации колебания.

Запишем линеаризованные уравнения углового движения спутника в плоскости тангажа в следующем виде:

$$J_1 \ddot{\theta} + 3\Omega^2 (J_2 - J_3) \theta = u(t), \quad (9.12)$$

где  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — моменты инерции спутника соответственно для движения тангажа, крена и рыскания;

$\Omega$  — угловая скорость орбитального движения;

$\theta$  — отклонение угла тангажа от направления местной гировертикали.

Наша задача заключается в том, чтобы синтезировать систему с обратной связью, т. е. сформировать управление  $u$  в функции угловой скорости  $\dot{\theta}$  и угла тангажа  $\theta$  таким образом, чтобы колебания относительно центра масс были задемпфированы.

В том случае, когда управление  $u$  формируется в виде линейной комбинации сигналов  $\theta$  и  $\dot{\theta}$ , задача получается тривиальной, поскольку вся система оказывается линейной. Рассмотрим возможность формирования управления в виде  $u = -f(\alpha\theta + \beta\dot{\theta})$ , где функция  $f$  удовлетворяет условию

$$f(0) = 0; \quad x f(x) > 0, \text{ если } x \neq 0; \quad (9.13)$$

это означает, что график  $f(x)$  расположен только в первой и третьей четвертях плоскости  $(f(x), x)$  и проходит через начало координат.

Образую функцию Ляпунова  $V(\theta, \dot{\theta})$  в виде

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta^2 + a\dot{\theta}^2) + b \int_0^{\alpha\theta + \beta\dot{\theta}} f(\xi) d\xi, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

\* Это подразумевается и в условиях теоремы 9.6 (см. упражнение 9.12).

\*\* Более подробно эта задача рассматривается в работе [82].

Тогда

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \theta \dot{\theta} + a \dot{\theta} \ddot{\theta} + b(\alpha \dot{\theta} + \beta \ddot{\theta}) f(\alpha \theta + \beta \dot{\theta}) = (1 - ka) \theta \dot{\theta} - \left[ \left( \frac{a}{J_1} - ba \right) \dot{\theta} + b\beta k \theta \right] f - \frac{b\beta}{J_1} f^2,$$

где

$$k = 3\Omega^2 \frac{J_2 - J^2}{J_1}.$$

Если выбрать величину  $a = \frac{1}{k}$ , а  $b = \frac{a}{J_1 k (\alpha^2 + k\beta^2)}$ , то выражение для  $\dot{V}$  упрощается:

$$\dot{V} = - \frac{\beta}{J_1 (\alpha^2 + k\beta^2)} \left[ (\alpha \theta + \beta \dot{\theta}) f(\alpha \theta + \beta \dot{\theta}) + \frac{\alpha}{J_1 k} f^2(\alpha \theta + \beta \dot{\theta}) \right].$$

Поскольку нелинейная функция удовлетворяет условию (9.13), то ясно, что при  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  функция  $\dot{V}$  будет определено отрицательной, а начало координат ( $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ ) асимптотически устойчиво.

Если  $\alpha = 0$ , то  $\dot{V}$  — знакоотрицательная функция. Однако и в данном случае начало координат есть единственное положение равновесия; другие точки, где  $\dot{V} = 0$ , не являются положениями равновесия (ответьте — почему?). Таким образом, начало координат системы (9.12) по-прежнему асимптотически устойчиво, когда управление  $u = -f(\beta \dot{\theta})$ , где функция  $f$  удовлетворяет условию (9.13).

Наконец, рассмотрим случай, когда  $f(x)$  удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) dx = \infty;$$

это условие выполняется, например, для нелинейного элемента с насыщением; при этом  $V(\theta, \dot{\theta}) \rightarrow \infty$ , когда  $(\theta^2 + \dot{\theta}^2) \rightarrow \infty$ , и, следовательно, начало координат системы асимптотически устойчиво в целом. Но поскольку изучаемая математическая модель получена в результате линеаризации, то эта модель верна лишь для малых сигналов. Поэтому свойство асимптотической устойчивости в целом для исходного объекта может и не выполняться.

#### 9.4. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Для линейной автономной системы существование функции Ляпунова в виде квадратичной формы переменных состояния является одновременно необходимым и достаточным условием равномерной асимптотической устойчивости в целом [98], [118], [130].

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax. \quad (9.14)$$

Допустим, что нам удалось найти функцию Ляпунова в виде квадратичной формы  $V(x) = x^T Q x$ , где матрица  $Q$  симметрична и положительно определена\*. Тогда

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} = x^T A^T Q x + x^T Q A x = x^T (A^T Q + Q A) x. \quad (9.15)$$

Обозначим

$$A^T Q + Q A = -C, \quad (9.16)$$

тогда поскольку матрица  $C$  положительно определена, то система асимптотически устойчива в целом; более того, так как

$$C^T = -(A^T Q + Q A)^T = -(Q^T A + A^T Q^T) = -(Q A + A^T Q) = -C,$$

то матрица  $C$  также и симметрична.

\* См. приложение I.

Однако чаще целесообразнее рассмотреть обратную задачу. Допустим, мы выбрали положительно определенную матрицу  $C$ , равную, скажем, единичной матрице  $C = I$ . Тогда, по крайней мере теоретически, из уравнения (9.16) можно определить матрицу  $Q$ . Если квадратичная форма, определяемая матрицей  $Q$ , оказывается неопределенной (знакопеременной), то по первой теореме о неустойчивости начало координат неустойчиво. Если же матрица  $Q$  положительно определена, то поскольку система линейна и стационарна, начало координат асимптотически устойчиво в целом. Обоснованность такого анализа зависит от того, определяет ли уравнение (9.16) однозначно матрицу  $Q$ , если задана симметричная и положительно определенная матрица  $C$ .

Можно показать, что справедливы следующие утверждения.

1. Если  $n$  собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  таковы, что  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), то из уравнения (9.16) при заданной матрице  $C$  матрица  $Q$  определяется однозначно (упражнение 9.13). Отметим, что для устойчивой матрицы  $A$  это условие выполняется всегда.

2. Если матрица  $A$  устойчива и матрица  $C$  положительно определена, то матрица  $Q$  также положительно определена (упражнение 9.14).

Если матрица  $C$  положительно определена, то условие положительной определенности матрицы  $Q$  является достаточным условием устойчивости матрицы  $A$ , так как функция  $V = x^T Q x$  есть функция Ляпунова для рассматриваемой системы. Утверждение 2 также означает, что положительная определенность матрицы  $Q$  есть необходимое условие устойчивости матрицы  $A$ , если матрица  $C$  положительно определена. Итак, мы можем сформулировать следующую теорему, впервые доказанную Ляпуновым.

**Теорема 9.8.** Необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в целом положения равновесия линейной автономной системы  $\dot{x} = Ax$  заключается в том, что для произвольной симметричной положительно определенной матрицы  $C$  существует симметричная положительно определенная матрица  $Q$ , которую находим из  $\frac{n(n+1)}{2}$  уравнений \* вида  $A^T Q + QA = -C$ .

Весьма полезно и обратное утверждение.

**С л е д с т в и е 9.4.** Если начало координат линейной автономной системы  $\dot{x} = Ax$  устойчиво, то существует единственная функция Ляпунова вида  $V(x) = x^T Q x$ , где матрица  $Q$  удовлетворяет уравнению  $A^T Q + QA = -C$  и  $C$  — произвольная симметричная, положительно определенная матрица.

Используя полученную теорему и ее следствие, можно достаточно просто доказать критерий Рауса—Гурвица устойчивости линейной автономной системы [155]. Традиционное доказательство этого критерия значительно сложнее и весьма трудоемко [169].

### 9.5. ЗАДАЧА ЛУРЬЕ \*\*

Мы уже отмечали в гл. 5, что гипотеза Айзермана, вообще говоря, не выполняется. Поэтому необходимо проанализировать иные и, по-видимому, более жесткие условия, гарантирующие асимптотическую устойчи-

\* Ввиду симметрии матрицы  $C$  требуется лишь  $\frac{n(n+1)}{2}$  уравнений для отыскания матрицы  $Q$  из матричного уравнения

$$A^T Q + QA = -C.$$

\*\* См. работы [58], [66], [118], [120], [122], [125], [129].

вость в целом. В этом отношении интересен подход, предложенный А. И. Лурье в 1950 г.; им, по существу, рассматривался тот же тип систем, который изучался и М. А. Айзерманом. Ставилась задача отыскать все комбинации значений параметров и видов нелинейных характеристик, для которых некоторая функция  $V$  частного вида является функцией Ляпунова изучаемой системы. Используемая А. И. Лурье функция  $V$  представляла сумму квадратичной формы и интеграла нелинейной характеристики.

Развитие так называемой задачи Лурье имеет интересное продолжение и нашло свое отражение в работах многих исследователей. В первой работе Лурье, а в дальнейшем в работах Летова использовался специальный вид функции Ляпунова, о котором говорилось выше. В этом случае можно получить  $n$  квадратных алгебраических уравнений для определения значений параметров, гарантирующих асимптотическую устойчивость в целом исследуемой системы (упражнения 9.7 и 9.8).

Для систем высокого порядка совместное решение большого числа квадратных уравнений вызывает трудности. В 1961 г. Ла-Ссаль и Лефшец показали: для задачи прямого регулирования необходимое и достаточное условие того, что выбранная функция  $V$  является функцией Ляпунова, определяется некоторым скалярным неравенством, в которое входят параметры системы. Эти исследования позволили придать практическую значимость задаче Лурье.

Однако, пока велась работа по этим направлениям в Советском Союзе и в США, румынский математик В. М. Попов разработал более строгий критерий. Эти результаты были опубликованы первоначально в румынских журналах и не были известны широкому кругу ученых, пока в 1961 г. не появилась статья в советском журнале «Автоматика и телемеханика»\*. Интереснейшая особенность критерия Попова заключается в том, что это частотный критерий и, кроме того, он обобщает условие Лефшеца, разрешающее задачу Лурье.

Поскольку результаты Попова и их развитие представляют самостоятельный интерес, мы посвятим им в дальнейшем целую главу. Результаты Лефшеца в ряде случаев, вероятно, дают самое простое решение поставленной задачи, в чем мы убедимся при рассмотрении данного параграфа.

Типы систем, для которых формулируется задача Лурье, разделяются в основном на две группы. Это системы прямого регулирования (рис. 9.5), которые мы рассматривали до настоящего времени, и системы непрямого регулирования (рис. 9.6а), в которых нелинейность  $f(e)$  и исполнительные органы охвачены обратной связью.

Системы непрямого регулирования наиболее часто встречаются в системах управления самолетами и ракетами, где гидравлический привод перемещает рулевые органы, изменяя тем самым движение летательного аппарата. Заметим, что систему непрямого регулирования можно преобразовать в систему прямого регулирования и наоборот.

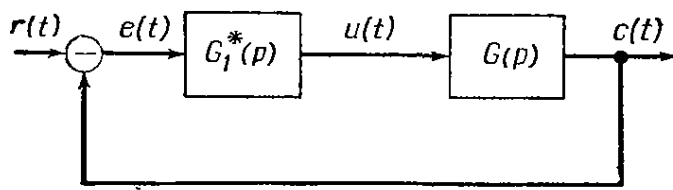


Рис. 9.5. Структурная схема системы прямого регулирования

\* Речь идет о статье «Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования». Автоматика и телемеханика т. XXII, № 8, стр. 961, 1961 (Прим. ред.).

Как правило, нелинейность  $f(e)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} f(e) &= 0, e = 0; \\ \int_0^e f(z) dz &> 0, e \neq 0; \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

где  $f(e)$  — непрерывная функция, за исключением, быть может, лишь точки  $e = 0$ .

При этом условиям (9.17) удовлетворяют те нелинейности, для которых выполняется гипотеза Айзермана.

Лурье стремился выяснить условия, при которых системы прямого и непрямого регулирования асимптотически устойчивы в целом для всего класса нелинейностей, удовлетворяющих условию (9.17). Сформулируем следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 9.1.** Автономная система вида, показанного на рис. 9.5. и 9.6а, абсолютно устойчива, если ее начало координат асимптотически устойчиво в целом для всех нелинейностей  $f(e)$  вида (9.17).

Рассмотрим случай системы непрямого регулирования (рис. 9.6а). Пусть полюсы передаточной функции  $G(s)$  различны и имеют отрицательные действительные части,  $H(s) = \frac{1}{s}$ . Трансформируя линейную часть системы и учитывая свойство автономности, легко получить эквивалентную, в смысле анализа устойчивости, структурную схему системы при условии, что  $h + c^T A b \neq 0$  (см. упражнение 9.16). Соответствующая структура показана на рис. 9.6б. Заметим, что выходная координата  $y_1$  не совпадает с исходной координатой  $y$ .

Систему, показанную на рис. 9.6б, можно описать следующими уравнениями\*:

$$\dot{x} = Ax + bf(e); \quad \dot{e} = c^T x - hf(e); \quad y_1 = c^T x. \quad (9.18)$$

Введем функцию  $V$ :

$$V(x, e) = x^T Q x + \int_0^e f(z) dz, \quad (9.19)$$

где  $Q$  — произвольная симметричная, положительно определенная матрица.

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, e) &= x^T Q \dot{x} + \dot{x}^T Q x + f(e) \dot{e} = x^T (A^T Q + QA) x + \\ &+ f(e) [b^T Q x + x^T Q b + c^T x] - hf^2(e). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Поскольку линейная часть системы устойчива, то, имея в виду следствие (9.4) и определяя матрицу  $Q$  из уравнения

$$A^T Q + QA = -C, \quad (9.21)$$

где  $C$  — произвольная симметричная, положительно определенная матрица, мы гарантируем симметричность и положительную определенность матрицы  $Q$ .

Перепишем соотношение (9.20) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, e) &= -x^T C x + f(e) (g^T x + x^T g) - hf^2(e) = \\ &= -x^T C x + 2f(e) g^T x - hf^2(e), \end{aligned} \quad (9.22)$$

\* Здесь мы следуем работам А. И. Лефшеца [118], [122].

где

$$\mathbf{g} = \mathbf{Qb} + \frac{\mathbf{c}}{2}. \quad (9.23)$$

Перепишем уравнение (9.22) в матричной форме:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, e) = - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ f(e) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{g} \\ -\mathbf{g}^T & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ f(e) \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

Для того чтобы матрица  $\dot{V}$  была отрицательно определенной, матрица

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{g} \\ -\mathbf{g}^T & h \end{bmatrix}$$

должна быть положительно определенной.

Применяя теорему приложения I, сделаем вывод, что для положительной определенности матрицы  $\mathbf{P}$  достаточно, чтобы определитель матрицы  $\mathbf{P}$  был положительным, поскольку матрица  $\mathbf{C}$ , по условию, является положительно определенной. Введем матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix},$$

определитель которой положителен, где  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор  $n$  измерений.

Отсюда следует, что определитель произведения  $\mathbf{RP}$  также должен быть положительным, т. е.

$$|\mathbf{RP}| = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{g} \\ -\mathbf{g}^T & h \end{vmatrix} > 0$$

или

$$h > \mathbf{g}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{g}. \quad (9.25)$$

Соотношение (9.25) есть неравенство Лефшеца [118]. Это условие вместе с условием положительной определенности матрицы  $\mathbf{C}$  гарантирует, что функция  $V$  вида (9.19) есть функция Ляпунова. Если в дополнение к этому выполняется условие

$$\lim_{e \rightarrow \infty} \int_0^e f(z) dz = \infty, \quad (9.26)$$

то  $V \rightarrow \infty$ , когда  $\|\mathbf{x}\| + |e| \rightarrow \infty$ , а по теореме (9.7) система уравнений (9.18) абсолютно устойчива\*.

**Пример 9.11.** Рассмотрим систему, структурная схема которой показана на рис. 9.6б. Пусть  $G(p) = \frac{p+6}{(p+2)(p+3)}$ . Используя методику Лефшеца, определим наименьшее значение  $h$ , гарантирующее абсолютную устойчивость системы, если матрица  $\mathbf{C}$  диагональная.

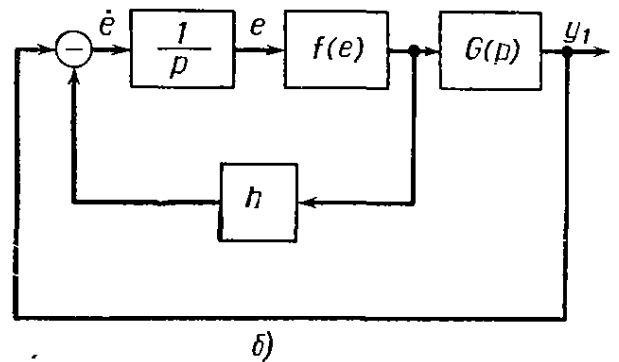
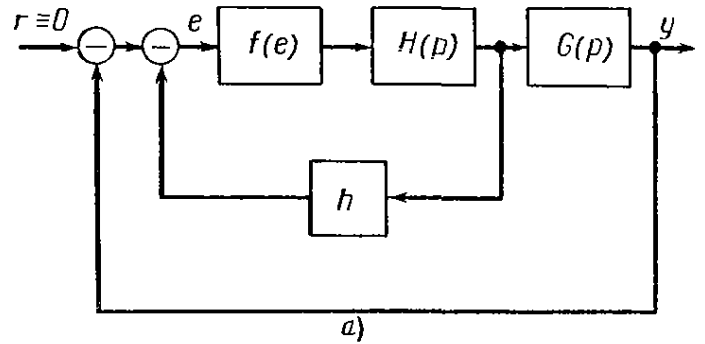


Рис. 9.6: а) Структурная схема системы непрямого регулирования, где в состав внутреннего контура входит исполнительный орган;  $H(s)$ , как правило, определяет передаточную функцию интегратора  $H(s) = 1/s$   
б) Структурная схема рис. 9.6а преобразована к виду, удобному при решении задачи Лурье. Указанное преобразование выполнено для случая  $H(p) = 1/p$

\* Ла-Ссаль показал [116], что условие (9.26) не является необходимым для абсолютной устойчивости.



Уравнение системы в канонической форме при заданной передаточной функции  $G(s)$  запишем в виде

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(e), \quad \dot{e} = 4x_1 - 3x_2 - hf(e);$$

пусть

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

а также  $Q = [q_{ij}]$ ,  $i, j = 1, 2$ ; из уравнения  $A^T Q + QA = -C$  получим

$$\begin{bmatrix} -4q_{11} & -5q_{12} \\ -5q_{21} & -6q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix},$$

откуда

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{6} \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad c = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix};$$

$$g = Qb + \frac{c}{2} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{\alpha}{4} \\ \frac{\beta}{6} - \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

то

$$h > \frac{\left(2 + \frac{\alpha}{4}\right)^2}{\alpha} + \frac{\left(\frac{\beta}{6} - \frac{3}{2}\right)^2}{\beta}.$$

Выберем величины  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы минимизировать правую часть полученного неравенства при условии  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Простым вычислением (см. также гл. 13) определим, что значения  $\alpha = 8$  и  $\beta = 9$  обеспечивают минимум правой части, равный 2, и, следовательно,  $h > 2$ .

## 9.6. ПРИМЕНЕНИЕ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К АНАЛИЗУ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ\*

Если для анализа нестационарной системы использовать функцию Ляпунова, не зависящую от времени, то ее производная, вычисленная с учетом уравнений системы, все равно окажется функцией времени. Безусловно, и для нестационарной функции Ляпунова ее производная  $\dot{V}$  также зависит от времени. Иногда может оказаться, что нестационарная функция Ляпунова более приемлема, поскольку позволяет проще выявить условия устойчивости.

В связи с появлением временного аргумента в выражениях для  $\dot{V}$  и, возможно, в выражениях для  $V$  следует видоизменить формулировки теорем. Эти изменения связаны с ограничением функций  $V$  и  $\dot{V}$  некоторыми функциями, не зависящими от времени.

Для того чтобы нестационарная скалярная функция была положительно определенной, потребуем, чтобы выполнялось следующее определение.

\* См. работы [98], [122], [130].

О п р е д е л е н и е 9.2. Нестационарная скалярная функция  $V(\mathbf{x}, t)$  является положительно определенной в области  $\mathcal{R}$ , содержащей начало координат, если  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  и

$$V(\mathbf{x}, t) \geq \Phi(\|\mathbf{x}\|), \quad (9.27)$$

где  $\Phi(z)$  — непрерывная возрастающая\* функция такая, что  $\Phi(0) = 0$ . Изучим свободную систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (9.28a)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  для всех  $t$ . (9.28б)

Производная по времени от скалярной функции  $V(\mathbf{x}, t)$ , взятая с учетом уравнений (9.28), равна

$$\frac{dV(\mathbf{x}, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = (\text{grad } V)^T \mathbf{f} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (9.29)$$

Сформулируем следующие теоремы.

**Теорема 9.9.** Если для системы (9.28):

1) существует определено положительная скалярная функция  $V(\mathbf{x}, t)$ , имеющая непрерывные первые производные по переменным  $\mathbf{x}$  и  $t$  в некоторой окрестности  $\mathcal{R}$  начала координат;

2) в этой же области определена ее производная  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$ , то начало координат системы (9.28) устойчиво.

**Теорема 9.10.** Если существует положительная, возможно, неубывающая скалярная функция  $\theta(z)$  одной переменной, такая, что в дополнение к условию 1) теоремы 9.9 выполняется в области  $\mathcal{R}$  условие:

$$3) \dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\theta(\|\mathbf{x}\|), \quad (9.30)$$

то начало координат системы (9.28) эквиасимптотически устойчиво.

**Теорема 9.11.** Если существует непрерывная, строго возрастающая функция одной переменной  $\rho(z)$ , такая, что  $\rho(0) = 0$ , и, в дополнение к условиям 1) и 3) теорем (9.9) и (9.10), выполняется в области  $\mathcal{R}$  для всех  $t$  условие:

$$4) V(\mathbf{x}, t) \leq \rho(\|\mathbf{x}\|), \quad (9.31)$$

то начало координат системы (9.28) равномерно асимптотически устойчиво.

**Теорема 9.12.** Если условия 1), 3) и 4) в приведенных выше теоремах выполняются во всей области фазового пространства системы (9.28) и

5) функция  $\Phi(\|\mathbf{x}\|)$  в уравнении (9.27) удовлетворяет условию  $\Phi(\|\mathbf{x}\|) \rightarrow \infty$  при  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,

то начало координат системы (9.28) равномерно эквиасимптотически устойчиво в целом.

**Теорема 9.13.** Если область  $\mathcal{R}$  отождествляется со всем фазовым пространством системы (9.28) и выполняются условия 1), 3), 4) и 5) предыдущих теорем, а также в дополнение к ним условие:

6) функция  $\rho(\|\mathbf{x}\|)$  в неравенстве (9.31) такова, что  $\rho(\|\mathbf{x}\|) \rightarrow \infty$ , когда  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,

\* Функция  $\Phi(z)$  называется возрастающей, если для двух произвольных точек  $z_1$  и  $z_2$  таких, что  $z_2 > z_1$ , выполняется  $\Phi(z_2) > \Phi(z_1)$ .

то начало координат системы (9.28) равномерно асимптотически устойчиво в целом\*.

Рассмотрим вкратце идеи, положенные в основу доказательства этих теорем. Прежде всего отметим, что в случае, когда  $V$  — нестационарная функция, условия  $V > 0$  для всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и произвольного  $t$  недостаточно, чтобы гарантировать свойство асимптотической устойчивости даже, если  $\dot{V} < 0$  для всех  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и произвольного  $t$ . Действительно, если в уравнении (9.29) член  $\frac{\partial V}{\partial t}$ , являясь отрицательным, превосходит по модулю член  $(\text{grad } V)^T \mathbf{f}$ , то производная  $\frac{dV}{dt}$  оказывается отрицательной.

Поскольку именно член  $(\text{grad } V)^T \mathbf{f}$  определяет движение системы, то может оказаться, что  $V$  будет меньше нуля, в то время как изображающая точка будет находиться вне некоторой ограниченной области  $\mathcal{R}$ .

Если же  $V(\mathbf{x}, t)$  превосходит некоторую скалярную функцию переменной  $\|\mathbf{x}\|$ , удовлетворяя тем самым неравенству (9.27), то все сказанное выше уже не может иметь места. Действительно, при произвольном  $\varepsilon$  всегда можно найти  $\delta(\varepsilon, t_0) < \varepsilon$  такое, что  $V(\mathbf{x}_0, t_0) < \Phi(\varepsilon)$ . Отсюда следует просто устойчивость и асимптотическая устойчивость, поскольку при  $\dot{V} < 0$  функция  $V$  не может превзойти  $\Phi(\varepsilon)$ . Более того, свойство асимптотической устойчивости не зависит от  $\mathbf{x}_0$ , и, следовательно, начало координат эквивалентно асимптотически устойчиво.

Для равномерной устойчивости необходимо, чтобы  $V(\mathbf{x}, t)$  была ограничена сверху функцией  $\rho(\|\mathbf{x}\|)$ . Тогда для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно подобрать такое  $\delta$ , что будет выполняться  $\rho(\delta) < \Phi(\varepsilon)$ . Отсюда следует, что  $\Phi(\varepsilon) > \rho(\delta) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) \geq V(\mathbf{x}(t), t) \geq \Phi(\|\mathbf{x}(t)\|)$  для всех  $t > t_0$ .

Равномерная устойчивость при этом очевидна, поскольку выбор величины  $\delta$  не зависит от  $t_0$ .

Значительно сложнее доказать, что при выполнении условий теоремы 9.11 изображающая точка  $\mathbf{x}(t)$  стремится к началу координат равномерно по  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$ . Это доказательство, принадлежащее Массера [134], приводится ниже\*\*.

В области  $\mathcal{R}$  выберем такие числа  $c$  и  $\delta_a$ , что  $\rho(\delta_a) < \Phi(c)$ . Это означает, что при  $\|\mathbf{x}_0\| \leq \delta_a$   $\delta(c)$  определяет границу, общую для всех  $\|\mathbf{x}(t)\|$ . Допустим, что нам задана величина  $\mu \leq \|\mathbf{x}_0\|$ , тогда можно найти  $\mu' > 0$  такое, что  $\rho(\mu') < \Phi(\mu)$ . Поскольку  $\mu' \leq \mu \leq c$ , то непрерывная функция  $\theta(z)$  из теоремы 9.10 имеет минимум в точке  $z: \mu' \leq z \leq c$ . Обозначим эту точку через  $c'$ . Теперь покажем, что величину  $T$  в определении равномерной асимптотической устойчивости можно выбрать равной  $T = \frac{\rho(\delta_a)}{c'}$ .

Прежде всего заметим, что существует момент времени  $t': t_0 < t' < t_1 < t_0 + T$ , когда  $\|\mathbf{x}(t')\| = \mu'$ . По определению  $\|\mathbf{x}_0\| > \mu'$ . Если  $\|\mathbf{x}(t)\| > \mu'$  для всех  $t; t_0 < t < t_1$ , то

$$\Phi(\mu') \leq V(\mathbf{x}(t_1); t_1) \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) - (t_1 - t_0)c'.$$

Поскольку  $\rho(\delta_a) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0)$  и  $T = \frac{\rho(\delta_a)}{c'}$ , то

$$0 < \Phi(\mu') \leq \rho(\delta_a) - Tc' = 0.$$

\* Напомним, что в § 5.6, где введено это понятие, оно объединяло следующие свойства:

- 1) равномерную устойчивость в смысле Ляпунова по переменным  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$ ;
- 2) равномерную ограниченность, т. е. для любого  $r > 0$  существует  $B$ , зависящее лишь от  $r$ , такое, что условие  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq r$  влечет за собой  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq B$  для всех  $t \geq t_0$ ;
- 3) предположим что любая траектория в фазовом пространстве стремится к  $\mathbf{x}_e$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по переменным  $\mathbf{x}_0$  и  $t_0$ .

\*\* См. также работу [66], стр. 65.

Полученное противоречие приводит к выводу, что  $\|x(t')\| \stackrel{\Delta}{=} \|x'\| = \mu'$ . Рассмотрим траекторию, которая начинается в момент времени  $t'$ . При этом имеем неравенство

$$\Phi(\|x(x', t'; t)\|) \leq V(x(x', t'; t), t) \leq V(x', t') \leq \rho(\mu') < \Phi(\mu),$$

которое означает, что  $\|x(x_0, t_0; t)\| < \mu$  для всех  $t \geq t_0 + T$ . Таким образом доказано свойство равномерной асимптотической устойчивости.

После этого сравнительно просто показать, что устойчивость в целом выполняется, если  $\Phi(\|x\|) \rightarrow \infty$ , когда  $\|x\| \rightarrow \infty$ .

Следует вновь подчеркнуть, что для систем с переменными параметрами, как правило, необходимо выбирать функцию  $V$ , не зависящую от времени. Совершенно ясно, что в этом случае для равномерной асимптотической устойчивости требуется лишь положительная определенность функции  $V$  в стационарном смысле, т. е.  $V(x) > 0$ ;  $x \neq 0$  и  $V(0) = 0$ . Кроме того, функция  $V$ , которая остается функцией времени, должна удовлетворять условию (9.30)

**Пример 9.12.** Рассмотрим дифференциальное уравнение с переменными параметрами следующего вида [126]:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.32)$$

Предположим, что функции  $p(t)$  и  $q(t)$  — непрерывные функции своего аргумента и  $q(t) \geq q_1 > 0$ . Требуется наложить ограничения на функции  $p(t)$  и  $q(t)$ , чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость начала координат. Эти ограничения мы найдем двумя способами, используя в первом случае стационарную, а во втором — нестационарную функцию Ляпунова.

**Случай 1.** Определим функцию

$$V = \frac{1}{2} a_1 x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_2 x_2^2, \quad (9.33)$$

если  $a_1 > 0$  и  $a_1 a_2 > 1$ , то функция  $V$  определенно положительна. Более того,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= - \left\{ q(t) x_1^2 + [a_2 q(t) + p(t) - a_1] x_1 x_2 + [a_2 p(t) - 1] x_2^2 \right\} = \\ &= - \left\{ q(t) \left[ x_1 + \frac{a_2 q(t) + p(t) - a_1}{2q(t)} x_2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ a_2 p(t) - 1 - \frac{(p(t) + a_2 q(t) - a_1^2)}{4q(t)} \right] x_2^2 \right\}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Поскольку  $q(t) \geq q_1 > 0$ , то при условии, что коэффициент при  $x_2^2$  положителен, функция  $\dot{V}$  будет определенно отрицательной. Таким образом, получим условие

$$a_2 p(t) - 1 - \frac{[p(t) + a_2 q(t) - a_1]^2}{4q(t)} \geq \varepsilon, \quad (9.35a)$$

где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число.

В результате преобразований соотношение (9.35a) можно представить в виде

$$[p(t) - a_2 q(t) - a_1]^2 - 4(a_1 a_2 - 1 - \varepsilon) q(t) \leq 0 \quad (9.35b)$$

и, кроме того, из соотношения (9.35a) следует, что

$$p(t) \geq \frac{1}{a_2} \left\{ 1 + \varepsilon + \frac{[p(t) + a_2 q(t) - a_1]^2}{4q(t)} \right\} > 0. \quad (9.36)$$

Уравнения (9.35) и (9.36) совместно с условием  $q(t) \geq q_1 > 0$  определяют область (рис. 9.7), заштрихованную на плоскости переменных  $(q, p)$ . Внутри нее выполняется условие асимптотической устойчивости; область ограничена параболой

$$(p - a_2 q - a_1)^2 - 4(a_1 a_2 - 1 - \varepsilon) q = 0 \quad (9.37)$$

и прямой  $q = q_1$ .

Если выполняются условия

$$0 < p_1 \leq p(t) \leq p_2; \quad 0 < q_1 \leq q(t) \leq q_2, \quad (9.38)$$

где  $p_1, p_2, q_1$  и  $q_2$  — постоянные величины, то не представляет труда построить область устойчивости на плоскости переменных  $(p, q)$ , задаваясь параметрами  $a_1$  и  $a_2$ . Поскольку от этих параметров зависит лишь знакоопределенность функции  $V$ , то их можно исключить, построив максимально возможную область устойчивости.

Рассмотрим параболу (рис. 9.8), которая проходит через точку с координатами  $(q_1, p_1)$ , определяемыми нижней границей этих переменных. Допустим, что кривая проходит и через точку  $(q_2', p_1)$  с той же ординатой  $p_1$  и при этом  $q_2' \geq q_1$ . Подставляя эти координаты в уравнение (9.37), получим два уравнения относительно

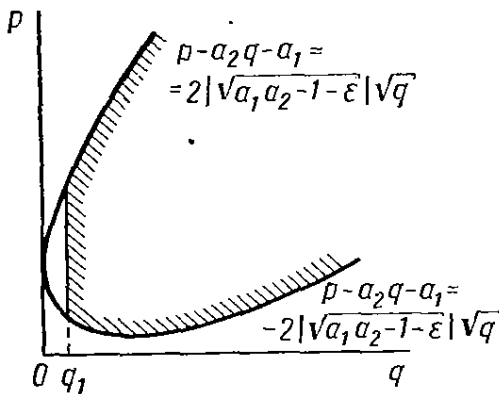


Рис. 9.7. Заштрихованная область на плоскости параметров  $(p, q)$  определяет область асимптотической устойчивости и ограничена параболой вида (9.37) и прямой  $q = q_1$

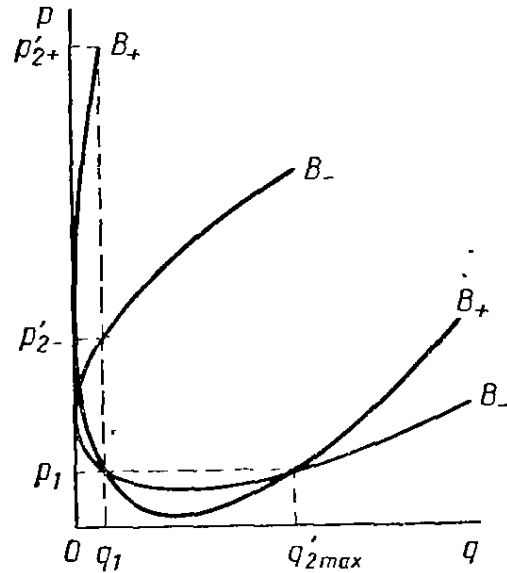


Рис. 9.8. Геометрическая интерпретация способа отыскания максимально возможной области устойчивости на плоскости переменных  $(p, q)$

параметров  $a_1$  и  $a_2$ . Исключая параметр  $a_1$ , находим  $a_2$ , а затем выражаем  $a_1$  через  $a_2$ . При этом возможны две пары чисел  $(a_{1+}, a_{2+})$ ,  $(a_{1-}, a_{2-})$ , и следовательно, две параболы проходят через одни и те же точки, координаты которых удовлетворяют условиям

$$a_{2\pm} = \frac{2}{(\sqrt{q_2'} - \sqrt{q_1})^2} \left[ p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - (\sqrt{q_2'} - \sqrt{q_1})^2 (1 + \varepsilon)} \right]; \quad (9.39a)$$

$$a_{1\pm} = \frac{(\sqrt{q_2'} + \sqrt{q_1})^2}{4} a_{2\pm} + \frac{1 + \varepsilon}{a_{2\pm}}. \quad (9.39b)$$

Поскольку параметр  $a_{2\pm}$  является действительным числом, то из соотношения (9.39a) следует, что должно выполняться условие

$$p_1^2 \geq (\sqrt{q_2'} - \sqrt{q_1})^2 (1 + \varepsilon). \quad (9.40)$$

Теперь определим ординаты парабол при фиксированной абсциссе  $q_1$ . Ординаты  $p_2'$ , зависящие от  $q_1, p_1, q_2'$  и  $\varepsilon$ , определяются из уравнения (9.37) и равны

$$\begin{aligned} p_2'(q_1, p_1, q_2', \varepsilon)_{\pm} &= p_1 + 4 \sqrt{a_1 a_2 - 1 - \varepsilon} \sqrt{q_1} = \\ &= p_1 + \frac{4(\sqrt{q_2'} + \sqrt{q_1})}{(\sqrt{q_2'} - \sqrt{q_1})^2} \left( p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - (\sqrt{q_2'} - \sqrt{q_1})^2 (1 + \varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Можно показать, что

$$p_2'(q_1, p_1, q_2', \varepsilon)_+ > p_2'(q_1, p_1, q_2', \varepsilon)_-$$

Поскольку  $p_2'(q_1, p_1, q_2', \varepsilon)$  изменяется обратно пропорционально  $q_2'$ , то максимум этой величины достигается на меньшем значении  $q_2'$ , а именно  $q_2$ . Таким образом,  $p_2 \leq p_2'(p_1, q_1, q_2, \varepsilon)$ , а из соотношения (9.40) следует, что

$$p_1 \geq (\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}) \sqrt{1 + \varepsilon}. \quad (9.42)$$

Анализируя выражение (9.41), заметим, что

$$p_2'(p_1, q_1, q_2, 0) > p_2'(p_1, q_1, q_2, \varepsilon)_+ > p_2$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_2'(q_1, p_1, q_2, \varepsilon)_+ &= p_2'(q_1, p_1, q_2, 0)_+ = \\ &= \frac{p_1 \left( 5q_1 + q_2 + \sqrt{q_1 q_2} \right) + 4 \left( q_1 + \sqrt{q_1 q_2} \right) \sqrt{p_1^2 - (\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})^2}}{(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})^2}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Из отношений (9.42) и (9.43), выражая через переменные  $q_1$  и  $q_2$ , получим необходимые неравенства

$$p_1 > \sqrt{q_2} - \sqrt{q_1}; \quad (9.44a)$$

$$p_2 < \frac{p_1 \left( 5q_1 + q_2 + 2 \sqrt{q_1 q_2} \right) + 4 \left( q_1 + \sqrt{q_1 q_2} \right) \sqrt{p_1^2 - (\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})^2}}{(\sqrt{q_2} - \sqrt{q_1})^2}. \quad (9.44b)$$

**С л у ч а й 2.** Определим функцию

$$V = x_1^2 + \frac{1}{q(t)} x_2^2, \quad 0 < q_1 \leq q(t) \leq q_2, \quad (9.45)$$

которая всегда больше функции  $x_1^2 + \frac{1}{q_2} x_2^2$ , и, следовательно,  $V$  удовлетворяет условию 9.27) (объясните — почему). Тогда

$$\dot{V} = 2x_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{q(t)} 2x_2 \dot{x}_2 - \frac{x_2^2 \dot{q}(t)}{q^2(t)} = - \frac{\dot{q}(t) + 2p(t)q(t)}{q^2(t)} x_2^2. \quad (9.46)$$

Если

$$\frac{\dot{q} + 2pq}{q^2} \geq \varepsilon > 0$$

или, что то же самое,

$$p \geq \frac{\varepsilon q}{2} - \frac{\dot{q}}{2q}, \quad (9.47)$$

то функция  $\dot{V}$  знакоотрицательна, и начало координат устойчиво по теореме 9.9. Однако Лиму [126] удалось показать, что при  $t \rightarrow \infty$   $V \rightarrow 0$ , если  $p(t)$  ограничено снизу. Следовательно, начало координат асимптотически устойчиво, если выполняется условие (9.47). Сравнивая с неравенствами (9.44), заметим, что условие (9.47) требует существования производной  $\dot{q}(t)$ .

## 9.7. ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА

### 1. Оценка качества переходных процессов в системе

Часто удается использовать метод функций Ляпунова для оценки качества переходных процессов. Идея, лежащая в основе такого подхода, достаточно проста и наглядна. Допустим, мы имеем некоторую стационарную функцию Ляпунова; тогда при заданных начальных условиях стано-

вится известной и величина  $V(t_0)$ . При использовании выражения для производной  $\dot{V}$  не представляет труда оценить изменение функции  $V$ . Поскольку в большинстве случаев кривые постоянного уровня величины  $V$  замкнуты, мы получим способ оценки расстояния от начала координат в функции времени.

Однако для того, чтобы можно было воспользоваться этим методом, производная  $\dot{V}$  должна быть найдена как функция времени без интегрирования уравнений системы и полученные выражения должны быть простыми. По-видимому, именно эти два условия и сдерживают до сих пор развитие данного метода. В отдельных же случаях удается получить чрезвычайно интересные результаты. Ниже будет дана оценка качества переходного процесса с использованием метода Ляпунова, а также приведены некоторые примеры.

Прежде всего заметим, что

$$\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\dot{V}(\mathbf{x}, t)}{V(\mathbf{x}, t)} \right) V(\mathbf{x}, t). \quad (9.48)$$

Таким образом, если в окрестности начала координат величина  $\dot{V}/V$  никогда не превосходит константы  $(-k)$ , то справедливо

$$\dot{V} \leq -kV \text{ и } V[\mathbf{x}(t), t] \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) e^{-k(t-t_0)}.$$

Предположим, что функция  $V$ , выбранная для системы, удовлетворяет условиям теоремы 9.13, так что рассматриваемое положение равновесия в начале координат равномерно и асимптотически устойчиво в целом, тогда  $V(\mathbf{x}, t) \leq \rho(\|\mathbf{x}\|)$  и  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\theta(\|\mathbf{x}\|)$ . В этом случае, постоянная  $k$  есть просто наименьшее значение отношения  $\frac{\theta(\|\mathbf{x}\|)}{\rho(\|\mathbf{x}\|)}$  в рассматриваемой области.

На самом деле точность оценки времени переходного процесса можно улучшить, используя переменные значения величины  $k$  между соседними уровнями функции  $V$ . В этом случае время переходного процесса определяется в результате «сшивки» отдельных экспонент. Поскольку существует однозначное соответствие между кривой постоянного уровня  $V$  и расстоянием изображающей точки до начала координат, то мы получим способ оценки скорости приближения изображающей точки к началу координат.

Для нелинейных систем иногда удается улучшить точность определения переходного процесса, отказавшись от экспоненциальной оценки, так как ее использование равносильно приближению нелинейной системы к линейной. Однако линейная система достигает начала координат спустя лишь бесконечное время, тогда как для нелинейной системы это не обязательно. Следующий пример вводит нас в новую область исследований.

**Пример 9.13.** Угловое движение спутника относительно центра масс можно описать следующими динамическими уравнениями Эйлера в предположении, что угловая скорость собственного вращения значительно превосходит угловую скорость обращения спутника по орбите [82]:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 &= u_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 &= u_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 &= u_3, \end{aligned} \right\} \quad (9.49)$$

где символы имеют тот же смысл, что и в примере 5.10. Допустим,  $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ .

Квадрат момента углового движения

$$L^2 = (J_1 \omega_1)^2 + (J_2 \omega_2)^2 + (J_3 \omega_3)^2, \quad (9.50)$$

где функция  $L^2$  определено положительна и стремится к  $\infty$ , когда  $\|\boldsymbol{\omega}\| \rightarrow \infty$ . Следовательно, найденная функция является функцией Ляпунова.

Из соотношений (9.50) и (9.49) получим

$$\frac{dL^2}{dt} = 2 [(J_1 \omega_1) u_1 + (J_2 \omega_2) u_2 + (J_3 \omega_3) u_3]; \quad (9.51)$$

эта функция всюду определенно отрицательна, если управления равны  $u_i = -f_i(\omega_i)$ , где  $f_i(\omega_i)$  таково, что

$$\left. \begin{aligned} \omega_i f_i(\omega_i) &> 0, \text{ если } \omega_i \neq 0; \\ -\infty < f_i(0) < \infty; \\ \lim_{\omega_i \rightarrow \infty} \int_0^{\omega_i} f_i(z) dz &= \infty. \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3 \quad (9.52)$$

Тогда начало координат асимптотически устойчиво в целом. Теперь рассмотрим случай релейного управления:

$$-u_i = f_i(\omega_i) = U \operatorname{sign} \omega_i = \begin{cases} U_i, & \omega_i > 0; \\ -U_i, & \omega_i < 0; \end{cases} \quad (9.53)$$

$$U_i > 0; \quad i = 1, 2, 3,$$

которое удовлетворяет условию (9.52). Попробуем отыскать тот предел, которым ограничено сверху время достижения начала координат при движении из произвольных начальных условий.

Пусть  $U$  есть наименьшая из трех величин  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ ; очевидно, что

$$|f_i(\omega_i)| \geq \frac{U}{\|L\|} J_i |\omega_i|, \text{ если } |\omega_i| \leq \frac{\|L\|}{J_i}. \quad (9.54)$$

Однако из соотношения (9.50) следует, что величина  $|\omega_i|$  всегда меньше или равна  $\frac{\|L\|}{J_i}$ . Таким образом, условие (9.54) всегда выполняется. Так как  $\omega_i f_i(\omega_i) > 0$  для  $\omega_i \neq 0$ , получим

$$J_i \omega_i f_i(\omega_i) \geq \frac{U}{\|L\|} J_i \omega_i^2. \quad (9.55)$$

Подставляя соотношение (9.54) в уравнение (9.51), найдем

$$-\frac{dL^2}{dt} = 2 \|L\| \frac{d\|L\|}{dt} = 2 \left[ \sum_{i=1}^3 J_i \omega_i f_i(\omega_i) \right] \geq 2 \frac{U}{\|L\|} L^2 = 2U \|L\|. \quad (9.56)$$

Таким образом,  $\frac{d\|L\|}{dt} \leq -U$  и

$$\|L(t)\| \leq \|L(t_0)\| - U(t - t_0); \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\|L(t_0)\|}{U}. \quad (9.57)$$

Это означает, что угловой момент уменьшается от исходного значения  $\|L(t_0)\|$  до 0 за конечное время  $T$ , равное

$$T \leq \frac{\|L(t_0)\|}{U}. \quad (9.58)$$

Аналогичным образом оценивается и время переходного процесса системы.

## 2. Синтез одного класса адаптивных систем

Известно, что во многих случаях параметры объекта изменяются непредвиденным образом. Несмотря на это, требуется построить систему, реакция которой на заданные входные сигналы носила определенный характер, например, время переходного процесса на «ступеньку» оставалось ограниченным. Это привело к разработке класса приспособляющихся систем с моделью.

Структурная схема приспособляющейся системы с моделью показана на рис. 9.9. Модель либо реально существующая, либо запрограммированная в управляющем устройстве используется для получения желаемой реакции  $x_d$  на входной сигнал  $r(t)$ . На объект воздействует управление  $u(t)$ .



Выходные сигналы объекта  $x(t)$  и модели  $x_d(t)$ , а также входной сигнал  $r(t)$  вводятся в управляющее устройство. Задача управляющего устройства заключается в том, чтобы сформировать управление  $u(t)$  для отработки желаемого процесса  $x_d(t)$ .

Для этого класса систем существенно оценить разность  $e(t)$  между желаемым выходным сигналом и действительным;  $e(t) = x_d(t) - x(t)$ . Если в фазовом пространстве переменной  $e(t)$  можно определить асимптотическую устойчивость в целом начала координат, то с течением времени объект будет все в большей степени подобен модели.

Если модель представляет линейную стационарную систему, а объект линеен, но нестационарен, то возможен следующий способ решения задачи:

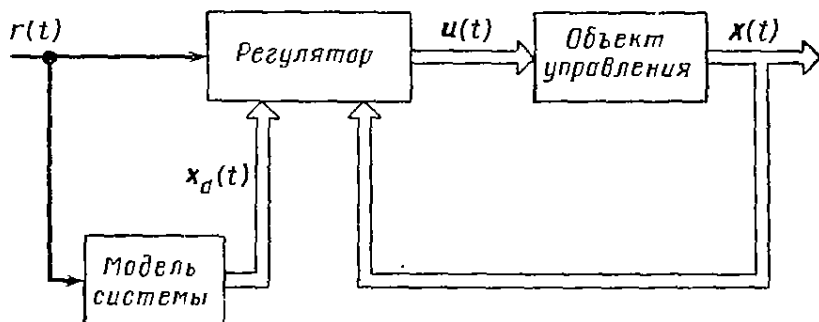


Рис. 9.9. Структурная схема приспособляющейся системы с моделью

будем иметь

$$\dot{V}_1(z) = -z^T (A_2^T Q + Q A_2) z = -z^T C z. \quad (9.60)$$

Поскольку  $C = A_2^T Q + Q A_2$  положительно определенная матрица, то функция  $V_1(z)$  есть определено отрицательная вдоль траекторий системы  $\dot{z} = A_2 z$ .

Пусть  $e \triangleq z - x$ ;  $\Delta A \triangleq A_1(t) - A_2$  и  $\Delta B \triangleq B_1(t) - B_2$ ;

тогда

$$\dot{e} = A_2 e - \Delta A x - B_1(t) u + B_2 r. \quad (9.61)$$

Если выбрать функцию  $V(e) = e^T Q e$ , где  $Q$  определена так же, как в соотношении (9.59), то

$$\dot{V}(e, t) = e^T C e - 2e^T Q [\Delta A x + \Delta B r + B_1(u - r)]. \quad (9.62)$$

Поскольку  $C$  — положительно определенная матрица, то для функционирования адаптивной системы с моделью управление  $u(t)$  необходимо выбрать таким, чтобы выполнялось условие

$$e^T(t) Q [\Delta A(t) x(t) + \Delta B(t) r(t) + B_1(t) u(t) - r(t)] \begin{cases} = 0 & \text{при } \Delta A = \Delta B = 0; \\ \geq 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (9.63)$$

При выполнении этого условия функция  $V(e, t)$  в соотношении (9.63) всегда меньше или равна  $-e^T C e$  и начало координат в фазовом пространстве сигнала ошибки асимптотически устойчиво в целом \*\*.

## 9.8. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Второй метод Ляпунова дает достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости. Он же позволяет анализировать устойчивость в большом.

\* См. работу [64], где даны и другие примеры синтеза, основанные на втором методе Ляпунова.

\*\* Если выбранное управление не нарушает условие теоремы о существовании единственности решения системы уравнений (9.16) (Прим. ред.).

Пример 9.14 (Л. П. Грейсон \*). Допустим, что объект описывается уравнением  $\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)u$ , а модель задана уравнением  $\dot{z} = A_2 z + B_2 r$ , где  $A_2$  и  $B_2$  — постоянные матрицы. Будем предполагать, что при  $r \equiv 0$  модель асимптотически устойчива. Это, ввиду следствия 9.4 означает, что существует положительно определенная матрица  $Q$  такая, что при

$$V_1(z) = z^T Q z \quad (9.59)$$

Достоинство метода заключается в том, что суждение об устойчивости можно вынести, анализируя лишь знак производной от некоторой произвольно выбранной функции фазовых координат системы при условии, что последняя совершает свободное движение. При таком способе анализа нет необходимости отыскивать точное решение исходных уравнений, что существенно упрощает задачу.

Предлагаемый метод не лишен недостатков. Во-первых, он дает лишь достаточные условия устойчивости, и поэтому, если проведенный анализ дал отрицательный ответ, то вопрос об устойчивости остался нерешенным и следует предпринять еще попытку, выбрав другую функцию. Если же был получен положительный ответ при анализе устойчивости, то определенная таким образом область устойчивости не является максимально возможной.

Во-вторых, не существует единой, пригодной во всех случаях, процедуры определения знака произвольной функции нескольких переменных. Это существенно ограничивает возможный выбор функций Ляпунова, заставляя использовать в приложениях лишь квадратичные формы.

Наконец, сама идея суждения об устойчивости без всестороннего анализа поведения системы противоречит инженерной практике. Именно поэтому второй метод Ляпунова следует, по-видимому, рассматривать как полезное дополнение к другим методам.

Основное содержание второго метода Ляпунова изложено в § 9.1. В § 9.2 приводятся пять основных теорем об устойчивости в малом. В следующем параграфе (§ 9.3) эти результаты распространяются на случай анализа устойчивости в большом.

Для линейных автономных систем доказывается теорема 9.8, дающая необходимые и достаточные условия устойчивости положения равновесия системы. На этой основе формулируется задача Лурье, для решения которой строятся специальные функции Ляпунова, позволяющие анализировать определенный класс систем, структура которых показана на рис. 9.5 и 9.6.

Для анализа систем с переменными параметрами сформулированные теоремы следует несколько видоизменить. В этом случае используются функции Ляпунова, возможно, нестационарные, ограниченные сверху стационарной функцией переменной  $\|x\|$  (теоремы 9.9 — 9.13). Анализ систем с переменными параметрами представляет значительные трудности, в чем убеждает нас анализ примера 9.12.

С помощью второго метода Ляпунова в принципе удастся оценить и качество переходного процесса в системе (пример 9.13). Однако полученные в этом направлении результаты еще нельзя назвать значительными. Второй метод Ляпунова оказывается также полезным при оценке работоспособности адаптивной системы с моделью (пример 9.14).

### 9.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

9.1. Выясните знакоопределенность следующих функций:

а)  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3^2;$

б)  $V(x_1, x_2) = |x_1| \cos x_2 + x_2^2;$

в)  $V(x_1, x_2) = \sin^2 x_1 + \sin^2 x_2;$

г)  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_1^2x_2^2;$

д)  $V(x_1, x_2) = e^{x_1^2} + e^{x_2^2}.$

Если функция знакоопределенна или знакопостоянна в некоторой ограниченной области, то следует указать эту область.

9.2. Используя подход, развитый в разделе 9.4, найдите множество всех значений  $K$ , для которых система, показанная на рис. 9.10, имеет асимптотически устойчивое положение равновесия в начале координат.

9.3. Рассмотрим системы, линеаризованные уравнения которых имеют некрратные комплексные корни. При условии, что все эти корни расположены в левой полуплоскости ( $\text{Re } \lambda_i < 0$  для всех  $i$ ), подыщите подходящую функцию Ляпунова и докажите, что начало координат асимптотически устойчиво (представьте уравнения системы в канонической форме).

9.4. Уравнение движения некоторой массы, подвешенной на мягкой пружине, с демпфером запишется в виде

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + k\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0;$$

а) используя в качестве функции Ляпунова полную энергию системы, покажите, что начало координат асимптотически устойчиво;

б) определите максимально возможную область  $\mathcal{R}$  вблизи начала координат, для которой выбранная функция Ляпунова обеспечивает асимптотическую устойчивость.

9.5. В теории связи для фазовой синхронизации используется контур, описываемый уравнением  $\ddot{x} + (a + b \cos x)\dot{x} + c \sin x = 0$ , где  $a > b > 0$  и  $c > 0$ . Используя функцию

$V(x, \dot{x}) = c(1 - \cos x) + \frac{\dot{x}^2}{2}$ , определите границы области фазового пространства, внутри которой контур асимптотически устойчив. Сравните с результатами упражнения 5.16.

9.6. Пусть задана система (Е. П. Попов)

$$\dot{x}_1 = -x_1 + f(x_3);$$

$$\dot{x}_2 = -f(x_3);$$

$$\dot{x}_3 = (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - hf(x_3),$$

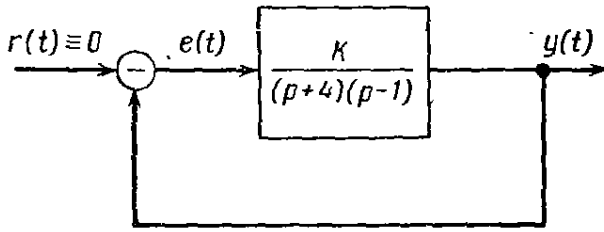


Рис. 9.10. Структурная схема системы к упражнению 9.2

где функция  $f$  определяется следующим образом:

$$f(x_3) = \begin{cases} c, & x_3 \geq a_2; \\ 0, & |x_3| \leq a_1; \\ -c, & x_3 \leq -a_2, \end{cases}$$

а на интервалах  $a_1 < x_3 < a_2$  и  $-a_2 < x_3 < -a_1$  функция  $f(x_3)$  является гладкой;

а) определите положения равновесия системы;

б) если  $\gamma > 0$ , определите устойчивость системы относительно положений равновесия, используя функцию Ляпунова вида

$$V(x) = \frac{\gamma - 1}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3;$$

в) изобразите структурную схему системы в таком виде, чтобы можно было воспользоваться методом гармонического баланса. Какие выводы о системе можно сделать, используя последний метод?

9.7. Уравнения Лурье для систем прямого регулирования. Рассмотрим систему, показанную на рис. 9.5, и предположим, что  $G(p)$  характеризуется лишь действительными, различными и отрицательными полюсами, а  $f(e)$  удовлетворяет условиям (9.17). Читателю предлагаем:

а) показать, что уравнения системы можно записать в виде

$$\dot{x} = \Lambda x + b f(e); \quad e = c^T x; \quad \frac{de}{dt} = d^T x,$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица собственных значений линейной части;

$b$  — единичный вектор-столбец;

$c$  — некоторый вектор-столбец, состоящий из констант;  $d = \Lambda c$ ;

б) показать, что при произвольных действительных числах  $k_1, \dots, k_n$  матрица  $G$ , общий элемент которой равен  $G_{ij} = -k_i k_j (\lambda_i + \lambda_j)$ , положительно определенная, если  $\lambda_j < 0$  для всех  $j$ . Предлагаем показать самостоятельно, что  $x^T G x$  при любом  $x$  можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} (x^T \omega(t))^2 dt,$$

где  $\omega(t)$  —  $n$ -мерный вектор-столбец;  $i$ -я компонента которого равна  $k_i e^{\lambda_i t}$ ;

в) с учетом результатов предыдущего пункта рассмотреть функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} x^T M x + x^T G x + \int_0^e f(z) dz,$$

где  $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$  и  $m_i > 0$  для всех  $i$ .

Показать, что достаточное условие абсолютной устойчивости начала координат заключается в том, что существуют постоянные  $k_i, m_i$  такие, что уравнения Лурье

$$\sum_{j=1}^n \frac{2k_i k_j}{\lambda_i + \lambda_j} = d_i + m_i$$

выполняются для всех  $i$ ;

г) рассмотреть случай, когда  $m_i = 0, i = 1, \dots, n$ ;

д) применить все сказанное для анализа конкретной системы вида (9.5), где

$$G(p) = \frac{p+4}{(p+2)(p+3)(p+5)}.$$

9.8. Уравнения Лурье для системы непрямого регулирования. Рассмотрим систему непрямого регулирования, структурная схема которой показана на рис. 9.6б; передаточная функция  $G(p)$  имеет лишь действительные, различные и отрицательные полюсы;  $f(e)$  удовлетворяет условиям (9.17). Читателю предлагаем:

а) показать, что уравнение системы можно записать в виде

$$\dot{x} = \Lambda x + b f(e); \quad e = c^T x; \quad \frac{de}{dt} = d^T x - h f(e),$$

где обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущем упражнении;

б) вновь воспользовавшись функцией Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2} x^T M x + x^T G x + \int_0^e f(z) dz,$$

показать, что уравнения Лурье принимают вид

$$\sum_{j=1}^n \frac{2k_i k_j}{\lambda_i + \lambda_j} - 2k_i h = d_i + m_i \quad (i = 1, \dots, n);$$

в) рассмотреть случай, когда  $m_i = 0, i = 1, \dots, n$ ;

г) определить уравнения Лурье для системы, рассмотренной в примере 9.11.

9.9. Определить, является ли каждая из приведенных ниже нестационарных скалярных функций положительно определенной:

а)  $V(x, t) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{t};$

б)  $V(x, t) = x_1^2 + t x_2^2;$

в)  $V(x, t) = x_1^2 + (1 + \cos^2 t) x_2^2.$

Для всех примеров размерность вектора  $x$  считать равной двум. В тех случаях, когда функция положительно определена, найти ту из них, которую можно мажорировать скалярной функцией  $\rho \|x\|$  в соответствии с уравнением (9.31).

9.10. Некоторые системы с параметрическим возбуждением могут быть приближенно описаны уравнением Матье вида

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + (a - b \cos \omega t) x = 0.$$

Полагая  $a > b > 0$  и используя функцию Ляпунова вида (9.45), найдите связь между параметрами  $a, b$  и  $\omega$ , гарантирующую асимптотическую устойчивость.

9.11. Линеаризованные уравнения, описывающие движение рыскания спутника, стабилизированного силой гравитации (упражнение 2.12), имеют вид

$$\ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 + k_2 \dot{\theta}_2 = u_1; \quad \ddot{\theta}_2 - k_3 \dot{\theta}_1 = u_2,$$

где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы крена и рыскания соответственно;

$k_1, k_2, k_3$  — параметры системы;

$u_1$  и  $u_2$  — составляющие момента управления относительно осей крена и рыскания;

а) используя подходящую функцию Ляпунова, отыщите класс нелинейных управлений  $u_1(\theta_1, \theta_2)$  и  $u_2(\theta_1, \theta_2)$ , которые стабилизируют угол  $\theta_1(t)$ ;

б) установите, можно ли пренебречь одним из управляющих моментов  $T_1$  или  $T_2$ , сохранив цель управления?

9.12. Покажите, что условия теоремы 9.6 предполагают, что внутри области  $\mathcal{R}_k$  функция  $V(x)$  не имеет максимума.

9.13. Докажите утверждение (1) § 9.4.

Указание: преобразуйте матрицу  $A$  к жордановой канонической форме.

9.14. Докажите утверждение (2) § 9.4.

Указание: используйте матрицу

$$Q = \int_{-\infty}^0 \Psi^T(t) C \dot{\Psi}(t) dt,$$

где матрица  $\Psi(t)$  удовлетворяет уравнению  $\dot{\Psi} = -\Psi A$ ;  $\Psi(0) = I$ . Покажите, что матрица  $Q$  симметричная, если  $C$  — симметричная матрица; кроме того,  $Q$  удовлетворяет уравнению (9.16).

9.15. Докажите несправедливость следующего утверждения: если для системы (9.4) можно в окрестности  $\mathcal{R}$  начала координат отыскать такую непрерывную и имеющую непрерывные первые производные положительно определенную функцию  $V_1$ , производная которой по времени  $V_1$  не является отрицательно определенной или знакоотрицательной в произвольной окрестности начала координат, то положение равновесия системы в начале координат неустойчиво.

9.16. Покажите, что система, структурная схема которой изображена на рис. 9.6, а, эквивалентна в смысле анализа устойчивости системе на рис. 9.6, б при условии, что

$$h + c^T A^{-1} b \neq 0.$$

## 9.10. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Второй метод был изложен Ляпуновым в его работе [130], опубликованной в 1892 г. Ясное и четкое изложение метода, без привлечения сложных математических построений, дано в работе [118].

Прекрасно составленные обзоры, касающиеся применения второго метода, можно найти в работах [66] и [98]. В частности, последняя работа адресована непосредственно специалистам по теории управления. Недавняя работа [120] содержит большое число примеров.

Задача Лурье вместе с задачей В. М. Попова, которой посвящена гл. 10, рассматривается в работах [1], [66], [118], [122]. Задача Лурье прекрасно, если исключить некоторые опечатки, излагается в учебном пособии по нелинейным системам [58].

Исключительно важным является незатронутый в этой главе вопрос о формировании функций Ляпунова. Этого вопроса мы избегали потому, что, с одной стороны, для большинства систем известные примеры чрезвычайно трудоемки, а с другой стороны, выбор функции тесно связан с возможностью определения знака сложных функций. В заключение следует подчеркнуть, что изученные методы наиболее приемлемы для анализа существенно нелинейных систем низкого порядка. Прекрасный обзор, содержащий большое число различных способов формирования функций Ляпунова, можно найти в работе [181].

## ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ В. М. ПОПОВА И ЕГО РАЗВИТИЕ

Рассмотрим вновь системы, которым соответствует структурная схема, показанная на рис. 10.1 (или рис. 6.5). Их анализ можно было бы провести с помощью приближенных методов развитых в гл. 6 и 7. Кроме того, можно получить точные суждения об устойчивости этого класса систем, если сформулировать и решить для них задачу Лурье. Последний способ оказывается достаточно громоздким при анализе систем высокого порядка, и им пользоваться невозможно, когда объект управления характеризуется распределенными параметрами или запаздыванием.

На основе второго метода Ляпунова румынский ученый В. М. Попов в 1959 г. сформулировал частотный критерий, который определяет достаточное условие асимптотической устойчивости одноконтурных систем со стационарной линейной частью и однозначной нелинейностью, которая может быть и нестационарной. Формулируется критерий Попова в виде неравенств, связывающих характеристики линейной и нелинейной части.

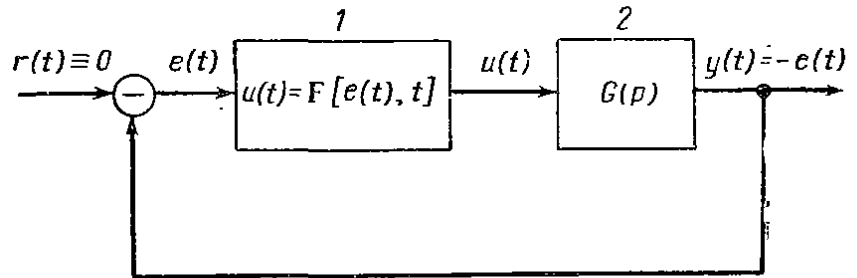


Рис. 10.1. Основная структурная схема системы с обратной связью, используемая в гл. 10:

1 — нелинейный нестационарный элемент; 2 — линейный стационарный элемент

Поскольку критерий Попова позволяет анализировать устойчивость, используя частотные характеристики, то он применим как для анализа объектов высокого порядка, так и для объектов с распределенными параметрами и запаздыванием. Если известна частотная характеристика линейного элемента, то определение абсолютной устойчивости \* всей системы при ограниченном классе нелинейностей производится с малыми затратами времени на вычисления. В дальнейшем результаты Попова удалось распространить на системы управления достаточно широкого класса, когда в них входят нелинейности с гистерезисом определенного типа и нестационарные нелинейности.

В этой главе излагается общая теория, позволяющая получить различные формулировки критерия Попова. При этом практически никаких ограничений на характеристики системы не накладывается, что позволяет применять эту теорию для широкого круга практических задач.

\* См. определение 9.1.

В процессе изложения устанавливается связь между классами допустимых характеристик нелинейного и линейного элементов. Именно метод Попова позволяет определить эту взаимосвязь, которая обеспечивает устойчивость и имеет важное значение при синтезе систем. Кроме того, излагая материал, мы используем такое определение устойчивости, которое соответствует инженерному взгляду на эту проблему. Все, что мы требуем, это асимптотическое стремление к нулю сигнала управления или выходного сигнала системы. Такое понимание устойчивости находит свое отражение в терминах «асимптотически устойчивое управление» и «асимптотически устойчивый выходной сигнал», которые вводятся в разделе 10.2. Из этих свойств инженер, представляющий физическую структуру системы, может, если это необходимо, получить и другие характеристики устойчивости системы. Так, например, приводится теорема, с помощью которой устанавливается свойство абсолютной устойчивости, исходя из существования асимптотически устойчивого управления и ряда дополнительных условий.

Основные результаты этой главы сконцентрированы в одной теореме, которая служит основой для всех других формулировок критерия устойчивости. Эти критерии справедливы для систем с произвольно большим числом параметров при наличии и отсутствии запаздывания, а также для систем с распределенными параметрами. Ниже будет показано, что излагаемые методы не только позволяют исследовать факт устойчивости, но и определять степень устойчивости или демпфирование в системе. В заключение излагаются практические приемы анализа устойчивости и определение степени устойчивости, в том числе применение для этих целей логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик.

Полученные результаты используются в следующей главе для установления факта устойчивости и единственности вынужденных решений. При доказательстве ряда теорем используются теорема Парсеваля, неравенства Шварца и Минковского, а также некоторые положения функционального анализа. При изложении материала данной главы мы опускаем математические подробности и отсылаем читателя к приложению III.

## 10. 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему с обратной связью, которая показана на рис. 10.1. В ее состав входят нелинейный элемент и стационарная линейная часть. На практике большое число систем с однозначной нелинейностью можно привести путем ряда преобразований \* к такой структурной схеме. Изучение устойчивости последней сводится к обобщенной задаче Лурье\*; обобщенность понимается в том смысле, что нелинейный элемент может быть нестационарным и (или) иметь гистерезисную характеристику определенного вида. Кроме того, линейный элемент может обладать запаздыванием или включать распределенные параметры. Вследствие этого уравнения системы целесообразнее всего представить в интегральной форме (см. § 3.9):

$$e(t) = e_0(t) - \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau; \quad (10.1a)$$

$$u(t) = \mathcal{F}[e(t), t], \quad (10.1б)$$

\* См. § 9.5.

где  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$  и  $-e_0(t)$  — соответственно, импульсная переходная функция и реакция на начальные условия линейной части системы, а  $-e(t)$  — выходной сигнал системы.

Теперь рассмотрим ограничения, которым должны удовлетворять линейная и нелинейная части системы управления.

## 1. Нелинейный элемент

Функциональная связь между входом и выходом нелинейного элемента описывается соотношением (10.1б). Некоторые частные виды нелинейных соотношений приведены в табл. 10.1. Разнообразие этих характеристик не

Таблица 10.1

Типы нелинейных элементов	
	<p>Общий случай: <math>u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]</math></p> <p>Частные случаи:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>u(t) = f[e(t)]</math> — нелинейный однозначный, стационарный;</li> <li><math>u(t) = f[e(t), t]</math> — нелинейный однозначный, нестационарный;</li> <li><math>u(t) = \mathcal{F}[e(t)]</math> — нелинейный двузначный, стационарный;</li> <li><math>u(t) = k(t)e(t)</math> — линейный нестационарный;</li> <li><math>u(t) = he(t)</math> — линейный стационарный.</li> </ul>

вызывает сомнения, однако все они должны располагаться внутри сектора, ограниченного двумя прямыми, проходящими через начало координат (см. рисунок). Другими словами, мы требуем, чтобы соблюдалось условие

$$a \leq \frac{u(t)}{e(t)} \leq b \quad (10.2a)$$

для всех  $t$ , где  $a < b \leq \infty$  \*, либо условия вида

$$a < \frac{u(t)}{e(t)} < b; \quad (10.2б)$$

$$a \leq \frac{u(t)}{e(t)} < b; \quad (10.2в)$$

$$a < \frac{u(t)}{e(t)} \leq b. \quad (10.2г)$$

**О п р е д е л е н и е 10.1.** Если выполняется условие (10.2а), то говорят, что  $(u/e) \in [a, b]$ . Если выполняются условия (10.2б), (10.2в) или (10.2г), то говорят, что  $(u/e) \in (a, b)$ ,  $(u/e) \in [a, b)$  и  $(u/e) \in (a, b]$  соответственно \*\*.

\* Напомним, что условие (10.2а) совпадает с ограничениями, которые налагаются на нелинейность в гипотезе Айзермана.

\*\* Символ  $\in$  означает «принадлежит», а именно:  $c \in C$  означает, что элемент  $c$  принадлежит множеству  $C$ . Обозначение  $[a, b]$  определяет «замкнутый интервал между  $a$  и  $b$ », т. е. интервал  $a \leq u/e \leq b$ . Обозначение  $(a, b)$  определяет «открытый интервал между  $a$  и  $b$ » или  $a < (u/e) < b$ . Обозначения  $(a, b]$  и  $[a, b)$  определяют полуинтервалы и соответствуют следующим условиям:  $a < (u/e) \leq b$  и  $a \leq (u/e) < b$ .



Если  $b$  ограничено, то из ограниченности  $|e(t)|$ , ввиду соотношений (10.2), следует ограниченность  $|u(t)|$ . Для того чтобы это условие выполнялось при любых  $(u/e) \in [a, \infty]$ , нужно требовать для всех  $t$  и каждого  $e_m$  ограниченность значения  $u_m$ , т. е.

$$|u(t)| \leq u_m < \infty \text{ при } |e(t)| \leq e_m. \quad (10.3)$$

Условие (10.3) фактически выполняется для всех нелинейностей вида  $u(t) = \mathcal{F}(e, t)$  и  $(u/e) \in [a, \infty]$ , с которыми приходится иметь дело на практике. Например, для идеального реле  $u = \text{sign } e$  получим  $(u/e) \in [0, \infty]$  и  $u_m = 1$  для любого  $e_m$ . Для нелинейности типа кубической параболы  $u = e^3$  получим  $(u/e) \in [a, \infty]$  и  $u_m = e_m^3$ .

Как и в гл. 6, среди двузначных характеристик будем различать характеристики активного и пассивного гистерезиса. Для строгости изложения дадим следующие определения.

**Определение 10.2.** Стационарные характеристики гистерезисного типа  $u = \mathcal{F}[e(t)]$  можно определить, опираясь на понятие криволинейного интеграла. Говорят, что нелинейный элемент характеризуется пассивным гистерезисом, если условие

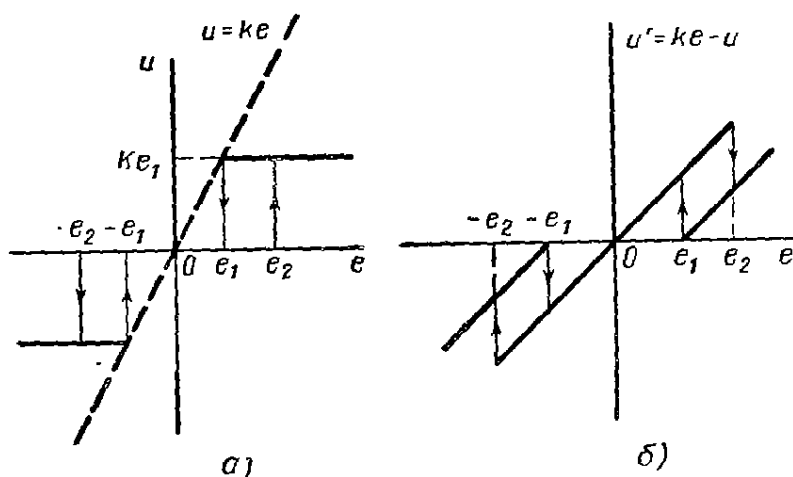


Рис. 10.2. Нелинейные элементы:

а — с пассивным гистерезисом; б — с активным гистерезисом (случай а) можно преобразовать в б) заменой переменных  $u' = ke - u$ ]

$$-\int_{\Gamma} u de \geq -\int_{\Gamma_{12}} u de = \int_0^{e_1} u de - \int_0^{e_2} u de \quad [(10.4a)]$$

выполняется для любой пары точек  $e_1$  и  $e_2$ , где контур  $\Gamma$  определяет обход нелинейной характеристики в координатах  $(u, e)$  при произвольном характере изменения  $e(t)$ , а  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_{12}$  обозначают кривые (не замкнутые) на характеристике между точками 0 и  $e_1$  и  $e_1$  и  $e_2$  соответственно. Говорят, что нелинейный элемент характеризуется активным гистерезисом, если условие

$$-\int_{\Gamma} u de \leq -\int_{\Gamma_{12}} u de = \int_0^{e_1} u de - \int_0^{e_2} u de \quad (10.4б)$$

выполняется для любой пары точек  $e_1$  и  $e_2$ .

Примеры двузначных характеристик показаны на рис. 10.2. На практике обычно встречаются характеристики пассивного типа. Однако характеристику пассивного типа можно преобразовать в характеристику с активным гистерезисом. Пример такого преобразования показан на рис. 10.2, б, который получен из рис. 10.2, а в результате преобразования  $u^1 = ke - u$  (проделайте это самостоятельно). Мы будем использовать такое преобразование в дальнейшем при доказательстве ряда теорем об устойчивости.

## 2. Линейная часть

У стационарной линейной части системы связь между входом и выходом задается соотношением (10.1а) с использованием импульсной переходной функции  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$  и реакции на начальные условия  $-e_0(t)$ .

Пример 10.1. Рассмотрим стационарную систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t); \quad -e(t) = c^T x(t). \quad (10.5)$$

Согласно изложенному в гл. 3 определим переходную матрицу в виде

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [(Is - A)^{-1}] = \Phi(t, 0). \quad (10.6)$$

Выход линейной части в соответствии с (10.5) равен  $-e(t) = c^T x(t)$ , а следовательно,

$$e(t) = -c^T \Phi(t) x(0) - \int_0^t c^T \Phi(t - \tau) bu(\tau) d\tau. \quad (10.7)$$

Сравнивая выражения (10.1a) и (10.7), найдем

$$-e_0(t) = c^T \Phi(t) x(0) = \mathcal{L}^{-1} [c^T (Is - A)^{-1} x(0)]; \quad (10.8a)$$

$$g(t) = c^T \Phi(t) b = \mathcal{L}^{-1} [c^T (Is - A)^{-1} b]. \quad (10.8b)$$

Уравнения (10.8) определяют важное свойство стационарного линейного элемента, заключающееся в том, что реакция  $-e_0(t)$  на произвольные начальные условия адекватна импульсной переходной функции.

Единственное условие, которое ограничивает класс линейных систем этой главы, заключается в том, что рассматриваются только линейные элементы со степенью устойчивости  $\alpha$ . По существу это означает, что для  $\alpha > 0$  выходной сигнал при реакции либо на импульс, либо на начальные условия будет стремиться к нулю быстрее, чем функция  $e^{-\alpha t}$ . Для  $\alpha < 0$  понятие степени устойчивости соответствует тому, что реакция на импульс или на начальные условия должна стремиться к бесконечности, но умноженная на  $e^{\alpha t}$  она будет стремиться к 0\*. Последнее вытекает из абсолютной интегрируемости и интегрируемости с квадратом некоторых функций\*\*.

О п р е д е л е н и е 10.3. Выходной сигнал линейного элемента устойчив с коэффициентом затухания  $\alpha$ , если существует такое действительное  $\alpha$ , что для каждого множества начальных условий импульсная переходная функция  $g(t)$  и реакция на начальные условия  $-e_0(t)$  удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} [e^{\alpha t} g(t)]^2 dt < \infty; \quad \int_0^{\infty} e^{\alpha t} |g(t)| dt < \infty; \\ \int_0^{\infty} [e^{\alpha t} e_0(t)]^2 dt < \infty; \quad \int_0^{\infty} [e^{\alpha t} \dot{e}_0(t)]^2 dt < \infty; \\ |e^{\alpha t} e_0(t)| < \infty; \quad 0 \leq t \leq \infty. \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

Кроме того, если  $\alpha = 0$ , то говорят, что линейный элемент имеет устойчивый выход.

Отметим, что линейный элемент имеет устойчивый выход степени  $\alpha$ , если его передаточная функция  $G(s)$  и передаточная функция, соответствующая

\* Однако следует обратить внимание на пример 10.2.

\*\* Условия 10.9 означают, что функции  $e^{\alpha t} g(t)$ ,  $e^{\alpha t} e_0(t)$  и  $e^{\alpha t} \dot{e}_0(t)$  принадлежат к классу функций  $\mathcal{L}_2$ , интегрируемых с квадратом. Следовательно, можно записать, что  $e^{\alpha t} g(t) \in \mathcal{L}_2$ ,  $e^{\alpha t} e_0(t) \in \mathcal{L}_2$  и  $e^{\alpha t} \dot{e}_0(t) \in \mathcal{L}_2$  для произвольных начальных условий. Более того, функция  $e^{\alpha t} g(t)$  принадлежит к классу абсолютно интегрируемых функций, обозначенному через  $\mathcal{L}_1$  (см. приложение III).

шая реакции на начальные условия  $E_0(s)$ , есть рациональные функции переменной  $s$ , полюсы которых лежат в области  $\operatorname{Re} s < -\alpha$ . Следовательно,  $\alpha$  характеризует степень затухания реакции линейного элемента.

## 10.2. ПОНЯТИЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОМ УПРАВЛЕНИИ И АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОМ ВЫХОДНОМ СИГНАЛЕ

Обычно используемые определения устойчивости, например определения, данные в гл. 9, связаны с анализом асимптотического поведения всех переменных состояний. Понятие абсолютной асимптотической устойчивости по Ляпунову, введенное в гл. 5 и 9, требует уже не только асимптотического стремления к нулю всех переменных состояний, но и налагает некоторые ограничения на динамику переходного процесса. Эти ограничения зачастую чрезмерны, поскольку чаще всего нас интересует лишь выходная реакция системы на начальные условия, а динамика других координат несущественна (правда, если это требуется, то поведение всех интересующих нас координат можно определить, исходя из структуры системы и асимптотического поведения сигнала управления и выходного сигнала). В дальнейшем нас будет интересовать главным образом асимптотическое поведение сигнала управления и выходного сигнала линейной части системы. Именно поэтому введем определение, эквивалентное понятию устойчивости основной системы, показанной на рис. 10.1 и описываемой уравнением (10.1).

**О п р е д е л е н и е 10.4** (асимптотически устойчивое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал\*). В системе управления, описываемой уравнением (10.1), будем называть:

1) асимптотически устойчивым управлением с коэффициентом затухания  $\alpha$  такое управление, когда существует такое действительное число  $\alpha$ , что при произвольных начальных условиях выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} [e^{\alpha t} u(t)]^2 dt < \infty; \quad (10.10)$$

2) асимптотически устойчивым выходным сигналом с коэффициентом затухания  $\alpha$  такой сигнал, когда существует такое действительное число  $\alpha$ , что при произвольных начальных условиях выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} [e^{\alpha t} e(t)]^2 dt < \infty; \quad (10.11)$$

3) абсолютно асимптотически устойчивым управлением с коэффициентом затухания  $\alpha$  для  $(u/e) \in [a, b]$  (абсолютно асимптотически устойчивым выходным сигналом с коэффициентом затухания  $\alpha$  для  $(u/e) \in [a, b]$ ) такое управление (такой сигнал), при котором условия (10.10), (10.11) выполняются для каждой нелинейности, удовлетворяющей условию (10.2a). При этом, как и в определении (10.1),  $(u/e) \in (a, b)$ , либо  $(u/e) \in [a, b]$ , либо  $(u/e) \in [a, b]$ ;

2) асимптотически устойчивым управлением, асимптотически устойчивым выходным сигналом или абсолютно асимптотически устойчивым управлением для  $(u/e) \in [a, b]$ , абсолютно асимптотически устойчивым выходным сигналом для  $(u/e) \in [a, b]$  такое управление (или такой сигнал), при котором  $\alpha = 0$  в пунктах 1), 2) и 3) соответственно.

Смысл этих определений становится ясным из следующей леммы:

\* Асимптотически устойчивое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал определяют, по существу, понятие устойчивости в пространстве  $\mathcal{L}_2$  [174].

**Лемма 10.1.** Если в основной системе (10.1) степень устойчивости выходного сигнала равна  $\alpha$ , а нелинейный элемент удовлетворяет условию (10.3), то из условия асимптотической устойчивости управления с коэффициентом затухания  $\alpha$  следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e(t) = 0, \quad (10.12)$$

Полученное условие означает, что при сделанных предположениях  $e(t)$  стремится к нулю быстрее, чем  $e^{-\alpha t}$ , если  $\alpha > 0$ . Хотя эта лемма почти очевидна, ее формальное доказательство, приведенное в приложении III, связано с некоторыми тонкостями, которые проявляются в тех случаях, когда, например, функция  $e^{\alpha t} e(t)$  равна нулю всюду, за исключением счетного множества интервалов убывающей длины. В этом случае функция  $e^{\alpha t} e(t)$  интегрируема с квадратом, но условию  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e(t) = 0$  она не удовлетворяет.

**Пример 10.2.** Если

$$e^{\alpha t} e(t) = \begin{cases} a, & t_k \leq t \leq t_k + \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

то

$$\int_0^{\infty} [e^{\alpha t} e(t)]^2 dt = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2a^2 < \infty,$$

но при этом  $e^{\alpha t} e(t)$  не стремится к нулю.

Такое положение встречается чрезвычайно редко; поэтому, принимая лемму 10.1, мы считаем, что для систем вида (10.1) такие случаи не имеют места. Понятия асимптотически устойчивого управления и асимптотически устойчивого выходного сигнала взаимосвязаны через линейную часть системы.

**Лемма 10.2.** Пусть степень устойчивости выходного сигнала линейного элемента равна  $\alpha$ . Если для основной системы (10.1) управление есть асимптотически устойчивое управление с коэффициентом затухания  $\alpha$ , то выходной сигнал является асимптотически устойчивым выходным сигналом с коэффициентом затухания  $\alpha$ . Более того, если для каждого множества начальных условий существует число  $M_0$  такое, что  $|e_0(t)| \leq M_0 e^{-\alpha t}$ , то существует число  $M$ , зависящее от  $M_0$ , такое, что  $|e(t)| \leq M e^{-\alpha t}$  для всех  $t^*$ .

Эта лемма означает что убывающий сигнал управления  $u(t)$ , который удовлетворяет условию (10.10) при подаче на линейный элемент, чья импульсная переходная функция убывает так же, как и  $u(t)$ , дает на выходе сигнал  $-e(t)$ , убывающий таким же образом. Прежде чем провести доказательство, отметим, что в общем случае из условия асимптотической устойчивости управления не следует, что выходной сигнал характеризуется тем же свойством.

**Пример 10.3.** Рассмотрим основную систему (10.1) при

$$g(t) = 1 - e^{-t} = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right]; \quad e_0(t) = x_{10} + x_{20} e^{-t},$$

\* Условие  $|e_0(t)| \leq M_0 e^{\alpha t}$  выполняется, например, для всех линейных элементов, удовлетворяющих обыкновенным дифференциальным уравнениям, для которых корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. См. упражнение 10.7

где  $(x_{10}, x_{20})$  определяет начальные условия и  $f(e)$  — релейная характеристика с зоной нечувствительности:

$$u = f(e) = \begin{cases} 1, & e > 2; \\ 0, & |e| \leq 2; \\ -1, & e < -2. \end{cases} \quad (10.13)$$

Можно показать, что эта система асимптотически управляема, т. е.  $u(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  \*. Однако коэффициент затухания выходного сигнала линейного элемента  $\alpha < 0$ , и, следовательно, условия леммы 10.2 не выполняются. Действительно, в рассматриваемой системе выходной сигнал асимптотически не убывает, так как зона нечувствительности нелинейного элемента в присутствии интеграторов позволяет выходному сигналу  $-e(t)$  принять любое значение внутри зоны нечувствительности  $-2 \leq e(\infty) \leq 2$ , зависящее от начальных условий.

**Доказательство леммы 10.2.** Прежде всего рассмотрим случай  $\alpha = 0$ . Из выражения (10.1а) следует, что

$$|e(t)| \leq |e_0(t)| + \left| \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right|. \quad (10.14)$$

Ввиду неравенств (10.9) и (10.10) при  $\alpha = 0$  можно воспользоваться теоремой Парсеваля \*\* для интеграла свертки в выражении (10.14), которая дает

$$\int_0^\infty \left( \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau \right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |G(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 d\omega. \quad (10.15)$$

Принимая во внимание неравенство (10.9), имеем

$$|G(j\omega)| \leq \int_0^\infty |g(t)| dt < \infty. \quad (10.16)$$

Используя соотношения (10.15), (10.16) и неравенство Минковского \*\*\*, из выражения (10.14) получим

$$\begin{aligned} \left( \int_0^\infty e^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left( \int_0^\infty e_0^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |G(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \int_0^\infty e_0^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^\infty |g(t)| dt \right) \left( \int_0^\infty u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned} \quad (10.17)$$

С учетом неравенств (10.9) и (10.10) все члены в правой части неравенства (10.17) ограничены; таким образом, условие (10.11) для  $\alpha = 0$  выполняется и, следовательно, лемма для этого случая доказана. Для того чтобы доказать лемму для произвольного  $\alpha$ , положим

$$\left. \begin{aligned} g_\alpha(t) &\stackrel{\Delta}{=} e^{\alpha t} g(t); & e_{0\alpha}(t) &\stackrel{\Delta}{=} e^{\alpha t} e_0(t); \\ u_\alpha(t) &\stackrel{\Delta}{=} e^{\alpha t} u(t); & e_\alpha(t) &\stackrel{\Delta}{=} e^{\alpha t} e(t). \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Подставляя эти выражения в выражение (10.14), найдем

$$|e_\alpha(t)| \leq |e_{0\alpha}(t)| + \left| \int_0^t g_\alpha(t-\tau) u_\alpha(\tau) d\tau \right|.$$

\* Асимптотическое поведение такой системы можно исследовать, например, методами фазовой плоскости. См. гл. 4, упражнение 4.17.

\*\* См. приложение III.

\*\*\* См. приложение III.

Поскольку все функции в этом неравенстве удовлетворяют условиям (10.9) и (10.10) при  $\alpha = 0$ , то для доказательства леммы следует вновь проследить выполнение соотношений (10.15) — (10.17).

Если для линейного элемента в дополнение к степени устойчивости  $\alpha$  выполняется условие  $|e_0(t)| \leq M_0 \exp(-\alpha t)$ , где  $M_0$  зависит от множества начальных условий, то неравенство (10.14) можно записать в виде

$$|e(t)| \leq M_0 e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \left| \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} g(t-\tau) e^{\alpha\tau} u(\tau) d\tau \right|.$$

В последнем неравенстве подынтегральное выражение умножено и разделено на  $\exp(-\alpha(t-\tau))$ .

Используя неравенство Шварца\*, запишем

$$|e(t)| \leq \left[ M_0 + \left( \int_0^t e^{2\alpha\tau} g^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t e^{2\alpha\tau} u^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] e^{-\alpha t} \leq M e^{-\alpha t},$$

где

$$M = M_0 + \left( \int_0^\infty e^{2\alpha t} g^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty e^{2\alpha t} u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Поскольку  $M$  ограничено, то ввиду условий леммы ограничен и выходной сигнал.

### 10.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

**Теорема 10.1** (теорема В. М. Попова). Рассмотрим систему с обратной связью (см. рис. 10.1), которая удовлетворяет уравнениям (10.1), и допустим, что выходной сигнал линейного элемента устойчив. Чтобы система имела абсолютно асимптотически устойчивое управление и выходной сигнал для  $(u/e) \in [0, K]$ , достаточно, чтобы существовало такое действительное число  $q$ , что для всех действительных  $\omega \geq 0$  при произвольно малом  $\delta > 0$  выполняется следующее условие:

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega)] + \frac{1}{K} \geq \delta > 0. \quad (10.19)$$

В зависимости от вида нелинейного элемента на параметры  $q$  и  $K$  накладываются следующие ограничения:

1) если  $u = f(e)$  — однозначная стационарная нелинейность, то

$$-\infty < q < \infty \text{ при } 0 < K < \infty;$$

$$0 \leq q < \infty \text{ при } K < \infty;$$

2) если  $u = \mathcal{F}[e(t)]$  — нелинейность с пассивным гистерезисом, то

$$0 < K < \infty \text{ и } -\infty < q \leq 0;$$

3) если  $u = \mathcal{F}[e(t)]$  — нелинейность с активным гистерезисом, то

$$0 < K \leq \infty \text{ и } 0 \leq q < \infty;$$

4) если  $u = \mathcal{F}[e(t), t]$  — обобщенная нелинейность, нестационарная и, возможно, с гистерезисом, то

$$0 < K \leq \infty \text{ и } q = 0.$$

\* См. приложение III.

Если в случаях, указанных в пунктах 1), 2) и 4),  $K = \infty$ , то должно выполняться условие (10.3)\*.

Доказательство теоремы (10.1) дано в приложении III.

Указанная теорема является основной. Условия (10.19) теоремы (10.1) будем называть условиями Попова.

Заметим, что сформулированная теорема устанавливает взаимную связь требований, предъявляемых к линейному и нелинейному элементам.

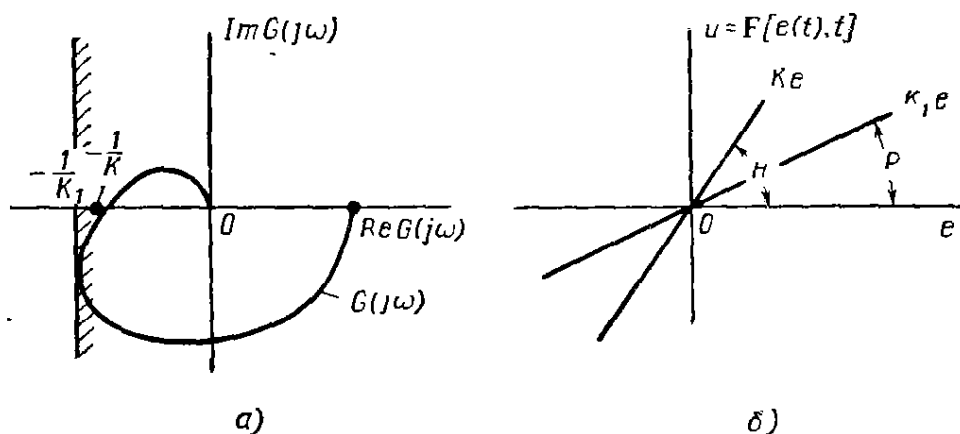


Рис. 10.3: а) Иллюстрация условия (10.19) для  $q = 0$ . Если годограф  $G(j\omega)$  лежит правее вертикальной прямой и все остальные условия теоремы 10.1 выполняются, то основная система с обратной связью имеет абсолютно асимптотически устойчивое управление и выходной сигнал для всех  $(u/e) \in [0, K_1]$ ; б) Допустимый (по Попову) сектор  $P$  для расположения нелинейного элемента  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$ , когда гарантируется абсолютная асимптотическая устойчивость управления и выходного сигнала

Например, для общего случая нелинейности, которая может быть нестационарной и проявлять гистерезисные свойства, мы должны в условиях (10.19) положить  $q = 0$ . Это определяет ограничения на расположение кривой  $G(j\omega)$ . Если нелинейная характеристика однозначна и стационарна, то возможная область размещения годографа  $G(j\omega)$  расширяется за счет выбора параметра  $q$  из возможного диапазона его изменения. В дальнейшем рассмотрим большое число различных связей.

Обратимся к геометрической интерпретации теоремы на основе амплитудно-фазовых характеристик. Рассмотрим простейший случай:  $q = 0$ . Тогда должно выполняться условие

$$\operatorname{Re} G(j\omega) > -\frac{1}{K} \text{ для } q = 0;$$

отсюда следует, что система характеризуется абсолютно асимптотически устойчивым управлением для  $(u/e) \in [0, K_1]$ , если годограф  $G(j\omega)$  лежит правее вертикальной линии, проходящей через точку  $(-1/K_1)$ , как показано на рис. 10.3а. В соответствии с теоремой 10.1 условие  $q = 0$  означает, что на выбор нелинейного элемента наложены минимальные ограничения. В этом случае наложены максимальные ограничения на выбор линейной части.

\* Условие  $\delta > 0$  в неравенстве (10.19) необходимо при доказательстве теоремы 10.1. Для практических целей неравенство (10.19) можно записать в виде

$$\operatorname{Re} [(1 + j\omega q) G(j\omega)] + \frac{1}{K} > 0.$$

Другая крайность заключается в рассмотрении системы с коэффициентом усиления вместо нелинейного элемента. Из частотного критерия устойчивости следует, что для устойчивости замкнутой системы коэффициент усиления должен быть меньше, чем коэффициент, соответствующий пересечению годографа  $G(j\omega)$  с отрицательной полуосью действительной оси. На рис. 10.3а эта точка обозначена  $(-1/K)$ . Следовательно, максимальный коэффициент усиления должен быть меньше  $K$  (рис. 10.3б). Та часть плоскости переменных  $(u, e)$ , в которой может располагаться нелинейная характеристика  $u = \mathcal{F}[e(t), t]$ , называется сектором Попова; допустимая область расположения линейных управлений вида  $u = he$  определяет угол Гурвица.

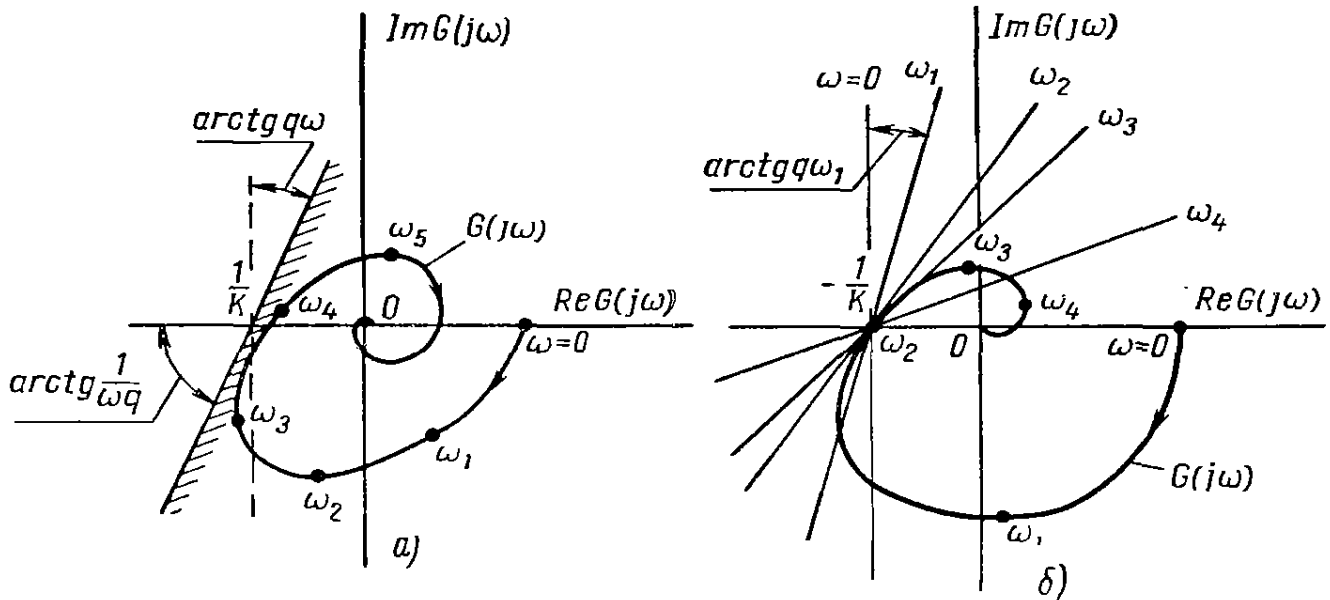


Рис. 10.4: а) Иллюстрации условий устойчивости (10.19) и (10.20); б) Различное расположение прямой Попова на плоскости  $G(j\omega)$  при  $q < 0$

Поскольку стационарное линейное управление  $u = he$  удовлетворяет условию  $(u/e) \in [0, K]$  для  $0 \leq h \leq K$  и для линейных систем угол Гурвица определяет наибольшую область, в которой система устойчива, то ясно, что этот угол будет всегда больше или равен сектору Попова.

Перейдем к анализу общего случая, когда  $q \neq 0$ . Выбирая подходящее значение  $q$ , мы можем расширить сектор, в котором должна располагаться характеристика нелинейного элемента. Однако при этом накладываются ограничения на сам вид нелинейности. Например, в силу условий теоремы 10.1, если  $q$  может принимать любое действительное значение, то нелинейная характеристика должна быть обязательно стационарной и однозначной.

Условие (10.19) можно переписать в следующем виде:

$$\operatorname{Re} G(j\omega) > -\frac{1}{K} + \omega q \operatorname{Im} G(j\omega); \quad (10.20)$$

оно означает, что для любой частоты  $\omega$  годограф  $G(j\omega)$  должен располагаться правее прямой, определяемой уравнением

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = -\frac{1}{K} + \omega q \operatorname{Im} G(j\omega).$$

Эта прямая называется прямой Попова и показана на рис. 10.4а. Наклон прямой зависит от произведения  $\omega q$  (рис. 10.4б). Значение  $q$  необходимо выбрать таким, чтобы для любой частоты  $\omega$  кривая  $G(j\omega)$  располагалась правее прямой Попова, соответствующей этой частоте. Для того чтобы упростить выбор  $q$ , воспользуемся следующим преобразованием [1].



Для этого определим модифицированную частотную характеристику линейной части с передаточной функцией  $G(s)$  следующим образом:

$$G^*(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} \text{Re } G(j\omega) + j\omega \text{Im } G(j\omega), \quad (10.21)$$

другими словами,

$$\text{Re } G^*(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} \text{Re } G(j\omega); \quad \text{Im } G^*(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} \omega \text{Im } G(j\omega).$$

Годограф  $G^*(j\omega)$  нетрудно построить, умножив мнимую часть  $G(j\omega)$  на величину  $\omega$ . С учетом выражения (10.21) условие (10.20) можно записать в виде

$$\text{Re } G^*(j\omega) > -\frac{1}{K} + q \text{Im } G^*(j\omega). \quad (10.22)$$

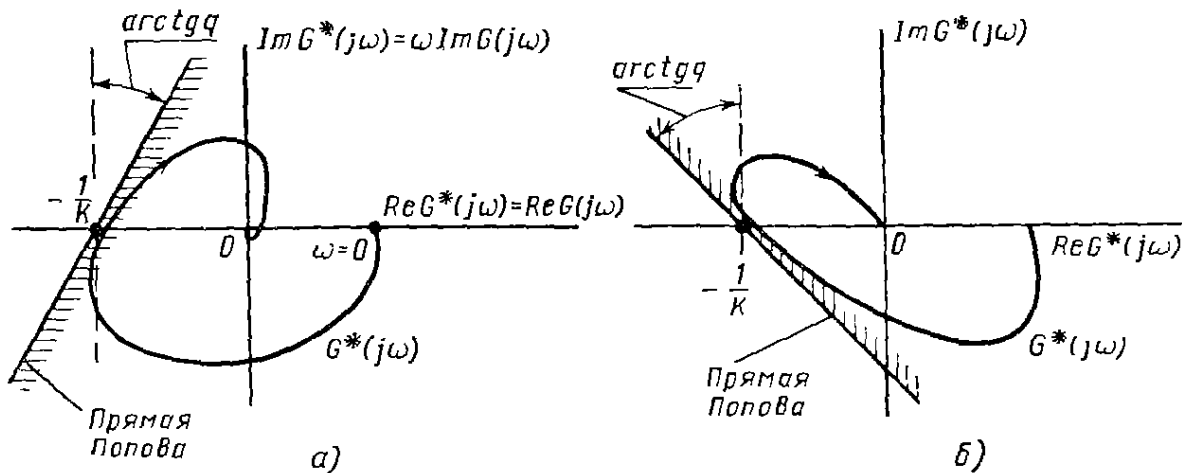


Рис. 10.5: а) Прямая Попова на плоскости  $G^*(j\omega)$  для  $q > 0$ , приемлемая для однозначных нелинейностей и нелинейностей с гистерезисом; б) Прямая Попова для  $q < 0$ , пригодная для систем с однозначной нелинейностью и пассивным гистерезисом

Последнее означает, что прямая Попова на плоскости  $G^*(j\omega)$  определяется уравнением

$$\text{Re } G^*(j\omega) = -\frac{1}{K} + q \text{Im } G^*(j\omega)$$

и не зависит от частоты. Это положение иллюстрируется с помощью рис. 10.5а, б, рассматривая которые, можно сделать интересный вывод. Допустим, что нам удалось провести касательную к годографу  $G^*(j\omega)$  в точке его пересечения с отрицательной частью действительной оси, когда весь годограф расположен правее этой прямой. Пусть эта точка имеет абсциссу  $(-1/K)$ . Тогда  $K$  не только определяет максимальный возможный коэффициент усиления линейной системы<sup>1</sup> с  $f(e) = he$ , но и определяет наибольшее возможное отношение  $f(e)/e$ . Для такой системы выполняются гипотеза Айзермана<sup>2</sup> и условия существования абсолютно асимптотически устойчивых управляющего и выходного сигналов. Следовательно, если система (10.1) линейна, стационарна и  $u(t) = he(t)$  и для нее существует асимптотически устойчивое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал для всех  $0 \leq h \leq K$ , то система с произвольной стационарной однозначной нелинейной характеристикой  $u(t) = f(e(t))$  также характеризуется асимптотически устойчивым управлением и асимптотически устойчивым

<sup>1</sup> Это следует из частного критерия устойчивости.

<sup>2</sup> О гипотезе Айзермана говорилось в гл. 5 в связи с изучением абсолютной асимптотической устойчивости.

выходным сигналом, поскольку  $f(0)=0$  и  $0 \leq f(e)/e \leq K$ . Отметим, что выполнение гипотезы Айзермана совместно с условием существования абсолютно асимптотически устойчивых сигналов управления и выхода означает, что сектор Попова и угол Гурвица совпадают.

Как правило, удается провести касательную такого вида. Таким образом, гипотеза Айзермана, будучи несправед-

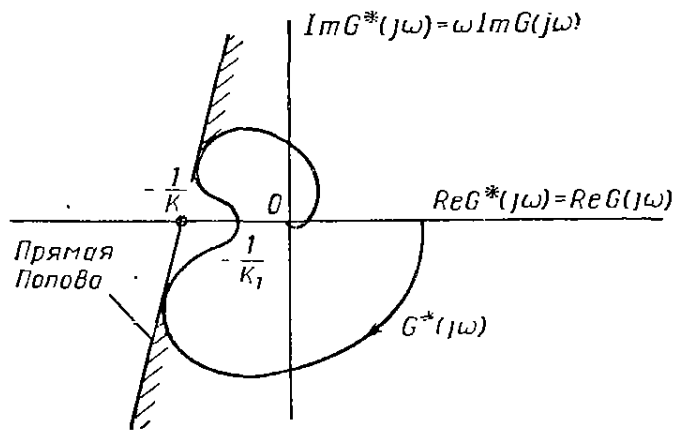


Рис. 10.6. Пример, для которого сектор Попова меньше, чем угол Гурвица. Гипотеза Айзермана при этом не выполняется

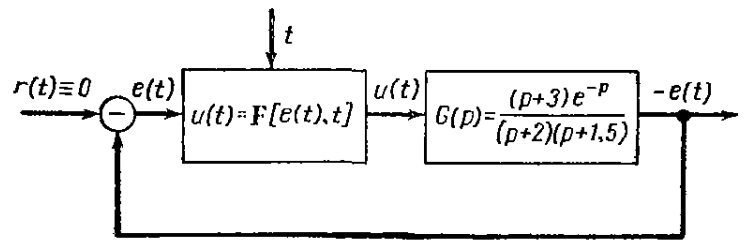


Рис. 10.7. Нелинейная система с запаздыванием к примеру 10.4

лива для всех случаев, охватывает значительный класс систем, используемых на практике. Этот вывод согласуется с нашими замечаниями к гл. 5.

На рис. 10.6 показан случай, когда гипотеза Айзермана не выполняется. Тогда  $K_1 > K$ , и, следовательно, угол Гурвица больше, чем сектор Попова. Заметим, что сектор Попова выделяет область, в которой выполняются достаточные, но не необходимые условия существования абсолютно асимптотически устойчивых управляющего и выходного сигналов. Поэтому, если  $K < f(e)/e < K_1$ , то может оказаться, что в нелинейной системе сигнала управления и выходной сигнал являются абсолютно асимптотически устойчивыми. Таким образом, если характеристика  $f(e)$  располагается вне сектора Попова, то никаких суждений об асимптотическом поведении сигналов в системе сделать нельзя.

**Пример 10.4.** Для системы второго порядка с запаздыванием, показанной на рис. 10.7, определить максимально возможный коэффициент  $K$ , при котором имеется абсолютно асимптотически устойчивый выходной сигнал для  $(u/e) \in [0, K]$ .

Для линейного элемента заданы следующая реакция на начальные условия  $e_0(t)$  и импульсная переходная функция:

$$\left. \begin{aligned} e_0(t) &= e_{10}e^{-2t} + e_{20}e^{-1.5t}; \\ g(t) &= [3e^{-1.5(t-1)} - \\ &- 2e^{-2(t-1)}] \mu_{-1}(t-1), \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

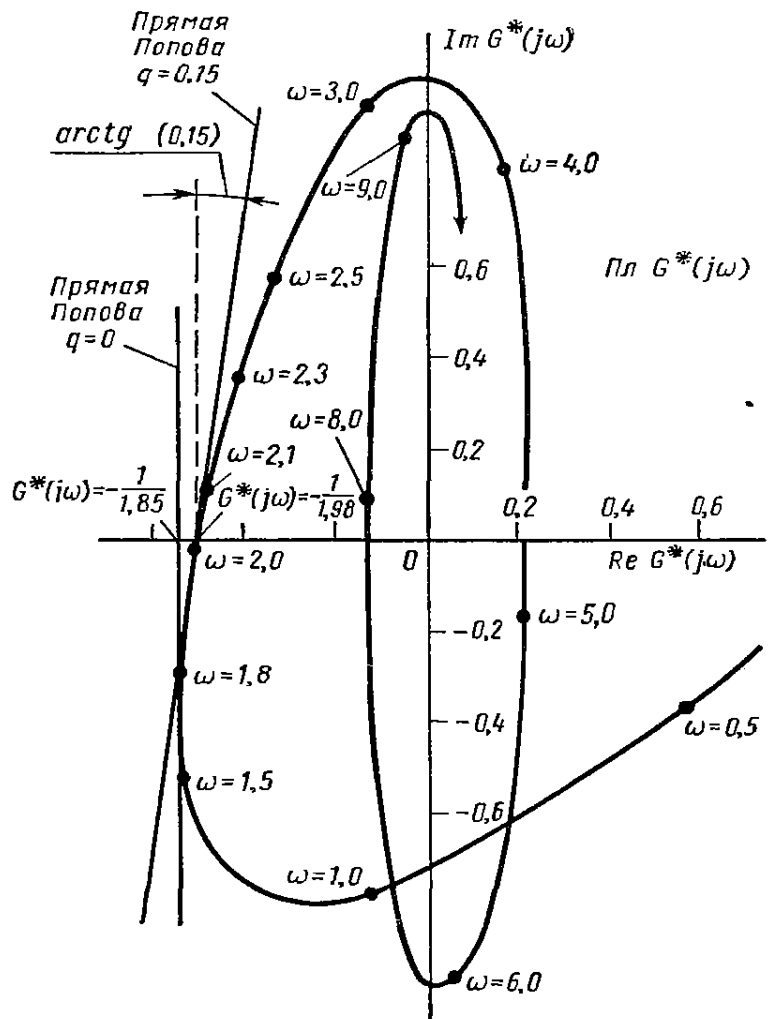


Рис. 10.8. Годограф  $G^*(j\omega) = \text{Re } G(j\omega + j\omega \text{Im } G(j\omega))$  для линейного элемента системы, изображенной на рис. 10.7

где  $e_{10}$  и  $e_{20}$  определяют начальные условия, а  $\mu_{-1}(t)$  — единичная ступенчатая функция. Заметим, что здесь линейный элемент устойчив. Годограф  $G^*(j\omega)$  показан на рис. 10.8.

Из его анализа следует, что:

1) для общего вида нелинейностей  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$  условия Попова (при  $q = 0$ ) выполняются, если

$$0 < K \leq 1,85;$$

2) для однозначной нелинейной характеристики  $u = f(e)$  условия Попова выполняются при  $q = 0,15$ , если

$$0 < K \leq 1,98.$$

Следовательно, системы с нелинейностью общего вида или однозначной нелинейностью характеризуются абсолютно асимптотически устойчивыми управляющими и выходными сигналами, если  $(u/e) \in [0; 1,85]$  или  $(u/e) \in [0; 1,98]$  соответственно. Таким образом, в силу леммы 10.1 для произвольных начальных условий выполняется следующее равенство:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

#### 10.4. УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ

Понятие асимптотической устойчивости в целом, введенное в гл. 9, связано с асимптотическим поведением всех переменных состояния и предусматривает совокупность дополнительных требований, наложенных на них. Однако во многих практически важных случаях существование асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала приводит и к выполнению условий асимптотической устойчивости в целом.

Рассмотрим линейную часть системы, которая удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению (10.5):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t); \\ e(t) &= -c^T x(t); \quad u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Для этой системы справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.2.** Если для системы  $n$ -го порядка вида (10.24)

1) все собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы имеют отрицательные действительные части;

2)  $(u/e) \in [0, K]$  при  $0 < K < \infty$ ;

3) выполняются условия теоремы 10.1 и неравенство (10.19) справедливо для  $0 \leq q < \infty$ , то начало координат  $x = 0$  асимптотически устойчиво в целом для каждого  $(u/e) \in [0, K]$ .

Доказательство этой теоремы приводится в приложении III.

Отметим, что теорема 10.2 справедлива лишь при выполнении условия Попова для  $0 \leq q < \infty$ , однако практически это ограничение охватывает все наиболее важные случаи. При значениях  $-\infty < q < 0$  для справедливости теоремы 10.2 необходимо ввести дополнительные условия.

**Пример 10.5.** Рассмотрим линейную часть, заданную уравнением:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad e = -[0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

которую можно представить в виде уравнения (10.7), где

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-t} & e^{-t} & 0 \\ -1 + 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c^T = [0 \ 1 \ 1].$$

Импульсная переходная функция  $g(t)$  и реакция на начальные условия могут быть получены из уравнений (10.24) и приведенных выше соотношений в следующем виде:

$$g(t) = c^T \Phi(t) b = e^{-t} - e^{-2t};$$

$$e_0(t) = -c^T \Phi(t) x(0) =$$

$$= (e^{-t} - e^{-2t}) x_1(0) + (2e^{-2t} - e^{-t}) x_2(0) + e^{-2t} x_3(0).$$

Линейная часть системы устойчива, так как выполняются условия (10.9). Однако одно из собственных значений матрицы равно 0, и, следовательно, первое условие теоремы 10.2 не выполняется. Поэтому, если такой линейный элемент входит в состав системы с обратной связью, то нельзя утверждать, что такая система асимптотически устойчива в целом. В данном конкретном случае свойство асимптотической устойчивости в целом не свойственно системе, поскольку структурно ее линейная часть состоит из последовательного соединения интегрирующего звена, за которым следуют апериодические звенья, выходы которых и являются соответствующими переменными состояния. С точки зрения практических приложений чаще более важным является свойство асимптотического стремления к нулю выходной координаты системы, а не свойство асимптотической устойчивости в целом. Безусловно, последнее определяется конкретной постановкой задачи.

### 10.5. СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ КАК ХАРАКТЕРИСТИКА ДЕМПФИРУЮЩИХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ

Еще более существенным, чем факт устойчивости, является определение степени устойчивости, которое характеризует движение системы к положению равновесия после воздействия возмущения. С физической точки зрения здесь речь идет о демпфирующих свойствах системы. Понятие степени устойчивости было введено в § 10.4, и оно равносильно существованию асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$ . Оказывается, степень устойчивости можно очень просто определить, воспользовавшись основной теоремой Попова (теорема 10.1).

Воспользуемся преобразованием (10.18). В результате такого преобразования первоначальные уравнения (10.1) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} e_\alpha(t) &= e_{0\alpha}(t) - \int_0^t g_\alpha(t-\tau) u_\alpha(\tau) d\tau; \\ u_\alpha(t) &= \mathcal{F}_\alpha[e_\alpha(t), t], \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

где

$$\mathcal{F}_\alpha[e_\alpha(t), t] = e^{\alpha t} \mathcal{F}[e^{-\alpha t} e_\alpha(t), t].$$

Отметим также, что

$$\frac{u_\alpha(t)}{e_\alpha(t)} = \frac{u(t)}{e(t)}. \quad (10.26)$$

Тогда ясно, что если  $(u/e) \in [a, b]$ , то и  $(u_\alpha/e_\alpha) \in [a, b]$ .

Следовательно, первоначальная система (10.1) переходит в новую систему (10.25) такую, что:

1) степень устойчивости  $\alpha$  первоначального линейного элемента (10.1) соответствует свойству устойчивости преобразованной линейной части (10.25) и наоборот;

2) существование асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$  для системы (10.1) соответствует существованию асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала для системы (10.25) и наоборот.

Преобразование Фурье для сигнала  $g_\alpha(t)$  [см. преобразование (10.18)], обозначаемое через  $G_\alpha(j\omega)$ , связано с преобразованием Фурье сигнала  $g(t)$  следующим соотношением:

$$G_\alpha(j\omega) = G(j\omega - \alpha). \quad (10.27)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.3.** Любой критерий существования асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$  можно получить из критерия существования просто асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала, если:

1) требование устойчивости линейного элемента заменить требованием устойчивости со степенью  $\alpha$ ;

2)  $G(j\omega)$  заменить на  $G(j\omega - \alpha)$ .

Например, условие Попова (10.19) теоремы (10.1), определяющее существование асимптотически устойчивого управления и асимптотически устойчивого выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$ , преобразуется к виду

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega - \alpha)] + \frac{1}{K} \geq \delta > 0. \quad (10.28)$$

В дальнейшем будет рассмотрено значительное число примеров с использованием условия (10.28).

## 10.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СДВИГА ПОЛЮСОВ И КРУГОВОЙ КРИТЕРИЙ

В данном параграфе рассмотрим применение основной теоремы 10.1 к анализу асимптотического поведения систем более широкого класса, чем указанные в теореме. Кроме того, с помощью простейших преобразований можно выяснить соответствие и взаимосвязь ограничений, налагаемых на вид нелинейного элемента и характеристику линейной части для удовлетворения условий устойчивости. Уже теорема 10.1 определяет связь между выбором значения  $q$  и типом нелинейности. Число зависимостей можно увеличить, если использовать преобразования, связанные со сдвигом полюсов и со сдвигом нулей, или их комбинацию. Ниже мы рассмотрим преобразование, связанное со сдвигом полюса, которое позволяет анализировать системы, непосредственно не удовлетворяющие условиям теоремы 10.1. Кроме того, указанный подход позволяет сформулировать круговой критерий, обобщенная формулировка которого дается теоремой (10.4).

### 1. Сдвиг полюсов

Сдвиг полюсов определяется преобразованием

$$u_a(t) = u(t) - ae(t). \quad (10.29)$$

В соответствии с выражением (10.29) сектор  $(u/e) \in [a_1, b_1]$  для исходной нелинейности  $\mathcal{F}[e(t), t]$  преобразуется в сектор  $(u_a/e) \in [a_1 - a, b_1 - a]$  для преобразованной нелинейности  $\mathcal{F}_a[e(t), t]$ , как показано на рис. 10.9, а.

Пользуясь преобразованием (10.29), систему (рис. 10.9, б) можно преобразовать в эквивалентную, изображенную на рис. 10.9, в, в которой линейный элемент описывается передаточной функцией вида

$$G_a(s) = \frac{G(s)}{1 + aG(s)}. \quad (10.30)$$

Входной сигнал  $r(t)$  и реакция на начальные условия линейной части исходной системы согласно выражению (10.29) должны быть заменены на  $r_a(t)$  и  $e_{a0}(t)$ , определяемые через преобразование Лапласа следующим образом:

$$\mathcal{L}[r_a(t) + e_{a0}(t)] = \frac{1}{1 + aG(s)} \mathcal{L}[r(t) + e_0(t)]. \quad (10.31)$$

Вывод соотношений (10.30) и (10.31) мы предлагаем читателю сделать самостоятельно (см. упражнение 10.2). Из выражений (10.30) и (10.31) видно, что преобразование (10.29) приводит к изменению корней характеристиче-

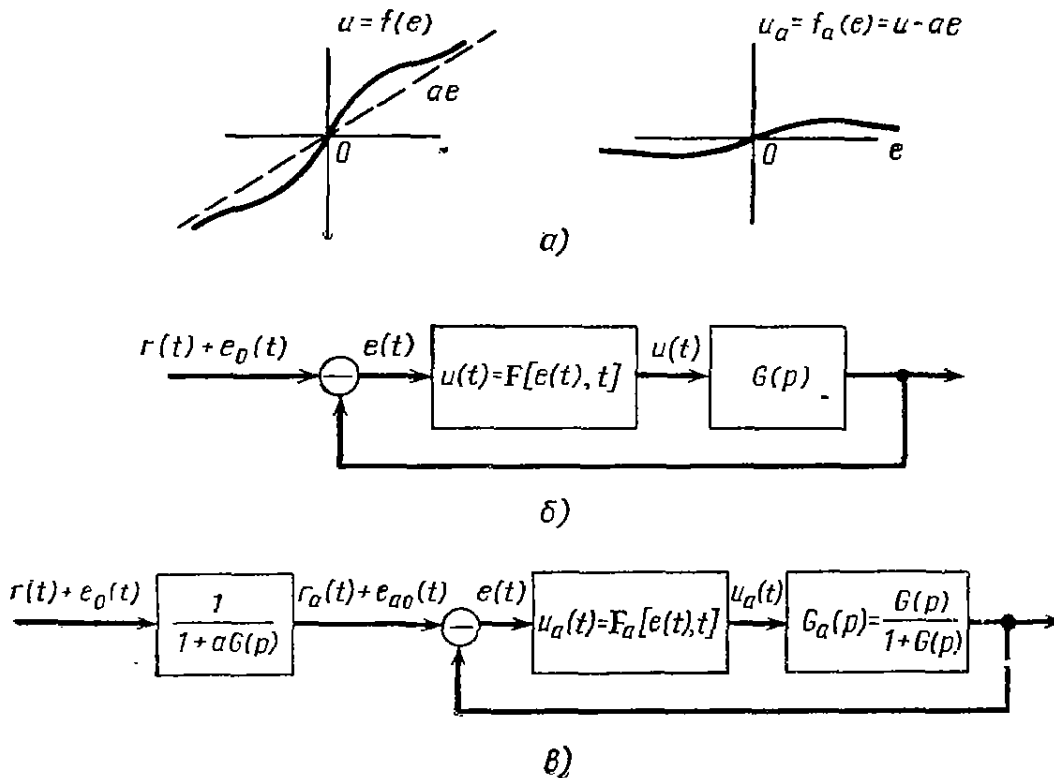


Рис. 10.9. Преобразование, связанное со сдвигом полюсов:

$a$  — влияние преобразования на изменение характеристики нелинейного элемента;  $b$  — исходная система, где  $e_0(t)$  — реакция линейного элемента на начальные условия, а  $r(t)$  — входной сигнал;  $e$  — преобразованная система в результате замены  $u_a(t) = u(t) - ae(t)$

ского уравнения системы; поэтому указанное преобразование и называется сдвигом полюсов. Данный прием удобно использовать для анализа систем, линейная часть которых либо неустойчива, либо находится на границе устойчивости. Он же позволяет дать доказательство основной теоремы 10.1 для случая  $-\infty < q \leq 0$  (см. приложение III).

Пример 10.6. Рассмотрим линейный элемент, передаточная функция которого и реакция на начальные условия задаются в виде

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)(s+4)}; \quad e_0(t) = x_{10}e^t + x_{20}e^{-3t} + x_{30}e^{-4t}, \quad (10.32)$$

где  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  — совокупность начальных условий для некоторого набора переменных состояния. Очевидно, что такой элемент неустойчив. Однако линейную часть можно сделать устойчивой, если охватить ее отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a$ . Для преобразованной линейной части в соответствии с выражениями (10.30) и (10.31) получим

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[g_a(t)] &= G_a(s) = \frac{1}{s(s^2 + 6s + 5) + a - 12}; \\ \mathcal{L}[e_{a0}(t)] &= E_{a0}(s) = \\ &= \frac{(s+3)(s+4)x_{10} + (s-1)(s+4)x_{20} + (s-1)(s+3)x_{30}}{s(s^2 + 6s + 5) + a - 12}. \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

Методом корневого годографа или с помощью любого другого метода можно показать, что преобразованный линейный элемент устойчив, если

$$12 < a < 42. \quad (10.34)$$

Для этих значений  $a$  из выражений (10.33) следует, что как  $g_a(t)$ , так и  $e_{a0}(t)$  ограничены убывающей экспонентой, т. е. существуют постоянные  $K_1, K_2, \varepsilon_1 > 0$  такие, что

$$|g_a(t)| < K_1 \exp(-\varepsilon_1 t) \text{ и } |e_{a0}(t)| < K_2 \exp(-\varepsilon_1 t).$$

Таким образом, преобразованный линейный элемент удовлетворяет условию (10.9) при  $\alpha = 0$  и по определению 10.3 является устойчивым (покажите это). Величину  $a$  можно выбрать равной  $a = 12 + \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon < 15$ , и воспользоваться теоремой 10.1 для передаточной функции

$$G_a(s) = \frac{1}{s(s^2 + 6s + 5) + \varepsilon}. \quad (10.35)$$

Теперь можно определить допустимый сектор Попова для нелинейного элемента. Пусть этот сектор для преобразованной системы определяется как  $(u_a/e) \in [0, K_a]$ ; в этом случае из выражения (10.29) следует, что сектор Попова исходной системы будет  $(u/e) \in [a, K_a + a]$ . В частности, для данного примера можно показать, что если характеристика нелинейного элемента стационарна и однозначна либо относится к виду характеристик с активным гистерезисом, то найдется такое  $q > 0$ , которое удовлетворяет условию (10.19), если  $(u_a/e) \in [0, 30 - 2\varepsilon]$  и  $0 < \varepsilon \leq 15$  (см. упражнение 10.4). Поскольку  $a = 12 + \varepsilon$ , то из выражения (10.29) следует, что сектор Попова исходной системы, для которого гарантируется существование асимптотически устойчивого выходного сигнала, определяется условием  $(u/e) \in [12 + \varepsilon, 42 - \varepsilon]$ , где  $0 < \varepsilon \leq 15$ . Сравнив это условие с ограничением (10.34), видим, что в данном случае сектор Попова совпадает с углом Гурвица. Это означает: гипотеза Айзермана выполняется.

## 2. Обобщенный круговой критерий \*

До сих пор мы шли по пути преобразования передаточной функции исходной системы к такому виду, чтобы выполнялись условия теоремы 10.1. Теперь мы попытаемся видоизменить условие Попова (10.19) так, чтобы оказалось возможным анализировать систему с первоначальной линейной частью. Этот путь приводит нас к чрезвычайно полезному круговому критерию, который мы и сформулируем в качестве теоремы.

**Теорема 10.4** Рассмотрим основную систему с обратной связью (10.1). Допустим, линейный элемент, охваченный отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a$ , устойчив. Для того чтобы для исходной системы с обратной связью существовали абсолютно асимптотически устойчивое управление и выходной сигнал при  $(u/e) \in [a, b]$ , если  $a < b$ , достаточно существование такого действительного числа  $q$ , что для всех  $\omega \geq 0$  выполнялись условия

$$\left. \begin{aligned} & \left| G(j\omega) + \frac{b+a-j\omega q(b-a)}{2ab} \right|^2 - \left( \frac{b-a}{2ab} \right)^2 (1+q^2\omega^2) \geq \delta > 0 \\ & \text{при } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}; \\ & \left| G(j\omega) + \frac{b+a-j\omega q(b-a)}{2ab} \right|^2 - \left( \frac{b-a}{2ab} \right)^2 (1+q^2\omega^2) \leq -\delta < 0 \\ & \text{при } \frac{1}{a} < \frac{1}{b},^{**} \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

\* Круговой критерий был первоначально доказан лишь для случая  $q = 0$  ([24], [207], [208]). Обобщенный круговой критерий, сформулированный в теореме 10.4, является дальнейшим развитием и справедлив для  $q \neq 0$ .

\*\*  $a$  и  $b$  могут принимать отрицательные значения, и, следовательно, могут выполняться оба условия:  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  и  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

где  $\delta$  — произвольно малая величина. Ограничения, которым должны удовлетворять величины  $q$  и  $b - a$ , зависят от вида нелинейности и остаются теми же, что и в теореме 10.1 для величин  $q$  и  $K$  соответственно.

Геометрическая интерпретация условия (10.36) состоит в том, что для всех  $\omega \geq 0$  частотный годограф  $G(j\omega)$  должен располагаться вне или внутри круга с центром в точке

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2} jq\omega \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

в зависимости от выполнения условия  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  или  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  и пересекать действительную ось в точках  $\left(-\frac{1}{a}\right)$  и  $\left(-\frac{1}{b}\right)$ . Рис. 10.10 построен для наиболее распространенного условия  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ . Пример, соответствующий условию  $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ , приводится в § 10.8.

Подведем некоторые итоги:

1. Теорема 10.4 обобщает основную теорему 10.1. Можно показать, что если  $a \rightarrow 0$  и  $b \rightarrow K$ , то условие (10.36) переходит в условие (10.20) (покажите это)\*, которое, в свою очередь, соответствует условию (10.19) в теореме 10.1.

2. Для существования абсолютно асимптотически устойчивых управления и выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$  требуется, чтобы, во-первых, линейная часть, охваченная отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a \geq 0$ , обладала степенью устойчивости  $\alpha$  и, во-вторых, вместо частотной характеристики  $G(j\omega)$  в условии (10.36) следует подставлять  $G(j\omega - \alpha)$ . Это является непосредственным следствием теоремы 10.3.

3. Рис. 10.10 иллюстрирует также связь, которая существует между ограничениями на линейную и нелинейную части системы. Сужая сектор  $(u/e) \in [a, b]$ , мы уменьшаем и радиус критических окружностей. Поэтому область допустимых расположений годографа  $G(j\omega)$  расширяется.

4. Если  $a \rightarrow h$  и  $b \rightarrow h$ , то мы получим линейную стационарную систему с усилением  $h$ . В данном случае критическая окружность вырождается в точку с координатой  $\left(-\frac{1}{h}\right)$  на плоскости  $G(j\omega)$ . Это и есть критическая точка при формулировке частотного критерия устойчивости линейной системы.

5. Критическая окружность, определяемая соотношением (10.36) и показанная на рис. 10.10, является функцией частоты или, точнее, произведения  $q\omega$ . Несмотря на то, что все окружности проходят через точки  $-\frac{1}{a}$  и  $-\frac{1}{b}$ , их центры смещаются вверх с увеличением произведения  $q\omega$ . Лишь

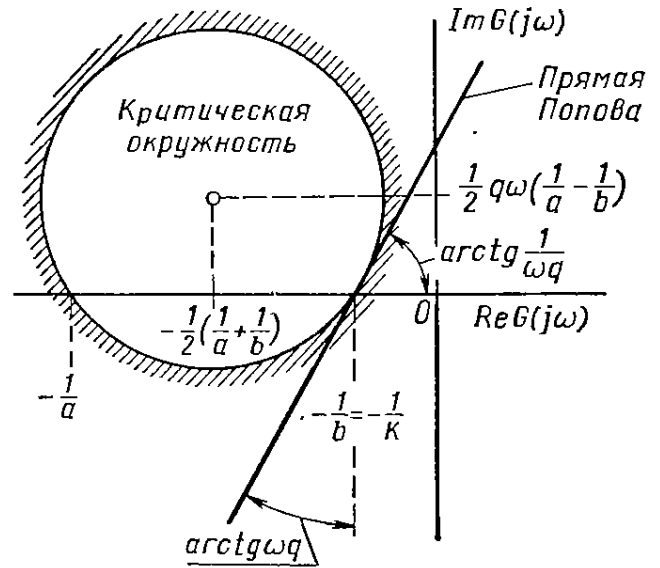


Рис. 10.10. Графическая иллюстрация теоремы 10.4 для случая  $1/a \geq 1/b$ , а также теоремы 10.5

\* Графическое подтверждение указанного положения можно получить и при анализе рис. 10.10, если  $a = 0$  и  $b = K$ .



при  $q = 0$  окружность симметрична относительно действительной оси и проходит через точки  $-\frac{1}{a}$  и  $-\frac{1}{b}$ .

