

В. ГЕЙЗЕНБЕРГ
профессор теоретической физики
университета в Лейпциге

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Перевод с немецкого
А. Н. АРСЕНЬЕВОЙ
под редакцией
Д. Д. ИВАНЕНКО

1 9 3 2

Государственное

технико-теоретическое издательство ■ Ленинград ■ Москва

W. HEISENBERG

**DIE PHYSIKALISCHEN PRINZIPIEN
DER QUANTENTHEORIE**

ПРЕДИСЛОВИЕ

„Природа — писал пятьдесят с лишним лет тому назад Энгельс — есть пробный камень диалектики“, и именно этим многозначительным обстоятельством объясняется тот факт, что величайшие идеологи рабочего класса — Маркс, Энгельс и Ленин — неоднократно обсуждали историю и результаты современного им естествознания, черпая из последнего материал для дальнейшего развития материалистической диалектики.

Но естествознание — которое отражает природу и которое должно давать ее диалектику — творится людьми, принадлежащими к определенной исторической эпохе и потому разделяющими ограниченность ее интересов и средств их осуществления. Естествознание, поэтому, никогда не является абсолютной, завершенной истиной. Но люди, творящие и развивающие естествознание, принадлежат не только к некоторой исторической эпохе — они принадлежат также, сознательно или бессознательно, к тому или иному определенному классу этой эпохи. Этот фундаментальный факт имеет своим следствием то явление, что характер зависимости от ограниченности эпохи и характер отношения к этой исторической ограниченности неизбежно различны для людей, примыкающих к различным классовым позициям и выражающим последние. Консервативные классы каждой данной эпохи возводят ее в свою собственную ограниченность в непререкаемый и непреходящий принцип, — тогда как классы прогрессивные свою принадлежность к данной ограниченной эпохе выражают лишь тем, что пытаются переделать ее, выйти за ее пределы.

Этим определяется характер тех логических методов и философских предпосылок, на идейной основе которых, и зачастую стихийно, осуществляется истолкование того или иного явления. В самом деле: господствующий класс современного гнивающего капитализма, пытающийся сохранить последний, тем самым противопоставляется диалектической идее развития с одной стороны и отрицает возможность предвидения каких-либо новых явлений с другой стороны. Эта бессознательно-складывающаяся установка, преломляясь на специфическом содержании науки, проникает также и в

физику, не давая адекватной трактовки новых явлений действительности, обнаруженных экспериментом, и неправильно агностически оценивая роль самого эксперимента в развитии физического познания.

Что эти логические предпосылки — несоответствующие как диалектическому материализму, так и задачам развития самой физики — действительно имеют нередко место в квантовой механике, — блестящему изложению которой посвящена данная работа Гейзенберга, — может быть доказано двумя ссылками весьма общего характера. Именно, Дирак, являющийся одним из больших знатоков современной теоретической физики, в своей книге о принципах квантовой механики утверждает, что „единственной целью теоретической физики является расчет результатов, по возможности ближе отвечающий опыту, и является по меньшей мере бесполезным какое-либо удовлетворительное описание всего хода явлений“. Разделить „результат“ от „хода“, игнорировать тему о происхождении и некоторых результатов — это и есть то, что, ограничивая задачи и возможности науки, называется метафизикой.

Близкая к этой тенденции проводится также и в изложении Гейзенберга. — В главе IV предлагаемой книги он указывает, что „статистический характер зависимости основан на том, что влияние измерительных инструментов на измеряемую систему рассматривается иначе, нежели влияние отдельных частей системы друг на друга, ибо и это последнее влияние также обуславливает изменение направления в гильбертовском пространстве, но эти изменения вполне определены. Если бы измерительные приборы были причислены к системе, при чем было бы значительно расширено гильбертовское пространство, то изменения вектора системы, рассмотренные выше в качестве неопределенных, были бы теперь определены“, и после этого: „разделение мира на наблюдательную и наблюдаемую системы препятствует, таким образом, точной формулировке закона причинности“.

Эта предпосылка должна быть решительно оспорена. Ибо по существу вопрос здесь ставится так, что эксперимент, который справедливо рассматривается всегда в качестве средства развития познания в обсуждаемой области явлений, становится препятствием для прогресса теории, обуславливая некоторый непереходимый предел точности познания. — На самом деле соотношение неопределенности Гейзенберга (указания на это имеются у самого автора, во II и III главе) должно было бы быть понято не в этом агностическом смысле, а как показатель недостаточности прежде образованных понятий классической механики причинности, волны в области явлений, обсуждаемых квантовой механикой. Подобно тому как масштабы динамики материальной точки совершенно не-

достаточны в области определений динамики системы точек (напр., вопрос об энергии вращения, не могущий даже быть поднятым в динамике точки) и потому способны создать некоторую неопределенность определений величин, однако преодолимую разработкой специфических для этой новой области явлений понятий, — так и здесь принцип Гейзенберга должен быть понят как точная формулировка требования создания новых специфических понятий, которых нет еще, для адекватного выражения принципиально-определимых соотношений квантово-механических явлений. В отношении принципа причинности это соображение дает директиву не отказа от принципов материалистического детерминизма, но иной формы последнего, — такой, которая соответствовала бы специфичности изучаемых явлений.

Следовательно круг новых проблем теоретико-познавательного характера — соотношение средств и объекта эксперимента, статистика и причинность, соотношение волн и частиц и т. д. — должен быть понят, как мощное указание диалектики новой, еще недостаточно исследованной области явлений, как необходимость ревизии или, по крайней мере, ограничения прежних форм и способов нашего понимания природы, но отнюдь не в том идеологическом смысле, что природа в своих элементарных актах делает произвольный выбор, который принципиально нами не предсказуем и который заставляет поэтому нас ограничиться одним подсчетом голых результатов.

Это обстоятельство, при всех всемирно признанных достоинствах данной книги Гейзенберга, заставляет нас иметь в виду настоятельную необходимость строгого и критического подхода к излагаемым идеям. Критика и самокритика основных физических понятий составляет для физики одно из актуальнейших условий ее продвижения вперед. Во всяком случае следует твердо помнить важное замечание Гельмгольца о том, что „критикой методов можно пренебрегать лишь до тех пор, пока возможно ограничиваться применением методов, уже на деле доказавших свою правильность. Но когда исследование доходит до той грани, где становится сомнительным, следует ли приписать встречающиеся трудности самому предмету или неудовлетворительности метода, тогда критика должна вступить в свои права“.

Ю. П. Шейн

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В ряду всех книг по квантовой механике (книги Дирака, де Бройля, Зоммерфельда, Борна-Иордана, Вейля, Френкеля, Мотта, Кондона-Морзе, Бертуистля, Ланде и других) предлагаемое внима-

нию читателей изложение Гейзенберга стоит совершенно особняком. Здесь нет широкого развития математического аппарата, и прочитавши книгу никто не научится „решать“ квантовые задачи. Зато ни один вдумчивый читатель не останется без убеждения, что новая теория квант принесла с собой существеннейшие изменения в основных физических понятиях: измерение, причинная связь, описание в пространстве и времени и т. д. Можно не соглашаться с автором книги (который является вместе с де Бройлем, Шредингером, Борном, Иорданом и Дираком автором современной квантовой механики, больше того, автором первой работы в этой области), можно и должно продискутировать его глубокие революционные выводы, но нельзя ни одному физику, естествоиспытателю, философу пройти спокойно мимо.

Книга Гейзенберга в основном содержит описание-толкование основных 10 важнейших экспериментов современной физики с точки зрения квантовой механики. Во всех рассуждениях книги фундаментальную роль играет знаменитый принцип неопределенности, установленный Гейзенбергом в 1927 году (и в развитии которого существенное значение имело участие Бора; подчеркивание же невозможности одновременно измерять пары величин, например скорость и координату, встречается еще раньше у Дирака). Гейзенбергу удалось таким путем подвести принципиальное основание под здание теории, которая ныне может считаться практически законченной (после работ Дирака и Иордана по теории преобразований), что, конечно, отнюдь не означает, что приложения теории даже и главнейшие исчерпаны. Гейзенберг касается в книге отчасти и дальнейшего развития теории — обобщения ее на случаи, где необходимо учесть теорию относительности (случай больших скоростей).

Русский перевод, сделанный без всяких изменений с 1-го немецкого издания, сверялся частью с английским, просмотренным автором. Ссылки, отмеченные штрихом, напр. 18', вставлены нами.

Мы решили не ждать неопределенное время изменений Гейзенберга, которые он собирается подготовить ко 2-му немецкому изданию и которые будут касаться флюктуаций и отчасти теории излучения. Изложение флюктуаций, измененное согласно указанию автора в духе его новой работы (*Berichte der math.-phys. Klasse der Sächsischen Akademie der Wiss. zu Leipzig. LXXXIII, Sitzung vom 19. Januar 1931*) и краткие сведения о новой методике трактовки излучения даны нами в примечаниях. В конце книги внесен ряд дополнений согласно разрешению автора книги. Два дополнения иллюстрируют и развивают изложение Гейзенберга, не выходя значительно из рамок теории (пример с магнитным моментом и различные выводы соотношений неопределенности).

Сравнительно обширное дополнение сделано об имеющемся расширении принципа неопределенности на случай релятивистской квантовой механики. При всей необходимой осторожности рассуждений в неизведанной области, указанное обобщение, полученное различными авторами, представляется нам заслуживающим самого глубокого внимания и имеющим тот же сугубо принципиальный характер, как и выводы книги. Наконец, мы изложили современное состояние вопроса о неопределенностях для электромагнитного поля.

Отметим еще, что отдельные параграфы книги Гейзенберга (в другом переводе) вместе с часто цитируемыми здесь статьями Бора и рядом других печатаются в сборнике „Причинность“, подготовляемом в Харькове при участии общества физиков-материалистов. Этот сборник и настоящая книга дадут, наконец, советским читателям авторитетную базу для дискуссий, ведущихся до сих пор большей частью на основании популярных статей и другого сомнительного материала из вторых рук.

В заключение мы рады принести благодарность автору книги за ряд указаний и предоставление оттиска работы, напечатанной в журнале, который не получается ни в одной из библиотек, а также В. А. Фоку и В. А. Амбарцумяну за участие в обсуждении примечаний.

Ленинград, Физико-
технический институт
Январь 1932 г.

Д. Иваненко

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лекции, прочитанные мною весной 1929 г. в Университете в Чикаго, дали мне повод еще раз полностью рассмотреть принципы квантовой теории. Со времени заключительных исследований Бора в 1927 г. эти принципы не испытали существенных изменений, а некоторые новые эксперименты подтвердили важнейшие положения теории (Раман-эффект). Несмотря на это, многие физики до сих пор еще имеют скорее своего рода веру в правильность новых принципов, чем ясное их понимание, поэтому мне казалось целесообразным издать прочитанные мною в Чикаго лекции в форме небольшой книги.

Так как формальный математический аппарат квантовой теории уже доступен всем, благодаря нескольким прекрасным изложениям, и его знание распространено гораздо больше, чем знание принципиальных основ, то я ограничился тем, что представил его в виде собрания формул в конце книги. В тексте же я старался обойтись простейшими формулами и вычислениями, поскольку это только казалось возможным.

В изложении придано особенное значение равнозначности корпускулярного и волнового представлений, что теперь также ясно выражается и в формализме теории. Эта далеко идущая симметрия книги, в отношении слов „корпускула“ и „волна“, должна, между прочим, показать, что в вопросе, скажем, о пригодности закона причинности или других принципиальных вопросах ничего не выигрывается, если перейти от одного способа представления к другому. Далее я попытался возможно яснее подчеркнуть разницу между пространственно-временными волновыми теориями с одной стороны и шредингеровскими волнами в конфигурационном пространстве с другой.

В общем, однако, эта книга не заключает в себе ничего, чего нельзя было бы уже найти в прежних изложениях и в особенности в известных исследованиях Бора. Цель книги покажется мне достигнутой, если она несколько будет способствовать распространению того „копенгагенского духа квантовой теории“ (если я могу так выразиться), который дал направление всему развитию новой атомной физики.

Мою благодарность в первую очередь я приношу д-ру К. Экарту и д-ру Ф. Хойту, которые не только взяли на себя тяжелый труд английского перевода, но также существенно помогли улучшению книги разработкой некоторых глав и своими советами. Я хотел бы также выразить благодарность д-ру Г. Беку за просмотр корректуры и ценную помощь при составлении манускрипта.

В. Гейзенберг

Лейпциг, 3 марта 1930 г.

1. Введение.

1. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Подобно вещам повседневной жизни физические опыты и их результаты могут быть описаны с помощью наглядных понятий в пространстве и времени на обыкновенном языке, который соответствует окружающему миру. Если бы физика могла удовлетвориться в качестве результатов опыта описанием, скажем, положения линий на фотографических пластинках или других аналогичных фактов и отказаться от всех „теорий“, то, конечно, всякая теоретико-познавательная дискуссия была бы излишней. Но мы собираем различные опыты в группы, связываем события как „причину“ и „следствие“ и создаем более или менее развитые, смотря по степени систематики, теории. Тот же процесс происходит не только с физическими, но даже и с самыми примитивными опытами повседневной жизни и служит основой для образования понятий.

При таком процессе образования понятий довольно часто покидается основа, данная опытом: бессознательно делаются необоснованные обобщения, пока, наконец, не возникают противоречия. Чтобы создать абсолютно достоверное основание для физических теорий, необходимо, как кажется, потребовать, чтобы для описания явлений применялись только целиком основанные на опыте понятия. Это требование, однако, совершенно невозможно провести, так как тогда должны были бы подвергнуться пересмотру повседневные понятия и трудно сказать, что после этого осталось бы от нашего языка. Подобный генеральный пересмотр представляется поэтому связанным с непреодолимыми трудностями. При таком положении вещей кажется более целесообразным ввести сперва в физическую теорию значительное количество понятий, не принимая во внимание их строгую обоснованность на опыте, и предоставить природе в отдельном случае каждой теории решать, требуется ли и в каких пунктах пересмотр основных понятий.

Так, например, для теории относительности была характерной критика таких понятий, как: масштаб, часы и т. д. Эта критика исходила из того, что в наших обычных понятиях всегда содержалось молчаливое допущение о возможности, принципиальной по

крайней мере, распространения сигналов с бесконечно большой скоростью. После того как экспериментально было установлено, что в природе не существует скоростей, превышающих скорость света, и последнее положение было постулировано как закон природы, — приступили к пересмотру всех понятий, относящихся к этой проблеме; это привело к свободному от противоречий толкованию опытов, что прежде не удавалось. Еще более радикально разошлась с классическими понятиями общая теория относительности, которая в конце концов допустила без критики только одно понятие пространственно-временного совпадения. По этой теории обыденный язык применим к описанию только тех опытов, в которых гравитационная постоянная и величина обратная световой скорости могут быть рассматриваемы как очень малые величины.

Таким образом, несмотря на то, что теория относительности предъявляет большие требования к способности к абстракции у физиков, она все же достаточно идет навстречу потребностям, вытекающим из научной традиции, поскольку в этой теории допускается строгое разделение мира на субъект и объект и точная формулировка закона причинности. Но именно в этом-то пункте и возникают трудности квантовой теории. В то время как в атомной физике подробная критика понятий „масштаба“, „часов“ и т. д. представляется пока излишней (поскольку не рассматривается релятивистская квантовая механика), как раз понятие пространственно-временного совпадения и понятие „наблюдения“ должны быть основательно пересмотрены. При обсуждении какого-либо опыта особенно должно приниматься во внимание взаимодействие между объектом и наблюдателем, которое непременно связано с каждым наблюдением. В классической теории принималось, что этим взаимодействием, как ничтожно малым, можно пренебречь или что его влияние поддается контролю и может быть исключено с помощью вычислений.

В атомной физике, однако, нельзя сделать это допущение, так как, вследствие прерывности в атомных процессах, каждое взаимодействие может вызвать частью не учитываемые, относительно большие изменения.

Следствием этого обстоятельства является то, что вообще опыты, определяющие какую-нибудь физическую величину, делают в то же время недействительным ранее добытое знание других величин, так как они влияют неконтролируемым образом на измеряемую систему и тем самым изменяют ранее известные величины. Исследуя это влияние количественно, мы найдем, что во многих случаях для одновременного знания различных переменных существует конечный предел точности, перейти который невозможно. В теории относительности исходной точкой для критики понятий был посту-

лат, что никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света. Таким же образом можно постулировать названные нижние пределы точности для одновременного знания разных переменных — так называемые „соотношения неопределенности“, как закон природы, и сделать их исходной точкой для критики понятий квантовой теории. Эти „соотношения неопределенности“ и дают как раз ту степень нарушения классических понятий, которая необходима для непротиворечивого описания атомных процессов.

Программа последующих рассуждений, таким образом, должна быть следующей: сначала рассмотреть все понятия, введение которых непосредственно диктуется опытами, затем установить области применения для различных понятий и показать, что ограниченные таким путем понятия, вместе с математическим формализмом квантовой теории, образуют систему, свободную от противоречий.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ.

Предварительный обзор важнейших понятий атомной физики дают следующие опытные факты, характеризующиеся известными фотографиями (рис. 1—4).

а) *Фотографии Вильсона.*¹ Материальные лучи, испущенные радиоактивными элементами, проходя сквозь камеру, содержащую пересыщенный водяной пар, образуют (предполагая, что лучи обладают достаточной энергией) штрихообразные следы конденсированного пара (рис. 1).

Этот опыт доказывает дискретный характер материальных лучей и показывает, что вполне целесообразно представлять себе эти лучи в виде маленьких, быстро летящих частичек. Каждый след, образованный водяными каплями в вильсоновской камере, непосредственно представляет путь одной частицы. Под частицей или корпускулой понимают при этом всегда образование, движущееся подобно материальной точке в классической механике, т. е. точечную систему, на состояние движения которой влияют только физические поля в непосредственной ее близости. Образование следа нужно представлять себе так: частица сталкивается в камере с атомами газа и их ионизирует. Полученные ионы вызывают конденсацию водяных паров вокруг себя и ввиду этого дают центры для образования маленьких водяных капель. Таким образом вдоль пути летящей частицы создаются водяные капельки, непосредственно доступные наблюдению.

¹ Цифры „1“ и др. относятся к литературному указателю на стр. 115

Известно, что из опытов с отклонением в электрическом и магнитном поле можно определить скорость и массу частиц и что возможно далее измерить также заряд отдельной частицы.

б) *Диффракция материальных лучей.*² (Дэвиссон-Джермер, Дж. П. Томсон, Рупп.) Если материальный луч проходит сквозь решетку (пространственная решетка, решетка штриховая), то имеют место те же явления, которые известны из оптики видимых и рентгеновых лучей. (Рис. 2 представляет собой сделанный Томсоном дебай-шерреровский снимок с материальными лучами.) Подобные же явления получаются, конечно, и при отражении луча материи от решетки. Полезно поэтому лучи материи толковать наглядно как волновые процессы.

Измерение диффракционных максимумов различных порядков позволяет, как и в оптике, определить длину волны материальных лучей. Длина волны находится в эмпирической зависимости от механического импульса p отдельных корпускул, который должен быть приписан материальным лучам в описанных в параграфе а) явлениях.

По де Бройлю для длины волны имеет место соотношение:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

(h — постоянная Планка).

с) *Диффракция электромагнитных лучей.* Если видимые или рентгеновы лучи проходят сквозь решетку или отражаются от нее, то имеют место известные явления интерференции, которые являются основанием для волновой теории излучения и могут быть использованы известным способом для измерения длины волны соответствующего излучения. Рис. 3 показывает дебай-шерреровский снимок с рентгеновыми лучами. Принцип этого снимка заключается в том, что пучок рентгеновых лучей падает на кристаллический порошок; отдельные беспорядочно лежащие кристаллики дают помимо прошедшего прямо луча еще диффракционные изображения, что и дает в сумме картину рис. 3.

д) *Опыт Комптона-Симона.*³ Рентгеновский луч, проходя через вильсоновскую камеру (сравн. а), отрывает электрон при рассеивании на встречной молекуле газа (электрон отдачи). Этот электрон, как описано в а), может быть замечен благодаря своему туманному следу.

Описанное явление можно истолковать следующим образом: электромагнитное излучение (в данном случае рентгеновский луч) состоит из отдельных частичек, которые сталкиваются с электронами газовых молекул (эйнштейновская гипотеза световых квантов).⁴ Каждому световому кванту при этом следует приписать энергию (E)

и импульс (p), которые связаны с измеренной в с) частотой ν соответственного излучения следующим образом:

$$E = h\nu; \quad p = \frac{h}{\lambda}.$$

Применение механических законов столкновения материальных точек к взаимодействию: световой квант — электрон, дает простым способом зависимость между направлением вылетевшего электрона и направлением, в котором двигается дальше рассеянный световой квант. Опыт Комптона-Симона позволяет непосредственно испытать следствия чисто корпускулярной теории рассеивания рентгеновых лучей. Направление вырванного электрона может быть ведь измерено в вильсоновской камере по образованному следу тумана. Иногда также возможно наблюдать направление рассеянного светового кванта; а именно, последний может, проходя сквозь вильсоновскую камеру, снова вырвать со своей стороны у встречного атома электрон, который становится заметным вследствие образования тумана. Наблюдения в вильсоновской камере позволяют поэтому определить места обоих процессов, вызванных световым квантом, и вместе с тем, конечно, направление соединяющей их линии, которое представляет путь светового луча. (Нижняя часть рис. 4 дает снимок такого столкновения, верхняя часть дает тот же снимок, но только здесь пути частицы обозначены стрелками.) Снимки Комптона-Симона могли действительно показать, что законы упругого удара выполнены, и тем самым становится очевидной корпускулярная природа электромагнитного излучения.

е) *Опыты Франка-Герца со столкновениями.* ⁵ Если пучок медленных электронов одинаковой скорости пропускать через газ, то электронный ток при изменении скорости при некоторых дискретных значениях скорости (энергии) меняется скачком. Точный анализ этих опытов ведет к следующему объяснению: сами атомы газа могут иметь лишь известные дискретные значения энергии (основной постулат Бора). Если значение энергии известно, то по Бору говорят о „стационарном состоянии“ атома.

Если энергия электрона недостаточна, чтобы перевести атом из первоначального состояния в ближайшее энергетически высшее состояние, то он испытывает только упругие столкновения с атомами газа, не изменяя при этом значения своей скорости. Если теперь увеличивать энергию электронного пучка до значения, когда кинетическая энергия каждого электрона достаточна, чтобы перебросить атом в ближайшее высшее энергетическое состояние, тогда часть электронов, проходя через газ, отдает свою энергию атомам газа; электронный ток вследствие этого изменяется в критических точках очень быстро.

Понятие о стационарных состояниях, ставшее наглядным после опытов Франка — Герца, является наиболее ярким выражением для прерывностей, наблюдаемых во всех атомных процессах.

Из указанных основных опытов видно, что материя и излучение показывают удивительную двойственную природу: в одном случае они ведут себя как волны, в другом — как частицы. Этот дуализм между корпускулярным и волновым представлениями был отмечен Эйнштейном в явлениях излучения в 1909 году; тот факт, что дуализм этот имеет место и для материи, был замечен де Бройлем⁶ только несколько лет назад. Ясно, что материя не может одно-

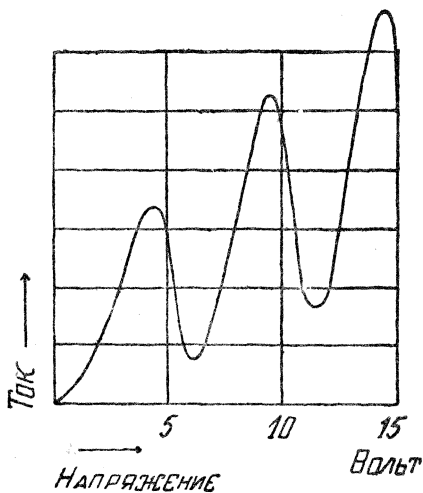


Рис. 5.

временно состоять из волн и частиц, — оба представления чересчур различны. Скорее разрешение трудности нужно искать в том, что обе картины (корпускулярная и волновая) суть только аналогии, которые иногда имеют место, иногда нет. В действительности, например, экспериментально только показано, что в некоторых опытах электроны ведут себя как частицы, но при этом отнюдь не доказано, что они обладают всеми признаками корпускулярного образования. То же следует *mutatis mutandis* и для волновой картины. Оба представления могут быть действительны как аналогии только в известных

предельных случаях; как целое атомные явления не могут быть непосредственно описаны нашим языком. Свет и материя суть единые физические явления; их кажущаяся двойственность возникает вследствие существенной ограниченности нашего языка.

Как было уже подчеркнуто во введении — нет ничего удивительного в том, что наш язык не пригоден для описания атомных процессов; ибо наши понятия исходят из опытов повседневной жизни, в которой мы постоянно имеем дело с большим количеством атомов и никогда не наблюдаем отдельных атомов. Для атомных процессов у нас таким образом нет наглядного представления. Для математического описания явлений, к счастью, такая наглядность вовсе не нужна; мы обладаем математической схемой квантовой механики, которая согласуется со всеми экспериментами атомной физики. Если же, несмотря на это, желают перейти от матема-

тики к наглядному описанию явлений, то приходится довольствоваться неполными аналогиями, которые нам дают волновая и корпускулярная картины.

Как показал Бор, этот дуализм наглядных представлений также образует естественную исходную точку для критики введенных в теорию образов и понятий. Ибо очевидно, что, принятое без критики, одновременное применение волновой и корпускулярной картины ведет к непосредственным противоречиям. Из одновременного существования обеих картин можно сразу же заключить, что для применения каждой из этих картин природой установлены известные границы. Границы, до которых является применимой корпускулярная картина, могут быть, например, получены из волновой картины. Как показал Бор,⁷ этим путем может быть получен простой вывод соотношения неопределенности между импульсом и координатой частицы. Также можно из корпускулярного представления сделать заключение о границах, поставленных природой для применения волновой картины.

Прежде чем перейти к критике основных понятий, нужно указать, что развитие математического аппарата квантовой механики предшествовало физическому пониманию атомной физики. Чтобы с самого начала не затруднять понимания соотношений, формализм квантовой теории, поскольку он необходим для общих рассуждений, приведен в конце книги (цитируется как *M*). На него мы должны, конечно, ссылаться во многих примерах, так как без математики нельзя приступить к разработке физических проблем.

II. Критика физических понятий корпускулярной картины.

1. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.⁸

Понятия: положение, скорость, энергия получены из простых опытов повседневной жизни, в которых посредством этих слов описывается механическое поведение макроскопических образований. Эти понятия были перенесены потом на электроны, так как электроны в некоторых основных экспериментах вели себя в смысле механики подобно предметам в повседневном опыте. Но так как мы знаем, что это сходство имеет место лишь в ограниченной области, то соответственно и область применения понятий корпускулярной картины должна быть ограничена. К этому ограничению можно прийти по Бору⁷ простейшим способом, вспоминая, что все наглядные (т. е. могущие быть описанными в пространстве и времени) факты атомной физики могут быть описаны также и с помощью волновой картины. Последующие рассуждения одинаково

справедливы для каждой из трех пространственных координат электрона и будут поэтому проведены только для одной. Тот факт, что положение электрона определяется с известной точностью Δq , описывается, очевидно, в волновой теории посредством волновой функции, амплитуда которой заметно отличается от нуля только в очень малой области, приблизительно равной Δq . Построенная таким образом волновая функция может быть всегда представлена состоящей из некоторого числа составляющих волн, которые так интерферируют между собой, что в небольшом пространстве Δq они друг друга взаимно усиливают, а вне его повсюду взаимно уничтожаются. Такое образование называют волновым пакетом. Общая математическая теорема гласит, что всегда возможно, посредством соответственного подбора отдельных составляющих волн, построить волновой пакет любой формы. С течением времени такой волновой пакет изменяет, вообще, свою величину и форму и, наконец, исключая некоторые специальные случаи, рассеивается по всему пространству. Скорости волнового пакета соответствует скорость электрона. Точную скорость нельзя, однако, определить посредством волнового пакета, потому что он, как было уже сказано, помимо движения вперед еще распространяется во все стороны, рассеивается. Это рассеяние обуславливает неопределенность, скажем, величины Δp в определении импульса (масса на скорость). Из простейших законов оптики совместно с уравнениями М (203), (204) математического приложения может быть выведено, что:

$$\Delta q \Delta p \gtrsim h. \quad (1)$$

Представим себе волновой пакет состоящим из плоских волн, длины волн которых должны лежать вблизи значения $\lambda = \lambda_0$. Таким образом, в области внутри пакета имеется в общем, примерно, $\frac{\Delta q}{\lambda_0} = n$ волновых пучностей и узлов; вне пакета плоские волны компенсируются благодаря интерференции. Это возможно тогда и только тогда, если в совокупности применяемых плоских волн имеются также и такие, для которых по меньшей мере $n + 1$ попадают в критическую область. Мы имеем, следовательно:

$$\frac{\Delta q}{\lambda_0 - \Delta \lambda} \gtrsim n + 1, \quad (2)$$

где $\Delta \lambda$ дает, примерно, область длин волн, необходимую для образования пакета. Таким образом:

$$\frac{\Delta q}{\lambda_0^2} \cdot \Delta \lambda \gtrsim 1. \quad (3)$$

С другой стороны, групповая скорость волн [см. М (204), где μ масса электрона]

$$v_g = \frac{h}{\lambda_0 \mu},$$

и рассеяние пакета, соответствующее области $\Delta\lambda$, характеризуется через

$$\Delta v_g = \frac{h}{\lambda_0^2 \mu} \Delta\lambda. \quad (4)$$

По определению $\Delta p = \mu \Delta v_g$, и поэтому согласно (3) получим:

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq h. \quad (5)$$

Это соотношение может быть применено для каждой степени свободы в отдельности:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h; \quad \Delta y \Delta p_y \geq h; \quad \Delta z \Delta p_z \geq h. \quad (6)$$

Соотношения неопределенности соответствуют прежнему обычному делению фазового пространства на клетки величиною h и уточняют физический смысл этого деления. Соотношения неопределенности представляются более естественными, чем прежнее деление, потому что таким образом отпадают произвольно установленные стенки между отдельными клетками. Соотношения (6) дают границы, до которых могут быть применимы понятия корпускулярной теории. Выходящее за пределы (6), более точное употребление слов „положение“, „скорость“ также бессодержательно, как применение слов, смысл которых не определен. ¹⁾

Соотношения неопределенности могут быть также выведены без непосредственного обращения к волновой картине с помощью математической схемы (М § 2) квантовой теории и ее физической интерпретации. ⁹

Какое либо знание координаты q электрона может быть выражено амплитудой вероятности $S(q')$ в том смысле, что выражение

¹⁾ Здесь нужно вспомнить, что человеческий язык допускает, вообще, образование предложений, из которых нельзя вывести никаких следствий и которые поэтому, в сущности, совершенно бессодержательны, хотя и дают своего рода наглядное представление. Так, например, утверждение, что на ряду с нашим миром существует еще второй, с которым, однако, невозможна принципиально никакая связь, не приводит ни к какому следствию; несмотря на это, в нашей фантазии возникает при таком утверждении некоторая картина. Вполне понятно, что такое утверждение не может быть ни доказано, ни опровергнуто. Особенно осторожно нужно употреблять выражение „в действительности“, так как оно легко приводит к такого рода утверждениям.

$|S(q')|^2 dq'$ дает вероятность найти электрон между q' и $q' + dq'$.
Пусть

$$\bar{q} = \int q' |S(q')|^2 dq' \quad (7)$$

есть среднее значение q , тогда Δq , определенное выражением

$$(\Delta q)^2 = 2 \int (q' - \bar{q})^2 |S(q')|^2 dq', \quad (8)$$

можно будет обозначить как неточность в знании положения электрона.

Аналогично, $|S(p')|^2 dp'$ дает вероятность измерить импульс электрона между p' и $p' + dp'$.

Мы полагаем снова

$$\bar{p} = \int p' |S(p')|^2 dp' \quad (9)$$

и

$$(\Delta p)^2 = 2 \int (p' - \bar{p})^2 |S(p')|^2 dp' \quad (10)$$

и обозначаем Δp как неточность в знании импульса электрона.

Между $S(p')$ и $S(q')$ имеет место, согласно М (188), соотношение

$$S(p') = \int S(p'q') S(q') dq', \quad (11)$$

где $S(p'q')$ обозначает функцию преобразования, которая переводит из одной координатной системы (в гильбертовском пространстве), в которой q было диагональной матрицей, — в другую, в которой диагональной матрицей является p .

Из

$$S^{-1} p_{(p)} S = p_{(q)}$$

следует тогда, согласно М (169),

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{dq'} S(p'q') = p' S(p'q'); \quad (12)$$

$$S = \text{const} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\hbar} p' q'} \quad (13)$$

Нормируя, получаем

$$S(p'q') = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} p' q'}. \quad (14)$$

Значения Δq и Δp , таким образом, связаны математически посредством (11) и (14) и можно спросить, какая функция $S(q')$ приводит к минимуму произведение $\Delta p \cdot \Delta q$:

$$\Delta p \cdot \Delta q = \text{Min}. \quad (15)$$

Чтобы упростить дальнейшие вычисления, введем следующие сокращения:

$$\left. \begin{aligned} x &= q' - \bar{q}; \quad y = p' - \bar{p}; \\ s(x) &= S(q') e^{\frac{2\pi i}{h} \bar{p} q'} \\ t(y) &= S(p') e^{-\frac{2\pi i}{h} \bar{q}(p' - \bar{p})} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Тогда из (8) и (10) следует

$$\left. \begin{aligned} (\Delta q)^2 &= 2 \int x^2 |s(x)|^2 dx \\ (\Delta p)^2 &= 2 \int y^2 |t(y)|^2 dy \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

а из (14) получаем

$$t(y) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int s(x) e^{\frac{2\pi i}{h} xy} dx. \quad (18)$$

Из (16) — (18) выводим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\Delta p)^2 &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int y^2 t^*(y) dy \cdot \int s(x) e^{\frac{2\pi i}{h} xy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int t^*(y) dy \int s(x) \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 e^{\frac{2\pi i}{h} xy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int t^*(y) dy \cdot \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \int \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} e^{\frac{2\pi i}{h} xy} dx \\ &= \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \cdot \int s^*(x) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx \\ &= \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \int \left| \frac{\partial s}{\partial x} \right|^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Но из очевидного соотношения

$$\left| \frac{x}{(\Delta q)^2} s(x) + \frac{\partial s}{\partial x} \right|^2 \geq 0 \quad (19)$$

следует неравенство

$$\left| \frac{\partial s}{\partial x} \right|^2 \geq \frac{1}{(\Delta q)^2} |s(x)|^2 - \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(\Delta q)^3} |s(x)|^2 \right) - \frac{x^2}{(\Delta q)^4} |s(x)|^2$$

и после интегрирования, в виду (17а):

$$\frac{1}{2} (\Delta p)^2 \geq \frac{1}{2} \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{1}{\Delta q^2},$$

т. е. 1)

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{2\pi}. \quad (20)$$

Минимум может быть достигнут только для тех функций $s(x)$, для которых в (19) имеет место знак равенства.

Тогда должно быть

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{x}{(\Delta q)^2} s(x) \quad \text{или} \quad s(x) = \text{const} \cdot e^{-\frac{x^2}{2(\Delta q)^2}}$$

$$S(q') = \text{const} \cdot e^{-\frac{(q'-\bar{q})^2}{2(\Delta q)^2} - \frac{2\pi i}{h} p q'}$$

и, согласно (14),

$$S(p') = \text{const} \cdot e^{-\frac{(p'-\bar{p})^2}{2(\Delta p)^2} + \frac{2\pi i}{h} \bar{q} (p' - p)}$$

Гауссовское распределение для вероятностей измерения p и q дает, следовательно, минимальное значение для $\Delta p \cdot \Delta q$; для всех других распределений произведение неточностей больше чем $\frac{h}{2\pi}$.

Нужно еще отметить, что этот вывод по своему математическому содержанию несколько не отличается от вывода соотношений неопределенности из дуализма корпускулярной и волновой картин; только доказательство формулы (20) здесь произведено точно. Физически (20) кажется сперва более общей, чем (6), так как (6) относится специально к положению и импульсу свободных электронов, в то время как (20) справедлива для каких угодно канонически сопряженных переменных и применимо также к связанным электронам.

Однако, это преимущество (20) по сравнению с (6), как подчеркнул Бор, менее значительно, чем это кажется на первый взгляд, так как, например, измерение положения или импульса связанного электрона может быть произведено только в тех экспериментах, в которых электрон может быть практически рассматриваем как свободный.

1) Нужно заметить, что иногда вместо определенных здесь величин $\Delta \eta$ (η здесь стоит для p или q) применяется „средняя неточность“ $\Delta \eta'$, которая с нашими величинами связана соотношением $\Delta \eta = \sqrt{2} \Delta \eta'$. Тогда вместо (20) будет иметь место $\Delta p' \Delta q' \geq \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. Сравни, например, Weyl, „Gruppen-theorie und Quantenmechanik“, стр. 67. Leipzig, 1928.

2. ИЛЛЮСТРАЦИЯ СООТНОШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА РАЗЛИЧНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРАХ.

а) *Измерение положения свободных электронов.* Соотношения неопределенности относятся к степени точности нашего (одновременного) знания в настоящий момент различных величин, встречающихся в квантовой теории. Так как эти соотношения не ограничивают, например, измерения только положения или измерения скорости в отдельности, то их действие выражается только в том, что каждый эксперимент, позволяющий произвести измерение, скажем, положения, необходимо до некоторой степени нарушает знание скорости. Если мы, например, примем, что скорость электрона точно известна, а положение напротив вовсе неизвестно, то тогда каждое следующее наблюдение положения должно изменять импульс электрона; причем это изменение неопределенно, и эта неопределенность должна быть такова, чтобы после проведения эксперимента наши знания о движении электронов были ограничены соотношениями неопределенности. В последующем это будет доказано на некоторых экспериментах в виде примеров. Заметим однако сейчас уже, что соотношения неопределенности очевидно не относятся к прошлому, так как если сначала известна скорость электрона, а затем будет точно измерено положение, то возможно и для времени *перед* измерением положения точно вычислить положение электрона. Для этого прошедшего времени произведение $\Delta q \Delta p$ меньше, чем обычная граница. Однако это знание прошлого имеет чисто умозрительный характер, так как оно (вследствие изменения импульса при измерении положения) никаким образом не входит как начальное условие в какое либо вычисление будущей судьбы электрона и вообще не играет роли ни в каком физическом эксперименте. Стоит ли названному вычислению прошлого электрона приписывать какую либо физическую реальность, является поэтому только делом вкуса.

