М. М. Филипповъ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

(Для лицъ незнакомыхъ съ началами высшей математики).

Цѣна 40 коп.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія А. Пороховщикова, Гороховая ул., № 17.
1896.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ 1 Августа 1896 г.

Элементарная теорія вѣроятностей.

I. Вѣроятность.

О теоріи вѣроятностей часто говорятъ, но рѣдко знаютъ что либо, кромѣ неопредѣленнаго представленія, заимствованнаго изъ обыденной жизни. Каждый знаетъ, что вѣроятность выиграть 200.000, купивъ выигрышный билетъ, очень мала. Каждому ясно, что если въ лоттереѣ на 1.000 рублевыхъ билетовъ одинъ выигрышный въ 100 рублей, а остальные — проигрышные, то вѣроятность выиграть сто рублей не велика. Не трудно также понять, что всякая лоттерея, доставляя выигрышъ немногимъ лицамъ, раззорительна для общества, разсматриваемаго какъ цѣлое. Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ себѣ представить нѣкоторое юридическое лицо, т. е. общество, связанное извѣстными общими интересами и обязательствами. Пусть это лицо, напр. цѣлая артель, желая непремѣнно выиграть, купитъ *всѣ* билеты: тогда, въ нашемъ примѣрѣ, артель навѣрное выиграетъ 100 рублей, но за то навѣрное затратитъ на этотъ выигрышъ 1.000 р. на покупку билетовъ. Результатъ ясенъ. Этотъ примѣръ иллюстрируетъ характеръ всякой азартной игры.

Ученіе о вѣроятностяхъ, въ началѣ своего возникновенія, было, по преимуществу, теоріей азартныхъ игръ, и ради удобства, все еще прибѣгаютъ къ примѣру игральныхъ костей, колоды картъ и т. п. Было бы, однако, большою ошибкою считать теорію вѣроятностей простымъ математическимъ развлеченіемъ, и крайне печально, что внѣ узкаго круга спеціалистовъ, истины, добытыя этой теоріей, часто остаются неизвѣстными.

Примѣромъ можетъ служить современная біологія, съ ея основнымъ принципомъ, дарвиновскимъ ученіемъ естественнаго подбора. Ученіе это, отводящее очень широкое мѣсто такъ наз. случайнымъ варіаціямъ, казалось, открыло новое обширное поле для примѣненія теоріи вѣроятностей... Нѣкоторыя попытки въ этомъ родѣ были сдѣланы, но, къ сожалѣнію, онѣ не принадлежатъ къ числу удачныхъ. Такъ напр. Дельбефъ воображалъ, что нашелъ одинъ весьма общій математическій законъ, служащій опорою для теоріи подбора, но, при ближайшемъ изслѣдованіи, законъ этотъ оказался ложнымъ [1]).

Отчасти сами математики повинны въ томъ, что теорія вѣроятностей далеко не пользуется всеобщимъ кредитомъ. Лапласъ и другіе математики первой величины, въ пылу увлеченія теоріей, навязали ей чуть ли не свойство всевѣдѣнія. Уче-

---

[1]) Объ этомъ рѣчь будетъ впослѣдствіи. Здѣсь замѣчу, что проф. Тимирязевъ ссылался на этотъ „законъ“ въ своей полемикѣ съ Данилевскимъ и кажется, до сихъ поръ убѣжденъ въ его истинности. За исключеніемъ этого мнимаго закона, наши дарвинисты такъ же мало занимались теоріей вѣроятностей, какъ и наши антидарвинисты, и трудно сказать, что менѣе убѣдительно — доводы ли Данилевскаго относительно лепестковъ сирени или возраженія, противупоставленныя этому примѣру проф. Тимирязевымъ.

ніе, которое въ основѣ должно опираться на опытъ и внѣ опыта теряетъ всякій смыслъ, было превращено во всемогущее орудіе, дѣлающее опытъ излишнимъ. Математики вѣрили своимъ формуламъ болѣе, чѣмъ глазамъ. Такъ Лапласъ объявилъ, съ авторитетомъ, не допускающимъ возраженій, что вѣроятность утвержденія, приписывающаго Юпитеру массу, равную $\frac{1}{1070}$ массы солнца, настолько велика, что можно поставить 999.308 франковъ противъ 1, въ пользу мнѣнія, что ошибка не превышаетъ одного процента. Жаль, что онъ не поставилъ такой суммы на самомъ дѣлѣ: ближайшее будущее показало, что за защищаемое Лапласомъ мнѣніе не стоило поставить даже и гроша. Весь секретъ въ томъ, что нельзя вычислять вѣроятной величины ошибки, не убѣдившись въ томъ, что методы наблюденія достаточно точны и, вообще, что нѣтъ какого либо постояннаго источника ошибокъ, вродѣ не принятыхъ во вниманіе возмущеній.

Съ другой стороны, спеціалисты-математики сдѣлали очень немногое для *популяризаціи* теоріи вѣроятностей. Существуютъ, правда, «элементарные» трактаты Лакруа, Лорана. Бертрана, Мейера-Чубера, Ермакова, но элементарность—понятіе условное. Большинство читателей (даже спеціалистовъ, но не математиковъ) пугаются одного каббалистическаго знака, выражающаго дѣйствіе интегрированія; поэтому, для огромнаго большинства тѣхъ, которые желали бы воспользоваться главными методами и результатами теоріи вѣроятностей, перечисленныя руководства не годятся; а между тѣмъ есть возможность изложить главныя основанія теоріи вѣроятностей, не выходя изъ границъ математическихъ знанiй, прiобрѣтаемыхъ въ каждой средней школѣ.

Въ математикѣ, подъ словомъ *вѣроятность* подразумѣвается отношенiе числа случаевъ, благопрiятныхъ данному событiю, къ общему числу возможныхъ случаевъ. Отсюда уже ясно, что вѣроятность всегда выражается нѣкоторою правильною дробью, такъ какъ часть случаевъ меньше, чѣмъ всѣ случаи. Предѣльная величина вѣроятности получится, когда *всѣ* случаи благопрiятны событiю: тогда событiе произойдетъ навѣрное, т. е. вѣроятность равная 1 есть достовѣрность. Пусть дана игральная кость, имѣющая видъ куба, на граняхъ котораго имѣемъ 1, 2, 3 и т. д. до 6 очковъ включительно. Какова вѣроятность выбросить 4 очка? Всѣхъ случаевъ 6, изъ нихъ одинъ даетъ 4 очка, стало быть вѣроятность равна $\frac{1}{6}$. Вѣроятность того, что событiе *не* случится, называется противувѣроятностью. Такъ какъ событiе непремѣнно случится или не случится, то сумма вѣроятности и противувѣроятности равна достовѣрности, т. е. 1. Въ нашемъ примѣрѣ противувѣроятность или вѣроятность того, что выпадетъ какое угодно число очковъ, только не 4, равна $\frac{5}{6}$, и дѣйствительно въ пользу ея имѣемъ 5 случаевъ изъ 6. Необходимо съ самаго начала подчеркнуть, что опредѣленiе вѣроятности имѣетъ смыслъ лишь при допущенiи, что *всѣ случаи равно возможны*. Многiя грубыя ошибки являются послѣдствiемъ забвенiя этого условiя. Такъ, если въ данной семьѣ изъ 8 человѣкъ 1 грудной младенецъ, 1 столѣтнiй старикъ, а 6 большiя дѣти и взрослые въ цвѣтѣ лѣтъ, то было бы странне утверждать, что вѣроятность встрѣтить любого изъ числа членовъ этой семьи на велосипедѣ для всѣхъ одинакова. Если въ мѣшокъ положена одна бомба и десять маковыхъ зеренъ, то вѣроятность схватить на удачу зерно или бомбу далеко не одна и та же.

Если мы, однако, знаемъ, что всѣ разсматриваемые случаи однородны (точнѣе было бы сказать: приближаются къ математической одинаковости), то вычисленіе вѣроятности приводитъ къ двумъ главнымъ опредѣленіямъ: 1) общаго числа случаевъ, возможныхъ по условіямъ задачи; 2) числа случаевъ, благопріятныхъ данному событію.

Возьмемъ напр. правильную четырехгранную пирамиду (тетраэдръ) и обозначимъ его грани буквами a, b, c, d. Вѣроятность, чтобы брошенный на удачу тетраэдръ упалъ на полъ гранью a внизъ, равна $\frac{1}{4}$.

Спрашивается теперь: какъ велика вѣроятность, чтобы, при двукратномъ бросаніи, тетраэдръ упалъ оба раза одною и тою же гранью, напр. гранью b? На каждый изъ 4 возможныхъ случаевъ перваго бросанія, т. е. на a, b, c, d придется по 4 случая второго бросанія. Такъ, если въ первый разъ тетраэдръ упалъ гранью a, то во второй разъ можетъ упасть любою изъ граней a, b, c, d. Всего поэтому получимъ для двухъ бросаній 16 группъ.

$$
\begin{array}{cccc}
aa & ab & ac & ad \\
ba & bb & bc & bd \\
ca & cb & cc & cd \\
da & db & dc & dd
\end{array}
$$

Изъ 16 возможныхъ случаевъ лишь 1 даетъ bb, поэтому искомая вѣроятность, чтобыт тераэдръ упалъ два раза подъ рядъ гранью b, равна $\frac{1}{16}$.

Вѣроятность, чтобы тетраэдръ упалъ одинъ разъ гранью a, другой разъ гранью b *въ какомъ угодно порядкѣ*, равна $\frac{1}{8}$, потому что здѣсь на 16 всѣхъ случаевъ имѣемъ 2 благопріятныхъ ab и ba.

Вообще, вѣроятность получить изъ числа n буквъ, взявъ каждый разъ по одной буквѣ наудачу, группу изъ κ одинаковыхъ буквъ, будетъ равна $\frac{1}{n^{\kappa}}$. Пусть напр. на окружности колеса написаны, въ равныхъ разстояніяхъ между собою, четыре буквы a, b, c, d,; вращаемъ колесо нѣсколько разъ наудачу, не считая оборотовъ и, по возможности, большое число разъ, затѣмъ смотримъ, какая буква оказалась слѣва и сверху; вѣроятность того, что это буква a равна $\frac{1}{4}$. Вѣроятность, что то-же повторится при второмъ опытѣ равна $\frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; вѣроятность получить букву a въ третій разъ, т. е. получить группу aaa будетъ $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ и т. д. Дѣйствительно, на каждый изъ n случаевъ перваго опыта приходится по n случаевъ второго опыта; получается n^2 случаевъ; на каждый изъ нихъ приходится по n случаевъ третьяго опыта; получается n^3 случаевъ и т. д., и изъ нихъ всякій разъ въ пользу такихъ группъ, какъ aa, aaa и т. д., есть лишь одинъ случай.

Рѣшимъ задачу, лишь немногимъ болѣе сложную. Какова вѣроятность получить посредствомъ двухъ игральныхъ костей, которыя обозначимъ I и II, сумму очковъ, равную 7?

Всѣхъ случаевъ будетъ $6^2 = 36$; изъ нихъ въ пользу группъ, дающихъ 7 очковъ, будутъ случаи $6+1$, $5+2$, $4+3$ всего 3 случая, и также 3 обратныхъ $1+6$, $2+5$, $3+4$ (такъ какъ не опредѣлено, должна ли напр. кость I дать 6 очковъ или 1 очко). Итого 6 случаевъ въ пользу событія. Вѣроятность равна $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Та же задача для суммы очковъ, равной 8. дастъ меньшую вѣроятность, такъ какъ здѣсь имѣемъ случаи $6+2$, $5+3$ и $4+4$, изъ которыхъ только два первые имѣютъ обратные $2+6$, $3+5$ всего 5 случаевъ. Вѣроятность равна $\frac{5}{36}$.

Если исключить нѣкоторыя попытки Галилея и еще болѣе древнихъ мыслителей, то теорія вѣроятностей ведетъ начало отъ Паскаля и Фермата.

Кавалеръ де-Мере, страстный игрокъ, но плохой математикъ, предложилъ Паскалю нѣсколько задачъ, относящихся къ игрѣ въ кости. Вотъ одна изъ нихъ:

Бросимъ игральную кость 4 раза подъ рядъ. Опытъ показалъ кавалеру де-Мере, что при 4 бросаніяхъ выгодно биться объ закладъ, что хотя одинъ разъ получимъ 6 очковъ.

Бросимъ теперь двѣ игральныя кости. Здѣсь всего будетъ 36 случаевъ, потому что каждая грань кости I можетъ выпасть съ любою гранью кости II. Сколько разъ надо бросить кость, чтобы было выгодно биться объ закладъ въ пользу такъ наз. *sonnez*, т. е. комбинаціи $6+6$ очковъ?

Кавалеръ де-Мере, не будучи математикомъ, разсуждалъ, какъ часто разсуждаютъ ученики при рѣшеніи задачъ: онъ выхватилъ первыя попавшіяся данныя задачи и изъ нихъ составилъ пропорцію. Кавалеръ разсуждалъ такъ: для двухъ костей число случаевъ въ 6 разъ больше, чѣмъ для одной кости; стало быть и число партій, позволяющихъ биться объ закладъ въ пользу 6×2 очковъ на 2 костяхъ, должно быть въ шесть разъ болѣе числа партій, позволяющихъ биться объ закладъ въ пользу 6 очковъ на одной кости. Получается $4 \times 6 = 24$ партіи. Увы! Опытъ показалъ кавалеру, что ариѳметика никуда не годится. Попробовавъ биться объ закладъ на *sonnez* въ 24 партіи, онъ чаще проигрывалъ, чѣмъ выигрывалъ.

Дѣло объясняется просто: составленная кавалеромъ пропорція такъ же основательна, какъ если бы мы напр. сказали: даны двѣ комнаты, одна вдвое большей длины, чѣмъ другая; на первую требуется столько то аршинъ обоевъ, стало быть на вторую надо вдвое больше...

Для одной игральной кости мы имѣемъ 6 возможныхъ случаевъ при одномъ бросаніи; при двухъ бросаніяхъ $6^2 = 36$, при трехъ бросаніяхъ $6^3 = 216$ и при четырехъ $6^4 = 1296$ возможныхъ случаевъ; здѣсь лучше опредѣлить противувѣроятность, чѣмъ вѣроятность. Число случаевъ *неблагопріятныхъ* грани съ 6 очками при первомъ бросаніи, будетъ 5. Каждый изъ этихъ случаевъ при второмъ бросаніи можетъ соединиться съ любымъ изъ 5 новыхъ неблагопріятныхъ случаевъ и т. д. Для 4 бросаній число неблагопріятныхъ случаевъбудетъ $5^4 = 25 \times 25 = 625$. Противувѣроятность для 6 очковъ въ 4 партіи будетъ $\frac{625}{1296}$, т. е. меньше половины, стало быть вѣроятность больше половины. *Выгодно* биться объ закладъ въ пользу 6 очковъ въ 4 партіи.

Разсмотримъ теперь примѣръ двухъ костей, такъ сильно скандализировавшій кавалера де Мере. Для 24 партій при 36 случаевъ въ первой партіи, изъ которыхъ 35 не въ пользу sonnez, получимъ, разсуждая по предъидущему, противувѣроятность равную $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Вычисленіе этой дроби не особенно удобно, даже съ помощью логариѳмовъ, поэтому лучше прибѣгнуть къ окольному рѣшенію; зададимся вопросомъ: во сколько партій вѣроятность получить *sonnez*, т. е. $6+6$, станетъ точно равною $\frac{1}{2}$? Если такое число партій равно n, то противувѣроятность равна $\left(\frac{35}{36}\right)^n$; но она также равна, очевидно $\frac{1}{2}$. Стало быть $\left(\frac{35}{36}\right)^n = \frac{1}{2}$ или $\left(\frac{36}{35}\right)^n = 2$.

Такое уравненіе рѣшается, взявъ логариѳмы обѣихъ частей, откуда $n \log \frac{36}{35} = \log 2$ и по таблицамъ легко найти, что $n =$ приблизительно $24{,}605$, т. е. *болѣе* 24. Итакъ, для того, чтобы получить противувѣроятность, а стало быть и вѣроятность, точно равную $\frac{1}{2}$, надо сыграть *болѣе* 24 партій, и легко убѣдиться изъ свойствъ дроби $\left(\frac{35}{36}\right)^n$, что противувѣроятность уменьшается, а вѣроятность увеличивается по мѣрѣ увеличенія числа партій. При 24 же партіяхъ вѣроятность *менѣе* противувѣроятности [1]).

---

[1]) Мы могли бы рѣшить точно такъ-же и предыдущій примѣръ. Уравненіе $\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{2}$ для одной кости дало-бы $n = \frac{\log\ 2}{\log\ 12 - \log\ 10} = \frac{0{.}30103}{0{,}07918}$ или немногимъ болѣе 3, 8, т. е. при 3 бросаніяхъ вѣроятность получить 6 менѣе $\frac{1}{2}$, а при 4 бросаніяхъ она болѣе $\frac{1}{2}$, стало быть *болѣе* противувѣроятности.

II.

Въ числѣ задачъ, предложенныхъ кавалеромъ де Мере Паскалю, были и такія, въ которыхъ кавалеръ даже не видѣлъ, съ чего слѣдуетъ начать. Одна съ этихъ задачъ, рѣшенная одновременно Паскалемъ и Ферматомъ, знаменита въ исторіи математики.

Предположимъ, что два игрока поставили каждый по 32 червонца. По условію, выиграетъ тотъ, кто первый достигнетъ 3 партій. Одинъ уже выигралъ двѣ партіи, другой только одну. Вмѣсто того, чтобы продолжать игру, они хотятъ разойтись. Спрашивается, какъ раздѣлить между ними общую ставку, т. е. 64 червонца?

Паскаль рѣшилъ эту задачу чисто ариѳметическимъ путемъ. Онъ разсуждалъ такъ. Если игроки не прекратятъ игры, то въ слѣдующую партію можетъ выиграть первый: въ такомъ случаѣ онъ получитъ всѣ 64 червонца, такъ какъ достигнетъ 3 выигранныхъ партій. Можетъ, однако, случиться—и это столько же вѣроятно, какъ и первое предположеніе (такъ какъ рѣчь идетъ объ азартной игрѣ), что выиграетъ второй игрокъ. Тогда у обоихъ будетъ по двѣ партіи, т. е. шансы станутъ одинаковыми. Выходитъ, поэтому, слѣдующее: проиграетъ ли первый игрокъ слѣдующую партію или выиграетъ, во всякомъ случаѣ, онъ имѣетъ право получить половину общей ставки, т. е. 32 червонца, такъ какъ даже въ случаѣ проигрыша ближайшей партіи за нимъ останется это право. Иное дѣло остальные 32. Такъ какъ ближайшую партію можетъ выиграть первый, но можетъ выиграть и второй, то эти 32 надо раздѣлить поровну. Стало быть, въ случаѣ прекращенія игры, первому надо дать $32+16=48$, второму 16.

Это рѣшеніе просто и наглядно, но обладаетъ недостаткомъ всѣхъ ариѳметическихъ рѣшеній: общій методъ здѣсь недостаточно ясенъ. Ферматъ рѣшилъ ту же задачу посредствомъ теоріи сочетаній. Онъ разсуждалъ такъ: положимъ, что первыя двѣ партіи выигралъ игрокъ I, третью игрокъ II. Для четвертой партіи имѣемъ два случая: можетъ выиграть I, тогда игра окончится, но можетъ и II, тогда у каждаго по 2 партіи, и для окончательного результата надо еще одну партію. Такъ какъ наибольшее число партій, необходимыхъ для окончанія игры, равно двумъ, то допустимъ, что эти двѣ недоигранныя партіи съиграны, каковъ бы ни былъ ихъ результатъ, и назовемъ партію выигранную первымъ a, выигранную вторымъ b. Тогда возможны слѣдующія комбинаціи:

$$\begin{array}{cc} aa & ab \\ ba & bb \end{array}$$

Такъ напр. ab обозначаетъ, что первую недоигранную партію выигралъ игрокъ I, вторую второй, ba обозначаетъ обратный случай, если первую выигралъ второй игрокъ, 2-ую первый. Имѣемъ 4 случая; такъ какъ второму игроку не хватаетъ еще *двухъ* партій, то для него лишь одна комбинація, именно bb, благопріятна, всѣ остальныя неблагопріятны. Поэтому шансы игроковъ относятся какъ 3: 1 и изъ ставки 64 червонца надо отдать второму $^1/_4$, первому $^3/_4$.

Не слѣдуетъ думать, что это рѣшеніе, данное Ферматомъ, показалось сразу для всѣхъ убѣдительнымъ. Извѣстный математикъ Роберваль, хорошій геометръ и изобрѣтатель вѣсовъ, сохранившихъ его имя, но при этомъ большой педантъ, смотрѣвшій напр. на Декарта почти какъ на мальчишку, пришедшаго къ нему экзаменоваться по математикѣ — этотъ самый Роберваль счелъ рѣшеніе Фермата неправильнымъ и вотъ на какомъ основаніи. По его словамъ, разъ какой либо изъ игроковъ выигралъ, нелѣпо предполагать, что игра продолжается еще далѣе. Такъ комбинаціи aa и ab, по Робервалю, не имѣютъ смысла, потому что, какъ только первый игрокъ выигралъ первую недоигранную партію, онъ выигралъ *все*; стало быть для него достаточно a и незачѣмъ добавлять еще a новый выигрышъ или b новый проигрышъ перваго игрока. По Робервалю, выходитъ поэтому, что всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ три, а именно a, ba и bb, причемъ два первыхъ будутъ въ пользу перваго игрока, и третій въ пользу второго, поэтому ставку надо раздѣлить не въ отношеніи 3: 1, но въ отношеніи 2: 1. Хотя это послѣднее рѣшеніе кажется согласнымъ съ „здравымъ смысломъ“, однако именно оно безсмысленно ([1]), потому что здѣсь забыто основное положеніе теоріи вѣроятностей: здѣсь разсматриваются, какъ одинаковые, три случая, изъ которыхъ первый вовсе не однороденъ со вторымъ и третьимъ, ибо нельзя результатъ одной партіи сопоставлять съ резуль-

[1]) По „здравому смыслу“ можно бы еще рѣшить такъ: первому не хватаетъ до выигрыша одной партіи, второму двухъ. Вооружимся ариѳметическимъ „правиломъ товарищества“, раздѣлимъ 64 на 3 части и 2 изъ нихъ отдадимъ первому, а одну второму, обратно пропорціонально числу недостающихъ партій. Рѣшеніе выйдетъ какъ разъ по Робервалю.

татами двухъ партій. Рѣшеніе Роберваля ничѣмъ не лучше того, какъ если бы мы складывали числителей двухъ дробей съ разными знаменателями. Способъ Фермата есть приведеніе разнородныхъ случаевъ (съ разнымъ числомъ партій) къ одинаковому числу партій.

III. Рѣшеніе общей задачи Паскаля и Фермата.

Для сокращенія, будемъ пользоваться понятіемъ символическаго умноженія [1]).

Если двѣ буквы a и b образуютъ нѣкоторую схему ($a\ \ b$), то мы будемъ говорить, что схема

$$1)\qquad \begin{matrix} aa & ab \\ ba & bb \end{matrix}$$

есть произведеніе схемы ($a\ \ b$) на подобную ей схему ($a\ b$). Схема 1) составлена изъ ($a\ b$) какъ ($a\ b$) изъ единицы. Умножимъ схему 1) еще разъ на ($a\ b$). Это значитъ, попросту, приписать сначала букву a къ каждой изъ 4 двойныхъ группъ схемы 1), затѣмъ букву b къ каждой изъ тѣхъ же группъ, т. е. новая схема составится изъ схемы 1), какъ эта послѣдняя изъ единицы. Получимъ схему

$$2)\qquad \begin{matrix} aaa & baa \\ aab & bab \\ aba & bba \\ abb & bbb \end{matrix}$$

Схема 2) даетъ отвѣтъ на слѣдующій вопросъ: Два игрока играютъ въ игру, требующую, для выигрыша, трехъ партій. Первый игрокъ А (его выигрышъ обозначается чрезъ а) выигралъ уже

[1]) Сравн. мою брошюру: Упрощеніе элементарныхъ алгебраич. дѣйствій. Изд. 2-е. 1886 г.

2 партіи, второй еще не выигралъ ни одной. Какъ распредѣлить ставку (какова бы она ни была, лишь бы оба игрока поставили поровну) въ случаѣ прекращенія игры?

Второму надо для выигрыша три партіи, первому только одну. Ясно, что судьба игры рѣшится не болѣе, чѣмъ въ три партіи, такъ какъ если брать всевозможныя комбинаціи изъ 4 партій, этого слишкомъ много для выигрыша даже второго игрока. Задача сводится, поэтому, къ составленію всевозможныхъ группъ изъ трехъ множителей или, какъ мы будемъ говорить для краткости, всевозможныхъ *тройныхъ* группъ, причемъ въ каждой группѣ должны быть лишь буквы a или b порознь или обѣ вмѣстѣ. Это можно выразить короче, сказавъ, что *требуется составить всевозможныя тройныя группы изъ двухъ элементовъ*. Отвѣтъ на эту задачу и даетъ схема 2).

Мы опредѣлили такимъ образомъ *всевозможные* случаи, числомъ 8. Изъ нихъ только одинъ, а именно bbb благопріятенъ для игрока В, всѣ остальные случаи благопріятны для А. Поэтому, вѣроятность въ пользу В равна $^1|_8$, и если ставка каждаго игрока составляетъ по 32 червонца, т. е. общая ставка 64, то, въ случаѣ прекращенія игры, первому надо дать 56, второму 8 [1]).

---

[1]) Паскаль рѣшилъ и эту задачу чисто ариѳметическимъ путемъ, а именно такъ: Если А выигралъ 2 партіи, а В ни одной, то въ случаѣ выигрыша первымъ еще партіи, онъ получитъ все, т. е. 64 червонца. Если выиграетъ второй, то у А будетъ 2 партіи, у В одна; вопросъ приведется къ раньше разобранному случаю, когда въ пользу А было $^3/_4$ шансовъ, а въ пользу В была $^1/_4$. Поэтому А вправѣ сказать: выиграю ли я или проиграю, во всякомъ случаѣ я при слѣдующей партіи буду въ положеніи, при которомъ навѣрное получу $^3/_4$ всей суммы, если игру затѣмъ пре-

Не трудно рѣшить и такую задачу: А имѣетъ, при прежнихъ условіяхъ игры (въ три партіи), 1 партію, В ни одной. Какъ раздѣлить ставку?

Здѣсь надо съиграть *по малой мѣрѣ* 3 партіи, чтобы *B* могъ выиграть; но возможны и случаи, когда придется съиграть не 3, а 4 партіи, напр. случай *abbb*. Задача сводится къ опредѣленію всѣхъ четверныхъ группъ изъ двухъ элементовъ, для чего достаточно умножить схему тройныхъ группъ, т. е. схему 2) на схему одиночныхъ элементовъ *a*, *b*. Получимъ схему изъ 16 группъ:

3)

aaaa	*abaa*
aaab	*abab*
aaba	*abba*
aabb	*abbb*
baaa	*bbaa*
baab	*bbab*
baba	*bbba*
babb	*bbbb*

Изъ этихъ 16 группъ, въ пользу А будутъ всѣ тѣ случаи., гдѣ *a* повторяется не менѣе 2 разъ, т. е. 2, 3 или 4 раза; въ пользу В будутъ тѣ случаи, въ которыхъ *b* повторяется не менѣе 3 разъ, т. е. всѣ остальные, ибо въ нихъ *a* не можетъ быть больше одного раза. Легко сосчитать, что въ пользу А имѣемъ 11 случаевъ, въ пользу В пять случаевъ. Стало быть при общей ставкѣ $32\times2=64$ червонца, А долженъ получить, въ случаѣ прекращенія игры, 44 червонца.

