Г. Г. ЦЕЙТЕН

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ДРЕВНОСТИ И В СРЕДНИЕ ВЕКА

ГТТИ

H.-G. ZEUTHEN

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

DANS

L'ANTIQUITÉ ET LE MOYEN AGE

ÉDITION FRANÇAISE, REVUE
ET CORRIGÉE PAR L'AUTEUR
TRADUITE PAR
JEAN MASCART

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
1902

Г. Г. ЦЕЙТЕН

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
В ДРЕВНОСТИ И В СРЕДНИЕ ВЕКА

ПЕРЕВОД
П. ЮШКЕВИЧА
С ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ,
ИСПРАВЛЕННОГО АВТОРОМ
ПРЕДИСЛОВИЕ
М. ВЫГОДСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1932 ЛЕНИНГРАД

ТТ 10-5-4

Читатель! Сообщите отзыв об этой книге (Ваши замечания о ее недостатках и желательных изменениях в следующем издании) по адресу: Москва, Мясницкая, 20, Государственному технико-теоретическому издательству (в секцию организационно-массовой работы).

Редакционная работа по этой книге проведена А. П. Юшкевичем. Издание оформлено Н. И. Москвичевой. Корректура выполнена А. Совиным. За выпуском наблюдал А. В. Малов. Рукопись сдана в набор 31/III-32 г. Листы подписаны к печати 15/XI-32 г. Книга вышла в свет в ноябре 32 г. в количестве 5000 экз. на бумаге формата 62×94/16. Печатных листов 20³/₄, типогр, знаков в листе 52 800. ГТТИ 274. Зак. тип. 3505. Уполн. Главлита В-21344.
5-я тип. „Пролетарское слово", „треста Полиграфкнига", Москва, Каланчевский туп.. 3/5.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Введение.

Греческая математика.

Индусская математика

Средние века.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

До последнего времени на русском языке не существовало ни одной серьезной книги, систематически излагающей историю математики. Поэтому появление этой книги Цейтена и вскоре выходящей другой работы того же автора по истории математики в XVI и XVII вв. составляет событие большой важности для всех тех, кто занимается математикой и интересуется историей ее развития.

Книга эта написана крупнейшим специалистом по истории математики, умершим в 1920 г., профессором Копенгагенского университета, Г. Цейтеном. Написана она тридцать лет назад, и это, конечно, обусловливает то, что в ней не использовано много нового и интересного материала, открытого за протекшее с тех пор время. В иностранной литературе имеются более новые книги аналогичного содержания, и казалось бы более целесообразным избрать для перевода какую-нибудь из них, а не книгу Цейтена.

Мне кажется, однако, что эта книга имеет ряд таких преимуществ, которые заставляют мириться с указанным ее недостатком. На небольшом, легко обозримом числе страниц она дает связный и оригинальный обзор развития математики. Автор старается выделить существенные моменты и на них сосредоточивает внимание читателя. Его интересует вопрос о путях развития математики, он старается подметить и объяснить закономерности этого развития. Все это придает книге ту целостность, которая делает ее интересной и теперь и которую нелегко найти в работах такого рода, легко сбивающихся на перечисление голых фактов.

Исторические взгляды автора покажутся часто наивными читателю-марксисту. Но при всей своей наивности Цейтен мыслит материалистически. В отличие от огромного большинства историков математики он не удовлетворяется ни простым констатированием фактов, ни их объяснением свойствами „национального духа" или голой „жаждой знания". Так, например, он старается объяснить причины возвышения и упадка греческой математики, исходя из особенностей исторических условий, в которых она развивалась.

Конечно, материализм Цейтена очень ограничен, и легко видеть из чтения его работы, что корень этой ограниченности лежит в том, что Цейтен игнорирует к л а с с о в у ю структуру общества и обусловленную этой структурой общую линию развития науки в данную эпоху. Возьмем, например, вопрос об отношении римлян и арабов к греческой математике. Сколько авторов уверяют нас в том, что римляне были от природы несклонны к отвлеченной науке, арабы же, напротив, были математически одарены; так решается вопрос о том, почему римляне не восприняли математики греков, а арабы усвоили ее. Цейтен не может удовлетвориться этим объяснением. Он резонно указывает на то, что сами греки, создавшие эту математику, перестали ее понимать в эпоху упадка. Но связать рост арабской науки с социально-экономическими предпосылками ее развития Цейтен не может и, останавливаясь на полдороге, ищет объяснения в том, что арабы еще не имели своей культуры, когда вошли в соприкосновение с греческой, тогда как римская культура уже сложилась, и в рамки ее не уложилась математика греков.

Как ни наивно это объяснение, все же оно претендует на историчность. И если нас не могут удовлетворить ответы, даваемые Цейтеном, то несомненной ценностью его работы является то, что она возбуждает вопросы, что она заставляет думать над проблемами истории математики и дает в руки читателя много материала, над которым стоит призадуматься.

Вот почему то обстоятельство, что книга не нова, не делает ее неинтересной.

Недостатком книги является также и ее, несомненно, тяжелый язык.

По стилю своему это скорее легкая книга по математике, чем трудная книга по истории. Но это происходит потому, что она насыщена богатым содержанием, которое уложено на сравнительно небольшом объеме. Для читателя, который хочет думать над затрагиваемыми здесь вопросами, этот недостаток книги не покажется, однако, столь серьезным. Читателю же, ищущему более легкого чтения, эту книгу рекомендовать нельзя.

Гораздо более серьезным недостатком книги является то обстоятельство, что очень часто автор заходит слишком далеко в модернизации изложения. Нельзя сказать, чтобы автор вовсе игнорировал вопросы стиля эпохи, но при чтении книги нельзя создать себе об этом стиле выпуклого представления. Отчасти этот недостаток должен был быть, по мысли автора, восполнен изучением оригинальных работ. Из предисловия к датскому изданию мы узнаем, что книга предназначена для преподавателя, который должен быть, согласно требованию программы установленных испытаний, знаком с текстом „Начал“ Евклида и „Геометрии“ Декарта. К сожалению, у нас не только не существует этого требования, но даже еще нет на русском языке ни полного текста „Начал“, ни декартовой „Геометрии“*.

При этих условиях модернизация изложения является, безусловно, значительной помехой для овладения математикой минув-

* „Геометрия“ Декарта сейчас готовится к печати. „Начала“ Евклида предполагается выпустить в будущем году.

ших веков. Поэтому я настоятельно рекомендую читателю познакомиться с недавно вышедшей „Хрестоматией по истории математики" Вилейтнера. В ней собрано много характерных отрывков из классических произведений, и чтение ее восполнит указанный выше пробел.

Мы видим, таким образом, что появление книги Цейтена, при всей значительности этого факта, не решает еще вопроса о создании такой книги, которая могла бы вполне удовлетворить требованиям читателя-марксиста. Читатель в праве требовать марксистской книги по истории математики. Выполнению этого требования, однако, препятствуют многие обстоятельства, и прежде всего совершенно недостаточное внимание, которое уделяется у нас вопросам истории математики. Как это ни странно, но наши математики интересуются вопросами истории своей науки в гораздо меньшей степени, чем математики капиталистических стран. Если мы эту отсталость ликвидируем, если мы обеспечим соответствующую подготовку наших кадров, если мы обратим внимание на создание материальных предпосылок для возможности научной работы в области истории математики, то мы в ближайшее время сможем ожидать появления марксистских работ в этой области. Но даже при этих условиях создание такого курса, которой охватывал бы ряд эпох и ряд математеческих дисциплин, сопряжено с огромными трудностям и потребует ряда лет.

Пока же мы должны пользоваться тем, что имется в буржуазной литературе, выбирая из нее лучшие произведения. Я думаю, что курс Цейтена, несмотря на все свои недостатки, принадлежит к числу лучших работ этого рода.

М. Выгодский.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ДАТСКОМУ ИЗДАНИЮ.

В предлагаемой „Истории математики“ я пытался выдвинуть на первый план, главным образом, то, что необходимо знать студентам и преподавателям математики. Для них важно не просто обладать массой исторических фактов, знать имя первого ученого, открывшего ту или иную истину, предложившего тот или иной метод, для них важно, скорее, уяснить себе точным образом формы проявления новых истин и методов, а также сделанные из них приложения. Наряду с этим точное знание генезиса этих истин и методов является необходимым условием понимания медленной эволюции форм математического мышления, приведшей математику к ее современному состоянию.

Настаивая с особенной силой на этом пункте, я поступаю в полном согласии с требованиями программы экзаменов на преподавателя математики. Действительно, программа эта требует „краткого обзора истории математики, кроме которого от кандидата требуют обнаружения непосредственного знакомства с „Началами“ Эвклида и „Геометрией“ Декарта.

Этот пункт программы показывает с достаточной ясностью, что от кандидата требуют такого понимания исторических фактов, которые может дать ему только знакомство с прошлым математики.

Однако предлагаемый том касается только древности и средних веков; поэтому из двух вышеназванных авторов я займусь лишь Эвклидом. При каждой ссылке на него я указываю точно соответствующие теоремы, я объясняю места, из которых мы можем почерпнуть какие-нибудь полезные сведения, стараясь, чтобы знакомство с этим автором оказалось плодотворным. В связи с этим я пытаюсь далее сообщить необходимые сведения о других авторах, в частности о таких, сочинения которых, вероятно, никогда не находились в руках читателей. И если я использовал „Начала“ Эвклида для объяснения логических форм изложения, которые так строго соблюдали греческие математики, то все же я не придерживался только того смысла, который они имели для греков: в набранных петитом дополнениях я рассматриваю их внутреннее, имманентное значение, что, как я надеюсь, позволит будущим преподавателям выделить среди этих форм те, которые достойны сохранения, отбросив остальные.