В качестве первого примера нарушения знания импульса прибором для измерения положения мы выберем измерение положения микроскопом (Бор, указанная статья). Пусть электрон движется на таком расстоянии от объектива микроскопа, что угол, образуемый исходящим от электрона рассеянным пучком лучей, равен ϵ . Пусть длина волны и частота падающего на электрон света будут соответственно λ и ν . Точность измерения положения в направлении оси x будет согласно законам оптики (рис. 6)

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \epsilon}, \quad (21)$$

Для измерения положения нужно, чтобы по меньшей мере один световой квант был рассеян от электрона и через микроскоп по-

пал в глаз наблюдателя. Этот световой квант вызывает комптоновский отброс электрона порядка $\frac{h\nu}{c}$. Отброс не известен точно, так как неизвестно направление светового кванта внутри пучка лучей (угол зрения ϵ); таким образом для неопределенности отброса в направлении x имеем:

$$\Delta p_x = \frac{h\nu}{c} \cdot \sin \epsilon, \quad (22)$$

и для движения электрона после опыта следует:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h. \quad (23)$$

Против этого вывода сперва могут быть еще приведены возражения. Неопределенность отброса обусловлена ведь тем, что неизвестно, какой путь проходит световой квант внутри пучка лучей. Можно было бы попробовать установить этот путь таким способом: сделать микроскоп подвижным и измерять отброс, получаемый микроскопом от светового кванта. Однако это не поможет избежать соотношений неопределенности, так как сейчас же возникает

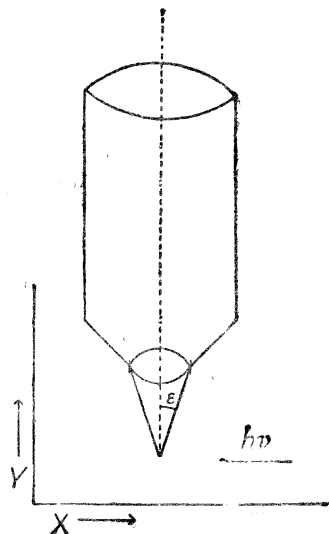


Рис. 6.

вопрос о положении микроскопа, а для положения и импульса всего микроскопа имеем снова соотношения (23). Конечно можно избежать измерения положения микроскопа, если например одновременно наблюдать электрон и неподвижную шкалу через движущийся микроскоп. Но для такого наблюдения должны проходить одновременно через микроскоп к глазу наблюдателя по крайней мере два световых кванта (один от шкалы, другой от электрона), и тогда одно только измерение отброса микроскопа уже не поможет получить сведения об идущем от электрона световом кванте и т. д.

Можно было бы также думать о существенном повышении точности измерения положения путем точного измерения максимума дифракционной картины, создаваемой микроскопом. Здесь нужно однако заметить, что это возможно только тогда, когда дифракционная картина (на фотографической пластинке или в глазу) создана многими световыми квантами. Элементарный подсчет показывает, что максимум ширины Δx дифракционной картины, созданной m световыми квантами, может быть установлен с точностью

$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{m}}$. Таким образом получается действительно повышение точности измерения положения в \sqrt{m} раз. С другой стороны, каждый из m световых квантов дает неточность в определении импульса $\Delta p_x = \frac{h\nu}{c} \sin \epsilon$, и общая неточность (по теореме сложения независимых ошибок) будет:

$$\Delta p'_x = \sqrt{m (p_x)^2} = \sqrt{m} \Delta p_x,$$

т. е. снова имеет место

$$\Delta x' \cdot \Delta p'_x \sim h.$$

Для всего обсуждения этого эксперимента характерно одновременное применение корпускулярной и волновой картин. Мы применяем здесь, по существу, этот дуализм в теории излучения: с одной стороны мы говорим о пучках лучей и законах оптики, с другой о световых квантах и обусловленных ими отбросах.

Другое простое определение положения может быть произведено следующим образом:

Пусть опять-таки вполне известна скорость электрона. Мы выделяем тогда пучок возможных электронных путей с помощью щели в экране шириною d (рис. 7).

Если электрон проходит сквозь щель, то очевидно его положение в направлении параллельном экрану определено с точностью d . Если же представить летящий электрон, как плоскую волну де Бройля, то тотчас же видно, что с выделением луча шириною d связано также и рассеяние. Выходящий луч имеет конечный угол расхождения α , который на основании простейших законов оптики определяется следующим образом:

$$\sin \alpha \sim \frac{\lambda}{d}. \quad (24)$$

(λ = длине волн де Бройля). Таким образом, импульс электрона

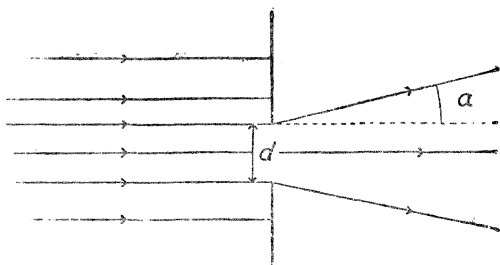


Рис. 7.

параллельно экрану после прохождения электрона сквозь щель становится неопределенным на величину

$$\Delta p = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin \alpha, \quad (25)$$

так как $\frac{h}{\lambda}$ есть импульс электрона в направлении луча. Из того, что $dq = d$, следует: $\Delta p \Delta q \sim h$. В этом выводе нет речи о дуализме „волна - частица“ в теории излучения, но зато он применен здесь в теории материи.

Как последний эксперимент для измерения положения рассмотрим обычные способы: наблюдения сцинтилляций и вильсоновские снимки.

Для этих способов характерно, что указателем присутствия частицы служит обусловленная ею ионизация атома. Очевидно нижний предел точности при таком измерении положения дается величиной ионизируемого атома Δq . При ионизации изменяется импульс ударяющей частицы. Так как импульс вырванного из атома электрона может быть измерен, то неопределенность в изменении импульса ударяющей частицы равна неточности импульса Δp электрона, пока он еще связан в атоме. Эта неточность импульса связана с величиной атома опять-таки известным соотношением:

$$\Delta p \Delta q \geq h.$$

(Как должно быть рассмотрено позже, здесь обыкновенно имеет место $\Delta p \Delta q \sim nh$, где n обозначает квантовое число соответствующего стационарного состояния.) Следовательно также и для этого типа измерения положения справедливо соотношение неопределенности. Дуализм — волны-частицы — не выступает в этом выводе непосредственно; соотношения неопределенности являются следствием квантовых условий для стационарных состояний, но конечно дуализм все же заключен неявно в квантовых условиях.

б) *Измерение скорости или импульса свободных электронов.* Простейшее определение скорости, непосредственно соответствующее первоначальному определению слова скорость, совершается путем измерения положения в различные моменты времени. Если взять очень большие промежутки времени между такими измерениями положения, то можно с любой точностью определить скорость частицы перед последним измерением положения. Скорость после определения положения, которая только и представляет физический интерес, будет, разумеется, известна не так точно; напротив, связанное с последним измерением положения изменение импульса

снова обуславливает справедливость соотношений неопределенности, как было показано в предыдущем параграфе.

Другой, часто употребляемый метод изменения скорости заряженных частиц основан на эффекте Допплера (Бор, 1. с.).

Возьмем например такую установку.

Пусть импульс электрона параллельно падающему свету [направление x] точно известен, т. е. его положение в направлении x совершенно неизвестно; напротив, пусть положение в направлении y очень точно известно — импульс же вовсе неизвестен. Речь следовательно идет об определении скорости в направлении y и нужно показать, что во время этого определения знание положения в направлении y теряет свою точность настолько, что после опыта снова справедливы соотношения неопределенности.

Пусть рассеянный свет наблюдается в направлении y (нужно заметить, что эффект Допплера при такой установке исчезает тогда, когда $p_x = p_y$, т. е. когда электрон движется параллельно прямой $x - y = 0$). Для теории Допплер-эффекта (который здесь по существу тождественен с эффектом Комптона) нужны только законы сохранения энергии и импульса, примененные к столкновению электрона со световым квантом. Величины без штрихов обозначают значения до удара, со штрихами — значения после удара.

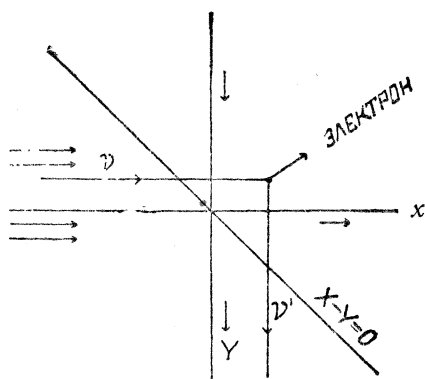


Рис. 8.

$$\left. \begin{aligned} h\nu + E &= h\nu' + E' \\ \frac{h\nu}{c} + p_x &= p'_x \\ p_y &= \frac{h\nu'}{c} + p'_y \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} h(\nu - \nu') &= E' - E = \frac{1}{2m} [p_x'^2 + p_y'^2 - p_x^2 - p_y^2] \\ &\sim \frac{1}{m} [(p'_x - p_x)p_x + (p'_y - p_y)p_y] \\ &= \frac{1}{m} \left[\frac{h\nu}{c} p_x - \frac{h\nu'}{c} p_x \right] \sim \frac{h\nu}{cm} (p_x - p_y). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Так как p_x и v приняты известными, то точность определения p_y связана непосредственно с точностью измерения частоты ν' :

$$\Delta \nu' = \frac{\nu}{mc} \cdot \Delta p_y. \quad (28)$$

Для измерения ν' с точностью $\Delta \nu'$ требуется поток волн определенной длины. Время для испускания такого потока волн по простейшим законам оптики равно

$$T = \frac{1}{\Delta \nu'}. \quad (29)$$

Так как мы не знаем, испущен ли световой квант в начале или конце этого промежутка времени, то неизвестно, движется ли электрон в промежутке времени T в направлении y со скоростью $\frac{1}{m} p_y$ или со скоростью $\frac{1}{m} p'_y$. Вызванная вследствие этого неопределенность в положении электрона в конце промежутка времени будет:

$$\Delta y \approx \frac{1}{m} (p_y - p'_y) T = \frac{h\nu'}{mc} T. \quad (30)$$

Из (28), (29) и (30) следует

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \sim h.$$

Третий метод измерения скорости основан на отклонении заряженных частиц в магнитном поле. Возьмем следующую установку: щель шириною d выделяет материальный луч; луч вступает затем в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа, проходит в нем отрезок a , отклоняется в поле вниз и выходит из магнитного поля под углом α к первоначальному направлению. Далее, пройдя отрезок l , луч проходит через вторую щель; положением этой щели может быть определен угол α . Скорость частицы $v = \frac{p}{m}$ в направлении луча определяется из уравнения:

$$\alpha = \frac{\frac{a}{v} \cdot H \cdot e \frac{v}{c}}{mv} = \frac{aHe}{mcv} \quad (31)$$

и для соответствующих неточностей имеем

$$\Delta \alpha = \frac{aHe}{mc} \frac{\Delta v}{v^2}. \quad (32)$$

Пусть далее в начале опыта положение частицы в направлении луча известно с большой точностью; это достигается, скажем, путем быстрого открывания и закрывания щели. Нужно показать, что такое знание положения во время опыта теряет свою точность в такой мере, что после опыта справедливо $\Delta p \Delta q \gtrsim h$. Точность, которую можно достигнуть в измерении α , очевидно есть $\Delta \alpha \sim \frac{d}{l+a}$ (d = ширине обеих щелей).

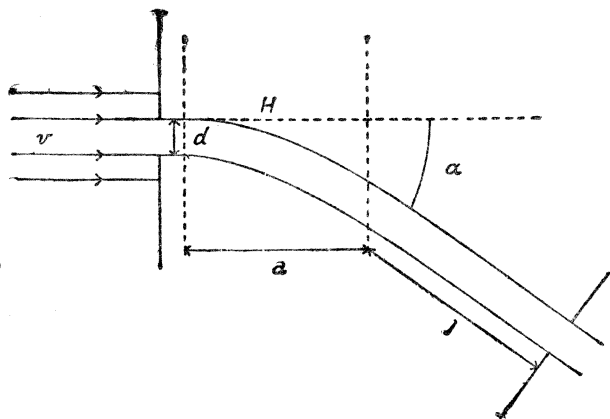


Рис. 9.

Но и эта точность может быть достигнута только тогда, когда естественное (де бройлевское) рассеяние лучей меньше, чем $\frac{d}{l+a}$, в противном случае неточность измерения α дается этим рассеянием: $\Delta \alpha \sim \frac{\lambda}{d}$. Это значит, что имеют место оба уравнения:

$$\Delta \alpha \gtrsim \frac{d}{l+a} \text{ и } \Delta \alpha \gtrsim \frac{\lambda}{d};$$

отсюда:

$$(\Delta \alpha)^2 \gtrsim \frac{\lambda}{l+a} \quad (33)$$

Далее имеет место:

$$\Delta v = \frac{mc v^2}{a h e} \cdot \Delta \alpha. \quad (34)$$

Неточность в знании положения после опыта равна времени,

необходимому для прохождения пути между обеими щелями, умноженному на неопределенность скорости:

$$\Delta q \sim \frac{l+a}{v} \Delta v \quad (35)$$

и, согласно (34) и (35),

$$\Delta v \Delta q \sim \frac{l+a}{v} \Delta v^2 \gtrsim \left(\frac{mcv^2}{aHe} \right)^2 \cdot \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{\alpha^2} \lambda v = \frac{1}{\alpha^2} \frac{h}{m},$$

т. е.

$$\Delta p \Delta q \gtrsim \frac{h}{\alpha^2} \gtrsim h,$$

так как весь вывод справедлив только для малых α . Для больших значений α нужно в особенности отметить, что посредством опыта нельзя ведь различить между $\alpha=0$ и $\alpha=2\pi$, ежели вообще значение $\alpha=2\pi$ и возможно, если только не ввести в установку изменений, требующих нового обсуждения всего опыта в целом.

с) *Связанные электроны*. Если говорить о неточности в знании положения и импульса связанных электронов, то нужно ясно различать две проблемы: во первых, можно рассматривать энергию, т. е. стационарное состояние системы, как величину известную и спросить, какая степень точности в знании положения и импульса следует из этого знания энергии или, во всяком случае, с ним совместима. Во вторых, пренебрегая знанием стационарного состояния, можно поставить вопрос о высшей точности для названных величин, осуществимой экспериментально, т. е. не считаясь с тем, что необходимые для этого измерения могли бы сделать невозможным знание энергии или стационарного состояния.

Мы займемся сначала первой проблемой и рассмотрим определенное стационарное состояние. При этом, согласно с Бором, из классической теории корпускулярной картины можно заключить, что неопределенность в знании положения и импульса вообще больше, чем $\Delta p \Delta q \sim h$. Очевидно речь идет просто об определении области изменения координат и скоростей электрона в атоме. Из соотношения, справедливого для n -ого квантового состояния

$$\int p dq \sim nh, \quad (36)$$

следует

$$\Delta p_s \Delta q_s \sim nh. \quad (37)$$

Легче всего можно усмотреть это, начертив замкнутые траектории классической механики в фазовом пространстве (рис. 10).

$\int p dq$ дает площадь, ограниченную траекторией, а $\Delta p_s \Delta q_s$ будет очевидно того же порядка величины. Мы отличаем здесь неопределенности Δp , Δq индексом s , чтобы напомнить о том, что речь идет не о высшей достигаемой точности в определении p и q , но о специальной неопределенности в знании p и q , которая появляется, если стационарное состояние, т. е. энергия атома точно известна. Эта неопределенность встречается например в обсуждении наблюдений сцинтилляций (II, 2a). Для классической теории было бы чуждо интерпретировать область изменения координат Δq_s как неопределенность положения. В квантовой теории нужно однако помнить о том, что и знание энергии также представляет „случай чистого собрания“, т. е. случай, который в математической схеме будет представлен посредством вполне определенного волнового пакета (именно шредингеровой функцией соответствующего стационарного состояния). Если произвести вычисления (II, 1) для этого волнового пакета, то значения Δp_s , Δq_s будут тем больше, чем больше нулевых точек имеет в атоме соответственная собственная функция, т. е. чем чаще колеблется собственная функция в области атома.

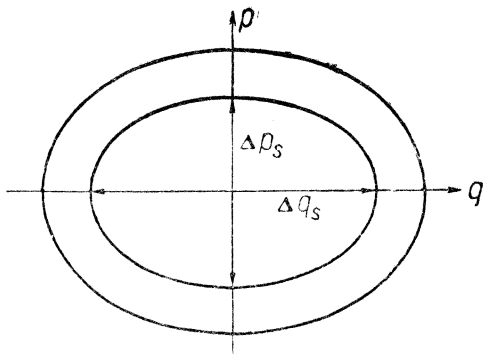


Рис. 10.

Если например мы рассмотрим собственную функцию (проблема одной степени свободы), которая имеет ровно n нулевых точек (узлов), то тогда вычисления показывают, что в правой части (37) появляется множитель n .

Теперь мы рассмотрим вторую из вышеназванных проблем. Очевидно наивысшая достигаемая точность в знании p и q будет дана через $\Delta p \Delta q \sim \hbar$, если пренебречь знанием стационарного состояния, так как всегда измерения положения и импульса могут быть произведены с такими мощными средствами, что электрон при этом практически может быть рассматриваем как свободный. Импульс электрона, находящегося в атоме, можно, например, измерить простейшим образом, выключив в некоторый определенный момент времени взаимодействие электрона с ядром и остальными электронами. Электрон тогда движется по инерции и его импульс может быть измерен известным способом. Необходимое для измерения воздействие в этом случае очевидно того же порядка, что и связь, удерживающая электрон в атоме.

Соотношение (37), как подчеркивает Бор,⁷ важно для перехода от квантовой механики к классической в предельном случае больших квантовых чисел. Мы ставим вопрос о возможности понятия траектории в квантовой механике. Так как наилучшее возможное знание положения и импульса удовлетворяет соотношению $\Delta p \Delta q \sim \hbar$, то его можно представить волновым пакетом ($|S(p')|^2 \cdot |S(q')|^2$) (см. М § 2) площадью $\sim \hbar$ в пространстве p, q . Такой пакет может описывать в фазовом пространстве почти замкнутые траектории, которые хорошо определены тогда, когда площадь, ограниченная траекторией, значительно больше чем площадь $\sim \hbar$ пакета, т. е. согласно (36) и (37) в предельном случае высоких квантовых чисел n . Для малых квантовых чисел однако понятие траектории должно терять свой смысл как в фазовом, так и в обыкновенном пространстве. Поэтому решающим для возможности понятия траектории в пределе высоких квантовых чисел является наличие в правой части (36) и (37) множителя n .

Невозможность существования понятия траектории в области малых квантовых чисел можно уяснить себе непосредственно физически следующим образом: под траекторией мы понимаем временную последовательность точек пространства, в которых будет застигнут электрон во время своего движения. Так как размеры атома в нижнем квантовом состоянии порядка 10^{-8} см, то для определения траектории электрона нужны будут измерения положения с точностью по меньшей мере 10^{-9} см, т. е. атом должен быть например освещен светом длины волны $\lambda \approx 10^{-9}$ см. Но уже одного кванта такого света достаточно, чтобы вследствие эффекта Комптона удалить электрон из атома: следовательно из всей траектории будет наблюдаема только одна единственная точка. Однако эти измерения положения можно повторить на многих атомах, и тогда получается некоторое вероятное распределение электронов в атоме, которое дается по Борну¹⁴ через $\psi^* \psi$ (и, если в атоме находится много электронов, через среднее по координатам остальных электронов значение $\psi^* \psi$; ψ означает шредингеровскую функцию, см. М 170). В этом заключается физический смысл утверждения, что $\psi^* \psi$ дает вероятность найти электрон в определенном месте. Но этот результат более удивителен, чем кажется на первый взгляд. Как известно, $\psi^* \psi$ убывает по показательному закону с возрастанием расстояния от атомного ядра, значит во всяком случае существует еще конечная вероятность того, что электрон можно найти на очень далеком расстоянии от ядра. Потенциальная энергия электрона там хотя и отрицательна, но очень мала; кинетическая энергия всегда положительна и вычисленная путем сложения общая энергия очевидно больше, чем всегда некоторая

конечная отрицательная общая энергия стационарного состояния. Этот парадокс разрешается следующим рассуждением. Сначала все выглядит так, как будто бы здесь имеется нарушение закона сохранения энергии. Но это нарушение только кажущееся, так как для вычисления энергии нужно принять также во внимание примененный для измерения положения световой квант и полученную от него энергию при комптоновском ударе. Эта энергия значительно больше, чем энергия ионизации электрона и обуславливает справедливость закона сохранения, как это подробно вычисляют в теории Комpton-эффекта.

Этот парадокс может согласно Бору служить поучительным предостережением против чересчур схематического применения „статистического толкования квантовой механики“. Вследствие показательного характера шредингеровской функции, как было сказано, можно иногда найти электроны также и на далеких расстояниях от ядра. Можно было бы думать, что для их обнаружения было бы вполне достаточно измерения положения с красным светом; для этого красного света не было бы заметного комптоновского отброса, и следовательно вышеуказанный парадокс остался бы во всей своей остроте. Но в действительности красный свет никак не позволяет измерить положения далеко удаленных электронов; напротив, весь атом реагирует на красный свет по формулам обыкновенной теории дисперсии. Этот результат представляется вполне возможным, если вспомнить о том, что (по классической корпускулярной картине) электрон прodelьвает несколько обращений во время одного периода красного света. Таким образом статистические положения квантовой теории имеют смысл только в связи с экспериментами, которые действительно позволяют наблюдать явления, рассматриваемые в статистике.

Понятие траектории получает смысл только для высших возбужденных состояний атома. Также и здесь измерение положения должно быть сделано с такой точностью, чтобы средняя ошибка была мала в сравнении с размерами атома. Но отсюда не следует, что электрон будет выброшен из атома благодаря комптоновскому отбросу. Напротив, в силу (37) для больших n отброс может быть меньше, чем значения импульса электрона в стационарном состоянии. Мы проделаем коротко вычисления.

Должно иметь место.

$$\lambda \ll \Delta q_s; \text{ т. е. согласно (37) } \frac{h}{\lambda} \gg \frac{\Delta p_s}{n}.$$

Переданная при комптоновском отбросе энергия будет таким образом порядка

$$\frac{h}{\lambda} \frac{\Delta p_s}{\mu} \gg \frac{\Delta p_s^2}{n\mu} \sim \frac{|E|}{n}$$

(E —энергия атома, μ — масса электрона); поэтому эта переданная энергия может быть мала по сравнению с $|E|$ для больших значений n . С другой стороны она всегда велика по сравнению с энергетическим расстоянием соседних уровней, которое вообще говоря будет порядка $\frac{|E|}{n}$. Впрочем, из $\frac{h \Delta p_s}{\lambda \mu} \gg \frac{|E|}{n}$ также тотчас же следует, что $h\nu \gg \frac{|E|}{n}$, т. е. что частота примененного для измерения положения света больше, чем частота вращения электрона в атоме.

Комптоновский отброс приведет все таки к тому, что атом будет переброшен из стационарного состояния, в котором, скажем, $n=1000$, в какое-нибудь состояние между $n=950$ и $n=1050$, при этом в силу показанной в (II, 1) неопределенности отброса стационарное состояние, в которое переходит атом, остается принципиально неизвестным в некоторых границах. Таким образом результат измерения положения в математической схеме квантовой механики может быть представлен в конфигурационном пространстве пакетом вероятности, который в существенной части состоит из собственных функций стационарных состояний между $n=950$ и $n=1050$, и величина которого дается точностью измерения положения. Этот пакет описывает траекторию, подобную орбите частицы в классической теории, и одновременно распространяется во все стороны. Результат последующего измерения положения может быть, следовательно, предсказан вообще только статистически. С каждым новым измерением математическое представление физического процесса изменяется прерывно; наблюдение выбирает из множества возможностей одну определенную, как совершившуюся, и, вместо расплывшегося пакета вероятностей, появляется снова меньший пакет, представляющий результат наблюдения. Так как с каждым наблюдением наше знание системы изменяется прерывно, то, естественным образом, и его математическое представление изменяется прерывно, как и в классической статистике. Это положение вещей можно также выразить посредством утверждения, что величина электрона зависит от опыта, примененного для измерения его положения. Движение и расплывание пакетов вероятности было много раз подробно изучено в литературе¹⁰ и поэтому здесь не будут излагаться математические выводы. Мы приведем только простое рассуждение Эренфеста.¹¹ Исследуем движение одного электрона в силовом поле, потенциал которого $V(q)$.

Шредингеровское уравнение для этой задачи гласит:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi + eV\psi = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Среднее значение для q дается через $\bar{q} = \int q \psi^* \psi dv$ ($dv = dx dy dz$), если q представляет какую-нибудь прямоугольную координату электрона. Дифференцирование по времени дает:

$$\dot{\bar{q}} = \mu \int q \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dv,$$

и, интегрируя по частям, имеем:

$$\dot{\bar{q}} = \mu \frac{h}{4\pi} \int \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial q} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial q} \right) dv.$$

Подобным же образом после вторичного дифференцирования по времени получаем:

$$\ddot{\bar{q}} = -e \int \frac{\partial V}{\partial q} \psi^* \psi dv.$$

Если $\psi^* \psi$ представляет пакет вероятности, размеры которого малы в сравнении с расстояниями, на которых V заметно меняется, то можно написать:

$$\ddot{\bar{q}} = -e \frac{\partial V(\bar{q})}{\partial q}.$$

Это уравнение показывает, что пакет вероятности описывает приблизительно классическую орбиту.

Здесь же мы сделаем замечание о скорости расползания волновых пакетов. Если классическое движение системы происходит периодически, то может случиться, что и величина волнового пакета изменяется сначала только периодически. О максимальном числе обращений, которые может сделать пакет до полного рассеяния по области атома, можно получить качественное представление следующим образом. Если бы пакет не испытывал никакого рассеивания, то было бы возможно такое разложение в ряд Фурье для плотности распределения зарядов, в котором имеются только целые кратные основной частоты. В действительности же в квантовой теории обертоны не соответствуют точно целым кратным основного колебания. Время, в течение которого квантовая частота будет полностью смещена по фазе относительно классического обертона, качественно совпадает со временем полного расползания волнового пакета. Если J есть классически вычисленная переменная действия системы, то это время будет:

$$t = \frac{1}{h} \frac{\partial J}{\partial \nu}$$

и число обращений до расплывания

$$N \approx \frac{\nu}{h \frac{\partial \nu}{\partial J}} \quad (38)$$

В частном случае гармонического осциллятора N бесконечно велико, т. е. волновой пакет сохраняется неопределенно долго. В общем случае, однако, N согласно (38) будет порядка квантового числа n . Для больших значений n понятие орбиты имеет, таким образом, оправдание и в квантовой теории.

В связи с этими рассуждениями здесь должно быть указано на мысленный эксперимент, предложенный Эйнштейном. Вообразим один световой квант, который представлен посредством волнового пакета, построенного из максвеллевских волн ¹⁾ и которому, таким образом, приписана известная область пространства и, в смысле соотношений неопределенности, также определенная область частот. Посредством отражения от полупрозрачной пластинки мы можем очевидно легко разложить этот волновой пакет на две части: отраженную и прошедшую. Тогда существует определенная вероятность найти световой квант или в одной, или в другой части волнового пакета. Через достаточно долгое время обе части будут сколько угодно далеко удалены друг от друга. Если теперь посредством опыта будет установлено, что световой квант находится, положим, в отраженной части волнового пакета, то это одновременно даст, что вероятность нахождения светового кванта в другой части равна нулю. Опыт на месте отраженной половины пакета производит тем самым некоторое действие (сведение волнового пакета!) на сколь угодно удаленном расстоянии, где находится другая половина, и легко видеть, что это действие распространяется со сверхсветовой скоростью. Одновременно, конечно, также видно, что подобное распространение действия никогда не может быть использовано для того, например, чтобы посылать сигналы со сверхсветовой скоростью, так что изложенное здесь поведение волнового пакета никаким образом не противоречит основным постулатам теории относительности.

д) *Измерение энергии.* Определение энергии свободных электронов тождественно с измерением скорости частиц и поэтому новое обсуждение различных уже изложенных методов является излишним.

¹⁾ Для одного светового кванта пространство координат имеет снова только три измерения, и таким образом максвеллевские уравнения могут быть рассматриваемы как шредингеровское уравнение для одного светового кванта.

Другой еще неизложенный метод измерения энергии свободных электронов состоит в том, что электроны заставляют проходить через некоторый известный порог потенциальной энергии. Если электроны перейдут этот порог, то тогда по классической теории обыкновенно принимают, что их энергия была больше, чем энергия, соответствующая высшей точке потенциального порога, если же они будут отражены, то принимают, что их энергия была меньше, чем это критическое значение. Такое заключение несомненно неправильно в квантовой теории, поэтому мы здесь коротко остановимся на рассмотрении этого пункта.

Если энергия электронов меньше, чем критическое значение потенциала, то все же некоторое количество электронов может еще перейти потенциальный порог, если его ширина не велика в сравнении с длиной, соответствующей электрону де Бройлевской волны. Число проходящих электронов убывает показательно с возрастанием ширины и высоты порога. ¹⁾

И обратно: если бы энергия электронов и была достаточна для перехода через порог, все же всегда еще значительная часть электронов отразится от порога в том случае, если возрастание потенциала происходит на отрезке, который не многим больше чем длина де Бройлевской волны электрона. Для практически выполнимых экспериментов изменения потенциала всегда, конечно, происходят на отрезках, которые велики в сравнении с длиной волны электронов, таким образом, можно практически в большинстве случаев вычислять по классической теории.

Как пример для математической трактовки только что изложенного положения вещей, рассмотрим отражение электронов от резко возрастающей потенциальной стены.

Мы пользуемся уравнением Шредингера задачи одного электрона (М § 2 и 3). Для падающей ψ волны имеет место в области I:

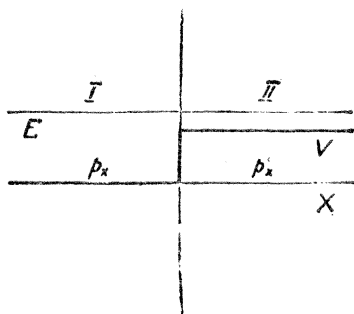


Рис. 11.

¹⁾ Этот факт вполне аналогичен известному из оптики и экспериментально установленному явлению, что при полном отражении светового луча от металлической фольги очень малая доля света проходит через фольгу. Эта доля будет заметна только тогда, когда толщина фольги того же порядка, что и длина волны проходящего света.

$$\varphi = ae^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x - Et)}; \frac{1}{2\mu} p_x^2 = E; p_x \geq 0$$

Для проходящей волны в области II имеем:

$$\varphi = a'e^{\frac{2\pi i}{h}(p'_x x - Et)}; \frac{1}{2\mu} p'_x{}^2 = E - V; p'_x > 0 \quad (39)$$

Для отраженной волны в области I

$$\psi = a''e^{\frac{2\pi i}{h}(-p_x x - Et)}$$

Если p'_x мнимо, то имеет место полное отражение и нужно принять p'_x положительно мнимым. На пограничной плоскости $x=0$ ψ и ψ' должны оставаться непрерывными.

Отсюда следует:
$$\left. \begin{aligned} a - a'' &= a' \\ (a - a'')p_x &= a'p'_x \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} a'' &= -a \frac{1 - \frac{p_x}{p'_x}}{1 + \frac{p_x}{p'_x}} = a \frac{p_x - p'_x}{p_x + p'_x} \\ a' &= a \frac{2}{1 + \frac{p_x}{p'_x}} = a \frac{2p_x}{p_x + p'_x} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Число электронов, проходящих в единицу времени через определенное сечение, дается (вплоть до множителя пропорциональности) произведением из квадрата абсолютного значения амплитуды на импульс, т. е. для падающего, проходящего и отраженного луча (для вещественных p'_x) имеет место:

$$J = |a|^2 p_x; J' = |a|^2 \left| \frac{2p_x}{p_x + p'_x} \right|^2 p'_x; J'' = -|a|^2 \left| \frac{p_x - p'_x}{p_x + p'_x} \right|^2 p_x. \quad (42)$$

Для мнимых значений p'_x $J' = 0$ и $J'' = -J$. Вообще же, конечно, всегда:

$$J = J' - J''. \quad (43)$$

Относительная вероятность для отражения или прохождения электрона будет согласно (42):

$$\left. \begin{aligned} W'' &= \left| \frac{p_x - p'_x}{p_x + p'_x} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V}} \right|^2 \\ W' &= \left| \frac{2p_x}{p_x + p'_x} \right|^2 \frac{p'_x}{p_x} = \sqrt{\frac{E - V}{E}} \left| \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - V}} \right|^2 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Рис. 12 представляет вероятность отражения как функцию энергии. Кривая классической теории (т. е. единица) обрывается в точке $E = V$.

Для физических принципов квантовой теории важнее измерения энергии свободных электронов является подробное обсуждение измерения энергии атома, т. е. таких опытов, которые позволяют определить, в каком стационарном состоянии находится атом.

Из математического рассмотрения движения атомов в конфигурационном пространстве следует, что фазы движения электронов или связанного с этим движением излучения должны быть принципиально неизвестны, если стационарное состояние атома точно известно. Чтобы пояснить это утверждение, укажем на известном опыте, что при разделении

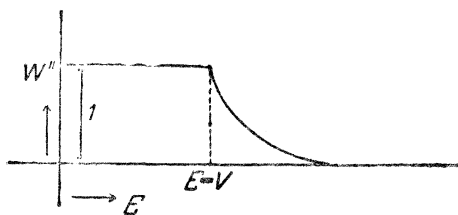


Рис. 12.

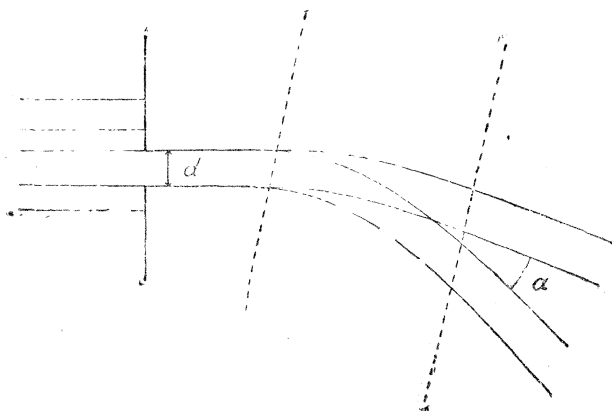


Рис. 13.

атомов, находящихся в различных стационарных состояниях, скажем например, в состояниях n и m , всегда теряется знание фазы, связанной с излучением, соответствующим переходу $n \longleftrightarrow m$.

Пусть имеется Штерн-герлаховский атомный пучок шириною d , который проходит сквозь неоднородное поле F (рис. 13) (поле не обязательно должно быть магнитным).

Пусть энергия взаимодействия между атомами и полем будет $E(F)$;

таким образом отклоняющая сила поля в направлении x (x принято перпендикулярным к направлению луча) есть

$$\frac{\partial E(F)}{\partial x} = \frac{dE}{dF} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Если T время, в течение которого атомы движутся в поле F , а p — составляющая импульса атомов в направлении луча, то отклонение атомов n -го состояния будет:

$$\frac{\frac{\partial E_n(F)}{\partial x} \cdot T}{p}, \quad (45)$$

и, следовательно, для разности углов отклонения (α) лучей атомов n -го и m -го состояний имеем:

$$\alpha = \frac{\frac{\partial E_n(x)}{\partial x} \cdot T - \frac{\partial E_m(x)}{\partial x} \cdot T}{p} \quad (46)$$

Этот угол α и должен быть больше, чем естественное рассеяние атомного луча, чтобы было возможно разделение атомов различных сортов, т. е.

$$\alpha \gtrsim \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{dp}. \quad (47)$$

Шредингеровская функция состояния n содержит периодический множитель $e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}$. E в поле изменяется и вместе с тем изменяется частота и фаза волны. Это изменение до известной степени неопределенно, так как остается принципиально не наблюдаемым, где движется атом внутри атомного луча.

Общая неопределенность изменения фазы $\Delta\varphi$ излучения, соответствующего комбинационному колебанию $e^{\frac{2\pi i}{h} (E_n - E_m)t}$, будет поэтому

$$\Delta\varphi \sim \frac{d \left(\frac{\partial E_n(F)}{\partial x} - \frac{\partial E_m(F)}{\partial x} \right) T}{h} \cdot 2\pi$$

и из (46) и (47) следует сейчас же

$$\Delta\varphi \gtrsim 2\pi, \quad (48)$$

а это означает полную неопределенность фаз.

Это вычисление станет более наглядным, если ограничиться случаем неоднородного магнитного поля и применить теорему Лармора. Если пренебречь спином электрона (собственным магнитным моментом электрона), то, как известно, весь атом прецессирует вокруг направления магнитного поля H с угловой скоростью

$$\omega = \frac{e}{2\mu c} \cdot H.$$

Эта скорость прецессии различна для различных атомов внутри луча в виду его конечной ширины. Вследствие этого фазовые соотношения между шаровыми волнами, посланными атомами, будут нарушены. Неопределенность ларморовской прецессии будет:

$$\Delta\omega \sim \frac{e}{2\mu c} \frac{\partial H}{\partial x} d;$$

разность углов отклонения атомных лучей для состояний с магнитными квантовыми числами m и $m+1$ равна:

$$\alpha = \frac{\frac{e}{2\mu c} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{h}{2\pi} \cdot T}{p}.$$

Из того, что $\alpha \gtrsim \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{dp}$, следует

$$\Delta\omega \cdot T \gtrsim 2\pi.$$

Таким образом, все фазовые соотношения между атомами будут полностью нарушены.

Бором ⁷ обсуждался следующий мысленный эксперимент. Атомы Штерн-герлаховского луча, которые первоначально находятся, скажем, в нормальном состоянии, прежде чем они попадут в неоднородное магнитное поле, должны быть возбуждены посредством освещения светом резонансной частоты к излучению света флюоресценции. Они излучают тогда когерентный резонансный свет. Свойства когерентности этого света могут быть описаны геометрически посредством шаровых волн малой амплитуды, которые испускаются каждым атомом с определенной (для каждого атома одинаковой) разностью фазы относительно фазы падающего света. Очевидно, при этом остается принципиально неопределенным, колеблется ли данный атом в нижнем или в верхнем состоянии. Если же атомы проходят через неоднородное магнитное поле, они вынуждены к обнаружению их стационарного состояния. Так как по выходе из поля наверно только относительно небольшая

часть атомов излучает в высшем состоянии, то излучение, относительно его свойств когерентности, может быть представлено как сумма незначительного числа шаровых волн с большой амплитудой, т. е. во всяком случае оно ведет себя практически как излучение вполне независимых центров, между которыми не существует никаких фазовых соотношений. Следовательно, если бы магнитное поле не оказало влияния на фазы излученных атомов волн, то тогда возникло бы противоречие. Однако, уравнение (48) показывает, что нарушение фазовых соотношений является необходимым следствием измерения энергии. Уравнение (48) снова, таким образом, дает пример того, что измерение одной квантовой величины (в данном случае энергии) необходимо нарушает знание других величин. Из обсуждения мысленного эксперимента Бора видно далее, что наличие этого нарушения существенно для непротиворечивого проведения теории.