Не трудно было бы рѣшить и эту задачу чисто ариѳметически, приведя ее къ предъидущему случаю.

кратимъ. Поэтому, спорною остается лишь $^1/_4$, которую раздѣлимъ пополамъ, такъ какъ, при продолженіи игры до конца, я могу и проиграть и выиграть. Стало быть, А получитъ $^3/_4+^1/_8=^7/_8$, а В получитъ $^1/_8$.

Читатель теперь вполнѣ подготовленъ къ общему алгебраическому рѣшенію такой задачи:

Дана игра между двумя игроками, требующая для выигрыша опредѣленнаго числа партій. Первому игроку не хватаетъ до выигрыша r партій, второму не хватаетъ s партій. Какъ раздѣлить ставку?

Для выигрыша партіи *первымъ* игрокомъ самымъ неблагопріятнымъ случаемъ будетъ тотъ, когда второй выиграетъ $s-1$ партій.

Первый долженъ выиграть еще r партій, стало быть для его выигрыша достаточно съиграть $r+s-1$ партій. Задача сводится къ опредѣленію группъ изъ $r+s-1$ факторовъ, но лишь изъ двухъ различныхъ элементовъ a и b или, другими словами, къ опредѣленію всѣхъ $r+s-1$ кратныхъ группъ изъ двухъ элементовъ. Число ихъ будетъ, очевидно, 2^{r+s-1}. Число случаевъ благопріятныхъ A равно числу тѣхъ группъ, въ которыхъ элементъ a повторяется не менѣе r разъ, т. е. r, $r+1$, $r+2$ и до $r+s-1$ разъ включительно. Это ничто иное, какъ число перестановокъ изъ $r+s-1$ элементовъ съ $r, r+1$ и т. д. повтореніями буквы a и, соотвѣтственно, $s-1$, s и т. д. повтореніями буквы b. Но оно равно также числу сочетаній изъ $r+s-1$ элементовъ по r, $r+1$ и т. д. [1]). Поэтому въ пользу A получимъ $C^r_{r+s-1}+C^{r+1}_{r+s-1}+$ $+C^{r+s-1}_{r+s-1}$ случаевъ и вѣроятность въ пользу A

---

[1]) По теоріи соединеній напр. имѣемъ: число перестановокъ изъ двухъ буквъ съ r повтореніями одной и $s-1$ повтореніями другой буквы равно

$$\frac{r+s-1!}{r \; s-1!} = \frac{(r+s-1)\,(r+s-2)\,.\;.\;.\;.\;s}{r!} \qquad C^r_{r+s-1}$$

будетъ 4) $$\frac{C^{r}_{r+s-1} + C^{r+1}_{r+s-1} + \cdot \cdot + C^{r+s-1}_{r+s-1}}{2^{r+s-1}}$$

Такъ, если игра выигрывается въ три партіи, а первый выигралъ 1, т. е. ему не хватаетъ 2 партій, второй ни одной, т. е. ему не хватаетъ 3 партій, то имѣемъ $r+s-1=4$ и для A получимъ вѣроятность

$$\frac{C^{2}_{4} + C^{3}_{4} + C^{4}_{4}}{2^4} = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$$

а для B вѣроятность $\frac{C^{3}_{4} + C^{4}_{4}}{2^4} = \frac{C^{1}_{4}+1}{2^4} = \frac{5}{16}$

Числа партій, опредѣляющихъ выигрышъ.

Числа партій, выигранныхъ А.	6	5	4	3	2	1
1	63	70	80	96	128	256
2	126	140	160	192	256	
3	182	200	224	256		
4	224	240	256			
5	248	256				
6	256					

Прилагаемая таблица вычислена въ предположеніи, что B ничего еще не выигралъ, и что ставка каждаго $=$ 256 черв., т. е. общая ставка 512. Въ первой строкѣ написаны числа партій, рѣшающихъ игру; въ первомъ столбцѣ число игръ, выигранныхъ уже A; въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ показано, сколько червонцевъ изъ ставки B пойдутъ въ пользу A, кромѣ собственной ставки A, въ томъ случаѣ, если A выиграетъ данное число партій при данномъ числѣ, опредѣляющемъ окончательный выигрышъ.

Покажемъ, какъ вычислить напр. число 140, соотвѣтствующее 5 партіямъ для выигрыша при 2 партіяхъ, выигранныхъ первымъ игрокомъ.

Имѣемъ: A не хватаетъ $r=3$, B не хватаетъ $s=$ 5 партій для выигрыша. Число партій, достаточныхъ для окончанія игры въ чью бы то ни было пользу, равно $3+5-1=7$. Имѣемъ въ пользу B вѣроятность $\dfrac{C_7^5 + C_7^6 + C_7^7}{2^7} = \dfrac{C_7^2 + C_7^1 + C_7^7}{2^7} =$ $\dfrac{21+7+1}{128} = \dfrac{29}{128}$ Ставка B, т. е. 256 черв. или половина всей ставки соотвѣтствуетъ вѣроятности $\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{64}{128}$ Поэтому B утерялъ $\dfrac{35}{128}$ въ пользу A, или 35 червонцевъ на 128, или 140 на всѣ $256\times 2=512$. Это число 140 и стоитъ въ таблицѣ. Прибавивъ его къ 256, т. е. къ ставкѣ A, найдемъ, сколько получитъ A въ случаѣ прекращенія игры.

Точно также для 5 выигрышныхъ партій, если A выигралъ 3, а B ни одной, найдемъ въ пользу B вѣроятность $\dfrac{7}{64}$; онъ теряетъ отъ $\dfrac{1}{2}$ въ пользу

A, вѣроятность $\frac{25}{64}$ или 25 черв. на 64 или 200 черв. на 512; число 200 и находится въ таблицѣ. Самое первое число 63 получено взявъ сумму $C_{10}^4 + C_{10}^3 + C_{10}^2 + 1 = 386$, вычтя ее изъ 512, что даетъ 126, и раздѣливъ на 2, ибо $2^{10} = 1024$ вдвое болѣе, чѣмъ число 512, соотвѣтствующее полной ставкѣ. Если A не хватаетъ 5 партій, а B не хватаетъ 6 партій и выигрышъ назначенъ 6 партій, то A, въ случаѣ прекращенія игры, получаетъ свою ставку 256 и еще 63 червонца.

IV. Задача Моавра.

Рѣшимъ теперь слѣдующую задачу:

Дано 6 шаровъ, обозначенныхъ номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какова вѣроятность, при трехъ послѣдовательныхъ тиражахъ (т. е. при вынутіи шаровъ изъ урны), получить въ общемъ итогѣ сумму номеровъ равную 9, если послѣ каждаго тиража вынутый шаръ кладется обратно въ урну.

Число всѣхъ случаевъ очевидно равно $6^3 = 216$. Дѣйствительно, въ первый тиражъ можетъ выйти любой изъ шести №№, стало быть имѣемъ 6 случаевъ; каждый изъ этихъ случаевъ можетъ во второмъ тиражѣ сочетаться съ выходомъ любого изъ 6 шаровъ, что даетъ 36 случаевъ и т. д. Остается опредѣлить число случаевъ, благопріятствующихъ событію. Но не трудно видѣть, что эта вторая задача сводится къ опредѣленію числа всевозможныхъ способовъ, которыми можно образовать сумму 9 изъ трехъ слагаемыхъ (по числу тиражей) и при томъ такихъ, которыя меньше 7 или, что то же, равны, или меньше 6 (такъ какъ имѣемъ лишь 6 шаровъ съ номерами отъ 1 до 6 включительно). Не особенно трудно найти, что искомыя комбинаціи слагаемыхъ приведутся къ тремъ типамъ. Могутъ быть три одинаковыхъ слагаемыхъ, именно 3+3+3. Это случай единственный въ своемъ родѣ, когда во всѣ три тиража выйдетъ одинъ и тотъ же номеръ 3.

Могутъ быть два одинаковыхъ слагаемыхъ, при третьемъ различномъ. Такихъ случаевъ два основныхъ, напр. $2+2+5$ и $1+4+4$, и всѣ тѣ, которые можно изъ нихъ получить путемъ всевозможныхъ перестановокъ, напр. $2+5+2$; слагаемыя написаны по тому порядку, какъ выходятъ номера въ тиражахъ, такъ что 2+5+2 означаетъ: въ 1-ый тиражъ вышло 2, во второй 5, въ третій 2. Для каждаго изъ этихъ двухъ случаевъ будетъ по 3 перестановки; всего поэтому 6 такихъ случаевъ. Наконецъ имѣемъ три основныхъ случая, для которыхъ всѣ три слагаемыхъ различны, а именно 1+2+6, 1+3+5 и 2+3+4. Каждый изъ этихъ случаевъ даетъ по 6 перестановокъ, итого 18 случаевъ. Всего имѣемъ, стало быть, $1+6+18=25$ благопріятныхъ случаевъ. Искомая вѣроятность составляетъ поэтому $\frac{25}{216}$.

Число 25 (т. е. число благопріятныхъ случаевъ) можно найти инымъ путемъ, важнымъ для обобщенія предложенной задачи.

Не трудно видѣть, что задача: найти всѣ способы составленія суммы 9 изъ трехъ слагаемыхъ меньшихъ, чѣмъ 7,—задача эта тождественна со слѣдующею: найти коэффиціентъ при x^9 въ разложеніи третьей степени отъ многочлена $x+x^2+$

$x^3+x^4+x^5+x^6$. Дѣйствительно, чтобы найти въ разложеніи

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$$

всѣ члены, содержащіе x^9, надо подъискать всѣ множители вида $x^{к}$, которые при троекратномъ перемноженіи между собою дадутъ x^9, стало быть ихъ показатели, взятые по три, должны въ суммѣ давать постоянно 9, и эти показатели ничто иное, какъ числа отъ 1 до 6 включительно.

Но возвышеніе многочленовъ всего удобнѣе производится по предложенному мною десять лѣтъ тому назадъ способу символическаго умноженія. Разъясню въ двухъ словахъ этотъ способъ. Всякій многочленъ, расположенный по возрастающимъ степенямъ какой либо одной буквы, можно разсматривать какъ символическое число, написанное по индійской (ошибочно называемой арабскою) системѣ письменнаго счисленія. Такъ напр. вмѣсто $a+bx+cx^2$ можно написать $a\ b\ c$, подразумѣвая степени x, вмѣсто $a-cx^2$ можно написать $a\ 0\ \bar{c}$ гдѣ 0 есть нулевой, $\bar{c}$ отрицательный коэффиціентъ. Вмѣсто $3+5x+x^2$ напишемъ въ разбивку) 3 5 1 и т. д. Если теперь требуется напр. умножить $3+5x+x^2$ скажемъ на $1+x$, то пишемъ схему

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}$$

и производимъ сложеніе по *косвеннымъ* столбцамъ. Получаемъ въ результатѣ 3 8 6 1, т. е. $3+8x+6x^2+x^3$, что легко провѣрить обыкновеннымъ алгебраическимъ умноженіемъ. По тому же способу чрезвычайно легко возвысить [1] въ любую цѣлую степень многочленъ вида $x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots x^r$ или, по нашему символическому обозначенію, много—членъ вида 0 1 1 1 .... гдѣ 1 повторится r разъ, а нуль обозначаетъ отсутствіе члена, содержащаго x въ нулевой степени или что тоже члена независимаго отъ x.

Возьмемъ напр., многочленъ шестой степени (согласно раньше предложеннымъ условіямъ задачи о шарахъ), т. е. многочленъ

0 1 1 1 1 1 1

и возвысимъ его въ кубъ.

Для этого сначала возвысимъ въ квадратъ по схемѣ:

	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1

Не выписывая всей схемы, можно было бы увидѣть, что результатъ приводится къ многочлену 12-ой степени.

0 0 1 2 3 4 5 6 5 4 3 2 1

(т. е. къ $x^2+2x^3+3x^3+$и т. д.$+2x^{11}+x^{12}$)

Если этотъ многочленъ вновь умножить на 0 1 1 1 1 1 1, то и получимъ требуемый кубъ по схемѣ.

[1] Выгода его состоитъ въ томъ, что такъ наз. *приведеніе* подобныхъ членовъ совершается само собою, ибо подобные члены располагаются по косвеннымъ столбцамъ. Подробности см. въ цитированной брошюрѣ: Упрощ. алгебр. дѣйствій.

	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Въ десятомъ косвенномъ столбцѣ соотвѣтсвующемъ x^9 имѣемъ сумму коэффиціентовъ $5+6+$ $+5+4+3+2=25$; это и есть искомое число тройныхъ слагаемыхъ, каждое меньше семи, дающихъ въ суммѣ 9.

Требуемая сумма.	Число тиражей.							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8

Взявъ 6 шаровъ съ номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и предположивъ, что число тиражей послѣдовательно равно 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, составимъ этимъ путемъ таблицу случаевъ благопріятныхъ для по-

явленія суммы равной послѣдовательно 1, 2, 3 и т. д. до 9 включительно. (См. таблицу).

Изъ этой таблицы видно напр., что сумму 9 можно составить изъ 4 слагаемыхъ, перестанавливаемыхъ всѣми возможными способами и притомъ такихъ, что каждое изъ нихъ меньше семи, 56 различными способами.

Бѣглый взглядъ на эту таблицу показываетъ, что составленіе ея можно упростить. Дѣйствительно въ третьей строкѣ имѣемъ напр. коэффиціенты 1 2 1. Но это биноміальные коэффиціенты, именно коэффиціенты разложенія второй степени отъ 1 1 (или, что то же, отъ $1+x$). Точно также въ 4-й строкѣ имѣемъ коэффиціенты третьей степени или отъ куба $(1+x)^3$ и т. д., лишь съ 7-ой строки оказывается, что первый коэффиціентъ 6-й степени надо замѣнить нулемъ вмѣсто единицы. Девятую строку можно было бы точно также получить сразу взявъ $(1+x)^8$ или что то же символически $(1\ 1)^8$, но здѣсь первые *три* коэффиціента 0, 4, 25 придется получить инымъ путемъ. Такое различіе зависитъ отъ того, что начиная съ 7 требуемая сумма превышаетъ величину наивысшаго номера, равнаго 6; но составленіе таблицы этимъ не мало не затрудняется, такъ какъ легко замѣтить симметрію *столбцовъ*; во второмъ столбцѣ имѣемъ напр. въ 8-ой строкѣ, какъ и въ 6-ой, цифру 5. затѣмъ въ 9-ой какъ и въ 5-ой оказывается 4 и т. д. Не трудно найти отношеніе этой задачи къ такъ наз. фигурнымъ числамъ и къ ариѳметическому треугольнику Паскаля, о чемъ достаточно упомянуть [1]). Замѣтимъ еще, что въ нашемъ при-

[1]) Обычный способъ рѣшенія этой задачи состоитъ въ приведеніи разложенія:

мѣрѣ въ 3-мъ столбцѣ и 9 строкѣ получилось число 25 вмѣсто биноміальнаго коэффиціента $\frac{8.7}{1.2} = 28$ по той причинѣ, что *три* комбинаціи трехъ слагаемыхъ, дающихъ сумму. 9, а именно, тѣ, которые получаются отъ всевозможныхъ перестановокъ слагаемыхъ $7 + 1 + 1$, не удовлетворяютъ условіямъ задачи, такъ какъ у насъ нѣтъ шара съ номеромъ 7. Поэтому другой способъ составленія таблицы состоитъ въ томъ, чтобы написать ее сначала по биноміальнымъ коэффиціентамъ, а затѣмъ опредѣлить всѣ негодныя комбинаціи и числа ихъ отбросить отъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ. Такъ для суммы 10 при 4 тиражахъ имѣли бы биноміальный коэффиціентъ $C_9^3 = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84$; но изъ 4 слагаемыхъ, если необращать вниманіе на номера шаровъ, можно было бы составить 10 и съ номерами, высшими чѣмъ 6. Ими то и займемся; найдемъ: 9 и 8 не годятся, ибо не останется достаточнаго числа еще на 3 слагаемыхъ; можно взять только $7+1+1+1$ и всѣ перестановки этой группы, число же перестановокъ изъ 4 элементовъ съ тройнымъ повтореніемъ одного изъ нихъ равно $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$, стало быть всего имѣемъ 4 негодныхъ комбинаціи, отбрасы-

---

$$(x + x^2 + \ldots + x^r)^n$$

къ виду $\left(\frac{x^{r+1} - x}{x - 1}\right)^n = x^n (x^r - 1)^n (x - 1)^{-n}$

$(x^r - 1)^n$ и $(x - 1)^{-n}$ разлагаютъ по формулѣ бинома Ньютона и затѣмъ перемножаютъ результаты, при чемъ исчезаютъ всѣ члены съ отрицательными показателями. Способъ этотъ гораздо сложнѣе и искусственнѣе приведеннаго въ текстѣ.

вая отъ 84, найдемъ число 80, соотвѣтствующее ненаписанной нами 10-ой строкѣ въ 4-омъ столбцѣ. Въ той же строкѣ въ 3-мъ столбцѣ биноміальный коэффиціентъ былъ бы $C_9^2 = \frac{9.8}{1.2} = 36$, но легко найти, что число негодныхъ комбинацій здѣсь будетъ равно 9, а потому вмѣсто 36 получимъ 25, какъ уже было найдено.

Такъ какъ игральная кость имѣетъ 6 граней и соотвѣтствуетъ 6 шарамъ съ номерами съ 1 по 6 включительно, то наша таблица примѣнима и къ задачамъ на игральныя кости, при чемъ вмѣсто послѣдовательнаго тиража бросаютъ всѣ кости одновременно.

Примѣръ: какъ велика вѣроятность получить сумму 15, бросивъ три игральныя кости?

Отвѣтъ: всѣхъ случаевъ $6 \times 6 \times 6 = 216$; число благопріятныхъ случаевъ найдемъ, если продолжимъ таблицу до 15 строки и третьяго столбца включительно, при чемъ нашли бы число 10. Искомая вѣроятность равна поэтому $\frac{10}{216}$.

V. Полная и сложная вѣроятность.

Если мы раздѣлимъ всѣ благопріятные случаи на группы какимъ угодно способомъ, лишь бы ни одинъ случай не повторялся, т. е. не попадалъ въ двѣ или болѣе группъ, то, разумѣется, ничѣмъ не измѣнимъ свойствъ этихъ случаевъ, такъ какъ по опредѣленію вѣроятности, всѣ случаи, а стало быть въ частности и всѣ благопріятные случаи признаются равновозможными и это ихъ свойство не зависитъ отъ способа перечисленія.

Пусть напр. необходимо опредѣлить вѣроятность того событія, что изъ пяти номеровъ 1, 2, 3, 4, 5 будетъ на удачу вынутъ четный номеръ. Можно было бы просто сосчитать число четныхъ номеровъ и мы нашли бы, что искомая вѣроятность равна $\frac{2}{5}$ такъ какъ изъ 5 случаевъ 2 благопріятны событію. Вмѣсто этого, однако, можно отдѣльно опредѣлить вѣроятность вынуть 2 равную $\frac{1}{5}$ и затѣмъ вѣроятность вынуть 4 равную также $\frac{1}{5}$, при чемъ окажется, что *полная* вѣроятность вынуть вообще четный номеръ, т. е. вынуть либо 2, либо 4, будетъ равна $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, т. е. равна суммѣ составляющихъ ее вѣроятностей.

Полная вѣроятность того, что будетъ вынутъ или четный или нечетный номеръ равна достовѣрности, потому что для четныхъ номеровъ имѣемъ вѣроятность $\frac{2}{5}$, а для нечетныхъ $\frac{3}{5}$, что въ суммѣ даетъ 1. *Примѣръ:* какова вѣроятность получить съ тремя игральными костями сумму очковъ болѣе 14? *Отвѣтъ:* трое костей не могутъ дать болѣе 18; искомая вѣроятность равна суммѣ вѣроятностей въ пользу появленія 15, 16, 17 и 18 очковъ. Эти послѣднія можно опредѣлить помощью таблицы, вродѣ приведенной выше; найдемъ 10, 6, 3 и 1 благопріятныхъ случаевъ на 216 всѣхъ возможныхъ, поэтому искомая полная вѣроятность равна $\frac{20}{216}$.

При вычисленіи полной вѣроятности легко впасть въ грубыя ошибки, если мы не примемъ во вниманіе, что нѣкоторые случаи могутъ быть одновременно въ разныхъ группахъ. Такъ, если бы вздумали опредѣлить полную вѣроятность того, что изъ числа номеровъ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, вынутый будетъ или нечетнымъ, или дѣлящимся на 5, то впали бы въ грубую ошибку, если бы сложили вѣроятность вынуть 5 съ вѣроятностью вынуть нечетный номеръ. Здѣсь ошибка черезчуръ очевидна. Очевидна она и въ примѣрахъ вродѣ слѣдующаго: найти вѣроятность, чтобы двѣ игральныя кости были таковы, чтобы одно изъ двухъ очковъ дало либо 3, либо 4. Можно подумать, что искомая сумма равна здѣсь суммѣ вѣроятностей соотвѣтствующихъ выпаденію либо 3, либо 4; но это ошибка, такъ какъ возможенъ случай, когда сразу выпадутъ на одной изъ костей 3 очка, а на другой 4. Менѣе очевидна ошибка, если требуется получить комбинацію $6+6$ для двухъ костей *по малой мѣрѣ* при двухъ бросаніяхъ. Можно бы подумать, что необходимо опредѣлить вѣроятность получить $6+6$ при каждомъ метаніи и затѣмъ взять сумму; на такое сложеніе неправильно, потому что число благопріятныхъ случаевъ второго метанія берется не изъ числа случаевъ перваго бросанія и совершенно отъ него независимо.

Теперь не трудно найти общее алгебраическое доказательство теоремы о полныхъ вѣроятностяхъ.

Пусть будутъ p_1, p_2, p_3, и т. д. вѣроятности, соотвѣтствующія разнымъ предполагаемымъ причинамъ событія, а q_1, q_2, q_3, и т. д. соотвѣтственныя вѣроятности, придаваемыя этому событію тѣми же причинами, въ предположеніи, что эти причины навѣрное дѣйствуютъ, тогда полная вѣроятность P нашего событія будетъ равна суммѣ произведеній изъ вѣроятности каждой причины на вѣроятность, придаваемую ею событію, т. е. найдемъ

$$P = p_1 q_2 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + \text{ и т. д.}$$

Дѣйствительно, пусть будетъ N число всѣхъ случаевъ; оно равно суммѣ чиселъ n_1, n_2, n_3, и т. д. соотвѣтствующихъ причинамъ первой, второй, третьей и т. д. Пусть будетъ F число всѣхъ благопріятныхъ случаевъ: оно равно суммѣ чиселъ, соотвѣтствующихъ благопріятнымъ случаямъ f_1, f_2, f_3, и т. д., опредѣленнымъ первою, второю, третью и т. д. причиною, имѣемъ поэтому:

$$P = \frac{F}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} =$$

$$\frac{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots}{N} \quad \text{Но} \quad \frac{f_1}{N} = \frac{f_1}{n_1} \times \frac{n_1}{N} =$$

$p_1 \times q_1$, ибо $\frac{n_1}{N}$ есть очевидно вѣроятность наступленія первой причины, равная

$$\frac{\text{числу случаевъ благопріятныхъ этой причинѣ}}{\text{число всѣхъ случаевъ}}$$

а съ другой стороны $\frac{f_1}{n_1}$ есть вѣроятность, придаваемая первою причиною данному событію, Отсюда ясно, что $P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 +$ и т. д.

Сложная вѣроятность. Съ полною вѣроятностью не слѣдуетъ смѣшивать сложной вѣроятности.

Полная вѣроятность образуется изъ вѣроятностей, соотвѣтствующихъ разнымъ предполагаемымъ между собою причинамъ событія, при чемъ каждая изъ нихъ исключаетъ всѣ другія. Сложная вѣроятность требуетъ *стеченія* нѣсколькихъ причинъ; всѣ разсматриваемыя причины должны быть на лицо, для того чтобъ событіе наступило; наступленіе событія составляется поэтому изъ другихъ событій, которыя предполагаются другъ отъ друга *независимыми* въ томъ смыслѣ, что наступленіе одного изъ нихъ ни мало не уменьшаетъ и не увеличиваетъ наступленія другого. Не трудно доказать, что вѣроятность сложнаго событія равна *произведенію* простыхъ вѣроятностей всѣхъ составляющихъ его событій

Дѣйствительно пусть будутъ n_1, n_2, n_3 и т. д числа случаевъ возможныхъ для каждаго изъ простыхъ событій. Каждый изъ случаевъ n_1 соединяясь послѣдовательно съ каждымъ изъ n_2 дастъ $n_1 n_2$ случаевъ, каждый изъ этихъ $n_1 n_2$ случаевъ, соединяясь съ каждымъ изъ n_3 случаевъ, дастъ $n_1 n_2 n_3$ случаевъ и т. д. Общее число N всѣхъ случаевъ равно произведенію $n_1 n_2 n_3 \ldots$ Пусть теперь будутъ f_1, f_2, f_3 и т. д. числа случаевъ, благопріятныхъ первому, второму, третьему и. т. д. простому событію; такимъ же образомъ найдемъ, что F число всѣхъ случаевъ благопріятныхъ данному событію равно $f_1 f_2 f_3 \ldots.$ Поэтому

$$P = \frac{f_1 f_2 f_3 \ldots}{n_1 n_2 n_3 \ldots} \text{ Но } \frac{f_1}{n_1} = p_1$$

есть вѣроятность перваго простого событія и т. д. Поэтому имѣемъ $P = p_1 p_2 p_3 \ldots$ что и требовалось доказать. Приведемъ для поясненія примѣръ: Въ урнѣ находятся четыре шара, два черныхъ и два бѣлыхъ. Вынимаемъ сряду два шара, не кладя обратно. Какова вѣроятность вынуть два бѣлыхъ шара?

Это сложное событіе состоитъ изъ двухъ. 1) Въ первый разъ долженъ быть вынутъ бѣлый шаръ. Вѣроятность вынуть именно бѣлый равна $\frac{1}{2}$. 2) По наступленіи перваго событія долженъ вторично появится бѣлый шаръ; но всѣхъ шаровъ осталось теперь 3; изъ нихъ, если *первое событіе уже наступило*, навѣрное будутъ 2 черныхъ на 1 бѣлый, поэтому вѣроятность вынуть бѣлый шаръ во второй разъ будетъ $\frac{1}{3}$

Отсюда видно, что вѣроятность нашего сложнаго событія равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

VI. Вѣроятность повторенія.

Въ предъидущихъ главахъ уже были даны нѣкоторыя указанія на случаи, когда требуется вычислить вѣроятность многократнаго повторенія одного и того же событія. Теперь мы укажемъ самый общій способъ, позволяющій рѣшить всѣ задачи подобнаго рода.

Если дано нѣкоторое событіе, которое отмѣтимъ номеромъ первымъ, и вѣроятность появленія этого событія равна p_1; если, точно также, вѣроятность событія, обозначеннаго номеромъ вторымъ равна p_2 и т. д, и извѣстно, что одно изъ n данныхъ событій должно непремѣнно наступить, то полная вѣроятность того, что наступитъ либо первое, либо второе и т. д., либо, наконецъ, n-тое событіе равна достовѣрности, т. е. единицѣ; но она же равна суммѣ вѣроятностей $p_1 + p_2 +$ и т. д. $+ p_n$.