Считаясь со всеми этими обстоятельствами, а также с необходимостью не слишком увеличивать размеры книги, приходи лось подобрать наиболее существенные и наиболее надежные факты. Впрочем, в этом отношении задача была мне крайне облегчена наличием лекций по истории математики Кантора (Cantor), труда, излагающего с исключительной полнотой и добросовестностью все исторические факты. Работа Кантора оказала мне также немалые услуги во время специальных исследований, требовавшихся планом моей книги. Разумеется, материал для этих исследований я почерпнул, главным образом, путем непосредственного изучения трудов главнейших математиков, рассматривавшихся мной эпох, но все же приведенные у Кантора извлечения из них явились превосходной подготовкой для моих собственных занятий, даже в тех случаях, когда в дальнейшем ходе своего исследования я пришел к иному пониманию и по-иному использовал эти материалы, чем он. Кроме того, я знал, что могу вполне спокойно положиться на его оценку содержания работ второстепенных авторов, работ, которые или вообще не были мне доступны, или с которыми, по чисто случайным обстоятельствам, я не мог познакомиться непосредственным образом.

Но я опираюсь на Кантора не только в вопросах чисто фактического порядка, я придерживаюсь также вообще его суждений об эпохах, когда математика находилась в состоянии регресса или, по меньшей мере, не обнаруживала ни одного из элементов того истинного прогресса, прослеживание которого является целью предлагаемой книги. Так, например, мои соображения о счете с помощью абака в средние века и о происхождении этого счета являются непосредственным результатом остроумных и проницательных исследований Кантора.

Занимаясь изучением сохранившихся трудов великих математиков, их связей друг с другом, математических работ, известных только по отчетам о них, я, разумеется, пользовался существующей в настоящее время обширной литературой по истории математики.

Но дидактический характер предлагаемой книги помешал мне указать в каждом отдельном случае то, чем я обязан тому или иному автору. Действительно, если бы я захотел это сделать, то мне пришлось бы не просто ограничиться изложением заимствованной мной мысли или идеи, но и объяснить происшедшие с ними в результате моей собственной работы над ними изменения, а также объяснить, почему я подвергнул их этим изменениям. Для всего этого у меня нехватило бы места; поэтому я ограничился кратким изложением соображений, в силу которых я останавливаюсь в конце концов на таких-то и таких-то концепциях.

Однако в другой своей работе я отвел место такого рода углубленному анализу, и в ней я отметил все то, чем я был обязан каждому отдельному автору: я имею в виду свою книгу о „Теории конических сечений в древности" (Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6-e Raekke, 3-e Bind, 1885. Нем. изд. R. v. Fischer-Benzon., Копенгаген, Andr.-Fred. Höst. et Sön, 1886).

Правда, в этой книге я говорю лишь о высшей геометрии в древности, но она, разумеется, теснейшим образом связана с элементарной математикой, и я поэтому должен был объяснить свое понимание существеннейшей части этой области математики, понимание, которое, в свою очередь, имеет ближайшее отношение почти ко всем вопросам, разбираемым в предлагаемом томе.

Поэтому я ограничусь здесь перечислением ученых, труды которых по истории математики оказали то или иное влияние на мои собственные исследования, а значит, и на предлагаемую книгу. Это: Шаль (Chasles), Бретшнейдер (Bretschneider), Ганкель (Hankel), Кантор, П. Таннри (Tannery), Гейберг (Heiberg), Альман (Allman) *, затем, как издатели переводчики и комментаторы — Гейберг, Гультш (Hultsch), Вертгейм (Wertheim), Кольбрук (Colebrooke), Вёпке (Woepcke), Бонкомпаньи (Boncompagni).

Однако к этим общим ссылкам, а также к тем, которые имеются уже в моей „Теории конических сечений в древности", мне надо прибавить еще следующие: П. Таннри (Géom. Gr., стр. 89 и сл.) я обязан объяснением (стр. 55) того, что сообщается о геометрии Фалеса, а также объяснением (стр. 91) положения Пифагора, что „вещи суть числа" (Géom. Gr., стр. 124). Наконец, основательный и остроумный труд того же самого автора Recherches sur l'Astronomie ancienne (Paris, 1893) попал в мои руки лишь тогда, когда моя книга уже печаталась, но тем не менее он позволил мне изменить ненапечатанные еще параграфы о вычислительной геометрии и о сферической геометрии греков. Но, разумеется, в книге, подобной предлагаемой теперь работе, я мог лишь с большой осторожностью использовать то, что сам автор называет *гипотезами*; я должен был поступить так даже и тогда, когда его объяснения казались мне самыми естественными, но когда дело шло о фактах, относительно которых в сохранившейся от древних литературе не содержится достаточно данных.

Копенгаген, сентябрь 1893 г. Г. Г. Цейтен

---

* Обширный труд Лориа (Loria), Le Scienze esatte nell' antica Grecia, 1-2, еще не вышел тогда в свет.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ.

Как уже указано в предисловии к датскому изданию, предлагаемая книга предназначалась первоначально для студентов нашего датского университета. В соответствии с экзаменационной программой этого университета на занятие преподавательской должности, ряд важнейших параграфов нашего изложения является почти простым комментарием к эвклидовым „Началам“; при этом предполагается, что читатель в состоянии проверить сам приводимые из этого труда места. Однако указанное обстоятельство вряд ли помешает нашей работе быть полезной и для иностранца: действительно, чтобы, вообще, правильно понять эволюцию математики, необходимо познакомиться в оригинале, по крайней мере, с тем трудом, который имел основоположенное значение в ходе всей этой эволюции.

Скорее, может быть, должно было бы остановить меня то обстоятельство, что я пытаюсь найти доступ для исторической работы, опирающейся в историческом отношении на труды современников, вне того круга, для которого она первоначально предназначалась. Но книга эта является в то же время плодом самостоятельной и личной работы, скорее математического порядка, именно, углубленного изучения великих математиков тех эпох, о которых идет в ней речь. В своем исследовании я не ограничивался констатированием фактов, вроде того, что такой-то и такой-то автор знал такую-то или такую-то теорему и доказывал ее таким-то или таким-то способом; не довольствуясь этим, я пытался понять, исходя из обстановки рассматриваемой эпохи, почему указанная теорема и доказательство ее должны были быть облечены в такую-то или такую-то форму. Объяснение этого потребовало от меня лично столько времени и размышлений, что я имею право считать полезным изложение результатов его, по крайней мере, для тех читателей, которые не располагают достаточным для такого рода самостоятельных исследований досугом.

Так как поставленная мной себе задача совпадает во многих отношениях с задачей, выполненной Ганкелем в его книге „Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter“ (Leipzig, 1874), то я спешу прибавить, что именно эта умная книга пробудила во мне охоту к такого рода исследованиям. Однако я надеюсь, что моя работа не окажется излишней, ибо, во-первых, преждевременная смерть помешала Ганкелю рассмотреть много весьма существенных проблем, а во-вторых, я имел возможность опираться на более новые исследования, позволившие мне притти в ряде случаев к совсем иным результатам, чем полученные Ганкелем. Должен заметить, что из современных авторов я чаще всего руководился теориями Поля Таннри.

Наиболее существенное из изменений, внесенных в настоящее издание, заключается в том, что для эпохи Герона я мог опираться на результаты самых последних исследований, отлично гармонирующие с общим впечатлением, получаемым от сохранившихся трудов этого автора; наконец, в немецком издании я смог учесть полнее, чем в датском, результаты „Исследований по древней астрономии“ П. Таннри.

В заключение, я желаю выразить свое удовлетворение по поводу того, что перевод этот выполнен таким опытным и добросовестным ученым, как профессор фон-Фишер-Бенцон (Fischer-Benzon).

Г. Г. Цейтен.

Копенгаген, июль 1895 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ФРАНЦУЗСКОМУ ИЗДАНИЮ

Предпринятое фирмой Готье-Виллар французское издание позволило мне внести дополнения и поправки, требуемые новейшими успехами в истории математики, достигнутыми со времени появлений предыдущих изданий.

Прежде всего я отмечу достижения в этой области ф. Браунмюля (Braunmühl), собранные в частности в его Vorlesungen über geschichte der Trigonometrie, т. I, 1900. Надо, впрочем, заметить, что в одном пункте я разошелся с ним, в силу соображений, изложенных мной в одной статье в Bibliotheca mathematica, 3 серия, т. I. Точно так же я принял во внимание данное Гульчем объяснение по поводу квадратных корней Архимеда, а также некоторые критические замечания Курце (Curtze) в рецензии на немецкое издание моей книги. Наконец, приведенное на стр. 51 замечание об одной выкладке Геродота принадлежит Гейбергу.

Я должен еще поблагодарить Жана Маскара (Mascart) за ту заботливость, которую он обнаружил, стараясь передать по возможности точно мою мысль. А читатели, как я уверен, будут подобно мне благодарны Полю Таннри, краткие примечания которого, отмеченные буквой (Т), содержат в себе крайне интересные и ценные указания.

Г. Г. Цейтен.

Копенгаген, сентябрь 1901 г.

ВВЕДЕНИЕ.

1. Математика в доисторические времена. Во всяком историческом курсе встает всегда вопрос: с чего начать?

Можно начать с того момента, когда появляются положительные достоверные факты, имеющие своим непосредственным результатом положительное, достоверное знание; дело историка в этом случае установить с точностью этот результат.