III. Критика физических понятий волновой картины.

В предыдущей главе простейшие экспериментально хорошо обоснованные основные факты волновой картины были без критики предположены „правильными“. Они были выбраны как исходный пункт для критики корпускулярного представления и выяснилось, что это последнее может быть применимо только внутри известных границ и эти границы были определены. В этой главе, наоборот, корпускулярная картина должна служить исходным пунктом для критики волнового представления. И волновая картина применима тоже только в известных границах, которые нужно установить. Исторически, так же, как и в случае корпускулярного представления, были сперва построены трехмерные наглядные волновые теории (максвеллевские и де Бройлевские волны) без учета упомянутых границ. Эти теории мы будем обозначать как „классические волновые теории“. Они находятся в таком же отношении к квантовой теории волн, как классическая механика к квантовой механике. Математическая схема классической и квантовой теории волн дана в М. (Читатель должен быть здесь же предостережен от смешения классической волновой теории материи с шредингеровской теорией волн в фазовом пространстве.) Если после критики классической корпускулярной картины проведена также критика классического волнового представления, то все противоречия между обеими картинками исчезают, поскольку всегда будут приняты во внимание границы справедливости обеих картин.

1. СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ВОЛНОВОЙ КАРТИНЕ.

Понятие: амплитуда волны, напряжение электрического и магнитного поля, плотность энергии и т. д. первоначально исходят из примитивных опытов повседневной жизни, например, при наблюдении движения волны или колебания упругих тел. Эти понятия могут быть также широко применены к свету, и, как мы теперь знаем, также к лучам материи. Но так как нам одновременно известно, что понятия корпускулярной теории тоже применимы для излучения и материи, то отсюда следует, что для понятий волновой картины существуют некоторые границы, как это было уже много раз упомянуто, и эти границы должны быть теперь выведены из корпускулярного представления. Мы займемся сначала теорией излучения.

Прежде чем перейти к сущности нашего вопроса, нужно коротко рассмотреть, что мы вообще понимаем под точным знанием волновой амплитуды, например, напряжения электрического или магнитного поля. Точное знание амплитуд в каждой точке (в строго математическом смысле) некоторой области пространства есть очевидно абстракция, которая никогда не может быть осуществлена, так как каждое измерение дает только средние значения амплитуды в очень малой, возможно, части пространства или средние значения в течение очень малого, возможно, времени. И хотя может быть принципиально допустимо посредством дальнейшего уточнения измерительных приборов уменьшать все далее и далее эти небольшие части пространства и интервалы времени, но для физического обсуждения понятий волновой картины целесообразно сначала явно ввести нижние границы для интервалов пространства и времени, данные для рассматриваемых измерений, и затем уже, если нужно, перейти к пределу этих интервалов. Это есть точно тот же метод, который применяется в квантовой теории волн (сравн. М § 9). Может быть дальнейшее развитие квантовой теории покажет, что также и этот предел нуль для названных интервалов представляет собой физически абстракцию, лишенную смысла, но пока еще нет никакого основания ставить здесь какие-либо границы. — Мы прием, таким образом, для уточнения хода мыслей, что наши измерения постоянно дают средние значения по очень малой части пространства объема $\delta v = (\delta l)^3$; величина δl зависит от рода производимых измерений и для нее не существует принципиально нижней границы. Так как здесь идет речь об измерениях напряжения электрического и магнитного поля, то, следовательно, свет, длина волны которого λ существенно меньше чем δl , этими измерениями не может быть уже обнаружен. Следовательно, измерение дает,

скажем, значения \mathcal{E} и \mathcal{H} для напряжения поля (усредненные по δv). Если бы эти значения \mathcal{E} и \mathcal{H} были точно известны, то это вызвало бы противоречие с корпускулярной картиной. Именно: так как энергия и импульс небольшого объема δv даются через выражения

$$E = \delta v \frac{1}{8\pi} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2); \quad \mathcal{G} = \delta v \frac{1}{4\pi c} [\mathcal{E}\mathcal{H}], \quad (49)$$

то правые части обоих равенств при достаточно малых значениях δv были бы сами достаточно малы, в то время как нам из корпускулярной картины известно, что энергия и импульс небольшого объема всегда состоят из отдельных конечных порций $h\nu$ и соответственно $\frac{h\nu}{c}$. И так как для наивысшей частоты, которая еще может быть

обнаружена, имеет место: $h\nu \lesssim \frac{hc}{\delta l}$ ($\lambda \gtrsim \delta l$), то правые части (49) должны быть неопределенны, как раз до значения порядка этих световых квантов ($h\nu$ и соответственно $\frac{h\nu}{c}$), чтобы не вступить в противоречие с корпускулярной картиной.

Между компонентами \mathcal{E} и \mathcal{H} должны поэтому существовать соотношения неопределенности, которые и дают для вычисленного из (49) значения E неопределенность порядка $\frac{hc}{\delta l}$ и для \mathcal{G} неопределенность порядка

$\frac{h}{\delta l}$. Если $\Delta\mathcal{E}$ и $\Delta\mathcal{H}$ суть неопределенности для \mathcal{E} и \mathcal{H} , то неопределенности для E и \mathcal{G} будут:

$$\Delta E = \frac{\delta v}{8\pi} \{2|\mathcal{E} \Delta\mathcal{E}| + 2|\mathcal{H} \Delta\mathcal{H}| + (\Delta\mathcal{E})^2 + (\Delta\mathcal{H})^2\}$$

$$\Delta\mathcal{G}_x = \frac{\delta v}{4\pi c} \{ |[\mathcal{E} \Delta\mathcal{H}]_x| + |[\mathcal{E} \Delta\mathcal{H}]_x| + |[\Delta\mathcal{E} \Delta\mathcal{H}]_x| \}$$

и далее циклически для y и z .

Так как вероятнейшие значения для \mathcal{E} и \mathcal{H} возможно исчезают, то члены в правых сторонах, содержащие только $\Delta\mathcal{E}$ и $\Delta\mathcal{H}$, должны быть сами по себе достаточны, чтобы дать нужную неопределенность для E и \mathcal{G} . Этого мы достигнем, полагая

$$\Delta\mathcal{E}_x \cdot \Delta\mathcal{H}_y \gtrsim \frac{hc}{\delta v \delta l} = \frac{hc}{\delta l^4} \quad (50)$$

(и далее в круговом порядке).

Эти соотношения неточности относятся к одновременному значению \mathfrak{E}_x и \mathfrak{E}_y в одной и той же части пространства. Однако в разных частях пространства \mathfrak{E}_x и \mathfrak{E}_y могут быть свободно известны с любой точностью.

Соотношения (50) могут быть выведены точно так же, как и в случае корпускулярной картины, непосредственно из перестановочных соотношений для \mathfrak{E} и \mathfrak{H} (М § 9). Именно, если разделить пространство на конечные клетки величиной δv , то в лагранжевой функции \bar{L} см. М (215), на месте интеграла по dv появляется сумма по всем клеткам δv пространства. Как канонически сопряженный импульс к $\psi_\alpha(r)$ в клетке r появляется тогда [ср. М, уравнение (224)], величина:

$$\delta v \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha(r)} = \delta v l_\alpha(r) \quad (51)$$

и вместо М (231) следует:

$$\Pi_\alpha(r) \psi_\beta(s) - \psi_\beta(s) \Pi_\alpha(r) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{rs} \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{\delta v}, \quad (52)$$

где δ_{rs} обозначает теперь обыкновенную δ функцию

$$\left(\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{для } r = s \\ 0 & \text{„ } r \neq s \end{cases} \right).$$

В пределе $\delta v \rightarrow 0$ (52) переходит в М (231).

В применении к электрическим и магнитным полям из (52) и М (259) имеем:

$$\mathfrak{E}_i(r) \Phi_\alpha(s) - \Phi_\alpha(s) \mathfrak{E}_i(r) = -2hci \delta_{rs} d_{\alpha i} \frac{1}{\delta v}. \quad (53)$$

Если еще принять во внимание, что неопределенность $\Delta\Phi_h$ обусловливает для создаваемой Φ_h силы поля неопределенность порядка $\frac{\Delta\Phi_h}{\delta l}$, то видно, что (53) приводит непосредственно к соотношениям неопределенности (50).

Совершенно аналогичные рассуждения можно было бы применить также и к волнам материи, но нужно заметить, что вообще не существует экспериментов, позволяющих непосредственное измерение амплитуд ψ , что можно заключить уже из того, что де Бройлевские волны представляют собой комплексные величины. Если бы из перестановочных соотношений для ψ и ψ^* было сделано формально заключение о соотношениях неопределенности для волновых амплитуд, то, при применении статистики Бозе, это дало бы еще физически разумный результат; при применении же действи-

тельно наблюдаемой Ферми-дираковской статистики, напротив, получается лишенное смысла следствие, что ψ и ψ^* не могут быть одновременно точно измерены даже в совершенно различных точках пространства, так как перестановочные соотношения (М 249) содержат положительный знак. Удовлетворительно поэтому, что вообще не существует опытов, позволяющих измерить значение ψ в определенной точке, в определенный момент времени. Математически это находит основание в том, что также и в выражении взаимодействия излучения и материи часть, относящаяся к последней, содержит только члены второго порядка относительно ψ (в виде $\psi\psi^*$). Из вышеизложенного рассуждения можно также заключить, что статистика Бозе для световых квантов является физической необходимостью, поскольку будет сделано какущееся вполне естественным предположение, что измерения напряжений электрического и магнитного поля в разных точках пространства должны быть между собою независимы.

2. ИЛЛЮСТРАЦИЯ СООТНОШЕНИЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА НЕКОТОРОМ ОПЫТЕ.

Подобно тому, как при обсуждении корпускулярной картины, должно быть возможно и теперь непосредственно на опытах показать, что измерения \mathcal{E} и \mathcal{H} точнее, чем это дается (150), неосуществимы.

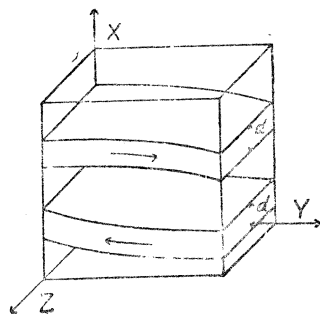


Рис 14.

Простейший метод измерения электрических и магнитных полей основан на отклонении заряженных лучей материи в этих полях. Одновременное измерение \mathcal{E}_x и \mathcal{H}_z осуществляется посредством двух лучей, идущих один в положительном, другой в отрицательном направлении оси Y , для которых определяется отклонение в направлении X . Если внутри луча поле имеет заметные неоднородности, то луч становится размытым и тогда простое измерение сил поля по отклонению становится невозможным.

Мы примем, что поперечное сечение луча есть прямоугольник; в направлении Z ширина его должна быть δl [т. е. вся ширина кубика величины $(\delta l)^3$]; в направлении X мы предположим меньшую ширину лучей d , чтобы возможно было независимо расположить оба луча в кубике δl^3 один над другим (см. рис. 14).

Если расстояние между обоими лучами в направлении оси X будет порядка δl , то и здесь возможные неоднородности в среднем

уничтожаются; иногда расстояние между лучами возможно и варьировать для этой цели. Набросанная здесь установка позволяет измерение \mathfrak{E}_x и \mathfrak{H}_z , если поля внутри $(\delta l)^3$ достаточно однородны; если же имеются значительные неоднородности, то измерение не дает никакого определенного результата.

Угол отклонения лучей по прохождении пути δl будет:

$$e \frac{\left(\mathfrak{E}_x \pm \frac{p_y}{\mu c} \cdot \mathfrak{H}_z \right) \frac{\delta l \cdot \mu}{p_y}}{p_y}. \quad (54)$$

Вследствие естественного рассеяния лучей материи точность измерений \mathfrak{E}_x и \mathfrak{H}_z будет дана через

$$\Delta \mathfrak{E}_x \sim \frac{h}{de} \frac{p_y}{\delta l \mu} \quad \text{и} \quad \Delta \mathfrak{H}_z \sim \frac{h}{de} \frac{p_y}{\delta l \mu} \frac{\mu c}{p_y}. \quad (55)$$

Но здесь забыт существенный пункт: находящиеся в луче электроны изменяют со своей стороны электрическое поле в кубе и вместе с тем и путь другого луча материи (отклонение обоих лучей должно быть измерено одновременно). Это изменение неопределенно до некоторой степени, так как неизвестно в какой точке луча находится движущийся электрон. (Такая неопределенность не имела бы места, если бы возможно было использовать классическую картину для волн материи.) Для этой неопределенности справедливо, во всяком случае, соотношение:

$$\Delta \mathfrak{E}_x \geq \frac{ed}{(\delta l)^3} \quad \text{и} \quad \Delta \mathfrak{H}_z \geq \frac{ed}{(\delta l)^3} \cdot \frac{p_y}{\mu c}. \quad (56)$$

Из (55) и (56) следует:

$$\Delta \mathfrak{E}_x \cdot \Delta \mathfrak{H}_z \geq \frac{hc}{(\delta l)^4}. \quad (57)$$

Для этого вывода соотношений неопределенности снова характерно одновременное употребление корпускулярной и волновой картин.

*IV. Статистическое толкование квантовой теории.*¹⁾

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ.

Весьма поучительно сравнить математический аппарат квантовой теории с математическим аппаратом теории относительности. В обоих

¹⁾ М. Born¹⁴; P. Dirac²⁹; P. Jordan²⁹ и т. д.

случаях идет речь о применении линейной алгебры; можно, таким образом, сравнить матрицы квантовой теории с симметричными тензорами специальной теории относительности. Как на существенные различия должно быть указано на то, что пространство, к которому относятся тензора квантовой теории, имеет бесконечно большое число измерений, и что это пространство не вещественно; место ортогональных преобразований заступают так называемые унитарные преобразования. Если мы, ради того, чтобы получить наглядную картину, пренебрежем этими важными различиями, то каждую величину квантовой теории можно представить посредством некоторого тензора, главные направления осей которого могут быть нарисованы в пространстве; чтобы иметь ясную картину, вспомнить о тензоре моментов инерции твердого тела. Направления главных осей для каждой величины квантовой теории вообще различны и только переместимые матрицы дают одинаковые направления. Точное знание

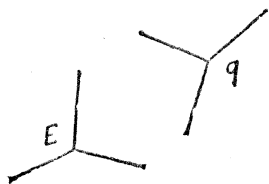


Рис. 15.

какой-либо квантово-теоретической величины соответствует установлению в пространстве некоторого, вполне определенного направления (луч в унитарном пространстве). Точно так же, например, посредством точного знания момента инерции твердого тела определяется соответственная главная ось, к которой принадлежит момент инерции (нужно принять при этом, что не существует никаких вырождений). Названное направление парал-

лельно, следовательно, той главной оси k тензора T , которой соответствует компонента T_{kk} этого тензора, имеющая как раз измеренное значение. Точное знание направления (с точностью до некоторого фазового множителя) в унитарном пространстве есть максимальное знание квантово-теоретических величин, которое может быть достигнуто. Вейль¹² поэтому обозначил эту степень знания, как „случай чистого собрания“. Атом в некотором (невырожденном) стационарном состоянии представляет, например, такой „случай чистоты“. Характеризующее его направление соответствует той главной оси k тензора E , которая относится к значению энергии E_{kk} соответствующего стационарного состояния. Очевидно не имеет никакого смысла говорить о значении например переменной p или q в названном (определяемом одной из главных осей E) направлении. Как известно, для механического рассмотрения какого-нибудь частного случая движения твердого тела столь же мало достаточно задания момента инерции вокруг некоторой оси, отличной от главной. Только тензора, направления главных осей которых совпадают с таковыми для E , имеют определенное значение в данном направ-

лении. В унитарном пространстве, например, общий момент количества движения атома может быть определен одновременно с энергией. Если должно быть произведено измерение значения q , то сначала вместо точного знания направления должно выступить не точное, которое может быть представлено, как снабженная коэффициентом вероятности „смесь“ направлений, соответствующих главным осям E . Например при измерении положения посредством микроскопа, неопределимая часть комптоновского отброса переводит „случай чистоты“ E_{kk} в такую „смесь“ (ср. II, 2a). Эта смесь должна быть такого рода, чтобы ее также можно было принять за снабженную соответственными коэффициентами вероятности смесь направлений, соответствующих главным осям q . Из полученной смеси измерение выбирает определенное значение q' , как действительный результат. Из всего процесса следует, что значение q не может быть однозначно предсказано из опыта, позволяя его определить E , так как между двумя опытами имело место до известной степени не подлежащее контролю возмущение системы. Но это возмущение определимо качественно, если знают, что в результате должно быть известно точное значение q . В этом случае вероятность нахождения q , после того, как E было измерено, дается квадратом косинуса угла между первоначальным направлением „ E “ и направлением „ q “, или, правильнее, соответствующим этому квадрату косинуса выражением в унитарном пространстве $[S(E, q)]^2$. Это положение образует один из фундаментальных постулатов квантовой теории и не может быть более непосредственно обосновано. Из этой аксиомы следует: значения двух квантотеоретических величин связаны причинно друг с другом тогда и только тогда, когда соответствующие обеим величинам тензора имеют параллельные главные оси. Во всех других случаях не существует никакой причинной связи. Решающим для статистической связи посредством некоторых коэффициентов вероятности является вызванное измерительными приборами возмущение системы. Без наличия этого возмущения не имеет никакого смысла говорить о значении или о вероятном значении переменной в некотором направлении в унитарном пространстве, если это направление не параллельно с направлением одной из главных осей соответствующего этой переменной тензора. Например приходится запутываться в противоречиях, говоря о вероятности положения электрона и не принимая в рассмотрение примененный для измерения положения эксперимент (отрицательная кинетическая энергия, сравни стр. 35). Нужно также подчеркнуть, что статистический характер зависимости основан на том, что влияние измерительных приборов на измеряемую систему трактуется иначе, чем влияние отдельных частей системы друг на друга, ибо и это последнее влияние также обуславливает изме-

нения направления вектора системы в гильбертовском пространстве, но эти изменения вполне определены. Если бы измерительные инструменты были причислены к системе, причем было бы соответственно расширено гильбертовское пространство, то рассмотренные выше, как неопределенные, изменения вектора системы были бы теперь определены. Однако пользу из этого можно было бы извлечь только тогда, когда наше наблюдение измерительных инструментов было бы свободно от неопределенности. Но однако для этих наблюдений справедливы те же рассуждения, что и выше, и мы должны были бы, скажем, наши глаза также включить в систему, чтобы избежать неопределенности в этом пункте и т. д. В конечном счете проследить количественно цепь причин и следствий можно было бы только, включив весь мир в систему — но тогда физика уже исчезла и осталась только одна математическая схема. Разделение мира на наблюдающую и наблюдаемую системы препятствует таким образом точной формулировке закона причинности. (Наблюдающей системой не должен быть обязательно только человек-наблюдатель, вместо него могут служить также приборы, как например фотографические пластинки и т. д.) Как примеры специальных причинных связей следует все же упомянуть, что законы сохранения энергии и импульса строго справедливы также и в квантовой теории, так как энергия и импульс и в различные моменты времени также являются переместимыми величинами. Дадим главные оси q в момент времени t и оси q в момент времени $t + \Delta t$ приблизительно параллельны, если Δt достаточно мало. Если произвести два измерения положения очень быстро одно за другим, то можно быть следовательно практически и уверенным, что электрон будет найден приблизительно на том же месте. Вообще в квантовой механике можно установить некоторый вид закона причинности в следующей форме: если в некоторый момент времени известные физические величины будут измерены так точно, как это принципиально возможно, то также и во всякий другой момент времени существуют величины, значение которых может быть точно вычислено; это значит, что для них может быть точно предсказан результат измерения, поскольку наблюдаемая система не подвергается никаким другим возмущениям кроме названных измерений.

2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

Многие парадоксы квантовой теории возникают оттого, что недостаточно обращается внимание на обусловленное измерительными приборами возмущение. Как пример мы рассмотрим простейший мысленный эксперимент.⁸

Штерн-герлаховский атомный пучок, который сначала содержит

только атомы, находящиеся в стационарном состоянии n , проходит через поле F_1 , сильно неоднородное в направлении пучка и вызывающее переходы в виду резкой неоднородности. Относящаяся к F_1 функция преобразования пусть будет $S_{nm}^{(1)}$; вероятность найти атом позади F_1 в состоянии t равна, следовательно, $|S_{nm}^{(1)}|^2$. После некоторого отрезка пути атомы проходят через второе поле F_2 подобное первому. Относящаяся к нему функция преобразования пусть будет $S_{ml}^{(2)}$. Позади F_2 и будет определяться стационарное состояние атома.

Для атомов, которые позади F_1 были в состоянии m , вероятность перехода в состояние l при прохождении через F_2 дается выражением $|S_{ml}^{(2)}|^2$. Согласно этой аргументации

общее число атомов, которые после прохождения F_2 находятся в состоянии l , должно быть дано выражением

$$\sum_m |S_{nm}^{(1)}|^2 |S_{ml}^{(2)}|^2. \quad (58)$$

С другой стороны функция преобразования, относящаяся к полям F_1 и F_2 , в целом, есть

$$S_{nl}^{(12)} = \sum_m S_{nm}^{(1)} S_{ml}^{(2)},$$

т. е. число атомов в состоянии l позади F_2 должно быть равно:

$$\left| S_{nl}^{(12)} \right|^2 = \left| \sum_m S_{nm}^{(1)} S_{ml}^{(2)} \right|^2, \quad (59)$$

что противоречит (58).

Но противоречие исчезает, если принять во внимание, что формулы (58) и (59) в действительности относятся к двум различным опытам. Вывод (58) правилен только тогда, когда между F_1 и F_2 имел место эксперимент, позволяющий определить стационарное состояние атома. Такой эксперимент необходимо изменять фазу относящейся к m -ному состоянию преддингеровской волны на неизвестную величину порядка 2π , как это было вычислено в II, 2 d. При применении выражения (59) к этому эксперименту нужно умножить под знаком суммы каждый член $S_{nm}^{(1)} S_{ml}^{(2)}$ на некоторую неизвестную фазу $e^{i\varphi_m}$ и, наконец, образовать среднее по фазе от

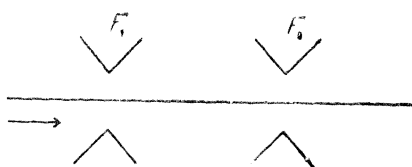


Рис. 16.

правой части (59). Как легко вычислить, это среднее по фазе совпадает с (58). Если же между F_1 и F_2 не имел места никакой промежуточный опыт, по воляющий определение состояния, то конечный результат опыта дается формулой (59); вывод (58) тогда неправилен, так как тогда вовсе нельзя говорить о том, что между F_1 и F_2 атом находится в каком то определенном состоянии.

Охарактеризуем еще раз все три случая, которые нужно строго различать между собой:

I эксперимент. Между F_1 и F_2 атомы не испытывают возмущения. Вероятность для состояния l позади F_2 будет:

$$\left| \sum_m S_{nm}^{(1)} S_{ml}^{(2)} \right|^2.$$

II эксперимент. Между F_1 и F_2 имеет место некоторое воздействие на атомы, позволяющее определить их стационарное состояние; однако результат измерения не регистрируется. (Возникает „смесь“.) Вероятность для состояния l позади F_2 равна:

$$\sum_m \left| S_{nm}^{(1)} \right|^2 \left| S_{ml}^{(2)} \right|^2.$$

III эксперимент. Между F_1 и F_2 имеет место некоторое воздействие на атомы, позволяющее определить их стационарное состояние; это измерение дает: „состояние m “. Вероятность для состояния l позади F_2 есть:

$$\left| S_{ml}^{(2)} \right|^2.$$

Различие между случаями II и III привычно уже из классической теории. Принципиальное различие I и II, однако, образует, будучи соответственно обобщено, центральный пункт квантовой теории. Здесь также видна связь с рассуждениями предыдущего параграфа.

Измерение некоторой физической величины η состоит, вообще говоря, в том, что мы наблюдаемую систему, которой величина η перед измерением сопоставлена с неточностью $\Delta_1 \eta$, изменяем так, что после измерения эта величина может быть ей сопоставлена с меньшей неточностью $\Delta_2 \eta < \Delta_1 \eta$. Этот процесс измерения, согласно сказанному, должен быть разделен на два строго различаемые акта. Первый шаг измерения состоит в том, что система подвергается внешнему, физически реальному, изменяющему ход событий воздействию, например: освещение светом или включение поля. Это воздействие приводит к тому, что наблюдаемая система переходит в „смесь“ состояний, вообще говоря бесконечно многих, но

для которых остается общим то, что величина η может быть им сопоставлена с неточностью $\Delta_2\eta$.

Второй акт измерения выбирает из бесконечно большого числа состояний смеси некоторое вполне определенное, как действительно реализованное. Этот второй шаг представляет собой процесс, который сам не воздействует на ход событий, но который только изменяет наше знание реальных соотношений.

3. БОРОВСКОЕ ПОНЯТИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ.

Мир понятий, возникших из повседневных опытов, был впервые оставлен в эйнштейновской теории относительности. Там выяснилось, что обыкновенные понятия можно применять только к процессам, в которых скорость распространения света может быть практически рассматриваема как бесконечно большая. Уточненный опытный материал современной экспериментальной физики принудил, таким образом, к пересмотру старых и к образованию новых понятий. Но наше мышление могло только постепенно свыкнуться с расширенной областью фактов и ее миром понятий и поэтому теория относительности казалась сначала чуждой и абстрактной. Как следует из сказанного до сих пор, опыты из мира атомов принуждают к еще более далеко идущему отказу от привычных до сих пор понятий. Наше обычное описание природы и в особенности мысль о строгой закономерности в процессах природы основаны, в действительности, на предположении, что явления возможно наблюдать, не оказывая на них заметного влияния. Относить некоторое определенное следствие к определенной причине имеет смысл только тогда, когда мы можем наблюдать следствие и причину, не производя одновременно в процессе нарушающего воздействия. Таким образом, закон причинности в его классической форме может быть определен, согласно его сути, только для замкнутых систем. В атомной же физике вообще с каждым наблюдением связано конечное, до известной степени не подлежащее контролю, возмущение, как это можно было заранее ожидать в физике принципиально наименьших величин. Но так как с другой стороны каждое пространственно-временное описание физического процесса обусловлено наблюдением этого процесса, то отсюда следует, что пространственно-временное описание процессов с одной стороны и классический закон причинности с другой представляют дополнительные, исключаящие друг друга черты физических процессов. Этому положению вещей в формализме теории соответствует то, что хотя и существует математическая схема квантовой теории, но эта схема не может быть истолкована как простая связь в пространстве и времени.

Благодаря этой дополнительности пространственно-временного описания с одной стороны и причинной связи с другой, выступает далее некоторая своеобразная неопределенность понятия „наблюдение“, состоящая в том, что всегда остается произвольным, какие предметы нужно причислить к наблюдаемой системе и какие рассматривать как средства наблюдения. В формализме теории этот произвол приводит к тому, что для толкования какого либо физического эксперимента часто могут быть использованы весьма различные методы, чему позднее будет приведено несколько примеров. Но даже если и примириться с названным произволом, понятие „наблюдения“, строго говоря, принадлежит к миру идей, взятых из нашего повседневного опыта; оно может быть перенесено на атомные явления только тогда, когда принято во внимание данное в соотношениях неопределенности ограничение всех пространственно-временных картин. Так как каждое наблюдение по определению связано с пространством и временем, то это понятие и имеет смысл только внутри границ, которые даются соотношениями неточности. Было упомянуто уже раньше, что существуют специальные случаи, в которых требования классического закона причинности в известном приближении могут быть согласованы с пространственно-временным описанием. В общем случае, однако, положение вещей можно охарактеризовать примерно следующей схемой (Бор, цитир. статьи):

Классическая теория	Квантовая теория	
	или	или
Описание в пространстве и времени	Описание в пространстве и времени.	Математическая схема вне пространства и времени.
Причинность	Соотношения неопределенности.	Причинность.

Только после того, как при образовании понятий будут сделаны попытки приспособиться к этой основной дополнительности описания в пространстве времени и причинности, можно будет судить о свободе от противоречий методов квантовой теории (в особенности интерпретации теории преобразований). Приспособление нашего мышления и нашего языка к опытам атомной физики во всяком случае, как и в теории относительности, связано с большими трудностями. В теории относительности этому приспособлению очень помогли философские дискуссии прежнего времени, относившиеся к проблеме пространства и времени. Подобным образом

можно и в атомной физике извлечь пользу из основных для всех теорий познания рассуждений о трудностях, которые связаны с разделением мира на субъект и объект. Обсуждение некоторых абстракций, характерных для современной теоретической физики, можно найти уже в философии прошлого столетия. В то время, как эти абстракции могли быть тогда, как игра мыслей, отброшены основывающимися только на действительности учеными, уточненное экспериментальное искусство современной физики заставляет нас теперь подробно продискутировать эти абстракции.

V. Обсуждение важнейших экспериментов.

В предыдущих параграфах были подробно рассмотрены принципы квантовой теории. Действительное их понимание однако обусловлено приспособлением нашего мышления к положению вещей созданному экспериментами, и особенно к только что обсуждавшейся взаимности закона причинности и описания в пространстве-времени. Поэтому обсуждение основных экспериментов окажет большую пользу для понимания теории.

1. ФОТОГРАФИИ ВИЛЬСОНА.

а) Существеннейшие черты вильсоновских фотографий могут быть прежде всего истолкованы с помощью классической теории корпускулярного представления. Это толкование совершенно справедливо также и с точки зрения квантовой теории, так как при измерении положения частицы в вильсоновской камере соотношения неточности (как это ясно подсчитано в II) хотя тривиальным образом и имеют место, но они несущественны для толкования важнейших результатов вильсоновских фотографий (например прямолинейности путей α -лучей). Для заключений такого рода классическая теория может быть всегда по праву применима так же как и для макроскопических процессов, так как квантовая теория существенна только для более тонких сторон явления, так сказать, внутри соотношений неопределенности.

б) Несмотря на это, все же полезно обсудить ближе также и квантовую теорию вильсоновских снимков. Здесь сейчас же выступает вышеописанный произвол понятия наблюдения, так как является простым вопросом целесообразности: нужно ли ионизируемые молекулы воды причислить к одной системе с α -частицей или к наблюдающему прибору? Мы станем сначала на последнюю точку зрения. Наблюдаемая система состоит тогда из одной α -частицы и результат измерения положения посредством ионизации будет представлен в математической схеме теории посредством пакета ве-

роятности $|S(q')|^2$ в пространстве координат x, y, z, α -частицы. Последующие вычисления, удобства ради, будут проделаны только для одной степени свободы частицы, скажем, для координаты q , ^{8, 9} Если положение частицы известно уже в предшествующие моменты времени, то названное выше измерение положения дает, хотя и соответственно неточное, знание скорости (ср. II, 2 b), которое позволяет точное определение $S(q)$ по уравнению (11). Мы обозначим таким образом снова через \bar{q}, \bar{p} средние значения q и p в момент времени $t=0$; через $\Delta q, \Delta p$ средние ошибки. Значок 0 в q_0' напоминает, что это значение относится ко времени $t=0$. Тогда для $t=0$ имеет место, например согласно II 1:

$$S(q_0') = \text{const} \cdot e^{-\frac{(q_0 - \bar{q})^2}{2(\Delta q)^2} - \frac{2\pi i}{\hbar} \bar{p}(q_0' - \bar{q})} \quad (60)$$

Для свободного движения, без действия каких либо сил, справедливо уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{const} = p_0 \\ \dot{q} &= \frac{1}{\mu} p, \text{ т. е.} \\ q &= \frac{1}{\mu} p \cdot t + q_0 \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Чтобы найти распределение вероятности в момент времени t , мы вычислим по уравнению M (169) функцию преобразования $S(q_0', q')$:

$$\left(\frac{t}{\mu} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0'} + q_0' \right) S(q_0', q') = q' S(q_0', q'). \quad (62)$$

Решением (62) будет:

$$S(q_0', q') = \text{const} \cdot e^{\frac{2\pi i \mu}{\hbar t} \left(q' q_0' - \frac{1}{2} q_0'^2 \right)}. \quad (63)$$

И мы находим для распределения в момент времени t согласно M (188):

$$S(q') = \int S(q_0') S(q_0', q') dq_0', \quad (64)$$

т. е.

$$S(q') = \text{const} \cdot e^{-\frac{1}{2(\Delta q)^2} \frac{\left[\bar{q} + \frac{i}{\beta} \left(q' - \frac{t}{\mu} \bar{p} \right) \right]^2}{1 + \frac{i}{\beta}}} \quad (65)$$

где положено

$$\beta = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{t}{\mu} \frac{1}{(\Delta q)^2} = \Delta p \frac{t}{\mu} \frac{1}{\Delta q};$$

далее следует:

$$|S(q')|^2 = \text{const} \cdot e^{-\frac{(q - \frac{t}{\mu} \bar{p} - \bar{q})^2}{(\Delta q)^2 + (\frac{t}{\mu} \Delta p)^2}} \quad (66)$$

Среднее значение для q' , таким образом, равно $\frac{t}{\mu} \bar{p} + \bar{q}$, как это и нужно было ожидать по классической теории, и средний квадрат ошибки для q' равен $\Delta q^2 + \left(\frac{t}{\mu} \Delta p\right)^2$, т. е. складывается из двух частей, непосредственно соответствующих неточностям q_0' и p_0' в момент времени $t=0$.

Если применить (66) к трем степеням свободы x, y, z α -частицы, то видно, что луть пакета вероятности представляет прямую линию, если отвлечься от расползания пакета. Но нужно заметить, что уравнение (66) только тогда имеет место, если α -частица движется беспрепятственно. Каждая последующая ионизация молекулы воды превращает пакет (66) в „смесь“ таких пакетов (переход от случая I к случаю II в схеме IV, 2). Если ионизация связана с измерением положения, то из этой „смеси“ будет снова выделен небольшой пакет вероятности вида (60), как результат измерения; он и образует исходный пункт для дальнейшего вычисления траекторий (случай III в схеме IV, 2) и т. д.

Отступления от прямолинейности связаны с величиной изменения импульса при ионизации в отношении к импульсу частицы. Отсюда сразу становится понятным различие между путями α -частиц и β -частиц. Неопределенность изменения импульса связана согласно II, 2 с величиною области значений импульсов выброшенного из молекулы электрона перед столкновением, и таким образом косвенно с величиной молекулы.

Что касается формальной стороны только что проведенных вычислений, то нужно еще отметить, что преобразование от q_0' к q' может быть сделано также кружным путем при посредстве энергии; согласно M (188) вообще имеет место

$$S(q_0' q') = \int S(q_0' E) S(E q') dE \quad (67)$$

и поэтому

$$S(q') = \int dE \int dq_0' S(q_0') S(q_0' E) \cdot S(E q'). \quad (68)$$

Функции $S(q_0' E)$ представляют собой обыкновенные шредингеровские волны в фазовом пространстве. Функция $S(q')$ может быть получена, таким образом, путем наложения таких шредингеров-

ских функций. Этим методом Дарвин¹⁰ исследовал движение пакетов вероятности.

γ) Наконец, мы проведем еще математическую трактовку вильсоновских фотографий при предположении, что ионизуемые молекулы воды причислены к наблюдаемой системе. Это хотя и сложнее, чем предыдущие методы, но зато позволяет представить менее странным чуждый нашему обычному представлению элемент квантовой теории, который в предыдущем вычислении сказался в сведении (редукции) волнового пакета при наблюдении. Чтобы не слишком затруднять вычисления, примем, что наша система кроме α -частицы содержит только две молекулы воды. Пусть далее вектор импульса $\mathfrak{p}(p_x, p_y, p_z)$ α -частицы перед ионизацией точно известен, следовательно, положение $\mathfrak{r}(x, y, z)$ совершенно неизвестно. Мы ищем вероятность того, что обе молекулы будут ионизованы, и покажем, что эта вероятность только тогда принимает заметное значение, когда линия, связывающая центры обеих молекул, параллельна направлению скорости α -частицы. Мы обозначим координаты центров тяжести обеих молекул, принятых за неподвижные, через x_I, y_I, z_I и x_{II}, y_{II}, z_{II} , а внутренние координаты молекул через q_I и q_{II} . Наше конфигурационное пространство включает в общем координаты $(x, y, z; q_I; q_{II})$. Мы пренебрежем далее взаимодействием между молекулами; взаимодействие же между α -частицей и молекулами рассмотрим как возмущение; соответственные члены гамильтоновой функции пусть будут $H_I^{(1)}(x, y, z, q_I)$ и $H_{II}^{(1)}(x, y, z, q_{II})$. $H_I^{(1)}$ и $H_{II}^{(1)}$ рассматриваются как операторы, действующие на волновую функцию $\psi(x, y, z; q_I, q_{II})$ шредингеровской теории.

Таким образом, шредингеровское волновое уравнение будет окончательно гласить¹⁾

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)}_{\alpha\text{-частица}} + \underbrace{H_I^{(0)}(q_I)}_{\text{молекула I}} + \underbrace{H_{II}^{(0)}(q_{II})}_{\text{молекула II}} + \lambda \underbrace{(H_I^{(1)} + H_{II}^{(1)})}_{\text{Взаимодействие}} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \psi = 0. \quad (69)$$

λ есть малый параметр возмущения, по которому должно быть

¹⁾ Последующее вычисление взято в существенном из работы М. Борна.¹⁴ В дальнейшем мы пренебрегаем взаимодействием α -частиц с атомными ядрами в молекулах.