Пусть теперь ищется вѣроятность, чтобы первое событіе наступило, въ какомъ угодно порядкѣ, всего κ_1 разъ, второе κ_2 разъ и т. д., наконецъ n-тое κ_n разъ. Вѣроятность *сложнаго* событія, состоящаго въ томъ, чтобы первое событіе наступило въ одномъ опредѣленномъ порядкѣ κ_1 разъ, второе κ_2 и т. д. равно произведенію простыхъ вѣроятностей; полная вѣроятность того, что это сложное событіе произойдетъ не въ одномъ, а въ какомъ угодно порядкѣ, равна суммѣ найденныхъ сложныхъ вѣроятностей, и если κ_1 и т. д. имѣютъ заранѣе данныя значенія, то всѣ эти вѣроятности равны, и стало быть надо знать число такихъ сложныхъ вѣроятностей, которыя равны между собою, и соединить ихъ въ одинъ членъ; то же и для другихъ, равныхъ между собою. Каждая сложная вѣроятность для наступленія перваго событія κ_1 разъ и т. д. выразится произведеніями вида.

$$p_1^{\kappa_1}\; p_2^{\kappa_2}\; p_3^{\kappa_3}\; \ldots\ldots p_n^{\kappa_n}$$

Дѣйствительно, вѣроятность того, чтобы первое событіе наступило κ_1 разъ, равна $p_1^{\kappa_1}$, потому что какъ общее число случаевъ, такъ и число благопріятныхъ случаевъ при каждомъ повтореніи событія возводится еще въ одну степень.

Но такихъ группъ, какъ только что написанная, можно составить столько же, сколько перестановокъ изъ n элементовъ съ повтореніемъ перваго изъ нихъ κ_1 разъ и т. д. Число это, которое мы обозначимъ черезъ N, какъ извѣстно равно:

$$\frac{\kappa!}{\kappa_1!\; \kappa_2!\; \ldots\ldots \kappa_n!} \quad \text{гдѣ} \quad \kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n$$

Стало быть искомая полная вѣроятность, чтобы при κ опытахъ, первое событіе повторилось κ_1, второе κ_2 разъ и т. д. наконецъ n-тое, κ_n разъ. равна:

$$N\, p^{\kappa_1}\, p_2^{\kappa_2} \ldots p_n^{\kappa_n},$$ гдѣ N имѣетъ выше опредѣленную величину.

Чрезвычайно легко и въ то же время важно связать вычисленіе вѣроятности повторныхъ попытокъ съ алгебраической теоріей возвышенія многочленовъ въ любую степень.

Дѣйствительно, вѣроятность того, чтобы въ каждомъ опытѣ непремѣнно наступило одно изъ изслѣдуемыхъ событій, если именно эти событія исчерпываютъ всѣ возможные случаи и если при *каждомъ* опытѣ должно наступить одно изъ этихъ n событій, эта вѣроятность равна достовѣрности. Имѣемъ стало быть:

$$p + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Съ другой стороны, вѣроятность того, чтобы какое либо изъ нашихъ n событій, все равно какое именно и въ какомъ порядкѣ, наступило κ разъ сряду, также равна достовѣрности, ибо при каждомъ изъ κ опытовъ хотя одно изъ нашихъ событій хотя однажды наступитъ. Стало быть и эта вѣроятность равна достовѣрности; но съ другой стороны ясно, что это есть сложная вѣроятность, равная произведенію κ вѣроятностей, соотвѣтствующихъ наступленію одного изъ нашихъ событій въ одномъ изъ κ случаевъ. Имѣемъ поэтому

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)^{\kappa} = 1$$

гдѣ первая часть равенства выражаетъ вѣроятность того, что одно изъ нашихъ событій наступитъ въ теченіе κ опытовъ.

Но первая часть равенства разлагается, какъ извѣстно, на сумму вида

$$\Sigma \, N \, p_1^{\kappa_1} \, p_2^{\kappa_2} \ldots p_n^{\kappa_n}$$

т. е. сумму такихъ членовъ, каковъ стоящій за знакомъ Σ, при чемъ N имѣетъ вышеопредѣленное значеніе, опредѣляемое теоріей перестановокъ съ повтореніями а сверхъ того имѣемъ $\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n = \kappa$, и κ_1 и т. д. имѣютъ всевозможныя значенія отъ нуля до κ включительно. Это ясно и изъ слѣдующаго: вѣроятность того, что хотя одно изъ нашихъ событій наступитъ хотя однажды въ теченіе κ опытовъ равна

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)^{\kappa}$$

но полная вѣроятность того, что въ теченіе κ опытовъ первое событіе наступитъ κ_1 разъ, гдѣ κ_1 имѣетъ лишь одно опредѣленное значеніе (изъ всѣхъ, равныхъ 0, 1, 2 и т. д. до κ включительно), второе κ_2 разъ, гдѣ κ_2 имѣетъ лишь одно опредѣленное значеніе и т. д. равна

$$N \, p_1^{\kappa_1} \, p_2^{\kappa_2} \ldots p_n^{\kappa_n}$$

Ясно, что если придадимъ послѣдовательно κ_1 и т. д. всѣ ихъ значенія и составимъ сумму всѣхъ полученныхъ вѣроятностей, то опять исчерпаемъ всѣ возможные случаи; поэтому и найдемъ

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)^{\kappa} = \Sigma \, N \, p_1^{\kappa_1} \, p_2^{\kappa_2} \ldots p_n^{\kappa_n}$$

Если возьмемъ въ частности случай двухъ событій, то найдемъ, что вѣроятность p наступленія перваго изъ нихъ будетъ противовѣроятностью наступленія другого изъ нихъ и обратно. Поэтому, если p вѣроятность, q противовѣроятность наступленія перваго, то имѣемъ

$$(p+q)^\kappa = \Sigma\, N\, p^{\kappa_1} \quad q^{\kappa_2} = 1$$

гдѣ $N = \frac{\kappa!}{\kappa_1! \quad \kappa_2!}$ и $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$, при чемъ κ_1 и κ_2 получаютъ всѣ значенія отъ 0 до κ.

Общій членъ $N\, p^{\kappa_1}\, q^{\kappa_2} = \frac{\kappa!}{\kappa_1! \quad \kappa_2!} \; p^{\kappa_1}\, q^{\kappa_2}$

выражаетъ вѣроятность того, что первое событіе наступитъ κ_1 разъ въ какомъ угодно порядкѣ, а не наступитъ $\kappa_2 = \kappa - \kappa_1$ разъ, гдѣ κ_1 имѣетъ одну опредѣленную величину. Можно еще замѣтить что $N = C_\kappa^{\kappa_1} = C_\kappa^{\kappa_2}$

Можно напр. этимъ путемъ снова рѣшить задачу Паскаля, нѣсколько ее обобщивъ: пусть p будетъ вѣроятность въ пользу перваго игрока до начала игры, q вѣроятность въ пользу второго, при чемъ $p+q=1$, т. е. ничьей быть не можетъ. Тогда если первому не хватаетъ до окончанія игры r партій, а второму s партій, мы видимъ, что для окончательнаго результата надо съиграть не болѣе $\kappa = r+s-1$ партій. Задача сводится къ тому, чтобы опредѣлить вѣроятность повторенія по крайней мѣрѣ r разъ событія, если вѣроятность простого его появленія при одномъ опытѣ равна p. Искомая вѣроятность есть очевидно сумма всѣхъ тѣхъ вѣроятностей, которыя найдемъ, вычисливъ сначала вѣроятность того, что первый игрокъ выиграетъ наименьшее требуемое число разъ, т. е. именно r разъ, затѣмъ, что онъ выиграетъ $r+1$ разъ и т. д. и наконецъ, что онъ выиграетъ всѣ $\kappa = r+s-1$ партій, поэтому надо взять сумму

$C_\kappa^r p^r q^{s-1} + C_\kappa^{r-1} p^{r-1} q^s + \cdots + C_\kappa^\kappa p^\kappa$ Въ частности, если до начала игры шансы равны, т. е. $p = q = \frac{1}{2}$, мы возвратимся къ данному уже рѣшенію. Если напр. при равныхъ шансахъ обоихъ игроковъ первому не хватаетъ 2 партій, второму 3 партій, то составляемъ биномъ $(1\ 1)^4 = 1\ 4\ 6\ 4\ 1$ и беремъ въ пользу перваго $(1 + 4 + 6 + 4 + 1\ 4 = 2^4 = 16$ случаевъ) коэффиціенты соотвѣтствую выигрышу либо 2 партій (коэффиціентъ при p_2. именно 6), либо 3 партій (коэфф. при p_3 т. е. 4), либо 4 партій (коэф. при p_4 т. е. 1). Поэтому въ пользу перваго имѣемъ 11 случаевъ. Въ пользу второго пойдутъ коэффиціенты при q^3 и q^4 т. е. $4 + 1 = 5$, причемъ предполагается, какъ сказано, что $p = q = \frac{1}{2}$.

Вѣроятности различныхъ предполагаемыхъ причинъ событія.

Пусть будетъ N число всѣхъ возможныхъ случаевъ, n_1, n и т. д. число случаевъ, соотвѣтствующее первой, второй и т. д. причинѣ. Тогда, какъ мы уже знаемъ, $\frac{n_1}{N}$ есть вѣроятность наступленія первой причины и т. д. Далѣе пусть будетъ f_1 число случаевъ, благопріятныхъ событію въ предположеніи, что первая причина уже наступила, тогда $\frac{f_1}{n_1}$ есть вѣроятность, придаваемая событію этой причиной; произведеніе же $\frac{n_1}{N} \times \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_1}{N}$ есть сложная вѣроятность даннаго событія, въ предположеніи, что всѣ остальныя причины, кромѣ первой, устранены не объективно, а субъективно, т. е. не потому, что онѣ признаны невозможными, а потому, что онѣ не подвергнуты изслѣдованію; вѣроятность событія опредѣлена до всякаго опыта, т. е. по N, числу всѣхъ возможныхъ случаевъ, а также по f_1, числу случаевъ, благопріятныхъ событію, въ предположеніи, что первая причина и есть истинная. Назовемъ эту сложную вѣроятность хотя бы буквою Π_1, тогда имѣемъ, слѣдовательно, $\Pi_1 = p_1\ q_1$ гдѣ $q_1 = \frac{f_1}{n_1}$, $p_1 = \frac{n_1}{N}$, сумма же всѣхъ такихъ сложныхъ вѣроятностей, соотвѣтствующихъ всѣмъ, другъ друга взаимно исключающимъ причинамъ, и будетъ равна полной вѣроятности нашего событія. Имѣемъ поэтому: $p = \Pi_1 + \Pi_2 +$ и т. д.

Но съ другой стороны, сложную вѣроятность Π можно получить еще иначе. Вѣроятность наступленія событія подъ вліяніемъ первой причины, до всякаго опыта, можно составить изъ полной вѣроятности самаго событія, т. е. изъ p и изъ вѣроятности P_1 того, что если *событіе уже наступило*, это произошло именно подъ вліяніемъ *первой* причины. Имѣемъ, поэтому, $\Pi_1 = P_1\ p = P_1$ $(p_1\ q_1 + p_2\ q_2 + \ldots)$ откуда найдемъ:

$$P_1 = \frac{p_1\ q_1}{p_1\ q_1 + p_2\ q_2 + \ \cdot\ \ \cdot} = \frac{\Pi_1}{p}$$

Это равенство выражаетъ такъ наз. теорему, Байеса (Bayes), состоящую въ слѣдующемъ. Если $p_1, p_2, p_3 \ldots$ вѣроятности первой, второй и т. д. причины; $q_1, q_2, q_3 \ldots$ вѣроятности, придаваемыя этими причинами событію, то вѣроятность P_1 того, что уже *наступившее*, напр. наблюдаемое событіе зависитъ именно отъ первой причины, равна частному изъ опредѣленной субъективно, по отношенію къ первой причинѣ, вѣроятности событія, на полную вѣроятность того-же событія. Если вѣроятности всѣхъ причинъ апріорно признаны одинаковыми, то найдемъ болѣе простое выраженіе, потому что тогда $p_1 = p_2 = p_3$ и т. д. и получимъ:

$$P_1 = \frac{q_1}{q_1 + q_2 + \ldots} = \frac{q_1}{p}$$

Т. е. вѣроятность того, что несомнѣнно наступившее событіе наступило вслѣдствіе первой изъ равновозможныхъ причинъ, измѣряется частнымъ изъ вѣроятности, сообщаемой событію этой именно причиной, на полную вѣроятность событія. Обыкновенно именно этотъ болѣе частный случай равновозможныхъ причинъ и называется теоремою Байеса.

Слѣдующій примѣръ выяснитъ смыслъ этой теоремы.

Въ урнѣ содержится всего 5 шаровъ, бѣлыхъ и черныхъ. Не извѣстно, сколько именно тѣхъ и другихъ. Мы вынули бѣлый шаръ; является вопросъ: какъ велика вѣроятность, что въ урнѣ было 3 бѣлыхъ шара?

Рѣшеніе. Причинами происшедшаго вынутія бѣлаго шара могутъ быть:

1	бѣлый	4	черныхъ	шара.	1-ая	причина.
2	»	3	»	»	2 »	»
3	»	2	»	»	3 »	»
4	»	1	»	»	4 »	»
5	»	0	»	»	5 »	»

Не зная ничего о причинахъ, допускаемъ, что всѣ онѣ равновозможны.

Вѣроятность, придаваемая событію (если бы оно еще не случилось) 1-ою причиною, т. е. q_1 въ нашемъ случаѣ есть $\frac{1}{5}$, если устранимъ всѣ прочія причины во всѣхъ возможныхъ случаяхъ. Для второй причины найдемъ $\frac{2}{5}$ и т. д., наконецъ для пятой найдемъ 1, т. е. достовѣрность. Для требуемой третьей причины найдемъ $q_3 = \frac{3}{5}$

и по теоремѣ Байеса. $P_1 = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1+2+3+4+5}{5}} =$

$= \frac{3}{(5+1).5:2} = \frac{1}{5}$.

Для двухъ бѣлыхъ шаровъ, нашли бы $\frac{2}{15}$; т. е. если изъ урны съ 5 шарами первый вынутый шаръ оказался бѣлымъ, а возможны также черные шары, то вѣроятность того, что въ урнѣ было 3 бѣлыхъ шара, равна $\frac{1}{5}$, а что ихъ было 2 равна $\frac{2}{15}$. Вѣроятность, что всѣ бѣлые, равна $\frac{1}{3}$.

Такъ какъ теорема Байеса принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ въ теоріи вѣроятностей, считаю не лишнимъ привести еще одно доказательство этой теоремы, (въ ея упрощенной формѣ).

Если f_1 есть число благопріятныхъ случаевъ, придаваемыхъ событію первою причиною, N число всѣхъ возможныхъ случаевъ, то прежде всего является вопросъ, получится ли какое-либо обобщеніе, если, не зная ничего о свойствахъ причинъ, мы признаемъ это число непостояннымъ, а различнымъ для разныхъ причинъ, напр. N_1 для первой причины, N_2 для второй и т. д. и будемъ разсматривать каждую причину съ соотвѣтствующимъ ей числомъ случаевъ? Это, конечно, болѣе общій случай, но такъ какъ буквою N можно обозначить любое число, то легко показать, что этотъ случай приведется къ предъидущему.

Дѣйствительно, пусть въ этомъ новомъ предположеніи имѣемъ соотвѣтственныя нашимъ причинамъ числа случаевъ, благопріятствующихъ событію, F_1, F_2, F_3 и т. д. и пусть будетъ N общее кратное чиселъ N_1. N_2 и т. д. Тогда стоитъ только взять $\frac{f_1}{N}=\frac{F_1}{N}=\frac{f_2}{N}=\frac{F_2}{N_2}$ чтобы возвратиться къ предъидущему случаю, ибо, очевидно, все равно, опредѣлить ли напр. 15 благопріятныхъ случаевъ изъ 60 или 1 изъ 4.

Итакъ, предположимъ (какъ мы дѣлали раньше), что число случаевъ N для всѣхъ причинъ одинаково. Тогда сообщаемая событію первой причиной вѣроятность того, что событіе можетъ наступить въ предположеніи дѣйствія первой причины, будетъ равна $\frac{f_1}{N}$. Если допустимъ, что вѣроятности самыхъ причинъ одинаковы (что нами и допущено, такъ какъ рѣчь идетъ объ упрощенной теоремѣ Байеса—и предположеніе это законно, если мы ничего не знаемъ о преимуществахъ однѣхъ причинъ надъ другими), то ясно, что вѣроятность того, что уже наступившее событіе произошло отъ дѣйствія первой причины, просто пропорціональна числу соотвѣтственныхъ благопріятныхъ случаевъ. Поэтому имѣемъ:

$$P_1 : P_2 : P_3 \ldots = f_1 : f_2 : f_3 \ldots,$$

Вѣроятность, что событіе произошло отъ *какой-*

либо изъ всѣхъ возможныхъ причинъ, равна достовѣрности. Поэтому $P_1+P_2+P_3+\ldots=1$, и изъ извѣстныхъ свойствъ пропорцій имѣемъ:

$$\frac{P_1}{1}=\frac{P_1}{P_1+P_2+P_3+\ldots}=\frac{f_1}{f_1+f_2+f_3+\ldots}=\frac{f_1}{N}:\frac{f_1}{N}+\frac{f_2}{N}+$$
$$+\frac{f_3}{N}+\ldots=\frac{q_1}{q_1+q_2+\ldots}$$

Стало быть имѣемъ, если p есть полная вѣроятность событія:

$$P_1=\frac{q_1}{q_1+q_2+\ldots}=\frac{q_1}{p}$$

что и требовалось доказать.

И такъ, вѣроятность одной изъ равновозможныхъ причинъ *уже наступившаго* событія, равна частному изъ вѣроятности, которую сообщила бы эта причина событію, если бы самая причина была достовѣрна, а событіе—еще ожидаемымъ, на полную вѣроятность, составленную изъ суммы всѣхъ вѣроятностей, соотвѣтствующихъ порознь взятымъ причинамъ.

Слѣдующая задача также рѣшается помощью теоремы Байеса.

Урна содержитъ бѣлые и черные шары. Каждый шаръ обозначенъ однимъ изъ номеровъ 1, 2, 3, . . . n; можетъ быть и нѣсколько шаровъ одного или разныхъ цвѣтовъ подъ однимъ номеромъ. Мы вынимаемъ шаръ; онъ оказывается бѣлымъ. Какова вѣроятность, что вынутый бѣлый шаръ обозначенъ задуманымъ номеромъ изъ числа 1, 2, 3, . . . n? Номера играютъ здѣсь роль «причинъ» событія. Пусть будетъ N общее число шаровъ, n_1 число шаровъ, обозначенныхъ номеромъ 1, n_2 — число шаровъ съ номеромъ 2 и т. д. Тогда $\frac{n_1}{N}$ есть вѣроятность номера 1 или первой причины и т. д. Пусть будетъ f_1 число *бѣлыхъ* шаровъ, обозначенныхъ номеромъ 1. Тогда $\frac{f_1}{n}$ есть вѣроятность, что изъ числа всѣхъ шаровъ съ номеромъ 1, будутъ вынуты всѣ бѣлые шары. Это и есть вѣроятность, придаваемая вынутію *бѣлаго* цвѣта первою причиною, т. е. номеромъ 1. Если обозначимъ черезъ q_1 вѣроятность $\frac{f_1}{n}$, а черезъ p_1 вѣроятность $\frac{n_1}{N}$ и т. д., то по теоремѣ Байеса найдемъ напр. вѣроятность того, чтобы уже вынутый бѣлый шаръ былъ съ номеромъ 3.

$$P_3 = \frac{p_3\, q_3}{p_1\, q_1 + p_2\, q_2 + p_3\, q_3 + \; . \; . \; . \; + p_n\, q_n}$$

Выше мы рѣшили другую задачу, въ которой было задано опредѣлить вѣроятность того, что въ урнѣ содержится извѣстное число шаровъ бѣлаго цвѣта. Рѣшимъ еще одну задачу въ томъ же родѣ, но на этотъ разъ не сдѣлаемъ предположенія о равновозможности всѣхъ причинъ, которое было тамъ сдѣлано.

Въ урну кладемъ черные и бѣлые шары, но не на удачу (тогда пришлось бы апріорно допустить, что всевозможныя комбинаціи равновѣроятны), а на основаніи какого либо правила, хотя бы опредѣленнаго, въ свою очередь, игрою случая, напр. азартною игрою, вродѣ игры въ орлянку. Условимся, чтобы послѣ каждаго выпавшаго орла слѣдовало класть въ урну черный шаръ, а послѣ каждой рѣшетки—бѣлый. Такъ какъ игра въ орлянку даетъ совершенно одинаковые шансы для орла и рѣшетки (именно $\frac{1}{2}$ при одномъ бросаніи какъ въ пользу орла, такъ и въ пользу рѣшетки), то такое условіе *ничего* не измѣнитъ, вопреки мнѣнію Бертрана и многихъ другихъ математиковъ. Или, точнѣе перемѣна будетъ состоять въ томъ, что какъ въ числитель, такъ и въ знаменатель вѣроятности придется ввести множитель $\frac{1}{2}$ въ одинаковой степени, при чемъ этотъ множитель сократится [1]). Измѣненіе въ условіяхъ задачи можетъ произойти совсѣмъ по другой причинѣ, которая, по моему мнѣнію, невѣрно истолкована Бертраномъ.

Дѣло въ томъ, что независимо отъ опредѣленія состава урны игрою въ орлянку, мы можемъ апріорно предположить, что въ урнѣ, содержащей, скажемъ, въ общемъ 5 шаровъ, масти распредѣляются однимъ изъ слѣдующихъ шести способовъ: 5 бѣлыхъ; 5 черныхъ; 4 б. 1 ч.; 4 ч. 1 б.; 3 б. 2 ч.; 3 ч. 2 б.

Раньше мы предполагали, что всѣ эти комбинаціи равновозможны. Это и слѣдуетъ допустить, если не различать между собою шары одной масти, т. е. если считать напр. всѣ три бѣлыхъ шара въ комбинаціи 3 б. 2 ч. равнозначущими и неразличимыми. Иное дѣло, если всѣ бѣлые и черные шары напр. занумерованы различными номерами или обозначены разными буквами и вообще, отличимы другъ отъ друга индивидуально, или если, наконецъ, мы различаемъ ихъ хоть *по порядку въ которомъ они были положены*

---

[1]) Бертранъ увѣряетъ, что при такомъ измѣненіи условій задачи «гипотезы относительно состава урны, вмѣсто того, чтобы быть апріорно равновѣроятными, получатъ различныя вѣроятности». Но различіе, имъ вводимое, не имѣетъ отношенія къ составленію содержимаго урны игрою въ орлянку, что и будетъ показано ниже въ текстѣ.

или вынуты. Это послѣднее условіе мы и введемъ, и тогда получимъ ту задачу, которую Бертранъ основываетъ на томъ, что составъ урны опредѣленъ игрою въ орлянку что, по моему мнѣнію, лишь запутываетъ истинный смыслъ различія, состоящій лишь въ томъ, что шары различаются между собою по порядку, въ которомъ были вынуты. Если различать шары по порядку вынутія, то не безразлично, выйдетъ ли въ самый первый разъ бѣлый шаръ или же черный и т. д. Поэтому если возьмемъ напр. составъ урны изъ 3 бѣлыхъ и 2 черныхъ шаровъ, то можно различать столько комбинацій, сколько будетъ перестановокъ изъ пяти элементовъ, въ числѣ которыхъ 3 одинаковыхъ между собою и 2 одинаковыхъ также между собою, а число это равно $\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 1.\ 2} = 10.$

Пусть теперь, при этихъ условіяхъ, задана задача: урна содержитъ 5 шаровъ, бѣлыхъ и черныхъ, но въ неизвѣстномъ составѣ. Вынимаемъ шесть разъ, разумѣется кладя всякій разъ вынутый шаръ обратно. Предположимъ, что всѣ 6 разъ мы вынули только по бѣлому шару. Какова вѣроятность, что урна содержитъ только бѣлые шары, т. е. что въ ней 5 бѣлыхъ и ни одного чернаго? Легко видѣть, что гипотезы 5 б. и 5 ч. каждая даютъ лишь по одной комбинаціи, потому что если напр. всѣ шары бѣлые и шары не нумерованы, то все равно, какой считать первымъ или вторымъ, положеннымъ въ урну.

Гипотезы: 4 б. 1 ч. или 4 ч. 1 б. даютъ по 5 комбинацій по формулѣ $\frac{5!}{4!\,1!} = 5.$

Гипотезы 3 б. 2 ч. или 3 ч. 2 б. даютъ 10 комбинацій. Поэтому, если первыя двѣ гипотезы считать первою и шестою, вторыя двѣ второю и пятою, третьи двѣ третьей и четвертою, вѣроятности всѣхъ этихъ причинъ будутъ пропорціональны числамъ $1:5:10:10:5:1$. Но съ другой стороны, комбинація, въ которой на N шаровъ имѣемъ бѣлыхъ напр. f_1 есть причина, придающая событію, т. е. вынутію бѣлаго шара, вѣроятность $\frac{f_1}{N}$ при одномъ вынутіи и вѣроятность $\left(\frac{f_1}{N}\right)^k$ при k вынутіяхъ. Такъ напр. одна изъ комбинацій 3 б. 2 ч. при 6 вынутіяхъ придаетъ появленію бѣлаго шара вѣроятность $\left(\frac{3}{5}\right)^6$. Поэтому, по теоремѣ Байеса, найдемъ, взявъ комбинацію 5 бѣлыхъ 0 черныхъ, вѣроятность того, что эта комбинація и есть причина уже происшедшаго 6 разъ вынутія бѣлаго шара:

$\frac{5^6}{5+10.2^6+10.3^6+5.4^6+5^6} = 0{,}35479$, т. е. немногимъ болѣе $\frac{1}{3}$, такъ какъ въ числителѣ и въ знаменателѣ сократится на 5^6.

Бертранъ рѣшаетъ ту же задачу, вводя игру въ орлянку. Спрашивается, въ чемъ будетъ состоять измѣненіе?

Въ пользу каждой изъ комбинацій 5 б. и 5 ч. мы тогда получимъ вѣроятности $1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}03125$. Въ пользу 4 б. 1 ч. или 4 ч. 1 б. получимъ $5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}15625$, такъ какъ имѣемъ по 5 комбинацій и т. д. Вмѣсто орлянки можно было бы прямо ввести вѣроятность бѣлой масти, равную $\frac{1}{2}$, но и это безполезно.

Въ концѣ концовъ, всѣ множители вида $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ сократятся, и различіе съ случаемъ *равновѣроятныхъ* причинъ опредѣляется не орлянкой, а условіемъ различать шары въ урнѣ не только по цвѣту, но и по порядку, въ которомъ онѣ были положены. Вмѣсто порядка по времени можно было бы различать порядокъ, въ которомъ лежатъ шары, рядомъ или одинъ надъ другимъ, напр. въ цилиндрическомъ сосудѣ.

О нѣкоторыхъ кажущихся парадоксахъ при вычисленіи вѣроятностей.

Теорія вѣроятностей, болѣе всякой иной математической теоріи, изобилуетъ парадоксами. Нѣкоторые изъ нихъ зависятъ просто отъ дурной постановки вопросовъ. Начнемъ съ одного изъ простѣйшихъ парадоксовъ этого рода, а именно съ игры *въ четъ и нечетъ.*

Игра въ четъ и нечетъ. Урна содержитъ извѣстное число шаровъ, вообще говоря, n шаровъ. Вынимаемъ наугадъ нѣсколько шаровъ. Какова вѣроятность, чтобы число вынутыхъ шаровъ было четнымъ или нечетнымъ?