Можно, с другой стороны, начать с *пред-истории*, которую приходится в таком случае конструировать на основании массы разнообразнейших данных и фактов, не имеющих — взятые порознь — значения подлинных исторических источников. В этом случае фактами, наиболее близкими к историческим фактам в тесном смысле слова, являются предания и сказания о нравах и событиях, предания, сохранившиеся в древнейших документах и относящиеся к еще более отдаленным эпохам. Объяснение этих преданий основывается на открытиях изготовлявшихся и употреблявшихся в те далекие времена предметов. Значение этих находок выясняется путем сравнения и отнесения их к определенному месту и эпохе, причем они, в свою очередь, содействуют уяснению отношений, существовавших между местами, где они были сделаны, а также выяснению вопроса о хронологической преемственности рас, пользовавшихся найденными предметами. Соображения этого рода применимы не только к материальным предметам, сохранившимся до нашего времени, но и к тем словам, которые встречаются в различных известных, живых или мертвых, языках и возраст которых может быть благодаря этому установлен: слова эти — свидетели древнего знакомства с соответствующими понятиями.

Чтобы использовать полученные таким образом материалы, приходится прибегнуть еще к другого рода данным. Допустим, что мы желаем составить себе представление о том, как изготовляли и как пользовались каким-нибудь предметом, или же о том, как образовалось известное понятие, связавшееся затем с другими, существовавшими уже до того, идеями. Для этого надо прежде всего знать, как, вообще, может иметь место такого рода факт и как он мог быть осуществлен в действительности с теми ресурсами и понятиями, какие мы в праве приписать тогдашней эпохе.

Судить об этом довольно трудно, особенно современному цивилизованному человеку, привыкшему пользоваться массой вещей и средств действия материального и духовного порядка, значения которых он часто не знает, равно как не знает и того, какие из них он может заменить легко, а какие с трудом, другими вещами. В качестве опорных пунктов у нас имеется прежде всего возможность наблюдать собственных детей, а также нецивилизованные народы или же народы, цивилизованные по-иному, чем мы. В свою очередь, данные до-истории помогают нам лучше понять развитие познания у ребенка, а также нравы и обычаи различных народов.

Мы видим, таким образом, что в изучение *пред-истории* должны внести свою лепту как профессиональные историки и археологи, так и натуралисты и филологи, классифицирующие одни — свои находки, другие — слова согласно их возрасту и соответственным отношениям, а также педагоги, психологи, гносеологи, этнографы. Если в области пред-истории возникает какой-нибудь специальный вопрос, то дело соответствующего специалиста установить лично внутреннюю связь доставляемых ему в хаотическом беспорядке фактов. Но все вышеперечисленные ученые выиграют, каждый в своей области, от производимых в таком духе исследований по пред-истории.

Математика тоже имеет свою пред-историю, и не последнюю по значению.

Если отграничить точным образом проблематику этой пред-истории, то она может привести к сравнительно надежным и ясным результатам. Мы узнаем в ней, как первобытные народы рассматривали величины при помощи чисел и геометрических представлений; это позволяет понять нам, как они могли подчинить себе землю, а также облегчает нам истолкование сведений насчет их жизни и деятельности, получаемых нами из других источников. Раскрывая перед нами основу, на которой впоследствии человечество должно было воздвигнуть здание более рациональной математики, она в конечном итоге помогает нам в деле более глубокого понимания теоретико-познавательной основы первичных и важнейших понятий этой науки.

Чтобы осветить мрак *пред-истории* математики, надо спросить у филологов, какова древность слов, обозначающих простейшие числа, и какими средствами пользуются в различных языках для выражения группировки чисел по десяткам, двадцаткам и т. д. или каким-нибудь иным способом, пригодным для деления мер или монет (двенадцатиричная, шестнадцатиричная и т. д. системы). В надписях и старых писаных памятниках надо выискать обозначения сперва простых чисел, заключающиеся для древнейших эпох по большей части в каком-нибудь знаке или символе для каждой единицы; затем менее простые знаки составных чисел, которые могут, например, состоять из повторения знака для каждой десятиричной единицы, как у римлян. Надо открыть первый след употребления этих знаков или же механических средств для выполнения простых вычислений: ведь возможно открыть знаки арифметических действий даже в идеографическом письме древних, как, например, в египетских папирусах, где птичья лапка, в зависимости от ее расположения, указывает ясным образом, что следует прибавить или отнять известное число, иначе говоря, играет роль наших знаков + и —.

Что касается идеи пространства, то первое встреченное нами изображение может служить доказательством того, что люди представляли себе уже тогда фигуры, из которых одни являются в малом тем, чем другие в большом, т. е. представляли себе подобные фигуры. Это свидетельство будет тем убедительнее, что ввиду незнакомства тогдашних художников с законами перспективы они пытались, хотя часто и с ничтожным успехом, добиться реального подобия. Это намерение было, безусловно, сознательным, если рассматриваемое изображение имеет то же число измерений, что и копируемый предмет, следовательно, если оно является скульптурой либо же, если представленный своими контурами на плоскости предмет является сам плоским или же может быть рассматриваем, как плоский. Это относится в особенности к тому случаю, когда названное изображение можно рассматривать, как модель, как карту или план здания, — и тем более, если в нем можно видеть попытку начертить геометрическую фигуру. Так как, в конце концов, при первом приложении таких фигур к практическим целям—для потребностей человека или же для обучения детей — очевидно, неважно, будут ли они нарисованы несколько большими или меньшими, то мы имеем в них доказательство сознательного употребления подобных фигур еще задолго до того, как могли дать точное определение подобия фигур.

Одна древнеегипетская погребальная комната с ее незаконченными украшениями показывает нам, как изображения этого рода привели планомерным образом к достижению подобия. Действительно, мы видим здесь, что для перенесения некоторого изображения в новом масштабе на стену эту последнюю и служившее моделью изображение разделили с помощью двух систем параллельных прямых на квадраты, внеся затем в каждый квадрат стены то, что имелось в соответствующем квадратике модели. Прием этот состоит по существу в употреблении прямоугольных координат, выраженных целыми числами, причем за единицу берется сторона квадрата. Соответственными точками здесь являются те точки, координаты которых, взятые попарно, находятся между собой в данном отношении.

При более глубоком исследовании древних рисунков или украшений, следует в особенности разыскивать фигуры, которые могут указать нам на знакомство с некоторыми простыми геометрическими построениями или которые свидетельствуют, по крайней мере, о геометрическом представлении фигур. Уже на самой заре цивилизации мы встречаем попытки изображения перпендикулярных и параллельных прямых. У более культурных народов эти линии проводили, несомненно, с помощью механических средств (вначале, может быть, средств столь же простых, как и те, которые употребляем в настоящее время и мы, желая провести прямые линии, параллельные или перпендикулярные линии и пользуясь для этого веревкой или же сгибая бумагу и т. д.). Однако когда этими линиями стали пользоваться для передачи, как мы выше указывали, какой-нибудь модели в новом масштабе, то должны были прибегать к более совершенным построениям.

Орнаменты, в которых встречаются различные комбинации правильных шестиугольников, свидетельствуют о знакомстве с простым построением этой фигуры, проведение которой не требует даже усовершенствованного циркуля. Зато мы тщетно искали бы даже у народов с довольно высокой культурой употребления правильного пятиугольника или десятиугольника, фигур, построение которых более сложно. На старых памятниках Египта ни разу не встречаются эти многоугольники.

Остатки сохранившихся построек имеют не меньшее значение, чем рисунки. Уже на первых ступенях развития народов можно заметить усилие придать плану здания определенную фигуру, фигуру прямоугольника или круга. При возведении более совершенных сооружений, как, например, египетские храмы и пирамиды, пришлось прибегнуть к геометрическим приемам для построения прямых углов. Это тем более бесспорно, что сооружения эти расположены в точности по направлению главных стран света: для достижения этого умели, очевидно, учитывать кульминацию солнца. Формы пирамид свидетельствуют о знакомстве с определенными геометрическими фигурами; нужны были большие предосторожности, чтобы придать им точную форму, равно как необходимо было довольно серьезное знакомство с механикой, чтобы обеспечить равновесие таких гигантских сооружений, как египетские храмы, стоящие еще до нашего времени на своих основаниях, или же чтобы перенести и воздвигнуть обелиски.

Я старался изложить здесь, что следует понимать под предисторией математики, и указать некоторые из способов, при помощи которых ее можно изучать. Я надеюсь также, что дал понять, какое важное значение могут приобрести исследования этого рода, но размер предлагаемых лекций не позволяет мне остановиться подробнее и основательнее на этих вопросах; я вынужден в силу этого обойти молчанием не только доисторическую математику, но в большей ее части и *до-научную* математику, под которой я понимал совокупность правил, полученных эмпирическим путем или с помощью случайного экспериментирования — может быть, так было найдено деление окружности на шесть частей — или же, возможно, в более древние времена, с помощью более точных исследований, в настоящее время утерянных и, следовательно, доисторических. О до-научной математике я скажу лишь минимум того, что необходимо знать, чтобы составить себе представление об объеме сведений, имевшихся до возникновения научной математики и послуживших основой для создания последней. Поэтому, в качестве введения к греческой математике, я изложу то, что греки, вероятно, заимствовали у египтян и вавилонян.