произведено разложение. Мы полагаем $\psi = \psi^0 + \lambda\psi^{(1)} + \lambda^2\psi^{(2)} + \dots$ и получаем из (69)

$$\left. \begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + H_I^{(0)}(q_I) + H_{II}^{(0)}(q_{II}) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(0)} = 0 \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + H_I^{(0)}(q_I) + H_{II}^{(0)}(q_{II}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(1)} = -(H_I^{(1)} + H_{II}^{(1)}) \psi^0 \\ & \left(-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + H_I^{(0)}(q_I) + H_{II}^{(0)}(q_{II}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^{(2)} = -(H_I^{(0)} + H_{II}^{(1)}) \psi^{(1)} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (70)$$

Собственные решения первого уравнения (70) могут быть написаны в виде:

$$\psi^{(0)} = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} \varphi_{n_I}(q_I) \varphi_{n_{II}}(q_{II}) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E_{p, n_I, n_{II}} t}. \quad (71)$$

Далее, функции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ в зависимости от q_I и q_{II} должны быть разложены по ортогональной системе функций $\varphi_{n_I}(q_I) \varphi_{n_{II}}(q_{II})$, т. е.

$$\psi^{(1)} = \sum_{n_I, n_{II}} v_{n_I, n_{II}}^{(1)}(x, y, z, t) \varphi_{n_I}(q_I) \varphi_{n_{II}}(q_{II}). \quad (72)$$

Наконец, мы образуем матричные элементы энергии возмущения:

$$\left. \begin{aligned} H_I^{(1)} \varphi_{n_I}(q_I) &= \sum_{m_I} h_{n_I m_I}^{(1)}(x, y, z) \varphi_{m_I}(q_I) \\ H_{II}^{(1)} \varphi_{n_{II}}(q_{II}) &= \sum_{m_{II}} h_{n_{II} m_{II}}^{(1)}(x, y, z) \varphi_{m_{II}}(q_{II}) \end{aligned} \right\} (73)$$

Невозмущенное состояние в момент времени $t = 0$, из которого мы исходим, дается через

$$n_I = n_I^0; \quad n_{II} = n_{II}^0; \quad p = p_0 \quad (p_x = p_x^0, \quad p_y = p_y^0; \quad p_z = p_z^0), \quad E = E_0^{(0)}.$$

Подставляя (72) и (73) в (70), мы получаем:

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right);$$

$$\left(-\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \Delta + E_{n_1}^{(0)} + E_{n_{II}}^{(0)} + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_{n_1 n_{II}}^{(1)}(x, y, z, t) =$$

$$-h \left(\psi_{n_1 n_1}^{(0)}(x, y, z) \delta_{n_{II} n_{II}} + \psi_{n_{II} n_{II}}^{(0)}(x, y, z) \delta_{n_1 n_1} \right) e^{\frac{2\pi i}{h} (p^0 \mathbf{r} - E_0^{(0)} t)}. \quad (74)$$

Если положить здесь

$$\psi_{n_1 n_{II}}^{(1)}(x, y, z, t) = e^{-\frac{2\pi i}{h} E_0^{(0)} t} \cdot \omega_{n_1 n_{II}}^{(1)}(x, y, z),$$

то в силу

$$E_0^{(0)} = E_{n_1}^{(0)} + E_{n_{II}}^{(0)} + \frac{1}{2\mu} (p_x^{(0)2} + p_y^{(0)2} + p_z^{(0)2})$$

найдем:

$$\left\{ -\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \Delta - \left[E_{n_1}^{(0)} - E_{n_1}^{(0)} + E_{n_{II}}^{(0)} - E_{n_{II}}^{(0)} + \frac{1}{2\mu} (p^{(0)})^2 \right] \right\} \omega_{n_1 n_{II}}^{(1)}(x, y, z) =$$

$$= - \left(\psi_{n_1 n_1}^{(0)}(x, y, z) \delta_{n_{II} n_{II}} + \psi_{n_{II} n_{II}}^{(0)}(x, y, z) \delta_{n_1 n_1} \right) e^{\frac{2\pi i}{h} (p^0 \mathbf{r})}. \quad (75)$$

$|\omega_{n_1 n_{II}}^{(1)}(x, y, z)|^2$ дает согласно IV, 1 в первом приближении вероятность того, что молекулы перешли, соответственно, в состояния n_1 и n_{II} и α -частица находится в точке x, y, z . Из (75) мы заключаем, что в первом приближении может быть возбуждена только одна молекула, так как иначе по (75), $\omega_{n_1 n_{II}}$ исчезает, если и n_1 и вместе с тем n_{II} отличны от начальных значений n_1^0 и, соответственно, n_{II}^0 . Прежде чем перейти ко второму приближению, рассмотрим поведение $\omega^{(1)}(x, y, z)$ в пространстве (x, y, z) . Левая часть (75) соответствует обыкновенному волновому уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$, причем длина волны $\lambda = \frac{h}{p^{(1)}}$ вычисляется из

$$\frac{1}{2\mu} (p^{(1)})^2 = E_{n_1}^0 - E_{n_1} + E_{n_{II}}^0 - E_{n_{II}} + \frac{1}{2\mu} (p^{(0)})^2 \quad (76)$$

В правой части (75) стоят источники этих волн. Таким образом, выражение $\omega^{(1)}(x, y, z)$ может быть получено из принципа Гюй-

генса, путем наложения шаровых волн описанного вида, согласно функции распределения:

$$- (h_{n_I n_I}^{(1)}(x, y, z) \delta_{n_I n_I} + h_{n_{II} n_{II}}^{(1)}(x, y, z) \delta_{n_{II} n_{II}}) e^{\frac{2\pi i}{h} (\mathfrak{p}^0 r)}. \quad (77)$$

Если $\frac{1}{2\mu} (\mathfrak{p}^0)^2$ велико в сравнении с разностями энергий в молекулах, то легко видеть, что $\omega_{n_I n_{II}}^{(1)}(x, y, z)$ практически отлично от нуля только в полосе позади молекулы I, в направлении \mathfrak{p}^0 . Поперечное сечение этой полосы (вблизи молекулы I), соответствует примерно размерам молекулы. Полоса имеет конечное расширение,

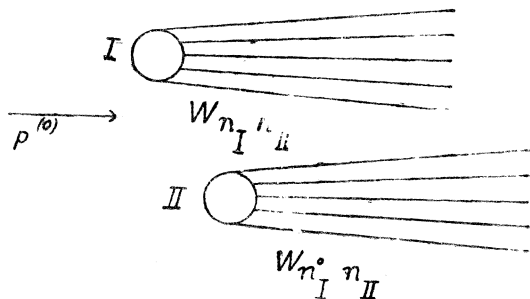


Рис. 17.

соответствующее относительно ничтожным изменениям импульса α -частицы при возбуждении. То же самое справедливо *mutatis mutandis* для $\omega_{n_I n_{II}}^{(1)}(x, y, z)$ (см. рис. 17).

После этой подготовки мы перейдем ко второму приближению. Из уравнения (70) для $\omega_{n_I n_{II}}^{(2)}(x, y, z)$ следует:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \Delta - \left[E_{n_I} - E_{n_I} + E_{n_{II}} - E_{n_{II}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2\mu} (\mathfrak{p}^0)^2 \right] \right\} \omega_{n_I n_{II}}^{(2)}(x, y, z) = \\ & = - \sum_{m_I} \sum_{m_{II}} \omega_{m_I m_{II}}^{(1)}(x, y, z) [h_{m_I n_I}^{(1)}(x, y, z) \delta_{m_{II} n_{II}} + \\ & \quad + h_{m_{II} n_{II}}^{(1)}(x, y, z) \delta_{m_I n_I}] = \\ & = - \sum_{m_I} \omega_{m_I n_{II}}^{(1)}(x, y, z) h_{m_I n_I}^{(1)}(x, y, z) - \\ & \quad - \sum_{m_{II}} \omega_{n_I m_{II}}^{(1)} h_{m_{II} n_{II}}^{(1)}(x, y, z). \end{aligned} \quad (78)$$

Мы ищем условия, при которых $\omega_{n_1 n_{II}}^{(2)} (n_1 \neq n_1^0; n_{II} \neq n_{II}^0)$ может быть заметно отлично от нуля. Для этих членов $\omega_{n_1 n_{II}}^{(2)}$ в суммах в правой части (78) остается только по одному слагаемому $m_1 = n_1^0$ и, соответственно, $m_{II} = n_{II}^0$; т. е. $\omega_{n_1 n_{II}}^{(2)}$ только тогда заметно отлично от нуля, когда или $\omega_{n_1^0 n_{II}}^{(1)}$ и $h_{n_1^0 n_1}^{(1)}$ отличны от нуля в одинаковых областях пространства x, y, z , или $\omega_{n_1 n_{II}^0}^{(1)}$ и $h_{n_{II}^0 n_{II}}^{(1)}$ отличны от нуля в одинаковых областях пространства (x, y, z) . Это возможно только тогда, когда или молекула I лежит в полосе $\omega_{n_1^0 n_{II}}^{(1)}$ или молекула II — в полосе $\omega_{n_1 n_{II}^0}^{(1)}$.

Если обобщить эти рассуждения на случай любого числа молекул — при этом не появится ничего нового — то тем самым прямолинейность путей α -частиц будет доказана. То, что неопределенность изменения импульса при ионизации связана с точностью измерения положения — именно с величиной молекул, сказывается в этом вычислении при применении принципа Гюйгенса. Чем менее область источников $h^{(1)}(x, y, z)$ рассеянных волн, тем больше телесный угол „полос“ $\omega^{(1)}$. Прерывное изменение пакетов вероятности стало бы здесь играть роль, однако, только тогда, когда мы задали бы вопрос о возможностях наблюдения ионизации молекул.

2. ДИФФРАКЦИОННЫЕ ОПЫТЫ.

а) Диффракция лучей света и материи от решеток (Дэвиссон — Джермер, Томсон, Рупп, Кикучи) может быть простейшим образом объяснена с помощью классической волновой теории света и материи.

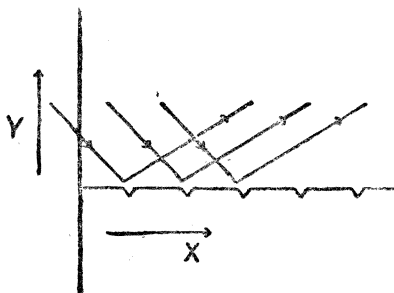


Рис. 18.

Применение пространственно-временной волновой теории к этим опытам вполне оправдывается также и с точки зрения квантовой теории, потому что для геометрии волн соотношения неопределенности между волновыми амплитудами не играют никакой роли. Квантовая теория будет существенна только для вопросов об энергии, импульсе волн и т. п.

б) Квантовая теория волн во всех существенных пунктах явлений диффракции совпадает с классической волновой теорией, поэтому представляется излишним приводить математическую схему этих вычислений. С другой стороны по Дьюэну¹⁵ можно получить

интересный вывод дифракционных явлений из квантовой теории корпускулярного представления. Мы представим себе простоты ради отражение корпускул от плоской штриховой решетки (постоянная решетки d). (Штрихи параллельны оси z — перпендикулярной к чертежу рис. 18.) Если представить, что решетка сама подвижна, то ее перемещение в направлении x может быть рассматриваемо как периодическое движение с периодом d , поскольку в расчет принято будет только взаимодействие падающих частиц с решеткой, так как при смещении всей решетки на отрезок d это взаимодействие остается неизменным. Отсюда можно заключить, что движение решетки в направлении x „проквантовано“ — импульс p_x может изменяться только на целое кратное значения $\frac{h}{d}$ (ср. в прежнем представлении квантовой теории: $\int pdq = nh$).

Так как при отражении частицы от решетки импульс всей системы сохраняется, то x -овая составляющая импульса частицы изменяется также только на целое кратное $\frac{h}{d}$. Отсюда следует:

$$p_x' = p_x + m \frac{h}{d}. \quad (79)$$

Кроме того, решетка в силу ее большой массы не может получить заметной энергии, таким образом:

$$p'^2_x + p'^2_y = p^2_x + p^2_y = p^2. \quad (80)$$

Если ϑ угол падения, ϑ' угол отражения луча, то имеет место

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{p_y}{p}; \quad \sin \vartheta = \frac{p_x}{p} \\ \sin \vartheta' - \sin \vartheta &= m \frac{h}{dp}. \end{aligned} \quad (81)$$

Из формулы М (203) для длины волны, соответствующих корпускулам, следует:

$$(\sin \vartheta' - \sin \vartheta) d = m\lambda, \quad (82)$$

в согласии с волновой теорией.

γ) То обстоятельство, что материя и световое излучение имеют как корпускулярные, так и волновые свойства, до объяснения квантово-теоретических принципов давало часто повод к затруднениям. В особенности часто обсуждался следующий парадокс: силы взаимодействия между отраженными от решетки электронами и материей штрихов решетки быстро убывают с расстоянием;

таким образом, для направления отражения могут иметь значение только непосредственно близкие к частице штрихи решетки. Несмотря на это и удаленные штрихи имеют влияние на отражение, так как вся решетка в целом определяет остроту максимумов в дифракции. Основанием этого противоречия является смешение двух различных опытов (ср. эксперимент I и II в IV, 2). Если не имеет места опыт, позволяющий установить положение электрона перед отражением, то нет никакого смысла говорить о положении электрона и поэтому вполне понятно, что вся решетка имеет значение для процесса. Если же такой опыт для измерения положения электрона (с точностью Δq) имеет место, то он изменяет импульс, а вместе с тем и длину волны электрона на часть неизвестную величину

$$\left(\Delta p \sim \frac{h}{\Delta q} \right).$$

Отражение происходит тогда в неточно известном направлении, как это и нужно ожидать при отражении от немногих $\left(\frac{\Delta q}{d} \right)$ штрихов решетки. Если Δq будет меньше d , то дифракционные максимумы становятся совсем размытыми $\left(\Delta p > \frac{h}{d} \right)$. Однако в том случае, если измерение положения действительно производится, можно все же сделать более точные заключения о пути соответственного электрона (различие между II и III в IV, 2); например решит, попадет ли электрон на штрих решетки или нет и т. д.

3. ОПЫТ ЭЙНШТЕЙНА И РУППА. 16

Одно из противоречий между теорией световых квантов и волновой теорией казалось можно было установить на следующем опыте: в каналом луче светящийся атом летит параллельно экрану мимо щели S шириною d (см рис. 19). Испускаемый атомом и проходящий через щель свет наблюдается в точке P в спектроскоп. Пусть скорость атома в луче будет v , частота испускаемого им монохроматического света ν . Так как свет от атома может достичь P только за короткий промежуток времени t , в который атом пролетает как раз мимо щели, то наблюдаемый в P поток волн имеет конечную длину и его частота может быть поэтому по законам оптики определена только неточно. В P будет наблюдаться, следовательно, расширение линии ν порядка.

$$\Delta \nu \sim \frac{1}{t} \sim \frac{v}{d}. \quad (83)$$

Напротив, по квантовой теории света расширение линии кажется невозможным, так как атом испускает монохроматический свет, а экран не может изменить энергии светового кванта, так как экран хотя и получает импульс, но, в силу своей большой массы, не может получить энергии. Ошибка этого рассуждения, согласно Бору, заключается в пренебрежении эффектом Доплера и рассеянием света на щели. Световые кванты, попадающие из атома в P , не все испускаются перпендикулярно направлению луча; также и те световые кванты, которые будут испущены под углом α к направлению (атом $\rightarrow P$), порядка

$$\sin \alpha \sim \frac{\lambda}{d}, \quad (84)$$

могут попасть в P вследствие рассеяния порядка $\frac{\lambda}{d}$ на щели. Доплер-эффект испущенного в этом направлении света имеет величину

$$\Delta\nu \sim \sin \alpha \frac{v}{c} \nu, \quad (85)$$

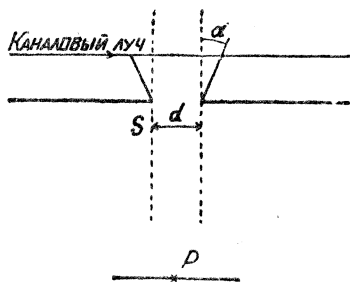


Рис. 19.

т. е.

$$\Delta\nu \sim \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{v}{c} \nu \sim \frac{v}{d} \quad (86)$$

в согласии с (83).

Также и в рассмотренном здесь опыте строгая справедливость закона сохранения энергии для частиц соединима с требованиями классической волновой оптики.

4. ИСПУСКАНИЕ, ПОГЛОЩЕНИЕ И ДИСПЕРСИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ.

а) *Применение законов сохранения.* Качественное толкование поведения атомов в процессах излучения возможно уже на основании постулата о существовании дискретных стационарных состояний и теории световых квантов. Действительно, это толкование и было первым решающим успехом боровской теории. Мы повторим вкратце важнейшие качественные результаты этой теории. Пусть стационарные состояния атома, начиная с нормального, перенумерованы через 1, 2, 3... (ср. схему уровней рис. 20).

Атом в состоянии 3, например, может из этого состояния, посредством испускания светового кванта $h\nu_{32}$, перейти в состояние 2; также атом из состояния 1, например, может, поглощая световой

квант $h\nu_{13}$, перейти в состояние 3. Нужно особенно подчеркнуть, что только что высказанные положения следует принимать буквально, и что они ни коим образом не имеют только „символический характер“, так как можно, например, посредством опытов Штерна-Герлаха экспериментально установить, в каком стационарном состоянии находится атом. Отсюда, специально, следует, что интенсивность какой-нибудь линии испускания пропорциональна числу атомов в верхнем (относящемся к этой линии испускания) состоянии; точно также интенсивность какой-либо линии поглощения пропорциональна числу атомов в нижнем, относящемся к соответствующей линии поглощения, состоянии. Эти результаты, достаточно часто подтвержденные опытом, характерны для квантовой теории. Они не могут быть выведены из классической теории ни волновой ни корпускулярной картин, так как уже существование дискретных значений энергии не может быть объяснено классической теорией.

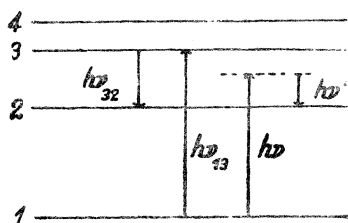


Рис. 20.

Совершенно подобные же соотношения имеются в теории дисперсии, в особенности некогерентного рассеянного излучения Смекала.¹⁷

Если атом в состоянии 1 будет возбужден световым квантом $h\nu$, то он может, не изменяя состояния, испустить такой же световой квант $h\nu$ (если масса атомного ядра принята бесконечно большой); он может также

перейти в состояние 2 и при этом испустить смещенный в сторону длинных волн световой квант $h\nu'$. Интенсивность обоих видов рассеянного света пропорциональна числу атомов в состоянии 1. Если атом в состоянии 2 будет освещен светом частоты ν , то он может при переходе в состояние 1 испускать, как некогерентный рассеянный свет, также световые кванты более короткой длины волны $h\nu'$. Снова интенсивность этого сорта рассеянного света (антистоксовский рассеянный свет) пропорциональна числу атомов в состоянии 2. Это утверждение было подтверждено опытами Рамана.¹⁸

б) *Полная трактовка.* Однако эти качественные заключения о законах сохранения не дают по существу никаких сведений относительно интерференционных свойств испускаемого атомом света или о значениях вероятностей переходов. Для объяснения интерференционных свойств света достаточно, как например в опыте Дэвиссона-Джермера, классическая теория. Квантовая теория ничего не изменяет в геометрии интерференционных картин. Однако для вычисления вероятностей переходов необходимо при-

менение квантовой теории, хотя и можно, как показал Клейн, посредством умелой комбинации аргументов принципа соответствия и квантовой теории материи избежать применения квантовой теории излучения. Но такая формулировка проблемы излучения представляется не вполне удовлетворительной и может привести при поверхностном применении к неправильным заключениям. Во всяком случае приложение этого метода соответствия требует большой осторожности при учете различных требований квантовой теории.

Последовательное рассмотрение явлений излучения получается при применении квантовой теории к излучению и материи, при этом, конечно, безразлично, исходить ли из корпускулярной или из волновой картины. Дирак в своей теории излучения¹⁹ употребляет язык корпускулярной картины, но при выводе гамильтоновой функции использует частью следствия волновой теории излучения. Здесь будут вкратце приведены только основные черты этой теории.

Атом представлен электроном, движущимся в электростатическом силовом поле Φ_0 . По Дираку²⁰ релятивистски инвариантное уравнение для задачи одного электрона гласит:

$$p_0 + \frac{e}{c} \Phi_0 + \alpha_i \left(p_i + \frac{e}{c} \Phi_i \right) + \alpha_4 \mu c = 0 \quad (87)$$

или

$$H = -e\Phi_0 - \alpha_i c \left(p_i + \frac{e}{c} \Phi_i \right) - \alpha_4 \mu c^2. \quad (88)$$

Φ_0 скалярный потенциал, Φ_i ($i=1, 2, 3$) электромагнитные потенциалы; по одинаковым значкам всегда суммируется ($i=1, 2, 3$). Здесь, как и раньше, p_i обозначают канонически сопряженные q_i моменты, α_i — операторы, удовлетворяющие уравнениям:

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}; \quad \alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0; \quad \alpha_4^2 = 1; \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{для } i = k \\ 0 & \text{в других} \\ \end{cases} \text{случаях.} \quad (89)$$

Из уравнений движения следует

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = -\alpha_i \cdot c \quad (90)$$

α_i тождественны, следовательно, с матрицами скорости вплоть до множителя — c . Из (88) следует, что энергия взаимодействия между атомом и полем излучения может быть написана в виде:

$$- \alpha_i e \Phi_i = \frac{e}{c} \dot{q}_i \Phi_i, \quad (91)$$

если положить скалярный потенциал поля излучения равным нулю.

Гамильтонова функция всей системы, заключающей атом и поле излучения, имеет таким образом следующий вид:

$$H_{\text{всей системы}} = H_{\text{атома}} + \frac{e}{c} \dot{q}_i \Phi_i + H_{\text{поля излучения}}. \quad (92)$$

Чтобы привести задачу к простой математической форме, рассматривают поле излучения в сосуде; таким образом, решение максвеллевских уравнений для сосуда дает систему ортогональных функций, по которой могут быть разложены Φ_i . Согласно М (246), как коэффициенты системы ортогональных функций появляются величины

$$a_r = e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_r} N_r \frac{1}{2},$$

где N_r означает число световых квантов собственного колебания r . Общая энергия поля излучения (без взаимодействия) просто выражается в этих переменных

$$H_{\text{поля излучения}} = \sum_r N_r h \nu_r. \quad (93)$$

При разложении Φ_i по ортогональной системе, отдельные члены разложения зависят еще от положения атома в сосуде. Но так как эта зависимость в конечном результате исчезает при усреднении, если сосуд принят достаточно большим, то целесообразно в отдельный член разложения ввести „среднюю“ амплитуду таким способом, чтобы квадрат этой средней амплитуды совпал со средним значением квадрата первоначальной амплитуды; здесь подразумевается среднее значение по всем возможным положениям атома в сосуде. Таким образом для Φ_i получается:

$$\Phi_i = \left(\frac{h}{2\pi c} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_r \cos \alpha_{ir} \left(\frac{\nu_r}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{2}} \left[N_r \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{h} \theta_r} + e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_r} N_r \frac{1}{2} \right]; \quad (94)$$

α_{ir} означает здесь угол между электрическим вектором собственного колебания r и осью q_i ; σ_r есть число собственных колебаний в интервале частот $\Delta \nu_r$ и в телесном угле $\Delta \omega_r$, разделенное на

$\Delta v_r \cdot \Delta \omega_r$, Итак для гамильтоновой функции всей системы мы получаем:

$$H = H_{\text{атом}} + \sum_r N_r h \nu_r + \frac{e}{c} \left(\frac{h}{2\pi c} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_r \dot{q}_r \left(\frac{\nu_r}{\sigma_r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (95)$$

$$\left[N_r e^{\frac{1}{2} \frac{2\pi i}{h} \theta_r} + e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_r} N_r \right]^{\frac{1}{2}},$$

где \dot{q}_r означает компоненту вектора \dot{q} в направлении электрического вектора собственного колебания r .

Из (95) могут быть непосредственно выведены все результаты, которые выше были получены путем применения законов сохранения, так как постоянство H следует, вообще, из уравнений квантовой механики. Из (95) вытекает далее, что для испускания или поглощения светового кванта $h\nu_r$ важен тот матричный элемент \dot{q}_r , который относится к соответствующему переходу атома. Вплоть до множителей, которые здесь не будут вычисляться, вероятность перехода непосредственно дается квадратом этого матричного элемента. Если произвести вычисление для случая возмущения (члены взаимодействия рассматриваются как небольшое возмущение), то в первом приближении получаются только процессы испускания и поглощения, а во втором также и дисперсии. Мы опускаем здесь вычисления. ¹⁾

Недостаток формулировки (95) гамильтоновой функции для излучения заключается в том, что она как будто не содержит указаний относительно свойств интерференции и когерентности излучения. Но это верно только тогда, когда в (94) вводится, как это было сделано выше, средняя амплитуда. Если же оставить действительные амплитуды, которые следуют из разложения Φ_i по системе ортогональных функций, то последние, будучи составлены из решений максвеллевских уравнений, гарантируют нам, что интерференция и свойства когерентности излучения соответствуют максвеллевским уравнениям. Например, множителями u величин a_r см. М (246) появляются решения максвеллевских уравнений; эти множители исчезают в области где находится атом, если максвеллевские вектор-потенциалы исчезают там, скажем, вследствие интерферен-

¹⁾ Дирак (выше приведен. статья) вместо гамильтоновой функции (88) употребляет прежнюю шредингеровскую форму. Однако, при применении (88) все вычисления упрощаются, так как в энергии взаимодействия выпадают члены квадратичные относительно Φ_i ; результаты при этом те же, что и у Дирака.

ции. Поглощение света не имеет места также в тех областях, в которых по классической теории интерференции поглощение было бы невозможно. Из этих рассуждений непосредственно следует, что классическая волновая теория достаточна для обсуждения всех вопросов когерентности и интерференции.

5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.

Для нас всегда является большой трудностью наглядно представить, что квантовая теория света не противоречит требованиям максвеллевских уравнений. Потому раньше еще, до понимания квантовой теории, пытались построить решения уравнений Максвелла в виде игольчатого излучения. Такие решения имеют смысл также и в квантовой теории, так как если какой либо опыт дает возможность сделать заключение о направлении, в котором испускается световой квант, то этот опыт автоматически строит решение максвеллевских уравнений названного типа (ср. редукция волновых пакетов в § II, 2 с).

Как пример мы рассмотрим связанный с испусканием светового кванта отброс. ²¹ Атом должен перейти при испускании светового кванта из состояния 2 в состояние 1, при этом его общий импульс испытывает соответствующее изменение. Так как в данный момент мы интересуемся только свойствами когерентности излучения, то мы воспользуемся упомянутым в 4 б методом принципа соответствия, который применяет для излучения классическую теорию. Как источник излучения служит распределение зарядов, соответствующее выражениям М (205) классической волновой теории материи. Атом представляется посредством электрона [масса μ , заряд — e , координаты $r_e(\xi, \eta, \zeta)$], вращающегося вокруг ядра [масса M , заряд e , координаты $r_k(x, y, z)$]. Шредингеровская функция для стационарного состояния n , в котором атом как целое имеет трансляционный импульс $\mathfrak{P}(P_x, P_y, P_z)$, имеет вид:

$$e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \mathfrak{P} r_s} \cdot \psi_n(r_e - r_k) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} E_{n,P} t}, \quad (96)$$

где $r_s = \frac{\mu r_e + M r_k}{\mu + M}$ представляет координаты центра тяжести.

Если образовать относящийся к переходу $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}'$ матричный элемент плотности вероятности, то мы получаем:

$$e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}') r_s} \cdot \psi_n(r_e - r_k) \psi_m^*(r_e - r_k) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (E_{n,P} - E_{m,P'}) t}. \quad (97)$$

Усредняя это выражение соответственно по координатам ядра и электрона и складывая, мы получаем плотность заряда, которая, бу-

лучи принята за виртуальный источник излучения, и дает нам сведения относительно когерентности испускаемых лучей.

Для обеих частей получается (множитель e при общем заряде выпущен, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_k$ есть переменная интегриации; соответствующий элемент объема $d\nu$):

$$\rho_e = e \frac{2\pi i}{h} (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}') r_e \int e^{\frac{2\pi i}{h} \frac{M}{\mu + M} \mathbf{r} (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}')} \psi_n(\mathbf{r}) \psi_m^*(\mathbf{r}) d\nu \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} (E - E') t} \quad (98)$$

$$\rho_k = e \frac{2\pi i}{h} (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}') r_k \int e^{\frac{2\pi i}{h} \frac{M}{\mu + M} \mathbf{r} (\mathfrak{P} - \mathfrak{P}')} \psi_n(\mathbf{r}) \psi_m^*(\mathbf{r}) d\nu e^{-\frac{2\pi i}{h} (E - E') t},$$

т. е. общая плотность заряда будет:

$$\rho = \text{const} \cdot e \frac{2\pi i}{h} [(\mathfrak{P} - \mathfrak{P}') \mathbf{r} - (E - E') t], \quad (99)$$

где значение постоянной неинтересно для последующих рассуждений. Совершенно аналогично построенные выражения получаются и для плотностей тока. Испущенное этим распределением зарядов излучение определится через запаздывающие потенциалы:

$$\Phi_0(P) = \int \frac{\rho \left(t - \frac{R}{c} \right)}{R_{PP'}} d\nu_{P'}; \quad (100)$$

соответственные выражения имеют место и для Φ_i . R обозначает расстояние между переменной точкой P' , по которой интегрируется и точкой P (смещение с абсолютным значением общего импульса P , конечно, не представляет опасности), в которой должно быть вычислено излучение.

Таким образом, находим:

$$\Phi_0(P) = \text{const} \int d\nu_{P'} \frac{e \frac{2\pi i}{h} [(\mathfrak{P} - \mathfrak{P}') r_{P'} - (E - E') \left(t - \frac{R_{PP'}}{c} \right)]}{R_{PP'}} \quad (101)$$

(и соответственно для Φ_i).

Если принять теперь, что положение атома каким-нибудь опытом определено с известной точностью (тогда импульс \mathfrak{P} может быть известен только соответственно неточно), то это означает, что распределение заряда плотности ρ имеется только в конечной области пространства, положим $\Delta\nu$. Если при этом излучение исследуется на далеких расстояниях от $\Delta\nu$, то $R_{PP'}$ может быть разложено в

ряд. Если, например, начало координат лежит в Δv , то приближенно можно положить:

$$R_{PP'} = R_P - \frac{X_P}{R_P} \cdot x_{P'} - \frac{Y_P}{R_P} y_{P'} - \frac{Z_P}{R_P} z_{P'}. \quad (102)$$

Тогда из (101) имеем:

$$\Phi_0(P) = \text{const} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(E-E')} \left(t - \frac{R_P}{c} \right) \int_{\Delta v} \frac{d\nu_{P'}}{R_{PP'}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} \left(\mathfrak{P} - \mathfrak{P}' - \frac{h\nu}{c} \frac{\mathfrak{R}_P}{R_P} \right) r_{P'}} \quad (103)$$

Здесь положено $E - E' = h\nu$.

Потенциалы заметно отличны от нуля только там, где множитель при $r_{P'}$ в показателе меньше, чем обратные линейные размеры $(\Delta l)^{-1}$ объема Δv ; во всех других местах излучение исчезает вследствие интерференции и мы получаем:

$$\mathfrak{P} - \mathfrak{P}' = \frac{h\nu}{c} \frac{\mathfrak{R}_P}{R_P} \pm \frac{h}{\Delta l} \quad (104)$$

Таким образом, атом испытывает отброс величины $\frac{h\nu}{c}$ (с точностью до естественной неопределенности $\frac{h}{\Delta l}$). Если направление отброса экспериментально установлено (поскольку это позволяют соотношения неопределенности), то излучение ведет себя в отношении свойств когерентности как игольчатое излучение, потенциалы которого представлены формулой (103). Но это игольчатое излучение есть только возможный частный случай, который экспериментально осуществим тогда, когда \mathfrak{P} и \mathfrak{P}' известны достаточно точно, а координаты центра тяжести — неточно. Другой частный случай имеет место тогда, когда экспериментально место центра тяжести атома устанавливается точнее, чем $\frac{h}{|\mathfrak{P} - \mathfrak{P}'|} = \frac{c}{\nu} = \lambda$, т. е. точнее, чем длина волны испускаемого света. Уравнение (103) дает тогда правильную шаровую волну, а об отбросе ничего нельзя сказать, так как неопределенность отброса $\frac{h}{\Delta l}$ больше чем его вероятное значение $\frac{h\nu}{c}$.

На этом примере весьма ясно видно, как в квантовой теории и световые волны также теряют первоначальную реальность, кото-

рую они имели в классической теории, поскольку соответствующее атомному излучению решение максвелловских уравнений зависит от нашего знания координат центра тяжести атома.

6. ЭФФЕКТ КОМПТОНА И ОПЫТ КОМПТОНА-СИМОНА. ³

Совершенно аналогичные соотношения мы находим и в теории эффекта Комптона, и, хотя вычисления вполне сходны с выкладками предыдущего параграфа, мы все же приведем снова важнейшие результаты. Интереснее при этом исходить из рассмотрения не свободных, а связанных электронов, потому что тогда (если принять положение атомного ядра заданным) уже наперед имеется некоторое знание относительно положения рассеивающего электрона. Законы сохранения дают:

$$h\nu + E = h\nu' + E'$$

$$\frac{h\nu}{c} \cdot e \pm \sim \Delta p = \frac{h\nu'}{c} e' + p'. \quad (105)$$

Здесь буквы без штрихов относятся к переменным до столкновения, со штрихами — после столкновения; p обозначает импульс трансляционного движения электронов, e и, соответственно, e' — единичные вектора в направлении движения светового кванта, $\sim \Delta p$ обозначает область изменения импульса электрона в атоме. Если Δp мало в сравнении с p и $\frac{h\nu}{c}$, то (105) дает соответственно точные сведения о связи направлений e' и p' ; если p' будет, например, измерено в вильсоновской камере, то ожидаемое излучение имеет все свойства игольчатого излучения, так как установлено направление, в котором будет испущен световой квант. Если $p' \gg \Delta p$, то собственную функцию трансляционного движения можно приближенно рассматривать как плоскую волну (r вектор координат электрона):

$$e^{\frac{2\pi i}{h}(p'r - E't)}$$

Пусть собственная функция исходного состояния E , принятого за нормальную, будет $\psi_E(r)e^{-\frac{2\pi i E t}{h}}$, где ψ согласно (37) отлично от нуля в области, линейный размер которой $\Delta l [|\Delta l| \Delta p \sim h]$. Падающая волна с частотой ν возмущает эти волновые функции, причем функция возмущения представляет собой периодическую функцию пространственных координат длины волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$, так что в конесч-

ном счете, как возмущение распределения заряда, появляется выражение вида:

$$\rho \text{ const} \cdot f(\mathbf{r}) e^{-\frac{2\pi i}{h} E t} \cdot e^{2\pi i \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{e}}{\lambda} - \nu t \right)} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} [\mathbf{p}'\mathbf{r} - E't]} = \left. \begin{aligned} & \\ & = \text{const} \cdot f(\mathbf{r}) e^{\frac{2\pi i}{h} \left[\left(\frac{h\nu}{c} e - \mathbf{p}' \right) \mathbf{r} - (E - E' + h\nu)t \right]} \end{aligned} \right\} (106)$$

где снова $f(\mathbf{r})$ отлично от нуля в области линейного размера $\sim \Delta l$. Если опять образовать, как в (103), запаздывающие потенциалы на далеком расстоянии от атома, то получим (обозначения те же, что и в (103); $\frac{\mathfrak{R}_P}{R_P} = e'$):

$$\Phi_0(P) = \text{const} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} (E - E' + h\nu) \left(t - \frac{R}{c} \right)} \cdot \int_{\text{область атома}} \frac{d\nu_{P'}}{R_{PP'}} f(\mathbf{r}_{P'}) e^{\frac{2\pi i}{h} \left(\frac{h\nu}{c} e - \mathbf{p}' - \frac{h\nu'}{c} e' \right) \mathbf{r}_{P'}}; \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} (107)$$

при этом положено $h\nu' = E - E' + h\nu$.

Множитель в (107), зависящий от времени, показывает, что частота рассеянного излучения есть ν' и соответствует уравнению (105). Далее, вследствие интерференции интеграл в правой части (107) исчезает, если множитель при $\mathbf{r}_{P'}$ значительно больше, чем обратное значение линейного размера атома. Отсюда следует, в силу того, что $\Delta l |\Delta \mathbf{p}| \sim h$:

$$\frac{h\nu}{c} e = \frac{h\nu'}{c} e' + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{e} \sim |\Delta \mathbf{p}| \quad (108)$$

в согласии со вторым уравнением (105). Таким образом, рассеянное излучение ведет себя в отношении когерентности, как игольчатое излучение. Впрочем, направление светового кванта не предписано вполне точно, что можно рассматривать, как следствие неопределенности импульса в исходном стационарном состоянии. Эта неопределенность импульса может быть уменьшена, если опыт производить на слабо связанных электронах. При этом, конечно, соответственно увеличивается поперечное сечение атома. Если произвести рассуждение для возбужденного атома, то вместо $\Delta l |\Delta \mathbf{p}| \sim h$ появляется соотношение (37) $\Delta l |\Delta \mathbf{p}| \sim nh$ и при оценке запаздывающих потенциалов нужно принять во внимание число узловых поверхностей в $\psi(\mathbf{r})$; так как в этом случае возникают только не имеющие значения усложнения, то мы ограничились рассмотрением нормального состояния.

Если мы хотим объяснить опыт Гейгера-Боте ²² об одновременности появления электронов отброса и рассеянного светового

кванта, то нужно, если при этом ограничиваются изложенным здесь методом принципа соответствия, ввести плотности зарядов, излучающих только в некоторый определенный интервал времени. Исходное состояние электрона можно представить, скажем, как покоящийся, конечное состояние, как движущийся волновой пакет. Тогда плотность заряда, получающаяся из произведения обоих пакетов, может быть отлична от нуля только очень короткое время. Возникающее излучение состоит поэтому из *ограниченного* потока волн, распространяющегося со скоростью света. Более последовательное, хотя во всех существенных чертах и эквивалентное объяснение опыта Гейгера-Боте можно получить из квантовой теории излучения. В последней справедливы, впрочем, как было показано раньше, законы сохранения, примененные к световым квантам и электронам, так что безо всяких сомнений можно употреблять обыкновенную корпускулярную теорию вышеназванных опытов.

7. ЯВЛЕНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ.