Пусть напр. урна содержала три шара. На первый взглядъ кажется, что рѣшить задачу слѣдуетъ такъ: мы могли вынуть либо 1 шаръ, либо 2 шара, либо всѣ 3 шара; всего три случая, изъ нихъ вынутіе 1 или 3 шаровъ даетъ 2 благопріятныхъ случая въ пользу нечетнаго числа, стало быть въ пользу нечетнаго числа имѣемъ вѣроятность, равную $\frac{2}{3}$, а въ пользу четнаго $\frac{1}{3}$ Если бы въ урнѣ было 4 шара, то, повидимому, имѣемъ 4 случая (1, 2, 3 или 4 шара), изъ нихъ 2 въ пользу нечета и 2 въ пользу чета. Поэтому, можно думать, что для всякаго *четнаго* числа шаровъ въ урнѣ, напр. для $n = 2\,m$, всегда имѣемъ $\frac{1}{2}$ въ пользу чета и $\frac{1}{2}$ въ пользу нечета, а для *нечетнаго* числа шаровъ, напр. для $n = 2\,m + 1$ имѣемъ $m+1$ въ пользу нечета и m въ пользу чета.

Такое рѣшеніе имѣетъ, однако, смыслъ лишь въ томъ случаѣ, если всевозможныя комбинаціи съ одинаковымъ числомъ шаровъ признавать за *одну* комбинацію, т. е. если мы заранѣе условимся не различать шары индивидуально другъ отъ друга. Но такъ какъ это условіе не введено, то приходится отличать, какіе именно шары вынуты изъ числа всѣхъ бывшихъ въ урнѣ. Если шары напр. занумерованы, или обозначены буквами, то такое различеніе становится обязательнымъ, какъ и во всѣхъ случаяхъ, гдѣ мы имѣемъ какую либо возможность отличить одинъ шаръ отъ другого. Но въ игрѣ въ четъ и нечетъ различіе между шарами создается самымъ числомъ вынутій; чтобы вынуть *тотъ и другой* шаръ, надо вынуть не одинъ, а два раза. Мы условимся, поэтому, различать комбинаціи съ одинаковымъ числомъ шаровъ, но составленныя изъ *разныхъ* шаровъ. Наоборотъ, комбинаціи, отличающіяся лишь перестановкою *однихъ и тѣхъ же* шаровъ въ разномъ порядкѣ, нами не различаются, потому что безразлично, какой шаръ считать первымъ и какой вторымъ. Поэтому необходимо вычислить число не *перестановокъ* изъ извѣстнаго числа элементовъ, а *соединеній* изъ n элементовъ, взятыхъ по 1, 2 и т. д. до n включительно.

И такъ: урна содержитъ n шаровъ. Мы могли вынуть 1, 2, 3 и т. д. до n включительно шаровъ, и въ пользу каждаго изъ этихъ событій числа случаевъ будутъ соотвѣтственно равны C_n^1, C_n^2, C_n^3 и т. д. до C_n^n включительно. Назовемъ сумму этихъ чиселъ, т. е. число всѣхъ возможныхъ случаевъ, буквою N. Но по формулѣ Ньютона, употребляя выясненное-мною обозначеніе, можемъ написать разложеніе $(1\quad x)^n$ или $(1\quad 1)^n$ въ видѣ символа $1\quad C_n^1\quad C_n^2 \ldots\ldots C_n^n$. Если основаніе символа, т. е. подразумѣваемая буква $x=1$. то отсюда найдемъ

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^n = 1 + N$$

Отсюда $N=2^n-1$ есть полное число случаевъ; Лоранъошибочно полагаетъ, что общее число случаевъ равно 2^n. Онъ сюда причисляетъ вынутіе *нуля* шаровъ, т. е. невынутіе, что не входитъ въ условіе задачи. Не трудно теперь найти число случаевъ, благопріятствующихъ какъ *чету*, такъ и *нечету*.

Въ пользу *четнаго* числа имѣемъ комбинаціи: C_n^2, C_n^4 и т. д. Если n четное число, то послѣдняя изъ комбинацій будетъ C_n^n, если нечетное, то C_n^{n-1}.

Въ пользу *нечетнаго* числа имѣемъ комбинаціи C_n^1, C_n^3 и т. д. до C_n^n включительно, если n нечетное или до C_n^{n-1} включительно, если n четное.

По биному Ньютона не трудно найти при всякомъ n, какъ уже было найдено

$$(1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots = 2^n$$

Но точно также

$$(1-1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots = 0$$

Слагая эти два равенства найдемъ

$$2^n = 2 + 2\ C_n^2 + 2\ C_n^4 + \ldots$$

Сокращая на 2, легко найдемъ:

$C_n^2 + C_n^4 + \ldots$ т. е. сумма всѣхъ четныхъ комбинацій (выражаемся такъ для краткости, подразумѣвая числа случаевъ въ пользу *чета*) равна $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$

Но если вмѣсто сложенія двухъ написанныхъ выше равенствъ, *вычтемъ* второе изъ перваго, то найдемъ:

$$2^n = 2\ C_n^1 + 2\ C_n^3 + \ldots$$

Поэтому сумма всѣхъ «нечетныхъ комбинацій» (т. е. чиселъ случаевъ въ пользу нечета) равна

$$C_n^1 + C_n^3 + \ldots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

Итакъ мы нашли:

N, общее число случаевъ, равно $2^n - 1$.

Число случаевъ въ пользу чета, равно $2^{n-1} - 1$

Число случаевъ въ пользу нечета, равно 2^{n-1}

Поэтому P, вѣроятность въ пользу чета, равна $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$; Q, вѣроятность въ пользу нечета, равна $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$. Сумма этихъ двухъ вѣроятностей равна $\frac{2.2^{n-1}-1}{2^n-1} = 1 =$ достовѣрности, чего и слѣдовало ожидать.

Приведемъ примѣры. Пусть $n = 3$, т. е. въ урнѣ три шара. Тогда вѣроятность въ пользу вынутія *чета* будетъ $\frac{2^2-1}{2^3-1} = \frac{3}{7}$, а въ пользу нечета $\frac{4}{7}$ ибо $Q = 1 - P$. Это еще не кажется парадоксальнымъ, потому что, когда число шаровъ нечетное, то сразу представляется, что легче получить нечетъ, чѣмъ четъ. Но возьмемъ четное число шаровъ, напр. 2 или 4.

Для 2 шаровъ найдемъ:

Въ пользу чета $\frac{2-1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$, а въ пользу нечета $\frac{2}{3}$, т. е. изъ 3 возможныхъ случаевъ два будутъ въ пользу нечета. Это рѣшеніе на первый взглядъ кажется нелѣпымъ, такъ какъ, повидимому, возможны лишь 2 случая: 1 или 2 шара и первый въ пользу нечета, второй въ пользу чета. Но теорія и здѣсь ни мало не противорѣчитъ «здравому смыслу», она лишь указываетъ на забвеніе условія различимости шаровъ. Пусть будутъ a и b эти шары. Тогда *возможны* слѣдующіе случаи.

1) Можетъ быть вынутъ шаръ a.

2) Можетъ быть вынутъ шаръ b.

3) могутъ быть вынуты оба шара, при чемъ, такъ какъ расположеніе шаровъ въ урнѣ или внѣ урны для насъ, по условію, никакой роли не играетъ, а играетъ роль лишь число актовъ вынутія, то все равно, назовемъ ли мы эту комбинацію ab или ba; это будетъ лишь *одинъ* случай.

Поэтому имѣемъ *три* возможныхъ случая, изъ нихъ два первыхъ въ пользу нечета, т. е. въ пользу вынутія *одного* шара и одинъ въ пользу чета, т. е. въ пользу вынутія двухъ шаровъ.

Подобнымъ же образомъ, если имѣемъ всего 4 шара, то въ пользу *нечета* будетъ $\frac{2^3}{2^4-1} = \frac{8}{15}$, а въ пользу чета $\frac{7}{15}$, т. е. изъ 15 возможныхъ случаевъ будетъ 8 въ пользу *нечета* и только 7 въ пользу чета.

Но самыя условія игры въ четъ и нечетъ какъ разъ подходятъ къ нашему рѣшенію; такъ какъ, напр. въ случаѣ 2 шаровъ, мы, вынимая на удачу, вынемъ непремѣнно либо оба шара, либо одинъ первый, либо одинъ второй и нельзя утверждать, что эти два послѣдніе случая должны считаться за *одинъ* случай, ибо для нихъ требуются два различныхъ вынутія, а не одно и то же.

Для 4 шаровъ 8 случаевъ въ пользу *нечета* сложатся изъ чиселъ, соотвѣтствующихъ числамъ соединеній изъ 4 элементовъ по 1 и по 3, т. е. изъ $\frac{4}{1} + \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4+4 = 8$, а для *чета* надо взять сумму $C_4^2 + C_4^4 = \frac{4.3}{1.2} + 1 = 6+1=7$.

Въ общемъ случаѣ, т. е. для n шаровъ (все равно, будетъ ли n четное или нечетное) не трудно найти разность между вѣроятностями въ пользу *нечета* и *чета*. Разность эта, т. е. $Q—P$, равна.

$$\frac{2^{n-1}}{2^n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}=\frac{1}{2^n-1}$$ Такъ какъ n не равно нулю, то эта разность никогда не безконечна, но при $n=1$ равна 1. Дѣйствительно, для *одного* шара въ урнѣ, вѣроятность *нечета* равна достовѣрности, а вѣроятность *чета* равна нулю. Если $n>1$, то знаменатель дроби больше чѣмъ при $n=1$; чѣмъ больше n, тѣмъ разность между Q и P меньше, а если n очень велико, то эта разность почти равна нулю. При $n=10$ имѣемъ $2^{10}=1024$, а потому $Q-P$ немногимъ меньше одной тысячной.

Теорія вѣроятностей подтверждаетъ, поэтому, истины, давно по опыту извѣстныя азартнымъ игрокамъ и состоящія въ слѣдующемъ:

При игрѣ въ четъ и нечетъ, *выгоднѣе* биться объ закладъ въ пользу *нечетнаго* числа, нежели четнаго.

Эта выгода тѣмъ значительнѣе, чѣмъ меньше число шаровъ въ урнѣ. Для *двухъ* шаровъ въ урнѣ, бьющійся объ закладъ за нечетъ, т. е. за вынутіе *одного* шара, имѣетъ вдвое больше шансовъ выигрыша, чѣмъ противная сторона.

Выгода въ пользу *нечета* уменьшается, по мѣрѣ увеличенія числа шаровъ, но все таки всегда остается, такъ какъ шансы уравниваются лишь при безконечно великомъ числѣ шаровъ.

Рѣшеніе предполагаетъ, разумѣется, что вынутіе какого либо опредѣленнаго напр. 1 шара есть событіе равновозможное съ вынутіемъ 2 опредѣленныхъ шаровъ и т. д. На практикѣ можетъ случиться совсѣмъ не то: напр. если взять шары величиною съ большое яблоко, то вѣроятность захватить одною рукою изъ урны пятьдесятъ такихъ шаровъ равна рулю. Но теоріи нѣтъ никакого дѣла до такихъ физическихъ или механическихъ осложненій, и вмѣсто вынутія шаровъ можно напр. писать знаки и заставлять противную сторону угадывать число ихъ. Такъ можно задать задачу: на листѣ бумаги написана либо одна изъ буквъ a, или b либо обѣ вмѣстѣ. Какова вѣроятность въ пользу обѣихъ буквъ. Очевидно $\frac{1}{3}$, ибо всѣхъ *три* случая: 1) написана одна буква a, 2) написана одна буква b, 3) написаны обѣ буквы (въ какомъ порядкѣ—это не принимается во вниманіе); этотъ послѣдній случай и есть единственный (изъ трехъ возможныхъ), благопріятствующій четному числу. При этомъ, разумѣется, предположено, что написаніе одной буквы такъ же возможно, какъ и другой и какъ обѣихъ вмѣстѣ, чего можно достичь, поручивъ написаніе буквъ какому либо механическому аппарату, независящему отъ воли игроковъ.

Если, по примѣру Лорана, признать невынутіе ни одного шара также однимъ изъ возможныхъ случаевъ, тогда, по моему мнѣнію, приходится допустить, что *нуль есть число, и при томъ число четное;* но тогда шансы игроковъ сравняются. Иначе разсуждаетъ Лоранъ: вычисливъ всѣ возможные случаи съ прибавкою нуля, онъ при вычисленіи благопріятнаго *чету* числа случаевъ отбрасываетъ эту прибавку. Такъ какъ $C_n^0 = 1$, то найдемъ $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ число всѣхъ случаевъ и изъ нихъ въ пользу чета будутъ $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = 2^{n-1}$ и столько же въ пользу нечета. Напр. для 2 шаровъ найдемъ 4 случая: 1) Не вынуто ни одного шара. 2) Вынутъ шаръ, который назовемъ первымъ. 3) Вынутъ второй шаръ. 4) Вынуты оба шара. Изъ этихъ случаевъ (считая нуль четнымъ числомъ), по Лорану, одинъ будетъ въ пользу чета.

Такое рѣшеніе вызвано тѣмъ, что въ обыденной жизни никто не скажетъ: *не вынуть ни одного шара значитъ вынуть четное число шаровъ.* Рѣшеніе Лорана тѣмъ не менѣе неправильно, такъ какъ, опредѣливъ общее число случаевъ однимъ больше, чѣмъ слѣдуетъ, онъ затѣмъ отказывается присоединить этотъ лишній случай къ составу задачи; у него выходитъ, что событіе: «число вынутыхъ шаровъ будетъ или четнымъ или нечетнымъ» не достовѣрно, такъ какъ остается еще вѣроятность, что число это не будетъ ни четнымъ, ни нечетнымъ, т. е. что вовсе не будетъ вынуто ни одного шара. Намъ кажется, что такое рѣшеніе только запутываетъ очень простую задачу, вовсе не требующую введенія случая, когда *ни одинъ* шаръ не былъ вынутъ.

Такъ наз. *петербургская задача.* Задача эта состоитъ въ слѣдующемъ:

Два игрока играютъ въ орлянку на особыхъ условіяхъ. Первый, котораго назовемъ А, бросаетъ монету; если получится орелъ, онъ уплачиваетъ второму два рубля; если получится рѣшетка, онъ еще ничего не получаетъ, но долженъ бросить снова; если орелъ получится при второмъ метанiи, онъ уплачиваетъ противнику четыре рубля. Если получится вновь рѣшетка, А опять бросаетъ монету и т. д. Однимъ словомъ, игрокъ А бросаетъ монету до тѣхъ поръ, пока, наконецъ, не получится орелъ. Если это произошло при третьемъ бросанiи, то В получитъ $2^3 = 8$ рублямъ, если при четвертомъ, то В получитъ $2^4 = 16$ рублей, если при n—томъ, то 2^n рублей.

Такъ напр. если 9 разъ сряду выпала рѣшетка, а на 10-ый разъ—орелъ, то В получитъ $2^{10} = 1024$ рубля, а если орелъ впервые выпалъ только послѣ 30 или 40 бросанiй, то В получитъ баснословныя суммы. Если бы орелъ впервые выпалъ только при 100 бросанiи, то мы получили бы число, содержащее 31 значущую цифру. Дѣйствительно, логариѳмъ 2 равенъ 0,30103 (при основанiи 10), стало быть логариѳмъ 2^{100} равенъ 30,103...., а если характеристика=30, то число, соотвѣтствующее логариѳму, имѣетъ 31 цифру.

Вѣроятность получить *орелъ* при одномъ бросанiи равна $\frac{1}{2}$, а при $к$ бросанiяхъ «повторная вѣроятность» будетъ равна $\left(\frac{1}{2}\right)^к$ или $\frac{1}{2^к}$.

Задача состоитъ теперь въ слѣдующемъ: опредѣлить, какъ велика должна быть ставка *второго* игрока для того, чтобы шансы обоихъ игроковъ были равны?

Для рѣшенiя этой задачи, Данiилъ Бернульи и другiе математики придумали цѣлую особую теорiю, установивъ понятiя о «математическомъ» и «моральномъ» ожиданiи.

Начнемъ съ разъясненiя перваго изъ этихъ понятiй.

Математическое ожиданіе. Такъ называется въ теоріи вѣроятностей произведеніе изъ ожидаемаго выигрыша на вѣроятность его полученія.

Отсюда ясно, что для петербургской задачи найдемъ:

При первомъ бросаніи вѣроятность орла, т. е. выигрыша для второго игрока равна $\frac{1}{2}$, а сумма, уплачиваемая ему первымъ игрокомъ равна 1 рублю, поэтому математическое ожиданіе выражается произведеніемъ $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Если орелъ получается лишь со второго раза, то «ожиданіе» равно $\frac{1}{4} \times 4 = 1$ и т. д.

Обычное рѣшеніе петербургской задачи состоитъ въ томъ, что ставку второго игрока считаютъ равною суммѣ всѣхъ этихъ математическихъ ожиданій, соотвѣтствующихъ выигрышу при 1, 2, 3 и т. д. бросаніяхъ до n включительно. Сумма эта равна

$$2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + \ldots\ldots + 2^n \times \frac{1}{2^n} =$$
$$= 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 = n.$$

Выходитъ, поэтому, что напр. при 10 бросаніяхъ второй игрокъ можетъ выиграть болѣе 1,000 р., но его собственная ставка должна составить 10 рублей. Если игра должна быть кончена въ 100 партій (бросаній), то второй игрокъ можетъ выиграть сумму, превосходящую всѣ богатства въ мірѣ, его ставка должна составить лишь 100 рублей. Правда, вѣроятность получить упомянутую баснословную сумму настолько ничтожно мала, что почти равна нулю.

Страннымъ образомъ, математики прошлаго столѣтія и первой половины нынѣшняго вѣка сочли такой результатъ въ высшей степени парадоксальнымъ и обиднымъ съ точки зрѣнія *второго* игрока. По ихъ мнѣнію, второй игрокъ лишь при отсутствіи здраваго смысла можетъ согласиться на такую игру и рискнуть, хотя бы сотнею рублей, ради ожиданія выигрыша миѳической суммы, которую можно написать помощью 31 цифры, но о которой нѣтъ возможности даже составить надлежащаго представленія.

Это справедливо въ томъ смыслѣ, что всякая азартная игра противна благоразумію. Но часто забываютъ, что чѣмъ больше ожидаемая выгода, тѣмъ больше долженъ быть и соотвѣтственный рискъ. Если игра опредѣлена въ 100 партій, то второй игрокъ будетъ въ самомъ неблагопріятномъ положеніи, если, поставивъ на ставку 100 рублей, проиграетъ первую же партію, на которую первый игрокъ поставилъ 1 рубль; однако здѣсь нѣтъ никакой обиды для второго игрока, такъ какъ они рѣшили не прекращать игры съ первой же „рѣшетки", но взамѣнъ возможности проиграть 100 рублей, второй игрокъ имѣетъ, хотя и слабую возможность, выиграть болѣе того, а именно 128 рублей въ 7 партій; далѣе онъ имѣетъ (хотя еще болѣе слабую) возможность выиграть 256 р. въ 8 партій, 512 р. въ 9 партій, 1024 р. въ 10 партій и т. д., тогда какъ первый игрокъ ни въ какомъ, даже самомъ благопріятномъ для него, случаѣ, не можетъ выиграть свыше 100 рублей, а проиграть можетъ гораздо больше. Положенія игроковъ, конечно, весьма различны: при опредѣленномъ числѣ партій первый игрокъ можетъ проиграть очень большую сумму, но зато вѣроятность этого большого проигрыша очень ничтожна; второй игрокъ можетъ проиграть не свыше 100 рублей, но зато со второй уже партіи его шансы на выигрышъ малы. Предѣльный случай будетъ тотъ, когда рѣшено играть, хотя бы безъ конца, пока, наконецъ, не выпадетъ орелъ, т. е. пока второй игрокъ навѣрное не выиграетъ. Это случай самый выгодный для второго игрока. Въ такомъ случаѣ онъ пріобрѣтаетъ ничтожно малую вѣроятность выиграть безконечно великую сумму денегъ. Но съ другой стороны, и его собственная ставка, при этихъ условіяхъ, должна быть безконечно велика, потому что сумма ряда

$$\frac{2.1}{2}+\frac{4.1}{4}+\frac{8.1}{8}+\ldots\ldots+\frac{2^n.1}{2^n}=1+1+1+\ldots\ldots+1$$

равна n, которое, по предположенію, здѣсь равно безконечности. Само собою разумѣется, что это лишь теоретическій случай, показывающій, однако, что если n не безконечно, а лишь очень велико, то для второго игрока пріобрѣтается очень малая вѣроятность выиграть огромную сумму, но соотвѣтственно тому, его ставка должна быть также большой, и онъ можетъ проиграть значительную сумму. Не мѣшаетъ замѣтить, что ставка второго игрока, какъ бы она велика ни была, всегда меньше наибольшей суммы, которую онъ можетъ выиграть, потому что 2^n всегда больше n; при $n=1$ имѣемъ $2^n=2$, при $n=2$ имѣемъ $2^2=4$, при $n=3$, найдемъ $2^3=8$ и т. д. и легко видѣть, что отношеніе $\frac{2^n}{n}$ возрастаетъ до безконечности по мѣрѣ увеличенія n. Итакъ, хотя при безконечномъ числѣ игръ, ставка второго игрока безконечно велика, но зато послѣдняя ставка перваго игрока безконечно велика по отношенію къ ставкѣ второго игрока, или, какъ говорятъ, есть безконечность высшаго порядка. Это снова предѣльное, чисто теоретическое разсужденіе; въ примѣненіи въ практикѣ оно показываетъ, что, при большомъ числѣ партій, ставка второго игрока всегда очень велика, за то ставка перваго, сначала малая, постепенно возрастаетъ на столько, что въ огромное число разъ превышаетъ всегда одинаковую ставку противной стороны. Этимъ и уравниваются шансы обоихъ игроковъ, чего никакъ не хотѣли допустить старинные математики.

Собственно въ теоріи математическаго ожиданія для насъ нѣтъ ничего новаго; съ этимъ понятіемъ мы частью уже ознакомились, рѣшая задачу Паскаля. Какъ замѣтилъ еще Паскаль, по правиламъ всякой азартной игры, каковы бы ни были ставки, съ момента начала игры, ставки эти перестаютъ быть собственностью игроковъ и становятся собственностью игры, т. е. должны быть раздѣлены между обоими игроками (или отданы одному изъ нихъ), смотря по ходу игры, причемъ чѣмъ меньше вѣроятность выигрыша даннаго игрока, тѣмъ меньшая доля чужой ставки принадлежитъ ему. Право игрока на чужую ставку поэтому опредѣляется произведеніемъ изъ этой ставки на вѣроятность выигрыша или, что тоже, тою долею ставки, которая опредѣляется числомъ благопріятныхъ этому игроку случаевъ, по сравненію съ полнымъ числомъ случаевъ; эта доля по опредѣленію и есть «математическое ожиданіе» игрока; если это ожиданіе различно для каждой новой партіи, то для полной игры надо сложить всѣ «ожиданія», указанныя отдѣльными партіями, что и было сдѣлано для «петербургской задачи»; для математическаго равенства игры, остается допустить, что второй игрокъ ставитъ сумму, равную своему «ожиданію».

Тѣ, кому подобное рѣшеніе и теперь еще представляется парадоксальнымъ, не должны забывать, что правила азартныхъ игръ не имѣютъ ничего общаго ни съ благоразуміемъ, ни съ моралью, и что математическое равенство игры не исключаетъ величайшаго риска для играющихъ сторонъ. Конечно рисковать даже суммою въ 10 р., чтобы пріобрѣсть ничтожную возможность выиграть 1024 р., неблагоразумно; но не менѣе неблагоразумно и со стороны перваго игрока удваивать ставки въ каждую партію, потому что, какъ на грѣхъ, можетъ случиться, что онъ, дѣйствительно, проиграетъ 1024, тогда какъ выиграть можетъ не болѣе 10 р. съ партіи. Въ первую же партію онъ точно также можетъ проиграть свой рубль, какъ и выиграть чужую ставку, а въ четвертую партію можетъ уже проиграть 16, т. е. больше чѣмъ выиграть.

Бертранъ рѣшаетъ петербургскую задачу еще инымъ способомъ, который ему кажется болѣе простымъ и болѣе убѣдительнымъ, съ чѣмъ, однако, трудно согласиться. Пусть напр. игра должна быть кончена въ 30 партій или, какъ выражается Бертранъ въ 30 бросаній (coups). Наибольшее число случаевъ, соотвѣтствующее 30-ому бросанію, будетъ 2^{30}, что составляетъ немногимъ болѣе милліарда—для краткости, скажемъ, милліардъ. Бертранъ беретъ ставку перваго игрока въ первую партію въ одинъ франкъ (а не въ

2 фр). Поэтому математическое ожиданіе *второго* игрока равно $1.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{4}+\ldots+2^n.\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{n}{2}$. Если представимъ себѣ, что игроки переиграли этотъ милліардъ или точнѣе 2^{30} партій, то можно апріорно предположить, что половина, т. е. 500 милліоновъ, выпала въ пользу второго; за каждую партію при одномъ бросаніи второй получитъ по франку, итого 500 милл. фр. Изъ остающихся 500 милліоновъ «партій», можно предположить, что половина будетъ въ пользу выпаденія орла; послѣ выпавшей уже, по допущенію, рѣшетки, за эти 250 милл. партій второму слѣдуетъ по 2 фр. т. е. опять 500 милл. и т. д., за всѣ же 30 бросаній ему слѣдуетъ 15 милліардовъ на милліардъ партій, т. е. по 15 фр. за партію. Таково математическое ожиданіе перваго игрока. Или, если взять общій случай: изъ 2^n партій половина, т. е. 2^{n-1}, будетъ въ пользу того, что второй игрокъ сразу получитъ орла, т. е. получитъ по франку, всего на его долю придется 2^{n-1} франковъ; изъ остающихся 2^{n-1} партій будетъ половина, т. е. 2^{n-2}, въ пользу того, что за первой рѣшеткой послѣдуетъ вторымъ—орелъ, что дастъ второму игроку $2^{n-1}\times 2=2^{n-1}$ фр. и т. д., всего же ему слѣдуетъ за всѣ n бросаній $n.2^{n-1}$ на 2^n партій или $\frac{n}{2}$ на одну партію, что и составляетъ его ставку. Рѣшеніе это сложнѣе перваго, требуя милліардовъ партій тамъ, гдѣ достаточно 30 бросаній. Едва ли такое рѣшеніе удобно, такъ какъ надо перепробовать всѣ милліарды случаевъ, на что потребовались бы вѣ-

ка, тогда какъ 30 бросаній (coups) можно съиграть въ часъ.

Старинные математики рѣшали петербургскую задачу иначе. Николай Бернульи предложилъ ее, не давъ рѣшенія; его двоюродный братъ, Даніилъ, придумалъ въ пользу второго игрока, т. е. того, который ожидаетъ «милліардовъ въ туманѣ», особую «моральную теорію, состоящую въ слѣдующемъ:

100 милліоновъ и 100 милліоновъ = 200 милліоновъ. 200 милліоновъ вдвое болѣе чѣмъ 100 милліоновъ. 100 милл. *рублей*, прибавленныхъ къ 100 милліонамъ *рублей*, конечно, дадутъ 200 милліоновъ *рублей*; но богатство въ 200 милл. рублей вовсе не вдвое больше, чѣмъ 100 м. богатство.

Эту удивительную «моральную» теорію Д. Бернульи доказывалъ тѣмъ, что удвоеніе богатства не удваиваетъ потребностей человѣка, что само по себѣ довольно сомнительно, такъ какъ «потребности», вызываемыя богатствомъ, вещь весьма растяжимая.