Но, с другой стороны, я буду рассматривать арифметику (le calcul) греков только, как до-научное введение к арифметике индусов, изобретших употребляемое в настоящее время *позиционное* представление чисел с помощью цифр. Действительно, числовая математика (calcul) греков была во всех отношениях гораздо ниже того, что они знали в других областях математики; с другой стороны, хотя их великие математики могли с успехом пользоваться своими численными знаками и своими средствами вычисления, но мы не можем извлечь из этого ничего, что стояло бы выше до-научной математики. Впрочем, это утверждение нуждается в известном ограничении: возможно, что после более тщательного исследования эти методы вычисления окажутся более совершенными, чем они представляются нам в настоящее время*.

Действительно, грубая ошибка, — оказавшаяся пагубной не только в исторических изысканиях, подобных нашим исследованиям, но и в этнографии, — грубая ошибка определять ценность какого-нибудь открытия только по его большей или меньшей близости к тому, чем пользуется современный цивилизованный человек, или же относиться пренебрежительно к тому, чем отказывается пользоваться наш современник просто в силу невежества или непонимания.

2. Египтяне и вавилоняне. Переходя к обоим этим народам, мы, как уже сказано выше, коснемся лишь вкратце их математических достижений и познаний в эпоху, когда они вступили в сношения с греками, получившими, таким образом, возможность заимствовать у них эти сведения.

Начнем с египтян.

Все без исключения греческие писатели сообщают, что учителями их древнейших собственных ученых были египтяне; они рассказывают также, как им открылась наука египетских жрецов. По их словам, геометрией египтян побудили заняться разливы Нила и необходимость после окончания их водворить каждого в точности на его участке. Ясно, во всяком случае, что огромная ценность узких, но плодородных полос земли между пустыней и рекой принудительно требовала точного измерения земли.

Важность установленных египтянами в этой области правил видна из следующего факта: уже после того, как греки развили столь блестящим образом геометрию, именно этими египетскими правилами пользовались по существу римские землемеры (agri — mensores), ибо они, наверное, довольно плохо понимали правила, установленные греками.

---

* Поль Таннери, крупнейший авторитет в этих вопросах, заявляет, что после практического упражнения с греческими числовыми знаками он убедился, что они гораздо более пригодны для вычислений, чем это кажется нам, привыкшим с детства манипулировать совсем другой системой знаков.

Обладая высокой во многих отношениях цивилизацией, ведя обширную торговлю и возводя, как мы уже указали, крупные сооружения, египтяне нуждались в известных способах вычисления и в геометрических знаниях, выходящих из рамок одного лишь землемерного искусства. Другим доказательством известной высоты достигнутого ими уровня знаний в математике является их астрономия, далеко уступающая, впрочем, по своему значению вавилонской астрономии.

Что касается математических познаний египтяп в сравнительно более близкие к нам времена, то мы можем судить о них отчасти по тому, чему научились у них греки, а впоследствии римляне, отчасти же на основании прямой традиции по некоторым текстам. Во всяком случае, это, повидимому, очень мало отличалось от того, что они знали уже около 2000—1700 гг. до начала н. э., если судить по очень древнему папирусу, по *руководству к вычислениям писца Ахмеса* (*Ahmes*). Это собрание задач с соответствующими решениями их является поэтому лучшим источником для ознакомления с египетской математикой и искусством вычисления.

Обращаясь к этому источнику, а также к некоторым другим, мы, согласно плану нашей работы, не намерены останавливаться подробно на вопросе о том, как египтяне изображали целые числа и пользовались ими для счета. Что касается дробей, то они разлагали их на *доли* (quantièmes) *единицы*, т. е. на дроби с числителем *единицей* или *a*. Руководство Ахмеса содержит таблицу подобных разложений дробей с числителем 2 и знаменателями от 3 до 99, таблицу, кончающуюся разложением $\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$. Впрочем, этот тип разложения употреблялся и греками; как бы мало практичным оно ни казалось с внешней стороны, пользование им давало возможность заметить разнообразный состав целых чисел.

При помощи особого исчисления, называвшегося Хау (Hau), египтяне умели разрешать задачи, выражающиеся на нашем теперешнем математическом языке уравнениями первой степени с одним неизвестным $ax+bx+cx+\ldots=d$, где $a, b, c, \ldots, d$ представляют целые числа или же дроби, составленные из долей единицы. Кроме того, они занимались задачами, относящимися к правилам товарищества; решение некоторых задач этого рода предполагало знание простых арифметических и геометрических прогрессий.

При решении задач, которые в случае алгебраического выражения их зависели бы от уравнений вышеприведенного вида, мы впервые встречаем употребление правила *ложного положения*, с которым нам придется впоследствии иметь часто дело. Метод этот состоит в постановке вместо x пробного значения x_1; если употребление этого значения дает d_1 вместо d, то $x=x_1\cdot\frac{d}{d_1}$.

В геометрии, как мы уже сказали, одной из важнейших проблем являлось определение площадей.

Египтяне, как и некоторые другие народы, пользовались обыкновенно для определения площади четыреугольника со сторонами a, b, c, d неверной формулой:

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2},$$

а для определения площади треугольника со сторонами a, a и b формулой

$$a\frac{b}{2},$$

являющейся пределом предыдущей. Впрочем, формулы эти не дают плохого приближения, если углы четыреугольника или прилегающие к стороне b треугольника углы не на много отклоняются от прямого угла. Выражение площади содержит в этих случаях ошибку, так сказать, *второго порядка*. Хотя общий характер этих формул мог побудить к употреблению их в других случаях, но египтяне — насколько можно судить на основании величины сторон в сохранившихся до нас примерах — пользовались ими предпочтительно тогда, когда они давали хорошие приближения; наоборот, подражатели египтян, римские землемеры, пользовались ими даже в случае равностороннего треугольника, несмотря на то, что для данного случая они имели в своем распоряжении лучшие методы вычисления.

Египтяне для определения площади круга с диаметром d пользовались формулой $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$; это дает для π значение $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ или 3,16. Употреблявшиеся египтянами формулы показывают, что они подобно нам принимали за единицу площади квадрат со стороной, равной единице длины. Для построения прямых углов на плоскости пользовались, повидимому, треугольником со сторонами соответственно равными 3, 4 и 5; а при построении пирамид или, по крайней мере, при определении их размеров пользовались, кажется, отношением между полудиагональю основания и ребром, т. е. тем, что мы теперь называем *косинусом* угла, образуемого ребром с плоскостью основания.

Впрочем, если Демокрит в эпоху, когда греческая геометрия стояла уже на довольно значительной высоте, мог ссылаться, как на доказательство своего искусства в геометрических построениях, на тот факт, что его ни разу не превзошли египетские гарпедонапты* (натягивающие веревку), т. е. люди, которые должны были, соблюдая торжественные обычаи, следить за тем, чтобы храмы были в точности расположены по солнцу, то трудно предположить, чтобы знания таких людей ограничивались такими простыми построениями, как упомянутые нами выше.

* Слово это греческое; предполагают, что оно является переводом какого-то египетского термина (Т.).

Если египтянам греки обязаны, главным образом, побудительным толчком к созданию геометрии, — той части математики, которую они в особенности усовершенствовали впоследствии, то у вавилонян, с другой стороны, они научились астрономии и произведению употребляемых в этой науке выкладок. У вавилонян надо искать источник употребляемого еще и в настоящее время деления окружности, согласно шестидесятиричной системе, на градусы, минуты и секунды.

Деление на 360° ($= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$) связано, может быть, с тем, что в древнейшие времена год считали равным 360 дням. Что же касается распространения этого шестидесятиричного деления, то оно могло зависеть отчасти от того же самого факта, отчасти от выгод, представляемых системой, основное число которой $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, состоящее из наименьших первых чисел, содержит в себе в качестве множителей значительное количество небольших чисел. Найдено доказательство планомерного употребления этой числовой системы в надписях, содержащих таблицы квадратных чисел до 60^2 и кубических до 32^3, написанных шестидесятиричным образом; надписям этим несколько тысяч лет.

Весьма вероятно также, что различные спекуляции над числами, давшие начало ряду изысканий греков о целых числах, имеют своим источником мистические идеи халдеев и вавилонян.

ГРЕЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА.

1. Исторический обзор. Так как при рассмотрении греческой математики нам придется часто иметь дело на протяжении долгих периодов с разными проблемами частного порядка, то небесполезно будет с самого начала дать краткий общий исторический обзор, изложив в нем, с одной стороны, в какой хронологической последовательности происходила эволюция нашей науки и какие математики над этим работали, а с другой, — условия деятельности этих математиков.

Центральной фигурой в истории развития греческой математики является Эвклид, живший около 300 г. до начала н. э.

Его „Начала" представляют трактат по геометрии, которым все еще пользуются во многих странах для дидактических целей и который заключает в себе систему элементарной геометрии, основные принципы коей в разных формах положены повсюду в основу преподавания. В этом труде мы должны, с одной стороны, искать ключ к пониманию имеющихся в нашем распоряжении разрозненных данных о состоянии греческой математики в предшествующие эпохи, ибо эти данные сходятся, как в фокусе, в факте возникновения эвклидовой геометрии; с другой стороны, этот труд должен дать нам необходимые элементы для понимания позднейших писателей, ибо он явился основанием, на котором они продолжали строить. Даже с точки зрения чисто внешней истории нашей науки Эвклид является центральной фигурой: он был первым великим математиком так называемой *александрийской* школы, и работал он в иных условиях, чем его предшественники.

Развитие *доэвклидовой* математики охватывает три предыдущих столетия, обладающих каждое своим особенным характером.