6. Выполнение требования теоремы 10.4 об устойчивости линейного элемента, охваченного отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a$ , можно проверить с помощью частотного критерия устойчивости. Если  $G(s)$  представляет рациональную функцию комплексной переменной  $s$  и число полюсов этой функции в области  $\operatorname{Re} s \geq 0$  обозначить через  $r$ , то требование устойчивости линейной части системы выполняется, если частотный годограф функции  $G(j\omega)$  при  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  и при условии, что каждый полюс, расположенный на оси  $\operatorname{Re} s = 0$ , обходится вдоль окружности бесконечно малого радиуса, расположенной слева от полюса, совершает вокруг точки  $-\frac{1}{a}$  ровно  $r$  оборотов против часовой стрелки\*. Для случая  $q = 0$  указанный критерий можно объединить с условием (10.36). Вывод соотношения мы предлагаем проделать читателю самостоятельно (упражнение 10.18), однако окончательный результат сформулируем в виде следствия.

Следствие 10.1. Пусть  $G(s)$  представляет рациональную функцию переменной  $s$ , причем порядок знаменателя выше порядка числителя, а число полюсов в области  $\operatorname{Re} s \geq 0$  обозначим через  $r$ . Пусть  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$ , и, следовательно, рассматривается общий вид нестационарной нелинейной характеристики. Для того чтобы основная система (10.1) с обратной связью обладала абсолютно асимптотически устойчивым управлением и выходным сигналом для  $(u/e) \in [a, b]$  при  $a < b$  и  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , достаточно, чтобы годограф  $G(j\omega)$  при  $-\infty \leq \omega \leq \infty$ , когда обход каждого полюса, расположенного на мнимой оси  $\operatorname{Re} s = 0$ , совершается по полуокружности бесконечно малого радиуса слева от полюса, располагался вне окружности, проходящей через точки  $-\frac{1}{a}$  и  $-\frac{1}{b}$  с центром  $-\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$ , и охватывал эту окружность  $r$  раз при движении против часовой стрелки.

Для доказательства теоремы 10.4 рассмотрим преобразование (10.29), связанное со сдвигом полюсов, из которого следует, что если  $(u/e) \in [a, b]$ , то  $(u_a/e) \in [0, b - a]$ . Кроме того, линейная часть преобразованной системы, определяемая по соотношениям (10.30) и (10.31), предполагается устойчивой\*\*. Следовательно, условие теоремы 10.1 выполняется для преобразованной системы, и условие Попова (10.19) можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G_a(j\omega)] + \frac{1}{b-a} \geq \delta_a > 0,$$

где  $G_a(j\omega)$  определяется в соответствии с выражением (10.30);  $\delta_a$  — бесконечно малая постоянная (с какой целью она вводится?).

Отметим, что, согласно выражению (10.30), сдвиг полюсов (10.29) определяет билинейное преобразование комплексной переменной  $G(j\omega)$  в  $G_a(j\omega)$ . Такое билинейное преобразование переводит окружности и прямые линии либо в окружности, либо в прямые. Так, например, прямая Попова (рис. 10.4а) переходит в окружность на рис. 10.10. Более того, при  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  область справа от прямой Попова переходит в область вне критического

\* Читатель может сам убедиться, что согласно обобщенному круговому критерию (10.36) охват точки  $-1/a$  равносильен охвату отрезка  $[-1/a, -1/b]$  при  $1/a > 1/b$  или интервалов  $[-\infty, -1/b]$  и  $[-1/a, \infty]$  при  $1/a < 1/b$ .

\*\* Это требование будет ослаблено в теореме 10.6.

круга на плоскости  $G(j\omega)$  (см. рис. 10.10)<sup>1</sup>. Последняя точно соответствует условию (10.36). Таким образом, если выполняется условие (10.36), то для преобразованной системы существуют асимптотически устойчивое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал, т. е. выполняются неравенства

$$\int_0^{\infty} u_a^2(t) dt < \infty; \quad \int_0^{\infty} e^2(t) dt < \infty$$

для произвольных начальных условий. Отсюда, пользуясь условием (10.29) для исходной системы, получим<sup>2</sup>

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt < \infty$$

для произвольных начальных условий. Следовательно, для исходной системы также существуют асимптотическое устойчивое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал. Доказательство теоремы на этом заканчивается.

В отличие от приема, который использовался при построении прямой Попова (раздел 10.3), в данном случае нет большого смысла в преобразовании критических окружностей из плоскости  $G(j\omega)$  в плоскость  $G^*(j\omega)$ , поскольку при этом получается семейство кривых (отличных от окружностей), вид которых зависит как от  $q$ , так и от  $\omega$  (обратите, однако, внимание на упражнение 10.17). Кстати, из теоремы 10.4 следует интересное свойство.

Если провести касательную к критической окружности в точке  $-\frac{1}{b}$ , то ее наклон<sup>3</sup> будет определяться как  $\frac{1}{\omega q}$ . Это показано на рис. 10.10. Сравнивая рис. 10.10 с рис. 10.4 а, нетрудно заметить, что касательная к критической окружности имеет тот же наклон, что и прямая Попова, если  $a = 0$ .

Действительно, если  $b = K$  и  $0 \leq a < b$ , касательная просто совпадает с прямой Попова, изображенной на рис. 10.4а. В разделе 10.3 было показано, что эту прямую можно перевести в линию на плоскости  $G^*(j\omega)$ , не зависящую от изменения частоты (см. рис. 10.5). Таким образом, если  $G^*(j\omega)$  лежит справа от прямой Попова на рис. 10.5, то это означает, что  $G(j\omega)$  лежит вне критического круга на рис. 10.10. При этом лишь должно соблюдаться условие теоремы 10.4 об устойчивости линейной части системы, охваченной обратной связью. Этот вывод сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 10.5.** Рассмотрим основную систему (10.1). Пусть ее линейная часть, охваченная отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a > 0$ , устойчива. Для того чтобы в исходной системе с обратной связью управление и выходной сигнал были абсолютно асимптотически устойчивы в секторе  $(u/e) \in [a, K]$ , достаточно, чтобы нашлось такое действительное число  $q$ , при котором для всех  $\omega \geq 0$  выполняется условие Попова (10.9) при тех же ограничениях на  $q$  и  $K$ , что и в теореме 10.1.

<sup>1</sup> При  $1/a < 1/b$  область справа от прямой Попова переходит в область критического круга.

<sup>2</sup> Неравенство Минковского (см. приложение III) определяет, что

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{\infty} [u_a(t) + ae(t)]^2 dt \leq \left[ \left( \int_0^{\infty} u_a^2(t) dt \right)^{1/2} + \left( \int_0^{\infty} a^2 e^2(t) dt \right)^{1/2} \right]^2 < \infty.$$

<sup>3</sup> Угол между касательной и вертикалью в точке  $-1/b$  равен  $\text{arctg}_b^* \omega q$ .

Отметим, что теорема 10.5 позволяет проводить графический анализ на плоскости  $G^*(j\omega)$  с помощью выражения (10.22). Ее преимущества наиболее полно проявляются при анализе систем с неустойчивой и находящейся на границе устойчивости линейной частью. Теорема позволяет применить условия Попова непосредственно к исходной системе, не подвергая ее никаким преобразованиям (см. пример 10.6) при условии, что линейный элемент, охваченный отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a$ , устойчив.

Обратимся вновь к рис. 10.10. При этом будем помнить, что в теореме 10.4 используется понятие критической окружности, а в теореме 10.5 — понятие прямой Попова. Из рис. 10.10 следует, что хотя теорему 10.5 применять и проще, но ее условия ослаблены и являются достаточными по отношению

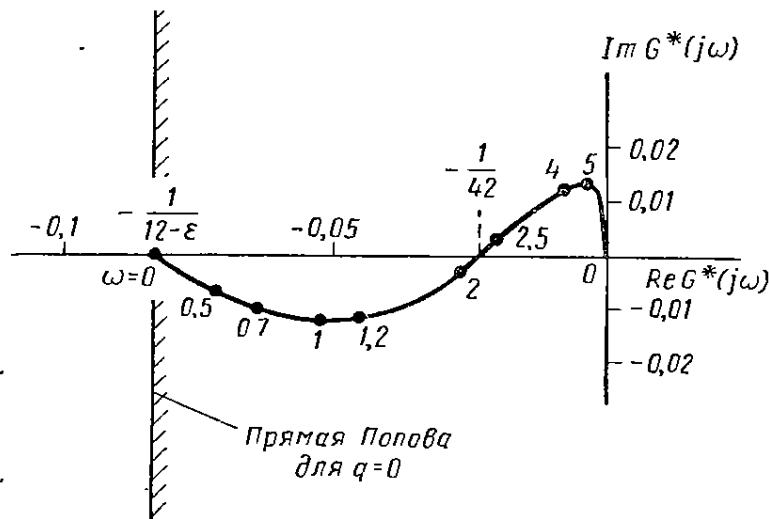


Рис. 10.11. Модифицированный частотный годограф передаточной функции  $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)(s+4)}$  для примера 10.7

вый выходной сигнал с порядком сходимости  $\alpha \neq 0$ .

**Пример 10.7.** Рассмотрим ту же систему, что и в примере 10.6. Ранее было показано, что линейная часть, охваченная отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a$ , где  $12 < a < 42$ , устойчива. Для применимости теоремы 10.5 следует рассматривать лишь нелинейные элементы, для которых  $(u/e) \in [a, K)$ .

У функции  $G(s)$  вида (10.32) модифицированная частотная характеристика  $G^*(j\omega) = \text{Re } G(j\omega) + j\omega \text{Im } G(j\omega)$  показана на рис. 10.11. Из рисунка следует, что прямую Попова можно провести через точку чуть левее  $\text{Re } G^*(j\omega) = -1/2$ . Кроме того, ее можно провести вертикально, т. е. считая  $q = 0$ , что соответствует самому общему случаю нелинейной характеристики. Итак,  $K = 12 - \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$ , следовательно, сектор Попова определяется соотношением  $(u/e) \in [a, 12 - \epsilon]$ , где  $12 < a < 42$ . Однако при  $a > 12$  сектора не существует, и теорема 10.5 не даст нам никакой информации.

**Пример 10.8.** Вновь обратимся к системе, рассмотренной в примерах 10.6 и 10.7, и исследуем преобразованную передаточную функцию (10.33) при  $a = 12^{**}$ , записанную в виде

$$G_a(s) = \frac{1}{s(s^2 + 6s + 5)} = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

$$e_{a0}(t) = \frac{1}{5} (12x_{10} - 4x_{20} - 3x_{30}) + \frac{1}{20} (6x_{10} - 6x_{20} - 4x_{30}) e^{-t} +$$

$$+ \frac{1}{4} (2x_{10} + 6x_{20} + 12x_{30}) e^{-5t}. \quad (10.37)$$

\* Если линейный элемент приобретает свойство экспоненциальной устойчивости при любом сколь угодно малом коэффициенте обратной связи, то говорят, что такой элемент предельно устойчив [1].

\*\* Это равносильно передаточной функции (10.35) при  $\epsilon = 0$ .

Из примера 10.6 видно, что линейная часть, описываемая соотношениями (10.37), будет устойчива при замыкании отрицательной обратной связью с коэффициентом  $0 < h < 30$ . К тому же линейная часть устойчива и без охвата обратной связью. Следовательно, условия теоремы 10.5 выполняются для любого нелинейного элемента, расположенного в полукрытом секторе  $(u/e) \in [0, K]$ , и неравенство Попова имеет вид

$$\operatorname{Re} G_a^*(j\omega) > -\frac{1}{K} + q \operatorname{Im} G_a^*(j\omega).$$

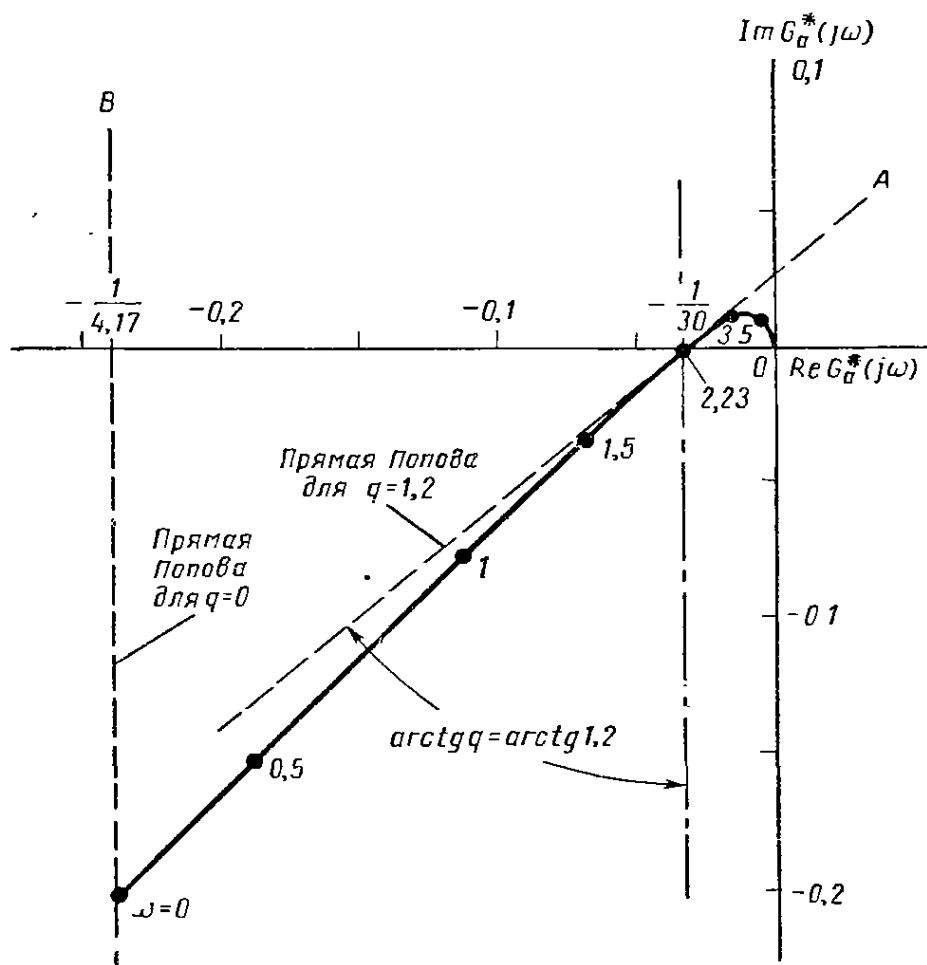


Рис. 10.12. Модифицированный частотный годограф для передаточной функции  $G_a(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$  примера 10.8

Модифицированная частотная характеристика  $G_a^*(j\omega)$  для  $a = 12$  изображена на рис. 10.12. Через точку с координатой  $G_a^*(j\omega) = -\frac{1}{30}$  можно провести прямую Попова с наклоном  $\frac{1}{1,2}$ . Последнее означает, что условия теоремы 10.5 выполняются при  $q = 1,2$ , если характеристика стационарной однозначной нелинейности  $u_a = f_a(e)$  расположена в секторе  $(u_a/e) \in (0, 30)$  <sup>1)</sup>.

Для общего случая нелинейной характеристики или для характеристики с пассивным гистерезисом прямая Попова соответствует условию  $q = 0$  и представляет вертикальную линию. Определяя в этом случае сектор Попова, получим  $(u_a/e) \in (0; 4,17)$ , который существенно меньше сектора  $(u_a/e) \in (0; 30)$  для стационарной однозначной нелинейности.

Мы проанализировали систему, которая была получена из выражения (10.32) сдвигом полюсов [преобразование (10.29)]; поэтому следует распространить полученные результаты на исходную систему. Согласно выражению (10.29) при  $a = 12$  получим секторы Попова  $(u/e) \in (12; 42)$  для однозначной (или с активным гистерезисом) стационарной нелинейности и  $(u/e) \in (12; 16,71)$  для общего вида нелинейности.

<sup>1)</sup> Условия теоремы выполняются и для нелинейности с активным гистерезисом.

В примере 10.7 мы пытались воспользоваться теоремой 10.5 для анализа исходной (непреобразованной) системы, однако при этом не существовало сектора Попова при произвольном виде нелинейной характеристики. Это, как уже указывалось, обусловлено тем, что теорема 10.5 представляет лишь частный, достаточный вариант теоремы 10.4. Если бы мы хотели получить

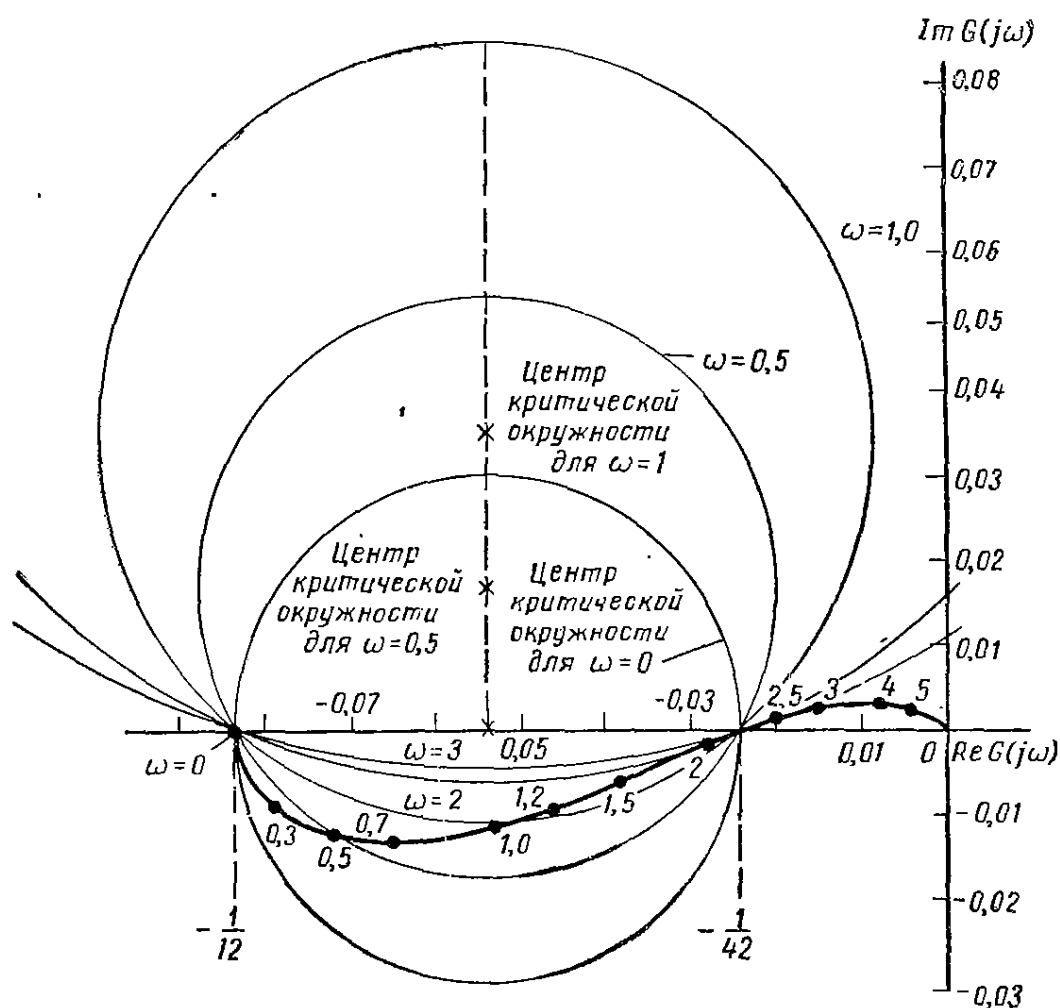


Рис. 10.13. Частотный годограф  $G(j\omega)$  для передаточной функции

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)(s+4)}, \text{ к примерам 10.6, 10.7 и 10.9}$$

частотный критерий для анализа исходной системы, не пользуясь преобразованием, связанным со сдвигом полюсов, то нам следовало бы воспользоваться теоремой 10.4.

**Пример 10.9.** Для системы из примеров 10.6 и 10.7 определить сектор Попова для стационарной однозначной нелинейности  $u = f(e)$ , воспользовавшись теоремой 10.4.

Прежде всего заметим, что линейный элемент, охваченный отрицательной обратной связью с коэффициентом  $12 < a < 42$ , устойчив. Используя теорему (10.4), можно определить значение  $q$ , а именно:  $q = 1,2$ , которое позволяет провести критические окружности, проходящие через точки  $-1/12$  и  $-1/42$  и такие, что при каждом значении  $\omega$  соответствующее значение  $G(j\omega)$  определяет точку на или вне соответствующей критической окружности (рис. 10.13). Сектор Попова в этом случае равен  $(u/e) \in (12; 42)$ .

Заметим, что указанная процедура анализа достаточно сложна. Самое трудное — отыскать нужное значение  $q$ , для которого выполняется круговой критерий. Этот поиск можно вести методом последовательных приближений. В данном случае, исходя из предыдущих рассуждений, можно было ожидать, что  $q = 1,2$  является подходящим значением. Рис. 10.13 подтверждает это. Вообще говоря, отыскание приемлемого значения  $q$  методом последовательных приближений — достаточно трудоемкое занятие. Сравнивая данный пример с предыдущим, замечаем, что целесообразно сначала преобразовать исходную систему в систему с сектором Попова  $(u_a/e) \in [0, b - a]$ , а затем поступить так, как в примере 10.8.

Итак, два подхода дали одни и те же результаты, но этого может и не быть, если рассматривать нелинейности более общего вида; и тогда прямой

метод, не связанный со сдвигом полюсов исходной системы, а основанный на теореме 10.4, будет давать более общие результаты, чем непрямой метод примера 10.8. Покажем это на примере.

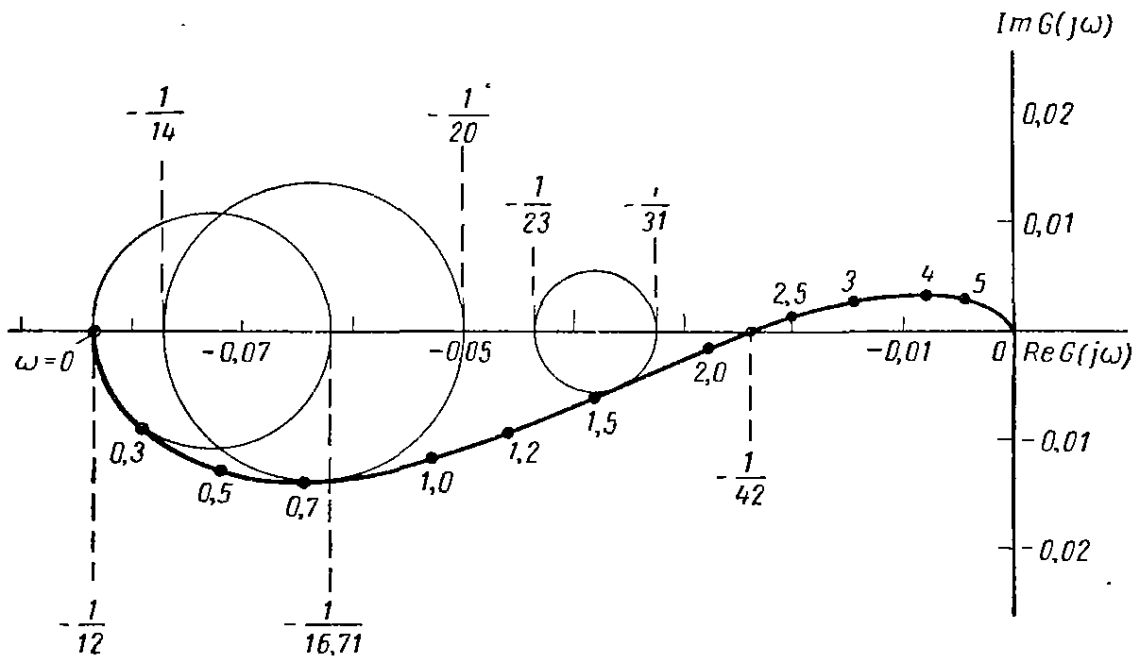


Рис. 10.14. Частотный годограф для исходной передаточной функции

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+3)(s+4)} \text{ к примерам (10.6)–(10.10)}$$

**Пример 10.10.** Используя теорему 10.4, определим для исходной системы (10.32) сектор Попова, имея нелинейную характеристику общего вида  $u = \mathcal{F}[e(t), t]$ . Поскольку рассматривается нелинейность общего вида, то следует положить  $q = 0$ . По теореме 10.4 можно найти такие секторы Попова  $(u/e) \in (a, b)$ , что для каждого из них частотный годограф  $G(j\omega)$  расположен либо на окружности\*, симметричной относительно действительной оси и проходящей через точки  $-1/a$  и  $-1/b$ , либо вне ее. В данном случае нетрудно определить (рис. 10.14), что секторы  $(u/e) \in (12; 16,71)$ ;  $(u/e) \in (14; 20)$  и  $(u/e) \in (23; 31)$  являются секторами Попова. В то же время видно, что «размер» сектора Попова или разность между верхней границей  $b$  и нижней  $a$  зависит от размера критической окружности, который, в свою очередь, определяется значением  $a$ . Указанная зависимость получена из рис. 10.14 и представлена на рис. 10.15.

Непрямой метод примера 10.8 дал возможность отыскать единственный сектор Попова  $(u/e) \in (12; 16,71)$ . При использовании кругового критерия (теорема 10.4) оказалось возможным отыскать целую область секторов, в которую входит и сектор, найденный в примере 10.8. Из рис. 10.15 следует, что при нижней границе  $a = 20$  определяется сектор Попова максимального размера, а именно:  $(u/e) \in (20; 28,5)$ . Отметим, хотя этого и следовало ожидать, что и этот сектор Попова лежит внутри угла Гурвица, т. е. угла, внутри которого всякая линейная стационарная система с обратной связью  $u = he$  устойчива.

Рассмотренные примеры, начиная с 10.6 и кончая 10.10, показывают, что не существует универсального способа решения любой задачи. Иногда целесообразнее применять основную теорему 10.1 к преобразованной в результате сдвига полюсов системе; в других случаях целесообразнее применить теорему 10.4 или 10.5 к исходной системе. Из этих же примеров следует, что круговой критерий, изложенный в теореме 10.4, в большей степени приемлем для случая  $q = 0$ , т. е. для нелинейных характеристик общего вида. Подробнее этот вопрос освещается ниже.

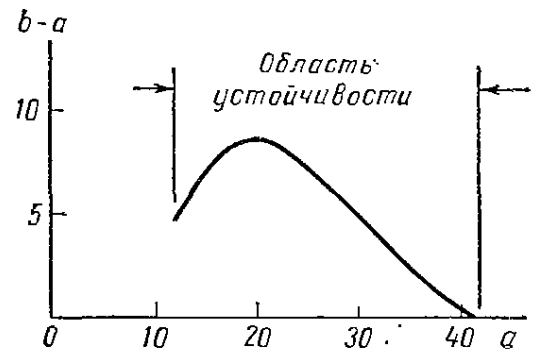


Рис. 10.15. Величина сектора Попова  $(b-a)$  в зависимости от нижней границы  $a$  для системы из примера 10.10

\* Если рассматривается открытый сектор Попова  $(u/e) \in (a, b)$ , то частотный годограф  $G(j\omega)$  может касаться критической окружности.

## 10.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СДВИГА НУЛЕЙ

Напомним, что основная цель преобразования, связанного со сдвигом полюсов, заключалась в том, чтобы сделать линейную часть преобразованной системы устойчивой и применить теорему 10.1. Основная цель предлагаемого преобразования заключается в таком видоизменении сектора  $(u/e) \in (a, b)$  для нелинейного элемента, при котором свойство устойчивости линейной части не нарушается. Сдвиг нулей определяется следующим преобразованием:

$$e_c(t) = e(t) + cu(t). \quad (10.38a)$$

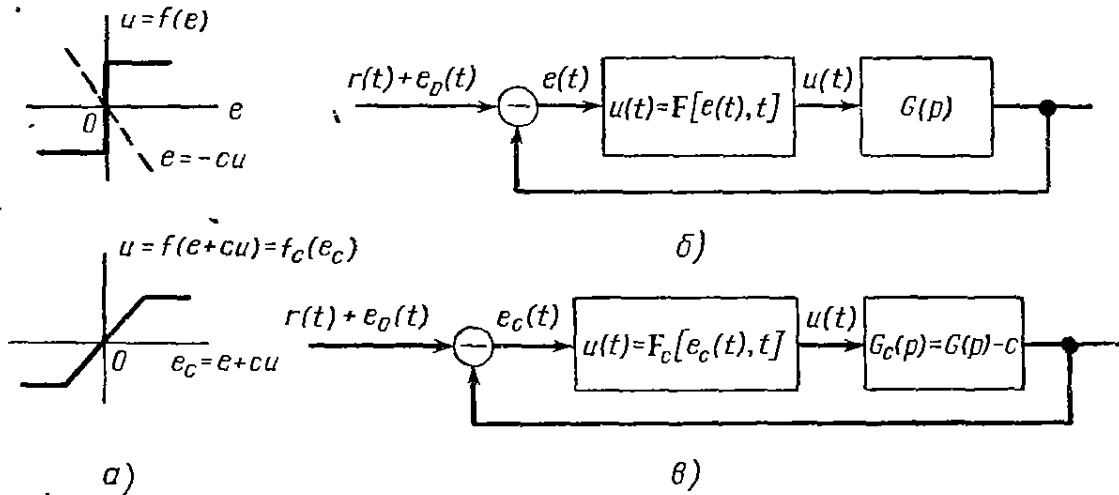


Рис. 10.16. Иллюстрации к способу сдвига полюсов:

*a*—влияние преобразования на характеристику нелинейного элемента; *б*—исходная структурная схема системы;  $e_0(t)$ —реакция на начальные условия линейного элемента;  $r(t)$ —входной сигнал; *в*—преобразованная структурная схема системы

Из этого преобразования следует, что новая передаточная функция и реакция на начальные условия равны

$$G_c(p) = G(p) - c \quad (10.38б)$$

и

$$e_{c0}(t) = e_0(t). \quad (10.38в)$$

Введенное преобразование иллюстрируется рис. 10.16, *a*; при этом структурная схема исходной системы (рис. 10.16, *б*) преобразуется в структурную схему (рис. 10.16, *в*). Реакция на начальные условия в преобразованной системе та же, что и в исходной. Передаточная функция преобразованной системы определяется из передаточной функции исходной за вычетом постоянной  $c$ . Если  $G(p)$  — рациональная функция переменной  $p$ , то  $G_c(p)$  имеет те же полюсы, но другие нули, откуда и следует название преобразования — сдвиг нулей. Отметим, что при таком преобразовании сигнал управления  $u(t)$  остается неизменным, в то время как сигнал  $e(t)$  изменяется.

Предлагаем читателю показать, что в результате преобразования (10.38а) сектор  $(u/e) \in [a, b]$  переходит в сектор

$$\frac{u}{e_0} \in \left[ \frac{1}{\frac{1}{a} + c}, \frac{1}{\frac{1}{b} + c} \right] = \left[ \frac{a}{1 + ac}, \frac{b}{1 + bc} \right].$$

Из соотношения (10.38б) следует, что даже если исходный линейный элемент имел устойчивый выход, то преобразованный не будет характеризо-

ваться устойчивым выходным сигналом\*; несмотря на это, справедлива следующая теорема.

**Теорема 10.6.** От условия теоремы 10.1 и всех теорем об устойчивости выходного сигнала, вытекающих из нее, можно отказаться, если передаточная функция линейной части будет получена в результате преобразования сдвига нулей (10.38а), примененного к передаточной функции элемента, выходной сигнал которого устойчив\*\*.

Для доказательства этой теоремы необходимо повторить ход доказательства теоремы 10.1 (см. приложение III) с заменой  $G(p)$  на  $G(p) - c$ . Согласно выражениям (III.18) и (III.19) (приложение III) константа  $c$  в соотношения, начиная с (III.20), не входит, и доказательство теоремы остается без изменения.

Содержание теоремы 10.6 не должно вызывать удивления. Замена величины  $\frac{1}{K}$  на величину  $\frac{1}{K} - c$  согласно выражению (10.21) означает сдвиг годографа  $G^*(j\omega)$  вдоль горизонтальной оси на  $c$  единиц.

**Пример 10.11.** Определить сектор Попова для системы на рис. 10.1, где  $G(p) = \frac{p-4}{p+2}$  и  $e_0(t) = e_0 e^{-2t}$ .

Прежде всего перепишем функцию в виде  $G(p) = 1 - \frac{6}{p+2} = G_1(p) + 1$ , выразив ее через функцию  $G_1(p) = \frac{-6}{p+2}$  при той же реакции на начальные условия  $e_0(t) = e_{10}(t) = e_0 e^{-2t}$ . Преобразование  $G_1(p)$  в  $G(p)$  соответствует сдвигу полюсов [см. выражение (10.38а)]\*\*\*. Линейный элемент, определяемый через  $G_1(p)$  и  $e_{10}(t)$ , имеет устойчивый выход. Следовательно, согласно теореме 10.6 к исходной системе можно применить теорему 10.1. Условие Попова (10.19) для этого случая запишется так:

$$\operatorname{Re} \left[ (1 + j\omega q) \frac{j\omega - 4}{j\omega + 2} \right] + \frac{1}{K} > 0.$$

Читатель может сам убедиться, что это условие выполняется при  $0 < K < \frac{1}{2}$  и при  $-\infty < q < \frac{1}{2}$ , включая  $q = 0$ . Таким образом, в состав системы может входить нелинейный элемент общего вида  $u(t) = F[e(t), t]$ , расположенный в полукрытом секторе Попова  $(u/e) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ .

До сих пор мы обсуждали преобразование сдвига полюсов ко всей передаточной функции линейной части. Иногда оказывается более целесообразным применять его лишь к части линейного элемента. Следующий пример показывает, как можно преобразовать двухконтурную систему в одноконтурную, для которой справедлива основная теорема.

**Пример 10.12.** Определить предельное значение коэффициента обратной связи  $h = h_c$  в приводе системы, показанной на рис. 10.17а, такое, что при  $h > h_c$  выходной сигнал  $y(t)$  будет асимптотически стремиться к установившемуся значению  $y_c$ , которое зависит от постоянного входного сигнала величины  $R$ .

Эта система относится к системе непрямого управления, показанной на рис. 9.6.

\* Передаточная функция преобразованной линейной части, равная  $G(s) + c$ , имеет те же особенности, что и исходная передаточная функция  $G(s)$ ; следовательно, характерное свойство устойчивости сохраняется после преобразования (10.38а). Однако из-за наличия постоянной  $c$  условия (10.9) не выполняются (покажите это), и преобразованный элемент имеет неустойчивый выходной сигнал (см. определение 10.3).

\*\* Для теорем 10.4 и 10.5 это утверждение относится к линейному элементу, охваченному отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a$ .

\*\*\* Передаточные функции  $G(p)$  и  $G_1(p)$  примера 10.11 идентичны  $G_0(p)$  и  $G(p)$  из (10.38б) соответственно. Кроме того,  $c = -1$ .



Для того чтобы к ее анализу применить описанный выше метод, необходимо преобразовать систему к виду, показанному на рис. 10.17б, для которой

$$\frac{u}{e} \in (0, \infty)^*; \quad G(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{p+6}{(p+2)(p+3)} + h \right]; \quad e_0(t) = e_{10} + e_{20}e^{-2t} + e_{30}e^{-3t} + R.$$

В постоянной составляющей  $e_{10}$  реакции системы на начальные условия можно учесть, без ограничения общности, и постоянный входной сигнал  $R$ . Тогда свободная система с обратной связью на рис. 10.17б соответствует исходной системе рис. 10.17а. Используя выражение (10.21), получим

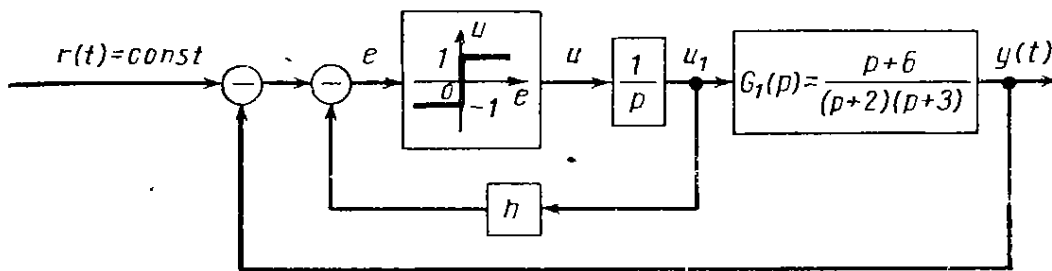
$$G^*(j\omega) = G_2^*(j\omega) - jh,$$

где

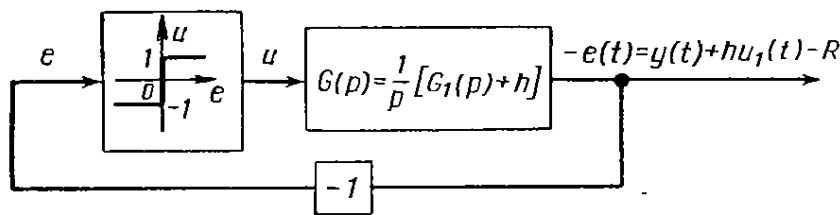
$$G_2^*(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} - \frac{24 + \omega^2}{36 + 13\omega^2 + \omega^4} - j \frac{36 - \omega^2}{36 + 13\omega^2 + \omega^4}.$$

Условие Попова (10.22) принимает вид

$$\operatorname{Re} G^*(j\omega) - q \operatorname{Im} G^*(j\omega) = \operatorname{Re} G_2^*(j\omega) - q (\operatorname{Im} G_2^*(j\omega) - h) > 0.$$



а)



б)

Рис. 10.17: а) Структурная схема системы к примеру 10.12; б) Преобразованная структурная схема системы

Из годографа  $G_2^*(j\omega)$  (рис. 10.18) следует, что  $\operatorname{Im} G_2^*(j\omega)$  имеет максимум, приблизительно равный 0,059. Поэтому условию Попова можно удовлетворить при  $q > 0$ , если  $h > 0,059$ .

Рассмотренная система исследовалась также прямым методом Ляпунова в примере 9.11<sup>1)</sup>, где область устойчивости определялась как область значений  $h > 2$ . Таким образом, изложенный нами частотный метод позволил существенно расширить эту область.

При  $h > 0,059$  для системы (рис. 10.17б) существуют асимптотически устойчивое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал. Последнее означает, что  $e(\infty) = 0$ , и, следовательно, для исходной системы рис. 10.17а получим

$$y(\infty) = \frac{G_1(0)}{h + G_1(0)} R = \frac{1}{h + 1} R.$$

\* Строго говоря,  $(u/e) \in [0, \infty]$ . Однако для каждого  $A > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для релейной характеристики  $(u/e) \in [\delta, \infty]$ , если  $|e| \leq A$  (действительно, поскольку  $u = \operatorname{sign} e$ , то  $\delta = \frac{1}{A}$ ). Следовательно, будет правильно записать  $(u/e) \in (0, \infty)$ .

<sup>1)</sup> В примере 9.11 рассматривался сектор  $(u/e) \in (0, \infty]$ , который соответствует элементу на рис. 10.17б.

## 10.8. ПРИМЕНЕНИЕ НОМОГРАММ ЗАМЫКАНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КРИТЕРИЯ ПОПОВА

Метод проектирования линейных систем, связанный с применением номограмм замыкания, имеет значительные преимущества перед иными методами и широко распространен на практике. В этом параграфе воспользуемся им и для анализа систем на основе критерия Попова<sup>1)</sup>.

Основное достоинство логарифмических амплитудных и фазовых характеристик перед частотными годографами заключается в простоте отыскания

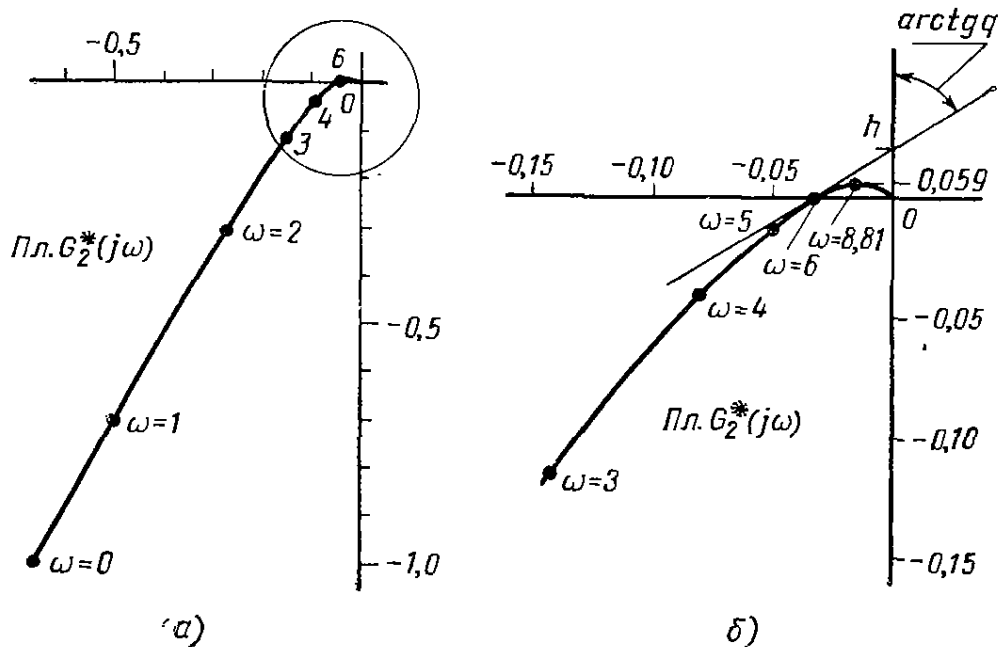


Рис. 10.18: а) Годограф  $G_2^*(j\omega)$  для примера 10.12; б) Конечный участок годографа

корректирующих цепей. Однако не надо забывать, что если использовать логарифмические характеристики  $G^*(j\omega)$ , то возникают трудности, связанные с тем, что модифицированное преобразование произведения передаточных функций не равно произведению модифицированных преобразований, т. е.

$$[G_1(j\omega) G_2(j\omega)]^* \neq G_1^*(j\omega) G_2^*(j\omega). \quad (10.39)$$

Поэтому предпочтительнее использовать логарифмические частотные характеристики<sup>2)</sup> исходного объекта  $G(j\omega)$ .

1. Случай, когда  $q = 0$ . Допустим, исходная система имеет вид, показанный на рис. 10.19, а, где линейный элемент имеет передаточную функцию  $G(s)$ , а нелинейность расположена в секторе  $(u/e) \in [a, b]$ . Рассмотрим преобразование сдвига полюсов вида

$$u_k(t) = u(t) - \frac{a+b}{2} e(t), \quad b > a; \quad (10.40)$$

это преобразование приводит к тому, что

$$G_k(p) = \frac{G(p)}{1 + \frac{a+b}{2} G(p)} \quad (10.41)$$

<sup>1</sup> См. работу [142].

<sup>2</sup> Однако в дальнейшем мы будем использовать и логарифмические характеристики модифицированной передаточной функции  $G^*(j\omega)$  при  $q \neq 0$ .

и реакция на начальные условия равна

$$e_{k0}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{a+b}{2} G(s)} \mathcal{L}[e_0(t)] \right]. \quad (10.42)$$

Характеристика нелинейного элемента после указанного преобразования должна располагаться в секторе

$$\frac{u_k}{e} \in \left[ -\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2} \right]. \quad (10.43)$$

По теореме (10.4) область допустимого расположения частотной характеристики исходного элемента на плоскости  $G(j\omega)$  расположена вне области критического круга и выделена штриховкой на рис. 10.19, а. Назовем эту область областью Попова.

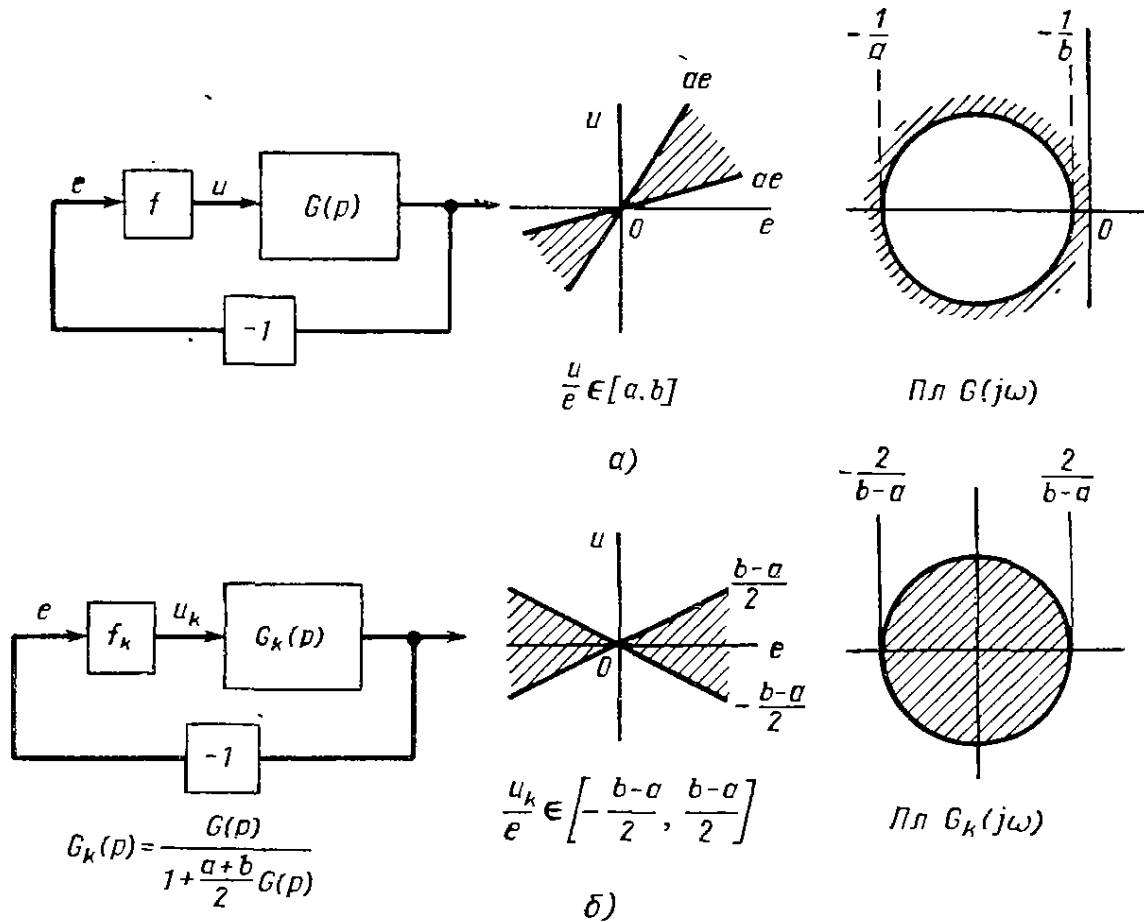


Рис. 10.19. Преобразование сдвига полюсов вида (10.40):  
 а — для системы с передаточной функцией  $G(s)$  и нелинейностью  $f$ , расположенной в секторе  $(u/e) \in [a, b]$  ( $0 < a < b < \infty$ ); б — блок-схема системы, полученной в результате преобразования (10.40)

Преобразование (10.41) переводит указанную область Попова во внутренность круга с центром в начале координат и радиусом  $\frac{2}{b-a}$  на плоскости  $G_k(j\omega)$ <sup>1)</sup>, что иллюстрируется на рис. 10.19, б. Следовательно, всякая окружность радиуса  $|G_k(j\omega)|$  преобразуется в окружность на плоскости  $G(j\omega)$ . Это преобразование аналогично тому, которое устанавливает связь между частотными характеристиками замкнутой и разомкнутой систем и может быть определено через номограмму замыкания.

<sup>1)</sup> Этот результат приводит к следующей теореме (упражнение 10.5).

Основная система с обратной связью (см. рис. 10.1) с зависящим от времени коэффициентом усиления  $u = k(t)e$  и устойчивым выходом линейного элемента характеризуется абсолютно асимптотически устойчивым управлением и выходным сигналом для  $k(t) < K$ , т. е. для  $(u/e) \in [-K, K]$ , если  $K |G(j\omega)| < 1$ .

Эта теорема близка к теореме, доказанной Д. Бонжорно [24] несколько иным способом.

Номограммой замыкания будем называть диаграмму, на которой в координатах  $20 \log |z|$  (дБ) и  $\arg z$  (град), где  $z$  — исходная переменная, изображаются кривые постоянной амплитуды  $\frac{z}{1+z}$  и фазы  $\arg \frac{z}{1+z}$ . Нас интересуют лишь кривые постоянной амплитуды  $\left| \frac{z}{1+z} \right|$ . Таким образом, задача заключается в том, чтобы изобразить кривые  $|G_k(j\omega)| = \frac{2}{b-a}$  в функции исходной передаточной функции  $G(j\omega)$ .

Согласно соотношению (10.41) можно получить кривые

$$\left| \frac{G(j\omega)}{1 + \frac{a+b}{2} G(j\omega)} \right| = \frac{2}{b-a}$$

или

$$\left| \frac{\frac{a+b}{2} G(j\omega)}{1 + \frac{a+b}{2} G(j\omega)} \right| = \left| \frac{b+a}{b-a} \right|. \quad (10.44)$$

Используя уравнение (10.44), можно построить критические окружности и, следовательно, границы области Попова, а с помощью номограмм замыкания — кривые постоянных амплитуд  $\left| \frac{b+a}{b-a} \right|$  в функции амплитуды и фазы переменной  $\frac{a+b}{2} G(j\omega)$ . Эти кривые построены на рис. 10.20. Кривые постоянных значений  $\left| \frac{b+a}{b-a} \right|$ , выраженные в децибелах, соответствуют кривым постоянного усиления замкнутой системы на номограмме замыкания.

Круговой критерий теоремы 10.4 будет выполняться для заданных значений  $a$  и  $b$  и  $q = 0$ , если годограф  $\frac{a+b}{2} G(j\omega)$  лежит вне области, ограниченной кривой постоянного уровня  $20 \log \left| \frac{b+a}{b-a} \right|$ . Справедливо и обратное утверждение, показывающее, что значения  $a$  и  $b$ , которые соответствуют максимуму  $20 \log \left| \frac{b+a}{b-a} \right|$  и для которых эти кривые касаются годографа  $\frac{a+b}{2} G(j\omega)$ , определяют границы сектора Попова  $(u/e) \in [a, b]$  для данной задачи. Последнее утверждение чрезвычайно полезно использовать при отыскании допустимых секторов Попова. Покажем это на примере.

**Пример 10.3.** Проанализируем асимптотическое поведение линейной нестационарной системы, описываемой уравнением

$$\ddot{e}(t) + 2\dot{e}(t) + (c - 3 - d \cos \omega_0 t) e(t) = 0. \quad (10.45)$$

Это уравнение является уравнением Матье\* с демпфирующим членом. Для его исследования методами данной главы составим по уравнению (10.45) структурную схему (см. рис. 10.21), где

$$(u/e) \in [a, b] = [c - d, c + d]; \quad G(p) = \frac{1}{(p-1)(p+3)}.$$

Линейный элемент характеризуется устойчивым выходом, только при охвате его отрицательной обратной связью с коэффициентом  $h > 3$ . Таким образом, для выполнения круго-

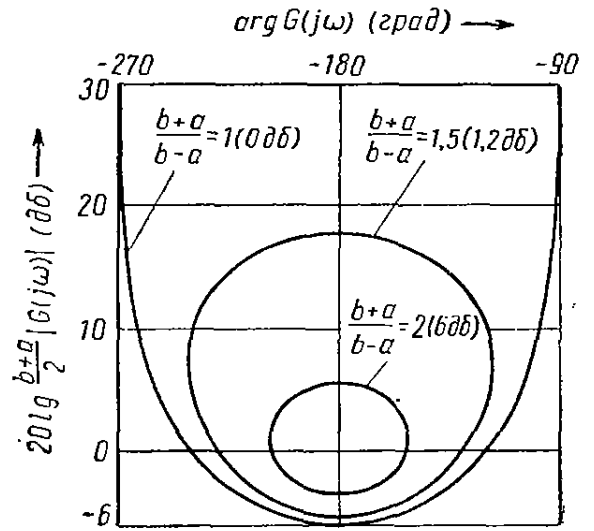
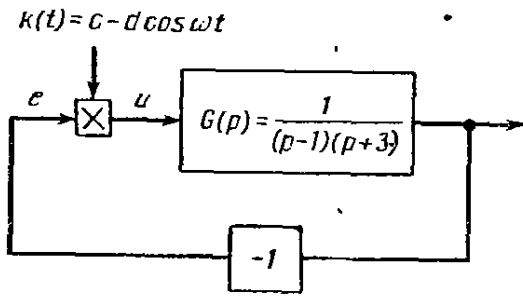


Рис. 10.20. Номограмма, определяющая зависимость  $20 \lg \frac{b+a}{b-a}$  от  $\frac{b+a}{2} G(j\omega)$

\* См. работу [137].

вого критерия (теорема 10.4) необходимо, чтобы секторы Попова  $(u/e) \in [a, b]$  имели  $a = c - d > 3$  (9,5 дб).

На рис. 10.22 изображена номограмма замыкания с кривыми постоянного усиления замкнутой системы  $20 \lg \left| \frac{z}{1+z} \right|$ . Здесь же показаны годографы  $G(j\omega)$  и  $\frac{a+b}{2} G(j\omega)$



при значениях  $\frac{a+b}{2} = 7,08$  (17 дб) и  $\frac{a+b}{2} = 28$  (29 дб). Выполнение условий кругового критерия (теорема 10.4) для  $q = 0$  определяется построением критических окружностей (см. рис. 10.10), которые здесь определяются условием  $20 \lg \left| \frac{z}{1+z} \right| = 20 \lg \left| \frac{b+a}{b-a} \right|$ . Для каждого годографа  $\frac{a+b}{2} G(j\omega)$  находим кривые

максимального значения  $20 \lg \left| \frac{b+a}{b-a} \right|$ , которые касаются соответствующего годографа. Для годографа  $7,08G(j\omega)$  —  $20 \lg \left| \frac{b+a}{b-a} \right| = 5,9$  дб, или  $\left| \frac{b+a}{b-a} \right| = 1,97$ ; для годографа  $28G(j\omega)$   $20 \lg \left| \frac{b+a}{b-a} \right| = 9$  дб и  $\left| \frac{b+a}{b-a} \right| = 2,82$ .

Рис. 10.21. Система с переменными параметрами, соответствующая уравнению Матье (10.45)

Обратимся теперь к первому годографу  $7,08G(j\omega)$ . Для этого годографа  $\frac{a+b}{2} = 7,08$   $\left| \frac{b+a}{b-a} \right| = 1,97$ . Решая совместно эти два уравнения, получим  $a = 3,5$  и  $b = 10,7$ . Следова-

тельно, сектор Попова для годографа  $7,08G(j\omega)$  равен  $(u/e) \in (3,5; 10,7)$ . Аналогично определим, что сектор Попова для  $28G(j\omega)$  равен  $(u/e) \in (18; 38)$ .

Перемещая годограф  $G(j\omega)$  (см. рис. 10.22) в вертикальном направлении, отыщем область возможных секторов Попова, как это показано на рис. 10.23. Область существования абсолютно асимптотически устойчивых управления и выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha = 0,5 \text{ сек}^{-1}$  также показана на рис. 10.23. Эта область получена совершенно аналогично, лишь согласно теореме (10.3) вместо передаточной функции  $G(j\omega)$  используется передаточная функция  $G(j\omega - 0,5)$  (упражнение 10.6).

2. Случай, когда  $q \neq 0$ . До сих пор критерий Попова исполь-

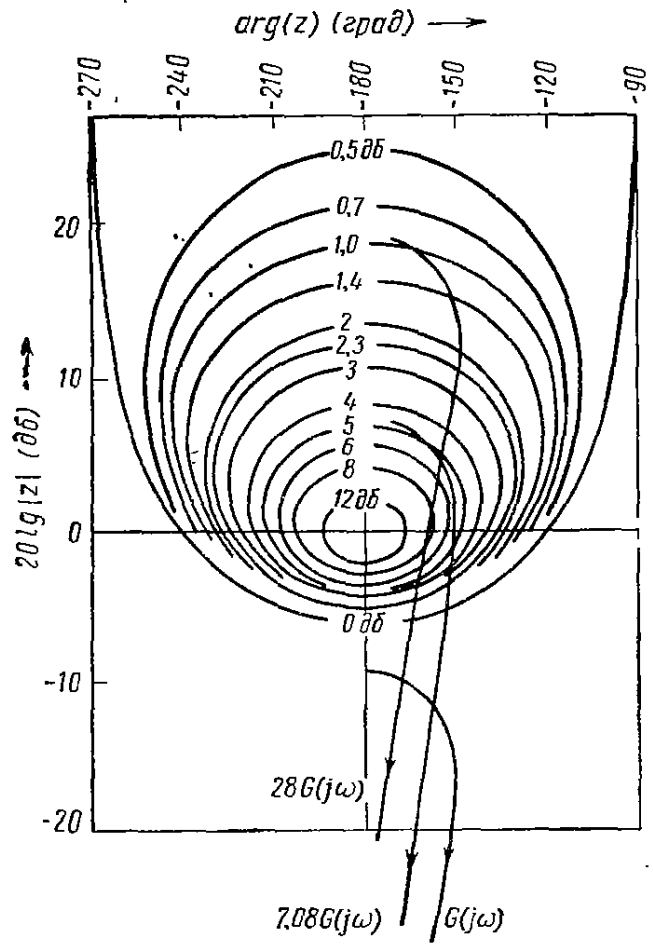


Рис. 10.22. Часть номограммы замыкания, на которой показаны кривые постоянного значения  $20 \lg \left| \frac{1}{1+z} \right|$  в функции  $20 \lg |z|$  и  $\arg z$

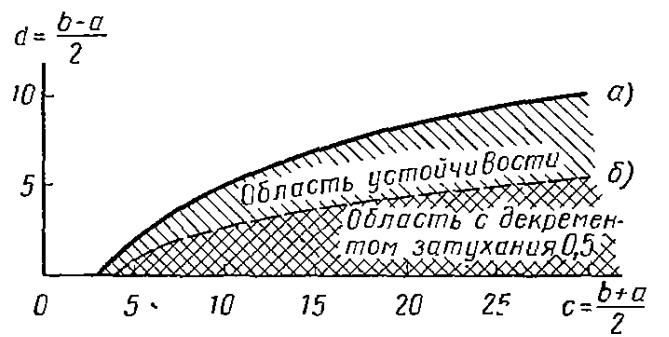


Рис. 10.23. Область асимптотически устойчивого выходного сигнала и управления ограничена кривой а; область с теми же асимптотическими свойствами, но со степенью сходимости  $\alpha = 0,5 \text{ сек}^{-1}$  ограничена кривой б

зовался для анализа систем, у которых  $(u/e) \in [a, b]$  и  $q = 0$ . Перейдем к анализу систем, для которых  $(u/e) \in [0, K]$  и  $q$  — произвольное число, и покажем, что при этом целесообразно строить годографы  $KG(j\omega)$  в координатах  $[20 \lg KG(j\omega), \arg G(j\omega)]$ . Преобразование прямых Попова с пло-

скости  $G(j\omega)$  на плоскость с координатами  $[G(j\omega)|\text{дб}, \arg G(j\omega)]$  иллюстрируется на рис. 10.24. Покажем, как можно построить это отображение, воспользовавшись номограммой замыкания.

В § 10.3 было показано, что условие Попова (10.20) определяет прямые Попова, показанные на рис. 10.4, а. Сначала рассмотрим случай  $q = 0$ . Поскольку рассматривается сектор  $(u/e) \in [0, K]$ , то для применения кругового критерия необходимо считать  $a = 0$ ,  $b = K$ . Прямая Попова соответствует предельной кривой при  $\frac{b+a}{b-a} = \frac{K}{K} = 1$  или 0 дб. Ординаты на номограмме рис. 10.20 становятся равными  $20 \lg \frac{K}{2} |G(j\omega)| = 20 \lg |KG(j\omega)| - 6 \text{ дб}$ . Поскольку мы стремимся вести построение в координатах  $[20 \lg |KG(j\omega)|, \arg G(j\omega)]$ , то для получения граничной линии Попова в этих координатах нам достаточно поднять на 6 дб кривую с параметром  $\frac{b+a}{b-a} = 0 \text{ дб}$ . Полученная таким образом кривая изображена на рис. 10.24, б<sup>1)</sup>.

Отображение прямой Попова для случая  $\omega q \neq 0$  показано на рис. 10.24, в и г. В соответствии с рис. 10.24, в уравнение прямой Попова в функции комплексной переменной  $z = |z|e^{j\theta}$  (где  $z$  — текущая точка на прямой) можно определить через параметр  $\text{tg } \theta_q \stackrel{\Delta}{=} \omega q$  следующим условием:  $\cos \theta_q = |z| \cos(\theta - \theta_q)$ , где  $\text{tg } \theta_q \stackrel{\Delta}{=} \omega q$ : или по-другому

$$|z| = |z(\theta, q\omega)| = \frac{\cos \theta_q}{\cos(\theta - \theta_q)}; \quad \text{tg } \omega q = \theta_q, \quad (10.46)$$

откуда получим

$$|z(\theta, q\omega)| = \frac{|z(\theta - \theta_q, 0)|}{|z(\theta_q, 0)|},$$

или

$$20 \lg |z(\theta, q\omega)| = 20 \lg |z(\theta - \theta_q, 0)| - 20 \lg |z(\theta_q, 0)|. \quad (10.47)$$

Итак, граничная кривая для  $\omega q \neq 0$  может быть получена в результате вертикального смещения граничной кривой при  $q = 0$  на  $20 \lg |z(\theta, 0)|$  и горизонтального смещения на угол  $\theta_q = \text{arctg } \omega q \text{ град}$  (рис. 10.24, г). Заметим, что таким образом можно построить семейство граничных кривых для различных значений параметра  $\omega q$ ; при этом все кривые проходят через точку  $(-180^\circ, 0 \text{ дб})$ . Семейство кривых показано на рис. 10.25 и является отображением прямых Попова (рис. 10.4, б).

Правило применения рис. 10.25 заключается в том, что для частотной характеристики  $G(j\omega)$  условие Попова (10.19) теоремы 10.1 выполняется, если существует такое действительное  $q$ , что для всех  $\omega$  годограф  $G(j\omega)$  расположен ниже граничной кривой, соответствующей  $\omega q$ <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Метод, использующий граничную кривую для оценки условия Попова при  $q = 0$ , был предложен Б. Н. Наумовым [145]. Он предусматривает построение семейства амплитудно-фазовых характеристик

$$G_q(j\omega, q) \stackrel{\Delta}{=} (1 + j\omega q) G(j\omega)$$

и проверку условия, располагаются ли они вне области, ограниченной предельной кривой (рис. 10.24, б). Следует заметить, что метод Б. Н. Наумова требует более тщательных построений, чем методы, описанные ниже. Метод, аналогичный методу Б. Н. Наумова, был предложен Марфи [144].

<sup>2)</sup> Если требуется установить существование асимптотически устойчивого управления или асимптотически устойчивого выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$ , то в соответствии с теоремой 10.3 вместо функции  $G(j\omega)$  следует рассматривать функцию  $G(j\omega - \alpha)$ .

Пример 10.14. Для системы, изображенной на рис. 10.1, с однозначной нелинейностью  $u = f(e)$  и операторной функцией линейной части

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)(p+5)}$$

определить максимально возможное значение  $K$  такое, что  $(u/e) \in (0, K)$  и при этом для системы существуют асимптотическое управление и асимптотически устойчивый выходной сигнал. Эта система подобна рассмотренной в примере 10.8 и отличается лишь коэффициентом передачи. На рис. 10.26 дано семейство граничных кривых, показанных также и на рис. 10.25;

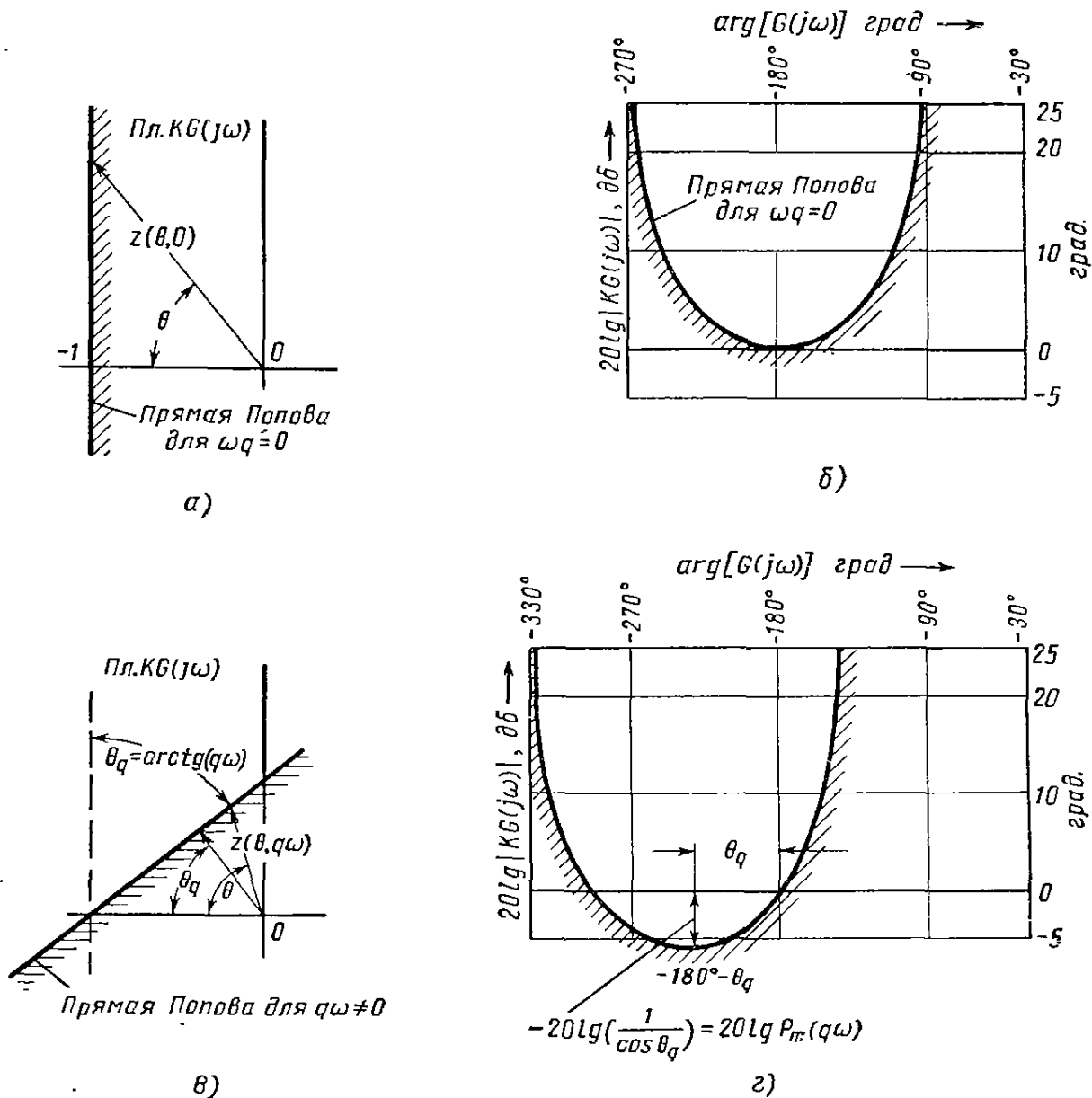


Рис. 10.24. Отображение прямых Попова с плоскости  $G(j\omega)$  на плоскость с координатами  $\{20 \lg |KG(j\omega)|, \arg G(j\omega)\}$ :

$a$  — в полярных координатах на пл.  $KG(j\omega)$  при  $\omega q=0$  (как на рис. 10.4);  $b$  — отображение прямой рис. 10.24,  $a$  при  $\omega q=0$ ;  $c$  — в полярных координатах на плоскости  $KG(j\omega)$  при  $\omega q \neq 0$ ;  $d$  — отображение прямой рис. 10.24,  $c$  при  $\omega q \neq 0$

здесь же нанесен годограф  $G(j\omega)$ . Сдвигая годограф  $G(j\omega)$  в вертикальном направлении, определим соответствующие значения  $20 \lg K = 9,5 \text{ дБ}$  или  $K = 3,0$  и  $q = 1,2$ , при которых все точки годографа

$$20 \lg |KG(j\omega)| = 20 \lg |G(j\omega)| + 9,5 \text{ дБ}$$

лежат ниже граничных кривых Попова  $1,2\omega$  при всех значениях  $\omega$ <sup>1)</sup>. Таким образом, для коэффициента  $K = 9,5 \text{ дБ} = 3,0$  условие Попова выполняется. Как и следовало ожидать, полученный результат аналогичен результату примера 10,8, когда для анализа использовался годограф модифицированной частотной характеристики  $G^*(j\omega)$ .

<sup>1)</sup> Истинное значение  $q = 1,2$  определяется методом последовательных приближений, но можно воспользоваться плоскостью  $KG^*(j\omega)$  для непосредственного отыскания  $q$ . Этот способ рассмотрен ниже.

Из рис. 10.25 следует, что с ростом частоты  $\omega$  граничные кривые Попова смещаются вниз. Можно также установить, что годограф  $G(j\omega)$ , как правило, убывает еще быстрее с ростом  $\omega$ .

В соответствии с рис. 10.24,  $\Delta$  минимальное расстояние до прямой Попова равно

$$P_m(q\omega) = \cos \theta_q. \quad (10.48)$$

Поскольку  $\cos \theta_q = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_q}}$ , то согласно выражению (10.46) и (10.48) имеем

$$P_m(q\omega) = \frac{1}{\sqrt{(q\omega)^2 + 1}}. \quad (10.49)$$

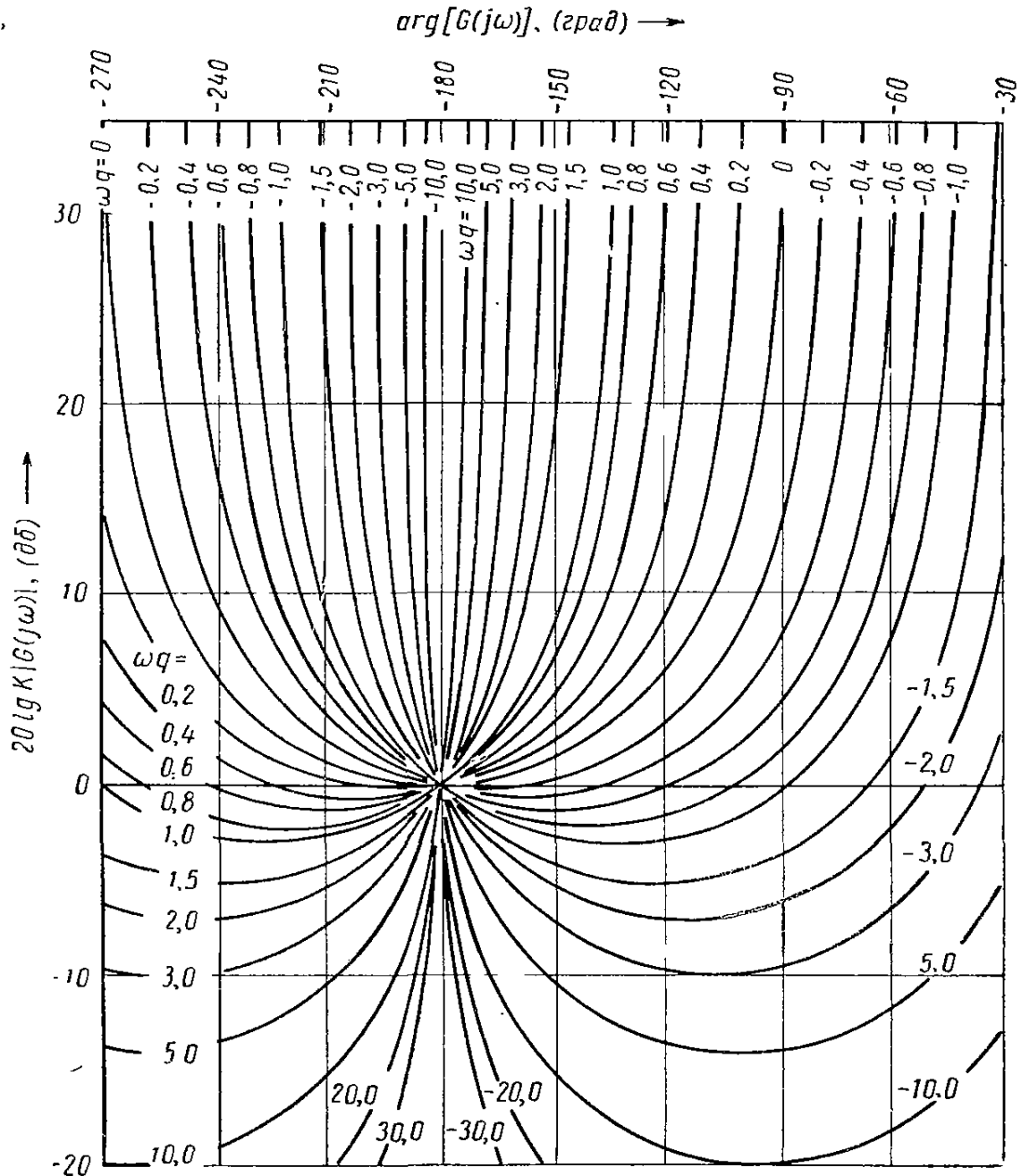


Рис. 10.25. Граничные кривые Попова в логарифмическом масштабе

Если для некоторого значения  $q\omega$ ,  $|G(\omega)| < P_m(q\omega)$ , то ясно, что весь годограф лежит ниже этой граничной кривой. Из формулы (10.47) следует, что минимальное расстояние  $P_m$  уменьшается с ростом частоты пропорционально ее первой степени. Поскольку на практике убывание  $|G(j\omega)|$  пропорционально первой степени или выше нее и если годограф  $G(j\omega)$  расположен ниже минимальных значений критических кривых в некотором диапазоне  $\omega$ , то взаимное расположение остается неизменным и для всех других значений  $\omega$ .

Годограф кривой  $3G(j\omega)$  на рис. 10.26 всегда расположен ниже граничных кривых Попова при  $q = 1,2$ . Для того чтобы убедиться, что это утверждение верно и для области, не показанной на чертеже, заметим, что при  $\omega = 5$  соответствующая точка годографа  $3G(j\omega)$  расположена ниже минимального значения кривой Попова  $q\omega = 1,2 \times 5 = 6$ . Поскольку для данного



примера  $|G(j\omega)|$  уменьшается, как  $1/\omega^3$ , с ростом  $\omega$ , то ясно, что и при  $\omega > 5$  годограф располагается ниже минимальных значений соответствующих кривых Попова. Следовательно, условие Попова выполняется для всех  $\omega \geq 0$ .

Как и раньше, проверку условия Попова можно упростить, если использовать плоскость  $KG^*(j\omega)$ . В соответствии с рис. 10.24,  $v$  и  $z$  кривые на рис. 10.25 представлены в виде прямых Попова, показанных на рис. 10.4. Поэтому прямые Попова, изображенные на плоскости  $G^*(j\omega)$

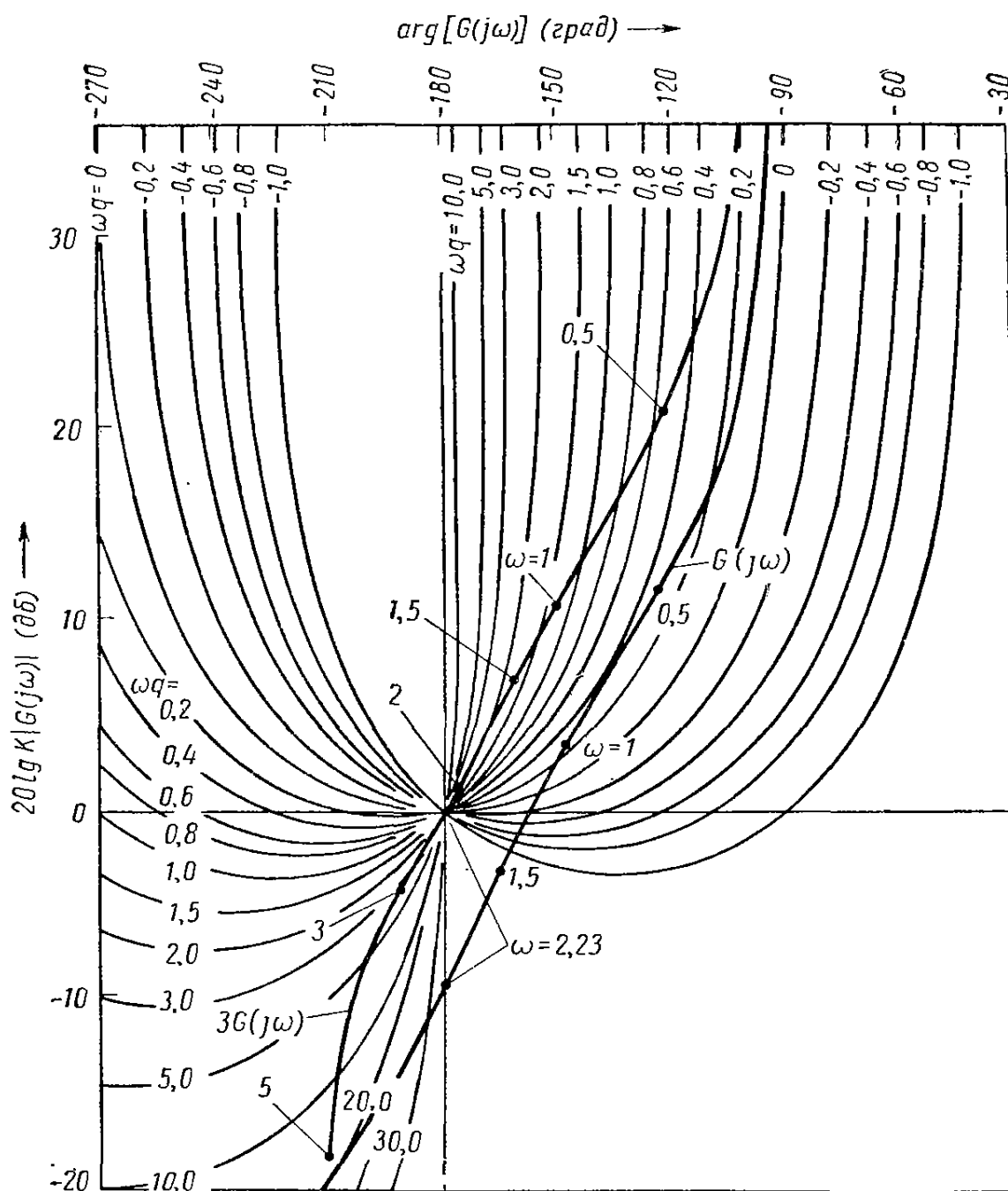


Рис. 10.26. Проверка условия Попова для системы из примера 10.14, позволяющая определить сектор Попова  $(u/e) \in (0,3)$  такой, что при  $K = 3$  и  $q = 1,2$  годограф  $3G(j\omega)$  расположен ниже граничных кривых Попова вида  $1,2\omega$  для всех  $\omega$

(см. рис. 10.5), на плоскости с координатами  $[\arg G^*(j\omega), 20 \lg KG^*(j\omega)]$  идентичны кривым рис. 10.25, где параметр  $\omega q$  следует заменить на  $q$ .

Как только годограф  $KG^*(j\omega)$  построен, можно сразу определить, ниже какой граничной кривой Попова, определяемой значением  $q$ , он расположен. Таким образом, в этом случае нет необходимости применять метод последовательных приближений. Кроме того, дополнительная работа, необходимая для проверки условия Попова на плоскости  $G(j\omega)$ , не столь уж значительна и оказывается целиком оправданной при синтезе коорректирующего устройства (упражнение 10.13). Как было отмечено в начале этого параграфа, подобный синтез провести на плоскости  $KG^*(j\omega)$  оказывается затруднительным из-за соотношений (10.39).

Метод, предложенный В. М. Поповым для анализа абсолютной устойчивости, дает достаточные условия для устойчивости замкнутых систем, имеющих вид, показанный на рис. 10.1 при отсутствии входного сигнала. Основное достоинство этого метода заключается в том, что для его применения достаточно знать лишь частотные характеристики линейной части, а поэтому он пригоден для анализа систем высокого порядка.

Ограничения, которые приходится наложить на характеристики линейного и нелинейного элементов, рассматриваются в § 10.1. При этом нелинейность может обладать характеристиками типа пассивного или активного гистерезиса и (или) быть нестационарной, но существенно, что она должна принадлежать сектору, определяемому соотношениями (10.2). Линейный элемент должен иметь устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\alpha$  (см. определение 10.3). Указанное требование ограничивает множество рассматриваемых линейных элементов, но в некоторых случаях оно может быть ослаблено (см. теорему 10.6). Предлагаемый метод позволяет анализировать системы с распределенными параметрами и запаздыванием.

Важными являются определение 10.4 понятия абсолютной асимптотической устойчивости выходной координаты и сигнала управления. Указанные свойства несколько слабее требования абсолютной устойчивости, которое выполняется лишь при дополнительных условиях (теорема 10.2).

Фундаментальное значение имеет теорема 10.1. Основное неравенство (10.19), определяемое через передаточную функцию линейной части  $G(j\omega)$ , и некоторое действительное число  $q$  составляют существо этой теоремы. Для нестационарных нелинейностей это неравенство при  $q = 0$  позволяет дать простую геометрическую интерпретацию, в которой используются частотные годографы линейной части. Если же рассматриваются нелинейности при  $q \neq 0$ , то графическую проверку условий устойчивости целесообразнее осуществлять с применением модифицированной частотной характеристики линейной части  $G^*(j\omega)$  [уравнение (10.21), (10.22), см. также рис. 10.5].

Класс систем, поддающихся анализу, можно расширить, если воспользоваться преобразованием, связанным со сдвигом полюсов передаточной функции линейной части системы; в этом случае появляется возможность проанализировать объекты, обладающие неустойчивостью. Кроме этого, такие системы можно анализировать, используя обобщенный круговой критерий [теорема 10.4 и условие (10.3в)]. Последний способ особенно удобен при анализе систем с нестационарной нелинейной характеристикой, когда  $q = 0$ .

Дополнительные возможности, расширяющие применимость метода, дает преобразование, связанное со сдвигом нулей, оно позволяет снять некоторые ограничения, которым должен удовлетворять линейный элемент. Сущность этого приема содержится в теореме 10.6.

Все критерии, представленные в этой главе, можно без труда распространить на определение степени устойчивости системы. Такая возможность выявляется теоремой 10.3, которая обосновывает применение теоремы 10.1 и всех вытекающих из нее предложений для определения асимптотически устойчивого управления с коэффициентом затухания  $\alpha$ .

Возможность применения логарифмических частотных характеристик рассмотрена в § 10.8. При этом показано, как можно для анализа устойчивости использовать номограммы замыкания; круговой критерий для  $q \neq 0$  непосредственно определяет соответствующие граничные кривые. Когда же  $q \neq 0$ , то и в этом случае оказывается возможным построить семейство

граничных кривых и примените усложнение (10.19) для анализа устойчивости по известной частотной характеристике  $G(j\omega)$ . Соответствующая диаграмма изображена на рис. 10.24, а пример 10.14 полностью иллюстрирует данный метод.

## 10.10. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

10.1 (Фитце). Проанализируйте систему, структурная схема которой показана на рис. 10.1, если объект описывается следующей операторной функцией:

$$G(p) = \frac{p^2}{[(p + 0,1)^2 + 0,9^2][(p + 0,1)^2 + 1,1^2]};$$

а) определите сектор Попова, если в систему включен стационарный нелинейный элемент с однозначной характеристикой. Заметим, что эта система удовлетворяет как гипотезе Калмана, так и гипотезе Айзермана в секторе  $u/e \in [0, \infty]$  (упражнение 7.3);

б) определите сектор Попова в случае нестационарного нелинейного элемента.

10.2. Покажите справедливость соотношений (10.30) и (10.31).

10.3. Линейный элемент описывается передаточной функцией  $G(s)$  и реакцией на начальные условия  $-e_0(t) = -\mathcal{L}^{-1}[E_0(s)]$ . Покажите, что если  $G(s)$  и  $E_0(s)$  — рациональные функции переменной  $s$  и при этом все полюсы расположены в области  $\text{Re } s < -\alpha$ , то линейный элемент имеет устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\alpha$  [т. е. выполняются условия (10.9)].

10.4. В примере 10.6 к исходной системе применяется преобразование сдвига полюсов; при этом передаточная функция линейной части видоизменяется в соответствии с соотношением (10.35). Покажите, что для стационарной и однозначной нелинейности или нелинейности с активным гистерезисом сектор Попова определяется как  $(u_a/e) \in [0, 30 - 2\varepsilon]$ , где  $0 < \varepsilon \leq 15$ .

10.5. Покажите, что преобразование (10.41) переводит внешность круга на рис. 10.19, а во внутренность круга рис. 10.19, б. После этого завершить доказательство теоремы Бонжорно, сформулированной в сноске на стр. 292.

10.6. Получите области устойчивости, изображенные на рис. 10.23. Линейная часть системы описывается уравнением Матье (10.45).

1) На плоскости параметров  $d = \frac{b-a}{2}$ ;  $c = \frac{b+a}{2}$  постройте область допустимых секторов Попова таких, что в системе  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

2) Выделите внутри этой области подобласть, для которой  $e^{0,5t} e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

10.7. Линейный элемент описывается стационарным уравнением  $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ ;  $e(t) = c^T x(t)$ . Собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$  удовлетворяют неравенству  $\text{Re } \lambda_i < \alpha$ ;

а) покажите, что линейная часть имеет устойчивый выход с коэффициентом затухания  $\alpha$ ;

б) покажите, что реакция на начальные условия удовлетворяет неравенству  $|e_0(t)| \leq M_0 \exp(-\alpha t)$ , где константа  $M_0$  зависит от начальных условий;

в) покажите, что импульсная переходная функция линейного элемента удовлетворяет условию  $|g(t)| \leq M_0 \exp(-\alpha t)$  (у к а з а н и е: при этом необходимо воспользоваться теоремой 5.7 задачи 5.13).

10.8. Покажите, что система из задачи 5.20 не имеет устойчивого выхода. Можно ли обеспечить ее устойчивость при охвате линейного элемента обратной связью?

10.9. Допустим, что линейный элемент основной системы на рис. 10.1 характеризуется чистым запаздыванием и имеет передаточную функцию  $G(s) = e^{-\tau s}$  и

$$-e_0(t) = \begin{cases} e_1(t - \tau) & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

где  $e_1(t)$  — заданная функция;

а) покажите, что линейный элемент не имеет устойчивого выходного сигнала;

б) повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 10.6, покажите, что для передаточной функции  $G(s) = e^{-\tau s}$  условия теоремы 10.1 и всех теорем, вытекающих из нее, могут быть ослаблены;

в) с учетом пункта б) определите сектор Попова  $u/e$  для обобщенной нелинейности  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$ , внутри которого управление и выходной сигнал системы абсолютно асимптотически устойчивы с коэффициентом затухания  $\alpha$ .

10.10. Рассмотрите систему непрямого управления с запаздыванием, описываемую уравнениями

$$\dot{e}(t) = -u(t - \tau) - hu(t); \quad u(t) = \mathcal{F}[e(t), t] \quad \text{и} \quad \tau = 2 \text{ сек};$$

а) рассмотрите нестационарный нелинейный элемент и определите величину  $K$ , определяющую сектор Попова  $u/e \in [0, K]$ , внутри которого управляющий и выходной сигналы абсолютно асимптотически устойчивы. Зависит ли  $K$  от параметра  $h$ ? Поясните это;

б) если нелинейность стационарна и однозначна и  $(u/e) \in (0, \infty)$  [условие (10.3) при этом выполняется], то какова область допустимых значений  $h$ , при которых справедливо условие асимптотической устойчивости сигнала управления и выходного сигнала;

в) для обобщенной нестационарной нелинейности и  $h = 1$  определите в плоскости параметров  $a$  и  $b$  — область всех допустимых секторов  $(u/e) \in [a, b]$ , в которых выполняется свойство абсолютной асимптотической устойчивости сигнала управления и выходного сигнала.

10.11. Для каждого неустойчивого объекта из упражнения 3.16:

а) получите импульсную переходную функцию  $g(t)$  и реакцию на начальные условия  $y_0(t)$ ;

б) проверьте, является ли выходной сигнал объекта устойчивым;

в) определите степень устойчивости  $\alpha$ .

10.12. Определите модифицированные частотные характеристики  $G^*(j\omega)$  для следующих линейных объектов:

$$а) G(p) = \frac{10}{(p+2)(p+5)};$$

$$б) G(p) = \frac{10}{(p-2)(p+5)};$$

$$в) G(p) = \frac{p^2 - 0,5}{(p^2 + 1)(p + 1)};$$

$$г) G(p) = \frac{10}{p(p^2 + p + 100)}.$$

Выделите среди них те, для которых угол Гурвица совпадает с сектором Попова.

10.13. Рассмотрите систему примера 10.14, включив в ее контур фазопережающую цепь вида

$$G_c(p) = \frac{1 + p/4}{1 + p/8}.$$

Используя логарифмический годограф  $G(j\omega)G_c(j\omega)$ , определите границу  $K$  сектора Попова  $(u/e) \in (0, K)$ , в котором для системы выполняется свойство асимптотической устойчивости управляющего и выходного сигналов.

10.14. Температура нагретого стержня, закрепленного одним концом и имеющего бесконечную длину, измеряется на некотором расстоянии  $x$  от места закрепления и служит для определения температуры в точке закрепления стержня ( $x = 0$ ). Распределение температуры по длине стержня описывается уравнением с распределенными параметрами, аналогичным рассмотренному в примере 3.16 § 3.9.

Такую систему можно представить структурной схемой рис. 10.1, где  $g(t) = g(x, t)$  и  $e_0(t) = -v_0(x, t)$  определяются из уравнений (3.64) и (3.65). К тому же  $u(t) = v(0, t)$ , где  $v(x, t)$  — переменная, которая служит для описания элемента с распределенными параметрами по уравнениям (3.62) и (3.63). Можно показать, что линейная часть с передаточной функцией  $G(s) = G(x, s) = e^{-x\sqrt{s}}$  [уравнение (3.66)] имеет устойчивый выход.

Определить сектор Попова  $u/e$ , гарантирующий асимптотическую устойчивость по управляющему и выходному сигналам:

1) для случая обобщенной нелинейности;

2) для случая однозначной нелинейности.

**З а м е ч а н и е.** Для того чтобы выполнялись условия (10.9) для сигнала  $e_0(t) = -v_0(x, t)$  при  $\alpha = 0$ , необходимо предположить, что первоначальная тепловая энергия, запасенная стержнем, ограничена. Это условие выполнится, если  $|v(x, 0)| \leq V < \infty$  для всех  $x: 0 \leq x \leq L < \infty$  и  $v(x, 0) = 0$  при всех  $x > L$ . Проверка условий (10.9) для данной системы не является тривиальной.

10.15. Допустим, что осуществляется регулирование линейного элемента, описанного в упражнении 10.14, в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 6.31. При этом  $x = 2,3$  и  $G(s) = e^{-2,3\sqrt{s}}$ ;

а) при  $R = 0$  найти область допустимых коэффициентов усиления  $K$ , обеспечивающих асимптотическую устойчивость сигнала управления  $u(t)$ . Сравните полученный результат с результатами упражнения 6.9 [см. пункт в)] и замечания (у к а з а н и е: при этом необходимо воспользоваться результатами примера 10.14);

б) покажите, что выводы пункта а) верны и при  $R \neq 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Система может быть асимптотически устойчива по сигналу управления  $u(t)$  и по переменной  $e(t)$ , но не обладать свойством асимптотической устойчивости по выходному сигналу объекта  $y(t)$ .

10.16. Известно [147], что при

$$G(p) = \frac{p^2}{(p+a)(p^2+bp+c)}; [a, b, c > 0$$

и при  $u = f(e)$  выходной сигнал асимптотически устойчив в секторе  $u/e \in [0, \infty]$ ;

а) покажите, что указанный результат нельзя получить непосредственно из теоремы 10.1;

б) укажите теорему, используя которую, можно получить нужный результат.

10.17. Для сектора  $(u/e) \in [a, b]$  и  $q \neq 0$  можно получить границы устойчивости на плоскости  $G^*(j\omega)$ , не зависящие от частоты [17];

а) покажите, что следующее неравенство можно получить непосредственно из условия (10.36):

$$(X^*)^2 + \frac{a+b}{ab} X^* + \frac{1}{ab} - \frac{b-a}{ab} qY^* + \left(\frac{Y^*}{\omega}\right)^2 \begin{cases} > 0, & \frac{1}{a} > \frac{1}{b}; \\ < 0, & \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \end{cases}$$

где  $X^* = \operatorname{Re} G^*(j\omega)$ ;  $Y^* = \operatorname{Im} G^*(j\omega)$ .

Из последнего неравенства следует, что выполнение условий

$$(X^*)^2 + \frac{a+b}{ab} X^* + \frac{1}{ab} - \frac{b-a}{ab} qY^* > 0; \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad (10.50)$$

достаточно для того, чтобы выполнялся обобщенный круговой критерий (10.36);

б) для системы (см. рис. 10.1) с линейной частью, удовлетворяющей выражению (10.32), и со стационарной нелинейностью определить наибольший сектор  $u/e$ , в котором гарантируется абсолютная асимптотическая устойчивость управляющего и выходного сигналов по параболическому критерию (10.50). Сравните полученный результат с результатами примеров 10.6, 10.8 и 10.9;

в) оцените достоинство критерия (10.50).

10.18. Докажите следствие 10.1 (стр. 282) и примените его к решению упражнения 10.10.

## 10.11. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Метод Попова в приложении к анализу абсолютной устойчивости рассматривается в работах [1], [67] и [122]. В первой из них дается также обширная библиография трудов до 1963 г. Обзор последних изданий по вопросам устойчивости выполнен и в работе [26].

Оригинальные результаты Попова были опубликованы в статье [163]. В серии последующих статей (см. библиографию в работе [1]) Попов рассмотрел системы с несколькими нелинейностями, которые могут содержать и гистерезисные характеристики определенного вида (см. [202]). Им был также исследован вопрос связи существования частотного критерия и функции Ляпунова. Позднее эта связь была глубже раскрыта в работах [205] и [93]. В работе [93] Калман указывает, что для систем непрямого управления критерий Попова есть необходимое и достаточное условие существования функции Ляпунова в виде квадратичной формы от переменных состояния и интеграла от рассматриваемой нелинейной характеристики. Эти результаты всесторонне рассматриваются в работе [122].

Обширные публикации в этой области в основном отражают два направления: первое — анализ абсолютной устойчивости и второе — исследование асимптотического поведения управляющего сигнала и выходной переменной системы. Первоначальное доказательство Поповым свойства абсолютной устойчивости [1], [122], [163] и в дальнейшем было использовано для оценки асимптотического поведения выходного сигнала. Соответствующие теоремы можно найти в работах [41] и [178].

Круговой критерий (для  $q = 0$ ) был впервые сформулирован в работе [24] для определенного класса систем. Более общая формулировка этого

критерия дана в работе [174]. Без доказательства критерий сформулирован и в работе [208]. Позднейшие исследования в этом направлении приведены в работах [177] и [207].

Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики использовались в работах [142], [144], [145] и [146]. В работе [145] критерий Попова используется для анализа степени устойчивости (см. § 10.5 настоящей главы).

В работах [27], [43] и [204] критерий Попова распространяется на случай, когда нелинейная характеристика определяется условием

$$b \leq \frac{df(e)}{de} \leq b.$$

Другие подходы к анализу устойчивости, основанные на частотном критерии, рассмотрены в работах [148] и [165].

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ  
ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В предыдущих главах в основном мы имели дело с устойчивостью систем управления без действия входных сигналов, хотя и стремились показать, что для систем с полностью известными входными сигналами можно говорить об устойчивости системы. Теперь мы рассмотрим некоторые результаты для систем с входными сигналами.

Требование минимальной устойчивости для управляемой системы заключается в том, что выходной сигнал системы ограничен, если ограничены входной сигнал и начальные условия. Такой вид устойчивости называется устойчивостью при ограниченных входном и выходном сигналах и имеет несколько разновидностей.

Простейшим типом устойчивости системы управления при ограниченных входных и выходных сигналах является устойчивость в малом. В русской литературе она известна как практическая устойчивость\*. Это аналог устойчивости по Ляпунову для систем без входных сигналов. Для практических целей этот вид устойчивости вряд ли полезен, так как неизвестны максимальные границы для входного сигнала и начальных условий, в которых гарантируется ограниченность выходного сигнала. Более перспективной является устойчивость при ограниченных входном и выходном сигналах в целом, когда вне зависимости от того, ограничены ли вход и начальные условия, гарантируется, что выход ограничен. Теоремы, охватывающие этот вид устойчивости, существуют только для линейных (хотя и нестационарных) систем и нелинейных систем, изучаемых в теории Попова.

Эффективным математическим средством для анализа устойчивости систем управления при ограниченных входном и выходном сигналах является теория неравенств. Математический аппарат неравенств использовался в некоторой степени и в предыдущей главе книги, а также в приложении III. В настоящей главе вводится новое неравенство — неравенство Беллмана—Гренвилла и применяются другие аналитические методы, использующие неравенства и теорему о неподвижной точке сжатого отображения, что позволяет развить итерационный метод исследования систем с входными сигналами, используя эквивалентные передаточные функции.

---

\* Применяемый авторами книги термин «общая устойчивость» в русской литературе отсутствует. Его применение в английской литературе, по-видимому, объясняется неточностью перевода на английский язык статьи Малкина И. Г. «Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях». «Прикл. матем. и механ.», т. VIII, № 3, 1944, где рассматривается устойчивость при постоянно действующих возмущениях, представляющая собой непосредственное обобщение устойчивости по Ляпунову и «имеющая наибольшее практическое значение» [252]. В дальнейшем И. Г. Малкин именует данный вид устойчивости не как «общую», а как практическую устойчивость. См. [253] (Прим. ред.).

Практическое значение свойства устойчивости при ограниченных входном и выходном сигналах не следует преувеличивать. Тот факт, что выход ограничен, когда ограничен вход, дает инженеру мало информации. Выходная величина физически не может стать бесконечной, но она может быть излишне большой. Во многих случаях выполнение этого вида устойчивости недостаточно; обычно требуется точное знание выходного сигнала.

До сих пор математический аппарат неравенств оставляет желать много лучшего при инженерной оценке поведения реальных систем. Следовательно, применяя эти методы к реальным системам, необходимо проявлять постоянную осмотрительность.

### 11.1. ЛЕММА БЕЛЛМАНА—ГРЕНВИЛЛА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

В гл. 10 был сделан вывод о том, что при исследовании устойчивости и ограниченности решений динамической системы часто удобно наложить некоторые ограничения, которые позволяют превратить интегральное уравнение в интегральное неравенство. Важное правило при работе с интегральными неравенствами, которые верны для нелинейных систем управления с обратной связью и линейной частью, дает следующая известная лемма.

#### Лемма 11.1 (обобщенная лемма Беллмана—Гренвилла) \*

Пусть  $v(t)$  и  $w(t)$  — действительные функции от  $t$  и  $w(t) \geq 0$ , а  $c$  — действительная постоянная.

Если

$$v(t) \leq c + \int_0^t w(\tau) v(\tau) d\tau, \quad (11.1a)$$

то

$$v(t) \leq c \exp \left[ \int_0^t w(\tau) d\tau \right]. \quad (11.1b)$$

Лемма легко доказывается.

Введем две функции  $x(t)$  и  $z(t)$  такие, что

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} c + \int_0^t w(\tau) v(\tau) d\tau; \quad (11.2)$$

$$v(t) \stackrel{\Delta}{=} x(t) - z(t). \quad (11.3)$$

Если неравенство (11.1a) выполняется, то  $z(t) \geq 0$ . Более того, функция  $x(t)$  является непрерывной. Дифференцируя  $x(t)$  и используя уравнение (11.3), получим

$$\dot{x}(t) = w(t) x(t) - w(t) z(t). \quad (11.4)$$

\* См. работу [102]. В первоначальной формулировке леммы (см. работу [14]) требовалось, чтобы  $v(t) \geq 0$  (в настоящей формулировке оно опущено). Лемму 11.1 можно сформулировать в более общей форме. См., например, работы [67] и [179].



Уравнение (11.4) имеет такой вид, что может быть проинтегрировано методом, примененным в примере 3.6, тогда

$$x(t) = x(0) \exp \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] - \exp \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] \int_0^t z(\tau) \omega(\tau) \exp \left[ - \int_0^{\tau} \omega(\mu) d\mu \right] d\tau. \quad (11.5)$$

Так как  $z(t) \geq 0$  и  $\omega(t) \geq 0$ , то

$$x(t) \leq x(0) \exp \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right]. \quad (11.6)$$

Но из определения  $x(t)$  следует, что  $x(0) = c$ .

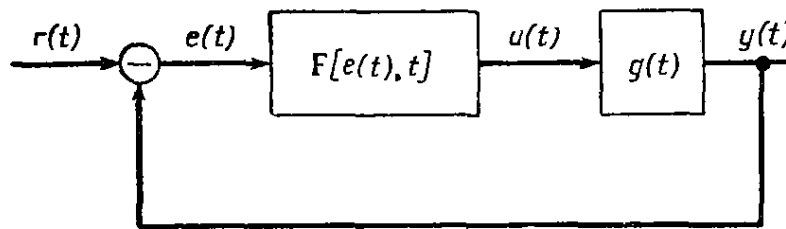


Рис. 11.1. Схема системы управления для доказательства теоремы 11.1

Тогда при  $z(t) \geq 0$  из уравнения (11.3) найдем

$$v(t) = x(t) - z(t) \leq x(t) = c \exp \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right],$$

что доказывает лемму.

При помощи этой леммы мы можем сразу же получить неравенство относительно одноконтурной нелинейной системы с обратной связью, изображенной на рис. 11.1. Система задается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= -e_0(t) + \int_0^t g(t-\tau) u(\tau) d\tau; \\ u(t) &= \mathcal{F}[e(t), t]; \\ u(t) &= r(t) - y(t); \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

это идентично системе уравнений (10.1), за исключением добавленного входного сигнала  $r(t)$ .

**Теорема 11.1.** Рассмотрим систему, приведенную на рис. 11.1. Предположим, что:

1) для линейного элемента начальные условия выбраны так, что удовлетворяются следующие неравенства:

$$|e_0(t)| \leq c_0 e^{-\alpha t}; \quad |g(t)| \leq c_g e^{-\alpha t}, \quad (11.8)$$

где  $c_0$ ,  $c_g$  и  $\alpha$  — константы;

2) для нелинейного элемента существует константа  $K$  такая, что

$$|u(t)| \leq K |e(t)| \quad \text{для любого } t; \quad (11.9)$$

3) для входного сигнала существует константа  $c_r$ , такая, что

$$|r(t)| < c_r e^{-\alpha t} \text{ для любого } t. \quad (11.10)$$

Если выполнено неравенство

$$\alpha > Kc_g, \quad (11.11)$$

то  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Более того, реакция  $e(t)$  ограничена:

$$|e(t)| \leq (c_0 + c_r) e^{-(\alpha - Kc_g)t}. \quad (11.12)$$

Для доказательства теоремы применим соотношения (11.8) — (11.10) к уравнению системы (11.7), тогда получим

$$|e(t)| \leq (c_r + c_0) e^{-\alpha t} + Kc_g e^{-\alpha t} \int_0^t |e(\tau)| e^{\alpha \tau} d\tau$$

или

$$|e(t)| e^{\alpha t} \leq (c_r + c_0) + Kc_g \int_0^t |e(\tau)| e^{\alpha \tau} d\tau.$$

Применяя лемму 11.1, сразу приходим к уравнениям (11.12).

Теорема 11.1 определяет относительно слабую границу, хотя и обеспечивает удобный способ для быстрой проверки устойчивости систем. Этот способ предпочтительнее по простоте метода Попова, хотя последний дает более точную границу устойчивости.

**Пример 11.1.** Рассмотрим уравнение затухающих колебаний Матъе из примера 10.13.

$$\ddot{e}(t) + 2\dot{e}(t) + [c - 3 - d \cos \omega t] e(t) = 0. \quad (11.13)$$

Используя обозначения рис. 11.1, имеем

$$r(t) = 0; \quad u(t) = k(t) e(t); \quad G(p) = \frac{1}{(p+1)^2 + c - 4}; \quad k(t) = d \cos \omega t. \quad (11.14)$$

Импульсная переходная функция для  $\tilde{G}(p)$  равна

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{c-4}} \sin \sqrt{c-4} t.$$

Следовательно, можно написать

$$|g(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4-c}} e^{-(1-\sqrt{4-c})t}, & c < 4; \\ \frac{1}{\sqrt{c-4}} e^{-t}, & c > 4. \end{cases}$$

Границы для переходной функции по начальным условиям должны иметь те же самые показатели. Таким образом, в обозначениях теоремы 11.1 имеем

$$c_g = \frac{1}{2\sqrt{4-c}}; \quad \alpha = 1 - \sqrt{4-c}, \text{ если } c < 4;$$

$$c_g = \frac{1}{\sqrt{c-4}}; \quad \alpha = 1, \text{ если } c > 4.$$

Достаточное условие для того, чтобы  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , заключается в следующем:

$$d < \begin{cases} 2(\sqrt{4-c} - 4 + c), & c < 4; \\ \sqrt{c-4}, & c > 4. \end{cases} \quad (11.15)$$

Далее находим, что граница для  $d$ , определяемая из неравенств (11.15), составляет около половины той, что получена в примере 10.13 частотными методами в гл. 10 (см. также упражнение 10.6). Это не удивительно, если учесть простоту использования теоремы 11.1. Однако именно эта простота позволяет считать настоящий метод весьма удобным для быстрого рассмотрения задач, где требуется достаточное условие устойчивости, близость которого к истинной границе устойчивости несущественна.

## 11.2. УСТОЙЧИВОСТЬ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Существует хорошо согласующаяся с интуицией эквивалентность понятий устойчивости и устойчивости при ограниченных входном и выходном сигналах для линейных стационарных систем. Оказывается, что эта эквивалентность сохраняется и для линейных нестационарных систем, если выполняются еще некоторые условия.

Рассмотрим линейную нестационарную систему, задаваемую уравнением

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (11.16)$$

Определим норму переходной матрицы:

$$\|\Phi(t, t_0)\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\Phi_{ij}(t_0, t)|.$$

Тогда справедлива следующая теорема [13], [158].

**Теорема 11.2.** Для системы (11.16):

- 1) для любого ограниченного входа  $\mathbf{u}(t)^*$  и для любого ограниченного начального условия вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  ограничен для всех  $t \geq t_0$ ;
- 2) существуют положительные константы  $b$  и  $c$  такие, что

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq b < \infty \text{ для любого } t \geq t_0 \quad (11.17)$$

и

$$\int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| d\tau \leq c < \infty \text{ для любого } t \geq t_0; \quad (11.18)$$

- 3) существуют константы  $M > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M e^{-\alpha(t-t_0)} \text{ для } t \geq t_0; \quad (11.19)$$

- 4) для  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$  состояние равновесия  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  равномерно асимптотически устойчиво в целом.

**Доказательство.** Для того чтобы показать, что из условия 1) следует условие 2), допустим, что условие 2) не выполняется.

Рассмотрим специальный входной вектор  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$  и специальный вектор начальных условий  $\mathbf{x}(t_0)$ , который равен 0 для каждой компоненты, исключая  $k$ -ю ( $0 \leq k \leq n$ ), которая равна 1. Предположим, что существует момент времени  $t$  такой, что компонента  $\Phi_{jk}$  вектора  $\Phi$  не ограничена, т. е.  $|\Phi_{jk}(t, t_0)| = \infty$ , тогда

$$\infty = |\Phi_{jk}(t, t_0)| = |x_j(t)| \leq \sum_{i=1}^n |x_i(t)| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}(t)\|,$$

что противоречит условию 1).

\* Сигнал  $\mathbf{u}(t)$  ограничен, если существует такое число  $U < \infty$ , что выполняется неравенство  $\|\mathbf{u}(t)\| \leq U$ , где евклидова норма вектора  $\mathbf{u}$  есть:

$$\|\mathbf{u}(t)\| = \left( \sum_{i=1}^r u_i^2(t) \right)^{1/2}.$$

Таким образом, для того чтобы  $\|x(t)\| < \infty$ , необходимо иметь  $|\Phi_{jk}(t, t_0)| < \infty$  для всех возможных  $j, k$  и для всех  $t_0$  и  $t$ , следовательно,  $\|\Phi(t, t_0)\| < \infty$  для всех  $t_0$  и  $t$ .

Кроме того, если мы рассмотрим специальное начальное условие  $x(t_0) = 0$  и специальный входной сигнал  $u(t)$ , который равен 0 для каждой компоненты, исключая  $k$ -ю, где

$$u_k(t) = \text{sign } \Phi_{jk}(t, \tau),$$

и если компоненты  $\Phi_{jk}(t, \tau)$  таковы, что  $\int_{t_0}^t |\Phi_{jk}(t, \tau)| d\tau = \infty$ , то справедливо следующее соотношение:

$$\infty = \int_{t_0}^t |\Phi_{jk}(t, \tau)| d\tau = \int_{t_0}^t \Phi_{jk}(t, \tau) \text{sign } \Phi_{jk}(t, \tau) d\tau = |x_j(t)| \leq \sqrt{n} \|x(t)\|.$$

Следовательно, для того, чтобы  $\|x(t)\| < \infty$ , необходимо иметь  $\int_{t_0}^t |\Phi_{jk}(t, \tau)| d\tau < \infty$  для любого  $j, k$ , а поэтому необходимо выполнять условия (11.18).

Чтобы понять, что из условия 2) следует условие 3), определим константы  $b$  и  $c$  в неравенствах (11.17) и (11.18) следующим образом\*:

$$\max_{t, t_0} \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| d\tau = \max_{t, t_0} \int_{t_0}^t \|\Phi(\tau, t_0)\| d\tau \stackrel{\Delta}{=} c < \infty; \quad (11.20)$$

$$\max_{t, t_0} \|\Phi(t, t_0)\| \stackrel{\Delta}{=} b < \infty. \quad (11.21)$$

Кроме того, найдем последовательность чисел  $b_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) по формуле

$$b_n \stackrel{\Delta}{=} \max_{t, t_0} (t - t_0)^n \|\Phi(t, t_0)\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad t > t_0, \quad (11.22)$$

где из неравенства (11.21) видно, что  $b_0 = b$ .

Так как  $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, \tau) \Phi(\tau, t_0)$  для всех  $t_0, t$  и  $\tau$ , то

$$\begin{aligned} b_n &= \max_{t, t_0} n \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-1} \|\Phi(t, \tau)\| \|\Phi(\tau, t_0)\| d\tau \leq \\ &\leq \max_{t, t_0} n \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-1} \|\Phi(t, \tau)\| \|\Phi(\tau, t_0)\| d\tau \leq n b_{n-1} c. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$b_n \leq c n b_{n-1} \leq c^2 n(n-1) b_{n-2} \leq \dots \leq c^n n! b_0 = c^n n! b$$

или, используя выражение (11.22), найдем

$$(t - t_0)^n \|\Phi(t, t_0)\| \leq c^n n! b.$$

\* Правильнее использовать операцию  $\sup [ ]$ , обозначающую наименьшую верхнюю границу величины, но мы предпочитаем использовать операцию  $\max [ ]$ . Для обычных проблем управления обе операции тождественны.

Выберем  $\alpha > 0$  таким, чтобы  $\alpha c < 1$ , тогда

$$\frac{\|\Phi(t, t_0)\|}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\alpha(t-t_0)]^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha c)^n$$

или

$$\frac{\|\Phi(t, t_0)\|}{b} e^{\alpha(t-t_0)} \leq \frac{1}{1-\alpha c}$$

и условие 3) выполняется при  $M = \frac{b}{1-\alpha c}$ .

Для того чтобы показать, что из условия 3) следует условие 4), учтем, что при  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq M e^{-\alpha(t-t_0)} \|\mathbf{x}(t_0)\|.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать такое  $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$ , при котором удовлетворяется требование асимптотической устойчивости в целом (см. определение 5.16). Так как  $\delta$  не зависит от  $t_0$ , то здесь имеем равномерную асимптотическую устойчивость в целом.

Для того чтобы показать, что из условия 4) следует условие 3), учтем, что при  $\delta$  для любого  $\mu$  и соответствующего  $T$  из § 5.6 для всех  $t_0$  справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}(t_0 + T)\| \leq \|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \delta \leq \mu, \quad (11.23)$$

где  $\delta$  не зависит от  $t_0$ .

Следовательно, для всех  $t_0$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$  можно написать

$$\|\Phi(t_0 + nT, t_0 + (n-1)T)\| \leq \frac{\mu}{\delta}$$

или, учитывая, что

$$\Phi(t_1, t_2) \Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3),$$

запишем

$$\begin{aligned} \|\Phi(t_0 + nT, t_0)\| &= \left\| \prod_{k=1}^n \Phi(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T) \right\| \leq \\ &\leq \prod_{k=1}^n \|\Phi(t_0 + kT, t_0 + (k-1)T)\| \leq \left(\frac{\mu}{\delta}\right)^n. \end{aligned} \quad (11.24)$$

Если выбрать  $M$  и  $\alpha$  такими, что  $\frac{\mu}{\delta} = M \exp(-\alpha T)$  и  $nT = t$  в неравенстве (11.24), то получим соотношение (11.19), которое является условием 3) теоремы 11.2. Предлагаем читателю показать самостоятельно, что из условия 3) следует условие 2), а из условия 2) — условие 1).

### 11.3. ПРАКТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ — УСТОЙЧИВОСТЬ В МАЛОМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВХОДНОМ И ВЫХОДНОМ СИГНАЛАХ

Аналогично устойчивости в малом существует устойчивость в малом при ограниченных входном и выходном сигналах. Как и в случае устойчивости в малом, область приложений этого вида устойчивости ограничена, но тем не менее его легко установить, поскольку доказана соответствующая тео-

рема. В работах [68], [133] для этого вида устойчивости было дано довольно неудачное название общей устойчивости \*. Рассмотрим систему следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t); & x(t_0) &= x_0; \\ f(0, t) &\equiv 0 & \text{для всех } t &> t_0. \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

Заметим, что если функция  $g$  не зависит от  $x$ , то ее можно рассматривать как входной сигнал для системы, изображенной на рис. 11.2а. Если  $g$  есть функция как от  $x$ , так и от  $t$ , то она может включать компоненты нежелательных возмущений, которые поступают во внутренние точки контура управления, как показано на рис. 11.2б.

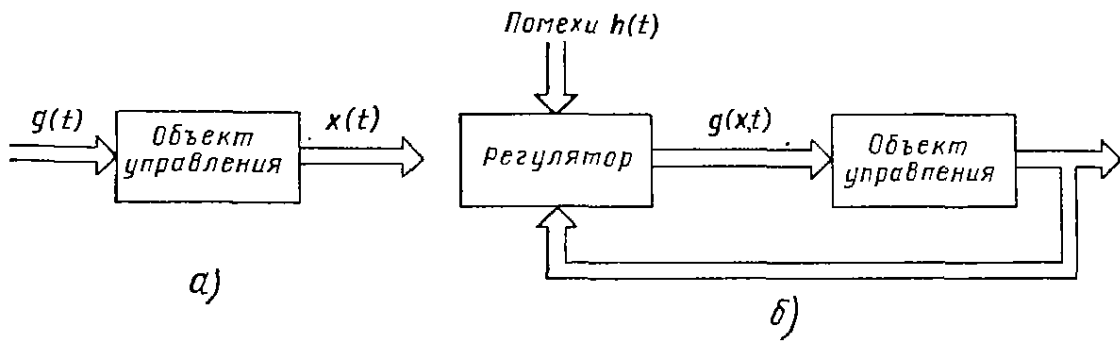


Рис. 11.2: а) Система, описываемая уравнением (11.25), в которой  $g$  не зависит от  $x$ ; б) Система, описываемая уравнением (11.25), в которой  $g$  зависит от  $x$

Если  $g(x, t) \equiv 0$  в уравнении (11.25), то говорят, что система является невозмущенной. Заметим, что невозмущенная система должна иметь состояние равновесия  $x = 0$ .

**О п р е д е л е н и е 11.1.** Состояние равновесия  $x = 0$  невозмущенной системы  $\dot{x} = f(x, t)$  является практически устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  могут быть найдены два положительных числа  $\delta_1(\varepsilon)$  и  $\delta_2(\varepsilon)$  такие, что решение  $x(t)$  возмущенной системы (11.25) обеспечивает  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для  $t > t_0$  при условии, что  $\|x_0\| < \delta_1$  и  $\|g(x, t)\| < \delta_2$ .

Понятие устойчивости, данное в определении 11.1, есть устойчивость в малом, так как в нем утверждается, что выходной сигнал может быть удержан в произвольно малой окрестности 0 при условии, что входной сигнал и начальные условия считаются малыми. Однако последнее определение не дает способа для нахождения точной оценки степени малости. Оказывается, что большой класс систем управления с обратной связью и устойчивой линейной частью объединяет практически устойчивые системы.

Рассмотрим класс систем с обратной связью, удовлетворяющих уравнениям вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + u(x, t), \\ u(x, t) &= h(x(t), t) + r(t) \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

или в эквивалентной им форме

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)u(x, \tau)d\tau; \\ u(x, t) &= h(x(t), t) + r(t). \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

\* См. сноску на стр. 304 (Прим. ред.).

Эти системы, например, могут описывать линеаризованное движение нелинейной системы относительно некоторой траектории. Напомним, что теорема 5.2 касалась равномерной асимптотической устойчивости систем, описываемых уравнениями вида (11.26). Пользуясь теоремой 11.2, покажем, что равномерная асимптотическая устойчивость и практическая устойчивость для данных систем, равносильны.

**Теорема 11.3 [98].** Допустим, что для системы (11.26) или (11.27) выполняется условие равномерной сходимости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|h(x(t), t)\|}{\|x(t)\|} = 0. \quad (11.28)$$

Рассмотрим линейную систему, которая при подстановке  $h(x(t), t) = 0$  удовлетворяет свойствам 1) — 4) теоремы 11.2, тогда:

- 1) при  $r(t) = 0$  система равномерно асимптотически устойчива;
- 2) по отношению ко входу  $r(t)$  система характеризуется практической устойчивостью.

**Доказательство.** Для доказательства 1-й части теоремы воспользуемся условием (11.28), которое означает, что для любой константы  $k_1 > 0$  имеется другая константа  $k_2$ , зависящая от  $k_1$ , такая, что для всех  $t$  выполняется неравенство

$$\|h(x(t), t)\| \leq k_1 \|x(t)\|, \text{ как только } \|x(t)\| \leq k_2. \quad (11.29)$$

При  $r(t) \equiv 0$  в уравнении (11.27) и, пользуясь оценкой (11.28) и условием 3) теоремы 11.2, запишем

$$\|x(t)\| e^{\alpha(t-t_0)} \leq M \|x(t_0)\| + Mk_1 e^{-\alpha t_0} \int_{t_0}^t e^{\alpha \tau} \|x(\tau)\| d\tau$$

или

$$\|x(t+t_0)\| e^{\alpha t} \leq M \|x(t_0)\| + Mk_1 \int_{t_0}^t e^{\alpha \tau} \|x(\tau+t_0)\| d\tau.$$

Применяя лемму Беллмана—Гренвилла (лемма 11.1), получим

$$e^{\alpha t} \|x(t+t_0)\| \leq M \|x(t_0)\| e^{Mk_1 t}, \quad t \geq 0$$

или

$$\|x(t)\| \leq M \|x(t_0)\| e^{-(\alpha - Mk_1)(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (11.30)$$

По условию теоремы  $k_1$  может быть задано произвольно малым по сравнению с числами  $\alpha$  и  $M$  при  $\|x(t)\| \rightarrow 0$ . Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta > 0$  такое, что  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ , как только  $\|x(t_0)\| \leq \delta$ .

В частности, в качестве  $\delta$  можно выбрать  $\delta = \min \left[ \left( \frac{\varepsilon}{M} \right), k \right]$ , где  $k$  определена так, что  $k_1 < \frac{\alpha}{M}$  для  $\|x(t_0)\| \leq \frac{k}{M}$ .

Так как  $\delta$  не зависит от  $t_0$  и согласно неравенству (11.30)  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , равномерно по  $t_0$  и  $\|x(t_0)\|$ , то положение равновесия  $x=0$  равномерно асимптотически устойчиво.

Вторая часть теоремы 11.3 может быть доказана от противного. Пусть  $\delta_1$  является границей для  $\|x(t_0)\|$  и  $\delta_2$  является границей для  $r(t)$ , тогда для достаточно малых  $\|x(t_0)\|$  уравнений (11.27) и (11.29) и условия 3) теоремы 11.2 следует неравенство

$$\|x(t)\| < M\delta_1 e^{-\alpha(t-t_0)} + k_1 \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| \|x(\tau)\| d\tau + \frac{M\delta_2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t-t_0)})$$

для  $t \geq 0$

или

$$\|x(t)\| \leq M \left( \delta_1 + \frac{\delta_2}{\alpha} \right) + k_1 \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| \|x(\tau)\| d\tau, \quad t > 0. \quad (11.31)$$

Можно показать, что при достаточно малых  $\delta_1$  и  $\delta_2$  норма  $\|x(t)\|$  может быть сделана произвольно малой. Так как интеграл в неравенстве (11.31) монотонно возрастает с ростом  $t$ , то имеется  $t_0$  такое, что

$$\|x(t)\| > 2M \left( \delta_1 + \frac{\delta_2}{\alpha} \right) \quad \text{для } t \geq t_0. \quad (11.32)$$

Тогда при  $t = t_0$  неравенство (11.32) выполняется. Предположим, однако, что неравенство (11.32) не выполняется для всех  $t$  и пусть  $t_1$  есть первый момент, когда  $\|x(t)\| = 2M \left[ \delta_1 + \left( \frac{\delta_2}{\alpha} \right) \right]$ . Заметив, что правая часть неравенства (11.31) монотонно возрастает с ростом  $t$ , найдем

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} \|x(t)\| = \|x(t_1)\| \leq M \left( \delta_1 + \frac{\delta_2}{\alpha} \right) + k_1 \|x(t_1)\| \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t, \tau)\| d\tau.$$

Учитывая, что  $\int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| d\tau \leq d\tau \leq c < \infty$  при любом  $t \geq t_0$ ,

имеем

$$\|x(t_1)\| \leq \frac{M \left[ \delta_1 + \left( \frac{\delta_2}{\alpha} \right) \right]}{1 - Mk_1c}. \quad (11.33)$$

Величина  $Mk_1c$  в неравенстве (11.33) может быть сделана сколь угодно малой за счет  $k_1$  в интервале  $[t_0, t_1]$ , если  $\|r(t)\|$  и  $\|x(t_0)\|$  достаточно малы. В этом случае неравенство (11.33) противоречит предположению о том, что условие (11.32) не выполняется. Вторая часть теоремы 11.3 таким образом доказана.

Видимо, можно предположить, что тесная связь между равномерной асимптотической устойчивостью состояния равновесия системы без входного сигнала и практической устойчивостью той же системы с входным сигналом распространяется не только на системы с линейной частью. В действительности верна следующая теорема.

**Теорема 11.4.** Рассмотрим систему (11.25). Если при  $g \equiv 0$  начало координат равномерно асимптотически устойчиво, то система практически устойчива.

В свете теоремы 11.3 теорема 11.4, вероятно, справедлива. Однако из-за отсутствия методов отыскания нелинейных систем, которые являются равномерно асимптотически устойчивыми, по-видимому, не существует доказательства, аналогичного предыдущему. Имеется лишь доказательство, использующее функции Ляпунова, основные этапы которого перечислим ниже.

Начнем с того, что в работе Массера [134] было доказано следующее. Если система (11.25), где функция  $f$  удовлетворяет локальному условию Липшица, а  $g \equiv 0$ , равномерно асимптотически устойчива; то существует такая функция Ляпунова, которая удовлетворяет условиям теоремы 9.11. С учетом последнего доказательства завершает следующая лемма, доказанная И. Г. Малкиным [133].

**Лемма 11.2.** Если для системы (11.25) существует скалярная функция  $V(x, t)$ , удовлетворяющая условию теоремы 9.11 при  $g \equiv 0$ , то состояние равновесия  $x = 0$  практически устойчиво.



Для того чтобы доказать лемму 11.2 для произвольного  $\varepsilon > 0$ , следует подобрать  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , удовлетворяющие условиям практической устойчивости. Из условий леммы следует, что существуют две непрерывные возрастающие функции  $\Phi(z)$  и  $\rho(z)$  с  $\Phi(0) = \rho(0) = 0$  такие, что функция Ляпунова  $V(x, t)$  для системы (11.25) при  $g \equiv 0$  определяет следующие соотношения:

$$\Phi(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \rho(\|x\|); \quad (11.34)$$

$$\dot{V}(x, t) = (\text{grad } V)^T f + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -\theta(\|x\|), \quad (11.35)$$

где  $\theta(z)$  определено положительная функция одной переменной. Для выбранной функции  $V(x, t)$  и найдем  $\dot{V}$  вдоль траектории (11.25) при  $g \neq 0$ :

$$\dot{V}(x, t) = (\text{grad } V)^T (f + g) + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (11.36)$$

В отличие от выражения (11.35) в выражении (11.36) присутствует член

$$(\text{grad } V)^T g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} g_i(x, t). \quad (11.37)$$

Если функции  $g_i$  могут быть сделаны достаточно малыми, то ввиду ограничения (11.35) можно всегда выбрать норму  $\|x_0\|$  такой, что  $\dot{V} < 0$  в соотношении (11.36). Это означает, что  $V$  монотонно убывает со временем. Из выражения (11.34) следует, что  $\|x(t)\|$  ограничена. Задача заключается в выборе  $\|x_0\|$  и  $\|g\|$  достаточно малыми, чтобы удовлетворить обоим приведенным выше требованиям и условию  $\|x(t)\| > \varepsilon$ . Это всегда можно сделать.

Двумя теоремами, рассмотренными в этом параграфе, ограничивается обсуждение практической устойчивости или устойчивости в малом при ограниченных входном и выходном сигналах. Для устойчивости в целом требуются дальнейшие ограничения\*. Полезно обратить внимание (задача 11.17) на то, что даже для стационарных систем нельзя утверждать, что когда исходная невозмущенная система  $\dot{x} = f(x)$  при  $f(0) \equiv 0$  равномерно асимптотически устойчива в целом, то управляемая система  $\dot{x} = f(x) + u(t)$  устойчива при ограниченных входном и выходном сигналах.

#### 11.4. УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВХОДНОМ И ВЫХОДНОМ СИГНАЛАХ ОДНОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Определим понятие устойчивости в целом при ограниченных входном и выходном сигналах следующим образом.

**О п р е д е л е н и е 11.2.** Динамическая система с одним входом и одним выходом устойчива в целом при ограниченных входном и выходном сигналах, если для любого  $\delta_1 \geq 0$  и  $\delta_2 \geq 0$  найдется такое  $\varepsilon(\delta_1, \delta_2) > 0$ , что абсолютная величина выходного сигнала будет ограничена  $\varepsilon$ , как только абсолютная величина входного сигнала и норма начальных условий ограничены константами  $\delta_1$  и  $\delta_2$  соответственно\*\*. Это свойство может быть уста-

\* См., например, работу [194], а также § 11.4.

\*\* Заметим различие в той роли, которую играют  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\varepsilon$  в определениях 11.2 и 11.1. Определение 11.2 может быть легко распространено на системы со многими входами и выходами.

новлено лишь для некоторых классов динамических систем. Рассмотрим, например, линейную нестационарную систему, определяемую уравнением

$$\dot{x}(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) b(\tau) r(\tau) d\tau; \quad (11.38a)$$

$$y(t) = c^T(t) x(t), \quad (11.38б)$$

где  $r(t)$  есть вход, а  $y(t)$  — выход.

Уравнение (11.38a) идентично выражению (11.16) при  $u(t) = b(t) r(t)$ . Уравнение (11.38б) определяет выход  $y(t)$  как линейную комбинацию составляющих вектора  $x(t)$ . Для этой системы справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.5.** Если для системы (11.38) при  $r(t) = 0$  положение равновесия  $x = 0$  равномерно асимптотически устойчиво и

$$\|c^T(t)\| = \sum_{i=1}^n c_i^2(t) < \infty; \quad \|b(t)\| = \sum_{i=1}^n b_i^2(t) < \infty \quad \text{для всех } t,$$

то неавтономная система (11.38) устойчива в целом при ограниченных входном и выходном сигналах. Эта теорема следует непосредственно из теоремы 11.2 (см. задачу 11.2). Справедливость теоремы 11.5 для стационарной линейной системы хорошо известна. При  $r(t) = 0$  для стационарной линейной системы с передаточной функцией  $G(s) = c^T \Phi(s) b$ , где  $\Phi(s) = (Is - A)^{-1}$ , начало координат  $x = 0$  равномерно асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все полюсы составляющих  $\Phi_{ij}(s)$  матрицы  $\Phi(s)$  лежат в области  $\text{Re } s < 0$ . В этом случае все полюсы передаточной функции  $G(s)$  расположены в области  $\text{Re } s < 0$  и можно показать, что каждый ограниченный вход  $r(t)$  вызывает ограниченный выход  $y(t)$  (см. также задачу 11.3). Теорема 11.5 справедлива и для нестационарных линейных систем.

Для нелинейных же систем общей теоремы не существует. Однако для специального класса систем, рассматриваемых в работах А. И. Лурье и В. М. Попова, некоторые результаты удается получить.

Рассмотрим одноконтурную систему управления, изображенную на рис. 11.1, определяемую уравнением (11.7):

$$y(t) = -e_0(t) + \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau; \quad (11.39a)$$

$$u(t) = \mathcal{F} [e(t), t]; \quad (11.39б)$$

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad (11.39в)$$

В гл. 10 были рассмотрены частотные критерии для анализа асимптотического поведения такой системы при нулевом входном сигнале  $r(t) = 0$ . Предположим, что рассматриваемая система удовлетворяет одному из этих критериев и, следовательно, имеет асимптотически устойчивое уравнение при  $r(t) = 0$ . Возникает вопрос, означает ли это, что при  $r(t) \neq 0$  система устойчива в целом при ограниченных входном и выходном сигналах. Ответ дает следующая теорема.