Блестящій популяризаторъ Бюффонъ изложилъ ту же теорію Бернульи въ нѣсколько болѣе убѣдительной формѣ; онъ заявилъ, что рубль для бѣдняка значитъ столько же столько 1000 р. для богача. Это, конечно, болѣе справедливо, но до этого нѣтъ никакого дѣла теоріи азартной игры. Какъ бы то ни было, Д. Бернульи далъ такое рѣшеніе задачи: приращеніе богатства къ данному уже богатству имѣетъ *моральное* значеніе не по абсолютной, а по относительной величинѣ, т. е. по процентному отношенію къ раньше бывшему богатству. На этомъ основаніи напр. 1 р. прибавленный къ 1000 р., имѣетъ моральное значеніе $\frac{1}{1000}$, т. е. такое же, какъ 1000 р., прибавленныхъ къ милліону. Законъ этотъ онъ считалъ *строго* справедливымъ лишь для очень малыхъ приращеній. Если чье-либо богатство равнялось a, и увеличилось на очень малую вели- d, то моральное значеніе этой послѣдней суммы составляетъ $\frac{d}{a}$, если же допустить, что богатство возрастало незамѣтно, путемъ безконечно-малыхъ приращеній, то можно доказать, что достигаемая отъ приращенія a, на замѣтную величину b, выгода измѣряетъ натуральнымъ логариѳмомъ отношенія $\frac{a+b}{a}$ Доказательство здѣсь въ текстѣ опускаемъ, хотя оно требуетъ знанія лишь элементовъ интегральнаго исчисленія [1]).

Не смотря на все остроуміе этой теоріи, до сихъ поръ еще фигурирующей во многихъ курсахъ теоріи вѣроятностей, она вскорѣ станетъ однимъ историческимъ воспоминаніемъ; никакого научнаго значенія за ней признать нельзя, исключая упражненія въ выкладкахъ.

Впрочемъ моральная теорія Д. Бернульи, какъ и слѣдовало ожидать, привела къ очень утѣшительнымъ нравственнымъ выводамъ. Ради курьеза, приведемъ ихъ.

Прежде всего, Бернульи доказалъ, что моральное значеніе данной суммы меньше, если это выигрышъ, чѣмъ если та же сумма есть проиг-

---

[1]) Оно состоитъ просто въ томъ, что моральное значеніе безконечно малаго приращенія dx къ богатству x измѣряется отношеніемъ $\frac{dx}{x}$; интегрируя это выраженіе между предѣлами a и $a+b$ получимъ $l\,(a+b)—la$.

рышъ, другими словами, выиграть напр. 10 руб., данному лицу доставитъ не такое удовольствіе, которое можно было бы сравнить съ неудовольствіемъ отъ проигрыша 10 рублей. Можно, по-видимому, разсуждать такъ: моральное значеніе 10 руб., по отношенію къ первоначальной суммѣ скажемъ къ богатству въ 1000 р., всегда равно $\frac{1}{100}$; но 10 р., менѣе значатъ по отношенію къ 1010 р., (въ случаѣ выигрыша) чѣмъ по отношенію къ 990 (въ случаѣ проигрыша). Но если строго держаться гипотезы Бернульи, то это доказательство неправильно; можно доказать его положеніе помощью логариѳмовъ. Моральное значеніе данной суммы b, если это выигрышъ, измѣряется логариѳмомъ $\frac{a+b}{a}$ гдѣ a первоначальное богатство; въ случаѣ же проигрыша имѣемъ натуральный логариѳмъ $\frac{a-b}{a}$; Но не трудно доказать, что

$$l\frac{a+b}{a} \text{ меньше } l\frac{a}{a-b}$$

$$\text{Дѣйствительно, } l\frac{a+b}{a} - l\frac{a}{a-b} = l\frac{a^2-b^2}{a^2};$$

вторая часть, какъ логариѳмъ правильной дроби (предполагая b не больше чѣмъ a, т. е. что выигрышъ или проигрышъ не превышаетъ первоначальнаго богатства—иначе и нельзя въ случаѣ проигрыша) есть величина отрицательная; поэтому, по абсолютной величинѣ, *моральное значеніе* проигрыша, равнаго b, больше, чѣмъ такого же выигрыша, при такомъ же первоначальномъ богатствѣ.

Другой нравственный выводъ Д. Бернульи, Лапласа и др. старинныхъ математиковъ, состоитъ въ томъ, что всякая игра или закладъ, даже при полной математической справедливости, морально невыгодны.

Доказательство довольно сложно, и его тѣмъ удобнѣе можно опустить, что вредъ азартной игры долженъ быть выясненъ и чисто логическимъ путемъ, безъ всякаго моральнаго ожиданія, просто на томъ основаніи, что безумно рисковать даже малой суммой ради ничтожной вѣроятности получить хотя бы огромную сумму и не менѣе безумно рисковать огромною суммою, хотя бы съ малой вѣроятностью потери.

Теорія ошибокъ при наблюденіяхъ.

Мы приближаемся теперь къ самой интересной и важной части нашего очерка. Теорія, о которой идетъ теперь рѣчь, создана, главнымъ образомъ, геніемъ Гаусса, и какъ трудно было придумать эту, повидимому, простую теорію, видно изъ того, что попытка создать ее не удалась ни Эйлеру, ни Бернульи, ни Лагранжу, ни Лапласу. Гауссъ воспользовался своего рода Колумбовымъ яйцомъ. Въ то время какъ другіе математики придумывали чрезвычайно сложныя гипотезы, онъ избралъ самую простую,—можно сказать, самую грубую и доставленную повседневнымъ опытомъ и практикой. Эта гипотеза и оказалась согласной съ фактами, изобильно доставляемыми всѣми наблюдательными и опытными науками.

Когда въ теоріи вѣроятностей говорятъ объ ошибкахъ, то прежде всего необходимо знать, о какихъ ошибкахъ идетъ рѣчь? Невѣрные вѣсы даютъ всякій разъ ошибочныя показанія; но каждый физикъ знаетъ, что на вѣсахъ съ неравными плечами рычага можно произвести вѣрное взвѣшиваніе, и притомъ разными способами, напр. по методу двойного взвѣшиванія. Такого рода ошибки, зависящія отъ постоянныхъ условій наблюденія, называются *постоянными* и подлежатъ прямому раскрытію и изслѣдованію, съ цѣлью избѣжать ихъ. Эти ошибки не имѣютъ никакого отношенія къ теоріи вѣроятностей. То же относится и къ постояннымъ ошибкамъ, опредѣляемымъ постоянными свойствами самого наблюдателя, напр. къ ошибкамъ, зависящимъ отъ его близорукости или недостаточно остраго слуха.

Въ теоріи вѣроятностей подлежатъ изслѣдованію лишь такія ошибки, которыя, какъ говорятъ, *случайны*, или, точнѣе, опредѣляются стеченіемъ весьма многихъ сложныхъ и не подлежащихъ непосредственной оцѣнкѣ условій. *Опытъ* показалъ, что если наблюденія производятся возможно точно и правильно, то все-таки результаты многочисленныхъ измѣреній одной и той же величины не вполнѣ сходятся между собою. Измѣривъ нѣсколько разъ одну и ту же величину одними и тѣми же измѣрительными приборами, мы получимъ почти однѣ и то же, но все-таки не абсолютно тѣ же цифры; различіе можетъ оказаться въ десятыхъ, сотыхъ, тысячныхъ доляхъ, смотря по точности методовъ измѣренія. Произведя значительное количество измѣреній, мы убѣдимся, что одни изъ нихъ дадутъ большія, другія меньшія числа. *Опытъ* показалъ, что наилучшіе результаты достигаются въ томъ случаѣ, если мы выберемъ среднее изъ полученныхъ чиселъ, а именно *среднее ариѳметическое*; другими словами, опытъ согласуется съ предположеніемъ, что, при достаточномъ количествѣ опытовъ, положительныя ошибки уравновѣсятся съ отрицательными; это въ высшей степени простое и богатое послѣдствіями предположеніе и было сдѣлано Гауссомъ.

Необходимо помнить, что, во всякомъ случаѣ, это не болѣе какъ *гипотеза*, не могущая имѣть притязанія на абсолютную точность, ни на полную достовѣрность, и что окончательнымъ мѣриломъ является *опытъ*. Пусть будетъ x неизвѣстная *точная* величина, подлежащая измѣренію, a_1, a_2, a_3, ... a_n приблизительныя величины, полученныя нами при разныхъ измѣреніяхъ. Допустимъ, что при каждомъ измѣреніи вкрадывается, вслѣдствіе неточности приборовъ, нѣкоторая постоянная ошибка, равная, скажемъ, d [1]) и которую надо прибавить, чтобы исключить вліяніе неточности. Тогда не трудно придумать такія выраженія, на которыя эта постоянная ошибка не окажетъ никакого вліянія. Составимъ прежде всего среднее ариѳметическое изъ наблюденныхъ величинъ. Мы получимъ

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n} = m, \text{ гдѣ } m$$

есть среднее ариѳметическое при измѣреніи неточнымъ приборомъ.

Теперь исключимъ постоянную ошибку, т. е. прибавимъ по d къ каждой изъ величинъ a_1, a_2 и т. д. Найдемъ

---

[1]) Это конечно, лишь простѣйшее предположеніе: измѣренія могутъ имѣть и болѣе сложный характеръ.

$$\frac{a_1+d+a_2+d+\ .\ .\ .\ .\ .\ +a_n+d}{n}=\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .\ +a_n\ +nd}{n}$$
$$= m + d.$$

Другими словами, если къ среднему ариѳметическому изъ n измѣреній прибавимъ ту же поправку d, какая придана къ каждому отдѣльному измѣренію, то исправленное среднее будетъ точнымъ математическимъ среднимъ между всѣми исправленными величинами. Это можно выразить короче, сказавъ, что „поправка постоянной ошибки сама собою исправляетъ и среднее ариѳметическое“.

Впрочемъ, не одно среднее ариѳметическое обладаетъ этимъ свойствомъ. Условимся называть всякое выраженіе, составленное изъ нѣсколькихъ величинъ, *функціей* этихъ перемѣнныхъ и будемъ обозначать напр. выраженіе, составленное изъ a, a_2, ... a_n или функцію этихъ величинъ такимъ образомъ $\Phi\ (a_1,\ a_2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ a_n)$. Вообще говоря, съ измѣненіемъ a_1, a_2 и т. д. измѣнится и самая функція; очевидно напр., что если измѣнить выраженіе $a_1^2+a_2^2$ такимъ образомъ, что a_1 увеличится вдвое, a_2 увеличится втрое, то наша функція $a_1^2+a_2^2$ также увеличится и притомъ болѣе, чѣмъ вдвое. Однако, бываютъ и такія функціи, которыя при извѣстнаго рода измѣненіи составляющихъ ихъ величинъ не измѣняются вовсе. Такъ напр. a_1-a_2 есть такая функція отъ a_1 и a_2, т. е. такое выраженіе, зависящее отъ величинъ a_1 и a_2, что если будемъ увеличивать a_1 и a_2 одновременно на одну и ту же величину, напр. прибавимъ, какъ къ a_1, такъ и къ a_2, по пяти единицъ, то самая функція не измѣнится, ибо

$a_1+5-(a_2+5)=a_1-a_2$. Свойство это раздѣляютъ всѣ вообще выраженія вида:

$$\Phi\,(a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ a_2-a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n-a_{n-1})$$

т. е. функціи сосставленныя изъ *разностей* данныхъ величинъ, если самыя данныя величины одновременно увеличиваются или уменьшаются на одну и ту же величину, напр. на величину d. Примѣромъ можетъ служить выраженіе $(a_1-a_2)^2+(a_1-a_2)+(a_1-a_2)^3$, представляющее функцію двухъ величинъ, именно a_1 и a_2.

Предъидущія разсужденія приводятъ насъ къ слѣдующему. Если мы нашли помощью измѣреній приблизительныя величины a_1, a_2, ... , a_n и если при каждомъ измѣреніи была сдѣлана *постоянная* ошибка d, то такая ошибка не окажетъ ни малѣйшаго вліянія на выраженіе вида 1) $\Phi\,(a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ a_2-a_3,\ \ldots\ldots,\ a_n-a_{n-1})$, составленное изъ *разностей* величинъ полученныхъ при нашихъ измѣреніяхъ. Можно поэтому сказать, что поправка постоянной ошибки никакого вліянія на выраженіе 1), которое для краткости будемъ называть буквою Φ., не оказываетъ.

Теперь мы на минуту *предположимъ*, что законъ Гаусса не вѣренъ и что если n измѣреній даютъ намъ величины $a_1, a_2\ \ldots, a_n$. то слѣдуетъ взять не среднее ариѳметическое m, а нѣкоторую другую величину, которую назовемъ М и о математическомъ характерѣ которой мы еще ничего не знаемъ.

Допустимъ, что мы открыли *постоянную* ошибку и устранили ея вліяніе. Тогда среднее ариѳметическое исправится само собою. Но исправится ли на ту же величину также M, этого мы не знаемъ и не можемъ знать. Сдѣлаемъ новое предположеніе, а именно, что M имѣетъ форму $m+\Phi$, гдѣ Φ есть выраженіе извѣстнаго намъ вида, составленное изъ разностей a_1-a_2 и проч. Исправимъ постоянную ошибку; мы получимъ тогда вмѣсто m величину $m+d$, а вмѣсто Φ снова получимъ Φ, стало быть M исправится на ту же величину d, какъ раньше m. Ясно, такимъ образомъ, что если судить только по вліянію поправки, получаемой исправленіемъ *постоянной* ошибки, то гипотеза Гаусса не болѣе имѣетъ за себя, нежели гипотеза, что наилучшимъ выборомъ будетъ величина $m+\Phi$, гдѣ m есть среднее ариѳметическое, а Φ выраженіе, составленное какимъ-бы то ни было образомъ изъ разностей нашихъ наблюденныхъ данныхъ, напр. выраженіе вида $(a_1-a_2)^3+(a_1-a_3)^3+(a_2-a_3)^3+\ .\ .\ .\ .\ +(a_n-a_{n-1})^3$.

Но кромѣ исправленія постоянныхъ ошибокъ есть другія данныя, позволяющія заключить, что гипотеза Гаусса болѣе вѣроятна, чѣмъ всякая другая.

Можно было-бы сказать, что величина m, какъ болѣе простая нежели $m+\Phi$, лучше удовлетворяетъ присущему нашему уму стремленію къ упрощенію, и такъ какъ въ пользу $m+\Phi$, во всякомъ случаѣ, нельзя сказать болѣе, чѣмъ въ пользу m, то мы и выбираемъ гипотезу Гаусса. Но это чисто метафизическое соображеніе. Подтвержденіемъ гипотезы служитъ лишь ея безпрестанная провѣрка фактическими результатами. Такъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, мы можемъ предсказать *точный* результатъ чисто теоретически: во всѣхъ такихъ случаяхъ, результаты, согласные съ гипотезой Гаусса, оказываются, при достаточномъ числѣ и точности измѣреній, наиболѣе пригодными.

Есть, впрочемъ, одинъ примѣръ, заимствованный нами у Бертрана, въ которомъ гипотеза Гаусса какъ будто оказывается строго точною.

Предположимъ, что въ урнѣ находится, въ неизвѣстной пропорціи, нѣкоторое количество бѣлыхъ и нѣкоторое количество черныхъ шаровъ. Мы вынули всего N шаровъ, изъ нихъ a_1 оказались бѣлыми. Какова вѣроятная пропорція тѣхъ и другихъ въ урнѣ до начала опытовъ?

При нашемъ вынутіи изъ N шаровъ a_1 бѣлыхъ, т. е. пропорція равна $\frac{a_1}{N}$.

Сдѣлавъ n такихъ вынутій, получимъ пропорціи $\frac{a_1}{N}$ и т. д. до $\frac{a_n}{N}$ включительно. Для всѣхъ n вынутій если каждый разъ вынимаемъ по N шаровъ, получимъ, по закону Гаусса, $\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .\ +a_n}{n\ N}$ т. е. среднее ариѳметическое отъ $\frac{a_1}{N}$ и т. д. Но если взять случай, когда $n\ N =$ общему числу шаровъ въ урнѣ, то ясно, что $a_1+a_2+\ .\ .\ .\ a_n$ есть общее число бывшихъ въ ней бѣлыхъ шаровъ (ибо *всѣ* шары были вынуты, въ томъ числѣ и всѣ бѣлые), такъ что пропорція $\frac{a_1+a_2+\ .\ .\ .\ +a_n}{n\ N}$ *строго* точна, а не приблизительна. Итакъ въ этомъ случаѣ среднее ариѳметическое въ *точности* равно искомой величинѣ.

Примѣръ этотъ, однако, нельзя считать *доказательствомъ* закона Гаусса, по той простой причинѣ, что въ данномъ случаѣ всѣ отдѣльныя измѣренія не приблизительно, а строго точны, ибо основаны на *точномъ* сосчитываніи числа шаровъ, какъ всѣхъ вынутыхъ, такъ и однихъ бѣлыхъ; не удивительно, что и результатъ получается математически точный, если, наконецъ, вынуты *всѣ* шары; наоборотъ, пока не будутъ вынуты *всѣ*, онъ вообще окажется неточнымъ, какъ бы ни было велико число вынутій. Пусть напр. всѣхъ шаровъ было 36, изъ нихъ бѣлыхъ 12 и каждый разъ мы вынимали по 6 шаровъ, при чемъ оказалось:

Порядокъ вынутія.	Число вынутыхъ шаровъ.	Изъ нихъ бѣлыхъ.
1-ый разъ	6	4
2-ой »	6	3
3-ій »	6	1
4-ый »	6	2
5-ый »	6	1
6-ой »	6	1
Итого вынуто . . .	36	12

Точная пропорція составляетъ $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ бѣлыхъ, но если мы вынемъ лишь 4 раза, то получимъ $\frac{4+3+1+2}{4.\ 6} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$, что даетъ совершенно неточное представленіе объ истинной пропорціи для полнаго числа шаровъ; а между тѣмъ число это согласно съ среднимъ ариѳметическимъ, ибо имѣемъ: средн. ариѳм. отъ 4, 3, 1 и 2 есть $\frac{4+3+1+2}{4} = 2\frac{1}{2}$ или $\frac{5}{2}$, что даетъ на 6 шаровъ пропорцію бѣлыхъ, измѣряемую числомъ $\frac{2^1/_2}{6}$ или $\frac{5}{12}$. Съ другой стороны, если бы вынуты были *всѣ* шары, то получили бы среднее ариѳметическое $\frac{4+3+1+2+1+1}{6} = 2$, т. е. 2 бѣлыхъ шаровъ на 6 вынутыхъ или 1 на 3, что не приблизительно, а точно равно истинной величинѣ $\frac{12}{36}$.

Примѣръ этотъ, какъ сказано, существенно отличается отъ тѣхъ, которые даются сопоставленіемъ наблюденій, въ томъ отношеніи, что здѣсь совсѣмъ не входитъ понятіе приблизительнаго измѣренія. Вынувъ въ первый разъ 6 шаровъ и изъ нихъ 4 бѣлыхъ, мы вовсе не приблизительно, а совершенно точно опредѣляемъ для перваго вынутія пропорцію $\frac{2}{3}$ бѣлыхъ шаровъ, точно также для второго вынутія $\frac{3}{6}$ или $\frac{1}{2}$ и т. д., и само собою разумѣется, что результатъ опредѣлится числомъ вынутій. Тѣмъ не менѣе, если бы число шаровъ было весьма велико, напр. вмѣсто 36 мы имѣли бы 36000 шаровъ, изъ которыхъ 12000 бѣлыхъ, то предполагая, что мы вынимаемъ по 6 шаровъ и что бѣлые шары перемѣшаны въ урнѣ достаточно равномѣрно, мало вѣроятности допустить, чтобы мы имѣли напр. 6000 вынутій каждое съ 4 бѣлыми шарами на 6 шаровъ, тогда какъ въ среднемъ имѣемъ 2 на 6. Чаще будутъ встрѣчаться случаи съ 1, 2 и 3 бѣлыми шарами на 6 шаровъ. Во всякомъ случаѣ, при очень большомъ числѣ шаровъ, примѣръ этотъ можетъ послужить, если не для доказательства, то для иллюстраціи закона среднихъ чиселъ.

Разъ мы примемъ постулатъ Гаусса, дальнѣйшія слѣдствія выводятся математическимъ путемъ, хотя, слѣдуетъ признаться, что сверхъ гипотезы средняго ариѳметическаго приходится сдѣлать еще нѣкоторыя добавочныя предположенія, которыя, вытекаютъ изъ самой неопредѣленности задачи. Необходимо именно допустить, что *возможны* ошибки всякаго рода, такъ что можно подобрать двѣ ошибки, между которыми разность можетъ быть сдѣлана сколько угодно малою и что стало быть число возможныхъ ошибокъ безконечно велико. Мы сначала разсмотримъ очень большое число ошибокъ, а затѣмъ, взявъ предѣлы, получимъ случай, требуемый теоріей.

И такъ, мы ставимъ вопросъ слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, что каждая „случайная" ошибка составляетъ результатъ совмѣстнаго дѣйствія весьма большого числа независимыхъ источниковъ ошибокъ. Слѣдствіемъ является весьма большое число возможныхъ ошибокъ, частью положительныхъ, частью отрицательныхъ. Мы предполагаемъ, что положительныя ошибки такъ же возможны, какъ и отрицательныя. Пусть будетъ n число источниковъ ошибокъ, A положительная ошибка, B отрицательная. Если произведемъ n опытовъ и разсмотримъ всевозможныя сочетанія A съ B, то получимъ различныя ошибки. Пусть будетъ p вѣроятность A, q противовѣроятность A, равная вѣроятности B, ибо ошибка непремѣнно должна быть или положительной, или отрицательной. По теоріи, выведенной нами для вѣроятностей повторныхъ опытовъ, не трудно опредѣлить вѣроятность любой изъ комбинацій между A и B въ теченіе n опытовъ. Стоитъ составить разложеніе бинома $(p+q)^n = 1$, въ которомъ $p=q=\frac{1}{2}$, какъ выше сказано. Дѣйствительно, общій членъ, бинома $(p+q)^n$, имѣющій видъ $\frac{n!}{m_1!\,m_2!}\,p^{m_1}\,q^{m_2}$ выражаетъ вѣроятность, что въ теченіе $n=m_1+m_2$ опытовъ

A повторится m_1 разъ, B повторится m_2 разъ въ *любомъ* порядкѣ.

Этотъ общій членъ легко вычислить, пока n небольшое число. Но если бы задались цѣлью вычислить напр. $\frac{1000!}{645!\,355!} p^{645} q^{355}$, то вычисленіе коэффиціента представило бы непреодолимыя трудности, даже при употребленіи логариѳмическихъ таблицъ. Въ виду этого, въ высшей степени важно для приложеній теоріи вѣроятностей располагать формулою, позволяющею хотя приблизительное опредѣленіе такихъ чиселъ, какъ напр. 1. 2. 3. 4. . . . . . . 999.1000. Такая формула была выведена Стирлингомъ; самый выводъ не можетъ быть здѣсь данъ, требуя слишкомъ длиннаго уклоненія въ сторону, но формулу необходимо знать, хотя бы въ первомъ приближеніи.

Формула Стирлинга гласитъ слѣдующее: при достаточно большомъ n, можно принять съ значительной степенью приближенія, что отношеніе между 1. 2. 3. . . . . n, или по принятому обозначенію, между $n!$ и выраженіемъ $e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ (гдѣ $e = 2{,}71828$ . . . . есть основаніе натуральныхъ логариѳмовъ, а $\pi = 3{,}141592$ . . . . число, выражающее отношеніе окружности къ діаметру) стремится къ 1. Поэтому, при весьма большомъ n можно принять:

$$1.\ 2.\ 3.\ \dots\ n = e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$$

Даже при такомъ маломъ числѣ n, каково $n=20$ формула эта оказывается не безполезною. Дѣйствительно, непосредственнымъ умноженіемъ мы нашли бы 1.2.3.4. . . . . 20 = 20! = 2.432.902.008.176. 640.000. Формула же Стирлинга дастъ число

2.422.786.385.510.400.000. Ошибка, конечно, кажется огромною, но она не больше той, какъ если бы вмѣсто 1 цѣлой и 417 стотысячныхъ мы взяли бы ровно 1. Послѣ этого отступленія, возвратимся къ нашему вопросу, т. е. къ теоріи случайныхъ ошибокъ.

Мы замѣтили, что если p есть вѣроятность положительной ошибки A, q вѣроятность отрицательной ошибки B, гдѣ $p+q=1$, $p=q={}^1/_2$, то члены бинома $(p+q)^n$ выражаютъ вѣроятности разныхъ повторныхъ комбинацій A съ B. Спрашивается, какая изъ комбинацій наиболѣе вѣроятна? Надо вычислить наибольшій членъ разложенія $(p+q)^n$. Наиболѣе вѣроятна та комбинація, въ которой, на n опытовъ, числа событій A и B соотвѣтственнно пропорціональны ихъ вѣроятностямъ, т. е. соотвѣтственно равны np и nq (причемъ $np+nq=n$, ибо $p+q=1$). Искомая наибольшая вѣроятность выражается поэтому формулой

$$\frac{n!}{(np)!\ (nq)!}\ p^{np}\ \ q^{nq}$$

Но если вмѣсто выраженій вида $n!$ подставимъ, по формулѣ Стирлинга. выраженія вида $e^{-n}\ n^{n}$ $\sqrt{2\ \pi\ n}$ то получимъ, замѣчая, что $p+q=1$, послѣ всѣхъ сокращеній, выраженіе наибольшей вѣроятности

$$p_m = \frac{1}{\sqrt{2\ \pi\ n\ p\ q}}$$

Если n очень велико, то p_m близко къ нулю, т. е.

всѣ вообще повторныя комбинаціи ошибокъ очень мало вѣроятны.

Такъ какъ $p = q = {}^1/_2$ то имѣемъ еще проще

$$p_m = \frac{1}{\sqrt{{}^1/_2 \pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$$

Такова наибольшая вѣроятность какой бы то ни было комбинаціи элементарныхъ положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ.

Еще болѣе важно опредѣлить вѣроятность, соотвѣтствующую заранѣе предположенной величинѣ ошибки. Пусть x есть величина ошибки, p_x соотвѣтственная вѣроятность. Въ такомъ случаѣ различными способами доказываютъ, что

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} d$$

Здѣсь h есть нѣкоторая положительная постоянная, зависящая отъ избранныхъ единицъ мѣры, d есть малая величина, обозначающая разность между двумя возможно близкими ошибками, изъ которыхъ одна есть x, а другая ближайшая къ ней $x + d$. Для того, чтобы показать, что разность d относится именно къ ошибкѣ x и смежной съ нею, можно приписать къ d знакъ x т. е. написать dx, подразумѣвая подъ этимъ разумѣется не произведеніе d на x, но d относящееся къ x, подобно тому какъ lx означаетъ натуральный логариемъ отъ x или относящійся къ x, а не произведеніе изъ l на x, или какъ $\sin x$ означаетъ синусъ отъ x. Въ предѣлѣ, безконечно малую разность между двумя смежными значеніями x, т. е.