Первым греческим математиком был Фалес милетский, предсказавший солнечное затмение 28 мая 585 г. Для этого он, вероятно, воспользовался правилами, почерпнутыми непосредственно у египетских жрецов и подтвержденными долгими годами наблюдений. Точно так же и большинство его математических познаний имеет, наверное, своим источником египетскую мудрость. Но самое существенное, во всяком случае, то, что в лице его и основанной им философской школы (так называемой ионийской школы) греки не только начали систематизировать математические знания, которые они могли заимствовать у египтян, но и начали расширять математику в разнообразных направлениях. Эта совершавшаяся в VI в. работа протекала сначала на малоазийском побережьи, а благодаря деятельным торговым сношениям перекинулась и в другие страны, в которых утвердились греки.

И вот в V в. главным очагом процветания математики оказывается совсем другая страна, а именно южная Италия. В V в. пришли к убеждению, что открытые и собранные мало-помалу математические истины нуждаются в прочной основе; занимаясь установлением этих основ, одновременно использовали доказанные истины, как исходный пункт для дальнейших важных открытий.

Виднейшую роль в этом процессе традиция приписывает Пифагору самосскому; поэтому мы относим его к V в., хотя его деятельность происходила отчасти до 500 г. В Великой Греции, как называли тогда цветущие греческие колонии южной Италии, он основал философскую школу, тесно замкнувшуюся и старавшуюся, повидимому, при помощи мистических церемоний и сохранения в тайне своих учений, удержаться в этой замкнутости. Эта аристократическая школа сделала попытку выступить и на политическом поприще, но вызвала недоброжелательное отношение со стороны непосвященных в ее догматы и была разгромлена, когда демократы захватили власть в Великой Греции.

Значительно позже неопифагорейцы стали утверждать, будто их по большей части религиозные и этические доктрины восходят к Пифагору, и окружили жизнь своего мнимого духовного отца такой массой легенд, что теперь трудно выделить среди них заключающуюся в них частицу истины. Для нас в этих преданиях представляют некоторый интерес только сообщения о его путешествиях в Египет, куда он мог, действительно, отправиться, как впоследствии Платон и Эвдокс, и о весьма сомнительном путешествии в Вавилонию. Замкнутый характер его школы имел важное значение для развития математики, ибо он обеспечил активное сотрудничество в общей работе людей, отлично понимавших друг друга; но, с другой стороны, благодаря этому мы очень плохо знаем, что собственно принадлежит учителю, а что ученикам.

Впоследствии, когда школа рассеялась, ее математические теории распространились во всех местах, где утвердились греки; но в некоторых странах эти теории, наверное, смешались с результатами работы других исследователей в области философии или математики. Поэтому в математических трудах Демокрита из Абдеры (родился около 460 г. до начала н. э.) трудно определить ту более или менее значительную долю, которой этот столь оригинальный мыслитель обязан пифагорейцам.

Старший современник Демокрита, Гиппократ хиосский, жил в Афинах, где он преподавал математику после того, как он потерял свое приобретенное торговлей состояние. Он, может быть, научился кое-чему у пифагорейцев, но он ни в коем случае не принадлежит к их школе и имеет для нас особенное значение потому, что мы имеем от него целый отрывок по геометрии, единственный образчик этого рода, сохранившийся до нас от V в.

Кроме того, он жил в Афинах, городе, готовившемся уже стать центром духовной жизни, очагом греческого искусства и науки, полем битвы между философами и софистами, среди которых, например, Гиппий из Элиды был довольно крупным математиком, — в городе, наконец, который должен был век спустя стать центром развития математики.

В это время в южной Италии продолжалось развитие пифагорейских теорий; в конце V в. мы находим здесь одного замечательного математика Архита тарентского, которого определенно называют последним крупным пифагорейцем. Он жил в своем родном городе, где он выделялся как государственный деятель и полководец, с одной стороны, и как математик, с другой.

Благодаря именно Архиту и его непосредственным преемникам плоды развития старой пифагорейской школы были переданы тем, кто стал руководителем математического движения в IV в., именно, Платону афинскому и Эвдоксу книдскому; действительно, оба они во время своих научных путешествий в Великую Грецию познакомились с Архитом и испытали его влияние.

Прежде чем остановиться подробнее на жизни этих двух мужей и на их школах, я хочу прибавить к своим замечаниям о предшествующих двух веках еще несколько слов для общей характеристики IV в. Уже начиная с этого времени, стало ясно, что полной строгости в математике можно добиться лишь, построив стройную систему ее. Отчасти благодаря неоднократным попыткам построения таких систем, отчасти же благодаря прогрессу методов, необходимых для расширения и усовершенствования науки, удалось поднять геометрию на ту высоту, на которой мы застаем ее у Эвклида. Одновременно с этим приступили к разработке высшей геометрии, в которой особенно крупное значение приобрела теория конических сечений.

Платон (429—348), великий философ, ученик Сократа, является основателем школы, получившей название *Академии* по имени того места в Афинах, где ученики собирались вокруг своего учителя. Свое пристрастие к математике Платон не мог заимствовать у Сократа, стремившегося ограничить ее одними практическими потребностями, но Сократ не был его единственным учителем, и после смерти его Платон имел возможность познакомиться с математикой и философией пифагорейцев сперва в Киренаике, а затем в Великой Греции. В Киренаике он изучал математику у того же самого учителя, что и другой выдающийся математик — афинянин, Теэтэт, по имени которого он назвал один из своих диалогов, — возможно даже, что они были в Киренаике одновременно *; в Сицилии он завязал дружбу с Архитом. Платон посетил также Египет.

Желая выяснить точно, в чем собственно заключалось влияние Платона на ход развития математики, мы наталкиваемся на те

* В платоновском Теэтэте рассказывается, что Теодор из Киренаики преподавал в Афинах во времена Сократа; это представляет более надежный факт, чем рассказы о мнимом путешествии Платона в Киренаику (Т.).

же трудности, что и в случае с Пифагором; подобно тому, как неопифагорейцы приписывали все Пифагору, так члены новой академии поступали с Платоном. Правда, они не приписывали ему крупных математических открытий, но они охотно связывали с его именем употреблявшиеся в его время методы и изображали его также советником тех ученых, благодаря которым были достигнуты успехи в математике.

Как ни малоправдоподобны все эти факты, Платон тем не менее остается тем учеником Сократа, который больше всех прочих явился инициатором духовного оживления, привлекшего из всех греческих государств и колоний в Афины людей, стремившихся к знанию. И, во всяком случае, исключительное значение имеет то обстоятельство, что он живо интересовался математикой и ее успехами. Может быть, только легендой является рассказ, будто он приказал начертать на входе в академию надпись: μηδείς άγεωμέτρητος είσίτω — пусть никто не знающий геометрии не входит сюда, но тем не менее из его собственных сочинений ясно, что он считал известное знакомство с геометрией необходимым предварительным условием для понимания философии, а спекуляции, которым он предается в Тимее, в связи с пятью правильными многогранниками обеспечили им навсегда название *платоновых тел*.

Живший после него великий философ Аристотель, много занимавшийся естественными науками, тоже несколько интересовался математическими науками, не обнаружив, впрочем, особенно глубокого понимания их. Но, во всяком случае, отношение обоих этих мыслителей к математике было таково, что математики могли найти для себя место в тогдашних научных обществах, академической школе Платона и перипатетической школе Аристотеля и работать в них в сотрудничестве с другими мыслителями. Математика и философия могли, таким образом, оказывать влияние друг на друга как своими мирными отношениями, так даже и раздорами. Благодаря этому математика стала одним из элементов высоко развитой греческой культуры, а форма, в которую были облечены математические науки в эту эпоху, убедительнее всего показывает, что они развились в кружках утонченных мыслителей, стремившихся выражаться с полной точностью.

Но одна школа имела еще более непосредственное влияние на развитие математики, чем эти знаменитые рассадники философии: мы имеем в виду математическую и естественно-научную школу, группировавшуюся во времена Платона в торговом городе Кизике, расположенном на берегу Мраморного моря, вокруг очень авторитетного врача, астронома и математика Эвдокса книдского.

Молодым человеком Эвдокс посетил Великую Грецию и Египет. В последнем греческому математику в эту эпоху почти нечему было учиться по геометрии, но зато в астрономии для него имели огромную ценность ведшиеся с древнейших времен наблюдения египтян. И Эвдокс сумел использовать их надлежащим образом, воздвигнув астрономию исключительно на данных наблюдения и результатах геометрического исследования и удалив из нее астрологические и другие пустые умозрения. В южной Италии Эвдокс изучил медицину и геометрию, последнюю у Архита.

Связь Платона и Эвдокса с пифагорейцами была, конечно, залогом успешного сотрудничества для обеих основанных ими школ, — сотрудничества, которое, впрочем, вырождалось иногда в ожесточенную борьбу. Взаимоотношения между афинской и кизикской школами не ограничивались, впрочем, случайными сношениями, порождаемыми оживленной торговлей между обоими городами. Эвдокс навестил Афины вместе со своими учениками, получившими благодаря этому возможность посетить лекции Платона; некоторые из них, кажется, стали даже последователями его философии. Наиболее известными учениками Эвдокса были братья Менехи и Динострат. Менехи, как утверждают, писали по вопросам политики в духе платоновской философии.

Спрашивается, каких же результатов достигла за три рассмотренных нами столетия математика, какие были развиты в ней формы доказательства и изложения? Ясное представление об этом мы можем получить, с одной стороны, на основании уровня знаний, которыми вначале располагала при своем возникновении зародившаяся вслед за тем александрийская школа, а с другой,—на основании теорем, которыми пользовался в своих диалогах Платон, и логических форм, установленных Аристотелем. Логические правила Аристотеля находили особенно простое и точное приложение в области математических наук; можно смело утверждать, что они развились именно благодаря употреблению их математиками, и это показывает нам, какую выгоду принесло философии ее (упомянутое выше) сотрудничество с математикой.