Доказательство того, что большие средние значения квадратов флюктуаций, получающиеся из корпускулярной теории, действительно заключаются в математической схеме квантовой теории, будет проведено во второй части лекций (М § 5). Но особенно поучительно проследить отношения между различными физическими картинками, с которыми оперирует квантовая теория, на флюктуациях некоторого поля излучения. Пусть нам дан сосуд объема V с излучением, находящимся в температурном равновесии. Тогда средняя энергия \bar{E} небольшой части объема ΔV в интервале частот между ν и $\nu + \Delta\nu$ по планковской формуле будет:

$$\bar{E} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu h\nu}{c^3 \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)} \quad (109)$$

(k — больцманновская постоянная, T — температура). Для среднего квадрата флюктуаций $\overline{\Delta E^2}$ энергии E согласно общим законам термодинамики имеет место:

$$\overline{\Delta E^2} = kT^2 \frac{d\bar{E}}{dT},$$

т. е. в данном случае, как показал Эйнштейн: ²³

$$\overline{\Delta E^2} = \overbrace{h\nu \cdot \bar{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 \Delta\nu \Delta V} \bar{E}^2}^{\text{Квантовая теория. Волны - частицы}} \quad (110)$$

↑ классическая теория частиц ↑ классическая теория волн

Это значение среднего квадрата флюктуации получается из классической теории только частично. Корпускулярное представление дает сначала:

$$\bar{E} = h\nu \cdot \bar{n}, \quad (111)$$

где \bar{n} обозначает среднее число световых квантов в объеме ΔV с частотой между ν и $\nu + \Delta\nu$; отсюда, согласно законам теории вероятности, следует:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta n^2} &= \bar{n}; \text{ т. е.} \\ \overline{\Delta E^2} &= (h\nu)^2 \cdot \bar{n} = h\nu \bar{E}. \end{aligned} \quad (112)$$

Таким образом, классическая теория корпускулярной картины дает только первую часть формулы (110). Напротив, классическая волновая теория излучения приводит точно ко второй части (110). Относящиеся сюда вычисления будут даны ниже в связи с квантовой теорией. Для вывода (110), как видно, необходима квантовая теория, причем, конечно, безразлично, исходить ли из волнового или корпускулярного представления. Если для рассмотрения проблемы используют конфигурационное пространство частиц для световых квантов, что, правда, не было последовательно ¹⁾ проведено до сих пор, ²³ то нужно принять во внимание, что вся система термов этой проблемы может быть разделена на некоординирующие частные системы, из которых одна определенная может быть выбрана как решение (М § 7). В силу перестановочных соотношений М (260), получающихся через соответствующие соотношения неопределенности, нужно выбрать такую систему термов, собственные функции которой симметричны в координатах световых квантов. Этот выбор приводит к статистике Бозе для световых квантов и, как показал Бозе, к уравнениям (109) и (110).

Если исходить из волнового представления, то мы от амплитуд собственных колебаний, как и в М (246), приходим к числу световых квантов, связанных с соответствующими колебаниями и, вместе с тем, к той же математической схеме. ²⁴ Чтобы не слишком усложнять вычисления, рассмотрим вместо излучения в сосуде колеблющуюся струну длиной l . Пусть $\varphi(x, t)$ ее боковое отклонение, а c — скорость распространения звука в струне. Функция Лагранжа для этого случая будет:

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (113)$$

¹⁾ *Прим ред.* Недавно Ландау и Пайерлс (см. литературн. указатель 23) построили теорию фотонов в конфигурационном пространстве. Их схема эквивалентна теории квантовой электродинамики Гейзенберга-Паули и содержит те же трудности.

т. с.

$$\Pi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (114)$$

и

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ c^2 \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx. \quad (115)$$

Далее справедливы перестановочные соотношения

$$\Pi(x)\varphi(x') - \varphi(x')\Pi(x) = \delta(x-x') \frac{h}{2\pi i}. \quad (116)$$

При подстановке

$$\varphi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin k \frac{\pi}{l} x$$

\bar{H} переходит в

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{q}_k^2 + \left(k \frac{\pi}{l} \right)^2 q_k^2 \right\} \quad (117)$$

Далее можно положить

$$p_k = \frac{1}{c^2} \dot{q}_k, \quad p_k q_l - q_l p_k = \delta_{kl} \frac{h}{2\pi i} \quad (118)$$

и (ср. М 246):

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \sqrt{\frac{k\pi}{cl}} \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \left\{ N_k e^{\frac{1}{2} \frac{2\pi i}{h} \theta_k} + e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_k} N_k \right\}^{\frac{1}{2}} \\ q_k &= \sqrt{\frac{lc}{k\pi}} \sqrt{\frac{h}{4\pi}} \left\{ N_k e^{\frac{1}{2} \frac{2\pi i}{h} \theta_k} - e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_k} N_k \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Собственные частоты струны будут

$$\nu_k = k \cdot \frac{c}{2l} \quad (120)$$

Из (117) имеем таким образом:

$$\bar{H} = \sum_{k=1}^{\infty} h\nu_k \cdot \left(N_k + \frac{1}{2} \right). \quad (121)$$

Однако, для энергии в небольшом отрезке струны $(0, a)$ получаем:

$$E = \frac{1}{l} \int_0^a \sum_{j, k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{q}_j \dot{q}_k \sin j \frac{\pi}{l} x \sin k \frac{\pi}{l} x + \right. \\ \left. + q_j q_k j k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cos j \frac{\pi}{l} x \cos k \frac{\pi}{l} x \right\} dx. \quad (122)$$

Если из этой суммы специально выбрать члены $j = k$, то, при неизменном предположении, что входящие в рассмотрение длины волн все меньше a , получим значение $\frac{a}{l} \bar{H} = \bar{E}$.

Таким образом, флуктуация $\Delta E = E - \bar{E}$ получается, если из (122) вычеркнуть члены $j = k$.

Интегрирование дает:

$$\Delta E = \frac{1}{2l} \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{q}_j \dot{q}_k K_{jk} + j k q_j q_k \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 K'_{jk} \right\}, \quad (123)$$

где

$$K_{jk} = c \frac{\sin(\nu_j - \nu_k) \frac{a}{c}}{(\nu_j - \nu_k)} - c \frac{\sin(\nu_j + \nu_k) \frac{a}{c}}{(\nu_j + \nu_k)} \\ K'_{jk} = c \frac{\sin(\nu_j - \nu_k) \frac{a}{c}}{(\nu_j - \nu_k)} + c \frac{\sin(\nu_j + \nu_k) \frac{a}{c}}{(\nu_j + \nu_k)}. \quad (124)$$

Поэтому для среднего квадрата флуктуации получаем:

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{1}{2l^2} \sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{c^4} \overline{\dot{q}_j^2 \dot{q}_k^2} K_{jk}^2 + j^2 k^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \overline{q_j^2 q_k^2} K'_{jk}{}^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{c^2} j k \overline{(q_j \dot{q}_j q_k \dot{q}_k + \dot{q}_j q_j q_k \dot{q}_k)} K_{jk} K'_{jk} \right\}. \quad (125)$$

Сумму по j и k целесообразно затем заменить через интеграл по частотам ν_j и ν_k при предположении, что струна l очень длинна, так что ее собственные колебания лежат плотно друг к другу. Наконец, примем еще, что a велико и используем соотношение

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \int_{\nu_1}^{+\nu_2} \frac{\sin^2 \nu a}{\nu^2} f(\nu) d\nu = \pi f(0) \text{ для } \nu_1, \nu_2 > 0; \quad (126)$$

тогда двойной интеграл переходит в простой и мы находим:

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{a}{c} \int d\nu \left\{ \frac{1}{c^4} (\overline{q_\nu^2})^2 + \left[\left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \overline{q_\nu^2} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \frac{1}{c^2} [(\overline{q_\nu q_\nu})^2 + (\overline{q_\nu q_\nu})^2] \right\}. \quad (127)$$

В силу перестановочных соотношений (118) имеем:

$$\overline{q_\nu q_\nu} = -\overline{q_\nu q_\nu} = c^2 \cdot \frac{h}{4\pi i} \quad (128)$$

и далее

$$\overline{E} = \frac{a}{c} \int d\nu \left\{ \frac{1}{c^2} \overline{q_\nu^2} + \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \overline{q_\nu^2} \right\} = \\ = \frac{a}{l} \int d\nu \cdot z_\nu \cdot h\nu \left(N_\nu + \frac{1}{2} \right). \quad (129)$$

Здесь $z_\nu d\nu$ обозначает число собственных колебаний в интервале частот $d\nu$, т. е. в этом случае $z_\nu = \frac{2l}{c}$.

Если распространить интегралы по интервалу частот $\Delta\nu$, то получим, следовательно

$$\overline{E} = \frac{a}{l} \cdot z_\nu \cdot \Delta\nu \cdot h\nu \left(N_\nu + \frac{1}{2} \right). \quad (130)$$

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{a}{c} \Delta\nu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\overline{E}c}{a\Delta\nu} \right)^2 - \frac{1}{2} (h\nu)^2 \right]. \quad (131)$$

Затем делят \overline{E} на среднюю тепловую энергию \overline{E}^* и на энергию при абсолютном нуле

$$\overline{E} = \overline{E}^* + \frac{a}{l} z_\nu \Delta\nu \frac{h\nu}{2} = \overline{E}^* + \frac{a}{c} \Delta\nu \cdot h\nu \quad (132)$$

и находят

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{a}{2c} \Delta\nu \left[\left(\frac{\overline{E}^*c}{a\Delta\nu} \right)^2 + 2 \frac{\overline{E}^*c}{a\Delta\nu} \cdot h\nu \right] = \\ = \frac{\overline{E}^{*2}}{\Delta\nu \cdot z_\nu \frac{a}{l}} + h\nu \cdot \overline{E}^*. \quad (133)$$

Это значение точно соответствует формуле (110). Уравнение классической волновой теории получается, если в (133) перейти

к пределу $\hbar \rightarrow 0$. Классическая теория, таким образом, приводит только к первому члену уравнения (133). Квантовая же теория, которую по желанию можно интерпретировать и как корпускулярную и как волновую теорию, приводит к полной формуле для флюктуаций.

8. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ.

В большинстве проведенных в этой книге обсуждений требования теории относительности были оставлены без внимания. Выведенные результаты поэтому справедливы вообще только для тех опытов, в которых скорость света может быть рассматриваема практически бесконечной. Границы справедливости допущенных до сих пор формулировок можно, пожалуй, принять несколько более широкими в теории излучения, но вообще в настоящее время постоянная c отмечает пограничную линию между неисследованной и исследованной областями в квантовой теории. В вопросах о принципиальных основах мы ограничились поэтому вполне достоверными данными теории. Ниже мы обсудим вкратце попытки релятивистской формулировки теории и связанные с ней затруднения. Дирак установил релятивистски инвариантное волновое уравнение для задачи одного электрона (ср. V, 4 b), которое удовлетворяет требованиям как квантовой теории, так и теории относительности. Существенные трудности для такого уравнения лежат однако в наличии соотношения

$$\frac{E^2}{c^2} = \mu^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (134)$$

для свободного движения электрона, согласно которому для данных импульсов всегда возможны два значения энергии, отличающиеся друг от друга только знаком. Это обстоятельство приводит к тому, что в каждой атомной задаче на ряду с обычными значениями энергии существует бесконечно много отрицательных собственных значений, не соответствующих действительности. Вероятности перехода из состояний с положительной в состояния с отрицательной энергией также никоим образом не могут быть рассматриваемы как малые, так что, собственно говоря, весьма удивительно, что для положительных энергий, по крайней мере в одно-электронной задаче, можно получить значения, соответствующие действительности. В особенности разительно выражается, как отметил Клейн, названная трудность в том, что согласно какому-либо волновому уравнению, которое использует непосредственно выражение (134), электроны могут беспрепятственно проходить через потенциальные пороги высотой $> 2\mu c^2$. Если рассматривать, например, только

движение в направлении оси x ($p_y = p_z = 0$) и произвести вычисления II, 2d согласно с (134), то получается:

$$\frac{E^2}{c^2} = \mu^2 c^2 + p_x^2 \quad (135)$$

$$\frac{(E - V)^2}{c^2} = \mu^2 c^2 + p_x^2,$$

т. е.

$$p'_x{}^2 = p_x^2 + \frac{(E - V)^2 - E^2}{c^2}.$$

Направо от потенциального порога волновая функция имеет вид:

$$e^{\frac{2\pi i}{h}(p'_x x - Et)} \quad (136)$$

Для очень малых значений V/p'_x вещественно, т. е. получаются проходящие волны, как и в II, 2d. Для больших V/p'_x мнимо и волна испытывает полное отражение на пороге. Попадающая в область II (ср. рис. 11) часть волн материи убывает по показательному закону. Однако, для очень больших значений V/p'_x снова становится вещественным, т. е. электроны могут с известной вероятностью беспрепятственно проходить через очень высокие потенциальные пороги. Более точное вычисление показывает, что эта вероятность не равна нулю. Другая, несколько иная трудность возникает в релятивистской квантовой теории в связи с вопросом об энергии созданного электроном поля. Для точечного электрона электромагнитная энергия этого поля будет, как известно уже из классической теории, бесконечно большой. Поэтому классическая теория, чтобы избежать этой трудности, принуждена ввести некоторую универсальную длину, именно диаметр электрона. Замечательно, что в нерелятивистской квантовой теории, согласно Йордану и Клейну,³⁸ возможно через соответственный выбор порядка непереместимых множителей в гамильтоновой функции совершенно избежать появления этой бесконечной собственной энергии электрона. В релятивистской теории поля до сих пор еще не найдено подобного выхода.

Часто высказывается надежда, что квантовая теория после разрешения только что названных проблем, может быть, снова будет в значительной степени сведена к классическим понятиям. Но даже поверхностный взгляд на развитие физики за последние тридцать лет показывает нам, что скорее, наоборот, можно ожидать еще более широких ограничений классического мира понятий. В добавление к изменениям нашего обыкновенного пространственно-вре-

менного мира, которые были потребованы теорией относительности и для которых характерна постоянная c и к соотношениям неопределенности квантовой теории, символом которых может служить планковская постоянная h , появятся еще другие ограничения, стоящие в связи с универсальными постоянными e , μ , M (масса протона). Каковы будут эти дальнейшие ограничения, пока еще нельзя предвидеть.

Математический аппарат квантовой теории.

Для вывода математической схемы квантовой теории (это относится как к корпускулярному, так и к волновому представлению) мы имеем в распоряжении два источника: эмпирические факты и принцип соответствия. Боровский принцип соответствия в своей наиболее общей формулировке гласит, что между квантовой теорией и соответствующей данной примененной картине классической теорией существует качественная аналогия, которая может быть проведена до деталей. Эта аналогия не только дает указания для нахождения формальных законов, ее особенное значение заключается главным образом в том, что она одновременно дает и физическую интерпретацию найденных законов.

1. КОРПУСКУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ (МАТЕРИЯ).

Если исходить из корпускулярного представления, то тогда, согласно принципу соответствия, между классической и квантовой механиками существует внутреннее родство. Основные уравнения классической механики заключены в следующей схеме:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad H(p, q) - W = 0 \quad (137)$$

$$q_k = \sum_{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r} q_{k, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r} \cdot e^{2\pi i(\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 + \dots + \nu_r \tau_r)t} \quad (138)$$

$\omega_k = \nu_k t + \beta_k$; J_k — канонически сопряжено с ω_k

$$\dot{J}_k = -\frac{\partial H}{\partial \omega_k} = 0; \quad \dot{\omega}_k = \nu_k = \frac{\partial H}{\partial J_k} \quad (139)$$

В этой схеме H обозначает гамильтонovu функцию канонически сопряженных переменных p_k и q_k ; ν_1, ν_2, \dots основные частоты движения, принятого за кратнопериодическое; ω_k — соответ-

ствующие угловые переменные, J_k — сопряженные переменные действия. W есть общая энергия системы, t — время.

К этой схеме классической механики должен быть найден подобный ей формализм, позволяющий учесть следующие эмпирические факты: между характеристическими частотами излучения атома существуют соотношения вида:

$$\nu_{ik} + \nu_{kl} = \nu_{il} \quad (140)$$

(комбинационный принцип Ридберга-Ритца).

Энергия атома может принимать только определенные дискретные значения W_i . Между этими значениями и собственными частотами атома существуют соотношения

$$\nu_{ik} = \frac{1}{h} (W_i - W_k) \quad (141)$$

(основной боровский постулат квантовой теории).

Уравнение (141) следует, очевидно, рассматривать как аналог (139). Чтобы провести аналогию дальше, q в квантовой теории, соответственно уравнению (138), представляют совокупностью „членов ряда Фурье“:

$$q \rightarrow \left| q_{ik} e^{2\pi i \nu_{ik} t} \right|. \quad (142)$$

Эту квадратную таблицу обозначают как матрицу; так как q должно быть вещественно, то классически следует $q_\tau = q_{-\tau}^*$, и поэтому по квантовой теории $q_{ik} = q_{ki}^*$ (* означает „комплексно сопряженное“); такие матрицы называются „эрмитовыми“. Далее можно и p представить как матрицу, а также функции от q и p .

Умножение двух рядов Фурье в классической механике производится по схеме:

$$(pq)_\tau = \sum_{\tau'} p_{\tau'} q_{\tau - \tau'} \quad (143)$$

По принципу соответствия аналогом этой формулы в квантовой механике будет:

$$(pq)_{il} = \sum_k p_{ik} q_{kl} \quad (144)$$

(формула для перемножения матриц). Физически утверждение уравнения (144) является особенно ясным благодаря эмпирической формуле (140).

Для матриц справедливы обычные законы алгебры за исключением коммутативного закона умножения:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x(y + z) &= xy + xz \\ (x + y) + z &= x + (y + z) \\ x(yz) &= (xy)z \end{aligned} \quad (145)$$

Однако, вообще,

$$xy \neq yx. \quad (146)$$

Выражения $xy - yx$ образуют, как показал Дирак, ²⁸ с точностью до множителя $\frac{2\pi i}{h}$, аналоги пуассоновским скобкам классической механики в духе принципа соответствия.

$$[xy] = \sum_k \left(\frac{\partial x}{\partial p_k} \frac{\partial y}{\partial q_k} - \frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial p_k} \right).$$

Соответственно этой аналогии для канонически сопряженных переменных p_k и q_k принимаются следующие перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} p_k q_l - q_l p_k &= \frac{h}{2\pi i} \delta_{kl} \left(\delta_{kl} = 1 \text{ для } k = l \right. \\ &\quad \left. 0 \text{ ,, } k \neq l \right) \\ p_k p_l - p_l p_k &= 0 \\ q_k q_l - q_l q_k &= 0 \end{aligned} \quad (147)$$

Далее для p_k и q_k должны быть опять справедливы канонические уравнения

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}. \quad (148)$$

Уравнения (147) и (148) не независимы друг от друга.

Уравнения (147), собственно, могут быть приняты только для некоторого определенного момента времени t , тогда, согласно (148), перестановочные соотношения определены для всего последующего времени. Проведение этого вычисления показывает, однако, что уравнения (147) и (148) не противоречат друг другу.

Из (147) и (148) могут быть выведены закон сохранения энергии и боровское соотношение для частот. Сначала конструируется матрица W , удовлетворяющая уравнению (141) при помощи системы значений W_i ; при этом еще не принимается, что W_i связаны как

либо со значениями энергии системы. Матрица W должна быть диагональной матрицей, члены которой удовлетворяют уравнению:

$$W_{ik} = \delta_{ik} W_i. \quad (149)$$

Соответствующий этой матрице аналог по принципу соответствия есть, таким образом, величина, не зависящая от времени. Тогда согласно (141) имеет место:

$$(\dot{q})_{ik} = 2\pi i v_{ik} q_{ik} = \frac{2\pi i}{h} (W_i - W_k) q_{ik} \quad (150)$$

$$\dot{q} = \frac{2\pi i}{h} (Wq - qW).$$

Далее, для какой-либо функции f от p и q согласно (147) имеет место:

$$pf - fp = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial q}; \quad fq - qf = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (151)$$

Подставляя в (148), имеем:

$$Wq - qW = Hq - qH; \quad Wp - pW = Hp - pH, \quad (152)$$

$W-H$, таким образом, переместимо с p и q и поэтому с каждой функцией от p и q , значит также и с H . Отсюда следует

$$WH - HW = 0; \quad \dot{H} = 0. \quad (153)$$

Далее, $W-H$ не зависит от p и q , значит

$$H = W + \text{const} \quad (154)$$

и, следовательно, W (с точностью до некоторой произвольной постоянной) тождественно с энергией системы. Матрица H есть диагональная матрица.

Этим установлен математический аппарат, относящийся к корпускулярному представлению.

Для физической интерпретации из всего, проведенного в духе принципа соответствия, вывода этой математической схемы получаем следующие правила:

1. Среднее по времени значение некоторой переменной в каком-нибудь стационарном состоянии определяется соответствующим этому состоянию диагональным членом матрицы, которая представляет переменную.

2. Если обозначим электрический дипольный момент атома через $e\mathbf{r}$, где $[\mathbf{r} = (x, y, z)]$

$$x = \sum q_k^x; \quad y = \sum q_k^y; \quad z = \sum q_k^z,$$

(q_k^x, q_k^y, q_k^z прямоугольные координаты электронов), то выражение

$$\frac{1}{h\nu_{ik}} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (2\pi\nu_{ik})^4 |\mathbf{r}_{ik}|^2 \cdot 2 \quad (155)$$

дает вероятность для спонтанного испускания одного светового кванта при переходе атома из энергетически более высокого состояния i в состояние k с меньшей энергией. Матричные элементы должны, таким образом, стоять в таком же отношении к излучению атома, как коэффициенты ряда Фурье классической модели к ее излучению. Сперва могут возникнуть сомнения в справедливости (155), так как ведь и максвеллевская теория подлежит еще квантово-теоретическому перетолкованию. В выводе (155), однако, играют роль (так как здесь идет речь о средних по времени значениях излучаемой энергии) только те стороны максвеллевской теории, которые не изменяются квантовой теорией; это будет доказано при обсуждении волновой картины.

2. ТЕОРИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Если имеют место уравнения

$$\begin{aligned} p &= S^{-1} p_0 S \\ q &= S^{-1} q_0 S, \end{aligned} \quad (156)$$

то для всякой функции от p и q справедливо

$$f(p, q) = S^{-1} f(p_0, q_0) S. \quad (157)$$

Если матрицы рассматривать как тензора в многомерном пространстве (координаты $t^1, t^2 \dots t^n \dots$), то уравнение

$$p = S^{-1} p_0 S$$

соответствует унитарному преобразованию координатной системы, причем p_0 означает тензор в координатной системе K_0 , p тот же тензор в системе K . Между координатными системами $K_0(t_0^1 t_0^2 \dots)$ и $K(t^1, t^2 \dots)$ имеют место соотношения

$$t_0 = S t \quad \text{или} \quad t_0^i = \sum_k S_{ik} t^k. \quad (158)$$

Примем далее :

$$\sum_i S_{ik} S^*_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{для } l = k \\ 0 & \text{, } l \neq k \end{cases} \quad (159)$$

Это значит, что $S^{-1} = \widetilde{S}^*$ (\sim обозначает перестановку значков).

Вообще, целесообразнее различные координатные системы отличать не посредством новых значков у тензоров, а ввести для различных систем различные буквы при перечислении координат. Мы будем в дальнейшем каждую координатную систему обозначать своей буквой, а различные численные значения этой буквы отличать друг от друга штрихами, так что, например, (156) напишется в виде :

$$p_{aa'} = \sum_l \sum_{l'} \left(S^{-1} \right)_{al} p_{ll'} S_{l'a'} \quad (160)$$

Оба значка матрицы преобразования S относятся, конечно к разным координатным системам.

Если перестановочные соотношения справедливы для p и q в какой-нибудь координатной системе, то, согласно (157), они справедливы также и во всякой другой координатной системе, так как единичная матрица при преобразовании переходит в единичную. Примем, что в некоторой координатной системе найдены матрицы p и q , удовлетворяющие перестановочным соотношениям; тогда гамильтонова функция $H(pq)$ также может быть представлена как матрица в этой координатной системе. Однако, H , вообще, не будет при этом диагональной матрицей, так как p и q , вообще, не будут решениями уравнений движения. Решение квантово-механической проблемы (148) сводится к задаче преобразования матрицы H в диагональную, т. е. нахождения такой матрицы преобразования S , которая из данной координатной системы переводит в новую, координатные оси которой совпадают с главными осями тензора H . Уравнениями для S будут по (157) следующие :

$$W_{aa'} = H_{aa'} = \sum_l \sum_{l'} \left(S^{-1} \right)_{al} H_{ll'} S_{l'a'}$$

или

$$\sum_{l'} H_{ll'} S_{l'a} - \sum_a S_{la'} W_{a'a} = \sum_{l'} H_{ll'} S_{l'a} - S_{la} W_{aa} = 0 \quad (161)$$

(161) представляет систему бесконечного числа однородных линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных S_{la} . Система

разрешима только для определенных значений W_{aa} „собственных значений“ матрицы W . Эти собственные значения могут быть дискретны или непрерывны. До сих пор мы все время молчаливо принимали, что значки у матриц пробегают дискретные значения, и брали наши результаты из теории конечных матриц. Это может быть математически оправдано только при известных ограничениях. Прежде всего, матричные соотношения должны быть распространены на случай непрерывно изменяющихся значков. Мы следуем здесь методам Дирака.²⁹ Эти методы весьма ясны, но должны быть применимы, правда, только с известной математической осторожностью; но так как они могут быть строго оправданы во всех практически встречающихся случаях, то относительно их применения здесь не возникает сомнения. Прежде всего вместо суммы по некоторому значку появляется интеграл по соответствующей области значений

$$(Sp)_{at} = \int dl' S_{al'} p_{l't}. \quad (162)$$

Единичная матрица является здесь несобственной. Чтобы представить ее, Дирак вводит некоторую функцию $\delta(x)$, обладающую следующими свойствами

$$\delta(x) = 0 \text{ для } x \neq 0 \text{ и } \int_a^b \delta(x) dx = 1,$$

если значение δ лежит в интервале между a и b . Единичная матрица для непрерывного значка будет тогда

$$(1)_{l'l''} = \delta(l' - l''). \quad (162)$$

В квантовой теории имеют значение те координатные системы, в которых определенные матрицы являются диагональными. Значки в координатной системе, в которой матрицы $x_1, x_2 \dots$ диагональны, мы будем в дальнейшем постоянно обозначать через $x'_1, x''_1 \dots x'_2, x''_2, \dots$ и т. д.; т. е. мы нумеруем координаты по собственным значениям $x_1, x_2 \dots$. Сами матрицы x в принадлежащей им координатной системе, в случае непрерывно изменяющихся значков имеют следующий вид

$$(x_i)_{x''} = x'_i \delta(x'_1 - x''_1) \delta(x'_2 - x''_2) \dots \quad (164)$$

Матрицы x_1, x_2, \dots могут быть тогда и только тогда одновременно приведены к диагональному виду, если они переместимы между собой.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. ³⁰

Пространственные координаты электронов $q_1, q_2 \dots q_f$ могут быть в частности одновременно приведены к диагональному виду:

$$(q_k)_{q'q''} = q'_k \delta(q'_1 - q_1'') \delta(q'_2 - q_2'') \dots \delta(q'_f - q_f''). \quad (165)$$

В этой координатной системе возможное представление для импульсов p_k , удовлетворяющее перестановочным соотношениям, будет:

$$\left(\delta'(x) = \frac{\partial \delta(x)}{\partial x} \right):$$

$$(p_k)_{q'q''} = + \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \delta'(q'_k - q''_k) \delta(q'_1 - q_1'') \dots \delta(q'_{k-1} - q''_{k-1}) \delta(q'_{k+1} - q''_{k+1}) \dots \delta(q'_f - q''_f). \quad (166)$$

Доказательство для одной степени свободы:

$$\begin{aligned} (pq - qp)_{q'q''} &= \frac{\hbar}{2\pi i} \int dq''' [\delta'(q' - q''') q''' \delta(q''' - q'') - \\ &- q' \delta(q' - q''') \delta'(q''' - q'')] = \frac{\hbar}{2\pi i} \int dq''' [\delta'(q' - q''') \\ &q''' \delta(q''' - q'') + \delta(q' - q''') \delta(q''' - q'') - q' \delta'(q' - q''') \\ &\delta(q''' - q'')] = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta(q' - q'') = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot (1)_{q'q''}. \quad (167) \end{aligned}$$

Чтобы некоторую заданную функцию F переменных p и q привести к диагональному виду, нужно решить, аналогично (161), уравнение

$$\int [F(pq)]_{q'q''} dq'' S_{q'F'} - S_{q'F'} F' = 0. \quad (168)$$

Так как p и q , входящие в F , даны как матрицы вида (165) и (167), то интеграция в левой части (168) может быть выполнена и мы получаем

$$F \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'}, q' \right) S_{q'F'} - S_{q'F'} F = 0; \quad (169)$$

p_k в F должно быть заменено оператором $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$.

Если, в частности, гамильтонова функция H для решения уравнений движения квантовой механики будет приведена к диаго-

нальному виду, то (169) переходит тогда в уравнение Шредингера (мы пишем $\psi_W(q')$ вместо $S_{q'H'}$, q вместо q' и W вместо H'):

$$H\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi_w - \psi_w W = 0. \quad (170)$$

В специальной координатной системе, которая была исходным пунктом теории и в которой H имеет диагональный вид, матрицы для p и q будут следующие:

$$\begin{aligned} p_{w'\bar{w}''} &= \int dp \psi_{w'}^* \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} \psi_{w''} \\ q_{w'\bar{w}''} &= \int dq \psi_{w'}^* q \psi_{w''} \end{aligned} \quad (171)$$

В этих уравнениях использовано соотношение $S^{-1} = \tilde{S}^*$. Уравнения (170) и (171) представляют собой наиболее мощные математические методы для разработки квантово-теоретических проблем. Для физического толкования, однако, эти методы пока что не дают нам ничего нового. Потребовалось особое исследование, чтобы выяснить физический смысл матриц преобразования S .

4. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ. ²⁴

Для введения должны быть сначала описаны основные положения теории возмущений в квантовой механике. Пусть гамильтонова функция может быть разложена по некоторому малому параметру λ :

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \dots \quad (172)$$

Далее, пусть принадлежащая H_0 задача движения решена; это значит, что известны матрицы для p и q и любой функции от p и q в такой координатной системе, в которой $H_0 = W_0$ имеет диагональный вид. В дальнейшем мы будем употреблять букву H для обозначения матрицы энергии в только что названной системе, а букву W — для матрицы энергии в системе, в которой она является диагональной матрицей. Пусть $W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \dots$ и, далее, для матрицы преобразования, служащей для перехода из первой вышеупомянутой системы во вторую, имеет место:

$$\begin{aligned} S &= S_0 (1 + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \dots) \\ S^{-1} &= (1 - \lambda S_1 + \lambda^2 (S_1^2 - S_2) + \dots) S_0^{-1}. \end{aligned} \quad (173)$$

Из уравнения $S^{-1}HS = W$ через сравнение коэффициентов при одинаковых степенях λ , получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} S_0^{-1} H_0 S_0 &= W_0 \\ S_0^{-1} (H_0 S_1 - S_1 H_0 + H_1) S_0 &= W_1 \\ S_0^{-1} (H_0 S_2 - S_2 H_0 + S_1^2 H_0 + H_1 S_1 - S_1 H_1 + H_2) S_0 &= W_2 \end{aligned} \quad (174)$$

$$S_0^{-1} [H_0 S_r - S_r H_0 + F_r (H_0 \dots H_r, S_1 \dots S_{r-1})] S_0 = W_r$$

К этому еще имеем:

$$S \tilde{S}^* = 1. \quad (175)$$

Если невозмущенная система не вырождена, то из первого уравнения (174) и из (175) следует:

$$|S_0| = 1.$$

Тогда возможно из каждого следующего уравнения, образуя диагональный элемент, получить соответствующий член для собственного значения:

$$(F_r)_{nn} = (W_r)_n, \quad (176)$$

а из остальных членов искомую матрицу S_r

$$S_{rnm} = - \frac{F_{rnm}}{h\nu_{nm}} (1 - \delta_{nm}). \quad (177)$$

В случае вырождения, однако, из $H_0 S_0 = W_0 S_0$ еще не следует, что $|S_0| = 1$. Если, скажем, $W^0_{n+1} = W^0_{n+2} = \dots = W^0_{n+r}$, то S_0 может содержать все же и матричные элементы, которые соответствуют каким-либо переходам между состояниями $n+1, \dots, n+r$.

Второе уравнение (174) дает в таком случае систему линейных уравнений для определения S_0 и W_1 . Если сначала образовать среднее по времени значение для невозмущенного движения (это значит, что выбирают строки и колонны таким образом, что относящиеся сюда ν_{nm} исчезают), то тогда следует:

$$\bar{H}_1 S_0 = S_0 W_1 \quad (178)$$

(\bar{H}_1 — означает среднее по времени от H_1 по невозмущенному движению). Уравнение (178) можно рассматривать, как уравнение „вековых возмущений“. Относящийся к нему определитель имеет вид:

$$\begin{vmatrix} H_{1_{n+1, n+1}} - W_1 & H_{1_{n+1, n+2}} & \dots & H_{1_{n+1, n+r}} \\ H_{1_{n+2, n+1}} & H_{1_{n+2, n+2}} - W_1 & \dots & H_{1_{n+2, n+r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{1_{n+r, n+1}} & \vdots & \dots & H_{1_{n+r, n+r}} - W_1 \end{vmatrix} \quad (179)$$

Дальнейшие вычисления подобны вычислениям для невырожденных систем.

5. РЕЗОНАНС МЕЖДУ ДВУМЯ АТОМАМИ; ³¹ ФИЗИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

Пусть два атома со спектрами собственных значений W_n^I, W_n^{II} имеют одну общую собственную частоту, это значит, например, что $\nu_{nm}^I = \nu_{ik}^{II}$,

или

$$W_n^I - W_i^I = W_k^{II} - W_n^{II}. \quad (180)$$

В таком случае между обоими атомами, даже при очень слабой связи, может иметь место обмен энергиями таким образом, что атом I переходит из состояния n в состояние m и при этом отдает энергию $h\nu_{nm}$, а атом II посредством перехода из k -того состояния в i -тое получает эту энергию $h\nu_{nm} = h\nu_{ik}$ (и обратно). Если назвать энергию взаимодействия обоих атомов через H^I , и рассматривать систему как „невозмущенную“, когда оба атома разделены, а взаимодействие принять за возмущение, то тогда невозмущенная система вырождена:

$$W_n^I + W_k^{II} = W_m^I + W_i^{II}. \quad (181)$$

Соответствующий взаимодействию определитель векового уравнения согласно (179) будет:

$$\begin{vmatrix} H_{nk}^{I}; nk - W^I & H_{nk, mi}^I - W^I \\ H_{mi}^{I}; nk & H_{mi, mi}^I - W^I \end{vmatrix} = 0. \quad (182)$$

Пусть оба его решения обозначены через W_1^I и W_2^I , а соответствующие нормированные решения линейных уравнений (182) будут:

для

$$W_1^I: S_{nk, 1} = a_{nk, 1} e^{i\alpha_1}; S_{mi, 1} = a_{mi, 1} e^{i\alpha_1} \quad (183)$$

для

$$W_2^I: S_{nk, 2} = a_{nk, 2} e^{i\alpha_2}; S_{mi, 2} = a_{mi, 2} e^{i\alpha_2}.$$

Величины α_1 и α_2 — произвольные фазовые коэффициенты.

В частном случае, когда оба атома I и II одинаковы (т. е. $m = k$ и $i = n$), $H_{nk; kn}^I = H_{kn; nk}^I$ (и поэтому вещественно); далее $H_{nk; nk}^I = H_{kn; kn}^I$ и

$$W_{1,2}^I = H_{nk; nk} \pm H_{nk; kn} \quad (184)$$

матрица же a равна:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & nk & kn \\
 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (185)$$

Тем самым влияние возмущения вследствие взаимодействия правильно учтено в первом приближении для собственного значения и в нулевом приближении для собственных функций.

Чтобы снова от математики перейти к физике, можно, например, задать вопрос об энергии атома I, как функции времени. Между двумя связанными осцилляторами с одинаковой частотой имеет место по классической теории гармонический, периодический обмен энергии, частота

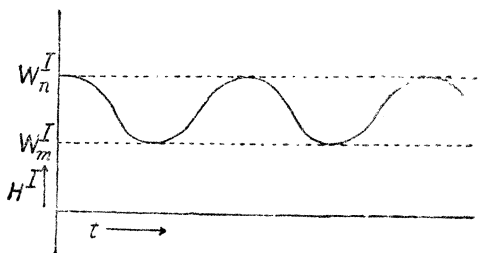


Рис. 21.

которого пропорциональна связывающей силе. Таким образом, энергия одного из осцилляторов будет примерно представлена рисунком 21. Напротив, в квантовой теории нужно ожидать, что энергия атома I имеет или значение W_n^I или значение W_m^I , причем частота переходов зависит от силы связи (рис. 22). Во всяком случае, в квантовой теории нельзя вычислить ход кривой $H^I(t)$, его также никогда нельзя определить экспериментально. Однако, полученные до сих пор

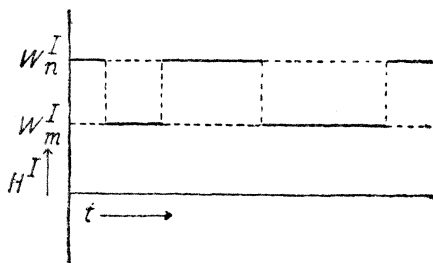


Рис. 22.

правила для физической интерпретации квантовой механики дают возможность вычислить среднее по времени от $H^I(t)$ или средний квадрат флуктуации $H^I(t)$, или среднее по времени от какой-либо функции $f(H^I)$ от H^I .

Для состояния I, скажем, следует:

$$\overline{f(H^1)} = [f(H^1)]_{11} = S_{nk, 1}^* f_{nk; nk} S_{nk, 1} + S_{mi, 1}^* f_{mi, mi} S_{mi, 1} = |S_{nk, 1}|^2 \cdot f(W_n^1) + |S_{mi, 1}|^2 f(W_m^1). \quad (186)$$

Это уравнение эквивалентно с зависимостью между H^1 и t типа, изображенного на рис. 22, если $|S_{nk, 1}|^2$ и, соответственно, $|S_{mi, 1}|^2$ рассматривать как вероятности найти всю систему в конфигурации nk или, соответственно, mi . Представляется возможным обобщить эту физическую интерпретацию матриц преобразования и рассматривать

$$|S_{a' b'}|^2 \quad (187)$$

как вероятность того, что будет найдено значение a' величины a , если известно, что величина b приняла в системе значение b' . К этому физическому толкованию, однако, нужно добавить существенное условие, что рассматриваемый опыт действительно позволяет определить значения для a . Это условие, кажущееся сначала тривиальным, существенно, однако, так как какое-либо применение толкования (187) без учета опытов, ведущих к измерению a' , дает тотчас же повод к логическим противоречиям.