между x и $x+d$ или между x и $x+dx$ (по нашему новому обозначенію), т. е. величину dx называютъ дифференціаломъ отъ x или просто дифференціаломъ x. Поэтому нашу формулу для вѣроятности ошибки, причемъ величина самой ошибки заранѣе намѣчена и должна быть $= x$, эту формулу можно написать такъ

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

Доказать эту формулу не особенно трудно, но чтобы не отвлекаться отъ нашего главнаго предмета, мы только *намѣтимъ* ходъ доказательства, предоставляя читателямъ самимъ развить подробности, или найти ихъ въ спеціальныхъ трактатахъ. Мы замѣтили, что общій членъ $(p+q)^n$ имѣетъ видъ $\frac{n!}{m_1!\,m_2!} p^{m_1} q^{m_2}$. Поэтому можемъ написать тотъ же общій членъ, который назовемъ хотя бы p_n, пользуясь формулой Стирлинга, въ видѣ, аналогичномъ тому, въ какомъ мы написали наибольшій членъ p_m. Затѣмъ можно найти отношеніе между общимъ членомъ p_n и этимъ наибольшимъ членомъ p_m. Пользуясь затѣмъ *опредѣленіемъ* числа e, т. е. основанія неперовскихъ логариѳмовъ, которое выводится какъ предѣлъ $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$ при безконечномъ возрастаніи a, оказывается возможнымъ найти приближенныя выраженія для отношеній между лѣвымъ членомъ нашего бинома и наибольшимъ общимъ. Но въ переводѣ на обыкновенный языкъ это и значитъ найти отношеніе между вѣроятностью ошибки, имѣющей любую величину, и наибольшей вѣроятностью сдѣлать какую бы то ни было ошибку. Эта наибольшая вѣроятность намъ уже извѣстна и равна $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

$\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = pm$, стало быть, извѣстна и вѣроятность px, если опредѣлено отношеніе $\frac{px}{pm}$, а это и достигается выше намѣченнымъ путемъ.

Выражаясь болѣе строго, слѣдуетъ сказать, что вѣроятность

$$px = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

есть вѣроятность того событія, что ошибка заключается между величинами x и $x + dx$.

Очевидно, что чѣмъ *больше* постоянная h, тѣмъ быстрѣе убываетъ и стремится къ нулю вѣроятность ошибки, по мѣрѣ увеличенія самой ошибки. Дѣйствительно, выраженіе

$$he^{-h^2 x^2} = \frac{h}{e^{h^2 x^2}}$$

при большомъ h и быстро возрастающемъ x очень скоро стремится къ нулю. Поэтому Гауссъ назвалъ величину h *мѣриломъ точности*, а Лапласъ вѣсомъ наблюденій. Чѣмъ больше h, тѣмъ менѣе вѣроятна сколько-нибудь крупная ошибка въ данномъ рядѣ наблюденій.

Эмпирическое установленіе закона, связывающаго величину ошибки съ вѣроятностью ея появленія.

Найденный Гауссомъ законъ

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

выражающій вѣроятность того, что ошибка при наблюденіи заключается между x и $x+dx$, хотя и вытекающій изъ постулата относительно средняго ариѳметическаго, какъ было выяснено, не можетъ считаться доказаннымъ чисто логически, безъ помощи опыта. Но если такъ, то не мѣшаетъ попытаться вывести тотъ же законъ чисто эмпирическимъ путемъ, изъ самыхъ наблюденій, не опираясь ни на какіе апріорные принципы.

Каждая наблюдательная и опытная наука доставляетъ обильный матеріалъ для провѣрки этой гипотезы; всего удобнѣе воспользоваться данными астрономіи. Извѣстный астрономъ Брадлей опредѣлилъ помощью меридіанной трубы разность между прямымъ восхожденіемъ нѣкоторой звѣзды и точки весенняго равноденствія, обозначаемой въ астрономіи буквою γ. Всего было произведено 470 наблюденій. *Истинная* величина искомой разности изъ опыта неизвѣстна; беремъ, поэтому, среднее ариѳметическое и изслѣдуемъ, каковы уклоненія отдѣльныхъ наблюденій отъ этой средней величины.

Данныя, приведенныя Брадлеемъ, т. е. непосредственные результаты его наблюденій, независимыя отъ какой либо гипотезы, дали слѣдующія уклоненія, частью положительныя, частью отрицательныя, отъ средней величины, выраженныя въ секундахъ.

Между	0	и 0,1	. .	94	уклоненія
»	0,1	» 0,2	. . . .	88	»
»	0,2	» 0.3	. . .	78	»
»	0,3	» 0,4	. . . .	58	»
»	0,4	» 0,5	. . . .	51	»
»	0,5	» 0,6	. . . .	36	»
»	0,6	» 0,7	. . . .	26	»
»	0,7	» 0,8	. . . .	14	»
»	0,8	» 0,9	. . .	10	»
»	0,9	» 1,0	. . . .	7	»
Свыше	—	» 1	. . .	8	»
		Итого	. . . .	470	

Эти результаты показываютъ, что для даннаго ряда наблюденій, вѣроятность, чтобы ошибка была заключена между 0 и 0,1 равна $\frac{94}{470}$, вѣроятность, чтобы ошибка была заключена между 0,9 и 1,0 равна $\frac{7}{470}$ и т. д. Оказывается, что крупныя ошибки встрѣчаются значительно рѣже, чѣмъ мелкія, другими словами, что величина вѣроятности сдѣлать нѣкоторую ошибку находится въ нѣкоторомъ обратномъ отношеніи къ величинѣ самой ошибки. Это ясно апріорно. Дѣйствительно, мы предполагаемъ, что приборы достаточно хороши и наблюдатели достаточно искустны; постоянныя или систематическія ошибки, по возможности, исключены; случайныя же ошибки не могутъ быть очень большими и чѣмъ онѣ больше, тѣмъ менѣе вѣроятны, т. е. рѣже встрѣчаются. Необходимо, однако, точнѣе опредѣлить характеръ зависимости между двумя величинами—величиною вѣроятности ошибиться и величиною самой ошибки.

Если изъ двухъ величинъ одну разсматривать какъ зависящую отъ другой, то первая, вообще говоря, измѣняется при измѣненіи второй и въ очень многихъ случаяхъ можетъ быть выражена посредствомъ этой второй величины и различныхъ постоянныхъ, зависящихъ отъ избранной единицы мѣры. Та величина, которая измѣняется независимо, называется перемѣнною независимою, а та, которая зависитъ отъ этой перемѣнной и выражается при ея помощи, называется функціей этой перемѣнной. Простѣйшій способъ изобразить зависимость одной величины отъ другой, это способъ *графическій*. Пусть дана величина x, могущая принимать различныя, непрерывно измѣняющіяся значенія, и другая величина y, зависящая отъ x. Тогда y есть функція отъ x, что выражаютъ обозначеніемъ $y=f\ (x)$, другими словами y есть нѣкоторое выраженіе, составленное изъ x и постоянныхъ величинъ. Если мы знаемъ характеръ этого выраженія, то получимъ уравненіе между y и x. Такъ если напр. y прямо пропорціонально x, то зависимость выразится уравненіемъ $y=ax$. Это уравненіе очень легко изобразить графически. Возьмемъ любую точку O и назовемъ ее началомъ координатъ, проведемъ двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя OX и OY и называемъ первую осью x, вторую осью y. Подобно тому, какъ на картѣ положеніе точки опредѣляется широтой и долготою, мы можемъ опредѣлить положеніе любой точки M на плоскости OXY двумя разстояніями этой точки, а именно отъ горизонтальной оси OX и отъ вертикальной OY. Опустивъ изъ M перпендикуляръ на OX въ точку P, назовемъ разстояніе M отъ OX, т. е. длину PM параллельную OY, буквою y, а разстояніе OP, буквою x; разстояніе x считается положительнымъ отъ O къ P,—скажемъ слѣва направо,—разстояніе y признаемъ положительнымъ отъ P къ M, скажемъ, снизу вверхъ. Если построимъ рядъ точекъ, удовлетворяющихъ уравненію $y=ax$, напр. точку M_1 съ «координатами» x_1 и y_1 (величины x и y называются координатами точки M), точку M_2 съ координатами x_2 и y_2 и т. д. то изъ уравненій $y_1 = ax_1$, $y_2=ax_2$ и т. д. найдемъ $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=$ и т. д. откуда сразу ясно, по теоріи пропорціональныхъ линій и изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ, что точки O, M_1, M_2 и т. д. лежатъ на одной прямой, на которой находится и точка M. Итакъ, уравненіе *$y=ax$ графически изображается* прямою OM. Аналогичнымъ образомъ можно изобразить и любое уравненіе вида $y=f(x)$, но вмѣсто прямой будутъ, вообще говоря, получатся *кривыя* линіи, порою очень сложныя, если выраженіе $f(x)$ достаточно сложно. Условимся теперь отлагать на оси x величины ошибокъ при наблюденяхъ. Если вѣроятность зависитъ отъ величины ошибки, то повидимому, всего удобнѣе отлагать на оси y величины вѣроятностей и построить кривую, изображающую зависимость y отъ x. Такое построеніе, однако, сопряжено съ трудностями. Такъ въ приведенномъ нами примѣрѣ, мы вовсе не знаемъ вѣроятности каждой данной ошибки, намъ извѣстна лишь вѣроятность того, что ошибка заключена между предѣлами напр. между 0,1 и 0,2 и вообще между x и $x+\delta$ гдѣ δ есть нѣкоторая небольшая, но не безконечно малая величина, называемся конечною разностью между двумя «смежными значеніями x» или короче конечнымъ интерваломъ. Вмѣсто δ мы будемъ, писать δx чтобы обозначить, что этотъ интервалъ относится именно къ x (не слѣдуетъ смѣшивать это обозначеніе съ произведеніемъ изъ δ на x).

Отложивъ ошибки на оси x, возьмемъ напр. $x=0$ и $x=0$, 1 и возстановимъ соотвѣтственные перпендикуляры. На перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ конца линіи, равной $x=0{,}1$ строимъ теперь такую кривую $y=f(x)$ чтобы ея площадь изобразила сумму вѣроятностей всѣхъ ошибокъ, т. е. достовѣрность, равную 1, тѣ же части площади нашей кривой, которыя заключаются между перпендикулярами къ оси x, возстановленными изъ точекъ $x=0$, $x=0{,}1$, затѣмъ $x=0{,}1$ и $x=0$, 2 и т. д. заимствуются изъ таблицы, приведенной выше. Такъ площадь между $x=0$ и $x=0{,}1$ должна быть равна $\frac{94}{2}=47$ (ибо мы разсматриваемъ лишь положительныя ошибки, а ихъ столько же, сколько отрицательныхъ), между 0,1 и 0,2 беремъ 44 и т. д. всего же 470 и эту послѣднюю площадь принимаемъ за 1; поэтому площадь между $x=0$ и $x=0$, 1 въ нашихъ единицахъ мѣры равна $\frac{47}{470}=\frac{1}{10}$ и т. д.

Для большей ясности читатель пусть построитъ чертежъ по слѣд. указаніямъ. Изъ точки O проводимъ горизонтально, слѣва на право, прямую OX. На ней отлагаемъ, принявъ за 1 линейной мѣры сантиметръ, длины равныя 1, 2, 3 и т. д. миллиметрамъ т. е. 0,1 и т. д. нашей 1 длины. Изъ соотвѣтственныхъ точекъ на OX, которыя занумеруемъ цифрами, 1, 2, 3 и т. д. возстановимъ перпендикуляры къ OX. Первый перпендикуляръ доведемъ до такой точки M_1, чтобы площадь прямоугольника O_1M_1 (изъ M_1 опускаемъ еще перпендикуляръ на OY) равнялась 47 квадр. сантиметрамъ. Изъ точки 2 возстановляемъ перпендикуляръ $2M_2$ такой длины, чтобы новый прямоугольникъ, полученный, когда опустимъ изъ M_2 перпенд. на $1M_1$, имѣлъ площадь равную 44 и т. д. Соединивъ точки M_1 M_2 и т. д. грубо намѣченною кривою, получимъ нѣкоторую кривую, приблизительно выражающею законъ зависимости y отъ x. Величину ydx можно разсматривать какъ бы безконечно-узкую площадь или какъ вѣроятность соотвѣтствующую не конечному интервалу δx, а безконечно малому интервалу или дифференціалу dx. Сравнивая нашу кривую съ разными другими кривыми, изслѣдованными аналитически, не трудно найти, что ей удовлетворяетъ уравненіе вида $y=ae^{-h^2x^2}$ гдѣ a и h двѣ постоянныя, которыя надо опредѣлить, пользуясь нашими наблюденіями. Чтобы провѣрить эту формулу, достаточно вставить вмѣсто x два значенія x напр. $x=0$ и $x=0,1$ и вычислить площадь соотвѣтственнаго прямоугольника, опредѣливъ y по формулѣ

$$y=47,365\ e^{-(1,764x)^2}$$

Итакъ, чисто эмпирическимъ путемъ мы нашли слѣдующее:

Если дано уравненіе вида $y=ae^{-h^2x^2}$, то можно опредѣлить постоянныя a и h такъ, чтобы вѣроятность p_x того, что ошибка наблюденія заключается между x и $x+\delta x$, съ значительною степенью точности выражалась отношеніемъ между площадью кривой между двумя соотвѣтственными вертикальными координатами (ординатами) и площадью всей кривой, т. е. площадью между кривой и осями координатъ. Но если вмѣсто x взять очень большую положительную величину, то непосредственнымъ измѣреніемъ не трудно убѣдиться въ слѣдующемъ:

Если имѣемъ кривую $y=ae^{-h^2x^2}$, то та часть площади этой кривой, которая заключена между $x=0$ и очень большимъ x, стремится къ предѣлу $\frac{a}{2h}\sqrt{\pi}$.

Такъ какъ кривая симметрична для одинаковыхъ положительныхъ и отрицательныхъ значеній x, (это видно изъ того, что замѣна $+x$ посредствомъ $-x$ не измѣняетъ x^2, а стало быть не измѣняетъ ни $-h^2x^2$, ни y), то отсюда вытекаетъ, что площадь кривой, заключенная между $x=+1.000.000$ и $x=-1.000.000$ равна приблизительно $\frac{a}{h}\sqrt{\pi}$, а между $x=+\infty$ и $x=-\infty$ *точно* равна $\frac{a}{h}\sqrt{\pi}$. Назовемъ эту «полную площадь» кривой буквою P, а площадь кривой между x и $x+\delta x$ обозначимъ хотя бы черезъ p. Тогда найдемъ по предъидущему: вѣроятность того, что ошибка заключена между x и $x+\delta x$ равна отношенію между площадями p и P, т. е.

$$\frac{p}{P}=\frac{p}{\frac{a}{h}\sqrt{\pi}}=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\;\frac{p}{a}$$

Площадь $p\delta$, если δx достаточно малый интервалъ, приблизительно равна площади прямоугольника $y\,\delta x$. Если же δx взять *весьма* малымъ, т. е. взять вмѣсто конечнаго интервала δx дифференціалъ dx, то можно безъ всякой замѣтной ошибки принять, что соотвѣтственная площадь равна ydx, т. е. равна $ae^{-h^2x^2}dx$. Въ этомъ случаѣ написавъ p_d вмѣсто p найдемъ $\frac{p_d}{P} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$ $\frac{ae^{-h^2x^2}dx}{a} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}dx$. Эта послѣдняя величина выражаетъ, какъ видно изъ предъидущаго, вѣроятность ошибки между x и $x + dx$, т. е. то, что мы называемъ Px. Имѣемъ поэтому

$$Px = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

а это и есть формула Гаусса, доказанная на этотъ разъ чисто эмпирически, т. е. на основаніи наблюденій Брадлея. Чтобы убѣдиться, что въ этомъ результатѣ нѣтъ простого совпаденія, возьмемъ примѣръ совсѣмъ другого рода. Генералъ Дидіонъ произвелъ изслѣдованіе выстрѣловъ изъ пистолета въ мишень и измѣрилъ уклоненія пули отъ цѣли. Для однообразія результатовъ, всѣ измѣренія производились по горизонтали, отсчитывая отъ вертикали, проходящей черезъ центръ мишени. Пистолетъ не обнаружилъ чувствительнаго *постояннаго* уклоненія; но искусный стрѣлокъ стрѣлялъ каждый разъ возможно тщательно, поэтому наблюденныя уклоненія подходятъ подъ категорію случайныхъ. Результатъ былъ слѣдующій.

Между	0	и	5	сант.	......	24	уклоненія
»	5	»	10	»	......	20	»
»	10	»	15	»	......	18	»
»	15	»	21	»	......	11	»
»	21	»	26	»	......	10	»
»	26	»	31	»	......	8	»
»	31	»	38	»	......	5	»
»	38	»	45	»	......	3	»
Свыше			45	»	......	1	»

Построивъ кривую съ соотвѣтственными площадями по горизонтальнымъ координатамъ (абсциссамъ) 0, 5, 10 и т. д. и площадямъ 24, 20 и т. д. (такъ какъ здѣсь мы не отличаемъ положительныхъ уклоненій отъ отрицательныхъ) легко убѣдиться, что точки, опредѣленныя соотвѣтственными ординатами (вертикальными координатами) всѣ будутъ находиться на кривой

$$y = 22{,}62\, e^{-(0{,}03692x)^2}$$

т. е. кривой того же вида:

$$y = ae^{-h^2x^2}$$

и что, стало быть, вѣроятность ошибки заключающейся между x и $x + dx$ снова выразится формулою Гаусса:

$$px = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}.\, dx.$$

Формула эта до такой степени точна, что всякій разъ, когда рядъ наблюденій ей не удовлетворяетъ, ближайшее изслѣдованіе показываетъ, что мы пропустили какую либу постоянную или вообще систематическую ошибку.

Кривая, выражающая уравненіе вида

$$y = ae^{-h^2x^2}$$

называется *кривою вѣроятностей*. Сдѣлаемъ еще одинъ шагъ и мы очутимся въ области, устрашающей большую часть читателей, незнакомыхъ съ началами высшаго анализа. Впрочемъ для этого не потребуется ничего, исключая одного *знака*.

Площадь, заключенная между ординатами, соотвѣтствующими абсциссамъ x и $x + dx$, весьма приблизительно равна ydx, т. е. площади прямоугольника съ основаніемъ dx и высотою y.

Придадимъ къ $x + dx$ еще новое приращеніе dx, получимъ новый прямоугольникъ, немногимъ отличающійся отъ предъидущаго и т. д.; всю площадь кривой можемъ раздѣлить на такіе безконечно узкіе прямоугольники. Назовемъ второй изъ нихъ $y_1\ dx_1$ гдѣ y_1 есть ордината, соотвѣтствующая абсциссѣ $x_1 = x + dx$, третій пусть будетъ $y_2\ dx_2$ и т. д.; ихъ общая сумма начиная съ ydx и оканчивая нѣкоторымъ прямоугольникомъ $y_n\ dx_n$ будетъ $ydx + y_1\ dx_1 + y_2\ dx_2 + \ldots + y_n\ dx_n$. Взявъ безконечное число такихъ прямоугольниковъ составимъ конечную площадь, соотвѣтствующую конечному интервалу Δx. Вмѣсто суммы таких прямоугольниковъ напишемъ знакъ $\int$ (интегралъ), обозначающій сумму непрерывно измѣняющихся, т. е. безконечно мало между собою отличающихся слагаемыхъ, и получимъ выраженіе $\int y\ dx$, которое и обозначитъ площадь нашей кривой; но чтобы точнѣе выразить, между какими крайними абсциссами взята эта площадь, припишемъ обѣ крайнія абсциссы, x и $x + \Delta x$, одну снизу знака $\int$, другую сверху, т. е. напишемъ

$$p_\Delta = \int_x^{x+\Delta x} y\,dx,$$ гдѣ p_Δ есть площадь кривой между абсциссами x и $x + \Delta\, x$. Это справедливо для любой кривой. Въ частности, для *кривой вѣроятностей* т. е. для кривой $y = ae^{-h^2 x^2}$

найдемъ $$p_\Delta = \int_x^{x+\Delta x} ae^{-h^2 x^2} dx$$

Пользуясь тѣмъ же обозначеніемъ, можно удобно выразить *вѣроятность* ошибки, заключенной не между x и $x + \Delta\, x$, а между $-\,x$ и $+\,x$.

Вѣроятность ошибки между x и $x + dx$ выражается формулой

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

Вѣроятность ошибки между $-\,x$ и $+\,x$ можно разсматривать, какъ полную вѣроятность, составленную изъ суммы безконечнаго числа такихъ вѣроятностей, какова p_x. Назовемъ эту полную вѣроятность знакомъ P^{+x}_{-x}, тогда получимъ

$$P^{+x}_{-x} = \int_{-x}^{+x} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

Если взять $x = \infty$ и вставить въ эту формулу, то получимъ вѣроятность того, чтобы ошибка имѣла какую угодно величину, ибо между $-\infty$ и $+\infty$ помѣщаются всѣ конечныя величины. Вѣроятность эта очевидно равна достовѣрности, т. е. 1. Поэтому имѣемъ

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

откуда $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

выраженіе для полной площади кривой $y = e^{-h^2 x^2}$ допущенное нами раньше (причемъ можно умножить обѣ части равенства на a) безъ доказательства и доказываемое обыкновенно совсѣмъ другими пріемами, изучаемыми въ интегральномъ исчисленіи.

Выраженіе $\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$, которое обозначимъ черезъ P, въ свою очередь можно разсматривать какъ площадь кривой $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$. Выраженіе это, играющее такую существенную роль въ теоріи вѣроятностей, приходилось бы всякій разъ вычислять съизнова, поэтому существуютъ *таблицы*, значительно облегчающія выкладки.

Если положимъ $hx = t$ откуда $x = \frac{t}{h}$ то такъ какъ h, а стало быть и $\frac{t}{h}$ есть *постоянный* множитель, очевидно при измѣненіи x на dx, величина $\frac{t}{h}$ измѣнится на $\frac{dt}{h}$ ибо h останется безъ перемѣны, а t измѣнится также безконечно мало. Вмѣсто P поэтому можно написать $\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-t^2} dt}{h}$ или, что то же $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$ (дѣйствительно, $\int$ есть знакъ *суммы* и изъ за этого знака можно вывесть общаго множителя, а подъ знакомъ $\int$ можно производить любыя сокращенія дробей). Такъ какъ величина $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ разъ на всегда извѣстна, то задача опредѣленія площади (или что то же, интеграла) P_{-x}^{+x} составленной изъ безконечно малыхъ прямоугольниковъ вида $e^{-t^2} dx$ и ограниченной осями координатъ (осью t и осью y) и кривою вида $y = e^{-t^2}$; это опредѣленіе и производится посредствомъ такъ наз. таблицы интеграла $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2} dt$, который принято обозначать знакомъ $\Phi(t)$, означающимъ нѣкоторую функцію отъ t. Если мы раньше опредѣляли вѣроятности ошибки, заключенной между

$x=+a$ и $x=-a$, то замѣняя x черезъ t беремъ перемѣнную, которая въ h разъ больше прежней, такъ какъ $t=hx$. Поэтому и предѣлы для ошибки мы должны увеличить во столько же разъ, т. е. опредѣлить вѣроятность ошибки, заключенной между $t=+ha$ и $t=-ha$ (вѣроятность, чтобы ошибка равная t, заключалась между $\pm ha$ та же какъ и вѣроятность, чтобы ошибка, равная x, т. е. $\frac{t}{h}$ заключалась между $\pm a$). Итакъ, вѣроятность, чтобы ошибка x заключалась между $\pm a$ можетъ быть замѣнена вѣроятностью, чтобы t заключалось между $\pm ha$, или площадью, изображающею интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-ah}^{ah} e^{-t^2}\,dt$$ между предѣлами $-ah$

и $+ah$. Вмѣсто того, чтобы взять $\int e^{-t^2}dt$ между $-ah$ и $+ah$, можно взять ту же площадь между нулемъ и ah и помножить на два, потому что площадь отъ $-ah$ до нуля равна той, которую получимъ отъ нуля до $+ah$. Замѣтимъ, что вычисленіе вѣроятности ошибки, заключенной между предѣлами 0 и ah, въ тоже время даетъ отвѣтъ и на другую задачу (сравн. выше приведенные примѣры Брадлея и Дидіона). Пусть будетъ N общее число всѣхъ возможныхъ ошибокъ, Z число ошибокъ, заключенныхъ между 0 и a. Въ такомъ случаѣ, вѣроятность, чтобы ошибка x была въ числѣ находящихся въ этомъ интервалѣ, равна очевидно (если всѣ ошибки равновозможны)

$$\frac{\text{Числу полож. и отриц. ошибокъ между 0 и } a}{\text{Общее число ошибокъ} \ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{Z}{N}$$

Но та же величина равна вѣроятности, которую, для краткости, обозначимъ прямо P; которая равна по предъидущему $\Phi(t)$ между $\pm ah$; вмѣсто этого можно взять также $2\Phi(t)$ между 0 и $+ah$. И такъ найдемъ: $\frac{Z}{N} = P$ или $Z = NP$, гдѣ P имѣетъ вышеопредѣленное значеніе.

Для поясненія приведемъ примѣръ. Пусть число нашихъ опредѣленій, а стало быть и всевозможныхъ ошибокъ равно $N = 1000$; допустимъ для простоты, что постоянная h равна 1 и зададимся вопросомъ опредѣлить, сколько ошибокъ могутъ заключаться между 0 и 0,5, между 0 и 1,0, между 0 и 2,0 и т. д., а также между 0,5 и 1. Здѣсь имѣемъ $\frac{Z}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt$ или $=$ $\Phi(t)$, гдѣ $\Phi(t)$ включаетъ множитель 2. Таблицы, составленныя для $\Phi(t)$, показываютъ, что если $a = 0,5$, то $\Phi = 0,520$; если $a = 1$, то $\Phi = 0,843$; если $a = 2$, то $\Phi = 0,995$ и т. д. Такъ какъ $N = 1000$, то оказывается:

Между	0 и	0,5	всего	520	ошибокъ
»	0 и	1	»	843	»
»	0 и	2	»	995	»

Поэтому между 0,5 и 1 имѣемъ $843 - 520 = 323$ ошибки. Посмотримъ, въ какой мѣрѣ можно полагаться на такія теоретическія опредѣленія.

Прежде чѣмъ объяснить употребленіе «таблицы вѣроятностей» или, что то-же, таблицы, обозначающей площади, соотвѣтствующія разнымъ значеніямъ функціи $\Phi(t)$, необходимо ввести новое опредѣленіе, а именно такъ наз. *вѣроятнаго пре-*

дѣла ошибокъ (обыкновенно неправильно называемаго вѣроятною ошибкою).

Чтобы сдѣлать это, повторимъ сначала вкратцѣ наши прежніе результаты. 1) Вѣроятность px или, если угодно, p_x^{x+dx}, того, чтобы ошибка заключалась между x и $x + dx$ равна $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$

2) Вѣроятность того, что ошибка заключается между $x = 0$ и $x = a$, гдѣ a есть нѣкоторая конечная величина, измѣряется площадью $\Phi(a)$ или если угодо Φ_0^a, заключенною между абсциссами $x = 0$ и $x = a$, и измѣряемою суммою непрерывно измѣняющихся величинъ px, т. е. «интеграловъ» вида $\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2x^2} dx$, если зачтены всѣ положительныя и отрицательныя ошибки, почему и введенъ множитель 2. [1]).

3) Полагая $hx = t$, мы вмѣсто $x = a$ выберемъ соотвѣтственное значеніе для t, значеніе это будетъ $ha = t$, стало быть вводя t вмѣсто x, напишемъ

$$\Phi(ha) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ha} \frac{e^{-t^2} dt}{h} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ha} e^{-t^2} dt =$$

$$= \Phi_0^{ha}.$$

---

[1]) Замѣчу, что обыкновенныя таблицы составляются такъ, что числовымъ множителемъ является не $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ но $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, что мы и примемъ.