Если в дальнейшем изложении мы сможем не ограничиваться только констатированием достигнутого математическими науками уровня, а отметить также и личную роль каждого исследователя и хронологическую связь между различными теориями, то этим мы обязаны разбросанным у позднейших писателей замечаниям по интересующему нас предмету, а также жившему на исходе рассматриваемого нами периода историку математики, перипатетику Эвдему родосскому. Правда, мы не располагаем его собственным трудом, но некоторые важные извлечения из него сохранились у позднейших писателей.

Благодаря одному из таких извлечений, — т. е. следовательно, из третьих рук,—до нас дошли те отрывки из Гиппократа хиосского, о которых мы уже говорили выше.

В результате этого краткого обзора трех истекших столетий получается несколько пестрая картина: математические науки зарождаются на берегах Малой Азии; затем наше особенное внимание привлекает их развитие в южной Италии; после этого центром притяжения для математиков оказываются Афины, занявшие первое место среди греческих государств во всех областях духовной жизни.

Разумеется, изучение математики продолжается также и в других местах, — например в Великой Греции, где через сто пятьдесят лет после Архита родился величайший греческий математик — Архимед, но результатом духовной гегемонии Афин над всем тогдашним миром было то, что труды живших здесь математиков оказались меньше всего подверженными забвению. Значительное распространение занятий математикой в эту эпоху имело своими причинами отчасти деятельные торговые сношения между разбросанными в разных концах мира греками, отчасти многочисленные войны и политические смуты, заставлявшие выдающихся людей бежать из одних мест в другие. Те из них, которые могли оставаться на одном и том же месте — как это было, например, в случае Афин — переживали здесь подобные же треволнения.

Одновременно с этим математикам приходилось, несомненно, вступать в различные духовные битвы, воюя как друг с другом, так и с софистами и философами.

Такова была обстановка, при которой математические науки не только распространились в ряде стран и среди ученых различных специальностей, но и приобрели те формы строгого доказательства и изложения, которые так восхищают нас еще и в настоящее время. В области доказательства нам ничего не остается, как только подражать древним. Что же касается формы изложения, то следует заметить, что строгость здесь получалась за счет удобопонятности. Благодаря этому впоследствии, когда утратилась устная традиция, начался регресс в математике; полное понимание глубокомысленных греческих математиков возродилось лишь в новое время, когда математические науки — отчасти под греческим влиянием — сумели мало-помалу снова подняться на ту же высоту, на которой они стояли в древности.

Впрочем, этот упадок математики, о котором мы только что упомянули, начался — в отличие от поэзии, риторики других искусств и философии — не в тот момент, когда после смерти Александра Великого произошло такое радикальное изменение во внешней обстановке: наоборот, именно тогда наблюдается самый пышный расцвет математики.

Как известно, при разделе монархии Александра Великого, Птолемей, сын Лага, получил Египет с новопостроенным городом Александрией. Птолемей и его преемники сделали из этого города не только важнейший торговый пункт, но и первоклассный научный центр. При нем и при его ближайших преемниках, называвшихся тоже Птолемеями, был основан Музей, где ученые могли заниматься исключительно наукой, не заботясь о хлебе насущном. Птолемеи основали и расширили александрийскую библиотеку, где мало-помалу были собраны копии всех важнейших греческих произведений, какие только удалось раздобыть. Греческая молодежь, стремившаяся к научному образованию, стекалась в Александрию — как это делают и в настоящее время студенты, посещая с этой целью какой-нибудь университет — и слушала лекции местных ученых по грамматике и математике.

Эта обстановка могла быть лишь благоприятной для математических наук, которые нуждались в мире, как для того, чтобы объединить в прочные системы многочисленные разрозненные факты, так и для того, чтобы использовать добытые плодотворные методы и с их помощью подняться на еще более высокую ступень. Для устного преподавания, без которого оказались бы мало понятными и крупные писаные труды, необходимы были тишина и спокойствие. Кроме того, математика стала особой специальной наукой, и для нее необходимы были специалисты, которые не вынуждены были бы вечно ссориться с философами по поводу своей науки или же заниматься сами философией.

Эта специализация александрийской науки не мешала, однако, одному и тому же человеку работать в нескольких отраслях знания. Таким разносторонним ученым был, например, Эратосфен из Киренаики, живший во второй половине III в. и стоявший одно время во главе александрийской библиотеки; кроме философии и грамматики он занимался географией и даже высшей геодезией — он предпринял первое измерение градуса меридиана — хронологией и математикой.

Мир, благоприятствовавший деятельности александрийских математиков, мог, правда, иметь и ряд отрицательных сторон, способствуя пробуждению, например, высокомерия и возникновению кружковщины. Не приходится поэтому жалеть, что величайший математик этой эпохи, Архимед, жил в Сиракузах, а не в Александрии.

Из Сиракуз он посылал аккуратно в Александрию как законченные свои работы, так и неокончательные еще результаты их. Правда, некоторые александрийские ученые хотели присвоить себе кое-какие из его открытий, найдя для них после него свои доказательства, но в один прекрасный день он одурачил их, сообщив им ложные теоремы, для которых они постарались тоже найти доказательства. Пребывание Архимеда вне Александрии имело еще и ту полезную сторону, — с точки зрения нашего знакомства с его трудами, — что он должен был многое излагать письменным образом, между тем как, если бы он жил в Александрии, он ограничился бы устными сообщениями о своих открытиях окружающим его лицам и своим ученикам или, в лучшем случае, изложил бы их письменным образом в приноровленной для понимания последних форме.

Важные труды по чистой математике (геометрии) оставили нам следующие, жившие в этот период, математики, которые, несомненно, стояли на много выше прочих выдающихся современных им математиков: Эвклид (около 300 г. до начала н. э.), Архимед, умерший в 212 г., и Аполлоний (около 200 г. до начала нашей эры).

О жизни Эвклида нам известно мало, но кроме названных нами уже „Начал“ мы располагаем еще другим его трудом, носящим обычно латинское название „Data“. Нам известны, кроме того, в более или менее подлинном виде его сочинение „О делении фигур", астрономический трактат „Phaenomena" и „Оптика", содержавшая наиболее простые теоремы учения о перспективе. Принадлежавшие Эвклиду четыре книги „Конических сечений", две книги „О поверхностных местах", „Поризмы" и сочинения о „Ложных заключениях" утрачены. Однако о содержании их можно догадаться по позднейшим сборникам лемм и по комментариям, так, например, „Поризмы" содержали ряд теорем о трансверсалях и гомографическом делении, вопросах, которыми в настоящее время занимается проективная геометрия.

Архимед, бывший другом царя Гиерона, жил в Сиракузах, где он пользовался большим уважением. Он погиб при захвате римлянами Сиракуз, защите которых он много содействовал своими познаниями в области механики. Можно считать достоверным, что он посетил Александрию, где завязал сношения с рядом лиц, которым он пересылал впоследствии свои работы. Из его трудов до нас сохранились: „О шаре и цилиндре", „Измерение окружности", „О коноидах и сфероидах", „О спиралях", „О равновесии плоских фигур", „Исчисление песка", „Квадратура параболы" и „О плавающих телах" (это последнее сочинение уцелело только в латинском переводе). Кроме того, сохранилось еще, через посредство позднейших греческих и арабских писателей, несколько отрывков, из которых мы назовем сочинение „О полуправильных телах" и ряд геометрических теорем, „Леммы Архимеда"; возможно, впрочем, что „Леммы" эти отчасти позднейшего происхождения.

Что касается Аполлония пергейского, то он, несомненно, работал в Александрии. От него сохранилось семь (из восьми) книг „О конических сечениях", первые четыре по-гречески, а следующие три в арабском переводе. По-арабски же сохранился его трактат „О пропорциональном сечении", между тем как его сочинения „Об определенном сечении", „О сечении пространств", „О касаниях" и „О вставках" известны нам лишь по позднейшим сообщениям о них. Повидимому, Аполлоний сделал также много для приложений математики к астрономии.

Из современников, предшественников и непосредственных преемников этих трех великих геометров назовем: Аристея, который был старшим современником Эвклида и написал утраченные сочинения „О пространственных местах" и „О правильных многогранниках"; названного нами уже раньше Эратосфена; Никомеда, деятельность которого приходится на эпоху между Архимедом и Аполлонием; Диоклеса, Персея, Зенодора и Гипсикла. Этот последний написал книгу о правильных многогранниках, которую обыкновенно включают в популярные издания эвклидовых „Начал" как четырнадцатую книгу их. Что касается прочих, то мы знаем лишь названия некоторых утраченных трудов их или же отдельные разрозненные открытия их, о которых упоминают позднейшие авторы.

Даже после рассмотренного нами только что периода мы встречаемся с крупными достижениями в отдельных отраслях греческой математики, особенно в тех, которые находят приложения в астрономии. Хотя мы не пишем истории этой последней, мы все же дадим здесь краткий обзор деятельности в различные эпохи греческой древности авторов-астрономов, которые заслуживают особого упоминания, благодаря своим трудам, имеющим отношение к математике.

Мы уже имели случай указать, что Эвдокс, которому математика обязана своими наиболее глубокими методами, был также основателем научной греческой астрономии, которая подверглась, однако, довольно скоро внешним влияниям после завоеваний Александра Великого, облегчивших грекам знакомство с древней халдейской астрономией. Великие александрийские математики были, как мы сказали, одновременно и астрономами. Среди них мы должны назвать Аристарха самосского (жившего в эпоху между Эвклидом и Эратосфеном, приблизительно около 270 г. до начала н. э.), творца астрономической гипотезы, воскрешенной через тысячу восемьсот лет Коперником. Работы Эратосфена по математической географии должны были, помимо всего прочего, содействовать систематизации наблюдений, произведенных в свое время халдейскими астрономами.