**Теорема 11.6.** Пусть система, определяемая уравнениями (11.39) (см. рис. 11.1) при  $r(t) = 0$ , удовлетворяет условиям теорем 10.1, 10.4 или 10.5

так, что управляющий сигнал асимптотически устойчив с коэффициентом затухания  $\varepsilon$  для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  (см. теорему 10.3)\*:

1) если сигналы  $r(t)$  и  $\dot{r}(t)$  ограничены для всех  $t$ , то выход  $y(t)$  должен быть ограничен для всех ограниченных начальных условий;

2) от требований теорем 10.1, 10.4 или 10.5, гарантирующих устойчивость выходного сигнала линейного элемента\*\*, можно отказаться, если передаточную функцию  $G(s)$  можно получить преобразованием сдвига (10.38) из функции  $G_\varepsilon(s) = G(s) - c$ , которая определяет устойчивый выходной сигнал при условии, что  $c \geq 0$  и  $\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \in [0, \infty]$ ;

3) если условия теорем в гл. 10, когда  $r(t) = 0$ , удовлетворяются при  $q = 0$ , то требование ограниченности сигнала  $\dot{r}(t)$  может быть опущено.

Теоремы, близкие по своему содержанию теореме 11.6, были доказаны Бергеном, Ивенсом и Рольтом [17], Сандбергом [175], [177]\*\*\* и [178].

Доказательство теоремы 11.6. Из уравнения (11.39а) при умножении и делении подынтегрального выражения на  $e^{\varepsilon(t-\tau)}$  получим следующее неравенство:

$$|y(t)| \leq |e_0(t)| + \left| \int_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)} g(t-\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} u(\tau) d\tau \right|.$$

По условиям теоремы можно написать

$$\left. \begin{aligned} |r(t)| &\leq r_m < \infty; \\ |\dot{r}(t)| &\leq r'_m < \infty; \\ |e_0(t)| &\leq e_{0m} < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (11.40)$$

Тогда, используя неравенство Шварца\*\*\*\* преобразуем приведенное выше интегральное неравенство к виду

$$|y(t)| \leq e_{0m} + \left( \int_0^t e^{2\varepsilon\tau} g^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} u^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \quad (11.41)$$

Остальная часть доказательства заключается в том, чтобы показать ограниченность обоих интегралов при выполнении условий любой из теорем гл. 10. Обратимся к основной теореме 10.1 и теореме 10.3. Прежде всего потребуем, чтобы существовал устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\varepsilon$  для достаточно малых  $\varepsilon > 0$ , что согласно выражению (10.9) означает существование константы  $c_g$  такой, что

$$\left( \int_0^t e^{2\varepsilon\tau} g^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq c_g < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (11.42)$$

\* Требование существования асимптотически устойчивого уравнения с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$  для достаточно малых его значений не является ограничительным. Действительно, если, например, передаточные функции  $G(s)$  и  $E_0(s)$  есть рациональные функции переменной  $s$ , то нетрудно показать, что из существования асимптотически устойчивого управления (степень устойчивости равна нулю) следует существование асимптотически устойчивого управления с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$ .

\*\* В случае использования теорем 10.4 и 10.5 это относится к линейному элементу, охваченному отрицательной обратной связью с коэффициентом  $a \geq 0$ .

\*\*\* В работах [175] и [177] рассматривается случай  $q = 0$ , где  $t^n g(t) \in \mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  для  $n = 0, 1, 2$ , более общий, чем здесь, и справедливый для систем с распределенными параметрами.

\*\*\*\* См. приложение III.

Для оценки второго интеграла в выражении (11.41) воспользуемся следующей леммой.

**Лемма 11.3.** Пусть для системы (11.39) при  $r(t) = 0$  удовлетворяются условия теорем 10.1 и 10.3, так что существует асимптотически устойчивое управление с коэффициентом затухания  $\varepsilon$  для достаточно малых  $\varepsilon$ . Если при  $r(t) \neq 0$  существуют константы  $r_m$  и  $r'_m$  такие, что  $|r(t)| \leq r_m < \infty$  и  $|\dot{r}(t)| \leq r'_m < \infty$ , то справедливо следующее соотношение:

$$\left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} u^2(\tau) (d\tau) \right)^{1/2} \leq c_u < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (11.43)$$

где  $c_u$  — константа, зависящая от начальных условий.

Требование теоремы 10.1 об устойчивости выходного сигнала с коэффициентом затухания  $\varepsilon$  можно не учитывать, если линейный элемент получен в результате сдвига полюсов (10.38) элемента, имеющего устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$ . Требование  $|\dot{r}(t)| \leq r'_m < \infty$  может не выполняться, если теорема 10.1, усиленная теоремой 10.3, верна для  $q = 0$ .

Набросок доказательства этой леммы приведен в § III.5 приложения III. Из выражений (11.40)—(11.43) следует, что

$$|y(t)| \leq e_{0m} + c_g c_u < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (11.44)$$

Таким образом, мы доказали, что если выходной сигнал нелинейного элемента устойчив с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$  и нелинейный элемент расположен в секторе  $\left(\frac{u}{e}\right) \in [0, K]$ ,  $0 \leq K \leq \infty$ \*, то существование асимптотически устойчивого управления с коэффициентом затухания  $\varepsilon$  для системы при  $r(t) = 0$  определяет устойчивость системы в целом при ограниченных входном и выходном сигналах.

Теперь покажем, что те же результаты получаются и при выполнении условий теоремы 10.4. В этом случае система, изображенная на рис. 10.9, б, удовлетворяет всем условиям теоремы 10.1\*\* (см. доказательство теоремы 10.4). Так как справедливо соотношение (см. рис. 10.9, в)

$$\frac{1}{1 + aG(s)} = 1 - \frac{aG(s)}{1 + aG(s)} = 1 - aG_a(s) = \frac{\mathcal{L}[r_a(t) + e_{0a}(t)]}{\mathcal{L}[r(t) + e_0(t)]},$$

то для переходной реакции на начальные условия в преобразованной системе из выражения (11.40) найдем

$$\begin{aligned} |r_a(t) + e_{0a}(t)| &\leq \left| r(t) + e_0(t) - a \int_0^t g_a(t-\tau) [r(\tau) + e_0(\tau)] d\tau \right| \leq \\ &\leq (r_m + e_{0m})(1 + ac_a), \end{aligned} \quad (11.45)$$

где постоянная  $c_a'$  такова, что

$$\int_0^\infty |g_a(t)| dt \leq c_a > \infty, \quad (11.46)$$

Этот интеграл ограничен, поскольку из условий теоремы 10.4 и требований теоремы 11.5 линейный элемент в результате сдвига полюсов (или еди-

\* См. условия теоремы 10.1, касающиеся ограничений, налагаемых на  $k$  и зависящих от вида нелинейной характеристики.

\*\* С учетом условий теоремы 10.3.

ничная импульсная характеристика  $g_a(t)$  имеет устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$ . Это означает, что

$$\left( \int_0^t e^{2\varepsilon\tau} g_a^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq c_{g_a} < \infty. \quad (11.47)$$

Из леммы 11.3 для системы, полученной в результате сдвига полюсов (рис. 10.9, б), следует

$$\left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} u_a^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq c_{u_a} < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty, \quad (11.48)$$

так что для этой системы из неравенств (11.44), (11.45), (11.47) и (11.48) найдем

$$\begin{aligned} |e(t)| &= \left| r_a(t) + e_{a0}(t) - \int_0^t g_a(t-\tau) u_a(\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq (r_m + e_{0m})(1 + ac_a) + c_{g_a} c_{u_a} < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, из условия (11.39в) для исходной системы получаем неравенство

$$|y(t)| = |r(t) - e(t)| \leq r_m + (r_m + e_{0m})(1 + ac_a) + c_{g_a} c_{u_a} < \infty \quad \text{для } 0 \leq t \leq \infty. \quad (11.49)$$

Теорема 10.5 есть частный случай теоремы 10.4 и поэтому не требует специального доказательства.

Предположим теперь, что требование устойчивости выходного сигнала линейного элемента не выполняется. Рассмотрим теорему 10.1 и предположим, что линейный элемент  $G(p)$  может быть получен в результате преобразования сдвига полюсов (10.38)  $e_c(t) = e(t) + cu(t)$  из элемента  $G_c(p) = G(p) - c$ , который имеет устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$ . Сказанное иллюстрируется рис. 10.16. Единичная импульсная характеристика преобразованного элемента равна

$$g_c(t) = g(t) - c\mu_0(t),$$

где  $\mu_0(t)$  — единичная импульсная функция. С учетом условия (11.39а) и (11.39в), получим

$$e(t) = r(t) - e_0(t) - \int_0^t g_c(t-\tau) u(\tau) d\tau - cu(t).$$

Следовательно, из выражений (11.40) и (11.43) найдем

$$|e(t) + cu(t)| \leq r_m + e_{0m} + c_{g_c} c_u < \infty, \quad (11.50)$$

где константа  $c_{g_c}$  аналогична константе  $c_g$  в соотношении (11.42), т. е. для произвольно малого  $\varepsilon > 0$  справедливо неравенство

$$\left( \int_0^t e^{2\varepsilon\tau} g_c^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq c_{g_c} < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (11.51)$$

Условие (11.51) выполняется, так как по условию теоремы линейный элемент с единичной импульсной характеристикой  $g_c(t)$  имеет устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$ . Условие (11.43) справедливо по лемме 11.3.

Рассмотрим теперь ограничения  $c \geq 0$  и  $(u/e) \in [0, \infty]$ , характерные для теоремы 11.6. В этом случае  $\text{sign } u = \text{sign } e$  и, следовательно,  $|e(t) + cu(t)| = |e(t)| + c|u(t)|$ , так что неравенство (11.50) примет вид

$$\begin{aligned} |e(t)| + c|u(t)| &\leq r_m + e_{0m} + c_{g_c}c_u < \infty, \\ 0 &\leq t \leq \infty. \end{aligned} \quad (11.52a)$$

Это означает, что сигналы  $u(t)$  и  $e(t)$  ограничены. Следовательно, из условий (11.39в), (11.40) и (11.41) имеем

$$\begin{aligned} |y(t)| = |r(t) - e(t)| &\leq r_m + |e(t)| \leq r_m + |e(t)| + c|u(t)| \leq \\ &\leq 2r_m + e_{0m} + c_{g_c}c_u < \infty, \quad 0 \leq t \leq \infty. \end{aligned} \quad (11.52б)$$

Теперь надо доказать, что если используется теорема 10.4, то требование устойчивости выходного сигнала линейного элемента, охваченного обратной связью с коэффициентом  $a \geq 0$ , может не выполняться, поскольку операторная функция  $G_a(p) = G(p)/[1 + aG(p)]$  может быть определена в результате преобразования сдвига нулей (10.38), где элемент  $G(p)$  имеет устойчивый выходной сигнал с коэффициентом затухания  $\varepsilon > 0$ . Неравенство (11.45) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} |r_a(t)| + e_{0a}(t) &\leq \left| r(t) + e_0(t) - a \int_0^t g_c(t - \tau) e_0(\tau) d\tau + cae_0(t) \right| \leq \\ &\leq (r_m + e_{0m})(1 + ac_c + ca) < \infty, \end{aligned} \quad (11.53)$$

где константа  $c_c$  такова, что

$$\int_0^{\infty} |g_c(t)| dt \leq c_c < \infty. \quad (11.54)$$

Аналогично выражению (11.51) имеем для системы со сдвигом полюсов

$$|e(t)| + c|u_a(t)| \leq (r_m + e_{0m})(1 + ac_c + ca) + c_{g_c}c_{u_a}; \quad (11.55a)$$

$$\begin{aligned} |y(t)| = |r(t) - e(t)| &\leq r_m + |e(t)| \leq r_m + |e(t)| + c|u_a(t)| \leq r_m + \\ &+ (r_m + e_{0m})(1 + ac_c + ca) + c_{g_c}c_{u_a} < \infty. \end{aligned} \quad (11.55б)$$

Как и ранее, теорема 10.5 представляет собой частный случай теоремы 10.4, поэтому не нужно специального доказательства для случая, когда  $r(t) = 0$ .

Итак, когда выполняются условия любой из теорем гл. 10 для  $q = 0$ , то согласно лемме 11.3 условие (11.43) имеет место, даже если  $\dot{r}(t)$  не ограничено.

## 11.5. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫНУЖДЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Устойчивость вынужденных решений иногда называют устойчивостью переходного процесса [145], [202]. Ниже будет показано, что устойчивость переходного процесса в системе Попова относительно легко определить, используя анализ возмущенного движения и некоторые теоремы гл. 10. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 11.1, с безынерционной нелинейностью, т. е.  $u(t) = f(e(t), t)$ .

## 1. Линейная нестационарная система

Рассмотрим сначала случай, когда  $f(e(t), t)$  определяет переменный коэффициент усиления  $k(t)$ . Уравнение системы можно записать в следующем виде:

$$e(t) = e_0(t) + r(t) - \int_0^t g(t-\tau) k(\tau) e(\tau) d\tau. \quad (11.56)$$

Положим, что  $|e_0(t)| < \infty$  для  $t \in (0, \infty)$ ,  $g(t) \in \mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  и  $e_0(t) \in \mathcal{L}_2^*$  всюду на полуоси  $(0, \infty)$  и предположим, более того, что для  $r(t) = 0$  и  $a \leq k(t) \leq b$  круговой критерий, сформулированный в теореме 10.4, выполняется при  $q = 0$ . Это предполагает, что при  $r(t) \equiv 0$  автономная система имеет абсолютно асимптотически устойчивый и выходной сигналы во всем диапазоне изменения коэффициента  $k(t)$ .

Если теперь приложить входной сигнал  $r(t)$ , то для данных начальных условий решение системы  $e(t)$  полностью определяется уравнением (11.56). Положим, что при  $t = 0$  набор начальных условий изменяется. Тогда  $e_0(t)$ , а, следовательно, и  $e(t)$  изменится. Пусть  $e'(t) = e(t) + \Delta e(t)$  и  $e'_0(t) = e_0(t) + \Delta e_0(t)$  \*\* — возмущенные значения  $e(t)$  и  $e_0(t)$  соответственно; тогда можно записать

$$e'(t) = e'_0(t) + r(t) - \int_0^t g(t-\tau) k(\tau) e'(\tau) d\tau. \quad (11.57)$$

Вычитая уравнение (11.57) из уравнения (11.56), получим выражение для возмущений по переменным в виде

$$\Delta e(t) = \Delta e_0(t) - \int_0^t g(t-\tau) k(\tau) \Delta e(\tau) d\tau. \quad (11.58)$$

Заметим, что в этом частном случае  $r(t)$  не рассматривается и эквивалентная линейная система при  $r(t) = 0$  описывается уравнением (11.58). Так как объект линейный, то  $\Delta e_0(t)$  имеет тот же вид, что и  $e_0(t)$ , а, следовательно,  $|\Delta e_0(t)| < \infty$  и  $\Delta e_0(t) \in \mathcal{L}_2$ . Передаточная функция объекта  $G(p)$  не изменяется, и, следовательно,  $g(t) \in \mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . При наших предположениях относительно исходной системы заключаем, что  $\Delta u(t) \in \mathcal{L}_2$ , где  $\Delta u(t) = k(t) \Delta e(t)$ . Тогда на основании леммы 10.1 можно утверждать:  $\Delta e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Это значит, что управление  $e(t)$ , полученное из уравнения (11.56), устойчиво, когда возмущения по начальным условиям достаточно малы. Более того, решение  $e(t)$  единственно \*\*\*.

Аналогично можно заключить, что решение  $e(t)$  системы, определенное уравнением (11.56), устойчиво по возмущению вида  $\Delta r(t)$  при условии, что  $|\Delta r(t)| < \infty$  и  $\Delta r(t) \in \mathcal{L}_2$ .

## 2. Нелинейная стационарная система

Пусть вместо переменного усиления, когда  $u(t) = k(t) e(t)$ , в системе присутствует безынерционная нелинейность  $u(t) = f(e(t))$ .

Если выходной сигнал равен  $r(t)$ , то решение  $e(t)$  системы дается выражением

$$e(t) = e_0(t) + r(t) - \int_0^t g(t-\tau) f(e(\tau)) d\tau. \quad (11.59)$$

\* См. сноску на стр. 267 и приложение III.

\*\* Здесь используется обозначение  $\Delta e(t)$  и  $\Delta e_0(t)$ , а не  $\delta e(t)$  и  $\delta e_0(t)$ , чтобы показать, что возмущения не обязательно малы.

\*\*\* Что всегда справедливо для линейных систем.

При возмущении  $\Delta e_0(t)$  по начальным условиям  $e_0(t)$  и возмущении  $\Delta r(t) \in \mathcal{L}_2$  по входному сигналу  $r(t)$  получим относительно возмущений уравнения вида

$$\Delta e(t) = \Delta e_0(t) + \Delta r(t) - \int_0^t g(t-\tau) f_{\Delta}(e(\tau), \Delta e(\tau)) d\tau, \quad (11.60)$$

где

$$f_{\Delta}(e(t), \Delta e(t)) \stackrel{\Delta}{=} f(e(t) + \Delta e(t)) - f(e(t)). \quad (11.61)$$

Пусть  $\Delta u(t) = f_{\Delta}(e(t), \Delta e(t))$  рассматривается как выход нелинейности  $f$  при входе  $e(t)$  и входном возмущении  $\Delta e(t)$ .

Обозначив через  $\Delta u(t)$  возмущение выходного сигнала нелинейности  $f$ , получим, что связь между ними задается кривой на рис. 11.3.

Итак, уравнение (11.60) описывает систему с нелинейностью  $f_{\Delta}(e(t), \Delta e(\tau))$ , которую относительно возмущений можно рассматривать как нестационарную нелинейность  $f_{\Delta}(\Delta e(t), t)$ . Таким образом, круговой критерий, сформулированный в теореме 10.4, можно применить при  $q = 0$  к системе (11.60).

Пусть

$$\frac{\Delta u(t)}{\Delta e(t)} \in [k_1, k_2], \quad (11.62)$$

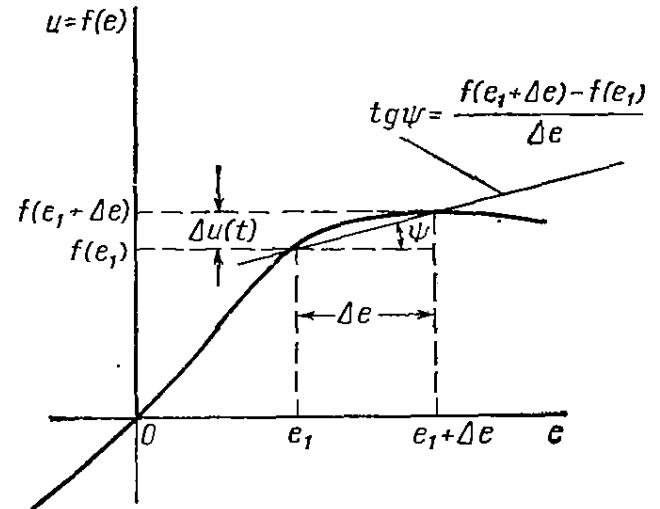


Рис. 11.3. Зависимость между вариацией  $\Delta e$  около значения  $e = e_1$  функции  $u = f(e)$

тогда по теореме 10.4 система (11.60) имеет асимптотически устойчивые управляющий и выходной сигналы, если:

- 1) выход системы с передаточной функцией  $G(s)/[1 + k_1 G(s)]$  устойчив;
- 2) годограф  $G(j\omega)$  лежит вне (внутри) круга с центром на действительной оси, проходящего через точки  $1/k_1$  и  $1/k_2$ , если  $(1/k_1) > (1/k_2)$  [если  $(1/k_1) < (1/k_2)$ ]. Переходя к параметрам исходной нелинейности, соотношения (11.62) можно записать

$$k_1 \leq \frac{f(e(t) + \Delta e(t)) - f(e(t))}{\Delta e(t)} \leq k_2 \quad (11.63)$$

для любых  $e(t)$  и  $\Delta e(t)$

или

$$k_1 \leq \frac{f(e_a) - f(e_b)}{e_a - e_b} \leq k_2 \quad (11.64)$$

для любых  $e_a$  и  $e_b$ .

Если  $f(e)$  — непрерывно дифференцируемая функция переменной  $e$ , то необходимым и достаточным условием выполнения неравенства (11.64) является

$$k_1 \leq \frac{df(e)}{de} \leq k_2 \quad (11.65)$$

для всех  $e$ .

Заметим, что если  $r(t) \equiv 0$  и  $\Delta r(t) \equiv 0$ , то для устойчивости процесса еще требуется, чтобы реакция на любое возмущение начальных условий была достаточно малой. Это и есть исходная задача Попова, и теорему 10.4 можно непосредственно использовать для случая, когда  $r(t) \equiv 0$ .



Пусть  $(u/e) \in [K_1, K_2]$ , или

$$K_1 \leq \frac{u(t)}{e(t)} \leq K_2. \quad (11.66)$$

Очевидно, что для любой функции  $f(e)$  диапазон изменения тангенса угла наклона  $f'(e)$  должен включать диапазон изменения  $f(e)/e$ , тогда имеем

$$k_1 \leq K_1 \leq K_2 \leq k_2. \quad (11.67)$$

Это свойство иллюстрируется с помощью круговой диаграммы (рис. 11.4). В случае, когда  $r(t) = 0$ , достаточное условие асимптотической устойчивости выходного сигнала заключается в том, что годограф  $G(j\omega)$  не касается малого круга, проходящего через точки  $-1/K_1$  и  $1/K_2$ . Если

$r(t) \neq 0$ , для существования асимптотически устойчивого управления для возмущенной системы (11.60) требуется, чтобы годограф  $G(j\omega)$  не касался большого\* круга, проходящего через точки  $-1/k_1$  и  $1/k_2$ . Далее, по лемме 10.1 можно заключить, что  $\Delta y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

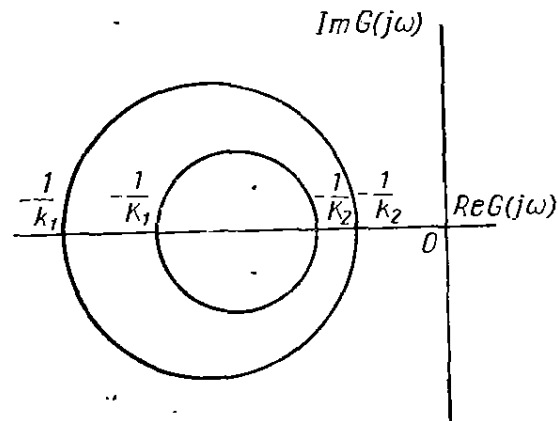


Рис. 11.4. Круги при  $\frac{1}{k_1} > \frac{1}{K_1} > \frac{1}{K_2} > \frac{1}{k_2}$ , характеризующие достаточные условия устойчивости системы, когда годограф  $G(j\omega)$  остается не только вне круга, определяемого сектором Попова  $\frac{f(e)}{e} \in [K_1, K_2]$ , но и вне большого круга, определяемого соотношением  $\frac{df(e)}{e} \in [k_1, k_2]$

### 3. Нелинейная нестационарная система

Приведенный выше анализ может быть распространен на случай нестационарной нелинейной функции  $u = f(e, t)$ . Здесь основные уравнения (11.64) и (11.65) преобразуются к следующему виду:

$$k_1 \leq \frac{f(e_a, t) - f(e_b, t)}{e_a - e_b} \leq k_2 \quad (11.68)$$

для любых  $e_a, e_b$  и  $t$

и

$$k_1 \leq \frac{\partial f(e, t)}{\partial e} \leq k_2 \quad (11.69)$$

для любых  $t$  соответственно.

Чтобы обобщить результаты этого параграфа, сформулируем следующую теорему.

**Теорема 11.7.** Для системы, показанной на рис. 11.1, предположим, что существуют такие две константы  $k_1$  и  $k_2$ , что условие (11.68) удовлетворяется; тогда для любого ограниченного входного возмущения  $\Delta r(t) \in \mathcal{L}_2$  и для любых возмущений реакции  $y(t)$  на начальные условия возмущение  $\Delta y(t)$  будет стремиться к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , если:

1) линейная система с передаточной функцией  $G(s)/[1 + k_1 G(s)]$  имеет устойчивый выходной сигнал;

2) годограф  $G(j\omega)$  лежит вне (внутри) круга, проходящего через точки  $1/k_1$  и  $1/k_2$ , если  $(1/k_1) > (1/k_2)$  [если  $(1/k_1) < (1/k_2)$ ], с центром на отрицательной действительной полуоси.\*\*

\* Круги на рис. 11.4 показаны для случая  $k_1 > 0$ . Если  $k_1 < 0$  и  $(1/k_1) < (1/k_2)$ , то годограф  $G(j\omega)$  должен лежать внутри круга с центром на действительной оси и проходящего через точки  $-1/k_1$  и  $-1/k_2$  (см. теорему 10.4).

\*\* Так как теорема 11.7 была получена непосредственно из теоремы 11.4, то круговой критерий (10.36) при  $q = 0$  применим к обоим случаям  $(1/k_1) > 1/k_2$  и  $1/k_1 < 1/k_2$ .

Данная теорема может быть, например, использована при изучении устойчивости вынужденных колебаний. Предположим, что  $y_n(t) = y_n(t + T)$  — периодическая установившаяся реакция системы с обратной связью (см. рис. 11.1) на некоторое периодическое воздействие. Если условия теоремы 11.7 удовлетворяются, то для любого возмущения начальных условий движение  $y(t)$  будет стремиться к  $y_n(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  независимо от величины действующего возмущения. Это гарантирует единственность установившейся реакции  $y_n(t)$ .

**Пример 11.2.** Рассмотрим систему с обратной связью и с нелинейностью типа ограничения. В § 6.5 с помощью эквивалентной передаточной функции было показано, что когда годограф  $G(j\omega)$  находится внутри определенной области (см. рис. 6.19), то возможно явление скачкообразного резонанса. Это значит, что в некоторых случаях реакция на периодический входной сигнал может быть неоднозначной. Читатель может проверить это самостоятельно, применив теорему 11.7. В этом случае достаточным условием отсутствия явления скачкообразного резонанса в такой системе будет условие  $\operatorname{Re} G(j\omega) > -1$  (см. задачу 11.11). Обратимся к рис. 6.19, откуда видно, что полученная граница более точная, чем граница областей существования и отсутствия скачкообразного резонанса, определенная приближенным способом, основанным на методе эквивалентной передаточной функции. Действительно можно показать (см. упражнение 11.16), что для всех безынерционных нелинейностей граница скачкообразного резонанса, определенная методом данного параграфа, всегда будет точнее полученной на основе метода эквивалентной передаточной функции.

Следует быть осторожным в утверждении, что при выполнении условий теоремы 11.7 любое вынужденное решение  $y(t) = y(t + T)$  устойчиво и единственно. При этом не обязательно, чтобы функция  $y(t)$  имела тот же период, что и входной сигнал  $r(t)$ . Например, могут появляться субгармонические составляющие. Однако Якубовичем [202] и Сандбергом [177] было показано, что при определенных условиях для каждого входного сигнала с периодом  $T$  существует единственный выходной сигнал с тем же периодом. Условия, для которых это справедливо, включают случай системы (см. рис. 11.1) с однозначной стационарной нелинейностью  $u = f(e)$ , для которой удовлетворяются условия теоремы 11.7. Таким образом, для однозначной нелинейности теорема 11.7 дает не только достаточные условия устойчивости и единственности любого вынужденного решения  $y(t)$ , но и достаточные условия отсутствия субгармонических реакций на периодическое возбуждение.

Реакция одноконтурной нелинейной системы с обратной связью на периодическое возбуждение будет рассмотрена в следующем параграфе.

## 11.6. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Покажем, что на основе линеаризации можно проанализировать орбитальную асимптотическую устойчивость или что то же — асимптотическую устойчивость решения с известным периодом. Если на стационарную систему  $\dot{x} = f(x, u)$  действует периодический входной сигнал  $u(t)$  с периодом  $T$ , то, выразив входной сигнал как функцию  $t$ , уравнение системы можно представить в нестационарном виде

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (11.70a)$$

где функция  $f$  периодична с периодом  $T$ , т. е.

$$f(x, t) = f(x, t + T). \quad (11.70б)$$

Системы (11.70а), где  $f$  удовлетворяет условию (11.70б), называются периодическими системами. Другой случай периодической системы имеет место, когда периодический выходной сигнал вызывает в системе вынужденные колебания.

Отметим, что периодическая система, как сказано выше, не обязательно производит периодический выходной сигнал с тем же периодом  $T$ . Когда же это имеет место, существует периодическое решение вида

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_n(t + T). \quad (11.71)$$

В гл. 5 показано, что, осуществляя линейризацию относительно траектории и используя теорему 5.2, можно установить свойства равномерной асимптотической устойчивости траектории, если только линейризованная система равномерно асимптотически устойчива относительно начала координат. При использовании теоремы 5.2 возникают две трудности: во-первых, при определении равномерной асимптотической устойчивости линейной системы; во-вторых, это требование зачастую оказывается слишком сильным. В некоторых случаях достаточно существования орбитальной асимптотической устойчивости. Интересные результаты получены для того случая, когда линейризованная система периодическая. Сформулируем следующую лемму.

**Лемма 11.4.** Рассмотрим периодическую линейную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad (11.72)$$

где  $\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t)$  для некоторого  $T \neq 0$ . Пусть переходная матрица системы  $\Phi(t, t_0)$  ограничена и  $\zeta_i = 1, \dots, n$  — суть собственные значения матрицы  $\Phi(t_0 + T, t_0)$ , тогда имеем

$$1) \Phi(t + nT, t_0 + nT) = \Phi(t, t_0); \quad (11.73)$$

2) если  $|\zeta_i| < 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , то исходная система (11.72) равномерно асимптотически устойчива в целом.

**Доказательство.**

Так как  $\mathbf{A}(t)$  — периодическая система с периодом  $T$ , то выходя из состояния  $\mathbf{x}_0$  в момент  $t$ , она приобретает ту же скорость  $\dot{\mathbf{x}}$ , как если бы начиналось движение в момент  $t + T$  или  $t + nT$ . Это значит, что если  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x}_0$ , то  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$  для всех  $t_0$  и  $t$ , т. е. равенство (11.73) немедленно выполняется. Таким образом, условие 1) мы доказали. Условие 2) можно доказать, используя  $z$ -преобразования (см. приложение II).

Пусть

$$\tilde{\Phi}(z, t_0) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(t_0 + nT, t_0) z^{-n}. \quad (11.74)$$

Согласно выражению (11.21) приложения II, если  $\tilde{\Phi}(z, t_0)$  — аналитическая функция в области  $|z| \geq 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(t_0 + nT, t_0)\| = 0$ . Но так как  $\Phi(t_0 + nT, t_0) = [\Phi(t_0 + T, t_0)]^n$ , то необходимым и достаточным условием сходимости нормы  $\|\Phi(t_0 + nT, t_0)\|$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$  является требование  $\|\Phi(t_0 + T, t_0)\| < 1$ . Следовательно, если  $\tilde{\Phi}(z, t_0)$  — аналитическая в области  $|z| \geq 1$  для всех  $t_0$ , то  $\|\Phi(t_0 + T, t_0)\| < 1$  для всех  $t_0$ .

Применяя  $z$ -преобразование к обеим частям очевидного равенства

$$\Phi(t_0 + (n + 1)T, t_0) = \Phi(t_0 + nT, t_0) \Phi(t_0 + T, t_0),$$

получим, используя формулу (II.146) приложения II,

$$[z\mathbf{I} - \Phi(t_0 + T, t_0)] \tilde{\Phi}(z, t_0) = z\Phi(t_0, t_0) = z\mathbf{I}, \quad (11.75)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица. Характеристическое уравнение для матрицы (11.75) задается выражением

$$|\Phi(t_0 + T, t_0) - I\zeta| = 0. \quad (11.76)$$

Таким образом, если все корни  $\zeta_i$  в уравнении (11.76) удовлетворяют условию  $|\zeta_i| < 1$ , то функция  $\tilde{\Phi}(z, t_0)$  — аналитическая в области  $|z| \geq 1$ , что, как показано выше, предполагает существование такого  $\rho$  (не зависящего от  $t_0$ ), что  $\|\Phi(t_0 + T, t_0)\| \leq \rho < 1$  для любых  $t_0$ .

Положив  $t = t_0 + nT + \tau$ , где  $0 \leq \tau \leq T$ , имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t_0 + nT + \tau)\| &= \|\Phi(t_0 + nT + \tau, t_0 + nT) \mathbf{x}(t_0 + nT)\| = \\ &= \|\Phi(t_0 + \tau, t_0) \mathbf{x}(t_0 + nT)\| = \|\Phi(t_0 + \tau, t_0) \Phi(t_0 + nT, t_0) \mathbf{x}(t_0)\| \leq \\ &\leq \Phi_m \rho^n \|\mathbf{x}(t_0)\| \end{aligned}$$

при  $0 \leq \rho < 1$ , где  $\Phi_m = \max_{\{0 \leq \tau \leq T; t_0\}} \|\Phi(t_0 + \tau, t_0)\|$ .

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta$ , а именно:  $\delta = \varepsilon / \Phi_m$  (не зависящее от  $t_0$ ) такое, что если  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \delta$ , то  $\|\mathbf{x}(t_0 + t)\| = \|\mathbf{x}(t_0 + nT + \tau)\| < \varepsilon \rho^n < \varepsilon$  при  $0 \leq \rho \leq 1$  для любых  $t_0, \tau$  и  $n$ .

Это и означает равномерную асимптотическую устойчивость в целом. С помощью леммы 11.4 можно установить следующий важный результат\*:

**Теорема 11.8.\*** Пусть для системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  уравнение возмущенного движения относительно заданного периодического  $\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_n(t + T)$ ,  $T \neq 0$ , задается выражением

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_n \delta \mathbf{x} + \mathbf{h}(\delta \mathbf{x}, t), \quad (11.77)$$

где  $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)$ ,  $[(\partial \mathbf{f}(t)/\partial \mathbf{x})]_n$  — периодическая функция с периодом  $T$  и пусть  $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)\| / \|\delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0$  равномерно при  $\|\delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ .

Пусть линейная система  $\delta \dot{\mathbf{x}} = [(\partial \mathbf{f}(t)/\partial \mathbf{x})]_n \delta \mathbf{x}$  имеет переходную матрицу  $\Phi(t, t_0)$  и  $\zeta_i, i = 1, \dots, n$  — собственные значения матрицы  $\Phi(t_0 + T, t_0)$ .

Справедливы следующие утверждения:

1) Если исходная система имеет вид  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T)$  (т. е. система периодическая с периодом  $T$ ) и  $|\zeta_i| < 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , то периодическое решение  $\mathbf{x}_n(t)$  асимптотически устойчиво.

2) Если исходная система автономна, т. е.  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , и  $|\zeta_i| < 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , кроме одного  $\zeta_k = 1$ , то периодическое решение устойчиво и, кроме того, орбитально асимптотически устойчиво.

**Пример 11.3.** Рассмотрим систему примера 4.4:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2 - 1); \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (11.78)$$

В примере 4.4 было показано, что система (11.78) имеет предельный цикл, определяемый выражением

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \quad (11.79)$$

Линеаризованная система определяется матрицей  $\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t) \right]_n$ , заданной выражением

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t) \right]_n = \begin{bmatrix} -2a \sin^2 t & 1 - 2a \sin t \cos t \\ -1 - 2a \sin t \cos t & -2a \cos^2 t \end{bmatrix} \quad (11.80)$$

(получите его самостоятельно).

\* Теорема 11.8 основана на теоремах Андронова и Витта. Формулировку и доказательство теоремы см. в работах [31], [161].

Можно показать, что линеаризованная система имеет переходную матрицу

$$\Phi(t, t_0) = \left. \begin{aligned} &= \begin{bmatrix} e^{-2a(t-t_0)} (\sin t_0 \sin t + \cos t_0 \cos t) & e^{-2a(t-t_0)} (\cos t_0 \sin t - \sin t_0 \cos t) \\ e^{-2a(t-t_0)} (\sin t_0 \cos t - \cos t_0 \sin t) & e^{-2a(t-t_0)} (\cos t_0 \cos t + \sin t_0 \sin t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (11.81)$$

(проверьте это).

Видно, что  $[\partial f/\partial x]_n$  — матрица периодическая с тем же периодом  $T = 2\pi$ , что и предельный цикл исходной системы (11.78). Из выражения (11.81) имеем

$$\Phi(t_0 + T, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-4\pi a} (\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0) & -(1 - e^{-4\pi a}) \sin t_0 \cos t_0 \\ -(1 - e^{-4\pi a}) \sin t_0 \cos t_0 & e^{-4\pi a} (\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0) \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} |\Phi(t_0 + T, t_0) - \zeta I| &= \zeta^2 - (1 - e^{-4\pi a}) \zeta + \frac{1}{8} (1 + e^{-8\pi a}) (1 - \cos 4t_0) + \\ &+ \frac{1}{4} e^{-4\pi a} (3 + \cos 4t_0) = 0. \end{aligned} \quad (11.82)$$

Корни уравнения (11.82) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{2} [1 + \cos 2t_0 + e^{-4\pi a} (1 - \cos 2t_0)]; \\ \zeta_2 &= \frac{1}{2} [1 - \cos 2t_0 + e^{-4\pi a} (1 + \cos 2t_0)]. \end{aligned} \right\} (11.83)$$

Отсюда следует, что значения корней зависят от  $t_0$  и  $a$ . Для  $a = +1$  можно установить (покажите это), что самое большое один корень может достигнуть величины 1; остальные значения корней  $\zeta_i$  всегда меньше единицы. Таким образом, предельный цикл, определяемый условиями (11.79), не только устойчив, но согласно второй части теоремы 11.8 орбитально асимптотически устойчив.

Аналогично мы можем установить (проделайте это), что если  $a = -1$ , то условия устойчивости предельного цикла (11.79) не выполняются. Приведенные результаты сравните с примером 4.4.

Применение теоремы 11.8 требует отыскания переходной матрицы, что почти эквивалентно отысканию решения системы. Поэтому, на первый взгляд, применимость теоремы кажется довольно ограниченной. Мы должны отметить два положительных момента в теореме 11.8. Во-первых, можно найти переходную матрицу  $\Phi(t, t_0)$ , численно интегрируя матричное уравнение  $\dot{\Phi} = [\partial f/\partial x]_n \Phi$ ,  $\Phi(t_0, t_0) = I$ . Действительно, для применения теоремы 11.8 необходимо лишь получить  $\Phi$  для одного периода от  $t_0$  до  $t_0 + T$ , а затем найти собственные значения  $\zeta_i$  матрицы  $\Phi(t_0 + T, t_0)$ . Это легче, чем искать  $\Phi$  для большого периода времени.

Во-вторых, для релейных систем можно найти непрерывное решение.

**Пример 11.4.** Укажем этапы доказательства теоремы 8.4\*.

Для системы, рассмотренной в теореме 8.4, имеем  $y(t) = -e(t)$  и  $g(0^+) = 0$ . Из выражения (8.13а) при  $a = 1/2$  и из соотношения (8.61) имеем

$$0 < \frac{|\dot{e}(\pi/\omega)|}{2U} = -\frac{\dot{e}(\pi/\omega)}{2U} = \frac{\dot{y}(\pi/\omega)}{2U} = \mathcal{G}'(-1), \quad (11.84)$$

так что характеристическое уравнение (8.77) преобразуется к виду

$$\mathcal{G}'(z) - \mathcal{G}'(-1) = 0. \quad (11.85)$$

\* Заметим, что для релейных систем возмущенные уравнения не выражаются через обычную процедуру взятия частных производных (см. материал, предшествующий теореме 8.2). Однако теорема 11.8 применяется к возмущенным уравнениям.

Из уравнений (11.84) и (8.61) следует, что корень  $z = -1$  соответствует периодическому решению линеаризованной системы, изображенной на рис. 8.15. Согласно принятому толкованию теоремы 11.8 (покажите это) собственные колебания исходной релейной системы будут орбитально асимптотически устойчивыми, если все корни (11.85) лежат в круге  $|z| < 1$ , кроме единственного корня  $z = -1$ .

Рассмотрим контур  $C$ , определяемый уравнением  $|z| = 1$ , за исключением бесконечно малой полуокружности вне  $|z| = 1$ , около точки  $z = -1$  и, возможно, около точки  $z = +1$  (если  $\mathcal{G}'(z)$  имеет полюс в точке  $z = +1$ ). При предположениях, сделанных относительно линейного элемента, область вне контура  $C$  на  $z$ -плоскости переводится на  $\mathcal{G}'(z)$ -плоскости в область правее точки  $\mathcal{G}'(-1)$ . Точка  $\mathcal{G}'(-1)$  не будет включаться тогда и только тогда, когда изображение  $z = -1 + re^{j\theta}$  при  $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$  и  $r \rightarrow 0$  на  $\mathcal{G}'(z)$ -плоскости обходит точку  $\mathcal{G}'(-1)$  справа. В окрестности точки  $z = -1$  имеем

$$\mathcal{G}'(z) = \mathcal{G}'(-1) + \left. \frac{\partial \mathcal{G}'(z)}{\partial z} \right|_{z=-1} re^{j\theta}; \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}; \quad r \rightarrow 0, \quad (11.86)$$

но из выражений (8.3), (8.62) и (8.63) можно получить, что

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \mathcal{J}(\omega)/\partial \omega} = (2\pi U/\omega^2) \left[ \left. \frac{\partial \mathcal{G}'(z)}{\partial z} \right|_{z=-1} \right].$$

Следовательно, выражение (11.86) преобразуется к виду

$$\mathcal{G}'(-1) + \frac{\omega^2}{2\pi U} \cdot \frac{\partial \operatorname{Im} \mathcal{J}(\omega)}{\partial \omega} re^{j\theta}; \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}; \quad r \rightarrow 0. \quad (11.87)$$

Поэтому годограф  $\mathcal{G}'(z)$ , отображающий  $C$ , будет обходить точку  $\mathcal{G}'(-1)$  справа и не будет скрывать ее, если  $[\partial \operatorname{Im} \mathcal{J}(\omega)/\partial \omega] < 0$ . Согласно критерию устойчивости Найквиста\*, формуле (11.85) и теореме 11.8\*\* делаем вывод, что периодическое решение исходной системы устойчиво и орбитально асимптотически устойчиво.

## 11.7. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ СЖАТОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Большое значение при анализе устойчивости приобретают идеи функционального анализа\*\*\*. Однако мы рассмотрим только один важный его вывод: теорему о неподвижной точке сжатых отображений. Введем некоторые основные понятия.

### 1. Абстрактные и банахово пространства

Как следует из названия, функциональный анализ оперирует с функциями. Аналогично векторному пространству  $\mathcal{E}_n$ , которое является пространством  $n$ -мерных векторов, можно определить функциональное пространство. В настоящей главе и гл. 10 использовались некоторые функциональные пространства  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ . Сейчас мы рассмотрим основные свойства и структуру одного функционального пространства, называемого линейным функциональным пространством.

Линейное функциональное пространство  $\mathcal{V}$  — это совокупность функций  $v_1, v_2, \dots$ , обладающая следующими свойствами:

1) относительно элементов пространства  $\mathcal{V}$  определены две операции: первая — сложение двух элементов  $v_i$  и  $v_j$ , обозначаемое  $v_i + v_j$ , и вторая — умножение на скаляр  $\alpha$ , обозначаемое  $\alpha v_i$ . Требуется, чтобы такие операции, примененные к элементам совокупности, давали в качестве результатов элементы этой же самой совокупности. В частности,  $1v = v$ ;

\* В СССР этот критерий устойчивости именуется как критерий устойчивости Михайлова—Найквиста (Прим. ред.).

\*\* См. сноску на стр. 325.

\*\*\* Можно отметить, что функциональный анализ широко используется в теории оптимального управления. Интересующегося читателя отсылаем к работе Аоки [4] и книге Портера [164].

2) существует нуль-функция  $\theta$  такая, что,  $v + \theta = v$  для каждого  $v$  из  $\mathcal{V}$ , и такая, что  $\theta v = \theta$ ;

3) умножение и сложение являются ассоциативными операциями в том смысле, что  $\alpha(v_i + v_j) = \alpha v_i + \alpha v_j$ ;  $(\alpha + \beta)v_i = \alpha v_i + \beta v_j$ .

Если для каждого элемента  $v$  функционального пространства  $\mathcal{V}$  определить норму  $\|v\|$  таким образом, что а)  $\|v\| > 0$  при  $v \neq \theta$  и  $\|v\| = 0$  при  $v = \theta$ ; б)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  и в)  $\|v_i + v_j\| \leq \|v_i\| + \|v_j\|$ , то  $\mathcal{V}$  называется нормированным функциональным пространством.

Последовательность функция  $\{v_1, v_2, \dots\}$ , определенная на нормированном функциональном пространстве  $\mathcal{V}$ , называется последовательностью Коши, если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует целое положительное число  $N$  такое, что для каждого целого положительного  $m$ ,  $\|v_{n+m} - v_n\| < \varepsilon$ , каково бы ни было  $n > N$ . Последовательность называется сходящейся к некоторому элементу  $v'$  из  $\mathcal{V}$ , если каждому  $\varepsilon > 0$  можно поставить в соответствие  $N$  такое, что  $\|v_n - v'\| < \varepsilon$  для всех  $n \geq N$ .

Полным нормированным линейным функциональным пространством  $\mathcal{V}$  называется такое, в котором каждая последовательность Коши сходится к некоторому элементу из  $\mathcal{V}$ . Такое пространство называется банаховым пространством.

**Пример 11.5.** Рассмотрим множество всех действительных непрерывных функций  $f(t)$ , определенных на временном интервале  $[t_1, t_2]$ . Определив обычным образом сложение и умножение и введя норму

$$\|f_1(t) - f_2(t)\| = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |f_1(t) - f_2(t)|,$$

получим функциональное пространство  $\mathcal{C}[t_1, t_2]$ . Последовательность Коши  $\{f_1(t), f_2(t), \dots\}$  (сокращенно  $\{f_n(t)\}$ ) в этом пространстве должна удовлетворять тому требованию, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует целое число  $N$  такое, что если  $n, m > N$ , то  $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$  для всех  $t \in [t_1, t_2]$ . Это условие, однако, подразумевает, что последовательность  $\{f_n(t)\}$  сходится равномерно. По теореме о равномерной сходимости  $\{f_n(t)\}$  сходится к непрерывной функции  $f(t)$ . Таким образом,  $\mathcal{C}[t_1, t_2]$  является банаховым пространством (см. также упражнение 11.7).

Для  $n$ -мерных действительных и непрерывных вектор-функций  $f(t)$ , определенных на интервале  $[t_1, t_2]$ , можем ввести норму

$$\|f_a(t) - f_b(t)\| = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^n [f_{ai}(t) - f_{bi}(t)]^2},$$

где  $f_{ai}(t)$  является  $i$ -й компонентой  $f_a(t)$ . Это сразу же устанавливает, что определенное выше пространство  $f(t)$  также банахово.

**Пример 11.6.** Теперь рассмотрим пространство  $\mathcal{H}$  действительных периодических по  $t$  функций с периодом  $T$ , которые являются интегрируемыми с квадратом в течение периода. Если для каждого элемента  $v$  этого пространства мы определим норму  $v$  как его среднеквадратичное значение

$$\|v\| = \left( \frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt \right)^{1/2},$$

то нетрудно показать, что пространство  $\mathcal{H}$  является банаховым пространством (см. упражнение 11.9).

\* Примером последовательности Коши в пространстве  $\mathcal{C}[t_1, t_2]$  может служить  $f_n(t) = f(t) + a^{-n}$ , где  $|a| > 1$ , а  $f(t)$  — некоторый заданный элемент пространства.

\*\* См. любой достаточно полный курс математического анализа.

## 2. Функциональные операции в банаховых пространствах

Два функциональных пространства  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$  часто связываются функциональным уравнением вида

$$\mathcal{G}u = v,$$

которое мы понимаем так: существует преобразование  $\mathcal{G}$ , преобразующее (отображающее) элемент  $u$  пространства  $\mathcal{U}$  в элемент  $v$  пространства  $\mathcal{V}$ .

Конечно, преобразование  $\mathcal{G}$  может перевести элемент функционального пространства  $\mathcal{V}$  в другой элемент того же самого пространства; в этом случае  $\mathcal{G}$  называется оператором. Для таких преобразований иногда бывает интересно найти хотя бы один элемент, обозначаемый  $v^*$ , который остается неизменным после преобразования  $\mathcal{G}$ . В этом случае ищем такие решения  $v^*$ , что

$$\mathcal{G}v^* = v^*. \quad (11.88)$$

Функция  $v^*$ , которая удовлетворяет уравнению вида (11.88), называется неподвижной точкой преобразования  $\mathcal{G}$ .

**Пример 11.7.** Рассмотрим систему первого порядка  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ;  $x(0) = x_0$ . Если функция  $f(x)$  дифференцируема, то решение  $x(t)$ , которое удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальным условиям, непрерывно, а  $f(x)$  на всем интервале  $t \in [0, T]$  является элементом пространства  $C[0, T]$ , определенного в примере 11.5. Определим опера-

тор  $\mathcal{G}$  следующим образом:  $\mathcal{G}[x(t)] = x_0 + \int_0^t f(x(\tau)) d\tau$ ; тогда  $\mathcal{G}$  является отображением

пространства  $C[0, T]$  в себя, и любое решение  $x(t)$  системы  $\dot{x} = f(x)$  на интервале  $[0, T]$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0$ , есть неподвижная точка оператора  $\mathcal{G}$ .

Иногда требуется ввести понятие нормы оператора. Традиционное определение нормы линейного оператора<sup>1</sup>  $\mathcal{G}$ , заданного на соответствующем банаховом пространстве  $\mathcal{V}$  и обозначаемого через  $\|\mathcal{G}\|$ , будет

$$\|\mathcal{G}\| = \max_{\substack{v \in \mathcal{V} \\ \|v\|=1}} \|\mathcal{G}v\|. \quad (11.89)$$

Норма  $\mathcal{G}$  определяется максимальным значением нормы  $\|\mathcal{G}v\|$  в предположении, что все элементы  $v$  имеют единичную норму и принадлежат  $\mathcal{V}$ . Оператор  $\mathcal{G}$  называется ограниченным оператором, когда вся норма  $\|\mathcal{G}\|$  ограничена. При этом для всех  $v \in \mathcal{V}$  имеем

$$\|\mathcal{G}v\| \leq \|\mathcal{G}\| \|v\|. \quad (11.90)$$

## 3. Теорема о неподвижной точке сжатого отображения

Ограниченный оператор  $\mathcal{G}$ , который отображает пространство  $\mathcal{V}$  в себя, называется оператором сжатия, если для любых двух элементов  $v_a$  и  $v_b$  принадлежащих  $\mathcal{V}$ , выполняется следующее условие:

$$\|\mathcal{G}v_a - \mathcal{G}v_b\| \leq \rho \|v_a - v_b\|, \quad 0 < \rho < 1. \quad (11.91)^1$$

Как указывает само название, «расстояние» между преобразованными функциями меньше, чем «расстояние» между исходными функциями.

Особенность операторов сжатия в банаховом пространстве заключается в том, что существует единственная неподвижная точка. Более того, эта

\* Линейный оператор  $\mathcal{G}$  обладает тем свойством, что для любых двух функций  $u, v$ , принадлежащих банахову пространству  $\mathcal{V}$ , и любых двух скаляров  $k_1, k_2$  имеем

$$\mathcal{G}[k_1v + k_2u] = k_1\mathcal{G}v + k_2\mathcal{G}u.$$

<sup>1</sup>) Заметим, что выражение (11.91) является условием Липшица.



неподвижная точка может быть найдена с помощью итерационной процедуры. Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 11.9** (теорема о неподвижной точке сжатых отображений). Если оператор  $\mathcal{G}$  является оператором сжатия, определенным на банаховом пространстве  $\mathcal{V}$ , то

1) существует единственный элемент  $v^*$  множества  $\mathcal{V}$ , удовлетворяющий условиям

$$\mathcal{G}v^* = v^*; \quad (11.92)$$

2) последовательность  $v_1, v_2, \dots$ , задаваемая правилом

$$v_{n+1} = \mathcal{G}v_n \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (11.93)$$

сходится к  $v^*$  при любом начальном выборе  $v_0$  из  $\mathcal{V}$ ;

3) норма  $\|v_n - v^*\|$  ограничена:

$$\|v_n - v^*\| \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|\rho v_0 - v_0\|. \quad (11.94)$$

Доказательство теоремы проводится непосредственно, так как для любых чисел  $n$  и  $m$  при  $m > n$  имеем

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \|\mathcal{G}^m v_0 - \mathcal{G}^n v_0\| \leq \rho^n \|v_{m-n} - v_0\| \leq \rho^n \{ \|v_0 - v_1\| + \|v_1 - v_2\| + \dots + \\ &+ \|v_{m-n} - v_{m-n+1}\| \} \leq \rho^n \|v_0 - v_1\| \{ 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m-n} \} \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|v_0 - v_1\| \leq \\ &\leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|\rho v_0 - v_0\|. \end{aligned} \quad (11.95)$$

Таким образом, получено неравенство (11.94). Предел  $\mathcal{G}^n v_0$  при  $n \rightarrow \infty$  существует в силу полноты банахова пространства. Заметим, что найдется, по крайней мере, одно предельное значение для каждого выбора  $v_0$ . Пусть  $v_1^*$  является таким предельным значением, тогда видно, что

$$\mathcal{G}v_1^* = \mathcal{G} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}^n v_0 = \mathcal{G} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = v_1^*.$$

Таким образом,  $v_1^*$  является неподвижной точкой для преобразования  $\mathcal{G}$ . Чтобы показать единственность неподвижной точки  $v^*$ , предположим, что существуют две различные неподвижные точки  $v_1^*$  и  $v_2^*$ . Тогда можно записать

$$\|v_1^* - v_2^*\| = \|\mathcal{G}v_1^* - \mathcal{G}v_2^*\| \leq \rho \|v_1^* - v_2^*\|. \quad (11.96)$$

Если норма  $\|v_1^* - v_2^*\|$  не равна 0, то уравнение (11.96) означает, что норма меньше самой себя, а это невозможно. Таким образом,  $v_1^* = v_2^*$ , и существует единственная неподвижная точка.

Если оператор сжатого отображения существует только в некоторой окрестности элемента  $v_0$  из банахова пространства, то имеем следующую теорему, обратную теореме о неподвижной точке сжатых отображений.

**Теорема 11.10.** Если условие (11.91) выполняется только в окрестности  $\|v - v_0\| < r$  элемента  $v_0$  из банахова пространства, то теорема 11.9 верна лишь при условии, что  $\rho$  удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|\mathcal{G}v_0 - v_0\| < (1 - \rho)r. \quad (11.97)$$

Теоремы 11.9 и 11.10 не только определяют условия существования единственного решения функционального уравнения  $\mathcal{G}v = v$ , но и гарантируют сходимость итерационной процедуры получения решения. Приведенные выше теоремы широко используются ввиду их наглядности, в чем можно убедиться на следующих примерах.

Пример 11.8 (доказательство теоремы 3.1). Система (3.3) может быть записана в интегральной форме:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (11.98)$$

Вводя норму следующим образом <sup>1)</sup>:

$$\|x(t)\| = \max_{t_0-c \leq t \leq t_0+c} \left[ \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)} \right], \quad (11.99)$$

можем определить

$$M = \max_{\mathcal{R}} \|f(x(t), t)\|.$$

Принимая  $0 < \rho < 1$ , определим, что значение константы  $a$  в теореме 3.1

$$a = \min \left\{ c, \frac{b}{M} (1 - \rho), \frac{\rho}{k} \right\},$$

где  $k$  — постоянная Липшица.

Теперь имеем банахово пространство непрерывных вектор-функций  $x(t)$  на интервале  $(t - t_0) \leq a$  с нормой, определяемой выражением (11.99). В этом пространстве рассмотрим оператор  $\mathcal{G}$  следующего вида:

$$\mathcal{G}[x(t)] = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau. \quad (11.100)$$

Возьмем в банаховом пространстве любые две функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , удовлетворяющие условиям  $\|x_1(t) - x_0\| < b$  и  $\|x_2(t) - x_0\| < b$ . Отсюда видно, что

$$\mathcal{G}[x_1(t)] - \mathcal{G}[x_2(t)] = \int_{t_0}^t [f(x_1(\tau), \tau) - f(x_2(\tau), \tau)] d\tau$$

или

$$\|\mathcal{G}[x_1(t)] - \mathcal{G}[x_2(t)]\| \leq \int_{t_0}^{t_0+a} \|f(x_1(\tau), \tau) - f(x_2(\tau), \tau)\| d\tau.$$

Применяя условие Липшица (3.5) к правой части неравенства, получим

$$\|\mathcal{G}[x_1(t)] - \mathcal{G}[x_2(t)]\| \leq ka \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \rho \|x_1(t) - x_2(t)\|,$$

следовательно,  $\mathcal{G}$  является оператором сжатия в банаховом пространстве в области  $\mathcal{H}$ .

Аналогично, так как

$$\mathcal{G}x_0 - x_0 = \int_{t_0}^t f(x_0, \tau) d\tau,$$

получим для  $t \in (t_0, t_0 + a)$

$$\|\mathcal{G}x_0 - x_0\| \leq Ma \leq (1 - \rho) b.$$

Таким образом, на основании теоремы 11.10 существует единственное решение уравнения (3.1), которое удовлетворяет условиям теоремы 3.1.

#### 4. Способ улучшения метода эквивалентных передаточных функций для систем с периодическим входом

Используя функциональное пространство  $\mathcal{H}$  и среднеквадратичную норму, введенную в примере 11.6, Сандберг [176] при изучении систем с входными сигналами (рис. 11.5) смог применить теорему о неподвижной точке

<sup>1)</sup> Заметим, что хотя символы одни и те же, норма, определенная в настоящем примере, отличается от той, что использована в теореме 3.1, однако это не влияет на общность доказательства.

сжатого отображения для получения некоторых результатов относительно поведения систем с периодическим входом. Поскольку оператор сжатия допускает получение решения методом итераций, можно указать путь улучшения метода эквивалентных передаточных функций, когда речь идет о предсказании формы сигнала.

Однако метод справедлив только для систем (в стандартной форме) с периодическим входом. Более того, при сделанных допущениях в системе не возникают автоколебания. Пусть система, приведенная на рис. 11.5, возможно, преобразованная из исходной в результате сдвига полюсов, подчиняется следующим соотношениям:

1) однозначная нелинейность  $f(e)$  удовлетворяет условию \*

$$0 \leq \frac{f(e_2) - f(e_1)}{e_2 - e_1} \leq 2 \quad (11.101)$$

для любых  $e_1$  и  $e_2$ ;

2) стационарный линейный

объект полностью описывается заданием импульсной переходной характеристики  $g(t)$ , так что его действие на элемент пространства  $\mathcal{K}$  посредством оператора  $\mathcal{G}$  определяется с помощью интеграла свертки

$$\mathcal{G}[v(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) v(\tau) d\tau. \quad (11.102)$$

Прежде чем излагать основные результаты, отметим два очевидных свойства линейного объекта.

Во-первых, норма оператора  $\mathcal{G}$  из уравнения (11.102) в соответствии с выражением (11.89) подчиняется следующему условию:

$$\|\mathcal{G}\| = \max_n \left| G\left(jn \frac{2\pi}{T}\right) \right|. \quad (11.103)$$

Это объясняется тем, что в пространстве  $\mathcal{K}$  квадрат нормы  $\mathcal{G}$  может быть представлен как максимально возможная «плотность мощности» выходного сигнала линейного блока  $G$ , когда входной сигнал принадлежит классу периодических функций периода  $T$  с единичной «плотностью мощности». По теореме Парсеваля, если  $v_n$  является  $n$ -м коэффициентом ряда Фурье входного сигнала  $v(t) \in \mathcal{K}$ , то

$$\|\mathcal{G}v\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \left| G\left(jn \frac{2\pi}{T}\right) \right|^2 |v_n|^2.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{G}\| \leq \max_n \left| G\left(jn \frac{2\pi}{T}\right) \right|. \quad (11.104)$$

Однако, если  $n = m$  является тем индексом, при котором величина  $\left| G\left(jn \frac{2\pi}{T}\right) \right|$  оказывается максимальной, то функция  $v(t)$  с периодом  $\frac{T}{m}$  и единичной нормой определяет норму  $\|\mathcal{G}\|$ , равную  $\left| G\left(jm \frac{2\pi}{T}\right) \right|$ . Таким образом, выражение (11.104) должно удовлетворять только условию равенства.

\* Сандберг [176] рассмотрел более общий случай.

Допустим, что величина  $\left| 1 + G \left( jn \frac{2\pi}{T} \right) \right| > \delta > 0$  для каждого целого  $n$ ; тогда для любого элемента  $u \in \mathcal{K}$  с конечной нормой всегда существует элемент  $v \in \mathcal{K}$  с конечной нормой такой, что

$$(\mathcal{J} + \mathcal{Z}) u = v, \quad (11.105)$$

где  $\mathcal{J}$  — единичный оператор, определяемый как  $\mathcal{J} v = v$  для всех  $v \in \mathcal{K}$ . Когда уравнение (11.105) выполнено, то можно символически записать

$$u = (\mathcal{J} + \mathcal{Z})^{-1} v; \quad (11.106)$$

отсюда видно, что для линейного объекта

$$\|(\mathcal{J} + \mathcal{Z})^{-1}\| = \max_n \left| \frac{1}{1 + G \left( jn \frac{2\pi}{T} \right)} \right|. \quad (11.107)$$

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

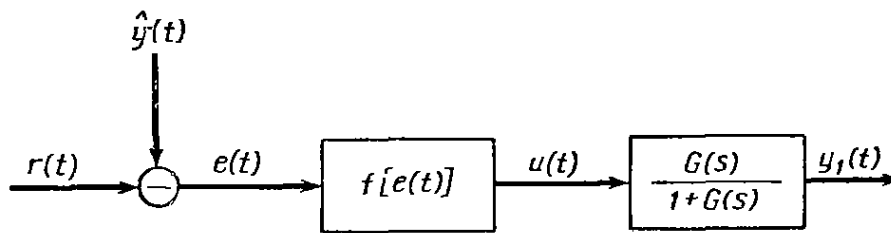


Рис. 11.6. Блок-схема итеративного процесса, получаемая по выражению (11.109)

**Теорема 11.11** (Сандберг [176]). В приведенной выше системе, если входной сигнал  $r(t)$  принадлежит функциональному пространству  $\mathcal{K}$  и

$$\rho = \max_n \left| \frac{G(jn \cdot 2\pi/T)}{1 + G(jn \cdot 2\pi/T)} \right| < 1, \quad (11.108)$$

то существует единственная выходная функция  $y^*(t)$ , которая принадлежит  $\mathcal{K}$ . Более того,  $y^*(t)$  может быть получена как предел последовательных итераций  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$ , где

$$y_{n+1} = (\mathcal{J} + \mathcal{Z})^{-1} \mathcal{Z} \{f(r - y_n) + y_n\}, \quad (11.109)$$

а результат  $n$ -й итерации удовлетворяет условию

$$\|y_n - y^*\| \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|y_1 - y_0\|. \quad (11.110)$$

Можно отметить, что существование единственного решения при выполнении соотношения (11.108) не удивительно и может быть получено с помощью других методов. Наиболее интересно применение формулы (11.109), которая может быть использована для улучшения результата, получаемого с помощью операторного метода для систем с синусоидальным входным сигналом, как это делалось в § 6.5.

Допустим,  $\hat{y}(t)$  — синусоидальное решение, полученное с помощью метода эквивалентной передаточной функции, тогда соотношение (11.109) указывает на необходимость определения синусоидального решения  $e(t) = r(t) - \hat{y}(t)$  сигнала на выходе нелинейности  $f(e(t))$ . Этот сигнал, будучи преобразован линейным блоком с передаточной функцией  $\left[ \frac{G(s)}{1 + G(s)} \right]$ , даст

улучшенное решение  $y_1(t)$  (рис. 7.6). Среднеквадратичная ошибка описанного выше решения оценивается формулой (11.110):

$$\|y_1 - y^*\| \leq \frac{\rho}{1 - \rho} \|y_1 - \hat{y}\|, \quad (11.111)$$

где  $y^*(t)$  — точный (но не известный) выходной сигнал системы. Заметим, что если условие  $\rho < 0,5$  не выполняется, то оценка, вероятно, малоприменима для практического использования. Для доказательства теоремы 11.11 необходимо построить подходящий оператор сжатия. Представим нелинейность  $f(e)$  в виде

$$f(e) = e + f_1(e). \quad (11.112)$$

По выражению (11.112) функциональное уравнение системы примет вид

$$y = \mathcal{G}[f(r - y)] = \mathcal{G}[(r - y) + f_1(r - y)] = \mathcal{G}r - \mathcal{G}y + \mathcal{G}[f_1(r - y)],$$

или после преобразований

$$y = (\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}r + (\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}[f_1(r - y)]. \quad (11.113)$$

Правая часть уравнения (11.113) определяет оператор  $\mathcal{M}$  в пространстве  $\mathcal{K}$  вида

$$\mathcal{M}y = (\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}r + (\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}[f_1(r - y)]$$

для всех  $r \in \mathcal{K}$ . Тогда для любых двух элементов  $y_1$  и  $y_2$  из  $\mathcal{K}$

$$\|\mathcal{M}y_1 - \mathcal{M}y_2\| = \|(\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}[f_1(r - y_1) - f_1(r - y_2)]\|.$$

На основании выражения (11.90) получим

$$\|\mathcal{M}y_1 - \mathcal{M}y_2\| \leq \|(\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}\| \|f_1(r - y_1) - f_1(r - y_2)\|. \quad (11.114)$$

Из выражения (11.101) видно, что

$$\|f_1(r - y_1) - f_1(r - y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|. \quad (11.115)$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{M}y_1 - \mathcal{M}y_2\| \leq \|(\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}\| \|y_1 - y_2\|$$

и  $\mathcal{M}$  является оператором сжатия, если

$$\|(\mathcal{G} + \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}\| = \max_n \left| \frac{G(jn \cdot 2\pi/T)}{1 + G(jn \cdot 2\pi/T)} \right| < 1.$$

Так как  $\mathcal{M}y = \mathcal{G}[f(r - y)]$ , то теорема 11.11 доказана. Для дальнейшего ознакомления с применением теоремы о сжатых отображениях в случае управления системами стандартного вида с нелинейностями, не подчиняющимися обобщенному условию Липшица, заданному в виде уравнения (11.101), отошлем читателя к работе [79]\*.

## 11.8. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

При анализе систем управления, устойчивых в отсутствие входных воздействий, возникают две следующие проблемы: а) будет ли выходной сигнал ограничен при ограничении входного сигнала; б) будет ли система при воздействии входного сигнала устойчива.

\* Хольцман в работе [79] показал, что теорема о сжатых отображениях не может быть применена к автономным системам для определения существования автоколебаний.

В этой главе приведены некоторые результаты по устойчивости систем управления при ограниченных входном и выходном сигналах (см. определения 11.1 и 11.2). Основные из них заключаются в следующем:

1. Для нестационарной линейной системы, если положение равновесия  $x = 0$  равномерно асимптотически устойчиво без входного сигнала, то (исключая некоторые тривиальные случаи) эта система устойчива в целом при ограниченных входном и выходном сигналах. Верно и обратное.

2. Для замкнутой системы управления, описываемой уравнением (11.26) с нестационарной линейной частью, если выполняется условие (11.28) и невозмущенная система равномерно асимптотически устойчива, то возмущенная система устойчива в малом при ограниченных входном и выходном сигналах (т. е. обеспечивается практическая устойчивость; см. теорему 11.3).

3. Если в замкнутой стационарной системе управления, характерной для задачи Попова, при отсутствии входного сигнала выходной сигнал асимптотически устойчив, то при ограниченном входном сигнале с ограниченной производной выходной сигнал также будет ограничен (см. теорему 11.6).

4. Для нелинейной системы вида (11.25), если начало координат невозмущенной системы равномерно асимптотически устойчиво, то система устойчива в малом при ограниченных входном и выходном сигналах.

Относительно вынужденного решения получены следующие результаты:

1. Если в линейной нестационарной системе при отсутствии входного сигнала начало координат равномерно асимптотически устойчиво, то вынужденное решение также равномерно асимптотически устойчиво (покажите это).

2. Если для нелинейной системы, линеаризованные уравнения которой имеют вид (11.26) при  $r(t) = 0$ , выполняется условие (11.28) и начало координат невозмущенной системы равномерно асимптотически устойчиво, то решения исходной системы также равномерно асимптотически устойчивы (см. теорему 5.2).

3. Для замкнутой системы управления в стандартном виде, характерном для задачи Попова в случае безынерционной нелинейности, вынужденное решение будет устойчиво в смысле теоремы 11.7.

4. В периодической или автономной системе с известным периодическим решением периода  $T$ , для определения устойчивости периодического решения часто может быть применена линеаризация в окрестности решения. Проблема, которая возникает здесь, заключается в нахождении собственных значений переходной матрицы, оцениваемой в момент  $t_0 + T$  (см. теорему 11.8).

В дополнение к приведенным выше результатам вводятся два специальных способа: это неравенство Беллмана—Гренвилла (лемма 11.1) и теорема о неподвижной точке сжатого отображения (теорема 11.9). Их применение иллюстрируется примером 11.1 и теоремой 11.11.

Для получения результатов в этой главе широко применялись неравенства, и поэтому полученные результаты оказываются слишком общими.

Практическое значение понятия устойчивости при ограниченных входном и выходном сигналах оставляет желать лучшего, если истинные границы не могут быть установлены. Применение неравенств, к сожалению, в большинстве случаев дает слишком широкие границы области устойчивости. Отыскание многозначных границ открывает интересную область исследований.

Теоремы об устойчивости вынужденных решений наиболее полезны. Однако во многих случаях можно получить лишь информацию об устойчивости в малом.

## 11.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

11.1. Определите, является ли каждая из следующих систем устойчивой при ограниченных входном и выходном сигналах:

а)  $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + \left(1 + \frac{a_2}{1+t^2}\right)x = r(t), \quad a_1, a_2 > 0;$

б)  $\ddot{x} + \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)x = r(t)$

(у к а з а н и е: образуйте разность, вычитая из заданных уравнений уравнение для приближенной системы  $\ddot{y} + y = r(t)$ , и используйте лемму Беллмана—Гренвилла).

11.2. Докажите теорему 11.5 (у к а з а н и е: это теорема следует из теоремы 11.2).

11.3. Для случая, когда система (11.38) стационарна, докажите теорему 11.5 независимо от хода доказательства, данного в предыдущей задаче, рассмотрев расположение полюсов передаточной функции  $G(s)$ .

Какие дополнительные условия должны быть наложены, чтобы теорема, обратная теореме 11.5, была справедлива, т. е. когда из устойчивости при ограниченных входном и выходном сигналах следует асимптотическая устойчивость стационарных систем при нулевом входном сигнале.

11.4. Рассмотрите систему вида

$$\dot{x}(t) = [A + B(t)]x(t) + r(t), \quad (11.116)$$

где  $A$  — постоянная матрица, такая что система  $\dot{y}(t) = Ay(t)$  асимптотически устойчива.

Считая, что  $\int_0^t \|B(\tau)\| d\tau \leq d \leq \infty$ , докажите следующее:

а) при  $r(t) \equiv 0$  все решения  $x(t)$  ограничены (у к а з а н и е: используйте лемму Беллмана—Гренвилла);

б) при  $r(t) \equiv 0$  все решения  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;

в) при  $r(t) \equiv 0$  начало координат (11.116) равномерно асимптотически устойчиво;

г) система (11.116) устойчива при ограниченных входном и выходном сигналах.

11.5. Покажите, что для линейной периодической системы, приведенной в примере 5.17, условие 2) леммы 11.4 не удовлетворяется.

11.6. Докажите следующую теорему (теорема 11.12): система с обратной связью (11.39) устойчива в целом при ограниченных входном и выходном сигналах, если  $|u(t)| = |\mathcal{F}[e(t), t]| \leq U < \infty$ , а линейный элемент имеет устойчивый выходной сигнал. Оцените важность этой теоремы.

11.7. Покажите, что последовательность  $\{f_n(t)\} = \{\arctg(nt)\}$ , определенная в пространстве  $C[-1, 1]$  примера 11.5, не образует последовательности Коши. Покажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  не является непрерывной функцией.

11.8. В условиях примера 11.5 для любого заданного элемента  $f_1(t)$  банахова пространства  $C[t_1, t_2]$  постройте последовательность Коши, сходящуюся к некоторому элементу  $f(t)$ .

11.9. Покажите, что нормированное функциональное пространство примера 11.6 является банаховым пространством (у к а з а н и е: докажите, что пространство является полным, используя разложение в ряд Фурье каждого элемента последовательности Коши).

11.10. Рассмотрите стандартную систему (рис. 11.1) с нелинейностью  $\mathcal{F}$  в виде единичного ограничения и  $\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$ . Предполагая, что  $r(t)$  задано в виде  $R \sin 3t$ , найдите приближенное решение, используя метод эквивалентной передаточной функции, а затем улучшите его с помощью приема Сандберга (§ 11.7).

11.11. Рассмотрите систему с обратной связью в стандартной форме с нелинейностью в виде единичного ограничителя. Покажите, используя теорему 11.7, что достаточным условием отсутствия явления скачкообразного резонанса, т. е. единственности каждой реакции на периодическое возбуждение  $r_n(t)$ , является условие  $\operatorname{Re} G(j\omega) > -1$ .

11.12. Составьте таблицу, сравнивающую все теоремы и леммы в гл. 5, 9—11. Не выписывая каждую теорему или лемму, классифицируйте их по следующим признакам: 1) для каких систем она применима; 2) содержание; 3) номер теоремы и автор; 4) область применения; 5) метод доказательства.

Н а п р и м е р: 1) автономная система  $\dot{x} = f(x)$ ; 2) устойчивость по Ляпунову состояния равновесия; 3) 5.1 (Ляпунов); 4) связывает устойчивость линейризованной системы, получаемой при малом возмущении около положения равновесия, с устойчивостью этого положения равновесия; 5) линейризация вблизи положения равновесия.

11.13. Рассмотрите основные системы с обратной связью (см. рис. 11.1): а) если  $r(t) = 0$ , то каков наибольший сектор при  $G(p) = \frac{1}{p-1}$ , в котором гарантируется существование

абсолютно асимптотически устойчивого управления с коэффициентом затухания  $\alpha$ , когда нелинейный элемент нестационарный (стационарный);

б) каков наибольший сектор расположения характеристик нелинейного элемента в обоих случаях (пункт 11.13а) для устойчивости в целом при ограниченных входном и выходном сигналах, как это показано на рис. 11.1.

11.14. Рассмотрите нестационарную линейную систему:

$$\dot{e}(t) + 2e(t) + k(t)e(t) = 0, \quad |k(t)| < K;$$

а) применив частотный критерий, определите, каково значение  $K$ , гарантирующее устойчивость выходного сигнала и асимптотическую устойчивость в целом;

б) определите  $K$ , гарантирующее асимптотическую устойчивость в целом, применив теорему 11.1.

11.15. Рассмотрите систему с обратной связью, заданную в виде  $e(t) = r(t) - y(t)$ ;  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$ ;  $y'(t) = u(t - T)$  при  $T = 2$ .

а) для  $r(t) = 0$  и нестационарного нелинейного элемента, каков сектор  $\frac{u}{|e|}$ , гарантирующий абсолютную асимптотическую устойчивость выходного сигнала;

б) пусть  $r(t) = 0$  и нелинейный элемент задается в виде  $u = 0,0001e + u_1$ , где

$$u_1 = \begin{cases} \frac{2}{e_0^2} |e| e, & |e| \leq e_0; \\ 2, & e > e_0; \\ -2, & e < -e_0. \end{cases}$$

Определите значения  $e_0$ , обеспечивающие устойчивость выходного сигнала:

в) для произвольного  $r(t)$  и нелинейного элемента из пункта б) найдите, какое значение  $e_0$  гарантирует устойчивость в целом при ограниченных входном и выходном сигналах;

г) для той же самой системы [см. пункт в)] определите, какое значение  $e_0$  обеспечивает устойчивость переходного процесса?

11.16. Рассмотрите одноконтурную систему (см. рис. 11.1) с безынерционной нелинейностью, удовлетворяющей условию (11.65). В соответствии с результатом § 11.5, если  $\frac{1}{k_1} > \frac{1}{k_2}$ ,

то в системе не могут возникать явления скачкообразного резонанса при синусоидальном  $r(t)$  в случае, когда годограф линейного объекта либо не окружает, либо не пересекает круга,

проходящего через точки  $-\frac{1}{k_1}$  и  $-\frac{1}{k_2}$ . Покажите, что при использовании метода эквивалентной передаточной функции для избежания явлений скачкообразного резонанса можно найти запретную область годографа для  $G(p)$ , которая всегда заключена в круге, определенном выше.

11.17. (Р. Бейкер и А. Берген). Рассмотрите систему, приведенную на рис. 11.5, где нелинейность задается в виде  $f(e) = 50e(1 + \sin 2\pi e)$ , а линейный объект описывается выражением

$$g(p) = \frac{1}{(p + 1)^2}.$$

Покажите, что:

а) при  $r(t) \equiv 0$  система является равномерно асимптотически устойчивой в целом;

б) однако существуют входные сигналы, удовлетворяющие условию  $|r(t)| \leq 1$ , которые могут вызывать неограниченные входные сигналы (у к а з а н и е: покажите, что система может быть преобразована в нестационарную систему, приведенную в упражнении 5.22).

11.18. Завершите доказательство теоремы 8.4, гл. 8, согласно пунктам примера 11.4.

## 11.10 УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Литература, относящаяся к настоящей главе, довольно разнообразна. Материал этой главы более широко освещается в книге [67].

Основные положения этой главы изложены в работах: лемма Беллмана—Гренвилла [102]; теорема 11.2 [13], [98] и [158]; устойчивость в малом при ограниченных входном и выходном сигналах [66]; устойчивость в целом при ограниченных входном и выходном сигналах [17], [175], [177], [178] и [194]; устойчивость переходного процесса [146] и [203]; устойчивость периодических решений [31] и [161] и применение теоремы о неподвижной точке сжатого отображения [79], [109] и [176].



# ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ



КАЧЕСТВО И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТЯГИНА

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ВЫРОЖДЕННЫЕ  
И ОСОБЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ВОЗМОЖНОСТИ

## КАЧЕСТВО И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Проектировщикам систем управления хорошо известны большие трудности, связанные с получением высоких показателей качества процессов управления. Например, весьма желательно создание системы управления, отработывающей команды без ошибок. Однако получить такую систему на практике просто невозможно. И система этого вида может служить только идеалом, к которому следует стремиться.

В процессе проектирования систем управления, кроме критериев качества, приходится учитывать некоторые другие факторы: возможность практической реализации элементов, наличие элементов в серийном производстве и их стоимость. С учетом этих факторов еще более неопределенным становится суждение о системе, как «близкой к идеалу».

Для разных проектировщиков и заказчиков это суждение будет иметь совершенно различный характер\*. Тем не менее инженер пытается решить проблему приближения проектируемой системы к «идеальной» на основе некоторого математического критерия, а затем, минимизируя его, находит решение, позволяющее получить оптимальную (по выбранному критерию) систему. Примерами могут служить минимизация среднего значения квадрата ошибки или интеграла от квадрата ошибки, а также минимизация расхода топлива или времени достижения заданного значения.

В последние годы было предложено несколько методов, облегчающих нахождение оптимальных решений для определенных классов систем управления в указанной выше математической форме. Все эти методы близки к вариационному исчислению. В их число входят принцип максимума Понтрягина, динамического программирования Беллмана. Общий недостаток этих методов заключается в получении необходимых, но не достаточных условий, которым должна удовлетворять оптимальная система.

Отметим несколько нерешенных проблем в теории оптимизации, касающихся математической формулировки критериев оптимальности. Принятый критерий не всегда отражает в полной мере требования, предъявляемые при проектировании системы, т. е. удовлетворение данному критерию не дает гарантии выполнения некоторых других требований, как, например; устойчивости при действии возмущений. По крайней мере, трудно ожидать, что для сложной системы выбранный критерий оптимальности может охватить все требования, предъявляемые к системе.

---

\* Достаточно указать лишь на традиции организации, ведущей разработку. Если разрабатывающая организация до получения последнего заказа разрабатывала (или использовала) гидравлические элементы в системах управления, то вряд ли она будет их заменять электрическими и т. п. (Прим. ред.).

Иначе говоря, если принято решение использовать аналитический критерий оптимальности, то, составляя его, следует учитывать разрешимость поставленной оптимальной задачи. Здесь же заметим, что решение задачи оказывается достаточно сложным, несмотря на наличие ряда современных математических методов. Аналитическим \* путем или с помощью вычислительных машин синтезируются управления лишь для тех систем управления, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями низкого порядка. С ростом порядка системы значительно увеличиваются математические трудности. Поэтому вряд ли можно ожидать в недалеком будущем, что цифровые вычислительные машины смогут решать такие задачи. Кроме того при решении оптимальных задач, как правило, подразумевается, что входной сигнал полностью определен \*\*. В частности, ступенчатый входной сигнал целесообразно задавать в том случае, когда его длительность значительно превосходит наибольшую постоянную времени системы. Это условие существенно ограничивает область применения теории оптимального управления.

Наконец, имеющиеся подходы дают возможность определить лишь программу управления, в то время как инженерная практика требует решения задач синтеза.

Тем не менее было бы неверным утверждение о бесполезности теории оптимального управления. К настоящему времени обнаружено большое число прикладных задач, которые удается решать на основе теории оптимальных систем. Например, задача оптимизации дальности полета при заданном расходе топлива или минимизации стоимости сводится к определению программы управления. Следует также отметить, что число практических задач, к которым применимы методы теории оптимальных систем, все время растет. Это и служит хорошим стимулом для изучения теории оптимальных систем управления.

Решение задач оптимального управления определяет эталон, к которому следует стремиться при решении более сложных практических задач. В ряде случаев практическая реализация найденных законов управления даст результаты, близко совпадающие с желаемыми. Если же этого не удалось получить, то это значит, что имеются возможности улучшения системы. Вид оптимальной функции управления может подсказать проектировщику те направления, по которым следует вести работу для улучшения системы, а изучение структуры оптимальной системы может помочь спроектировать приемлемую для практики систему, близкую к оптимальной. Применение цифровых вычислительных машин для анализа и синтеза систем управления пока ограничено. Но благодаря хорошо поставленным задачам оптимального управления наблюдается значительный интерес к изучению цифровых вычислительных машин для их применения в системах управления.

В следующих главах будет сказано о вариационном исчислении, принципе максимума Понтрягина и динамическом программировании, а также их использовании при решении задач оптимального управления. При этом основное внимание будет уделено рассмотрению ряда положений, без которых невозможна постановка задач оптимального управления. Сначала рассмотрим класс задач оптимального управления, которые можно решить, не применяя новых принципов. Затем будет показано, как решение некоторых задач

---

\* Аналитические методы развиты лишь для систем управления с объектами второго и третьего порядка (Прим. ред.).

\*\* Если входной сигнал является случайным, то необходимо задать его статистические характеристики.

управления приводит к необходимости применения нового математического аппарата. Например, задача получения в линейной системе с существенными ограничениями аperiodического процесса малой длительности может быть решена, исходя из простых соображений, хотя при этом не удастся оценить правильность полученных результатов. В случае решения других задач оптимального управления одной интуиции будет недостаточно и требуются новые теоретические методы.

## 12.1. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ФОРМУЛИРОВКИ И ПРИМЕРЫ

Класс задач оптимального управления, рассматриваемый в этом параграфе, характеризуется следующими свойствами:

1) объект управления описывается уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, u, t);$$

2) время начала процесса  $t_1$ , начальное положение  $x(t_1) \triangleq x_1$ ; время конца процесса  $t_2$  и конечное положение  $x(t_2) \triangleq x_2$  должны быть заданы. Довольно часто конечное время  $t_2$  не установлено, и требуется, чтобы оно было минимальным, необходимым для достижения конечного положения  $x_2$ . Можно также требовать, чтобы область цели была отлична от точки;

3) показатели качества, по которым проектируется система управления, задаются в виде

$$\mathcal{J} = P(x_1, x_2, t_1, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt; \quad (12.1)^*$$

4) возможны дополнительные ограничения, которые накладываются на управление  $u$  и (или) координаты  $x$ . Например, из-за ограничения мощности имеется ограничение вектора управления  $u$ , записываемое в виде  $V \leq u(t) \leq U$ , где  $U$  и  $V$  — постоянные векторы.

Итак, целью управления является нахождение такой функции  $u$  в разомкнутом  $u(t)$  или в замкнутом  $u(x, t)$  видах, которая переводит систему из положения  $x_1$  в момент времени  $t_1$  в положение  $x_2$  к моменту времени  $t_2$  при минимуме (максимуме) функционала  $\mathcal{J}$ .

Рассмотрим некоторые классы задач оптимального управления.

### 1. Оптимальные задачи по быстродействию

Пусть дана система  $\dot{x} = f(x, u, t)$ ; начальное время  $t_1$ ; начальное и конечное положения системы  $x_1, x_2$ , ограничения, накладываемые на управление  $u$ ,  $|u_i(t)| \leq U$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ). Необходимо перевести систему из положения  $x_1$  при  $t_1$  в  $x_2$  за минимальное время  $t^*$ .

Для этой задачи функция  $P$  в уравнении (12.1) будет равна нулю, а функция  $L$  — единице. Критерий качества системы запишем в виде следующего функционала:

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} dt. \quad (12.2)$$

Заметим, что верхний предел интегрирования заранее не известен, хотя всегда выполняется условие  $t_2 - t_1 = t^*$ .

\* В выражении (12.1)  $\mathcal{J}$  является функционалом, который зависит от поведения  $x(t)$  и  $u(t)$  при  $t_1 \leq t \leq t_2$ , а также от величин  $x_1, x_2, t_1, t_2$ , поэтому следует ввести обозначение  $\mathcal{J}[x(t), u(t), x_1, x_2, t_1, t_2]$ , но для краткости будем писать просто  $\mathcal{J}$ .

## 2. Оптимальные задачи по расходу топлива

Пусть дана система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , которая может описывать динамику полета ракеты, а функция управления  $\mathbf{u}$  является тягой, приложенной к ракете. Очевидно, что  $\mathbf{u}$  будет определяться величиной изменения расхода топлива, тогда критерий качества системы можно представить в виде функционала

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^r |u_i(t)| dt, \quad (12.3)$$

характеризующего общий расход топлива.

Задача управления может быть в этом случае сформулирована следующим образом. Необходимо найти  $\mathbf{u}(t)$ , переводящее системы из положения  $\mathbf{x}_1$  при  $t_1$  в  $\mathbf{x}_2$  при  $t_2$  таким образом, чтобы расход топлива был минимальным.

## 3. Оптимальные задачи на минимум интеграла от квадрата ошибки системы

Относительно конечного состояния  $\mathbf{x}_2$  величина  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_2$  представляет собой ошибку системы. Преобразуем систему таким образом, чтобы  $\mathbf{x}_2$  стало началом координат, тогда каждое новое текущее состояние  $\mathbf{x}$  характеризует ошибку. Качество переходного процесса за время от  $t_1$  до  $t_2$  можно оценить согласно выражению

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) dt.$$

В более общем виде можно воспользоваться следующей зависимостью\*:

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}) dt, \quad (12.4)$$

где  $\mathbf{Q}$  — симметричная положительно определенная матрица порядка  $n \times n$ .

Задача управления заключается в определении такого  $\mathbf{u}$ , которое переводило бы систему из положения  $\mathbf{x}_1$  при  $t_1$  в начало координат  $\mathbf{0}$  при  $t_2$  и обеспечивало минимум функционала (12.4).

## 4. Оптимальные задачи на минимум энергии

В некоторых задачах величины  $\sum_{i=1}^r u_i^2$  или  $\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{R}$  — симметричная  $r \times r$  матрица, определяют расход энергии при управлении. Например, если  $u_i$  является током в  $i$ -м контуре схемы, то  $\sum_{i=1}^r u_i^2 r_i$  определяет полную мощность или полный расход энергии. Здесь  $r_i$  — сопротивление в  $i$ -м контуре. Имея это в виду, составим следующий функционал:

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (12.5)$$

который характерен для оптимальной задачи на минимум расхода энергии.

\* См., например, «Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования». Под ред. В. В. Солодовникова. Кн. 1. М., «Машиностроение», 1967, гл. XIX (Прим. ред.).

## 5. Оптимальное управление конечным значением

В системе перехвата самолета ракетой типа «земля—воздух» основной характеристикой является расстояние между ракетой и целью в некоторый конечный момент времени (скажем, в момент подрыва боевой части ракеты взрывателем). Тогда величина  $L$  в уравнении (12.1) равна нулю, а величина  $P \neq 0$ . В этом случае функционал записывается в виде

$$\mathcal{J} = P(x_2, t_2). \quad (12.6)$$

Для примера будем считать, что  $x_{п_1}; x_{п_2}; x_{п_3}$  — координаты положения перехватчика, а  $x_{ц_1}; x_{ц_2}; x_{ц_3}$  — координаты положения цели, тогда в качестве критерия примем минимум расстояния между перехватчиком и самолетом-целью в момент времени  $t_2$ . В этом случае

$$P = \sum_{i=1}^3 (x_{п_i}(t_2) - x_{ц_i}(t_2))^2.$$

## 6. Оптимальные задачи с более сложными функционалами

Довольно часто даже простой по виду функционал приводит к неопределенному решению оптимальной задачи. В ряде случаев такое решение вообще невозможно. В дальнейшем мы покажем, что в оптимальных задачах: по быстродействию, расходу топлива, а также минимуму интеграла от квадрата ошибки могут появляться не единственные решения, что делает эти задачи неопределенными. Для устранения этого недостатка проектировщики систем управления вводят в функционал дополнительные члены, что делает его более сложным. Например, функционал

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^r |u_i(t)| + k \right) dt \quad (12.7)$$

представляет собой линейную комбинацию двух функционалов (12.2) и (12.3) [если  $t_2$  не задано], а функционал

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (12.8)$$

— комбинацию двух функционалов (12.4) и (12.5) \*.

## 7. Задачи, в которых область цели отлична от точки

Во многих практических задачах конечные состояния системы не задаются. Например, в рассмотренном выше примере скорость перехватчика не входит в функционал  $\mathcal{J}$ , и поэтому нет необходимости ограничивать время  $t_2$ , затрачиваемое на перехват. При этом нет необходимости фиксировать заранее и конечное положение. Задачи, когда определен только один из концов, относятся к задачам со смешанными граничными условиями. Они могут возникать там, где, например, требуется пролететь расстояние  $\rho$  от заданной точки  $x_0$  некоторой области за минимальное время. При этом требуется, чтобы конечная точка лежала на поверхности гиперсферы  $\|x_2$  —

\* На основе составления сложных функционалов в последнее время была разработана А. М. Летовым, А. А. Красовским и Н. Н. Красовским методика аналитического конструирования систем автоматического управления (Прим. ред.).

$-\|x_0\| = \rho$ . Вместо единственного конечного состояния здесь мы имеем некоторую область.

Отсюда следует, что существует отдельный класс задач, для решения которых должны быть созданы специальные методы. Три из них будут изложены в гл. 13—15. Однако сначала следует решить ряд задач оптимального управления, не прибегая к специальным методам. Возникающие при этом трудности дадут возможность оценить всю многогранность проблем оптимальности и отметить ограниченность методов, с которыми приходится иметь дело в практике проектирования систем управления.

## 12.2. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Задача определения оптимальной линейной стационарной системы из условия минимума интеграла от квадрата ошибки при некоторых видах входного сигнала была решена еще до появления новых методов. Началом для решения таких задач послужила работа Н. Винера [198] и последовавшая за ней работа Г. Боде и К. Шеннона [20].

Распространение метода Н. Винера минимизации интеграла от квадрата ошибок для синтеза детерминированных систем управления было выполнено Ньютоном [150].

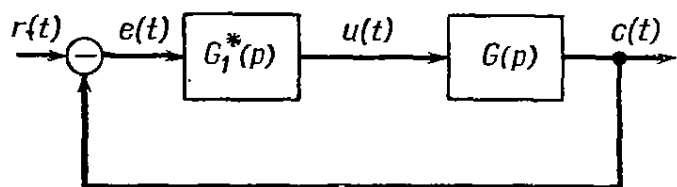


Рис. 12.1. Структурная схема системы управления, рассматриваемая в § 12.2

Эта задача в простейшем виде может быть сформулирована следующим образом<sup>1</sup>. Для линейной системы, показанной на рис. 12.1, когда заданы объект управления  $G(p)$  и входной сигнал  $r(t)$ , для которых интеграл от квадрата ошибки  $e(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq \infty$  существует<sup>2</sup>, требуется найти устойчивое линейное корректирующее устройство  $G_1^*(p)$ , которое обеспечивает минимум функционала<sup>3</sup>:

$$\mathcal{J}[e(t), u(t)] = \int_0^{\infty} [e^2(t) + ku^2(t)] dt$$

и определяет устойчивую в замкнутом состоянии систему управления с передаточной функцией

$$H^*(s) = \frac{G_1^*(s) G(s)}{1 + G_1^*(s) G(s)}$$

При решении во временной области приходим к интегральному уравнению, известному как уравнение Винера—Хопфа [150]. Поэтому удобнее

<sup>1</sup> Последующее изложение соответствует работе Чанга [32]. Однако оно приведено здесь в еще более сжатом виде, позволяющем читателю лишь проследить решение задачи в частотной области. В гл. 13 эта задача решается во временной области.

<sup>2</sup> Например, необходимо потребовать, чтобы функция  $r(t)$  была интегрируема с квадратом, а передаточная функция  $G(s)$  соответствовала устойчивому объекту; или можно потребовать, чтобы  $r(t)$  была единичной ступенчатой функцией, а объект управления обладал интегрирующими свойствами и т. д.

<sup>3</sup> Величина  $ku^2(t)$  в подынтегральном выражении используется в качестве функции штрафа для больших значений  $u(t)$ . Иначе решение задачи дает тривиальный результат  $H(p) \equiv 1$ , откуда следует  $G_1(p) = \frac{k}{G(p)}$  при  $K \rightarrow \infty$ . Знание этой составляющей критерия качества подробно изложено в гл. 13.

проводить синтез в частотной области, используя теоремы Парсеваля (см. приложение III). Функционал  $\mathcal{J}$  в данном случае можно представить, используя преобразование Лапласа, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[e(t), u(t)] &= \int_0^{\infty} [e^2(t) + ku^2(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [E(s)E(-s) - kU(s)U(-s)] ds, \end{aligned} \quad (12.9)$$

где  $E(s)$  и  $U(s)$  — преобразования Лапласа от сигналов  $e(t)$  и  $u(t)$  соответственно. Введем обозначение

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G(s)}{1 + G_1(s)G(s)}; \quad (12.10)$$

тогда выражение (12.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[e(t), u(t)] &= \mathcal{J}[H(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [H(s) - 1] \times \\ &\times [H(-s) - 1] + \frac{kH(s)H(-s)}{G(s)G(-s)}] R(s)R(-s) ds. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Задача заключается в определении такой устойчивой передаточной функции  $H^*(s)$ , которая минимизирует функционал  $\mathcal{J}[H(s)]$ . Чтобы найти оптимальную передаточную функцию  $H^*(s)$ , воспользуемся приемом, к которому часто прибегают при решении вариационных задач<sup>1</sup>. Сначала заметим, что если  $H^*(s)$  — оптимальная линейная передаточная функция, то функционал  $\mathcal{J}[H^*(s)]$  по определению должен принимать наименьшее значение, тогда для некоторой постоянной  $\varepsilon$  выполняется следующее условие:

$$\mathcal{J}[H^*(s)] \leq \mathcal{J}[H^*(s) + \varepsilon H_1(s)] = \mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)],$$

где  $H_1(s)$  — некоторая произвольная передаточная функция, не имеющая полюсов в правой полуплоскости переменной  $s$ .

Теперь рассмотрим величину

$$\mathcal{J}[H^*(s) + \varepsilon H_1(s)] \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)]$$

как функцию от  $\varepsilon$ . Для любой произвольно выбранной функции  $H_1(s)$  график  $\mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)]$  от  $\varepsilon$  для малых значений  $\varepsilon$  будет иметь вид, показанный на рис. 12.2. Очевидно, что минимум достигается при  $\varepsilon = 0$ . Будем считать, что  $\mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)]$  — гладкая функция от  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ ; тогда необходимыми условиями для существования оптимальной функции  $H(s)$  являются

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)] \right|_{\varepsilon=0} = 0; \quad (12.12a)$$

$$\left. \frac{d^2}{d^2\varepsilon} \mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)] \right|_{\varepsilon=0} \geq 0. \quad (12.12б)$$

Из выражения (12.11) видно, что  $\mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)]$  можно переписать в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)] = \mathcal{J}_a + 2\varepsilon\mathcal{J}_b + \varepsilon^2\mathcal{J}_c, \quad (12.13)$$

<sup>1</sup> См. в гл. 13 более подробное изложение этого приема.

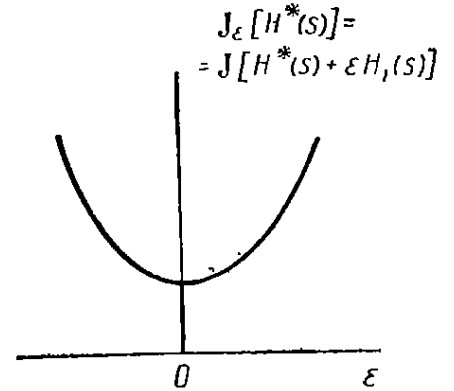


Рис. 12.2. Функция  $\mathcal{J}_\varepsilon[H^*(s)]$  в зависимости от  $\varepsilon$  для малых  $\varepsilon$



где

$$\mathcal{F}_a = \mathcal{F} [H^*(s)];$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ (H^*(s) - 1) + \frac{kH^*(s)}{G(s)G(-s)} \right] \times \\ &\times R(s)R(-s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ (H^*(-s) - 1) + \frac{kH^*(-s)}{G(s)G(-s)} \right] R(s)R(-s) H_1(s) ds \end{aligned}$$

и  $\mathcal{F}_c$  есть интеграл с неотрицательным подынтегральным выражением (покажите это). Взяв производную  $\left. \frac{d\mathcal{F}_\varepsilon [H^*(s)]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$  и приравняв ее нулю, получим условие  $\mathcal{F}_b = 0$ . Таким образом, для определения оптимальной передаточной функции  $H^*(s)$  необходимо, чтобы величина  $\mathcal{F}_b$  была равна нулю для произвольной устойчивой передаточной функции  $H_1(s)$ . Итак,

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[ (H^*(s) - 1) + \frac{kH^*(s)}{G(s)G(-s)} \right] R(s)R(-s) H_1(-s) ds = 0. \quad (12.14)$$

Кроме того, при положительном значении величины  $\mathcal{F}_c$  условие (12.12б) выполняется. Так как мы предполагали передаточную функцию  $H_1(s)$  устойчивой, то все полюсы функции  $H_1(-s)$  лежат в правой полуплоскости. С помощью теории функций комплексного переменного можно установить, что достаточное условие равенства нулю величины  $\mathcal{F}_b$  состоит в том, чтобы полюсы подынтегрального выражения в условии (12.14) были расположены в правой полуплоскости<sup>1</sup>. Это, в свою очередь, означает, что полюсы выражения

$$\left[ (H^*(s) - 1) + \frac{kH^*(s)}{G(s)G(-s)} \right] R(s)R(-s)$$

также расположены в правой полуокружности.

С учетом всего сказанного оптимальную передаточную функцию  $H^*(s)$  находим без труда. Читатель может сам убедиться в том, что изложенный выше порядок действий приводит к определению оптимальной передаточной функции замкнутой системы  $H^*(s)$ .

Теперь допустим, что функция  $A(s)$  не содержит ни полюсов, ни нулей в правой полуплоскости, и пусть

$$A(s)A(-s) = \left[ 1 + \frac{k}{G(s)G(-s)} \right].$$

Допустим также, что  $B(s)$  — функция, не имеющая нулей и полюсов в правой полуплоскости, для которой выполняется соотношение  $B(s)B(-s) = R(s)R(-s)$ . И, наконец, допустим, что часть выражения в виде дроби  $B(s)/A(-s)$  запишется в виде  $B(s)/A(-s) = C_+(s) + C_-(s)$ . Здесь слагаемое  $C_+(s)$  учитывает все полюсы в левой полуплоскости и половину полюсов, лежащих на мнимой оси. В этих обозначениях оптимальная передаточная функция  $H^*(s)$  запишется в виде

$$H^*(s) = \frac{C_+(s)}{A(s)B(s)}. \quad (12.15)$$

<sup>1</sup> Это можно показать путем интегрирования выражения (12.14) по контуру, который проходит по оси  $j\omega$  и полуокружности бесконечного радиуса в левой полуплоскости.

Как только  $H^*(s)$  найдено, передаточную функцию  $G_1^*(s)$  можно определить с помощью выражения (12.10). Найденные передаточные функции позволяют определить минимальное значение функционала  $\mathcal{J}$  в соответствии с выражением (12.11)<sup>1)</sup>.

Рассмотренный выше метод является одним из наиболее удобных для практических расчетов. Причина этого заключается в том, что верхний предел интегрирования является бесконечным. Поскольку входной сигнал задан, а система линейна и стационарна, не представляет труда отыскать установившуюся реакцию системы и сократить процедуру оптимизации. Таким образом, в этом случае лишь начальные условия определяют решение, и мы, по существу, имеем дело с одноточечной граничной задачей, решение которой хорошо известно.

Однако предлагаемый метод не лишен и недостатков. Применение метода, как правило, приводит к тому, что спроектированная система имеет небольшой выброс, но ее реакция на малые изменения желаемого сигнала является вялой. Так, например, реакция на ступенчатый входной сигнал сильно затянута. Это явление обусловлено видом самого критерия качества (12.9), в котором большие значения сигналов  $e(t)$  и  $u(t)$  штрафуются в большей мере, чем малые. Однако, как будет показано ниже, всякая попытка видоизменить подинтегральное выражение, отказавшись от квадратичных составляющих, приводит к трудностям, которые нельзя преодолеть известными методами. Аналогичные осложнения возникают и в тех случаях, когда делается попытка изменить верхний предел интегрирования, сделав его конечным, или ограничить амплитуду сигнала  $u(t)$ , тем самым переходя к нелинейной системе.

В гл. 15 будет показано, что ряд трудностей удастся преодолеть, используя новейшие результаты; правда, при этом методы становятся более трудоемкими.

### 12.3. РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Анализ решения большого числа задач оптимального управления, для которых неприменим метод предыдущего параграфа, позволяет выделить два этапа. Во-первых, необходимо найти семейство решений, проходящих через две различные точки  $x_1$  и  $x_2$ <sup>2)</sup>. Решение, которое может претендовать на оптимальное, должно удовлетворять этим двум граничным условиям. Во-вторых, из найденного семейства траекторий, претендующих на оптимальные, необходимо каким-то образом выделить оптимальную траекторию.

Следующие четыре главы книги будут посвящены методам, которые и позволяют выбирать оптимальные решения. Прежде чем приступить к изучению частных методов, целесообразно рассмотреть последовательность определения семейства допустимых решений для оптимальных задач управления с закрепленными концами, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

В линейных системах задача определения семейства возможных решений значительно упрощается, поскольку для этих систем справедлив принцип суперпозиции, позволяющий получить такое решение, по крайней мере,

1) Вычисление интеграла (12.11) осуществляется с помощью таблиц (см., например, [150]).

2) В системе управления, рассматриваемой в § 12.2, предполагается, что  $x_2$  устойчиво при  $t \rightarrow \infty$ .

численным способом. Для иллюстрации рассмотрим линейную систему  $n$ -го порядка:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t). \quad (12.16)$$

Будем считать, что  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  известны и необходимо найти траекторию, для которой первые  $p$  компонент вектора состояния удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= x_{11}; x_2(t_1) = x_{21}, \dots, x_p(t_1) = x_{p1}; \\ x_1(t_2) &= x_{12}; x_2(t_2) = x_{22}, \dots, x_p(t_2) = x_{p2}, \end{aligned}$$

где  $p = \frac{n^*}{2}$ .

Остальные компоненты вектора  $\mathbf{x}$  при  $t_1$  и  $t_2$  произвольны. Общее решение уравнения (12.16) запишем в виде

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_1)\mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (12.17a)$$

Введем обозначение

$$\mathbf{x}^{(u)}(t) = \int_{t_2}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

где  $\mathbf{x}^{(u)}(t)$  — частное решение системы (12.16). Поскольку переходная матрица  $\Phi(t, t_1)$  может быть найдена при интегрировании уравнения  $\dot{\Phi}(t, t_1) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_1)$  с начальным условием  $\Phi(t_1, t_1) = \mathbf{I}$ , то  $\mathbf{x}^{(u)}(t)$  определено для всех  $t$  на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Запишем уравнение (12.17) при  $t = t_2$  в виде

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\mathbf{x}(t_1) + \mathbf{x}^{(u)}(t_2) \quad (12.17b)$$

и надлежащих граничных условиях. Заметим, что при заданных  $\Phi(t_2, t_1)$  и  $\mathbf{x}^{(u)}(t_2)$  уравнение (12.17b) определяет  $n$  неизвестных, из них  $\frac{n}{2}$  компонент вектора  $\mathbf{x}(t_2)$  и  $\frac{n}{2}$  компонент вектора  $\mathbf{x}(t_1)$ . Поскольку соотношение (12.17b) определяет  $n$  алгебраических уравнений, то отыскание этих решений не вызывает трудностей.

Для нелинейных систем отсутствует единый подход к решению двухточечных граничных задач. Именно поэтому подавляющее большинство решенных оптимальных задач связано с линейными объектами. Известен ряд численных методов, позволяющих решать некоторые нелинейные двухточечные задачи, используя итерационные процедуры. Однако все эти примеры тем или иным образом связаны с линеаризацией, которая дает возможность получить результат, воспользовавшись простотой решения линейной двухточечной задачи.

В заключение отметим, что указанный подход позволяет распространить результаты § 12.2 на более широкий класс систем, например, линейных систем с переменными параметрами. Кроме того, можно рассмотреть случаи, когда верхний предел интегрирования конечен, а вектор  $\mathbf{x}_2$  в конечной точке отличен от нуля. Эти вопросы мы рассмотрим в следующих главах, а сейчас перейдем к решению задач оптимального управления простейшими линейными объектами с постоянными параметрами.

\* Общее решение уравнения (12.16) содержит только  $n$  произвольных постоянных. Поэтому  $n$  граничных условий может быть задано. вовсе не обязательно, чтобы эти условия были распределены поровну между двумя граничными точками. В дальнейшем предполагается, что  $n$  — число четное, но могут быть случаи, когда  $n$  — любое положительное число.

Впервые с задачей оптимального быстрогодействия нам пришлось столкнуться в гл. 4, где был рассмотрен объект, состоящий из двух интегрирующих звеньев. Полученные ранее результаты позволяют решить поставленную задачу во всей ее полноте.

Как уже отмечалось в гл. 4 [пример 4.1 (случай 6)], по-видимому, разумно выдвинуть следующую гипотезу: оптимальное по быстроддействию управление всегда соответствует максимальной энергии, обусловленной либо разгоном, либо торможением системы. На заре исследования этого класса систем указанная гипотеза играла важную роль, поскольку предположение о ее справедливости позволяло во многих случаях определить закон управления и требуемые линии и поверхности переключения в фазовом пространстве. Правда, имеющиеся в распоряжении инженеров математические методы не позволяли дать исчерпывающий ответ о справедливости гипотезы, и поэтому всегда присутствовало неотступное опасение, что гипотеза, известная под названием гипотезы о релейном управлении, может оказаться неверной.

Наконец, в 1956 г. справедливость гипотезы для случаев, когда осуществлялось управление линейным стационарным объектом, была доказана\*. Доказательство этого положения приводится в гл. 14, а сейчас рассмотрим некоторые свойства оптимальных систем с постоянными параметрами, предполагая, что гипотеза о релейном управлении справедлива.

Во-первых, изучим релейное управление линейными стационарными объектами второго порядка, числитель передаточной функции которых равен 1. Допустим, что требуется перевести объект из произвольного начального состояния в начало координат за минимальное время, используя релейное управление с амплитудой  $\pm U$ .

Для решения этих задач целесообразно воспользоваться фазовой плоскостью. Если  $y$  — выходная координата системы, то фазовый портрет строится на плоскости  $(y, \dot{y})$  и позволяет сразу же установить следующие свойства: во-первых, знак управления различен для первого и третьего квадрантов фазовой плоскости, поскольку для первой четверти, где  $y > 0$ ,  $\dot{y} > 0$ , выходная координата положительна и возрастает, и, следовательно, управление равно  $-U$ . Аналогично для третьего квадранта  $y < 0$ ;  $\dot{y} < 0$  и управление равно  $+U$ . Таким образом, линии переключения всегда расположены во втором и четвертом квадрантах.

Во-вторых, не всякая система второго порядка может быть переведена из произвольных начальных условий в начало координат, поскольку свободное движение может превалировать над вынужденным, и тогда при управлении любого знака не удастся избежать расходимости процесса. Таким образом, неустойчивыми объектами можно управлять лишь в некоторой окрестности начала координат\*\*.

В-третьих, для рассматриваемой задачи характерна симметрия, так что требуется исследовать поведение системы лишь на части фазовой плоскости.

Наконец, траектории движения обладают тем свойством, что вслед за последним переключением следует движение по траектории, проходящей

\* См. статью Болтянского В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягина Л. С. «К теории оптимальных процессов». «Доклад АН СССР», т. 110, 1956, № 1, стр. 7—10 (Прим. ред.).

\*\* Заметим, что в системе первого порядка  $\dot{x} = ax + u$ ,  $a > 0$ ,  $u = \pm U$  при  $ax_0 > |U|$  управление отрицательного знака не сможет предотвратить возрастания координаты  $x$ ; если же  $ax_0 < |U|$ , то отрицательное управление позволяет осуществить перевод изображающей точки в начало координат. В дальнейшем мы воспользуемся этим замечанием.

через начало координат. Часть траектории в четвертом квадранте, соответствующая управлению  $+U$  и проходящая через начало координат, определяет половину линии переключения. Другая половина симметрична относительно начала координат, расположена во второй четверти и соответствует управлению  $-U$ . Если вспомнить способ формирования управления объектом с двумя интегрирующими звеньями, когда линия переключения делила фазовое пространство на две части, в каждой из которых управление имеет определенный знак (см. рис. 4.8), то становится очевидным, что линия переключения единственна. При этом в системе должно выполняться самое большее одно переключение.

Простейший способ нахождения линии переключения заключается в решении задачи в «обратном времени». В этом случае движение начинается из начала координат, и соответствующая часть линии переключения определяется заданием управления либо  $+U$ , либо  $-U$ . Этот же прием позволяет весьма просто отыскать линию переключения с помощью аналоговых средств; столь же успешно и его аналитическое применение. Обратимся к следующему примеру.

**Пример 12.1.** Пусть объект управления с двумя действительными полюсами  $a$  и  $b$ , но без учета динамики числителя описывается уравнением вида

$$\ddot{y} + (a + b)y - aby = u(t),$$

положим  $x_1 = y$  и  $x_2 = \dot{y}$ , тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -(a + b)x_2 - abx_1 + u. \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

Рассмотрим точку  $x_0$  на линии переключения, отстоящую во времени на  $T$  сек от начала координат. Введем переменную  $\tau = T - t$ . Предположим, что при  $t = 0$  объект находится в точке  $x_0$ . Тогда при прямом течении времени начало координат будет достигнуто при  $t = T$ . При обратном течении времени, когда движение начинается из начала координат при  $\tau = 0$ , объект достигает точки  $x_0$  в момент времени  $\tau = T$ . Поскольку справедливы соотношения

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{dx(\tau)}{d\tau}; \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}$$

относительно переменной  $\tau$ , то система (12.18) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}'_1 &= -x'_2; \\ \dot{x}'_2 &= (a + b)x'_2 + abx'_1 - u. \end{aligned} \right\} \quad (12.19)$$

где  $x' = \frac{\Delta}{d\tau} \frac{dx(\tau)}{d\tau}$ . Здесь мы имеем

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ ab & (a + b) \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (12.20)$$

а собственные значения равны  $\lambda_1 = +a$ ;  $\lambda_2 = +b$  [в отличие от  $(-a)$ ,  $(-b)$  для системы с прямым отсчетом времени].

Двигаясь из начала координат с уравнением  $u(0) = +U$ , можно проверить, что переменные

$$\left. \begin{aligned} x_1(\tau) &= \frac{U}{a(a-b)}(e^{a\tau} - 1) - \frac{U}{b(a-b)}(e^{b\tau} - 1); \\ x_2(\tau) &= \frac{-U}{a-b}e^{a\tau} + \frac{U}{a-b}e^{b\tau} \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

описывают линию переключения. Разрешая эти уравнения относительно  $\tau$ , получим

$$\tau = \frac{1}{b} \ln \left( 1 - \frac{abx_1}{U} - \frac{bx_2}{U} \right). \quad (12.22)$$

Подставляя выражение (12.22) в уравнения (12.21), найдем уравнения линии переключения в виде

$$\left(1 - \frac{ab}{U} x_1 - \frac{a}{U} x_2\right) - \left(1 - \frac{ab}{U} x_1 - \frac{b}{U} x_2\right)^{\frac{a}{b}} = 0 \quad (12.23)$$

при  $u = +U$ .

Аналогично для  $u = -U$  имеем

$$\left(1 + \frac{ab}{U} x_1 + \frac{b}{U} x_2\right) - \left(1 + \frac{ab}{U} x_1 + \frac{a}{U} x_2\right)^{\frac{a}{b}} = 0 \quad \text{при } u = -U. \quad (12.24)$$

Изучая эти уравнения, можно сделать следующие выводы. Во-первых, из уравнений (12.21) видно, что при положительных  $a$  и  $b$ , когда объект управления устойчив, координаты  $|x_1(\tau)|$  и  $|x_2(\tau)|$  монотонно возрастают при увеличении  $\tau$  со все возрастающей скоростью. Отсюда следует, что все пространство состояний делится на две области линией переключения, а оптимальные фазовые траектории оказываются аналогичными траекториям изображенным на рис. 4.8. Все траектории в области с управлением  $-U$  неизбежно пересекутся с линией переключения  $+U$  и наоборот. Таким образом, для устойчивого объекта все его состояния полностью управляемы даже с  $|u(t)| \leq U$ , и одного переключения  $u(t)$  достаточно для оптимального релейного управления.

Если один из параметров  $a$  или  $b$  отрицателен, то объект управления имеет по крайней мере один положительный корень. В этом случае можно считать, что не при всех начальных условиях будет обеспечено попадание изображающей точки в начало координат. Последнее легко показать, если воспользоваться канонической формой записи системы дифференциальных уравнений.

**Пример 12.2.** Пусть  $a > 0$  и  $b < 0$ , тогда уравнения системы в канонической форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 - \frac{1}{a-b} u = -ax_1 - v; \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \frac{1}{a-b} u = -bx_2 + v, \end{aligned} \quad (12.25)$$

где  $v = \frac{1}{a-b} u$ .

При  $|u| \leq 1$  имеем  $|v| \leq \frac{1}{a-b} \triangleq V$ .

При  $u = +1$  или  $v = +V$  положение равновесия системы имеет координаты  $\left(-\frac{V}{a}, +\frac{V}{b}\right)$ ; при  $v = -V$  координаты точки равновесия изменятся на  $\left(+\frac{V}{a}, -\frac{V}{b}\right)$ . Оба эти состояния — суть седловые точки, показанные на рис. 12.3,  $a$  и  $b$ .

Следует заметить, что при  $v = -V$  (или  $u = -1$ ) существует только одна траектория, проходящая через начало координат; пусть это будет кривая  $\Gamma_-$  (рис. 12.4). Аналогично при  $v = +V$  (или  $u = +1$ ) кривую, проходящую через начало координат, обозначим  $\Gamma_+$ .

Итак, из сопоставления кривых на рис. 12.3,  $a$  и  $b$  можно видеть, что изображающая точка из области, ограниченной линиями  $x_2 = \pm \frac{V}{b}$ , переходит в начало координат (см. рис. 12.4). Когда  $a$  и  $b$  отрицательны, то множество начальных условий, из которых возможен переход в начало координат еще меньше, чем в рассмотренном случае. Последнее трудно показать (см. уравнение 12.6).

Способ обратного отсчета времени является крайне полезным при определении оптимальных законов управления для систем с линейными стационарными объектами, имеющими один вход\*. Рассмотрим, например, си-

\* Необходимо отметить, что пока нам неизвестны моменты переключения для попадания изображающей точки из начала координат в точку  $x_0$ , причем решение задачи в обратном времени не дает ответа на поставленный вопрос.

стему третьего порядка с действительными полюсами. Тогда, двигаясь из начала координат при управлении  $+U$ , получим траекторию  $\Gamma_+$ . Согласно теореме единственности (теорема 3.1) это должна быть единственная траектория, которая проходит через начало координат при управлении  $+U$ . И, на-

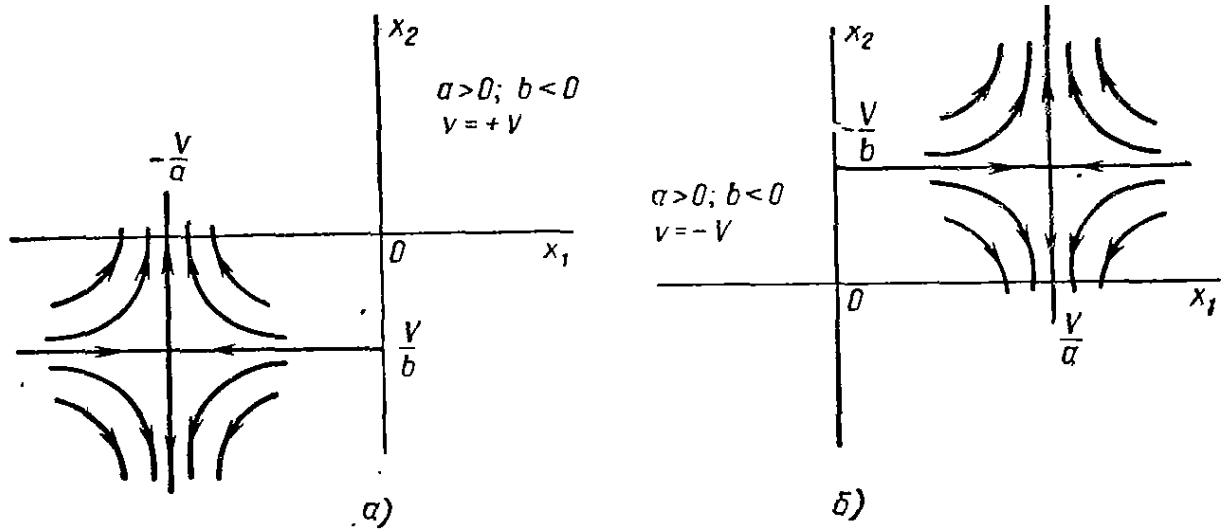


Рис. 12.3. Фазовые траектории системы управления, описываемые системой уравнений (12.25), около положения равновесия:

$a$  — при  $a > 0$ ;  $b < 0$  и  $v = +V$ ;  $b$  — при  $a > 0$ ,  $b < 0$  и  $v = -V$

оборот, при прямом отсчете времени конечный участок всех оптимальных траекторий должен лежать на  $\Gamma_+$ . По аналогии с этим можно представить и траекторию  $\Gamma_-$ , соответствующую  $-U$  и имеющую те же самые свойства (см. рис. 12.5).

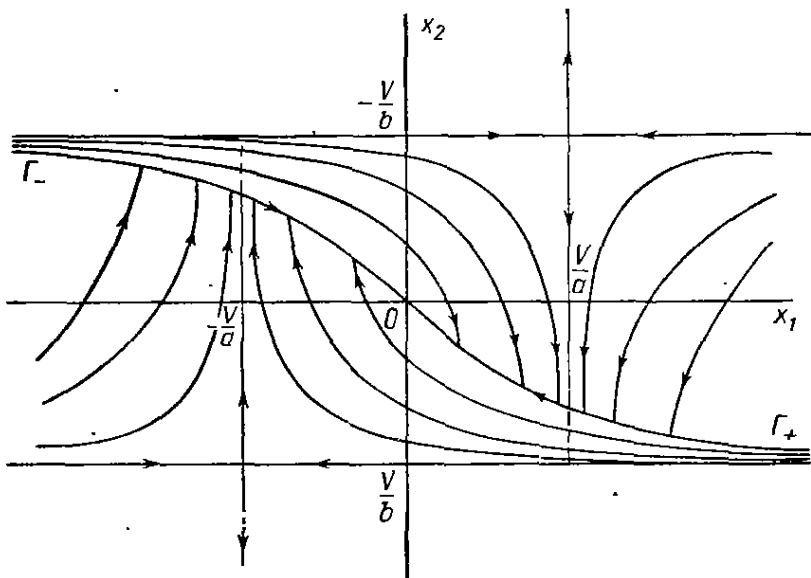


Рис. 12.4. Оптимальные по быстродействию траектории для системы управления, полученные наложением рис. 12.3а и рис. 12.3б. При начальных условиях  $|x_{20}| > \left| \frac{V}{b} \right|$  изображающие точки не могут быть переведены в начало координат

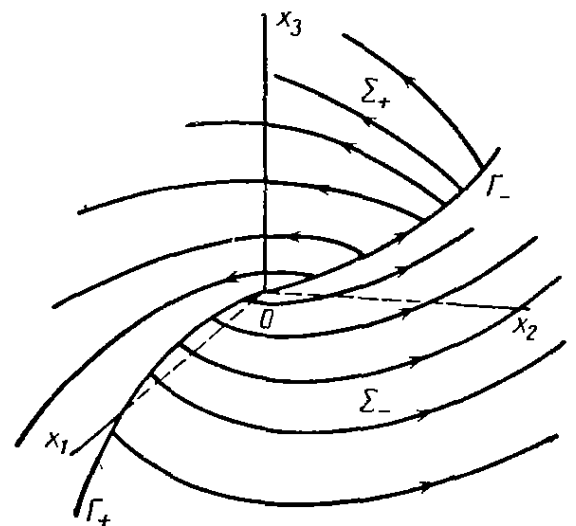


Рис. 12.5. Линии переключения  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  и поверхности переключения  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  для оптимальных систем управления по быстродействию с объектами третьего порядка

Пользуясь точкой  $x_1$  на кривой  $\Gamma_+$  как начальным значением и обратным отсчетом времени, получим траекторию  $\sigma_-(x_1, \tau)$  при управлении  $-U$ . Данная траектория обладает свойством: при прямом отсчете времени управление равно  $u = -U$  до точки  $x$ , а затем  $u = +U$  вплоть до начала координат.

Используя все точки на кривой  $\Gamma_+$  для образования  $\sigma_-$  при  $u = -U$ , получим поверхность  $\Sigma_-$ . По аналогии с помощью кривой формируется поверхность  $\Sigma_+$  (см. рис. 12.5). Отсюда ясно, что если объект управления устойчив, поверхности  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  делят все трехмерное фазовое пространство на две области. Эти области обладают тем свойством, что из любой точки одной из них управление  $u = +U$  переводит изображающую точку за некоторое конечное время на поверхность  $\Sigma_+$ , а из любой точки другой области управление  $u = -U$  изображающая точка переводится на поверхность  $\Sigma_-$ . Итак, если система третьего порядка устойчива, то максимальное число переключений для оптимального перехода в начало координат равно двум. Первое переключение происходит на поверхности переключения  $\Sigma_+$  или  $\Sigma_-$ , а последнее — на линии переключения  $\Gamma_+$  или  $\Gamma_-$ . Когда объект управления неустойчив, остаются в силе те же самые положения, за исключением того, что поверхности  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  ограничены в пространстве. Поэтому не из любых начальных условий можно попасть в начало координат, но для тех точек, из которых можно попасть в начало координат, движение происходит с двумя переключениями.

Преыдущие рассуждения можно распространить на  $n$ -мерные системы с  $n > 3$ . Если гипотеза о релейном управлении верна, то для линейной стационарной системы  $n$ -го порядка с одним входом и действительными полюсами требуется не более  $n - 1$  переключений полярности управляющей функции  $u(t)$  для перевода объекта управления из некоторого начального состояния в начало координат, если вообще такой перевод возможен. Строгое доказательство этого положения с использованием обычных методов довольно затруднительно.

Необходимо отметить, что для линейных объектов задачи оптимального управления сводятся к решению системы  $n$  алгебраических уравнений при условии, что происходит  $n - 1$  переключений и известны полярности управления. В этом случае неизвестны только моменты переключений и полное время движения, а они и образуют  $n$  величин, подлежащих определению.

Можно установить и вид этих алгебраических уравнений. Для линейной стационарной системы с действительными полюсами элементы переходной матрицы  $\Phi(t)$  представляют собой линейную комбинацию экспоненциальных функций. В конечный момент времени  $t^*$  имеем

$$x(t^*) = 0 = \Phi(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} \Phi(t^* - \tau) b u(\tau) d\tau; \quad (12.26)$$

так как  $x_0$  дано, а  $u(\tau)$  известны в течение всех  $n - 1$  интервалов между моментами переключения  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ , то образуется система алгебраических уравнений относительно экспонент, показатели которых зависят от собственных значений, моментов переключения  $t_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) и оптимального времени  $t^*$ . Для системы, приведенной в примере 12.1,

$$u(\tau) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq \tau < t_1; \\ +1 & \text{при } t_1 \leq \tau < t^*; \\ 0 & \text{при } t^* \leq \tau. \end{cases}$$

Затем, используя канонические координаты, получим систему алгебраических уравнений

$$x_1(0) = \frac{U}{a(a-b)} [1 - 2e^{at_1} + e^{at^*}]; \quad x_2(0) = \frac{-U}{b(a-b)} [1 - 2e^{bt_1} + e^{bt^*}], \quad (12.27)$$

решая которые, найдем время переключения  $t_1$  и оптимальное время  $t^*$ .



Мы встречаемся с большими трудностями при рассмотрении линейных стационарных систем с комплексными полюсами <sup>1)</sup>. В этом случае, даже в предположении о справедливости гипотезы релейного управления, метод обратного отсчета времени неприменим. Более того, из простых физических соображений видно, что условие  $n - 1$  переключений при этом не выполняются.

**Пример 12.3.** Рассмотрим оптимальное управление объектом второго порядка без демпфирования, удовлетворяющего уравнению  $\ddot{x} + x = u(t)$ , где  $|u(t)| \leq U$ . Предположим также, что движение начинается из начала координат и происходит с обратным отсчетом времени (как и в предыдущем примере). При  $u(t) = +U$  видно, что траектория системы описывает окружность  $\Gamma_+$  на плоскости  $\dot{x}$  и  $x$  с центром в точке  $x_e = U$ . При  $u(t) = -U$  траектория системы также представляет окружность с центром в точке  $x_e = -U$ . Из этого построения видно следующее:

1. Верхняя  $\Gamma_+$  и нижняя  $\Gamma_-$  половины не являются кривыми переключения, поскольку при  $\dot{x} > 0$  управление  $u(t) = -U$  и при  $\dot{x} < 0$ ,  $u(t) = +U$ .
2. Нижняя кривая  $\Gamma_+$  и верхняя  $\Gamma_-$  должны составлять участки оптимальной траектории согласно теореме единственности.
3. Если для системы при постоянном управляющем сигнале производная  $\dot{x}$  периодически изменяет знак, то  $u(t)$  также должно периодически менять знак.
4. В колебательных системах число переключений зависит от величины  $U$  и может быть произвольным.

Итак, используя эти условия, можно построить оптимальную траекторию при выполнении гипотезы о релейном управлении (см. пример 12.3). Однако, как это будет показано в гл. 15, принцип максимума и метод Ла-Салля позволяют это выполнить гораздо проще, не делая никаких допущений.

## 12.5. ЗАДАЧИ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА

Оптимальные задачи управления по расходу топлива с использованием функционала (12.3) оказываются более трудными, чем задачи оптимального управления по быстродействию. В этих задачах возможно не единственное решение. Кроме того, бывает трудно определить и само решение. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие эти положения.

**Пример 12.4.** Пусть у объекта  $\dot{x} = u$  имеются следующие ограничения на управление:  $|u(t)| \leq 1$ . Необходимо найти такое  $u(t)$ , которое переводит объект из точки с координатой  $x = 1$  в точку с  $x = 2$  за 5 сек и обеспечивает минимум следующего функционала:

$$\int_0^5 |u(t)| dt.$$

Из рассмотрения этой задачи видно, что она имеет бесчисленное множество решений так как приращение  $\Delta x$  выражается в виде

$$\Delta x = \int_0^5 u(t) dt. \quad (12.28)$$

Действительно, когда  $u(t)$  не изменяет своего знака, то любое управление, удовлетворяющее  $|u(t)| \leq 1$  и приводящее к  $\Delta x = \int_0^5 u(t) dt = 1$ , является оптимальным управлением.

Если  $u(t)$  изменяет знак, то каждое последующее управление сводит на нет результат предыдущего, и, следовательно, такое управление неприемлемо. При релейном управлении система оптимальна, когда  $u(t) = +1$  включено в течение 1 сек и равно 0 в оставшееся время. Так как 1 сек работы может иметь место в любой момент времени в интервале 5 сек, то такое оптимальное управление не является единственным. Для более ясного понимания задач, оптимальных по расходу топлива, рассмотрим более сложный пример.

<sup>1)</sup> Такие системы впервые были исследованы Буцау [29] в предположении, что выполняется гипотеза релейного управления.

**Пример 12.5.** Пусть объект описывается уравнением  $\ddot{x} = u$ , где  $|u(t)| \leq 1$ . Задача регулятора — перевести объект из произвольной точки  $x_0$  в начало координат за время  $T$ , обеспечив при этом минимум функционала

$$J = \int_0^T |u(t)| dt.$$

В приведенной задаче важную роль имеет верхний предел функционала. Если  $T$  меньше  $t^*$ , где  $t^*$  соответствует минимально возможному времени достижения начала координат из точки  $x_0$ , то решения задачи не существует. Таким образом, необходимо, чтобы выполнялось

условие  $T \geq t^*$ . Кроме этого, время  $T$  должно быть ограничено. Функционал вида  $\int_0^\infty |u(t)| dt$ ,

как это показано в гл. 4, лишен смысла при некоторых начальных условиях. Далее, если  $\dot{x}$  и  $x$  — координаты фазовой плоскости, то даже при  $u(t) \equiv 0$  изображающая точка из положения  $x_0$  в четвертом квадранте будет перемещаться по горизонтали налево, а во втором квадранте — направо. Пусть изображающая точка  $x_0$  расположена на положительной части оси  $x$ . Для ее перемещения в начало координат необходимо приложить малое отрицательное управление  $u(t)$ . Тогда изображающая точка будет двигаться под осью к началу координат с бесконечно малой скоростью. Когда она достигнет точки ниже начала координат, необходимо создать бесконечно малое приращение  $u(t)$  в положительном направлении, чтобы изображающая точка попала в начало координат. Расход топлива в этом случае, очевидно, может быть сколь угодно малым.