Если произвести одно за другим сначала преобразование от a к b и затем от b к c , то согласно умножению матриц будет иметь место

$$S_{a' c'} = \sum_{b'} S_{a' b'} S_{b' c'}, \quad (188)$$

т. е. совершенно независимо от c „амплитуда вероятности“ $S_{a' c'}$ всегда может быть представлена как линейная функция от $S_{a' b'}$. Следовательно, амплитуда вероятности $S_{a'}$ для нахождения значения a' даже в самом общем случае является всегда линейной функцией от матриц преобразования $S_{a' b'}$; в частности, можно, например, положить

$$S_{a'} = \sum_w S_{a' w'} c_{w'}, \quad (189)$$

где $S_{a' w'}$ обозначает матрицу преобразования для энергии W' , а $c_{w'}$ какую-либо постоянную.

В то время, как вероятности $|S_{a' w'}|^2$ всегда независимы от времени, потому что они относятся к стационарному состоянию W' , это не является, вообще, необходимым для $|S_{a'}|^2$. Зависимость от времени $S_{a'}$ может быть найдена путем следующего рассуждения.

Согласно (142) матричный элемент f_{ik} имеет зависящий от времени множитель $e^{2\pi i \nu_{ik} t} = e^{\frac{2\pi i}{h}(W_i - W_k)t}$

Далее, имеет место

$$f_{ik} = \sum_{a'a''} S_{a'i}^* f_{a'a''} S_{a''k}. \quad (190)$$

Таким образом, мы получим правильную зависимость от времени, если введем в $S_{a'i}$ множитель $e^{-\frac{2\pi i}{h} W_i t}$. Так как до сих пор в $S_{a'i}$ постоянно входил один произвольный фазовый множитель абсолютного значения 1, то в будущем мы будем понимать под $S_{a'i}$ матрицу преобразования, включающую также зависящий от времени множитель. Амплитуда вероятности самого общего вида $S_{a'}$ удовлетворяет тогда согласно (161) уравнению:

$$\sum_{a''} H_{a'a''} S_{a''} + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S_{a'}}{\partial t} = 0. \quad (191)$$

Если выберем специально $a = q$, то получим:

$$H\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}, q\right) \psi + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (192)$$

т. е. волновое уравнение Шредингера.

Чтобы дать иллюстрацию (191), мы снова рассмотрим пример двух связанных атомов. Пусть при измерении в момент времени $t=0$ атом I находится в состоянии n , а атом II в k . Для $t=0$ таким образом $|S_{nk}|=1$ и $|S_{mi}|=0$. Эти начальные условия мы вводим в уравнение (191) и находим по (183) ($a_{n,k,1}$ и т. д. не зависят от времени, a_1, a_2 должны зависеть от времени):

$$\left. \begin{aligned} S_{nk} &= \frac{1}{a_{nk,1} a_{mi,2} - a_{ni,1} a_{nk,2}} \left(\begin{array}{c} a_{mi,2} a_{nk,1} e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1 t} \\ - a_{mi,1} a_{nk,2} e^{-\frac{2\pi i}{h} W_2 t} \end{array} \right) \\ S_{mi} &= \frac{a_{mi,2} a_{mi,1}}{a_{nk,1} a_{mi,2} - a_{mi,1} a_{nk,2}} \left(\begin{array}{c} e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1 t} \\ - e^{-\frac{2\pi i}{h} W_2 t} \end{array} \right). \end{aligned} \right\} (193)$$

Для частного случая одинаковых атомов, принимая во внимание (185), имеем:

$$\begin{aligned} S_{nk} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1 t} & + e^{-\frac{2\pi i}{h} W_2 t} \\ e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1 t} & - e^{-\frac{2\pi i}{h} W_2 t} \end{pmatrix} \\ S_{kn} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1 t} & - e^{-\frac{2\pi i}{h} W_2 t} \\ e^{-\frac{2\pi i}{h} W_1 t} & + e^{-\frac{2\pi i}{h} W_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (194)$$

Отсюда для вероятностей:

$$\begin{aligned} |S_{nk}|^2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{h} (W_1 - W_2) t \right] \\ |S_{kn}|^2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{h} (W_1 - W_2) t \right] \end{aligned} \quad (195)$$

Эти формулы дают вероятности найти „ nk “ или „ kn “ как функции времени. Так как разности $W_1 - W_2$ малы, порядка энергии взаимодействия между атомами, то вероятность изменяется только медленно. Спустя короткое время после первого измерения (т. е. для очень малых значений t) весьма вероятно вновь найти конфигурацию nk . Если же между первым и вторым измерением проходит точно время $T = \frac{1}{2} \frac{h}{W_1 - W_2}$, то с определенностью будет найдена конфигурация kn . Все эти рассуждения справедливы только тогда, когда за время между двумя измерениями система действительно остается невозмущенной, т. е. действительно подчиняется уравнению (191). Несмотря на то, что это условие опять-таки тривиально, оно все же здесь особенно подчеркнуто, как имеющее решающее значение для свободного от противоречий построения теории.

Только что данное толкование матриц преобразования, как функций вероятностей, дает полную схему для применения математических методов квантовой механики ко всем физическим проблемам.

6. КОРПУСКУЛЯРНАЯ КАРТИНА ИЗЛУЧЕНИЯ.

Согласно эйнштейновской теории световых квантов можно представить световое излучение, как действие быстро-летящих частиц. Скорость их всегда равна c . Между энергией E и импульсом p световых квантов существует соотношение

$$E = c \cdot p. \quad (196)$$

Цвет света определяется энергией E .

Световые кванты могут возникать и исчезать, следовательно их число, в противоположность представлениям корпускулярной теории материи, переменен. Между отдельными световыми квантами (поскольку не принято во внимание тяготение) нет никакого взаимодействия, но взаимодействие между световыми квантами и материей существенно для явлений поглощения, испускания и дисперсии излучения. Так как это взаимодействие сформулировано в классической теории только при применении волнового представления об электромагнитном излучении, то представляется целесообразным перейти к квантовой теории излучения исходя из волновой картины.

7. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА.

Мы рассмотрим систему n совершенно одинаковых, друг от друга неотличимых частиц (электронов, световых квантов). Ради простоты мы предположим, что система обладает только одним дискретным спектром собственных значений, затем отвлечемся пока от взаимодействия частиц между собой. Задача тогда может быть рассмотрена таким образом, что сначала определяются состояния и соответствующие им собственные функции $\psi_{\alpha}(r)$ отдельной частицы и затем уже спрашивают о распределении n частиц по этим состояниям. Чтобы высказать утверждения о статистическом распределении частиц по различным состояниям, нужно установить сначала априорные вероятности этих состояний или установить, лучше, каковы могут быть возможные состояния всей системы.

В классической статистике (больцманновская статистика) можно было распределить n частиц по n различным состояниям $n!$ различными способами. Этот факт имеет то следствие, что в квантовой теории каждому распределению n частиц по n различным состояниям соответствует $n!$ раз вырожденный терм всей системы. Относящиеся сюда $n!$ линейно-независимых собственных функций получим, производя в выражении:

$$\psi_{\alpha_1}(r_{\beta_1}) \psi_{\alpha_2}(r_{\beta_2}) \dots \psi_{\alpha_n}(r_{\beta_n}) \quad (197)$$

$n!$ перестановок $r_{\beta_{\chi}}$ при неизменных α_i .

Вместо функций (197) можно, как известно, для описания нашей задачи n тел применить также какую-либо систему $n!$ линейно-независимых линейных комбинаций (197).

К подобной системе собственных функций мы придем, например, если, согласно § 4, попробуем рассматривать взаимодействие между частицами как возмущение. Из всех таким образом полу-

чающихся $n!$ линейных комбинаций приведем здесь две особенно просто построенные:

$$\sum_{\text{по всем перестановкам}} \psi_{\alpha_1}(r_1) \psi_{\alpha_2}(r_2) \dots \psi_{\alpha_n}(r_n) \quad (198)$$

и определитель

$$|\psi_{\alpha_i}(r_\lambda)| \quad i, \lambda = 1, 2 \dots n. \quad (199)$$

Выражение (198) остается неизменным при какой-либо перестановке двух частиц и обозначается как симметричная собственная функция системы; выражение (199) изменяет при перестановке двух частиц только свой знак и называется антисимметричной собственной функцией.³² Если мы предположим, что ψ_α нормированы, и потребуем, чтобы и собственные функции всей системы были также нормированы на 1, то легко показать, что (198) и, соответственно, (199) нужно умножить на $\sqrt{\frac{1}{n!}}$

Мы поясним сказанное на простейшем примере $n = 2$. Тогда состоянию, при котором одна частица находится в состоянии α_1 , а другая в состоянии α_2 , принадлежит дважды вырожденный терм и две собственные функции.

$$\begin{aligned} \psi_s(1,2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{\alpha_1}(r_1) \psi_{\alpha_2}(r_2) + \psi_{\alpha_1}(r_2) \psi_{\alpha_2}(r_1) \} \\ \psi_a(1,2) &= \frac{1}{2} \{ \psi_{\alpha_1}(r_1) \psi_{\alpha_2}(r_2) - \psi_{\alpha_1}(r_2) \psi_{\alpha_2}(r_1) \}. \end{aligned}$$

Сначала можно легко показать, что термы с симметричными и термы с антисимметричными собственными функциями не комбинируют между собой. Именно, вероятность для таких переходов дается всегда матричным элементом вида:

$$\int f(1,2) \psi_s(1,2) \psi_a(1,2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (200)$$

причем $f(1,2)$ есть функция, которая не должна изменяться при перестановке обеих частиц, так как последние не должны различаться между собой. Если мы переставляем в (200) оба электрона, то, очевидно, значение интеграла не должно измениться, так как в нем будут изменены только обозначения переменных интегрирования; с другой стороны, при этом изменяется знак у $\psi_a(1,2)$, в то время как все другие величины под знаком интеграла остаются неизменными. Таким образом (200) должно исчезнуть.

Подробное математическое исследование на основании теории

представлений ³⁶ показывает, что наш частный результат может быть обобщен следующим путем.

Термы системы, состоящей из n частиц, можно всегда разложить на отдельные системы, таким образом, что только термы каждой отдельной системы комбинируют между собою. В частности, получаются всегда две такие системы термов, собственные функции которых при перестановке каких-либо двух частиц ведут себя симметрично или антисимметрично.

Этот результат сохраняет силу при любом взаимодействии частиц, его вывод предполагает только, что это взаимодействие есть симметричная функция от координат электронов.

Факт невозможности комбинаций двух различных систем термов между собою дает возможность того, что одна отдельная система термов сама по себе может быть физически реализована.

Рассмотрим, например, отдельно симметричную систему термов. Каждому определенному распределению частиц по отдельным состояниям одной частицы — если мы снова пренебрегаем взаимодействием — соответствует в этой системе термов только одна единственная собственная функция. Представленные в симметричной системе термов возможности соответствуют состояниям, различимым в Бозе-эйнштейновской ³³ статистике.

В системе термов, относящейся к антисимметричным собственным функциям, последние исчезают всегда, когда две частицы находятся в одном и том же состоянии. Это есть квантовомеханическое выражение запрета Паули ³⁴ — для эквивалентных орбит электронов и протонов. Отбор термов в антисимметричной системе соответствует статистике Ферми-Дирака. ³⁵

Квантовая статистика выбирает поэтому из возможного множества термов некоторую систему термов с симметричными или антисимметричными собственными функциями, как единственно осуществленную, и предписывает каждому терму так выбранной системы одинаковую априорную вероятность. Первый случай соответствует статистике Бозе-Эйнштейна, справедливой для световых квантов, последний — статистике Паули-Ферми-Дирака. Особенно следует подчеркнуть, что такая формулировка остается справедливой при любом взаимодействии частиц.

При применении принципа Паули к электронам или протонам нужно обратить внимание на то, что в $\psi_\alpha(r_\chi)$ величина r_χ помимо трех пространственных координат χ -той частицы представляет также и четвертую переменную, описывающую спин и могущую принимать только значения $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

О формулировке квантовой статистики в квантовой механике волновой картины речь будет идти ниже.

8. ВОЛНОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТЕРИИ И ИЗЛУЧЕНИЯ; КЛАС- СИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ.

В этом параграфе будет идти речь о световых волнах и тех волнах материи, которые могут быть приписаны отрицательным электронам. Волны, приписываемые протонам, могут быть рассмотрены затем подобным же образом. Далее, мы не будем принимать во внимание теорию относительности и построим, т. о. по примеру Шредингера, нерелятивистскую волновую теорию. В этой теории будем тогда последовательно принимать во внимание в первом приближении только электростатические действия, пренебрегая магнитными эффектами и запаздыванием.

Волновое уравнение для электронных волн получается наиболее просто из шредингеровского дифференциального уравнения (192) в конфигурационном пространстве. Именно, для случая одного единственного электрона это уравнение (192) переходит в трехмерное волновое уравнение. Кажется целесообразным поэтому — сперва в виде пробы — рассматривать его, как классическое, т. е. пространственно-временное волновое уравнение материи. Для одного электрона в корпускулярном представлении энергия состоит из кинетической:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

и потенциальной:

$$E_{\text{pot}} = -eV,$$

где V электростатический потенциал. В этой нерелятивистской теории последовательно пренебрегаем магнитными силами и их потенциалами. Таким образом, искомое волновое уравнение согласно (169) будет:

$$+\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi + eV\psi - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \quad (201a)$$

и комплексно сопряженное к нему:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi^* + eV\psi^* + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = 0 \quad (201b)$$

$$\left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

(μ = покоящаяся масса электрона, $-e$ его заряд).

Схема, характеризуемая этими уравнениями, при существенном изменении принятой до сих пор физической интерпретации может

быть рассматриваема как „классическая“ волновая теория. Этой схеме может быть сопоставлена (так как она содержит только функции от x , y , z и t), как и максвеллевским уравнениям, наглядная пространственно-временная картина. Об электронах тогда в этой теории нет больше речи, e и μ суть только универсальные постоянные волнового уравнения. Несмотря на то, что уравнения (201 а и б) получены из теории одноэлектронной проблемы в корпускулярном представлении, они никоим образом в дальнейшем не должны иметь место скажем „для одного электрона“, это было бы ведь лишено смысла в волновом представлении, но должны явиться универсальными для „волн отрицательного заряда“. Отсюда непосредственно следует, что в этой теории (в противоположность квантовой теории проблемы одного электрона) потенциал V не представляет собой только потенциал внешних сил, но включает также теперь и часть, зависящую от самих волн материи, т. е. обратное действие волн отрицательного заряда на самих себя. Эта теория, конечно, так же мало, как и максвеллевская, будет согласована с экспериментами в пределах атома, но она имеет без сомнения большее эвристическое значение, как аналог в духе принципа соответствия квантовой теории волн.

Рассмотрим сначала частный случай малых волновых амплитуд, т. е. очень незначительной плотности материи и отсутствия внешних сил. В этом случае V исчезает в достаточном приближении и уравнение (201) гласит:

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0.$$

Его решением будут какие-либо плоские волны вида:

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Et)}, \quad (202)$$

если между E и p_x , p_y , p_z имеет место соотношение:

$$E = \frac{1}{2\mu} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{1}{2\mu} p^2$$

Направление нормали волны дается отношениями $\frac{p_x}{p}$, $\frac{p_y}{p}$, $\frac{p_z}{p}$,
длина волны равна:

$$\lambda = \frac{\hbar}{p}, \text{ а частота } \nu = \frac{E}{\hbar}; \quad (203)$$

фазовая скорость волн равна:

$$v_{\varphi} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2\mu}$$

и наконец, групповая скорость v_g , согласно элементарным законам оптики, будет

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{\mu} = \frac{h}{\lambda\mu}. \quad (204)$$

Уравнения (202) и (203) согласно де Бройлю объясняют явления интерференции и диффракции волн материи очень малой плотности. Особенно зависимость (204) между групповой скоростью и длиной волны позволяет движущимся комплексам отрицательного заряда сопоставить длины волн без обхода через корпускулярное представление. Эта теория де Бройля учитывает поэтому качественно простым путем основные опыты Дэвиссона-Джермера, Томсона, Руппа и других. Аналогично этому, как известно, уже классическая механика дает удовлетворительное объяснение вильсоновским фотографиям, опытам с отклонением и проч. Несмотря на это, подобные объяснения атомных явлений посредством классических теорий нужно толковать только как указание на сходство в смысле принципа соответствия между классической и квантовой теориями; во всех количественных вопросах следует прибегать к помощи квантовой теории.

Однако, сначала рассмотрим еще несколько подробнее классическую волновую картину. Для этой цели мы сделаем следующие предположения:

$$\text{Плотность заряда } \rho = -e \psi^* \psi$$

$$\text{Плотность тока } \mathfrak{s} = -e \frac{h}{4\pi i} (\psi^* \text{grad } \psi - \psi \text{ grad } \psi^*) \quad (205)$$

$$\text{Плотность энергии } u = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \cdot \text{grad } \psi^* \text{ grad } \psi.$$

Оправдание этих предположений может быть найдено только позже, в квантовой теории волн. Все же для их пояснения могут быть выведены из (201) следующие законы сохранения:

а) сохранение заряда:

$$\frac{d}{dt} \int \rho dv = 0,$$

б) сохранение импульса:

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{s} dv = -e \int \text{grad } V \psi^* \psi dv \quad (206)$$

в) сохранение энергии:

$$\frac{d}{dt} \int u dv = \int e V \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) dv;$$

dv здесь означает элемент объема; интегралы должны быть распространены по всему пространству. При этом принято, что в бес-

конечности волновые функции достаточно быстро исчезают, так что при интегрировании по частям поверхностные интегралы отпадают. Для вывода (206a) нужно умножить уравнение (201a) на ψ^* а уравнение (201b) на ψ , вычесть одного из другого и проинтегрировать по всему пространству. Для доказательства (206 b) умножают (201a) на $\frac{\partial \psi^*}{\partial x}$, продифференцировав (201b) по x , умножив на ψ , затем одно уравнение опять вычитают из другого и интегрируют по всему пространству. Наконец для вывода (206c) умножают (201a) на $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$, (201b) на $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, складывают и снова интегрируют по всему пространству.

Помимо волн отрицательного заряда, в пространстве могут находиться еще и другие электрические заряды, например, атомные ядра, заряженные конденсаторы и т. д. Назовем соответствующую им плотность заряда ρ_0 , тогда электрический потенциал V определится из известного электростатического уравнения:

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi(\rho + \rho_0) \quad \text{или} \quad \Delta V = -4\pi(\rho + \rho_0) \quad (207)$$

Уравнения (201a,b) и (207) могут быть вместе выведены из вариационного принципа. Мы полагаем:

$$L = \left. \begin{aligned} & \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \operatorname{grad} \psi^* \operatorname{grad} \psi - \frac{h}{4\pi i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \\ & + eV\psi\psi^* - \rho_0 V + \frac{1}{8\pi} (\operatorname{grad} V)^2 \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

$$\int L \, dv \, dt = \text{экстремум}$$

Вариация ψ^* и, соответственно, ψ дает (201a) и, соответственно, (201b), вариация V дает уравнение (207).

Общая энергия системы складывается из энергии волн материи и энергии электростатического поля. Таким образом, для плотности общей энергии \mathfrak{H} получается:

$$\mathfrak{H} = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \operatorname{grad} \psi^* \operatorname{grad} \psi + \frac{1}{8\pi} (\operatorname{grad} V)^2. \quad (209)$$

Для всей системы справедлив тогда закон сохранения энергии:

$$\overline{H} = \int \mathfrak{H} \, dv = \text{const}, \quad (210)$$

если ρ_0 не зависит от времени,

Из (209), (207) и (206) следует именно :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{H}}{dt} &= \int dv \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} V \frac{\partial}{\partial t} \Delta V \right] = \\ &= \int dv \left[\frac{\partial u}{\partial t} - V \frac{\partial}{\partial t} \left(e\psi^* \psi \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (211)$$

Эта замкнутая в себе, подобно классическим теориям пространственно-временная теория поля до сих пор не содержит в себе ни одного элемента квантовой теории. Это особенно видно из того, что общий заряд системы

$$\int \rho dv = -e \int \psi^* \psi dv \quad (212)$$

может принимать любые значения, а это ведь наверно противоречит опыту. (В действительности, общий заряд всегда представляет целое кратное от $-e$.) Также значения энергии системы и собственные частоты в этой теории изменяются непрерывно. (В силу нелинейности дифференциального уравнения собственные частоты зависят от амплитуд ψ .) Несмотря на это, можно с пользой применять и эту классическую теорию поля, точно так же как классическую механику для модели атома в корпускулярной картине. Совершенно так же, как Бору и Зоммерфельду добавлением к классической механике квантовых условий вида $\int p_k dq_k = n_k h$ удалось получить качественное объяснение атомных спектров, Хартри³⁷ удалось произвести качественное вычисление атомных спектров посредством прибавки квантовых условий к только что приведенной теории поля. ¹⁾ Квантовые условия Хартри гласят: $\int \psi_k^* \psi_k dv = n_k$, где n_k целое число, а индекс k относится к собственным колебаниям волновой системы. Последовательное применение отдельных квантовых условий возможно и здесь только тогда, когда пренебрегают периодическими во времени колебаниями V ; это стоит в точной аналогии с соответственными трудностями в корпускулярной картине. Характерно, что описанная теория поля, в силу нелинейности дифференциальных уравнений, с математической точки зрения трактуется с таким же трудом, как классическая механика; во всяком случае много труднее чем квантовая теория поля или квантовая теория корпускулярной картины.

О классической теории излучения мне, пожалуй, здесь сказать нечего, — это есть хорошо известная теория Максвелла. Она не содержит никаких элементов квантовой теории; как указание на это

¹⁾ Как показал Хартри, достаточно хорошее приближение к законам квантовой теории получается, правда, только тогда, когда из уравнений исключают действие электрона на самого себя.

можно рассматривать тот факт, что $\int dv (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ изменяется непрерывно. Можно снова попытаться устранить это положение посредством квантовых условий типа Хартри, тогда энергия сможет изменяться только прерывно на величину $h\nu$, но этим мы еще не придем к квантовой теории поля.

9. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ. ³⁸

Вспомогательные математические средства для квантовой теории полей могут быть получены в полной аналогии с квантовой механикой, если предварительно классической волновой теории придать форму аналогичную гамильтоновской классической механике. Примем, что рассматриваемая классическая волновая теория может быть выведена из некоторого вариационного принципа. Пусть лагранжева функция этой проблемы содержит волновые функции

$$\psi_\alpha [\psi_\alpha = \psi_\alpha(x, y, z, t); \alpha = 1, 2 \dots f],$$

их первые производные по пространственным координатам

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

и их первые производные по времени $\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} = \dot{\psi}_\alpha$, т. е. должно иметь место:

$$\int L \left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha \right) dv dt = \text{экстремум.} \quad (213)$$

Известно, что механическая система может быть характеризована посредством принципа Гамильтона:

$$\int L(q_k, \dot{q}_k) dt = \text{экстремум.} \quad (214)$$

Чтобы получить формальное сходство между (213) и (214), мы полагаем:

$$\bar{L} \left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha \right) = \int L \left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha \right) dv. \quad (215)$$

Тогда должно иметь место:

$$\int \bar{L} \left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha \right) dt = \text{экстремум.} \quad (216)$$

В то время, как $L(q_k, \dot{q}_k)$ зависит от всех значений q_k и их производных по времени, $\bar{L} \left(\psi_\alpha, \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha \right)$ дается значениями ψ_α и $\dot{\psi}_\alpha$ во всех точках пространства. Чтобы установить аналогию между

$L(q_k, \dot{q}_k)$ и $\bar{L}\left(\psi_\alpha, \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x_i}, \dot{\psi}_\alpha\right)$, нужно, таким образом, рассматривать точку пространства P как индекс у волновой функции; тогда последняя имеет два рода значков, один прерывно изменяющийся значок α и другой непрерывно изменяющийся значок P (или правильное три таких значка, именно x, y, z). Далее, по аналогии с формулой

$$\frac{\partial L(q_i \dot{q}_i)}{\partial q_k} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{L(q_i + \delta_{ik} \Delta q, \dot{q}_i) - L(q_i \dot{q}_i)}{\Delta q} \quad (217)$$

мы определяем:

$$\frac{\delta \bar{L}\left(\psi_{\beta}^{(P')}, \frac{\partial \psi_{\beta}^{(P')}}{\partial x_i}, \dot{\psi}_{\beta}^{(P')}\right)}{\delta \psi_{\alpha}^{(P)}} = \lim_{\Delta \psi = 0} \frac{1}{\Delta \psi} \left\{ L\left(\psi_{\beta}^{(P')} + \delta_{\alpha\beta} \delta(P-P') \Delta \psi; \dot{\psi}_{\beta}^{(P')}\right) - L\left(\psi_{\beta}^{(P')}; \frac{\partial \psi_{\beta}^{(P')}}{\partial x_i}; \dot{\psi}_{\beta}^{(P')}\right) \right\} \quad (218)$$

Здесь $\delta(P-P')$ определено подобно дираковской δ -функции (ср. М § 2) формулами:

$$\begin{aligned} \delta(P-P') &= 0 \text{ для } P \neq P'; \\ \int \delta(P-P') dv_P &= 1 \text{ или } 0, \end{aligned} \quad (219)$$

смотря по тому, содержит ли объем, по которому интегрируют, точку P' или нет. Согласно (215) имеет место

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{\alpha}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i}}; \quad (220)$$

$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_{\alpha}}$ обозначает, таким образом, вариационную производную от \bar{L} .

Из (216) путем вариации получаются волновые уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\alpha}} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x_i}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\alpha}} = 0. \quad (221)$$

В виду наличия тривиального соотношения

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial \psi_{\alpha}}, \quad (222)$$

(221) переходит в

$$\frac{\delta \bar{L}}{\delta \psi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{\psi}_\alpha} = 0, \quad (223)$$

в полной аналогии с лагранжевыми уравнениями классической механики. Мы определяем поэтому канонически сопряженную к волновой функции ψ_α функцию Π_α (момент) согласно уравнению

$$\Pi_\alpha = \frac{\delta \bar{L}}{\delta \dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha} \quad (224)$$

и вводим обычным способом гамильтонову функцию

$$\bar{H} = \int dv \sum \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \bar{L}, \quad (225)$$

или

$$H = \sum_\alpha \Pi_\alpha \dot{\psi}_\alpha - L; \quad \bar{H} = \int H dv. \quad (226)$$

Тогда справедливы, как и в классической механике, соотношения:

$$\dot{\psi}_\alpha = \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_\alpha}; \quad \dot{\Pi}_\alpha = - \frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_\alpha}. \quad (227)$$

Отсюда выводится закон сохранения энергии:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = 0. \quad (228)$$

Далее, справедливы законы сохранения:

$$\frac{d}{dt} \int \sum_\alpha \Pi_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} dv = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (229)$$

именно из (227) следует:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int dv \sum_\alpha \Pi_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} &= \int dv \sum_\alpha \left[\Pi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_\alpha} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_\alpha} \right] \\ &= - \int dv \sum_\alpha \left[\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \Pi_\alpha} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\delta \bar{H}}{\delta \psi_\alpha} \right] = - \int dv \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (230)$$

Уравнения (229) выражают сохранение импульса. При выводе (228) и (229) предположено, что H не содержит никаких других функций пространственных координат или времени кроме функций

Π_α и ψ_α .

Переход от классической теории к квантовой совершается теперь без дальнейших трудностей по аналогии с М. I. Волновые функции рассматриваются как некоммутативные (непереместимые) переменные, которые могут быть представлены как матрицы (в соответственно выбранной координатной системе в гильбертовском пространстве).

К дифференциальным уравнениям (227) добавляют (ср. формулу 147) перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(P) \psi_\beta(P') - \psi_\beta(P') \Pi_\alpha(P) &= \delta_{\alpha\beta} \delta(P - P') \frac{\hbar}{2\pi i} \\ \Pi_\alpha(P) \Pi_\beta(P') - \Pi_\beta(P') \Pi_\alpha(P) &= 0 \\ \psi_\alpha(P) \psi_\beta(P') - \psi_\beta(P') \psi_\alpha(P) &= 0. \end{aligned} \quad (231)$$

В этой квантовой теории волновых полей координаты пространства времени x, y, z, t суть параметры, т. е. числа в обыкновенном смысле и поэтому они переместимы со всякой другой величиной.

Снова справедливы, как это без труда получается при помощи перестановочных соотношений, законы сохранения

$$\bar{H} = \text{const}; \quad \int \sum_\alpha \Pi_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} dv = \text{const}. \quad (232)$$

Простейший путь для математической трактовки определенной посредством (227) и (231) квантово-механической волновой задачи — это разложение волн по соответственно выбранной ортогональной системе функций:

$$\psi_\alpha = \sum_r a_r(t) u_\alpha^r(P); \quad \Pi_\alpha = \sum_r b_r(t) \cdot u_\alpha^r(P). \quad (233)$$

$u_\alpha^r(P)$ представляют произвольно избираемую ортогональную систему функций, следовательно, $u_\alpha^r(P)$ суть обыкновенные функции (с-числа, classical) пространственных координат; a_r , напротив, некоммутативные, зависящие от времени, переменные (q -числа, quantum).

Если подставить (233) в перестановочные соотношения (231), умножить обе части уравнений на $u_\alpha^s(P) u_\beta^t(P')$, проинтегрировать по P и P' и просуммировать по α и β , то тогда получают перестановочные соотношения для a и b

$$\left. \begin{aligned} b_s a_t - a_t b_s &= \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \delta_{st} \\ a_s a_t - a_t a_s &= 0 \\ b_s b_t - b_t b_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (234)$$

При этом применены условия ортогональности для u_a^r

$$\int d\nu_P \sum_a u_a^r(P) u_a^s(P) = \delta_{rs}. \quad (235)$$

Уравнения (234) вполне эквивалентны перестановочным соотношениям (231). Также и гамильтонова функция \bar{H} может быть выписана как функция от a_r и b_r . Единственное формальное различие между квантовой теорией волновых полей и квантовой механикой состоит в том, что число переменных в волновой теории бесконечно, а в корпускулярной — конечно.

10. ПРИМЕНЕНИЕ К ВОЛНАМ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЗАРЯДА.

Классическая лагранжева функция для волн отрицательного заряда согласно (208) будет:

$$L = -\frac{h}{8\pi^2\mu} \text{grad } \psi^* \text{ grad } \psi + \frac{1}{8\pi} (\text{grad } V)^2 + \\ + eV\psi^*\psi - V\rho_0 - \frac{h}{4\pi i} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* - \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \psi \right). \quad (236)$$

Если разложить V на части V_0 и V согласно соотношениям

$$\Delta V_0 = -4\pi\rho_0; \quad \Delta V_1 = 4\pi e\psi^*\psi, \quad (237)$$

то можно, прибавляя полные пространственные или временные дифференциалы, преобразовать L и привести ее к следующему виду:

$$L = -\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \text{grad } \psi^* \text{ grad } \psi - \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} \psi^* + \\ + \frac{1}{8\pi} (\text{grad } V_1)^2 + e(V_0 + V_1) \psi^*\psi. \quad (238)$$

Здесь выброшены аддитивные постоянные, зависящие от времени, которые содержат только ρ_0 ; поэтому в величине L из (238) должны варьироваться еще только ψ , ψ^* и V_1 .

Производная по времени от V_1 не входит в (238), так что V_1 невозможно рассматривать, как самостоятельную волновую функцию в смысле предыдущего параграфа, ибо, в противном случае, исчезла бы функция, канонически сопряженная с V_1 (момент) и было бы невозможно введение перестановочных соотношений согласно (231). Простейший выход из этого затруднения следующий: полученное посредством вариации V_1 волновое уравнение нужно рассматривать

как дополнительное условие и при его помощи выразить V_1 как функцию от ψ^* и ψ .

Из

$$\Delta V_1 = 4\pi e \psi^* \psi$$

следует:

$$V_1(P) = -e \int G(PP') \psi^*(P') \psi(P') dv_{P'}. \quad (239)$$

Здесь $G(PP')$ обозначает функцию Грина области пространства, в которой происходит волновой процесс; следовательно, вообще, просто функцию $\frac{1}{r_{PP'}}$.

Тогда из (238) опять через преобразование посредством прибавления полных дифференциалов следует:

$$L = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \text{grad } \psi^* \text{ grad } \psi - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \\ + e V_0 \psi^* \psi - \frac{e^2}{2} \int dv_{P'} \psi^*(P) \psi(P) \psi^*(P') \psi(P') G(PP'). \quad (240)$$

Для канонически сопряженного к ψ момента мы находим:

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \psi^*.$$

Гамильтонова функция имеет следующий вид:

$$H = -\frac{\hbar}{2\pi i} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - L$$

и

$$\bar{H} = \int dv \left[\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \text{grad } \psi^* \text{ grad } \psi - e V_0 \psi^* \psi \right] + \\ + \frac{e^2}{2} \iint dv_P dv_{P'} G(PP') \psi^*(P) \psi(P) \psi^*(P') \psi(P'). \quad (241)$$

Переход к квантовой теории совершается посредством введения перестановочных соотношений между Π и ψ :

$$\psi(P) \psi^*(P') - \psi^*(P') \psi(P) = \delta(P - P'). \\ \psi(P) \psi(P') - \psi(P') \psi(P) = 0. \\ \psi^*(P) \psi^*(P') - \psi^*(P') \psi^*(P) = 0. \quad (242)$$

Гамильтонову функцию можно снова взять непосредственно из классической теории (241), однако классическая теория не устанавливает последовательности множителей, которая теперь важна

Таким образом, правильный вид гамильтоновой функции, поскольку это касается последовательности множителей, можно получить только из опыта.

Йордан и Клейн нашли, что правильная гамильтонова функция для волн материи гласит:

$$\bar{H} = \int dv \left[\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \text{grad } \psi^* \text{grad } \psi - eV_0 \psi^* \psi \right] + \frac{e^2}{2} \iint dv_P dv_{P'} G(PP') \psi^*(P) \psi^*(P') \psi(P) \psi(P'). \quad (243)$$

Нужно еще заметить, что утверждение: ψ^* должно быть комплексно сопряжено с ψ , требует некоторой осторожности. Если, например, ψ дано как функция от эрмитовых матриц, то переход от ψ и ψ^* совершается не только посредством замены i на $-i$, но в силу эрмитового характера матриц должна быть изменена и последовательность множителей [имеет место: $(pq)^* = q^* \cdot p^*$].

Также и в квантовой теории волн материи полный заряд материи $-e \int dv \psi^* \psi$ не зависит от времени; это доказывается наипростейшим образом тем, что он переместим с H . Покажем теперь, что собственные значения матрицы $\int dv \psi^* \psi$ будут положительные целые числа, как это требует опыт. Согласно с (233) полагаем:

$$\psi = \sum a_r u_r(P); \quad \psi^* = \sum a_r^* u_r^*(P); \quad \int u_r u_s^* dv = \delta_{rs}; \quad (244)$$

тогда из (242) следует:

$$\left. \begin{aligned} a_r a_s^* - a_s^* a_r &= \delta_{sr} \\ a_r a_s - a_s a_r &= 0 \\ a_r^* a_s^* - a_s^* a_r^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (245)$$

Эти уравнения удовлетворяются посредством подстановок

$$a_r = e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_r} N_r \frac{1}{2}; \quad a_r^* = N_r \frac{1}{2} e^{+\frac{2\pi i}{h} \theta_r}, \quad (246)$$

где N_r и θ_r эрмитовы операторы, удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_r} f(N_r) = f(N_r + 1) e^{-\frac{2\pi i}{h} \theta_r}. \quad (247)$$

Собственные значения матрицы N_r суть положительные целые числа. Далее, из (246) следует

$$\int dv \psi^* \psi = \int dv \sum_{rs} a_r^* a_s u_r^* u_s = \sum a_r^* a_r = \sum N_r. \quad (248)$$

Таким образом квантовая теория волн материи без труда объясняет тот факт, что заряд всегда есть целое кратное основной единицы. Правда, она не смогла выяснить, почему существует только одна такая основная единица вполне определенной величины. Квантовые условия Хартри являются аналогом перестановочных соотношений (242) в духе принципа соответствия. Так как $\sum N_r$ есть постоянная интеграции уравнения (227), то можно рассматривать специально те стационарные состояния системы, для которых эта сумма имеет значение N .

Впрочем $\sum N_r$ остается постоянной даже тогда, когда V_0 зависит от времени. Иордан и Клейн доказали, что решения (243) для случая $\sum N_r = N$ математически и физически эквивалентны решениям проблемы N электронов в корпускулярной теории, полученным в М 2, но, правда, не *всем* решениям этой проблемы; напротив, из возможных решений должны быть выбраны только те, в которых функция преобразования ψ симметрична относительно координат электронов. Эти решения образуют замкнутую систему термов, а именно такую, которая соответствует статистике Бозе-Эйнштейна. Из квантовой теории волн материи, т. е. из перестановочных соотношений (242) следует, таким образом, Бозе-эйнштейновская статистика для соответственной корпускулярной картины. Но перестановочные соотношения (242) представляют только одну частную возможность для квантовой теории волновых полей. Другая равноправная возможность получается, если во всех перестановочных соотношениях отрицательный знак заменить положительным

$$\left. \begin{aligned} \psi(P) \psi^*(P') + \psi^*(P') \psi(P) &= \delta(P - P') \\ \psi(P) \psi(P') + \psi(P') \psi(P) &= 0 \\ \psi^*(P) \psi^*(P') + \psi^*(P') \psi^*(P) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

Согласно Иордану и Вигнеру полученной таким способом квантовой теории волн материи соответствуют те решения шредингеровского уравнения в корпускулярной теории, функция преобразования которых антисимметрична относительно координат электронов. Это значит, что перестановочные соотношения (249) приводят к принципу Паули и соответственно к Ферми-дираковской статистике для корпускулярной картины.

11. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КВАНТОВЫХ ТЕОРИЙ КОРПУСКУЛЯРНОЙ И ВОЛНОВОЙ КАРТИН.

Центральной проблемой квантовой теории является факт, что корпускулярная и волновая картины представляют две различные

формы явлений одной и той же физической реальности. Удовлетворительно, что и в математическом аппарате теории имеется полная аналогия с только что рассмотренной двойственностью природы атомных явлений. Аналогия заключается в том, что одна и та же математическая схема может быть интерпретирована или как квантовая теория корпускулярной картины, или как квантовая теория волновой картины.

Мы проведем доказательство в общем виде, не ограничиваясь случаем некоторой определенной гамильтоновой функции. Шредингеровское уравнение корпускулярной теории должно иметь следующий вид:

$$\left\{ \sum_n O^n + \sum_{n>m} O^{nm} + \dots + \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right\} \varphi(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0 \quad (250)$$

Здесь O^n представляет собой оператор, который действует на пространственные координаты одной частицы (n -той), O^{nm} на пространственные координаты двух частиц (n -той и m -той) и т. д.