Повидимому, Аполлоний является творцом многочисленных теорий, благодаря которым в следующую эпоху греческие астрономы добились ряда достижений в вопросах наблюдения и вычисления. Его непосредственными преемниками были, несомненно, александрийцы, но величайший греческий астроном, Гиппарх никейский (около 150 г. до начала н. э.), производил свои наблюдения на о. Родосе. Он извлек все, что только можно, из древних наблюдений холдеев; приблизительно в его время начинается восточное влияние, выразившееся в делении окружности на 360° и во всеобщем употреблении шестидесятиричной системы в астрономических и тригонометрических вычислениях.

Среди позднейших астрономов следует упомянуть в связи с историей математики Менелая александрийского (вторая половина I в. после начала н. э.), от которого до нас дошли в еврейском и арабском переводах три книги „Сферической геометрии", и в особенности Птолемея, жившего лет пятьдесят спустя. „Великое построение" Птолемея — Μεγάλη Συνταξις более известное под искаженным арабским названием „Альмагеста", дает нам наиболее полное представление о греческой астрономии (в пределах так называемой птолемеевой системы) и о связанной с ней тригонометрии. Впрочем, большая часть того, что имеется у Птолемея, принадлежит его предшественникам, в особенности Гиппарху, от которого до нас сохранилось лишь очень немногое.

Если приложение математики к астрономии дало даже после эпохи деятельности великих математиков новый толчок развитию математических наук, то этого отнюдь нельзя сказать о приложении математикм к землемерному искусству и к практической механике. Теоретические основы землемерного искусства были даны уже в греческой геометрии; что же касается теоретической механики, то своими достижениями в древности она обязана особенно Архимеду. Мы знаем на основании позднейших свидетельств, что Архимед и его современники добились крупных успехов в практической механике. Египетское происхождение геометрии и само название ее показывают, что первоначально она применялась в землемерном деле. Действительно, название это означает в точности *измерение земли*, хотя уже со времени Аристотеля землемерное искусство носило специальное название „геодезии". Одновременно с землемерным искусством и по тем же соображениям была отвергнута чистыми геометрами, как нечто ненаучное, логистика или вычислительное искусство. И мы видим, действительно, что эвклидовы „Начала" так же мало интересуются землемерным искусством, как и другими числовыми приложениями математики.

Печальным последствием этого является то, что мы не знаем по первоисточникам, как в эпоху наивысшего расцвета греческой математики применяли практически результаты этой науки. Если не говорить об авторах, писавших по вопросам астрономии, то сведения об этом мы должны искать у еще более поздних писателей. Среди них надо упомянуть в особенности Герона александрийского, деятельность которого еще недавно относили ко времени, непосредственно следовавшему за расцветом александрийской школы, но который, согласно новейшим исследованиям, жил, повидимому, не ранее II в. или конца I в. после начала н. э. Труды его, в которых наряду с точными греческими методами встречаются приближенные египетские формулы различной ценности, сыграли крупную роль, ибо по ним учились землемерному искусству и другим практическим приложениям геометрии в течение долгого периода, когда утратили понимание греческой геометрии с ее точностью или когда уже вообще не знали ее. Они оказались пригодными для этой цели именно потому, что в них рассматривается множество числовых задач.

Значение Герона для истории математики заключается еще в том, что он показывает нам уровень и способ выполнения числовых действий, соответствующих научным результатам греческой геометрии.

Однако с началом нашей эры развитие греческой математики, по крайней мере, в том, что составляет ее величие, приостановилось. Чтобы понять причину этого, коренящуюся в самой структуре греческой математики, надо прежде всего узнать ее самое. Здесь мы можем только отметить, что благоприятные внешние условия, при которых протекала научная работа в первую половину александрийского периода, к этому времени уже исчезли. Уже при некоторых из позднейших Птолемеев ученые не пользовались таким привилегированным положением, как при первых царях этой династии. Когда же в середине I в. до начала н. э. римляне, подчинившие уже себе большую часть областей греческой культуры, стали также владыками Александрии, то обстановка научной работы окончательно ухудшилась. В области математики победители ничему не научились у побежденных.

В дальнейшем александрийская библиотека, эта сокровищница научных знаний, неоднократно становилась жертвой пожаров, и если тем не менее Александрия продолжала оставаться научным центром, в котором лучше всего сохранилась старая математическая культура и в котором по временам наступали периоды нового расцвета математики, то это объясняется тем, конечно, что здесь всегда хранилось большинство творений математиков.

В Александрии в конце III в. н. э. жил Папп. По сравнению с учеными, которые во времена Птолемеев работали в этом городе, это не был, конечно, великий математик, но его „Математический сборник“ приобрел исключительное значение для нас, ибо он дает нам ценные сведения относительно утраченных теперь произведений великих математиков, либо прямым путем, либо косвенным с помощью ряда лемм.

В одной только области были сделаны новые открытия еще во времена Паппа, именно в арифметике. От эпохи, лежащей между великими математиками и Паппом, у нас имеются труды нескольких арифметиков, среди которых особенно выдается Никомах (около 100 г. после начала н. э.). Он написал сохранившееся до нас „Введение в арифметику“. Но новизна его работ и работ некоторых других арифметиков только кажущаяся и объясняется тем, что за немногими исключениями исследования по арифметике от эпохи расцвета математических наук погибли.

Но, с другой стороны, сочинения современника Паппа, Диофанта, обнаруживают такую оригинальность, что в них мы должны видеть действительно крупное расширение горизонта греческой математики. От него сохранилась до нас значительнейшая часть большого труда под названием „Арифметика“; мы не знаем, однако, включено ли было в этот трактат небольшое сочинение о фигурных числах.

2. Пифагорейская математика. Если теперь обратиться к изучению состояния греческой математики, начиная с древнейших времен, то оказывается, что о VI в. мы знаем очень мало. Правда, Эвдем приписывает Фалесу ряд различных теорем, среди которых он, весьма возможно, знал следующую:

„Угол, вписанный в полуокружность, прямой,“

может быть, открытую им самим, а может быть, заимствованную у египтян. Эта теорема выводится без всякого труда из того легко бросающегося в глаза факта, что в окружность можно вписать прямоугольник.

Но зато трудно найти какой-нибудь смысл в утверждении Эвдема, будто Фалес доказал, что диаметр делит круг на две равные части: в те времена не считали бы вовсе необходимым доказывать столь очевидную вещь. Впрочем, может быть, Эвдем хотел сказать, что теорема эта, знание которой считалось в его время необходимым для доказательства теоремы об угле, вписанном в полуокружность, была также нужна Фалесу. То же самое приходится, вероятно, сказать и о следующих упоминаемых им теоремах:

„Если две прямые пересекаются между собой, то образуемые ими вертикальные углы равны; точно так же равны между собой углы у основания равнобедренного треугольника“.

„Треугольник определяется одной стороной и двумя прилежащими к ней углами“.

Что касается в частности этой последней теоремы, то все ее теоретическое значение выступает лишь тогда, когда ее берут вместе с другими аналогичными теоремами, с которыми она связана; но так как нам не сообщают, что Фалес был знаком с этими теоремами, то рассказ этот можно объяснить традицией, приписывающей Фалесу некоторые практические операции, для теоретического обоснования которых необходима рассматриваемая теорема. Эта традиция приписывает, например, Фалесу определение расстояния недоступных точек, измерение высот с помощью тени; дошедший до нас рассказ дает основание думать, что эти измерения были произведены с помощью теоремы о равных треугольниках. Но определение наклона ребра пирамиды египтянами показывает, что они умели пользоваться подобием треугольников и что, следовательно, они ушли дальше Фалеса.

Во всяком случае, Фалесу принадлежит честь того, что он первый среди греков занялся математическими исследованиями. Но какого уровня математических знаний достигли в VI в.? И на какой основе мог продолжать строить следующий век? Ответ на этот второй вопрос является лучшим ответом и на первый. Если, например, верно, что пифагорейцы открыли пять правильных многогранников, то это предполагает наличие у их предшественников довольно значительных математических знаний.

Наши сведения об уровне математических знаний пифагорейцев гораздо более удовлетворительны. Разумеется, на них не следует слишком полагаться, и не только в вопросе о том, что принадлежит учителю и что ученикам, ибо они проникнуты вообще тенденцией приписывать пифагорейцам многие открытия, сделанные просто в их время. Но человеку, знакомому с состоянием греческой математики в более позднюю эпоху, сообщения эти дают столь ясную и цельную картину положения этой науки на первой стадии ее развития, картину работы мысли, предпринятой в самом начале и оставившей затем свой след на истории греческой математики, да и вообще всей позднейшей математики, что будет полезно собрать воедино и изложить эти сообщения. Это даст нам возможность познакомиться с основой произведенных в конце рассматриваемого нами столетия исследований, мы лучше поймем их цель, а также уясним себе состояние математических наук в следующем столетии.