Приведенные выше примеры лишены практического смысла, но позволяют понять, как правильно выбрать величину  $T$ . Однако даже когда  $T$  выбрано, то совершенно не ясно, как формируется оптимальная управляющая функция. Из эвристических соображений следует, что при  $t^* < T < \infty$  оптимальное управление  $u(t)$  состоит из следующей последовательности: включено, выключено и включено с другим знаком. Введение в функцию управления интервала  $u(t) \equiv 0$  дает возможность системе двигаться в правильном направлении, когда она находится в определенных квадрантах. Действительно, обратимся к рис. 12.6. Здесь  $x_0$  соответствует координате, находящейся в первой четверти, а управление  $u(t) = -U$  действует в течение  $T_1$  сек, далее управление равно 0 в течение  $T_2$  сек, и, наконец, оно становится равным  $+U$  в течение  $T_3$  сек. Полное время движения  $T = T_1 + T_2 + T_3$ . Из этого рассмотрения видно, что существует единственная последовательность  $T_1, T_2$  и  $T_3$ , которая удовлетворяет условиям поставленной задачи<sup>1)</sup>.

Можно также показать, что предлагаемая функция управления выгоднее, чем любая другая (см. упражнение 12.4). Однако при иных начальных условиях могут существовать и другие управляющие функции (см. упражнение 12.5). Вообще говоря, трудно доказать, что предлагаемое решение задачи является наилучшим. Однако, используя принцип максимума, можно преодолеть данное затруднение.

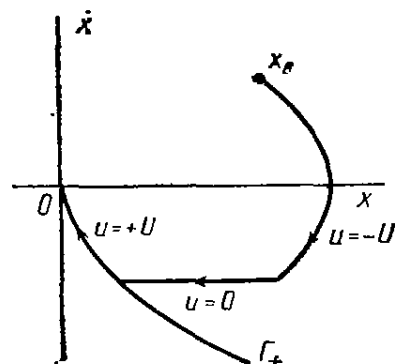


Рис. 12.6. Оптимальная по расходу топлива траектория движения объекта управления (пример 12.5)

## 12.6. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ТИПЫ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Нами было показано, что метод непосредственного решения дифференциальных уравнений становится все менее полезным по мере того, как мы переходим от задач, связанных с минимизацией интеграла от квадрата, к задачам оптимального быстрогодействия и оптимального расхода топлива. Можно также показать, что существуют и такие задачи управления, когда все имеющиеся до сих пор в нашем распоряжении средства решения не позволяют даже подойти к нахождению оптимального управления. Рассмотрим ряд задач, полученных в результате незначительного обобщения предыдущих задач.

<sup>1)</sup> Заметим, что при управлении  $u = +U$  изображающая точка должна двигаться по линии переключения  $\Gamma_+$ , соответствующей задаче оптимального быстрогодействия.

**Пример 12.6.** Рассмотрим снова оптимальное по быстрдействию управление для объекта  $\frac{1}{p^2}$ . Пусть  $u^*(t)$  ограничено  $|u(t)| \leq U$  и должно переводить систему из любого начального состояния за заданное время  $T < t^*$  при условии минимизации расстояния  $\|x(T) - 0\|$ . При такой постановке задачи совершенно не ясно, является ли релейное управление оптимальным. С этого вопроса и следует начинать наше исследование.

**Пример 12.7.** Допустим, что объект, описанный в примере 12.6, при тех же ограничениях на  $u(t)$  перемещается из точки  $x(t_1)$  в точку  $x(t_2)$  таким образом, чтобы минимизировался функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt.$$
 Эта задача достаточно тесно связана с задачей, рассматриваемой в § 12.2, но имеет два отличия: первое: — в новой задаче  $u(t)$  ограничено и второе — время конечно. Последнее и позволяет говорить о произвольном конечном состоянии системы  $x(t_2)$ . Данная система нелинейная, поэтому методы, приведенные в § 12.2, применять нельзя. Кроме того, функция  $u^*(t)$  не обязательно должна быть релейной.

Отметим, что в этой главе круг задач ограничивался только оптимальным управлением линейными объектами. Если объект нелинеен, то возникают дополнительные трудности. В гл. 13 будет показано, что при решении таких задач значительную помощь оказывают идеи вариационного исчисления.

## 12.7. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Критерии качества систем управления не всегда удается выразить в математической форме. Если же это оказалось возможным, то следует применить методы современной теории оптимального управления, чтобы синтезировать наилучшее управление, удовлетворяющее заданному критерию качества.

Некоторые общие формулировки задач оптимального управления указаны в § 12.1. Методы линейного управления и все другие, изложенные выше, совершенно неприемлемы для решения задач, сформулированных в § 12.1. Единственным исключением являются линейные стационарные системы при условии минимизации среднеквадратической ошибки (на полубесконечном интервале времени), изучаемые в § 12.2 на основе частотных методов. Любые изменения в постановке данной задачи делают этот метод неприемлемым. Задачи управления по быстрдействию или минимуму расхода топлива представляют собой краевые задачи с закрепленными концами. Решение оптимальной задачи состоит из двух этапов: а) нахождение семейства решений, удовлетворяющих краевым условиям и наложенным ограничениям; б) выделение оптимального управления из полученных решений.

Следует сразу же заметить, что для линейного объекта можно отыскать решение в общем виде, как это сделано в § 12.5.

Для линейного стационарного объекта задачи оптимизации решаются без введения новых методов при условии, что принят довольно простой критерий качества. В § 12.4 и 12.5 обсуждаются основные положения синтеза оптимальных управлений по быстрдействию и расходу топлива. Синтез выполняется в предположении о справедливости ряда гипотез.

Необходимость в новых методах синтеза оптимального управления становится все более очевидной по мере изменения постановки задач оптимизации. Последнее показано в § 12.6.

## 12.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

12.1. Рассмотрим систему первого порядка, описываемую уравнением  $\dot{x} = g(x) + u$ , где  $|u(t)| \leq U$  и  $|g(x)| < U$ , а  $g(x)$  — непрерывная функция  $x$ . Для этой системы:

а) покажите, что релейное управление наилучшее для всех начальных и конечных состояний, если требуется минимизировать время;

б) найдите управляющую функцию  $u^*$  как функцию состояния (т. е. в виде  $u^*(x)$ );  
 в) покажите, какие трудности вносит условие  $|g(x)| \leq U$ .

12.2. Не прибегая к математическим выкладкам, нарисуйте фазовый портрет для системы из примера (12.2), пользуясь нормальными координатами.

12.3. Найдите линию переключений для системы из примера 12.3.

12.4. Определите оптимальное управление по минимуму расхода топлива объектом с передаточной функцией в виде  $\frac{1}{s^2}$ , т. е.  $\dot{x}_1 = x_2$ ;  $\dot{x}_2 = u$ . Функционалом служит  $\mathcal{J} = \int_0^T |u|(t) dt$ ;

$|u(t)| \leq 1$ ;  $x(0) = x_0$  — произвольные начальные условия, а  $x(T) = 0$ .

Покажите, что при  $T > t^*$  управление  $u_a(t)$ , принимающее значения  $-1, 0$  и  $+1$ , имеет вид, изображенный на рис. 12.6, и обеспечивает меньшее значение  $\mathcal{J}$ , чем управление вида  $u_a(t) = \pm b$ . Здесь число  $b < 1$  положительно и выбрано таким, что одного переключения достаточно для перевода системы из состояния  $x_0$  в состояние  $0$  за время  $T$ . Минимизируйте функционал и найдите управление только для начальных точек, находящихся на оси  $x_1$ .

12.5. Покажите, что для некоторых значений  $t^* < T < \infty$  существует бесконечное множество оптимальных управлений для системы, рассмотренной в примере 12.5 (указание: рассмотрите управление, которое не требует переключения полярности  $u^*(t)$ ).

12.6. Можно ли при решении задачи оптимального быстрогодействия перевести систему из произвольных начальных условий в начало координат, если заданы: уравнение системы  $\ddot{y} + (a+b)\dot{y} + aby = u(t)$  и ограничения  $|u(t)| < 1$ ;  $a < 0$ ;  $b < 0$ ?

12.7. Рассмотрите оптимальное управление по быстродействию для объекта с передаточной функцией  $\frac{1}{r^3}$ , когда  $\dot{x}_1 = x_2$ ;  $\dot{x}_2 = x_3$ ;  $\dot{x}_3 = u$ , при условии  $|u| \leq U$ . Если начало координат представляет собой конечное состояние системы, определите уравнения для линии и поверхности переключения.

12.8. Докажите, что уравнение (12.15) определяет оптимальную передаточную функцию  $H^*(s)$  для класса задач, рассмотренных в § 12.2.

12.9. Для объекта  $\frac{1}{p(p+1)(p+2)}$  найдите моменты переключения и оптимальное управление, которое обеспечивает при движении из начального положения с координатами (2, 1, 3) в начало координат минимум времени переходного процесса. При этом используйте нормальные координаты.

Допущение:  $|u(t)| \leq 1$ , управление релейное.

12.10. Для объекта  $\frac{1}{p(p+1)}$  найдите оптимальный корректирующий фильтр (§ 12.2), который минимизирует функционал  $\int_0^\infty (e^2(t) + u^2(t)) dt$  при условии, что входной сигнал  $r(t) = e^{-t}$ . Положите, что при  $t = 0$  все начальные условия нулевые.

## 12.9. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Материал § 12.2 изложен в работах [32], [150]. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейных систем второго порядка изложен в работах [63] и [189]. Синтез систем высокого порядка с действительными собственными значениями рассмотрен в работе [167], а синтез систем третьего порядка — в работе [21]. В работе Бушау [29] излагаются вопросы, связанные с релейным управлением объектами с колебательными свойствами.

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Вариационное исчисление является областью математики и связано с нахождением траекторий, которые максимизируют или минимизируют заданный функционал. Не вызывает никакого сомнения, что современные методы оптимального управления такие, как принцип максимума Понтрягина и динамическое программирование Беллмана, основанные на различных положениях, в значительной степени навеяны классическим вариационным исчислением.

Идеи вариационного исчисления легко усвоить, изучая семейства траекторий в пространстве состояний. На этой основе можно получить целый ряд интересных результатов, касающихся определения максимумов и минимумов функций; именно простота и изящность получаемых результатов привлекают внимание к принципам вариационного исчисления. Понимание математического аппарата вариационного исчисления облегчает изучение принципа максимума и динамического программирования.

В данной главе исследуются некоторые положения вариационного исчисления, которые непосредственно могут быть применены в задачах оптимального управления. Изучив простейшие принципы, мы сразу приступаем к анализу уравнений Эйлера—Лагранжа и других необходимых условий оптимальности. Из анализа этих уравнений и граничных условий удастся глубже понять характерные особенности задач оптимального управления.

Если система управления нелинейная и требует решения двухточечной краевой задачи, то эти решения обычно отыскиваются методом проб и ошибок. Только для линейной системы, когда показатель качества является интегралом от суммы квадратов переменных состояния и управляющего воздействия, можно получить аналитические решения.

Вариационное исчисление помогает определить необходимые условия оптимальности для достаточно широкого круга задач управления. Например, метод Валентайна позволяет рассматривать системы с ограничениями на управляющее воздействие. Следовательно, вариационное исчисление является достаточно мощным методом, хотя специфика понятий и приемов часто затеняет существо задачи. Более прямыми методами решения оптимальных задач являются принцип максимума и метод динамического программирования.

### 13.1. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА И ДРУГИЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА

Вариационное исчисление, строго говоря, не позволяет прямо находить оптимальное решение. Оно лишь определяет необходимые условия, которым должна удовлетворять оптимальная траектория, и, следовательно, позволяет

отбросить множество неоптимальных траекторий. Иногда остается единственная траектория, которая и является оптимальной.

Вариационное исчисление позволяет получить ряд важных результатов, которые применительно к оптимальному управлению можно истолковать следующим образом. Предположим, что необходимо найти оптимальное управление  $u^*(t)$ , которое переводит систему  $\dot{x} = f(x, u)$  в течение интервала времени  $[t_1, t_2]$  из первоначальной точки  $x(t_1) = x_1$  в конечную точку  $x(t_2) = x_2$ , минимизируя<sup>1)</sup> при этом функционал

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u) dt. \quad (13.1)$$

Некоторые, хотя и нестрогие выводы можно сделать, рассматривая траекторию  $x$ , изображенную в функции от  $t$  на рис. 13.1. Каждому выбору  $u(t)$  на интервале  $[t_1, t_2]$  ставится в соответствие траектория  $x(t)$ , но все траектории должны начинаться из точки  $x_1 = x(t_1)$  и кончаться в точке  $x_2 = x(t_2)$ . Следовательно, траектория  $x_c(t)$ , показанная на рис. 13.1, должна быть исключена, так как она начинается в  $x_1$ , но не кончается в  $x_2$ . Как следует из гл. 12, требование, что все траектории начинаются в точке  $x_1$ , еще не означает, что все они заканчиваются в точке  $x_2$ .

Допустим, что каким-то способом мы сумели найти ряд траекторий, которые соединяют  $x_1$  с  $x_2$  и удовлетворяют другим условиям нашей задачи оптимального управления. Далее следует найти среди этих траекторий такую, которая дает наименьшую величину функционала  $\mathcal{J}$ . Оказывается, определение траектории, доставляющей абсолютный минимум функционала, представляет очень сложную задачу. Намного проще определение траектории, соответствующей локальному минимуму функционала. Последнее условие исходит из понятия близости двух траекторий, которое мы сейчас и рассмотрим.

Предположим, имеется кривая  $x^*(t)$ , определенная в соответствующем пространстве состояний. Тогда будем говорить, что кривая  $x_1(t)$  расположена в слабой  $\delta$ -окрестности кривой  $x^*(t)$ , если для величин  $x_1(t)$  и  $\dot{x}_1(t)$  выполняются условия:  $\|x^*(t) - x_1(t)\| \leq \delta$ ;  $\|\dot{x}^*(t) - \dot{x}_1(t)\| \leq \delta$  (см. кривую  $x_a(t)$  на рис. 13.1). Будем также называть кривую  $x_1(t)$  принадлежащей сильной  $\delta$ -окрестности  $x^*(t)$ , если выполняется только первое условие, т. е.  $\|x^*(t) - x_1(t)\| \leq \delta$  (см. кривую  $x_b(t)$  на рис. 13.1).

Говорят, что траектория  $x^*(t)$  обеспечивает слабый (сильный) локальный минимум, когда имеется такая слабая (сильная) окрестность траектории  $x^*(t)$ , что значение функционала  $\mathcal{J}$ , определенного вдоль траектории  $x^*(t)$ , меньше, чем его значение вдоль любой другой траектории, находящейся в этой окрестности. Отсюда видно, что сильный минимум обязательно

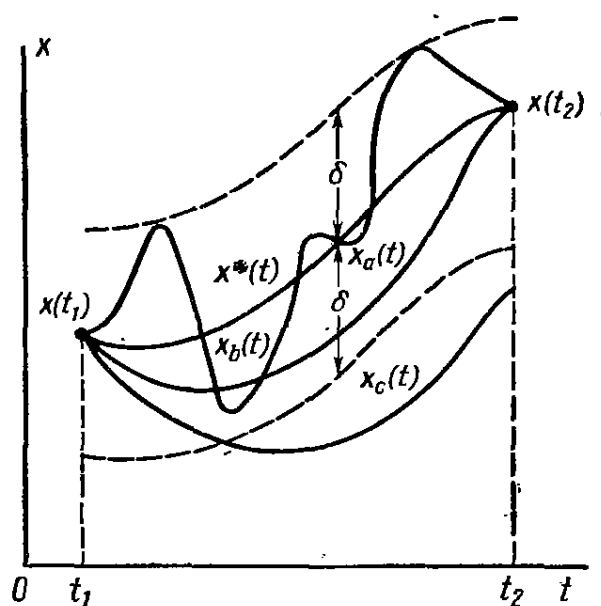


Рис. 13.1. Кривая  $x_a(t)$ , удовлетворяющая условиям  $\|x^*(t) - x_a(t)\| \leq \delta$  и  $\|\dot{x}^*(t) - \dot{x}_a(t)\| < \delta$  для  $t_1 \leq t \leq t_2$  лежит в слабой  $\delta$ -окрестности  $x^*(t)$ ; кривая  $x_b(t)$ , удовлетворяющая условиям  $\|x^* - \dot{x}_b(t)\| \leq \delta$  и  $\|x^* - x_b(t)\| > \delta$ , для некоторых  $t$  расположена в сильной  $\delta$ -окрестности  $x^*(t)$

<sup>1</sup> Так как  $\min \mathcal{J} = -\max(-\mathcal{J})$ , то достаточно рассмотреть только задачи минимизации.

гарантирует слабый минимум, в то время как обратное утверждение не обязательно верно. Оказывается, что слабые локальные минимумы можно найти методами, аналогичными методам, которые используются при отыскании точек экстремума. Определение сильных локальных минимумов имеет некоторые особенности.

Ниже изложены основные результаты вариационного исчисления и их приложение к конкретным задачам.

## 1. Нахождение точки минимума

В обычном анализе, когда отыскивается точка минимума дважды дифференцируемой функции  $f(x)$  на открытом интервале  $x_a < x < x_b$ , вначале ищутся такие точки, где производная  $df(x)/dx$  обращается в нуль. Таким образом, условие  $df(x)/dx = 0$  есть необходимое условие минимума. Этого, однако, недостаточно, так как точка, которая удовлетворяет этому условию, может быть также точкой максимума, или точкой перегиба. Второе необходимое условие заключается в том, что в найденной точке должно также выполняться условие  $d^2f(x)/dx^2 \geq 0$ .

Однако и эти два условия не гарантируют, что найдена точка абсолютного минимума. Во-первых, если  $d^2f/dx^2 = 0$ , то упомянутые выше два условия не обеспечивают достаточной информации, а, во-вторых, если даже  $d^2f/dx^2 > 0$ , то на исследуемом интервале может быть множество точек с таким свойством. Это означает, что все такие точки являются точками локального минимума. Для того чтобы установить, какая из этих точек есть точка абсолютного минимума, необходимо сравнить значение функции  $f(x)$  в каждой из этих точек, и только после этого выбрать искомую.

Приведенные выше положения могут быть математически описаны следующим образом. Пусть  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  являются точками, удовлетворяющими первым двум необходимым условиям минимума функции  $f(x)$ ; тогда точка абсолютного минимума должна удовлетворять еще одному свойству:  $f(x^*) \leq f(x_i)$  для всех  $i$ . Последнее можно назвать третьим необходимым условием существования точки минимума.

Все три необходимых условия вместе составляют достаточное условие того, что точка  $x^*$  является точкой абсолютного минимума функции  $f(x)$  на интервале  $(x_a, x_b)$  при условии, что второе необходимое условие записано в виде  $\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} > 0$ .

Если  $f(x)$  дважды не дифференцируема, то некоторые или все из перечисленных выше условий применять нельзя. Например, если  $f(x)$  только дифференцируема, то первое необходимое условие  $df/dx = 0$  еще остается в силе; однако условие  $d^2f/dx^2 > 0$  необходимо заменить локальным условием  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x$  в некоторой окрестности точки  $x^*$ . Аналогично, если функция  $f(x)$  лишь кусочно дифференцируема [т. е. имеется конечное число точек в интервале  $(x_a, x_b)$ , в которых  $df(x)/dx$  разрывна], то лишь в точках непрерывности функции  $df/dx$  можно использовать первые два необходимых условия. Еще реже, но такие случаи встречаются, когда для отыскания минимума остается единственное условие  $f(x^*) \leq f(x)$ , для проверки которого можно использовать лишь непосредственный перебор точек из интервала  $(x_a, x_b)$ . Конечно, последний способ малоприменим для математического анализа.

Если точка минимума функции  $f(x)$  принадлежит закрытому интервалу  $[x_a, x_b]$ , то она может совпасть и с граничной точкой  $x_a$  или  $x_b$ . В этом слу-

чае, даже если функция  $f(x)$  дважды дифференцируема, то рассмотренные выше первые два условия не являются более необходимыми условиями, и требуется применить более сложные методы исследования.

В случае нахождения точки минимума функции нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  условие минимума будет подобным, но все-таки более сложным. Первое необходимое условие превратится в требование, чтобы в каждой «подозреваемой» точке  $df/dx_i = 0$  для каждого  $i$ . Вторым необходимым условием станет требование того, чтобы в каждой «подозреваемой» точке матрица <sup>1)</sup>  $[f_{x_i x_j}]$  была неотрицательной (см. упражнение 13.1).

Третье необходимое условие непосредственно вытекает из случая одной переменной, так как оно соответствует тем случаям, когда точка минимума отыскивается на закрытом интервале, или функция  $f(x)$  не является дважды дифференцируемой.

Значительный интерес имеет отыскание точки минимума дважды непрерывно дифференцируемой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  при наличии ограничений в виде уравнений

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0; \dots; g_m(x_1, \dots, x_n) = 0^*.$$

Существует непосредственный способ решения данной задачи, технически достаточно сложный, который заключается в исключении  $m$  переменных из совокупности  $x_1, \dots, x_n$  за счет  $m$  уравнений ограничения и последующей минимизации полученной функции  $(n - m)$  переменных, как это было описано выше. Однако наиболее целесообразно применять метод множителей Лагранжа, который кратко рассмотрим ниже. Первое необходимое условие минимума можно переписать в виде

$$df(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad (13.2)$$

а в качестве  $m$  ограничивающих условий использовать  $m$  уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_1}{\partial x_i} dx_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_m}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (13.3)$$

Если ограничения отсутствуют, то бесконечно малая величина  $dx_i$  может быть взята произвольно и условие (13.2) останется в силе. Это означает  $df/dx_i = 0$  для всех  $i$ , что совпадает с ранее рассмотренным случаем. Однако при наличии ограничений  $dx_i$  не может быть выбрана произвольно, а должна выбираться в соответствии с условиями (13.3).

Введем  $m$  параметров  $\psi_1, \dots, \psi_m$ , называемых множителями Лагранжа, и образуем условие

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \psi_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) dx_i = 0; \quad (13.4)$$

<sup>1)</sup> Здесь использовано общепринятое обозначение  $f_{xy}$  для записи второй частной производной  $d^2f/dx dy$ ; таким образом, матрица  $[f_{x_i x_j}]$  является матрицей размерности  $n \times n$  с элементами  $d^2f/dx_i dx_j$ .

\* Конечно,  $m < n$  и каждая из функций  $g_j$  предполагается дважды непрерывно дифференцируемой.



если параметры  $\psi_1, \dots, \psi_m$  выбраны так, что  $m$  соотношений вида

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \psi_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right)$$

равняются нулю, то оставшиеся  $(n - m)$  соотношений также должны равняться нулю. Это действительно так потому, что параметры  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) теперь точно определены и оставшиеся  $(n - m)$  слагаемых могут быть выбраны произвольно. Следовательно, для выполнения равенства (13.4) положим

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \psi_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = m + 1, \dots, n.$$

Окончательно получаем  $n$  уравнений вида

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \psi_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( f + \sum_{j=1}^m \psi_j g_j \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13.5)$$

которые вместе с  $m$  уравнениями ограничений  $g_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  образуют  $(m + n)$  уравнений с  $(n + m)$  неизвестными  $\psi_1, \dots, \psi_m$ ,  $x_1, \dots, x_n$ . Эти уравнения могут быть решены, если задача сформулирована правильно.

Отметим, что выражение (13.5) является точно таким же, как первое необходимое условие для нахождения точки экстремума составной функции  $f + \sum_{j=1}^m \psi_j g_j$  без учета ограничений.

## 2. Первое необходимое условие в вариационном исчислении и уравнение Эйлера—Лагранжа

Простейшая задача в вариационном исчислении предполагает минимизацию функционала вида

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L \left[ x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t \right] dt \quad (13.6)$$

для нахождения минимизирующей функции  $x^*(t)$ , удовлетворяющей некоторому заданному граничному условию вида

$$x(t_1) = x_1; \quad x(t_2) = x_2.$$

Заметим, что вместо поиска точки минимума отыскивается минимизирующая функция или траектория. Это, естественно, вызывает много дополнительных трудностей. Когда класс функций, среди которых ищется минимизирующая, является достаточно «хорошим», то основные шаги при нахождении экстремальной функции весьма наглядны.

Предположим, что функция  $L$  в выражении (13.6) дважды дифференцируема по переменным  $x$ ,  $dx/dt$  и  $t$ , и, кроме того, известно, что экстремальное

решение существует. Тогда процедура нахождения первого необходимого условия относительно проста.

Допустим, что минимизирующая функция  $x(t)$  найдена. Рассмотрим теперь любую непрерывно дифференцируемую (почти всюду) функцию  $\eta(t)$  со свойством  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ . Сформируем функцию  $x(t) + \varepsilon\eta(t)$  с параметром  $\varepsilon$ , которая удовлетворяет прежним граничным условиям и, следовательно, принадлежит классу функций, среди которых имеется функция, доставляющая слабый локальный минимум для функционала  $\mathcal{F}$ <sup>1)</sup>.

Для такой функции функционал  $\mathcal{F}$  принимает следующее значение:

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, x + \varepsilon\eta) dt \quad (13.7)$$

Если  $x(t)$  была минимизирующей функцией, то, по определению,  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  будет больше, чем минимально возможная величина, за исключением случая, когда  $\varepsilon = 0$ . Кроме того, при данных условиях  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  будет дифференцируема по  $\varepsilon$ . Таким образом,  $\mathcal{F}(\varepsilon)$  имеет точку стационарности при  $\varepsilon = 0$ . Эти рассуждения приводят к уравнению (12.12), поэтому можно записать

$$\left. \frac{d\mathcal{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (13.8)$$

Оптимальная функция  $x^*(t)$  может быть найдена только среди решений, удовлетворяющих условию (13.8).

Пусть  $X(t) = x(t) + \varepsilon\eta(t)$  и  $\dot{X}(t) = \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\eta}(t)$ . Дифференцируя правую часть выражения (13.7) и подставляя  $\varepsilon = 0$ , с учетом (13.8) получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \cdot \frac{\partial \dot{X}}{\partial \varepsilon} \right) dt \right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\left. \frac{d\mathcal{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right] \eta(t) dt. \quad (13.10)$$

Так как  $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$  по определению, то первое слагаемое в правой части (13.10) равно нулю и, следовательно, остающийся интеграл должен равняться нулю для всех функций  $\eta(t)$ . Далее, можно показать, что выражения в скобках должны также равняться нулю<sup>2)</sup>. Это приводит нас к уравнению Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0. \quad (13.11)$$

<sup>1</sup> Отметим, что для каждой величины  $\varepsilon$  функция  $x(t) + \varepsilon\eta(t)$  определяет слабую  $\delta$ -окрестность, где  $\delta = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} (\varepsilon\eta(t); \varepsilon\dot{\eta}(t))$ .

<sup>2</sup> Так как выражение (13.10) должно выполняться для каждого выбора функции  $\eta(t)$ , то можно ее взять такой, чтобы она имела тот же знак, что и величина  $(\partial L/\partial x) - d(\partial L/\partial \dot{x})/dt$  для всех  $t$ . При таком выборе интеграл в выражении (13.10) положителен и может быть равен 0 только в случае, если выполняется условие (13.11).

Уравнение (13.11) и есть первое необходимое условие оптимальности в рассматриваемой задаче вариационного исчисления.

Отметим, что в тех случаях, когда функция явно не зависит от переменной  $t$ , справедливо следующее условие:

$$\frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right) = \dot{x} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right).$$

Принимая во внимание уравнение (13.11) вдоль оптимальной траектории  $x^*(t)$ , получим следующее соотношение

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} = \text{const} \quad (\text{для } L, \text{ явно не зависящих от } t). \quad (13.12)$$

**Пример 13.1.** Найдем функцию, удовлетворяющую граничным условиям  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1$  и уравнению Эйлера—Лагранжа (13.11) для функционала

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \frac{1}{\dot{x}} dt.$$

В этом случае  $L = \frac{1}{\dot{x}}$ ;  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  и уравнение (13.11) сводится к виду  $d(dL/d\dot{x})/dt = 0$ , откуда  $dL/d\dot{x} = \text{const}$ . Так как  $dL/d\dot{x} = -(\dot{x})^{-2}$ , то  $\dot{x} = k$ , где  $k$  — постоянная. Таким образом,  $x = kt + x(0)$ . Граничное условие выполняется при  $k = 1$ ; поэтому решением является прямая линия  $x = t$ .

Если в описании задачи участвует несколько переменных, то функция  $L$  в выражении (13.6) имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; t)$$

и

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n; t) dt. \quad (13.13)$$

Допустим, что функция  $L$  непрерывно дифференцируема вместе со своими производными до второго порядка включительно по каждому из своих аргументов. Определим  $n$  произвольных функций  $\eta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , удовлетворяющих условию  $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$ , и рассмотрим вариацию относительно оптимальных функций  $x_i(t)$  и  $\dot{x}_i(t)$ . Введем функции

$$\left. \begin{aligned} X_i(t) &= x_i(t) + \varepsilon \eta_i(t), & i &= 1, \dots, n \\ \dot{X}_i(t) &= \dot{x}_i(t) + \varepsilon \dot{\eta}_i(t), & i &= 1, \dots, n; \end{aligned} \right\} \quad (13.14)$$

и подставим их в интеграл (13.13). Уравнение (13.8) по-прежнему определяет первое необходимое условие оптимальности. Применяя это условие, получим следующее выражение:

$$\frac{d\mathcal{J}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{\eta}_i \right) dt = 0. \quad (13.15)$$

Для каждой функции  $x_i$  интегрирование по частям дает выражение, подобное (13.10), т. е.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i} \eta_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \eta_i dt. \quad (13.16)$$

Заметим, что, во-первых, выражение (13.16) должно выполняться для всех возможных  $\eta_i$ , и, в частности, оно будет справедливо, когда все  $\eta_i$ , за исключением, например,  $\eta_j$ , взяты тождественно равными 0. Во-вторых,  $j$ -е слагаемое в выражении (13.16) должно быть равно 0 при любых  $\eta_j(t)$ , так как  $\eta_j(t_1) = \eta_j(t_2) = 0$ . Данные замечания приводят нас к уравнениям Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (13.17)$$

эти уравнения выполняются в любой точке оптимальной траектории.

Если  $L$  не зависит от  $t$ , то вдоль оптимальной траектории, согласно условию (13.12), имеем

$$L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \text{const.} \quad (13.18)$$

### 3. Разрывы и условия скачка

Проинтегрируем каждое из уравнений (13.17), тогда получим уравнения Эйлера—Лагранжа в интегральной форме:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x_i} dt + C_i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.19)$$

где  $C_i$  — постоянные интегрирования.

Выражение (13.19) справедливо даже для траекторий  $x(t)$ , которые имеют конечное число точек разрыва функции  $\dot{x}(t)$  \*. Таким образом, несмотря на то, что выражение (13.19) имеет то же самое назначение, что и уравнения Эйлера—Лагранжа, однако оно обладает более широкой областью применения.

Точки, в которых производная  $\dot{x}(t)$  разрывна, в вариационном исчислении называются точками излома. Большинство известных результатов было получено для траекторий с конечным числом точек излома.

Существует два основных условия, которые должны удовлетворяться вдоль оптимальных траекторий. Они известны как условия Вейерштрасса—Эрдмана для точек излома.

Первое условие следует непосредственно из уравнения (13.19). Так как его правая часть непрерывна в точке излома, то отсюда следует, что левая часть также непрерывна. Следовательно, если  $t = \tau$  является точкой оптимальной траектории, на которой встречается точка излома, то для одной или более координат  $\dot{x}_i$  имеет место условие

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \Big|_{t=\tau^-} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \Big|_{t=\tau^+}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (13.20)$$

Второе условие \* состоит в том, что в точке излома  $x_k(\tau)$  оптимальной траектории имеем

$$\left( L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \Big|_{t=\tau^-} = \left( L - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \Big|_{t=\tau^+}. \quad (13.21)$$

\* См., например, работу [156]. Конечно, между точками разрыва  $\dot{x}(t)$  уравнения Эйлера—Лагранжа также выполняются.

\*\* См. работу [156]. Это условие станет очевидным, когда будет изучен принцип максимума (гл. 14).

Это означает, что, когда функция  $L$  не зависит от переменной  $t$ , условие, определенное выражением (13.18), по-прежнему выполняется, несмотря на то, что траектория имеет точки излома.

#### 4. Другие необходимые условия существования минимума функционала

Первое необходимое условие для минимума функционала, которое следует из выражения (13.8), часто записывают так:

$$\delta \mathcal{F} = 0, \quad (13.22)$$

что означает: первая вариация функционала  $\mathcal{F}$  равна нулю. Это условие аналогично равенству нулю первой производной.

Второе необходимое условие записывают в виде ограничений, наложенных на вторую вариацию. Осуществим разложение функционала  $\mathcal{F}(\epsilon)$  (13.7) в ряд Тейлора:

$$\mathcal{F}(\epsilon) = \mathcal{F} + \epsilon \delta \mathcal{F} + \frac{\epsilon^2}{2} \delta^2 \mathcal{F} + \dots, \quad (13.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt; & \delta \mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{dL}{dx} \eta + \frac{dL}{d\dot{x}} \dot{\eta} \right) dt; \\ \delta^2 \mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \eta^2 \frac{d^2 L}{dx^2} + 2\eta \dot{\eta} \frac{d^2 L}{dx d\dot{x}} + \dot{\eta}^2 \frac{d^2 L}{d\dot{x}^2} \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

Для траектории, которая удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа, согласно выражению (13.8)  $\delta \mathcal{F}$  равняется нулю. Но из всех траекторий, которые удовлетворяют уравнениям Эйлера—Лагранжа, минимизирующая траектория должна быть такой, чтобы все другие траектории вблизи нее обеспечивали большую величину функционала  $\mathcal{F}$ . Последнее свойство можно описать математически таким образом: для достаточно малых  $\epsilon$  ряд (13.23) обеспечивает условие  $\mathcal{F}(\epsilon) \geq \mathcal{F}$ . Это означает, что  $\delta^2 \mathcal{F} \geq 0$  и в рассматриваемой задаче найденная траектория обеспечивает локальный минимум функционала  $\mathcal{F}$ .

Для того чтобы выполнялось условие  $\delta^2 \mathcal{F} \geq 0$  вдоль данной траектории, необходимо выполнение неравенства  $d^2 L / d\dot{x}^2 \geq 0$  вдоль этой траектории. Сформулированное условие носит название условия Лежандра. Напомним, что функция  $\eta(t)$  предполагается равной нулю при  $t_1$  и  $t_2$ , но в других отношениях она не определена. Следовательно, можно построить функцию  $\eta(t)$  так, чтобы удовлетворялось условие Лежандра.

Такая функция показана на рис. 13.2 и равна

$$\eta = \begin{cases} \sqrt{h} \left( 1 + \frac{t-\tau}{h} \right), & \tau - h \leq t \leq \tau; \\ \sqrt{h} \left( 1 - \frac{t-\tau}{h} \right), & \tau \leq t \leq \tau + h; \\ 0 & \text{при всех других } t, \end{cases} \quad (13.25)$$

где параметр  $\tau$  удовлетворяет неравенству  $t_1 < \tau < t_2$  и выбран так, что подынтегральное выражение в соотношении для  $\delta^2 \mathcal{F}$  является регулярным.

Подставляя  $\eta(t)$  в  $\delta^2 \mathcal{F}$  и устремляя  $h \rightarrow 0$ , убеждаемся, что условия Лежандра выполняются (покажите это).

При нескольких переменных условие Лежандра<sup>1)</sup> заключается в том, что матрица  $[L_{x_i x_j}]$  неотрицательна вдоль оптимальной траектории.

Если траектория удовлетворяет как условию Лежандра, так и условиям Эйлера—Лагранжа, то она минимизирует функционал  $\mathcal{F}$  в слабом смысле. Для того чтобы установить, что траектория обеспечивает также сильный локальный минимум, нужно наложить третье необходимое условие. Обращаясь к рис. 13.3, обозначим через  $x^*(t)$  найденную траекторию. Мы хотим изменить  $x^*(t)$  таким образом, чтобы в результате получить траекторию  $X(t)$  которая лежит в сильной окрестности  $x^*(t)$ . Такое изменение может быть

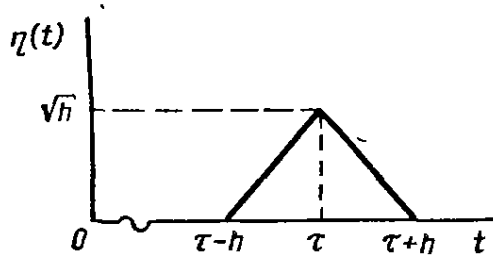


Рис. 13.2. Специальная функция  $\eta(t)$ , позволяющая получить условия Лежандра для случая одной переменной

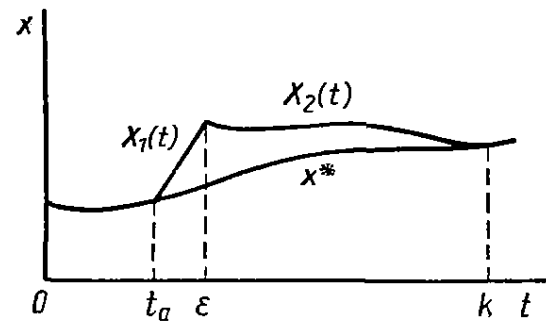


Рис. 13.3. Графики кривых  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$ , которые вместе составляют сильную вариацию относительно  $x^*(t)$

построено, начиная с точки  $x^*(t_a)$ , следующим образом: 1) через точку  $x^*(t_a)$  проведем прямую линию  $x_1(t)$  с конечным наклоном  $m$ , т. е.

$$X_1(t) = x^*(t_a) + m(t - t_a); \quad (13.26)$$

2) в точке  $t > t_a$  образуем функцию  $X_2(t)$ , которая зависит от параметра  $\varepsilon$ . Потребуем, чтобы  $X_2(t) = x^*(t)$ , если  $\varepsilon = t_a$ . Такой функцией, например, может быть

$$X_2(t) = x^*(t) + \frac{k-t}{k-\varepsilon} [x^*(t_a) + m(\varepsilon - t_a) - x^*(\varepsilon)], \quad (13.27)$$

где  $k$  — произвольная постоянная.

Заметим, что  $X_1(t)$  совпадает с  $X_2(t)$  при  $t = \varepsilon$  и  $X_2(t)$  совпадает с  $x^*(t)$  при  $t = k$ . Если выбрать функцию  $X(t)$  согласно выражению

$$X(t) = \begin{cases} x^*(t), & t \leq t_a, \text{ а } k < t; \\ X_1(t), & t_a < t \leq \varepsilon; \\ X_2(t), & \varepsilon < t \leq k, \end{cases} \quad [(13.28)$$

то построенная возмущенная траектория находится в сильной окрестности  $x^*(t)$ , так как при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина  $|X(t) - x^*(t)|$  также стремится к нулю. Однако одна из составляющих функций  $X(t)$  будет всегда иметь наклон  $m$ , и, следовательно, величина  $|\dot{X}(t) - \dot{x}^*(t)|$  не может быть сколь угодно малой.

<sup>1)</sup> Условие Лежандра было распространено на упомянутый класс задач Клебшом, и поэтому часто говорят об условии Лежандра—Клебша.

Допустим, траектория  $x^*(t)$  доставляет абсолютный минимум функционалу; тогда, помимо выполнения уравнений Эйлера—Лагранжа и условия Лежандра, должно выполняться условие

$$\Delta \mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(X(t), \dot{X}(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt \geq 0 \quad (13.29)$$

относительно произвольной траектории  $X(t)$ .

Рассмотрим семейство только что полученных сильных вариаций. Предположим, что  $x^*(t)$  — минимизирующая траектория, тогда для траектории  $X(t)$ , заданной выражением (13.28), выполняется условие (13.29). Кроме того, учитывая рассуждения, которые привели нас к выражению (13.8), получим

$$\left. \frac{\partial \Delta \mathcal{J}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=t_a} \geq 0. \quad (13.30)$$

Если определена так называемая остаточная функция Вейерштрасса, т. е.

$$E(x^*, \dot{x}^*, \dot{x}, t) = L(x^*, \dot{x}, t) - L(x^*, \dot{x}^*, t) - (\dot{x} - \dot{x}^*) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t), \quad (13.31)$$

где  $\dot{x}$  — производная неоптимальной функции, которая в нашем случае равна  $\dot{X}(t)$ , то можно показать (см. пример 13.12), что необходимым условием для  $\Delta \mathcal{J} \geq 0$  в выражении (13.29) является

$$E(x^*, \dot{x}^*, x, t) \geq 0 \quad (13.32)$$

на траектории  $x^*(t)$  для любого  $t$ . Выражение (13.32) представляет собой условие Вейерштрасса. Доказательство условия Вейерштрасса будет дано в гл. 14, где рассматривается принцип максимума.

**Пример 13.2.** Рассмотрим снова пример 13.1 и проверим, удовлетворяет ли полученное решение условию Лежандра и условию Вейерштрасса.

Если предположить, что решение, полученное в примере 13.1, оптимальное, то оно должно быть минимизирующим. В рассматриваемом случае условие Лежандра  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \geq 0$  обретает следующие числовые значения:  $d^2 L / d\dot{x}^2 = 2/\dot{x}^3$ , если  $L = \frac{1}{x}$  и вдоль «оптимальной» траектории,

где  $\dot{x} = 1$ ,  $d^2 L / d\dot{x}^2 = 2$ , условие Лежандра выполняется.

Вычислим функцию Вейерштрасса

$$E = \frac{1}{x} - 1 + (\dot{x} - 1) = \frac{1}{x} + \dot{x} - 2,$$

откуда видно, что условие  $E \geq 0$  не удовлетворяется, если  $x < 0$ . Поэтому условие Вейерштрасса не выполняется. Таким образом, решение  $x(t) = t$  примера 13.1 обеспечивает самое большее слабый локальный минимум.

Действительно, совсем просто построить траекторию, которая дает меньшую величину  $\mathcal{J}$ , чем траектория  $x(t) = t$ . Учитывая, что условие Вейерштрасса нарушается при  $x < 0$ , рассмотрим траекторию

$$x_1(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \leq t \leq 0,1; \\ -0,2 + 2(t - 0,1), & 0,1 \leq t < 0,4; \\ t, & 0,4 < t \leq 1,0, \end{cases}$$

которая удовлетворяет заданным граничным условиям, дважды кусочно дифференцируема и имеет одну точку излома<sup>1)</sup>.

Нетрудно показать, что  $x_1(t)$  обеспечивает величину  $\mathcal{J} = 0,7$ , в то время как «оптимальная траектория»  $x(t) = t$  дает величину  $\mathcal{J} = 1$ .

<sup>1)</sup> При  $t = 0,4$   $x_1(t)$  должна быть сглажена, чтобы выполнялось условие в точке излома.

Для многих переменных условие Вейерштрасса для сильного локального минимума задается в виде

$$E(x^*, \dot{x}^*, \dot{x}, t) = L(x^*, \dot{x}, t) - L(x^*, \dot{x}^*, t) - (\dot{x} - \dot{x}^*)^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x^*, \dot{x}^*, t) \geq 0. \quad (13.33)$$

В заключение необходимо упомянуть об условиях, которые следует выполнить для того, чтобы  $\delta^2 \mathcal{J}$  в выражении (13.24) была положительна или равна 0. Эти достаточные условия обычно называют условиями Якоби. Ввиду того, что формулировка и вывод этих условий <sup>1)</sup> потребовали бы некоторых более сложных понятий и громоздких выкладок, их мы рассматривать не будем.

## 5. Случай неопределенности или вариация граничных точек

Допустим, что при нескольких переменных ряд граничных условий  $x_i(t_2)$  не определен, тогда изложенный ранее способ оптимизации должен быть как-то изменен <sup>2)</sup>.

Следуя материалу § 2 этой главы, рассмотрим вариации  $X_i(t) = x_i(t) + \varepsilon \eta_i(t)$ , когда граничные значения  $x_i(t_2)$  не заданы; ясно, что условие  $\eta_i(t_1) = 0$  остается, а условие  $\eta_i(t_2) = 0$  не выполняется.

Однако каково бы ни было граничное условие  $\eta_i(t_2)$ , уравнение (13.8) тем не менее должно выполняться. Это по-прежнему приводит к необходимым условиям, заданным выражением (13.16). Отметим, что теперь и первый член в левой части выражения (13.16) имеет определенное значение.

Как и прежде, выбор  $\eta_i(t)$  произвольный, и поэтому первый и второй члены левой части выражения (13.16) в отдельности должны стремиться к нулю. Малость значения второго выражения, как и прежде, приведет к уравнениям Эйлера—Лагранжа вида (13.17), а первый член для рассматриваемых вариаций с незадачным условием в точке  $t_2$  приведет к так называемым условиям трансверсальности:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t_2} = 0 \quad (13.34)$$

(для тех траекторий  $x_i(t)$ , у которых граничные точки  $x_i(t_2)$  не заданы).

Если граничная точка не произвольная и она должна лежать на некоторой кривой или гиперповерхности, то условия трансверсальности становятся более сложными. Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления, изложенную в § 2 этой главы. Предположим, что оптимальная траектория теперь найдена такой, что ее граничная точка при  $t_2$  лежит на кривой

$$\rho(x(t_2), t_2) = 0;$$

Величина  $t_2$ , вообще говоря, заранее точно не известна, но сейчас она полностью определена.

Заметим, что все необходимые условия, выведенные для случая закрепленной граничной точки, здесь также должны выполняться. Это связано с тем, что оптимальная траектория для случая нестационарной граничной точки должна быть оптимальной траекторией и для соответствующей задачи с закрепленной граничной точкой, если выбрать в качестве последней решение задачи с незакрепленным концом.

<sup>1)</sup> См., например, работу [51].

<sup>2)</sup> Точка  $x(t_2)$  иногда упоминается в литературе как правая граничная точка, а точка  $x(t_1)$  иногда называется левой граничной точкой.



Для того чтобы вывести условие трансверсальности, допустим вариации  $\delta t_2$ ,  $\delta x(t)$  и  $\delta \dot{x}(t)$  \*. Оценим при этом изменение показателя качества  $\Delta \mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} &= \int_{t_1}^{t_2 + \delta t_2} L(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x}) dt = \\ &= \int_{t_2}^{t_2 + \delta t_2} L(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) dt + \int_{t_1}^{t_2} [L(t, x + \delta x, \dot{x} + \delta \dot{x}) - L(t, x, \dot{x})] dt. \end{aligned}$$

Ограничиваясь членами первого порядка малости, перепишем

$$\Delta \mathcal{F} \approx L(t, x, \dot{x})|_{t=t_2} \delta t_2 + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt.$$

Интеграл  $\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt$  можно взять по частям, как это было сделано при выводе выражения (13.10). В результате получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt.$$

Так как уравнение Эйлера—Лагранжа должно удовлетворяться вдоль оптимальной траектории, подынтегральная функция правой части указанного выше выражения будет тождественно равна 0. Кроме того,  $\delta x = 0$  при  $t = t_1$ , и, следовательно,

$$\Delta \mathcal{F} \approx \left( L \delta t_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t=t_2},$$

Теперь следует установить связь между вариациями  $\delta t_2$  и  $\delta x|_{t=t_2}$ . Пусть фактическое изменение  $x$  в граничной точке обозначается  $\delta x_2$ , тогда

$$\delta x_2 \approx \delta x|_{t=t_2} + \dot{x}(t_2) \delta t_2$$

и

$$\Delta \mathcal{F} \approx \left( L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t=t_2} \delta t_2 + \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t=t_2} \delta x_2.$$

Так как  $\delta t_2$  и  $\delta x_2 \rightarrow 0$ , то  $\Delta \mathcal{F} \rightarrow \delta \mathcal{F}$ , и указанное выше приближенное выражение становится равенством. Поскольку условие минимума есть  $\delta \mathcal{F} = 0$ , получаем соотношение

$$\left( L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t=t_2} \delta t_2 + \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t=t_2} \delta x_2 = 0, \quad (13.35)$$

которое остается лишь сопоставить с граничным условием  $\rho[x(t_2), t_2] = 0$ . Следовательно,  $\delta t_2$  и  $\delta x_2$  не могут быть выбраны произвольно, а должны быть такие, чтобы выполнялось уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial \rho}{\partial t_2} \delta t_2 = 0. \quad (13.36)$$

Уравнения (13.35) и (13.36) совместно составляют требуемые условия трансверсальности.

\* Заметим, что в отличие от предыдущих случаев здесь мы допускаем также вариацию  $\delta t_2$ .

## 6. Ограничения типа равенств и множители Лагранжа

Для определения экстремума функционала (13.13) с дополнительными ограничениями типа равенств

$$\varphi_k [x_1(t), \dots, x_n(t); \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)] = 0, \quad (13.37)$$

$k = 1, \dots, m$  и  $m < n$ ,

где функции  $\varphi_k$  дважды дифференцируемы, снова можно использовать множители Лагранжа. Как всегда, при введении  $m$  переменных Лагранжа, которые являются функциями от  $t$ ,  $\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)$ , задачу нахождения минимизирующего решения для функционала (13.13) с ограничениями (13.37) можно рассматривать как задачу минимизации функционала вида

$$\mathcal{F}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \sum_{k=1}^m \psi_k \varphi_k \right) dt$$

без учета ограничений.

Если минимизирующая траектория удовлетворяет требуемым граничным условиям, то функционал  $\mathcal{F}_1$  не зависит от переменных Лагранжа, и, следовательно, в выражении для первой вариации функционала  $\mathcal{F}_1$  коэффициент при каждом множителе  $\psi_i$  равен нулю, и поэтому стационарное значение функционала  $\mathcal{F}_1$  соответствует стационарному значению функционала  $\mathcal{F}$ . В этом и заключается идея метода множителей Лагранжа, который сформулируем в виде теоремы <sup>1)</sup>.

**Теорема 13.1.** (Правило множителей Лагранжа). Рассмотрим задачу минимизации функционала (13.13) с  $m$  ограничениями вида (13.37). Для каждой кусочно-гладкой <sup>2)</sup> минимизирующей траектории  $x^*(t)$  существуют константа  $c$  и функции  $\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)$ , не равные тождественно нулю, такие, что уравнения Эйлера — Лагранжа (13.17), условие Лежандра (стр. 366) и условие Вейерштрасса (13.33) выполняются в каждой точке (исключая точки излома) траектории  $x^*(t)$  при условии, что в качестве функции  $L$  рассматривается функция

$$L_1 = cL + \sum_{k=1}^m \psi_k \varphi_k.$$

Теорема 13.1 позволяет свести задачу минимизации функционала с ограничениями к задаче минимизации некоторого другого функционала без ограничений.

Так как в большинстве практических задач  $c \neq 0$ , то всегда можно считать, что  $c = 1$  <sup>3)</sup>.

Покажем, как можно воспользоваться результатами теоремы 13.1. Сначала рассмотрим случай, когда минимизируется функционал  $\mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$  с ограничением  $\varphi(x, \dot{x}, t) = 0$ . Согласно выражению (13.9) имеем

$$\left. \frac{d\mathcal{F}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) dt = 0. \quad (13.38)$$

<sup>1)</sup> Более строгое доказательство теоремы см. в работе [138]. Доказательство метода множителей Лагранжа можно извлечь из доказательства принципа максимума.

<sup>2)</sup> Кусочно-гладкой является кривая, которая имеет кусочно-непрерывную производную.

<sup>3)</sup> См. § 16.1.

Однако функция  $x(t)$  удовлетворяет также уравнению  $\bar{\varphi}(x, \dot{x}, t) = 0$ . Это означает, что  $\eta(t)$  не может быть выбрана произвольно. В действительности она должна быть выбрана такой, чтобы

$$\bar{\varphi}(x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}, t) = 0. \quad (13.39)$$

Из уравнения (13.39) следует  $\left. \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$  или, полагая, как и прежде,  $x + \varepsilon\eta = X$  и  $\dot{x} + \varepsilon\dot{\eta} = \dot{X}$ , получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{X}} \cdot \frac{\partial\dot{X}}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \eta + \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}} \dot{\eta} = 0. \quad (13.40)$$

Теперь выражения (13.38) и (13.40) можно объединить, вводя множитель  $\psi(t)$ , и образовать единственное необходимое условие вида

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} + \psi(t) \frac{\partial\varphi(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \right) \eta(t) + \left( \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial\dot{x}} + \psi(t) \frac{\partial\varphi(x, \dot{x}, t)}{\partial\dot{x}} \right) \dot{\eta}(t) \right] dt = 0. \quad (13.41)$$

Если  $\psi(t)$  выбрать так, что выражение с сомножителем  $\dot{\eta}(t)$  равно нулю, то первое слагаемое в интеграле также должно равняться нулю, поскольку функция  $\eta(t)$  произвольна.

Сравнивая с выражением (13.9), видим, что соотношение (13.41) соответствует задаче минимизации функционала  $\mathcal{F}_1 = \int_{t_1}^{t_2} (L + \psi\varphi) dt$  без ограничений с граничными условиями  $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2$ . Следовательно, множители Лагранжа  $\psi_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) должны быть в общем виде функциями времени на интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

## 13.2. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методы, изложенные в предыдущем параграфе, можно непосредственно использовать для решения линейных оптимальных задач. Этот класс систем характеризуется следующими свойствами:

1) объект управления линеен и описывается уравнением вида  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ;

2) целью управления является нахождение управляющей функции  $u(t)$ , которая переводит систему из начальной точки  $x_1$  для момента времени  $t_1$  в точку  $x_2$  для момента  $t_2$  таким образом, что функционал

$$\mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt \quad (13.42)$$

принимает минимальное значение;

3) функция критерия  $L(x, u, t)$  является квадратичной формой переменных состояния и управления; коэффициенты квадратичной формы могут изменяться во времени.

В нестационарном случае, когда матрицы  $A$  и  $B$  зависят от времени, применение вариационного исчисления приводит к двухточечной краевой задаче, которая может быть решена методами § 12.3, хотя в общем случае

аналитическое решение невозможно. Если коэффициенты постоянны, то можно найти аналитическое решение задачи, а в некоторых случаях даже решить задачу синтеза.

Для того чтобы свести к минимуму излишние выкладки, рассмотрим систему с одним управлением вида  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) u$  и функцией критерия

$$L = \sum_{k=1}^n c_k(t) x_k^2 + d(t) u^2.$$

В задачах вариационного исчисления систему дифференциальных уравнений можно рассматривать как совокупность ограничений типа \*

$$\varphi_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, u) = \dot{x}_k - \sum_{j=1}^n [a_{kj}(t) x_j - b_k(t) u] = 0; \quad k = 1, \dots, n. \quad (13.43)$$

Согласно предыдущему параграфу, если ввести  $n$  множителей Лагранжа  $\psi_1, \dots, \psi_n$ , то задача минимизации, изложенная выше, приводится к задаче минимизации эквивалентного функционала  $\mathcal{F}_1$  без ограничений, где

$$\mathcal{F}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left( L + \sum_{k=1}^n \psi_k \varphi_k \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L_1 dt, \quad (13.44a)$$

и

$$L_1 \triangleq L + \sum_{k=1}^n \psi_k \varphi_k. \quad (13.44b)$$

Если удастся в результате решения выразить управление и через переменные  $x_i$ , то говорят, что при этом решена задача синтеза.

Сравнивая нашу задачу с задачей § 13.1, заметим, что кроме переменных  $x_i$  и  $\dot{x}_i$ , появляется переменная  $u$ . Аналогично задачам предыдущего параграфа определим дополнительную переменную  $x_{n+1}$  следующим образом:  $x_{n+1}(t) = \int_{t_1}^{t_2} u(\tau) d\tau$ ;  $x_{n+1}(t_1) = 0$ ;  $x_{n+1}(t_2)$  — произвольная.

В этом случае имеем

$$\dot{x}_{n+1}(t) \equiv u(t), \quad (13.45)$$

и уравнения Эйлера—Лагранжа принимают вид

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Для нашей задачи найдем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial x_k} &= \psi_k; & \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_k} &= 2c_k(t) x_k - \sum_{j=1}^n a_{jk}(t) \psi_j; & k &= 1, \dots, n; \\ \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_{n+1}} &= \frac{\partial L_1}{\partial u} &= 2d(t) u - \sum_{j=1}^n b_j(t) \psi_j; & \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.46)$$

\* Здесь рассматривается  $n$  ограничений, потому что имеется дополнительная переменная  $u(t)$ .

и, подставляя их в уравнения Эйлера—Лагранжа, получим

$$\dot{\psi}_k = - \sum_{j=1}^n a_{jk}(t) \psi_j + 2c_k(t) x_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (13.47a)$$

и

$$2d(t)u - \sum_{j=1}^n b_j(t) \psi_j = \text{const.}$$

Значение постоянной в последнем уравнении можно найти, рассматривая условие трансверсальности для  $x_{n+1}$  при  $t = t_2$ . Используя выражение (13.34), получим

$$\left. \frac{\partial L_1}{\partial x_{n+1}} \right|_{t=t_2} = 0.$$

Таким образом, постоянная равна 0 и рассматриваемое соотношение принимает вид

$$2d(t)u - \sum_{j=1}^n b_j(t) \psi_j = 0. \quad (13.47б)$$

К выражению (13.47а) и (13.47б) добавим уравнение системы

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}(t) x_j + b_k(t) u, \quad k = 1, \dots, n. \quad (13.47в)$$

Уравнения (13.47 а, б, в) образуют систему  $2n$  нестационарных линейных дифференциальных уравнений относительно переменных  $x$  и  $\psi$ . Граничные условия  $x(t_1) = x_1$ ;  $x(t_2) = x_2$  дают нам требуемые  $2n$  условий. Теперь, чтобы решить эти уравнения, можно использовать метод, изложенный в § 13.2 (см. также пример 13.8).

Для линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами и стационарным квадратичным показателем качества решение двухточечной граничной задачи не сложнее, чем решение однотоочечной задачи. Это связано с тем, что вид решения известен и остается только определить постоянные, используя граничные условия. Подставляя уравнение (13.47б) в (13.47в), запишем следующую систему:

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \frac{b_k}{2d} \sum_{j=1}^n b_j \psi_j; \quad \dot{\psi}_k = - \sum_{j=1}^n a_{jk} \psi_j - 2c_k x_k. \quad (13.48)$$

Характеристическое уравнение линейной системы (13.48) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \cdots & a_{1n} & \frac{b_1^2}{2d} & \cdots & \frac{b_1 b_n}{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda & \frac{b_n b_1}{bd} & \cdots & \frac{b_n^2}{2d} \\ 2c_1 & 0 \cdots & 0 & -a_{11} - \lambda & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2c_n & -a_{1n} & \cdots & -a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (13.49a)$$

Запишем его в более простой форме:

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I \frac{1}{2d} [bb^T] \\ 2C \quad -A^T - \lambda I \end{bmatrix}, \quad (13.496)$$

где  $C = \text{diag} [c_1, \dots, c_n]$ .

Так как матрицы  $(1/2d) bb^T$  и  $2C$  являются симметричными и, кроме того, определители исходной и транспонированной матриц равны, то определитель (13.496) можно привести к виду

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} A + \lambda I \frac{1}{2d} [bb^T] \\ 2C \quad -A^T + \lambda I \end{bmatrix}. \quad (13.50)$$

Анализируя определители (13.496) и (13.50), заметим, что если  $\lambda_1$  есть решение уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$ , то  $(-\lambda_1)$  также является решением этого уравнения. Таким образом, полюсы располагаются симметрично относительно как мнимой, так и действительной осей комплексной плоскости.

Будем считать, что система имеет только простые корни, действительные части которых не равны нулю, и положим далее, что  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — суть  $n$  корней с отрицательными действительными частями; тогда общее решение системы уравнений будет линейной комбинацией экспонент вида  $\alpha_k e^{\lambda_k t}$  и  $\beta_k e^{-\lambda_k t}$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Они содержат  $2n$  произвольных констант  $\alpha_1, \dots, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ , которые определяются из  $2n$  граничных условий.

Если граничное условие задается только при  $t_1$  и  $x(t_1) = x$ , а  $x(t_2)$  остается произвольным, то в дополнение к начальным условиям имеем условие трансверсальности (13.34), которое в данном случае запишется так:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_i} \Big|_{t=t_2} = \psi_i(t_2) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (13.51)$$

Таким образом, если правая граничная точка остается свободной, то значения множителей Лагранжа в этой точке равны нулю.

В некоторых случаях верхний предел интегрирования  $t_2$  бесконечен, и, следовательно, минимизируемый функционал определен на полубесконечном интервале времени\*. Это имеет смысл лишь в том случае, когда при  $t \rightarrow \infty$  граничные условия совпадают с положениями равновесия системы; в линейном случае — с началом координат, т. е.  $x(\infty) = 0$ . Тогда очевидно, что коэффициенты  $\beta_k$  при расходящихся экспонентах должны стремиться к нулю:

$$\beta_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (13.52)$$

В рассмотренном примере будем иметь  $2n$  уравнений для  $n$  неизвестных. При этом можно исключить  $n$  функций  $\alpha_k e^{\lambda_k t}$  с  $k = 1, \dots, n$  и получить уравнения, из которых определяется множитель  $\psi_i$  как линейная комбинация компонент  $x_j$ .

Используя уравнение (13.476), управление  $u$  можно представить в виде линейной комбинации составляющих  $x_j$  и, следовательно, синтезировать оптимальное управляющее устройство.

Читатель может сам убедиться, что коэффициенты в законе управления постоянны.

\* Такая постановка задачи аналогична рассмотренной в § 12.2.

Пример 13.3. Определим линейное оптимальное управление для системы с передаточной функцией  $\frac{1}{s^2+1}$ , принимая во внимание показатель качества

$$J = \int_0^{\infty} \left( x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{9} u^2 \right) dt$$

и граничные условия  $x(0) = x_0$  и  $x(\infty) = 0$ .

Обозначим выходную величину через  $x_1$ , а ее производную через  $\dot{x}_1 = x_2$ ; тогда уравнения системы примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u;$$

согласно выражению (13.44б) имеем

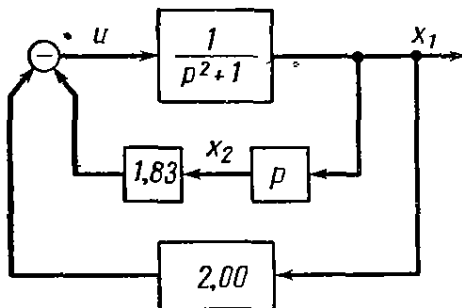
$$L_1 = x_1^2 + x_2^2 + \frac{u^2}{9} + \psi_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2 (\dot{x}_2 + x_1 - u).$$

При этом уравнения Эйлера—Лагранжа принимают вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u; \quad \dot{\psi}_1 = 2x_1 + \psi_2; \quad \dot{\psi}_2 = 2x_2 - \psi_1,$$

где  $u = 9\psi_2/2$  — вспомогательное уравнение, которое получено из выражения (13.47б).

Исключая  $u$ , представим систему в матричном виде:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix};$$

характеристическое уравнение — суть  $\lambda^4 - 7\lambda^2 + 10 = 0$ , а его корни  $\lambda = \pm \sqrt{2}; \pm \sqrt{5}$ . Выходная координата  $x_1$  равна

$$x_1 = \alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}.$$

Рис. 13.4. Структурная схема оптимальной системы управления с отрицательной обратной связью (для примера 13.3)

Тогда при  $x_2 = \dot{x}_1$  с учетом уравнений, определяющих компоненты  $\psi_i$ , имеем

$$x_2 = \dot{x}_1 = -\sqrt{2} \alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} - \sqrt{5} \alpha_2 e^{-\sqrt{5}t};$$

$$\psi_2 = \frac{2}{9} u = \frac{2}{9} (\dot{x}_2 + x_1) = \frac{2}{9} \alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} + \frac{4}{3} \alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}.$$

Выразим  $\psi_2$  через составляющие выходного вектора  $x$ . Это можно сделать, выразив величины  $\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t}$  и  $\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t}$  из уравнений для  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\alpha_1 e^{-\sqrt{2}t} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} (\sqrt{5} x_1 + x_2);$$

$$\alpha_2 e^{-\sqrt{5}t} = \frac{-1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} (\sqrt{2} x_1 + x_2).$$

Тогда величина  $\psi_2$  равна (с точностью до трех десятичных знаков)

$$\psi_2 = -0,445x_1 - 0,406x_2,$$

$$u = \frac{9}{2} \psi_2 = -2,00x_1 - 1,83x_2.$$

Окончательная структура оптимального управляющего устройства с обратной связью показана на рис. 13.4. Полученная система должна быть устойчива.

При решении задач, рассмотренных выше, использовались уравнения Эйлера—Лагранжа, которые представляют первое необходимое условие

оптимальности. Для лучшего понимания дальнейшего изложения рассмотрим другие необходимые условия, хотя при решении данной задачи в этом нет необходимости.

Условие Лежандра—Клебша состоит в том, что матрица  $[L_{\dot{x}_i \dot{x}_j}]$  размерностью  $(n+1) \times (n+1)$  должна быть неотрицательной при  $x_{n+1} \equiv u(t)$ . Последнее означает, что условие Лежандра в этом случае будет

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u^2} \geq 0. \quad (13.53)$$

Для примера 13.3 имеем  $\partial^2 L_1 / \partial u^2 = 2/9$ ; следовательно, условие Лежандра выполняется.

Далее рассмотрим условие Вейерштрасса, в котором утверждается, что остаточная функция Вейерштрасса  $E$  (13.31) должна быть неотрицательной вдоль оптимальной траектории. В настоящей задаче функция  $E$  зависит от управления  $u(t)$ , которое, по определению, оптимально лишь в том случае, когда векторы  $\mathbf{x}(t)$  и  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  принимают оптимальные значения. Таким образом, можно написать <sup>1)</sup>

$$E = L_1(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}, u, t) - L_1(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, u^*) - \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i - \dot{x}_i^*) \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i}(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, u^*, t). \quad (13.54)$$

При условии

$$f_k(\mathbf{x}, u, t) = \sum_{j=1}^n a_{kj}(t) x_j + b_k(t) u$$

получим

$$L_1 = L + \sum_{k=1}^n \psi_k [\dot{x}_k - f_k(\mathbf{x}, u, t)],$$

откуда найдем

$$E = L - L^* + \sum_{k=1}^n \psi_k \{(\dot{x}_k - \dot{x}_k^*) - [f_k(\mathbf{x}^*; u, t) - f_k(\mathbf{x}^*; u^*, t)] - (\dot{x}_k - \dot{x}_k^*)\} = L - L^* - \sum_{k=1}^n \psi_k [f_k(\mathbf{x}^*, u, t) - f_k(\mathbf{x}^*, u^*, t)], \quad (13.55)$$

где  $L^* \triangleq L(\mathbf{x}^*, u^*, t)$ .

В случае минимума  $E \geq 0$  это указывает на то, что  $u^*$  необходимо выбирать таким, чтобы

$$\sum_{k=1}^n \psi_k f_k(\mathbf{x}^*, u^*, t) - L^* \geq \sum_{k=1}^n \psi_k f_k(\mathbf{x}^*, u, t) - L. \quad (13.56)$$

Другими словами, выражение (13.56) показывает, что  $u^*$  должно быть выбрано таким, что функция

$$H = \sum_{k=1}^n \psi_k f_k(\mathbf{x}^*, u, t) - L \quad (13.57)$$

<sup>1)</sup> Напомним, что  $dL_1^*/du \equiv 0$  согласно уравнениям Эйлера—Лагранжа, где  $L_1^* \triangleq L_1(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, u^*, t)$ .



(которая на траектории  $x^*$  зависит только от  $u$ ) принимает максимальное значение в каждой точке оптимальной траектории  $x^*$ . Как будет показано в следующей главе, это утверждение является принципом максимума для частного случая задач, рассмотренных выше.

Поскольку на управление  $u$  не наложено ограничений, то можно найти  $u$ , беря частную производную величины  $H$  (13.57), устремляя ее к 0. Это приводит к условию, аналогичному (13.47б). Следовательно, найденное решение удовлетворяет также условию Вейерштрасса.

Заметим, когда  $H$  принимает максимальное значение, то

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_{u=u^*} \leq 0,$$

что независимо от изложенного выше дает условие Лежандра (13.53). В действительности для класса задач, рассмотренных в этом параграфе, выполнение условия Вейерштрасса всегда означает и выполнение условия Лежандра.

### 13.3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ. ЗАДАЧА МАЙЕРА

Довольно часто встречаются задачи, когда качество системы определяется требованиями, накладываемыми лишь на конечное состояние. Наиболее характерная из таких задач — это задача наведения ракеты, когда минимальный промах является основной мерой качества таких систем.

Задача управления конечным состоянием тесно связана с классической задачей Майера в вариационном исчислении. В противоположность ей задача управления, рассмотренная в § 13.2, где показателем качества является интеграл вида (13.42), известна как задача Лагранжа<sup>1)</sup>.

Попытаемся получить необходимые условия, связанные с задачей Майера, используя метод множителей Лагранжа (теорема 13.1).

Снова рассмотрим систему первого порядка вида  $\varphi(x, \dot{x}, t) = 0$ , которая начинает движение из точки  $x_1(t_1) = x_1$  и в течение заданного промежутка времени  $[t_1, t_2]$  должна управляться так, чтобы минимизировать функцию  $\mathcal{J} = P(x_2)$ . При этом конечная точка  $x_2 = x(t_2)$  предполагается свободной.

Так как минимизируется не интеграл, то величина  $L$ , участвующая в методе множителей Лагранжа, тождественно равна нулю. Таким образом, можно считать, что настоящая задача эквивалентна задаче нахождения траектории  $x(t)$ , которая удовлетворяет заданным граничным условиям и минимизирует некоторый эквивалентный показатель качества

$$\mathcal{J}_1 = P(x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi(x, \dot{x}, t) dt. \quad (13.58)$$

Рассматривая вариации вида  $X(t) = x(t) + \varepsilon \eta(t)$  при  $\eta(t_1) = 0$ , находим, что

$$\mathcal{J}_1 = P[x(t_2) + \varepsilon \eta(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi[x + \varepsilon \eta, \dot{x} + \varepsilon \dot{\eta}(t), t] dt.$$

<sup>1)</sup> Задачи Лагранжа и Майера могут быть преобразованы одна в другую (см. пример 13.15). Однако такие преобразования часто приводят к громоздким уравнениям, поэтому имеет смысл рассматривать эти задачи отдельно.

Полагая  $\frac{d\mathcal{F}_1}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0$  и интегрируя по частям (см. § 13.1), получим уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} \right) = 0; \quad (13.59)$$

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} \eta(x) \Big|_{t=t_2} + \frac{\partial L_1(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \eta(t) \Big|_{t=t_2} = 0,$$

где

$$L_1 = \psi(t) \varphi(x, \dot{x}, t), \quad (13.60)$$

Так как величина  $\eta(t_2)$  произвольна, то получаем следующее условие трансверсальности:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} \Big|_{t=t_2} = - \frac{\partial L_1(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \Big|_{t=t_2}. \quad (13.61)$$

Совместно с условиями (13.59) и (13.61) должно выполняться также условие Вейерштрасса  $E \geq 0$ . С учетом выражений (13.31) и (13.60) найдем

$$E = \psi(t) \varphi(x^*, \dot{x}, t) - \psi(t) \varphi(x^*, \dot{x}^*, t) - (\dot{x} - \dot{x}^*) \psi(t). \quad (13.62)$$

Если имеется  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  и  $n$  функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , то можно определить  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$  так, что  $\varphi_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ , а  $P$  является функцией конечного состояния  $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$ . В этом случае первое необходимое условие оптимальности определяется совокупностью уравнений Эйлера—Лагранжа вида

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.63a)$$

где

$$L_1 = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t). \quad (13.63b)$$

В дополнение к этим уравнениям имеется совокупность условий трансверсальности

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} \Big|_{t=t_2} = - \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t=t_2} \quad (13.64)$$

и условие Вейерштрасса

$$E = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}, t) - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, t) - \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i - \dot{x}_i^*) \psi_i(t). \quad (13.65)$$

Если  $P$  явно зависит от  $t_2$ , т. е. конечный момент времени  $t_2$  заранее не определен, то выражение (13.58) принимает вид

$$\mathcal{F}_1 = P(x_2, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi(x, \dot{x}, t) dt. \quad (13.66)$$

Это означает, что возможна вариация  $t_2$ , обозначаемая через  $\delta t_2$ . Здесь можно использовать подход, изложенный в п. 5 § 13.1, и определить условия трансверсальности в граничной точке следующим образом:

$$\left[ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + L_1 - \dot{x} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t=t_2} \delta t_2 + \left[ \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}} \right] \Big|_{t=t_2} \delta x_2 = 0. \quad (13.67)$$

В случае  $n$  переменных условия трансверсальности запишутся так:

$$\left[ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + L_1 - \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \right] \Big|_{t=t_2} \delta t_2 + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial P(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \right] \Big|_{t=t_2} \delta x_{2i} = 0, \quad (13.68)$$

где  $\delta x_{2i}$  есть  $i$ -я компонента вектора  $\delta \mathbf{x}_2$ .

К рассмотренному классу задач можно отнести задачи оптимального быстродействия, о которых говорилось в предыдущем параграфе<sup>1)</sup>. Для этого класса задач  $P(x_2, t_2) = t_2$  и  $\mathcal{F}_1 = t_2 + \int_{t_1}^{t_2} L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$ , где  $t_2$  неизвестно и должно быть найдено.

Для того чтобы не ошибиться при решении задачи оптимального быстродействия, отметим, что необходимые условия для этой задачи должны совпадать с условиями для соответствующей задачи с фиксированным временем, когда минимальное время равно конечному времени. Однако, если это так, то величина  $t_2$  в функционале  $\mathcal{F}_1$  постоянная и не играет роли при отыскании минимума. Это означает, что необходимые условия для задачи оптимального

быстродействия, когда  $\mathcal{F}_1 = t_2 + \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$ , должны быть теми же, что

и для задачи с фиксированным временем и функционалом  $\mathcal{F}_1 = \int_{t_1}^{t_2} L_1(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$ .

Единственное различие заключается в условиях трансверсальности (13.68). В частности, если граничная точка  $\mathbf{x}(t_2)$  фиксирована, т. е.  $\delta \mathbf{x}_2 \equiv 0$ , то согласно выражению (13.68) можно получить для задачи оптимального быстродействия условие

$$\left( \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} - L_1 \right) \Big|_{t=t_2} = 1, \quad (13.69)$$

когда  $\mathbf{x}(t_2)$  фиксировано.

Если  $\varphi_i = \dot{x}_i - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$ , то выражение (13.69) сводится к виду

$$\left[ \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \dot{x}_i(t) - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \right] \Big|_{t=t_2} = 1$$

или 
$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) \Big|_{t=t_2} = 1. \quad (13.70)$$

Действительно, если функция  $L_1(\psi, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \psi_i [x_i - f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})]$  явно не зависит от времени, то из выражений (13.18), (13.69) и (13.70) следует

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \equiv 1; \quad t_1 \leq t \leq t_2; \quad (13.71)$$

это справедливо, когда  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  не зависит явно от времени.

<sup>1</sup> Если необходимо учитывать ограничения, наложенные на управляющее воздействие, то следует воспользоваться методом Валентайна, изложенным в § 13.5.

Применим теперь необходимые условия, развитые выше, к нелинейным системам. В этом случае в противоположность линейной системе примера 13.3 необходимые условия определяют двухточечную краевую задачу относительно  $2n$  нелинейных дифференциальных уравнений.

**Пример 13.4**<sup>1)</sup>. Динамику движения реактивного самолета, летящего в вертикальной плоскости, можно приближенно описать следующей системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \cos \gamma(t) \stackrel{\Delta}{=} f_1; \\ \dot{z}(t) &= v(t) \sin \gamma(t) \stackrel{\Delta}{=} f_2; \\ \dot{v}(t) &= \frac{g}{w(t)} \left[ T \cos \alpha(t) - D[v(t), \alpha(t)] - \frac{kv(t)}{g} \right] - g \sin \gamma(t) \stackrel{\Delta}{=} f_3; \\ \dot{\gamma}(t) &= \frac{g}{v(t)w(t)} [T \sin \alpha(t) + L[v(t), \alpha(t)] - \frac{g}{v(t)} \cos \gamma(t)] \stackrel{\Delta}{=} f_4; \\ \dot{w}(t) &= -k \stackrel{\Delta}{=} f_5, \end{aligned} \right\} (13.72)$$

где  $x(t)$  и  $z(t)$  — горизонтальное и вертикальное смещения самолета;

$v(t)$  — величина вектора скорости самолета, направленной под углом  $\gamma$  рад к горизонту;

$T$  — постоянная величина тяги, развиваемая реактивным двигателем;

$g$  — ускорение силы тяжести;

$w$  — вес самолета; предполагается не зависящим от высоты  $z$ ;

$D$  и  $L$  — соответственно лобовое сопротивление и подъемная сила, которые, в общем случае, являются функциями  $v$  и  $\alpha$ ;

$k$  — коэффициент, который характеризует потери веса из-за расхода топлива (рис. 13.5).

Найдем необходимые условия минимума времени полета, если в качестве управляющего воздействия использовать  $\alpha(t)$ . Иначе говоря, задача заключается в нахождении такой функции  $\alpha(t)$ , чтобы самолет, стартующий из точки с координатами  $(x_1, z_1)$  в момент времени  $t = 0$ , мог достигнуть конечной точки  $(x_2, z_2)$  за минимальное время  $t_2^*$ .

Как и в § 13.2, для удобства введем вспомогательную переменную  $\mu(t)$ :

$$\dot{\mu}(t) = \alpha(t); \quad \mu(0) = 0. \quad (13.73)$$

Теперь можно определить шестимерный вектор  $\mathbf{x}(t)$  с компонентами  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\gamma(t)$ ,  $w(t)$  и  $\mu(t)$ . Ограничения, обусловленные дифференциальными уравнениями, представим в виде

$$\varphi_1 = \dot{x} - f_1; \quad \varphi_2 = \dot{z} - f_2; \quad \varphi_3 = \dot{v} - f_3 = 0;$$

$$\varphi_4 = \dot{\gamma} - f_4 = 0; \quad \varphi_5 = \dot{w} + k = 0.$$

Вводя множители  $\psi_1(t), \dots, \psi_5(t)$ , образуем функцию

$$L_1 = \sum_{i=1}^5 \psi_i(t) \varphi_i(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Применяя метод множителей Лагранжа, преобразуем сформированную задачу в задачу нахождения вектора  $\mathbf{x}(t)$  на интервале времени  $[0, t_2]$ , который минимизирует показатель

качества  $\int_0^{t_2} L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) dt$  при отсутствии ограничений.

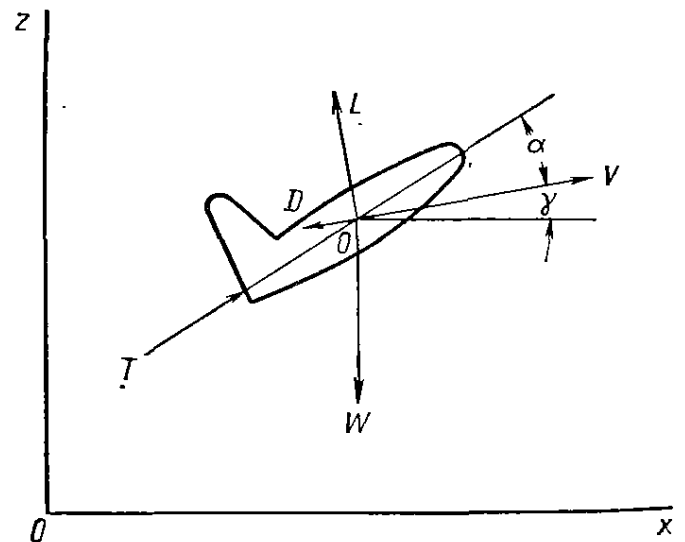


Рис. 13.5. Основные обозначения при полете реактивного самолета в вертикальной плоскости

<sup>1)</sup> См. работу [73]. М. Х е с т и н с, очевидно, первым показал, что задачи оптимального быстродействия близки к рассматриваемой задаче Майера.

Необходимые условия существования минимума последнего функционала заключаются в следующем.

1. Уравнения Эйлера—Лагранжа. Согласно уравнениям (13.63а) находим, что

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0; \quad \dot{\psi}_2(t) = 0; \\ \dot{\psi}_3(t) &= -\psi_1 \cos \gamma - \psi_2 \sin \gamma + \frac{\psi_3}{w} \left[ k + g \frac{\partial D(v, \alpha)}{\partial v} \right] - \\ &\quad - \psi_4 \frac{g}{vw} \left[ -\frac{T}{v} \sin \alpha + \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{1}{v} (L - w \cos \gamma) \right]; \\ \dot{\psi}_4(t) &= \psi_1 v \sin \gamma - \psi_2 v \cos \gamma + \psi_3 g \cos \gamma - \psi_4 \frac{g}{v} \sin \gamma; \\ \dot{\psi}_5(t) &= \psi_3 \frac{g}{w^2} \left[ T \cos \alpha - D(v, \alpha) + \frac{kv}{g} \right] + \psi_4 \frac{g}{vw^2} [T \sin \alpha + L(v, \alpha)]; \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial L_1}{\partial \alpha} = \frac{g}{w} \left[ \psi_3 \left( T \sin \alpha + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right) - \psi_4 \left( \frac{T}{v} \cos \alpha + \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) \right] = 0. \quad (13.74)$$

Последнее уравнение аналогично соотношению (13.47б).

2. Условия Вейерштрасса. Применяя уравнение (13.32), к настоящей задаче, получим

$$\sum_{i=1}^5 \psi_i f_i(x^*, \alpha^*) \geq \sum_{i=1}^5 \psi_i f_i(x^*, \alpha); \quad (13.75)$$

это означает, что оптимальный угол атаки  $\alpha^*(t)$  для всех  $t$  должен выбираться таким, чтобы обеспечить максимум величины  $\sum_{i=1}^5 \psi_i f_i(x^*, \alpha)$ . Так как только функции  $f_3$  и  $f_4$  зависят от  $\alpha$ , условие Вейерштрасса означает, что  $\alpha$  следует выбирать, определяя максимум следующего выражения:

$$h(v, \alpha) \stackrel{\Delta}{=} \psi_3(t) \frac{g}{w} [T \cos \alpha - D(v, \alpha)] + \psi_4(t) \frac{g}{vw} [T \cos \alpha + L(v, \alpha)]. \quad (13.76)$$

Если на величину  $\alpha$  не накладывается ограничений, то необходимое условие Вейерштрасса для этого случая принимает вид

$$\left. \frac{\partial h(v, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = 0. \quad (13.77)$$

3. Условия трансверсальности. Для рассматриваемой задачи зафиксированы только значения  $x(t_2)$  и  $z(t_2)$  и, следовательно,  $\delta x_2$  и  $\delta z_2$  равны нулю. Кроме того, поскольку вариации  $\delta t_2$  и  $\delta x_2$  независимы, то коэффициенты при них должны стремиться к нулю; таким образом, из выражения (13.68) следует, что

$$\psi_3^*(t_2) = \psi_2^*(t_2) = \psi_5^*(t_2) = 0 \quad (13.78)$$

и

$$\left( \sum_{i=1}^5 \psi_i^* f_i^* - 1 \right) \Big|_{t=t_2} = 0. \quad (13.79)^1$$

Так как функции  $f_i$  не зависят явно от времени  $t$ , то

$$\sum_{i=1}^5 \psi_i^* f_i^* - 1 \equiv 0 \text{ для всех } t \in [0, t_2]. \quad (13.80)$$

<sup>1</sup> Здесь  $f_i^* \stackrel{\Delta}{=} f_i(x^*, \alpha^*)$ .

Чтобы получить решение задачи, необходимо решить  $2n$  дифференциальных уравнений, составленных из соотношений (13.72) и (13.74) с учетом условий (13.77)—(13.80). Аналитическое решение задачи в этом случае найти нельзя, и поэтому необходимо обратиться к численным методам, которые рассмотрены в гл. 17.

#### 13.4. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ КАЧЕСТВА. ЗАДАЧА БОЛЬЦА

На основе вариационного исчисления оказалось возможным решить сравнительно широкий класс оптимальных задач управления. Наиболее общая постановка задачи заключается в следующем.

Рассмотрим системы вида

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_1) = x_1. \quad (13.81)$$

Требуется найти такую функцию управления  $u^*(t)$  на интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ , которая, во-первых, переводит систему из начального состояния в конечное, для которого соблюдается следующее условие:

$$\rho[x(t_2), t_2] = 0, \quad (13.82)$$

и, во вторых, обеспечивает минимум показателя качества

$$\mathcal{J} = P[x(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt. \quad (13.83)$$

Наложим на функцию управления  $u$  ограничения вида  $\zeta(u) = 0$ , например,  $\sum_{i=1}^r u_i^2 - k = 0$ , где  $k$  — постоянная.

Задача вариационного исчисления, в которой минимизируется обобщенный показатель качества (13.83) и присутствуют ограничения в виде системы дифференциальных уравнений вида  $\varphi(x, \dot{x}, t) = 0$ , называется задачей Больца. Она может быть сведена к задачам Лагранжа или Майера, хотя чаще ее удобнее решать, не прибегая к преобразованиям.

Оптимальное управление  $u(t)$ , как правило, определяется способами, аналогичными изложенным выше. Если управление  $u$  имеет размерность  $r$ , то в начале образуем  $r$  вспомогательных переменных  $x_{n+1}, \dots, x_{n+r}$  и  $r$  вспомогательных дифференциальных уравнений  $\dot{x}_j = u_{j-n}(t); x_j(t_1) = 0; j = n+1, \dots, n+r$ ; после этого получим

$$L_2(x, \dot{x}, u, \psi, t) = L_1(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \varphi_i(x, \dot{x}, u, t) + \lambda(t) \zeta(u) = L_1(x, \dot{x}, u, \psi, t) + \lambda(t) \zeta(u), \quad (13.84)$$

где  $\varphi_i = \dot{x}_i - f_i(x, u, t), i = 1, \dots, n$ ;

$\psi_i$  — множители Лагранжа;

$\lambda$  — дополнительный множитель, обусловленный ограничениями, наложенными на  $u(t)$ ;

$$L_1 = L + \sum_{i=1}^n \psi_i \varphi_i.$$

1) Уравнения Эйлера — Лагранжа. Выписав уравнения

$\frac{\partial L_2}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_2}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$  в явном виде, получим

$$\dot{\psi}_k = \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n; \quad \frac{\partial L_2}{\partial u_j} = 0; \quad j = 1, \dots, r. \quad (13.85)$$

Эти  $n + r$  уравнений вместе с  $n$  уравнениями системы (13.81) и условием  $\zeta(\mathbf{u}) = 0$  дают  $2n + r + 1$  уравнений для  $2n + r + 1$  неизвестных  $x_1, \dots, \dots, x_n; \psi_1, \dots, \psi_n; u_1, \dots, u_r$  и  $\lambda$ .

Если  $L_1$  — неявная функция времени, то в соответствии с уравнением (13.18) имеем условие вида

$$-L_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i = \text{const}, \quad (13.86)$$

которое сводится к следующему:

$$-L + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i = \text{const}. \quad (13.87)$$

2) Условие Лежандра — Клебша существования минимума функционала  $\mathcal{F}$

$$[L_{2u_i u_j}] \geq 0. \quad (13.88)$$

3) Условие Вейерштрасса. Из выражений (13.33), (13.84) и уравнений (13.85) найдем

$$\begin{aligned} -L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) - \lambda \zeta(\mathbf{u}^*) &\geq \\ &\geq -L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t) - \lambda \zeta(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (13.89)$$

Это означает, что  $\mathbf{u}^*$  должно выбираться так, чтобы величина  $H = -L + \sum_{i=1}^n \psi_i f_i - \lambda \zeta$  достигала максимума в каждой точке оптимальной траектории. Последнее в предположении, что функция  $H$  дифференцируема, означает, что в каждой точке оптимальной траектории должно выполняться следующее условие:

$$\left( -\frac{\partial L}{\partial u_l} + \sum_{i=1}^n \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial u_l} - \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial u_l} \right) \Big|_{u_l = u_l^*} = 0; \quad l = 1, \dots, r. \quad (13.90)$$

Уравнения (13.90) соответствуют последним  $r$  уравнениям Эйлера—Лагранжа (13.85). Кроме того, требование  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|_{u=u^*} \leq 0$  дает условие Лежандра—Клебша.

4. Условия трансверсальности. Если функции  $P$  и  $\rho$  не зависят от конечного времени  $t_2$ , то, положив  $R = P + \alpha \rho$  (где  $\alpha$  — постоянный множитель), получим условие трансверсальности при  $t_2$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} \Big|_{t=t_2} = -\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t=t_2}. \quad (13.91)$$

Когда  $P$  и  $\rho$  зависят от  $t_2$ , выполняется условие

$$\left[ \delta R + \left( L_2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \delta t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L_1}{\partial x_i} \delta x_i \right] \Big|_{t=t_2} = 0, \quad (13.92)$$

где  $\delta R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t$ , для всех бесконечно малых вариаций  $\delta x_i$  и  $\delta t$  с учетом  $\rho [x(t_2), t_2] = 0$  (покажите это).

Теперь обратим внимание на одно важное граничное условие, вытекающее из условия трансверсальности (13.91). Для класса задач, где  $L \equiv 0$  и  $P$  не зависит от  $x_2$  и где конечная точка должна лежать на поверхности  $\rho(x) = 0$ , имеем

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right|_{t=t_2} = - \left. \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}_i} \right|_{t=t_2} \text{ при } L_1 = \sum_{i=1}^n \psi_i \Phi_i.$$

Если теперь  $\dot{\psi}_i = \dot{x}_i - f_i$ , то имеем

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right|_{t=t_2} = -\psi_i(t_2). \quad (13.93)$$

Это означает, что градиент функции  $\rho(x)$  должен указывать направление, противоположное к вектору  $\psi(t_2)$ . Говоря другими словами, для этого класса задач граничное условие таково, что  $\psi_2(t)$  перпендикулярно гиперповерхности  $\rho(x_2)$ .

Примером этого класса задач являются задачи, оптимальные по быстродействию. Теперь рассмотрим конкретный пример.

**Пример 13.5.** Допустим, при преследовании, реактивный самолет (см. пример 13.4) должен переместиться из точки  $[x(0), z(0)]$  в безопасную область, заданную уравнением  $\rho(x, z) = 0$ , за минимальное время  $t_2^*$ . Найдем граничные условия, необходимые для решения задачи.

Начальные условия  $x(0)$ ,  $z(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\gamma(0)$  и  $\omega(0)$  предполагается заданными, тогда из выражения (13.73) имеем  $\mu(0) = 0$ . Уравнения (13.74), (13.75) и (13.77) должны также выполняться, а это означает, что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — постоянные величины. Первое слагаемое уравнения (13.68) по-прежнему имеет силу, так как  $\rho$  не зависит от времени. Таким образом, условие (13.79), выполняется. Второе слагаемое нуждается в изменении, так как должно удовлетворяться условие (13.93). Это означает, что выполняются условия (13.78), так как  $\rho$  не зависит от переменных  $v$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  и  $\mu$ ; кроме того, имеем уравнения  $\psi_1(t^*) = (d\rho/dx)$ ;  $\psi_2(t^*) = -(d\rho/dz)$ , которые позволяют оценить относительные значения постоянных  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

Рассмотренное выше позволяет получить одиннадцать граничных условий для одиннадцати переменных задач.

### 13.5. ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

Часто встречаются задачи, в которых на управляющее воздействие  $u(t)$  наложено ограничение вида  $-U' \leq u \leq U$  при  $U, U' > 0$ . Приближенно эти ограничения можно учесть, вводя соответствующие функции штрафа; точный подход учета таких ограничений разработан Валентайном [193].

#### 1. Метод функций штрафа

Идея метода функции штрафов заключается во введении таких дополнительных членов в минимизируемый показатель качества, которые при нарушении ограничений, наложенных на управляющие воздействия, приводят к существенному увеличению значения функционала. После того как такие члены введены, задача оптимизации решается без учета ограничений.

В качестве примера рассмотрим задачу, в которой траектория для  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , соединяющая  $x_1$  и  $x_2$ , должна быть найдена так, чтобы минимизировать показатель качества  $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt$ . Допустим, един-



ственное управляющее воздействие  $u(t)$  должно удовлетворять ограничению  $-1 \leq u \leq 1$ .

При образовании функции штрафа рассмотрим новый показатель качества

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} + \int_{t_1}^{t_2} g(u) dt,$$

где  $g(u)$  — функция штрафа: малая, если  $|u(t)| < 1$ , и значительная при  $|u(t)| > 1$ . После этого ищется решение, которое минимизирует функционал  $\mathcal{F}_1$  уже без учета ограничений.

Метод функций штрафа особенно полезен в некоторых численных схемах нахождения оптимальных решений, которые рассматриваются в гл. 17.

## 2. Метод Валентайна

В 1937 г. Валентайн [193] показал, что введение некоторых дополнительных переменных преобразует ограничения типа неравенств, налагаемых на управляющие воздействия, в ограничения типа равенств\*.

Допустим, что в системе  $\dot{x} = f(x, u, t)$  содержится  $r$  компонент  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , на каждую из которых наложено ограничение вида

$$-U'_j < u_j \leq U_j; \quad U_j, U'_j \geq 0. \quad (13.94)$$

Последние можно преобразовать в совокупность ограничений типа равенств, если ввести  $r$  дополнительных переменных  $v_j(t)$ ;  $j = 1, \dots, r$  и предположить, что в каждый момент времени  $t$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  выполняется условие

$$(u_j(t) + U'_j)(U_j - u_j(t)) - v_j^2(t) = 0. \quad (13.95)$$

Здесь  $v_j(t)$  — переменная, которая стремится к нулю, если  $u_j(t)$  достигает любого из своих пределов  $-U'_j$  или  $U_j$ . Когда  $u_j(t)$  располагается между этими пределами, переменная  $v_j(t)$  является конечной величиной. Например, при  $u_j(t) = 0$   $v_j(t)$  имеет величину  $\sqrt{U'_j U_j}$ .

Поскольку функции  $v_j(t)$ , определенные по соотношению (13.95), образуют ограничения типа равенств, то найти уравнения Эйлера—Лагранжа не представляет труда. В частности, можно ввести  $r$  дополнительных переменных  $x_{n+r+1}, \dots, x_{n+2r}$  таких, что

$$\dot{x}_{n+r+i} = v_j(t), \quad i = 1, \dots, r. \quad (13.96)$$

Кроме того, можно определить  $r$  величин  $\zeta_j(u_j)$  в виде

$$\zeta(u_j) = (u_j(t) + U'_j)(U_j - u_j(t)) - v_j^2(t) = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (13.97)$$

Эти величины аналогичны величинам  $\zeta(u)$ , рассмотренным в предыдущем параграфе.

Таким образом, можно ввести в дополнение к обычным  $n$  множителям Лагранжа  $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ , другие  $r$  множителей  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$  и образовать функцию

$$L_2 = L + \sum_{i=1}^n \psi_i \Phi_i + \sum_{j=1}^r \lambda_j \zeta_j.$$

\* Как показано в следующей главе, ограничения типа неравенств, налагаемые на управляющие воздействия, легко учитываются при использовании принципа максимума. В этом случае нет необходимости во введении дополнительных переменных. В обзоре [40] указывается другой возможный метод решения этой задачи.

Имея ее в виду, нетрудно приступить к получению уравнений Эйлера—Лагранжа и т. д. точно так же, как это было сделано в предыдущем параграфе.

Так как функции  $u_j$  могут иногда достигать своей верхней или нижней границы на конечном отрезке времени, то синтез на основе вариационного исчисления становится довольно сложным. Валентайн, однако, показал, что необходимые условия по-прежнему выполняются всякий раз, когда задача остается невырожденной<sup>1)</sup>. В частности, условие Вейерштрасса выражается в виде (13.89) и непосредственно приводит к принципу максимума Понтрягина (см. следующую главу).

**Пример 13.6.** Для того чтобы предотвратить потерю скорости самолетом (см. пример 13.4), предельная величина угла атаки должна быть ограничена  $|\alpha(t)| \leq \alpha_{\max}$ . Найдем необходимые условия для задачи минимального времени полета. Вводя дополнительно переменную  $v(t)$  такую, что  $\dot{x}_7 = v(t)$ ,  $x_7(0) = 0$ , ограничение типа неравенства заменим условием

$$\zeta(\alpha, v) = (\alpha(t) + \alpha_{\max})(\alpha_{\max} - \alpha(t)) - v^2(t) = 0. \quad (13.98)$$

Вводя произвольный множитель  $\lambda$ , сформируем функцию

$$L_2 = \sum_{i=1}^5 \psi_i \dot{\psi}_i + \lambda \zeta(\alpha, v).$$

Выполняя необходимые вычисления, находим, что первые пять уравнений Эйлера—Лагранжа аналогичны уравнениям (13.47).

Кроме того, имеем два следующих уравнения:

$$\left. \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha^*} = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial L_2}{\partial v} \right|_{v=v^*} = 0. \quad (13.99)$$

Второе уравнение дает условие

$$\lambda^*(t)v^*(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13.100)$$

из которого видно, что условие трансверсальности остается тем же, что и в примере 13.4.

Из тождества (13.100) найдем, что на некотором отрезке траектории могут выполняться три условия:

- 1)  $\lambda^* \equiv 0$  и  $v^* \neq 0$ ;
- 2)  $\lambda^* \equiv 0$  и  $v^* \equiv 0$ ;
- 3)  $\lambda^* \neq 0$  и  $v^* \equiv 0$ .

В 1-м случае из определения переменной  $v(t)$  видно, что выполняется условие  $-\alpha_{\max} < \alpha(t) < \alpha_{\max}$ . Для условий 2) и 3)  $\alpha$  равна или  $+\alpha_{\max}$  или  $-\alpha_{\max}$ , что указывает на релейное управление.

На вопрос, какой из видов управления нужно применять в пределах данного интервала времени, может быть дан ответ только при более детальном рассмотрении решения системы. Часто может быть полезно условие Вейерштрасса (см. упражнение 13.9).

Если принимается релейное управление, то в моменты переключения переменная  $\alpha = \mu(t)$  в выражении (13.73) претерпевает разрывы. Согласно п. 3 § 13.1 отметим, что в нашей задаче встречаются точки излома. В каждой из них должны выполняться условия Вейерштрасса—Эрдмана. В настоящей задаче эти условия даются выражениями (13.20) и (13.21), за исключением того, что  $L$  заменено на  $L_2$  и  $n$  — на  $n + 2$ . Первое условие означает, что все множители  $\psi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , и функция  $\lambda(t)v^*(t)$  должны быть непрерывными в точках излома.

Второе условие (13.21) означает, что величина  $H = \sum_{i=1}^5 \psi_{if_i}^*(x^*, \alpha^*)$  должна быть непрерывной в точке излома.

Далее можно убедиться, что условие Вейерштрасса сводится к виду

$$H \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^5 \psi_{if_i}^*(x^*, \alpha^*) \geq \sum_{i=1}^5 \psi_{if_i}^*(x^*, \alpha^*); \quad (13.101)$$

<sup>1)</sup> См. гл. 16, где рассматриваются вырожденные задачи.

с учетом ограничений (13.98), оно означает, что  $|\alpha(t)| \leq \alpha_{\max}$ . Условие Вейерштрасса таким образом, показывает, что правая часть соотношения (13.101) должна быть максимизирована при условии  $|\alpha(t)| \leq \alpha_{\max}$ . Это и является положением принципа максимума, как мы увидим в следующей главе.

Тот факт, что  $\sum_{i=1}^5 \lambda_i^*(x^*, \alpha^*) \equiv 1$  (условие 13.80), бывает полезен. Введение дополнительных переменных  $\lambda(t)$  и  $\nu(t)$  усложняет задачу. При изложении принципа максимума в следующей главе будет показано, что в использовании этих переменных нет никакой необходимости.

### 13.6. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Большой класс задач оптимального управления может быть решен при помощи вариационного исчисления, дающего ряд необходимых условий, которым должна удовлетворять оптимальная траектория. Необходимыми условиями являются: 1) уравнения Эйлера—Лагранжа [уравнения (13.11) или (13.17)]; 2) условие Лежандра (стр. 366 и 367); 3) условие Вейерштрасса (стр. 368 и 369) и 4) условие Якоби, которые в настоящей книге не рассмотрены. Согласно этим условиям уравнения Эйлера—Лагранжа и условие Лежандра удовлетворяются вдоль траекторий, которые определяют слабый локальный минимум функционала (§ 13.1). Условие Вейерштрасса выполняется вдоль траектории, которая дает сильный локальный минимум.

Необходимые условия могут служить для сужения области поиска оптимальной траектории. В большинстве случаев уравнения Эйлера—Лагранжа, условие Вейерштрасса (которое включает в себя условие Лежандра) и условие Якоби вместе составляют достаточное условие того, что кусочно-гладкая функция  $x(t)$  является оптимальной траекторией\*.

Вариационное исчисление может быть распространено на задачи отыскания минимума показателя качества для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, если использовать метод множителей Лагранжа (теорема 13.1). Классическая трактовка вариационного исчисления не допускает наличия управляющего воздействия  $u$ ; однако это препятствие можно обойти, введя дополнительную переменную  $x_{n+1}(t)$  такую, что  $\dot{x}_{n+1}(t) = u(t)$ . Тогда возможно найти решение для класса линейных оптимальных задач управления с показателем качества в виде интеграла от положительно определенной квадратичной формы переменных  $x$  и  $u$  (§ 13.2).

Задача оптимального управления с интегральными показателями качества известна как задача Лагранжа. Ее можно решать методами вариационного исчисления. Кроме того, вариационное исчисление используют для решения задачи оптимального управления конечным состоянием, или задачи Майера (§ 13.3), и задачи с обобщенным критерием, или задачи Больца.

Если управляющие воздействия ограничены в соответствии с уравнением (13.94), то можно использовать метод, предложенный Валентайном. В своей основе этот метод предусматривает введение достаточного числа дополнительных переменных согласно уравнениям (13.96) и (13.97). После этого можно использовать обычный подход. Достигают или нет управляющие воздействия своих пределов, можно определить из условия Вейерштрасса.

Применяя различные необходимые условия для сложной задачи, получим двухточечную граничную задачу, включающую в себя  $2n$  дифференциальных уравнений. Только в редких случаях ее можно решить аналитически. Обычно приходится прибегать к численным методам.

\* Это положение не выявлено должным образом в данной главе, так как достаточные условия оптимальности рассматриваются в следующей главе.

### 13.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

13.1. Функция двух переменных  $f(x_1, x_2)$  обладает частными производными до третьего порядка по своим аргументам. Покажите, что в каждой точке локального минимума, не находящейся на границе  $f$ , матрица  $[d^2f/dx_i dx_j]$  должна быть неотрицательной.

13.2. Функция  $f(u) = \psi u - |u|$  определена на интервале  $-1 \leq u \leq 1$ . Найдите значение  $u$ , при котором  $f(u)$  достигает своего максимального значения. Определите  $u$  как функцию  $\psi$ . Полученный результат будет использован в следующей главе.

13.3. Найдите траекторию, проходящую через точки  $x(0) = 1$  и  $x(1) = 0$ , которая минимизирует функционал

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt.$$

Проверьте выполнение условий Лежандра и Вейерштрасса.

13.4. Найдите траекторию, удовлетворяющую уравнению Эйлера—Лагранжа относительно функционала

$$\mathcal{J} = \int_0^1 (x^4 - 6x^2) dt$$

и удовлетворяющую граничным условиям  $x(0) = 0$ ;  $x(1) = 0$ . Удовлетворяет ли полученная траектория условию Вейерштрасса? Если нет, то найдите траекторию, которая удовлетворяет ему.

13.5. Однородный трос с удельной плотностью  $\rho$  подвешен в двух точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  так, что на него действует только сила тяжести:

а) выведите формулу для потенциальной энергии

$$\Phi = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

где  $y(x)$  определяет вес троса как функцию горизонтального расстояния  $x$ ;

б) центр тяжести троса  $y^*(x)$  является положением, для которого потенциальная энергия  $\Phi$  достигает минимума. Найдите  $y^*(x)$  при условии, что длина троса  $L$ .

13.6. Для задачи, данной в примере 13.5, найдите угол выхода троса из правой точки закрепления.

13.7. Задан объект первого порядка  $\dot{x} = -ax + bu$ ;  $a, b > 0$ :

а) образуйте уравнения Эйлера—Лагранжа для задачи нахождения оптимальной управляющей функции  $u^*(t)$ , которая минимизирует функционал

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2) dt$$

при произвольных начальных условиях;

б) найдите оптимальную управляющую функцию  $u^*$  в системе управления с обратной связью.

13.8. Для системы, приведенной в упражнении 13.7, положим

$$\mathcal{J} = \int_0^T (x^2 + u^2) dt,$$

где  $T$  — конечное время; конечное состояние системы произвольно.

Исследуйте возможность синтеза оптимального управления для системы с обратной связью, введя функцию  $p(t)$  такую, что  $u(t) = -p(t)x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ :

а) найдите вид функции  $p(t)$ ;

б) найдите дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $p(t)$ . Найдите граничные условия.

13.9. Снова рассмотрите оптимальное по быстродействию управление в системе  $\ddot{x} = u$  при переводе изображающей точки из произвольного состояния  $x_0$  в начало координат, если  $|u(t)| \leq 1$ :

а) используя метод Валентайна, получите необходимые условия, которые следуют из уравнений Эйлера—Лагранжа;

б) проверьте условия точек излома, если в этом появляется необходимость.

13.10. Уравнение движения вертикально запущенной ракеты приближенно описывается уравнением  $\ddot{x} + kx^2 + g = u(t)$ ;  $k, g > 0$ , где  $x$  — вес ракеты на стартовой площадке. Тяга  $u$  ограничена  $0 \leq u \leq U$ , кроме того, общее количество топлива задано следующим функционалом:

$$\int_0^T u(t) dt = b,$$

где  $T$  произвольно. Целью управления является нахождение  $u(t)$  для  $0 \leq t \leq T$  так, чтобы максимизировать скорость ракеты к моменту времени  $T$ :

- приведите задачу к виду, пригодному для методов, рассмотренных в этой главе;
- найдите для данной задачи уравнение Эйлера—Лагранжа, условия Вейерштрасса и трансверсальности.

13.11. Для системы первого порядка  $\dot{x} = u^2$ ,  $|u| \leq 1$  оптимальное по быстродействию управление всегда равно  $u = +1$ :

- покажите, что данное решение не удовлетворяет условию Вейерштрасса для  $L_1 = \psi(\dot{x} - u^2)$ ;

б) покажите, что если  $L_1 = \psi(\dot{x} - u^2) + \lambda(1 - u^2 - v^2)$  (последнее имеет место, когда используется подход Валентайна), то условие Вейерштрасса будет выполняться.

13.12. Покажите, что условие Вейерштрасса (уравнение (13.32)) выполняется для траектории с сильной вариацией (13.28).

13.13. Рассмотрим задачу оптимизации как задачу Лагранжа, когда траектория начинается с поверхности  $\rho_1(x_1) = 0$  и заканчивается на поверхности  $\rho_2(x_2) = 0$ ; найдите для нее соответствующее условие трансверсальности, если заданы:

- система первого порядка;
- система  $n$ -го порядка.

13.14. (Задача Цермело). Рассмотрим моторную лодку, движущуюся по течению; текущие координаты  $x_1, x_2$  изменяются так, что компоненты скорости  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  описываются функциями  $f_1(x_1, x_2, t)$  и  $f_2(x_1, x_2, t)$  соответственно. Допустим, что лодка движется с постоянной скоростью  $V$  относительно воды. Единственной переменной, которую можно непосредственно изменять, является угол вектора скорости  $\theta$  относительно оси  $x_1$ . Таким образом, уравнения движения будут

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, t) + V \cos \theta;$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + V \sin \theta.$$

Определите уравнения Эйлера—Лагранжа и условие Вейерштрасса для задачи, если лодка должна передвинуться из точки  $x_0$  в точку  $x_f$  за минимальное время. Сделайте это, когда:

- ограничения на величину  $\theta$  отсутствуют;
- $|\theta(t)| \leq \theta_{\max}$ ;
- $\theta'(t) = 0$  (т. е. выбрать такое постоянное управление  $\theta^*$ , чтобы удовлетворить условиям задачи).

13.15. Покажите, что задача Лагранжа может быть преобразована в задачу Майера и обратно.

13.16. Покажите, что скорость  $v_{b0}$  (при полном сгорании топлива второй ступени) вертикально поднимающейся двухступенчатой ракеты может быть задана уравнением

$$v_{b0} = k_1 \ln \frac{1}{l_1 + s_1} + k_2 \ln \frac{1}{l_2 + s_2},$$

где  $l_i$  и  $s_i$ ,  $i = 1, 2$  являются соответственно отношениями массы полезной нагрузки и массы остальной части ракеты (т. е. той части, которую занимают элементы конструкции, топливо и т. д.) к общей массе для  $i$ -й ступени. Найдите величину  $l_1$ , которая максимизирует  $v_{b0}$ , если  $l_1 l_2 = \text{const}$ . Каков физический смысл ограничения  $l_1 l_2 = \text{const}$ ?

13.17. Рассмотрите объект, заданный уравнением  $\dot{y}(t) = k_1 u(t)$ , и синтезируйте управление с обратной связью, которое минимизирует интегральную квадратичную ошибку

$$\int_0^{\infty} (r(t) - y(t))^2 dt$$

относительно единичной ступенчатой функции  $r(t)$ , приложенной в момент времени  $t = 0$ .

Решение должно быть таким, чтобы соблюдалось ограничение

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt = k_2.$$

### 13.8. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

По вариационному исчислению рекомендуем книги [501] и [1561]. Более полное изложение вариационного исчисления, включающие доказательства метода множителей Лагранжа, приведено в работе [21]. Подробное изложение вариационного исчисления и его приложения к задачам управления дано в книге [731].

Инженерный подход к решению задачи Майера можно найти в работе [341]. Много задач, решенных вариационными методами, приводятся в работе [1241]. В книге [1881] изложение вариационного исчисления достигнуто для широкого круга инженеров.

Для более глубокого изучения вариационного исчисления в приложении к системам дифференциальных уравнений читателю предлагаем работу [1381]. В этой статье И. Мак-Шейн дал доказательства метода множителей Лагранжа в общем виде. Исползованные при этом математические приемы нашли свое применение при доказательстве Понтрягиным принципа максимума; работа [731] объединяет наиболее важные результаты по этим вопросам.

Решение задачи Больца можно найти в монографии [191].

## ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

В 1956 г. Беллман, Гликсберг и Гросс [15] рассмотрели задачу оптимального по быстродействию управления применительно к линейному объекту новым геометрическим способом. Они рассматривали эту задачу в пространстве состояний, введя понятие множества достижимых точек. Показав, что эти множества являются выпуклыми и расширяющимися во времени, они смогли доказать, что оптимальное решение должно быть релейным. Кроме этого, было также доказано, что для объекта с действительными отрицательными полюсами каждая компонента функции управления может иметь самое большее  $n - 1$  переключений полярности, где  $n$ , как обычно, равно порядку линейного объекта. Хотя задача, рассмотренная Беллманом, не являлась наиболее общей в области оптимального управления, им удалось указать весьма плодотворный путь для последующих исследований. Идея, по существу, по тому же пути, Ла-Салль развил эти результаты дальше и использовал их применительно к нестационарному линейному объекту управления. И, наконец, Голкин и ряд других исследователей показали, что с помощью этого метода можно вывести также принцип максимума Понтрягина.

Принцип максимума, как известно, был предложен также в 1956 г. советским ученым Л. С. Понтрягиным. Этот принцип особенно полезен при рассмотрении таких задач, как задачи оптимального по быстродействию управления, которые сравнительно трудно решать с помощью вариационного исчисления.

В данной главе предпринимается попытка объединить геометрический подход Беллмана, метод Ла-Салля и результаты, получаемые с помощью принципа максимума<sup>1)</sup>. Таким образом, мы не только сможем рассмотреть задачу оптимального управления с более наглядных позиций по сравнению с вариационным исчислением, но и в большей степени сможем оценить результаты, полученные Л. С. Понтрягиным.

Начнем с рассмотрения метода Беллмана; затем отметим наиболее значительные работы Ла-Салля и в заключение перейдем к принципу максимума Понтрягина и покажем, как можно его использовать при решении задач.

В настоящей главе при выводе принципа максимума используются лишь сильные вариации. Это дает возможность отказаться от типичных операций взятия производных отчасти со слабыми и частично с сильными вариациями, используемых в случае классического вариационного исчисления. Кроме того, изложение основано на введении функций Гамильтона, что позволяет избежать дополнительных переменных и уравнений. Такой подход не нов<sup>2)</sup>,

<sup>1)</sup> Наше изложение тесно связано с работами Галкина [68, 69].

<sup>2)</sup> Хестинс еще в 1949 г. использовал гамильтонов подход к решению задач оптимального быстродействия (см. § 13.1).

но, благодаря краткости формулировки принципа максимума, теоремы получаются более строгими и сжатыми. И, наконец, задача становится проще, благодаря геометрическому подходу, что вносит новый вклад в решение двухточечной краевой задачи.

#### 14.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ И ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Рассмотрим линейный стационарный объект управления

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

с начальным условием  $x(t_1) = x_1$ .

Предположим, что  $A$  имеет различные действительные и отрицательные собственные значения. Предположим далее, что  $B$  представляет собой неособую матрицу  $[b_{ij}]$  размерностью  $n \times n$ , и, таким образом,  $u(t)$  есть  $n$ -мерный вектор. Без потери общности предположим далее, что  $t_1 = 0$ , и, кроме того, что для рассматриваемой задачи определен соответствующий масштаб, вследствие чего на функцию управления  $u(t)$  накладывается ограничение  $|u_i| \leq 1$ .

Задача сводится к тому, что с учетом указанного выше ограничения найти такую функцию  $u^*(t)$ , чтобы изображающая точка  $x(t)$ , стартуя из состояния  $x_1$  при  $t = 0$ , достигала начала координат за минимальный отрезок времени. Найденное управление  $u^*(t)$  назовем оптимальным по быстродействию управлением.

Преобразуем систему к канонической форме. Здесь  $A$  становится диагональной матрицей, состоящей из собственных значений  $\Lambda$ . Решение такой системы имеет вид

$$x_i(t) = x_i(0)e^{\lambda_i t} + e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.2)$$

В случае неособой матрицы  $B$  можно показать, что задача имеет решение, т. е. существует допустимая функция управления (т. е. функция, удовлетворяющая ограничению  $|u_i| \leq 1$ ), которая удовлетворяет условиям задачи.

Из рассмотрения выражения (14.2) видно, что существование допустимой функции управления  $u(t)$ , которая может перевести состояние из  $x_1$  в  $0$ , эквивалентно существованию функций  $u_i(t)$  для  $0 \leq t \leq t_2$  и  $i = 1, \dots, n$ , удовлетворяющих ограничению  $|u_i(t)| \leq 1$  и существованию такого момента времени  $t_2$ , что

$$x_i(t_2) = 0 = x_i(0)e^{\lambda_i t_2} + e^{\lambda_i t_2} \int_0^{t_2} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n \quad (14.3)$$

или, эквивалентно

$$-x_i(0) = \int_0^{t_2} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.4)$$

Можно легко установить, что так как матрица  $B$  является неособой, то для каждого вектора  $x(0)$  существуют постоянные допустимые значения  $u_j(t)$  ( $|u_j| \leq 1$ ) и момент времени  $t_2$ , которые удовлетворяют уравнению (14.4).

После того как существование допустимой функции управления для рассматриваемой задачи доказано, следующим этапом является нахождение



наилучшей из числа допустимых функций управления. В нашем случае требуется найти такое оптимальное управление, чтобы свести к минимуму время  $t_2$  в уравнение (14.4).

Диапазон значений, которые могут принимать все допустимые функции управления  $u(t)$ , обозначим через множество  $\mathcal{U}$ , которое в нашем случае можно представить себе в виде  $n$ -мерного куба  $|u_i| \leq 1$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве.

Куб любой размерности обладает тем свойством, что находящиеся в нем две любые точки можно соединить прямой линией, все точки которой также лежат в пределах этого куба. Любое множество точек, обладающее этим свойством, называют выпуклым множеством. Математически выпуклое множество представляет собой такое множество точек, для которого выполняется

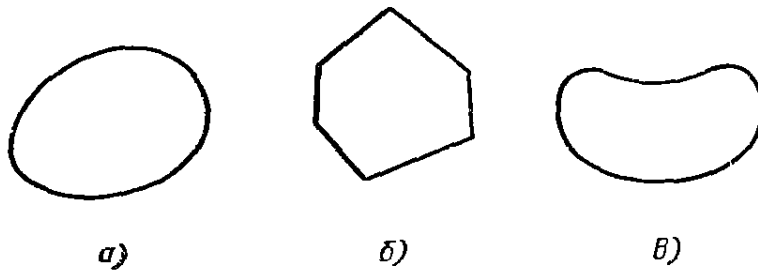


Рис. 14.1. Множества:

$a$  и б) — выпуклые; в — невыпуклое

следующее условие: если точки  $a$  и  $b$  принадлежат этому множеству, то все точки на линии  $\alpha a + (1-\alpha)b$  для всех  $\alpha$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq \alpha \leq 1$ , также принадлежат этому множеству. Таким образом, на рис. 14.1,  $a$  и б показаны двумерные выпуклые множества, а на рис. 14.1, в — множество, которое не является выпуклым. В дальнейшем понятие выпуклого множества играет важную роль.

Для упрощения систем обозначений множество всех допустимых функций  $u(t)$ , определенных на замкнутом интервале времени  $[0, t]$ , будем обозначать как множество  $\Omega_t$ .

Рассмотрим уравнение (14.4). При каждом выборе допустимой функции  $u(\tau)$  на интервале  $0 \leq \tau \leq t_2$  получаем в результате вектор  $x(0)$ , обозначающий начальное состояние системы, которое можно привести к началу координат конкретным выбором  $u(\tau)$ . Тогда для всех допустимых функций  $u(\tau)$  на интервале  $0 \leq \tau \leq t_2$  можно сопоставить совокупность соответствующих векторов  $x(0)$ , которая образует достижимое множество  $\mathcal{C}(t_2)$  в пространстве состояний системы. Множество  $\mathcal{C}(t_2)$  можно рассматривать также и как результат преобразования множества допустимых управлений  $\Omega_t$  с помощью соответствия (14.4).

Можно использовать стандартное сокращенное обозначение и записать  $\mathcal{C}(t_2)$  таким образом:

$$\mathcal{C}(t_2) = \left\{ - \int_0^{t_2} e^{-\Lambda \tau} B u(\tau) d\tau; u \in \Omega_{t_2} \right\}. \quad (14.5)$$

Правая часть выражения (14.5) означает следующее: множество всех точек, удовлетворяющих условию  $- \int_0^{t_2} e^{-\Lambda \tau} B u(\tau) d\tau$ , когда  $u$  принадлежит множеству  $\Omega_{t_2}$ .

Теперь можно показать, что при  $u(\tau)$ , выбираемом из допустимого множества  $\Omega_{t_2}$ , достижимое множество  $\mathcal{C}(t_2)$  будет выпуклым. Это объяс-

няется тем, что если  $p_1(t_2)$  и  $p_2(t_2)$  представляются собой точки, достижимые соответственно путем выбора  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t_2$ ), т. е. если компоненты  $p_1(t_2)$  и  $p_2(t_2)$  определяются как

$$\left. \begin{aligned} p_{1i}(t_2) &= \int_0^{t_2} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} u_{1j}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n; \\ p_{2i}(t_2) &= \int_0^{t_2} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} u_{2j}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

то точки, лежащие на линии, соединяющей  $p_1(t_2)$  и  $p_2(t_2)$ , имеют координаты

$$\alpha p_{1i}(t_2) + (1 - \alpha) p_{2i}(t_2) = \int_0^{t_2} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} [\alpha u_{1j}(\tau) + (1 - \alpha) u_{2j}(\tau)] d\tau, \\ i = 1, \dots, n$$

или

$$\alpha p_1(t_2) + (1 - \alpha) p_2(t_2) = \int_0^{t_2} e^{-\Lambda \tau} B [\alpha u_1(\tau) + (1 - \alpha) u_2(\tau)] \tau \quad (14.7)$$

для всех  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Функция  $\alpha u_1(\tau) + (1 - \alpha) u_2(\tau)$ , очевидно, представляет собой допустимое управление для всех  $\alpha$ , что и доказывает сказанное выше.

Рассматривая теперь множество  $\mathcal{C}(t)$  как функцию  $t$ , видно, что в момент времени  $t = 0$ , оно состоит лишь из точки  $0$ , но по мере увеличения  $t$  множество  $\mathcal{C}(t)$  монотонно расширяется (покажите это). В любой момент времени  $t$  множество  $\mathcal{C}(t)$  состоит тогда из всех тех начальных точек  $x(0)$ , которые можно переместить в начало координат за время  $t$  или меньше путем какого-либо выбора допустимой функции управления  $u(\tau)$ , где  $0 \leq \tau \leq t$ .

Так как  $\mathcal{C}(t)$  представляет собой монотонно расширяющееся множество, то для каждого начального состояния  $x(0)$  минимальное время определяется таким моментом времени  $t^*$ , когда множество  $\mathcal{C}(t^*)$  коснется точки  $x(0)$ <sup>1)</sup>.

Для некоторой допустимой функции управления  $u(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$  примем

$x(u, t) = - \int_0^t e^{-\Lambda t} B u(\tau) d\tau$ . Из выражения (14.5) следует, что  $x(u, t) \in \mathcal{C}(t)$ . Следствием расширения замкнутого и выпуклого множества  $\mathcal{C}(t)$  является следующий факт: когда  $\mathcal{C}(t)$  не содержит точки  $x(0)$ , то всегда можно найти вектор  $\eta_t$  такой, что для любой точки  $x(u, t)$  из множества  $\mathcal{C}(t)$  справедливо следующее неравенство:

$$(\eta_t^T x(u, t)) \leq (\eta_t^T x(0)). \quad (14.8)$$

В частности, геометрически,  $\eta_t$  может быть вектором внешней нормали к опорной плоскости множества  $\mathcal{C}(t)$  в точке, где вектор  $x(0)$  проникает

<sup>1)</sup> Ради математической строгости необходимо показать, что множество  $\mathcal{C}(t)$  замкнуто, так как именно это свойство гарантирует, что в некоторый момент времени изображающая точка  $x(t)$  совпадает с  $x(0)$ . По существу, замкнутое множество включает в себя все свои граничные точки. Граничными точками множества  $\mathcal{C}(t)$  являются все точки  $p$  в  $\mathcal{E}_n$ , для которых при любом  $\varepsilon$ , каким бы малым оно ни было, найдутся точка  $p_1$ , лежащая в  $\mathcal{C}$ , и точка  $p_2$ , не входящая в  $\mathcal{C}$ , такие, что и  $\|p_1 - p\|$  и  $\|p_2 - p\|$  меньше  $\varepsilon$ . Замкнутость  $\mathcal{C}(t)$  Беллман доказал с помощью теорем о свойствах банахова пространства. Здравый смысл в рассматриваемом случае также подсказывает, что множество  $\mathcal{C}(t)$  является замкнутым.

в выпуклое множество  $C(t)$ <sup>1)</sup> (см. рис. 14.2а). В пределе при  $t \rightarrow t^*$ , т. е. к минимальному времени, мы все еще будем иметь

$$(\eta_{t^*}^T x(u, t^*)) \leq (\eta_{t^*}^T x(0)). \quad (14.9)$$

Теперь, с учетом соотношения  $x(u^*, t^*) = x(0)$ , получим

$$(\eta_{t^*}^T x(u, t^*)) \leq (\eta_{t^*}^T x(u^*, t^*)), \quad [(14.10)$$

где, как следует из сказанного выше,  $\eta_{t^*}$  является вектором внешней нормали к опорной плоскости выпуклого множества  $C(t^*)$  в точке  $x(0)$  (рис. 14.2, б). В дальнейшем вектор  $\eta_{t^*}$  будем обозначать как  $\eta$ .

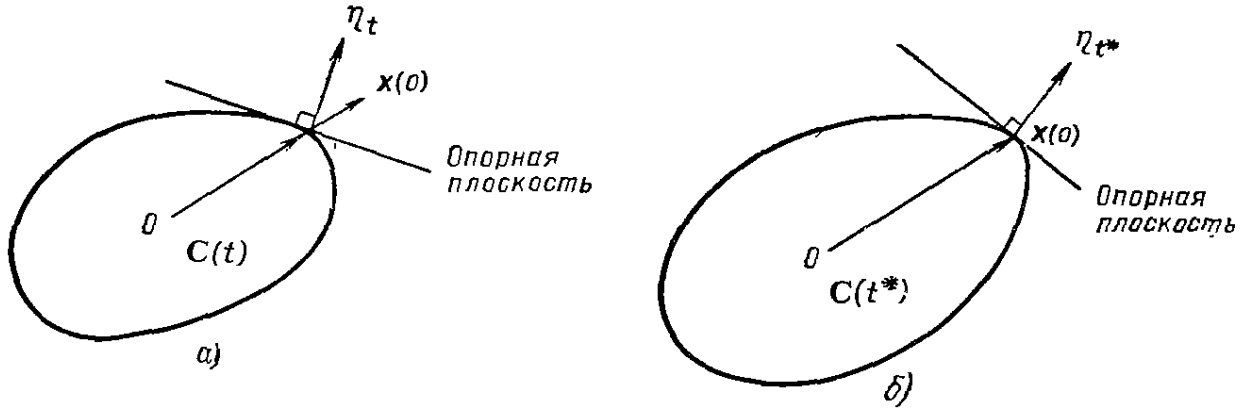


Рис. 14.2:

а — достижимое множество  $C(t)$ , которое не содержит точки  $x(0)$ ; б — достижимое множество  $C(t)$ , для которого точка  $x(0)$  принадлежит границе

Из соотношений (14.10) и (14.4) следует важный вывод о том, что оптимальным по быстрдействию является такое управление  $u(t)$ , которое доставляет максимум выражению

$$\sum_{i=1}^n \eta_i \int_0^{t^*} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j(\tau) d\tau. \quad (14.11)$$

После изменения порядка суммирования и интегрирования уравнение (14.11) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{t^*} \left( \sum_{i=1}^n \eta_i b_{ij} e^{-\lambda_i \tau} \right) u_j(\tau) d\tau, \quad (14.12)$$

и достигает максимума только в том случае, когда

$$u_j^*(\tau) = \text{sign} \left[ \sum_{i=1}^n \eta_i b_{ij} e^{-\lambda_i \tau} \right] \quad j = 1, \dots, n,$$

или

$$u^*(\tau) = \text{sign} [\eta^T e^{-\Lambda \tau} B]^T. \quad (14.13)$$

Таким образом, всякий раз, когда ни одна из составляющих вектора  $g(\tau) \Delta (\eta^T e^{-\Lambda \tau} B)^T$  не равна тождественно нулю в течение некоторого конечного отрезка времени, управление  $u^*(\tau)$  является релейным.

Теперь видно, что каждая составляющая векторной функции  $g(\tau)$  является линейной комбинацией  $n$  затухающих экспонент. Тогда в соответ-

<sup>1)</sup> Читатель может сам убедиться в том, что через каждую точку на границе выпуклого множества всегда можно провести, по меньшей мере, одну опорную плоскость, которая, согласно определению, располагается таким образом, что все выпуклое множество целиком лежит по одну сторону этой плоскости. Внешняя нормаль направлена к той стороне опорной плоскости, которая не содержит точек выпуклого множества.

ствии с результатом, известным иногда под названием правила Декарта, каждая составляющая  $g(\tau)$  может иметь самое большее  $n-1$  действительных нулей<sup>1)</sup>. Таким образом, каждая компонента управления  $u_i^*(t)$  имеет самое большее  $n-1$  переключений.

Таким образом, нами доказаны две важные гипотезы относительно задач оптимального быстродействия, о которых сказано в гл. 12, а именно: гипотеза о релейности управления и теорема об  $n-1$  переключении применительно к линейному объекту управления с действительными собственными значениями. Эти положения были легко доказаны с использованием геометрических представлений. Но в то же время заметим, что рассматриваемая в данном параграфе система имеет существенные ограничения. В частности, предполагается, что управление  $u(t)$  является  $n$ -мерным, а матрица  $B$  — не особой. Это условие нарушается, например, для простейшей системы управления, в которой существует единственная функция управления объектом  $n$ -го порядка. И, наконец, заметим, что данный метод применим лишь к системе  $n$ -го порядка с отрицательными различными действительными корнями.

Ж.Ла-Саллю [117] удалось продвинуться дальше и снять ряд ограничений, рассмотрев аспекты управляемости и единственности решений.

#### 14.2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

В предыдущем параграфе предположение о том, что матрица  $B$  размерности  $n \times n$  не особая, необходимо лишь для доказательства существования допустимого решения. Если от этого ограничения отказаться в надежде на то, что существование функций управления будет доказано какими-либо другими средствами, можно получить более общие результаты относительно решения задач оптимального быстродействия для линейных систем [117].

Рассмотрим произвольную стационарную линейную систему  $n$ -го порядка.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

где  $B$  — произвольная матрица с постоянными коэффициентами размерности  $n \times r$ , а  $|u_j(t)| \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Для канонической формы матрицы  $A$  по аналогии с уравнением (14.4) имеем

$$-x_i(0) = \int_0^{t_2} e^{-\lambda_i \tau} \sum_{j=1}^r b_{ij} u_j(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.14)$$

Опустив вопрос о существовании допустимого управления, можно показать, что достижимое множество  $C(t)$  в данном случае является выпуклым. Более того, выпуклость множества  $C(t)$  можно доказать даже для нестационарной системы. При этом множество  $C(t)$  должно быть замкнутым.

Ла-Салль изучал оптимальное по быстродействию управление произвольной нестационарной линейной системой вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0, \quad (14.15)$$

где  $B(t)$  — произвольная матрица размерностью  $n \times r$ . Один из основных вкладов, внесенных Ла-Саллем, состоит в доказательстве того, что  $C(t)$  даже для нестационарной линейной системы является не только выпуклым,

<sup>1)</sup> Доказательство методом индукции см. в работе [162], стр. 122.

но и замкнутым. Кроме того, он показал, что достижимое множество системы с релейным управлением  $u(t)$  в точности то же, что и в случае, когда  $u(t)$  просто отвечают ограничению  $|u_j(t)| \leq 1, j = 1, \dots, r$ .

Используя эти результаты, докажем следующие теоремы.

**Теорема 14.1.** Если из всех релейных кусочно-непрерывных управлений <sup>1)</sup> для системы (14.15) имеется одно, которое переводит изображающую точку из положения  $x_0$  в начало координат за минимальное время, то это есть оптимальное по быстродействию управление.