Напишемъ для краткости $ha = \gamma$ тогда имѣемъ

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt$$

Величина этой площади (или интеграла) обыкновенно и дается въ таблицахъ, гдѣ ставятъ разныя значенія γ съ интерваломъ напр. въ *0,01*, т. е. берутъ $\gamma = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}02$ и т. д., а въ другой графѣ помѣщаютъ соотвѣтственныя величины $\Phi(\gamma)$, найденныя либо вычисленіемъ (по пріемамъ интегральнаго исчисленія, предварительно разлагая e^{-t^2} въ рядъ) или же *графически*, что, конечно, гораздо проще, и хотя не такъ точно, но вполнѣ достаточно для почти всѣхъ практическихъ случаевъ. Вотъ напр. нѣкоторыя величины для $\Phi(\gamma)$.

γ	$\Phi(\gamma)$
0,1	0,112
0,2	0,223
0,3	0,329

Не слѣдуетъ забывать, что въ величину γ входитъ постоянная h, ибо $\gamma = ah$, и что непосредственное опредѣленіе h затруднительно; между тѣмъ, наблюденія даютъ «кривую вѣроятностей» съ абсциссою x, а не съ t, и ошибки задаются величинами вродѣ $x = a$, а не величинами вродѣ $t = ah$. Поэтому, необходимо дать простой способъ опредѣленія либо h, либо другой замѣняющей ея постоянной. Для этого и служитъ понятіе о *«вѣроятномъ предѣлѣ ошибокъ»* или, какъ часто выражаются, о вѣроятной ошибкѣ.

Сначала попытаемся опредѣлить такое γ, т. е.

такое ah, для котораго $\Phi(\gamma)$ равняется точно $^1/_2$. Назовемъ соотвѣтственное γ буквою ρ, а соотвѣтственное a буквою r. Мы ищемъ стало быть

$$\rho = rh, \text{ такое, что } \Phi(\rho) = \frac{1}{2}, \text{ гдѣ:}$$

$$\Phi(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\rho e^{-t^2} dt.$$

Эту задачу можно рѣшить помощью интегральнаго исчисленія, но можно и проще, помощью простой ариѳметики. Дѣйствительно, въ таблицахъ, составленныхъ для интерваловъ въ 0,01, мы найдемъ:

γ	$\Phi(\gamma)$
0,47	0.4937
0.48	0,5027

Для $\Phi(\gamma) = 0{,}5$, т. е. для $\Phi(\rho)$ должны, поэтому, имѣть ρ между *0,47* и *0,48*; дѣйствуя, какъ при вычисленіи логариѳмовъ, помощью «пропорціональныхъ частей», не трудно найти отсюда, что $\rho = 0{,}4769$ [1]). Мы нашли стало быть, что ρ или что то же $rh = 0{,}4769$; стало быть $h = \frac{0{,}4769}{r}$, гдѣ r есть та величина, которую мы и назвали «вѣроятнымъ предѣломъ ошибокъ». Итакъ, если

[1]) Имѣемъ: разность γ на *0,01* соотвѣтствуетъ разности Φ на *0,0090*. Принимая приблизительную пропорціональность, видимъ, что разность между $\Phi = 0{,}5$ и $\Phi = 0{,}4937$ составляетъ *0,0063*: поэтому къ γ, соотвѣтствующему $\Phi = 0{,}4937$, надо добавить $\frac{63}{90} \times 0{,}01 = \frac{63}{9000}$ около *0,0070*; болѣе точное опредѣленіе, принимая во вниманіе пятый десятичный знакъ, даетъ прибавку *0,0069*.

мы имѣетъ возможность какимъ бы то ни было способомъ опредѣлить величину r, то h опредѣлится простымъ дѣленіемъ.

Но опредѣленіе величины r не представляетъ трудностей. Дѣйствительно, зададимся вопросомъ: найти предѣлъ r ошибокъ, который съ одинаковой вѣроятностью можетъ быть не достигнутъ или, наоборотъ, перейденъ? Это значитъ, другими словами, найти такое r, чтобы вѣроятность сдѣлать ошибку, заключенную между предѣлами 0 и r (включая всѣ абсолютныя величины положительныхъ и отрицательныхъ ошибокъ), равнялась точно $\frac{1}{2}$. Другими словами, надо опредѣлить r изъ уравненія $\Phi(r) = \frac{1}{2}$ или что то-же изъ уравненія

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{2}$$

Задача кажется довольно сложною; но *графическое* ея рѣшеніе необычайно просто, ибо очевидно, что r есть та величина абсциссы x, при которой соотвѣтственная ордината y дѣлитъ полную площадь, ограниченную кривою вѣроятностей и принятую за 1 мѣры (ибо она измѣряетъ достовѣрность), *ровно пополамъ*. Такъ какъ площади всегда могутъ быть опредѣлены планиметромъ, то графическое рѣшеніе не представляетъ никакой трудности, величина r поэтому также всегда можетъ быть опредѣлена графически, а поэтому и величина $h = \frac{0{,}4769}{r}$ всегда легко опредѣляется. По этой причинѣ мы будемъ признавать величины r и h за извѣстныя, какъ только „кривая вѣроятностей“

начерчена по данным непосредственных наблюденій. Приведем классическій примѣр, заимствованный из Berliner Astron. Jahrb. 1834 стр. 274.

Пусть дано 470 наблюденій, а стало быть 470 возможных ошибок; по этим наблюденіям построена кривая вѣроятностей и найдено, что вѣроятный предѣл ошибок в угловых секундах составляет $r = 0'',2637$. Если имѣем таблицу, составленную для $\Phi(\gamma)$ или $\Phi(ah)$ по данным величинам $a = 0'',1$, $a = 0'',2$ и т. д., то для перевода этой таблицы на величины, соотвѣтствующія $r = 0'',2637$, слѣдует поступить так.

Таблица $\Phi(\gamma)$ дает величины $\Phi(ah)$. Но $h = \frac{0,4769}{r}$ стало быть вмѣсто ah берем $\frac{0,4769a}{r}$, поэтому вмѣсто a возьмем вездѣ $\frac{a}{r}$, напр. вмѣсто $0'',1$ берем $\frac{0'',1}{0'',2637} = 0,3792$ и т. д., умножаем полученныя числа на $0,4769$, напр. $0,3792 \times \times 0,4769 = 0,1809 \ldots$ и т. д., тогда получим величины γ, а по этим величинам найдем прямо по таблицѣ величины $\Phi(\gamma)$, напр. для $\gamma = 0,109 \ldots$ найдем Φ около $0,2$, а так как $N = 470$, то $Z = 94$ или точнѣе 95. Имѣем, поэтому, слѣдующее практическое правило.

Если даны величины ошибок $x = a_1$, $x = a_2$ и т. д., то берем отношенія их к величинѣ „вѣроятнаго предѣла ошибок“, т. е. к ошибкѣ, соотвѣтствующей вѣроятности $\frac{1}{2}$. Полученныя отношенія умножаем на $0,4769$ и получаем аргументы, по которым берем функцію $\Phi(\gamma)$, опредѣляющую вѣроятность ошибки или что то же *число* ошибок между данными *величинами* (предѣлами) ошибок.

Въ нашемъ примѣрѣ, мы нашли бы по таблицамъ, что *Φ* соотвѣтствующее $a = 0'',1$, **равно** *0,20186*; ***Φ*** **соотвѣтствующее** $a = 0'',2$ **равно** *0,39102*; ***Φ*** соотвѣтствующее *0'',3* равно *0,55705*. **Такъ какъ общее число ошибокъ** *470*, **то найдемъ отсюда:**

Между *0* **и** *0'',1* **находится** *95* **ошибокъ**
» *0,1* **и** *0,2* » *89* » **и т. д.**

Чтобы вычислить въ интервалѣ *0,1—0,2* **вычисляютъ сначала въ интервалѣ** *0—0,2* **и вычитываютъ** *95*, **число, полученное для** *0—0'',1*. **Любопытно сравнить результаты теоріи съ данными наблюденія, опубликованными въ названномъ астрономическомъ журналѣ:**

Интервалъ между:	ЧИСЛО ОШИБОКЪ. По теоріи.	По прямому подсчету, т. е. опыту.
0'',0—0'',1	95	94
0,1 — 0,2	89	88
0,2— 0,3	78	78
0,3— 0,4	64	58
0,4 — 0,5	50	51
0,5— 0,6	36	36
0,6 — 0,7	24	26
0,7— 0,8	15	14
0,8— 0,9	9	10
0,9— 1,0	5	7
Болѣе 1	5	8

За исключеніемъ интерваловъ 0,3—0,4 и свыше 1 гдѣ, быть можетъ, вмѣшались какія либо ошибки, имѣющія характеръ не случайныхъ (напр. временно было отвлечено вниманіе наблюдателя), со-

гласіе между теоріей и наблюденіемъ оказывается весьма удовлетворительнымъ.

Другой примѣръ доставитъ намъ опытъ генерала Дидіона съ пистолетомъ. Здѣсь мы нашли бы графически, что $r=12{,}33$ въ сантиметрахъ, поэтому аргументы таблицы найдутся по предъидущему способу, а такъ какъ число опытовъ здѣсь *100*, то нашли бы напр. для интервала отъ *0* до *5* сантим., вмѣсто *5* надо взять аргументъ $\frac{5 \times 0{,}4769}{12{,}33}$ т. е. около *0,195*. Соотвѣтсвенное Φ равно около *0,215*.

Интервалы или предѣлы уклоненій между	Теоретическое число выстрѣловъ $= 100 \times \Phi$.	Наблюденное число.
0— 5 сант.	21,5	24
5—10 »	20.1	20
10—15 »	17,0	18
15—21 »	16.2	11
21—26 »	9.7	10
26—31 »	6.5	8
31—40 »	6.1	5
40—45 »	1,5	3
45—56 »	1,2	1
болѣе 56	0,2	0
	100	100

Здѣсь результаты хотя сносны, но далеко не такъ удовлетворительны, какъ въ примѣрѣ, заимствованномъ изъ астрономической практики. Это и не удивительно, потому что пистолетъ, даже въ рукахъ хорошаго стрѣлка, далеко не такой точный инструментъ, какъ телескопъ въ рукахъ астронома, и кромѣ случайныхъ ошибокъ, здѣсь возможны всегда постоянныя ошибки отъ несовершенства оружія.

Теперь остается сказать нѣсколько словъ о *примѣненіяхъ* теоріи вѣроятностей, причемъ будутъ указаны и *злоупотребленія* этой теоріей.

Примѣненія теоріи.

Методъ наименьшихъ квадратовъ. Однимъ изъ важнѣйшихъ примѣненій теоріи вѣроятностей служитъ *методъ наименьшихъ квадратовъ*, исходящій изъ того принципа, что наивѣроятнѣйшею системою значеній для величинъ, извлеченныхъ изъ ряда наблюденій, служитъ та, для которой сумма квадратовъ ошибокъ окажется наименьшею.

Чтобы вывесть это положеніе изъ теоріи вѣроятностей, сначала необходимо сказать два слова о наименьшей величинѣ выраженій, составленныхъ изъ суммы какихъ либо квадратовъ.

Пусть дана напр. сумма x^2+y^2; если величинѣ x дадимъ какое либо приращеніе h, а величинѣ y дадимъ приращеніе k, то получимъ $x^2+y^2+2hx+2ky+h^2+k^2$. Если величины h и k достаточно малы, то h^2 и k^2 малы по сравненію съ h и k и поэтому приблизительная величина приращенія функціи x^2+y^2 будетъ равна $2(hx+ky)$; если же h и k стремятся къ нулю, то приращеніе функціи x^2+y^2 будетъ неопредѣленно приближаться къ величинѣ $2(hx+ky)$ и въ предѣлѣ должно считаться равнымъ этой величинѣ. Если x и y перемѣнныя, зависящія отъ одной и той же перемѣнной t, то и приращенія x и y будутъ зависѣть отъ приращенія t. Пусть t измѣнилось на безконечную малую величину dt (дифференціалъ отъ t), допустимъ, что въ этомъ случаѣ x получило нѣкоторое приращеніе dx (дифференціалъ отъ x) и что $dx = Xdt$ и точно также $dy = Ydt$, тогда найдемъ, что приращеніе $x^2 + y^2$ въ предѣлѣ будетъ стремиться къ величинѣ $2(Xx + Yy)dt$, такъ что можно положить:

Приращеніе отъ $x^2 + y^2$ равно $2(Xx + Yy)dt + R$, гдѣ R есть величина, быстрѣе стремящаяся къ нулю, нежели dt, другими словами, безконечно малая даже по сравненію съ dt, хотя и эта послѣдняя безконечно мала. Наоборотъ, величины X и Y, вообще говоря, будутъ конечныя, зависящія отъ t, выраженія (функціи), потому что напр. X есть отношеніе между dx и dt, т. е. между двумя величинами, хотя и безконечно-малыми, но одного и того же характера или, какъ принято выражаться, одного и того же порядка.

Вмѣсто двухъ величинъ x и y могли бы взять три напр. x, y и z и т. д. Совершенно подобнымъ же образомъ можно доказать, что если дана сумма квадратовъ вида

$$(x-n_1)^2 + (x-n_2)^2 + (x-n_3)^3 + \dots$$

гдѣ n_1, n_2 и т. д. постоянныя величины, а всѣ квадраты вродѣ $(x-n_1)^2$ очевидно зависятъ отъ одной и той же перемѣнной x, то половина приращенія функціи, если отбросить безконечно-малыя высшихъ порядковъ, равна (замѣняя x черезъ $x-n_1$, y черезъ $x-n_2$ и т. д. а t черезъ x).

$$\Big[\, X\,(x-n_1) + Y(x-n_2) + \dots \,\Big]\, dx.$$

гдѣ $X = \dfrac{d(x-n_1)}{dx}$, $Y = \dfrac{d(x-n_2)}{dx}$ и т. д.

Но приращеніе отъ $x-n_1$ очевидно равно dx, потому что постоянная величина n_1 не измѣняется съ измѣненіемъ x. Поэтому здѣсь $X = Y =$ и т. д. $= 1$. и половина приращенія нашей функціи будетъ $[x - n_1 + x - n_2 + \ldots.]dx$; здѣсь x играетъ роль t. Итакъ, если имѣемъ функцію отъ x вида $\Phi(x) = (x - n_1)^2 + (x - n_2)^2 + \ldots + (x - n_2)^2$ то ея безконечно малое приращеніе, которое можно обозначить черезъ $d\Phi(x)$, т. е. дифференціалъ отъ функціи x, при дѣленіи на dx, дастъ выраженіе $\frac{d\Phi(x)}{dx} = 2(x - n_1 + x - n_2 + \ldots + x - n_k) =$

$$= 2\left[\,kx - (n_1 + n_2 + \ldots + n_k)\,\right].$$

Но отношеніе между приращеніемъ какой либо функціи даннаго перемѣннаго (напр. функціи отъ x), и приращеніемъ самого перемѣннаго (напр. x) принято называть *производною функціею* отъ того же перемѣннаго и обозначать такъ: $\Phi'(x)$, поэтому можемъ написать

$$\frac{1}{2}\ \Phi'(x) = kx - (n_1 + n_2 + \ldots n_k).$$

Еслибы, въ какомъ либо частномъ случаѣ, мы нашли $\Phi'(x) = 0$, то получили бы $\frac{1}{2}\ \Phi'(x) = 0 = kx - (n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$, откуда $x = \frac{n_1 + \ldots + n_k}{k} = m$, гдѣ m есть среднее ариѳметическое k изъ величинъ n_1. $n_2 \ldots nk$.

Находимъ, стало быть, слѣдующее:

Если дана сумма квадратовъ разностей, вида $(x - n_1)^2 + \ldots + (x - n_k)^2$ и производная отъ этой функціи взятая по x равна нулю, то x, въ этомъ случаѣ, равно средней ариѳметической отъ всѣхъ величинъ n_1, n_2. $\ldots$, n_k. Нокогда производная отъ какой либо функціи равна нулю, то при этомъ самая функція всегда обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ.

Дѣйствительно, пусть дана любая функція отъ x, напр. $f(x)$ и предположимъ, что когда x получаетъ приращеніе dx, то $f(x)$ измѣняется на $df(x)$. По опредѣленію имѣемъ $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$=производной отъ f (x) взятой по перемѣнной x. Но съ другой стороны, можно обозначить $f(x)$ наприм.: буквою y, а приращеніе $df(x)$ знакомъ dy, такъ что получимъ: $dy=f'(x)\,dx$.

Это равенство справедливо лишь въ предѣлѣ. Если же x получило *конечное* приращеніе h, то $f(x)$ или что то же y получитъ не безконечно малое, а конечное приращеніе κ, то имѣемъ вообще говоря $\kappa=f'(x)\,h+R$, гдѣ R стремится къ нулю скорѣе, чѣмъ h и κ, такъ что можетъ быть отброшено, когда h станетъ равнымъ dx, а κ станетъ равнымъ dy, гдѣ $y=f(x)$.

Такъ какъ для малыхъ значеній h мы вправѣ пренебречь величиной R по сравненію съ h, а тѣмъ болѣе съ конечною (въ общемъ случаѣ) величиною $f'(x)$, то знакъ κ зависитъ исключительно отъ знаковъ f' и h, но не отъ знака R. Полагая h разъ на всегда положительнымъ, увидимъ, что κ будетъ $>$ или <0, смотря потому, будетъ ли $f'(x)$ отрицательнымъ или положительнымъ.

Итакъ, если перемѣнная x непрерывно возрастаетъ, получая малыя положительныя приращенія, то зависящая отъ нея функція будетъ также возрастать, т. е. будетъ получать положительныя же приращенія, пока $f'(x)$ или короче f' остается $>o$, и станетъ убывать, какъ только f' станетъ $<o$. Поэтому, когда f' перемѣнитъ знакъ съ $+$ на $-$ или, наоборотъ, другими словами, когда f'

перейдетъ черезъ нуль (иначе f' пришлось бы измѣнить скачкомъ, а не непрерывно, чего мы не допускаемъ), то наша данная функція f (x) или короче f, перейдетъ отъ возрастанія къ убыванію, или наоборотъ. Поэтому, въ томъ именно мѣстѣ, т. е. для того именно значенія x, которое соотвѣтствуетъ $f'=o$, функція f будетъ или сразу больше или одновременно меньше, чѣмъ въ непосредственно предшествующемъ и послѣдующемъ мѣстѣ. Дѣйствительно, если она раньше возрастала, то въ данномъ мѣстѣ она больше предъидущаго своего значенія; но вслѣдъ за даннымъ мѣстомъ функція f, по предположенію, стала убывать, стало быть здѣсь она меньше непосредственно послѣдующаго значенія.

Предъидущія соображенія показываютъ, что въ томъ мѣстѣ, гдѣ $f'=o$, данная функція представляетъ либо максимумъ, либо минимумъ, по сравненію съ ближайшими мѣстами; максимумъ, если f отъ возрастанія перешла къ убыванію, т.е. если f' отъ $+$ перешла къ $-$: минимумъ въ обратномъ случаѣ, т. е. если f' отъ $-$ перешла къ $+$, или что тоже, f перешла отъ убыванія къ возрастанію.

Для данной выше функціи не трудно убѣдиться, что въ мѣстѣ, гдѣ ея производная $kx-(n_1+n_2+\ldots+n_k)$ равна нулю, т. е. когда $x=m=$средн. ариѳм. (отъ n_1, n_2, ... n_k), данная функція обращается въ *минимумъ*, а не въ максимумъ. Дѣйствительно. это ясно апріорно, ибо сумма вида $(x-n_1)^2+(x-n_2)^2+\ldots$ при безконечномъ возрастаніи x превратится въ ∞, и поэтому не можетъ никогда достичь максимума, такъ какъ ее всегда можно сдѣлать еще больше; но при извѣстномъ значеніи x она можетъ быть минимумомъ, т. е. можетъ быть меньше, чѣмъ при другихъ, смежныхъ значеніяхъ.

Пусть напр. $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=3$. Имѣемъ

$$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2$$

$$f'(x)=3x-(1+2+3)=3x-6.$$

Возьмемъ $x=\frac{1+2+3}{3}=2$; тогда $f'(x)=f'(2)=0$; $f(x)=1+0+1=2$.

Это и есть искомый *минимумъ* для функціи f. Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ два другихъ значенія для x, одно меньше 2, другое больше, напр. $x=1$ и $x=3$.

Для $x=1$ имѣемъ $f'(1)=-3$, т. е. <0; производная отрицательна, данная функція f убываетъ, по мѣрѣ возрастанія x. Дѣйствительно, $f(1)=0+1+4=5$, т. е $f(1)>f(2)$.

Для $x=3$ имѣемъ $f'(3)=3$ $f(3)=4+1+0=5$ т. е. $f(3)>f(2)$, такъ что $f(2)$ меньше обѣихъ смежныхъ величинъ $f(1)$ и $f(3)$. Мы ограничились для x интерваломъ 1. Но аналогичные результаты нашли бы, взявъ $x=1,99999$ и $x=2,00001$, да и вообще взявъ какой угодно малый конечный интервалъ.

Послѣ этого необходимаго отступленія, возвратимся къ нашей теоріи.

Предположимъ, что данъ рядъ измѣреній одной и той же наблюдаемой величины x и что получены данныя $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и что ошибки (величина ихъ, разумѣется, неизвѣстна) равны соотвѣтственно $E_1, E_2, \ldots, E_k$, такъ что имѣемъ рядъ равенствъ $x=n_1+E_1$, и т. д. или $x-n_1=E_1$ и т. д. Хотя величины E_1 и т. д. неизвѣстны, но допуская, что у насъ нѣтъ *систематическихъ* ошибокъ, что приборы достаточно точны, а наблюдатель искусенъ, мы имѣемъ полное основаніе допустить, что наибольшая изъ величинъ E все-таки значительно меньше искомой величины x и наблюдаемыхъ величинъ n_1 и т. д. Сложивъ всѣ получаемыя равенства, найдемъ $kx-(n_1+n_2+\ldots+n_k)=E_1+E_2+\ldots+E_k$. Если мы примемъ x равнымъ среднему ариѳметическому m отъ n_1, $n_2, \ldots, n_k$ т. е. положимъ $x=\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{k}$, то ясно, что сумма ошибокъ $E_1+E_2+\ldots+E_k$ обратится въ нуль, и что, стало быть, нѣкоторыя изъ этихъ ошибокъ должны имѣть знакъ $+$, а другія $-$. Но сумма равенствъ $x-n_1=E_1$ и т. д. можетъ быть написана также въ видѣ $(x-n_1)+(x-n_2)+\ldots=E_1+E_2+\ldots$. Если взять $x=m$, то, какъ замѣчено, имѣемъ $E_1+E_2+\ldots=0$.

Съ другой стороны, $(x-n_1)+(x-n_2)+\ldots$, попредъидущимъ разъясненіямъ, $=\frac{1}{2}\Phi'(x)$, т. е. половинѣ производной отъ функціи $\Phi(x)=(x-n_1)^2+(x-n_2)^2+\ldots=E_1^2+E_2^2+\ldots$ и если $\Phi'(x)=0$ то $\Phi(x)$ есть ~~максимумъ~~ минимумъ. Стало быть, если взять $x=$ средн. ариѳм. изъ n_1, $n_2, \ldots, n_k$, т. е. изъ наблюденныхъ величинъ, то сумма квадратовъ ошибокъ, т. е. сумма $E_1^2+E_2^2+\ldots$ будетъ наименьшею.

Принципъ *наименьшихъ квадратовъ* состоитъ въ томъ, что то именно значеніе x должно быть признано наиболѣе вѣроятнымъ, для котораго сумма квадратовъ ошибокъ, т. е. уклоненій этой величины отъ наблюденныхъ величинъ, будетъ наименьшею. Оказывается, что для ряда уравненій вида $x-n_1=E_1$ наиболѣе вѣроятною величиною для x является $x=m$, т. е. среднее ариѳметическое. Это, разумѣется, не есть *доказательство*, а только изложеніе принципа. Однако, не трудно показать, что принципъ совершенно согласенъ съ выведенною нами раньше теоріей для вѣроятностей ошибокъ.

Было показано, что

$$px = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

есть вѣроятность сдѣлать ошибку, заключенную между x и $x + dx$.

Возьмемъ $x - n_1 = E_1$; если это очень малая величина, то можно принять ее за dx, тогда найдемъ съ значительною степенью приближенія.

$$p_{E_1} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-E_1^2 x^2} dx$$

Тоже и для E_2 и т. д.

Вѣроятность совмѣстнаго появленія всѣхъ ошибокъ вида $E_1 . E_2$ и т. д., по закону сложной вѣроятности, равна $p_{E_1} \times p_{E_2} \times$ и т. д., т. е. равна

$$a^{\kappa} e^{-h^2 (E_1^2 + E_2^2 + \ldots)}$$

гдѣ $a = \frac{h}{\sqrt{\pi}} dx$ очень малая величина, слѣдовательно a^{κ} и того меньше. Написанное нами выраженіе имѣетъ множитель $e^{-k^2 (E_1^2 + E_2^2 + \ldots}$ если этотъ множитель приметъ *наибольшее* значеніе, то сложная вѣроятность будетъ *наибольшею*; но изобразивъ тотъ же множитель въ видѣ

$$\frac{1}{e^{h^2 (E_1^2 + E_2^2 + \ldots)}}$$

и помня, что $e > 1$, а h постоянная, сразу видимъ, что для этого сумма квадратовъ $E_1^2 + E_2^2 + \ldots\ldots$ должна быть *минимумомъ*. Итакъ, когда сумма квадратовъ ошибокъ наименьшая, то вѣроятность появленія соотвѣтственной системы ошибокъ будетъ наибольшею. Другими словами, эта система ошибокъ, а стало быть и соотвѣтственная система разностей $x—n_1$ всего вѣроятнѣе, т. е. если сумма квадратовъ ошибокъ наименьшая, то соотвѣтственная величина x всего больше заслуживаетъ довѣріе. Стало быть, при всякомъ рядѣ наблюденій надо стремиться достичь возможно меньшей суммы квадратовъ ошибокъ, чего достигаемъ приличнымъ выборомъ величины x; въ нашемъ простѣйшемъ случаѣ это достигается, взявъ $x =$ среднему ариѳметическому; чтобы воспользоваться этой теоріей, вовсе нѣтъ необходимости въ накопленіи огромнаго количества наблюденій, но изъ нѣсколькихъ рядовъ наблюденій надо выбрать тотъ, который даетъ наименьшую сумму квадратовъ ошибокъ. Доказательство наше, однако, предполагаетъ, что вѣроятность ошибки слѣдуетъ закону Гаусса, а это справедливо лишь въ томъ случаѣ, если «кривая вѣроятностей» имѣетъ видъ, требуемый формулою Гаусса. Поэтому, если мы имѣемъ хотя бы 10 наблюденій и наше графическое построеніе показало, что они даютъ кривую требуемой формы, то мы можемъ съ увѣренностью примѣнить методъ наименьшихъ квадратовъ; въ противномъ случаѣ, мы этого права не имѣемъ, хотя бы у насъ имѣлось 1000 наблюденій, такъ какъ явно, что у насъ есть нѣкоторая систематическая ошибка.

Значеніе метода наименьшихъ квадратовъ въ томъ, что онъ примѣняется и къ гораздо болѣе сложнымъ случаямъ, когда существуетъ множество уравненій, опредѣляющихъ зависимость между ошибками, когда не всѣ наблюденія одинаково точны и т. д. Подробное развитіе теоріи наименьшихъ квадратовъ однако не входитъ въ планъ этого очерка; въ видѣ заключенія будетъ сказано еще о нѣкоторыхъ *неправильныхъ* примѣненіяхъ теоріи вѣроятностей.

Злоупотребленіе ученіемъ о вѣроятностяхъ.