Пусть далее задана система ортогональных функций $u_r(r)$, по которым может быть разложена каждая, имеющая физический смысл функция координат трехмерного пространства, удовлетворяющая граничным условиям. Тогда $\varphi(r_1 \dots r_N)$ может быть разложена по произведениям этих ортогональных функций:

$$\varphi(r_1 \dots r_N) = \sum_{r_1 \dots r_N} b(r_1 r_2 \dots r_N \cdot t) u_{r_1}(r_1) u_{r_2}(r_2) \dots u_{r_N}(r_N) \quad (251)$$

Величина $|b^2|$ может быть рассматриваема, как вероятность найти электрон (1) в состоянии r_1 , электрон (2) в состоянии r_2 и т. д.

Подставим это значение (251) для φ в (250), умножим левую уравнения (250) на $u_{s_1}(r_1) u_{s_2}(r_2) \dots u_{s_N}(r_N)$ и проинтегрируем по $r_1, r_2 \dots r_N$, тогда, в силу условий ортогональности, получим:

$$0 = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} b(s_1 s_2 \dots s_N) + \sum_{n, r_n} \sum O_{s_n, r_n}^n b(s_1 \dots s_n \dots s_N) + \sum_{n>m} \sum_{r_n, r_m} O_{s_n, s_m}^{nm} b(s_1 \dots r_n \dots r_m \dots s_N) + \dots \quad (252)$$

Здесь O_{s_n, r_n}^n и, соответственно, O_{s_n, s_m}^{nm} означают матричные элементы соответствующих операторов в координатной системе, характеризуемой ортогональными функциями u_r . В силу симметрии гамильтоновой функции относительно частиц, численные значения соответственных матричных элементов зависят только от букв r, s ,

но не от n или m . Так как величины $b(s_1 \dots s_N)$ в случае Бозе-Эйнштейновской статистики симметричны относительно квантовых чисел частиц, то можно как аргументы применить также числа N_r частиц в состоянии r . Так как априорная вероятность найти N_1 частиц в состоянии 1, N_2 частиц в состоянии 2 и т. д. дается через $\frac{N!}{N_1! N_2!} \dots$, то удобно ввести:

$$b(N_1 N_2 \dots) = \left(\frac{N!}{N_1! N_2!} \dots \right)^{\frac{1}{2}} b(r_1, r_2 \dots) \quad (252a)$$

Введем далее, согласно (247), оператор $e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r}$, который переводит N_r в $N_r + 1$.

Тогда из (252) следует, после суммирования по n и m ,

$$0 = \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s,r} N_s O_{s,r} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (\theta_s - \theta_r)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss', rr'} N_s (N_{s'} - \delta_{ss'}) O_{ss', rr'} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} + \dots \right\} \cdot \\ \cdot \left(\frac{N_1! N_2!}{N!} \dots \right)^{\frac{1}{2}} b(N_1 \dots) \quad (253)$$

Умножая на $\left(\frac{N!}{N_1! \dots} \right)^{\frac{1}{2}}$ с левой стороны и перемещая операторы $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta}$ направо, получим окончательно:

$$0 = \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s,r} N_s^{\frac{1}{2}} \cdot (N_r - \delta_{rs} + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot O_{s,r} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (\theta_s - \theta_r)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss', rr'} N_s^{\frac{1}{2}} (N_{s'} - \delta_{ss'})^{\frac{1}{2}} (N_r + 1 - \delta_{rs} - \delta_{rs'})^{\frac{1}{2}} \cdot \right. \\ \left. \cdot (N_{r'} + 1 + \delta_{rr'} - \delta_{r's} - \delta_{r's'})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} + \right. \\ \left. + \dots \right\} b(N_1 \dots) \quad (254)$$

С другой стороны гамильтонова функция волновой теории, принадлежащая к уравнению (250) корпускулярной теории, есть

$$\bar{H} = \int d\nu_P \psi_P^* O^P \psi_P + \frac{1}{2} \int \int d\nu_P d\nu_{P'} \psi_P^* \psi_{P'}^* O^{PP'} \psi_{P'} \psi_P \dots \quad (255)$$

Отсюда, согласно уравнению (244), получается:

$$\bar{H} = \sum_{sr} a_s^* a_r O_{sr} + \frac{1}{2} \sum_{ss', rr'} a_s^* a_{s'}^* a_r a_{r'} O_{ss' rr'} + \dots$$

Подставляя (246) в уравнение

$$\bar{H}S + \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} S = 0,$$

получаем:

$$0 = \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{sr} N_s \frac{1}{2} O_{sr} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\theta_s - \theta_r)} N_r \frac{1}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss', rr'} N_s \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_s} N_{s'} \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_{s'}} O_{ss' rr'} e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_r} N_r \frac{1}{2} \cdot \right. \\ \left. e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \theta_{r'}} \cdot N_{r'} \frac{1}{2} + \dots \right\} S(N_1 N_2 \dots)$$

Если снова сместить все операторы $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \theta}$ направо, то получается:

$$0 = \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + N_s \frac{1}{2} (N_r - \delta_{sr} + 1) \frac{1}{2} O_{sr} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\theta_s - \theta_r)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{ss', rr'} N_s \frac{1}{2} (N_{s'} - \delta_{ss'}) \frac{1}{2} (N_r + 1 - \delta_{rs'} - \delta_{rs}) \frac{1}{2} (N_{r'} + 1 + \right. \\ \left. + \delta_{rr'} - \delta_{r's} - \delta_{r's'}) \frac{1}{2} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(\theta_s + \theta_{s'} - \theta_r - \theta_{r'})} + \dots \right\} S \quad (256)$$

Это уравнение тождественно с (254), чем и доказана математическая эквивалентность корпускулярной и волновой картин. В случае справедливости принципа Паули и перестановочных соотношений (249) доказательство проводится подобным же способом.

Несмотря на то, что классические теории корпускулярной и волновой картин абсолютно различны как математически, так и физически, квантовые теории обоих представлений математически и физически тождественны.

12. ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ.

Максвеллевские уравнения получаются посредством вариации потенциалов из следующей лагранжевой функции:

$$L = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) + \Phi_{\alpha} s_{\alpha}. \quad (257)$$

Здесь s_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) обозначают плотности токов, Φ_α — максвеллевские потенциалы; $\Phi_4 = i\Phi_0$; $x_4 = ict$; поэтому L будет явно написана в функции потенциалов так:

$$L = \frac{1}{8\pi} \left[\sum_i \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} \right)^2 - \sum_{i>k} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \right)^2 \right] + \sum_\alpha \Phi_\alpha s_\alpha \quad (258)$$

(Латинские значки здесь и в последующем постоянно бегут от 1 до 3, греческие от 1 до 4.) Канонически сопряженные с Φ_i функции (моменты) по (244) будут:

$$\Pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_i} = \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{4\pi c} \mathfrak{E}_i \quad (259)$$

Так как для световых квантов справедлива статистика Бозе-Эйнштейна, то отсюда вытекают следующие перестановочные соотношения:

$$\mathfrak{E}_i(P) \Phi_\alpha(P') - \Phi_\alpha(P') \mathfrak{E}_i(P) = -2\hbar c i \delta(P - P') \delta_{i\alpha},$$

откуда после дифференцирования:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_i(P) \mathfrak{E}_k(P') - \mathfrak{E}_k(P') \mathfrak{E}_i(P) &= 0 \\ \mathfrak{H}_i(P) \mathfrak{H}_k(P') - \mathfrak{H}_k(P') \mathfrak{H}_i(P) &= 0 \\ \mathfrak{E}_1(P) \mathfrak{H}_2(P') - \mathfrak{H}_2(P') \mathfrak{E}_1(P) &= -2\hbar c i \frac{\partial \delta(P - P')}{\partial x_3(P)} \end{aligned} \quad (260)$$

и далее в круговом порядке.

Некоторую трудность представляет то обстоятельство, что Φ_0 не встречается в лагранжевой функции. Но эта трудность существенна только для перестановочных соотношений потенциалов с составляющими напряжения поля и не касается перестановочных соотношений (260).

Если Φ_α разложить по соответственно выбранной системе ортогональных функций (например, стоячие колебания в некотором сосуде), то энергия, относящаяся к собственному колебанию частоты ν , выразится как целое кратное $\hbar\nu$; тогда можно числа световых квантов в каждом состоянии собственного колебания рассматривать как переменные системы, как это сделал Дирак в своей теории излучения, и таким образом развивать далее корпускулярную теорию.

Дополнения к русскому изданию.

1. К выводу соотношений неопределенности (II, § 1).

§ 1. Всякое волновое поле классическая оптика рассматривает состоящим из некоторых элементарных образований — элементарных пучков лучей. Число элементарных пучков лучей равно числу степеней свободы данного волнового образования или, математически, числу независимых членов при гармоническом анализе, т. е. при разложении поля в ряд Фурье на плоские монохроматические волны. Это число совпадает также с числом собственных независимых колебаний данного волнового поля.

Элементарный пучок, изучавшийся в частности Дебаем и Лауе¹⁾, является некоторой индивидуальностью, своего рода атомом, в том смысле, что он означает нижнюю границу различимости свойств волнового образования.

Число степеней свободы поля стоит в тесной связи с возможностью различить составные части волнового образования или пакета, т. е. с понятием разрешающей силы в оптике. Действительно, две точки различимы только тогда, когда расстояние между ними $\Delta\xi$ будет порядка длины волны λ , деленной на угол пучка лучей, сведенных линзой или микроскопом; т. е. [см. формулу текста (21)]

$$\Delta\xi \sim \frac{\lambda}{\Delta\alpha} \quad (1)$$

(в знаменателе в сущности должно стоять хорошо известное в оптике выражение $n \sin \Delta\alpha$; здесь же у нас $n = 1$, а $\sin \Delta\alpha \sim \Delta\alpha$). Наименьшая площадка Δf , которая может быть изображена не как точка, будет порядка:

$$\Delta f \sim \Delta\xi^2 \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\alpha^2} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega \cos \theta}, \quad (2)$$

¹⁾ M. v. Laue, Ann. d. Phys. 44, 1197, 1914; см. A. Landé, статья в Handbuch d. Phys.

²⁾ Анализ этого оптического соотношения в связи с определением положения электрона см. K. F. v. Weizsäcker, ZS f. Phys. 70, 114, 1931.

где $\Delta\Omega$ телесный угол, и последнее приближенное равенство имеет место в том случае, если нормаль к Δf образует с направлением лучей угол $\theta \sim 0$. Таким образом всякая поверхность f составлена из $Z = \frac{f}{\Delta f}$ независимых элементарных, могущих быть изображенными в конечном виде (не как точки) площадок. Это последнее число, существенное очевидно для разрешающей силы, равно числу степеней свободы пучка лучей, выходящего от f . Действительно, суммируя по всем углам и по всем площадкам, т. е. по всей поверхности сосуда, в котором находится волновое поле или излучение, имеем:

$$Z = \sum_{\Delta} Z = \sum \frac{f}{\Delta f} = \frac{\Sigma f \Delta\Omega \cos \theta}{\lambda^2} = \frac{\Sigma f \Delta\Omega \cos \theta v^2}{c^2}. \quad (3)$$

С другой стороны, если длина волнового пакета (или сосуда, в котором заключено волновое поле) конечна и равна l , то пакет должен быть составлен из волн некоторого участка частот или длин волн $\Delta\nu = c\Delta \frac{1}{\lambda}$. Если длина пакета l , то в пакет войдут

волны с длиной волны $\lambda_k = \frac{l}{k}$, где k целые числа; в интервале $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ поместится k волн, где k определится из неравенств:

$$\lambda < \frac{l}{k} < \lambda + \Delta\lambda \quad \text{или} \quad \frac{l}{\lambda} > k > \frac{l}{\lambda + \Delta\lambda},$$

т. е.

$$k = l \left(\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) = l\Delta \frac{1}{\lambda} = \frac{l}{c} \Delta\nu. \quad (4)$$

Элементарное же колебание определяется одной волной, т. е. для него будет соблюдено условие:

$$\frac{l}{c} \Delta\nu = 1. \quad (4.1)$$

Перемножая Z и k , получим общее число степеней свободы F :

$$F = Zk = \frac{v^2 \Delta\nu}{c^3} l \sum f \Delta\Omega \cos \theta = \frac{v^2 \Delta\nu}{c^3} \cdot 4\pi V, \quad (5)$$

ибо $\sum \Delta\Omega = 4\pi$, а $l \sum f \cos \theta$ дает общий объем V . Как известно, этот результат не зависит от формы объема. Учтя поляризацию, т. е. множитель 2 для излучения, получим классическую формулу Рэлея-Джинса:

$$F' = 2F = \frac{8\pi v^2 \Delta\nu}{c^3} V. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) в случае волн материи или излучения (набора фотонов) дают объем фазового пространства, соответствующий интервалу частот $\Delta\nu$ (если от ν перейти к переменной импульса $p = \frac{h\nu}{c}$). Число же клеток фазового пространства получим, разделив общий объем (5) или (6) на объем каждой клетки, т. е. на h^3 .

С другой стороны, принцип неопределенности вводит нижнюю границу для произведения $\Delta p \Delta x \sim h$, что соответствует оптически соотношению:

$$\frac{\Delta\nu}{c} \Delta x \sim 1 \quad \text{или} \quad \Delta \frac{1}{\lambda} \Delta x \sim 1. \quad (7)$$

Произведение трех членов вида (7) для x, y, z соответствует одной фазовой клетке.

Каждая клетка фазового пространства соответствует одной степени свободы и в статистическом смысле дает нижнюю границу различимости. Мы видим, что к формулам неопределенности (7) можно подойти или из статистики или со стороны подсчета числа степеней свободы, т. е. числа элементарных пучков. Важно установить нижнюю границу различимости в оптическом, статистическом и т. д. смысле. В случае,

если импульс меняется по величине, то имеем формулу $\Delta \frac{1}{\lambda} \Delta x \sim 1$,

если же импульс меняется по направлению, то $\frac{\Delta\alpha}{\lambda} \Delta\xi \sim 1$, где α угол, характеризующий направление. Таким образом, формулы принципа неопределенности непосредственно примыкают к оптическим: для свега они являются простой их перепиской при помощи соотношения Эйнштейна $p = \frac{h\nu}{c}$, для волн материи же нужно учесть

соотношение де Бройля $p = \frac{h}{\lambda}$ и т. д.

Строя волновой пакет длины Δx , мы находим из анализа пакета по Фурье, что нужно взять волны из интервала волновых чисел $\Delta k = \Delta \frac{1}{\lambda}$ равного $\frac{1}{\Delta x}$; обратно, построив пакет из волн интервала $\Delta \frac{1}{\lambda}$, видим, что его длина будет порядка $\Delta x \sim \frac{1}{\Delta \frac{1}{\lambda}}$, т. е.

вне этого участка интенсивность волн весьма мала.¹⁾ Это рас-

¹⁾ Напр. J. Frenkel, Einführung in die Wellenmechanik; L. de Broglie Введение в волновую механику (печатается русский перевод).

сужление (сравни текст стр. 16 и формулу (4—1), которое тоже дает нижнюю границу различимости), конечно, весьма примыкает к предыдущим. Оно также ценно потому, что берет самые общие волновые соотношения и сразу после применения формулы де Бройля дает формулы неопределенности. Действительно, пусть некоторая функция f имеет вид:

$$f = ae^{ik_0x},$$

где a отлично от нуля и равно единице только в промежутке $-\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq \frac{\Delta x}{2}$. Имеем:

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int be^{ikx} dx;$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} e^{i(k_0 - k)x} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(k_0 - k) \frac{\Delta x}{2}}{(k_0 - k)} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(k_0 - k) \frac{\Delta x}{2}}{(k_0 - k) \frac{\Delta x}{2}}.$$
(8)

Выражения для $|b|^2$, пропорциональные интенсивностям парциальных волн, заметно отличны от нуля только в области между двумя нулями синуса, т. е. в участке

$$\Delta k \Delta x \sim 1, \tag{9}$$

если $k - k_0$ обозначим через Δk ; отсюда, полагая $\Delta k = \Delta \frac{1}{\lambda} = \Delta \frac{p}{h}$, и получаем формулу неопределенности, как было отмечено выше.

Кроме формул для ошибок импульса и координаты, аналогично, оптическим путем или построением волновых пакетов и их анализом по Фурье можно получить еще и формулу, связывающую время прохождения волнового пакета и спектральную область частот, из которых пакет составлен. Например, непосредственно формулу (4) перепишем так:

$$\frac{l}{c} \Delta \nu = \Delta t \Delta \nu, \tag{10}$$

где Δt время прохождения пакета через некоторую точку; столько членов ряда Фурье, т. е. отдельные волн, нужно для описания пакета длины l или временного протяжения $\frac{l}{c}$. Если это число приравнять единице, то мы получим соотношение между временем и частотой, выполненное для элементарного волнового пучка, т. е. получим нижнюю гранцу или условие различимости для частоты и времени:

$$\Delta\nu\Delta t \sim 1. \quad (11)$$

Формула (11), как и (1), определяет элементарный пучок лучей. Смысл этого соотношения совершенно подобен содержанию формулы $\Delta p\Delta x$: если мы имеем волновой пакет, составленный из частот области $\Delta\nu$, то его временная длина (или время прохождения через некоторую точку) будет порядка $\Delta t \sim \frac{1}{\Delta\nu}$. Например, если мы анализируем пакет некоторое время Δt , т. е. после Δt секунд от начала опыта обрезаем хвост волнового потока, то мы не сможем отличить разности частот меньше $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$. Соотношение (11) имелось уже, согласно принципу соответствия, в старой теории Бора, где частоты, соответствующие стационарным состояниям, не могли быть определены точнее, чем до $\Delta\nu$, так как стационарные состояния существовали не бесконечное время, но имели конечное время жизни Δt . Время измерений очевидно должно быть равно или больше времени жизни, т. е. будем иметь $\Delta\nu\Delta t > 1$.

Попрежнему для фотонов из формулы (11) следует после подстановки $\nu = \frac{\epsilon}{h}$, где ϵ энергия фотона

$$\frac{\Delta\epsilon}{h} \Delta t \sim 1. \quad (12)$$

Так же точно, подставляя вместо ν по де Бройлю частоту, соответствующую энергии частицы $\nu = \frac{\epsilon}{h}$, будем иметь ту же формулу (12) для точности определения энергии атома, электрона и т. д. Если же ν означает частоту перехода $\nu = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{h}$, то вместо (12) получим

$$\Delta(\epsilon_1 - \epsilon_2) \Delta t \sim h. \quad (13)$$

По Бору переход между двумя состояниями имеет такой же

индивидуальный характер, как и самое состояние ¹⁾). Ландау и Пайерлс (ZS. f. Phys. 69, 56, 1931) применили формулу (13) для определения точности в импульсе. Для свободного электрона имеем:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_1 &= v_1 \Delta p_1 \\ \Delta\varepsilon_2 &= v_2 \Delta p_2,\end{aligned}\quad (14)$$

где значок 1 означает состояние до перехода, а 2 окончательное состояние. В виду закона сохранения импульса: $\Delta p_1 = \Delta p_2$ и из (15) и (14) имеем

$$(v_1 - v_2) \Delta p \Delta t \sim h. \quad (15)$$

В релятивистском случае $v_1 - v_2$ не может быть больше c и из (15) мы получим

$$\Delta p \Delta t \sim \frac{h}{c}; \quad (16)$$

формула (16) показывает, что импульс в данном случае нельзя измерить мгновенно. В нерелятивистской же области разность скоростей может принципиально быть сколько угодно большой, так что и $\Delta p \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ (хотя как раз для больших скоростей нерелятивистская механика и непригодна).

Заметим, что соотношения неопределенности, в которые входит время, трактуются различными авторами различно. Трудность лежит по существу в том, что время в нерелятивистской теории является просто (классическим) числом (*c-number*), а не оператором (*q-number*) (квантовым числом). Для чисел никаких соотношений неопределенности нет, поэтому, вводя все же таковые для времени, мы пытаемся трактовать его как оператор, т. е. заходим в не построенную еще область.

§ 2. Шредингер (Berl. Ber., 296, 1930) дал очень простой и общий вывод формулы для произведения ошибок двух квантово-механических величин. За исходный пункт возьмем неравенство Шварца:

$$(a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + \dots + a_n a_n^*) (b_1 b_1^* + \dots + b_n b_n^*) \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|^2, \quad (13)$$

где звездочка обозначает сопряженную величину. Наглядный смысл этой формулы станет весьма ясен, если взять, например, $n = 1, 2, 3$ и положить все a и b вещественными, или же положить $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, все $a_2 \dots a_n = 0$ и все b равными 1.

¹⁾ N. Bohr. Сборник статей, цитированных на стр. 142, или по-русски в сборнике „Причинность“. E. Schrödinger, Berl. Ber. 1931 („Spezielle Relativitätstheorie und Quantenmechanik“).

В случае непрерывно меняющихся значков суммы заменяются интегралами:

$$\int f f^* dx \int g g^* dx \geq \left| \int f g dx \right|^2. \quad (14)$$

Положив здесь $f = B\psi$, $g = A\psi^*$, где A , B любые два эрмитовы оператора, а ψ любая волновая функция, получим:

$$\int \psi B^2 \psi dx \int \psi^* A^2 \psi dx \geq \left| \int \psi^* A B \psi dx \right|^2 \quad (15)$$

или $\overline{B^2 A^2} \geq \left| \overline{AB} \right|^2$, где черточка означает среднее.

Вместо правой части $\left| \overline{AB} \right|^2$ можно написать:

$$\left| \overline{AB} \right|^2 = \left(\frac{\overline{AB} + \overline{BA}}{2} \right)^2 + \left| \frac{\overline{AB} - \overline{BA}}{2} \right|^2$$

(разлагая на эрмитову симметричную и антисимметричную части и имея в виду, что среднее антисимметрической части $\frac{\overline{AB} - \overline{BA}}{2}$ чисто мнимо).

Чтобы получить еще более общее выражение, заменим A и B на $A - \bar{A}I$ и $B - \bar{B}I$, где I означает единичную матрицу. Окончательно имеем для ошибок ΔA и ΔB

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \left(\frac{\overline{AB} + \overline{BA}}{2} - \bar{A} \bar{B} \right)^2 + \left| \frac{\overline{AB} - \overline{BA}}{2} \right|^2, \quad (16)$$

$$\Delta A = \sqrt{(A - \bar{A})^2} = \sqrt{A^2 - (\bar{A})^2}.$$

Если отбросить первый член суммы справа, то неравенство будет только усилено; если к тому же взять за A и B и канонически сопряженные величины, для которых $AB - BA = \frac{h}{2\pi i}$, тогда получим формулу Гейзенберга (20), если под A и B иметь в виду импульс и координату электрона:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{h}{4\pi}. \quad (17)$$

Отметим здесь важное применение формулы (17). Взяв за A и B канонически сопряженные величины энергию и время, получим:

$$\Delta E \Delta t \sim h. \quad (18)$$

Таким образом, при измерении, длящемся время Δt , нельзя измерить энергию точнее, чем до величины $\Delta E \sim \frac{h}{\Delta t}$.

Если речь идет об энергии перехода ($E_1 - E_2$), то будет иметь место формула:

$$\Delta(E_1 - E_2) \Delta t \sim h. \quad (19)$$

Эти соотношения могут быть получены и другими методами, см. стр. 119, формулы (12) и (13).

2. Магнитный момент электрона.

Бор указал следующее применение соотношений неопределенности при рассмотрении собственного магнитного момента электрона (спина). Когда электрон находится в атоме, его магнитный момент входит как часть в магнитный момент атома и поэтому непосредственно ненаблюдаем. Спрашивается, можно ли с помощью магнитометра наблюдать магнитный момент свободного электрона? Пусть электрон находится на расстоянии l от магнитометра и создает следовательно магнитное поле

$$\frac{\mu}{l^3}, \quad (1)$$

где $\mu_0 \cong \frac{eh}{mc}$ магнитный момент электрона, равный боровскому магнетону (мы рассматриваем только порядок величин и отвлекаемся от учета направления). Но мы никогда не можем быть уверены, что электрон, положение которого известно с точностью Δl , не движется со скоростью Δv (так чтобы $\Delta l \Delta v > \frac{h}{m}$).

Движущийся же электрон создает магнитное поле величины

$$\frac{e\Delta v}{c \cdot l^2}. \quad (2)$$

Для того чтобы действие спина было наблюдаемо, нужно, чтобы поле (1) было больше, чем поле (2), т. е.

$$\frac{eh}{mcl^3} > \frac{e\Delta v}{cl^2}; \quad \frac{eh}{mcl^2} > \frac{eh}{mcl^2\Delta l}; \quad \text{или } \Delta l > l, \quad (3)$$

т. е. условие непосредственной наблюдаемости магнитного поля спина невыполнимо, так как неопределенность поля (1) будет больше, чем самое поле (ибо неопределенность в расстоянии электрона от прибора должна была быть больше его расстояния!). Это не значит, что спин свободных электронов вообще ненаблюдаем, но то, что его нельзя толковать наглядно с помощью классической механики, понятия траектории и пр.

Бор подчеркнул также, что невозможно наблюдать спин электрона методом Штерна-Герлаха. Возьмем пучок электронов, движущихся параллельно оси y в неоднородном магнитном поле H , расположенном в плоскости xz ; пусть, кроме того, для $x = 0$ $H_x = 0$. Однако вообще, вне плоскости yz имеем:

$$H_x = \frac{\partial H_x}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x, \quad (4)$$

$$\left(\text{в силу условия } \operatorname{div} H = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \text{ т. е. при } H_y = 0 \right. \\ \left. \frac{\partial H_x}{\partial x} = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \right).$$

На электрон действуют две силы: 1) сила $\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z}$ (в виду наличия спина) по направлению z и 2) лоренцова сила в направлении x : $\frac{e}{c} v_y H_z$, вне плоскости H_z .

Лоренцова сила на расстоянии Δx от оси равна

$$\frac{e}{c} v_y \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x. \quad (5)$$

Для успеха опыта Штерна-Герлаха нужно, чтобы

$$\frac{e}{c} v_y \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x \ll \frac{eh}{mc} \frac{\partial H_z}{\partial z}, \text{ т. е. } \Delta x \ll \frac{h}{mv_y} \sim \lambda, \quad (6)$$

т. е. мы находимся вне области пригодности классических механических понятий. Случай движения электронов параллельно оси x ведет к тому же результату.

Интересна, наконец, критика Бором опыта, предложенного Бриллюэном для обнаружения магнитного момента спина. Пусть электроны движутся параллельно оси z в неоднородном поле, направленном в сторону обратную их движения. Пусть $\frac{\partial H_z}{\partial z} > 0$, тогда электроны со спином, подвергаясь действию силы $-\mu_0 \frac{\partial H}{\partial z}$ (так же, как и тело, брошенное вверх), направленной в сторону z , через некоторое время остановятся и затем повернут обратно. Из $m \frac{dv_z}{dt} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z}$ для времени t получаем:

$$t = \frac{mv_0}{\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial z}}. \quad (7)$$

Таким образом, число электронов, которые мы встретим дальше отрезка $v_z t$, будет вдвое меньше, чем в случае отсутствия спина. Но, как и в предыдущем примере, нельзя осуществить поле, везде строго параллельное оси z .

Если для $x=0$ и $H_z \parallel z$, то H_x дается формулой (4) для расстояния Δx от оси x . Но электроны под действием силы H_x будут описывать круги с периодом $\tau = \frac{1}{\omega}$, где ω угловая скорость, равная $\sim \frac{eH_x}{m_0 c}$, т. е.

$$\tau = \frac{m_0 c}{e \frac{\partial H_z}{\partial z} \Delta x} . \quad (8)$$

Чтобы поворот скорости произошел от действия спина, а не под влиянием силы Лоренца, нужно, чтобы $t < \tau$, т. е.

$$\frac{m c m v_z}{e h \frac{\partial H_z}{\partial z}} < \frac{m c}{e \frac{\partial H_z \Delta x}{\partial z}} , \quad (9)$$

следовательно $m v_z \Delta x < h$ или $\Delta x < \lambda$,

т. е. опять мы находимся вне сферы действия геометрической оптики. Если бы вместо $\mu_0 \sim \frac{eh}{mc}$ мы имели бы какой-то магнитный момент μ , то, как легко видеть при $\mu \gg \mu_0$, в последнем примере, как и в других, опыты позволили бы обнаружить наличие момента.

В докладе Паули указаны и другие иллюстрации тезиса Бора о невозможности наблюдать спин в смысле применения классических механических применений о движении.

Литература: N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A, 124, 425, 1929. W. Pauli, Rapports de Congrès Solvay, 1930.

3. К подсчету флуктуаций (V, § 7).

(См. W. Heisenberg, Berichte d. Sächs. Akad. Leipzig, 83, 19/I, 1931).

Оказывается, что прежние подсчеты Борна, Йордана и автора книги на основании квантовой механики были основаны на ошибке. Выражение для среднего квадрата флуктуации энергии давалось интегралом по частотам, а подинтегральное выражение содержало члены q_j^2 пропорциональные частотам $h\nu_j$, в результате чего интеграл оказывался расходящимся. Так как речь идет о флуктуациях лучистой энергии, то можно было бы думать, что обращение упомянутого интеграла в бесконечность связано с наличием

в энергии электромагнитного поля бесконечно большой, так называемой нулевой энергии (Nullpunktenergie). Однако это не так, и трудность лежит в самом определении флуктуаций. Чтобы показать это, исследуем более простую модель, заведомо не имеющую бесконечной нулевой энергии — возьмем, именно, движение материальной точки массы t вдоль отрезка длины l , ограниченного непроницаемыми стенками.

Энергия частицы дается выражением

$$E = \frac{1}{2m} p^2, \text{ где } p = \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dx} \quad (1)$$

Собственные значения энергии и собственные функции найдутся из уравнения Шредингера

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + E\psi = 0 \quad (2)$$

с пограничными условиями: $\psi = 0$ при $\begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases}$.

Отсюда, принимая во внимание условие нормировки, получаем:

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} a_k \sin \pi \frac{x}{l} k, \quad (3)$$

$$E_k = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2l} k \right)^2,$$

где k целые числа.

Интересно наш результат получить прежде всего с помощью представления о квантованных колебаниях в обычном, в данном случае одномерном пространстве.

Для этого нужно амплитуды функции ψ считать непереместимыми операторами. Из (3) имеем:

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_1^{\infty} a_k \sin \pi \frac{x}{l} k, \quad (4)$$

где

$$a_k a_l^* - a_l^* a_k = \delta_{kl}.$$

Последнюю формулу мы написали в предположении, что у нас имеется на всем участке совокупность одинаковых частиц, удовлетво-

ряющих статистике Бозе-Эйнштейна. Согласно М (246) можно положить:

$$a_k = \Delta_k^+ N_k^{\frac{1}{2}}, \quad a_k^* = N_k^{\frac{1}{2}} \Delta_k^{-1}, \quad (5)$$

где N_k означает число частиц в состоянии k .

Для энергии небольшого участка от x_0 до x_1 , согласно определению плотности энергии М (209), имеем:

$$\left. \begin{aligned} E &= \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \\ &= \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{2}{l} \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{kn} a_k^* a_n \cos \pi \frac{x}{l} k \cos \pi \frac{x}{l} n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 nl = \\ &= \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_{kn} a_k^* a_n f_{kn}, \end{aligned} \right\} (6)$$

где

$$f_{kn} = \frac{\pi}{l^2} kn \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{l} (k+n) x_1 - \sin \frac{\pi}{l} (k+n) x_0}{k+n} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{\pi}{l} (k-n) x_1 - \sin \frac{\pi}{l} (k-n) x_0}{k-n} \right\}.$$

Среднее по времени значение энергии дается диагональным членом, т. е.

$$\bar{E} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_k a_k^* a_k f_{kk}. \quad (7)$$

Таким образом для флуктуации имеем:

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \sum_k \sum_{l \neq n} a_k^* a_n f_{kn}, \quad (8)$$

и для среднего квадрата флюктуации:

$$\begin{aligned}
 \overline{\Delta E^2} &= \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m} \right)^2 \sum_{\substack{kn \\ k \neq n}} \sum_{\substack{k'n' \\ k' \neq n'}} a_k^* a_n f_{kn} a_k^* a_n f_{kn} \\
 &= \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m} \right)^2 \sum_{\substack{kn \\ k \neq n}} a_k^* a_k a_n a_n^* f_{kn}^2 \\
 &= \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m} \right)^2 \sum_{\substack{kn \\ k \neq n}} N_k (N_n + 1) f_{kn}^2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда видно, что ΔE равно бесконечности, так как сумма в (9) расходится даже в случае одной только частицы. Именно для

$$N_k = 1, N_n = 0 \text{ и } n \neq k \quad \overline{\Delta E^2} = \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m} \right)^2 \sum_{\substack{n \\ k \neq n}} f_{kn}^2, \tag{10}$$

причем число членов бесконечно, а f_{kn} не уменьшается для больших n .

Перейдем теперь к обычному способу конфигурационного пространства. Допустим, что энергия внутри некоторого промежутка $x_0 \leq x \leq x_1$ задается оператором

$$\frac{1}{2m} p D(x) p, \tag{11}$$

где $D(x)$ внутри промежутка $x_0 - x_1$ равно 1, а вне его равно нулю. С помощью собственных функций (3) найдем среднее значение энергии в состоянии k

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x k \frac{1}{2m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} D(x) \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x k dx = \\
 &= \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \cos \frac{\pi}{l} x k D(x) dx = \frac{h^2}{8\pi^2 m} f_{kk}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Для среднего квадрата энергии получаем:

$$\begin{aligned} \bar{E}^2 &= \int_0^l \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x k \left(\frac{1}{2m} \right)^2 p D(x) p^2 D(x) p \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi}{l} x k dx = \\ &= \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \left(-\frac{2}{l} \right) \int_0^l \cos \frac{\pi}{l} x k D(x) \frac{d^2}{dx^2} D(x) \cos \frac{\pi}{l} x k \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 dx = \\ &= \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} x k D^2(x) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 dx + \right. \\ &+ \frac{2}{l} \int_0^l \cos \frac{\pi}{l} x k D(x) 2 D'(x) \sin \frac{\pi}{l} x k \left(\frac{\pi k}{l} \right)^3 dx - \\ &\left. - \frac{2}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} x k D(x) D''(x) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 dx \right\}; \end{aligned} \quad (13)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{E}^2 &= \left(\frac{h^2}{8 \pi^2 m} \right)^2 \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} x k D^2(x) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 dx - \right. \\ &\left. - \frac{2}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} x k D(x) D''(x) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Далее по определению

$$\overline{\Delta E^2} = \bar{E}^2 - \bar{E}^2. \quad (15)$$

Первый интеграл в правой части (13) дает среднее значение квадрата энергии, ибо из (3) следует

$$\frac{h^2}{8 \pi^2 m} \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2 \pi \frac{x}{l} k D^2(x) \left(\frac{\pi k}{l} \right)^4 dx = W_K^2 \frac{2}{l} \int_{x_0}^{x_1} \sin^2 \pi \frac{x}{l} k dx, \quad (16)$$

где $\frac{2}{l} \int_{x_0}^{x_1} \sin^2 \pi \frac{x}{l} k dx$ обозначает вероятность найти частицу между x_0 и x_1 .

Но второй интеграл в формуле (14) обращается в бесконечность, так как содержит в подинтегральном выражении вторую производную от $D(x)$ (очевидно бесконечную). Таким образом, в результате и средний квадрат флюктуации энергии оказывается бесконечным. Дело лежит, очевидно, в слишком резком выделении отрезка $x_0 - x_1$ введением „нехорошей функции“ $D(x)$. Если на место такой резкой функции ввести функцию сглаженную, то второй интеграл в (14) будет, вообще, сходиться и даст лишь весьма небольшой привесок к значению $\overline{E^2}$.

Взяв, например,

$$D(x) = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} \int_0^x \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{d^2}} - e^{-\frac{(x-x_1)^2}{d^2}} \right) dx, \quad (17)$$

имеем для большей части второго интеграла в (14), полученной после интегрирования по частям, т. е. для

$$\left(\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \right)^2 \frac{2}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi}{l} x k \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 D^2(x) dx \quad (18)$$

выражение:

$$\left(\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \right)^2 \frac{1}{l} \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \left[2 + e^{-\frac{d^2 \pi^2 k^2}{2l^2}} \left(\cos^2 \frac{2\pi}{l} x_0 k + \cos^2 \frac{2\pi}{l} x_1 k \right) \right]. \quad (19)$$

Если d велико по сравнению с длиной волны состояния k , то вторым интегралом можно пренебречь по сравнению с первым в формуле (14).

Физически следует иметь в виду, что энтропии двух связанных систем можно считать аддитивными с точностью до величины взаимодействия систем (см. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **40**, 501, 1926). Измерение энергии в резко ограниченном участке ($x_1 - x_0$) возможно только при действительной полной изоляции этого участка и полного разрыва его взаимодействия с другими участками (по классической теории изоляция не обязательна); такая изоляция требует „бесконечно большого“ вмешательства и поэтому физически неосуществима. Практически всегда границы участка будут несколько размыты, т. е. останется некоторое взаимодействие измеряемого участка с соседним. Из сказанного следует, что как раз в виду неаддитивности энтропии, что было существенной гипотезой при прежнем выводе, квантовая механика не дает формулы Эйнштейна.

4. Примечание к теории излучения (V, § 4).

Автору книги удалось найти более простой метод получения результатов теории излучения (W. Heisenberg, Ann. d. Phys. 9, 338, 1931). Рассуждения эти весьма близко примыкают к методу принципа соответствия (см. O. Klein, ZS. f. Phys. 41, 407, 1927, также L. Rosenfeld, там же, 65, 589, 1930).

Расчет ведется обычным в квантовой механике путем: на атомную систему, описываемую уравнением Дирака, посылаются световые волны и ищется изменение числа электронов в некотором состоянии. Но, в отличие от теории дисперсии Шредингера (Ann. d. Phys. 81, 109, 1926), амплитуды a_n функций ψ и амплитуды b_n падающей возмущающей волны принимаются теперь операторами.