**Теорема 14.2.** Если оптимальное по быстродействию управление существует, то всегда найдется кусочно-непрерывное релейное управление, которое является оптимальным. Более того, все оптимальные управления имеют форму

$$u^*(t) = \text{sign} [\eta^T \Phi^{-1}(t, 0) B(t)]^T, \quad (14.16)$$

где  $\eta$  —  $n$ -мерный вектор, тождественно не равный нулевому.

Геометрически  $\eta$  снова представляет внешнюю нормаль к опорной плоскости выпуклого достижимого множества  $C(t^*)$  в точке  $x(0)$ .

Рассмотрим вопросы существования и единственности решений. Оказывается, на вопрос о единственности решений можно ответить с большей степенью общности, чем на вопрос о существовании решений.

Заметим, что если ни одна из  $n$  составляющих величины  $[\eta^T \Phi^{-1}(t, 0) \times \times B(t)]$  не обращается в нуль в течение конечного интервала времени при  $\eta \neq 0$ , то оптимальное управление  $u^*(t)$  можно однозначно определить с помощью соотношения (14.16). Подобные системы будем называть управляемыми в смысле Ла-Салля, или  $L$ -управляемыми <sup>2)</sup>.

Полезно рассмотреть стационарные  $L$ -управляемые системы. В этом случае необходимо, чтобы при  $\eta \neq 0$  ни одна составляющая  $\eta^T e^{-At} B$  тождественно не равнялась нулю. Последнее утверждение полностью эквивалентно тому условию, что на каждую переменную системы может непосредственно воздействовать каждая составляющая функции управления. Это более жесткое требование по сравнению с требованием полной управляемости гл. 3. Напомним, что полностью управляемая стационарная система обладает тем свойством, что на каждую переменную системы может непосредственно воздействовать, по меньшей мере, одна составляющая функции управления. Это эквивалентно требованию, чтобы не все  $n$  составляющих вектора  $[\eta^T \Phi^{-1}(t, 0) B(t)]$  были равны нулю. Полной управляемости недостаточно для гарантии единственности оптимального по быстродействию управления. Этот вопрос более подробно рассмотрен в гл. 16.

Можно отметить, что линейная полностью управляемая система с одним входом ( $r = 1$ ) также  $L$ -управляема. Таким образом, если для некоторой линейной, полностью управляемой системы с одним входом существует оптимальное по быстродействию управление, то оно единственно.

Что касается вопроса о существовании решений, то единственный важный результат, о котором можно упомянуть, касается систем с линейными стационарными объектами управления. Ла-Салль доказал, что для этого класса систем всегда существуют оптимальные по быстродействию решения, если объекты управления устойчивы и полностью управляемы, как об этом уже было сказано гл. 12.

<sup>1)</sup> Здесь приводятся результаты Ла-Салля, развитые далее Галкиным; см. [68].

<sup>2)</sup> Ла-Салль этот тип систем называет нормальным. Так как в данной работе используются термины, отличные от принятых в вариационном исчислении, мы предпочитаем не придерживаться указанной терминологии.

Результаты Ла-Салля позволяют найти общую форму решения для устойчивых, полностью управляемых систем с мнимыми собственными значениями. Напомним, что мы с трудом нашли решение этой задачи в гл. 12, когда использовали интуитивные представления.

**Пример 14.1.** Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление колебательным объектом при отсутствии демпфирования, т. е.  $\ddot{y} + y = u$ . Так как здесь имеется только один вход и система полностью управляема, она также  $L$ -управляема.

В качестве ограничения для  $u$  примем условие  $|u| \leq U$ . При  $x_1 = y$  и  $x_2 = \dot{y}$  находим, что

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и, таким образом, переходная матрица системы имеет вид

$$\Phi(t, 0) = e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Так как система устойчива, она имеет единственное релейное оптимальное по быстродействию управление вида (14.16).

Так как  $g(t) = \eta^T \Phi^{-1}(t, 0) \mathbf{b} = -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t$ , где  $\eta_1$  и  $\eta_2$  — составляющие вектора  $\eta$ , имеем

$$u^*(t) = U \operatorname{sign}[g(t)] = \begin{cases} +U, & \text{если } -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t > 0; \\ -U, & \text{если } -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t < 0. \end{cases} \quad (14.17)$$

Условие (14.17), казалось бы, решает рассматриваемую здесь задачу оптимального управления, но так как форма  $C(t)$  в каждый момент времени  $t$  неизвестна, то также неизвестно значение составляющих  $\eta_1$  и  $\eta_2$  вектора  $\eta$  для каждого данного  $\mathbf{x}(0)$ . Таким образом, полученный результат не столь завершен, как хотелось бы. Если требуется определить оптимальное по быстродействию управление  $u(0)$  как функцию времени при данном начальном состоянии  $\mathbf{x}(0)$ , то следует:

- 1) задаться значением  $\eta$ ;
- 2) использовать закон управления (14.17) для отыскания траектории движения системы из начальной точки  $\mathbf{x}(0)$ ;
- 3) если найденная траектория проходит через начало координат, то управление  $u^*(t)$  является оптимальным, и, следовательно,  $\eta$  выбрано правильным;
- 4) если результирующая траектория не проходит через начало координат, то  $\eta$  выбрано неверно, и необходимо сделать другой выбор.

Закон управления (14.17) позволяет определить кривые переключения для рассматриваемой задачи, если использовать метод, изложенный в гл. 12, связанный с решением задачи в обратном времени<sup>1)</sup>.

Система в функции обратного времени (где  $\tau$  — аргумент обратного времени,  $\tau = -t$ ) описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{d\tau} \\ \frac{dx_2}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u^*(\tau);$$

соответствующая функция оптимального управления выражается формулой

$$u^*(\tau) = \begin{cases} -U, & \text{если } \eta_1 \sin \tau + \eta_2 \cos \tau > 0; \\ +U, & \text{если } \eta_1 \sin \tau + \eta_2 \cos \tau < 0. \end{cases} \quad (14.18)$$

Если выбрать вначале  $\eta_1 < 0$ ,  $\eta_2 = 0^+$  при  $\tau = 0$ , то тогда  $u^*(0) = +U$ . Воздействуя на систему с обратным временем, получим последнюю часть кривой переключения, которая на рис. 14.3 изображена в виде кривой  $\Gamma_1$ . Такая кривая уже была получена в гл. 12.

Но в точке  $\tau = \pi$ , в которой изображающая точка достигает оси  $x_1$ ,  $\eta_1 \sin \tau$  изменяет знак, и после этого  $u^*(\tau)$  переключается; в результате получается полуокружность  $a$  (рис. 14.3) с центром в точке  $(-U, 0)$ .

<sup>1)</sup> Принцип обращения времени особенно эффективен применительно к системам второго порядка, в которых все переключения определяется кривой переключения. По мере увеличения порядка системы эффективность метода снижается.

Если выбрать  $\eta_1, \eta_2 < 0, \eta_2 < \eta_1$ , то вначале траектория системы будет следовать по кривой  $\Gamma_1$ , но прежде чем она достигнет оси  $x_1$ , произойдет переключение. После первого переключения траектория будет напоминать траекторию  $b$ . Как и траектория  $a$ , траектория  $b$  представляет собой окружность с центром в точке  $(-U, 0)$ .

Анализируя формулу (14.18), можно сделать два следующих вывода:

- 1) интервал времени между переключениями  $u^*(t)$  составляет  $\pi$  сек;
- 2) получаемая оптимальная траектория состоит из дуг окружности, центры которых расположены в точках  $(+U, 0)$  и  $(-U, 0)$ .

Сказанное позволяет построить кривую переключения. Вправо от оси  $x_2$  кривая состоит из полуокружностей, которые целиком лежат ниже оси  $x_1$ . Центрами этих окружностей являются точки  $(U, 0); (3U, 0); (5U, 0)$  и т. д. Влево от оси  $x_2$  кривая переключения расположена целиком выше оси  $x_1$  и состоит из полуокружностей с центрами в точках  $(-U, 0); (-3U, 0), \dots$

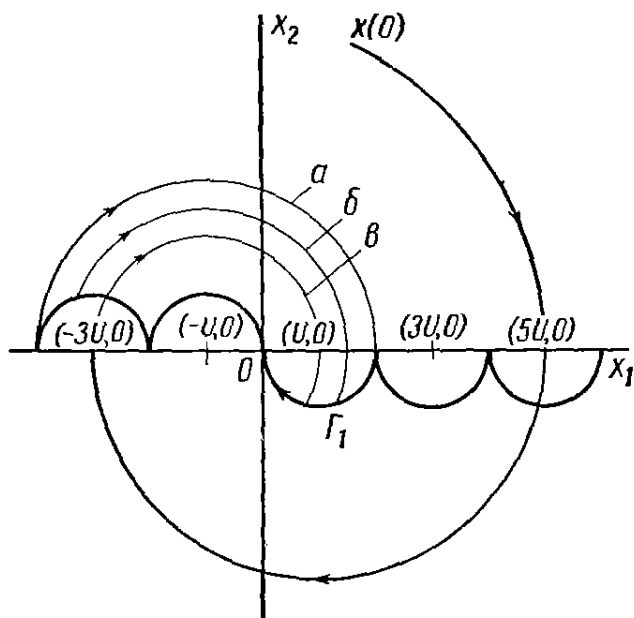


Рис. 14.3. Три типичные оптимальные траектории  $a, b$  и  $c$  к примеру 14.1

Заметим, что  $u^*(t) = U \operatorname{sign} [g(t)]; g(t) = -\eta_1 \sin t + \eta_2 \cos t$ . Неясность в знаке  $g(t)$  может возникнуть лишь в том случае, если  $g(t) = 0$  в течение конечного интервала времени. Но это возможно только в том случае, если  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , что нарушает требование, согласно которому  $\eta$  не может быть нулевым вектором.

Оптимальное управление таково, что если начальное состояние системы располагается выше границы переключения, то  $u^* = -U$ ; если же начальное состояние располагается ниже границы переключения, то  $u^* = +U$ .

Ясно, что число переключений управления  $u^*(t)$  зависит от начального состояния  $x(0)$ .

Типичная оптимальная траектория, исходящая из точки  $x(0)$ , показана на рис. 14.3, *в*.

Далее целесообразно рассмотреть вопрос об единственности оптимального по быстродействию управления, полученного с помощью выражения (14.17). Как было сказано выше, рассматриваемая система полностью управляема и имеет только одну компоненту управления; следовательно, она  $L$ -управляема. Таким образом, можно ожидать, что решение, определяемое выражением (14.17), является единственным. Посмотрим, действительно ли это так.

## 14.3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

### 1. Предварительное обсуждение

Топологические методы Беллмана и Ла-Салля позволяют оценить достоинства принципа максимума Понтрягина. Принцип максимума был постулирован Л. С. Понтрягиным в 1956 г. В дальнейшем в ряде работ Л. С. Понтрягина и его коллег В. Г. Болтянского и Р. В. Гамкрелидзе этот принцип был доказан. Полученные результаты обобщены в книге [162].

Принцип максимума прежде всего представляет ценность для инженера благодаря универсальности своей формулировки. Различные типы задач оптимизации изучаются с единой точки зрения. Это позволяет получить некоторые достаточные условия существования оптимального управления.

Вторая положительная особенность принципа максимума вытекает непосредственно из первой. Поскольку имеется общность формулировки, то любую информацию, получаемую при рассмотрении какой-либо одной задачи, можно использовать применительно ко всему классу. В частности, используя метод Беллмана—Ла-Салля—Галкина, мы выводим единый геометрический подход. Важным следствием этого является понимание существа сопряженной переменной, которое достигается благодаря принципу максимума. Теперь становится очевидным, например, что множители Лагранжа в вариационном исчислении и довольно «таинственные» векторы  $\eta$  при формулировке задач оптимального быстродействия Беллманом и

Ла-Саллем связаны с сопряженными векторами. Еще важнее то, что геометрическая ориентация сопряженных векторов в конце интервала управления обеспечивает требуемые граничные условия. И, наконец, поведение сопряженных векторов на интервале управления определяет вообще наличие вырванных или особых управлений.

Что касается результатов, то, строго говоря, здесь не сделано какого-либо существенного шага вперед по сравнению с классическим вариационным исчислением\*. Однако, используя функции Гамильтона, принцип максимума позволяет более эффективно, по сравнению с классическим вариационным исчислением, следить за множеством необходимых условий и условий трансверсальности. Конечно, эффективность метода представляет для инженеров первостепенную важность.

## 2. Формулировка задачи

Рассмотрим с самого начала несколько более общий вариант задачи по сравнению с тем, который был исследован в предыдущей главе. В частности, для системы  $n$ -го порядка

$$\dot{x} = f(x, u, t); \quad x(t_1) = x_1 \quad (14.19)^*$$

необходимо выбрать такую функцию управления  $u(t)$  на интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ , чтобы:

1) изображающая точка была переведена из состояния  $x_1$  в момент времени  $t_1$  в такое состояние в момент времени  $t_2$ , чтобы первые  $m$  составляющих текущего вектора состояния  $x(x_1, \dots, x_m)$  совпадали с  $m$  составляющими заданного конечного состояния  $s_1, \dots, s_m$ ;  $m \leq n$  и чтобы функционал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt \quad (14.20)$$

достигал минимума\*\*;

2) были учтены все ограничения, наложенные на  $u(t)$ ; без потери общности можно считать, что  $u(t)$  принимает значения внутри  $r$ -мерного единичного куба, определяемого условием  $|u_i(t)| \leq 1$ ;  $i = 1, \dots, r$ .

В приведенной выше формулировке некоторые переменные состояния (а именно,  $x_{m+1}, \dots, x_n$ ) остались свободными в конечный момент времени  $t_2$ . Как будет видно ниже, этот класс задач очень часто встречается на практике.

Сформулированную задачу можно теперь сделать еще более общей, учитывая формулу (14.20) непосредственно в уравнении (14.19). Это достигается путем введения дополнительной переменной состояния  $x_0$ , где

$$\dot{x}_0 \equiv L(x, u, t), \quad (14.21)^{***}$$

\* За исключением, возможно, некоторых упомянутых выше доказательств достаточности.

\*\* Предполагается, что  $f(x, u, t)$  в уравнении (14.19) является непрерывной функцией от  $u$ , кусочно-непрерывной функцией по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемой по  $x$ . Принцип максимума можно доказать даже в том случае, если  $f$  лишь непрерывно дифференцируема по  $x$ ; однако это доказательство будет более сложным по сравнению с приведенным.

\*\*\* Предполагается, что  $L$  обладает теми же свойствами, что и функция  $f$  в уравнении (14.19) (см. предыдущую сноску).

\*\*\*\* Благодаря выражению (14.21) задачу Лагранжа удалось преобразовать в задачу Майера.



Добавив формулу (14.20) к уравнению (14.19), определим два  $(n+1)$ -мерных вектора  $\mathbf{x}'$  и  $\mathbf{f}'$  соответственно с составляющими  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и  $L, f_1, f_2, \dots, f_n$ . Уравнения для расширенной системы можно записать в таком виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}', \mathbf{u}, t). \quad (14.22)$$

Рассмотрим координату  $x_0$ , начальным условием для которой с учетом формулы (14.20) является  $x_0(t_1) = 0$ ; при  $t = t_2$  имеем  $x_0(t_2) = \mathcal{J}$ .

Задачу оптимизации, рассматриваемую в расширенном пространстве состояний размерности  $n + 1$ , можно теперь сформулировать таким образом:

В  $(n + 1)$ -мерном пространстве состояний с координатами  $x_0, x_1, \dots, x_n$  найти допустимое управление  $\mathbf{u}^*(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ), которое переводит систему из начального положения  $x_0 = 0, \mathbf{x} = \mathbf{x}_1$  в конечное таким образом, что  $x_i(t_2) = s_i$  при  $i = 1, \dots, m$ , а  $x_0(t_2)$  принимает наименьшее возможное значение.

С помощью использованного выше приема была преобразована задача оптимального управления в задачу, которую можно рассматривать топологически. Кроме того, в подобные задачи можно преобразовывать теперь также и другие типы задач.

В приведенной выше формулировке время  $t_2$  может присутствовать в явном, так и неявном виде. В качестве примера рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия. Здесь  $L = +1$ , так что  $\mathcal{J}$  становится  $t_2 - t_1$ , но  $t_2$  присутствует лишь в неявном виде.

### 3. Формулировка принципа максимума

Введем  $(n+1)$ -мерный вектор <sup>1</sup>  $\psi(t)$  и образуем следующую функцию Гамильтона от четырех переменных  $\mathbf{x}', \mathbf{u}, t, \psi'$ .

$$H(\mathbf{x}', \mathbf{u}, t, \psi') \triangleq \psi'^T(t) \mathbf{f}'(\mathbf{x}', \mathbf{u}, t). \quad (14.23)$$

Принцип максимума можно теперь сформулировать следующим образом.

**Теорема 14.3.** (Принцип максимума Понтрягина). Если функция  $\mathbf{u}^*(t)$  определяет оптимальное управление, а  $\mathbf{x}'^*(t)$  — оптимальная траектория, соответствующая  $\mathbf{u}^*(t)$ , согласно уравнению (14.22), то имеется ненулевая непрерывная векторная функция  $\psi'(t)$  такая, что:

1) в любой момент времени  $t$  (за исключением, возможно, точек, в которых  $\mathbf{f}'$  или  $\mathbf{u}$  являются разрывными) функция Гамильтона вдоль оптимальной траектории  $\mathbf{x}'^*(t)$  достигает максимума. Иначе говоря,

$$H(\mathbf{x}'^*, \mathbf{u}^*, t, \psi') \geq H(\mathbf{x}', \mathbf{u}, t, \psi');$$

2) в любой момент времени  $t$  (за исключением, возможно, точек, в которых  $\mathbf{f}'$  или  $\mathbf{u}$  являются разрывными) вектор  $\psi(t)$  удовлетворяет системе

$$\dot{\psi}'(t) = - \left. \frac{\partial H(\mathbf{x}', \mathbf{u}^*, t, \psi')}{\partial \mathbf{x}'} \right|_{\mathbf{x}' = \mathbf{x}'^*(t)}; \quad (14.24)$$

3)  $\psi_i(t_2) = 0$  при  $i = m + 1, \dots, n$ ;

4)  $\psi_0(t_2) \leq 0$ .

Из соотношений (14.24) видно, что уравнение для  $\psi_0$  имеет вид  $\dot{\psi}_0 = 0$ , так как ни одна из функций  $f_i$  не зависит от координаты  $x_0$ . Таким образом, в соответствии с приведенным выше условием (4) принципа максимума  $\psi_0(t)$  будет представлять собой константу с отрицательным или нулевым значением.

<sup>1</sup> Вектор  $\psi'(t)$  называют сопряженным вектором.

В том случае, когда конечный момент времени заранее не определен, для получения решения необходимо наложить дополнительное условие:

$$H(x'^*, u^*, t_2, \psi') = 0 \text{ (для } t_2, \text{ не известного заранее).} \quad (14.25)$$

Другими словами, функция Гамильтона, соответствующая оптимальному управлению, должна равняться нулю в момент времени  $t_2$ .

Можно сделать еще один интересный вывод для случая, когда  $H$  не зависит от времени. Это означает, что управляемая система и функция критерия  $L$  не зависят от времени.

Обозначим функцию Гамильтона, соответствующую оптимальному управлению  $u$ , через  $H^*(x', \psi', t)$  и рассмотрим  $dH^*(x', \psi', t)/dt$  вдоль оптимальной траектории

$$\frac{dH^*}{dt} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial H^*}{\partial x_i} \dot{x}_i^* + \sum_{i=0}^n \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial H^*}{\partial t}. \quad (14.26)$$

Из выражений (14.23) и (14.24) следует

$$\frac{\partial H^*}{\partial x_i} = -\dot{\psi}_i; \quad \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} = \dot{x}_i^*. \quad (14.27)$$

Подставляя соотношение (14.27) в уравнение (14.26), получим в общем виде

$$\frac{dH^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial t}. \quad (14.28)$$

Если  $L$  и  $f$  не являются явными функциями времени, то  $dH^*/dt = 0$ ; заметим, что для подобных систем  $H^*$  представляет собой константу. Кроме того, для класса систем, в которых конечное время не задано, известно, что  $H^* = 0$  в конечный момент времени. Таким образом, если эти системы, кроме того, стационарны, то имеем  $H^* = 0$ <sup>1)</sup>. Суммируем сказанное выше в виде следствий:

- 1) для расширенных систем  $H^*$  является константой;
- 2) для стационарных систем с незадаанным заранее конечным моментом времени  $t_2$ ,  $H^*$  тождественно равна нулю.

Важный класс задач оптимального по быстродействию управления стационарными объектами удовлетворяет следствию 2.

#### 4. Замечания и пояснения

Рассмотрим сначала вектор  $\psi'$ . Из выражения (14.24) видно, что уравнения, определяющие  $\psi'$ , представляют собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений. Составляющие  $\psi'(t)$  определяются с точностью до постоянного множителя. Таким образом, без потери общности можно произвольно зафиксировать любую из них. Из формулировки принципа максимума следует, что проще всего это сделать по отношению к составляющей  $\psi_0$ , которая всюду постоянна. Из пункта 4) формулировки принципа максимума известно, что  $\psi_0 \leq 0$ . Согласно общепринятой практике зададим следующее значение  $\psi_0$ <sup>2)</sup>:

$$\psi_0 \equiv -1. \quad (14.29)$$

<sup>1)</sup> Это другой метод получения уравнения (13.71) для класса задач, рассматриваемых в § 13.3.

<sup>2)</sup> Последнее возможно при  $\psi_0 \neq 0$ . При  $\psi_0 \equiv 0$  соответствующая траектория называется особой (гл. 16).

Для линейного управляемого объекта вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1; \quad (14.30a)$$

$$\dot{x}_0 = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad x_0(t_1) = 0 \quad (14.30б)$$

условия (14.24) вдоль оптимальной траектории  $\mathbf{x}^*(t)$  принимают вид

$$\dot{\psi}_0 = 0; \quad (14.31a)$$

$$\dot{\psi} = -\mathbf{A}^T\psi - \psi_0 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}, \quad (14.31б)$$

где  $\psi$  — вектор с составляющими  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Заметим, что при  $\psi_0 \equiv -c$  уравнение (14.31б) то же, что и уравнения для множителей Лагранжа в уравнениях Эйлера—Лагранжа в гл. 13. Таким образом, величины  $\psi_i, i = 1, \dots, n$  отождествляются с множителями Лагранжа в классической формулировке.

Можно сделать еще один шаг в поисках тождества для  $\psi_i$ . Рассмотрим задачу оптимального быстродействия применительно к линейным системам. Здесь  $L(\mathbf{x}; \mathbf{u}) \equiv 1$ , и, таким образом, управление (14.31б) сводится к виду  $\dot{\psi} = -\mathbf{A}^T\psi$  что, как можно видеть, представляет собой систему, сопряженную с системой (14.30a) в соответствии с определением, принятым в гл. 13. Отсюда видно, что множители Лагранжа оказываются ничем иным, как сопряженными переменными. Далее, ввиду отождествления вектора  $\psi$  с сопряженным вектором расширенный вектор  $\psi'$  для нелинейной системы, определяемой уравнением (14.24), также будем называть сопряженным вектором.

Теперь можно установить смысл вектора  $\eta$ , появившегося в выражении для оптимального по быстродействию управления в предыдущих параграфах. Функция Гамильтона для системы (14.30) имеет вид

$$H = -L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \psi^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}). \quad (14.32)$$

Для задачи оптимального быстродействия  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv 1$ , и, следовательно,

$$H = -1 + \psi^T(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}).$$

В соответствии с пунктом 1) формулировки принципа максимума  $H$  должна быть максимизирована путем выбора  $\mathbf{u}$ . Теперь единственной частью  $H$ , содержащей  $\mathbf{u}$  в явном виде, является часть  $\psi^T\mathbf{B}\mathbf{u}$ . Так как

$$\psi^T\mathbf{B}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{j=1}^r b_{ij}u_j = \sum_{j=1}^r u_j \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_i, \quad (14.33)$$

то при  $|u_j| \leq U_j$  для нахождения максимума этой величины необходимо иметь

$$u_j^* = U_j \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_i$$

или

$$\mathbf{u}^*(t) = \operatorname{sign}[\mathbf{B}^T\psi] \quad (14.34)$$

всякий раз, когда величина  $\sum_{i=1}^n b_{ij}\psi_j$  не равняется нулю на каком-либо конечном интервале. Если последнее условие выполнено, то каждая составляющая  $u_i$  будет релейной, причем моменты переключения определяются выбором сопряженных переменных. Это, по-видимому, в известной мере отражает результаты Ла-Салля, изложенные в § 14.2.

Сравним теперь выражение (14.34) с формулой (14.16), где

$$u^*(t) = \text{sign} [\eta^T \Phi^{-1}(t, t_1) B]^T.$$

Из гл. 3 (§ 3.8), следует, что  $B^T \psi(t)$  можно написать как  $B^T \Psi(t, t_1) \psi(t_1)$ , где  $\Psi(t, t_1)$  — переходная матрица сопряженной системы. Так как  $\Phi^{-1}(t, t_1) = \Psi^T(t, t_1)$ , то имеем также

$$[\eta^T \Phi^{-1}(t, t_1) B]^T = B^T \Psi(t, t_1) \eta^T.$$

Так как выражение (14.34) и формула (14.16) должны приводить к одинаковым результатам, то из определения функции  $\text{sign}$  следует, что величины

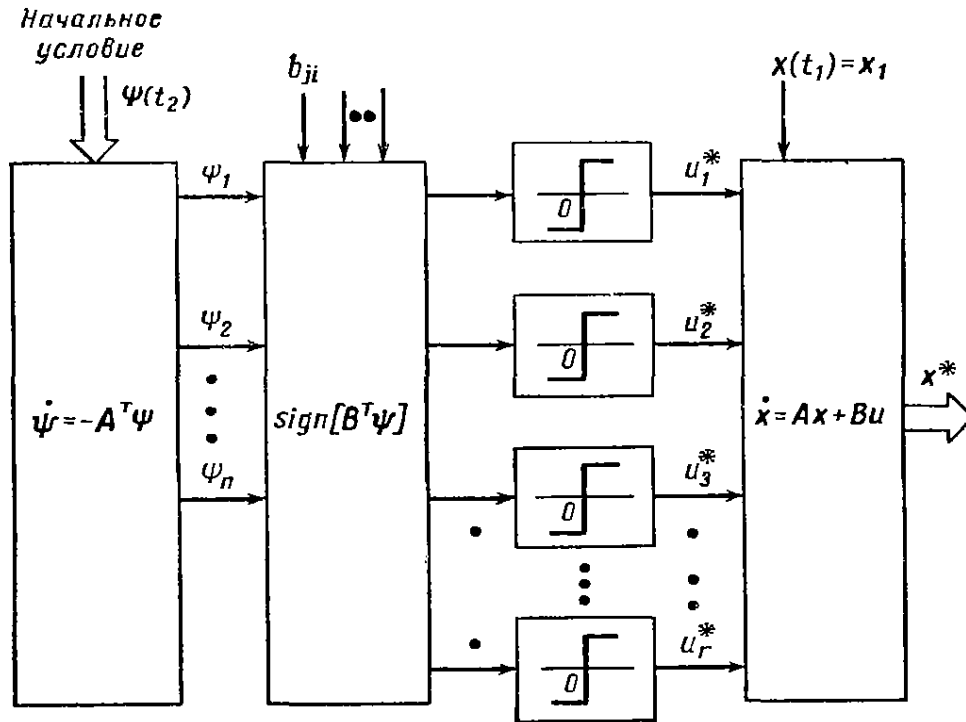


Рис. 14.4. Получение оптимального по быстродействию управления объектом  $\dot{x} = Ax + Bu$  в том случае, если бы  $\psi(t_2)$  была известна, а  $\text{sign}[B^T \psi]$  была определена

$B^T \psi(t) = B^T \Psi(t, t_1) \psi(t_1)$  и  $B^T \Psi(t, t_1) \eta^T$  образуют векторы, которые во все моменты времени должны располагаться в одном и том же направлении и могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Это значит, что вектор  $\eta$  в начальный момент времени  $t_1$  совпадает по направлению с сопряженным вектором  $\psi$ . Так как величина вектора  $\eta$  не имеет значения, для  $\eta$  можно выбрать удобный масштаб, так чтобы  $\eta = \psi(t_1)$ .

Оптимальную по быстродействию задачу можно свести к задаче нахождения вектора  $\eta$ ; при этом вопрос, по существу, сводящийся к нахождению начального значения оптимального по быстродействию управления для линейного  $L$ -управляемого объекта, можно решить, так как значение  $\psi(t)$  для  $t_1 \leq t \leq t_2$  полностью определяется решением уравнения  $\dot{\psi} = -A^T \psi$ .

Графическая иллюстрация к этому методу показана на рис. 14.4. Трудность приведенного выше метода заключается в том, что в общем случае\* не ясно, как следует приступить к нахождению вектора  $\psi(t_1)$ . Один возможный путь состоит в том, чтобы попытаться использовать какой-либо топологический подход при условии выполнения принципа максимума и других необходимых условий для того, чтобы определить итерационную процедуру. Некоторые из этих методов рассмотрены в гл. 17.

\* Если управляемый объект линейный, то  $\psi(t_1)$  можно иногда найти методом, изложенным в § 12.3.

Если сравнить формулировку теоремы 14.3 с результатами, полученными в гл. 13 с помощью вариационного исчисления, то можно прийти к следующим выводам:

1. Пункт 1) в теореме 14.3 представляет собой, по существу, условие Вейерштрасса, когда используется метод Валентайна, связанный с учетом ограничений типа неравенства, наложенных на управление  $u(t)$ .

2. Пункт 2) соответствует уравнениям Эйлера—Лагранжа.

3. Пункты 3) и 4) определяют условия трансверсальности для рассматриваемого класса задач.

4. Тот факт, что  $\psi'(t)$  сохраняется непрерывной, означает, что условие Вейерштрасса—Эрдмана (13.20) также выполняется.

Таким образом, теорема 14.3 содержит в себе почти все известные необходимые условия, выведенные в гл. 13 с помощью вариационного исчисления. Отсюда можно оценить краткость и выразительность данной формулировки.

Принцип максимума легко применим к случаям, когда отсутствуют ограничения, налагаемые на функцию управления  $u(t)$ . При этом принцип максимума дает результаты, тождественные тем, которые можно получить с помощью классического вариационного исчисления.

Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 14.2.** Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление спутником (пример 4.1). В этом случае имеем

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u; \quad |u(t)| \leq 1,$$

следовательно,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При использовании вариационного исчисления необходимо определить в соответствии с методом Валентайна переменную  $v(t)$  и ограничивающее отношение

$$\zeta(u, v) = (u(t) + 1)(1 - u(t)) - v^2(t) = 0.$$

В соответствии с правилом множителей Лагранжа показатель качества  $\mathcal{F}_2$  имеет вид

$$\mathcal{F}_2 = t_2 + \int_0^{t_2} \left( \sum_{i=1}^2 \psi_i \Phi_i + \lambda \zeta \right) dt = t_2 + \int_0^{t_2} L_1 dt,$$

где

$$L_1 = \psi_1 (\dot{x}_1 - x_2) + \psi_2 (\dot{x}_2 - u) + \lambda \zeta.$$

Так как  $\partial L_1 / \partial \dot{x}_1 = \psi_1$ ;  $\partial L_1 / \partial x_1 = 0$ ;  $\partial L_1 / \partial \dot{x}_2 = \psi_2$  и  $\partial L_1 / \partial x_2 = -\psi_1$ , то уравнения Эйлера—Лагранжа дают

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \quad (14.35)$$

Кроме того, мы имеем  $\partial L_1 / \partial v = -2\lambda v = 0$  и  $\partial L_1 / \partial u = -\psi_2 - 2\lambda u = 0$  или

$$\lambda(t) v^*(t) \equiv 0 \quad (14.36)$$

$$-\psi_2(t) = 2\lambda(t) u^*(t). \quad (14.37)$$

Функции  $\lambda(t)$ ,  $v(t)$  и  $u^*(t)$  можно найти из условия Вейерштрасса, которое указывает, что  $u^*(t)$  должна в каждый момент времени  $t$  доставлять максимальное значение функции  $H$ . Так как в данном случае  $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - 1$ , то имеем

$$u^*(t) = \text{sign} [\psi_2(t)]. \quad (14.38)$$

Оптимальная функция управления  $u^*(t)$  будет однозначной при условии, что  $\psi_2$  тождественно не равна нулю.

Из соотношений (14.35) следует, что решения для компонент вектора  $\psi$  имеют вид

$$\psi_1 = C = \text{const}; \quad \psi_2 = -Ct + \psi_2(0) \quad (14.39)$$

и  $\psi_2$  не может равняться 0, если  $\psi_1 \neq 0$ . Но условие  $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$  невозможно, поскольку из условия трансверсальности (13.70) следует

$$\left( \sum_{i=1}^2 \psi_i f_i - 1 \right) \Big|_{t=t_2} = (\psi_1 x_2 - \psi_2 u - 1) |_{t=t_2} = 0. \quad (14.40)^1$$

Из условий (13.87) и (14.40) следует, что  $H^* = \psi_1 x_2^* + \psi_2 u^* - 1 \equiv 0$  для всех значений  $t$ . Таким образом, видно, что решением поставленной задачи является релейное управление. Кроме того, так как функция  $\psi_2$  в выражении (14.39) может изменить знак только один раз, то релейное управление претерпевает лишь одно переключение. Из выражений (14.37) и (14.38) видно, что  $\lambda(t) = -(1/2) |\psi_2(t)|$ , и, следовательно, из соотношения (14.36) вытекает  $v(t) \equiv 0$ .

Вариационное исчисление, конечно, дает правильный ответ. Но при использовании принципа максимума тот же результат можно получить и без вспомогательных переменных  $v(t)$  и  $\lambda(t)$ . Для этого сразу же получим

$$H = -1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u,$$

где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = -\psi_1 t + c_2 = -c_1 t + c_2.$$

При ограничении на функцию управления  $|u| \leq 1$  принцип максимума [формулировка 1) теоремы 14.3] сразу же указывает на то, что решение имеет вид

$$u^*(t) = \text{sign } \psi_2(t).$$

Следует отметить, что если  $\psi_2(t) = c_2 - c_1 t$ , то  $\psi_2(t)$  изменяет знак только один раз; таким образом,  $u^*$  может изменить знак также только один раз.

Из условия (14.25) вытекает, что  $H^* \equiv 0$  или  $\psi_1 x_2 + \psi_2 u^* \equiv 1$ , поэтому случай  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  невозможен.

До сих пор мы отыскивали только форму решения. Как и в примере 14.1, для определения оптимального управления как функции времени необходимо найти начальное значение сопряженного вектора  $\psi(t_1)$ , однако это очень не просто сделать.

Можно проанализировать движение системы в обратном времени, используя оптимальное управление  $u^* = \text{sign } \psi_2$ . Взяв вначале произвольные значения  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , [т. е. задавшись вектором  $\psi(t_2)$ ] и изучая движение в обратном времени, можно действительно получить оптимальное начальное значение  $\psi(t_1)$  для каждой точки, через которую проходит траектория системы. Действительно, если принять  $\tau = -t$ , то вектор  $\psi(\tau)$ , соответствующий каждой точке  $x(\tau)$ , через которую проходит обратная траектория системы, по существу представляет собой вектор  $\psi(t_1)$  для начального состояния исходной системы (покажите это). На первый взгляд, этот подход преодолевает трудности, связанные с решением двухточечной краевой задачи. В действительности же мы не можем непосредственно указать величину вектора  $\psi(t_2)$ , чтобы гарантировать, что через данную точку  $x(t_1)$  проходит единственная траектория.

В случае оптимального по быстродействию управления стационарными линейными объектами, когда управление входит линейно, принцип максимума, по-видимому, всегда приводит к релейному управлению. Но если управление входит нелинейно, т. е. система имеет вид  $\dot{x} = Ax + g(u)$ , то решение не обязательно должно быть релейным. Покажем это на следующем примере.

**Пример 14.3<sup>1</sup>.** После выгорания топлива движение ракеты приближенно описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{y} = \frac{c_1 g \alpha}{m}; \quad \ddot{x} = -\frac{c_1 g \alpha^2}{m},$$

где  $m$  — масса ракеты;

$\alpha$  — угол атаки (см. пример 5.5);

$x$  и  $y$  — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты ракеты;

$c_1$  — постоянная ( $c_1 > 0$ ).

<sup>1</sup>) Уравнение (14.40) подтверждает уравнение (14.25).

<sup>2</sup>) Данный пример предложили Дж. А. Нортон и Х. Галкин.

Величину  $q = \frac{\rho(x^2 + y^2)}{2}$  — скоростной напор можно выразить лишь функцией времени  $q(t)$ .

Задача сводится к нахождению  $\alpha$  как функции времени с учетом ограничения  $|\alpha| \leq \alpha_{\max}$  с тем, чтобы ракета имела возможность пройти из начальной точки  $(x_1, y_1)$  в конечную точку  $(x_2, y_2)$  за минимальное время.

Приняв  $x_1 = x$ ;  $x_2 = \dot{x}$ ;  $x_3 = y$ ;  $x_4 = \dot{y}$ ;  $u = c_1 q(t) \alpha / m$  и  $K_1 = m / c_1$ , система уравнений будет иметь вид

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -\frac{K_1 u^2}{q(t)}; \quad \dot{x}_3 = x_4; \quad \dot{x}_4 = u;$$

ее можно представить в форме  $\dot{x} = Ax + g(u)$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad g(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_1 u^2}{q(t)} \\ 0 \\ u \end{bmatrix}.$$

Ограничение на функцию  $u$  сводится теперь к  $|u| \leq K_2 q(t)$ , где  $K_2 = c_1 \alpha_{\max} / m$ . С помощью принципа максимума находим

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_3 x_4 - \psi_2 \frac{K_1 u^2}{q(t)} + \psi_4 u - 1.$$

Для максимизации  $H$  рассмотрим два случая:

1)  $|u| < K_2 q(t)$ . Здесь  $H$  можно максимизировать, взяв ее производную по  $u$  и приравняв ее нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=u^*} = -2\psi_2 K_1 \frac{u^*}{q(t)} + \psi_4 = 0.$$

Это дает

$$u^* = \frac{\psi_4 q(t)}{2\psi_2 K_1}.$$

Для нахождения  $\psi_2$  и  $\psi_4$  рассмотрим сопряженную систему, откуда можно определить, что  $\psi_2$  и  $\psi_4$  будут иметь вид  $\psi_2 = c_2(t_2 - t)$ ;  $\psi_4 = c_3(t_2 - t)$ , так как  $\psi_2(t_2) = \psi_4(t_2) = 0$ <sup>1)</sup>, где  $c_2$  и  $c_3$  — постоянные. Поэтому

$$u^* = \frac{c_3 q(t)}{2c_2 K_1}, \text{ если } \frac{c_3}{2c_2 K_1} < K_2 \text{ или } \frac{c_3}{2c_2} < K_1 K_2 = \alpha_{\max}.$$

Таким образом, для данного случая функция управления  $u$  должна быть пропорциональна  $q$ , а это значит, что  $\alpha = mu / (c_1 q)$  должна быть постоянной;

2)  $|u| = K_2 q(t) = u_{\max}$  (или  $\alpha = \alpha_{\max}$ ). Это действительно так, если  $c_3 / (2c_2) = K_1 K_2 = \alpha_{\max}$ , и вместо приведенного выше выражения имеем

$$u^* = \text{sign} \left[ \frac{c_3}{c_2} \right] K_2 q(t) \text{ или } \alpha^* = \text{sign} \left[ \frac{c_3}{c_2} \right] \alpha_{\max}.$$

Во всех примерах, рассмотренных в данном параграфе, необходимо учитывать тот факт, что принцип максимума обеспечивает лишь необходимое, но недостаточное условие оптимальности. Таким образом, согласно материалам гл. 13, мы нашли лишь локальный минимум. Во многих случаях принцип максимума обеспечивает также и достаточное условие оптимальности.

<sup>1)</sup> Поскольку  $x_2 = \dot{x}$  и  $x_4 = \dot{y}$  не фиксированы в момент времени  $t = t_2$ , то из формулировки 3) теоремы 14.3 следует, что  $\psi_2(t_2) = \psi_4(t_2) = 0$ .

#### 14.4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА КАК ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Часто говорят, что принцип максимума обеспечивает ряд сильных необходимых условий, т. е. условий, которые в некотором смысле «близки» к достаточным. Для линейного объекта можно показать, что принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Ниже приводится достаточно общая формулировка теоремы о достаточных условиях принципа максимума в случае управления линейным объектом<sup>1)</sup>.

**Теорема 14.4.** Пусть для системы

$$\dot{x} = A(t)x + g(u, t) \quad (14.41)$$

показатель качества определяется вспомогательным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_0 = f_0(x, t) + g_0(u, t), \quad (14.42)$$

где  $A$ ,  $f_0$ ,  $g_0$  и  $g$  — функции, непрерывные по всем аргументам, а  $f_0$  также однозначная выпуклая функция<sup>2)</sup> от  $x$  для каждого фиксированного значения  $t$ . Цель управления совпадает с изложенным в п. 2 § 14.3. Если найдено управление  $u^*(t)$ , удовлетворяющее принципу максимума и условиям задачи, то оно является оптимальным.

При этом видно, что функция  $u(t)$ , найденная для каждого из примеров в § 14.3, действительно определяет оптимальное управление.

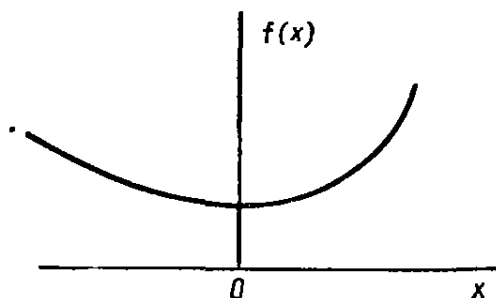


Рис. 14.5. Выпуклая функция  $f(x)$

#### 14.5. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

В данном параграфе будет показано, как можно использовать понятие достижимого выпуклого множества, введенное Беллманом и Ла-Саллем для построения доказательства принципа максимума для линейных систем. Затем будут указаны шаги, необходимые для распространения этого доказательства на общий случай [69].

##### 1. Доказательство принципа максимума для класса линейных систем

Рассмотрим линейную задачу, описываемую расширенным матричным уравнением

$$\dot{x}' = A'(t)x' + g'(u, t), \quad (14.43)$$

где управление  $u$  входит нелинейно. Как и раньше, примем  $|u_i| \leq 1$ .

Без потери общности, в уравнении (14.43) можно принять, что в результате переноса координат выполняется условие  $x'(t_1) = 0$ ; таким образом, начальная точка расширенной системы совпадает с началом координат пространства  $\mathcal{E}_{n+1}$ .

Пусть задача управления ставится так же, как и в п. 2 § 14.3, за исключением того, что в момент времени  $t_2$  желательно привести систему в состояние, где  $x_i = s_i$  при  $i = 1, \dots, m$ , и при этом минимизировать координату  $x_0(t_2)$ .

<sup>1)</sup> Доказательство см., например, в работе [119].

<sup>2)</sup> Функция  $f(x)$  называется выпуклой, если для двух любых точек  $x_1, x_2$  при всех значениях  $0 \leq \alpha \leq 1$  имеем  $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$ . Выпуклая функция одной переменной  $f(x)$  показана на рис. 14.5.



Для упрощения опустим обозначение штриха, указывающее на расширенные векторы. Таким образом, уравнение (14.43) принимает вид

$$\dot{x} = A(t)x + g(u, t). \quad (14.44)$$

При этом имеется в виду, что  $x$  и  $g$  представляют собой  $(n + 1)$ -мерные векторы соответственно с составляющими  $x_0, \dots, x_n$  и  $g_0, \dots, g_n$ , а  $A$  обозначает матрицу размерности  $(n + 1) \times (n + 1)$ .

Для построения доказательства полезно мысленно представлять себе какую-либо задачу оптимизации в трехмерном расширенном пространстве состояний с координатами  $x_0, x_1, x_2$ . Допустим, требуется обеспечить управление линейной системой третьего порядка вида (14.44), которое переводит ее из состояния  $x(t_1) = 0$  в положение  $x_1(t_2) = s_1$  в момент времени  $t = t_2$ , и при этом достигается минимум величины  $x_0(t_2)$ . В момент времени  $t_2$  координата  $x_2$  остается свободной.

Прежде чем приступить к доказательству, примем, как и раньше, что достижимое множество  $C(t_2)$  представляет собой множество всех точек в  $\mathcal{E}_{n+1}$ , достижимых системой (14.44) при выборе  $u(t)$  из допустимого множества  $\Omega$ , т. е.

$$C(t_2) = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau) g(u(\tau), \tau) d\tau : u \in \Omega \right\}. \quad (14.45)^1$$

Так как  $g(u, t)$  не обязательно равно  $B(t)u(t)$ , то не ясно, является ли теперь множество  $C(t_2)$  выпуклым.

Важным при доказательстве принципа максимума является следующий результат [69].

**Лемма 14.1.** Если в уравнении (14.44)  $A(t)$  кусочно-непрерывна по  $t$ , а  $g(u, t)$  непрерывна по  $u$  и кусочно-непрерывна по  $t$ , то множество  $C(t_2)$  является выпуклым.

Зная, что  $C(t_2)$  выпукло, можно повторить рассуждения, которые привели к результатам для случая задач оптимального быстрогодействия, при условии, что будут внесены изменения, обусловленные более сложной структурой множества конечных состояний. Следует, однако, отметить, что в лемме 14.1 ничего не говорится о замкнутости  $C(t_2)$ .

Для задач, оптимальных по быстродействию, множество конечных состояний совпадает с точкой  $x_2$ . Если определен момент, когда замкнутое и выпуклое множество  $C(t)$  в первый раз касается  $x_2$ , то задача решена; из рассмотрения геометрии задачи можно вывести некоторые необходимые условия существования оптимального по быстродействию управления.

В более общем случае, когда  $C(t_2)$  не обязательно замкнуто, нельзя говорить о том, что  $C(t_2)$  «касается» какой-то точки<sup>1)</sup>. Однако можно говорить о точках, которые принадлежат или не принадлежат множеству  $C(t_2)$ .

Предположим, что оптимальное управление  $u^*(t)$  найдено. Пусть соответствующая оптимальная траектория имеет вид  $x[u^*(t), t]$ . По определению, вектор  $x[u^*(t), t_2]$  принадлежит множеству  $C(t_2)$ .

**Лемма 14.2.** (Принцип оптимального движения)<sup>2)</sup>. Для каждого  $t$  из интервала  $[t_1, t_2]$   $x(u^*, t)$  представляет собой граничную точку множества  $C(t)$ .

<sup>1)</sup> В отличие от § 14.1, где  $C(t_2)$  определялось при  $x(t_2) = 0$ , здесь  $C(t_2)$  определяется при  $x(t_1) = 0$ . Результат будет тот же, поскольку всегда можно считать, что  $x(t_1) \neq 0$  и  $x(t_2) = 0$ .

<sup>2)</sup> Если  $A(t)$  непрерывна по  $t$ , а  $g(u, t)$  непрерывна по  $u$  и  $t$ , то тогда при  $|u_i| \leq 1$  множество  $C(t_2)$  является и замкнутым, и выпуклым [149].

<sup>3)</sup> Доказательство см., например, в работе [52].

Определим (открытое) множество  $\mathcal{S}$  как множество всех точек  $\mathbf{x}$  таких, что  $x_i = s_i, i = 1, \dots, m$ , и, кроме того,  $x_0 < x_0(\mathbf{u}^*, t_2)$ . Множество  $\mathcal{S}$  является выпуклым и представляет собой выпуклое множество, не имеющее общих точек со множеством  $\mathcal{C}(t_2)$ .

В нашем примере множество  $\mathcal{S}$  рассматривается как полубесконечное пространство, определяемое  $x_1 = s_1$  и  $x_0 < x_0(\mathbf{u}^*, t_2)$ . Поперечное сечение этого множества приведено на рис. 14.6, где через точку  $\mathbf{x}(\mathbf{u}^*, t_2)$  проходит плоскость, параллельная плоскости  $(x_0, x_1)$ .

Кроме того, определим множество  $\bar{\mathcal{S}}$  как множество всех состояний  $\mathbf{x}$  в пространстве  $\mathcal{E}_{n+1}$ , где  $x_i = s_i$  при  $i = 1, \dots, m$ , и, кроме того,  $x_0 \leq x_0(\mathbf{u}^*, t_2)$ . Таким образом, множество  $\bar{\mathcal{S}}$  представляет собой множество  $\mathcal{S}$  и его граничную плоскость  $x_0 = x_0(\mathbf{u}^*, t_2)$ .

В нашем примере  $\bar{\mathcal{S}}$  представляет собой множество  $\mathcal{S}$  и его граничную плоскость, определяемую  $x_0 = x_0(\mathbf{u}^*, t_2); x_1 = s_1$ .

В соответствии с определением множества  $\mathcal{C}(t_2)$  и  $\mathcal{S}$  не имеют общих точек, так как в противном случае было бы нарушено предположение о том, что  $\mathbf{u}^*$  является оптимальным управлением.

Так как  $\mathcal{C}(t_2)$  и  $\mathcal{S}$  выпуклы и не имеют общей точки, то существует по меньшей мере одна гиперплоскость, разделяющая их: т. е. множество  $\mathcal{C}(t_2)$  целиком располагается по одну сторону от этой гиперплоскости, а  $\mathcal{S}$  целиком лежит по другую сторону. Вид этой плоскости с ребра показан на рис. 14.6. Фактически она представляет собой опорную плоскость множества  $\mathcal{C}(t_2)$ , проходящую через точку  $\mathbf{x}(\mathbf{u}^*, t_2)$ .

Расстояние до плоскости от начальной точки определим как евклидово расстояние  $r$ . Тогда внешняя нормаль  $\boldsymbol{\eta}$  к опорной гиперплоскости, направленная в сторону от  $\mathcal{C}(t_2)$ , обладает следующими свойствами:

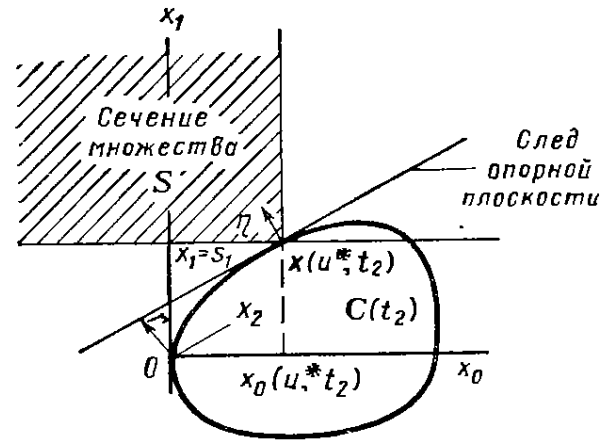


Рис. 14.6. Геометрия выпуклого достижимого множества относительно множества  $\mathcal{C}(t_2)$  для особого класса систем, уравнения (14.43)

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\eta})}{\|\boldsymbol{\eta}\|} &\leq r, \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathcal{C}(t_2); \\ \frac{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} &> r, \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathcal{S}; \\ \frac{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} &\geq r, \text{ для всех } \mathbf{x} \in \bar{\mathcal{S}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.46)$$

Так как  $\mathbf{x}(\mathbf{u}^*, t_2)$  принадлежит и к  $\mathcal{C}(t_2)$  и к  $\mathcal{S}$ , имеем

$$\frac{\mathbf{x}^T(\mathbf{u}^*, t_2) \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \leq r \leq \frac{\mathbf{x}^T(\mathbf{u}^*, t_2) \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|}, \quad (14.47)$$

а это означает, что

$$\frac{\mathbf{x}^T(\mathbf{u}^*, t_2) \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} = r. \quad (14.48)$$

Заметим, что любое перемещение точки  $\mathbf{x}(\mathbf{u}^*(t), t_2)$  параллельно оси  $x_2$  оставляет ее внутри множества  $\bar{\mathcal{S}}$  (где  $x_2$  — координата, которая остается свободной в момент времени  $t_2$ ). Применительно к расширенному пространству  $\mathcal{E}_{n+1}$  этот факт можно использовать для доказательства, что

$$\eta_i = 0 \text{ при } i = m + 1, \dots, n$$

$$\eta_0 \leq 0.$$

Пусть  $e_i$  представляет собой единичный вектор, параллельный  $i$ -й оси, тогда  $x(u^*, t_2) + e_i$  и  $x(u^*, t_2) - e_i$  принадлежат множеству  $\bar{S}$  при  $i = m + 1, \dots, n$ . Из соотношений (14.46) и (14.48) получим

$$(x(u^*, t_2) + e_i)^T \eta \geq x^T(u^*, t_2) \eta \quad (14.49a)$$

и

$$(x(u^*, t_2) - e_i)^T \eta \geq x^T(u^*, t_2) \eta, \quad i = m + 1, \dots, n, \quad (14.49b)$$

а это означает

$$-0 \leq e_i^T \eta \leq 0$$

или

$$e_i^T \eta = 0, \quad (14.50)$$

что возможно только в том случае, если  $\eta_i = 0$ ;  $i = m + 1, \dots, n$ .

Заметим, что  $x(u^*, t_2) - e_0$  принадлежит к множеству  $\bar{S}$ . Поэтому в соответствии с соотношением (14.46) имеем

$$x(u^*, t_2) - e_0)^T \eta \geq x^T(u^*, t_2) \eta; \quad (14.51)$$

отсюда  $-e_0^T \eta \geq 0$ , а это означает, что

$$\eta_0 \leq 0.$$

Теперь покажем, что если получены сопряженные векторы  $\psi(t)$  в соответствии с

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_2)]^T \eta = \Psi(t, t_2) \eta \quad (14.52)$$

для  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то можно доказать пункты 1) и 2) формулировки принципа максимума. В выражении (14.52)  $\Phi(t, t_2)$  представляет собой переходную матрицу расширенной системы, а  $\Psi(t, t_1)$  — переходную матрицу соответствующей сопряженной системы.

Сначала можно доказать (см. упражнение 14.14), что

$$(\Phi^{-1}(t, t_2) g(u^*, t))^T \eta \geq (\Phi^{-1}(t, t_2) g(u, t))^T \eta, \quad (14.53)$$

откуда следует, что

$$g^T(u^*, t) \Psi(t, t_2) \eta \geq g^T(u, t) \Psi(t, t_2) \eta. \quad (14.54)$$

С учетом выражения (14.52) запишем

$$g^T(u^*, t) \psi(t) \geq g^T(u, t) \psi(t). \quad (14.55)$$

Добавив  $(A(t) x^*(t))^T \psi(t)$  к обеим частям неравенства, получим

$$(A(t) x^*(t) + g(u^*, t))^T \psi(t) \geq (A(t) x^*(t) + g(u, t))^T \psi(t)$$

или

$$H(x^*, u^*, t, \psi) \geq H(x^*, u, t, \psi) \quad \text{для всех } t \in [t_1, t_2], \quad (14.56)$$

что представляет собой первую часть формулировки принципа максимума.

Кроме того, из выражения (14.52) для всех  $t \in [t_1, t_2]$  имеем

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \Psi(t, t_2) \eta = -A^T(t) \Psi(t, t_2) \eta = -A^T(t) \psi(t). \quad (14.57)$$

Уравнение (14.57) представляет собой вторую часть формулировки принципа максимума. Оно показывает также, что  $\Psi(t)$  — сопряженный вектор. Кроме того, так как  $\Psi(t_2, t_2) = I$ , то из выражения (14.52) следует, что  $\eta = \Psi(t_2)$ . Таким образом,  $\eta_i = 0$  при  $i = m + 1, \dots, n$  и  $\eta_0 \leq 0$ . Этим завершается доказательство условий 3) и 4) принципа максимума.

## 2. Доказательство принципа максимума в нелинейном случае

В общем случае доказательство оказывается значительно сложнее. Результаты, полученные для линейных систем, можно использовать применительно к общему случаю, если воспользоваться свойствами траекторий, граничащих с оптимальной траекторией.

В формулировке задачи, изложенной в п. 2 § 14.3, примем, что  $x(u^*, t)$  представляет собой оптимальную траекторию в расширенном пространстве [сокращенно  $x^*(t)$ ], а  $x(u, t)$  [сокращенно  $x(t)$ ] обозначает траекторию, получаемую в результате применения любой другой допустимой функции управления  $u(t)$ . Разность  $\delta x(u, t) \triangleq x(t) - x^*(t)$ , называемую вариацией траектории и сокращенно обозначаемую как  $\delta x(t)$ , найдем из выражения

$$\delta \dot{x} = f(x, u, t) - f(x^*, u^*, t).$$

Предположим, как и в гл. 5, что мы определили матрицу Якоби

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*, t) \triangleq \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\substack{x(t) = x^*(t) \\ u(t) = u^*(t)}} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t) \right]^*,$$

и пусть

$$g(u, t) \triangleq f(x^*, u, t) - f(x^*, u^*, t).$$

Тогда, подставляя  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t) \right]^*$  и  $g(u, t)$ , получим

$$\delta \dot{x}(t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t) \right]^* \delta x(t) + g(u, t) + h(x, u, t), \quad (14.58)$$

где

$$h(x, u, t) = f(x, u, t) - f(x^*, u^*, t) - g(u, t) - \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(t) \right]^* \delta x(t).$$

Заметим, что  $h(x, u, t)$  будет «мала», если будут «малы» векторы  $u(t) - u^*(t)$  и  $x(t) - x^*(t)$ .

Так как  $\delta x(t_1) = 0$ , то  $\delta x$  можно точно найти, используя переходную матрицу  $\Phi(t, t_1)$ , соответствующую системе  $\delta \dot{x} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t) \right]^* \delta x$ ; поэтому

$$\delta x(u, t) = \Phi(t, t_1) \int_{t_1}^t \Phi(t_1, \tau) (g(u, \tau) + h(x, u, \tau)) d\tau.$$

Предположим, что мы определяем приближенную вариацию  $\delta x_1(t)$  из системы

$$\delta \dot{x}_1(u, t) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(t) \right]^* \delta x_1(t) + g(u, t). \quad (14.59)$$

По существу,  $\delta x_1$  соответствует отклонению от  $x(t)$ , когда пренебрегают величиной  $h(x, u, t)$  в соотношении (14.58). В соответствии с определением  $\delta x_1(t_1) = 0$ , отсюда

$$\delta x_1(u, t) = \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau) g(u, \tau) d\tau,$$

Обозначим через  $C_1(t_2)$  достижимое множество для системы  $\dot{x} = f(x, u, t)$  или

$$C_1(t_2) = \{x^*(t_2) + \delta x(u, t_2) : u \in \Omega\} = \{x(u, t_2) : u \in \Omega\}. \quad (14.60)$$

Вследствие того, что система теперь нелинейная, множество  $C_1(t_2)$  не обязательно является выпуклым<sup>1)</sup>.

Рассмотрим достижимое множество  $C(t_2)$  для траектории с приближенной вариацией относительно точки  $x^*(t_2)$  или

$$C(t_2) = \{x^*(t_2) + \delta x_2(u, t_2) : u \in \Omega\}.$$

Здесь  $C(t_2)$  является выпуклым в том смысле, что множество  $\{\delta x_1(u, t_2) : u \in \Omega\}$  выпукло.

Помимо множеств  $C_1(t_2)$  и  $C(t_2)$ , нам необходимо также множество  $\mathcal{S}$ , определенное в п. 1 данного параграфа.

Выведены свойства множества  $C_1$ , исходя из свойств множества  $C$ . Это сделал Галкин, доказав следующую фундаментальную лемму:

**Лемма 14.3.** Если не существует гиперплоскости, разделяющей выпуклые множества  $\mathcal{S}$  и  $C(t_2)$ , то множества  $\mathcal{S}$  и  $C_1(t_2)$  имеют по меньшей мере одну общую точку.

В соответствии с определением множества  $\mathcal{S}$  и  $C_1(t_2)$  не могут иметь общую точку, так как в противном случае нарушается предполагаемая оптимальность управления  $u^*(t)$ . Следовательно, в соответствии с леммой 14.3 множества  $\mathcal{S}$  и  $C$  будут разделены гиперплоскостью.

Установив это, нам уже не требуется множество  $C_1$  для доказательства принципа максимума, и мы можем ограничиться лишь множеством  $C$ . Так как  $C$  представляет собой достижимое множество для расширенной линейной системы вида (14.43), а  $x^*(t_2)$  принадлежит  $C_1$  и  $C$ , то для вывода четырех условий принципа максимума можно непосредственно воспользоваться теми же рассуждениями, которые были использованы в предыдущем параграфе. Этот вывод мы предоставляем читателю.

С учетом сказанного выше можно дать геометрическую интерпретацию основной идеи принципа максимума, сформулированного в пункте 1) теоремы 14.3.

Исходя из соотношения (14.23) и учитывая, что, во-первых,  $\psi'$  рассматривается как внешняя нормаль к достижимому множеству  $C(t)$  и, во-вторых, функция  $f'$  в соответствии с уравнениями расширенной системы  $\dot{x}' = f'$ , по существу, определяют локальную скорость движения системы по траектории, отметим, что пункт 1) формулировки принципа максимума указывает, что оптимальная траектория должна быть такой, чтобы в каждой точке максимизировать локальную скорость  $\dot{x}$  в направлении внешней нормали к достижимому множеству  $C(t)$ .

<sup>1)</sup> Достаточное условие, при котором  $C(t)$  замкнуто и выпукло для класса нелинейных управляемых объектов, см. в работе [170].

## 1. Задача оптимального управления по расходу топлива

Посмотрим теперь, как с помощью принципа максимума можно решить задачу управления, оптимального по расходу топлива. Рассмотрим линейный управляемый объект

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (14.61)$$

где  $x(t_1) = x_1$  и  $x(t_2) = x_2$ ;  $|u_j| \leq 1$  при  $j = 1, \dots, r$ , а критерий оптимальности по расходу топлива выражается формулой

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{j=1}^r |u_j(t)| \right) dt; \quad (14.62)$$

при этом, конечно, предполагается, что решение существует и, следовательно, интервал времени  $t_2 - t_1$  больше (или равен) времени  $t^*$ , необходимого для оптимального по быстрдействию управления.

В соответствии с принципом максимума запишем

$$H = - \left( \sum_{j=1}^r |u_j(t)| \right) + \psi^T A x + \psi^T B u, \quad (14.63)$$

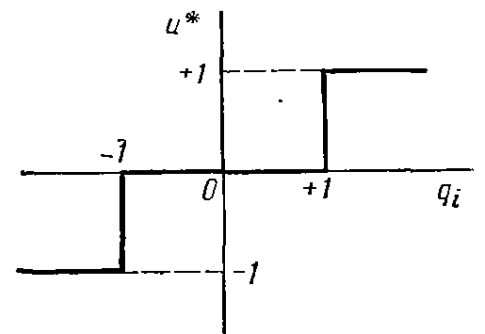


Рис. 14.7. Функция  $u_i^* = \text{dez } q_i$

где сопряженный вектор  $\psi$  удовлетворяет условию  $\dot{\psi} = -A^T(t)\psi$ . При максимизации  $H$  по  $u$  заметим, что каждая составляющая  $u$  в  $H$  имеет вид

$$-|u_i(t)| + \left( \sum_{j=1}^n \psi_j b_{ji} \right) u_i; \quad i = 1, \dots, r. \quad (14.64)$$

Приняв  $q_i = \sum_{j=1}^n \psi_j b_{ji}$ , мы видим, что величина максимума в выражении (14.64) достигается для каждого значения  $i$  при (см. упражнение 13.2)

$$u_i^* = \begin{cases} +1, & q_i > 1; \\ 0, & -1 < q_i < 1; \\ -1, & q_i < -1. \end{cases} \quad (i = 1, \dots, r) \quad (14.65)$$

Функция переключения (14.65), графически изображенная на рис. 14.7, напоминает характеристику реле с зоной нечувствительности [см. нелинейность (17) в табл. 6.2]. Следуя работе М. Атанса и П. Л. Фалба [8], назовем ее функцией  $\text{dez } q_i$ , если  $u_i^*$  удовлетворяет выражению (14.65)], итак,

$$u_i^* = \text{dez } q_i, \quad i = 1, \dots, r. \quad (14.66)$$

Определим далее эту функцию в векторной форме

$$u^* = \text{dez } q, \quad (14.67)$$

чтобы компактно представить выражение (14.66).

Заметим, что функция  $\text{dez } q_i$  не определена, если  $q_i \equiv +1$  или  $q_i \equiv -1$ . Это приводит к особому случаю, который будет рассмотрен в гл. 16. Особые случаи уже встречались в примерах 12.4 и 12.5.

Пример 14.4. Вновь рассмотрим систему примера 12.4, где  $\dot{x} = u$ ;  $x(0) = 1$ ;  $x(5) = 2$ ;  $|u(t)| \leq 1$  и  $J = \int_0^5 |u(t)| dt$ . Здесь  $H = -|u(t)| + \psi u$ , где  $\dot{\psi} = 0$ . Максимизация  $H$  дает

$$u^* = \text{dez } \psi.$$

Решением для  $\psi$  будет  $\psi = \text{const}$ . Таким образом,  $\psi = +1$  или  $-1$ , несомненно, является справедливым для некоторых начальных условий, откуда видно, что возможно не единственное (т. е. особое) оптимальное управление. Те же соображения справедливы и в отношении системы примера 12.5.

Пример 14.5. Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u; \quad \dot{x}_2 = -2x_2 - u,$$

который, по существу, описывается операторным уравнением вида

$$u(t) = (p^2 + 3p + 2)y(t).$$

Пусть  $x(0) = x_1$ ,  $x(T) = 0$  и  $|u(t)| \leq 1$ . При

$$J = \int_0^T |u(t)| dt$$

имеем

$$H = -|u(t)| + \psi_1(t)[-x_1(t) + u(t)] + \psi_2(t)[-2x_2(t) - u(t)],$$

где  $\psi(t)$  удовлетворяет уравнениям

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_1; \quad \dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 2\psi_2.$$

Следовательно, оптимальное управление будет

$$u^*(t) = \text{dez} [\psi_1(t) - \psi_2(t)].$$

Решения для  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  имеют вид

$$\psi_1(t) = c_1 e^t; \quad \psi_2(t) = c_2 e^{2t},$$

и равенство  $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 1$  не может выполняться в течение конечного интервала времени. Таким образом, не будет особого управления. Подробнее вопрос об особых управлениях будет рассмотрен в гл. 16.

Так как установлено, что особое управление не существует, то решение полностью определяется выражением (14.65) или (14.66). При этом двухточечную краевую задачу можно решить, по крайней мере, для случая линейных управляемых объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными параметрами.

Заметим, что если даже управляемый объект нелинейный, а  $u$  входит в уравнение линейным образом, принцип максимума по-прежнему будет давать оптимальное управление, определяемое выражением (14.67). Рассмотрим в качестве примера систему вида

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)u,$$

где  $G$  — соответствующая матрица. Тогда имеем

$$H = -\sum_{j=1}^r |u_j(t)| + \psi^T (f + Gu).$$

Зависящая от  $u$  часть  $H$  имеет вид  $-\sum_{j=1}^r |u_j(t)| + \psi^T Gu$ . Заметим, что максимизация  $H$  относительно каждой составляющей  $u$  даст (см. упражнение 14.12)

$$u^* = \text{dez} [G^T(x, t)\psi].$$

Поскольку здесь  $G$  является функцией  $x$ , то задача усложняется<sup>1)</sup>.

<sup>1</sup> См., например, работу [7].

## 2. Задачи с подвижными концами

Иногда конечная точка в задаче оптимального управления не задается, вместо этого ставится лишь условие, что траектория должна заканчиваться на некоторой гладкой <sup>1)</sup> гиперповерхности  $\rho(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ , ( $m \leq n$ ). Этот класс задач уже рассматривался в предыдущей главе. Напомним, что в случае стационарной гиперповерхности  $\rho(x_1, x_2, \dots, x_m)$  условие трансверсальности состоит в том, что проекция вектора  $\psi(t)$  в  $m$ -мерном пространстве  $x_1, \dots, x_m$  в конечный момент времени  $t_2$  (т. е. в тот момент, когда траектория  $x^*(t)$  достигает гиперповерхности  $\rho(x) = 0$ ) должна быть нормальна к гиперповерхности в точке, где оптимальная траектория  $x^*(t)$  касается гиперповерхности.

Этот результат нетрудно получить, используя геометрическую интерпретацию предыдущего параграфа: в данном случае множество  $\mathcal{S}$  объединяет точки  $\mathcal{S} = \{x : \rho(x_1, \dots, x_m) = 0; x_0 < x_0(u^*, t_2)\}$ . Если функция  $\rho(x)$  такова, что измененное множество  $\mathcal{S}$  является выпуклым, то отсюда сразу же следует требуемый результат. Вектор  $\eta$ , нормальный к опорной гиперплоскости, разделяющей выпуклые множества  $\mathcal{C}(t_2)$  и  $\mathcal{S}$  в точке  $x^*(t_2)$ , будет обладать тем свойством, что его проекция в  $m$ -мерном пространстве будет нормальна к гиперповерхности  $\rho(x_1, \dots, x_m) = 0$ . В частности, если принять, что вектор  $\eta$  расположен в направлении внешней нормали к  $\mathcal{C}(t_2)$ , то становится очевидным, что его проекция в пространстве  $(x_1, \dots, x_m)$  расположена в направлении внутренней нормали к гиперповерхности  $\rho(x_1, \dots, x_m) = 0$ .

Заметим, что этот результат будет справедлив даже в том случае, когда гладкая гиперповерхность  $\rho(x, \dots, x_m) = 0$  такова, что множество  $\mathcal{S}$  не является выпуклым. Таким образом, условие трансверсальности для оптимальных задач, в которых траектории должны заканчиваться на гладкой гиперповерхности  $\rho(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ , сводится к тому, что вектор, образуемый первыми  $m$  составляющими  $\psi(t_2)$ , располагается в направлении внутренней нормали к гиперповерхности  $\rho(x_1, \dots, x_m) = 0$  в точке  $x^*(t_2)$ .

Ввиду того, что градиент  $\nabla \rho$ , вычисляемый в точке  $(x_1, \dots, x_m)$ , нормален к гиперповерхности  $\rho = 0$  в этой точке, приведенный выше результат можно сформулировать по-другому, указав, что проекция  $\psi(t_2)$  в пространстве  $(x_1, \dots, x_m)$  должна располагаться вдоль вектора градиента  $\nabla \rho$  в точке  $x^*(t_2)$ .

**Пример 14.6.** Рассмотрим оптимальный по быстродействию перевод объекта с двойным интегрированием из произвольного начального состояния  $x_1$  на конечное множество, определяемое уравнением  $|x_1| + |x_2| \leq 1$ .

Из рис. 14.8 можно видеть, что на сторонах  $a$  и  $b$  конечного множества проведенный по внутренней нормали вектор  $\psi$  должен быть таким, чтобы составляющая  $\psi_2$  была отрицательной. Так как в соответствии с принципом максимума оптимальное управление имеет вид  $u^* = \text{sign } \psi_2$ , то к сторонам  $a$  и  $b$  все оптимальные траектории должны подходить с управлением, равным  $-1$ . Подобным же образом к сторонам  $c$  и  $d$  все оптимальные траектории должны подходить с управлением, равным  $+1$ , а переключение оптимального управления  $u^*$  — происходить в углах  $|x_1| = 1$ . Из принципа максимума можно сделать вывод, что допускается лишь одно переключение оптимальной функции управления. Таким образом, мы приходим к заключению: линии переключения  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  можно построить так, как показано на рис. 14.8, с тем, чтобы полностью выявить оптимальную функцию управления.

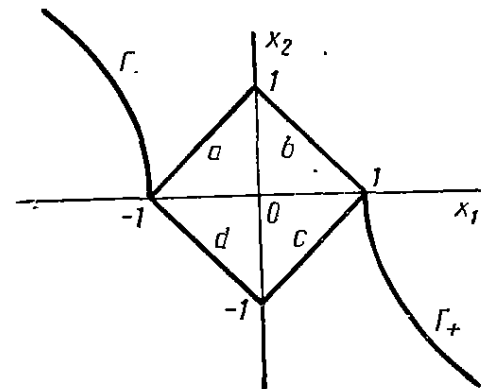


Рис. 14.8. Линии переключения для системы, рассматриваемой в примере 14.6

<sup>1)</sup> Иногда это может быть кусочно-гладкая поверхность; см. пример 14.6.



### 3. Задачи оптимального управления нестационарными системами

Принцип максимума для нестационарной системы был сформулирован в § 14.3. Следует отметить, что нестационарную задачу оптимизации всегда можно преобразовать в эквивалентную стационарную задачу<sup>1)</sup>. Исходя из этого можно вывести необходимые условия оптимальности и условия трансверсальности для задач с нестационарными объектами.

Введем еще одно дополнительное «состояние»  $x_{n+1} = t$ ; это значит, что в формулировке § 14.3 имеем дополнительное уравнение

$$\dot{x}_{n+1} = 1; \quad x_{n+1}(t_1) = t_1. \quad (14.68)$$

Тогда в  $(n+2)$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$  уравнения системы и критерий качества принимают вид

$$\dot{x} = f(x, u), \quad \mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u) dt, \quad (14.69)$$

где  $f_{n+1} = 1$ , и мы имеем эквивалентную стационарную систему.

Если для этой системы порядка  $(n+2)$  обычным образом определить  $(n+2)$ -мерный вектор  $\psi(t)$  и гамильтониан  $H_1$ , то получим

$$\dot{\psi}_i(t) = - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial f_j(x, u)}{\partial x_i} \psi_j(t), \quad i = 0, \dots, n+1;$$

$$H_1 = \sum_{i=0}^{n+1} \psi_i(t) f_i(x, u); \quad (14.70)$$

здесь  $H_1$  явно не зависит от времени, так что в соответствии с соотношением (14.28) имеем  $H_1^* = \text{const}$ . Следует, однако, отметить, что гамильтониан  $H = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i$  связан с гамильтонианом  $H_1$  формулой

$$H_1 = H + \psi_{n+1}(t). \quad (14.71)$$

Предположим, что конечный момент времени  $t_2$  не задан, тогда условие, которому должен отвечать гамильтониан  $H$  в каждой точке оптимальной траектории, заключается в следующем:

$$H(x^*, u^*, t) \stackrel{\Delta}{=} H^*(t) = -\psi_{n+1}(t). \quad (14.72)$$

Условие трансверсальности имеет вид

$$\psi_{n+1}(t_2) = 0. \quad (14.73)$$

В соответствии с соотношением (14.27) запишем

$$\left. \frac{\partial H_1}{\partial x_{n+1}} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}} = -\dot{\psi}_{n+1}(t) = \left. \frac{\partial H^*}{\partial t} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}}. \quad (14.74)$$

Тогда с учетом соотношений (14.74) и (14.73) уравнение (14.72) принимает вид

$$H^*(t) = - \int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{\partial H^*(t)}{\partial t} \right|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}} dt. \quad (14.75)$$

Таким образом, гамильтониан в задаче оптимального управления нестационарными объектами должен удовлетворять условию (14.75).

<sup>1)</sup> Однако при этом линейная нестационарная система будет преобразована в нелинейную стационарную систему.

#### 4. Задачи Майера

В гл. 13 была рассмотрена задача Майера, а именно: задача оптимизации, в которой критерий зависит лишь от конечной точки. Как и следовало ожидать, задачу Майера можно решить с помощью принципа максимума, хотя, вообще говоря, этот класс задач является более трудным по сравнению с задачами, которые рассматривались до сих пор.

В задаче Майера критерий качества определяется следующим образом:  $\mathcal{J} = P(\mathbf{x}(t_2), t_2)$ . Заметим, сначала, что если функция  $P$  имеет вторые частные производные, то сформулированную задачу легко преобразовать в задачу Лагранжа, а именно: в задачу с критерием вида  $\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$ .

Напишем сначала

$$P(\mathbf{x}(t_2), t_2) = P_1 + \int_{t_1}^{t_2} \dot{P}(\mathbf{x}, t) dt = P_1 + \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} \dot{f}_i + \frac{\partial P}{\partial t} \right) dt,$$

где  $P_1 = P(\mathbf{x}(t_1), t_1)$ . Так как  $P_1$  представляет собой постоянную величину, то она не входит в задачу минимизации; таким образом, необходимо рассмотреть лишь минимизацию функционала  $\mathcal{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} \dot{f}_i + \frac{\partial P}{\partial t} \right) dt$ , что эквивалентно задаче Лагранжа.

Если непосредственно использовать функционал  $\mathcal{J}'$  в задаче минимизации с ограничениями на управление  $\mathbf{u}$ , то получим (предполагая  $\psi_0 \neq 0$  и принимая  $\psi_0 = -1$ )

$$H = -\nabla P^T \mathbf{f} - \frac{\partial P}{\partial t} + \Psi^T \mathbf{f}. \quad (14.76)$$

Вдоль оптимальной траектории имеем

$$\dot{\Psi}(t) = - \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}} = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\nabla P^T \mathbf{f}) + \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{x} \partial t} - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f} - (\Psi)^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}}.$$

Так как  $(\partial \Psi / \partial \mathbf{x}) \equiv 0$ , то

$$\dot{\Psi}(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\nabla P^T \mathbf{f}) + \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{x} \partial t} - \Psi^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}}. \quad (14.77a)$$

Ввиду того, что конечное состояние в задаче Майера не задано, имеем

$$\Psi(t_2) = 0. \quad (14.77b)$$

Для нахождения оптимального управления максимизируем затем гамильтониан (14.76) с учетом ограничения управления  $\mathbf{u}$ .

Приведенную методику решения можно упростить, если воспользоваться результатами гл. 13. Можно показать, что сформулированная выше задача минимизации идентична задаче с эквивалентным гамильтонианом вида (см. задачу 14.8)

$$H_a = \Psi_a^T \mathbf{f}, \quad (14.78a)$$

где

$$\Psi_a = \Psi - \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}}. \quad (14.78b)$$

Уравнение (14.776) означает, что  $\psi_a(t_2) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{t=t_2}$ . Полученный вывод сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 14.5.** Рассмотрим задачу нахождения оптимального управления  $u^*(t)$  на интервале  $[t_1, t_2]$ , которое минимизирует критерий  $P(x(t_2), t_2)$  для системы  $\dot{x} = f(x, u, t)$ . Предположим, что начальное состояние  $x(t_1) = x_1$  задано и функция управления  $u(t)$  подчиняется ограничению типа неравенства  $|u(t)| \leq U$ , где  $U$  — постоянный вектор. Принцип максимума в этом случае формулируется относительно гамильтониана  $H_a = \psi_a^T f$ , где  $\psi_a$  удовлетворяет векторному уравнению  $\dot{\psi}_a = -\partial H_a / \partial x$  с краевым условием <sup>1)</sup>  $\psi_a(t_2) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{t=t_2}$ .

Даже после формулировки теоремы 14.5 задача оптимизации по-прежнему связана с решением краевой задачи с закрепленными концами, как это можно видеть из следующего.

**Пример 14.7.** Найдем оптимальное управление  $u^*(t)$  с учетом ограничения  $|u(t)| < 1$ , которое переводит объект управления с передаточной функцией  $1/s^2$  из начала координат в точку  $x(T)$  в течение интервала времени  $[0, T]$  таким образом, чтобы расстояние от конечной точки  $x(T)$  до области цели  $x_2$  было минимальным.

В формулировке Майера критерий качества определяется выражением

$$P(x(T)) = (x_1(T) - x_{21})^2 + (x_2(T) - x_{22})^2.$$

Заметим, что задача имеет смысл только в том случае, если точка  $x_2$  не может быть достигнута за время меньше или равное  $T$  сек. Предположим, что это так. Используя теорему 14.5, имеем (опустив индекс «a»)

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$

$$\dot{\psi}_1 = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1$$

и

$$u^*(t) = \text{sign} [\psi_2(t)].$$

Краевые условия будут:  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ ;

$$\psi_1(T) = -\frac{\partial P}{\partial x_1} \Big|_{t=T} = -2[x_1(T) - x_{21}];$$

$$\psi_2(T) = -\frac{\partial P}{\partial x_2} \Big|_{t=T} = -2[x_2(T) - x_{22}].$$

Решение сопряженной системы, удовлетворяющее приведенным выше краевым условиям, имеет вид

$$\psi_1(t) = 2[x_{21} - x_1(T)];$$

$$\psi_2(t) = 2[x_{22} - x_2(T)] + 2[x_{21} - x_1(T)](T - t).$$

Сопряженный вектор зависит от неизвестных конечных значений вектора состояния. Ясно видно существование релейного решения. Поскольку конечный момент времени  $T$  фиксирован, это дает нам представление о том, как следует решать задачу.

Предположим, например, что точка  $x_2$  лежит в первом квадранте и располагается вправо от траектории, которая исходит из начала координат и обусловлена управлением  $u = +1$ . Управление  $u^*(t)$  должно быть первоначально равно  $+1$ ; кроме того, возможно самое большее одно переключение. Предположим, что  $u^*(t) = +1$  для  $0 < t < t_1$  и  $u^*(t) = -1$  для  $t_1 \leq t \leq T$ . Тогда можно найти конечную точку оптимальной траектории  $x(T)$  как функции от  $t_1$  в интервале  $0 < t_1 \leq T$  с помощью уравнения системы и начального условия  $x(0) = 0$ . Затем, подставив полученное выражение для  $x^*(T)$  в критерий  $P(x(T))$ , следует найти минимум этого выражения как функции от  $t_1$ .

Подробные вычисления предлагаем читателю проделать в качестве упражнений (см. задачу 14.11).

<sup>1</sup> Когда мы пишем  $dP/dx$ , то это означает, что функция  $P(x(t_2), t_2)$  получена исходя из функции вида  $P(x(t), t)$ .

Если область достижимых состояний  $C(T)$  можно найти графически (предполагается, что рассматривается система второго порядка), то решение задачи управления конечным значением можно найти графически. Для объекта с двойным интегрирующим звеном зона  $C(T)$  имеет вид, представленный на рис. 14.9. Радиус наибольшей окружности с центром в точке  $x_2$ , которая касается множества  $C(T)$ , определяет минимальное расстояние в момент времени  $t$ . Точка, в которой окружность и  $C(T)$  касаются друг друга, представляет собой конечную точку оптимальной траектории. На рис. 14.9а и б приведены случаи, когда  $u^*(t)$  соответственно не имеет ни одного переключения или имеет только одно переключение (почему?).

Заметим, что для линейной (даже нестационарной) системы форма и размеры  $C(t)$  не зависят от начальной точки  $x_1$  (покажите это). Это позволяет найти решение для широкого класса задач управления конечным состоянием.

#### 14.7. РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Кратко остановимся на двух областях, в которых принцип максимума используется для решения задач необычного типа.

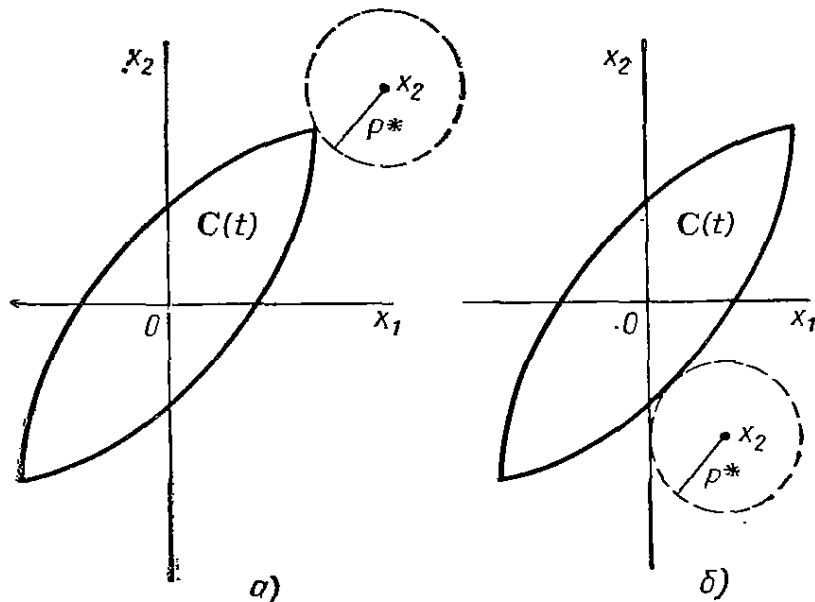


Рис. 14.9: а) Геометрия задачи из примера 14.7, в которой не требуется переключение управления  $u^*(t)$ ; б) Геометрия задачи из примера 14.7, в которой требуется одно переключение управления  $u^*(t)$

### 1. Задачи с ограничениями типа неравенства на переменные состояния

Иногда пространство состояний, в котором необходимо найти оптимальную траекторию, ограничивается замкнутым подпространством евклидова  $n$ -мерного пространства. Это ограничение определяется неравенством  $g(x) \leq 0$ .

Если оптимальная траектория находится внутри ограниченного подпространства, то принцип максимума в том виде, в каком он приведен выше, удовлетворяется. Однако, если часть оптимальной траектории проходит по границе  $g(x) = 0$  подпространства, то канонические уравнения необходимо модифицировать путем введения в них дополнительного члена. В точке, в которой оптимальная траектория соприкасается с границей  $g(x) = 0$ , выполняется условие скачка для вектора  $\psi(t)$ . Это «условие скачка» впервые доказал Р. В. Гамкрелидзе (см. работу [161]). На практике часто приходится сталкиваться с задачами, где наложены ограничения типа неравенств на фазовые координаты. Так, например, при осуществлении посадки реактивный самолет не должен снижаться ниже уровня поверхности Земли, а, как правило, антенны радиолокационных станций сопровождения имеют ограничения по скорости и ускорению, которые не позволяют им осуществлять сопровождение быстро движущихся целей. В тех случаях, когда приходится иметь дело с подобными задачами, необходимо следить за тем, чтобы не нарушить соответствующие ограничения.

Один из возможных способов обойти упомянутые выше трудности снова сводится к использованию функций «штрафов». Основной принцип использования функций «штрафа» применительно к ограничениям типа неравенства на управляющие воздействия был рассмотрен в гл. 13. Этот метод можно легко распространить на случай ограничения переменных состояния. В критерий, подлежащий минимизации, снова введем дополнительные члены, которые сильно возрастают при нарушении ограничений типа неравенств на переменные состояния. При соответствующем выборе функций «штрафа» следует ожидать, что решение будет близким к точному. Ряд результатов, указывающих на целесообразность использования метода функции штрафа, можно найти в работах [172] и [152].

## 2. Дифференциальные игры \*

Интересным классом задач, применительно к которому можно иногда использовать принцип максимума, является класс, включающий в себя два ряда переменных управления (а иногда и две дифференциальные системы). Целью одного из рядов переменных управления (или системы) является минимизация какого-то определенного показателя, тогда как задача второго ряда сводится к максимизации этого показателя. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу преследования эсминцем подводной лодки. В момент сбрасывания глубинных бомб эсминец должен находиться как можно ближе к подводной лодке, тогда как последняя — как можно дальше от эсминца.

Предположим, что эта составная система описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, u, v, t),$$

где  $u$  и  $v$  — переменные управления, располагаемые соответственно двумя сторонами. Далее, примем в данной задаче обычные виды краевых условий и ограничений. Рассмотрим показатель качества в форме Лагранжа

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, v, t) dt.$$

Предположим, что сторона  $A$ , контролирующая  $u(t)$ , желает минимизировать показатель  $\mathcal{J}$ , тогда как сторона  $B$ , контролирующая  $v(t)$ , стремится максимизировать тот же показатель. Если и  $A$  и  $B$  прекрасно осведомлены о местонахождении друг друга, то с точки зрения  $A$  обоснованная стратегия сводится к выбору такой  $u^*(t)$ , чтобы минимизировать  $\mathcal{J}$ , несмотря на все усилия, предпринимаемые стороной  $B$ . Это значит, что  $A$  стремится найти такое управление  $u^*(t)$ , что величина  $\mathcal{J}^*$  удовлетворяет условию

$$\mathcal{J}^* = \min_u \max_v \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, v, t) dt.$$

Последнее означает управление по минимаксному критерию.

\* Дифференциальным играм посвящена работа [84]. Ввиду индивидуальной точки зрения автора этой работы и принятой им необычной системы обозначений читателю рекомендуем обратиться к исчерпывающему обзору, приведенному в книге [75].

При некоторых условиях указанную выше функцию управления можно найти путем взятия обычной функции Гамильтона и нахождения таких  $u^*$ ,  $v^*$ , чтобы

$$H^* = \min_u \max_v H.$$

Однако условия, необходимые для того, чтобы приведенное соотношение было справедливым, не являются тривиальными и здесь не будут излагаться<sup>1)</sup>.

Можно отметить, что минимаксная и другие точки зрения, связанные с упомянутым здесь классом задач, исходят из теории игр.

#### 14.8. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Принцип максимума Понтрягина позволяет точно и ясно решать большой класс задач оптимального управления.

Благодаря геометрическому понятию достижимого множества, задачи оптимизации дифференциальных систем можно достаточно просто решить с помощью принципа максимума. Более того, при этом необходимо использовать только сильные вариации. Таким образом, принцип максимума имеет целый ряд преимуществ перед классическим методом вариационного исчисления. Краткость изложения принципа максимума и универсальность его формулировки в значительной мере облегчают постановку большого класса задач оптимального управления.

Теорема 14.3 формулирует принцип максимума как необходимое условие оптимальности. Теорема 14.4 указывает ряд условий, при которых принцип максимума является достаточным условием оптимальности. Из примера 14.2 видно преимущество принципа максимума по сравнению с методами классического вариационного исчисления. В § 14.6 и § 14.7 указано достаточно много классов задач, применительно к которым можно использовать принцип максимума. Доказательство принципа приведено в § 14.5.

Классическое вариационное исчисление имеет преимущество перед принципом максимума в теории второй вариации, в отношении которой принцип максимума не обеспечивает соответствующего эквивалента. Вторая вариация будет рассмотрена в гл. 16 и 17.

#### 14.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

14.1. Найдите линии переключения для задачи оптимального по быстродействию управления системой примера 14.1, если:

а)  $-V \leq u < U$ ,  $U > V > 0$ .

б)  $|u(t)| \leq U$ , но объект описывается уравнением  $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = u$ ;  $b, c > 0$  и  $b^2 - 4c < 0$  (колебательный объект управления);

в) в условиях пункта б)  $b < 0$ .

14.2. Объясните, почему вектор  $\eta$  в § 14.1 и § 14.2 представляет собой начальный вектор  $-\psi(t_1)$ , тогда как в § 14.5 он оказывается конечным сопряженным вектором  $\psi(t_2)$ .

14.3. Для управляемого объекта с передаточной функцией в виде двойного интегрирующего звена при  $|u(t)| \leq 1$  найдите кривую переключения для оптимального по быстродействию движения объекта из начальной точки к единичной окружности с центром в начале координат, а также к единичному квадрату  $|x_1| \leq 1$ ;  $|x_2| \leq 1$ .

14.4. Повторите упражнение 14.3 для объекта из примера 14.1.

14.5. Используя принцип максимума, найдите кривые переключения для оптимального по быстродействию перевода системы

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + u_2$$

<sup>1)</sup> Библиографию по вопросам дифференциальных игр см. в работе [6].

из произвольной точки  $x(0)$  в начало координат, если  $|u_1| \leq 1$ ;  $|u_2| \leq 2$ . Укажите полярность управлений  $u_1$  и  $u_2$  для различных областей пространства состояний, отделенных кривыми переключений.

14.6. Решите задачу из упражнений 13.10 с помощью принципа максимума. Найдите сопряженные уравнения и оптимальное управление  $u^*(t)$ . Рассмотрите возможность неединственного решения или решения, отличного от релейного.

14.7. Найдите условие трансверсальности для задачи оптимального управления, в которой система  $\dot{x} = f(x, u)$ , двигаясь из точки  $x(t_1) = x_1$ , должна достигнуть конечного состояния  $x_2(t)$  за минимальный отрезок времени с учетом ограничения  $|u| \leq U$ .

14.8. Докажите справедливость уравнений (14.78a) и (14.78б).

14.9. Постройте достижимые множества  $S(t)$ , начиная с произвольного состояния  $x_1$ , при  $|u(t)| \leq 1$ , если объект описывается уравнением

а)  $\dot{x} = u$ ;

б)  $\ddot{x} + x = u$ .

Сделайте это для случая  $t = 1$ ,  $t = \pi$ ,  $t = 5$ .

14.10. Используя результаты упражнения 14.9, графически решите задачу минимизации критерия  $P = |x_1(T)| + |x_2(T)|$  для начального состояния  $x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$  и конечного времени  $T = 1$ .

Сделайте это для каждого объекта из упражнения 14.9.

14.11. Завершите пример 14.7 для случаев:

а)  $x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $T = 1$ ;

б)  $x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T = 2$ .

14.12. Угловые скорости движения спутника с одной осью симметрии определяются из уравнений

$$\dot{\omega}_1 + A \omega_2 \omega_3 = u_1;$$

$$\dot{\omega}_2 - A \omega_1 \omega_3 = u_2;$$

$$\dot{\omega}_3 = u_3,$$

где  $|u_1(t)|$ ;  $|u_2(t)| \leq U$ ;  $|u_3(t)| \leq V$ .

Определите гамильтониан системы, канонические уравнения, оптимальную функцию управления  $u^*(t)$  и условия трансверсальности для задачи оптимального по быстродействию торможения спутника от скорости  $\omega(0)$  до 0.

Повторите то же самое для задачи оптимальной по расходу топлива, если торможение от скорости  $\omega(0)$  до 0 происходит за отрезок времени  $T > t^*$ .

14.13. Сформулируйте задачу Цермело (упражнение 13.14), используя принцип максимума. Найдите решение, когда величины  $f_1$  и  $f_2$  являются постоянными. Повторите для случая, когда  $f_1(x_1, x_2, t) = -kx_2$ ;  $k > 0$  и  $f_2(x_1, x_2, t) = 0$ ; постройте оптимальную траекторию при  $V = 1$ ,  $k = 1$  и  $x_0^T = [3, -1]$  и  $x_f^T = [0, 0]$ .

14.14. Докажите уравнение (14.53).

14.15. Найдите управление в системе с обратной связью в форме  $u(x)$ , минимизирующее

функционал  $J = \int_0^T u^2(t) dt$ . Система имеет вид  $\dot{x} = ax + bu$ , где  $a$ ,  $b$  и  $T$  — фиксированные по-

ложительные постоянные. Найдите оптимальную траекторию и величину  $J^*$ .

14.16. До сих пор рассматривались лишь задачи оптимального по быстродействию управления объектами без учета динамических свойств числителя передаточной функции объекта (т. е. рассматривались объекты без нулей). Для случая управления стационарным объектом с учетом динамики числителя, описываемого операторным уравнением

$$(p + a)(p + b)y(t) = (p + c)(p + d)u(t); |u(t)| \leq 1,$$

покажите, что:

а) для оптимального по быстродействию перевода системы из произвольной точки  $y(0)$ ,  $\dot{y}(0)$  в точку  $y = 0$ ,  $\dot{y} = 0$  справедливо релейное управление в интервале  $0 \leq t \leq t^*$  при  $a \neq b \neq c \neq d$ ;

б) для удержания  $y$  и  $\dot{y}$  в начале координат при  $t > t^*$  требуется ненулевое управление  $u(t)$ ;

в) не всегда можно найти  $u(t)$  для удержания  $\dot{y}$  и  $y$  в начале координат при  $t > t^*$ , а также решите задачу для частного случая:  $a = b = 0$ ;  $c = 1$ ;  $d = 3$ ; указание: используйте преобразование (см. § 2.5), чтобы получить систему уравнений, в которых не содержатся про-

изводные от  $u(t)$ . Покажите, что при использовании этого преобразования конечное состояние  $y = 0; \dot{y} = 0$  переходит в некоторое множество конечных состояний относительно новых переменных.

#### 14.10. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Методы и результаты, приведенные в § 14.1 и § 14.2, заимствованы из работ [15] и [117] (см. также [185]).

Результаты работы над принципом максимума, которую провели Понтрягин и др., подытожены в отлично написанной книге [162]. Однако доказательство принципа максимума в работе [162] значительно отличается от доказательства, приведенного в работе [69], и использованного в данной книге.

Меньшая математическая строгость, по сравнению с работами [162] и [69], присуща работе [171], в которой также излагается принцип максимума. Кроме того, многочисленные примерные и дополнительные приемы можно найти в работе [8].

Геометрическая трактовка принципа максимума содержится в работе [123].

Некоторое представление о тех трудностях, с которыми связано использование принципа максимума для определения линий переключения в системах третьего и четвертого порядка, можно получить, например, из работ [53] и [173]. В работе [33] освещается принцип максимума применительно к линейным системам с запаздыванием.

Общий обзор результатов исследования проблемы оптимального управления по состоянию на 1965 г. дан в работе [6], в которой также приведена обширная библиография.



## ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование, разработанное математиком Ричардом Беллманом в начале 1950-х годов, играет важную роль при решении задач оптимального управления по меньшей мере по двум причинам. Во-первых, динамическое программирование рассматривает задачи оптимального управления, исследуя зависимость критерия оптимальности во времени от различных начальных условий. Во-вторых, оно дает, по существу, решение задачи синтеза оптимального управления и позволяет решать задачи, которые неразрешимы с помощью других методов; например, задачи стохастического управления.

Суть динамического программирования заключается в получении дифференциального уравнения в частных производных, которое известно как уравнение Беллмана. Его можно достаточно просто вывести эвристически, приняв некоторые допущения. Однако последние работы показали, что уравнение Беллмана остается справедливым даже при устранении этих ограничивающих предположений. Поэтому оно является важным необходимым условием оптимальности. В более поздних работах было дано обоснование уравнения Беллмана как достаточного условия оптимальности.

Динамическому программированию предшествовали исследования Каратеодори периода середины 1920-х до середины 1930-х годов. Формулировка задачи оптимизации с помощью принципа максимума близка к гамильтоновой трактовке физических задач, в то время как формулировка на основе динамического программирования соответствует методам решения физических задач с помощью уравнения Гамильтона—Якоби<sup>1)</sup>. В свете этого не удивительно, что некоторые задачи можно решать обоими методами.

### 15.1. ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим одномерную задачу оптимизации, в которой требуется минимизировать функционал  $\mathcal{J} = \int_0^T L(x, u) dt$  при управлении стационарным объектом  $\dot{x} = f(x, u)$ . Движение начинается из начального состояния  $x(0) = x_0$ , конечное состояние  $x(T)$  остается свободным. На управление наложено ограничение  $|u| \leq 1$ .

<sup>1)</sup> Изложение этих методов в приложении к физическим проблемам, см., например, в работе [62].

Предположим, что функции  $f(x, u)$  и  $L(x, u)$  достаточно сложны и потому решение задачи в аналитическом виде получить невозможно. Для получения численного решения можно использовать цифровую вычислительную машину.

Для решения задачи необходимо сначала преобразовать систему в дискретную форму (это можно сделать разными способами), а затем отыскивать численные решения дифференциальных уравнений. Для простоты аппроксимируем систему, разделив интервал времени  $[0, T]$  на  $N$  равных частей<sup>1)</sup>:  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$  с интервалом  $\Delta t = T/N$ . Обозначив значения переменной состояния и управления в момент времени  $t_n$  соответственно через  $x_n$  и  $u_n$ , показатель качества приближенно выразим так:

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{N-1} L(x_n, u_n) \Delta t, \quad (15.1a)$$

а систему

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n, u_n) \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (15.1b)$$

Приняв  $f(x_n, u_n) \Delta t + x_n = g(x_n, u_n)$ , выражение (15.1b) примет вид

$$x_{n+1} = g(x_n, u_n). \quad (15.2)$$

Осуществим квантование по уровню функции управления  $u$  на интервале  $[-1, +1]$ , представив ее как совокупность  $2P+1$  значений:  $-P\varepsilon, (-P+1)\varepsilon, \dots, P\varepsilon$ , где  $P\varepsilon = 1$ . Обозначим эту последовательность  $2P+1$  значений величины  $u$  через  $\{u_\varepsilon\}$ . Проведем аналогичную процедуру относительно переменных состояния таким образом, чтобы в итоге было справедливо уравнение (15.2).

Один из способов создания возможной программы для цифровой вычислительной машины заключается в организации следующей итерационной процедуры.

Предположим, что интервал  $[0, T]$  настолько мал, что достаточно одного шага; тогда  $\Delta t = T$  и  $N = 1$ . Таким образом, из выражений (15.1) и (15.2) следует, что

$$\mathcal{J} = L(x_0, u_0) \Delta t \text{ и } x_1 = g(x_0, u_0).$$

При оптимизации для каждого начального условия  $x_0$  можно выбрать такое управляющее воздействие  $u_0$ , чтобы минимизировать  $\mathcal{J}$ . Это можно легко сделать на цифровой вычислительной машине. Обозначим через  $\mathcal{J}^*(x_0)$  оптимальное значение  $\mathcal{J}$  для такой одношаговой задачи, где  $x_0$  — начальное условие, тогда имеем

$$\mathcal{J}_1^*(x_0) = \min_{u_0 \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u_0) \Delta t], \quad (15.3)$$

где операция  $\min [L(x_0, u_0) \Delta t]$  означает нахождение наименьшего значения заключенной в квадратные скобки величины из  $2P+1$  возможных значений  $u_0$ .

Предположим, что  $N = 2$ , т. е. необходимы два шага; тогда, обозначив через  $\mathcal{J}_2$  показатель качества для двухшаговой задачи, имеем  $\mathcal{J}_2 = L(x_0, u_0) \Delta t + L(x_1, u_1) \Delta t$ . Следует выбрать два значения функции управления:  $u_0$  и  $u_1$ , и решение уже не является столь очевидным. Однако, если подумать над тем, каким свойствам должен удовлетворять процесс в момент времени  $t_1$ , то напрашивается следующая гипотеза.

<sup>1)</sup> Должно быть очевидным, что  $N$  достаточно большое, чтобы ошибка при переходе к дискретной системе была малой.

Оптимальная последовательность управлений для двухшагового процесса  $\{u_0^*, u_1^*\}$  должна быть такой, чтобы независимо от значения  $u_0^*$  и, следовательно, значения  $x_1^*$  выбор  $u_1^*$  оставался оптимальным относительно состояния  $x_1$ .

Если принять эту гипотезу, то можно решить двухшаговую задачу оптимизации следующим образом.

Для каждого состояния  $x_1$  в момент времени  $t_1$  определяем оптимальное управление  $u_1^*$ , как в случае одношаговой задачи оптимизации. Вводим в память машины каждое управление  $u_1^*(x_1)$  вместе с соответствующим ему показателем оптимальности  $\mathcal{F}_1^*(x_1)$ .

Затем для каждого состояния  $x_0$  вычисляем значение оптимального управления  $u_0^*(x_0)$ , которое обеспечит оптимальный перевод системы из состояния  $x_0$  в некоторое состояние  $x_1$ . Это делается так: для каждого  $x_0$  вычисляется при каждом  $u_0$  результирующее состояние  $x_1$ , а затем определяется функция  $\mathcal{F}_2(x_0) = L(x_0, u_0) \Delta t + \mathcal{F}_1^*(x_1)$ . Управление  $u_0^*(x_0)$  есть такое значение управления  $u_0$ , которое минимизирует функцию  $\mathcal{F}_2(x_0)$ . Сказанное выше в математической форме запишется так:

$$\mathcal{F}_2^*(x_0) = \min_{u_0 \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u_0) \Delta t + \mathcal{F}_1^*(x_1)]. \quad (15.4)$$

Так как значение  $\mathcal{F}_1^*(x_1)$  найдено и введено в память, для нахождения  $\mathcal{F}_2^*(x_0)$  с помощью уравнения (15.4) требуется непосредственный перебор не более сложный, чем при определении  $\mathcal{F}_1^*(x_1)$ . Поскольку  $x_1 = g(x_0, u_0)$ , то можно написать

$$\mathcal{F}_2^*(x_0) = \min_{u_0 \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u) \Delta t + \mathcal{F}_1^*(g(x_0, u))]. \quad (15.5)$$

Значения  $u_0^*(x_0)$  и  $\mathcal{F}_2^*(x_0)$  снова вводим в память.

Для того чтобы найти оптимальное управление, соответствующее начальному условию  $x_0$ , берем из памяти машины значение функции  $u_0^*(x_0)$ , подставляем ее в выражение (15.2) и вычисляем координату  $x_1$ ; затем снова обращаемся к памяти и находим значение  $u_1^*(x_1)$ . Последовательность  $\{u_0^*(x_0), u_1^*(x_1)\}$  и есть оптимальная последовательность управлений при условии, что справедлива гипотеза, высказанная выше.

Действительно, если эта гипотеза справедлива, то ее можно обобщить и сформулировать следующим образом. Оптимальная последовательность управления для  $N$ -шагового процесса  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  должна быть такой, чтобы независимо от значения  $u_0^*$  и, следовательно, значения  $x_1^*$  выбор остальных значений последовательности  $\{u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  оставался оптимальным относительно состояния  $x_1$ .

Приняв  $N = 3$  и исходя из указанной гипотезы, запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^*(x_0) &= \min_{u_0 \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u_0) \Delta t + \mathcal{F}_2^*(x_1)] = \\ &= \min_{u_0 \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u_0) \Delta t + \mathcal{F}_2^*(g(x_0, u_0))] \end{aligned} \quad (15.6)$$

и в общем виде

$$\mathcal{F}_N^*(x_0) = \min_{u_0 \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u_0) \Delta t + \mathcal{F}_{N-1}^*(g(x_0, u_0))], \quad (15.7)$$

где  $\mathcal{F}_N^*(x_0)$  для каждого  $N$  соответствует оптимальному значению функционала  $\mathcal{F}$  для  $N$ -шаговой задачи оптимизации, когда в качестве исходного состояния выбирается координата  $x_0$ .

Уравнения (15.3) и (15.7) определяют последовательность рекуррентных соотношений для отыскания оптимального значения критерия качества. Во избежание последующей путаницы опустим индекс 0 в обозначениях  $u_0$  в уравнениях (15.3) и (15.7) и, таким образом, получим уравнения

$$\mathcal{F}_1^*(x_0) = \min_{u \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u) \Delta t]; \quad (15.8a)$$

$$\mathcal{F}_N^*(x_0) = \min_{u \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u) \Delta t + \mathcal{F}_{N-1}^*(g(x_0, u))]; N = \dots \quad (15.8b)$$

Уравнения (15.8) позволяют найти оптимальную последовательность управлений для произвольного целого числа  $N$ . При этом выполним следующие действия:

1) в момент времени  $t_{N-1}$  каждое возможное значение состояния  $x_{N-1}$  рассматриваем как начальное состояние, а задачу оптимизации как одношаговую при переходе из состояния  $x_{N-1}$  в  $x_N$ . Из уравнения (15.8a) определим  $u_{N-1}^* = u^*(x_{N-1})$  и  $\mathcal{F}_1^*(x_{N-1})$ ; введем обе эти величины в память машины для каждого значения  $x_{N-1}$ ;

2) в момент времени  $t_{N-2}$  используем уравнение (15.8b) для вычисления  $\mathcal{F}_2^*(x_{N-2})$  и  $u^*(x_{N-2})$ ; введем их в память машины для каждого возможного значения  $x_{N-2}$ . При осуществлении этого процесса необходимо использовать хранящиеся в памяти значения  $\mathcal{F}_1^*$ . Здесь задача оптимизации рассматривается как двухшаговая задача для начального состояния  $x_{N-2}$ ;

3) в момент времени  $t_{N-3}$  используем уравнение (15.8b) для вычисления  $\mathcal{F}_3^*(x_{N-3})$  и  $u^*(x_{N-3})$ ; введем их в память машины для каждого возможного значения  $x_{N-3}$ . При осуществлении этого процесса используем хранящиеся в памяти значения  $\mathcal{F}_2^*$ ;

4) продолжаем выполнение описанного выше процесса до момента времени  $t_0$ ;

5) для нахождения оптимальной последовательности при движении из произвольной начальной точки  $x_0$  берем из памяти хранящееся там значение  $u^*(x_0)$  — первое значение в оптимальной последовательности  $u_0^*$ . Зная его, с помощью выражения (15.2) находим  $x_1$ ;

6) берем из памяти  $u^*(x_1)$  второе значение в оптимальной последовательности  $u_1^*$ . Зная его, с помощью выражения (15.2) находим  $x_2$ ;

7) продолжаем этот процесс для получения всей оптимальной последовательности управлений  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ , а также последовательности, характеризующей оптимальную траекторию  $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_N^*\}$ ;

8) критерий качества для данной задачи равен  $\mathcal{F}_N^*$ , и он хранится в памяти машины.

Заметим, что в данном параграфе рассматривались динамические системы, динамика которых описывается уравнением (15.2). Таким образом, учет динамики несущественно усложняет решение задач методом динамического программирования. На основе метода динамического программирования

рования можно определить совокупность различных состояний системы; выделить среди них удовлетворяющие некоторому выбору управляющего воздействия; оценить критерий качества как функцию начальных условий и выбранного управления; определить его минимальное значение. Все эти операции соответствуют решению последовательности рекуррентных уравнений (15.8)<sup>1)</sup>.

## 15.2. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ

Сделаем ряд замечаний относительно метода, изложенного в предыдущем параграфе.

При изложении этого метода ряд важных вопросов, касающихся вычислений, был опущен. Однако этот параграф заставляет нас задуматься по крайней мере над двумя вопросами:

1) каково значение гипотезы, введенной для отыскания оптимальной последовательности управлений;

2) каков смысл функциональных уравнений (15.8), полученных исходя из выдвинутой гипотезы.

Эти вопросы имеют абсолютное значение, не связанное ни со схемой приведения системы к дискретному виду, ни от числовой процедуры решения.

Итак, в основе метода лежит указанная гипотеза, которую Р. Беллман называет принципом оптимальности. Приведем его формулировку. Оптимальная последовательность управлений для  $N$ -шагового процесса  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  такова, что независимо от значения управления  $u_0^*$  и, следовательно, от значения  $x_1^*$  выбор остальных  $N - 1$  значений в последовательности  $\{u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  должен обеспечить оптимальную последовательность управлений относительно состояния  $x_1^*$ , которое рассматривается теперь как начальное состояние. Этот принцип можно легко доказать от обратного.

Предположим, что  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  представляет собой оптимальную последовательность управлений, причем управление  $u_0^*$  переводит систему из состояния  $x_0$  в  $x_1^*$ . Допустим, что принцип оптимальности не выполняется, тогда для начального состояния  $x_1^*$  существует последовательность  $\{u_1^{**}, u_2^{**}, \dots, u_{N-1}^{**}\}$ , которая дает меньшее значение функционала  $\mathcal{J}$ , чем последовательность  $\{u_1^*, u_2^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ . Это означает, что последовательность  $\{u_0^*, u_1^{**}, \dots, u_{N-1}^{**}\}$  приведет в результате к меньшему значению функционала  $\mathcal{J}$ , чем оптимальная последовательность  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ , что невозможно.

Рассмотрим вновь функциональные уравнения (15.8а и б), которые для ясности изложения выпишем еще раз:

$$\mathcal{J}_1^*(x_0) = \min_{u \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u) \Delta t];$$

$$\mathcal{J}_N^*(x_0) = \min_{u \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_0, u) \Delta t + \mathcal{J}_{N-1}^*(g(x_0, u))].$$

Заметим прежде всего, что функциональные уравнения позволяют выполнять действия последовательно, начиная с  $N = 1$ . Иначе говоря, задача сведена к  $N$ -шаговой, причем на каждом шаге выбирается единственное зна-

<sup>1)</sup> Рекомендуем читателю самостоятельно решить задачи 15.1—15.3, используя предлагаемый подход.

чение  $u$  таким образом, чтобы минимизировать величину  $[L(x_0, u) \Delta t + \mathcal{J}_{N-1}^*(g(x_0, u))]$ . Это имеет существенное преимущество перед методами, в соответствии с которыми требуется проверять все возможные пути, ведущие к цели.

Однако этому не следует придавать чрезмерно большого значения, так как последнее просто указывает на разницу между «слепым» и «вдумчивым» подходами. Если требуется повысить эффективность вычислительной процедуры, то можно воспользоваться более рациональным методом, чем изложенный в § 15.1<sup>1)</sup>.

Преимущество динамического программирования заключается в том, что оно непосредственно связано с анализом функции оптимального управления и критерия оптимальности. Это открывает новый интересный подход к решению задач оптимального управления.

Так, например, уравнения (15.8) определяют критерий качества  $\mathcal{J}^*$  как функцию начальной точки  $x_0$ . Это значит, что с каждой начальной точкой  $x_0$  автоматически связан некоторый критерий оптимальности  $\mathcal{J}^*$ . Таким образом, можно представить себе гиперповерхность  $\mathcal{J}^*$ , определенную в пространстве переменных рассматриваемой задачи. Стремление обеспечить минимум показателя качества на каждом шаге заставляет выбирать такое управление  $u^*$ , которое определяет движение в направлении максимального уменьшения  $\mathcal{J}^*$ . Нетрудно убедиться в том, что сказанное выше в точности соответствует смыслу уравнений (15.8).

Заметим, что динамическое программирование, по-видимому, позволяет решать более широкий круг задач, чем рассматриваемые в настоящее время. Вместо того, чтобы получать какую-либо конкретную последовательность управлений  $\{u^*\}$  и конкретный функционал  $\mathcal{J}^*$ , мы можем с помощью уравнений (15.8) вычислить эти величины для всех возможных начальных точек. Этот прием называется погружением задачи и связан с ее обобщением. Он весьма характерен для метода динамического программирования. Путем погружения первоначальной задачи с заданной начальной точкой в более общий класс задач с произвольными начальными условиями можно определить общую картину изменения функционала  $\mathcal{J}^*$  и, следовательно, сделать выводы относительно того, какой должна быть оптимальная последовательность  $\{u^*\}$ .

Отметим далее, что значение  $u_0^*$  на каждом шаге выражается через координаты текущего состояния. Другими словами, используя динамическое программирование, можно проводить синтез управляющего устройства.

Заметим, что описанный в предыдущем параграфе метод «обратного» динамического программирования не является единственным способом использования принципа оптимальности. Можно применять также и «прямой» метод. В случае прямого динамического программирования принцип оптимальности формулируется следующим образом. Оптимальная последовательность управления  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  для  $N$ -шагового процесса должна быть такой, чтобы независимо от значения  $u_{N-1}^*$  и, следовательно, состояния  $x_{N-1}^*$  первые  $N$  значений в последовательности  $\{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*\}$  составляли оптимальную последовательность управлений относительно состояния  $x_{N-1}^*$  рассматриваемого как конечное состояние.

<sup>1)</sup> Действительно, при использовании динамического программирования в том виде, как это сделано в § 15.1, задача 6 может оказаться неразрешимой. При решении любой нетривиальной задачи может нехватить памяти даже самой крупной современной вычислительной машины. Поэтому разрабатываются более совершенные вычислительные методы, связанные с динамическим программированием (см. например, работы [114] и [115]).

Это новое положение позволяет совершать движение вперед от начальной точки  $x_0$ . Будем рассматривать теперь каждую последующую точку в качестве конечной и выполним ту же последовательность действий, что и в предыдущем параграфе. Если функцию  $\mathcal{F}_N^*(x_N)$  определить как значение критерия оптимальности для точки  $x_N$ , рассматриваемой в качестве конечной, когда процесс начинается в точке  $x_0$ , то можно получить следующие функциональные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_1^*(x_1) &= \min_{u \in \{u_\varepsilon\}} [L(x_1, u) \Delta t]; \\ \mathcal{F}_N^*(x_N) &= \min_{u \in \{u_\varepsilon\}} [\mathcal{F}_{N-1}^*(g(N-1, u)) + L(x_{N-1}, u) \Delta t] \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

(покажите это). При такой формулировке можно по-прежнему проводить синтез и определять решения относительно произвольных начальных точек.

Не удивительно, что новый взгляд, который обеспечивает динамическое программирование, способствует лучшему пониманию проблемы оптимизации. Большую часть важных результатов, получаемых с помощью классического вариационного исчисления, можно вывести путем простого и непосредственного применения метода динамического программирования<sup>1)</sup>. Точно так же некоторые особенности принципа максимума можно выявить, рассматривая эту проблему с точки зрения динамического программирования. Для того чтобы оценить сказанное, необходимо рассмотреть данный метод применительно к непрерывным системам.

### 15.3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ. УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА

Используем теперь принцип оптимальности применительно к управлению непрерывными системами. Покажем, что можно вывести дифференциальное уравнение в частных производных, соответствующее функциональным уравнениям (15.8). Это уравнение называют уравнением Беллмана<sup>2)</sup>.

Рассмотрим следующую задачу Лагранжа. Для системы  $\dot{x} = f(x, u, t)$ , начинающей движение из начального состояния  $x(t_1) = x_1$ , найти управление  $u(t)$ , ограниченное некоторым допустимым классом функций  $\Omega(t)$  и определенное на интервале времени  $[t_1, t_2]$ , которое минимизирует пока-

затель качества  $\mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt$ , где функция  $L(x, u, t)$  предполагается непрерывной по  $t$ . Конечное состояние  $x(t_2) = x_2$  не задано. Векторное пространство  $\Omega(t)$ , как и раньше, отличается тем, что все принадлежащие ему векторные функции  $u(t)$  ограничены по амплитуде в любой момент времени  $t$ :  $|u_j(t)| \leq V_j$ . Множество точек  $|u_j| \leq v_j, j = 1, \dots, r$  в  $r$ -мерном евклидовом пространстве обозначается через  $\mathcal{U}$ .

Показатель качества  $\mathcal{F}$  для фиксированного значения  $t_2$  зависит от переменных  $u(t)$ ,  $x_1$  и  $t_1$ . Отметим, однако, что оптимальное значение функционала  $\mathcal{F}$  зависит лишь от начального состояния  $x_1$  и момента времени  $t_1$ . Обозначим оптимальное значение функционала  $\mathcal{F}$  через  $\mathcal{F}^*(x_1, t_1)$ . Если поставлена задача оптимального управления, то для каждой точки  $x_1$  ста-

<sup>1)</sup> См. работу [47] или [48].

<sup>2)</sup> Представленный здесь вывод впервые по существу сделал Чамран [18]. Этот вывод не требует непрерывности функции  $\partial \mathcal{F}^* / \partial x$ . Как будет показано в § 15.6, требование непрерывности  $\partial \mathcal{F}^* / \partial x$  сделало бы динамическое программирование непригодным для многих встречающихся на практике задач оптимального управления.

вится в соответствие некоторое значение критерия оптимальности. Функция  $\mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1)$  определяет гиперповерхность в  $(n+1)$ -мерном пространстве. Эта гиперповерхность, конечно, в явном виде не задана, но некоторые ее свойства позволяют вывести ряд необходимых условий, которым должна удовлетворять функция оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t)$ .

Обозначим через  $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t), t)$  траекторию, которая получается в результате воздействия управления  $\mathbf{u}(t)$  на систему  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  с начальным состоянием  $\mathbf{x}_1$  в момент времени  $t = t_1$ . При этом  $\mathcal{J}^*$  определяется выражением

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in \Omega(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2}} \left[ \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u}, t) dt \right]. \quad (15.10)$$

Для некоторого момента времени  $t'$  из интервала между  $t_1$  и  $t_2$  это выражение можно написать в таком виде:

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in \Omega(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2}} \left[ \int_{t_1}^{t'} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u}, t) dt + \int_{t'}^{t_2} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u}, t) dt \right]. \quad (15.11)$$

Уравнение (15.11) позволяет применить для его решения принцип оптимальности. Для случая непрерывных систем принцип оптимальности можно сформулировать следующим образом. Оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  на интервале времени  $[t_1, t_2]$  имеет следующее свойство: для любого  $t'$ , заключенного в интервале  $t_1 < t' < t_2$ , независимо от значений, которые управление  $\mathbf{u}^*(t)$  принимало на интервале времени  $[t_1, t']$ , и, следовательно, независимо от значения  $\mathbf{x}^*(t')$  оно должно оставаться оптимальным управлением относительно состояния  $\mathbf{x}^*(t')$  на интервале времени  $(t', t_2]$ .

Применяя принцип оптимальности, уравнение (15.11) можно преобразовать к следующему виду:

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1) = \min_{\substack{\mathbf{u}(t) \in \Omega(t) \\ t_1 \leq t \leq t'}} \left[ \int_{t_1}^{t'} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u}, t) dt + \mathcal{J}^*(\mathbf{x}(t'), t') \right], \quad (15.12)$$

где  $\mathbf{x}(t')$  — конечное состояние, которое является результатом действия управления  $\mathbf{u}(t)$  на интервале времени  $[t_1, t']$ <sup>1)</sup>.

При оптимальном управлении  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^*(t)$  на интервале  $[t_1, t']$  имеем

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1) = \int_{t_1}^{t'} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}^*, t), \mathbf{u}^*(t), t) dt + \mathcal{J}^*(\mathbf{x}(t'), t'). \quad (15.13)$$

Переносим члены и делим на  $t' - t_1$ , получим

$$\frac{\mathcal{J}^*(\mathbf{x}(t'), t') - \mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1)}{t' - t_1} = \frac{1}{t' - t_1} \int_{t_1}^{t'} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}^*, t), \mathbf{u}^*(t), t) dt. \quad (15.14)$$

1) Если предположить, что функция  $\mathcal{J}^*$  имеет непрерывные частные производные по  $\mathbf{x}$  и по  $t$ , можно легко прийти к уравнению Беллмана (см. работы [11] и [48]). Однако, как будет показано ниже, это предположение не выполняется для большого класса задач оптимального управления. В приведенном здесь доказательстве, основанном на работе [187], это предположение не используется.



При  $t' \rightarrow t_1$  уравнение (15.14) принимает вид <sup>1)</sup>

$$\lim_{t' \rightarrow t_1} \left[ - \frac{\mathcal{F}^*(\mathbf{x}(t'), t') - \mathcal{F}^*(\mathbf{x}_1, t_1)}{t' - t_1} \right] = L(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}^*(t_1), t_1). \quad (15.15)$$

Если предел левой части уравнения (15.15) существует, то можно тогда определить величину

$$\left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t_1} \stackrel{\Delta}{=} \lim_{t' \rightarrow t_1} \left[ \frac{\mathcal{F}^*(\mathbf{x}(t'), t') - \mathcal{F}^*(\mathbf{x}_1, t_1)}{t' - t_1} \right]. \quad (15.16)$$

Величина  $\left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]$  есть производная функция  $\mathcal{F}^*$  по времени, вычисленная в момент времени  $t_1$ . Анализируя правую часть выражения (15.16), можно видеть, что производную следует вычислять вдоль траектории, обусловленной управлением  $\mathbf{u}^*$  и начинающейся в  $\mathbf{x}^1$ . Таким образом, можно написать

$$\left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t_1} + L(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}^*(t_1), t_1) = 0. \quad (15.17)$$

Заметим, что при  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{u}^*(t)$  для интеграла (15.13) в соответствии с определением должно выполняться неравенство

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{x}_1, t_1) \leq \int_{t_1}^{t'} L(\mathbf{x}(\mathbf{u}(t), t), \mathbf{u}(t), t) dt + \mathcal{F}^*(\mathbf{x}(t'), t'). \quad (15.18)$$

После выполнения операций, обусловленных выражениями (15.14)—(15.17), неравенство (15.18) можно представить в виде

$$\left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t_1} + L(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}(t_1), t_1) \geq 0. \quad (15.19)$$

Используя выражения (15.17) и (15.19), получим

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t_1} + L(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}(t_1), t_1) &\geq \left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t_1} + \\ &+ L(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}^*(t_1), t_1) = 0, \end{aligned} \quad (15.20)$$

или

$$\min_{\mathbf{u}(t_1) \in \mathfrak{U}} \left\{ \left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t_1} + L(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}(t_1), t_1) \right\} = 0. \quad (15.21)$$

Заметим, что уравнение (15.21) справедливо в любой момент времени из интервала  $[t_1, t_2]$ , так что для любого момента времени  $t$  и любого состояния  $\mathbf{x}$  на траектории  $\mathbf{x}^*(t)$ , принимая его за начальное, можно написать

$$\min_{\mathbf{u}(t) \in \mathfrak{U}} \left\{ \left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t} + L(\mathbf{x}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u}, t) \right\} = 0. \quad (15.22)$$

<sup>1)</sup> Для получения правой части выражения (15.15) как предела правой части уравнения (15.14) используется теорема о среднем значении (см. [5], стр. 213).

<sup>2)</sup> Для того чтобы понять сказанное, представим следующую картину. Пусть для некоторой задачи функция  $\mathcal{F}^*(\mathbf{x}, t)$  определена для любого начального состояния  $\mathbf{x}$  и начального момента времени  $t$ . Пусть  $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t), t)$  определяет траекторию, обусловленную управлением  $\mathbf{u}(t)$ ; тогда вдоль любой из этих траекторий величина  $\mathcal{F}^*(\mathbf{x}, t)$  будет изменяться во времени со скоростью, определяемой величиной  $\left[ \frac{d\mathcal{F}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t}$ . В частности, вдоль оптимальной траектории она будет изменяться со скоростью  $\left[ \frac{d\mathcal{F}^{**}}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t}$ .

Уравнение (15.22) и есть функциональное уравнение Беллмана в общей форме. Оно выражает необходимое условие оптимальности.

Для любого состояния  $\mathbf{x}$  и момента времени  $t$ , когда функции  $\partial \mathcal{J}^*/\partial t$ ,  $\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  непрерывны по  $\mathbf{x}$  и  $t$ , полную производную  $\left[ \frac{d\mathcal{J}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t}$  можно записать так:

$$\left[ \frac{d\mathcal{J}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}, t} = \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t}. \quad (15.23)$$

Так как частная производная  $\partial \mathcal{J}^*/\partial t$  не зависит от  $\mathbf{u}$  (предлагаем ответить почему?), уравнение (15.22) можно представить в виде

$$-\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}} \left[ L(\mathbf{x}(\mathbf{u}, t), \mathbf{u}, t) + \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right]. \quad (15.24)$$

Уравнение (15.24) представляет собой частный случай уравнения (15.22), хотя его и называют функциональным уравнением Беллмана. В тех случаях, когда это уравнение применимо, оно обеспечивает необходимое условие оптимальности<sup>1)</sup>. Уравнение (15.24) является необычной формой дифференциального уравнения в частных производных, которое включает операцию минимизации.

Рассмотрим вначале лишь уравнение (15.24). Мы видим, что это дифференциальное уравнение (вообще говоря нелинейное) первого порядка в частных производных относительно одной переменной  $\mathcal{J}^*$ . Это уравнение определяет одноточечную краевую задачу с граничным условием вида

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \mathcal{J}^*(\mathbf{x}_1, t_1) = \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) dt = 0. \quad (15.25)$$

В действительности это условие соответствует трем. Во-первых, оно указывает, как следует вести поиск оптимальной  $\mathbf{u}(t)$ ; а именно: в любой момент времени  $t$  поиск должен быть таким, чтобы минимизировать величину в уравнении (15.24), заключенную в квадратные скобки. Во-вторых, если функция оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t)$  найдена, то (15.24) сводится к уравнению без операции минимизации

$$-\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = L(\mathbf{x}(\mathbf{u}^*(t), t), \mathbf{u}^*(t), t) + \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{u}^*(t), t), \mathbf{u}^*(t), t), \quad (15.26)$$

которому удовлетворяет функция  $\mathcal{J}^*(\mathbf{x}, t)$  для всех значений  $t$  в интервале  $[t_1, t_2]$ . И, наконец, в-третьих, так как уравнения (15.24) и (15.25) справедливы для всех начальных состояний, то упомянутое в предыдущем параграфе свойство погружения задачи верно и для непрерывного случая.

При отсутствии ограничений на величину  $\mathbf{u}$  и при условии, что функции  $L$  и  $\mathbf{f}$  имеют частные производные по  $\mathbf{u}$ , оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t)$  можно найти путем дифференцирования выражения, заключенного в квадратные скобки в уравнении (15.24), и приравнивания полученного результата к нулю. Это дает условие

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} + \sum_{i=1}^u \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} \right]_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = 0 \text{ для всех } t \in [t_1, t_2]. \quad (15.27)$$

<sup>1)</sup> Для всех рассматриваемых в данной главе задач уравнение (15.24) справедливо, о чем и говорится в § 15.16.

Если показатель качества соответствует задаче Майера, а именно:  $\mathcal{J} = P(\mathbf{x}(t_2), t_2)$ , то, придерживаясь по существу тех же рассуждений, что и выше, получим соответствующее уравнение Беллмана (см. задачу 15.6)

$$\min_{u(t) \in \mathfrak{U}} \left[ \frac{d\mathcal{J}^*}{dt} \right]_{u, \dot{t}} = 0 \quad (15.28a)$$

с граничным условием

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \mathcal{J}^*(\mathbf{x}(t_1), t_1) = P(\mathbf{x}(t_2), t_2). \quad (15.28b)$$

В тех случаях, когда функции  $\partial \mathcal{J}^* / \partial t$ ,  $\partial \mathcal{J}^* / \partial \mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  непрерывны по  $\mathbf{x}$  и  $t$ , имеем

$$-\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = \min_{u(t) \in \mathfrak{U}} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] \quad (15.29)$$

с тем же граничным условием (15.28).

Заметим, что тип граничного условия для конечного состояния не играет роли при выводе функционального уравнения. Таким образом, уравнение Беллмана (15.22) или (15.24) справедливо для задачи, рассматриваемой в данном параграфе, даже если конечное состояние  $\mathbf{x}_2$  задано, а конечный момент времени  $t_2$  нет. Здесь условие (15.25) по-прежнему справедливо, и нет необходимости при выводе уравнения Беллмана вносить какие-либо изменения.

#### 15.4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ И КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Выше было указано, что динамическое программирование обладает тем свойством, что оптимальная функция управления  $\mathbf{u}^*$ , определяемая с помощью этого метода, обычно записывается в функции переменных состояния  $\mathbf{x}$ , и, следовательно, синтезируется система с обратной связью. Однако использование динамического программирования требует решения уравнения Беллмана. Первоначальная попытка получить решение задачи оптимизации была связана с получением  $2n$  дифференциальных уравнений (с помощью вариационного исчисления или принципа максимума) с двухточечными граничными условиями. С другой стороны, задача решается с помощью одного дифференциального уравнения в частных производных с граничными условиями в одной точке. Преимущество второго метода над первым не столь очевидно.

Поэтому рассмотрим случай, когда уравнение Беллмана непосредственно поддается решению. С таким случаем сталкиваемся при решении задачи оптимального управления линейным объектом, когда показателем качества служит интеграл от квадратической формы по переменным  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ . Этот тип задач был кратко рассмотрен в гл. 13. Ниже будет показано, что благодаря использованию динамического программирования можно глубже уяснить существо этих задач.

Прежде чем перейти к рассмотрению задачи в общем виде, целесообразно обратиться к конкретному примеру.