1. Предположимъ, что кто либо предложилъ слѣдующую задачу:

При дѣленіи 10 на 3 получается въ частномъ 3 и въ остаткѣ 1. Обращаемъ 1 въ десятыя доли и дѣлимъ 10 десятыхъ на 3; получаемъ въ частномъ 3 и въ остаткѣ 1. Остатокъ снова умножаемъ на 10 и дѣлимъ на 3 и т. д. Какова вѣроятность, что при третьемъ, четвертомъ и т. д. повтореніи дѣйствія постоянно въ остаткѣ будетъ 1? Нелѣпость этой задачи очевидна, такъ какъ со второго же раза ясно, что сколько бы мы разъ ни повторяли наше дѣйствіе, всегда въ частномъ будетъ 3, а въ остаткѣ 1, стало быть апріорно знаемъ, что появленіе остатка 1 всегда достовѣрно. Теорія вѣроятностей совершенно непримѣнима и излишня тамъ, гдѣ мы имѣемъ законъ или правило, установленное математически—не на основаніи перечисленія случаевъ, а на основаніи одного случая, замѣняющаго сколько угодно такихъ же, съ нимъ однородныхъ. Для установленія напр. пиѳагоровой теоремы нѣтъ надобности изслѣдовать тысячу прямоугольныхъ треугольниковъ, но достаточно одного.

2. Какова вѣроятность того, что солнце взойдетъ завтра, предполагая, что восходъ солнца наблюдался систематически милліонъ разъ? Кондорсе полагалъ, что эта задача совершенно тожественна со слѣд. «Въ одной урнѣ милліонъ бѣлыхъ шаровъ и одинъ черный, какова вѣроятность вынуть бѣлый шаръ?». Онъ забылъ о томъ, что стоитъ поѣхать въ страны, находящіяся за полярнымъ кругомъ, и пробыть тамъ, напр. на сѣверѣ, въ началѣ декабря, чтобы пережить дни, когда солнце не взойдетъ въ теченіе цѣлыхъ сутокъ. Но даже помимо этого, обѣ задачи далеко не одинаковы. Увѣренность въ правильности видимаго движенія солнца пріобрѣтается не только повтореніемъ одного и того же явленія, но и найденной законосообразностью этого явленія, и разъ извѣстная законность найдена, всѣ послѣдующія повторенія могутъ служить лишь для установленія болѣе точныхъ законовъ, а не для подтвержденія уже найденнаго. Болѣе точные законы находятся усовершенствованіемъ методовъ наблюденія и улучшеніемъ теоретическихъ соображеній; пока теорія и практика остается неизмѣнною, или мало подвижною (какъ напр. въ Китаѣ), милліоны новыхъ наблюденій воспроизводятъ лишь то, что уже извѣстно изъ тысячи прежнихъ, и никакой новой вѣроятности не прибавляютъ.

3. Тарквиній Древній вызвалъ авгура Акція Невія на родъ состязанія, спросивъ его: «Возможно ли то, о чемъ я думаю?» Авгуръ принялъ вызовъ и сказалъ: «Да». «Значитъ возможно, отвѣтилъ царь, чтобы ты разрѣзалъ кремень бритвой?». Невій взялъ бритву и разрѣзалъ кремень. Кондорсе вычислилъ вѣроятность этого событія, предполагая, что со времени изобрѣтенія бритвъ около

милліона кремней не могли быть разрѣзаны. Бертранъ остроумно возражаетъ: «вмѣсто того, чтобы считать кремни, не мѣшало бы сосчитать число монарховъ, которыхъ обманывали авгуры, и число историковъ, вѣрившихъ всякимъ баснямъ».

Значеніе закона большихъ чиселъ.

Большая часть нелѣпыхъ задачъ и не менѣе нелѣпыхъ рѣшеній, основаннымъ яко бы на «теоріи вѣроятностей», относятся къ неправильному истолкованію «закона большихъ чиселъ», установленнаго Жакомъ Бернульи. Законъ этотъ, однако, примѣнимъ не къ любому случаю, а только къ тѣмъ, вообще, задачамъ, гдѣ вычисленіе вѣроятностей имѣетъ какой либо смыслъ. Если напр. вѣроятность событія измѣняется съ каждымъ опытомъ, то теорема Бернульи болѣе не примѣнима. Теорема, о которой идетъ рѣчь, представляетъ большое сходство съ тою, которою пользовался Гауссъ, исходя изъ понятія о среднемъ ариѳметическомъ, но нѣсколько сложнѣе ея и можетъ быть выражена такъ:

Извѣстны простыя и постоянныя вѣроятности p и q двухъ противоположныхъ событій A и B. Вѣроятность того, что при очень большомъ числѣ, именно при μ опытахъ событіе A наступитъ нѣкоторое число разъ, заключенное между $\mu p \pm \gamma \sqrt{2 \mu p q}$ разъ эта вѣроятность равна, по Бернульи,

$$P = \Phi(\gamma) \pm \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2 \pi \mu p q}}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы Гаусса и мы его опустимъ, замѣтивъ лишь, что теорема Гаусса получается отсюда при $\mu = \infty$. Для обѣихъ указанныхъ границъ имѣемъ вѣроятности:

$$\frac{\mu p \pm \gamma \sqrt{2 \mu p q}}{\gamma} = p \pm \gamma \sqrt{\frac{2 p q}{\mu}}$$

Если μ очень велико, то второй членъ очень малъ и его можно отбросить, безразлично, стоитъ ли передъ нимъ $+$ или $-$, причемъ P превратится въ $p = \Phi(\gamma)$, но это и есть, какъ мы знаемъ, вѣроятность того, чтобы ошибка заключалась между 0 и γ, ибо $\Phi(\gamma)$ есть ни что иное какъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt.$$

Если оставимъ γ и P постоянными и будемъ увеличивать лишь μ, т. е. число случаевъ, то предѣлы $\mu p \pm \gamma \sqrt{2 \mu p q}$ для числа случаевъ, благопріятныхъ событію A, быстро съуживаются, т. е. становятся все меньше относительно общаго числа случаевъ; если, наоборотъ, оставить эти предѣлы постоянными, то γ должна возрастать вмѣстѣ съ μ, причемъ P быстро приближается къ 1, т. е. къ достовѣрности, потому что уже при $\gamma = 3$, $\Phi(\gamma)$, какъ видно изъ таблицъ, довольно близко къ 1, а второе слагаемое, образующее сумму P, стремится къ нулю.

Слѣдующій примѣръ пояснитъ теорему Бернульи. Въ извѣстной странѣ на 18 мужскихъ рожденій въ среднемъ приходится 17 женскихъ. Въ теченіе года родилось 14000 дѣтей. Какова вѣроятность P, что число M мужскихъ рожденій находится между 7037 и 7363?

Рѣшеніе. Вѣроятность того, что M заключается $\mu p \pm \gamma \sqrt{2 \mu p q}$ можно преобразовать, взявъ болѣе удобные предѣлы. Пусть $\gamma \sqrt{\frac{2 m n}{\mu}} = l.$ По предъидущему, вѣроятность того, что M заключается между $m \pm l$ или $m \pm \gamma \sqrt{\frac{2 m n}{\mu}}$ найдется, замѣнивъ въ прежней формулѣ μp черезъ m и μpq, т. е. mq черезъ $\frac{m n}{\mu}$, т. е. взявъ $n = \mu q$. Но такъ какъ $p + q = 1$, то этому удовлетворимъ въ томъ случаѣ, если возьмемъ еще $m + n = \mu$. Поэтому формулу Бернульи будемъ употреблять въ видѣ:

$$P = \Phi(\gamma) \pm \frac{\sqrt{\mu} \; e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2 \pi m n}}$$

Это и есть вѣроятность того, что событіе A произойдетъ M разъ, гдѣ $m - l < M < m + l$

и $l = \gamma \sqrt{\frac{2 m n}{\mu}}$, а $\mu = m + n$.

Для нашего числового примѣра $\mu = 14000$, $m = \frac{18}{35} \times 14000 = 7200$, $l = 163$, ибо $m + l = 7363$, $\gamma = 1{,}949$ и по таблицамъ $\Phi = 0{,}99415$, второе же слагаемое $= 0{,}00015$ (какъ видно изъ этого примѣра, это слагаемое при большомъ μ очень мало) и $P = 0{,}99430$ это и есть искомая вѣроятность, близкая къ достовѣрности.

Въ своей абстрактной формѣ, теорема Бернульи мало говоритъ уму неподготовленнаго читателя, но ея философское значеніе безъ труда можетъ быть выяснено конкретными примѣрами. Такой примѣръ даетъ Бертранъ.

«Вы вышли погулять и васъ захватила гроза на мѣстѣ, гдѣ нѣтъ никакого крова. Вы промокнете отъ дождя; это *достовѣрно*. Достовѣрность теоремы Бернульи того же рода, сходство доходитъ до тождества. Одинаковыя выраженія могутъ быть противопоставлены съ такимъ же—осмѣлимся сказать съ такимъ же малымъ—основаніемъ въ обоихъ случаяхъ. Дождь, скажете вы, промочитъ меня; почемъ вы это знаете? Каждая капля направлена случаемъ, ни одна не падаетъ по извѣстному назначенію. Ничто не доказываетъ, чтобы какая либо изъ капель должна была упасть на гуляющаго, на какомъ же основаніи утверждать о многихъ то, что недостовѣрно для каждой порознь? Но хотя наше утвержденіе достовѣрно не въ томъ смыслѣ, какъ пиѳагорова теорема, на него можно вполнѣ положиться. Болѣе того: если двое гуляющихъ выйдутъ вмѣстѣ и пойдутъ рядомъ подъ однимъ дождемъ, не только оба промокнутъ, но оба [1]) промокнутъ въ одинаковой степени. Если одинъ станетъ увѣрять, что случайно промокъ сильнѣе, ему такъ же не повѣрятъ, какъ и тому, что онъ вышелъ сухимъ. Случайныя событія подобны ка-

[1]) Допуская, что оба находятся въ сходныхъ условіяхъ: конечно дѣло измѣнится, если у одного есть зонтикъ, а у другого нѣтъ.

плямъ дождя. Если они достаточно многочисленны, то они распредѣляются равномѣрно между всѣми возможными случаями; ни одинъ не попадаетъ въ особо благопріятное положеніе. Въ этомъ состоитъ теорема Бернульи».

Чтобы еще болѣе выяснить смыслъ теоремы Бернульи, опредѣлимъ понятіе *уклоненія отъ вѣроятнаго числа* (или просто *уклоненія*).

Пусть при игрѣ въ орлянку мы бросили монету 10000 разъ. Такъ какъ орелъ или рѣшетка равновѣроятны, то вѣроятное число разъ въ пользу рѣшетки будетъ 5000. Если опытъ далъ 5021, то $+21$ есть *уклоненіе* въ пользу рѣшетки. Вообще, если μ общее число случаевъ, p вѣроятность событія A, то $m=\mu p$ есть *вѣроятное число* случаевъ въ пользу A, если же вмѣсто μp или m получили $m \pm l$, то l есть положительное или отрицательное *уклоненіе*. Поэтому теорема Бернульи, обозначая $\sqrt{\frac{\mu}{2\pi m n}}\, e^{-\gamma^2}$ черезъ $E(\gamma)$ или E,—выражаетъ, что $P=\Phi \pm E$ есть *вѣроятность* того, что наблюденное число случаевъ уклонится отъ *вѣроятнаго числа случаевъ* на величину, заключенную между предѣлами $\pm\, l$, гдѣ $l=\gamma.\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}$.

Такъ какъ m и n, вообще говоря, величины того же порядка, какъ и μ (ибо $m+n=\mu$), то при возрастаніи μ, произведеніе mn возрастаетъ еще быстрѣе; поэтому для очень большого μ, уклоненіе становится по *абсолютной* величинѣ также очень большимъ.

Иное дѣло *относительная* величина; отношеніе

$$\frac{l}{\mu}=\gamma\sqrt{\frac{2mn}{\mu^2\mu}}$$ и эта величина при возрастаніи μ стремится, вообще говоря, къ нулю [1]). Поэтому *относительная* величина уклоненія, при весьма значительномъ числѣ опытовъ, *весьма мала.* Другими словами: если число опытовъ весьма велико, то, по теоремѣ Бернульи, вѣроятное уклоненіе наблюдаемыхъ чиселъ случаевъ въ пользу того или иного событія отъ вѣроятныхъ чиселъ (т. е. чиселъ, опредѣляемыхъ по вѣроятности событій) величина хотя абсолютно большая, но *чрезвычайно малая по сравненію съ числомъ случаевъ.*

Замѣтимъ еще, что такъ какъ $l=\gamma\sqrt{\frac{2mn}{\mu}}=$ $=\gamma\sqrt{2\mu pq}$ то $\gamma=\frac{l}{\sqrt{2\mu pq}}$. Вѣроятность ошибки, заключенной между 0 и γ, равна $\Phi(\gamma)$, поэтому вѣроятность *уклоненія* меньшаго чѣмъ l равна $\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{2\mu pq}}\right)$; если же $p=q=\frac{1}{2}$, то получимъ $\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\frac{\mu}{2}}}\right)$. Примѣръ: *Сколько опытовъ* надо произвесть для того, чтобы вѣроятность получить либо орла, либо рѣшетку, но что именно—не сказано, *милліонъ разъ чаще*, чѣмъ противоположную сторону, чтобы эта вѣроятность

---

[1]) Мы исключаемъ тѣ случаи, когда n безконечно мало относительно m или наоборотъ.

была *больше* чѣмъ 0,01? Отвѣтъ: здѣсь уклоненіе $l = 1000000$, а стало быть вѣроятность получить *меньшее* уклоненіе была меньше 0,99. Искомая величина $\Phi = 0{,}99$ соотвѣтствуетъ $\gamma = 1{,}83$, откуда $1000000 = 1{,}83 \sqrt{\frac{\mu}{2}}$ и $\mu = 597211$ милліоновъ.

Приведенный примѣръ показываетъ, что если зададимъ какую либо вѣроятность, а также какое угодно уклоненіе, то всегда можно подобрать такое число опытовъ, чтобы достичь этой и даже большей вѣроятности. Если требуемое уклоненіе должно быть очень малымъ, то число опытовъ придется взять очень большимъ, однако цѣль всегда достижима, по крайней мѣрѣ теоретически. Поэтому принципъ Бернульи можно выразить еще въ такомъ видѣ: *какъ бы ни было мало требуемое уклоненіе опыта отъ теоріи, мы всегда можемъ достичь желаемой вѣроятности этого малаго уклоненія, взявъ достаточно большое число опытовъ*. Или еще короче: при достаточномъ числѣ опытовъ, разногласіе между опытомъ и теоріей вѣроятностей можно сдѣлать какъ угодно малымъ, т. е. исключить вліяніе такой случайности, которая не предвидится теоріей. Такимъ образомъ, большія числа опытовъ придаютъ случаю законность и подчиняютъ его нашему предвидѣнію. Чтобы не заблуждаться на счетъ значенія этихъ замѣчательныхъ утвержденій, слѣдуетъ помнить, что въ самомъ наивыгодномъ случаѣ, *онѣ утверждаютъ положенія въ высшей степени вѣроятныя, т. е. неопредѣленно приближающіяся къ достовѣрности, но никогда вполнѣ ея не достигающія*. Это слишкомъ часто забываютъ.

Попытки примѣненія теоріи вѣроятностей къ физическимъ, біологическимъ и соціальнымъ наукамъ.

Прямой опытъ, извлеченный изъ астрономическихъ наблюденій, изъ примѣровъ ружейной и артиллерійской практики и т. п., подтверждаетъ надежность формулъ, выведенныхъ съ помощью теоріи вѣроятностей. Это внѣ всякаго сомнѣнія. Этимъ устраняется разъ навсегда та слишкомъ низкая оцѣнка этой теоріи, которую можно встрѣтить у многихъ философовъ, и даже у нѣкоторыхъ математиковъ. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что нападки Дж. Стюарта Милля и многихъ другихъ крупныхъ мыслителей не совсѣмъ лишены значенія. Теоріей вѣроятностей такъ часто злоупотребляли, правила ея примѣняли такъ неосмотрительно, что печатались цѣлые трактаты и ученые мемуары, имѣющіе не болѣе значенія, чѣмъ теорія шахматной игры, и въ лучшемъ случаѣ представляющіе простую математическую забаву.

Чѣмъ проще наблюдаемыя явленія, чѣмъ однообразнѣе и чѣмъ точнѣе пріемы наблюденія, тѣмъ, разумѣется, легче примѣненіе къ нимъ теоріи вѣроятностей. Поэтому астрономія, геодезія и тому подобныя науки давно уже пользуются этой теоріей, ни мало не смущаясь философскими предразсудками, и нисколько не имѣютъ повода раскаяваться въ томъ, что поступаютъ такимъ образомъ. Но уже въ физическихъ наукахъ примѣненіе теоріи вѣроятностей требуетъ большихъ предосторожностей. Такъ напр. Максуэлль сдѣлалъ геніальную попытку примѣнить теорію вѣроятностей къ кинетической теоріи газовъ, но онъ скорѣе угадалъ, чѣмъ доказалъ нѣкоторыя законности, и многія изъ данныхъ имъ доказательствъ лишены значенія, такъ какъ основаны на невѣрномъ примѣненіи теоріи.

Въ гораздо большей степени примѣнимо порицаніе къ попыткамъ примѣнить теорію вѣроятностей къ свидѣтельскимъ показаніямъ, къ теоріи судебныхъ приговоровъ, къ результатамъ выборовъ и т. п. Здѣсь не мѣсто объ этомъ распространяться: достаточно сказать, что напр. Курно (Cournot) доказывалъ математически положеніе, въ силу котораго наилучшимъ судьею долженъ считаться тотъ изъ членовъ суда, который всегда подаетъ голосъ заодно съ предсѣдателемъ.

Далеко основательнѣе, хотя все же сопряжено со многими иллюзіями, примѣненіе теоріи вѣроятностей къ статистикѣ населенія; однимъ изъ частныхъ случаевъ этого примѣненія является вопросъ о страхованіи жизни. Эти и другія примѣненія будутъ мною со временемъ изложены въ возможно элементарной формѣ въ особой брошюрѣ, гдѣ я дамъ собраніе различнаго рода *задачъ* по теоріи вѣроятностей, какъ рѣшаемыхъ съ помощью таблицы для $\Phi(\gamma)$, такъ и иныхъ. Здѣсь ограничусь еще нѣсколькими словами о примѣненіи теоріи вѣроятностей къ *біологіи*.

Извѣстно, какую роль въ ученіи Дарвина играютъ такъ наз. случайныя уклоненія, т. е. уклоненія, зависящія отъ стеченія множества условій, не подлежащихъ прямому опредѣленію. Въ настоящее время нѣтъ почти ни одного біолога, который цѣликомъ отвергалъ бы принципъ подбора, но едва ли найдутся многіе, которые согласятся счесть этотъ факторъ исключительнымъ двигателемъ эволюціи, въ особенности, если рѣчь идетъ о подборѣ *случайныхъ* варіацій.

Такъ или иначе, посмотримъ, есть ли возможность подчинить *случайныя* уклоненія, о которыхъ идетъ рѣчь въ біологіи, какому либо математическому контролю или учету. Дельбефъ, въ весьма остроумной статьѣ: Les mathématiques et le transformisme (Rev. Scient. 1877, 669—679) пытался доказать слѣдующій «законъ», усвоенный отъ него и проф. К. Тимирязевымъ (въ его популярной книгѣ о Дарвинѣ):

«Какъ бы ни было ничтожно число измѣнившихся особей, по сравненію съ числомъ особей неизмѣнившихся, число измѣнившихся всегда будетъ постепенно возрастать и наконецъ превзойдетъ число особей, оставшихся вѣрными первичному типу». При этомъ предполагается, что причина, опредѣляющая появленіе случайныхъ уклоненій, постоянна; но оговорка эта только сбиваетъ съ толку [1]). Дельбефъ доказываетъ свой «законъ» слѣдующимъ образомъ:

Пусть будетъ A форма даннаго вида. Назовемъ чрезъ $A \pm h$ особей, прошедшихъ h ступеней уклоненія въ положительную или въ отрицательную сторону, и допустимъ, что, по какой либо причинѣ, любая особь, при воспроизведеніи, даетъ n потомковъ вполнѣ родительской формы, т. е. $n\,A$, затѣмъ двухъ особей, отличающихся отъ A на h ступеней различія, одну въ положительномъ смыслѣ, другую въ отрицательномъ. Полагая $h = 1$, 2, 3, 4 и т. д. найдемъ

A дастъ потомковъ $n\,A + (A+1) + (A-1)$
$A+1$ . . . . $n(A+1) + (A+2) + A$
$A-3$ . . . . $n(A-3) + (A-2) + (A-4)$ и т. п.

[1]) Конечно, и такъ наз. случайныя событія не безпричинны, но опредѣляются совокупностью причинъ, недоступныхъ изслѣдованію, почему мы и не можемъ ничего знать о постоянствѣ этихъ причинъ.

Исходя изъ этого, Дельбефъ доказываетъ, что для достаточнаго числа поколѣній, дѣйствительно, увидимъ, что число измѣнившихся превзойдетъ число неизмѣненныхъ, составляющихъ для каждаго поколѣнія лишь 2 особей. Дѣйствительно, начальное отношеніе числа измѣненныхъ особей, т. е. $A \pm 1$, къ неизмѣненнымъ потомкамъ nA равно $\frac{2}{n}$. Чтобы это отношеніе удержалось, необходимо допустить, что $2(A \pm 1)$ и nA производятъ всегда исключительно себѣ подобныхъ. Но это не такъ, потому что потомки формы $A \pm 1$ производятъ и $A \pm 1$ и A, а потомки формы A производятъ и A и $A \pm 1$. Число особей, подобныхъ материнской формѣ A, равно n для каждой особи, и стало быть, будь только форма A, отношеніе $\frac{2}{n}$ осталось бы неизмѣннымъ. Но особи, не подобныя A, измѣнятъ, а именно *увеличатъ* это отношеніе, ибо даже при прибавленіи одного и того же количества въ числителю и знаменателю дроби $\frac{2}{n}$, гдѣ $2<n$, мы увеличимъ эту дробь, а между тѣмъ на дѣлѣ къ 2 мы прибавимъ гораздо болѣе, чѣмъ къ n, что не трудно провѣрить вычисленіемъ. Итакъ, отношеніе измѣнившихся къ неизмѣненнымъ будетъ постоянно возрастать и легко убѣдиться, что это возрастаніе продолжится неопредѣленно, потому что всѣ особи, измѣнившіяся въ второй, третьей и т. д. степени, т. е. особи $A \pm 2$ и т. д., имѣютъ *исключительно* измѣнившихся потомковъ и ни мало не увеличатъ знаменателя нашего отношенія, тогда какъ неизмѣнившіяся особи A будутъ непрерывно увеличивать наше отношеніе, образуя кромѣ A также такія формы, каковы $A \pm 1$.

Дельбефъ формулируетъ свой выводъ такъ: «Какъ бы ни была могущественна причина отожествленія и какъ бы ни была ничтожна причина уклоненія, послѣдняя, наконецъ, одержитъ верхъ». Но Дельбефъ забылъ при этомъ вычисленіи двѣ вещи: 1) Что причина, называемая имъ слабою, по его же гипотезѣ оказывается далеко не слабою, что будетъ сейчасъ выяснено подробнѣе. 2) Что, по теоріи вѣроятностей, малыя уклоненія болѣе вѣроятны, чѣмъ крупныя.

Парадоксальный выводъ Дельбефа былъ такъ искусно опровергнутъ Делажемъ, что я могу ограничиться цитированіемъ этого возраженія.

«Пусть напр. $n = 1000$ и допустимъ, что каждая неизмѣненная особь A производитъ 1000 A и лишь одну $A + 1$. Я готовъ на уступку, говоритъ Делажъ, я допущу даже, что каждая особь A могла бы произвесть 990 $A + 10(A + 1)$; здѣсь Дельбефъ очень великодушенъ. Но вовсе не великодушенъ, когда утверждаетъ, что каждая особь ($A + 1$) произведетъ также n особей ($A + 1$) и 1 особь ($A + 2$). Въ природѣ мы видимъ, что индивидуальныя *уклоненія* далеко не представляютъ такой высокой степени наслѣдственности. Ни одна индивидуальная черта не передается такимъ образомъ. На 3, 4, 5 дѣтей, 1 или 2, рѣдко болѣе, наслѣдуютъ родимое пятно, даже форму носа, цвѣтъ глазъ и волосъ и вообще всѣ индивидуальныя особенности отца. Если бы Дельбефъ былъ правъ, то изъ 200 семействъ, считая въ каждомъ по 5 дѣтей, мы бы имѣли 199, въ которыхъ всѣ дѣти унаслѣдовали бы разныя индивидуальныя особенности отца! Это очевидное преувеличеніе, но и это еще ничего, потому что $A + 1$ еще не такъ содѣйствуютъ Дельбефу, какъ $A + 2$, $A + 3$

и т. д. А между тѣмъ, чѣмъ выше степень уклоненія, тѣмъ ошибочнѣе утверждать, что стремленіе къ уклоненію останется неизмѣннымъ. Ежедневный опытъ показываетъ намъ, что слабыя уклоненія гораздо многочисленнѣе значительныхъ. Быть можетъ, изъ 1000 цвѣтковъ мы найдемъ 1 съ раздвоеннымъ лепесткомъ; но если посѣять сѣмена этого сбора, то вовсе не справедливо, что на 1000 цвѣтковъ отъ этого посѣва мы навѣрное найдемъ 1 цвѣтокъ съ 2 раздвоенными лепестками, а еще менѣе справедливо, что если бы такой цвѣтокъ оказался, то его сѣмена дадутъ въ числѣ 1000 цвѣтковъ 1 съ 3 двойными лепестками. Будь это справедливо, то созданіе новыхъ видовъ было бы самой легкой игрою».

Не стану цитировать дальнѣйшей біологической аргументаціи Делажа, но ограничусь замѣчаніемъ, что опровергаемый имъ съ біологической точки зрѣнія «законъ Дельбефа» оказывается вполнѣ несостоятельнымъ и съ чисто математической точки зрѣнія. Дельбефъ не принялъ во вниманіе того обстоятельства, что вѣроятность уклоненія не остается постоянной при измѣненіи его величины и что чѣмъ крупнѣе уклоненіе отъ обычнаго типа, тѣмъ оно *маловѣроятнѣе*, какъ напр. гораздо правдоподобнѣе, что искусный стрѣлокъ промахнется на 1 сантим., нежели на 10 метровъ.

Неудачныя соображенія Дельбефа, конечно, еще не доказываютъ, чтобы мысль о примѣненіи теоріи вѣроятностей къ біологіи была совсѣмъ праздною. Нѣкоторыя данныя біологіи, напр. ростъ особей, ихъ вѣсъ, число потомковъ, подлежатъ такому же точному измѣренію и счету, какъ и любыя данныя физико-химическихъ наукъ, поэтому уклоненія наблюдаемыхъ величинъ отъ средней нормы представляютъ здѣсь часто матеріалъ, вполнѣ годный для математической обработки. Слѣдуетъ надѣяться, что молодое поколѣніе біологовъ, не увлекаясь односторонними теоріями псевдо-дарвинистовъ, но *помня широкую точку зрѣнія самого Дарвина*, не отнесется равнодушно къ возможности такихъ математическихъ вычисленій. Насколько они окажутся въ пользу «случайныхъ уклоненій» и насколько, наоборотъ, укажутъ *на постоянно дѣйствующія причины*, объ этомъ рано еще судить, такъ какъ въ этомъ направленіи еще почти ничего не сдѣлано.

СОДЕРЖАНІЕ.