Как в М (245 и дальше) полагается: $a_n = e^{-\frac{2\pi i \theta_n}{h}} N_n^{1/2} = \Delta_n^- N_n^{1/2}$, где Δ_n^- превращает N_n в $1 - N_n$ (статистика Ферми); $b_n = \Delta_n^+ M^{1/2}$, где Δ_n^+ превращает M в $M + 1$ (статистика Бозе-Эйнштейна). Операторный характер амплитуд не портит наглядности расчета и сказывается только в окончательных формулах. Весьма просто получаются коэффициенты A и B Эйнштейна, исследование рассеяния света и проч. Розенфельд (ZS. f. Phys. 71, 273, 1931) получил этим методом коэффициент затухания (и вместе естественную ширину линий) гораздо проще, чем прежде. Комбинация рассуждений принципа соответствия с формализмом операторных амплитуд дает таким образом все результаты дираковской теории излучения. Правда, это касается только первого приближения теории, но как раз высшие приближения дают ряд парадоксальных следствий (бесконечности разного рода).

5. К релятивистской квантовой механике (V, § 8).

Соотношения неопределенности, выведенные в книге, не учитывали требований теории относительности. Типичным моментом их вывода было ограничение корпускулярных представлений волновыми и наоборот. Релятивизм, так же как и корпускулярно-волновой дуализм, накладывает характерные новые ограничения на понятия координаты, времени и т. д.

Хотя в настоящее время нет разработанной теории релятивистской квантовой механики, но весьма вероятно, что в известном приближении останутся в силе соображения инвариантности, преобразования Лоренца и проч. Скорее следует думать, что изменение и ограничение понятий в будущей теории окажется еще более глубоким, чем то, которое мы получим путем предварительных

рассуждений. Говоря об отсутствии теории в данной области, мы имеем в виду два обстоятельства. Во-первых, существующие квантовые схемы, формально удовлетворяющие требованиям релятивистской инвариантности, заключают в себе ряд неверных утверждений. Во-вторых, оказывается необходимым положить в основу отнюдь не обычные понятия координаты, времени и проч., но существенно видоизмененные. Конечно, оба обстоятельства по существу связаны друг с другом.

Отметим прежде всего существенные затруднения в квантовой электродинамике, развитой Йорданом, Паули и Гейзенбергом (см. стр. 103). Теория приводит, как и классическая электродинамика, к разложению поля на совокупность бесконечно большого числа осцилляторов. Энергия осциллятора в n -ом квантовом состоянии по квантовой механике равна $\left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$, т. е. в нулевом состоянии тоже имеется энергия $\frac{1}{2}h\nu$ (Nullpunktsenergie).

С одной стороны введение нулевой энергии означало большой успех квантовой механики, так как целый ряд экспериментальных фактов, в частности из области рассеяния рентгеновых лучей (см., например, James, Waller, Hartree, Proc. Roy. Soc. 118, 334, 1928), определенно говорил за реальность члена $\frac{1}{2}h\nu$.

С другой стороны, для излучения сумма нулевых энергий бесконечного собрания осцилляторов равна бесконечности.

Эта довольно формальная трудность квантовой электродинамики связана с видом гамильтоновой функции электромагнитного поля; во всяком случае, путем изменения вида этой функции, удастся избежать бесконечной нулевой энергии (см., например, L. Rosenfeld et J. Solomon, Journ. d. phys. 2, 139, 1931).

Вторая или, лучше сказать, первая существенная трудность электродинамики обязана виду основного закона взаимодействия, который дается теорией. В сущности речь идет о трудности, имевшейся и в классической теории: энергия взаимодействия точечного электрона с самим собою равна бесконечности, что вытекает из обращения $\frac{e^2}{r}$ в ∞ при $r = 0$. Введение электрона шарика с конечным радиусом спасает дело в классической теории и дает конечную энергию или массу электрона. До сих пор квантовая механика имела дело с электроном-точкой, введение грубой модели шарика не представляется возможным (уже и в классической теории такая модель не была свободной от затруднений, см. Frenkel, Lehrbuch der Elektrodynamik).

Не только электромагнитное, но и гравитационное взаимодействие электрона с самим собою оказывается бесконечно большим (см. L. Rosenfeld, ZS. f. Phys. **65**, 589, 1931), причем это имеет место и по устранении трудности бесконечной нулевой энергии (J. Solomon, ZS. f. Phys. **71**, 162, 1931).

Ряд других трудностей теории излучения, имеющих даже в более простой форме теории, данной первоначально Дираком, указан Валлером и Розенфельдом (см. L. Rosenfeld ZS. f. Phys. **71**, 162, 1931 и его лекции в Institut Henri Poincaré, 1931).

Не только существующая схема квантовой электродинамики глубоко неудовлетворительна, но и теория электрона Дирака поражена отмеченной самим Дираком, так называемой плюс-минус трудностью (см. стр. 79). Как и следовало ожидать, факт наличия отрицательных значений энергии в спектре любой системы затрагивает не только энергию, но и другие величины.

Оказывается, что все, вообще говоря, операторы, сопоставленные координате, скорости, спину и т. д. электрона, содержат в себе части, соответствующие переходам на отрицательные состояния. В виду этого операторы теории Дирака иногда имеют трудно объяснимый физический смысл. Например, скорость всякого электрона или протона оказывается всегда равной скорости света. Действительно, из ур-ия (87) имеем по определению скорости:

$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = c\alpha_x$ и так как $\alpha_k^2 = 1$, то собственные значения оператора α_k , т. е. его наблюдаемые значения, по обычному толкованию квантовой механики равны $\sqrt{1} = \pm 1$ и возможные значения скорости

$$\dot{x} = \pm c.$$

Шредингер (Berl. Ber. **24**, 418, 1931) указал, каким образом можно каждый данный оператор разбить на две части: обычную „четную“ и „нечетную“, соответствующую переходам на отрицательные состояния. Нечетная часть всегда представляет собой член быстропеременный во времени. Таким образом всякий оператор Ω имеет вообще следующий вид (но бывают и чисто четные или нечетные операторы):

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 e^{i\nu t}, \quad (1)$$

где Ω_0 четная часть, а ν — частота переходов на отрицательные состояния (частота „дрожания“ свободного электрона — Zitterbewegung).

В частности, координата и скорость свободного электрона

даются выражениями:

$$x = x_0 + \frac{c^2 p t}{H} - \frac{c h}{4 \pi i H} \eta e^{-\frac{4 \pi i H t}{h}} \quad (2)$$

$$\dot{x} = \frac{c p}{H} + c \eta e^{-\frac{4 \pi i H t}{h}}, \quad (3)$$

где H — гамильтонов оператор, p — импульс электрона, а η — оператор, модуль которого равен единице.

Мы видим, что четная часть оператора скорости, т. е. $\frac{c p}{H}$, дает обычные (любые) значения.

Как временный выход из затруднений, связанных с наличием трудности теории Дирака, напрашивается следующий: за наблюдаемые величины нужно брать не собственные значения операторов, но собственные значения операторов, усредненных по („дрожанию“) колебательному движению Шредингера, или иначе: у всех операторов отбросить нечетные части (E. Schrödinger, Berl. Ber. 63, 1931). (D. Iwanenko, ZS f. Phys. 72, 621, 1931). Таким путем мы избегаемся от переходов на отрицательные состояния, но в определении всех величин, у которых ранее были нечетные части у операторов, совершаем некоторую „индивидуальную“ ошибку (в противоположность парной ошибке, например в гейзенберговском соотношении $\Delta p \Delta q$). Величина индивидуальной ошибки равна, очевидно, абсолютному значению амплитуды дрожания

$$\Delta \Omega = |\Omega|. \quad (4)$$

Индивидуальная ошибка в координате будет, например,

$$\Delta q = \frac{h c}{E} \approx \frac{h}{m c} = \lambda; \quad (5)$$

последнее при малых скоростях.

Усреднение по времени операторов и наличие индивидуальных ошибок представляется странным с точки зрения обычной нерелятивистской квантовой механики. В теорию Дирака усреднение тоже привнесено извне. Оказывается, однако, что и усреднение и факт существования индивидуальных ошибок выводятся и безо всякой связи с теорией Дирака (сомнительной именно в этих опасных пунктах). Оказывается, что и пространственные координаты и время могут быть измерены не абсолютно точно, но имеют некоторую нижнюю границу, причем для координаты, например, эта граница

как раз равна индивидуальной ошибке, полученной выше путем усреднения из теории Дирака.

Действительно, измеряя координату с помощью освещения светом длины волны λ , мы должны учесть, кроме ошибки λ (упоминавшейся выше на стр. 22), еще поправку на сокращение Лоренца. Импульс, переданный светом $\Delta p \simeq \frac{h}{\lambda}$, вызовет движение измеряемого масштаба со скоростью порядка v , где v определится из равенства:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6)$$

Это движение поведет за собой сокращение измеряемого масштаба, характеризуемое лоренцовым множителем $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}$. Чтобы учесть сокращение, мы измеряемую длину l разделим на $\sqrt{1 - \beta^2}$; таким образом эта часть ошибки окажется равной $l \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$.

Окончательно,

$$\Delta q = \lambda + l \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (7)$$

Казалось бы, что для более точного измерения нужно брать все меньшие длины волн λ , т. е. уменьшать первую часть ошибки, но тогда будет возрастать вторая часть. При некоторой длине волны ошибка будет минимальной. Мы видим, что характерное ограничение, привносимое релятивизмом (сокращение Лоренца), весьма похоже на ограничения, обязанные корпускулярно-волновому дуализму.

Для нахождения минимальной ошибки найдем производную от Δq по λ и приравняем ее нулю. Мы ограничимся здесь для простоты случаем больших длин l , когда можно брать сравнительно большие λ и, следовательно, добавочная скорость, полученная телом, будет мала (так что можно будет положить $\sqrt{1 - \beta^2} = 1 - \frac{1}{2} \beta^2$). В этом случае ошибка будет равна

$$\Delta q = \lambda + \frac{l}{2} \beta^2. \quad (8)$$

С той же степенью точности из (6) имеем:

$$\beta = \frac{h}{mc\lambda}, \quad (9)$$

т. е.

$$\Delta q = \lambda + \frac{l}{2} \left(\frac{h}{mc} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{и} \quad \Delta q' = 1 - \frac{l}{\lambda^3} \left(\frac{h}{mc} \right)^2. \quad (10)$$

Таким образом наименьшая ошибка получится при

$$\lambda = \left[l \left(\frac{h}{mc} \right)^2 \right]^{1/3}$$

и будет равна:

$$\Delta q_{\min} = \left[l \left(\frac{h}{mc} \right)^2 \right]^{1/3} + \frac{l^{2/3}}{2} \left(\frac{h}{mc} \right)^{2/3} = \frac{3}{2} l^{1/3} \left(\frac{h}{mc} \right)^{2/3}.$$

При $l > \frac{h}{mc}$

$$\Delta q_{\min} \gtrsim \frac{h}{mc}, \quad (11)$$

т. е. нижней границей точности измерения оказывается величина $\frac{h}{mc}$.

Более точный подсчет показывает, что и для случая $l < \frac{h}{mc}$ все

равно $\frac{h}{mc}$ остается границей точности измерения координаты длины.

Отсюда следует, что в релятивистски-квантовых рассуждениях длины менее $\sim \frac{h}{mc}$ не имеют смысла.

Точно так же оказывается, что и для времени имеется индивидуальная ошибка $\Delta t = \frac{h}{mc^2}$ и что промежутки времени менее этой величины лишены смысла (см. V. Ambarzumian und D. Iwanenko. ZS. f. Phys. 64, 563, 1930 и E. Schrödinger, Berl. Ber. XII, 1931).

Как мы видим, наличие индивидуальных ошибок можно считать существенной чертой релятивистской квантовой теории в противоположность нерелятивистской квантовой механике с ее основным принципом неопределенности Гейзенберга и парными ошибками у канонически сопряженных величин. Повидимому, в квантовой электродинамике тоже будут введены индивидуальные ошибки (см.

настоящие примечания стр. 137). Индивидуальная ошибка указанной величины в измерении координаты была введена также Ландау и Пайерлсом совершенно другим путем (ZS. f. Phys. 69, 56, 1931).

Таким образом и координату и время нельзя измерить сколь угодно точно, т. е. и координата и время теряют свой обычный смысл в релятивистской квантовой теории. Раз не существует мгновенных измерений ($\Delta t = 0$), то очевидно все измерения дают среднее по некоторому промежутку времени. С этой точки зрения оправдывается постулат усреднения, который мы ввели в теорию Дирака для устранения переходов на отрицательные состояния. Изложенный круг идей представляется единственным рядом соображений, дающих нечто положительное в направлении построения будующей релятивистской квантовой теории.

Упомянем еще о попытке геометризации идеи индивидуальных ошибок (W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 65, 4, 1930) (V. Ambarzumian und D. Iwanenko, ZS. f. Phys. 64, 563, 1930) (M. Born und Rumer, ZS. f. Phys. 69, 141, 1931). Наличие минимальной длины и минимального времени можно толковать как отсутствие непрерывной структуры у пространства-времени, которое распадается на отрезки Δq и Δt . В таком прерывном („квантованном“) пространстве-времени обычные дифференциальные уравнения следует заменить уравнениями в конечных разностях. Интересно, что вместо обычной гринавской функции $\sim \frac{1}{r}$ в прерывном пространстве получается выражение, которое при $r = 0$ остается конечным и равным по порядку величины $\sim \frac{1}{\Delta q}$.

Таким образом было бы возможно избежать трудностей, связанных с точечным электроном и бесконечной его массой (см. выше стр. 131). Квантованное пространство вместе с минимальным Δt вводит и понятие максимальной возможной частоты $\Delta \nu_{\max}$ и приводит к соотношению: $\frac{M_{\text{прото́на}}}{m_{\text{электрона}}} \sim \frac{hc}{e^2}$. Как правильно указал Гейзенберг, теория точечного пространства является слишком простым и грубым приближением. „Die Theorie muss nicht so einfach sein“ — теория не должна быть столь простой, как сказал Бор! Новейший подход к этому вопросу (A. Markoff, Phys. ZS. d. Sowjetunion, 1, 387, 1932) использует топологическое понятие „до — после“. Возможно, что, вводя явную асимметрию в смысле времени, мы сумеем избавиться и от плюс-минус трудности.

Можно все же надеяться, что самый путь геометризации новых представлений, заключающийся в попытке построения квантованного пространства, имеет в себе некоторое зерно истины. Не забудь-

дем, что релятивистское обобщение квантовой механики должно, по всей видимости, дать основу для теории ядра, — а это цель, для достижения которой поистине необходимо испробовать все имеющиеся средства.

Необходимость самых радикальных изменений в существующих представлениях при трактовке ядра видна из факта потери ядерными электронами целого ряда своих нормальных свойств, как например спина и магнитного момента. Повидимому вообще нельзя более говорить об ядерных электронах как индивидуальных частицах и β -распад подобен испусканию фотонов, которые прежде не существовали как отдельные частицы (V. Ambarzumian und D. Iwanenko, Доклады Ака. Наук, Лнг., 1930. D. Iwanenko, Phys. ZS. d. Sowjetunion, № 6, 1932. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. в печати).

Мы видим, что в области ядра, в области будущей релятивистской квантовой механики даже обычный атомизм материи должен подвергнуться пересмотру (см. фарадеевскую лекцию N. Bohr, Journ. Chem. Soc. февраль 1932 г.).

6. О соотношениях неопределенности для электромагнитного поля (к главе III).

Соотношения неопределенности для электромагнитного поля (50) получены без введения материальных частиц. Этот путь подобен выводу формулы (25) для материи, где корпускулярное представление критикуется волновым. Формула (50) еще раз выведена (см. 57) с помощью измерения поля двумя электронами, т. е. аналогично выводу соотношения (23).

Йордан и Фок (ZS. f. Phys. 66, 706, 1930) обратили внимание на то, что, взяв в качестве измеряющего „пробного“ тела один электрон, мы получим неточности отдельно для электрического и магнитного поля, „индивидуальные“, так сказать, погрешности, в противоположность парным ошибкам для сопряженных величин в соотношениях Гейзенберга. Формулы Йордана-Фока имеются неявно и у Гейзенберга, но ясное введение индивидуальных ошибок является важным принципиальным шагом вперед.

Электрическое поле E мы хотим измерить по величине ускорения, полученного электроном. В среднем за некоторый промежуток времени для x -овых составляющих будем иметь:

$$E_x = \frac{1}{e} \frac{dp_x}{dt}, \quad (1)$$

где dp_x увеличение импульса, обязанное полю.

Но погрешность Δp_x величины dp_x по формуле Гейзенберга связана с участком Δx , на котором получено ускорение:

$$\Delta p_x \Delta x \sim h.$$

Отсюда для неопределенности поля получим :

$$\Delta E_x \geq \frac{h}{e} \frac{1}{\Delta x \Delta t} \quad (2)$$

и также

$$\Delta E_y \Delta y \Delta t \geq \frac{h}{e}, \quad \Delta E_z \Delta z \Delta t \geq \frac{h}{e}.$$

По существу формулы Йордана-Фока утверждают, что

$$\int \Phi_\mu dx_\mu = \int F_{\mu\nu} dS_{\mu\nu} \geq \frac{hc}{e}, \quad (3)$$

где Φ_μ — компонента четырехмерного потенциала, $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, а $dS_{\mu\nu}$ — двумерный элемент гиперповерхности.

Отсюда, или также путем простого мысленного эксперимента, для индивидуальной ошибки в магнитном поле H , получаем :

$$\Delta H_z \geq \frac{hc}{e} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \quad (4)$$

и для H_x, H_y в циклическом порядке.

Эти формулы получаются из формулы (55) Гейзенберга, если положить там $\frac{\partial y}{\partial t_\mu} = \Delta t$ и $d = \Delta x$. Интересен релятивистски инвариантный вид этих соотношений и то, что усреднение E и H производится вообще и по времени, и по пространству. С другой стороны здесь не удовлетворяется требование Гейзенберга о том, чтобы ошибка в энергии должна быть $\sim h\nu = h \frac{c}{\lambda}$, где λ порядка линейных размеров сосуда. Против соотношений Йордана-Фока было выдвинуто возражение (см. напр. J. Solomon, Thèses, Paris, 1931), что наличие заряда в знаменателе позволяет будто бы — сделав этот заряд сколь угодно большим — измерить поле сколь угодно точно. Несомненно это так, но не нужно забывать, что большие заряды реализованы в природе в образованиях, занимающих большой объем, и, выигрывая в точности измерения поля, мы проигрываем, усредняя это поле по большим областям. Если бы можно было сосредоточить неограниченно большой заряд на небольшом пространстве, тогда только удалось бы по формулам (2) и (4) измерить поле с любой точностью. Таким образом здесь мы неожиданно сталкиваемся с вопросом о возможности существования максимальной электрической плотности.

Бор, Ландау и Пайерлс (ZS. f. Phys. 69, 56, 1930) устанавливают новую границу для точности измерения электрического и

магнитного поля, учитывая наличие излучения энергии частицей служащей пробным телом при измерении. Так же как у Йордана-Фока, здесь нет речи о квантовой электродинамике; за основу берется уравнение движения, из которого получается, как и выше:

$$e\Delta E_x \Delta t > \Delta p_x. \quad (5)$$

Энергия, излученная за время dt , равна:

$$\Delta E = \frac{e^2}{c^3} \int \dot{v}^2 dt.$$

Здесь взят нерелятивистский случай, как более выгодный, ибо при $v \rightarrow c$ ΔE будет больше. Также берем наименее выгодный случай равноускоренного движения, при котором

$$\dot{v} = \frac{v' - v}{\Delta t}.$$

Отсюда для неопределенности в энергии:

$$\Delta E = \frac{e^2}{c^3} \frac{(v' - v)^2}{\Delta t}.$$

Эта энергия связана с изменением импульса Δp_2 формулой (см. стр. 123):

$$\Delta E = (v' - v) \Delta p_2, \quad (6)$$

откуда для ошибки в импульсе, происшедшей от излучения, получим:

$$\Delta p_2 \Delta t \sim \frac{e^2}{c^3} (v' - v). \quad (7)$$

Прежде (стр. 123) мы имели, в виду неопределенности энергии $\frac{h}{\Delta t}$, ошибку в импульсе $\Delta p_1 \sim \frac{h}{(v' - v) \Delta t}$.

Комбинируя обе независимые ошибки, получаем для всей ошибки в p :

$$\Delta p^2 = \Delta p_1^2 + \Delta p_2^2 = (\Delta p_1 - \Delta p_2)^2 + 2\Delta p_1 \Delta p_2, \text{ т. е. } \Delta p^2 > 2\Delta p_1 \Delta p_2$$

и

$$\Delta p > \sqrt{2} \sqrt{\Delta p_1 \Delta p_2} \sim \frac{h}{c \Delta t} \sqrt{\frac{e^2}{hc}}. \quad (8)$$

Окончательно из (5) и (8) для неопределенности в электрическом поле имеем:

$$\Delta E_x \sim \frac{\sqrt{hc}}{(c \Delta t)^2}. \quad (9)$$

Ландау и Пайерлс замечают, что рассмотрение движения магнитной стрелки ведет для неопределенности магнитного поля к точно такой же формуле:

$$\Delta H_x \sim \frac{\sqrt{hc}}{(c\Delta t)^2} \quad (10)$$

и то же для всех компонент.

Здесь мы имеем независимые индивидуальные ошибки, как и у Йордана-Фока. Формулы (9) и (10) удовлетворяют требованию Гейзенберга о неопределенности в энергии $\sim h\nu$, после подстановки $c\Delta t \sim \Delta l$. Так как для электрона $\frac{e^2}{hc} < 1$, то формула (7) для Δp дает более низкую границу, чем (16, стр. 123) и не играет поэтому роли в этом случае.

Как и следовало ожидать, излучение следует учитывать для частиц большого заряда.

Произведение независимых ошибок для электрического и магнитного полей будет

$$\Delta E \Delta H \sim \frac{hc}{(c\Delta t)^4} \quad (11)$$

С другой стороны, как видно из вывода Гейзенберга, при одновременном измерении электрического и магнитного полей нужно учесть, что добавочное магнитное поле, вызванное движением заряженного пробного тела, равно:

$$\Delta H \sim \frac{e}{(\Delta l)^2} \frac{v'}{c}, \quad (12)$$

где Δl расстояние от тела до места, где измеряется поле H .

Перемножая (9) и (12), получим для одновременных ошибок ($v = 0$)

$$\Delta E \Delta H \sim \frac{hc}{(c\Delta t)^2} \frac{1}{(\Delta l)^2} \quad (13)$$

Но на далеких расстояниях, больших длины волны, где $\Delta l \gg \lambda$, т. е. в волновой зоне, нужно однако все равно брать формулу для независимых ошибок ΔE и ΔH , ибо (13) дает более грубую границу (положим, например $\Delta l = 10^3 \lambda$ и заметим, что $c\Delta t \gg \lambda$, т. е. $\lambda \leq c\Delta t$). Если же закрепить не расстояние, а время опыта Δt , то $c\Delta t \cong \lambda_{\min}$ (где λ минимальная длина, могущая быть обнаруженной) и нельзя брать $\Delta l < \lambda < c\Delta t$, т. е. опять-таки имеет место формула для независимых ошибок. Таким образом, поскольку электрическое и магнитное поля вообще измеримы, они могут быть измерены одновременно. Из формул видно, что при $\Delta t = \infty$, т. е. в статическом

случае поля можно измерить сколько угодно точно. Это заключение противоречит выводам Гейзенберга, в которые вовсе не входит время (если не ввести его через $c\Delta t \sim \Delta l$). С другой стороны, Ландау-Пайерлс допускают возможность определения полей в точке, что было невозможно и у Гейзенберга и у Йордана-Фока, где всегда производилось пространственное усреднение. В виду существования индивидуальной ошибки в координате, действительно не представляется возможным говорить об измерениях в точке.

Мы видим, что, несмотря на ряд интересных замечаний и мысленных экспериментов, нельзя считать окончательно установленными соотношения неопределенности для электромагнитного поля, что соответствует отсутствию разработанной непротиворечивой квантовой электродинамики.

ЛИТЕРАТУРНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- 1) С. Т. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. A. 85, 285, 1911; сравни Jahrbuch d. Radioakt. 10, 34; 1913.
- 2) Davisson и Germer, Phys. Rev. 30, 705, 1927; Proc. Nat. Acad. 14, 317; 1928. — G. P. Thomson, Proc. Roy. Soc. A. 117, 600, 1928; A. 119, 651; 1928. — Kikuchi, Jap. Journ. Phys. 5, 83; 1928, — Rupp. Ann. d. Phys. 85, 981; 1928.
- 3) A. H. Compton и A. Simon, Phys. Rev. 25, 306; 1925.
- 4) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 145; 1905.
- 5) J. Franck и G. Hertz, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 613; 1913.
- 6) L. de Broglie, Ann. d. Phys. Sér. 10, 2; 1925.
- 7) N. Bohr, Naturwissenschaften 16, 245, 1928. Срав. также N. Bohr, H. A. Kramers, J. C. Slater, ZS. f. Phys. 24, 69; 1924.
- 8) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 43, 172; 1927.
- 9) Срав.⁸ и Kennard, ZS. f. Phys. 44, 326; 1927.
- 10) Срав. Kennard⁹ и C. Darwin, Proc. Roy. Soc. A. 117, 258; 1927.
- 11) P. Ehrenfest, ZS. f. Phys. 45, 455; 1927.
- 12) H. Weyl, ZS. f. Phys. 46, 1; 1927.
- 13) N. Bohr⁷ и Naturwiss. 17, 483, 1929 и 18, 73, 1930; далее Atomteori og Naturbeskrivelse, Юбилейный сборник Копенгагенского университета 1929. Atomtheorie und Naturbeschreibung, 1931.
- 14) M. Born, ZS. f. Phys. 38, 803; 1926. Срав. также N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A. 126, 79; 1930.
- 15) Duane, Proc. Nat. Acad. 9, 158; 1923.
- 16) A. Einstein, Sitzungsber. d. preuss. Akad. 334; 1926. — A. Rupp. Sitzungsber. d. preuss. Akad. 341; 1926.
- 17) A. Smekal, Naturwiss. 11, 873; 1923; H. Kramers и W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 31, 681; 1925.
- 18) C. Raman, Nature 121, 501; 122, 12; 1928.
- 18') G. Landsberg и L. Mandelstam, Naturwiss. 16, 558, 1928.
- 19) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. 114, 243, 710; 1927.
- 20) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. 117, 610; 1928; A. 118, 351; 1928.
- 21) G. Breit, Journal of the Optical Society Am. 14, 374; 1927.
- 22) W. Bothe и H. Geiger, ZS. f. Phys. 32, 639; 1925.
- 23') L. Landau и R. Peierls, ZS. f. Phys. 62, 188; 1930.
- 24) A. Einstein, Phys. ZS. 10, 185; 1909.
- 24) M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, ZS. f. Phys. 35, 557; 1926.
- 25) O. Klein, ZS. f. Phys. 53, 157; 1929.
- 26) N. Bohr, ZS. f. Phys. 13, 117; 1923.
- 27) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 33, 879, 1925; M. Born и P. Jordan, ZS. f. Phys. 34, 858; 1925 и 24; см. также W. Heisenberg, Mathem. Ann. 25, 683, 1926.

- 28) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **109**, 642; 1925.
 29) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **113**, 621, 1927. — P. Jordan, ZS. f. Phys. **40**, 809; 1927.
 30) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361, 489; 1926.
 31) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **40**, 501; 1926.
 32) Смотри ³¹ и P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A. **112**, 661; 1926.
 33) S. N. Bose, ZS. f. Phys. **26**, 178; 1924. — A. Einstein, Sitzungsber. d. preuss. Akad. 261; 1924.
 34) W. Pauli, ZS. f. Phys. **31**, 765; 1925.
 35) E. Fermi, ZS. f. Phys. **36**, 902; 1926 и ³².
 36) E. Wigner, ZS. f. Phys. **40**, 883; 1927.
 37) D. R. Hartree, Proc. Cambr. Phil. Soc. **24**; 89; 1928.
 37') В. А. Фок, Труды гос. оптического института, 1931.
 38) Срав. ²⁴, ²⁰ и P. Jordan и W. Pauli, ZS. f. Phys. **45**, 151; 1928. P. Jordan и O. Klein, ZS. f. Phys. **45**, 751; 1927. — P. Jordan и E. Wigner, ZS. f. Phys. **47**, 631; 1928. — G. Mie, Ann. d. Phys. **85**, 711; 1928. — W. Heisenberg и W. Pauli, ZS. f. Phys. **56**, 1; 1929; **59**, 168; 1930. — E. Fermi, Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei (6) **9**, 881, 1929.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

- α -лучи. 11. 53
 Амбарцумян (доп.) 135. 137.
 Бор (Bohr). 13. 15. 21. 25. 28. 39.
 51. 63. 80. 122. 125. 138.
 Борн (Born). 30. 45. 56. 74.
 Боте (Bothe). 72.
 Брейт (Breit). 68.
 Бройль (де) волны де Бройля (de Broglie). 12. 23. 40. 98.
 Вейль (Weyl). 46.
 Вероятности пакет. 16. 29. 32. 34. 54.
 Вигнер (Wigner). 110.
 Вильсон (Wilson). 11.
 Вильсоновские фотографии 11. 24. 53.
 Возмущений теория 88.
 Волновой пакет. 16. 29. 32. 34. 54.
 Гейгер (Geiger). 72.
 Гейгера-Боте опыт. 72.
 Герц (Hertz). 13.
 Дарвин (Darwin). 56.
 Джермер (Germer). 12. 60. 64.
 Дирак (Dirac). 45. 65. 82. 86. 114.
 Диффракция лучей материй. 12. 23. 60.
 Диффракция света. 12.
 Дополнительность (Komplementarität). 51.
 Допплер-эффект. 25. 62.
 Дьюэн (Ducane). 60.
 Дэвиссон 12. 60. 64.
 Запрет (принцип) Паули. 97.
 Зоммерфельд (Sommerfeld). 102.
 Игольчатое излучение. 68.
 Излучения теория. 63.
 Измерение импульса. 24.
 „ положения. 17. 21.
 „ скорости. 24.
 „ энергии. 34
 Индивидуальные ошибки (доп.) 133.
 Интерференция вероятностей. 48.
 „ света. 68.
 Испускание. 63.
 Йордан (Jordan). 45. 74. 79. 84. 137.
 Квантование пространства (доп.) 131.
 Кеннард (Kennard). 57.
 Кикучи (Kikuchi). 60.
 Клейн (Klein). 65. 78. 110.
 Комптон (Compton). 12. 71.
 Комптон-эффект. 12. 22. 30. 71.
 Комптона-Симона опыт. 12. 71.
 Крамерс (Kramers). 64.

ландгау-Пайерлс (Peierls) (доп.) 74.
136, 138.
Лауэ пучок (доп.) 115.
Магнитное отклонение лучей ма-
тери. 26. 37. 44.
Магнитный момент электрона (доп.)
122.
Матрицы. 81.
Микроскоп. 21.
Наблюдение. 46.
Наложение (Superposition). 49. 55.
Неопределенности соотношения в
корпускулярной картине. 15. 115.
Неопределенность в волновой кар-
тине. 41. 137.
Отброс при излучении. 68.
Огнотельности теория. 51. 65. 78.
Паули (Pauli). 97. 110. 113.
Перестановочные соотношения. 82.
106.
Плюс-минус трудность 78. 132.
Потенциальный порог. 35.
Преобразований теория. 46. 84.
Принцип соответствия. 65. 80.
Причинности закон. 46. 52.
Раман (Raman)-эффект 64.
Расползание (волновых пакетов). 33.
Резонанс. 90.
Релятивистские соотношения не-
определенности. (доп.) 135.
Релятивистское волновое урав-
нение. 65.
Розенфельд (Rosenfeld). (доп.) 132.
Рупп (Rupp). 12. 60. 62.

Световые кванты. 12. 14. 21. 30. 34.
62. 65. 74. 94.
Связанные электроны. 28.
Симон (Simon). 12. 71.
Случай чистого собрания (Reiner
Fall). 47.
Смекаль (Smekal). 64.
Смесь (Gemenge). 47, 50.
Сохранения законы. 48. 63. 68. 100.
Статистика. 95.
" Бозе (Bose)-Эйнштейна.
43. 74. 97. 110. 114.
Статистика Ферми-Дирака. 44. 97.
Статистическое толкование кван-
товой теории. 45.
Сцицилляции. 24.
Томсон (Thomson). 12. 60.
Траектории (орбиты) понятие. 30.
Ферми. 44. 97.
Флюктуации. 73. 91. 124.
Флюоресценция резонансная. 39.
Фок (доп.) 137.
Франк (Franck). 13.
Хартри 102.
Шредингер (Schrödinger). 30. 56.
93. 98. 132.
Шредингеровская волновая функ-
ция. 32. 35. 87.
Штерна (Stern)-Герлаха (Gerlach)
опыт. 37. 48. 64.
Эйнштейн (Einstein). 14. 34. 62. 73.
129.
Электронный удар. 13.
Эренфест (Ehrenfest). 32.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие от издательства	3
Предисловие к русскому изданию	5
Предисловие	7
<i>I. Введение.</i>	
1. Теория и эксперимент	9
2. Основные понятия квантовой теории	11
а) Фотографии Вильсона	—
б) Диффракция материальных лучей (Дэвиссон - Джермер, Томсон, Рупп)	12
с) Диффракция электромагнитного излучения	—
д) Опыт Комптона-Симона	—
е) Опыты Франка и Герца со столкновениями	13
<i>II. Критика физических понятий корпускулярной картины</i>	
1. Соотношения неопределенности	15
2. Иллюстрация соотношений неопределенности на различных измерительных приборах	21
а) Измерение положения свободных электронов	—
б) Измерение скорости или импульса свободных электронов	24
с) Связанные электроны	28
д) Измерение энергии	34
<i>III. Критика физических понятий волновой картины</i>	
1. Соотношения неопределенности в волновой картине	41
2. Иллюстрация соотношений неопределенности на некотором опыте	44
<i>IV. Статистическое толкование квантовой теории</i>	
1. Математические рассуждения	45
2. Интерференция вероятностей	48
3. Боровское понятие дополнителности	51
<i>V. Обсуждение важнейших опытов</i>	
1. Фотографии Вильсона	53
2. Диффракционные опыты	60
3. Опыт Эйнштейна и Руппа	62
4. Испускание, поглощение и дисперсия излучения	63
а) Применение законов сохранения	—
б) Полная трактовка	64
5. Интерференция и законы сохранения	68
6. Эффект Комптона и опыт Комптона-Симона	71
7. Явление флюктуаций излучения	73
8. Релятивистская формулировка квантовой теории	78

VI. Математический аппарат квантовой теории

1. Корпускулярное представление (материя)	80
2. Теория преобразований	84
3. Дифференциальное уравнение Шредингера	87
4. Теория возмущений	88
5. Резонанс между двумя атомами. Физическое значение матриц преобразования	90
6. Корпускулярная картина излучения	94
7. Квантовая статистика	95
8. Волновое представление материи и излучения; классическая теория	98
9. Квантовая теория волновых полей	103
10. Применение к волнам отрицательного заряда	107
11. Доказательство математической эквивалентности квантовых теорий корпускулярной и волновой картин	110
12. Применение к теории излучения	113

Дополнения к русскому изданию

1. К выводу соотношений неопределенности	115
2. Магнитный момент электрона	122
3. К подсчету флуктуаций	124
4. Примечание к теории излучения	130
5. К релятивистской квантовой механике	—
6. О соотношениях неопределенности для электромагнитного поля	137
Литературный указатель	142
Именной и предметный указатели	143

Отв. редактор С. М. Вечеслов.

Техн. редактор М. Фишман.

ОНТИ № 65. Индекс Т-Т-12-5-2. Слано в набор 15 III 1932 г. Подписано в печать 8/VIII 32 г.
Тираж 5000. Формат бумаги 82×111 1/2 чати 9¹/₂ лд. Колич. бумажных листов 4¹/₂
Колич. печатных зн. на бумажном листе 178 5⁹⁰. Заказ № 358. Ленгорлит № 48465. Выход
в свет август 1932 г.

3-я типография ОНТИ им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

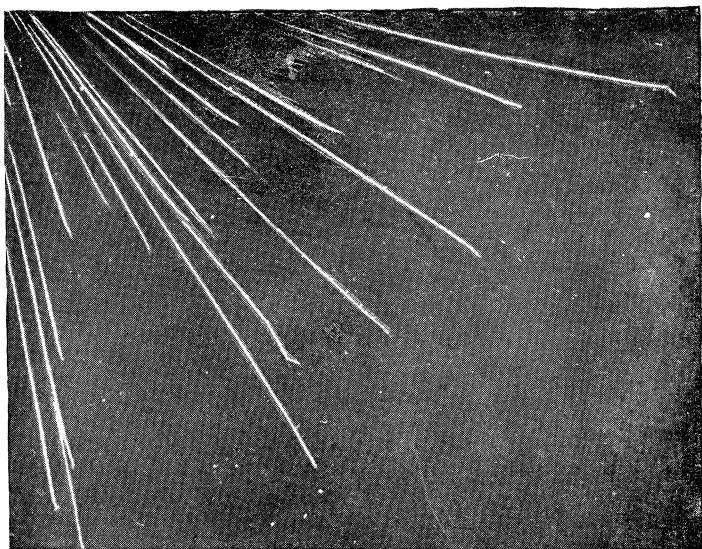


Рис. 1.



Рис. 2.

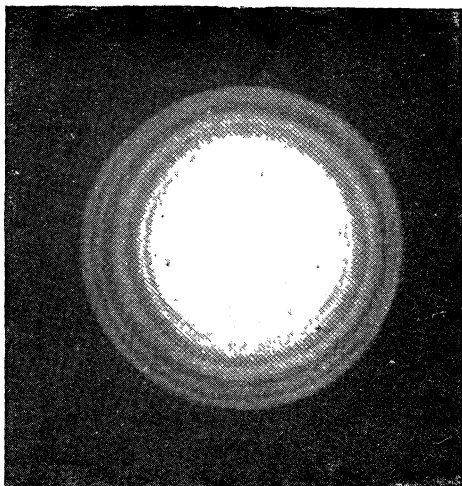


Рис. 3.

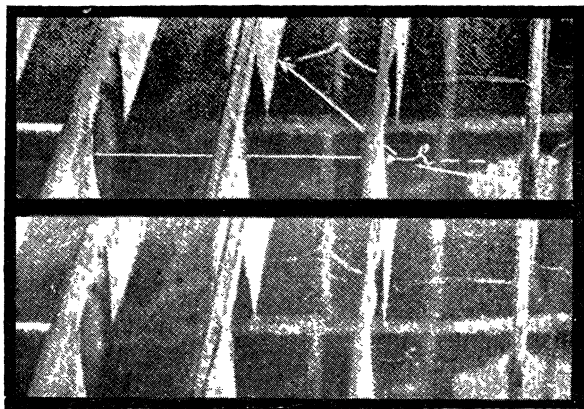


Рис. 4.