**Пример 15.1.** Рассмотрим объект первого порядка  $\dot{x} = -ax + bu$ . Необходимо минимизировать функционал  $\mathcal{J} = \int_0^T (c_1 x^2 + c_2 u^2) dt$  и найти оптимальное линейное управление в интервале времени  $[0, T]$  вида  $u(t) = -q(t)x(t)$ , которое существует для любой начальной точки  $x(0)$ . Конечное состояние не задано.

Для этой задачи уравнение Беллмана (15.24) принимает вид

$$-\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = \min_u \left[ c_1 x^2 + c_2 u^2 + \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} (-ax + bu) \right]. \quad (15.30)$$

Так как ограничение на величину  $u(t)$  отсутствует, для определения минимума правую часть уравнения Беллмана можно продифференцировать по  $u$  и приравнять полученный результат нулю; тогда получим

$$u^* = -\frac{b}{2c_2} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x}. \quad (15.31)$$

Подстановка соотношения (15.31) в уравнение (15.30) дает

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \left( -ax - \frac{b^2}{2c_2} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right) + \left[ c_1 x^2 + c_2 \left( -\frac{b}{2c_2} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (15.32)$$

Граничное условие для рассматриваемой здесь задачи, определяемое уравнением (15.25), имеет вид  $\lim_{t \rightarrow T} \mathcal{J}^*(x, t) = 0$ .

Простейший подход к решению дифференциального уравнения в частных производных такого вида сводится к попытке разделить переменные и представить решение в виде  $\mathcal{J}^*(x, t) = p(t)r(x)$ . Из соотношения (15.31) и требования, чтобы управление  $u(t)$  имело форму  $q(t)x(t)$ , делаем вывод о том, что соответствующая функция для  $r(x)$  имеет вид  $x^2$ :

Подставив  $\mathcal{J}^* = p(t)x^2(t)$  в уравнение (15.32), получим

$$\frac{dp}{dt} x^2 + 2xp \left( -ax - \frac{b^2}{2c_2} 2xp \right) + \left[ c_1 x^2 + c_2 \left( \frac{b}{2c_2} 2xp \right)^2 \right] = 0.$$

Далее находим, что  $p(t)$  удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dt} - 2ap - \frac{b^2 p^2}{c_2} + c_1 = 0. \quad (15.33)$$

с граничным условием  $\lim_{t \rightarrow T} \mathcal{J}^*(t, x) = \lim_{t \rightarrow T} p(t)x^2 = 0$ ,

откуда

$$p(T) = 0. \quad (15.34)$$

Это значит, что  $\mathcal{J}^* = p(t)x^2$  будет представлять собой решение уравнения (15.32) при условии существования решения  $p(t)$  из уравнения (15.33) с учетом граничного условия (15.34).

Уравнение (15.33) есть дифференциальное уравнение типа Риккати (см., например, работу [83]); в этом конкретном случае его можно проинтегрировать путем разделения переменных

$$\frac{(c_2/b^2) dp}{p^2 + (2c_2 a/b^2) p - c_1 c_2/b^2} = dt. \quad (15.35)$$

Если  $p_1$  и  $p_2$  — корни многочлена  $p^2 + (2c_2 a/b^2) p - c_1 c_2/b^2 = 0$ , то общее решение для уравнения (15.35) имеет вид

$$\frac{p(t) - p_1}{p(t) - p_2} = k \exp \left[ \frac{b^2}{c_2} (p_1 - p_2) t \right] \quad (15.36)$$

или

$$p(t) = \frac{-p_2 k \exp [(b^2/c_2)(p_1 - p_2)t] + p_1}{1 - k \exp [(b^2/c_2)(p_1 - p_2)t]}. \quad (15.37)$$

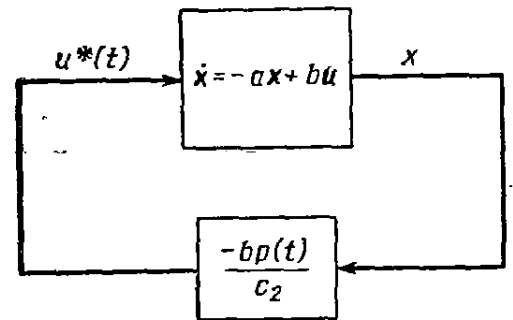


Рис. 15.1. Оптимальная система управления, рассматриваемая в примере 15.1

Используя граничное условие  $p(T) = 0$ , находим

$$k = \frac{p_1}{p_2 \exp [(b^2/c_2)(p_1 - p_2)T]}. \quad (15.38)$$

Таким образом, имеем  $\mathcal{J}^*(x, t) = p(t)x^2$  для любой начальной точки  $x$  и начального времени  $t$ ; отсюда из выражения (15.31) найдем

$$u^*(t) = -\frac{b}{2c_2} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} = -\frac{bp(t)}{c_2} x. \quad (15.39)$$

Получаемая в результате система управления с обратной связью приведена на рис. 15.1. Она линейна, но нестационарна.

В том случае, когда время  $T$  является бесконечным, напомним, ссылаясь на гл. 13, что оптимальная функция управления с обратной связью представляет собой постоянную матрицу, умноженную на текущее состояние. В рассматриваемом здесь одномерном случае следует ожидать, что оптимальное управление с обратной связью будет представлять собой константу, умноженную на выходной сигнал.

При  $T \rightarrow \infty$  состояние  $x$  и функция управления  $u$  должны стремиться к нулю, так как в противном случае функционал  $\mathcal{J}$  будет бесконечным. Однако, когда  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , то значение  $p(t)$  невозможно определить краевым условием  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{J}^*(x, t) = p(t) x^2 = 0$  и необходимо искать другие пути.

Из уравнения (15.38) следует, что если  $p_1 > p_2$ , то при  $T \rightarrow \infty$   $k \rightarrow 0$ ; уравнение (15.36) указывает на то, что  $p(t) = p_1$ . Таким образом,  $\lim_{T \rightarrow \infty} p(t) = \max(p_1, p_2)$ , а этот предел представляет собой постоянную величину. Отсюда следует, что  $dp/dt = 0$ .

Следовательно, при  $T \rightarrow \infty$  оптимальное управление равно  $u^*(t) = px(t)$ , где постоянная  $p$  есть больший из двух корней многочлена  $p^2 + (2c_2a/b^2)p - c_1c_2/b^2 = 0$ .

Общую задачу приведенного выше типа, которую можно назвать задачей о синтезе регулятора, рассматривали Мерриэм [139], Калман [92], [96] и другие. Она формулируется следующим образом. Дан линейный нестационарный объект управления, который описывается уравнением  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  с начальным условием  $x(t_1) = x_1$  и с незадаанным конечным состоянием  $x(t_2)$ . Необходимо найти оптимальную функцию управления  $u^*(t)$  на интервале  $[t_1, t_2]$ , минимизирующую функционал

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} x_2^T M x_2 + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) + u^T(\tau) R(\tau) u(\tau)] d\tau, \quad (15.40)$$

где  $M$ ,  $Q(t)$  и  $R(t)$  — симметричные матрицы, причем  $Q(t)$  и  $R(t)$  являются положительно определенными и обладают непрерывными вторыми производными по  $t$ ;

$M$  — знакоположительная постоянная матрица (чтобы гарантировать единственный минимум).

Сформулированная задача есть задача Больца; материала § 15.3 вполне достаточно для того, чтобы решить поставленную задачу.

Выполним те же операции, что и в примере 15.1. Уравнение Беллмана имеет вид

$$-\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2} x^T(t) Q(t) x(t) + \frac{1}{2} u^{*T}(t) R(t) u^*(t) + \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T (A(t)x + B(t)u^*) \right]. \quad (15.41)$$

Граничное условие, вытекающее из уравнений (15.25) и (15.28в), сводится к

$$\lim_{t \rightarrow t_2} \mathcal{J}^*(x, t) = \frac{1}{2} x^T(t_2) M x(t_2). \quad (15.42)$$

Процесс минимизации приводит к условию

$$\frac{\partial L}{\partial u} \Big|_{u=u^*} + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T (A(t)x + B(t)u) \right] \Big|_{u=u^*} = 0, \quad (15.43)$$

где  $L$  — подынтегральное выражение в уравнении (15.40).

Из последнего условия следует

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right). \quad (15.44)$$

Если хотим синтезировать линейное управление как функцию координат, то следует в качестве критерия качества  $\mathcal{J}^*$  принять квадратичную форму

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}, \quad (15.45)$$

где  $\mathbf{P}(t)$  — симметричная матрица размерности  $n \times n$ .

Подставив выражения (15.44) и (15.45) в уравнение Беллмана (15.41), получим матричное уравнение Риккати

$$-\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t) \quad (15.46)$$

с граничным условием

$$\mathbf{P}(t_2) = \mathbf{M}. \quad (15.47)$$

Матрицу  $\mathbf{P}(t)$  теоретически можно найти, интегрируя уравнение (15.46) в обратном времени с начальным условием (15.47). После нахождения матрицы  $\mathbf{P}(t)$ , так как она симметрична, с помощью выражений (15.44) и (15.45) получим

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t). \quad (15.48)$$

Таким образом, единственный абсолютный минимум функционала (15.40) получается только в том случае, если матричное уравнение Риккати имеет одно решение. В отношении последнего Калман доказал следующую теорему<sup>1)</sup>.

**Теорема 15.1** [96]. В соответствии с предположениями, принятыми в данном параграфе, уравнение (15.46) с граничным условием (15.47) имеет единственное решение для матрицы  $\mathbf{P}(t)$ , при этом управление (15.48) является оптимальным по отношению к критерию оптимальности (15.45).

Другими словами, уравнение Беллмана (15.41) обеспечивает для этого случая достаточное условие оптимальности.

Полученные в данном параграфе результаты могут быть с успехом использованы при расчете контуров наведения с малыми возмущениями, например, при выводе на орбиту искусственного спутника. В подобных задачах ракета-носитель должна следовать по номинальной траектории. Но из-за нестационарности параметров ракеты-носителя она не следует точно по номинальной траектории. Для коррекции небольших отклонений относительно заданной траектории можно, например, линеаризовать динамику ракеты-носителя относительно заданной траектории. После этого, если выбран критерий оптимизации типа (15.40)<sup>2)</sup>, можно приступить к расчету в соответствии с методикой, изложенной в данном параграфе.

**Пример 15.2**<sup>3)</sup>. Динамику линеаризованного контура наведения ракеты можно выразить в форме

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = \frac{k_1}{k_2 - t} x_3; \quad \dot{x}_3 = u,$$

где  $x_1$  — боковое отклонение от «номинальной траектории»;

$x_2$  — скорость этого отклонения;

$x_3$  — угол направления вектора тяги.

<sup>1)</sup> Доказательство этой теоремы станет очевидным в § 15.7.

<sup>2)</sup> Необходимость использовать критерий (15.40) возникает в тех случаях, когда требуется существование второй вариации от заданного функционала. Более подробно этот вопрос освещен в следующих главах.

<sup>3)</sup> Этот пример предоставили Х. Хеффес, Дж. М. Хольцман и С. Хоринг, сотрудники фирмы Белл Телефон. В проведенном ими исследовании учитывалось влияние шума.

Зависимость между боковой тягой и боковым ускорением нестационарна и определяется коэффициентом  $k_1/(k_2 - t)$ , который учитывает потерю массы при действии тяги. Интегрируемая связь между  $x_3$  и  $u$  представляет собой линеаризованное уравнение привода.

Если исходить из предположения о возможности точного измерения  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ , то можно разработать такую систему управления с обратной связью, чтобы обеспечить оптимальное наведение ракеты, удовлетворив при этом заданному показателю качества. Предположим, что используется функционал вида

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T(\tau) Q(\tau) x(\tau) + ru^2) dt,$$

где  $r = 10$ ;  $T = 250$  сек, и

$$Q(t) = \frac{1}{(300 - t)^2} \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix},$$

и пусть начальные условия представляют собой  $x_1(0) = 3000$  футов ( $\sim 915$  м);  $x_2(0) = 800$  фут/сек ( $\sim 244$  м/сек) и  $x_3(0) = 12$  мрад.

Тогда в принятой в данном параграфе системе обозначений имеем

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{k_2 - t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

нам необходимо решить матричное уравнение Риккати (15.46) с граничным условием  $P(T) = 0$ .

Рассмотрим решение (15.48). Ввиду того, что  $r^{-1}b^T = [0, 0, 1/10]$ , используем лишь последнюю строку симметричной матрицы  $P(t) = [p_{ij}(t)]$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ). В этом случае имеем  $u^*(x, t) = -(1/10) [p_{13}, p_{23}, p_{33}] x(t)$ . Однако вследствие матричного характера уравнения (15.46) можно легко показать, что необходимо решить следующие шесть связанных нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями в одной точке:

$$\dot{p}_{11}(t) = \frac{1}{10} p_{13}^2(t) - \frac{5 \cdot 10^{-7}}{(300 - t)^2};$$

$$\dot{p}_{12}(t) = \frac{1}{10} p_{13}(t) p_{23}(t) - p_{11}(t);$$

$$\dot{p}_{13} = \frac{1}{10} p_{13}(t) p_{33}(t) - \frac{k_1}{k_2 - t} p_{12}(t);$$

$$\dot{p}_{22} = \frac{1}{10} p_{23}^2(t) - 2p_{12}(t) - \frac{10^{-3}}{(300 - t)^2};$$

$$\dot{p}_{23} = \frac{1}{10} p_{23}(t) p_{33}(t) - \frac{k_1}{k_2 - t} p_{22}(t) - p_{13}(t);$$

$$\dot{p}_{33} = \frac{1}{10} p_{33}^2(t) - 2 \frac{k_1}{k_2 - t} p_{23}(t) - \frac{10^3}{(300 - t)^2}.$$

Эту систему можно решить численно, двигаясь в обратном времени от  $t = T$  с граничным условием  $P(T) = 0$ . Функции  $p_{13}(t)$ ,  $p_{23}(t)$ ,  $p_{33}(t)$  изображены графически для  $k_1 = 9380$  и  $k_2 = 315$  (рис. 15.2а). На графике также нанесена оптимальная траектория  $x^*(t)$  (рис. 15.2б) [см. упражнение 15.8].

Калман показал, что при  $T \rightarrow \infty$  для полностью управляемой линейной стационарной системы и показателя качества

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)) d\tau,$$

где  $Q$  и  $R$  — симметричные, положительно определенные постоянные матрицы, справедливо условие  $\lim_{T \rightarrow \infty} \dot{P}(T) = 0$  и, таким образом, матричное уравнение Риккати (15.46) сводится к нелинейному матричному алгебраическому уравнению

$$-PBR^{-1}B^T P + PA + A^T P + Q = 0. \quad (15.49)$$

Решение этого уравнения определяет постоянную матрицу  $P$ . Оптимальное управление имеет вид  $u^*(x, t) = -R^{-1}B^T P x$ . Приведенный выше результат совпадает с результатом, полученным в § 13.2, хотя все требуемые свойства можно получить и непосредственно из уравнения (15.49).

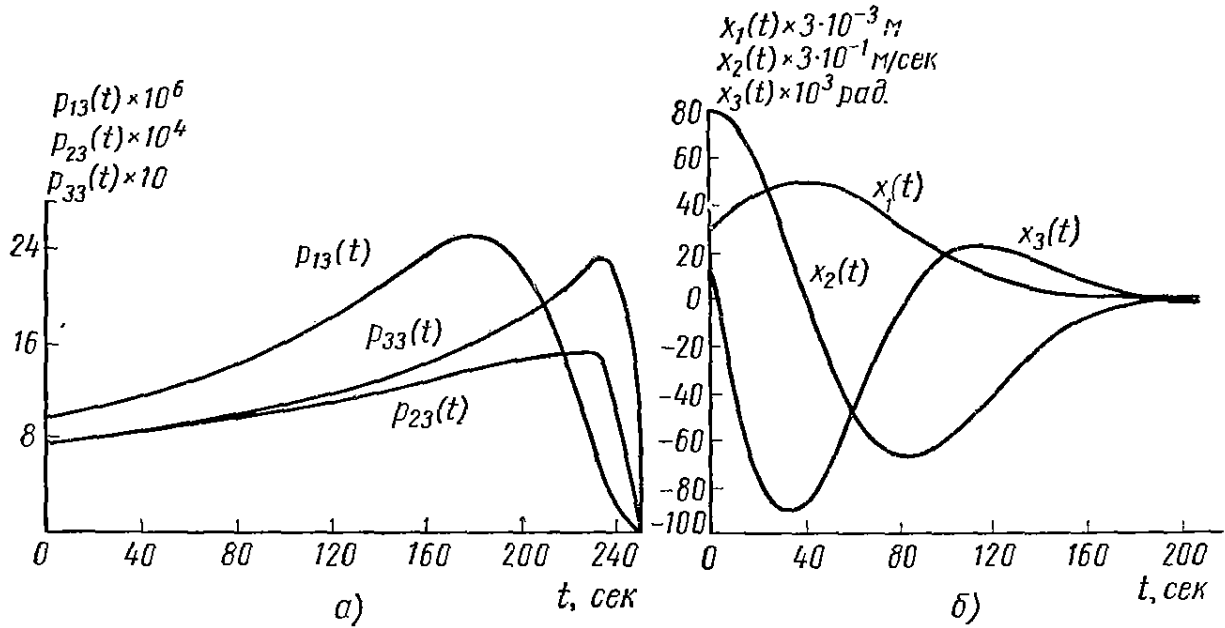


Рис. 15.2: а) Оптимальные функции усиления обратной связи для системы, рассматриваемой в примере 15.2; б) оптимальная траектория для системы, рассматриваемой в примере 15.2

Уравнение  $u^*(x, t) = -R^{-1}B^T P x$  означает, что все переменные состояния должны быть известны. Это означает, что должны точно измеряться выходной сигнал и  $(n - 1)$  его производная. Это очень жесткое требование.

По существу, применительно к случаю одного управляющего воздействия Калман [97] показал, что если в приведенной выше задаче уравнение (15.49) определяет постоянную матрицу  $P$ , получается строгое решение в частотной области.

Пусть объект, определяемый уравнением  $\dot{x} = Ax + bu$ , полностью управляем (см. § 3, 6), а показатель качества имеет вид<sup>1</sup>

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + r u^2(t)) dt,$$

а оптимальное управление — суть  $u^* = -(1/r) b^T P x = -k^T x$ , когда  $k^T = b^T P/r$ . Тогда передаточная функция разомкнутой оптимальной системы управления равна (см. § 3.5)

$$F^*(s) = k^T (sI - A)^{-1} b. \quad (15.50)$$

<sup>1</sup> Предполагается, что  $Q$  является положительно определенной, а  $r > 0$ .



Покажем, что функция  $F^*(s)$  обладает тем свойством, что при всех частотах  $\omega$

$$|1 + F^*(j\omega)| > 1. \quad (15.51)$$

Для доказательства заметим, что в нашем случае

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + r u^2) dt;$$

при этом  $\mathcal{J}$  можно нормировать так, что  $r = 1$ .

Таким образом, уравнение (15.49) принимает вид <sup>1)</sup>

$$-PA - A^T P = Q - P b b^T P. \quad (15.52)$$

Прибавляя и вычитая  $sP$ , получим

$$P(sI - A) + (-sI - A^T)P = Q - P b b^T P. \quad (15.53)$$

Передаточная функция объекта от  $u$  до  $\mathbf{x}$  определяется выражением  $H(s) = (sI - A)^{-1} \mathbf{b}$ .

Если обе стороны уравнения (15.53) предварительно умножить на  $H^T(-s)$ , а затем на  $H(s)$ , то найдем

$$H^T(-s) P b + b^T P H(s) = H^T(-s) [Q - P b b^T P] H(s)$$

или

$$H^T(-s) P b + H^T(-s) P b b^T P H(s) + b^T P H(s) = H^T(-s) Q H(s), \quad (15.54)$$

так как положительно определенную матрицу  $Q$  можно представить в виде

$$Q = D^T \Lambda D,$$

где матрица  $D$  — действительная, а матрица  $\Lambda$  — действительная, положительно определенная и диагональная <sup>2)</sup>.

Уравнение (15.54) можно записать (с учетом того, что  $\mathbf{k} = P\mathbf{b}$ ) следующим образом:

$$(1 + H^T(-s) \mathbf{k}) (1 + \mathbf{k}^T H(s)) = 1 + H^T(-s) D^T \Lambda D H(s). \quad (15.55)$$

Ввиду того, что  $\mathbf{k}^T H(s) = F^*(s)$ , имеем при  $s = j\omega$

$$|1 + F^*(j\omega)|^2 = 1 + H^T(-j\omega) D^T \Lambda D H(j\omega). \quad (15.56)$$

Так как последний член уравнения (15.53) всегда положителен, то условие (15.51), очевидно, выполняется. Его можно представить в виде единичной окружности с центром в точке  $-1 + j0$ , которую годограф  $F^*(j\omega)$  не должен касаться или входить в нее. Это значит, что какой бы ни была первоначальная передаточная функция объекта  $G(s)$ , оптимальный линейный регулятор путем компенсации будет превращать ее в  $F^*(j\omega)$  с указанными выше свойствами. Нет необходимости говорить, что вследствие строгости условия (15.51) оптимальное управление трудно будет осуществить в случае нетривиальных управляемых объектов.

Хотя приведенные выше результаты применимы лишь к системам без элемента сравнения, их можно очень легко распространить на системы

<sup>1)</sup> В случае одного управляющего воздействия вектор  $\mathbf{R}$  в уравнении (15.49) переходит в скаляр  $r$ .

<sup>2)</sup> См. работу [12].

с элементами сравнения и входными сигналами, принадлежащими к какому-то определенному классу.

Рассмотрим линейный стационарный объект с одним входом и выходом, определяемый уравнениями  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$  и  $y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ .

Обозначим через  $z(t)$  входной сигнал, поступающий на элемент сравнения. В частности, желательнее найти такую функцию управления  $u$ , чтобы минимизировать функционал

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} (qe^2(t) + ru^2(t)) dt, \quad (15.57)$$

где  $e(t) = z(t) - y(t)$ .

Ввиду того, что функция  $z(t)$  зависит от времени, следует ожидать, что управление  $u(\mathbf{x}, t)$  будет нестационарным даже в том случае, когда верхний предел интегрирования в показателе качества равен бесконечности и управляемый объект является полностью управляемым и наблюдаемым (см. § 3, 6), и описывается передаточной функцией  $G(s) = [M(s)/L(s)]$  или операторным уравнением  $L(p)y(t) = M'(p)u(t)$  (см. § 2.3). Если  $z(t)$  подчиняется соотношению

$$L(p)z(t) = 0, \quad (15.58)$$

то можно написать

$$L(p)e(t) = -M(p)u(t); \quad (15.59)$$

последнее можно рассматривать как уравнение эквивалентного объекта с входным сигналом  $-u(t)$  и выходным сигналом  $e(t)$ . Можно выбрать подходящий набор переменных состояния, чтобы охарактеризовать эквивалентный управляемый объект (15.59) (например,  $e(t)$  и ее  $n-1$  производных). Таким образом, задачу, рассмотренную в § 12.2 в частотной области, теперь можно полностью рассмотреть во временной области.

### 15.5. СВЯЗЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИНЦИПОМ МАКСИМУМА

Внимательный читатель, возможно, обратил внимание на заметное сходство выражений (15.22) или (15.24) и выражения, связанного с максимизацией функции Гамильтона в формулировке задачи оптимального управления на основе принципа максимума. Так как для любой функции  $F$   $\max(-F) = -\min F$ , то выражение (15.24) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = \max_{u(t) \in \mathcal{U}} \left[ -L(\mathbf{x}(u, t), u, t) - \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f} \right]. \quad (15.60)$$

Если вдоль оптимальной траектории вектор  $-\partial \mathcal{J}^* / \partial \mathbf{x}$  отождествить с сопряженным вектором  $\boldsymbol{\psi}$ , то величина, заключенная в квадратных скобках в уравнении (15.60), является гамильтонианом  $H$  для принципа максимума. Заметим, что в этом случае величина  $\partial \mathcal{J}^* / \partial t$  представляет собой величину  $H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t, \boldsymbol{\psi})$  и выполняется условие 2 принципа максимума (теорема 14.3) (см. упражнение 15.13). При этих условиях имеем

$$-\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = \psi(t); \quad (15.61a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} = H^* \stackrel{\Delta}{=} H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t, \boldsymbol{\psi}). \quad (15.61b)$$

Таким образом, сопряженный вектор, соответствующий оптимальной траектории, представляет собой вектор, направленный в сторону, противоположную направлению градиента критерия оптимальности  $\mathcal{J}^*$ . Так как вектор градиента направлен в сторону быстрого изменения функции, то вектор  $\psi$  располагается в каждый момент времени в направлении быстрого изменения критерия оптимальности.

Для расширенной системы, рассмотренной в § 14,3, мы имеем  $H = \psi^T \dot{x}$ . При этом принцип оптимальности дает  $-\partial \mathcal{J}^* / \partial x' = \psi'$ . Итак, условие  $\max_{u \in \mathcal{U}} H$  в принципе максимума означает, что в расширенном  $n + 1$ -

мерном пространстве управлений  $u^* \in \mathcal{U}$  следует выбирать таким образом, чтобы в любой момент времени составляющая вектора  $\dot{x}$  в направлении наискорейшего убывания величины  $\mathcal{J}^*$  была максимально большой.

Из выражения (15.61б) видно, что оптимальная функция Гамильтона  $H^*$  равна скорости изменения критерия оптимальности при отсчете времени от выбранной начальной точки.

Поэтому ясно, почему в случае оптимального по быстродействию управления стационарным объектом функция  $H^*$  должна обязательно равняться нулю. Последнее видно из рассмотрения величины  $\partial \mathcal{J}^* (x, t) / \partial t$ . Напомним, что  $t$  в  $\mathcal{J}^* (x, t)$  представляет собой начальное время. При фиксированной начальной точке ( $x$  в  $\mathcal{J}^* (x, t)$ ) оптимальное время достижения любой данной точки не зависит от начального времени для стационарного объекта управления; следовательно,  $H^* \equiv 0$ .

Действительно, рассуждая, как и в приведенном выше случае, видно, что всякий раз, когда управляемый объект и функция стоимости  $L$  не зависят явно от времени, а конечное время  $t_2$  не фиксировано, то  $\partial \mathcal{J}^* / \partial t$  будет всегда равняться нулю и, следовательно, во всех этих случаях  $H^* \equiv 0$ .

Выражая уравнение Беллмана через гамильтониан  $H$ , можно записать

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} - H \left( x^*, u^*, t, \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right) = 0. \quad (15.62)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Гамильтона—Якоби<sup>1)</sup>.

Зная зависимость между принципом максимума и динамическим программированием, можно развить дальше результат, полученный в предыдущем параграфе.

Предположим, требуется найти оптимальное линейное управление с обратной связью для системы с точно определенным входным сигналом  $z(t)$ . Цель управления состоит в том, чтобы удерживать выходной сигнал близким к входному, не затрачивая при этом чрезмерно много энергии. Задачу можно сформулировать следующим образом.

Пусть выходной сигнал объекта  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  определяется как  $y(t) = C(t)x(t)$ , где векторы  $x$  и  $y$  соответственно  $n$ - и  $m$ -мерны. Пусть входной сигнал есть  $m$ -мерный вектор  $z(t)$ , а ошибка системы равна  $e(t) = z(t) - y(t)$ . Соответствующий показатель качества имеет вид

$$\mathcal{J} = e^T(t_2) M e(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (e^T(\tau) Q(\tau) e(\tau) + u^T(\tau) R(\tau) u(\tau)) d\tau; \quad (15.63)$$

его необходимо минимизировать, найдя оптимальное управление  $u^*(x, t)$ .

<sup>1)</sup> По этой причине некоторые авторы часто называют уравнение Беллмана уравнением Гамильтона—Якоби.

Используя результаты данного параграфа, определим гамильтониан

$$H = -\frac{1}{2} (z(t) - C(t)x(t))^T Q(t) (z(t) - C(t)x(t)) - \frac{1}{2} (u(t)^T R(t) u(t)) + (A(t)x(t))^T \psi(t) + (B(t)u(t))^T \psi(t). \quad (15.64)$$

Оптимальную функцию управления  $u^*(t)$  найдем из уравнения  $\frac{\partial H}{\partial u} \Big|_{u=u^*} = 0$ , откуда

$$u^*(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \psi(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) \frac{\partial \mathcal{F}^*(x, t)}{\partial x}, \quad (15.65)$$

что имеет смысл при условии существования обратной матрицы  $R^{-1}(t)$  для всех  $t$ .

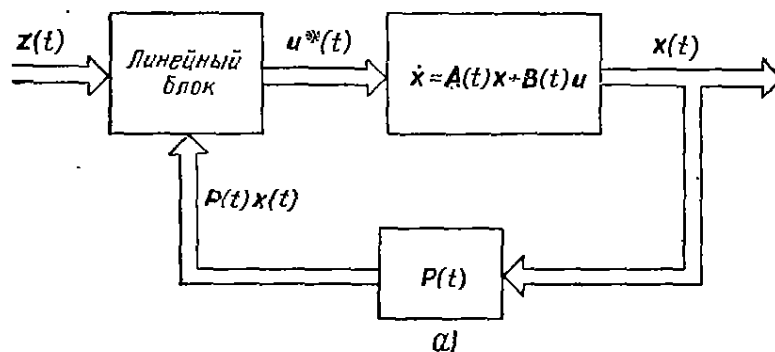
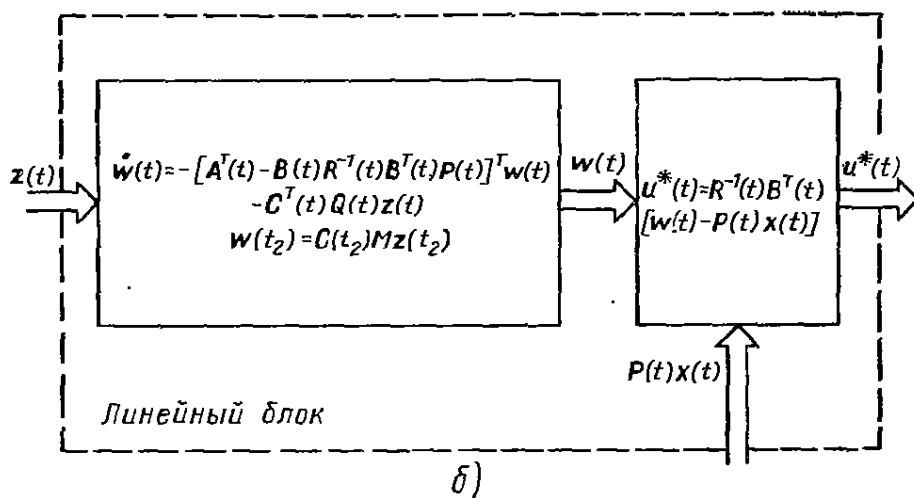


Рис. 15.3: а) Конфигурация общей оптимальной системы управления линейным объектом. Задача этой системы заключается в том, чтобы минимизировать показатель качества в виде (15.53), где  $e(t) = z(t) - C(t)x(t)$ ; б) структура блока  $L$ ; приведенного на рис. 15.3а



Если предполагать управление линейным, то исходя из принципа суперпозиции, разумно ожидать, что оптимальное линейное управление  $u^*(x, t)$  будет представлять собой сумму двух частей, одна из которых зависит только от входного сигнала (и от структуры системы), а вторая — от выходного. Это предполагает структуру системы, которая показана на рис. 15.3а.

В частности, исходя из структуры системы для случая  $z(t) \equiv 0$  в общем случае структуру линейного блока  $L$  (рис. 15.3а) можно принять следующей:

$$u^*(t) = R^{-1}(t) B^T(t) (\varpi(t) - P(t)x(t)), \quad (15.66)$$

где  $\varpi(t)$  —  $n$ -мерный вектор, который является результатом выполнения линейной операции над  $m$ -мерным вектором  $z(t)$ .

При  $u^*(t)$ , имеющем форму (15.66),  $\mathcal{F}^*(x, t)$  принимает вид

$$\mathcal{F}^*(x, t) = \frac{1}{2} x^T(t) P(t) x(t) + \varpi^T(t) x(t) + \frac{1}{2} v(t), \quad (15.67)$$

где  $v(t)$  — скалярная функция, определяющая явную зависимость функции  $\mathcal{F}^*(x, t)$  от времени.

Из выражений (15.25) и (15.28) следует, что граничное условие для  $\mathcal{J}^*(\mathbf{x}, t)$  имеет вид

$$\mathcal{J}^*(\mathbf{x}, t_2) = \mathbf{e}^T(t_2) \mathbf{M} \mathbf{e}(t_2). \quad (15.68)$$

После подстановки выражений (15.67) и (15.68) в уравнение Беллмана (15.62) и выполнения некоторых алгебраических операций приходим к выводу о том, что оптимальное линейное управление вида (15.66) возможно, если:

1) симметричная матрица  $\mathbf{P}(t)$  размерности  $n \times n$  удовлетворяет матричному уравнению Риккати (15.46);

2)  $n$ -мерный вектор  $\boldsymbol{\omega}(t)$  удовлетворяет линейному векторно-матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -[\mathbf{A}^T(t) - \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t)]^T \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{C}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{z}(t) \quad (15.69)$$

с граничным условием в момент времени  $t_2$ :

$$\boldsymbol{\omega}(t_2) = \mathbf{C}(t_2) \mathbf{M} \mathbf{z}(t_2); \quad (15.70)$$

3) скалярная функция  $v(t)$  есть решение дифференциального уравнения

$$-\frac{dv}{dt} = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{z}(t) - (\mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\omega}(t))^T \mathbf{R}^{-1}(t) (\mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\omega}(t)) \quad (15.71)$$

с граничным условием в момент времени  $t_2$

$$v(t_2) = 2\mathbf{z}^T(t_2) \mathbf{M} \mathbf{z}(t_2). \quad (15.72)$$

Калману удалось показать, что приведенные выше результаты 1—3 не только являются достаточными условиями существования линейного оптимального управления, но и необходимы<sup>1)</sup>.

Реализация этого оптимального управления показана на рис. 15.36.

Сделаем ряд замечаний относительно оптимальных линейных законов управления. Хотя теория, относящаяся к данному классу систем, по-видимому, хорошо разработана, это не означает, что во всех конкретных случаях удастся свести системы к стандартной форме и применить формулы, приведенные в § 15.4 и § 15.5. С этим классом задач связан ряд серьезных трудностей.

Во первых, критерий (15.40) вызывает иногда сомнения в целесообразности применения. И к тому же не существует обоснованного способа выбора нужных весовых матриц  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$ . Очень часто соответствующие  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{Q}(t)$  и  $\mathbf{R}(t)$  находят методом проб и ошибок, причем наиболее удовлетворительную переходную характеристику определяют на глаз.

Во-вторых, закон оптимального управления с обратной связью использует все переменные состояния, а это обычно означает, что выход и  $n - 1$  его производных необходимо измерять без ошибок. В большинстве реальных систем это вообще невозможно.

В-третьих, при отсутствии входного сигнала матрицу обратной связи  $\mathbf{P}(t)$  необходимо получить путем решения нелинейной системы уравнений (15.46). Обычно это выполняется численными методами. С инженерных позиций этот метод малоудовлетворителен не только потому, что для систем высокого порядка трудоемкость и объем вычислений существенно возрастают, но также потому, что полученный результат представляет собой совокуп-

<sup>1)</sup> См. в § 15.7 теорему 15.2, которая обобщает результат Калмана.

ность  $n(n+1)/2$  функций времени, которые являются коэффициентами усиления в канале обратной связи. Применительно к нестационарным системам правильность получаемых результатов вызывает сомнение, и любая попытка проверить полученный результат путем использования уравнения Беллмана может оказаться в высшей степени трудоемкой (см. упражнение 15.8). Далее, условие (15.51), являющееся по существу условием оптимальности для стационарных систем, накладывает исключительно жесткие ограничения, практически делая невозможным расчет сколько-нибудь сложных систем.

В-четвертых, для систем с входным сигналом матрицу  $P(t)$  необходимо вычислять, как и раньше, но, кроме того, функции времени  $w(t)$  и  $v(t)$  нужно определять, используя значение  $z(t_2)$  в соответствии с формулами (15.69) — (15.72). Это значит, что мы должны знать будущие значения входного сигнала. Таким образом, данный результат невозможно использовать в случае совместной работы систем в режиме последовательного включения.

### 15.6. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРОИЗВОДНАЯ $\partial \mathcal{J}^*(x, t)/\partial x$ РАЗРЫВНА

В § 15.4 и 15.5 использовался частный случай уравнения Беллмана в виде (15.24). Как было показано в § 15.3—15.5, уравнение (15.24) можно легко использовать применительно к линейному объекту без ограничения на  $u$  и с критерием, представляющим собой интеграл от квадратичной формы по  $x$  и  $u$ . Однако уравнение (14.24) выводится в предположении, что  $\mathcal{J}^*$  имеет непрерывные первые частные производные как по  $x$ , так и по  $t$ <sup>1)</sup>. Заметим, что даже в простой задаче, например, оптимального по быстродействию управления линейным стационарным объектом имеются области, в которых частные производные  $\mathcal{J}^*(x, t)$  по  $x$  разрывны.

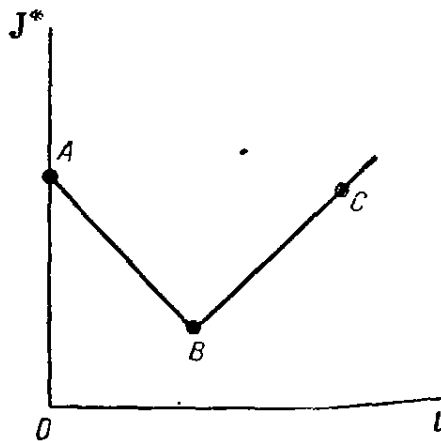


Рис. 15.5. Функция  $\mathcal{J}^*(x, t) = t^*$  для примера 15.3 вдоль типичной траектории, пересекающей линию переключения  $\Gamma_+$  (рис. 15.4). Точки A, B и C соответствуют точкам этой траектории:

$J^*$  — значения функционала вдоль кривой ABC;  $L$  — расстояние от точки A вдоль кривой ABC

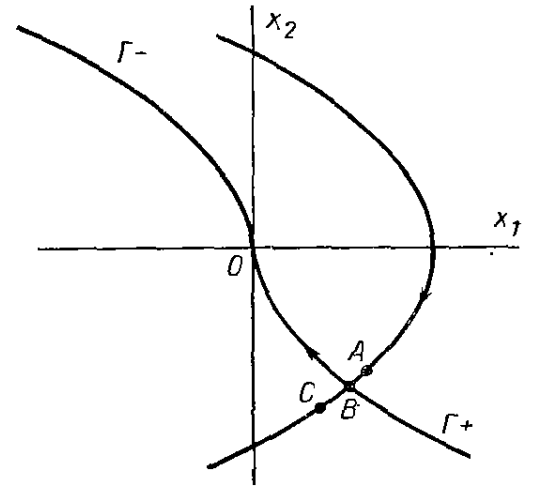


Рис. 15.4. Функция  $\mathcal{J}^*(x, t) = t^*$  в примере 15.3 не является непрерывно дифференцируемой по  $x$  вдоль линии переключения  $\Gamma_{\pm}$

Пример 15.3. Рассмотрим оптимальное по быстродействию управление объектом вида  $1/p^2$ . Линия переключения показана на рис. 15.4 в виде кривой  $\Gamma_{\pm}$ .

Величина  $\mathcal{J}^*$  в этом случае определяет минимальное время, необходимое для достижения начала координат. Вдоль траектории ABC эта величина изменяется, как показано на рис. 15.5. Таким образом,  $\partial \mathcal{J}^*/\partial x$  не будет непрерывной в точке B. В дальнейшем покажем, что  $\partial \mathcal{J}^*/\partial x$  разрывна вдоль всей линии переключения  $\Gamma_{\pm}$  (см. упражнение 15.4).

Заметим, однако, что в приведенном выше случае оптимальная траектория никогда не пересекает линию, вдоль которой функция  $\partial \mathcal{J}^*/\partial x$  претерпевает разрывы.

В полуплоскости над линией переключения  $\Gamma_{\pm}$  через  $(\partial \mathcal{J}^*/\partial x)_{+}$  обозначается значение производной  $(\partial \mathcal{J}^*/\partial x)$ , которое она приобретает в том случае, когда приближение к линии переключения осуществляется сверху, тогда видно (см. задачу 15.4), что если использовать  $(\partial \mathcal{J}^*/\partial x)_{+}$  лишь в этой полуплоскости, то  $(\partial \mathcal{J}^*/\partial x)$  непрерывна вдоль любой

<sup>1)</sup> В § 15.5 для того, чтобы связать функциональное уравнение динамического программирования с условием 1 принципа максимума, дополнительно требовалось существование и непрерывность второй частной производной функции  $\mathcal{J}^*$ .

оптимальной траектории. Аналогичный вывод справедлив и для второй половины плоскости. Используя эти пределы, можно определить вдоль оптимальной траектории производную  $d(\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x})/dt$ , и она будет непрерывной.

Нам известно также, что в этом случае  $(\partial \mathcal{J}^*/\partial t) \equiv 0$  всюду; таким образом, уравнение Беллмана (15.24) будет справедливо, если соответствующий предел функции  $(\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x})$  существует.

Те случаи, в которых производная  $\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x}$  претерпевает разрывы, подобно примеру 15.3, можно рассматривать с помощью более общего уравнения Беллмана (15.22). Заметим, что в предыдущем примере хотя производная  $\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x}$  и является разрывной вдоль линии переключения, полная производная  $\left[ \frac{d\mathcal{J}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t}$  вдоль оптимальной траектории непрерывна (см. упражнение 15.4). Действительно, если даже  $\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x}$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  не являются непрерывными на траектории  $\mathbf{x}^*(t)$  в точке  $\mathbf{x}^*(\tau)$  то пока выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right], \quad (15.73)$$

величина  $\left[ \frac{d\mathcal{J}^*}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t}$  остается непрерывной при  $t = \tau$ .

Обоснованность уравнения Беллмана в общем случае доказана многими авторами, например, [18], [22] и [187]. При весьма общих условиях, которые выполняются для всех задач, приведенных в тексте, если при некотором управлении  $\mathbf{u}^*$  уравнение Беллмана справедливо вблизи линии или поверхности переключения, где  $\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x}$  не определена, то  $\mathbf{u}^*$  представляет собой оптимальную функцию управления. Далее, если существуют односторонние пределы для производной  $\partial \mathcal{J}^*/\partial \mathbf{x}$ , то ее можно рассматривать как сопряженный вектор  $\psi$  во всем пространстве, где последний определен.

## 15.7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ КАК ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Из § 15.3 очевидно — уравнение Беллмана представляет собой необходимое условие оптимальности. Сформулируем и докажем теперь общую теорему, касающуюся метода динамического программирования.

**Теорема 15.2 [187].** Рассмотрим систему, приведенную в § 15.3. Пусть область цели представляет собой множество  $\mathcal{S}$ , а конечный момент времени  $t_2$  не задан. Обозначим через  $\mathcal{V}$  открытую область, в которой функция  $V(\mathbf{x}, t)$  определяется следующим образом:

1)  $\partial V/\partial t$  непрерывна по  $\mathbf{x}$  и  $t$ , а  $\partial V/\partial \mathbf{x}$  или непрерывна по  $\mathbf{x}$  и  $t$ , или удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \tau^+} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f} \right] = \lim_{t \rightarrow \tau^-} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f} \right]$$

в любой момент времени  $t = \tau$ , когда  $\partial V/\partial \mathbf{x}$  или  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  разрывны;

2) для каждого  $\mathbf{x}$  в  $\mathcal{V}$  в каждый момент времени  $t$  функция Гамильтона  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t; \partial V/\partial \mathbf{x})$  имеет абсолютный минимум при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$  из множества допустимых функций управления. Кроме того, управление  $\mathbf{u}^*(t)$  определяет единственную траекторию системы  $\mathbf{x}^*(t)$ ;

3) на конечном множестве  $\mathcal{S}$   $V(\mathbf{x}, t) = 0$ .

Тогда  $V(\mathbf{x}, t) = \mathcal{J}^*(\mathbf{x}, t)$  при всех допустимых функциях управления, которые переводят изображающую точку из состояния  $\mathbf{x}_1$  в  $\mathcal{S}$ , не покидая области  $\mathcal{V}$ . Далее оптимальное управление с обратной связью  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$  можно получить, решая соответствующее уравнение Беллмана.

Теорему 15.2 можно доказать следующим образом. В соответствии с условиями 1 и 2 теоремы можно написать

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, t) + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, t) \right] < \\ < \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right]. \quad (15.74)$$

Проинтегрировав левую часть (15.74) вдоль траектории  $\mathbf{x}^*(t)$  от  $t_1$  до оптимального конечного момента времени  $t_2^*$ , получим

$$\int_{t_1}^{t_2^*} \left[ \frac{\partial V(\mathbf{x}^*, t)}{\partial t} + \left( \frac{\partial V(\mathbf{x}^*, t)}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2^*} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2^*} \left[ \frac{dV}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t} dt + \int_{t_1}^{t_2^*} L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, t) dt = 0, \quad (15.75)$$

где введенное обозначение  $\left[ \frac{dV}{dt} \right]_{\mathbf{u}^*, t}$  поясняется в § 15.3.

Рассмотрим теперь интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2^*} \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \right] dt. \quad (15.76)$$

Далее допустим, что сочетание  $\mathbf{u}^*$  и  $\mathbf{x}^*$  является единственным, которое доставляет абсолютный минимум величине  $W$ , равной в соответствии с условием (15.75) нулю. Если это утверждение неверно, то найдутся другие  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{x}^*(t)$ , которые сделают выражение (15.76) равным нулю. Однако из условия (15.74) следует, что подынтегральное выражение (15.76) всегда положительно. Таким образом, чтобы обратить  $W$  в нуль, указанное подынтегральное выражение должно равняться нулю на всем интервале  $[t_1, t_2^*]$ . Из условий (15.74) следует, что сделать это может лишь пара  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{x}^*(t)$ . Таким образом, теорема 15.2 доказана.

Данная теорема служит обоснованием для всех рассмотренных в данной главе примеров.

Отметим, что слегка изменив условия задачи предыдущего параграфа, можно получить задачу, которую нельзя решить ни с помощью принципа максимума, ни на основе динамического программирования.

**Пример 15.4<sup>1)</sup>**. Снова рассмотрим объект вида  $\dot{x}_1 = x_2$ ;  $\dot{x}_2 = u$ . На этот раз используем показатель качества

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + c^2 u^2) dt.$$

Примем далее ограничение  $|u(t)| \leq 1$ . Если  $u(t)$  не имеет ограничения, то метод, изложенный в предыдущем параграфе, применим и можно найти оптимальное решение (см. пункт а упражнения 15.7):

$$u^*(t) = -\frac{1}{c} (x_1 + \sqrt{1+2c} x_2), \quad (15.77)$$

<sup>1)</sup> В работе [187] имеются еще другие интересные примеры.



где, как это следует из уравнения (15.49), матрица  $P$  имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{1+2c} & c \\ c & c\sqrt{1+2c} \end{bmatrix}. \quad (15.78)$$

Однако в том случае, когда на  $u(t)$  накладывается ограничение типа неравенства, задача становится более сложной. Решение (15.77) будет справедливо внутри области, т. е. когда  $u^*(t)$  не принимает граничных значений. Исходя из этого многие авторы предполагали, что для рассматриваемой здесь задачи оптимальным решением будет управление вида  $u^*(t) = \text{sat} [(-1/c)(x_1 - \sqrt{1+2c}x_2)]^1$ . Однако, как показано ниже, это решение является неверным.

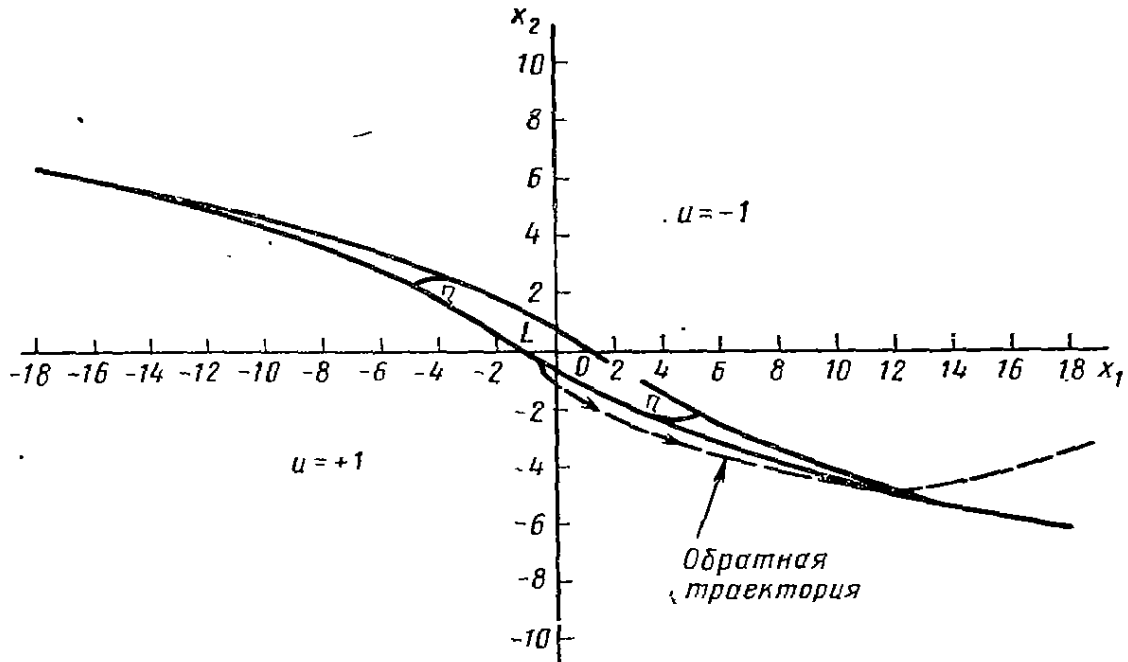


Рис. 15.6. Области различных оптимальных управлений для системы, рассматриваемой в примере 15.4:

$\mathcal{L}$  — область линейного управления;  $\eta$  — области управления; за пределами  $\mathcal{L}$  и  $\eta$  оптимальным является релейное управление

Уравнение Беллмана для этого примера принимает вид (см. упражнение 15.7)

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_1}\right) x_2 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

если

$$\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_2} \right| \leq 1; \quad (15.79)$$

и  $u^*(x)$  равно

$$u^*(x) = \text{sat} \left[ -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x_2} \right], \quad (15.80)$$

что дает точное решение, за исключением того, что  $d\mathcal{J}^*/dx$  заранее неизвестна.

Функция управления вида (15.77) является, несомненно, оптимальной, если она никогда не превышает предела, устанавливаемого ограничением. Все состояния, соответствующие такому управлению, определяют область, где линейное управление (15.77) является оптимальным. Можно заметить, что эта область  $\mathcal{L}$  ограничена двумя линиями, для которых  $u^*(t) = \pm 1$  или

$$-\frac{1}{c} (x_1 + \sqrt{1+2c}x_2) = \pm 1, \quad (15.81)$$

и двумя траекториями, соответствующими управлению  $u = \pm 1$ , и касательными к этим линиям. Область  $\mathcal{L}$  показана на рис. 15.6.

1) 
$$\text{sat}[x] = \begin{cases} +1, & x > 1 \\ x, & |x| \leq 1; \\ -1, & x < -1. \end{cases}$$

Однако сейчас нельзя сделать вывод, что за пределами области  $\mathcal{L}$  требуется релейное управление, так как могут быть и другие области, в которых аргумент функции (15.80) принимает значения меньше единицы.

Для нахождения других областей, где требуется решение, отличное от линейного, нужно проследить за оптимальной траекторией при обратном течении времени, начиная от границы  $\mathcal{L}$ . Для этого найдем сначала канонические уравнения, исходя из принципа максимума. В данном случае этими уравнениями являются

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; & \dot{x}_2 &= \text{sat} \left[ \frac{1}{c^2} \psi_2(t) \right]; \\ \dot{\psi}_1 &= x_1; & \dot{\psi}_2 &= x_2 - \psi_1. \end{aligned} \right\} \quad (15.82)$$

Так как для начальной точки в области  $\mathcal{L}$  справедливо в соответствии с уравнениями (15.82) соотношение  $\mathcal{J}^*(x, t) = (1/2)x^T P x$ , то в этой области

$$\psi = - \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} = - P x. \quad (15.83)$$

Обращая время в уравнениях (15.82) и используя в качестве начальных состояний точки на границе области  $\mathcal{L}$ , можно, проанализировав оптимальную траекторию, найти области, где оптимальное управление подчиняется условию  $|u^*| < 1$ .

Результат, полученный Джонсоном и Уонхэмом [87], показывает, что управление удовлетворяет неравенству  $|u^*| < 1$  также в области  $\eta$ , изображенной на рис. 15.6. Если область  $\eta$  имеет нелинейные границы, то ясно, что управление вида  $u^*(x) = \text{sat} [(-1/c)(x_1 - \sqrt{1 + 2cx_2})]$  не дает правильного решения. К сожалению, точная форма границы для области  $\eta$  до сих пор не определена.

За пределами области  $\mathcal{L}$  и  $\eta$  управление  $u^*$  является релейным, как показано на рис. 15.6.

## 15.8. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Достоинство метода динамического программирования, предложенного Беллманом, состоит в том, что основные функциональные уравнения [уравнения (15.22) и (15.24)] достаточно просто выводятся на основе принципа оптимальности, согласно которому любая часть оптимальной траектории (и связанная с ней функция управления) должна быть оптимальна.

Основное функциональное уравнение, обычно называемое уравнением Беллмана, представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных относительно критерия оптимальности  $\mathcal{J}^*$ . Это уравнение представлено в форме (15.24). Граничное условие задается в одной точке. В общем случае уравнение справедливо во всем пространстве состояний, за исключением, возможно, линии или плоскости переключения. Более общая форма уравнения Беллмана, которая справедлива во всем пространстве состояний данной задачи, определяется уравнением (15.22).

Для того чтобы на основе метода динамического программирования вывести условия оптимальности, полезно мысленно представить себе поверхность функции  $\mathcal{J}^*$  в  $n$ -мерном пространстве переменных  $x$ .

Динамическое программирование удобно использовать при решении оптимальных задач для линейных систем управления, когда показатель качества представляет собой интеграл от суммы квадратов переменных  $x$  и  $u$  (§ 15.4). При решении других задач динамическое программирование менее эффективно в сравнении с принципом максимума, поскольку требуется решать дифференциальное уравнение в частных производных.

В тех случаях, когда  $\partial \mathcal{J}^* / \partial x$  не является непрерывной по  $x$ , используется общая форма уравнения Беллмана — уравнение (15.22). К уравнению (15.22) обычно приходится обращаться в том случае, когда на функцию управления  $u(t)$  наложены ограничения типа неравенств.

Довольно общее достаточное условие (см. § 15.7) повышает эффективность метода динамического программирования.

## 15.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

15.1. Среди  $N$  внешне одинаковых шаров один несколько легче остальных. Требуется указать стратегию для нахождения меньшего по весу шара с помощью минимального числа взвешиваний на весах с рычагами равной длины. Обозначив через  $\mathcal{F}_N^*$  оптимальное количество (минимум) взвешиваний, покажите, используя принцип оптимальности, что

$$\mathcal{F}_N^* = 1 + \min_{0 \leq i \leq \frac{N}{2}} \max [\mathcal{F}_i^*, \mathcal{F}_{N-2i}^*].$$

Найдите  $\mathcal{F}_N^*$ .

15.2. Требуется выбрать четыре неотрицательные величины  $x_1, \dots, x_4$  с тем, чтобы доставить максимум функционалу  $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^4 a^i x_i$ . Сумма величин  $x_i$  ограничена  $\sum_{i=1}^4 x_i = 20$ . Найдите

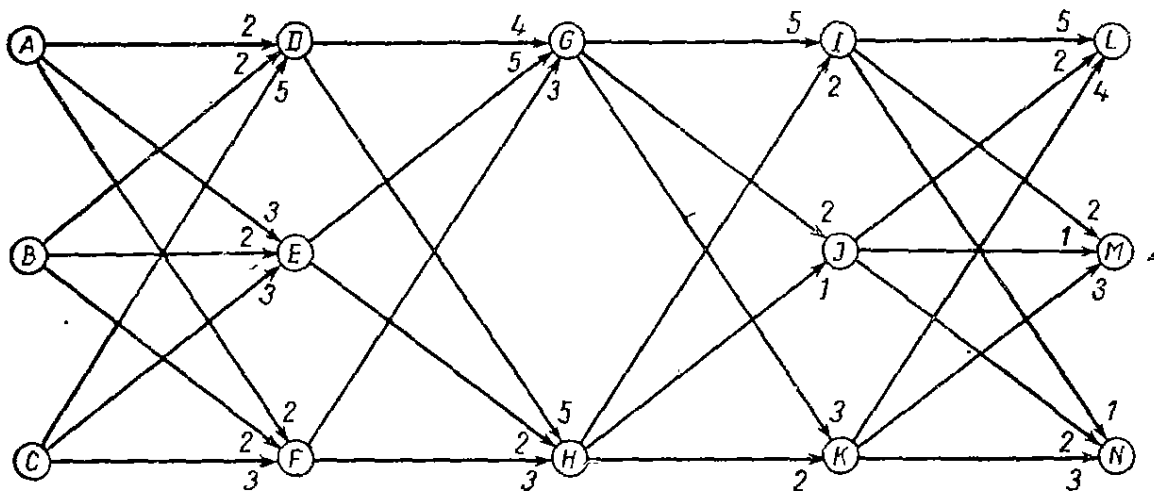


Рис. 15.7. Схема направлений перелетов между городами с промежуточными посадками (цифра над каждой стрелкой указывает стоимость перелета)

закон выбора в зависимости от  $a$ , считая, что  $a > 0$ . Сделайте это сначала с помощью обычных методов, а затем на основе принципа оптимальности.

15.3. Предположим, нам необходимо выбрать наиболее экономичный маршрут перелета из одного города в другой с тремя промежуточными посадками. В одном конечном пункте можно использовать аэровокзалы  $A, B$  или  $C$ , а в другом —  $L, M$  или  $N$ . Кроме того, в качестве пунктов для первой посадки можно выбрать города  $D, E$  или  $F$ ; пункты  $G$  или  $H$  могут служить для второй промежуточной посадки, а  $I, J$ , или  $K$  являются возможными пунктами третьей промежуточной посадки. Стоимость перелета из каждого города в следующий указана на рис. 15.7.

Найдите наиболее экономичный маршрут и его стоимость с помощью:

а) обратного динамического программирования. Сформулируйте принцип оптимальности для этого случая;

б) прямого динамического программирования. Сформулируйте принцип оптимальности и для этого случая;

в) непосредственного перебора всех возможных вариантов.

15.4. Для оптимального по быстрдействию управления объектом вида  $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u$  при  $|u(t)| \leq 1$  покажите, что:

а) минимальное время  $t^*(x)$ , необходимое для перехода из точки  $x$  в начало координат, определяется формулой

$$t^*(x) = \begin{cases} x_2 + \sqrt{4x_1 + 2x_2^2}, & x_1 > -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ -x_2 + \sqrt{-4x_1 + 2x_2^2}; & x_1 < -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \\ |x_2|, & x_1 = -\frac{1}{2} x_2 |x_2|; \end{cases}$$

б)  $t^*(x)$  удовлетворяет уравнению Беллмана, и  $\partial t^*/\partial x$  определяет сопряженные переменные, если соответствующие пределы существуют (заметим, что  $\partial t^*/\partial t = 0$ ).

15.5. Для задачи, рассматриваемой в § 15.3, выведите дифференциальное уравнение в частных производных, аналогичное (15.24), методом прямого динамического программирования.

15.6. Выведите уравнения (15.28) и (15.29), имея в виду, что для задачи Майера критерий оптимальности  $\mathcal{J}^*$  имеет постоянное значение вдоль оптимальной траектории.

15.7. Рассмотрите класс систем с одной компонентой управления  $\dot{x} = Ax + bu$ . Определите управление  $u^*(t)$  с учетом  $|u|(t) \leq 1$ , которое переводит систему из произвольного начального состояния  $x(0) = x_0$  в начало координат таким образом, чтобы минимизировать показатель качества

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Q x + cu^2] dt.$$

Предлагаем читателю:

а) найти оптимальное управление  $u^*(x)$  как функцию координат без учета ограничения  $|u(t)| < 1$ ;

б) показать, что оптимальное управление в этом случае определяется формулой

$$u^*(x) = \text{sat} \left[ \frac{1}{c} \left( - \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T b \right) \right],$$

где

$$\text{sat } x = \begin{cases} x, & |x| \leq 1; \\ \text{sign } x, & |x| \geq 1; \end{cases}$$

в) показать, что уравнение Беллмана с учетом приведенной выше оптимальной функции управления сводится к виду

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T A x - \frac{1}{2c} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T b \right)^2 + \frac{1}{2} (x^T Q x) = 0, \text{ если } |u| < 1,$$

и

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T A x - \left| \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T b \right| + \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (x^T Q x) = 0, \text{ если } |u| = 1.$$

15.8. Задачу оптимального управления нестационарным линейным объектом при показателе качества (15.40), в конечном счете, можно свести к матричному уравнению Риккати, которое приходится решать с помощью вычислительных машин. В этом случае возникает вопрос о корректности программы для вычислительной машины. Оцените, сколь приемлемо решение примера 15.2, представленное на рис. 15.2.

15.9. Покажите, что линейные системы оптимального управления, которые можно синтезировать, решая уравнения (15.49) с положительно определенной матрицей  $P$ , являются асимптотически устойчивыми в целом при оптимальном управлении  $u^*(x)$ . Установите, что функционал  $\mathcal{J}^*(x)$  можно рассматривать как функцию Ляпунова.

15.10. Найдите уравнение Беллмана для систем:

а) примера 14.1;

б) задачи 14.12;

в) задачи 13.14;

г) примера 13.4.

Оцените возможность решения этих уравнений.

15.11. Повторите упражнение 12.9, используя метод решения во временной области, изложенный в § 15.4.

15.12. Для системы  $\ddot{y} + y = u$ :

а) определите оптимальное управление как функцию координат, минимизирующее показатель качества

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2(t) + ru^2(t)) dt \text{ при } r > 0;$$

б) постройте корневой годограф замкнутой оптимальной системы при изменении  $r$ ;

в) постройте частотный годограф оптимальной передаточной функции  $F^*(s)$  [см. уравнение (15.50)] при  $r = 0,1; 1,0; 10,0$ .

Повторите операции, указанные выше в пунктах а) — в), применительно к объекту  $\ddot{y} - y = u$ .

15.13. Для класса задач, которые решаются на основе уравнения (15.60), рассмотрите какую-либо конкретную оптимальную траекторию. Вдоль этой траектории на основе динамического программирования можно найти управление в функции координат системы  $u^*(x, t)$ , и тогда уравнение (15.60) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial t} + L(x, u^*(x, t), t) + \left( \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} \right)^T f(x, u^*(x, t), t) = 0.$$

Используя приведенное выше уравнение и исходя из предположения о том, что производные  $\partial^2 \mathcal{J}^* / \partial t \partial x_i$  и  $\partial^2 \mathcal{J}^* / \partial x_i \partial x_j$  существуют для каждого  $i$  и  $j$ , покажите, что условие 2 теоремы 14.3 выполняется, если производную  $\partial \mathcal{J}^* / \partial x$  отождествить с сопряженным вектором  $\psi(t)$ .

15.14. Для системы  $\dot{y} + y = u$  найдите оптимальное управление как функцию координат, которое минимизирует показатель качества

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt$$

при переводе изображающей точки из произвольного начального состояния в конечное состояние  $y(T) = \dot{y}(T) = 0$ , где  $T$  ограничено.

15.15. Для системы  $\dot{y} + y = u$  определите оптимальное управление как функцию координат, минимизирующее показатель качества

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} y(T)^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2 dt,$$

если  $y(t_0)$ ,  $\dot{y}(t_0)$ ,  $t_0$  и  $T$  заданы, а конечное состояние свободно.

## 15.10. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Термин «динамическое программирование» был предложен в начале 1950-х годов Р. Беллманом, который затем в большом числе работ показал целесообразность его применения в различных областях техники. Результаты применения этого метода обсуждаются в книге [11]. Примеры использования динамического программирования применительно к управлению и задачам оптимизации можно найти в работах [10] и [48].

Самой ранней работой, которая касается оптимальных линейных систем с обратной связью, является, по-видимому, работа [100], в которой изучаются импульсные системы. Ч. В. Мерриэм распространил результаты на непрерывные системы и системы с заданным входным сигналом. Эти результаты опубликованы в работе [139]. Теоретические основы решения линейных оптимальных задач были даны Р. Калманом в работах [92] и [96].

Справедливость применения уравнения Беллмана к задачам оптимального управления подтверждается работами [18], [22] и [187].

## ВЫРОЖДЕННЫЕ И ОСОБЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

К использованию необходимых условий, которые определяются на основе принципа максимума, следует подходить с известной осторожностью. Существуют классы задач, применительно к которым неправильное использование принципа максимума может привести к неверным результатам. Типичным примером является класс особых задач оптимального управления.

Встречаются и другие классы задач, применительно к которым даже правильного использования принципа максимума недостаточно для нахождения решения. Типичный пример — вырожденные задачи оптимального управления.

### 16.1. ОСОБЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В гл. 13 было показано, что при обычном исчислении метод множителей Лагранжа можно использовать в том случае, когда нужно найти точку минимума дважды дифференцируемой функции двух переменных  $f(x_1, x_2)$  с учетом дважды дифференцируемого ограничения  $g(x_1, x_2) = 0$ . Вводя множитель  $\psi$  и образуя функцию  $h(x_1, x_2) \triangleq f(x_1, x_2) + \psi g(x_1, x_2)$ , приступим к нахождению точки минимума, как если бы ограничений не существовало. Это приводит к векторному условию

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x^*} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} + \psi \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0. \quad (16.1)$$

Из рассмотрения условия (16.1) находим, что если

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0, \quad (16.2)$$

но  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} \neq 0$ , то не существует конечного значения  $\psi$ , которое может дать правильный результат, так как это означает возможность определения  $x^*$  только из  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}$ .

**Пример 16.1.** Найдите точку минимума  $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$ , где  $a > b > 0$ , с учетом  $g(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2)^2 - 1 = 0$ . Заметим, что  $g$  можно записать в полярных координатах в следующей форме:  $2r^2 - r^4 - 1$  и  $\partial g / \partial x$  равняется нулю при  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ . Но  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  также удовлетворяет ограничению вида  $g = 0$ . Таким образом, складывается такое положение, когда условие (16.1) неэффективно. Написав для данной задачи условие (16.1) в полном виде, получим

$$\left. \begin{aligned} 2ax_1^* + 4\psi x_1^* [1 - (x_1^{*2} + x_2^{*2})] &= 0; \\ 2bx_2^* + 4\psi x_2^* [1 - (x_1^{*2} + x_2^{*2})] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

откуда видно, что с исчезновением заключенной скобки величины в приведенных выше уравнениях при конечном значении  $\psi$  имеем  $2ax_1^* = 0$ ;  $2bx_2^* = 0$ , т. е. получается неприемлемое решение, так как оно не удовлетворяет ограничению. Далее, если  $\psi = \infty$ , то второй член каждого уравнения (16.3) становится неопределенным и  $x^*$  найти невозможно.

Однако очевидно, что поставленная здесь задача все же имеет решение  $x_1^* = 1$ ;  $x_2^* = 0$  (или  $x_2^* = 0$ ;  $x_1^* = 1$ ), в чем читатель может убедиться путем непосредственной подстановки.

Для предотвращения возможности появления равенства (16.2) можно ввести два множителя Лагранжа  $\psi_0$  и  $\psi_1$  и образовать величину

$$h(x_1, x_2) = \psi_0 f(x_1, x_2) + \psi_1 g(x_1, x_2). \quad (16.4)$$

Если теперь выполнить действия, указанные в условии (16.1), даже когда  $g$  удовлетворяет соотношению (16.2), то эту задачу все же можно решить при  $\psi_0 = 0$ .

В общем случае минимизации функции  $n$  переменных  $f(x_1, \dots, x_n)$  с ограничениями  $g_i(x_1, \dots, x_n)$ , ( $i = 1, \dots, m$ ;  $n > m$ ) образуем сначала

$h(x) = \psi_0 f + \sum_{i=1}^m \psi_i g_i$ . Можно показать [65], что если в точке минимума  $x^*$  ранг матрицы  $[dg_i/dx_j]$  размерностью  $n \times m$  меньше  $m$  и если вектор  $df/dx$  не равен нулю в точке  $x^*$ , то тогда  $\psi_0 = 0$  представляет собой необходимое условие существования  $m$  множителей  $\psi_1, \dots, \psi_m$ , не все из которых равны нулю и удовлетворяющих условию

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0.$$

Случай, в котором  $\psi_0 = 0$ , будем называть особым. Такого рода задача оптимального управления представляет собой аналог вырожденного случая в вариационном исчислении.

Рассмотрим функцию Гамильтона для типичной задачи оптимального управления

$$H = \psi_0 L + \psi^T f = \psi_0 L + H'. \quad (16.5)$$

Предположим, что существует такая задача, что оптимальная траектория  $x^*(t)$  и оптимальное управление  $u^*(t)$  удовлетворяют всем необходимым условиям для приведенной функции Гамильтона  $H' = \psi^T f$ . Тогда для того, чтобы гамильтониан (16.5) дал также оптимальное решение, должно быть выполнено условие  $\psi_0 = 0$ . Оптимальная траектория  $x^*(t)$ , вдоль которой  $\psi_0 = 0$ , называется особой оптимальной траекторией. Задачу управления, дающую особую оптимальную траекторию, будем называть особой задачей оптимального управления.

Возможным примером особых задач управления являются задачи, в которых решение не зависит от функции  $L$ . Этот класс задач плохо сформулирован, так как на решение не будет оказывать влияние показатель качества  $J$ . Однако из этого случая можно получить некоторые геометрические указания, которые могут быть полезны при рассмотрении других вырожденных и особых задач управления.

Отметим, что  $\psi_0$  будут тождественно равняться нулю, если достижимое множество  $C$  в конечной точке в  $n + 1$ -мерном пространстве таково, что ось  $x_0$  параллельна опорной плоскости к  $C$  в этой конечной точке. В подобном случае вектор  $\psi$ , который, как было показано, перпендикулярен извне к достижимому множеству  $C$ , будет тогда иметь составляющую  $\psi_0$ , равную нулю.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим следующий пример.

**Пример 16.2.** Пусть имеем систему первого порядка  $\dot{x} = u$ . Желательно найти такую функцию управления  $u^*(t)$  в интервале времени  $[0, 1]$  с учетом  $0 \leq u(t) \leq 1$ , которая пере-

водит состояние системы из  $x(0) = 0$  в  $x(1) = 1$ , максимизируя вместе с тем критерий качества <sup>1)</sup>

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \sqrt{1-u(t)} dt.$$

Так как  $\mathcal{J} = -\min(-\mathcal{J})$ , то приведенную выше задачу можно решить также путем минимизации  $\int_0^1 -\sqrt{1-u(t)} dt$  с последующим изменением знака найденного критерия оптимальности на обратный.

Эта задача сформулирована недостаточно хорошо, так как имеется лишь одна функция управления, а именно:  $u(t) \equiv 1$ , которая может переместить  $x(t)$  из 0 в 1 за отведенный интервал времени, следовательно,  $u^*(t) \equiv 1$ . Теперь можно показать, что в данной задаче  $\psi_0$  должна равняться нулю, чтобы принцип максимума был удовлетворен.

Гамильтониан для нашей задачи имеет вид

$$H(\psi_0, \psi_1, x, u, t) = -\psi_0 \sqrt{1-u(t)} + \psi_1 u(t). \quad (16.6)$$

Таким образом, в соответствии с принципом максимума имеем

$$H^*(t) \stackrel{\Delta}{=} H(\psi_0, \psi_1, x^*, u^*, t) \geq H(\psi_0, \psi_1, x^*, u, t).$$

При  $u^*(t) \equiv 1$  выражение (16.6) принимает вид

$$\psi_1 \geq -\psi_0 \sqrt{1-u(t)} + \psi_1 u(t). \quad (16.7)$$

Это условие должно быть удовлетворено для всех допустимых  $u(t)$ .

Так как  $\partial H/\partial x = 0$ , то  $\psi_1$  является постоянной. Напомним, что в соответствии с принципом максимума  $\psi_0$  также является постоянной с неположительным значением, а  $\psi_0$  и  $\psi_1$  не могут равняться нулю одновременно. Если  $\psi_0 = 0$ , то уравнение (16.7) может быть выполнено при положительном значении  $\psi_1$ . Однако, если  $\psi_0 < 0$ , то нельзя найти  $\psi_1$ , которая удовлетворила бы уравнению (16.7) для всех допустимых  $u(t)$ . Таким образом, мы видим, что  $\psi_0 = 0$  представляет собой единственное решение, и потому оно является особым.

Тот факт, что  $\psi_0$  равно нулю, можно определить также путем рассмотрения достижимого множества для данной задачи. При  $x_0 = \mathcal{J}$  читатель может сам убедиться в том, что достижимое множество в зависимости от  $x_0$  и  $x_1$  принимает вид области, изображенной на рис. 16.1. В точке  $x = x_1$  внешняя нормаль достижимого множества должна располагаться вдоль оси  $x_1$ ; следовательно,  $\psi_0 = 0$ .

Конечно, особые задачи управления не обязательно бывают такими наглядными, как в примере 16.2, но очевидно, что нетривиальные особые задачи управления серьезно еще не изучались.

## 16.2. ВЫРОЖДЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В задачах оптимального управления траектория считается особой, если вдоль нее необходимые условия оптимальности, обеспечиваемые принципом максимума, удовлетворяются нетривиальным образом. В этих случаях, несмотря на использование обычных необходимых условий, не удастся получить полезной информации. Для нахождения оптимальной траектории приходится тогда применять другие методы. Задачу оптимального управления, в которой находят оптимальную вырожденную траекторию, будем называть вырожденной задачей оптимального управления.

В случае оптимального по быстродействию управления линейным стационарным объектом единственным проявлением вырожденного управления

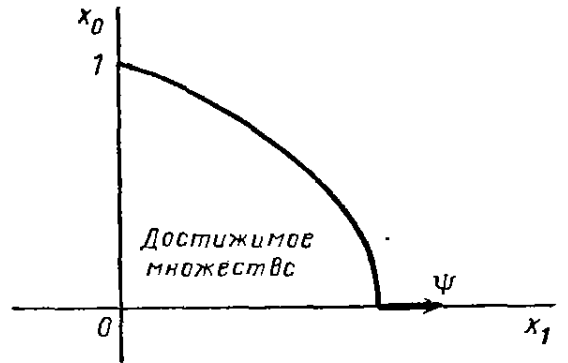


Рис. 16.1. Достижимое множество системы, рассматриваемой в примере 16.2

<sup>1)</sup> Предполагается, что в данной задаче следует использовать положительное значение квадратного корня.



является неединственность управления  $u^*(t)$ . Последнее было отмечено в гл. 14, а теперь рассмотрим это более детально.

В гл. 14 было показано, что для задач оптимального по быстродействию управления линейным объектом при ограничении  $|u(t)| \leq U$  в соответствии с принципом максимума оптимальное управление должно быть представлено в виде

$$[u^*(t) = U \operatorname{sign}[B^T \psi(t)].]$$

Если  $i$ -я строка матрицы  $B^T$  представлена вектором-строкой  $b_i^T$  (т. е.  $b_i$  представляет собой  $i$ -й вектор-столбец  $B$ ), то мы имеем

$$u_i^*(t) = U \operatorname{sign}[b_i^T \psi(t)].$$

Вообще, если функция  $b_i^T \psi(t)$  пересекает 0 только в отдельные моменты времени, как, например, показано на рис. 16.2а, то тогда  $j$ -я составляющая

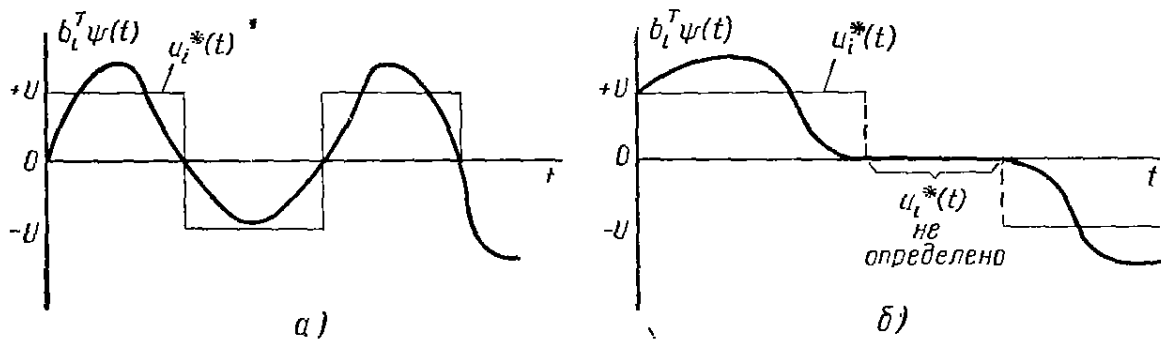


Рис. 16.2: а) Случай, когда  $u_i^*(t)$  хорошо определяется функцией  $\operatorname{sign}[b_i^T \psi(t)]$ ; б) Случай, когда  $u_i^*(t)$  не полностью определяется функцией  $\operatorname{sign}[b_i^T \psi(t)]$

$u^*(t)$  выражается релейной функцией, знак которой определяется функцией переключения, представляющей собой линейное сочетание составляющих сопряженного вектора  $\psi(t)$ .

Если для какого-то индекса  $i$  скалярное произведение  $b_i^T \psi(t)$  тождественно равняется нулю на конечном интервале времени, как показано на рис. 16.2б, то имеем  $u_i^*(t) = \operatorname{sign} 0$  и функция управления не определяется. Таким образом, принцип максимума не обеспечивает получения достаточной информации для решения задачи, и приходится обращаться к другим источникам информации.

В гл. 14 было показано, что  $L$ -управляемыми являются такие системы, в которых ни одна составляющая функции переключения  $B^T \psi(t)$  не равняется нулю на конечном интервале времени. Таким образом, мы видим, что  $L$ -управляемые системы не могут иметь вырожденных оптимальных по быстродействию решений.

Можно легко определить, почему системы, не являющиеся  $L$ -управляемыми, в состоянии давать вырожденные управления, как это видно из следующего примера.

**Пример 16.3.** Рассмотрим систему второго порядка, которая в канонической форме определяется выражением

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u_1; \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u_2.$$

Очевидно, что как «система второго порядка» она полностью управляема, но не  $L$ -управляема. Предположим, что  $\lambda$  действительны: далее примем  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ , а также  $|u_1| \leq 1$  и  $|u_2| \leq 1$ . Рассмотрим теперь начальные состояния на линии  $x_1(0) = x_2(0)$ . Системы, включающие в себя  $x_1$  и  $x_2$ , будут рассмотрены отдельно. Так как каждая система первого порядка  $L$ -управляема, то имеется единственное релейное оптимальное по быстродействию управление,

приводящее каждую систему в начало координат. При  $x_1(0) = x_2(0)$  систему с меньшей постоянной времени или большим значением  $\lambda$  можно быстрее привести к началу координат. Оптимальное время приведения  $x_1$  и  $x_2$  к началу координат обозначим соответственно через  $T_1$  и  $T_2$ ; так как  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то видно, что  $T_1 < T_2$ .

Рассмотрим системы, включающие в себя  $x_1$  и  $x_2$ , вместе как систему второго порядка. Поскольку в соответствии с условиями оптимального по быстродействию управления  $x_1$  и  $x_2$  должны одновременно достигнуть начала координат, то ясно, что составляющая система первого порядка с большей постоянной времени определяет оптимальное время управления. Очевидно, что оптимальным временем должно быть  $T_2$ . Поэтому любое  $u_1$ , которое может привести  $x_1$  к началу координат за время  $T$ , больше минимального времени  $T_1$  (для  $x_1$ ), все же можно рассматривать как оптимальное управление. Таким образом,  $u_1$  является неединственным; по существу оно не должно быть даже релейным.

К более значимым системам второго порядка, которые не являются  $L$ -управляемыми, но являются полностью управляемыми, относятся системы, сводимые к виду

$$\dot{x} = \lambda_1 x_1 + b_{11} u_1; \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + b_{21} u_1 + b_{22} u_2.$$

Здесь можно использовать тот же метод рассуждения, как и выше, чтобы показать неединственность оптимального по быстродействию управления (см. упражнение 16.5).

Полезно изучить некоторые свойства  $L$ -управляемых систем.

Если обозначить через  $b_i$   $i$ -й вектор-столбец матрицы  $B$ , то имеем следующую теорему.

**Теорема 16.1.** Линейная стационарная система  $\dot{x} = Ax + Bu$  является  $L$ -управляемой в том и только в том случае, если векторы  $b_i, Ab_i, A^2 b_i, \dots, A^{n-1} b_i$  линейно независимы для каждого значения  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ).

Для доказательства этой теоремы заметим сначала, что так как  $\psi(t) = \Psi(t, 0)\psi(0) = (e^{-At})^T \psi(0)$ , то можно  $[B^T \psi(t)]$  представить в виде  $[\psi^T(0) e^{-At} B]^T$ . Предположим, что в каком-то интервале времени  $j$ -я составляющая функция переключения становится равной нулю. Это значит, что в этом интервале:

$$\left. \begin{aligned} b_j^T \psi(t) &= \psi^T(0) e^{-At} b_j = 0; \\ \frac{d}{dt} (b_j^T \psi(t)) &= -\psi^T(0) A e^{-At} b_j = -\psi^T(0) e^{-At} A b_j = 0; \\ \frac{d^2}{dt^2} (b_j^T \psi(t)) &= \psi^T(0) A^2 e^{-At} b_j = \psi^T(0) e^{-At} A^2 b_j = 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (b_j^T \psi(t)) &= \psi^T(0) (-A)^{n-1} e^{-At} b_j = \psi^T(0) e^{-At} (-A)^{n-1} b_j = 0. \end{aligned} \right\} (16.8)$$

Для вывода системы (16.8) воспользуемся тем, что  $A e^{-At} = e^{-At} A$ .

Теперь систему (16.8) можно выразить в виде матричного уравнения вида

$$K_j e^{-At} \psi(0) = 0, \quad (16.9)$$

где  $K_j$  — матрица размерностью  $n \times n$  со столбцами  $b_j, Ab_j, A^2 b_j, \dots, A^{n-1} b_j$ .

Так как  $e^{-At}$  является не особой, а  $\psi(0)$  вообще не равна нулю, то выражение (16.9) означает, что  $K_j$  должна быть особой. Иначе говоря, это значит, что столбцы  $K_j$  не могут быть линейно независимыми (см. приложение I). Таким образом, линейная независимость векторов-столбцов матрицы  $K_j$  представляет собой необходимое условие для необращения в нуль любых составляющих функции переключения ( $B^T \psi(t)$ ).

Та часть теоремы, которая содержит достаточное условие, является, по видимому, вполне убедительной, если не произойдет скольжения или каких-

либо необычных явлений. Из рассмотрения формы функции переключения следует, что эти явления будут невозможны, если ни одна из составляющих функции переключения не обратится в нуль на каком-либо конечном интервале времени.

Неединственность  $u^*(t)$  можно лучше представить с помощью геометрической картины, изображенной в гл. 14. Для системы, рассматриваемой в примере 16.3, достижимое множество  $\mathcal{C}$  относительно начала координат в трехмерном пространстве с координатами  $x_1$ ,  $x_2$  и  $t^*$  примет вид обращенного тетраэдра с искривленными сторонами (покажите это). После некоторого размышления станет ясно, что проекции на плоскость  $x_1, x_2$  множества  $\mathcal{C}$  будет достаточно для определения ориентации вектора  $\eta$  или  $\psi^*(t_1)$ . Заметим, что на плоскости  $x_1, x_2$  проекция множества  $\mathcal{C}$  представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными основной оси.

Можно видеть, что вдоль каждой стороны прямоугольника вектор  $\psi^*(t_1)$ , представляющий собой внешнюю нормаль к  $\mathcal{C}$ , должен быть одним и тем же. Далее, так как стороны прямоугольника параллельны оси  $x_1$  или оси  $x_2$ , одна из составляющих  $\psi^*(t_1)$  должна быть равна нулю. Из сопряженных уравнений  $\dot{\psi}_1 = -\lambda_1 \psi_1$  и  $\dot{\psi}_2 = -\lambda_2 \psi_2$  следует, что если одна из составляющих  $\psi$  равна нулю при  $t_1$ , то она останется равной нулю и в дальнейшем, приводя к условию вырожденности.

Плоская граница достижимого множества  $\mathcal{C}$  определяет условие вырожденности задачи. Конечно, это лишь достаточное, но не необходимое условие.

Интересные случаи вырожденного оптимального по быстродействию управления некоторыми линейными стационарными системами четвертого порядка представлены в работе [183].

### 16.3. ВЫРОЖДЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА

В случае оптимального по расходу топлива управления линейными стационарными объектами вырожденное управление вновь подразумевает неединственность. Однако условия вырожденности здесь оказываются менее жесткими, чем в задачах оптимального по быстродействию управления. Так, например, из гл. 12 мы уже видели, что как единичные, так и двойные интеграторы могут иметь неединственные решения оптимальных по расходу топлива систем, хотя уравнения  $\dot{x} = u$  и  $\ddot{x} = u$  являются, очевидно,  $L$ -управляемыми и, следовательно, не могут иметь особых оптимальных по быстродействию регуляторов.

Заметим, что объекты управления с одной или более степенями интегрирования будут всегда приводить к неединственности для каких-либо начальных состояний, если показатель качества имеет форму  $\mathcal{J} = \int_0^T |u| dt$ , где

$T \geq t^*$ . Чтоб показать это, будем придерживаться действий, указанных в примере 12.5 (и упражнении 12.5), и выберем начальную точку, которая требует  $u^*$ , не меняющего знак. Существует бесконечное число способов выбрать такое  $u^*$ , чтобы получить в результате один и тот же функционал  $\mathcal{J}^*$ .

Поэтому имеет место следующая теорема.

**Теорема 16.2.** Оптимальное по расходу топлива управление линейным объектом  $\dot{x} = Ax + Bu$  будет невырожденным, если  $|AK_j| \neq 0$  при  $j = 1, \dots, r$ , где  $K_j$  — та же матрица, что и в уравнении (16.9).

Так как  $|AK_j| = |A| |K_j|$ , то соотношение  $|AK_j| = 0$  означает, что или  $|A| = 0$ , или  $|K_j| = 0$ , или и то и другое вместе. При  $|K_j| = 0$  объект не является  $L$ -управляемым. Кроме этого, при  $|A| = 0$  по меньшей мере одно из собственных значений  $A$  равно нулю и управляемый объект имеет по меньшей мере одну степень интегрирования.

Попробуем доказать справедливость теоремы 16.2.

Из гл. 14 известно, что решение оптимальной по расходу топлива задачи с линейным управляемым объектом имеет вид

$$u_j^*(t) = -\operatorname{dez}(b_j^T \psi(t)), \quad j = 1, \dots, r. \quad (16.10)$$

Таким образом,  $u_i^*(t)$  становится неопределенной только в том случае, если соответствующая функция переключения  $(b_j^T \psi(t))$  тождественно равна  $+1$  или  $-1$  на каком-то конечном интервале времени.

При  $b_j^T \psi(t)$  тождественно равном  $+1$  или  $-1$  имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(b_j^T \psi(t)) &= b_j^T \dot{\psi}(t) = b_j^T (-A^T \psi(t)) = -(Ab_j)^T \psi(t) = 0; \\ \frac{d^2}{dt^2}(b_j^T \psi(t)) &= (A^2 b_j)^T \psi(t) = 0; \\ \frac{d^n}{dt^n}(b_j^T \psi(t)) &= (-1)^n (A^n b_j)^T \psi(t) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

При наличии матрицы  $K_j$  размерностью  $n \times n$ , определенной в предыдущем параграфе, систему уравнений (16.11) можно записать в виде

$$(AK_j)^T \psi(t) = 0. \quad (16.12)$$

Так как  $\psi(t) \neq 0$ , то отсюда следует условие теоремы 16.2.

Полезно снова рассмотреть геометрические соотношения, выведенные в гл. 14.

Пример 16.4. Заметим, что для системы

$$\dot{x} = au \quad \text{с} \quad \mathcal{J} = \int_0^T |b| |u| dt \quad \text{и} \quad |u| < U \quad \text{достижимое}$$

множество  $C(t)$  в плоскости зависимости  $\mathcal{J}$  от  $x$  представляет собой перевернутый равнобедренный треугольник, изображенный на рис. 16.3. Стороны этого треугольника имеют наклон  $b/a$ .

Предположим, что при  $t = 0$   $x$  находится в состоянии  $x_1$ . Рассмотрим теперь конечное состояние  $x_2$ . При  $t < t^*$ , где  $t^*$  — оптимальное время, невозможно достигнуть  $x_2$  с помощью какого-либо допустимого управления и, следовательно, решение отсутствует. В момент времени  $t = t^*$ ,  $C(t^*)$  лишь касается  $x_2$ , и оптимальные по быстрдействию и расходу топлива решения равны друг другу. По существу точка  $x = x_2 = aU$ ;  $\mathcal{J} = bU$  представляет собой угловую точку треугольника  $C(t^*)$  (см. рис. 16.3). Здесь имеется неясность<sup>1)</sup> в том, что должна представлять собой внешняя нормаль  $\psi(t^*)$ . Эта неясность устраняется использованием принципа максимума, на основе которого можно легко сделать вывод с том, что справедливо условие  $\psi(t^*) = b/a$ .

При  $T > t^*$  из рис. 16.3 следует, что оптимальная по расходу топлива точка  $x = x_2$ ;  $\mathcal{J} = bU$  лежит на стороне треугольника  $C(T)$  и допускает единственное значение для  $\psi(t_2)$ , а именно:  $\psi(t_2) = b/a$ .

При использовании принципа максимума мы видим, что  $u^*(t) = U \operatorname{dez}[\psi(t) a/b]$  представляет собой оптимальное по расходу топлива решение, и особое управление имеет место

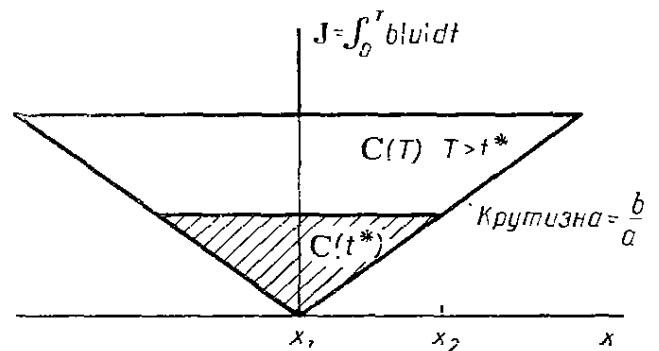


Рис. 16.3. Достижимое множество  $C(t)$  при  $t = t^*$  и  $t = T > t^*$  для системы, рассматриваемой в примере 16.4

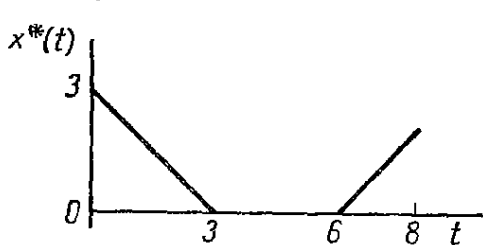
<sup>1</sup> Подобная неясность наблюдается также и в случае  $C(t^*)$  в примере 16.3, в чем читатель может легко убедиться сам.

для  $\psi(t) a/b \equiv +1$  или  $\psi(t) \equiv b/a$ . На это ясно указывает данная геометрическая схема при  $T > t^*$ . Видно, что и в этом случае плоская сторона в выпуклом множестве  $C(T)$  также дает необходимое решение.

#### 16.4. ВЫРОЖДЕННЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ДРУГИХ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В других видах задач оптимального управления следствием вырожденности не обязательно является неединственность решения. Это относится даже к задачам с простейшими линейными стационарными объектами управления.

**Пример 16.5.** Найти оптимальное управление  $u^*(t)$  с учетом  $|u|(t) \leq 1$ , которое переместит управляемый объект вида  $\dot{x} = u$  из  $x = 3$  в  $x = 2$  за 8 сек, минимизируя вместе с тем



интеграл  $\int_0^8 x^2 dt$ .

На основе принципа максимума находим

$$H = -x^2 + \psi u, \quad (16.13)$$

где

$$\dot{\psi} = 2x \quad (16.14)$$

и

$$\dot{x} = u. \quad (16.15)$$

Из  $H^* = \max H$  видно, что оптимальное управление должно иметь вид

$$u^* = \text{sign } \psi \quad (16.16)$$

всякий раз, когда  $\psi \neq 0$ .

При рассмотрении этой задачи можно сразу же заметить следующее: 1) релейное управление совершенно неприменимо к данному конкретному ряду чисел; 2)  $\psi$  может стать тождественно равным нулю всякий раз, когда  $x = 0$  (и, следовательно,  $\dot{\psi} = 0$ ). При  $\psi \equiv 0$  принцип максимума не дает достаточной информации, и для получения решения необходимо использовать другие методы. В этом случае истинное решение можно легко получить на основе простого рассуждения.

Заметим, что  $\psi(0)$  не может быть положительной, так как это приведет к неограниченному возрастанию  $x$ . После некоторого анализа можно убедиться также в том, что  $\psi(0)$  не может быть равной нулю (ответьте — почему?).

Рис. 16.4. Функции  $x^*(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $u^*(t)$  системы, рассматриваемой в примере 16.5

Таким образом, функция  $\psi(0)$  должна быть отрицательной. Однако из выражения (16.14) следует, что  $\dot{\psi}(0)$  является положительной. Таким образом  $u^*(t)$  должна быть равна  $-1$  в интервале времени  $0 \leq t < 3$ .

Однако при  $t = 3$  из физического смысла следует, что функция  $\psi$  становится равной нулю. При  $t = 6$  снова имеем, что для удовлетворения краевому условию  $\psi$  должна стать положительной, а  $u^*(t)$  — равной  $+1$ , при которой  $x^*$  перемещается от 0 до 2 за 2 сек.

Функции  $x^*(t)$ ,  $\psi(t)$  и  $u^*(t)$  нанесены на график (рис. 16.4) в зависимости от  $t$ . Из выражения (16.14) следует, что  $\dot{\psi}$  должна быть непрерывной, т. е. функция  $\psi$  должна иметь непрерывные первые производные при  $t = 3$  и  $t = 6$ .

Задачи особого управления могут возникнуть также в том случае, когда функционал  $J$  становится лишь функцией граничных точек. Эта ситуация может возникнуть, если подинтегральное выражение  $L$  в задаче Лагранжа представляет собой точный интеграл. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x, t)}{g(x, t)} \quad (16.17)$$

считается уравнением в полных дифференциалах, если

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (16.18)$$

Для такого уравнения, если выбрать функцию  $h(x, t)$  такой, что

$$\frac{\partial h}{\partial t} = f(x, t); \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -g(x, t), \quad (16.19)$$

имеем

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial t} dt = -g(x, t) dx + f(x, t) dt = 0. \quad (16.20)$$

Уравнение (16.20) означает, что точное дифференциальное уравнение вида (16.17) эквивалентно уравнению  $dh = 0$ , а следовательно, его можно проинтегрировать для получения  $h(x, t) = c$ , где  $c$  произвольная постоянная.

В вариационном исчислении может встретиться следующая задача.

**Пример 16.6.** Найти траекторию, которая удовлетворяет краевым условиям  $x(t_1) = x_1$  и  $x(t_2) = x_2$  и минимизирует функционал

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} (3x^2 \dot{x} t + x^3) dt.$$

Так как

$$(3x^2 \dot{x} t + x^3) dt = 3x^2 t dx + x^3 dt = d(x^3 t),$$

то  $\mathcal{J}^* = x_2^3 t_2 - x_1^3 t_1$  для любой траектории удовлетворяет этим краевым условиям.

Можно предположить, что указанный выше класс задач отличается от обычных вариационных задач. Однако последнее не обязательно по двум причинам. Во-первых, для задач, включающих дифференциальные уравнения, из теоремы единственности следует, что имеется самое большее лишь одна траектория, которая может удовлетворить краевому условию. Это по меньшей мере устраняет неединственность в оптимальном решении. Во-вторых, в задачах с многими переменными вырожденное управление появляется лишь на особых гиперповерхностях, а в остальной области решение является невырожденным. Основной задачей тогда является определение этих особых поверхностей и установление того, что вырожденные решения являются оптимальными.

Оба упомянутых выше условия встречаются в классе систем, который рассмотрели Уонхэм и Джонсон [201].

Рассмотрим линейный стационарный объект управления, который является полностью управляемым и имеет один вход. Тогда без потери общности уравнение этой системы можно написать в нормальной форме

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что желательно найти оптимальное управление  $u^*(t)$  с учетом  $|u(t)| \leq 1$ , которое переводит систему из произвольного начального состояния  $\mathbf{x}_0$  в начало координат  $\mathbf{0}$  за какой-то отрезок времени  $T$  ( $T$  свободное) с тем, чтобы минимизировать показатель качества  $\mathcal{J} =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t)) dt, \quad \text{где } \mathbf{Q} \text{ — диагональная матрица: } \mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, \dots, q_n),$$

где  $q_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . При использовании принципа максимума имеем

$$H = \psi^T A x + (\psi^T b) u - \frac{1}{2} x^T Q x,$$

откуда сразу же получим условие

$$u^*(t) = \text{sign}(\psi_n(t)) \text{ всякий раз, когда } \psi_n(t) \neq 0. \quad (16.21)$$

Поэтому следует найти особые случаи, когда  $\psi_n(t)$  обращается в нуль на каком-то конечном интервале времени. Рассмотрим

$$\psi_n(t) \equiv 0.$$

Канонические уравнения для  $\dot{x}_i$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n; \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n a_i x_i + u, \end{aligned} \right\} \quad (16.22)$$

а уравнения для  $\ddot{\psi}_i$  следующие:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -a_1 \psi_n + q_1 x_1; \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 - a_2 \psi_n + q_2 x_2; \\ &\dots \\ \dot{\psi}_{n-1} &= -\psi_{n-2} - a_{n-1} \psi_n + q_{n-1} x_{n-1}; \\ \dot{\psi}_n &= -\psi_{n-1} - a_n \psi_n - q_n x_n. \end{aligned} \right\} \quad (16.23)$$

Если  $\psi_n \equiv 0$ ,  $\dot{\psi}_n \equiv 0$ , то из последнего уравнения (16.23) имеем

$$\psi_{n-1} = q_n x_n \quad \text{или} \quad \dot{\psi}_{n-1} = q_n \dot{x}_n. \quad (16.24)$$

При использовании соотношений (16.24) последнее уравнение (16.22) дает

$$u = - \sum_{i=1}^n a_i x_i - \frac{1}{q_n} (\psi_{n-2} + a_{n-1} \psi_n - q_{n-1} x_{n-1}), \quad (16.25)$$

что справедливо всякий раз, когда абсолютное значение правой части меньше единицы. В последнем случае  $u$  является функцией некоторых из  $x_i$  и  $\psi_i$  и последние уравнения из (16.22) и (16.23) сводятся к алгебраическим соотношениям и могут не рассматриваться при анализе дифференциальных уравнений (16.22) и (16.23).

Теперь первые  $(n-1)$  уравнений (16.22) и первые  $(n-1)$  уравнений (16.23) наряду с (16.24) дают свободную линейную инвариантную по времени систему  $2(n-1)$ -го порядка. Первые  $(n-1)$  уравнений (16.22) образуют гиперповерхность в пространстве состояний. Эта гиперповерхность является особой, так как на ней  $\psi_n(t) \equiv 0$ . Кроме того, управление  $u^*(x)$ , удовлетворяющее уравнению (16.25), удерживает изображающую точку на этой гиперповерхности.





ционал  $\mathcal{J}$  зависит лишь от начального и конечного состояний. Теперь конечным состоянием является начало координат  $0$ , которое, как мы видим, также находится на вырожденной гиперповерхности. Таким образом, на этой гиперповерхности через каждую точку проходит единственная траектория, которая в конечном счете приводит к началу координат.

Если можно установить, что лучшего пути перемещения изображающей точки по вырожденной гиперповерхности в начало координат нет, то оптимальность вырожденного управления, определяемого уравнением (16.30), обеспечена. Это доказали Уонхэм и Джонсон, показав, что значение  $\mathcal{J}$ , определяемое уравнением (16.30) для точек на вырожденной гиперповерхности, невозможно улучшить.

Оптимальное решение для начальных состояний, не находящихся на вырожденной гиперповерхности, будет включать в себя управление  $u^*$ , кото-

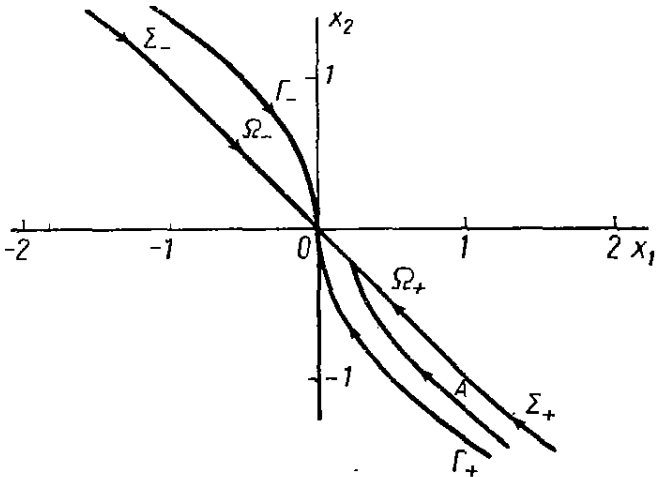


Рис. 16.5. Различные области оптимального управления для системы, рассматриваемой в примере 16.7

рое равно  $+1$  или  $-1$  до тех пор, пока не будет достигнута вырожденная гиперповерхность. Следует отметить, что в зависимости от того, где оптимальная траектория встречается с вырожденной гиперповерхностью, функция  $u$  может иметь или не иметь разрывности при достижении гиперповерхности.

Отметим также, что в то время как в примере 16.5 функция  $\text{sign } 0$  давала значение, равное нулю, то в данном случае, ввиду того, что управление  $u(x)$  является линейным, функция  $\text{sign } 0$  дает значение, непрерывно изменяющееся в пределах от  $+1$  или  $-1$  до  $0$ .

Пример 16.7. (Уонхэм и Джонсон). Пусть управляемый объект имеет вид  $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u$

$$\text{и } \mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^T (x_1^2 + x_2^2) dt.$$

В соответствии с каноническим уравнением

$$\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = u; \dot{\psi}_1 = x_1; \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + x_2 \quad (16.32)$$

и принципом максимума имеем  $u^* = \text{sign } \psi_2$  всякий раз, когда  $\psi_2 \neq 0$ .

Если  $\psi_2 \neq 0$ , то уравнение (16.32) дает  $\dot{\psi}_2 = 0 = -\psi_1 + x_2$ , а следовательно,  $x_2 = \psi_1$ . Тогда первое и третье уравнения (16.32) дают

$$\dot{x}_1 = \psi_1; \dot{\psi}_1 = x_1. \quad (16.33)$$

Система (16.33) эквивалентна  $\ddot{x}_1 - x_1 = 0$ ; в этом случае собственными значениями уравнения (16.33) являются  $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = +1$ . Кроме того, из соотношения (16.31) получим  $d_1 = 1; d_2 = 0$ . Таким образом, с помощью  $\lambda_1$  уравнений (16.29) и (16.30) найдем уравнение для всех вырожденных траекторий в следующей форме:

$$x_1 + x_2 = 0; \quad |x_1| \leq 1, \quad (16.34)$$

которое представляет собой отрезок прямой линии, проходящей через начало координат. На рис. 16.5 это показано в виде отрезков  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ .

Линии  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  представляют собой соответственно траектории, полученные управлением  $u = +1$  и  $u = -1$  и проходящие через точки  $(1; -1)$  и  $(-1; 1)$ .

На множестве (16.34) (т. е. на множестве  $\Omega_{\pm}$ ) оптимальное управление является линейным:

$$u^*(x) = x_1. \quad (16.35)$$

В других точках оптимальное управление является релейным, и все результирующие траектории, за исключением двух, будут пересекать или отрезок  $\Omega$ , или линию переключения  $\Sigma$ . Этими двумя исключениями являются релейные траектории, проходящие через начало координат и обозначенные на рис. 16.5 как  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ . Таким образом, для всех начальных состоя-

ний, не лежащих на  $\Gamma_{\pm}$ , часть оптимальных траекторий будут вырожденными. Типичной траекторией этого типа является траектория  $A$  на рис. 16.5. Оптимальным управлением для этой траектории является  $+1$  до достижения линии  $\Omega_{+}$ . Так как линия  $\Omega_{+}$  пересекает траекторию в точке с координатой  $x_1$  меньшей единицы, то в соответствии с выражением (16.35) в точке пересечения  $u^*(t)$  претерпевает скачок.

Известно также много примеров вырожденных управлений для нелинейных систем. Наиболее известной, вероятно, является задача ракеты — зонда (см. упражнение 16.6). В этой задаче для достижения ракетой максимальной высоты не всегда требуется программирование величины тяги.

## 16.5. СВОЙСТВО ВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Исследовав некоторые проявления особенностей решения, будет полезно рассмотреть теоретические аспекты этого класса задач.

Мы уже отмечали, что в случае вырожденного управления наблюдается неясность при удовлетворении принципа максимума, такая, например, как  $\text{sign } 0$ , которая не определяется. Целесообразно исследовать особый случай в отношении других необходимых условий оптимальности.

Для простоты рассмотрим типичную задачу с одним управляющим воздействием  $u$ . Заметим далее, что в классах задач, рассматривавшихся до сих пор в данной главе, управляющее воздействие  $u$  появлялось в задаче линейно, т. е. уравнения системы можно написать в виде

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u, \quad (16.36)$$

а критерий оптимальности может быть представлен в виде

$$\mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} (f_0(x, t) + g_0(x, t)u) dt. \quad (16.37)^*$$

Кроме того, в каждом из рассмотренных классов задач на  $u(t)$  накладывается ограничение

$$|u(t)| \leq U. \quad (16.38)$$

Сформулируем теперь эту задачу на основе метода, приведенного в § 13.5 \*\*. Соответственно функции  $v(t)$  и  $\zeta(u, v)$  определим в виде

$$\zeta(u, v) = (u(t) + U)(U - u(t)) - v^2(t) = 0 \quad (16.39)$$

и далее найдем множители  $\psi$  и  $v$  и образуем

$$L_2(x, \dot{x}, \psi, u, v, \lambda, \zeta) = f_0(x, t) + g_0(x, t)u + \psi^T (\dot{x} - f(x, t) - g(x, t)u) + \lambda \zeta(u, v). \quad (16.40)$$

Предположим, что мы проверяем выражение (16.40) в отношении условия Лежандра—Клебша [см. уравнение (13.53)]  $\partial^2 L_2 / \partial u^2 \geq 0$ , тогда получим

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial u^2} = \lambda \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \geq 0. \quad (16.41)$$

\* Для управления, оптимального по расходу топлива, подынтегральное выражение для показателя качества представляет собой функцию  $|u|$ . Однако напомним, что для этого класса особое управление имеет место только для тех  $u(t)$ , которые не изменяют знака.

\*\* Предполагается, что эта задача не является вырожденной.

Можно заметить, что для особого управления возможен случай, когда  $u^*(t)$  не является релейной, т. е.  $|u(t)| < U$ . В этом случае, как было показано в § 13.4, множитель  $\lambda$  должен исчезнуть, а это обеспечивает условие  $\partial^2 L_2 / \partial u^2 \equiv 0$ . Таким образом, нам удалось показать, что для рассматриваемого в данной главе класса задач оптимальная вырожденная траектория характеризуется удовлетворением вдоль нее условия Лежандра—Клебша.

Наличие  $\partial^2 L_2 / \partial u^2 \equiv 0$  объясняется тем, что  $u$  появляется в функции  $L_1$  (определяемой в гл. 13) лишь линейно. В рассматриваемой здесь задаче

$$L_1(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \psi, u) = f_0(\mathbf{x}, t) + g_0(\mathbf{x}, t)u + \psi^T(\dot{\mathbf{x}} - f(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t)u) \quad (16.42)$$

и ясно, что  $\partial^2 L_1 / \partial u^2 \equiv 0$ . Действительно, гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \psi, u) = -f_0(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t)u + \psi^T(f(\mathbf{x}, t) - g(\mathbf{x}, t)u) \quad (16.43)$$

и  $\partial^2 H / \partial u^2 \equiv 0$ . Если  $\partial^2 L_1 / \partial u^2 = \partial^2 H / \partial u^2 \equiv 0$ , то можно ожидать появления вырожденного управления.

Еще одно свойство вырожденной траектории состоит в том, что вдоль нее равна нулю избыточная функция Вейерштрасса

$$E(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*, u, u^*) \equiv 0. \quad (16.44)$$

Доказательство для класса систем, описываемых уравнениями (16.36) и (16.37), рекомендуем проделать самостоятельно.

## 16.6. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЙ

До сих пор нам удалось установить, что часто можно получить вырожденные оптимальные решения; однако при этом не приводился простой метод проверки, с помощью которого можно находить различие между действительно оптимальными вырожденными решениями и неоптимальными решениями.

Подобную проверку можно осуществить с помощью вариационного исчисления. Так как многие необходимые условия, получаемые путем взятия первой вариации в вариационном исчислении, тривиально удовлетворяются особыми решениями, то вполне можно попытаться найти проверку путем использования второй вариации. Подобную проверку нашел Келли [104]. Тейт [181] развил дальше возможности применения этой проверки.

Для получения результатов Келли рассмотрим типичную задачу Майера, в которой система с одним управляющим воздействием  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$  должна управляться из начального состояния  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$  таким образом, чтобы минимизировать функцию конечного состояния  $P(\mathbf{x}(t_2))$ . Не вдаваясь в ненужные детали, предположим, что система стационарна и  $x_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$  фиксированы.

Предположим также, что оптимальное вырожденное решение  $\mathbf{x}^*(t)$  и оптимальное управление  $u^*(t)$  находим в интервале времени  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Определим теперь условия, которым должны удовлетворять эти функции.

При использовании правила множителей (теорема 13.1) приведенная выше задача эквивалентна задаче минимизации функционала

$$\mathcal{J}_1 = P(\mathbf{x}(t))_{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \psi^T(\dot{\mathbf{x}} - f) dt$$

безотносительно к уравнениям системы  $\dot{\mathbf{x}} = f$ .

Пусть  $\dot{\mathbf{x}}^*(t)$  и  $u^*(t)$  получают приращения  $\delta \mathbf{x}(t)$  и  $\delta u(t)$ ; тогда, пользуясь членами первой степени, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 + \delta \mathcal{F}_1 = & P(\mathbf{x}^*(t))|_{t=t_2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \delta \mathbf{x}|_{t=t_2} + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left( \psi^T (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}) - \psi^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \delta u \right) + \psi^T \delta \dot{\mathbf{x}} \right) dt. \end{aligned} \quad (16.45)$$

Таким образом,

$$\delta \mathcal{F}_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \delta \mathbf{x}|_{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \psi^T \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \delta u \right) - \psi^T \delta \dot{\mathbf{x}} \right) dt. \quad (16.46)$$

В соответствии с предположением о том, что исходная траектория и управление, относительно которого должны браться все производные, являются оптимальными, то  $\delta \mathcal{F}_1 = 0$ . Так как оптимальная траектория является вырожденной, то равенство нулю  $\delta \mathcal{F}_1$  не дает достаточно полезной информации.

Сделаем еще один шаг для получения второй вариации. Для этого удобно взять гамильтониан  $H = \psi^T \mathbf{f}$  и написать  $\mathcal{F}_1$  в форме  $\mathcal{F}_1 = P(\mathbf{x}(t))|_{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\psi^T \dot{\mathbf{x}} - H) dt$ . Учитывая при разложении лишь члены до второй степени и заметив, что вдоль оптимальной траектории член  $\delta \mathcal{F}_1$ , определяемый выражением (16.46), равен нулю, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 + \delta \mathcal{F}_1 + \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{F}_1 = & \left( P(\mathbf{x}^*(t)) + \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} \right)_{t=t_2} + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left( \psi^T \dot{\mathbf{x}} - H - \frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} + 2 \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial u} \delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u^2 \right) \right) dt \end{aligned} \quad (16.47)$$

или

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{F}_1 = & \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} |_{t=t_2} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} + 2 \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial u} \delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u^2 \right) dt, \end{aligned} \quad (16.48)$$

где  $\partial^2 P / \partial \mathbf{x}^2$  представляет собой матрицу  $[\partial^2 P / \partial x_i \partial x_j]$ , а  $\partial^2 H / \partial \mathbf{x} \partial u$  — вектор с  $i$ -м элементом,  $\partial^2 H / \partial x_i \partial u$  и т. д.

Если  $\mathbf{x}^*(t)$  и  $u^*(t)$  представляли собой минимизирующие решения, то необходимо, чтобы  $\delta^2 \mathcal{F}_1 \geq 0$  для любых возмущений  $\delta \mathbf{x}$  и  $\delta u$ , которые удовлетворяют уравнению первой степени, приближенно описывающему систему:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \delta u \quad (16.49)$$

при

$$\delta \mathbf{x}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_2) = 0. \quad (16.50)$$

Используя  $\delta u$  в форме

$$\delta u = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t \leq \tau; \\ k/\Delta, & \tau < t \leq \tau + \Delta; \\ -k/\Delta, & \tau + \Delta < t \leq \tau + 2\Delta; \\ 0 & \tau + 2\Delta < t \end{array} \right\} \quad (16.51)$$

и принимая величину  $\Delta$  достаточно малой, можно показать [104], что необходимым условием для  $\delta^2 \mathcal{J} \geq 0$  является условие вдоль оптимальной траектории

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right) \geq 0. \quad (16.52)$$

В том случае, когда задача оптимизации представлена в форме Больца, т. е.  $\mathcal{J} = P(x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} L(x, u, t) dt$  подлежит минимизации, то можно показать, что необходимое условие остается в форме (16.52), где  $H = -L + \psi^T f$ . Эффективность этой проверки заключается в той легкости, с которой ее можно применить.

Пример 16.8. Используя проверку в виде (16.52) применительно к задаче, рассматриваемой в примере 16.5, имеем  $H = -x^2 + \psi u$ ;  $\frac{\partial H}{\partial u} = \psi$ ;  $\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = \frac{d}{dt} \dot{\psi} = 2\dot{x} = 2u$ ;  $\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) \right) = 2 > 0$ .

Таким образом, проверка выполнена и любое особое решение, удовлетворяющее краевым условиям задачи, также является оптимальным.

Пример 16.9. Используя проверку (16.52) применительно к задаче, рассматриваемой в примере 16.7, имеем

$$H = -\frac{1}{2} x_1^2 + \dot{x}_2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u;$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2; \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \right) = -\dot{\psi}_1 + \dot{x}_2 = -x_1 + u,$$

и снова любое вырожденное решение, удовлетворяющее краевому условию, является оптимальным.

## 16.7. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В задачах оптимального управления могут наблюдаться вырожденные и особые случаи. Поэтому при решении таких задач необходимо проявлять осторожность. Особые задачи оптимального управления характеризуются тем, что составляющая сопряженного вектора  $\psi_0$  (при формулировке задачи на основе принципа максимума) исчезает.

Особые задачи оптимального управления появляются для системы с гамильтонианом вида (16.5), когда имеется оптимальная траектория, вдоль которой все необходимые условия удовлетворяются частью  $H'$  данного гамильтониана. Более четкое представление об особых задачах оптимального управления можно получить, если изучить аналог подобных задач в вариационном исчислении (см. § 16.1).

За исключением нечетко сформулированного случая, в котором показатель качества не зависит от решений, особые задачи управления серьезно не изучались.

Вырожденное оптимальное управление наблюдается в том случае, когда большинство необходимых условий, выводимых из первых вариаций, удов-

летворяются тривиально. Некоторые из проявлений вырожденного управления сводятся к следующему:

- 1) неединственность в решении;
- 2) нерелейные решения в случаях, когда требуется релейное оптимальное управление;
- 3) существование в пространстве состояний гиперповерхностей, на которых подынтегральное выражение показателя качества становится точным интегралом.

Важным классом задач, в котором может иметь место вырожденное управление, является класс, когда  $u$  входит линейно как в уравнение системы, так и в подынтегральное выражение показателя качества [см. уравнения (16.36) и (16.37)]. Для подобного класса  $\partial^2 H / \partial u_i^2 \equiv 0$  для всех  $i$ .

В данной главе рассматриваются следующие основные вопросы:

1. В оптимальном по быстродействию управлении линейными стационарными объектами проявлением вырожденности является неединственность оптимального управления. Вырожденность может проявляться в отношении систем, которые не являются  $L$ -управляемыми.

2. В случае оптимального по расходу топлива управления линейными стационарными объектами вырожденность также означает неединственность. Вырожденность может проявляться в отношении систем, имеющих одну или более степеней интегрирования, или систем, которые не являются  $L$ -управляемыми.

3. В случае ограниченного по амплитуде управления линейными стационарными объектами, показатель качества которых имеет подынтегральное выражение, представленное квадратичной формой только от координат состояния (это не касается функции управления), в пространстве состояний могут появиться вырожденные гиперповерхности, на которых оптимальное управление не является релейным.

В § 16.5 показано, каким образом тривиально удовлетворяются различные необходимые условия в оптимальном управлении.

В § 16.6 приведена полезная проверка оптимальности вырожденного управления [см. уравнение (16.52)].

## 16.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

16.1. Решите следующие задачи минимизации путем использования множителей Лагранжа. Укажите особые случаи, если таковые имеются (ниже используются те же функции  $f(x_1, x_2)$  и  $g(x_1, x_2)$ , что и в § 16.1).

$$a) f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2(x_1 + x_2) + 6;$$

$$- g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 4 = 0;$$

$$б) f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2;$$

$$g(x_1, x_2) = \sin^2(x^2 + y^2) - 1 = 0;$$

$$в) f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2;$$

$$g(x_1, x_2) = \exp(x - 3)^2 + (y - 4)^2 - 1 = 0.$$

16.2. Рассмотрите оптимальное по расходу топлива управление системой  $p(p+1)y = u$  с  $\mathcal{J} = \int_0^T |u(\tau)| d\tau$  от какой-либо произвольной точки к началу координат. При  $T = 2$  найдите

и графически изобразите:

- а) достижимую зону  $\mathcal{C}(T)$ ;
- б) зоны, в которых имеет место вырожденное управление;
- в) зоны, в которых имеет место невырожденное управление.

16.3. Найдите зоны в плоскости состояний для вырожденного управления системой

$$\dot{x}_1 = 3x_2 + u; \quad \dot{x}_2 = -2u$$

с  $\mathcal{J} = \int_0^{\infty} x_1^2(\tau) d\tau$  и произвольного  $x(0)$ . Примите  $|u(t)| \leq U$ . Установите оптимальность

вырожденного управления.

16.4. Рассмотрите задачу оптимального по расходу топлива управления нестационарным объектом

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -a_1(t)x_1 - a_2(t)x_2 + u$$

от достижимого множества  $\mathcal{C}(T)$  к началу координат с учетом  $|u(t)| \leq 1$ . Покажите, что если  $a_1(t) = da_2(t)/dt$ , то вырожденное управление может существовать.

16.5. Рассмотрите оптимальное по быстродействию управление (к точке начала координат) объектом

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + u_1; \quad \dot{x}_2 = -x_2 + u_1 + u_2.$$

Определите и графически изобразите зоны в плоскости состояний, в которых существуют неединственные решения. Для тех зон, в которых оптимальное решение является единственным, определите последовательность полярности функции оптимального управления.

16.6. Для ракеты-зонда, рассматриваемой в упражнении 13.10, предположите, что желательно максимизировать высоту  $x(t)$  в конечный (неуказанный) момент времени  $T$ ; покажите для этого случая возможность существования вырожденного управления. Найдите это вырожденное управление и дайте физическое объяснение полученному результату.

16.7. Для искусственного спутника с одной осью симметрии, рассматриваемого в упражнении 14.12, рассмотрите возможность существования вырожденных решений для оптимального по быстродействию управления от произвольного  $\omega(0)$  к 0:

а) путем рассуждений;

б) математическим путем.

16.8. Повторите упражнение 16.7 применительно к оптимальному по расходу топлива управлению искусственным спутником Земли.

16.9. Метод вторых вариаций, изложенный в § 16.6 для решения некоторых задач космической навигации, можно с успехом использовать следующим образом. Оптимальное решение  $x^*(t)$  и  $u^*(t)$  для какой-либо данной задачи обычно можно найти априори, по крайней мере численно. Однако по целому ряду различных причин космический корабль может отклониться от курса. Предположите, что в момент времени  $t_1$  космический корабль отклонился от  $x^*(t_1)$  на величину  $\delta x(t_1)$ ; задача состоит в том, чтобы найти дискретное «оптимальное» управление  $\delta u^*(\delta x, t)$  при минимизации второй вариации  $\delta^2 \mathcal{J}_1$ .

Примите уравнение движения космического корабля в виде  $\dot{x} = f(x, u)$ , обозначьте показатель качества через  $P(x(t_2))$  (конечный момент времени  $t_2$  фиксирован); найдите выражение в явном виде для  $\delta u(\delta x, t)$  путем использования метода второй вариации.

### 16.9. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Вырожденные случаи в вариационном исчислении кратко рассматриваются в работе [156] и более детально в книге [19].

Вырожденное управление в задачах оптимального быстродействия было впервые рассмотрено в работе [117]. Хорошей монографией является также книга [8].

Значительное число работ, рассматривающих задачи с вырожденными управлениями, принадлежит Ч. Д. Джонсону [85]—[87].

Материал, представленный в § 16.6, основан на работе [104]. Проверка с помощью теории второй вариации в общем виде изложена в книге [181].

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ВОЗМОЖНОСТИ .

После детального изучения многих известных положений оптимального управления рассмотрим теперь возможности его практического применения. Нами были рассмотрены линейные стационарные объекты управления, которые описывались дифференциальными уравнениями первого и второго порядка. Однако на практике редко приходится иметь дело с задачами, связанными с подобными простыми объектами управления, хотя хорошо известны задачи, связанные с оптимальным управлением каскадом таких линейных объектов небольшого порядка. Большинство встречающихся на практике объектов нелинейны, но при достаточно небольших сигналах их можно рассматривать приближенно как линейные. Нахождение оптимального решения для модели объекта управления, приближенно выражающей действительный объект, позволяет получить квазиоптимальное решение, являющееся достаточно приемлемым.

Для нелинейных или нестационарных объектов управления приходится по существу прибегать к линеаризации системы относительно какой-то известной номинальной траектории и оптимизации этой линеаризованной системы. При этом заранее предполагается выполнение двух условий: 1) линеаризация является оправданной и 2) номинальную траекторию можно найти. Если одно из приведенных условий не удовлетворено, то линеаризация, очевидно, невозможна.

Действительно, некоторые из типичных задач, с которыми приходится сталкиваться в промышленности, на первый взгляд кажутся неразрешимыми. Во-первых, большинство из них трудно поддается оптимизации вследствие отсутствия соответствующего критерия качества. Во-вторых, многие задачи представлены в таком виде, когда входной сигнал и конечные условия для оптимального управления не определены заранее. Кроме того, решения часто должны представляться в реальном масштабе времени, что исключает возможность использования многих методов.

Если методы оптимизации применять лишь в полном соответствии с теорией, то можно прийти к выводу, что на практике оптимальное управление играет незначительную роль. Однако, если к этой теории подходить разумно, то можно использовать целый ряд различных способов для повышения эффективности получаемых результатов.

Во-первых, располагая целым рядом необходимых условий, можно попробовать применить численные методы для нахождения оптимальных решений, выполнив при этом значительный объем сложных вычислений с помощью вычислительной машины.



Во-вторых, можно подойти к изучению различных зависимостей, используя вычислительную машину, чтобы определить: 1) наилучшие параметры системы управления; 2) влияние различных весовых коэффициентов в показателе качества. Это позволит определить практическую приемлемость субоптимальных решений.

В-третьих, зная свойства оптимальных систем, можно попытаться рассчитать квазиоптимальные системы, которые позволили бы обойти встретившиеся трудности.

И, наконец, следует отметить, что хотя существует большое число систем, которые не поддаются точному анализу с помощью существующих методов оптимизации, можно использовать другие методы теории управления для приближенного анализа этих сложных систем. При этом будет получено более отчетливое представление об основных проблемах, связанных с оптимальными системами.

В заключительной главе мы укажем области техники, в которых современная теория оптимального управления позволяет получать эффективные решения, а также те области, в которых полный анализ еще невозможен.

## 17.1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Ввиду того, что аналитическому решению поддаются лишь сравнительно простые задачи оптимального управления, большое значение приобретают численные методы их решения. В настоящее время вычисления для этих задач связаны с большими трудностями ввиду отсутствия общего метода, на основе которого можно безошибочно получать оптимальное решение. Таким образом, инженеру необходимо знать преимущества и недостатки ряда численных методов, получивших распространение за последние годы.

Следует отметить, что, даже в случае одноточечной краевой задачи или задачи с заданными начальными условиями, способы численного решения еще далеки от совершенства.

Наиболее распространенная одноточечная краевая задача встречается при моделировании системы, описываемой дифференциальными уравнениями. При этом уравнения системы программируются на цифровой вычислительной машине, и ее решение определяется с учетом данной входной функции и заданных начальных условий.

С другими одноточечными краевыми задачами мы сталкиваемся при попытках решения задач оптимального управления. Так, например, в гл. 15 было показано, что в результате использования динамического программирования применительно к определенному классу задач получается матричное уравнение Риккати. Как будет показано ниже, многие двухточечные краевые задачи можно решить как ряд одноточечных краевых задач.

Проблема, с которой сразу же приходится сталкиваться при решении одноточечных краевых задач на цифровой вычислительной машине, состоит в том, что в то время как сама физическая система разворачивается во времени непрерывно и параллельно, т. е. все ее состояния изменяются одновременно, обычная цифровая вычислительная машина выполняет математические операции дискретно во времени и последовательно. Для системы, работающей подобным образом, сразу же становятся очевидными два потенциальных источника ошибок. Первым источником ошибок является приближенное выражение непрерывной во времени системы через дискретную модель системы. Вторым источником определяется тем, что при любом модели-

ровании непрерывной системы, работающей в замкнутом контуре, получаемая в результате моделируемая система имеет по меньшей мере один такт задержки в контуре.

Как хорошо известно, точность приближенного описания и величина задержки при прочих равных условиях является функцией шага квантования, выбранного для приближенного выражения системе. На практике обычно нельзя выбирать такой размер шага, который на один или два порядка меньше необходимой величины, так как в этом случае машинное время, а следовательно, стоимость окажутся чрезмерно большими. Далее, ошибка округления, возникающая вследствие того, что вычислительная машина использует лишь конечное число разрядов для выражения каждого числа, может оказаться слишком большой.

Несмотря на очевидность необходимости оценки требуемой величины шага, фактическое определение этой величины может иногда быть связано с большими трудностями. Кроме того, требуемая величина шага для одной части задачи может оказаться слишком большой для другой части задачи. Это объясняется тем, что во время сильно меняющихся переходных процессов размер шага должен быть меньше, чем в статике. В свою очередь, переходные процессы в системе в значительной мере будут зависеть от величины управляющего или возмущающего воздействия. Таким образом, можно ожидать, что выбор размера шага будет определяться вообще локальным усилением или локальной постоянной Липшица.

Когда требуется переменный размер шага, то следует выбирать такие программы интегрирования, которые могут регулировать размер своего шага в соответствии с какими-то оценками местных ошибок. Это действительно может быть обеспечено с помощью класса программ, способных предсказывать и корректировать ошибки [70]. Однако при использовании этих программ, позволяющих устранить некоторые проблемы, возникает ряд других трудностей.

Заметим, во-первых, что в случае таких нелинейностей, как реле, локальная постоянная Липшица при переключении реле приближается к бесконечности; кроме этого, когда реле не переключается, постоянная Липшица равна нулю. Размер шага также изменяется на несколько порядков величины, что может привести, как было указано выше, к запаздыванию в контуре. Если не принять мер по уменьшению ошибки, возникающей вследствие изменения постоянной Липшица, то в результате может получиться большая ошибка, вызываемая задержкой.

Во-вторых, вследствие изменяющегося размера шага программа с предсказыванием и корректированием имеет свой собственный замкнутый контур, который может стать неустойчивым при взаимодействии с моделируемой системой. Наблюдающееся здесь явление неустойчивости еще недостаточно выяснено и служит темой интенсивных исследований, проводимых специалистами по численному анализу\*.

В-третьих, почти во всех существующих программах интегрирования для определения значения состояния системы для следующего шага используется полиномиальная экстраполяция. К сожалению, очень часто состояние системы может изменяться скачком. Так, например, в системе с насыщением по скорости и ускорению на выходе, как только выходной сигнал достигает

---

\* Получающиеся при этом замкнутые динамические контуры являются неминимально-фазовыми и при их реализации численными методами, вызывающими значительные фазовые искажения контура, последние становятся избыточными. Необходимо введение фазопережающих программ коррекции, укладываемых по времени в выбранный размер шага (Прим. ред.).

насыщения, скорость сигнала на выходе должна иметь нулевое значение. То же относится и ко второй производной выходного сигнала при насыщении скорости на выходе. Скачкообразные изменения этого типа невозможно приближенно выразить с помощью многочлена, учитывающего предшествующие изменения во времени без дополнительного уточнения.

Таким образом, для получения хороших решений даже при прямом цифровом моделировании одноточечной краевой задачи меры предосторожности не могут оказаться излишними.

Многие из отмеченных выше трудностей могут быть преодолены, по крайней мере теоретически, при использовании вычислительной машины смешанного типа. Однако вплоть до настоящего времени опыт применения гибридных вычислительных машин слишком ограничен, чтобы на его основе можно было судить об этих возможностях.

При численном решении двухточечных краевых задач, включающих дифференциальные уравнения, продолжают оставаться все те проблемы, которые были отмечены выше в связи с одноточечными краевыми задачами. Кроме того, возникают новые проблемы, связанные с требованиями в отношении памяти и сходимости. При составлении программы часто требуется большое искусство, чтобы сократить до приемлемого уровня ее объем и продолжительность времени решения.

Ниже будут рассмотрены три метода решения задач оптимизации, а именно: метод градиента, метод второй вариации и обобщенный метод Ньютона—Рафсона. Общей особенностью, присущей всем этим трем методам, является то, что для облегчения подгонки краевых условий используется линеаризация уравнений системы.

## 1. Метод градиента, или наискорейшего спуска.

Известно, что функция  $n$  переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  максимально изменяется по величине в направлении, определяемом вектором,  $i$ -я составляющая которого представляет собой  $\partial f / \partial x_i$ . Этот вектор является вектором-градиентом и обозначается через  $\nabla f$ .

Если  $f(x)$  мысленно рассматривать как какой-то «горный хребет» в  $(n + 1)$ -мерном пространстве, то тогда  $\nabla f$  будет обозначать в любой данной точке  $x_0$  направление самого крутого восхождения, тогда как  $-\nabla f$  обозначает направление самого крутого спуска. Заметим, что если непрерывно придерживаться направления локального вектора-градиента, то в конечном счете будет достигнут относительный пик данного «горного хребта». Подобным же образом, если придерживаться направления, противоположного локальному вектору-градиенту, то будет достигнута относительно низкая точка.

Метод наискорейшего спуска представляет собой вычислительный прием, основанный на использовании отмеченного выше свойства градиента для получения экстремума в вариационной задаче итерационным путем и всегда в таком направлении, чтобы получить уменьшение (или увеличение) показателя качества.

Для простоты рассмотрим систему с одним управляющим воздействием

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (17.1)$$

Предположим, что желательно найти  $u^*(t)$ , перемещающее состояние системы от  $x_1$  в момент времени  $t_1$  в какое-то состояние  $x_2$  в момент времени  $t_2$  такое, чтобы обеспечить минимум функции

$$[P = P(x_2)]. \quad (17.2)$$

Выше предполагалось, что  $x_1$ ,  $t_1$  и  $t_2$  даны, а  $x_2$  не задано. Кроме того, будем считать, что на функцию управления не наложено никакого ограничения.

С учетом сказанного выше можно сформулировать следующий общий подход к решению задачи.

1. Попытаемся использовать некоторое управление  $u^{(1)}(t)$ , позволяющее получить решение  $x^{(1)}(t)$ , соответствующее исходной точке  $x_1$ , в момент времени  $t_1$ ; ни одна из этих функций не является оптимальной, хотя  $x^{(1)}$  должно соответствовать приведенным краевым условиям. Это неоптимальное решение даст в результате какое-то значение показателя качества  $P^{(1)}$ .

2. Осуществляем локальную линеаризацию системы (17.1) относительно  $x^{(1)}(t)$  и  $u^{(1)}(t)$  подобно тому, как это показано в гл. 5. Это дает приближенное описание поведения системы относительно решения  $x^{(1)}(t)$  и  $u^{(1)}(t)$ .

3. Из линеаризованного уравнения определяем  $\delta u^{(1)}(t)$ , т. е. поправку к  $u^{(1)}(t)$  в соответствии с наложенными ограничениями с тем, чтобы уменьшить  $P$  относительно  $P^{(1)}$ . Для этого выполняем вычисление, подобное тому, которое было использовано при определении градиента.

4. Принимаем  $u^{(2)}(t) = u^{(1)}(t) + \delta u^{(1)}(t)$  и повторяем этот процесс для последовательного получения  $u^{(3)}(t)$ ,  $u^{(4)}(t)$ , ...

5. Прекращаем этот процесс, когда  $\delta u^{(n)}(t)$  становится равномерно меньше некоторой заранее определенной величины или когда изменение в показателе качества  $\delta P$  достаточно мало.

Этот подход использовали Келли [103], Брайсон [28], а также другие авторы.

Для большей конкретности предположим, что нам удалось получить пробное решение  $u^{(1)}(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Затем, проинтегрировав уравнение (17.1), получим  $x^{(1)}(t)$ . После линеаризации относительно  $x^{(1)}(t)$  и  $u^{(1)}(t)$  в соответствии с указаниями, приведенными в гл. 5, имеем

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f^{(1)}(t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f^{(1)}(t)}{\partial u} \delta u, \quad (17.3)$$

где  $\partial f^{(1)}(t)/\partial x$  и  $\partial f^{(1)}(t)/\partial u$  представляют собой соответственно матрицу  $\partial f/\partial x$  и вектор  $\partial f/\partial u$ , вычисляемые вдоль  $x^{(1)}(t)$  и  $u^{(1)}(t)$ .

Пусть  $\Phi^{(1)}(t, t_1)$  представляет собой переходную матрицу, связанную с линейным уравнением (17.3), решение которого имеет вид

$$\delta x(t) = \Phi^{(1)}(t, t_1) \delta x(t_1) + \int_{t_1}^t \Phi^{(1)}(t, \tau) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial u} \delta u(\tau) d\tau. \quad (17.4)$$

Так как из краевого условия  $x(t_1) = x_1$  следует, что  $\delta x(t_1)$  будет равна нулю, то в момент времени  $t_2$  имеем

$$\delta x(t_2) \triangleq \delta x_2 = \int_{t_1}^{t_2} \Phi^{(1)}(t_2, \tau) \frac{\partial f^{(1)}(\tau)}{\partial u} \delta u(\tau) d\tau. \quad (17.5)$$

Уравнение (17.5) дает приближенную оценку изменения конечного состояния  $\delta x(t_2)$ , когда функция  $u(t)$  в уравнении (17.1) изменялась на величину  $\delta u(t)$ . Приближенные решения здесь получаются из линеаризованных уравнений.

Остается выбрать  $\delta u(t)$  для каждого значения  $t$  таким образом, чтобы  $\delta x(t_2)$  располагалось в наиболее желательном направлении.

При малых изменениях  $\mathbf{x}_2$  результирующее изменение показателя качества в первом приближении, имеет вид

$$\delta P = \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^T \delta \mathbf{x}_2. \quad (17.6)$$

В соответствии с выражением (17.5) имеем

$$\delta P = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^T \Phi^{(1)}(t_2, \tau) \frac{\partial f^{(1)}(\tau)}{\partial u} \delta u(\tau) d\tau. \quad (17.7)$$

Целью метода наискорейшего спуска является нахождение  $\delta u$  для максимизации  $\delta P$ . Конечно,  $\delta u$  должно быть в известном смысле небольшим, чтобы аппроксимация методом локальной линеаризации оставалась справедливой. С этой целью нами наложено ограничение вида

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta u(\tau))^2 d\tau = k \quad (17.8)$$

с соответствующим образом выбранным значением  $k$ .

Теперь максимизация (17.7) путем выбора  $\delta u(t)$  с учетом ограничения (17.8) представляет собой простую задачу вариационного исчисления. Далее находим, что решение  $\delta u^{(1)}$  имеет вид

$$\delta u^{(1)}(t) = C \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^T \Phi^{(1)}(t_2, t) \frac{\partial f^{(1)}(t)}{\partial u}, \quad (17.9a)$$

где

$$C = \left\{ \frac{1}{k} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}_2} \right)^T \Phi^{(1)}(t_2, \tau) \frac{\partial f^{(1)}(\tau)}{\partial u} \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}. \quad (17.9b)$$

(Покажите это).

Из уравнения (3.58) имеем

$$\Psi^T(t, t_2) = \Phi(t_2, t),$$

где  $\Psi(t, t_2)$  — переходная матрица сопряженной системы к системе уравнения (17.3). Так как мы можем найти матрицу  $\Psi^T(t, t_2)$  для уравнения (17.3) путем интегрирования системы

$$\dot{\Psi}^T(t, t_2) = - \left[ \frac{\partial f^{(1)}(t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \Psi^T(t, t_2), \quad (17.10)$$

в обратном времени при условии

$$\Psi^T(t_2, t_2) = I, \quad (17.11)$$

то можно найти  $\Phi(t_2, t)$ . Таким образом, видно, что вычислительные операции, которые должны быть выполнены при использовании метода наискорейшего спуска в случае отсутствия ограничения на  $u(t)$ , должны сводиться к следующему:

- 1) взять пробное решение  $u^{(1)}(t)$  и численно проинтегрировать уравнение (17.1), на каждом шаге запоминая составляющие вектора  $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ;
- 2) в конце интегрирования определить численные значения показателя качества  $P^{(1)} = P(\mathbf{x}_2^{(1)}(t_2))$  и вектора  $\partial P^{(1)} / \partial \mathbf{x}_2$ ;

3) проинтегрировать сопряженную систему (17.10) в обратном направлении от  $t = t_2$ , используя краевое условие (17.11) и определяя необходимые значения  $\partial f^{(1)}(t)/\partial x$  и  $\partial f^{(1)}(t)/\partial u$  для каждого  $t$  с помощью значений  $x^{(1)}(t)$  и  $u^{(1)}(t)$ , введенных в память. Кроме того, на каждом шаге интегрирования в обратном направлении определить значения  $\delta u^{(1)}$  с помощью уравнений (17.9); определить новую пробную функцию управления при каждом значении  $t$ ,  $u^{(2)}(t) = u^{(1)}(t) + \delta u^{(1)}(t)$ ;

4) повторить указанный процесс, т. е. пункты 1—3.

Если при какой-либо итерации, например при  $n$ -й,  $P^{(n)} < P^{(n+1)}$ , то это означает, что взятый размер шага слишком велик. Постоянную  $k$  в уравнении (17.8) необходимо тогда уменьшить.

Предположим, что на  $u(t)$  наложено ограничение вида

$$\beta(t) \leq u(t) \leq \alpha(t). \quad (17.12)$$

Можно было бы использовать метод функции штрафа (гл. 13) и приступить к итерационной процедуре. После  $n$  итераций можно получить функцию  $u^{(n+1)}(t)$ , удовлетворяющую условию (17.12), следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } u^{(n)}(t) - C \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^T \Phi^{(n)}(t_2, t) \frac{\partial f^{(n)}(t)}{\partial u} \geq \alpha(t), \\ \text{то принять } \delta u^{(n)}(t) = \alpha^{(n)}(t) - u^{(n)}(t); \\ \text{если } u^{(n)}(t) - C \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^T \Phi^{(n)}(t_2, t) \frac{\partial f^{(n)}(t)}{\partial u} \leq \beta(t), \\ \text{то принять } \delta u_n(t) = u_n(t) - \beta(t); \\ \text{если } \beta(t) < u^{(n)}(t) - C \left( \frac{\partial P}{\partial x_2} \right)^T \Phi^{(n)}(t_2, t) \times \\ \quad \times \frac{\partial f^{(n)}(t)}{\partial u} < \alpha(t), \end{array} \right\} \quad (17.13)$$

то использовать выражение (17.9).

Другой метод, требующий большей затраты времени, но позволяющий надеяться на получение решения, более близкого к точному, состоит в том, чтобы не использовать условия (17.13). Вместо этого мы устраняем члены в показателе качества, связанные с функциями штрафа, а затем применяем метод наискорейшего спуска таким образом, что в соответствии с выражением (17.9) меняется та часть  $u^{(n)}(t)$ , в которой члены не отбрасываются. После нескольких итераций с использованием этого уточнения мы надеемся получить значительно более точное решение по сравнению с решением, получаемым с помощью метода функций штрафа.

Отметим некоторые проблемы, связанные с методом наискорейшего спуска.

1. При большой размерности вектора состояния  $x$  или большой величине интервала интегрирования может не хватить объема памяти.

2. При интегрировании в прямом и обратном времени шаги должны совпадать; в противном случае необходимо прибегать к интерполяции.

3. При приближении к оптимальной траектории сходимость этого метода ухудшается\*.

\* Эта проблема сходимости преодолевается в новом методе, основанном на использовании свойств градиентов и получившем название метода сопряженных градиентов. См., например, L. S. Lasdon, S. K. Mitter A. D. Waren The Conjugate Gradient Method for Optimal Control Problems «Метод сопряженных градиентов для задач оптимального управления», IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC — 12, № 2, pp. 132—138, April, 1967.

Этот метод удобно применять к задачам типа Майера, что влечет за собой преобразование данной задачи в форму Майера путем изменения переменных состояния (см. гл. 14).

Как и все другие методы, упомянутые в данном параграфе, метод градиентов позволяет лишь находить локальную точку минимума. Однако в отличие от двух других рассматриваемых ниже методов метод градиентов должен сходиться к вырожденному решению, если такое существует\*, так как необходимые условия оптимальности, выражаемые с помощью уравнений Эйлера—Лагранжа или принципа максимума, здесь не используются.

При наличии ограничений типа неравенства на переменные состояния иногда может оказаться более выгодным использовать метод функций штрафа (см. гл. 14).

## 2. Оптимизация методом второй вариации

Преимуществом метода оптимизации, основанного на теории второй вариации в вариационном исчислении, является быстрая сходимость вблизи оптимальной траектории [25], [110]. К недостаткам этого метода следует отнести значительную сложность программирования, а также то, что с его помощью может даже оказаться невозможным определение локального минимума, если начальная точка слишком далека от оптимальной траектории.

С учетом обсуждения метода второй вариации в гл. 16 основную идею можно выразить просто. Рассмотрим тот же класс задач, что и в предыдущем параграфе, только без ограничения типа неравенства на управляющее воздействие\*. Вместо того, чтобы продолжать использовать метод градиента, можно сделать следующее:

1. Найти пробное решение  $u^{(1)}(t)$  и с помощью уравнения (17.1) составить пробную траекторию  $x^{(1)}(t)$ , идущую из данной исходной точки. Траектория  $x^{(1)}(t)$  не является вообще оптимальной.

2. Найти линеаризованное уравнение системы (17.3) относительно этой траектории.

3. Используя линеаризованную систему, найти приближенное оптимальное дискретное управление  $\delta u^{(1)}$ , максимизирующее приближенный функционал  $\Delta \mathcal{F}_1$ , который обозначает изменение в пополненной функции

$$\mathcal{F}_1 = P(x_2) + \int_{t_1}^{t_2} \psi^T(\dot{x} - f) dt$$
 при ее разложении в соответствии с методом вторых вариаций (см. § 16.6).

4. Принимая  $u^{(2)}(t) = u^{(1)}(t) + \delta u^{(1)}(t)$ , повторить процесс.

Для большей конкретности предположим, что  $x_0$ ,  $t_1$  и  $t_2$  фиксированы; тогда  $\mathcal{F}_1$  можно разложить точно так же, как это было сделано в § 16.6. Таким образом, непосредственная задача состоит в том, чтобы найти  $\delta u^{(1)}(t)$ , которое возбуждает систему (17.3) таким образом, чтобы минимизировать приращение функционала

$$\Delta \mathcal{F}_1 = \delta \mathcal{F}_1 + \frac{1}{2} \delta^2 \mathcal{F}_1$$

с учетом краевых условий  $\delta x(t_1) = \delta x_1 = 0$ .

\* В настоящее время очень трудно использовать метод второй вариации для задач с ограничениями.

Формулы для  $\delta\mathcal{F}_1$  и  $\delta^2\mathcal{F}_1$  приведены в § 16.6. В частности, имеем формулу (16.46), которую переписываем ниже:

$$\delta\mathcal{F}_1 = \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \Psi^T \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) - \Psi^T \delta \dot{\mathbf{x}} \right) dt.$$

Если отсутствует гарантия того, что траектория, получаемая в результате  $n$ -й итерации  $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ , является оптимальной, то в противоположность случаю, рассматриваемому в § 16.6,  $\delta\mathcal{F}_1$  не обязательно равняется нулю. Это обстоятельство необходимо учитывать в процессе оптимизации.

При интегрировании по частям последнего члена в интеграле (16.46) это выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}_1 = & \left( \left( \frac{\partial P}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \Psi^T \delta \mathbf{x} \right) \Big|_{t=t_2} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( \dot{\Psi}^T + \Psi^T \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \delta \mathbf{x} + \Psi^T \frac{\partial f}{\partial u} \delta u \right) dt. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Если теперь определим номинальную сопряженную функцию  $\Psi(t)$  при  $n$ -й итерации как функцию, удовлетворяющую условию  $\dot{\Psi} = (\partial f / \partial \mathbf{x})^T \Psi$  или  $\dot{\Psi}^T = -\Psi^T (\partial f / \partial \mathbf{x})$  с учетом соответствующего условия трансверсальности  $\Psi(t_2) = -(\partial P / \partial \mathbf{x})|_{t=t_2}$ , то члены  $(\dot{\Psi}^T + \Psi^T (\partial f / \partial \mathbf{x})) \delta \mathbf{x}$  и  $[\partial P / \partial \mathbf{x}]^T \delta \mathbf{x} + \Psi^T \delta \mathbf{x} \Big|_{t=t_2}$  в подынтегральном выражении (17.14) исчезают. Таким образом, у нас остается

$$\delta\mathcal{F}_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right) dt \quad (17.15)$$

вдоль номинальной пробной траектории, где  $H \triangleq \Psi^T f$ .

Член  $\delta^2\mathcal{F}_1$  остается без изменений и удовлетворяет выражению (16.48). Тогда показатель качества

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_1 = \delta\mathcal{F}_1 + \frac{1}{2} \delta^2\mathcal{F}_1 = & \left( \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 P}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} \right) \Big|_{t=t_2} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} + 2 \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial u} \delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u \right) \right) dt. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Теперь задача аппроксимации или вспомогательной оптимизации представлена достаточно полно. Желательно найти решение  $\delta \mathbf{x}^{(1)}(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$ , удовлетворяющее выражению (17.3) и краевому условию  $\delta \mathbf{x}(t_1) = 0$ , которое минимизирует функционал (17.16).

Для численного нахождения  $\delta \mathbf{x}^{(1)}(t)$  можно, например, использовать принцип максимума. В соответствии с указаниями, содержащимися в гл. 14, определим вспомогательные сопряженные переменные  $\delta \Psi$  и построим вспомогательный гамильтониан

$$\begin{aligned} h \triangleq & \delta \Psi^T \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} \delta \mathbf{x} + 2 \delta \mathbf{x}^T \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial u} \delta u + \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \delta u \right) \right). \end{aligned} \quad (17.17)$$



Вспомогательная сопряженная переменная  $\delta\psi$  должна удовлетворять уравнению

$$\delta\dot{\psi} = -\frac{\partial h}{\partial \delta x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \delta\psi - \frac{\partial}{\partial \delta x} \left( \delta x^T \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \delta x + 2\delta x^T \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \delta u \right) \quad (17.18)$$

с условием трансверсальности; ответьте почему?

$$\delta\psi(t_2) = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \delta x \Big|_{t=t_2}, \quad (17.19)$$

а вспомогательное оптимальное дискретное управление  $\delta u^{(1)}$  следует найти из условия

$$\frac{\partial h}{\partial \delta u} = 0. \quad (17.20)$$

Обобщая приведенные выше результаты, можно описать метод оптимизации более конкретно, выделив в нем следующие этапы:

1. Взять пробную функцию управления  $u^{(1)}(t)$  и при ее использовании численно проинтегрировать уравнение (17.1) для получения траектории  $x^{(1)}(t)$ .

2. Найти сопряженные переменные  $\psi^{(1)}(t)$ , соответствующие  $x^{(1)}(t)$ , путем интегрирования системы  $\dot{\psi} = -(\partial f / \partial x)^T \psi$  в обратном от  $t = t_2$  с крайним условием

$$\psi(t_2) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{t=t_2}.$$

3. Найти  $\delta x^{(1)}(t)$  и  $\delta \psi^{(1)}(t)$  в соответствии с уравнениями (17.3) и (17.18) и крайними условиями

$$\delta x^{(1)}(t_1) = 0, \quad \delta \psi^{(1)}(t_2) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_{t=t_2},$$

если  $\delta u^{(1)}(t)$  получено из условия (17.20). Эта задача [в  $2n$ -мерном пространстве состояний та же, что и задача, рассмотренная в § 12.3, и ее можно решить численно.

4. Функция управления для следующей итерации принимает вид  $u^{(2)}(t) = u^{(1)}(t) + \delta u^{(1)}(t)$ . Далее необходимо повторить этот процесс для следующей итерации.

Приведенную выше задачу минимизации часто целесообразно решать с помощью синтеза оптимальной линейной обратной связи, рассмотренной в гл. 15. В принципе это делается достаточно просто [25], [140].

Описанный здесь метод второй вариации имеет целый ряд практических трудностей. Первой из них является очевидная сложность программирования. Так, например, задача, указанная выше в пункте 3, несмотря на простоту формулировки, требует для своего решения большой затраты труда. Вторая заключается в том, что обычно нет гарантии, что удовлетворяются условия Лежандра и Якоби\*. И, наконец, так как метод второй вариации основан на некоторых необходимых условиях оптимальности, которые в случае вырожденного управления удовлетворяются тривиально, с его помощью невозможно найти вырожденные траектории.

Преимуществом метода второй вариации по сравнению с методом градиента является более высокая сходимость в том случае, когда локальное оптимальное решение близко.

\* В случаях, когда данные условия не удовлетворены, это часто приводит к невозможности отыскания решения уравнения Риккати. См., например, [140].

### 3. Обобщенный метод Ньютона—Рафсона

При численном анализе эффективный способ нахождения корня одномерного алгебраического уравнения

$$f(x) = 0 \quad (17.21)$$

сводится к следующему: сначала делается предположение о первом приближении решения  $x^{(1)}$  и затем находятся решения в соответствии с последовательностью

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{\frac{df}{dx}(x^{(n)})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17.22a)$$

которую можно представить в таком виде:

$$f(x^{(n)}) + \frac{df}{dx}(x^{(n)}) [x^{(n+1)} - x^{(n)}] = 0. \quad (17.22б)$$

На графике зависимости  $f(x)$  от  $x$  итерационный процесс, описываемый с помощью выражения (17.22б), можно представить, как показано на рис. 17,1, откуда видно, что если  $f(x)$  не имеет особенностей, а  $df/dx$  существует и не равна нулю в окрестностях решения, то  $x^{(n+1)}$  будет ближе к истинному решению, чем  $x^{(n)}$ . Однако сходимость не обязательно должна иметь место, если выбор  $x^{(1)}$  осуществлен недостаточно удачно или если  $f(x)$  имеет нерегулярный характер в диапазоне значений между  $x^{(1)}$  и истинным решением  $x^*$ . Покажите это.

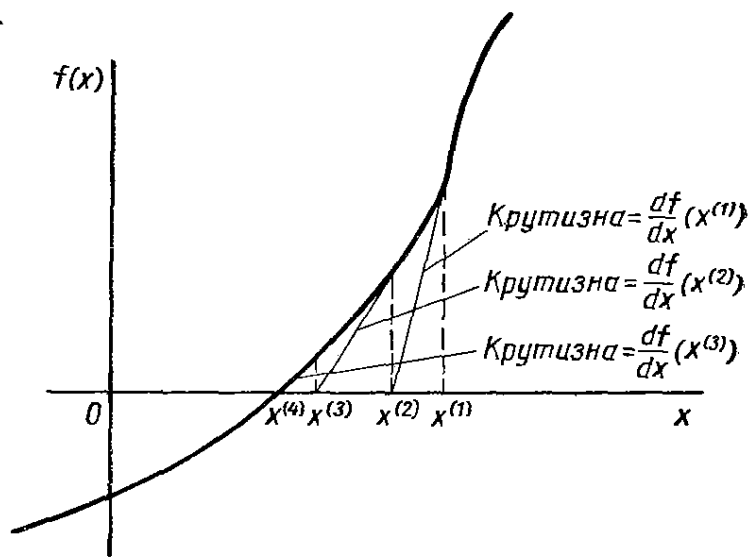


Рис. 17.1. Иллюстрация метода Ньютона—Рафсона для определения корня  $f(x) = 0$

Метод, выраженный в уравнениях (17.22), был впервые открыт Исааком Ньютоном и обычно известен как метод Ньютона—Рафсона.

Можно прийти к точным достаточным условиям для сходимости последовательности (17.22)<sup>1)</sup>. Этот метод можно развить дальше и использовать его применительно к векторному случаю, в котором необходимо найти нуль векторного алгебраического уравнения. Здесь обобщение метода Ньютона—Рафсона приводит к последовательности

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^{(n)}} \right]^{-1} f(x^{(n)}) \quad (17.24a)$$

или

$$f(x^{(n)}) + \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x^{(n)}} \right] (x^{(n+1)} - x^{(n)}) = 0. \quad (17.24б)$$

Достаточные условия сходимости в векторном случае представлены также в работе [154].

Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [101] показали, что метод Ньютона—Рафсона вполне можно использовать для решения векторных функциональных уравнений вида

$$\mathcal{P}(x) = 0, \quad (17.25)$$

\* См. работу [154].

где для наших целей  $\mathcal{P}$  можно рассматривать как ограниченный оператор, осуществляющий преобразование элементов банахова пространства  $\mathcal{X}$  в другой элемент того же пространства (см. § 11.7).

Для элемента  $x_0$  банахова пространства  $\mathcal{X}$ , если предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}(x_0 + hx) - \mathcal{P}(x_0)}{h} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{P}'(x_0)x \quad (17.26)$$

существует для каждого  $x$  в  $\mathcal{X}$ , величина  $\mathcal{P}'(x_0)$  рассматривается как производная\* оператора  $\mathcal{P}$  в  $x_0$ . Л. В. Канторович и Г. П. Акилов показали, что если первоначальное приближение  $x^{(1)}$  достаточно близко к решению  $x^*$ , то функциональное уравнение (17.25) можно решить итерационно с помощью обобщенной последовательности Ньютона—Рафсона

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [\mathcal{P}'(x^{(n)})]^{-1} \mathcal{P}(x^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.27)$$

Заметим, что формула (17.27) сразу же указывает путь решения двухточечной краевой задачи вида

$$\dot{x} = f(x, t); \quad x(t_1) = x_1; \quad x(t_2) = x_2, \quad (17.28)$$

где  $f$  имеет непрерывные первые частные производные по  $x$ . В банаховом пространстве непрерывной векторной функции времени с нормой, которая определяется также, как в примере 11.5, представим оператор  $\mathcal{P}$  в виде

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dt} - f \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2, \quad (17.29)$$

где  $\mathcal{P}_1$  — оператор  $d/dt$ , если  $\mathcal{P}_2$  — оператор, определяемый выражением  $\mathcal{P}_2(x) = f(x, t)$ , то уравнение (17.28) можно написать в виде функционального уравнения  $\mathcal{P}(x) = 0$  с соответствующими краевыми условиями. Оператор  $d/dt$  является неограниченным, но формально можно показать, что [105]

$$\mathcal{P}'_1(x_0)x = \frac{d}{dt} \quad (17.30)$$

и

$$\mathcal{P}'_2(x_0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_0} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \right]. \quad (17.31)$$

Следовательно, в соответствии с формулой (17.27) мы имеем итерационную последовательность

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \left[ \frac{d}{dt} - \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(n)}) \right]^{-1} \left( \frac{dx^{(n)}}{dt} - f(x^{(n)}, t) \right). \quad (17.32)$$

Умножив на оператор  $\left[ \frac{d}{dt} - \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(n)}) \right]$  и осуществив перестановку, приходим к векторной итерационной последовательности [105]

$$\frac{dx^{(n+1)}}{dt} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(n)}) \right] (x^{(n+1)} - x^{(n)}) + f(x^{(n)}, t) \quad (17.33)$$

с краевым условием  $x(t_1) = x_1$ ,  $x(t_2) = x_2$ . Теперь уравнения (17.28) можно решить с помощью итераций, начав с пробного решения  $x^{(1)}(t)$ , удовлетворяющего указанным краевым условиям. Так как  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x^{(n)}) \right]$  представляет

\* В соответствии с определением мы имеем производную Гато или слабую производную оператора  $\mathcal{P}$ . Если выражение (17.26) равномерно сходится относительно всех  $x \in \mathcal{X}$  с единичной нормой, то мы имеем производную Фреше, или сильную производную [101].

собой матрицу Якоби для системы (17.28), то мы видим, что уравнение (17.33) является линейным для каждого показателя  $n$  и может быть решено для данного краевого условия с помощью метода, описанного в § 12.3.

При использовании необходимых условий, получаемых с помощью вариационного исчисления, принципа максимума или динамического программирования, стандартную задачу оптимального управления, включающую в себя объект  $n$ -го порядка, можно свести к задаче с  $(2n + 1)$  дифференциальными уравнениями типа  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ \* и системе из  $m$  алгебраических уравнений вида  $\mathbf{g}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{0}$ \*\* . Краевые условия даны в двух точках и имеют вид  $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}(t_2) = \mathbf{y}_2$ . Таким образом, приведенный выше обобщенный метод Ньютона—Рафсона можно использовать для итерационного решения  $2n + m + 1$  уравнений. Для  $(2n + 1)$  дифференциальных уравнений используем итерацию вида (17.33). Для  $m$  алгебраических уравнений итерационная последовательность выражается с помощью формулы (17.24)

$$\mathbf{y}^{(n+1)} = \mathbf{y}^{(n)} - \left[ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y}^n, t)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(n)}, t); \quad (17.34)$$

эту итерацию можно осуществить следующим образом:

1) получим пробное решение  $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ , удовлетворяющее крайним условиям;

2) решение для управляющих воздействий находим из алгебраических уравнений (17.34) путем выражения через первые  $(2n + 1)$  переменных состояния, удовлетворяющих системе из  $(2n + 1)$  дифференциальных уравнений;

3)  $(2n + 1)$  дифференциальных уравнений в форме (17.33) решим методом, приведенным в § 12.3, для получения первых  $(2n + 1)$  составляющих вектора  $\mathbf{y}^{(2)}(t)$ ;

4) решения, полученные на третьем этапе, используем для получения последних  $m$  составляющих вектора  $\mathbf{y}^{(2)}(t)$ ;

5) повторим этот процесс до тех пор, пока норма разности  $\mathbf{y}^{(n+1)} - \mathbf{y}^{(n)}$  не окажется ниже заранее определенного уровня.

Обобщенный метод Ньютона—Рафсона труднее программировать по сравнению, например, с методом градиента. Однако по сложности он примерно такой же, как метод второй вариации. Кроме того, ввиду использования некоторых необходимых условий оптимальности с помощью обобщенного метода Ньютона—Рафсона невозможно найти вырожденные решения.

Имеется сравнительно небольшой практический опыт применения метода Ньютона—Рафсона. Вообще говоря, хотя и существуют теоремы, дающие достаточные условия сходимости, они являются слишком ограничивающими, чтобы быть полезными. Таким образом, приходится обходиться без априорной гарантии сходимости. Однако имеющиеся результаты являются, по-видимому, обнадеживающими [105], [135].

Помимо упомянутых здесь методов, можно отметить по меньшей мере еще два менее исчерпывающих метода. Первый из них основан на непосредственном использовании принципов, присущих динамическому программированию (см. § 15.1). Здесь проблемами являются объем памяти и сложность программирования, хотя для частичного решения этих проблем можно ис-

\* Среди которых  $n$  уравнений системы; уравнение, относительно показателя качества и  $n$  сопряженных уравнений.

\*\*  $m$  алгебраических уравнений можно получить, например, при использовании метода Валентины применительно к задаче с ограничениями по амплитуде управляющего воздействия. В этом случае  $m$  обозначает число управляющих воздействий с ограничением по амплитуде.

пользовать ряд способов [115]. Однако применение этого метода ограничено системами сравнительно небольшого порядка.

Вторую группу численных методов образуют не прямые методы. В них для того, чтобы прийти к обычной нелинейной двухточечной краевой задаче, используются необходимые условия. Путем произвольного выбора, например, трех сопряженных переменных и путем обратного интегрирования получаем оптимальную траекторию, которая, однако, приводит к неверному ряду начальных краевых условий. После этого предпринимается попытка систематически варьировать начальное условие с тем, чтобы решить соответствующую краевую задачу. К сожалению, вследствие того, что нормальная задача оптимального управления вообще исключительно чувствительна к начальному условию, в использовании не прямых методов до сих пор еще не достигнуто успеха.

## 17.2. ИЗУЧЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В теории оптимального управления предполагается, что для той или иной задачи показатель качества уже существует. Однако на практике задача бывает сформулирована не четко и проектировщику часто приходится находить такой показатель качества, который, по его мнению, наилучшим образом отвечает требованиям системы.

Если одного показателя качества достаточно, то следует рассмотреть структуру или схему оптимального управления. Необходимо исследовать такие вопросы, как чувствительность характеристик системы к изменениям параметров этой системы. Там, где это необходимо, можно использовать вычислительную машину.

Часто одного показателя качества недостаточно или его невозможно найти заранее, так как многие соображения, обуславливающие характеристики системы, невозможно в простом виде выразить одним критерием. В этом случае может потребоваться изучение различных соотношений с тем, чтобы определить, может ли приемлемое сочетание критериев послужить мерой качества системы. Здесь снова можно с успехом использовать вычислительную машину.

Существует, конечно, много возможных способов изучения основной структуры задачи оптимального управления; в данном разделе рассмотрим метод, предложенный У. Л. Нельсоном [147].

**Пример 17.1.** Рассмотрим для простоты случай управления искусственным спутником по углу тангажа. Путем регулирования положения спутника по тангажу желательно эффективно обеспечить прием сигнала наземной станции антенной, установленной на спутнике.

Необходимо прежде всего определить значение понятия «эффективно», которое обычно отражает пожелание заказчика.

Во-первых, очевидна необходимость экономного расхода топлива для реактивных двигателей. Однако, как мы выяснили из предыдущих глав, оптимальное по расходу топлива управление без ограничения времени может означать бесконечное время выполнения задания. Это нарушает наше понятие слова «эффективно». Таким образом, для данной конкретной задачи необходимо согласовать требования минимизации расхода топлива и минимизации времени.

Уравнение движения имеет вид

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = L(t); \quad L(t) \leq U. \quad (17.35)$$

Вводя новые переменные

$$x_1(t) \equiv \frac{J}{U} \theta(t); \quad x_2(t) \equiv \frac{J}{U} \dot{\theta}(t); \quad u(t) \equiv \frac{L(t)}{U},$$

получим следующую систему

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u(t); \quad |u(t)| \leq 1. \quad (17.36)$$

Целью управления является перевод спутника из произвольного начального состояния  $x = x_0$  в точку начала координат  $x = 0$  за время  $T$  с одновременной минимизацией показателя качества вида

$$\mathcal{J} = \int_0^T |u(\tau)| d\tau. \quad (17.37)$$

Известно, что на практике значение  $\theta$ , например  $\theta_1$ , неотлично от  $\theta_1 + 2n\pi$  для любого целого числа  $n$ , и потому в данном случае задача управления лишь не намного труднее, чем для управляемого объекта с передаточной функцией  $1/s^2$ . Однако без потери общности эту задачу можно представить в таком виде, чтобы рассмотреть все возможные начальные состояния:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 + 2n\pi; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \quad (17.38a)$$

где  $\theta_0$  и  $\dot{\theta}_0$  — истинные начальные состояния, которые обеспечивают «эффективное» управление для перевода системы в конечное состояние  $\theta = \dot{\theta} = 0$ . Затем выбирается наилучшее решение.

В свою очередь задачу можно представить в такой форме, чтобы отыскивать оптимальные решения для возможных конечных состояний:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ \dot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.38b)$$

при заданных начальных условиях.

При выражении через переменные  $x_1$  и  $x_2$  из уравнений (17.36) ряд начальных условий, описываемых с помощью соотношений (17.38a), принимает вид

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} + 2k\pi \left( \frac{1}{U} \right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x_2(0) &= x_{20} \end{aligned} \right\} \quad (17.39)$$

Теперь решение задачи не вызывает трудностей. В частности, чтобы избежать неединственности вырожденного решения, можно показать, что для каждого начального состояния, если принять

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 1; \\ 0, & -1 \leq \psi_2(t) \leq 1; \\ -1, & \psi_2(t) < -1, \end{cases} \quad (17.40)$$

где

$$\psi_2(t) = v \frac{T - vx_{20} - 2t}{(T^2 - x_{20}^2 + 2vTx_{20} + 4vx_{10})^{\frac{1}{2}}}; \quad (17.41)$$

$$v = \text{sign} \left( x_{10} + \frac{1}{2} x_{20} |x_{20}| \right), \quad (17.42)$$

то функция оптимального по расходу топлива управления определена (покажите это).

Желаемым решением задачи управления пространственным положением спутника является, конечно, такое решение, которое соответствует эквивалентному начальному состоянию, дающему наименьшее значение расхода топлива.

Для рассматриваемой здесь конкретной задачи основное значение имеют две величины, а именно: интервал времени управления  $T$  и расход топлива на этом интервале  $\int_0^T |u(\tau)| d\tau = \mathcal{J}$

Выбрав значение отношения вращающего момента к моменту инерции  $U/J$ , равное  $\pi/5$  рад/сек<sup>2</sup>, и начальное состояние (2; 1), находим, что  $\mathcal{J}$  и  $T$  с учетом требования минимального расхода топлива изменяются, как показано на рис. 17.2а. Можно привести объяснение представленным здесь кривым. Две ограничивающие линии  $\mathcal{J} = T$  и  $\mathcal{J} = |x_{20}|$  довольно

очевидны сами по себе. Первая из них представляет собой случай, когда данная продолжительность управления  $T$  равна  $t^*$ , т. е. минимальному отрезку времени, необходимому для достижения точкой начала координат при переходе от данного начального состояния. Вторая линия обозначает минимально возможную величину расхода топлива при переходе от данного начального состояния в точку начала координат. Интересной особенностью рис. 17.2а является то, что для конечного состояния  $(0; 0)$  кривая минимального расхода топлива лишь асимптотически

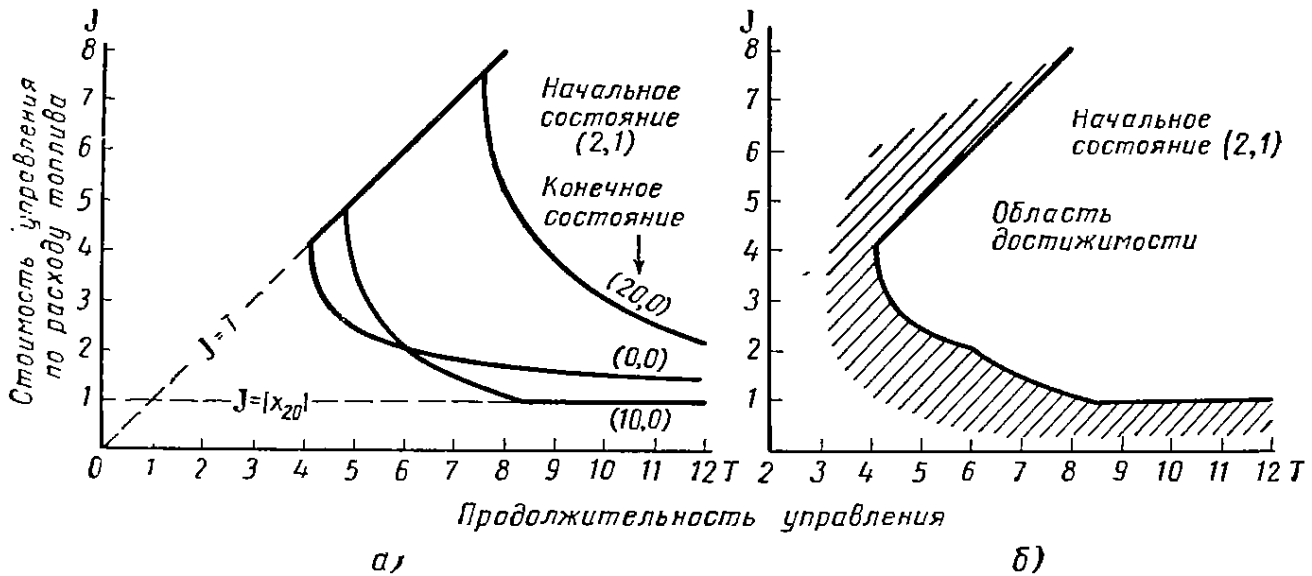


Рис. 17.2: а) Кривые зависимости  $\mathcal{J}$  от  $T$  для системы, рассматриваемой в разделе 17.2; б) Составная кривая, полученная с использованием графика рис. 17.2а, определяющая границу области достижимости (незаштрихованная область):

$\mathcal{J}$  — стоимость управления по расходу топлива;  $T$  — продолжительность управления

приближается к линии  $\mathcal{J} = |x_{20}|$ , тогда как для заданного конечного состояния  $(10; 0)$  указанная кривая действительно достигает этой линии (см. рис. 17.3). Из начального состояния  $(2; 1)$  можно достигнуть конечного состояния  $(0; 0)$  только с помощью последовательности управления  $u = -1, 0, +1$  и невозможно достигнуть точки начала координат при израсходовании минимального количества топлива  $|x_{20}|$  за какой-то конечный отрезок времени.

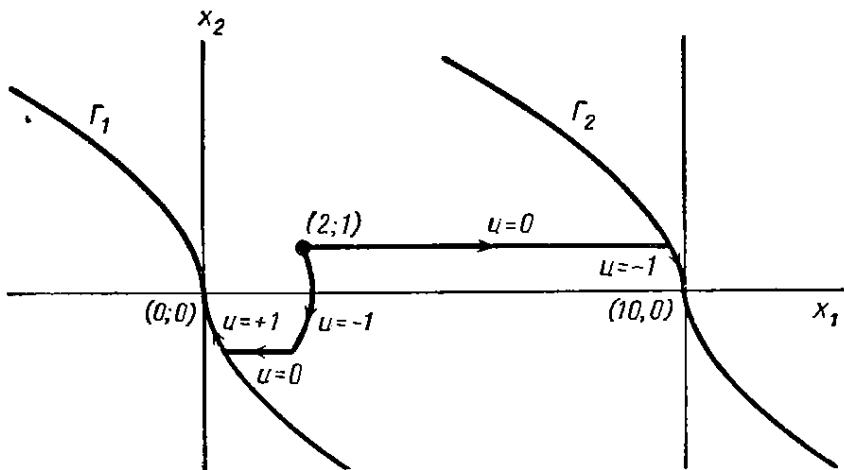


Рис. 17.3. Фазовая плоскость, показывающая конечное состояние  $(10; 0)$ , которое может быть достигнуто от  $(2; 1)$  при минимальном расходе топлива  $\mathcal{J} = |x_{20}|$ . Конечного состояния  $(0; 0)$  достигнуть невозможно

Однако для заданного конечного состояния  $(10; 0)$  можно всегда получить условие  $\mathcal{J} = |x_{20}|$ , если продолжительность управления  $T$  достаточно велика, чтобы позволить состоянию системы переместиться от  $(2; 1)$  к линии переключения  $\Gamma_2$  до включения  $u = -1$ . То же рассуждение применимо и к состоянию  $(20; 0)$ .

Отсюда видно, что для начального состояния  $(2; 1)$  нет необходимости рассматривать заданные конечные состояния  $(-10n; 0)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так как результирующий расход топлива не может быть меньше, чем для  $(0; 0)$ . Подобным же образом мы видим, что нет необходимости рассматривать конечные состояния за пределами точки  $(10; 0)$ .

Взяв те части кривых зависимости  $\mathcal{J}$  от  $T$ , которые дают минимальное значение  $\mathcal{J}$  для данного  $T$ , получим составные оптимальные кривые (рис. 17.2, б). Каждая точка на кривых представляет собой отдельную оптимальную конструкцию, отличающуюся от других. Реальная система может дать лишь точки, лежащие в незаштрихованной области на рис. 17.2, б \*

\* Необходимо обратить внимание на отсутствие выпуклости области достижимости. В связи с этим возникают проблемы при использовании составных скалярных критериев качества.

Сохраняя начальную скорость  $x_{20}$  на постоянном уровне и изменяя начальное положение  $x_{10}$ , можно получить семейство оптимальных кривых для ряда начальных состояний, которые можно представить в виде, показанном на рис. 17.4.

Характеристики различных реальных конструкций систем управления пространственной ориентацией можно непосредственно нанести на график рис. 17.4. Степень приближения реальной конструкции к идеальной служит мерой обоснованности расчета этой конструкции.

В работе [147] предлагается ряд квазиоптимальных методов разработки реальной конструкции оптимальных систем управления.

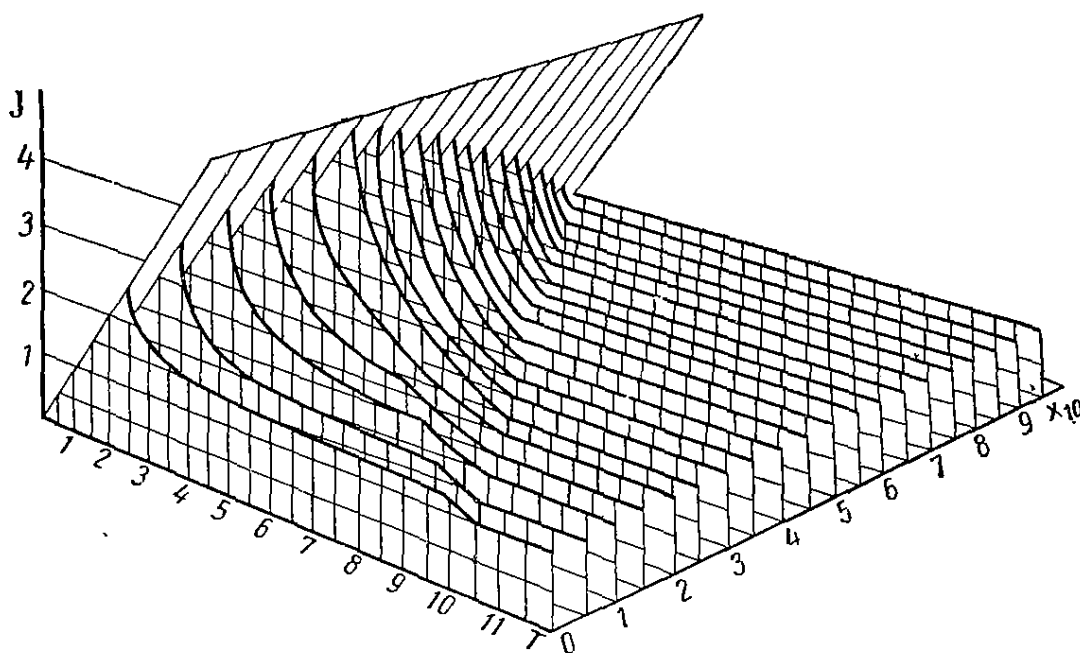


Рис. 17.4. Поверхность оптимальных характеристик для системы, рассматриваемой в примере 17.1, с  $x_{20} = 1$  и  $0 \leq x_{10} \leq 10$ :

$J$  — стоимость управления по расходу топлива;  $T$  — продолжительность управления;  $x_{10}$  — начальное положение

### 17.3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Если какая-либо задача формулируется в виде задачи оптимального управления, то ее решение в разомкнутом или замкнутом виде может показать, какое предельное качество будет достигнуто. Однако на практике вследствие целого ряда различных причин обычно трудно создать точную оптимальную систему управления. Приходится принимать ряд компромиссных решений, и таким образом получается субоптимальная конструкция\*.

Для определения обоснованности субоптимальной конструкции необходимо рассматривать насколько точно оптимальный расчет воплощен в реальной конструкции; насколько легко можно практически создать конструкцию путем использования существующих компонентов и насколько чувствительна конструкция к изменениям параметров и условий окружающей среды.

При оценке перечисленных выше факторов проявляется субъективность, и потому их трудно обсуждать достаточно обоснованно. Тем не менее две веские причины побуждают нас попытаться рассмотреть квазиоптимальные системы управления. Во-первых, субъективность является неизбежной реальностью на практике; однако даже в этих условиях существуют вполне определенные критерии в отношении выгодности их применения и качества, на основе которых плохие конструкции можно отделить от хороших. Во-вторых, несмотря на наличие большого числа опубликованных в литературе

\* Под субоптимальной конструкцией понимается техническая реализация квазиоптимальной системы управления (Прим. ред.).



работ, посвященных вопросам оптимального управления, в значительном числе отраслей промышленности в основном применяются линейные методы расчета. Эти методы часто приводят к неудовлетворительному результату при наличии больших сигналов. Такое положение можно исправить, если видоизменить расчет, придерживаясь в то же время основной сущности оптимального управления и учитывая особенности наличия больших сигналов.

Одной из существенно важных особенностей любой системы управления является ее нечувствительность к изменениям параметров. Вопрос о чувствительности или нечувствительности представляет собой тему все расширяющейся области исследований, которую мы не будем рассматривать детально

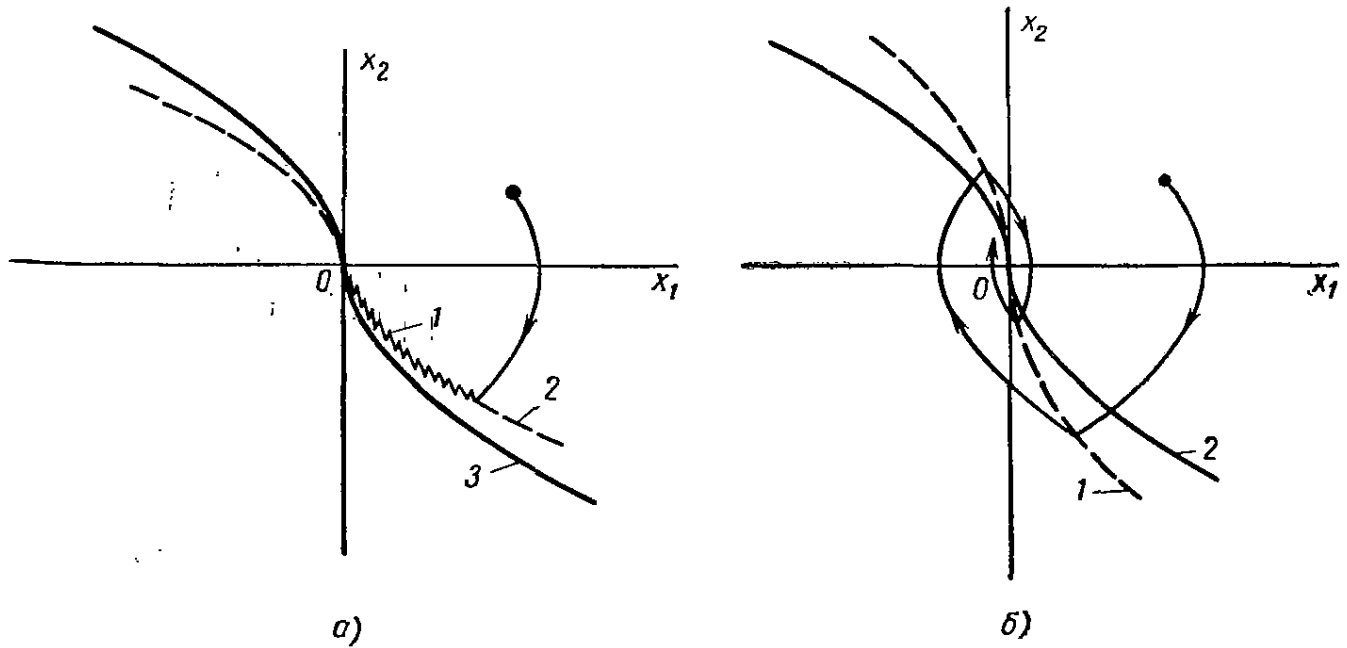


Рис. 17.5. Линии переключения для системы, рассматриваемой в примере 17.2:

*а*—скользящее движение; *б*—колебательное асимптотически устойчивое движение; 1—скользящий режим; 2 — реализуемая линия переключения; 3 — расчетная линия переключения

[46], [80]; тем не менее некоторое представление об основных идеях в этой области можно получить на следующем примере.

**Пример 17.2.** Для получения системы, способной обеспечить оптимальное управление каким-либо объектом, необходима аппаратура, создающая оптимальные линии или поверхности переключения. Этого можно добиться путем использования генераторов функций или каких-либо других средств. Предположим, что в аппаратуре для практического осуществления линии переключения допущена неточность или характеристики управляемого объекта изменяются в течение какого-то периода времени. В этом случае необходимо определить последствия этих факторов и принять меры для уменьшения чувствительности системы.

Рассмотрим объект управления, который описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Система, обеспечивающая оптимальное по быстродействию управление этим объектом, показана на рис. 4.9. Для получения линии переключения  $-\left(\frac{1}{2} |x_2| x_2 + Ux_1\right)$  требуется генератор функций. Предположим теперь, что вследствие изменений параметров системы реализованная линия переключения вызывает раннее переключение. В результате получится «скользящее движение» вдоль линии переключения\* (см. гл. 4), как показано на рис. 17.5, *а*. Кроме этого, если линия переключения такова, что имеет место позднее переключение, то результатом явится «недостаточно демпфированное» движение, как показано на рис. 17.5, *б*.

Из этих двух субоптимальных случаев один со скользящим движением в меньшей мере зависит от параметров системы и вследствие этого на практике целесообразнее рассчитывать

\* Напомним, что на практике «скользящее движение» выражается в виде колебаний относительно линии переключения с высокой частотой и небольшой амплитудой, что обусловливается динамикой звеньев более высокого порядка в системе, которые не учитывались при проектировании.

такую линию переключения, чтобы имело место скользящее движение вследствие раннего переключения.

Изложенное выше можно распространить на квазиоптимальное управление другими, возможно, нелинейными объектами. Проиллюстрируем теперь на примере метод обоснованного квазиоптимального расчета упрощенного автопилота ракеты.

**Пример 17.3.** Рассмотрим двумерную модель ракеты, управление которой осуществляется с помощью стабилизатора [см. в гл. 5 примеры 5.6 и 5.8]. Уравнения движения представлены в виде зависимостей (5.15), которые можно записать:

$$\dot{\omega}(t) = \frac{Al}{J} QC_M(\alpha, \delta); \quad (17.43a)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \omega - \frac{A}{mV} QC_L(\alpha, \delta); \quad (17.43б)$$

$$a_N(t) = \frac{A}{mg} QC_N(\alpha, \delta), \quad (17.43в)$$

где  $\omega = \dot{\theta}$  — скорость изменения угла тангажа;  $\alpha$  — угол атаки, а  $a_N$  — нормальное ускорение ракеты. Управляющим воздействием является угол отклонения руля  $\delta$ . В качестве нелиней-

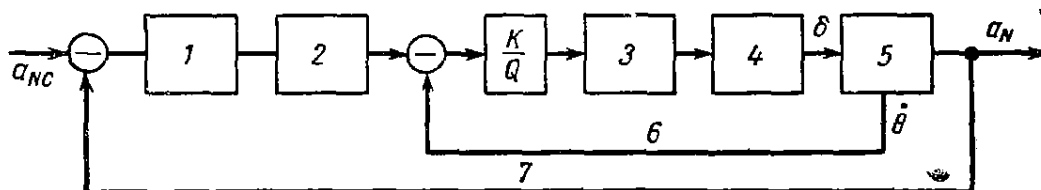


Рис. 17.6. Линейный автопилот ракеты:

$a_{NC}$  — командный сигнал; 1 — усиление, зависящее от  $Q$ ; 2, 3 — линейные фильтры; 4 — привод руля; 5 — ракета; 6 — контур демпфирования; 7 — контур перегрузки;  $a_N$  — выходной сигнал

ных функций выступают аэродинамические коэффициенты  $C_M(\alpha, \delta)$ ,  $C_L(\alpha, \delta)$  и  $C_N(\alpha, \delta)$ , определяемые на основе испытаний в аэродинамической трубе. Параметры  $A$ ,  $l$ ,  $J$ ,  $m$ ,  $g$  и  $Q$  определяются, как в примере 5.6. Следует отметить, что скоростной напор  $Q$  может изменяться в значительных пределах в диапазоне возможных режимов полета.

Обычно используемый метод расчета основан на локальной линеаризации, как было показано в примере 5.8, что приводит к уравнениям (5.20) и (5.21). Схема типового автопилота, полученная путем линейного расчета, показана на рис. 17.6. Здесь имеется внутренний контур демпфирования, в котором изменение угловой скорости  $\dot{\theta}$  вращения корпуса ракеты, измеряемой скоростным гироскопом, компенсируется усилителем с коэффициентом усиления пропорциональным  $1/Q$  и линейным фильтром. Полюсы или нули компенсирующей схемы можно, вероятно, сделать зависящими от  $Q$  с тем, чтобы обеспечить возможность «слежения» за полюсами ракеты. Во внешнем контуре ускорение ракеты измеряется акселерометром и непосредственно используется в цепи обратной связи для вычитания его из входного сигнала. На этот сигнал действует также линейная компенсирующая схема, усиление и динамика которой могут зависеть от  $Q$ .

При правильном выборе компенсирующих схем выходной сигнал ракеты  $a_N$  будет достаточно следовать входному сигналу ракеты, по крайней мере при небольших сигналах, определяемых небольшими значениями  $\alpha$ .

Известно, что ракеты, рассчитанные в соответствии с описанным выше методом, обладают хорошими характеристиками во многих некритических случаях. Однако, когда требуется обеспечить высокие характеристики, ракеты, рассчитанные в соответствии с линейными принципами, часто не отвечают предъявляемым к ним требованиям.

Покажем теперь, как некоторые основные положения оптимального управления можно использовать при расчете автопилотов с тем, чтобы улучшить характеристики ракеты при наличии больших сигналов.

К динамике ракеты предъявляются следующие основные требования:

- 1) маневренность, т. е. быстрота реакции на большие командные сигналы;
- 2) устойчивость или восстанавливаемость ракеты от воздействия не только больших командных сигналов, но и от сильных возмущений;
- 3) нечувствительность больших сигналов относительно изменения аэродинамических факторов и условий окружающей среды (например, большое изменение в скоростном напоре  $Q$ );
- 4) простота конструкции.

Необходимо принять какой-то критерий качества. Рассматривая задачи, которые ставятся перед системой, видно, что оптимальность по быстродействию является, по-видимому, приемлемым критерием, за исключением следующего: а) в системе предпочтительнее реализация скользящего режима с малыми биениями по сравнению с колебательной реакцией даже с приемлемой величиной перерегулирования; б) само собой разумеется также, что для расчета субоптимальной конструкции следует использовать столько переменных состояния, сколько физически возможно измерить.

При больших уровнях сигналов поведение привода, как было указано в гл. 6 § 6.6, можно аппроксимировать нелинейной системой первого порядка с обратной связью (см. рис. 6.20). Привод и ракета вместе образуют тогда систему третьего порядка. Помимо переменных состояния  $a_N$  и  $\theta$ , необходимо использовать также угол отклонения стабилизатора  $\delta$ , который можно измерить.

При наличии в системе третьего порядка трех измеряемых переменных состояния теоретически можно сконструировать оптимальную систему управления. Помимо очевидных трудностей вычислительного характера, связанных с попыткой получения функции оптимального управления, справедливой для всех возможных начальных условий, мы замечаем, что оптимальное управление будет зависеть от некоторых аэродинамических параметров и условий окружающей среды, которые известны недостаточно точно. Поэтому целесообразнее создать квазиоптимальный регулятор, отличающийся простотой в отношении физической реализации и нечувствительностью к изменениям аэродинамических параметров и условий окружающей среды.

При этом целесообразно руководствоваться следующими указаниями:

1. Так как желательно выдавать команды поперечного ускорения, можно сохранить путь единичной отрицательной обратной связи от измеряемого поперечного ускорения  $a_N$ .

2. С помощью моделирования можно показать, что траектории в плоскости зависимости  $\omega$  от  $(a_N - a_{NC})$  для ракеты при ограничении  $|\delta| \leq \delta_M$  очень сходны по форме с траекториями системы, рассматриваемой в примере 4.1. В таком случае целесообразно формировать сигнал  $\omega(t)$  подобно тому, как это показано на рис. 4.9. Затем в прямую цепь вводится реле.

Рис. 17.7. Возможная структурная схема нелинейного автопилота:

$a_{NC}$  — командный сигнал; 1 — реле; 2 — привод; 3 — ракета; 4 — постоянное усиление, зависящее от  $Q$ ; 5 — усиление, зависящее от  $Q$ ;  $a_N$  — выходной сигнал

3. Можно показать, что проекцию поверхности переключения на плоскость можно приближенно выразить линейей переключения. Подавая обратную связь по  $\delta(t)$  через соответствующие контуры усиления, можно обеспечить смещение эффективной линии переключения.

4. Воздействие скоростного напора  $Q$  на указанную выше линию переключения можно уменьшить, если некоторые контуры усиления сделать зависящими от  $Q$ .

5. Различные контуры усиления регулируются таким образом, чтобы реализованная линия переключения обеспечивала скользящее движение на всех режимах полета. В результате этого будет достигнута высокая степень нечувствительности к изменениям в аэродинамических параметрах и условиях окружающей среды.

Получаемая в результате этого схема автопилота имеет вид, показанный на рис. 17.7. Конструкция, разработанная для экспериментальной системы на основе аналогового моделирования, отличается значительно более высокими характеристиками по сравнению с системой, созданной на основе использования обычных линейных методов, применяемых в авиационно-космической технике.

## 17.4. КЛАСС СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При рассмотрении сложных современных систем управления, созданных человеком, видно, что большинство из них имеют такую форму, когда к ним неприменима теория оптимального управления. При дальнейшем рассмотрении могут появиться сомнения в обоснованности общепринятого мнения о том, что теория опережает практику, так как современные системы

управления содержат больше компонентов, чем в состоянии учесть теория. Однако эти системы действуют и обычно отвечают расчетным требованиям. Вплоть до настоящего времени теории не смогли дать достаточно точного объяснения того, почему и при каких условиях эти системы должны работать. Собрав известный фактический материал относительно современной теории систем управления, рассмотрим теперь класс систем, анализ которых требует полного использования всех наших возможностей.

Общей чертой, присущей большинству реальных систем, является то, что входной сигнал системы обычно не полностью известен или охарактеризован. Далее, большинство управляемых объектов являются в высшей степени сложными. Сочетание этих двух факторов делает нецелесообразным или невозможным обычное использование существующей теории оптимизации или даже стохастической теории оптимизации.

В подобных случаях для того чтобы использовать все имеющиеся теоретические знания, современный инженер обычно рассчитывает систему управления, обладающую следующими особенностями:

1. Входной сигнал измеряется и прогнозируется на какой-то отрезок времени в будущем.

2. Выходной сигнал управляемого объекта также прогнозируется на будущее; однако ввиду того, что последний зависит от входного сигнала, выходные сигналы прогнозируются для ряда допустимых входных сигналов. Далее, так как обычно невозможно вычислить реакцию действительной системы на различные входные сигналы за располагаемый отрезок времени, достаточно упрощенной модели системы.

3. Принимается решение в отношении того, какой ряд функций управления является наилучшим. Это обуславливает необходимость применения одного или более показателей качества.

4. Затем выбирается наилучший входной сигнал, который подается на вход в течение одного периода выборки, после чего вся процедура повторяется вновь.

Все сказанное выше, несмотря на простоту формулировки, создает ряд трудностей. Во-первых, возникает проблема прогноза. По существу теоретические разработки в области прогноза до некоторой степени напоминают положение, сложившееся в теории управления. Эта проблема действительно решена только для случая, когда система является линейной и сигнал на входе отличается хорошими статистическими свойствами.

Дополнительные проблемы возникают при моделировании сложного управляемого объекта. В настоящее время не существует удовлетворительной теории, которая позволила бы заменить моделирование сложных управляемых объектов высокого порядка моделированием объектов низкого порядка, и потому отсутствует опыт, на основе которого можно было бы определить, в какой мере отклонения, допускаемые при моделировании, отразятся на конечном результате.

Кроме того, проблему принятия решений невозможно свести к количественному описанию до тех пор, пока не будет введен критерий принятия решений, сходный с показателем качества. В связи с этим возникают в основном те же вопросы, что и при выборе показателя качества.

И, наконец, не существует четкого правила, которое регулировало бы продолжительность каждого цикла, определяемого указанными выше четырьмя пунктами. Часто это включает рассмотрение взаимозависимости между различными факторами, например зависимости между стоимостью схемной части (например, стоимостью вычислительной машины) и точностью управления.

Для большей конкретности рассмотрим задачу наведения ракеты на маневрирующую цель. Структурная схема системы наведения этой ракеты приведена на рис. 17.8.

Движение цели, регистрируемое, например, радиолокатором, соответствует входному сигналу, поступающему в систему. Однако поскольку цель может маневрировать для уклонения от встречи с ракетой, наши возможности в отношении прогноза ее движения в будущем ограничены.

Управляемая ракета представляет собой объект управления, и ее движение, регистрируемое радиолокатором, является выходным сигналом этого объекта. Прогнозирование движения ракеты зависит от нашей способности предвидеть направления, которые желательно сообщить ракете с помощью командных сигналов; но эти командные сигналы зависят от маневров укло-

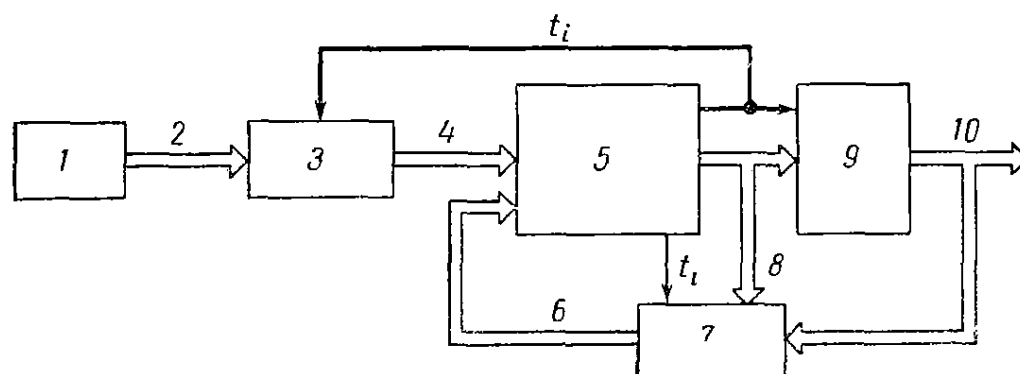


Рис. 17.8. Типовой контур наведения ракеты:

$t_i$  — момент перехвата; 1 — цель; 2 — положение и скорость цели; 3 — прогноз положения и скорости цели; 4 — прогнозируемое движение цели в момент времени  $t_i$ ; 5 — вычисление управления ракетой по курсу и момента перехвата; 6 — прогнозируемое движение ракеты в момент времени  $t_i$ ; 7 — прогноз положения и скорости ракеты; 8 — команда управления по курсу; 9 — ракета; 10 — положение и скорость ракеты

нения, выполняемых целью. Очень часто динамика цели и ракеты может моделироваться различными уравнениями.

Задача перехвата осложняется ограниченностью времени перехвата. Это показано на рис. 17.8. Как правило, подрыв боевой части ракеты будет осуществляться в тот момент, когда расстояние между целью и ракетой будет минимальным. Этот момент называется моментом перехвата и обозначается как  $t_i$ . В каждом цикле значения положения и скорости ракеты необходимо прогнозировать к моменту времени  $t_i$ . За это время необходимо вычислить командный сигнал, передаваемый ракете, а также новое значение  $t_i$  на основе рассмотрения геометрических и других факторов. Вследствие учета времени перехвата контур, определяющий значение  $t_i$ , и контур, вырабатывающий командный сигнал, направляемый ракете, связаны между собой, как показано на структурной схеме. Поэтому информация о цели, получаемая с помощью радиолокатора, не представляет собой чистого входного сигнала.

Для рассматриваемой здесь задачи может быть принято решение о минимизации величины промаха на основе предположения о том, что противник будет выполнять наиболее неблагоприятные в отношении цели маневры (минимаксная стратегия) или наиболее вероятный маневр уклонения (наиболее правдоподобная стратегия).

И, наконец, должен быть разработан простой план для выбора наилучшего управляющего сигнала, соответствующего принятым критериям. Так, например, в рассматриваемой здесь задаче можно предположить, что сигнал управления, поступающий на ракету, будет всегда иметь одну и ту же форму (например, полностью включенный или полностью выключенный) и менять необходимо лишь один параметр (например, момент отсечки входного

сигнала). Этот параметр затем выбирается таким образом, чтобы минимизировать величину промаха в момент перехвата.

Однако при составлении контура необходимо учитывать факторы, связанные с обеспечением устойчивости. Очень часто контур наведения описанного выше типа становится все менее устойчивым по мере приближения ракеты к цели из-за того, что чувствительность системы к маневру цели монотонно возрастает при приближении ракеты к цели.

Заметим, что на современном этапе ни теория устойчивости, ни теория оптимального управления еще не в состоянии обеспечить решение описанного выше класса задач. В дальнейшем степень сложности систем управления может еще больше повыситься. Поэтому возможно создание, например, обучающихся или самонастраивающихся контуров управления.

## 17.5. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящее время оптимальное управление определяется совокупностью математических теорем. Применимость их к большинству современных задач управления не является очевидной.

Однако в ряде случаев теория оптимального управления может способствовать лучшему пониманию реально существующих систем.

В тех случаях, когда задача отвечает требованиям реальной системы, но слишком трудна для решения аналитическим путем, можно прибегнуть к численным решениям с использованием вычислительных машин. Этот аспект применения теории управления рассматривается в § 17.1.

Даже в том случае, когда задача отвечает требованиям реальной системы, очень часто оказывается неясным, какой критерий качества следует использовать. Это обуславливает необходимость изучения взаимозависимостей между различными факторами. В § 17.2 эта задача рассматривается на примере, приводимом Нельсоном.

Очень часто схема оптимального управления непосредственно не может быть использована из-за чувствительности и других факторов, но вместе с тем желательно каким-либо образом обеспечить квазиоптимальные характеристики. В таких случаях знания, полученные при изучении систем оптимального управления, часто позволяют нам рассчитать квазиоптимальные системы, которые по своим качествам превосходят классические. В § 17.3 приведен пример квазиоптимальной системы.

Однако существует много систем, которые трудно анализировать на основе существующей теории. Это указывает на то, что в отношении этих систем существующая теория отстает от практики. В § 17.4 указан класс систем, которые до сих пор не поддаются анализу.

## 17.6. УКАЗАНИЯ НА ЛИТЕРАТУРУ

Основной литературой по методу наискорейшего спуска являются работы [103] и [28]. В первой из них используется метод функции штрафов. В работе [38] применяется метод наискорейшего спуска к задачам с ограничениями типа неравенств.

Метод второй вариации рассматривается в работах [25], [105] и [110].

Обобщенный метод Ньютона—Рафсона был впервые освещен в работе [101] и использован для решения систем дифференциальных уравнений в работах [105] и [136]. § 17.2 основан на результатах работы [147].

Материал, рассмотренный в § 17.3 и § 17.4, изложен авторами на основе своих неопубликованных работ.

# **ПРИЛОЖЕНИЯ**



## **ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ**

### **ОБЫЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И МОДИФИЦИРОВАННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ**

#### **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ**

## ПРИЛОЖЕНИЕ I

### ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ \*

#### I.1. Предварительные сведения

Матрица размера  $n \times m$  представляет собой упорядоченное расположение  $nm$  величин в виде прямоугольника с  $n$  строками и  $m$  столбцами. Матрица, элемент которой в  $i$ -й строке и  $j$ -ом столбце представляет собой  $a_{ij}$ , записывается в виде  $[a_{ij}]$ . Таким образом,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]. \quad (\text{I.1})$$

Произведение  $n \times m$  определяет порядок матрицы.

Результат транспонирования матрицы  $A$ , обозначаемый через  $A^T$ , представляет собой матрицу, полученную путем перестановки строк и столбцов матрицы  $A$ . Для приведенной выше матрицы  $A$  транспонированная матрица имеет вид

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ji}]. \quad (\text{I.2})$$

Таким образом, это матрица размера  $m \times n$ .

#### I.2. Типы матриц

Матрицу размера  $n \times 1$  называют вектором-столбцом или просто вектором  $x$ . Результатом транспонирования подобной матрицы является матрица размера  $1 \times n$ , называемая вектором-строкой. Матрица размера  $1 \times 1$  является скаляром ( $a$ ).

Матрицу, в которой число строк равно числу столбцов, называют квадратной матрицей. Квадратная матрица размера  $n \times n$  имеет порядок  $n$ . Многие матричные операции определены только для квадратной матрицы.

Элементы  $a_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, n$  квадратной матрицы размера  $n \times n$  называют диагональными элементами; остальные элементы, характеризуемые  $a_{ij}$  с  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), известны как недиагональные элементы.

Сумму диагональных элементов квадратной матрицы  $A$  называют следом матрицы  $A$  и обозначают через  $Tr(A)$ .

Квадратная матрица, все недиагональные элементы которой равняются нулю, называется диагональной матрицей. Диагональную матрицу с  $a_{ii} = c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  обозначают иногда как  $\text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ .

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице (т. е. матрица  $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ), известна как единичная матрица. Она обозначается символом  $I$ .

Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют нулевой матрицей и обозначают через  $0$ .

\* К числу основных работ по теории матриц относятся [54], [56], [74], [159].



Квадратная матрица размера  $n \times n$ , все недиагональные элементы которой таковы, что  $a_{ij} = a_{ji}$  при  $i \neq j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), называется симметричной матрицей. Для симметричной матрицы  $A$  выполняется равенство  $A^T = A$ .

Если квадратная матрица  $A$  в качестве элементов имеет комплексные числа, то ее сопряженная транспонированная матрица, обозначаемая как  $A^*$ , представляет собой матрицу, образованную путем замены каждого элемента матрицы  $A^T$  его комплексно сопряженным. Матрица, обладающая свойством  $A^* = A$ , известна как эрмитова матрица.

Квадратная матрица  $A$ , определитель которой  $A$  равен нулю, называется особой матрицей. В противном случае она является неособой.

Определитель квадратной матрицы  $A$  представляет собой число, связанное с этой матрицей, и обычно записывается в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель  $|[m_{ij}]|$  матрицы размера  $(n-1) \times (n-1)$ , которая получается при удалении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца из матрицы  $A$  размера  $n \times n$ , называется минором элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$ . Минор элемента  $a_{ij}$ , умноженный на  $(-1)^{i+j}$ , дает алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

Величину определителя можно найти с помощью так называемой формулы разложения Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} |a_{ij}| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |[m_{ij}]| \text{ для любого целого числа } i, 1 \leq i \leq n; \\ |a_{ij}| &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |[m_{ij}]| \text{ для любого целого числа } j, 1 \leq j \leq n. \end{aligned} \right\} \quad (I.3)^*$$

Так как каждый определитель  $|[m_{ij}]|$  в выражении (I.3) можно разложить далее по формуле Лапласа, то определители любого порядка можно выразить через определители первого и второго порядков.

Определители первого и второго порядков находятся следующим образом:

$$|a| = a; \quad (I.4a)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (I.4b)$$

Присоединенная матрица к квадратной матрице  $A$ , обозначаемая как  $\text{adj } A$ , получается при замене каждого элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  его алгебраическим дополнением с последующим транспонированием.

Пример I.1. Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

элемент  $a_{21} = 2$ , минор этого элемента представляет собой определитель  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$ , а алгебраическое дополнение этого элемента будет  $(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +1$ . Присоединенная матрица к матрице  $A$  имеет вид

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

\* Величина определителя определяется суммой произведения элементов любой строки или столбца и их алгебраических дополнений.

Определителем  $A$  является

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (12 - 1) - 2(-1) = 13.$$

### 1.3. Основные матричные операции

Две матрицы  $A \triangleq [a_{ij}]$  и  $B \triangleq [b_{ij}]$  равны в том и только в том случае, если их порядки равны и равны их соответствующие элементы, т. е.  $a_{ij} = b_{ij}$  для всех  $i$  и  $j$ . Когда  $A$  и  $B$  равны, пишем  $A = B$ .

Две матрицы  $A \triangleq [a_{ij}]$  и  $B \triangleq [b_{ij}]$ , порядки которых равны, можно сложить или вычесть, чтобы в результате получить соответственно новые матрицы  $C \triangleq [c_{ij}]$  и  $D \triangleq [d_{ij}]$ ; элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  связаны между собой следующим образом:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \quad (1.5)$$

При умножении матрицы  $A \triangleq [a_{ij}]$  на скаляр  $k$  получается новая матрица с элементом  $ka_{ij}$ .

Матрицы  $A$  и  $B$  можно умножить и получить матрицу произведения  $AB = C$  в том и только в том случае, если число столбцов  $A$  равно числу строк  $B$ . В том случае, когда это имеет место,  $A$  и  $B$  рассматриваются как соответствующие сомножители. Если  $A$  имеет размер  $n \times m$ , а  $B$  имеет размер  $m \times l$ , то получаемая в результате матрица  $C = AB$  будет иметь размер  $n \times l$ , а элементы

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}. \quad (1.6)$$

Следует отметить, что если  $n \neq l$ , то произведение  $BA$  не существует. Легко показать, что если даже  $n = l$ , то матричное умножение не является коммутативным, так что вообще  $AB \neq BA$ . Заметим, что для любой квадратной матрицы  $A$ , имеющей тот же размер, что и  $I$ ,  $AI = IA = A$ .

Можно также показать, что

$$A [\text{adj} \cdot A] = |A| I = [\text{adj} \cdot A] A. \quad (1.7)$$

Для определения операции, напоминающей деление, требуется понятие обратной квадратной матрицы. Для квадратной матрицы  $A$ , которая является неособой, ее обратная  $A^{-1}$  определяется отношением

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad (1.8)$$

После предварительного умножения уравнения (1.7) на  $A^{-1}$  и упрощения можно увидеть, что  $A^{-1}$  определяется выражением

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}. \quad (1.9)$$

Пример 1.2. Для матрицы  $A$ , приведенной в примере 1.1 с  $|A| = 13$ , имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, так как

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

то для этого случая уравнение (1.7) справедливо.

Часто некоторое преимущество при выполнении матричных операций можно получить путем разбиения. Последнее представляет собой процесс деления матрицы на подматрицы. В том случае, когда размеры этих матриц совместимы, правила матричной алгебры

непосредственно применимы, если подматрицы рассматривать как элементы матрицы. Так, например, если матрица  $A$  размера  $9 \times 8$  и матрица  $B$  размера  $8 \times 6$  записаны в виде

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right]; \quad B = \left[ \begin{array}{c|c} K & L \\ \hline M & N \end{array} \right],$$

где в  $A$  подматрицы  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  имеют соответственно размеры  $5 \times 6$ ,  $5 \times 2$ ,  $4 \times 6$  и  $4 \times 2$ , а в  $B$  размеры подматриц  $K$  и  $L$  составляют  $6 \times 3$ , а размеры подматриц  $M$  и  $N$  равны  $2 \times 3$ , то тогда эти подвергнутые разбиению матрицы являются соответствующими относительно умножения, а произведение  $AB$  представляет собой матрицу размера  $9 \times 6$ , которая выражается следующим образом\*:

$$AB = \left[ \begin{array}{c|c} PK + QM & PL + QN \\ \hline RK + SM & RL + SN \end{array} \right]. \quad (I.10)$$

Разбиение особенно эффективно, если одна или более подматриц имеют в качестве элементов только нули. Кроме того, разбиение полезно при вычислении обратных величин для больших матриц. При прямом процессе с использованием уравнения (I.7) это вычисление, вероятно, является весьма трудоемким и требует большой затраты времени.

Для иллюстрации можно вывести формулу для обратной матрицы  $A$  размера  $2n \times 2n$ , которая при разбиении на четыре матрицы размера  $n \times n$  принимает вид

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array} \right].$$

Пусть  $A^{-1}$  имеет вид

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} F & G \\ \hline H & J \end{array} \right],$$

где подматрицы также имеют размер  $n \times n$ . Так как  $AA^{-1} = I$ , получим

$$BF + CH = I_n; \quad BG + CJ = 0; \quad DF + EH = 0; \quad DG + EJ = I_n, \quad (I.11)$$

где  $I_n$  — единичная матрица размера  $n \times n$ .

Решая уравнения (I.11), найдем

$$F = (B - CE^{-1}D)^{-1}; \quad H = -E^{-1}DF; \quad J = (E - DB^{-1}C)^{-1}; \quad G = -B^{-1}CJ; \quad (I.12)$$

покажите это.

#### 1.4. Линейная независимость и ранг

Ранг матрицы  $A$  размера  $n \times m$  определяется как порядок наибольшего квадратного минора, определитель которого не равен нулю. Этот квадратный минор получается путем вычеркивания соответствующих строк и столбцов матрицы  $A$ .

Можно показать, что ранг матрицы  $A$  не изменяется при выполнении любой из следующих операций:

- 1) перестановки двух любых строк или двух столбцов матрицы  $A$ ;
- 2) умножения элементов любой строки или столбца на какое-либо число, не равное нулю;
- 3)  $k$ -кратного добавления к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

При этом имеет место следующая теорема:

**Теорема I.1.** Если из матрицы  $A$  размера  $n \times m$  и ранга  $l$  ( $n \geq m > l$ ) выбрать  $l$  строк (или столбцов), которые вместе образуют подматрицу ранга  $l$ , то тогда любую другую строку (столбец) в  $A$  можно всегда выразить в виде линейной комбинации этих  $l$  строк (столбцов).

Рассмотрим  $m$  векторов:  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , каждый из которых имеет  $n$  составляющих  $n > m$ , если имеется  $m$  постоянных:  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , из которых по крайней мере одна не равна нулю, так что линейная комбинация

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m = \sum_{i=1}^m c_i a_i = 0, \quad (I.13)$$

то тогда  $m$  векторов:  $a_1, \dots, a_m$  называют линейно зависимыми; в противном случае эти векторы считаются линейно независимыми.

\* При этом необходимо точно придерживаться порядка умножения подматриц.

Теперь  $\sum_{i=1}^m c_i a_i = 0$  также можно написать в виде

$$Ac = 0, \quad (I.14)$$

где  $A$  — матрица размера  $n \times m$ ,  $i$ -й столбец которой занят вектором  $a_i$ , а  $c$  представляет собой вектор с составляющими  $c_i$ . В векторно-матричном уравнении (I.14)  $a_1, \dots, a_m$  являются линейно независимыми в том и только в том случае, если матрица  $A$ , определение которой приведено выше, имеет ранг  $m$ .

Из сказанного выше следует, что если квадратная матрица  $A$  размера  $m \times m$  имеет ранг  $l < m$ , то ее определитель  $|A| = 0$ . Это справедливо также для случая, когда имеется квадратная матрица  $A$  размера  $n \times n$  и ненулевой  $n$ -мерный вектор  $x$ , удовлетворяющий условию  $Ax = 0$ . Тогда последнее выражение можно записать в виде  $\sum_{i=1}^n x_i a_i = 0$ , где  $x_i$  представляет собой составляющие  $x$ , а  $a_i$  являются столбцами  $A$ ; мы видим, что  $Ax = 0$  возможно только в том случае, если  $|A| = 0$ .

## I.5. Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Уравнение вида  $Ax = y$  представляет собой линейное преобразование вектора  $x$  в вектор  $y$ . Это уравнение можно рассматривать как отображение любого вектора пространства, в котором определен  $x$ , а вектор в пространстве, где определяется  $y$ . Если  $A$  — квадратная матрица, то  $x$  и  $y$  имеют одно и то же число составляющих, и действительно, в этом случае  $A$  можно рассматривать как оператор преобразования вектора  $x$  в другой вектор в том же пространстве.

Часто бывают случаи, когда необходимо найти векторы  $x$  и значения скаляра  $\lambda$  такие, что уравнение (см., например, § 3.4)

$$Ax = \lambda x \quad (I.15)$$

удовлетворяется для какой-либо данной квадратной матрицы  $A$ . Значения скаляра  $\lambda$ , при котором удовлетворяется уравнение (I.15), носят название собственных значений квадратной матрицы  $A$ .

Написав уравнение (I.15) в виде

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (I.16)$$

имеем

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (I.17)$$

что является необходимым и достаточным условием существования нетривиальных  $\lambda$ , удовлетворяющих (I.15).

Разлагая определитель (I.17), получим полином  $n$ -й степени по  $\lambda$ , который называется характеристическим уравнением  $A$ . Затем  $n$  значений  $\lambda$ :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (которые не обязательно должны быть действительные или различные) можно найти как корни характеристического уравнения.

Каждому значению  $\lambda$ , например  $\lambda_i$ , соответствует вектор  $v_i$ , удовлетворяющий (I.15), т. е.  $Av_i = \lambda_i v_i$ . Вектор  $v_i$  называется собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\lambda_i$ .

**Пример 1.3.** Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}; \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -8 & -14 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8 = 0.$$

В этом случае собственные значения равны  $\lambda_1 = -1$ ;  $\lambda_2 = -2$ ;  $\lambda_3 = -4$ . Значению  $\lambda_1$  соответствует  $Av_1 = -v_1$ . Это дает систему уравнений  $v_{12} = -v_{11}$ ;  $v_{13} = -v_{12} = v_{11}$ ;  $-8v_{11} - 14v_{12} - 7v_{13} = -v_{13}$ , где  $v_{11}, v_{12}, v_{13}$  — составляющие вектора  $v_1$ . Эта система является однородной, и, следовательно, решение определяется с точностью до постоянного множителя. Приняв  $v_{11} = 1$ , имеем решение

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Подобным же образом найдем

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

Может оказаться, что характеристическое уравнение действительной матрицы имеет комплексные корни. Тогда собственные векторы будут иметь комплексные составляющие. Можно показать, что если матрица эрмитова, то собственные значения действительные и симметричная матрица, представляя собой частный случай эрмитовых матриц, имеет действительные собственные значения и собственные векторы.

## 1.6. Приведение матриц к диагональному виду

Для квадратной матрицы  $A$  часто бывает необходимо найти, если это возможно, другую квадратную матрицу  $P$  такую, чтобы выполнялось матричное уравнение

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad (I.18)$$

(см., например, § 3.4). Здесь  $\Lambda$  представляет собой квадратную матрицу  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  являются  $n$  собственными значениями матрицы  $A$ .

Из предыдущего параграфа следует, что матрица  $P$  является такой, столбцы которой с 1-го по  $n$ -й представляют соответственно собственные векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . При условии, что  $P^{-1}$  существует, уравнение (I.18) выполняется и его можно написать в виде

$$AP = P\Lambda. \quad (I.19)$$

**Пример 1.4.** Для матрицы  $A$  в примере 1.3 матрицей  $P$ , приводящей  $A$  к диагональному виду по уравнению (I.18), является такая матрица, столбцы которой составляются векторами  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  и  $\mathbf{v}_3$ , определяемыми в примере 1.3. Таким образом,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix},$$

легко показать, что

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Если собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$  являются различными, то матрица  $P$ , построенная, как показано выше, является неособой.

Чтобы показать это, предположим, что  $|P| = 0$ , тогда в соответствии с результатом § 1.4 столбцы  $P$  являются линейно зависимыми. Поэтому можно написать

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (I.20)$$

для некоторых постоянных  $c_1, \dots, c_n$ , не все из которых равны нулю.

Если обе части соотношения (I.20) предварительно умножить последовательно на  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , то из выражения (I.19) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i &= \mathbf{0}; \\ \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i \mathbf{v}_i &= \mathbf{0}; \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^{n-1} \mathbf{v}_i &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (I.21)$$

Пусть вектор  $v_i$  имеет составляющие  $v_{i1}, \dots, v_{in}$ , тогда для получения нетривиального решения для этих составляющих (что подразумевается условиями задачи) мы должны иметь

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.22)$$

Однако известно, что приведенный выше определитель Вандермонда можно выразить в виде  $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$  [12], и, следовательно, он может равняться нулю в том и только в том случае, если  $\lambda_j = \lambda_i$  для какого-то  $j \neq i$ . Так как наше первоначальное предположение отвергается, то  $|P| \neq 0$  и, следовательно,  $P$  является неособой.

Если  $\lambda$  не различные, то нельзя больше гарантировать возможность нахождения  $P$ , которая приводит матрицу  $A$  к диагональному виду с помощью уравнения (1.18). В этом случае, можно найти неособую матрицу  $P$ , которая приводит  $A$  к жордановой канонической форме  $\Lambda_J$  т. е.  $P^{-1}AP = \Lambda_J$ , где  $\Lambda_J$  определяется уравнением (2.25)\*.

## 1.7. Квадратичные формы

Выражение

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j, \quad (1.23)$$

включающее в себя члены второй степени по  $x_i$  и  $x_j$ , называется квадратичной формой  $n$  переменных.

При этом квадратичную форму можно компактно выразить в векторно-матричной форме следующим образом:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j = x^T Q x, \quad (1.24)$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} k_{11} & \frac{k_{12} + k_{21}}{2} & \dots & \frac{k_{1n} + k_{n1}}{2} \\ \frac{k_{12} + k_{21}}{2} & k_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \frac{k_{1n} + k_{n1}}{2} & & & k_{nn} \end{bmatrix} = [q_{ij}] = Q^T. \quad (1.25)$$

Квадратичная форма считается положительно (отрицательно) определенной, если  $q = 0$  для  $x = 0$  и  $q > 0$  ( $q < 0$ ) для  $x \neq 0$ . Она считается положительно (отрицательно) полуопределенной, если  $q = 0$  для  $x = 0$  и  $q \geq 0$  ( $q \leq 0$ ) для  $x \neq 0$ .

Проверка положительной определенности квадратичной формы обеспечивается следующей теоремой [12], [56].

**Теорема 1.2.** Квадратичная форма  $q(x) = x^T Q x$  является положительно (отрицательно) определенной в том и только в том случае, если все  $n$  определителей  $|Q_1|, \dots, |Q_n|$  положительны (отрицательны), где

$$\left. \begin{aligned} |Q_1| &= |q_{11}|; \quad |Q_2| = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{vmatrix}; \quad Q_3 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{vmatrix}; \\ |Q_m| &= |[q_{ij}]|; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \leq n \\ j = 1, \dots, m \leq n \end{matrix}; \quad |Q_n| = |Q|. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

\* Исключением из этого является случай, когда матрица  $A$  коммутирует с результатом своего транспонирования (т. е.  $AA^T = A^T A$ ). Подобную матрицу можно всегда привести к диагональному виду с помощью  $P^{-1}AP$ . Частным случаем этого является симметричная матрица.

## 1.8. Теорема Кэли—Гамильтона

Важным результатом в теории матриц является теорема Кэли—Гамильтона.

**Теорема 1.3.** Пусть  $f(\lambda) = 0$  представляет собой характеристическое уравнение произвольной квадратной матрицы  $A$ , тогда  $f(A) = 0$  (т. е.  $A$  удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению).

Эту теорему можно достаточно просто доказать для различных собственных значений, так как известно, что в этом случае можно найти такую неособую матрицу  $P$ , что  $P^{-1}AP = \Lambda$  или  $AP = P\Lambda$ . А это означает, что путем последовательного предварительного умножения на  $A, A^2, \dots, A^n$  получим  $A^2P = PA^2, \dots, A^nP = PA^n$ .

Отсюда для любого полинома  $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$  имеем  $g(A)P = Pg(\Lambda)$ . В частности, это относится к характеристическому полиному

$$f(A)P = Pf(\Lambda). \quad (I.27a)$$

Однако

$$f(\Lambda) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) \quad (I.27b)$$

и  $f(\lambda_i) \stackrel{\Delta}{=} 0$  для каждого  $i$ . Отсюда из выражения (I.27a) следует, что раз  $P$  является неособой, то  $f(A) = 0$ .

Доказательство для общего случая см. в работах [12], [56].

## 1.9. Некоторые полезные соотношения

### 1. Некоторые матричные тождества

Читатель, возможно, захочет проверить следующие матричные соотношения:

а)  $[AB \dots MN]^T = N^T M^T \dots B^T A^T$ ;  
 б)  $[AB \dots MN]^{-1} = N^{-1} M^{-1} \dots B^{-1} A^{-1}$ , если каждая из обратных матриц существует;

в)  $|AB \dots MN| = |A| |B| \dots |M| |N|$ ;

г) для матрицы размера  $n \times n$ , подвергнутой разбиению на  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ , где  $A$  — матрица размера  $m \times m$ , а  $D$  — матрица размера  $(n-m) \times (n-m)$ , имеем

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & & -A^{-1}B \\ 0 & (n-m) \times m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & & 0_{m \times (n-m)} \\ 0 & (n-m) \times m & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & & 0_{m \times (n-m)} \\ -CA^{-1} & & I_m \end{bmatrix}.$$

Здесь  $0_{r \times s}$  представляет собой матрицу размера  $r \times s$ , состоящую целиком из нулей.

### 2. Вычисление определителя матрицы высокого порядка

Для нахождения определителя матрицы высокого порядка (например,  $n > 10$ ) приходится затрачивать очень много машинного времени, если использовать формулу разложения Лапласа, приведенную в § 1.2. В этом случае можно воспользоваться следующей теоремой.

**Теорема 1.4.** Определитель матрицы остается неизменным, если к элементам любой строки (столбца)  $k$  раз добавить соответствующие элементы любой строки (столбца).

В соответствии с теоремой 1.4 определитель матрицы можно преобразовать в треугольную форму, в которой все элементы выше (или ниже) главной диагонали равны нулю. По формуле разложения Лапласа значение определителя треугольной матрицы определяется произведением элементов главной диагонали.

### 3. Определение аналитических функций от матриц

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  представляют собой собственные значения квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$ . Эти собственные значения соответствуют различным собственным векторам единичной длины  $v_1, v_2, \dots, v_n$  матрицы  $A$  и пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n$  представляют собой различные собственные векторы единичной длины матрицы  $A^T$ . Можно показать, что квадратные матрицы  $v_i u_i^T$ , называемые спектром матрицы  $A$ , имеют ранг 1 и являются идемпотентными, т. е.

$$[v_i u_i^T]^N = v_i u_i^T \text{ для каждого } i \text{ и для } N = 1, 2, \dots \quad (I.28)$$

Далее, для любого полинома  $P(x)$  имеем

$$P(A) = v_1 u_1^T P(\lambda_1) + v_2 u_2^T P(\lambda_2) + \dots + v_n u_n^T P(\lambda_n), \quad (I.29)$$

и для любых аналитических функций  $F(A)$ , которые определяются с помощью тех же степенных рядов, как это имело место соответственно в скалярных функциях (например,  $e^{At}$ ), имеем

$$F(A) = v_1 u_1^T F(\lambda_1) + v_2 u_2^T F(\lambda_2) + \dots + v_n u_n^T F(\lambda_n) \quad (I.30)$$

всюду, где этот ряд сходится для каждой из  $\lambda_i$  \*.

Если собственные значения  $A$  не являются различными, то можно использовать следующее расширение формулы Коши:

$$F(A) = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) (zI - A)^{-1} dz, \quad (I.31)$$

где  $z$  — комплексная переменная;

$C$  — граница области (не обязательно односвязная) в комплексной плоскости, содержащей все собственные значения  $A$  \*\*.

Пример 1.5. Матрица  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  имеет собственные значения  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Здесь

$$v_1 = u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда спектр матрицы имеет вид

$$v_1 u_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad v_2 u_2^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

При наличии этого спектра матрицы и использовании уравнений (I.28) и (I.29) очень просто вычислить такие величины, как  $A^{23}$ ,  $A^{-1}$ ,  $e^{At}$ ,  $\cos At$ . В соответствии с соотношением (I.28)

$$A^{23} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} 5^{23} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} 1^{23};$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{5} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} 1.$$

В соответствии с выражением (I.29) имеем

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{5t} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^t;$$

$$\cos At = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cos 5t + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cos t.$$

\* Функции от матриц можно определить аналитическим продолжением функций от собственных значений.

\*\* Предполагается, что  $F(z)$  является аналитической в области, ограниченной множеством  $C$ , которое состоит из конечного числа замкнутых кривых. Эта область обходится в положительном направлении по границе  $C$  и включает собственные значения.





## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### ОБЫЧНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И МОДИФИЦИРОВАННОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

#### II.1. Введение

Обычно z-преобразование уже давно применяется для решения дифференциальных уравнений. С появлением дискретных систем управления это преобразование стало важным средством, имеющимся в распоряжении инженеров. Для удобства решения дифференциальных уравнений, описывающих дискретные системы, z-преобразование позднее было обобщено в так называемое «модифицированное z-преобразование с опережением».

Модифицированное z-преобразование с опережением применяется также и для других целей, например, для исследования существования и устойчивости периодического движения в релейных системах управления (см. гл. 8).

#### II.2. Основные определения

##### 1. Модифицированное z-преобразование функции с опережением

Рассмотрим абсолютно интегрируемую функцию  $g(t)$ . Предположим, что существуют действительные постоянные  $M$  и  $\beta$  такие, что для ряда значений  $t$ , а именно,  $t = (k + m)T$ , где  $m \geq 0$ ;  $T > 0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$|g(t)| > Me^{\beta t}. \quad (II.1)$$

Для этой функции модифицированное z-преобразование с опережением определяется в виде

$$\mathcal{L}_A [g(t)] \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{G}(z, m) = \sum_{k=0}^m g[(k+m)T^+] z^{-k} \quad (II.2)^*$$

для  $|z| \geq e^{\beta T}$  и действительных чисел  $m \geq 0$  и  $T > 0$ .

Условие (II.1) подразумевает наличие действительного  $\delta > 0$  такого, что можно написать  $|g(t)| \leq Me^{(\beta-\delta)t}$ . Используя это в формуле (II.2), получим

$$|\mathcal{G}(z, m)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} e^{(k+m)(\beta-\delta)T} |z|^{-k} = Me^{(\beta-\delta)mT} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (e^{(\beta-\delta)T} |z|^{-1})^N}{1 - e^{(\beta-\delta)T} |z|^{-1}}.$$

Из приведенного выше неравенства видно\*\*, что для каждого  $m$ , для которого справедливо условие (II.1),  $\mathcal{G}(z, m)$  будет абсолютно сходиться, если  $|z| \geq e^{\beta T}$ .

\* Верхний индекс «+»  $g[(k+m)T^+]$  означает  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g[(k+m+\varepsilon)T]$ , где предел должен

быть взят со стороны  $\varepsilon > 0$ .

Используется также модифицированное z-преобразование, определяемое как

$$\mathcal{G}_M(z, m) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} g[(k+m)T^+] z^{-(k+1)}.$$

Ясно, что  $\mathcal{G}_M(z, m) = z^{-1} \mathcal{G}(z, m)$ .

В данной книге всюду используется модифицированное z-преобразование с опережением.

\*\* Если  $|z| \geq e^{\beta T}$ , то при  $\delta \geq 0$  имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (e^{\beta-\delta T} |z|^{-1})^N \leq \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N\delta T} = 0.$$

## 2. Z-преобразование функции

Обычное z-преобразование является частным случаем модифицированного z-преобразования с опережением; z-преобразование функции  $g(t)$ , удовлетворяющее условию (II.1), определяется как

$$\mathcal{L}[g(t)] \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{G}(z) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{m \rightarrow 0} \mathcal{G}(z, m) = \mathcal{G}(z, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT^+) z^{-k}; \quad |z| \geq e^{\beta T}. \quad (\text{II.3})$$

Как и раньше,  $\mathcal{G}(z)$  будет сходиться абсолютно при  $|z| \geq e^{\beta T}$ .

## 3. Z-преобразование бесконечной последовательности чисел

Z-преобразование можно определить также для бесконечной последовательности чисел. Пусть

$$\{g_k\} \stackrel{\Delta}{=} \{g_0, g_1, g_2, \dots\} \quad (\text{II.4a})$$

представляет собой бесконечную последовательность чисел. Пусть заданы действительные постоянные  $M > 0$  и  $T > 0$  такие, что

$$|g_k| < Me^{\beta T k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (\text{II.4b})$$

тогда z-преобразование для этой последовательности определяется как

$$\mathcal{L}\{g_k\} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{G}(z) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^{-k}, \quad |z| \geq e^{\beta T}. \quad (\text{II.5})$$

## 4. Некоторые соотношения

На основе определяющих выражений (II.2) и (II.3) получим следующие соотношения:

$$\mathcal{G}(z, 1^+) = (\mathcal{G}(z) - g(0^+))z; \quad (\text{II.6a})$$

$$G(z, 1^-) = \mathcal{G}(z, 1^+), \text{ если } g(kT^+) = g(kT^-) \text{ при } k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.6b})^*$$

Модифицированное z-преобразование часто полезно выразить через z-преобразование сдвинутой функции

$$\mathcal{G}(z, m) = \mathcal{L}_A[g(t)] = \mathcal{L}[g(t + mT)]. \quad (\text{II.7})$$

Соотношение (II.7) сразу же вытекает из выражений (II.2) и (II.3). По существу модифицированное z-преобразование с опережением получило такое название именно из-за этого свойства.

Модифицированное z-преобразование с опережением и обычное z-преобразование для некоторых функций представлены в табл. II.1. Более полные таблицы содержатся в работах [90] и [190].

## II.3. Обращение модифицированного z-преобразования \*\* с опережением

Каждый степенной ряд является аналитической функцией в пределах области своей сходимости [107]. Так как степенной ряд, заданный уравнением (II.2), имеет вид  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1/z)^k$ ,

где  $|1/z| < \exp(-\beta T)$ , то область, определяемая величиной  $|z| > \exp(\beta T)$ , представляет собой область сходимости для этого ряда. Поэтому уравнение (II.2) подразумевает, что модифицированное z-преобразование с опережением  $\mathcal{G}(z, m)$  является аналитическим в области  $|z| \geq$

\* В большинстве практических случаев  $g(t)$  непрерывна при  $t = kT$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , но не обязательно при  $t = 0$ .

\*\* Так как обычное z-преобразование можно рассматривать как частный случай модифицированного z-преобразования с опережением, в дальнейшем будет рассматриваться только последнее.

$\geq \exp(\beta T)$ ; любая функция  $\mathcal{G}(z, m)$ , являющаяся аналитической в области  $|z| \geq \exp(\beta T)$ , может быть однозначно представлена разложением Лорана\*:

$$\mathcal{G}(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{G}(\xi, m) \xi^{k-1} d\xi \right] z^{-k}, \quad (\text{II.8})$$

где  $\mathcal{C}$  представляет собой любой замкнутый путь в направлении против часовой стрелки в области  $|z| > \exp(\beta T)$ .

При сравнении формулы (II.8) с (II.2) получим обратное модифицированное  $z$ -преобразование с опережением:

$$\mathcal{L}_A^{-1}[\mathcal{G}(z, m)] = g((m+k)T^+) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{G}(z, m) z^{k-1} dz; \quad (\text{II.9})$$

Отсюда следует теорема.

**Теорема II.1** Если  $\mathcal{G}(z, m)$  является аналитической в области  $|z| \geq \exp(\beta T)$ , то ее обратное модифицированное  $z$ -преобразование с опережением  $g((k+m)T^+)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) существует и однозначно выражается уравнением (II.9).

Если, например,  $\mathcal{G}(z, m)$  представляет собой рациональную функцию  $z$ , то все ее особые точки являются полюсами, и по формуле (II.9) можно вычислить с помощью теоремы вычетов [107]:

$$g((k+m)T^+) + \sum_{\substack{\text{все полюса} \\ \mathcal{C}(z, m)}} [\text{вычеты } z^{k-1} \mathcal{G}(z, m)]. \quad (\text{II.10})$$

Использование формул (II.9) или (II.10) не всегда является простейшим методом численной оценки обратного модифицированного  $z$ -преобразования с опережением или обратного  $z$ -преобразования в случае  $m=0$ . Вследствие однозначности представления аналитических функций в виде степенных рядов можно использовать любой имеющийся метод для разложения  $\mathcal{G}(z, m)$  в степенной ряд с отрицательными степенями  $z$  и получить обратную величину  $g((k+m)T^+)$  просто в виде множителя при члене с  $z^{-k}$  в этом ряду [90], [130]. Существуют также и другие интересные методы [9].

## II.4 Другие свойства модифицированного $z$ -преобразования с опережением

Модифицированное  $z$ -преобразование с опережением обладает следующими свойствами.

### 1. Линейность

$$\mathcal{L}_A[g_1(t) + g_2(t)] = \mathcal{L}_A[g_1(t)] + \mathcal{L}_A[g_2(t)]; \quad (\text{II.11})$$

$$\mathcal{L}_A[kg(t)] = k\mathcal{L}_A[g(t)], \quad k - \text{константа.}$$

### 2. Свойства сдвига

Пусть  $g(t) = 0$  при  $t < 0$ . Тогда имеем

$$\mathcal{L}_A[g(t - \lambda T)] = \begin{cases} \mathcal{G}(z, m - \lambda), & \lambda \leq m; \\ z^{-1} \mathcal{G}(z, 1 + m - \lambda), & -(1 - \lambda) \leq m < \lambda; \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

$$\mathcal{L}_A[g(t - nT)] = z^{-n} \mathcal{G}(z, m), \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq m < 1; \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (\text{II.13a})$$

$$\mathcal{L}_A[g(t + nT)] = z^n \mathcal{G}(z, m) - \sum_{k=0}^{n-1} g((m+k)T^+) z^{n-k}, \quad \left. \begin{array}{l} m \geq 0; \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right\}. \quad (\text{II.13b})$$

\* См. работу [107], стр. 117—122. Так как  $\mathcal{G}(z, m)$  является аналитической в области  $|z| \geq \exp(\beta T)$ , ее разложение в ряд Лорана имеет лишь отрицательные степени  $z$ .

Для последовательности  $\{g_k\}$  и ее  $z$ -преобразования,  $\mathcal{G}(z) = \mathcal{L}[\{g_k\}]$ , определяемого с помощью (II.5); уравнения (II.13) при  $m = 0$  и  $g_k = g(kT^+)$  принимают вид

$$\mathcal{L}[\{g_{k-n}\}] = z^{-n} \mathcal{G}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.14a})$$

$$\mathcal{L}[\{g_{k+n}\}] = z^n \mathcal{G}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} g_k z^{n-k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{II.14б})$$

### 3. Умножение $g(t)$ на $e^{\alpha t}$

Из выражения (II.2) следует, что для любого действительного  $\alpha$

$$\mathcal{L}_A[e^{\alpha t} g(t)] = e^{\alpha T m} \mathcal{G}(e^{-\alpha T} z, m), \quad |z| \geq e^{(\alpha + \beta) T}. \quad (\text{II.15a})$$

Из соотношений (II.4) можно получить соответствующее  $z$ -преобразование для любой действительной постоянной  $C$  и бесконечной последовательности  $\{g_k\}$ :

$$\mathcal{L}[\{C^k g_k\}] = \mathcal{G}\left(\frac{z}{C}\right), \quad z \geq C e^{\beta T}. \quad (\text{II.15б})$$

### 4. Аналитичность

Аналитичность  $\mathcal{G}(z, m)$ , уже рассмотренная в § II.3, приводит к следующему важному свойству:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \mathcal{G}(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} g((m+k)T^+), \quad \text{если } \mathcal{G}(z, m) \quad (\text{II.16})$$

является аналитической в  $|z| \geq 1$ .

Это свойство вытекает из того, что любую функцию, которая является аналитической в  $|z| \geq 1$ , всегда можно однозначно разложить в степенной ряд с убывающими степенями  $|z|$ .

Свойство (II.16) используется для получения выражений в замкнутом виде для некоторых бесконечных рядов с помощью таблиц модифицированного  $z$ -преобразования с опережением (см. гл. 8).

### 5. Свертка в действительной области

Рассмотрим следующие выражения обычного  $z$ -преобразования и модифицированного  $z$ -преобразования с опережением:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(z, 0) = \mathcal{F}(z) = \mathcal{L}[f(t)], \quad |z| \geq e^{\beta_f T}; \\ \mathcal{G}(z, m) = \mathcal{L}_A[g(t)], \quad |z| \geq e^{\beta_g T}; \\ \mathcal{H}(z, m) = \mathcal{L}_A[h(t)], \quad |z| \geq e^{\beta_h T}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.17a})$$

Если

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT^+) g(t - kT), \quad (\text{II.17б})$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z, m) = \mathcal{F}(z) \mathcal{G}(z, m), \quad |z| \geq e^{\beta_h T}, \quad 0 \leq m \leq 1, \\ \beta_h = \max(\beta_f, \beta_g), \end{aligned} \quad (\text{II.17в})$$

что непосредственно следует из уравнений (II.2) и (II.3). В соответствии с уравнением (II.3) при  $m = 0$  выражение (II.17в) принимает вид

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{F}(z) \mathcal{G}(z), \quad |z| \geq e^{\beta_h T}, \quad \beta_h = \max(\beta_f, \beta_g). \quad (\text{II.17г})$$

Выражение (II.17г) имеет смысл, когда разложение (II.17б) представлено с  $t = nT$ , т. е.

$$h(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT^+) g((n-k)T); \quad (\text{II.18a})$$

в обозначениях через последовательности  $\{g_k\}$ ,  $\{f_k\}$  и  $\{h_k\}$ , определяемые соотношением (II.4а):

$$h_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k g_{n-k}. \quad (\text{II.18б})$$

Выражения (II.18) представляют собой свертки, а соотношение (II.17r) аналогично преобразованию Лапласа свертки временных функций. Свертки типа выражений (II.17б) и (II.18) играют важную роль в дискретных системах управления. Это будет рассмотрено ниже, в § II.5 и II.6.

## 6. Свертка в комплексной области

Рассмотрим произведение

$$p(t) = f(t + \lambda T) g(t + \nu T), \quad \lambda \geq 0, \nu \geq 0. \quad (\text{II.19a})$$

При использовании выражений (II.2), (II.3), (II.7) и (II.9) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= \mathcal{L}[f(t + \lambda T) g(t + \nu T)] = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_g} (\xi, \nu) \mathcal{F}\left(\frac{z}{\xi}, \lambda\right) \xi^{-1} d\xi, \quad |z| \geq e^{(\beta_f + \beta_g)T}; \end{aligned} \quad (\text{II.19б})$$

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_f} \mathcal{G}\left(\frac{z}{\xi}, \nu\right) \mathcal{F}(\xi, \lambda) \xi^{-1} d\xi, \quad |z| \geq e^{(\beta_f + \beta_g)T}, \quad (\text{II.19в})$$

где  $|z| \geq e^{\beta_f T}$  и  $|z| \geq e^{\beta_g T}$  представляют собой области, в которых  $\mathcal{F}(z, m) = \mathcal{L}_A[f(t)]$  и  $\mathcal{G}(z, m) = \mathcal{L}_A[g(t)]$  являются аналитическими, а  $C_g$  и  $C_f$  обозначают соответственно любые пути интегрирования в направлении против часовой стрелки в области  $|\xi| > e^{\beta_g T}$  и  $|\xi| > e^{\beta_f T}$ ,

## 7. Соотношения для начальных значений

Из выражений (II.2) и (II.3) следует

$$\left. \begin{aligned} g(mT^+) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{G}(z, m); \\ g(0^+) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{G}(z). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.20})$$

## 8. Асимптотическое поведение

На основе § II.3 можно показать, что если  $\mathcal{G}(z, m)$  является аналитической в области  $|z| \geq 1$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g((m+k)T^+) = 0. \quad (\text{II.21})$$

Кроме того, можно показать, что если  $\mathcal{G}(z, m)$  не является аналитической в области  $|z| > 1$  и  $\mathcal{G}(z, m)$  имеет полюс в области  $|z| > 1$ , то получим

$$|g((m+k)T^+)| \rightarrow \infty \text{ для некоторого } k. \quad (\text{II.22}^*)$$

Как будет показано ниже, эти асимптотические свойства имеют большое значение при изучении линейных дискретных систем.

## 9. Соотношение для конечных значений

Большое практическое значение имеет не охваченный приведенными выше асимптотическими выражениями случай при котором  $\mathcal{G}(z, m)$  имеет полюс в  $z = 1$ . Если  $(z-1)\mathcal{G}(z, m)$  является аналитической в области  $|z| \geq 1$ , то

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\mathcal{G}(z, m) = \lim_{N \rightarrow \infty} g((m+N)T^+). \quad (\text{II.23})$$

Это можно доказать путем рассмотрения модифицированного  $z$ -преобразования с опережением для  $g(t+T) - g(t)$  (покажите это).

## II.5. Модифицированное $z$ -преобразование с опережением и преобразование Лапласа

Часто используемое альтернативное выражение для модифицированного  $z$ -преобразования с опережением можно получить из соотношения (II.2). Здесь модифицированное  $z$ -преобразование с опережением можно выразить через преобразование Лапласа.

\* Обычно  $|g((m+k)T^+)| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Напомним, что  $g(t)$ , удовлетворяющая неравенству (II.1), имеет преобразование Лапласа  $G(s)$ , которое является абсолютно сходящимся при  $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ . Далее, величина обратная  $G(s)$  определяется выражением\*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} G(p) dp = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(t^+) + g(t^-)], & t > 0; \\ \frac{1}{2} g(0^+), & t = 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

где  $c \geq d$ .

Предположим теперь, что  $g(t)$  непрерывна в точках  $t = (k + m)T$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), но не обязательно при  $t = mT$  ( $m \geq 0$ ). Подставив выражения (II.24) в формулу II.2 и приняв  $z = e^{Ts}$ , получим

$$\mathcal{G}(e^{sT}, m) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p) e^{mTp + (p-s)Tk} dp + \frac{1}{2} [g(mT^+) - g(mT^-)], \quad (\text{II.25})$$

$$m \geq 0, \quad \alpha \leq c < \operatorname{Re} s.$$

При этих условиях здесь допустима перестановка знака суммирования и интегрирования. Тогда суммирование под знаком интегрирования даст

$$\mathcal{G}(e^{sT}, m) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p) \frac{e^{mTp} dp}{1 - e^{(p-s)T}} + \frac{1}{2} [g(mT^+) - g(mT^-)]. \quad (\text{II.26})$$

$$m \geq 0, \quad \alpha \leq c < \operatorname{Re} s.$$

Поэтому соответствующее  $z$ -преобразование имеет вид

$$\mathcal{G}(e^{sT}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{G(p) dp}{1 - e^{(p-s)T}} + \frac{1}{2} g(0^+). \quad (\text{II.27})$$

Приведенная выше функция  $G(s)$  является аналитической в  $\operatorname{Re} s \geq \alpha$ . Единственными особыми точками подынтегрального выражения (II.26) и (II.27) в этой области являются простые полюсы в точках  $p = s + j \frac{2\pi n}{T}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Поэтому при использовании теоремы вычетов [107] для вычисления интегралов в формулах (II.26) и (II.27) получим

$$\mathcal{G}(e^{sT}, m) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(s + j \frac{2\pi n}{T}\right) e^{(sT + j2\pi n)m} + \frac{1}{2} [g(mT^+) - g(mT^-)]. \quad (\text{II.28a})^{**}$$

$$\operatorname{Re} s > \alpha, \quad 0 \leq m < 1$$

и при  $m = 0$  будем иметь

$$\mathcal{G}(e^{sT}) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(s + j \frac{2\pi n}{T}\right) + \frac{1}{2} (g(0^+)), \quad \operatorname{Re} s > \alpha. \quad (\text{II.28б})$$

\* См. работу [45], стр. 212.

\*\* Для обоснованного использования теоремы вычетов к интегралу в формуле (II.26) необходимо, чтобы  $0 \leq m < 1$ .

Можно вывести еще одно интересное соотношение между  $\mathcal{G}(z, m)$  и  $G(s)$ . С учетом предположений, сделанных в отношении  $g(t)$  (в § II.2), из уравнения (II.2) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} T \mathcal{G}(e^{sT}, m) &= \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} g(mT^+ + kT) e^{-s(kT)} T = \\ &= \int_0^{\infty} e^{sT} g(t) dt = G(s), \operatorname{Re} s \geq \alpha. \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Так как выражение (II.29) не зависит от  $m$ , указанный вывод в равной мере остается действительным при использовании  $\mathcal{G}(z)$  вместо  $\mathcal{G}(z, m)$ .

## II.6. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами можно написать в таком виде:

$$\sum_{i=0}^n a_i y_{k+i} = \sum_{i=0}^m b_i e_{k+i}, \quad (\text{II.30})$$

где  $\{e_i\}$  — заданная входная последовательность, а  $\{y_i\}$  — неизвестная выходная последовательность. Для решения уравнения (II.30) осуществим  $z$ -преобразование обеих частей. Из свойства сдвига выражения (II.14б) следует, что

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i z^i \right) \mathcal{Y}(z) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} y_j z^{i-j} = \left( \sum_{i=0}^m b_i z^i \right) \mathcal{E}(z) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} e_j z^{i-j}$$

или

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{G}(z) \mathcal{E}(z) + \mathcal{Y}_0(z), \quad (\text{II.31a})$$

где

$$\mathcal{G}(z) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}. \quad (\text{II.31б})$$

и

$$\mathcal{Y}_0(z) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} y_j z^{i-j} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{i-1} e_j z^{i-j}}{\sum_{i=0}^n a_i z^i}. \quad (\text{II.31в})$$

Здесь  $\mathcal{G}(z)$  можно рассматривать как передаточную функцию в  $z$ -области между входной последовательностью  $\{e_k\}$  и выходной последовательностью  $\{y_k\}$ ;  $\mathcal{Y}_0(z)$  представляет собой также реакцию на выходе на начальные значения указанных последовательностей. Систему, определяемую соотношениями (II.31), можно рассматривать как линейную дискретную систему. Заметим аналогию между  $z$ -преобразованием дискретной системы и преобразованием Лапласа линейной непрерывной системы.

Выходную последовательность  $\{y_k\}$  можно получить путем обратного  $z$ -преобразования  $\mathcal{Y}(z)$ .

Из соотношений (II.31б) и (II.31в) видно, что  $\mathcal{G}(z)$  и  $\mathcal{Y}_0(z)$  имеют одни и те же полюсы. Отсюда следует, что при отсутствии входа устойчивость линейной системы (II.30) можно вывести из местонахождения этих полюсов.

Система (II.30) считается устойчивой относительно выходного сигнала, если при  $e_k = 0$  для всех  $k$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  у каждого ряда начальных условий  $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ , а  $\{y_k\}$  конечна для всех  $k$ . При этом определении на основе выражений (II.21), (II.22) и (II.31) можно доказать следующую теорему.

**Теорема II.2.** Линейная дискретная система (II.30) устойчива на выходе в том и только в том случае, если все полюсы  $\mathcal{G}(z)$  лежат в области  $|z| < 1$ .



## II.7. Линейные импульсные системы

Динамическое поведение многих дискретных систем, таких как системы с управляющими вычислительными машинами, соответствует соединению линейных непрерывных элементов, возбуждаемых «модуляторами». Введем следующие обозначения: для входа импульсного элемента  $e(t)$ , а для выхода  $e^*(t)$ . Тогда сигнал на выходе определится в виде

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT^+) \mu_0(t - kT), \quad (\text{II.32})$$

где  $\mu_0(t)$  — единичный импульс.

Это показано на рис. II.1а. Выходной сигнал модулятора  $e^*(t)$  будет возбуждать линейный элемент, выходной сигнал которого принимает вид

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} e(kT^+) g(t - kT), \quad (\text{II.33})$$

где  $y_0(t)$  — реакция на начальное условие, а  $g(t)$  — реакция линейного элемента на единичный импульс.

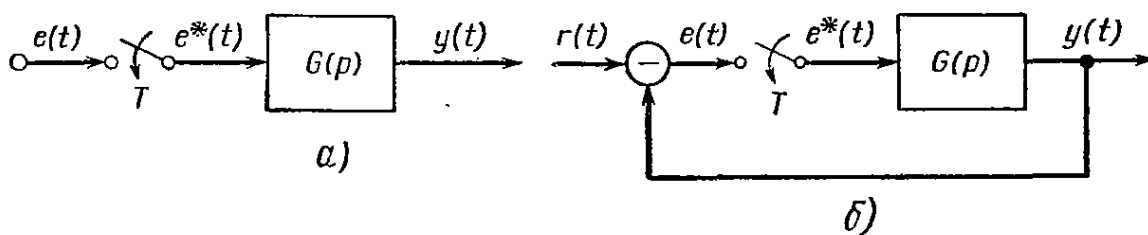


Рис. 1: а) Импульсная система с разомкнутым контуром; б) Импульсная система с замкнутым контуром

С учетом свойства свертки (II.17) модифицированное  $z$ -преобразование с опережением для выражения (II.33) принимает вид

$$\mathcal{Y}(z, m) = \mathcal{Y}_0(z, m) + \mathcal{E}(z) \mathcal{G}(z, m). \quad (\text{II.34})$$

Для импульсной системы с замкнутым контуром, показанной на рис. II.1б, получим дополнительное соотношение  $e(t) = r(t) - y(t)$ , имеющее модифицированное  $z$ -преобразование с опережением:

$$\mathcal{E}(z, m) = \mathcal{R}(z, m) - \mathcal{Y}(z, m). \quad (\text{II.35})$$

Так как  $\mathcal{E}(z, 0) = \mathcal{E}(z)$ ,  $\mathcal{R}(z, 0) = \mathcal{R}(z)$  и  $\mathcal{Y}_0(z, 0) = \mathcal{Y}_0(z)$ , то из выражений (II.34) и (II.35) следует, что

$$\mathcal{E}(z) = \frac{\mathcal{R}(z) - \mathcal{Y}_0(z)}{1 + \mathcal{G}(z)}. \quad (\text{II.36})$$

Подставив это в выражение (II.34), получим для выходного сигнала

$$\mathcal{Y}(z, m) = \frac{\mathcal{Y}_0(z, m)}{1 + \mathcal{G}(z)} + \frac{\mathcal{G}(z) \mathcal{Y}_0(z, m) - \mathcal{G}(z, m) \mathcal{Y}_0(z)}{1 + \mathcal{G}(z)} + \frac{\mathcal{G}(z, m)}{1 + \mathcal{G}(z)} \mathcal{R}(z). \quad (\text{II.37a})$$

Для частного случая  $m = 0$  имеем

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{\mathcal{Y}_0(z)}{1 + \mathcal{G}(z)} + \frac{\mathcal{G}(z)}{1 + \mathcal{G}(z)} \mathcal{R}(z). \quad (\text{II.37б})$$

Из выражений (II.34) или (II.37а) можно определить реакцию на выходе в виде  $y(t) = y((m+k)T^+)$  для системы соответственно с разомкнутым и замкнутым контурами путем осуществления обратного преобразования  $\mathcal{Y}(z, m)$ . Если интерес представляет лишь реакция в дискретные моменты выборки сигнала  $t = kT^+$ , то можно использовать выражение (II.37б).

Для анализа устойчивости линейных импульсных систем можно исследовать асимптотическое поведение сигнала  $y(t)$ . По аналогии с определением, приведенным в § II.6, можно сказать, что линейная импульсная система устойчива, если  $\lim_{k \rightarrow \infty} y(m+k)T^+ = 0$  и  $|y(m+k)T^+| < \infty$  для каждого  $k$ .

Модифицированное z-преобразование с опережением для основных функций \*

$G(s)$	$g(t)^{**}$	$\mathcal{G}(z, m); 0 \leq m < 1$	Область сходимости
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{(z-1)}$	$ z  > 1$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\left[ \frac{m}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} \right] Tz$	$ z  > 1$
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{zT^2}{2} \left[ \frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$	$ z  > 1$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{ze^{-amT}}{z - e^{-aT}}$	$ z  > e^{-aT}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$zTe^{-amT} \left[ \frac{m}{z - e^{-aT}} + \frac{e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} \right]$	$ z  > e^{-aT}$
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{2} zT^2 e^{-amT} \left[ \frac{m^2}{z - e^{-aT}} + \frac{(2m+1)e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} + \frac{2e^{-2aT}}{(z - e^{-aT})^3} \right]$	$ z  > e^{-aT}$
$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$ze^{-amT} \left[ \frac{z \sin mbT + e^{-aT} \sin [(1-m)bT]}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}} \right]$	$ z  > e^{-aT}$

$G(s)$	$g(t)^{**}$	$\mathcal{G}(z, m); 0 \leq m < 1$	Область сходимости
$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 e^{-at}$	$\frac{1}{2} zT^2 e^{-amT} \left[ \frac{m^2}{z - e^{-aT}} + \frac{(2m+1)e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} + \frac{2e^{-2aT}}{(z - e^{-aT})^3} \right]$	$ z  > e^{-T}$
$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$	$ze^{-mT} \left[ \frac{z \sin mbT + e^{-aT} \sin [(1-m)bT]}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}} \right]$	$ z  > e^{-aT}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$ze^{-aT} \left[ \frac{z \cos mbT - e^{-aT} \cos [(1-m)bT]}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}} \right]$	$ z  > e^{-aT}$
$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\text{sh } at$	$z \left[ \frac{z \text{sh } maT + \text{sh } [(1-m)aT]}{z^2 - 2z \text{ch } aT + 1} \right]$	$ z  > e^{ a T}$
$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\text{ch } at$	$z \left[ \frac{z \text{ch } maT - \text{ch } [(1-m)aT]}{z^2 - 2z \text{ch } aT + 1} \right]$	$ z  > e^{ a T}$
$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$at - (1 - e^{at})$	$z \left[ \frac{aT}{(z-1)^2} + \frac{(amT-1)}{z-1} + \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} \right]$	$ z  > \max[1, e^{-aT}]$
$\frac{a^2 + b^2}{s[(s+a)^2 + b^2]}$	$1 - e^{-at} \frac{\cos(bt - \Phi)}{\cos \Phi},$ $\Phi = \text{arctg} \left( \frac{a}{b} \right)$	$\frac{z}{z-1} \frac{ze^{-amT} \{ z \cos(mbT - \Phi) - e^{-aT} \cos[(1-m)bT + \Phi] \}}{\cos \Phi [z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}]}$	$ z  > \max[1, e^{-aT}]$

\* z-преобразование выражается с помощью  $\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}(z, 0)$ .

\*\* Подразумевается, что  $g(t) = 0$  при  $t < 0$ .

По аналогии с теоремой II.2 из выражений (II.21) и (II.37a) следует:

**Теорема II.3.** Импульсная система с замкнутым контуром, изображенная на рис. II.16, устойчива при фиксированном  $m$ , если для этого  $m$  функция

$$\frac{\mathcal{Y}_0(z, m)}{1 + \mathcal{G}(z)} + \frac{\mathcal{G}(z)\mathcal{Y}_0(z, m) - \mathcal{G}(z, m)\mathcal{Y}_0(z)}{1 + \mathcal{G}(z)}$$

является аналитической в  $|z| \geq 1$ .

В том случае, когда линейный элемент описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, можно доказать следующую теорему.

**Теорема II.4.** Рассмотрим замкнутую импульсную систему, показанную на рис. II.16. Пусть линейный элемент системы описывается обыкновенным стационарным линейным дифференциальным уравнением, состояния которого полностью управляемы и полностью наблюдаемы (см. гл. 3).

1. Система будет устойчивой на выходе при  $m = 0$ , если все корни уравнения  $1 + \mathcal{G}(z) = 0$  лежат в области  $|z| < 1$ . Если какие-либо из этих корней лежат в области  $|z| > 1$ , то система будет устойчивой.

2. Система будет устойчивой относительно каждого значения  $m$ , если все полюсы  $\mathcal{G}(z, m)/[1 + \mathcal{G}(z)]$  лежат в области  $|z| < 1$  для каждого значения  $m$ . Если какой-либо из этих полюсов находится в области  $|z| > 1$ , то система будет неустойчивой относительно каждого значения  $m$ .

3. Если все полюсы  $\mathcal{G}(z, m)/[1 + \mathcal{G}(z)]$  лежат в области  $|z| < 1$  для каждого значения  $m$ , то начальное положение системы будет асимптотически устойчивым. Если какой-либо из этих полюсов окажется в области  $|z| > 1$ , то начальное состояние будет неустойчивым.

В теореме II.4 пункт 3 подразумевает случай 2. Случай 1 представляет собой частный случай пункта 2. Требование в случае 1 содержит лишь гарантию того, что выходная переменная будет стремиться к нулю по времени дискретно. Дополнительные требования в пунктах 2 и 3 исключают любую возможность скрытых колебаний, которое может иметь место в случае неустойчивости линейного элемента. Тогда при наличии импульсной обратной связи выход системы может иметь хорошие характеристики в дискретные моменты выборки, но в промежутки между дискретными моментами выборки могут наблюдаться колебания значительной амплитуды. Скрытые колебания не будут иметь места в случае устойчивого линейного элемента.

Заметим, однако, что точка начала координат пространства состояний импульсной системы с замкнутым контуром может быть асимптотически устойчивой даже в случае неустойчивости линейного элемента. Это будет иметь место, если 1) все нули  $1 + \mathcal{G}(z) = 0$  лежат в  $|z| < 1$  и 2) полюсы  $\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}(z, 0)$  тождественны полюсам  $\mathcal{G}(z, m)$  для каждого значения  $m$ . Последнее условие удовлетворяется почти всегда.

## ПРИЛОЖЕНИЕ III

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ \*

#### III.1. Математические термины и соотношения \*\*

##### 1. Классы функций $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

Приведенная ниже система обозначений получает все более широкое распространение в технической литературе. Функция  $f(x)$  считается принадлежащей к классу  $\mathcal{L}_1$  на  $[a, b]$  или  $\mathcal{L}_2$  на  $[a, b]$  если соответственно  $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$  или  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ . Мы пишем: « $f(x) \in \mathcal{L}_1$  на  $[a, b]$ » или « $f(x) \in \mathcal{L}_2$  на  $[a, b]$ ».

Строго говоря,  $f(x)$  должна быть измеряемой. Последнее свойство обычно имеет место для функций, связанных с реальными системами. Если интервал  $[a, b]$  конечный, то функция, принадлежащая  $\mathcal{L}_2$  на  $[a, b]$ , принадлежит также и  $\mathcal{L}_1$  на  $[a, b]$ . Однако это не обязательно, когда интервал  $[a, b]$  является бесконечным.

##### 2. Неравенство Шварца

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  принадлежат  $\mathcal{L}_2$  на  $[a, b]$ , то  $f(x)g(x)$  принадлежит  $\mathcal{L}_1$  на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left[ \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

##### 3. Неравенство Минковского

Если  $f(x)$  и  $g(x)$  принадлежат  $\mathcal{L}_2$  на  $[a, b]$ , то это справедливо и для  $f(x) + g(x)$ , и

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \leq \left[ \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

##### 4. Теорема Планшереля

Если  $f(t)$  принадлежит  $\mathcal{L}_2$  на интервале  $(-\infty, \infty)$ , то функция \*\*\*

$$F(j\omega) = \text{l.i.m.}_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{-j\omega t} f(t) dt,$$

\* К гл. 10 и 11.

\*\* См. работу [199]

\*\*\* l.i.m. означает «предел в среднем квадратичном». l.i.m.  $f_n(t) = f(t)$  на  $[a, b]$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0$ . См. работу [199]

известная как преобразование Фурье  $f(t)$ , существует и также принадлежит  $\mathcal{L}_2$ . Кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

и

$$f(t) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega.$$

Теорема Планшереля представляет собой одну из основных теорем теории преобразования Фурье.

### 5. Теорема Парсевала

Если  $F_1(j\omega)$  и  $F_2(j\omega)$  представляют собой преобразования Фурье соответственно действительных функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(-j\omega) d\omega.$$

### 6. Ограниченность решения основной системы с обратной связью (10.1)

**Лемма III.1.** Для любых начальных условий в основной системе с обратной связью (10.1), линейный элемент которой устойчив по выходу, а для нелинейного элемента действительно условие (10.3), сигнал  $u(t)$  является ограниченным для всех конечных значений времени  $0 \leq t < \infty$ .

Приведем схему доказательства этой леммы. Заметим прежде всего, что условие (10.3) подразумевает существование неубывающей функции  $h(|e|)$  такой, что

$$|u(t)| = |\mathcal{F}[e(t), t]| \leq h(|e(t)|) < \infty \quad \text{для } |e(t)| < \infty. \quad (\text{III.1})$$

Исходя из выражения (10.1), можно написать следующее неравенство:

$$|e(t)| \leq |e_0(t)| + \int_0^t |g(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau. \quad (\text{III.2})$$

Определим границы  $e_m(t)$  и  $u_m(t)$  следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} |e(\tau)| \leq e_m(t); \\ |u(\tau)| \leq u_m(t) \end{array} \right\} \text{ для } 0 < \tau \leq t. \quad (\text{III.3})$$

Так как в соответствии с определением функция  $h(|e|)$  является неубывающей, имеем

$$u_m(t) = h[e_m(t)] < \infty, \quad \text{если } e_m(t) < \infty. \quad (\text{III.4})$$

Ввиду того, что линейный элемент предполагается устойчивым на выходе, можно определить постоянную  $c_0$  и функцию  $G(t)$ , т. е.

$$|e_0(t)| \leq c_0 \quad (\text{III.5})$$

и

$$G(t) = \int_0^t |g(\tau)| d\tau. \quad (\text{III.6})$$

Покажем теперь, что для каждого  $c_0$  существует время  $T_1$  и граница  $u_m(t)$ ,  $0 \leq t \leq T_1$  такие, что

$$\left. \begin{array}{l} |u(\tau)| \leq u_m(t) = h[e_m(t)]; \\ |e(\tau)| \leq e_m(t) = c_0 + G(t) u_m(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T_1. \end{array} \right\} \quad (\text{III.7a})$$

Исходя из уравнений (III.7a), можно написать

$$u_m(t) = h[e_m(t)] = \frac{e_m(t) - c_0}{G(t)}, \quad 0 \leq t \leq T_1. \quad (\text{III.7б})$$

Так как  $G(0) = 0$ , а  $G(t)$  является неубывающей функцией и так как  $h[e_m(t)] < \infty$  для  $e_m(t) < \infty$ , то отсюда следует вывод о существовании времени  $T_1$  такого, что уравнение (III.76) имеет решение для  $e_m(t)$ . Это показано на рис. III.1. Из выражений (III.2), (III.4), (III.6), (III.76) следует, что

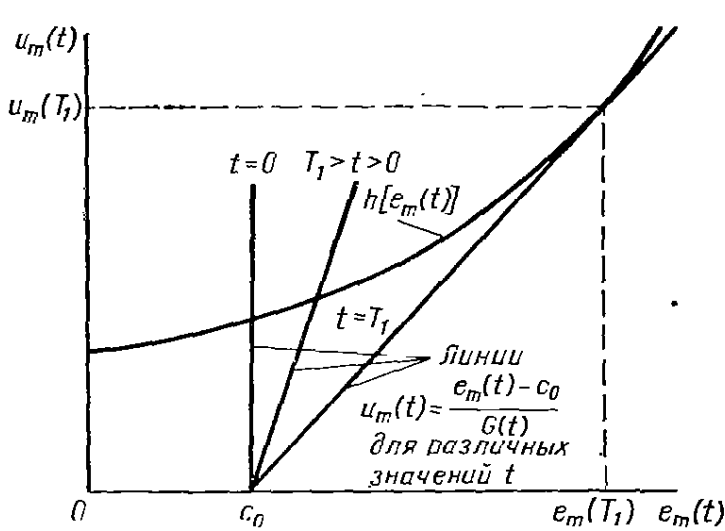
$$|e(\tau)| \leq c_0 + \frac{G(\tau)}{G(t)} |e_m(t) - c_0| \leq e_m(t);$$

$$|u(\tau)| \leq h[e_m(\tau)], \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T_1.$$

В частности, для каждого  $c_0$  существуют конечные положительные значения  $T_1$  и  $e_m(T_1)$  такие, что

$$\left. \begin{aligned} |e(t)| &\leq e_m(T_1) < \infty; \\ |u(t)| &\leq h[e_m(T_1)] = u_m(T_1) < \infty, \quad 0 \leq t \leq T_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.8})$$

Повторяя те же рассуждения для последовательных интервалов



$$[T_1, T_1 + T_2], \dots, \left[ \sum_{i=1}^{n-1} T_i, \sum_{i=1}^n T_i \right], \dots,$$

можно показать, что при  $\sum_{i=1}^{n-1} T_i \leq t \leq \sum_{i=1}^n T_i$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\left. \begin{aligned} |e(t)| &\leq e_m \left( \sum_{i=1}^n T_i \right) < \infty; \\ |u(t)| &\leq h \left[ e_m \left( \sum_{i=1}^n T_i \right) \right] = \\ &= u_m \left( \sum_{i=1}^n T_i \right) < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9})$$

Рис. III.1. Построение, показывающее соотношение между пределами  $e_m(t)$  и  $u_m(t)$ , определяемыми уравнением (III.3)

Как и в случае  $n=0$ , справедливость соотношений (III.9) основана на конечности граничных значений  $c_n$  при «реакции на начальные условия»  $e_{0n}(t_n)$  системы, полученной путем сдвига во времени исходной системы (10.1) на величину  $t_n = t - \sum_{i=1}^n T_i$ . Можно показать (проделайте самостоятельно), что эти границы определяются следующим образом:

$$c_n = c_{n-1} + u_n \left( \sum_{i=1}^n T_i \right) G(\infty) = c_0 + G(\infty) \sum_{i=1}^n u_m \left( \sum_{j=1}^i T_j \right); \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{III.10})$$

Так как  $u_m \left( \sum_{i=1}^n T_i \right) < \infty$ , то для каждого конечного числа  $n$  интервалов  $T_i (i=1, \dots, n)$  имеем конечное значение  $c_n$ , определяемое с помощью равенства (III.10). Это служит основой справедливости неравенств (III.9) для конечного  $n$ , т. е.

$$|e(t)| < \infty, \quad |u(t)| < \infty \quad \text{для} \quad 0 \leq t < \infty.$$

### III.2. Доказательство леммы 10.1

Пусть  $|e^{\alpha t} u(t)| \geq \varepsilon_k > 0$  для счетного множества интервалов  $t_k \leq t \leq t_k + \delta_k$ ,  $0 \leq \delta_k < t_{k+1} - t_k < \infty$  и  $t \geq t_0$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , тогда

$$\int_{t_0}^{\infty} [e^{\alpha t} u(t)]^2 dt \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 \delta_k = \infty,$$

если  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^2 \delta_k$  расходится.

Последнее противоречит предположению леммы. Поэтому для того, чтобы

$$\int_0^{\infty} [e^{\alpha t} u(t)]^2 dt < \infty,$$

необходимо иметь  $e^{\alpha t} u(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  или произведения  $\varepsilon_k^2 \delta_k > 0$  составляли убывающую последовательность, обеспечивающую сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^2 \delta_k$ . Это означает, что «площади импульсов»  $\varepsilon_k \delta_k$  должны приближаться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , т. е.  $u(t)$  может быть не равна нулю при  $t \rightarrow \infty$  только на счетном множестве бесконечно малых окрестностей.

Таким образом, если  $u(t)$  не стремится к нулю при всех  $t \rightarrow \infty$ , то  $u(t)$  можно выразить только через бесконечную последовательность импульсов с уменьшающимися площадями  $a_k > \varepsilon_k \delta_k$ , обеспечивающую сходимость ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^2 \delta_k$ . Это означает существование некоторого положительного числа  $T$  такого, что

$$|e^{\alpha t} u(t+T)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k [\mu_{-1}(t-t_k) - \mu_{-1}(t-t_k-\delta_k)] \quad \text{для } t \geq T,$$

где  $\mu_{-1}(t)$  — единичная ступенчатая функция.

Для реакции линейного элемента на сигнал  $u(t+T)$  можно написать:

$$|e^{\alpha t} e(t+T)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} G_{\alpha k}(t-t_k),$$

где

$$G_{\alpha k}(t) = \int_{t-t_k-\delta_k}^{t-t_k} a_k |e^{\alpha \tau} g(\tau)| d\tau.$$

Заметим, что вследствие устойчивости на выходе линейного элемента [условие (10.9)] имеем

$$G_{\alpha k}(t) \rightarrow 0 \begin{cases} \text{для } t-t_k \rightarrow \infty, \delta_k > 0 \text{ и } a_k > 0; \\ \text{для } t-t_k > 0, \delta_k \rightarrow 0 \text{ и } a_k > 0; \\ \text{для } t-t_k > 0, \delta_k > 0 \text{ и } a_k \rightarrow 0. \end{cases}$$

Так как нами уже установлено, что произведение  $a_k b_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , отсюда следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} e(t+T) = \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\alpha t} e(t)| = 0.$$

Таким образом, лемма 10.1 доказана.

### III.3. Доказательство основной теоремы гл. 10 (теоремы 10.1)

Доказательство сводится к показу того, что при данных ограничениях условия (10.19) являются достаточными для выполнения неравенства (10.10) при  $\alpha = 0$ , т. е. для заданных начальных условий имеем

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt < \infty.$$

Если это условие выполняется, то система является системой асимптотически устойчивого управления; кроме того, из условий теоремы 10.1 и из леммы 10.2 следует, что эта система имеет также асимптотически устойчивой по выходному сигналу. Определим следующие усеченные функции:

$$\begin{aligned} u_T(t) &= \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0; t > T; \end{cases} \\ e_{0T}(t) &= \begin{cases} e_0(t), & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0; t > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (III.11)$$

где  $T$  — конечный интервал времени;

$e_0(t)$  — реакция линейного элемента на начальные условия.



Пусть линейный элемент расматриваемой системы возбуждается этими функциями. Тогда его выход  $-e_T(t)$  будет определяться как

$$e_T(t) = e_{0T}(t) - \int_0^T g(t-\tau) u_T(\tau) d\tau. \quad (\text{III.12})$$

где  $g(t)$  — импульсная переходная функция линейного элемента.

В соответствии с условиями теоремы 10.1 и в соответствии с выражениями (10.9) и (III.11) при  $\alpha = 0$   $e_{0T}(t)$  и  $g(t)$  представляют собой функции, интегрируемые с квадратом в интервале  $0 \leq t \leq \infty$ , т. е.  $e_{0T}(t) \in \mathcal{L}_2$  и  $g(t) \in \mathcal{L}_2^*$ . То же относится и к  $u_T(t)$ , как это определяется соотношениями (III.11) вследствие ее усеченности и ограниченности  $ut$  для конечного интервала времени (лемма III.1), т. е.  $u_T(t) \in \mathcal{L}_2$ . Поэтому в соответствии с теоремой Планшереля три функции  $e_{0T}(t)$ ,  $g(t)$  и  $u(t)$  имеют соответственно преобразования Фурье  $E_{0T}(j\omega)$ ,  $G(j\omega)$  и  $U_T(j\omega)$ , каждое из которых принадлежит  $\mathcal{L}_2$ . Преобразование Фурье (III.12) имеет вид

$$E_T(j\omega) = E_{0T}(j\omega) - G(j\omega) U_T(j\omega). \quad (\text{III.13})^{**}$$

Введем теперь следующий интеграл:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{K} - \delta + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega)] \right] |U_T(j\omega)|^2 d\omega = \quad (\text{III.14a})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{K} - \delta + (1 + j\omega q) G(j\omega) \right] |U_T(j\omega)|^2 d\omega, \quad (\text{III.14б})$$

где  $\delta > 0$ . Выражения (III.14a) и (III.14б) эквивалентны, так как  $\operatorname{Im}[(1 + j\omega q) G(j\omega)]$  представляет собой нечетную функцию  $\omega$ . Следовательно, ее интеграл на интервале  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  равен нулю.

Условие Попова (10.19) теоремы 10.1 означает, что  $I \geq 0$ , или иначе \*\*\*

$$I \geq 0, \text{ если условие (10.19) удовлетворено.} \quad (\text{III.15})$$

Учитывая, что  $|U_T(j\omega)|^2 = U_T(j\omega) U_T(-j\omega)$ , и подставляя соотношение (III.13) в интеграл (III.14б), получим

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{K} - \delta \right) U_T(j\omega) - (1 + j\omega q) E_T(j\omega) + (1 + j\omega q) E_{0T}(j\omega) \right] U_T(-j\omega) d\omega. \quad (\text{III.16})$$

\* См. § III.1.

\*\* Для доказательства, что  $E_T(j\omega) \in \mathcal{L}_2$  сначала с помощью выражения (III.11) и леммы III.1, найдем

$$|U_T(j\omega)| = \left| \int_0^T e^{-j\omega t} u(t) dt \right| \leq \int_0^T |u(t)| dt < \infty.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega) U_T(j\omega)|^2 d\omega \leq \left[ \int_0^T |u(t)| dt \right]^2 \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega.$$

Так как  $G(j\omega) \in \mathcal{L}_2$ , то  $G(j\omega) U_T(j\omega) \in \mathcal{L}_2$ . И, наконец, вследствие того, что  $E_{0T}(j\omega) \in \mathcal{L}_2$ , из условия (III.13) и неравенства Минковского (см. § III.11) следует, что  $E_T(j\omega) \in \mathcal{L}_2$ .

\*\*\* Условие Попова (10.19) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{K} - \delta + \operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega)] \geq 0.$$

В соответствии с теоремой 10.1 это неравенство выполняется только для  $\omega \geq 0$ . Однако из основного свойства преобразований Фурье, согласно которому  $\operatorname{Re} G(-j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega)$  и  $\operatorname{Im} G(-j\omega) = -\operatorname{Im} G(j\omega)$ , вытекает, что левые части приведенного выше неравенства или правые части (III.14a) останутся неизменными, если  $\omega$  заменить на  $-\omega$ . Отсюда, если приведенное выше неравенство справедливо для  $\omega \geq 0$ , то из выражения (III.14a) следует, что  $I \geq 0$ .

Подстановка соотношения Парсевалья в интеграл (III.16) дает

$$I = \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{K} - \delta \right) U_T(t) - e_T(t) - q\dot{e}_T(t) + e_{0T}(t) + q\dot{e}_{0T}(t) \right] u_T(t) dt. \quad (\text{III.17})$$

Из условий (III.11) и (III.12) замечаем, что

$$e_T(t) = e(t) \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (\text{III.18})$$

Поэтому можно написать

$$I = \int_0^T \left[ \left( \frac{1}{K} - \delta \right) u(t) - e(t) \right] u(t) dt - q \int_0^T \dot{e}(t) u(t) dt + \int_0^T [e_0(t) + q\dot{e}_0(t)] u(t) dt. \quad (\text{III.19})$$

Если условие Попова (10.19) справедливо, то с учетом неравенства (III.15) из выражения (III.19) получим

$$\int_0^T \left[ e(t) - \left( \frac{1}{K} - \delta \right) u(t) \right] u(t) dt + q \int_0^T u(t) \dot{e}(t) dt \leq \int_0^T [e_0(t) + q\dot{e}_0(t)] u(t) dt. \quad (\text{III.20})$$

Теперь в соответствии с требованиями теоремы 10.1 имеем  $(u/e) \in [0, K]$ . Поэтому так как  $0 \leq K \leq \infty$ , то

$$\left[ e - \left( \frac{1}{K} - \delta \right) u \right] u \geq u^2 \delta. \quad (\text{III.21})$$

Применяя неравенство (III.21) к левой части, а неравенство Шварца к правой части выражения (III.20) и затем умножив обе части (III.20) на  $1/\delta$ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^T u^2(t) dt + q \frac{1}{\delta} \int_0^T u(t) \dot{e}(t) dt &\leq \frac{1}{\delta} \int_0^T [e_0(t) + q\dot{e}_0(t)] u(t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left( \int_0^T [e_0(t) + q\dot{e}_0(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

или

$$J_u^2(T) - q \frac{1}{\delta} I_{\Gamma}(T) \leq \frac{1}{\delta} J_0(T) J_u(T), \quad (\text{III.22})$$

где

$$J_u(T) \triangleq \left( \int_0^T u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (\text{III.23a})$$

$$I_{\Gamma}(T) \triangleq - \int_0^T u(t) \dot{e}(t) dt = - \int_{e_0}^{e_T} u(t) de(t); \quad (\text{III.23б})$$

$$J_0(T) \triangleq \left( \int_0^T [e_0(t) + q\dot{e}_0(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (\text{III.23в})$$

здесь  $I_{\Gamma}(T)$  — криволинейный интеграл по пути  $\Gamma$ , характеризующий функциональное соотношение  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$  для  $0 \leq t \leq T$ , а  $J_0(T)$  зависит только от начальных условий.

Необходимо найти условия для асимптотической устойчивости управления, т. е. условия, для которых  $J_u(T) < \infty$  при  $T = \infty$ . Добавив (положительную) величину  $[J_0(T)/2\delta]^2$  к обеим частям (III.22), получим

$$\left[ J_u(T) - \frac{1}{2\delta} J_0(T) \right]^2 - q \frac{1}{\delta} I_\Gamma(T) \leq \frac{1}{4\delta^2} J_0^2(T). \quad (\text{III.24})$$

Из выражений (III.23) замечаем, что  $J_0(T) \leq J_0(\infty)$ . Поэтому из соотношения (III.24) следует

$$\left[ J_u(T) - \frac{1}{2\delta} J_0(T) \right]^2 - q \frac{1}{\delta} I_\Gamma(T) \leq \frac{1}{4\delta^2} J_0^2(\infty).$$

Так как правая часть приведенного выше неравенства не зависит от  $T$ , левая часть действительна для каждого значения  $T$ , включая  $T = \infty$ . Таким образом, можно написать

$$\left[ J_u(\infty) - \frac{1}{2\delta} J_0(\infty) \right]^2 - q \frac{1}{\delta} I_\Gamma(\infty) \leq \frac{1}{4\delta^2} J_0^2(\infty). \quad (\text{III.25})$$

Неравенство (III.25) имеет фундаментальное значение. С помощью его можно доказать отдельные утверждения теоремы 10.1, соответствующие различным типам нелинейных элементов. Из выражений (10.9), (III.23) и неравенства Минковского следует, что для заданных начальных условий

$$J_0(\infty) \leq \left[ \int_0^\infty e_0^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} + |q| \left[ \int_0^\infty \dot{e}_0^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (\text{III.26})$$

Таким образом, если можно показать, что выражение  $-qI_\Gamma(\infty) \geq 0$ , то из неравенства (III.25) следует, что  $J_u(\infty) < \infty$ , т. е. это определяет асимптотическую устойчивость управления. Рассмотрим теперь различные случаи, охватываемые теоремой 10.1.

### 1. Общий случай: $q = 0$ , $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$

При  $q = 0$  неравенство (III.25) сводится к виду

$$\left[ J_u(\infty) - \frac{1}{2\delta} J_0(\infty) \right]^2 \leq \left[ \frac{1}{2\delta} J_0(\infty) \right]^2$$

или, используя неравенство (III.26) для  $q = 0$ , получим

$$J_u(\infty) \leq \frac{1}{\delta} J_0(\infty) \leq \frac{1}{\delta} \left[ \int_0^\infty e_0^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (\text{III.27})$$

Из леммы 10.2 следует, что  $u(t)$  и  $e(t)$  интегрируемы с квадратом, а это доказывает, что случай  $q = 0$  в теореме 10.1 имеет место для общего функционального соотношения  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$ .

### 2. Частный случай: $0 \leq q < \infty$ , активный гистерезис, или стационарная функция $u(t) = \mathcal{F}[e(t)]$

Активный гистерезис задается условием (10.46) в определении 10.2. Результаты для этого случая будут использованы при доказательстве теоремы для более важных случаев пассивного гистерезиса и однозначной функции  $u = f(e)$ .

С учетом соотношений (10.46) и (III.23) неравенство (III.25) принимает вид

$$\begin{aligned} \left[ J_u(\infty) - \frac{1}{2\delta} J_0(\infty) \right]^2 + q \frac{1}{\delta} \int_0^{e(\infty)} u(t) de(t) &\leq \\ &\leq q \frac{1}{\delta} \int_0^{e(0)} u(t) de(t) + \frac{1}{4\delta^2} J_0^2(\infty), \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

где  $\Gamma_0$  — любой из возможных путей (незамкнутый путь), определяемый соотношением  $u = \mathcal{F}[e(t)]$  от 0 до  $e(0)$ , а  $\Gamma_\infty$  — любой возможный путь от  $e(0)$  к  $e(\infty)$ . Вследствие того, что  $u/e \in [0, K]$ , оба криволинейных интеграла в (III.28) должны быть больше или равны нулю.

Далее, правая часть (III.28) зависит лишь от начальных условий и является конечной. Поэтому конечной является и левая часть соотношения (III.28). Так как она также и не отрицательна, то отсюда следует, что

$$J_u(\infty) < \infty \text{ и } J_e(\infty) \triangleq \int_0^{\infty} e^2(t) dt < \infty. \quad (\text{III.29})^*$$

Таким образом, система является асимптотически устойчивой как по управляющему сигналу, так и по выходному, что и требовалось доказать.

Частным случаем активного гистерезиса является класс однозначных функций\*\*  $u = f(e)$ . Итак, нами доказана также часть теоремы 10.1, относящаяся к однозначным функциям для  $0 \leq q < \infty$ . Часть доказательства, относящаяся к однозначным функциям для  $-\infty < q \leq 0$ , будет приведена ниже.

### 3. Частный случай: $-\infty < q \leq 0$ , пассивный гистерезис, или стационарная функция $u(t) = \mathcal{F}[e(t)]$

При  $0 < K < \infty$  систему вида (10.1) с пассивным гистерезисом можно легко преобразовать в эквивалентную систему того же вида (10.1) с активным гистерезисом, вследствие чего можно использовать результаты, полученные для этого случая (см., например, рис. 10.2). Обозначим это преобразование как

$$u(t) = (K + \varepsilon)e(t) - u_1(t) \quad (\text{III.30})$$

для некоторого произвольно малого  $\varepsilon > 0$ .

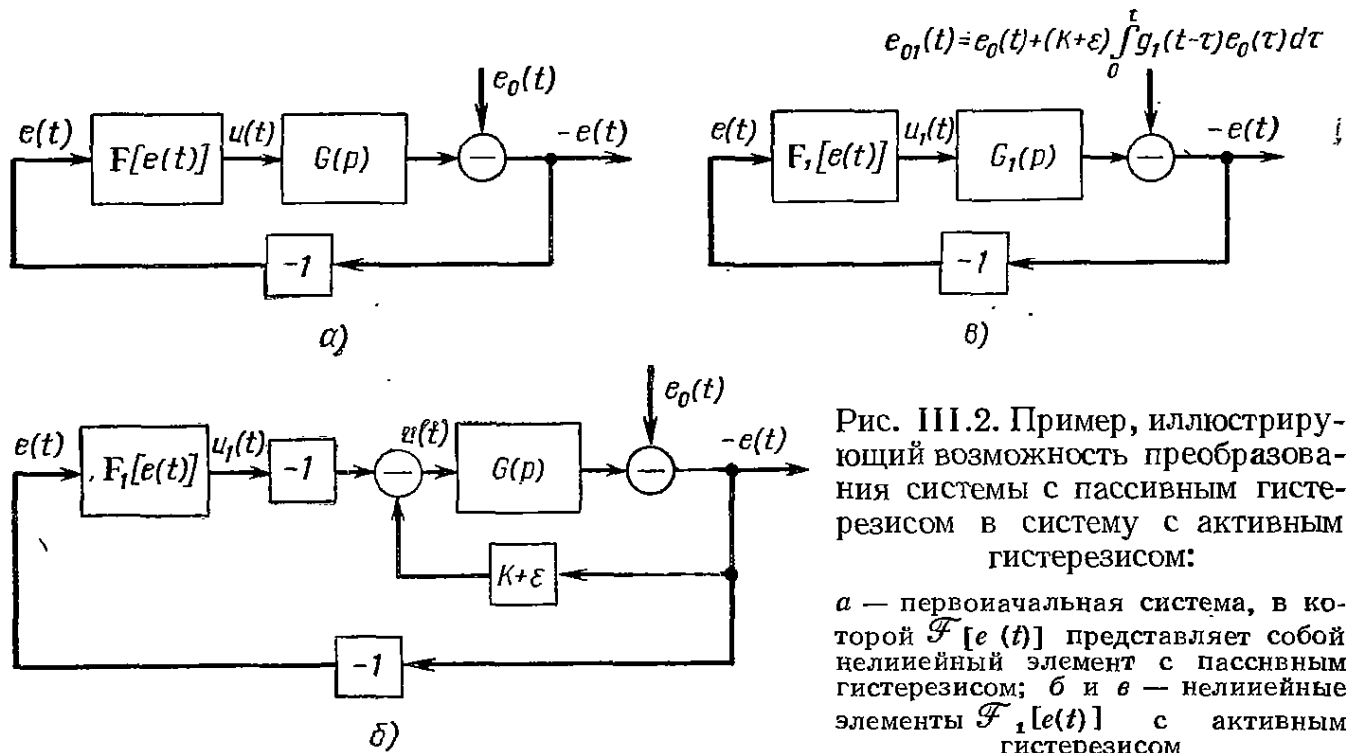


Рис. III.2. Пример, иллюстрирующий возможность преобразования системы с пассивным гистерезисом в систему с активным гистерезисом:

а — первоначальная система, в которой  $\mathcal{F}[e(t)]$  представляет собой нелинейный элемент с пассивным гистерезисом; б и в — нелинейные элементы  $\mathcal{F}_1[e(t)]$  с активным гистерезисом

Это преобразование показано на рис. III.2. Линейный элемент преобразованной системы характеризуется передаточной функцией  $G_1(s)$  и реакцией на начальные условия  $e_{01}(t)$ , которые соответственно определяются выражениями

$$\mathcal{L}[g_1(t)] = G_1(s) = \frac{-G(s)}{1 + (K + \varepsilon)G(s)}; \quad (\text{III.31a})$$

$$e_{01}(t) = e_0(t) + (K + \varepsilon) \int_0^t q_1(t - \tau) e_0(\tau) d\tau. \quad (\text{III.31б})$$

\* Из выражения (III.28) фактически следует, что  $J_u(\infty) < \infty$  и  $e(\infty) < \infty$ ; однако вследствие содержащегося в теореме 10.1 предположения о том, что линейный элемент устойчив по выходу, асимптотичность управления означает асимптотичность выхода в соответствии с леммой 10.2.

\*\* Для однозначных функций  $u = f(e)$  пути  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_\infty$  криволинейных интегралов в выражении (III.28) являются единственными.

Преобразования Фурье этих выражений имеют вид

$$G_1(j\omega) = \frac{-G(j\omega)}{1 + (K + \varepsilon)G(j\omega)}; \quad E_{01}(j\omega) = \frac{E_0(j\omega)}{1 + (K + \varepsilon)G(j\omega)}. \quad (\text{III.32})$$

Справедливы две следующие леммы.

**Лемма III.2.** Если теорема 10.1 справедлива для какого-то значения  $q$  ( $-\infty < q < \infty$ ), то при достаточно небольшом  $\varepsilon > 0$  линейный элемент, полученный с помощью преобразования (III.30), обладает всеми свойствами (10.9) в отношении устойчивости на выходе, за исклю-

чением условия  $\int_0^{\infty} |g(t)| dt < \infty$ .

**Доказательство леммы III.2.** Выберем  $\delta_1$  такое, что  $\delta > \delta_1 > 0$  и  $(1/K) - \delta = [1/(K + \varepsilon)] - \delta_1$ . Согласно условию Попова (10.19) существует число  $\mu > 0$  такое, что  $|1 + (K + \varepsilon)G(j\omega)| \geq \mu > 0$ . Поэтому из выражения (III.32) получим  $|G_1(j\omega)| \leq \frac{1}{\mu} |G(j\omega)|$  и  $|E_{01}(j\omega)| \leq \frac{1}{\mu} |E_0(j\omega)|$ . Кроме того,  $|j\omega E_{01}(j\omega)| \leq \frac{1}{\mu} |j\omega E_0(j\omega)|$ .

Так как первоначальный линейный элемент устойчив на выходе, то из выражения (10.9) и теоремы Планшереля (см. § III.1) следует, что правые части трех приведенных выше неравенств интегрируемы с квадратом на интервале  $-\infty \leq \omega \leq \infty$ . Это относится также и к левым частям, и из теоремы Планшереля снова следует, что  $g_1(t) \in \mathcal{L}_2$ ;  $e_{01}(t) \in \mathcal{L}_2$  и  $\dot{e}_{01}(t) \in \mathcal{L}_2$  на интервале  $(0, \infty)$ . Доказательство последнего условия вытекает из выражения (III.31б) и неравенства Шварца:

$$|e_{01}(t)| \leq |e_0(t)| + (K + \varepsilon) \left( \int_0^{\infty} g_1^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\infty} e_0^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

это выражение является конечным, так как  $g_1(t) \in \mathcal{L}_2$ , а первоначальный элемент удовлетворяет (10.9).

**Лемма III.3.** Если условие Попова (10.19) справедливо для  $G(j\omega)$  при  $q \leq 0$ , то оно будет справедливо также и для  $G_1(j\omega)$ , выраженной формулой (III.32), при  $q \geq 0$ \*

С учетом лемм III.2 и III.3 удовлетворение требований теоремы 10.1 в отношении линейного элемента первоначальной системы означает удовлетворение этих требований и для преобразованной системы. Необходимо теперь исследовать, в какой мере это справедливо для нелинейного элемента.

**Лемма III.4.** Если нелинейный элемент первоначальной системы удовлетворяет условию ( $u/e \in [0, K]$ ), то преобразованный элемент удовлетворяет условию ( $u_1/e \in [\varepsilon, k + \varepsilon]$ ). Кроме того, в соответствии с определением 10.2 преобразование выражения (III.30) превращает нелинейный элемент с пассивным гистерезисом в нелинейный элемент с активным гистерезисом и наоборот.

Доказательство леммы III.4 вытекает из применения выражения (III.30) к соотношениям (10.2) и (10.4). Из лемм III.1\*\*, III.2 и III.4 следует, что удовлетворение требований теоремы 10.1, включая условие Попова (10.19) с  $q \leq 0$  для первоначальной системы с пассивным гистерезисом, будет означать асимптотическую устойчивость управления преобразованной системы, т. е.

$$J_{u1}(\infty) \triangleq \left( \int_0^{\infty} u_1^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (\text{III.33})$$

Поэтому, так как  $\varepsilon e^2(t) \leq u_1^2(t)$ , имеем

$$J_e(\infty) \triangleq \left( \int_0^{\infty} e^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (\text{III.34})$$

для заданных начальных условий.

\* Можно показать (проделайте это), что если  $(1/K) + \text{Re} [(1 + j\omega q)G(j\omega)] \geq \delta > 0$ , то  $[1/(K + \varepsilon)] + \text{Re} [(1 - j\omega q)G_1(j\omega)G_1(j\omega)] \geq \delta_1 > 0$ , где  $\delta$  и  $\delta_1$  определены на этой странице. Отсюда следует лемма III.3.

\*\* Заметим, что приводимое в данном приложении доказательство для  $u(t) \in \mathcal{L}$  в  $(0, \infty)$  не требует, чтобы  $|g(t)| \in \mathcal{L}_2$  в  $(0, \infty)$ . Оно используется здесь для  $u_1(t)$  и  $g_1(t)$ .

Отсюда из выражений (III.30), (III.33), (III.34) и неравенства Минковского получим

$$J_u^2(\infty) = \int_0^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{\infty} [(K + \varepsilon)e(t) - u_1(t)]^2 dt \leq \leq [(K + \varepsilon)J_e(\infty) + J_{u_1}(\infty)]^2 < \infty. \quad (\text{III.35})$$

Тем самым завершается доказательство той части теоремы 10.1, которая относится к пассивному гистерезису.

#### 4. Частный случай: $-\infty < q < \infty$ , однозначная инвариантная по времени функция $u = f(e)$

Однозначную инвариантную по времени функцию  $u = f(e)$  можно рассматривать как частный случай функции гистерезиса, а именно, как функцию, для которой функциональная зависимость между  $e$  и  $u$  является единственной. Следовательно, система с однозначной, инвариантной по времени функцией  $u = f(e)$ , удовлетворяющая всем другим требованиям теоремы 10.1, будет иметь асимптотически устойчивое управление и выход, если условие Попова (10.19) удовлетворяется или для  $q \geq 0$  (частный случай активного гистерезиса), или для  $q \leq 0$  (частный случай пассивного гистерезиса) и тем самым для  $-\infty < q < \infty$ . Это справедливо для  $0 < K < \infty$ . Так как при  $-\infty < q < 0$  теорема не включает в себя случай  $K = \infty$ , то при  $K = \infty$  значение  $q$  должно ограничиваться диапазоном  $0 \leq q < \infty$ .

### III.4. Доказательство теоремы 10.2

Для доказательства теоремы 10.2 нам потребуется следующая лемма.

**Лемма III.5.** Если условия теоремы 10.2 удовлетворены, то существует действительное число  $K_{u\alpha}$  такое, что

$$J_u(\infty) = \left[ \int_0^{\infty} u^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_{u\alpha} \|x(0)\|. \quad (\text{III.36})$$

Доказательство леммы III.5. Из выражения (10.8а) имеем

$$e_0(t) = -c^T \Phi(t) x(0). \quad (\text{III.37а})$$

Производная по времени  $e_0(t)$  будет

$$\dot{e}_0(t) = -c^T \dot{\Phi}(t) x(0). \quad (\text{III.37б})$$

Теперь в соответствии с теоремой 10.2 все собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части. Это означает существование  $\alpha > 0$  такого, что  $\text{Re } \lambda_i \leq -\alpha$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Следовательно (см. упражнение 5.14), существуют числа  $M$ ;  $M'$  такие, что

$$\left. \begin{aligned} \|\Phi(t)\| &\triangleq \left( \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} = M e^{-\alpha t}; \\ \|\dot{\Phi}(t)\| &\triangleq \left[ \sum_{i,j=1}^n \dot{\Phi}_{ij}^2(t) \right]^{\frac{1}{2}} \leq M' e^{-\alpha t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.38})$$

Таким образом, из выражений (III.37) и (III.38) можно получить следующие неравенства:

$$|e_0(t)| \leq c M e^{-\alpha t} \|x(0)\|; \quad |\dot{e}_0(t)| \leq c M' e^{-\alpha t} \|x(0)\|, \quad (\text{III.39})$$

где

$$c \triangleq \|c\| = \left( \sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.40})$$

(т. е.  $c$  представляет собой норму постоянного вектора  $c$ ), Поэтому из равенства (III.23в) и условия (III.39) следует, что

$$J_0(\infty) \leq M_{0\alpha} \|x(0)\|, \quad (\text{III.41})$$

где

$$M_{0\alpha} = (M + |q| M') \frac{c}{\sqrt{2\alpha}} < \infty. \quad (\text{III.42})$$

При  $0 \leq q < \infty$  справедливо неравенство (III.28). Так как должны быть удовлетворены условия теоремы 10.1, имеем  $0 \leq u(t) e(t) \leq Ke^2(t)$ . В соответствии с леммой 10.1  $e(\infty) = 0$ , поэтому для двух криволинейных интегралов в неравенстве (III.28) получим

$$\int_{0\Gamma_0 + \Gamma_\infty}^{e(\infty)} u(t) de(t) = 0; \quad \int_{0\Gamma_0}^{e(0)} u(t) de(t) \leq \frac{K}{2} e^2(0) \leq \frac{K}{2} c^2 \|x(0)\|^2. \quad (\text{III.43})$$

Последнее неравенство вытекает из предположения о том, что  $u/e \in [0, K]$  при  $0 < K < \infty$  и из выражений (10.24) и (III.40).

В сочетании с неравенствами (III.41) и (III.42) неравенство (III.28) принимает вид

$$J_u(\infty) \leq \frac{1}{2\delta} M_{0\alpha} \|x\|(0) + \left[ q \frac{K_c^2}{2\delta} + \frac{1}{4\delta^2} M_{0\alpha}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|x(0)\|,$$

откуда следует условие (III.36) с

$$K_{u\alpha} = \frac{1}{2\delta} M_{0\alpha} + \left( q \frac{K_c^2}{2\delta} + \frac{1}{4\delta^2} M_{0\alpha}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (\text{III.44})$$

Доказательство теоремы 10.2. С учетом выражений (III.38) можно написать

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \|x(0)\| + bM \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} |u(\tau)| d\tau, \quad (\text{III.45})$$

где

$$b \triangleq \|b\| = \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При использовании неравенств Шварца и выражения (III.36) получим

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \|x(0)\| + \frac{bM}{\sqrt{2\alpha}} \left( \int_0^\infty u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\|x(t)\| \leq M \left[ e^{-\alpha t} + \frac{bK_{u\alpha}}{\sqrt{2\alpha}} \right] \|x(0)\|. \quad (\text{III.46})$$

Из последнего неравенства следует, что для каждого значения  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , а именно:

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M \left[ 1 + \frac{bK_{u\alpha}}{\sqrt{2\alpha}} \right]},$$

что при  $\|x(0)\| < \delta$  выполняется условие  $\|x(t)\| < \varepsilon$  для всех  $t \geq 0$ . Таким образом, решение  $\|x\| = 0$  устойчиво по Ляпунову. Для доказательства асимптотической устойчивости в целом необходимо показать, что  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для каждого  $x(0)$ . Из неравенства Минковского, соотношения Парсеваля и выражения (III.36), получим

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} &\leq M \|x(0)\| \left( \int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt \right)^{\frac{1}{2}} + bM \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{|U(j\omega)|^2}{|j\omega + \alpha|^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{M}{\sqrt{2\alpha}} \|x(0)\| + bM \left( \sup_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \frac{1}{|j\omega + \alpha|} \right) \left( \int_0^\infty u^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq M \left[ \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} + \frac{bK_{u\alpha}}{\alpha} \right] \|x(0)\| < \infty. \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Равенство (III.47) удовлетворяется лишь в том случае, если  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , что, в свою очередь, возможно только, когда  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (проделайте это упражнение самостоятельно). Этим завершается доказательство теоремы.

### III.5. Схема доказательства леммы 11.3

Приведем детальное доказательство леммы 11.3 для общего случая  $q = 0$ ,  $u(t) = \mathcal{F}[e(t), t]$  и  $0 < K \leq \infty$ . Для других случаев ограничимся схемой доказательства.

Так как линейный элемент устойчив на выходе с коэффициентом затухания  $\varepsilon$  при достаточно небольшом значении  $\varepsilon > 0$ , то существует такое  $\varepsilon_1 > 0$ , что  $e^{\varepsilon_1 t} g(t) \in \mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  на интервале  $(0, \infty)$  (см. § III.1 и определение 10.3). Выберем теперь  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ) и преобразуем переменные системы следующим образом:

$$e_\varepsilon(t) \triangleq e^{\varepsilon t} e(t), u_\varepsilon(t) \triangleq e^{\varepsilon t} u(t), g_\varepsilon(t) \triangleq e^{\varepsilon t} g(t) \text{ при } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1. \quad (\text{III.48})$$

Кроме того, примем

$$e_{0\varepsilon}(t) \triangleq e^{\varepsilon t} [e_0(t) + r(t)], 0 < \varepsilon < \varepsilon_1. \quad (\text{III.49})$$

Тогда систему (11.39) можно представить в следующем виде:

$$e_\varepsilon(t) = e_{0\varepsilon}(t) - \int_0^t g_\varepsilon(t-\tau) u_\varepsilon(\tau) d\tau, u_\varepsilon(t) = \mathcal{F}[e_\varepsilon(t), t]. \quad (\text{III.50})$$

Как и в § 10.5, если  $u/e \in [a, b]$ , то  $u_\varepsilon/e_\varepsilon \in [a, b]$ . Пусть все условия теоремы 10.1 удовлетворены для невозмущенной системы. Тогда условие (10.19) выполняется, а это означает существование такого  $\delta_0 > 0$ , что

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega)] + \frac{1}{K} \geq \delta_0 > 0.$$

Далее, так как  $e^{\varepsilon_1 t} g(t) \in \mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , преобразование Лапласа  $\mathcal{L}[e^{\varepsilon_1 t} g(t)] = G(s - \varepsilon_1)$  существует и является аналитическим в области  $\operatorname{Re} s \geq 0$ . Поэтому  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$  является аналитической в области  $\operatorname{Re} s \geq -\varepsilon_1$ , а это означает непрерывность  $G(s)$  в области  $\operatorname{Re} s \geq -\varepsilon_1$ . Следовательно, существует такое  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ ), что

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q) G(j\omega - \varepsilon)] + \frac{1}{K} \geq \delta > 0, \quad (\text{III.51})$$

где  $0 < \delta \leq \delta_0$ .

Так как  $G(s - \varepsilon) = \mathcal{L}[g_\varepsilon(t)]$ , то условие (III.51) представляет собой условие Попова для преобразованной системы (III.50).

Теперь можно привести доказательство, аналогичное доказательству теоремы 10.1 (см. § III.3) для системы (III.50) с учетом, однако, того, что член  $e_{0\varepsilon}(t)$ , определяемый в выражении (III.49), не удовлетворяет требованиям теоремы 10.1, так как  $|e_{0\varepsilon}(t)| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Можно достаточно просто проверить, что для системы (III.50) с условием (III.51) каждый шаг в § III.3 является справедливым вплоть до условия (III.24). Без какой-либо потери общности  $T$  в выражении (III.24) можно заменить на  $t$ , так что в терминах системы (III.50) уравнение (III.24) принимает вид

$$\left[ J_{u\varepsilon}(t) - \frac{1}{2\delta} J_{0\varepsilon}(t) \right]^2 - \frac{q}{\delta} I_{T\varepsilon}(t) \leq \frac{1}{4\delta^2} J_{0\varepsilon}^2(t). \quad (\text{III.52})$$

Используя соотношения (III.23), (III.48) и (III.49), получим

$$J_{u\varepsilon}(t) \triangleq \left( \int_0^t u_\varepsilon(\tau) d\tau \right)^2 = \left( \int_0^t e^{2\varepsilon\tau} u^2(\tau) d\tau \right)^2; \quad (\text{III.53a})$$

$$I_{T\varepsilon}(t) \triangleq - \int_0^t u_\varepsilon(\tau) \dot{e}_\varepsilon(\tau) d\tau = - \int_{e_\varepsilon(0)}^{e_\varepsilon(t)} \Gamma u_\varepsilon(\tau) de_\varepsilon(\tau); \quad (\text{III.53б})$$

$$J_{0\varepsilon}(t) \triangleq \left( \int_0^t e^{2\varepsilon\tau} [e_0(\tau) + q\dot{e}_0(\tau) + r(\tau) + q\dot{r}(\tau)]^2 d\tau \right)^2. \quad (\text{III.53в})$$



Здесь  $\Gamma$  — контур, обусловленный функциональной зависимостью между  $u_\varepsilon(\tau)$  и  $e_\varepsilon(\tau)$  в интервале  $0 \leq \tau \leq t$ . Умножив обе части неравенства (III.52) и равенств (III.53) на  $e^{-2\varepsilon t}$ , получим

$$\left[ J'_{u\varepsilon}(t) - \frac{1}{2\delta} J'_{0\varepsilon}(t) \right]^2 - \frac{q}{\delta} I'_{\Gamma\varepsilon}(t) \leq \frac{1}{4\delta^2} J'^2_{0\varepsilon}(t), \quad (\text{III.54})$$

где

$$J'_{u\varepsilon}(t) \triangleq \left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} u^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (\text{III.55a})$$

$$I'_{\Gamma\varepsilon}(t) \triangleq -e^{-2\varepsilon t} \int_{e_\varepsilon(0)}^{e_\varepsilon(t)} u_\varepsilon(\tau) de_\varepsilon(\tau); \quad (\text{III.55б})$$

$$J'_{0\varepsilon}(t) \triangleq \left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} [e_0(\tau) + q\dot{e}_0(\tau) + r(\tau) + q\dot{r}(\tau)]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.55в})$$

Рассмотрим теперь свойства трех интегралов выражений (III.55). Используя неравенство Минковского, из выражения (III.55в) найдем

$$J'_{0\varepsilon}(t) \leq \left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} [e_0(\tau) + q\dot{e}_0(\tau)]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)} [r(\tau) + q\dot{r}(\tau)]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  и  $|r(t)| \leq r_m < \infty$ ,  $|\dot{r}(t)| \leq r'_m < \infty$ , то из приведенного выше неравенства получим

$$J'_{0\varepsilon}(t) \leq J_0(t) (r_m + qr'_m) \left( \frac{1 - e^{-2\varepsilon t}}{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \leq J_0(\infty) + \frac{r_m + qr'_m}{\sqrt{2\varepsilon}} < \infty, \quad (\text{III.56})$$

где  $J_0(t) < \infty$  является той же, что и в соотношении (III.23в) при  $T = t$ .

При  $q = 0$  неравенство (III.54) сводится к

$$J'_{u\varepsilon}(t) \leq \frac{1}{\delta} J'_{0\varepsilon}(t) < \infty. \quad (\text{III.57})$$

С учетом условия (III.56) приведенное выше выражение является конечным. Кроме того, так как при  $q = 0$  член, включающий в себя  $r'_m$ , выпадает, отсюда следует, что в случае  $q = 0$  от требования  $|\dot{r}(t)| \leq r'_m < \infty$  можно отказаться.

Для других случаев доказательство конечности  $J'_{u\varepsilon}(t)$  при всех значениях  $t \geq 0$  осуществляется параллельно доказательству теоремы 10.1. При этом неравенство (III.54) служит таким же основным соотношением, каким служило (III.25) при доказательстве теоремы 10.1. Вторую часть леммы 11.3, в которой указано, что линейный элемент не обязательно должен быть устойчивым по выходному сигналу, если его можно получить путем преобразования со сдвигом нулей (10.38) из устойчивого элемента, можно доказать точно так же, как и теорему 10.6.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Изд-во АН СССР, 1963.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. М., Гостехиздат, 1955.
3. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ, 1937.
4. Аоки М. Minimum Norm Problems and Some Other Control System Optimization Techniques, in C. T. Leondes (ed.), Modern Control Systems Theory, chap. 8, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1965 (имеется русский перевод Аоки М. Проблема минимума нормы и некоторые другие методы оптимизации систем управления, гл. 8 в книге «Современная теория систем управления» под ред. К. Т. Леондеса, М., изд-во «Наука», 1970).
5. Аристотель Т. М. Mathematical Analysis; a Modern Approach to Advanced Calculus, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass., 1957.
6. Athans M. The Status of Optimal Control Theory and Applications for Deterministic Systems, «IEEE International Convention Record», vol. 14, pt. 6, pp. 100—124, 1966.
7. Athans M. and Canon M. D. On the Fuel-Optimal Singular Control of Nonlinear Second—Order Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-9, no. 4, pp. 360—370, 1964.
8. Athans M. and Falb P. L. Optimal Control; an Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw—Hill Book Company, N. Y., 1966. (имеется русский перевод Атанс М., Фалб П. Л., Оптимальное управление. М., изд-во «Машиностроение», 1968).
9. Badgett L. R. A New Method of Obtaining Inverse z-Transforms, «Proc. of the IEEE», vol. 54, no. 7, pp. 1010—1011, July 1966.
10. Беллман Р. Adaptive Control Processes: A Guided Tour, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1961 (имеется русский перевод. Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М., изд-во «Наука», 1964).
11. Беллман Р. Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957 (имеется русский перевод. Беллман Р. Динамическое программирование, М., изд-во иностр. лит., 1960).
12. Беллман Р. Introduction to Matrix Analysis, McGraw—Hill Book Company, N. Y., 1960 (имеется русский перевод. Беллман Р. Введение в теорию матриц, М., изд-во «Наука», 1969).
13. Беллман Р. On an Application of a Banach-Steinhaus Theorem to the Study of the Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential and Difference Equations, Ann. of Math., (2) vol. 49, no. 3, pp. 515—522, July 1948.
14. Беллман Р. Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1953 (имеется русский перевод. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., изд-во иностр. лит., 1954).
15. Беллман Р., Glicksberg I. and Gross O. On the «Bang-Bang» Control Problem, «Quart. Appl. Math.», vol. 14, pp. 11—18, April 1956.
16. Bendixson I. Sur les Courbes Definies par des Equations Differentielles. «Acta Mathematica», vol. 24, pp. 1—88, 1901.
17. Bergen A. R., Iwens R. P. and Rault A. J. On Input—Output Stability of Nonlinear Feedback Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-11, no. 4, pp. 742—744, October 1966.
18. Berkovitz L. D. Variational Methods in Problems of Control and Programming, «J. of Math. Analysis and Applications», vol. 3, no. 1, pp. 145—169, August 1961.
19. Bliss G. A. Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, 1946. (имеется русский перевод. Блiss Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., изд-во иностр. лит., 1950).
20. Bode H. W. and Shannon C. E. A Simplified Derivation of Linear Least Square Smoothing and Prediction Theory, «Proc. of the IRE», vol. 38, no. 4, pp. 417—425, April 1950.

21. В о г н е р I. and К а з а д а L. F. An Investigation of the Switching Criteria for Higher Order Contactor Servomechanisms, «Trans. AIEE», vol. 73, pt. 11, pp. 118—126, 1954.
22. Б о л т я н с к и й В. Г. Достаточные условия оптимальности и обоснование метода динамического программирования. «Известия АН СССР», сер. математ., т. 28, № 3, 1964, стр. 481—514.
23. В о н е н н Z e'ev. Frequency Response of Feedback Relay Amplifiers, «IEEE Proc. (British)», vol. 108, pt. C, pp. 287—295, 1961.
24. В о н г и о р н о J. J., Jr. Real-Frequency Stability Criteria for Linear Time-Varying Systems, «Proc. of the IEEE», vol. 52, no. 7, pp. 832—841, July 1964 (correction in vol. 52, no. 10, pp. 1127—1128, October 1964).
25. B r e a k w e l l J. V., S p r e y e r J. L. and B r y s o n A. E. Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation, «J. SIAM on Control», Ser. A., vol. 1, no. 2, pp. 193—223, 1963.
26. B r o c k e t t R. W. The Status of Stability Theory for Deterministic Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-11, no. 3, pp. 596—606, July 1966.
27. B r o c k e t t R. W. and W i l l e m s J. W. Frequency Domain Stability Criteria, «IEEE Trans. on Automatic Control», pt. 1, vol. AC-10, no. 3, pp. 255—261, July 1965; pt. 11, vol. AC-10, no. 4, pp. 407—413, October 1965.
28. B r y s o n A. E. C a r o l l F. J., M i k a m i K. and D e n h a m W. F. Determination of the Lift or Drag Program That Minimizes Re-Entry Heating with Acceleration or Range Constraints Using a Steepest Descent Computation Procedure, Institute of the Aerospace Sciences 29th Annual Meeting, N. Y., Paper 61—6, 1961.
29. B u s h a w D. «Optimal Discontinuous Forcing Terms» in S-Lefschetz (ed.), Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 4 (Annals of Mathematics Studies, no. 41), Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. 29—52 (based on Ph. D. dissertation of 1953).
30. Б у т е н и н Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний, Л., Судпромгиз, 1962.
31. C e s a r i L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, Academic Press, Springer-Verlag, 2nd ed., 1963 (имеется русский перевод первого издания 1959 г. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., изд-во «Мир», 1964).
32. C h a n g S. S. L. Synthesis of Optimum Control Systems, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961 (имеется русский перевод. Чанг Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления, М., изд-во «Машиностроение», 1964).
33. C h u n g D. H. and L e e E. B. Linear Optimal Systems with Time Delay, «SIAM Jour. on Control», vol. 4, no. 3, pp. 548—575, August 1966.
34. C i c a l a P. An Engineering Approach to the Calculus of Variations, Levrotto and Bella, Torino, Italy, 1964. (Revised second impression).
35. C o d d i n g t o n E. A. and L e v i n s o n N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York, 1955 (имеется русский перевод. Коддингтон Е. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., изд-во иностр. лит., 1958).
36. C o r r e l W. A. Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, D. C. Heath and Company, Boston, 1965.
37. C u n n i n g h a m W. J. Introduction to Nonlinear Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958 (имеется русский перевод. Канингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М.—Л., Госэнергоиздат, 1962).
38. D e n h a m W. F. and B r y s o n A. E., Jr., Optimal Programming Problems with Inequality Constraints. II: Solution by Steepest Descent, «AIAA Jour.», vol. 2, no. 1, pp. 25—34, January 1964.
39. D e R u s s o P. M., R o y R. J. and C l o s e C. M. State Variables for Engineers, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965 (имеется русский перевод. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления, М., изд-во «Наука», 1970).
40. D e s o e r C. A. The Bang-Bang Servo Problem Treated by Variational Techniques, «Information and Control», vol. 2, pp. 333—348, 1959.
41. D e s o e r C. A. A Generalization of the Popov Criterion, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-10, no. 2, pp. 182—185, April 1965.
42. D e w e y A. G., J u r y E. I. A Note on Aizerman's Conjecture, «IEEE Trans on Automatic Control», vol. AC-10, no. 4, pp. 482—483, October 1965.
43. D e w e y A. G., J u r y E. I. A stability Inequality for a Class of Nonlinear Feedback Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-11, no. 1, pp. 54—62, January 1966.
44. D o e t s c h G. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace—Transformation, München, 1961 (имеется русский перевод Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, изд-во «Наука», М., 1965).

45. Doetsch G. Handbuch der Laplace Transformation, vol. 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 1950 (in German).
46. Dorato P. On Sensitivity in Optimal Control Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-8, pp. 256—257, July 1963.
47. Dreyfus S. E. Dynamic Programming and the Calculus of Variations, «J. of Math, Analysis and Applications», vol. 1, no. 2, pp. 228—239, September 1960.
48. Dreyfus S. E. Dynamic Programming and the Calculus of Variations, Academic Press, Inc., New York, 1965.
49. Dutilh J. R. Théorie des Servo-mecanismes à Relais, «Onde Elect.», vol. 30, no. 283, pp. 438—445, October 1950.
50. Эльсгольц Л. Е. Вариационное исчисление. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
51. Fitts R. E. Two Counterexamples to Aizerman's Conjecture, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-11, no. 3, pp. 553—556, July 1966.
52. Flügge-Lotz I., Halpin H. Pontryagin's Maximum Principle and Optimal Control, Tech. Report 130, Department of Engineering Mechanics, Stanford University, Palo Alto, Calif., September 1961 (AFOSR TN 1489).
53. Флюгге-Лотц И., Титус Г. Оптимальное и квазиоптимальное управление системами третьего и четвертого порядка. Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Автоматизация процессов управления, М., изд-во «Наука», 1965.
54. Frame J. S. Matrix Functions and Applications, «IEEE Spectrum», pts. I—V, March-July 1964, (pts. II and III, H. E. Koenig, co-author).
55. Fukuma A. and Matsubara M. Jump Resonance Criteria of Nonlinear Control Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-11, no. 4, pp. 699—706, October 1966.
56. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1954. Имеется более позднее издание. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, изд-во «Наука», М., 1969.
57. Gelb A. The Dynamic Input-Output Analysis of Limit Cycling Control Systems, Joint Automatic Control Conference, Paper 9—3, June 1962.
58. Gibson J. E. Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
59. Gille J. C., Pelegrin M. J. and Desaulne P. Feedback Control Systems: Analysis, Synthesis, and Design, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959 (имеется русский перевод. Жиль Ж., Пелегрен М., Декольн П. Теория и техника следящих систем, М., Машгиз, 1961).
60. Gille J.-C., Wergzyn S. and Paquet J.-G. Oscillations Sous-Harmoniques dans un Asservissement par Plus-ou-Moins in «Automatic and Remote Control — Theory», vol. 2, pp. 204—209, Butterworths, London, 1964.
61. Гольдфарб Л. С. О некоторых нелинейностях в системах регулирования. Автоматика и телемеханика, т. VIII, № 5, 1947, стр. 349—383.
62. Goldstein H. Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1950 (имеется русский перевод. Гольдштейн Г. Классическая механика, М. Гостехиздат, 1957).
63. Graham D. and McRuer D. Analysis of Nonlinear Control Systems, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1961.
64. Grayson L. P. The Status of Synthesis Using Lyapunov's Method, «Automatica», vol. 3, no. 2, pp. 91—121, December 1965.
65. Hadley G. Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1964.
66. Hahn W. Theory and Application of Liapunov's Direct Method (in German); English translation, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1963.
67. Halanay A. Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags (in Rumanian); English translation, Academic Press, N. Y., 1966.
68. Halkin H. A Generalization of LaSalle's «Bang-Bang» Principle, «SIAM Jour. on Control», Series A, vol. 2, no. 2, pp. 199—202, 1965.
69. Halkin H. Mathematical Foundations of System Optimization, in G. Leitmann (ed.), Topics of Optimization, chap. 6, Academic Press, Inc., N. Y., 1967.
70. Hamming R. W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1962 (имеется русский перевод. Хемминг Р. В. Численные методы (для научных работников и инженеров), М., изд-во «Наука». 1968).
71. Hatanaka H. The Frequency Responses and Jump-Resonance Phenomena of Nonlinear Feedback Control Systems, «J. of Basic Engineering», vol. 85, no. 2, pp. 236—242, June 1963 (имеется русский перевод. Хатанак а. Частотные характеристики и явление скачкообразного резонанса в нелинейных системах регулирования с обратной связью, «Теоретические основы инженерных расчетов», т. 85, серия Д, № 2, 1963, стр. 129—136).

72. H a y a s h i C. Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1964 (имеется русский перевод. Х а я с и Т и х и р о. Нелинейные колебания в физических системах, М., изд-во «Мир», 1968).
73. H e s t e n e s M. R. Calculus of Variations and Optimal Control Theory, John Wiley and Sons, Inc. N. Y., 1966.
74. H i l d e b r a n d F. B. Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1952.
75. H o Y. C. Differential Games (review of book by R. Isaacs), «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-10, no. 4, pp. 501—503, 1965.
76. H o Y. C. What Constitutes a Controllable System, «IRE Trans. on Automatic Control», vol. AC-7, no. 3, p. 76, April 1962.
77. H o b s o n E. W. The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series, vol. II, Dover Publications, Inc., N. Y., 1957.
78. H o c h s t a d t H. Differential Equations, a Modern Approach, Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1964.
79. H o l t z m a n J. M. Contraction Maps and Equivalent Linearization, «Bell System Tech. J.», vol. 46, no. 10, pp. 2405—2435, December 1967.
80. H o l t z m a n J. M. and H o r i n g S. The Sensitivity of Terminal Conditions of Optimal Control Systems to Parameter Variations, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-10, pp. 420—426, October 1965.
81. H s u J. C. Integral Representation of Zero-Memory Nonlinear Functions, «Bell System Tech. J.», vol. 41, no. 4, pp. 1813—1830, November 1962.
82. H s u J. C., L i m Y. S. and M e y e r A. U. On Active Attitude Control of Satellites, «IEEE Trans. on MIL Electronics», vol. MIL-9, no. 2, pp. 107—115, April 1965.
83. I n c e E. L. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc., N. Y., 1956.
84. I s a a c s R. Differential Games; a Mathematical Theory with Applications to Warfare, Control, and Optimization, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1965 (имеется русский перевод. А й з е к с Р. Дифференциальные игры. М., изд-во «Мир», 1967).
85. J o h n s o n C. D. Singular Solutions in Problems of Optimal Control, in C. T. Leondes (ed.), Advances in Control Systems: Theory and Applications, vol. 2, pp. 209—267, Academic Press, Inc., N. Y., 1965.
86. J o h n s o n C. D. and G i b s o n J. E. Singular Solutions in Problems of Optimal Control, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-8, no. 1, pp. 4—15, January 1963.
87. J o h n s o n C. D. and W o n h a m W. M. On a Problem of Letov in Optimal Control, Joint Automatic Control Conference, Preprints of Conference Papers, pp. 317—325, June 1964.
88. J o n e s R. W. and M e y e r A. U. Analysis of Series Generator Series Motor Drive, «Trans. AIEE», vol. 79, pt. III, pp. 31—39, April 1960.
89. J u r y E. I. A Note on the Steady-State Response of a Linear Time-Invariant System to General Periodic Input, «Proc. of the IRE», vol. 48, no. 5, pp. 942—944, May 1960.
90. J u r y E. I. Theory and Application of the z-Transform Method, John Wiley and Sons, Inc. N. Y., 1964.
91. K a h n D. A. An Analysis of Relay Servomechanisms, «Trans. AIEE», vol. 68, pt. II, pp. 1079—1088, 1949.
92. K a l m a n R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control, «Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana», (2) vol. 5, pp. 102—119, 1960.
93. K a l m a n R. E. Lyapunov Functions for the Problem of Lur'e in Automatic Control, «National Academy of Sciences, Proceedings», vol. 49, no. 2, pp. 201—205, February 1963.
94. K a l m a n R. E. New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory, in J. L. Bogdanoff and F. Kozin (eds.), Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1963.
95. K a l m a n R. E. Physical and Mathematical Mechanisms of Instability in Nonlinear Automatic Control Systems, «Trans. ASME», vol. 79, no. 3, pp. 553—566, April 1957.
96. K a l m a n R. E. The Theory of Optimal Control and the Calculus of Variations, in R. Bellman (ed.), Mathematical Optimization Techniques, University of California Press, Berkeley, Calif., 1963.
97. K a l m a n R. E. When is a Linear Control System Optimal? «J. of Basic Engineering», vol. 86, no. 1, pp. 51—60, March 1964 (имеется русский перевод. К а л м а н Р. Е. Когда линейная система управления является оптимальной. «Теоретические основы инженерных расчетов», т. 86, серия «Д», № 1, 1964, стр. 69—84).
98. K a l m a n R. E. and B e r t r a m J. E. Control System Analysis and Design via the «Second Method» of Lyapunov, pt. I: Continuous Time Systems, «J. of Basic Engineering», vol. 82, no. 2, pp. 371—393, June 1960.
99. K a l m a n R. E., H o Y. C. and N a r e n d r a K. S. Controllability of Linear Dynamical Systems, in Contributions to Differential Equations, vol. I, no. 2, pp. 189—213, Interscience Publishers, N. Y., 1963.

100. Kalman R. E. and Koopman R. W. Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems Using Generalized Performance Indexes, «Trans. ASME», vol. 80, no. 8, pp. 1820—1826, November 1958.
101. Канторович Л. В. и Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
102. Karlan W. Operational Methods for Linear Systems, Addison—Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.
103. Kelley H. J. Method of Gradients, in G. Leitmann (ed.), Optimization Techniques, with Applications to Aerospace Systems, pp. 205—254, Academic Press, Inc., N. Y., 1962 (имеется русский перевод. Келли Г. Дж. Метод градиентов, в книге «Методы оптимизации с приложением к механике космического полета». Под ред. Дж. Лейтмана, М., изд-во «Наука», 1965, гл. 6, стр. 244—308).
104. Kelley H. J. A Second Variation Test for Singular Extremals. «AIAA Journal», vol. 2, no. 8, pp. 1380—1382, August 1964.
105. Kenneth P. and McGill R. Two-Point Boundary-Value-Problem Techniques, in C. T. Leondes (ed.), Advances in Control Systems, vol. 3, pp. 69—109, Academic Press, Inc., N. Y., 1966.
106. Kinariwala B. K. Analysis of Time-Varying Networks, «IRE International Convention Record», vol. 9, pt. 4, pp. 268—276, 1961.
107. Кнорр К. Theory of Functions pt. I, Dover Publications Inc., N. Y., 1945.
108. Kochenburger R. J. A Frequency Response Method for Analyzing Contact Servomechanisms, «Trans. AIEE», vol. 69, pt. II, pp. 270—284, 1950.
109. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, изд-во Московского университета, 1954 (имеется более позднее издание. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа М., изд-во «Наука», 1968).
110. Корр R. E., McGill R., Moyer H. G. and Pinkham G. Several Trajectory Optimization Techniques pt. I — Discussion, pt. II — Application, in A. V. Balakrishnan and L. W. Neustadt (eds.), Computing Methods in Optimization Problems, pp. 65—105, Academic Press, Inc., N. Y., 1964.
111. Kovatch G. A Method for the Computation of Self-Sustained Oscillation in Systems with Piecewise Linear Elements, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-8, no. 4, pp. 358—365, 1963.
112. Ку Y. H. Analysis and Control of Nonlinear Systems, The Ronald Press, N. Y., 1958.
113. Laning J. H., Jr. and Battin R. H. Random Processes in Automatic Control, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1956 (имеется русский перевод. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, М., изд-во иностр. лит., 1958).
114. Larson R. E. Dynamic Programming with Reduced Computational Requirements, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-10, no. 2, pp. 135—143, April 1965.
115. Larson R. E. A Survey of Dynamic Programming Computational Procedures, «IEEE International Convention Record», 1967.
116. LaSalle J. P. Complete Stability of a Nonlinear Control System, «Proc. National Academy Science, U. S. A.», vol. 48, no. 4, pp. 600—603, April 1962.
117. LaSalle J. P. The Time-Optimal Control Problem, in L. Cesari (ed.), Contributions to the Theory of Nonlinear oscillations, vol. V., Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.
118. LaSalle J. P. and Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press Inc., N. Y., 1961 (имеется русский перевод. Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., изд-во «Мир», 1964).
119. Lee E. B. A Sufficient Condition in the Theory of Optimal Control, «SIAM Jour. on Control», Series A, vol. I, no. 3, pp. 241—245, 1963.
120. Lefferts E. J. A Guide of the Application of the Liapunov Direct Method to Flight Control Systems, NASA-CR-209, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D. C., April 1965.
121. Lefschetz S. Some Mathematical Considerations on Nonlinear Automatic Controls, in Contributions to Differential Equations, vol. I, pp. 1—28, Interscience Publishers, N. Y., 1963.
122. Lefschetz S. Stability of Nonlinear Control Systems, Academic Press, Inc., New York, 1965 (имеется русский перевод. Лефшец С. Устойчивость нелинейных систем автоматического управления, М., изд-во «Мир», 1967).
123. Leitmann G. An Introduction to Optimal Control, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966 (имеется русский перевод. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления, М., изд-во «Наука», 1968).

124. L e i t m a n n G. (ed.). Optimization Methods with Applications to Aerospace Systems, Academic Press Inc., N. Y. 1962 (имеется русский перевод. Под ред. Лейтмана Дж. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. М., изд-во «Наука», 1965).
125. Л е т о в А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., Гостехиздат, 1955 (имеется более позднее издание: Л е т о в А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, М., Физматгиз, 1962).
126. L i m Y. S. and K a z d a L. F. A Study of Second Order Nonlinear Systems, «J. of Math. Analysis and Applications», vol. 8, no. 3, pp. 423—444, June 1964.
127. L o z i e r J. C. Carrier-Controlled Relay Servos, «Electrical Engineering», vol. 69, pp. 1052—1056, 1950.
128. L o z i e r J. C. A Steady State Approach to the Theory of Saturable Servo Systems, «IRE Trans. on Automatic Control», vol. PGAC-1, pp. 19—39, May 1956.
129. Л у р ь е А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М.—Л., Гостехиздат, 1959.
130. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
131. M a g n u s K. Uber den Zusammenhang verschiedener Näherungsverfahren zur Berechnung nichtlinearer Schwingungen, «Z. Angew. Math. Mech.», vol. 37, nos. 11/12, pp. 471—485, November—December 1957.
132. M a g n u s W., O b e r h e t t i n g e r F. Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics, Chelsea Publishing Company, N. Y., 1954.
133. М а л к и н И. Г. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях, «Прикладная математика и механика», т. 8, вып. 3, 1944, стр. 241—245.
134. M a s s e r a J. L. Contributions to Stability Theory, «Ann. of Math.», (2) vol. 64, no. 1, pp. 182—206, July 1956.
135. M c C o l l L. A. Fundamental Theory of Servomechanisms, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1945 (имеется русский перевод М а к - К о л л Л. А. Основы теории сервомеханизмов, М., изд-во иностр. лит., 1947).
136. M c G i l l R., K e n n e t h P. A Convergence Theorem on the Iterative Solution of Non-Linear Two-Point Boundary—Value Systems, Proc., XIVth International Astronautical Congress 1963, vol. 4, Gauthier-Villars, Paris, France, pp. 173—188, 1965.
137. M c L a c h l a n N. W. Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publications, Inc., N. Y., 1964.
138. M c S h a n e E. J. On Multipliers for Lagrange Problems, «American Jour. of Mathematics», vol. 61, pp. 809—819 (1939).
139. M e r r i a m C. W. Optimization Theory and the Design of Feedback Control Systems, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1964 (имеется русский перевод. М е р р и э м Ч. В. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью, М., изд-во «Мир», 1967).
140. M e r r i a m C. W. A Computational Method for Feedback Control Optimization, «Information and Control», vol. 2, pp. 215—232.
141. M e y e r A. U. Pulse Frequency Modulation and Its Effect in Feedback Systems, Doctoral Thesis, Northwestern University, Evanston, Ill., 1961 (available through University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan).
142. M e y e r A. U., H s u J. C. The Evaluation of Frequency Response Stability Criterion for Nonlinear Systems via Logarithmic Gain-Phase Plots, Joint Automatic Control Conference, June 1968.
143. M i n o r s k y N. Nonlinear Oscillations D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1962.
144. M u r p h y G. J. A Frequency Domain Stability Chart for Nonlinear Feedback Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control» vol. AC-12, no. 6, December 1967.
145. Н а у м о в Б. Н. Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик, «Автоматика и телемеханика», т. XXVI, № 4, 1965, стр. 591—600.
146. Н а у м о в Б. Н., Ц ы п к и н Я. З. Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления, «Автоматика и телемеханика», т. XXV, № 6, 1964, стр. 852—867.
147. N e l s o n W. L. On the Use of Optimization Theory for Practical Control System Design, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-9, no. 4, pp. 469—477, October 1964.
148. N e u m a n C. P. Frequency Domain Stability Criteria in Nonlinear Automatic Control, Ph. D. Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., March 1967.
149. N e u s t a d t L. W. The Existence of Optimal Controls in the Absence of Convexity Conditions, «J. of Math. Analysis and Applications», vol. 7, no. 1, pp. 110—117, August 1963.
150. N e w t o n G. C., G o u l d L. A., K a i s e r J. F. Analytical Design of Linear Feedback Controls, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1957 (имеется русский перевод. Н ь ю -

тон Дж. К., Гулд Л. А., Кайзер Дж. Ф. Теория линейных следящих систем. Аналитические методы расчета, М., Физматгиз, 1961).

151. Ogata K. State Space Analysis of Control Systems, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N. J., 1967.

152. Okamura K. Some Mathematical Theory of the Penalty Method for Solving Optimum Control Problems, «SIAM Jour. on Control», Series A, vol. 2, no. 3, pp. 317—331, 1964.

153. Oppelt W. Uber Ortskurvenverfahren bei Regelvorgangen mit Reibung, «VDI Zeit.», vol. 90, no. 6, pp. 179—183, June 1948; English translation, Locus Curve Method for Regulators with Friction, Rep. Nat. Bur. Stand., no. 1691.

154. Ostrowski A. M. Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, Inc., N. Y., 1960 (имеется русский перевод. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений, М., изд-во иностр. лит., 1963).

155. Parks P. C. A New Proof of the Routh-Hurwitz Stability Criterion Using the Second Method of Liapunov, «Proc. Cambridge Phil. Soc.», vol. 58, pt. 4, pp. 694—702, October 1962.

156. Pars L. A. Introduction to the Calculus of Variations, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1962.

157. Pell W. H. Graphical Solution of Single-Degree-of-Freedom Vibration Problem with Arbitrary Damping and Restoring Forces, «J. Appl. Mech.», vol. 24, no. 2, pp. 311—312, June 1957.

158. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, «Mathematische Zeitschrift», vol. 32, no. 5, pp. 703—728, December 1930.

159. Pipes L. A. Matrix Methods for Engineering, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

160. Плисс В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Л., изд-во ЛГУ, 1958.

161. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, М., 1961. Имеется более позднее издание: Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., изд-во «Наука», 1965.

162. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961. Имеется более позднее издание книги тех же авторов «Математическая теория оптимальных процессов», М., изд-во «Наука», 1969.

163. Porcu V. M. Stability Criteria for Nonlinear Systems of Automatic Control Based on the Use of Laplace Transform (in Rumanian), Studii si Cercetari de Energetica, vol. 9, no. 4, pp. 119—135, 1959.

164. Porter W. A. Modern Foundations of Systems Engineering, The Macmillan Company, N. Y., 1966.

165. Puri S. A Study of Absolute Stability in Nonlinear Control Systems, Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1965.

166. Reis G. C. An Extension of Pell's Method of Phase-Trajectory Construction, «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-9, no. 3, p. 315, July 1964.

167. Rose N. J. Theoretical Aspects of Limit Control, Report No. 459, Experimental Towing Tank, Stevens Institute of Technology, Hoboken N. J., November 1953.

168. Rosenbrock H. H. The Stability of Time-Dependent Control Systems, «J. of Electronics and Control», vol. 15, no. 1, pp. 73—80, July 1963.

169. Routh E. J. Dynamics of Rigid Bodies (Advanced Part), Dover Publications, Inc., N. Y., 1955.

170. Roxin E. The Existence of Optimal Controls, «Michigan Math. J.», vol. 9, pp. 109—119, 1962.

171. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем «Автоматика и телемеханика», т. XX, 1959, ч. I, № 10, стр. 1320—1334; ч. II, № 11, стр. 1441—1458; ч. III, № 12, стр. 1561—1578.

172. Russell D. L. Penalty Functions and Bounded Phase Coordinate Control, «SIAM Jour. on Control», Series A, vol. 2, no. 3, pp. 409—422, 1964.

173. Sakawa Y. Subharmonic Oscillations in Relay-Control Systems, «Automatic and Remote Control», Butterworths, London, vol. I, pp. 404—409, 1961.

174. Sandberg I. W. A Frequency-Domain Condition for the Stability of Feedback Systems Containing a Single Time-Varying Nonlinear Element, «Bell System Tech. J.», vol. 43, no. 4, pt. 2, pp. 1601—1608, July 1964.

175. Sandberg I. W. On the Boundedness of Solutions of Nonlinear Integral Equations, «Bell System Tech. J.», vol. 44, no. 3, pp. 439—453, March 1965.

176. Sandberg I. W. On the Response of Nonlinear Control Systems to Periodic Input Signals, «Bell System Tech. J.», vol. 43, no. 43, pp. 911—926, May 1964.



177. Sandberg I. W. Some Results in the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations, «Bell System Tech. J.», vol. 44, no. 5, pp. 871—898, May—June 1965.
178. Sandberg I. W. Some Stability Results Related to Those of V. M. Popov, «Bell System Tech. J.», vol. 44, no. 9, pp. 2133—2148, November 1965.
179. Sansone G., Conti R. Non-linear Differential Equations, 1956 (in Italian); English translation with additions, The Macmillan Company, N. Y., 1964.
180. Schuck O. H. Adaptive Flight Control, «Automatic and Remote Control», Butterworths, London, vol. 2, pp. 645—652, 1961.
181. Schultz D. G. The Generation of Liapunov Functions, in C. T. Leondes (ed.), Advances in Control Systems, vol. II, pp. 1—64, Academic Press, Inc., N. Y., 1965.
182. Schwartz R. J., Friedland B. Linear Systems, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1965.
183. Stiles J. A. Time Optimal Control of a Two Variable System, Ph. D. Thesis, Trinity College, Cambridge University, 1964.
184. Struble R. A. Nonlinear Differential Equations, McGraw Book Company, N. Y., 1962.
185. Хань Кин-Чин, Сун Цзянь. Анализ и синтез оптимальных по воздействию систем управления, Труды II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению. Оптимальные системы. Статистические методы, изд-во «Наука». М., 1965, стр. 185—195.
186. Tait K. S. Singular Problems in Optimal Control, Doctoral Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., 1965.
187. Tchamran A. On Bellman's Functional Equation and a Class of Time—Optimal Control Systems, «J. of the Franklin Inst.», vol. 280, no. 6, pp. 493—505, December 1965.
188. Timothy L. K., Vona B. E. An Introduction to State Space Analysis of Systems, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1967.
189. Tsien H. S. Engineering Cybernetics, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1954 (имеется русский перевод Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М., изд-во иностр. лит., 1956).
190. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем, Физматгиз, М., 1958 (имеется более позднее издание. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963).
191. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1955.
192. Tustin A. A Method of Analyzing the Effects of Certain Kinds of Nonlinearity in Closed-Cycle Control Systems, «Jour. IEE», vol. 94, pt. IIA, no. 1, pp. 152—160, 1947.
193. Valentine F. A. The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as Added Side Conditions, in Contribution to the Calculus of Variations, 1933—1937, University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1937.
194. Varaiya P. P., Liu R. Bounded-Input Bounded—Output Stability of Non-linear Time-Varying Differential Systems, «SIAM Jour. on Control», vol. 4, no. 4, pp. 698—704, 1966.
195. Wang P. P. Comment on «An Extension of Pell's Method of Phase-Trajectory Construction», «IEEE Trans. on Automatic Control», vol. AC-12, no. 3, p. 328. June 1967.
196. West J. C. Analytical Techniques for Non-linear Control Systems, D. Van Nostrand and Company, Inc., Princeton, N. J., 1960.
197. Whittaker E. T., Watson G. N. A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, England, 4th ed., 1927 (имеется русский перевод. Уитткер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, изд. 1-е, Л.—М., Гостехиздат, ч. I, 1933; ч. II, 1934, изд. 2-е, М., Физматгиз; ч. I, 1962, ч. II, 1963).
198. Wiener N. The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of a Stationary Time Series; with Engineering Applications, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1949.
199. Wiener N. The Fourier Integral and Certain of Its Applications, Cambridge University Press, England, 1933 (reprinted by Dover Publications, Inc., N. Y.) (имеется русский перевод. Винер Норберт, Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963).
200. Williams J. C. Perturbation Theory for the Analysis of Instability in Nonlinear Feedback Systems, Paper presented at the 1966 Allerton Conference on Circuit and System Theory.
201. Wonham W. M., Johnson C. D. Optimal Bang-Bang Control with Quadratic Performance Index, «J. of Basic Engineering», vol. 86, no. 1, pp. 107—115, March 1964 (имеется русский перевод. Уонхэм, Джонсон. Оптимальное релейное управление при квадратичном показателе качества. «Теоретические основы инженерных расчетов», т. 86, серия Д, № 1, 1964, стр. 145—155).

202. Я к у б о в и ч В. А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями, «ДАН СССР», т. 149, № 2, 1963, стр. 288—291.
203. Я к у б о в и ч В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Ч. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний. «Автоматика и телемеханика», т. XXV, № 7, 1964, стр. 1017—1029.
204. Я к у б о в и ч В. А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. Ч. II. Абсолютная устойчивость в классе нелинейностей с условием на производную, «Автоматика и телемеханика», т. XXVI, № 4, 1965, стр. 577—590.
205. Я к у б о в и ч В. А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. АН СССР, т. 143, № 6, 1962, стр. 1304—1307.
206. Z a d e h L. A., D e s o e r C. A. Linear System Theory; The State-Space Approach, McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1963.
207. Z a m e s G. On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems, «IEEE Trans. on Automatic Control». Pt. I: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity and Positivity, vol. AC-11, no. 2, pp. 228—239, April 1966; pt. II: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities, vol. AC-11, no. 3, pp. 465—476, July 1966.
208. Z a m e s G. On the Input-Output Stability of Nonlinear, Time-Varying Feedback Systems, National Electronics Conference Proc., vol. 20, pp. 725—730, October 1964.
209. З у б о в В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение, Л., изд-во ЛГУ, 1957.

### ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ КНИГИ

210. А н д р о н о в А. А. Собрание трудов. М., изд-во АН СССР, 1956.
211. Б а р б а ш и н Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., изд-во «Наука», 1967.
212. Б а р б а ш и н Е. А., А л и м о в Ю. И. К теории релейных дифференциальных уравнений. «Изв. вузов, матем.», 1962, № 1 (26).
213. Б а р б а ш и н Е. А., Г е р а щ е н к о Е. И. О форсировании скользящих режимов «Дифференциальные уравнения», т. 1, 1965, № 1.
214. Б о г о л ю б о в Н. Н., М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1965.
215. Б о л т я н с к и й В. Г. Математические методы оптимального управления. М., изд-во «Наука», 1969.
216. Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., П о н т р я г и н Л. С. К теории оптимальных процессов. «Докл. АН СССР», т. 110, 1956, № 1.
217. Б р о м б е р г П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., изд-во «Наука», 1967.
218. Б у л г а к о в Б. В. Автоколебания регулируемых систем. «Докл. АН СССР», т. 37, 1942, № 9.
219. Б у л г а к о в Б. В. Колебания. М., Гостехиздат, 1954.
220. Г а м к р е л и д з е Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. Изв. АН СССР. Серия матем., т. 24, 1960, № 3.
221. Г а р б е р Е. Д. Оценка погрешности метода гармонического баланса. «Автоматика и телемеханика», 1963, № 4.
222. Г а р б е р Е. Д., Ш и ф р и н М. Ш. Нелинейные задачи автоматического регулирования судовых энергетических установок. Л., Судпромгиз, 1967.
223. Г е р а щ е н к о Е. И. Синтез и анализ нелинейных автоматических систем методом разделения движений. «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1967, № 5.
224. Г е р а щ е н к о Е. И. О синтезе релейных систем. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 10.
225. Г н о е н с к и й Л. С., К а м е н с к и й Г. А., Э л ь с г о л ь ц Л. Э. Математические основы теории управляемых систем. М., изд-во «Наука», 1969.
226. Д у б о в и ц к и й А. Я., М и л ю т и н А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Докл. АН СССР», т. 149, 1963, № 4.
227. Е м е л ь я н о в С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М., изд-во «Наука», 1967.
228. Е р у г и н Н. П. Линейные системы дифференциальных уравнений. АН БССР, Минск, 1963.
229. Е р у г и н Н. П. Приводимые системы, «Наука и техника», Минск, 1966.
230. З у б о в В. И. Теория оптимального управления. Л., изд-во «Судостроение»; 1966.
231. К а л и н и н В. Н. Обобщенные критерии оптимальности в задачах оптимального управления. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 2.
232. К о н о н е н к о В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М., изд-во «Наука», 1964.

233. Красовский А. А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М., изд-во «Наука», 1968.
234. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. М., изд-во «Машиностроение», 1969.
235. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.
236. Красовский Н. Н. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения. Тр. Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, АН СССР, 1962.
237. Красовский Н. Н. Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем. «Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике», вып. I. М., изд-во «Наука», 1965.
238. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. «Тр. II Международного конгресса Международной федерации по автоматическому управлению», т. II. М., изд-во «Наука», 1965.
239. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., изд-во «Наука», 1968.
240. Крейн М. Г. Лекции по теории устойчивости решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. АН УССР, Институт математики, Киев, 1964.
241. Кринецкий И. И. Расчет нелинейных автоматических систем. Киев, изд-во «Техника», 1968.
242. Кротов В. Ф. Приближенный синтез оптимального управления, «Автоматика и телемеханика», 1964, № 11.
243. Крылов Н. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления. «Журнал вычислительной математики и математической физики», т. 2, 1962, № 6.
244. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику, АН УССР, 1937.
245. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М., Машгиз, 1962.
246. Кузовков Н. Т. Теория автоматического регулирования, основанная на частотных методах. М., Оборонгиз, 1960.
247. Лебедев А. А., Соколов В. Б. Встреча на орбите. Динамика полета и управление космическим аппаратом. М., изд-во «Машиностроение», 1969.
248. Летов А. М. Оптимальное управление и устойчивость. Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М., изд-во «Наука», 1965.
249. Летов А. М. Динамика полета и управления. М., изд-во «Наука», 1968.
250. Лурье А. И. Минимальный квадратический критерий качества регулируемой системы. «Техническая кибернетика», 1963, № 4.
251. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. «Прикл. матем. и мех.», т. 8, 1944, № 3.
252. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1952.
253. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
254. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления. Под ред. Е. П. Попова. М., изд-во «Машиностроение», 1970.
255. Метод Гольдфарба в теории регулирования. М., Госэнергоиздат, 1962.
256. Методы синтеза нелинейных систем автоматического управления. Под ред. Е. П. Попова. М., изд-во «Машиностроение», 1970.
257. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М., изд-во «Наука», 1964.
258. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., изд-во «Наука», 1966.
259. Моросанов И. С. Релейные экстремальные системы. Приближенные методы исследования. М., изд-во «Наука», 1964.
260. Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. Под ред. Е. П. Попова. М., изд-во «Машиностроение», 1970.
261. Нелинейные корректирующие устройства в системах автоматического управления. Под ред. Е. П. Попова. М., изд-во «Машиностроение», 1970.
262. Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. Метод фазового пространства. М., изд-во «Наука», 1966.
263. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М., изд-во «Наука», 1964.
264. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. «Успехи математических наук», т. 14, 1959, вып. 1.
265. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1954.

266. Попов Е. П. О малом параметре и методе гармонической линеаризации. «Изв. АН СССР. ОТИ, 1955, № 2.
267. Попов Е. П. О выборе параметров автоколебаний систем регулирования. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника». Вып. 1, М., Машгиз, 1958.
268. Попов Е. П. К теории вибрационного сглаживания нелинейных характеристик. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 2. М., Машгиз, 1959.
269. Попов Е. П. Расчет линейных автоматических систем на основе гармонической линеаризации. Л., Судпромгиз, 1959.
270. Попов Е. П. Об определении высших гармоник несимметричных автоколебаний. «Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 6.
271. Попов Е. П. Об особенности введения малого параметра при исследовании нелинейных колебаний в автоматических системах. «Прикл. матем. и мех.», 1962, № 1.
272. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
273. Поспелов Г. С. Импульсные системы автоматического регулирования. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 3. М., Машгиз, 1960.
274. Поспелов Г. С. Динамические характеристики релейных следящих систем. «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1965.
275. Пшеничный Б. Н. Численный метод решения некоторых задач оптимального управления. Журнал «Вычислительная математика и математическая физика», т. 4, 1964, № 2.
276. Разумихин Б. С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием. «Автоматика и телемеханика», т. 21, 1960, № 6.
277. Розенвассер Е. Н. Вариационный подход к оценкам метода гармонического баланса. Изв. АН СССР ОТН. Техническая кибернетика, 1964, № 1.
278. Розенвассер Е. Н. Колебания нелинейных систем. Метод интегральных уравнений. М., изд-во «Наука», 1969.
279. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием. «Автоматика и телемеханика», 1964, № 5.
280. Серебренников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. М., изд-во «Наука», 1965.
281. Современные методы проектирования систем автоматического управления. Под ред. Б. Н. Петрова, В. В. Солодовникова, Ю. И. Топчеева. М., изд-во «Машиностроение», 1967.
282. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
283. Солодовников В. В., Усков А. С. Статистический анализ объектов регулирования. М., Машгиз, 1960.
284. Старикова М. В. Автоколебания и скользящий режим в системах автоматического регулирования и управления. М., Машгиз, 1962.
285. Тафт В. А. Основы спектральной теории и расчет цепей с переменными параметрами. М., изд-во «Наука», 1964.
286. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова. М., изд-во «Машиностроение», 1967—1969.
287. Точные методы исследования нелинейных систем автоматического управления. Под ред. Е. П. Попова. М., изд-во «Машиностроение», 1970.
288. Троицкий В. А. Задачи Майера—Больца вариационного исчисления и теории оптимальных систем. «Прикл. матем. и мех.» т. 25, 1961, вып. 4.
289. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления, «Прикл. матем. и мех.» т. 26, 1962, вып. 1.
290. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами. «Прикл. матем. и мех.», т. 26, 1964, № 3.
291. Троицкий В. А. Вариационные задачи процессов управления с функционалами, зависящими от промежуточных значений координат. ДАН СССР, т. 149, 1963, № 2.
292. Топчев Ю. И. О надежности нелинейных систем автоматического управления, склонных к автоколебаниям. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника». Вып. 7, М., изд-во «Машиностроение», 1967.
293. Федоров С. М. Применение показателя колебательности к расчету нелинейных следящих систем. Изв. АН СССР. ОТН. «Энергетика и автоматика», 1959, № 2.
294. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. изд. 2-е, М., изд-во «Наука», 1966.
295. Хлыпало Е. И. Нелинейные системы автоматического регулирования. М., изд-во «Энергия», 1967.
296. Цыпкин Я. З. Об устойчивости релейных автоматических систем в «большом». Изд. АН СССР. ОТН. «Техническая кибернетика», 1963, № 3.
297. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., изд-во «Наука», 1965.
298. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., изд-во «Наука», 1965.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Айзерман М. А. 130—133, 174, 178, 234, 246—248, 265, 274, 275, 280, 300  
 Акимов Г. П. 483, 484  
 Андронов А. А. 16, 77, 352  
 Аоки М. (Aoki M.) 327  
 Атанс М. (Athans M.) 415  
 Барбашин Е. А. 243  
 Бейкер Р. А. (Baker R. A.) 136, 337  
 Беллман Р. (Bellman R.) 16, 23, 24, 304, 305, 312, 335—337, 339, 358, 392, 400, 409, 426, 432, 433, 435—439, 444, 447, 448, 451—454  
 Бендиксон И. (Bendixon I.) 126, 127, 129  
 Беннет У. Р. (Bennett W. R.) 191  
 Берген А. Р. (Bergen A. R.) 136, 316, 337  
 Березин И. С. 16  
 Бесекерский В. А. 11  
 Бессель (Bessel) 100, 194  
 Блисс Г. А. (Bliss G. A.) 23  
 Боголюбов Н. Н. 22, 23, 139  
 Боде Г. (Bode H. W.) 22, 344  
 Болтянский В. Г. 16, 23, 349, 400  
 Больца (Bolza) 383, 388, 391, 438, 470  
 Боненн З. (Bonenn Z.) 204  
 Бонжорно Д. Д. (Bonjorno J. J.) 292, 300  
 Брайсон А. (Bryson A. E.) 477  
 Бушай Д. (Bushaw D.) 354, 357  
 Валентайн Ф. А. (Valentine F. A.) 358, 380, 385—387, 389, 390, 406  
 Вандермонд (Vandermonde) 57, 59, 84, 503  
 Ван-дер-Поль Б. (Van der Pol) 95, 103, 105, 106, 139, 140, 142, 159, 203  
 Вейерштрасс К. (Weierstrass K.) 365, 368, 369, 371, 377, 379, 382, 384, 387—390, 406  
 Вест Дж. (West J. C.) 179, 186, 204  
 Вильямс Дж. (Willems J. C.) 132  
 Винер Н. (Wiener N) 344  
 Витт А. А. 16, 77, 325  
 Вольтерра 136, 178  
 Вышнеградский И. А. 22  
 Галеркин 16, 143  
 Галкин Х. (Halkin H.) 392, 398, 400, 407  
 Гамильтон 26, 392, 402, 403, 423, 426, 443, 444, 456, 504  
 Гамкrellидзе Р. В. 23, 349, 400, 421  
 Гато (Gateux) 484  
 Гаусс (Gauss) 127  
 Гелб А. (Gelb A.) 204  
 Гельфанд И. И. 16  
 Гликсберг И. (Glücksberg I.) 392  
 Гольдфарб Л. С. 23, 144  
 Грейсон Л. П. (Grayson L. P.) 258  
 Гренвилл (Gronwill) 304, 305, 312, 335—337  
 Гросс Д. (Gross D.) 392  
 Гурвиц (Hurwitz) 19, 103, 246, 273, 275, 280, 287, 301  
 Дезоер Ч. (Desoer C. A.) 38  
 Декольн П. (Decaulne) 216  
 Джонсон Ч. Д. (Johnson C. D.) 451, 463, 466, 472  
 Джури Э. (Jury E. I.) 210  
 Дуффинг (Duffing) 184—186, 203  
 Евграфов М. А. 11  
 Еругин Н. П. 23  
 Железцов Н. А. 77  
 Жидков Н. П. 16  
 Жилль Ж. К. (Gille J. C.) 216  
 Жордан (Jordan) 64  
 Жуковский Н. Е. 125  
 Заде Л. А. (Zadeh L. A.) 38  
 Зеймс (Zames G.) 23  
 Зубов В. И. 23, 125  
 Ивенс Р. П. (Iwens R. P.) 316  
 Калман Р. (Kalman R. E.) 99, 130—133, 203, 234, 300, 302, 438, 446, 454  
 Канторович Л. В. 483, 484  
 Каратеодори К. (Caratheodory C.) 426  
 Келли Г. Дж. (Kelly H. J.) 468, 477, 504  
 Клебш (Clebsch) 367, 371, 384, 467, 468  
 Коддингтон Е. А. (Coddington E. A.) 126  
 Колмогоров А. Н. 16  
 Кохенбургер Р. (Kochenburger R. J.) 23  
 Коши (Cauchy) 328, 336, 505  
 Красовский А. А. 11, 343  
 Красовский Н. Н. 243, 343  
 Крылов Н. М. 22, 23, 139  
 Кузовков Н. Т. 11  
 Куликовский Р. (Kulikowski R.) 23

- Лагранж Ж. Л. (Lagrange G. L.) 26, 94, 358, 361—379, 381—384, 386—391, 401, 404, 406, 409, 419, 432, 455, 462, 471, 480
- Ланкастер (Lancaster) 101, 136
- Лаллас (Laplace) 32, 58, 59, 61, 210, 211, 279, 349, 498, 504, 511, 512, 529
- Ла-Салль Ж. (Lasalle J. P.) 247, 249, 392, 397—401, 404
- Ласдон Л. (Lasdon L. S.) 479
- Левинсон Н. (Levinson N.) 126
- Лежандр (Legendre) 366—368, 371, 377, 378, 384, 388, 389, 467, 468, 482
- Лефшец С. (Lefschetz) 248, 249
- Летов А. М. 343
- Лим (Lim Y. S.) 255
- Липшиц П. (Lipschitz) 50, 51, 73, 75, 313, 329, 331, 334, 475
- Лиссажу (Lissajous) 226
- Лозьер Дж. С. (Lozier J. C.) 164, 175, 196, 204
- Лопиталь (L'Hospital) 147
- Лоран (Laurent) 509
- Лурье А. И. 23, 246, 247, 260—264, 315
- Льенар 96
- Ляпунов А. М. 20, 22—24, 102, 104—107, 110—113, 115, 119—121, 123, 125, 129, 130, 133, 137, 205, 229, 234—247, 249, 250, 252, 255, 256, 259—263, 268, 302, 304, 313, 314, 336, 453, 528
- Магнус К. (Magnus K.) 23, 143, 149, 153
- Майер (Mayer) 378, 381, 383, 388, 390, 391, 401, 419, 420, 436, 453, 468, 480
- Мак-Шейн (Mc Shane E. J.) 391
- Малкин И. Г. 23, 134, 304, 313
- Марфи (Murphy G. J.) 295
- Массера (Massera J. L.) 121, 252, 313
- Матье (Mathieu) 261, 292, 300, 307
- Мацубара М. (Matsubara M.) 166
- Мерриэм И. В. (Merriam C. W.) 438, 454
- Минковский 264, 270, 283, 518, 524, 527, 528, 530
- Миттер С. К. (Mitter S. K.) 479
- Михайлов А. В. 327
- Мищенко Е. Ф. 23
- Найквист (Nyquist) 22, 327
- Наумов Б. Н. 295
- Нейман (Neuman C. P.) 68, 74
- Нелелин Р. А. 77
- Нортон Дж. (Norton J. A.) 407
- Ньютон Дж. К. (Newton C. C.) 344
- Ньютон И. (Newton I.) 16, 483—485, 495
- Пальтов И. П. 23
- Парсеваль (Parseval) 264, 332, 345, 519, 523, 528
- Пелегрин М. (Pelegrin M. J.) 216
- Пелл (Pell) 96, 97
- Перрон О. (Perron O.) 99
- Планшерель (Planserel) 518, 519, 522, 526
- Понтрягин Л. С. 11, 23, 338—340, 349, 358, 387, 391, 392, 423, 425
- Попов В. М. 11, 18, 20, 23—25, 102, 130, 205, 247, 262—264, 271—278, 280, 282—287, 289—304, 307, 315, 319, 321, 335, 522, 523, 526, 527, 529
- Полов Е. П. 11, 23, 77, 187
- Портер (Porter W. A.) 327
- Поспелов Г. С. 11
- Постников В. Н. 23
- Пуанкаре А. (Poincare H.) 77, 101, 126, 129, 130, 135
- Пуансо (Poincot) 119
- Райс С. (Rice C.) 191
- Раус Э. (Routh E. J.) 19, 103, 246
- Рафсон (Raphson) 16, 483—485, 495
- Риккати (Riccati) 437, 440, 441, 446, 453, 474, 482
- Ритц 16, 143
- Рольт А. Д. (Rauet A. J.) 316
- Сандберг (Sandberg I. W.) 23, 316, 323, 331—333, 336
- Солодовников В. В. 11, 22, 144, 342
- Стокс 127
- Тейлор (Taylor) 109, 366
- Тейт К. С. (Tait K. S.) 468
- Топчеев Ю. И. 187
- Уонхэм У. М. (Wonham W. M.) 451, 463, 466
- Уорен А. Д. (Waren A. D.) 479
- Фалб П. Л. (Falb P. L.) 415
- Фиттс Р. Е. (Fitts R. E.) 132, 203, 300
- Фомин С. В. 16
- Фреше (Frechet) 484
- Фукс Б. А. 11
- Фукума А. (Fukuma A.) 166
- Фурье (Fourier) 155—157, 218, 231, 278, 519, 522, 526
- Хайкин С. Э. 16, 77
- Хамел Б. (Hamel B.) 23, 216, 233
- Хатанака Х. (Hatanaka H.) 166
- Хестинс М. Р. (Hestenes M. R.) 381, 392
- Хеффес Х. (Heffec H.) 439
- Хольцман Дж. (Holtzman J. M.) 334, 439
- Хопф (Hopf) 344
- Хоринг С. (Horing S.) 439
- Цермело (Zermelo) 390, 425
- Цыпкин Я. З. 16, 23, 215—220, 222—225, 227, 229—233
- Чамран А. (Tchamran A.) 432
- Чанг Ш. С. Л. (Chang S. S. L.) 344
- Четаев Н. Г. 23, 239, 240
- Шабат Б. В. 11
- Шварц Р. (Schwartz R. J.) 264, 518, 523, 526
- Шеннон К. (Shannon C. E.) 344
- Эйлер Л. 31, 32, 69, 118, 121, 256, 358, 362—371, 373, 374, 376, 377, 379, 382—384, 386—390, 404, 406, 480
- Эльсгольц Л. Э. 11
- Эрдман (Erdmann) 365, 387, 406
- Якоби 13, 116, 388, 426, 444, 482, 485
- Якубович В. А. 323

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоколебания 138, 142—143, 172  
—, анализ методом гармонического баланса 138, 141  
Автоколебательная проверка 173, 174  
Автономная система 48, 110—111, 234, 248  
— —, устойчивость 111  
— —, — в малом 237—242  
— —, функция Ляпунова 245—246  
Автопилот ракеты 113, 491—495  
Алгебраическое дополнение 498  
Амплитудно-фазовая частотная характеристика 219  
Аналитические функции от матрицы 504—506  
Асимптотическая устойчивость (см. также Устойчивость)  
— —, положения равновесия, определение 105  
— — —, условия 237—238  
— — —, в большом, определение 130  
— — —, в большом, условия 242  
— — —, в целом, определение 130  
— — —, в целом, условия 243, 276—277, 528  
— — траекторий системы, определение 120  
— — —, орбитальная, определение 125  
— — —, —, условия 230, 325, 326  
— — —, равномерная, определение 122  
— — —, —, условия 123, 312—313
- Вариация  
— вторая 366  
— первая 366  
Вариационное исчисление 345, 358—391  
— —, необходимое условие экстремума 362—364  
— — с ограничениями типа равенств 371—372  
— —, случай неопределенности -или вариации граничных точек 369—370  
Вектор 24, 497  
— внешней нормали 395—396  
— — — к достижимому множеству 414  
— градиента 385  
— ковариантный 402  
—, линейная независимость векторов 500—501  
— сопряженный 401, 404, 443, 444  
— состояния 29  
— -столбец 29, 497  
— -строка 497
- Векторно-матричное представление 29  
Время переходного процесса  
— — —, определение по фазовым траекториям 97—98  
Второй метод Ляпунова 234—262  
— — — для исследования нестационарных систем 250—255  
— — —, оценка качества переходных процессов 255—257  
— — —, синтез адаптивных систем 257—258
- Вход  
— объекта 27  
— системы управления 29  
Вырожденные оптимальные управления 416, 457—470  
— — — в задачах на минимум расхода топлива 460—462  
— — — — оптимального быстродействия 457—460  
— — —, необходимое условие 467—470  
— решения 467, 468  
— —, оптимальность 468—470
- Выход  
— объекта 27  
— регулятора 27  
— системы управления 29  
Вычислительная машина  
— —, как элемент системы управления 22  
— —, применение для моделирования 21  
— —, — — расчетов 22
- Гамильтониан (см. функция Гамильтона)  
Гамма-функция 194—195  
Генератор ламповый, пример 127—130  
Гиперповерхность 385, 433  
— вырожденная 465  
Гипотеза  
— Айзермана 131—132, 174, 179, 234, 246, 248, 265, 274, 275, 280, 300  
— Калмана 131—132, 203, 234, 300  
— оптимальности 428  
— релейного управления 349, 351, 397  
Годограф  
— передаточной функции 145  
— Цыпкина 217, 232, 233  
— —, построение с помощью z-преобразования 223—225
- Движение системы 48  
— — свободное 48

- Двухточечная краевая задача 372, 475  
 — — — для линейных нестационарных систем 347—348, 372  
 — — —, нелинейная 348  
 Динамика ракеты 45, 109—110; 112—113  
 Динамическое программирование 358, 426—454  
 — —, границы применимости 449—451  
 — — для дискретного случая 429  
 — — для непрерывного случая 432—436  
 — — для случая, когда  $\frac{\partial J^*}{\partial x}$  разрывна 447—448  
 — — как достаточное условие оптимальности 448—449  
 — —, метод инвариантного погружения 431, 435  
 — — обратное 431, 452  
 — — прямое 431—432, 452  
 — —, рекуррентные соотношения 429  
 — —, связь с принципом максимума 443—447  
 — —, функциональное уравнение (см. также Уравнение Беллмана) 432  
 Дифференциальные игры 422—423  
 — уравнения в частных производных 72, 426  
 Единичная ступенчатая функция 207  
 Единственность  
 — неподвижной точки сжатого отображения 330  
 — оптимального по быстродействию управления 398  
 — периодического решения 323  
 — решения системы дифференциальных уравнений 49—51  
 Жорданова каноническая форма матрицы 35—36, 503  
 Задача  
 — Больца 383—385  
 — космической навигации 115  
 — Лагранжа 378, 390, 401  
 — Лурье 246—250, 315  
 — Майера 378—383, 390, 401, 468  
 — —, применение принципа максимума 419—421  
 — о движении двухступенчатой ракеты 390  
 — о перехватчике 343  
 — о регулировании температуры нагретого стержня 301  
 — оптимального управления, постановка 341—344  
 — — — в расширенном пространстве переменных 402  
 — — — вырожденная 387, 457—470  
 — — — конечным значением 343, 378—383  
 — — — линейными системами 372—378  
 — — — на минимум интеграла от квадрата ошибки 342  
 — — — — энергии 342  
 — — — особая 455—457  
 — — — по быстродействию 341, 349—354, 380, 392  
 — — — — нестационарными системами 418  
 — — — —, решение и геометрическая интерпретация 393—397  
 — — — по расходу топлива, постановка 342, 354—355  
 — — — по расходу топлива, решение 415—416  
 — — — с закрепленными концами 347—348  
 — — — с комбинированным функционалом 343  
 — — — с конечными состояниями на гладкой поверхности 417  
 — — — со множеством конечных состояний 487  
 — — — с областью цели, отличной от точки 343  
 — — — с ограничениями типа неравенств 385—388, 421—422  
 — — — с подвижными концами 417  
 — синтеза регулятора 438  
 — управления реактивным самолетом, пример 381—383, 385, 387  
 — Цермело 390, 424  
 Запас по амплитуде в нелинейной системе 169—170  
 Зет-преобразование; z-преобразование 207, 324, 507, 508  
 — бесконечной последовательности 508  
 — модифицированное 207, 210, 212  
 — — с опережением, определение 207, 210, 212, 507  
 — — — — для анализа периодического движения в релейной системе 210—216  
 — — — —, обратное 508—509  
 — — — —, свойства 509—511  
 — — — —, связь с преобразованием Лапласа 511—513  
 — — — —, таблица 515—516  
 Зона равновесных состояний 18, 48  
 — — — в автономной системе 82—83  
 Изображающая точка 81  
 Импульсная переходная функция 55, 72  
 Индекс Пуанкаре 126, 137  
 Интеграл от квадрата ошибки 342, 344  
 — — — —, минимизация 344—347  
 Квадратичная форма 236, 245, 436, 503  
 Колебания (см. также Автоколебания) 19, 89  
 — в автономной нелинейной системе 89  
 — в релейной системе 208—210  
 — — — —, вынужденные 225—227  
 — — — —, главные 209  
 — — — —, симметричные 209  
 — — — —, условия существования 209—210  
 — вынужденные 162  
 — гармонические 19, 162  
 — почти периодические 19, 162  
 — субгармонические 19, 162, 323  
 — —, условия существования 183, 230  
 —, устойчивость 227—230, 323—327  
 Колебательные сервомеханизмы 196—202  
 — —, адаптивные свойства 197, 200  
 Консервативная система 92, 240  
 — —, фазовые траектории 92—94



Контур наведения ракеты, пример 439—440, 494  
Коррекция  
— линейная 80  
— нелинейная 170  
Краевая задача  
— — двухточечная 358, 474—475  
— — одноточечная 435, 474, 476  
Критерий  
— качества, квадратичный 342, 436  
— оптимальности (см. Показатель качества)  
— — минимаксный 422  
— устойчивости  
— — круговой, обобщенный (критерий Попова) 280—288  
— — — для систем с входным сигналом 322  
— — —, применение номограмм замыкания 291—293  
— — линейной системы Рауса—Гурвица 246  
— — —, частотный 281, 282  
— — нелинейной системы, частотный 263—303  
Кулоново трение 83, 99

Лемма Беллмана—Гренвилла 305—308, 312, 336

Линеаризация 107—119, 312, 323, 325—326, 477

— гармоническая 138—178  
— —, пределы применимости 174—175  
— и устойчивость в малом 103—124  
— относительно траектории 115—119  
— системы первого порядка, пример 107—108  
— —  $n$ -го порядка 108—109  
—, эквивалентная при двухчастотном входном сигнале 179—195

Линейная независимость векторов 500—501

Линейная система 17  
— — нестационарная 68  
— — —, двухточечная краевая задача 347—348

— —, не представимая в уравнениях через переменные состояния 72—73

— —, операторная форма записи 32—33

— — оптимальная в смысле квадратичного критерия качества 372—378

— —, свойство аддитивности 17

— —, — — по входному сигналу 17

— —, — — по начальным условиям 17

— —, — однородности 17

— — стационарная 17

Линия переключения 81, 349—354

— — для оптимальных по быстродействию систем второго порядка 82

Матрица 29, 497

—, алгебраическое дополнение 498

—, аналитические функции от матрицы 504—506

— блочная 500

— Вандермонда 57

— вырожденная (особая) 498

— диагональная 497

— единичная 30, 497

— идемпотентная 504

— квадратная 497  
— —, обращение 499, 506  
— —, приведение к диагональному виду 502—503  
— —, собственные вектора 501  
— —, — значения 501  
— —, спектр 504  
—, минор элемента 498  
— невырожденная (неособая) 393, 498  
— нулевая 497, 504  
— обратная 499  
— переходная (см. также Переходная матрица) 52—61  
— присоединенная 498  
—, ранг 500  
— симметричная 498  
—, след 501  
— собственных значений 56, 502  
— сопряженная 498  
— транспонированная 375, 497  
—, характеристическое уравнение 501, 506  
— чувствительности системы 117  
—, экспоненциальная функция от матрицы 55  
—, элемент 497  
—, — диагональный 497  
—, — недиагональный 497  
— эрмитова 498, 502  
— Якоби 108, 116, 485

Метод

— аналогового моделирования 37, 39—40, 389, 406

— Валентайна 358, 380, 386—389, 406

— вариации произвольной постоянной 52

— возмущений 107, 320, 321

— второй вариации 480—482

— гармонической линеаризации 138—178

— градиента 476—480

— замороженных коэффициентов 123

— изоклин 95

— Лозьера 164

— Ляпунова 110—115, 234—262

— множителей Лагранжа 361, 371—372, 378

— наискорейшего спуска 476—480

— Ньютона—Рафсона, обобщенный 483—486

— Пелла 96—97

— разделения переменных 437

— разложения на простые дроби 33, 36, 39, 41

— Ритца—Галеркина 143

— сопряженных градиентов 479

— функций штрафа 385—386

— численного интегрирования с прогнозом

и коррекцией 475

— эквивалентной линеаризации 146

— эквивалентных частотных характеристик

18

Минимизация интеграла от квадрата ошибки 344—347

Минимум

— функций 360—362

— — абсолютный 360

— — —, достаточные условия 360

— — —, необходимые условия 360

— — при наличии ограничений 361, 371

— функционала

— — локальный 359

- — —, необходимые условия 358—372
- — — сильный 359, 367
- — — слабый 359, 363
- Минор элемента матрицы 493
- Многообразие поведения 18—19
- — нелинейных автономных систем 89—92
- Множество
  - выпуклое 392, 394, 398
  - достижимое 394, 461
  - — выпуклое 394, 409
  - инвариантное 125
- Множители Лагранжа 361, 455—457, 471
- — в вариационном исчислении 371—372, 386, 404
- — для отыскания минимума функции 361—362
- Моделирование
  - системы 21, 72
  - уравнений состояния 37, 39—40
- Модель
  - военных действий, Ланкастера 101
  - системы, математическая 49, 205
- Наблюдаемость 66
- полная 67
- Неединственность
  - вектора состояния 31
  - решения оптимальных задач 343
  - — задачи оптимального быстрогодействия 457—460
- Нелинейная система 17—19
- —, аномальное поведение 18—19, 163, 172
- Нелинейный элемент (Нелинейность)
  - — безынерционный 154, 320, 332, 527
  - — двузначный 154—157
  - — — активный 156
  - — — пассивный 156
  - —, изучаемый в задаче Попова 265—266
  - — инерционный 154, 195
  - — однозначный 154, 323, 332
  - — — несимметричный 180
  - — —, представление в интегральной форме 191—195
  - — — с ограничением 32, 146, 193
  - — —, эквивалентная передаточная функция 156
  - —, однополупериодный выпрямитель 192
  - —, реле 192
  - —, — без зоны нечувствительности 208—214, 217, 223
  - —, — с гистерезисом 154—155, 220
  - —, — с зоной нечувствительности 192, 209, 227
  - — с гистерезисом
    - — — активным 266, 271, 524
    - — — пассивным 266, 274, 525
- Неограниченность реакции на конечном интервале времени 18
- Неподвижная точка преобразования, определение 329
- — —, теорема о неподвижной точке сжатого отображения 329—331
- Неравенство
  - Беллмана—Гренвилла (см. также Лемма Беллмана—Гренвилла) 304
- Минковского 270, 283, 518, 530
- Шварца 271, 316, 518, 523
- Неустойчивость
  - положения равновесия 105, 106
  - траектории 120
- Номограмма замыкания 293
- — в применении к критерию Попова 291—298
- Норма
  - вектора, евклидова 48, 308
  - матрицы 135
  - — переходной 308
  - оператора линейного 329
  - функции векторной 328, 331
  - — скалярной 328
- Нули функции 33
- Область Попова 292
- Обращение матрицы 499
- Объект системы управления 26
- — —, искусственный спутник Земли 78, 118—119
- — —, радиолокатор 27
- — —, ракета 27, 28, 45, 390, 452
- — —, электродвигатель с генератором 91
- Ограничения типа неравенств
  - — — на переменные состояния 421—422
  - — — на управление 380, 385—388
- Ограниченность решений 308—310, 519
- Окружность критическая 281
- Оператор
  - дифференцирования 32
  - Лапласа 58
  - линейный 329
  - — ограниченный 329, 484
  - сжатия 329, 332, 334
- Операторное звено 33
- Опорная плоскость 395, 396, 398
- Определитель
  - Вандермонда 503
  - матрицы 498, 504
- Оптимальное управление (см. также Управление оптимальное) 339—341
- — вырожденное 416, 457—470
- — и вариационное исчисление 358—391
- —, необходимые условия 358
- — с обратной связью 389
- —, структура 389, 486—489
- —, численные методы 474—486
- Оптимальность и качество 339—357
- Оптимизация линейной стационарной системы в частотной области 344—347
- Орбитальная устойчивость 90, 121, 125—126
- — асимптотическая 90, 125, 230
- Основная система 264, 268, 282
- Особая точка (см. Положение равновесия. Состояние равновесия)
- Осциллятор гармонический 48
- Отыскание экстремума функции 360—362
- — —, особый случай 455
- Оценка качества переходного процесса 255—257
- Первый метод Ляпунова 110—115, 164, 241
- — —, доказательство 241
- — —, формулировка 111

- Передаточная функция 61  
 Переменные состояния 26, 29  
 — — канонические 33, 36, 44, 57, 84, 351, 393  
 — — нормальные 37, 38, 40, 41, 44, 57, 84, 88  
 — — сопряженные 44, 404, 481  
 — — — вспомогательные 482  
 Переходная матрица 52, 53, 71, 117, 308, 477, 478  
 — — как матрица чувствительности 117  
 — — линейной стационарной системы 55—61  
 — —, нахождение с помощью преобразования Лапласа 58—61  
 — — неособая 54  
 — — сопряженной системы 70—71  
 — —, существование и единственность 53—54  
 Переходные процессы в релейной системе 207—208  
 Поверхность переключения 349—354  
 Показатель качества 339—343, 441  
 — — квадратичный 436—443  
 Положение равновесия (см. также Состояние равновесия) 48  
 — — автономной системы 82—84  
 — — —, линейной второго порядка 84—89  
 — — «виртуальное» 129  
 — —, седловая точка 85, 91, 114, 126, 351  
 — —, узел 85, 87, 114, 126, 129, 140  
 — —, фокус 86, 91, 114, 126, 129, 140  
 — —, центр 86, 114, 126  
 Полоса пропускания системы 173, 196  
 Полюс  
 — системы 43  
 — функции 33  
 Порядок  
 — матрицы 497  
 — системы 29, 47  
 Последовательность  
 — Коши 328—336  
 — — сходящаяся 328  
 — управлений, оптимальная 428—429  
 Постоянная Липшица 50, 331  
 — —, локальная 475  
 Построение  
 — годографа Цыпкина 223—225  
 — фазовой траектории 94—97  
 — — —, дельта-метод 96, 98  
 — — —, метод изоклин 95  
 — — —, — Пелла 96—97  
 Правило Декарта 397  
 Предел в среднем квадратичном 518  
 Предельный цикл 18, 89—92, 104, 120, 140  
 — — в системах второго порядка 126—130  
 — — неустойчивый 89—90  
 — — полуустойчивый 89—90  
 — — устойчивый 89—90, 120  
 Преобразование  
 — сдвига нулей 288—291, 316—318  
 — — полюсов 278—280, 282, 291  
 — Фурье 278, 519, 520  
 Привод  
 — рулевой 166—171  
 — гидравлический 167  
 — с обратной связью 167, 177  
 — — — —, пример 289—291
- Принцип  
 — Максимума Понтрягина 358, 371, 387, 392—425  
 — — —, границы применимости 449—451  
 — — —, доказательство для линейных систем 409—413  
 — — —, — для нелинейных систем 413—414  
 — — — как достаточное условие оптимальности 407  
 — — —, применение 415—421  
 — — —, управление нестационарными объектами 418  
 — — —, формулировка 400—408  
 — оптимального движения 410—413  
 — оптимальности 430—433, 444  
 — сжатого отображения 50  
 — суперпозиции 17, 54  
 Приспосабливающаяся система с моделью 257—258  
 Произведение матриц 499  
 Производная  
 — Гаю 484  
 — Фреше 484  
 Пространство  
 — евклидово 29  
 — состояний 47  
 — функциональное 327  
 — — абстрактное 327—328  
 — — банахово 328, 331, 336  
 — — линейное 327  
 — — — нормированное 328  
 — — — — полное (см. также Пространство банахово) 328  
 — —  $\mathcal{H}$  действительных периодических функций 328, 331—333  
 — —  $\mathcal{L}_1$  (см. также функция класса  $\mathcal{L}_1$ ) 327  
 — —  $\mathcal{L}_2$  (см. также функция класса  $\mathcal{L}_2$ ) 327  
 — —  $\mathcal{P}$  (см. Пространство функциональное линейное нормированное полное)  
 Прямая Попова 273, 285, 295
- Равенство матриц 499  
 Радиолокатор (см. Объект системы управления)  
 Ракета (см. Объект системы управления)  
 Ранг матрицы 500  
 Реакция на начальные условия 266—267, 292  
 Регулятор системы 27  
 — —, синтез 438  
 Релейная характеристика  
 — — идеальная (без зоны чувствительности) 192, 206, 208—214, 217, 228—229  
 — — несимметричная, пример 180—183  
 — —, описание в интегральной форме 191—195  
 — — с гистерезисом, пример 154—155  
 — — с зоной нечувствительности 192, 209—211  
 — — — — — и гистерезисом 206, 220  
 — — типы 206  
 Релейное управление  
 — — в вырожденных задачах 458  
 — —, гипотеза 349, 351, 397  
 — — оптимальное по быстродействию 396—400

- — — —, доказательство 393—397
- Релейные системы управления
  - — —, анализ 205—233
  - — —, — автоколебаний, метод Хамела 216
  - — —, — —, метод Цыпкина 216—223, 230, 327
  - — —, — вынужденных колебаний, метод целых функций 216
  - — —, анализ вынужденных колебаний, метод Цыпкина 225—227, 230
  - — —, — переходных процессов при произвольном входном сигнале 207—208
  - — —, — периодического движения методом  $z$ -преобразования с опережением 210—216
  - — —, — устойчивости колебаний 227—230
  - — —, синтез 207
  - — —; сравнение метода Цыпкина с методом эквивалентной передаточной функции 219, 222—223, 233
  - — —, условия непрерывности 210, 216
  - — —, — переключения 210, 216, 217
- Решение в обратном времени 350—352, 399—400, 407
- Ряд
  - Неймана 68, 74
  - Фурье 155, 181
  - — двойной 193
  - —, представление периодического сигнала в релейной системе 215, 218
- Свободная система 48
- Сектор Попова 273, 275, 280, 301
- Сепаратриса 90, 92
- Система
  - автономная 48, 51
  - —, устойчивость в малом 237—242
  - второго порядка 77—101
  - импульсная 514, 517
  - консервативная 92
  - линейная, определение 17
  - — стационарная 17.
  - — — с передаточной функцией без числителя 33—38
  - — — — с гистерезисом 38—41
  - невозмущенная 311
  - непрямого регулирования 247, 248, 261, 300
  - нестационарная 48
  - основная 264, 268, 282, 512
  - прямого регулирования 247, 260
  - с запаздыванием 264, 275, 300
  - с распределенными параметрами 73, 264
  - — —, пример 177, 301
  - сопряженная 69—72
  - стационарная 48
  - управления 26
  - — замкнутая 27
  - — квазиоптимальная 489—492
  - — конечным значением, оптимальная 343
  - — оптимальная по быстродействию 81—82, 353—354, 393, 397—400, 406—408
  - — — по квадратичному критерию 372—378
- — — по расходу топлива 354—355, 415—416
- — — с обратной связью 389
- — —, структура 486—489
- — приспособливающаяся с моделью 257—258
- — спутником, пример 78—82, 99, 486—489
- управляемая в смысле Ла-Салля (см. также  $L$ -управляемость) 398
- электродвигатель-генератор, пример 91—92, 159—162
- —, устойчивость, пример 113—114
- Скаляр 497
- Скользкий режим 81
- След матрицы 501
- Собственное значение матрицы (см. также Полюс системы) 43, 501
- Собственный вектор матрицы 43, 501
- Сокращения нуля и полюса передаточной функции (см. также Управляемость) 64, 67
- Состояние равновесия (см. также Положение равновесия) 26, 47
- — нелинейной системы 18
- Спектр матрицы 26, 47
- Стабилизация
  - нелинейная 171
  - спутника, гравитационная 46, 244, 262
- Степень
  - затухания 268
  - устойчивости 277
- Субгармонические колебания 19, 162
- Суперпозиция 17
- Существование и единственность
  - — — переходной матрицы 53
  - — — решение дифференциального уравнения 49—51
  - — — — системы дифференциальных уравнений 51
  - — — управления, оптимального по быстродействию 398
- Теорема
  - Бендиксона 126—127, 129
  - Бонжорно 292, 300
  - Гаусса 127
  - Кэли—Гамильтона 504
  - Лагранжа 94
  - Ляпунова о неустойчивости 239
  - — об устойчивости 237, 238
  - о неподвижной точке сжатого отображения 304, 327, 329—331
  - о среднем значении 434
  - об  $n-1$  переключении 355, 392, 397
  - Парсевалья 270, 332, 342, 519
  - Планшереля 518, 522
  - Попова, доказательство 521—527
  - —, формулировка 271
  - Стокса 127
  - Четаева 239—240
- Теория игр 423
- Типы матриц 497—498
- Точка
  - излома траектории 365, 387
  - изображающая 81
  - критическая 281

- Траектория  
— вырожденная 403  
— минимизирующая 366  
— на фазовой плоскости 48, 78—82  
— — — автономной линейной системы 51, 89  
— — — — нелинейной системы 89  
— — — — консервативной системы 92—94  
— — — —, определение времени движения 97—98  
— — — —, построение 94—97  
— особая 403  
Транспонирование матрицы 497
- Угол Гурвица 273, 275, 280, 301
- Управление  
— допустимое 393  
— квазиоптимальное 489—492  
— оптимальное 358—391  
— — по быстродействию 393  
— — —, вырожденное 457—460  
— — — для линейных систем 397—400  
— — — для систем второго порядка 81—82  
— — —, единственность 400  
— — —, неединственность 458  
— — — объектом с действительными полюсами 353  
— — — — с комплексными полюсами 354  
— — — —, пример 356  
— — — — ракетой, пример 407—408  
— — — — спутником, пример 406  
— — — —, существование и единственность 398  
— — по расходу топлива 357, 471  
— — — —, вырожденная задача 460—462  
— — — —, неединственность 354, 460  
— — — —, применение принципа максимума 415—416  
— — по минимаксному критерию 422—423  
— реактивным самолетом, пример 381—383, 385, 387—388
- Управляемость  
— линейной системы 65—66, 398  
— полная 63, 398, 400, 458  
—,  $L$ -управляемость 398, 400, 405, 458—460
- Уравнение  
— буксировки автомобиля, пример 136  
— Беллмана 426, 432—438, 447, 448  
— — в записи через функцию Гамильтона 444  
— — для задачи Майера 436  
— — как достаточное условие оптимальности 439  
— —, частный случай 435, 437  
— Бесселя, пример 100  
— Ван-дер-Поля 95, 105—106, 203  
— —, пример 139—143  
— Винера—Хопфа 344  
— Гамильтона—Якоби 426, 444  
— динамической системы 28  
— дифференциальное в полных дифференциалах 462  
— — Эйлера 69  
— Дурффинга 184—186, 203  
— Матье 262, 300  
— —, пример 293—294, 307—308  
— разностное, линейное 513  
— Риккати в матричной форме 439—441, 446, 453, 474  
— — в скалярной форме 437
- Уравнения  
— возмущенного движения 325  
— Вольтерра 136, 178  
— Ланкастера 101, 136  
— Лурье 260, 261  
— движения искусственного спутника Земли 31—32; 46, 118—120, 486—489  
— — — —, анализ устойчивости 125  
— — — —, задача 99, 135, 472  
— — — — — линейаризованные 46, 118—120  
— — математического маятника 45, 100, 240, 244  
— — — —, анализ устойчивости 240—241, 244  
— — — — с демпфером 240—241  
— — ракеты, линейаризованные 109—110  
— — — —, анализ устойчивости 112—113  
— — самолета в вертикальной плоскости, пример 381—383  
— разностные 513  
— состояния 34, 42  
— — для линейных нестационарных систем 41—42  
— —, каноническая форма 33, 36, 44, 57, 65, 84, 351, 393, 397, 458  
— —, нормальная форма 37—41, 44, 57, 71, 84  
— —, решение 47—76  
— —, — для линейных систем 51—55  
— Эйлера 31, 121  
— Эйлера—Лагранжа 358, 363—365, 369, 373, 376, 379, 382, 383, 386—390, 404, 406  
— — в интегральной форме 365  
— — для задачи Больца 383  
— — — — Майера 379  
— — для линейных систем 373
- Условие  
— балансировки 110  
— гармонического баланса 144, 148  
— Вейерштрасса 368—369, 377, 379, 382, 384, 387, 389, 390, 406  
— — для задачи Больца 384  
— — — — Майера 379  
— достаточное, определение 49  
— Лежандра (см. также Условие Лежандра—Клебша) 366—367, 389  
— Лежандра—Клебша 367, 377, 384, 468  
— Лефшеца 249  
— Липшица 50, 329  
— —, глобальное 50, 334  
— необходимое, определение 49  
— —, оптимальности вырожденного решения 468—470  
— Попова 274, 284, 289, 290, 522  
— скачка вектора 421
- Условия  
— баланса 182  
— Вейерштрасса—Эрдмана для точек излома 365, 387  
— трансверсальности 369—370, 375, 379, 380, 382, 384, 387  
— — для задачи Больца 384

- — — Майера 380
- — для линейных систем 374
- Якоби 369, 388
- Устойчивость 19—20, 103—104
  - абсолютная 249, 263
  - —, определение 248
  - автономной системы, первый метод Ляпунова 110—111
  - в большом 130, 242
  - — —, второй метод Ляпунова 234—262
  - — —, теоремы 242—262
  - в малом 104, 106
  - — —, теоремы 104—107, 237—242
  - в пространстве  $\mathcal{L}_2$  267
  - в целом, асимптотическая 130, 243, 276—277, 528
  - — —, равномерная асимптотическая 246, 252, 308, 324
  - — —, эквивасимптотическая 251
  - вынужденного решения 319—323
  - выходного сигнала 267, 316
  - — — абсолютно асимптотическая 268, 280, 282
  - — — — с коэффициентом затухания  $\alpha$  (степени  $\alpha$ ) 268
  - зоны равновесных состояний 125—126
  - инвариантного множества 125
  - колебаний в релейной системе 223—230
  - линейной автономной системы 246
  - — — импульсной системы 513
  - нестационарной системы при входном сигнале 308—310
  - орбитальная 125
  - — асимптотическая 90, 125, 130, 230, 323, 325
  - переходного процесса 319—323
  - периодического решения 227—230, 323—327
  - положения равновесия 104, 245, 251
  - — — асимптотическая 105, 106
  - — — практическая 311—313
  - практическая 304, 310—314
  - предельная 284
  - предельного цикла 126, 230
  - при ограниченных входном и выходном сигналах 103, 304, 308, 336
  - — — входном и выходном сигналах в малом (см. также Устойчивость практическая) 304
  - — — входном и выходном сигналах в целом 304, 314—319
  - траектории 119—124
  - — равномерная 121—123
  - — — асимптотическая 115, 121—123, 251, 312, 313, 324, 325
  - — — — в целом 308
  - — — эквивасимптотическая 122, 251
  - управления 268
  - — абсолютно асимптотическая 268, 280, 282
  - — — с коэффициентом затухания  $\alpha$  (степени  $\alpha$ ) 268
  - — — асимптотическая 268
  - — — с коэффициентом затухания  $\alpha$  (степени  $\alpha$ ) 268
- Фазовая плоскость 37, 89, 349
- Фазовое пространство 38, 39
- Фазовые координаты 38
  - портреты систем второго порядка 78—94
- Фигура Лиссажу 226
- Формула
  - Коши 505
  - преобразования Лапласа 498
- Функционал качества (см. Критерий качества. Показатель качества)
  - — в качестве функции Ляпунова 453
- Функциональное пространство (см. Пространство функциональное)
- Функциональный анализ 327
  - —, операции в банаховом пространстве 329
  - —, производная от оператора 484
- Функция
  - абсолютно интегрируемая 267
  - Бесселя 194
  - Вейерштрасса, остаточная 368, 377, 468
  - возрастающая 251
  - зыбучая 409
  - Гамильтона 402, 443, 456
  - — оптимальная 444
  - гипергеометрическая 191, 195, 197
  - знакоотрицательная 236
  - знакопеременная 236
  - знакоположительная 236
  - измеримая 518
  - интегрируемая с квадратом 267, 521—522
  - класса  $\mathcal{L}_1$  267, 316, 320, 518
  - —  $\mathcal{L}_2$  267, 316, 320, 322, 518
  - Ляпунова 240, 314
  - — для линейной автономной системы 245—246
  - — нестационарная 250
  - — — положительно определенная 251
  - минимизирующая 363
  - однородная степени  $k$  237
  - операторная 339
  - передаточная 61
  - целая 216
  - Цыпкина 217, 220
  - штрафа 422
- Характеристика
  - амплитудно-фазовая 145, 219
  - — логарифмическая 291
  - нелинейная 143—162, 191—195
  - — без зоны нечувствительности 154, 192, 206, 208—214
  - — двузначная 154—157
  - —, изучаемая в задаче Попова 265—266
  - — однозначная 154, 323, 332
  - —, — представление в интегральной форме 191—195
  - — с гистерезисом 154—155, 222
  - — — — активным 156, 266, 271, 524
  - — — — пассивным 156, 266, 274, 525
  - — с зоной нечувствительности 192, 209, 227
  - — с ограничением 32, 146, 193
- Характеристическое уравнение 43
  - — матрицы 501, 506
  - — системы с периодическими коэффициентами 324

Частота среза 173 .

Численные методы определения оптимальных решений 474—486

— — — — —, метод второй вариации 480—482

— — — — —, метод градиента 476—480

— — — — —, метод Ньютона—Рафсона 483—486

— — — — —, метод сопряженных градиентов 479

Число переключений в оптимальной по быстродействию системе 353, 354

Чувствительность и анализ ошибок 115—119

— — — — — в оптимальной системе 489—490

Эквивалентная передаточная функция 138—178, 304, 331—334

— — — — — на основе минимизации среднего квадрата ошибки 157

— — — — — нелинейного элемента, двузначного 154—157

— — — — — для двухчастотного входного сигнала 182—195

— — — — — для двухчастотного выходного сигнала по первой гармонике 182

— — — — — для двухчастотного выходного сигнала по постоянной составляющей 182, 196—197

— — — — — для двухчастотного выходного сигнала, применение для анализа автоколебаний 187—189

— — — — —, однозначного 157—162

— — — — — с двумя входами 158—159

— — — — —, таблица для некоторых часто встречающихся нелинейностей 149—153

Энергия

— кинетическая 92

— полная 92—93, 244—245

— потенциальная 92, 94, 389

Явление

— захвата частоты 19

— синхронизации 19, 189, 191

— скачкообразного резонанса 19, 138, 162—166, 323, 336, 337

Якобиан (см. Матрица Якоби)