Согласно Эвдему пифагорейцы прежде всего „придали геометрии характер настоящей науки, благодаря тому, что Пифагор рассматривал принципы ее с возвышенной точки зрения и, так сказать, исследовал теоремы ее более интеллектуальным и нематериальным образом; кроме того, он открыл иррациональные величины и построение космических фигур (правильных многогранников)". Обращаясь к более подробным сведениям, имеющимся у других авторов, мы узнаем, кроме нескольких определений, скорее философских, чем математических, точки, линии, поверхности и тела, что пифагорейцы знали сумму углов треугольника и деление плоскости на многоугольники (вероятно, правильные), так что вокруг одной точки могли лежать 6 треугольников, 4 квадрата и 3 шестиугольника. Пифагорейцы, согласно этим сообщениям, придумали так называемое *приложение площадей* — под этим понимали, как мы увидим, геометрический способ решения квадратных уравнений; они знали далее построение многоугольника, равновеликого данному многоугольнику и в то же время подобного другому многоугольнику. Рассказывают, будто один пифагореец нарушил правила своей школы, разгласив „теорему о двенадцати пятиугольниках в шаре". Наконец, можно еще упомянуть о пентаграмме, считавшейся пифагорейским символом; это — звездообразный пятиугольник, стороны которого образуют в описанном круге хорды дуг величиной в $\frac{4\pi}{5}$.

Если частные случаи теоремы, называемой еще в настоящее время пифагоровой, были, наверное, известны до Пифагора, то сама эта теорема в ее общем виде приписывается пифагорейцам. Точно таким же образом пифагорейцам приписывается одно из правил, согласно которым можно составить стороны прямоугольного треугольника с рациональными числами, именно с числами:

$$a,\ \frac{a^2-1}{2}\ \text{и}\ \frac{a^2+1}{2},$$

где a есть нечетное число; автором же другого аналогичного правила с рациональными числами

$$a,\ \left(\frac{a}{2}\right)^2-1\ \text{и}\ \left(\frac{a}{2}\right)^2+1,$$

где a — число четное, называют Платона.

Нам сообщают, что пифагорейцы были знакомы с тремя видами пропорций — арифметической, геометрической и гармонической, а также с треугольными числами, т. е. суммами последовательных чисел натурального числового ряда, и что они занимались также арифметическими прогрессиями более общего вида; наконец, что Пифагор видел в числе принцип всех вещей и что пифагорейцы изучали некоторые особенные целые числа, как, например, дружественные числа (т. е. такие числа, из которых одно равно сумме множителей* другого) или совершенные числа, равные сумме своих собственных множителей $(6 = 1 + 2 + 3)$. Наконец, Пифагор будто бы установил отношения между геометрией и арифметикой или музыкой.

Мы рассмотрим подробнее некоторые из этих вопросов и их значение для судеб греческой математики, но прежде всего мы выясним связь их, чтобы показать согласие между данными, опирающимися на весьма различные источники.

Прежде всего отметим попытку выяснить содержание понятий *точка, линия* и т. д. Укажем далее, что уже тогда обладали понятием *угла* и применяли его как к делению плоскости, так и к исследованию того, какие возможны правильные многогранники. Разумеется, потребовалось немало труда, чтобы притти также к точному определению и построению додекаэдра и икосаэдра, как они даны у Эвклида, но первый шаг в этом направлении, построение правильного пятиугольника, был сделан, и это явно переполняло гордостью сердца сделавших его.

В случае построения стороны пятиугольника или десятиугольника мы имеем уже пример геометрического решения уравнения второй степени, решения, дважды повторяющегося у Эвклида. Что пифагорейцы не ограничились одним этим случаем, это видно не только из сообщения о приложении площадей, но еще из упоминания в частности *пифагоровой теоремы*, столь важной, как мы увидим, для исследований этого рода, а также и одного не менее важного, придуманного ad hoc, построения. Прибавим к этому, что уравнения второй степени дали повод к открытию *несоизмеримых* величин, а числовые уравнения — к открытию иррациональных величин (под иррациональными величинами мы понимаем всегда величины несоизмеримые с употребляемой единицей).

Возможно, что пифагорейские изыскания в области теории чисел являлись частично продолжением мистических выкладок вавилонян; но наряду с этим им удалось добиться составления квадратных уравнений, свободных от иррациональных корней.

В исследованиях общего порядка нельзя избегнуть иррациональных величин; благодаря этому прежние математические методы оказались не вполне надежными, и большой заслугой пифагорейцев является т о, что они заметили это.

С пропорциями тогда были уже хорошо знакомы, и, вероятно, уже с ранних пормими пользовались в том или ином виде. Но до Эвдокса речь могла итти лишь о равенстве отношений между целыми числами или о равенстве этих отношений отношениям между геометрическими величинами, которые, следовательно, должны были быть соизмеримыми; в ходу были простые арифметические действия, как, нап имер, умножение; по примеру египтян знали,

* За исключением самого этоог числа.

что прямоугольник равен произведению сторон, причем единицей площади являлся квадрат, построенный на единице длины; но если стороны прямоугольника несоизмеримы, то не только нельзя применить доказательства путем деления прямоугольника на квадраты, но и сама теорема теряет всякий смысл, ибо представление о произведении, как им пользуются в обычном исчислении, не вяжется с тем, что множители этого произведения являются иррациональными числами.

Это затруднение пифагорейцы, а за ними греческие математики преодолели *путем геометрического представления величин вообще.* На первый взгляд преимущества такого геометрического представления могут показаться ничтожными, ибо любой отрезок обладает такой же определенной величиной, как и взятое произвольное число, но, в действительности, нарисованная фигура служит лишь материальным знаком для выражения понятия фигуры, а здесь величины могут принимать все значения, совместимые с требованиями такого понятия. Так, представление величины длиной отрезка может, подобно буквам в алгебре, применяться к величинам, изменяющимся непрерывным образом.

Греки, без сомнения, не имели никакого представления об отрицательных количествах, а также о количествах мнимых. Но за отсутствием первых изменения геометрической фигуры могут до известной степени позволить те же обобщения, которые мы получаем в настоящее время с помощью отрицательных величин.

Отсюда ясно, что действия над количествами, представленными геометрическим образом, играют роль, аналогичную нашим алгебраическим операциям. Соответственно с этим мы назовем „Геометрической алгеброй“ теорию этих операций, и мы ее изложим здесь в том виде, в каком мы ее знаем на основании отчасти второй книги эвклидовых „Начал“, отчасти приложений, которые делали из нее всегда греческие математики, главным образом там, где мы теперь пользуемся уравнениями второй степени. Геометрическая алгебра служит как у Эвклида, так и у других математиков для столь многочисленных исследований, что одно это является уже доказательством ее глубокой древности которую мы ей приписываем в соответствии с сообщением о знакомстве пифагорейцев с приложением площадей. Легкость применения ее к любым величинам, как рациональным, так и иррациональным, а следовательно, ее абстрактный характер отлично согласуются со словами Эвдема о нематериальном подходе Пифагора к геометрии.

Возможно, однако, что этот абстрактный характер не был первоначально столь явным и сознательным, как это оказалось во времена Эвдема и как это наблюдается у Эвклида. Наоборот, естественно допустить — и это находится в полном согласии с тем, что нам сообщают насчет установления пифагорейцами связи между геометрией и арифметикой — естественно допустить, что геом трическая интерпретация целых исел, являющаяся у Эвклида приложением геометрической алгебры, хронологически предшествовала самой этой алгебре.

Начав с геометрического представления свойств целых чисел, впоследствии убедились, что этот способ представления также легко применим, вообще, к непрерывным величинам; но это, вероятно, заметили лишь мало-помалу. Поэтому мы начнем прежде всего с рассмотрения геометрической арифметики греков, как с введения к их геометрической алгебре.

3. Геометрическая арифметика. В наших учебниках часто встречается геометрическое доказательство теоремы, „что произведение целых чисел не зависит от порядка сомножителей“ Для доказательства размещают единицы, или представляющие их точки, в виде прямоугольника; каждая горизонтальная строка содержит единицы множимого, число же строк равно множителю; заменив горизонтальные строки вертикальными, мы тем самым доказываем возможность обмена места сомножителями. Если вместо единиц мы возьмем маленькие квадраты со стороной, равной 1, то мы одновременно с этим докажем геометрическую теорему, что „площадь прямоугольника выражается произведением его сторон“; если же отказываются взять определенную единицу, то, предполагая, что стороны соизмеримы, получают теорему: „площади двух прямоугольников относятся между собой, как произведения их сторон“.

От этого геометрического способа представления происходит общеупотребительное у греков название *плоских чисел* для чисел, являющихся произведением двух сомножителей, т. е. образующих прямоугольную площадь, и употребляемое еще и ныне название *квадратных чисел*. Плоские числа называются *подобными*, когда их множители пропорциональны; в этом случае числа эти пропорциональны двум квадратным числам.

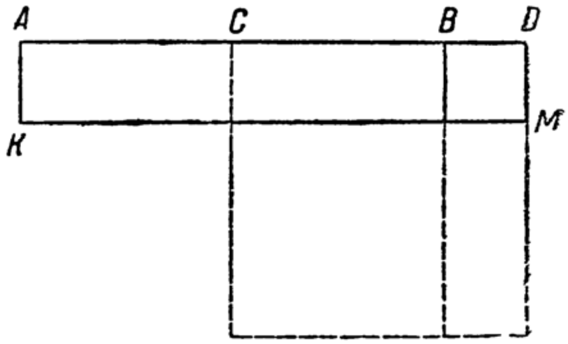
С помощью квадрата, изображающего некоторое квадратное число (n^2), можно получить следующее квадратное число [$(n+1)^2$], построив вдоль обеих сторон $2n$ новых квадратиков, затем еще один квадратик в получившемся входящем угле. Эта дополнительная фигура называется *гномоном*; гномоном же называется, вообще, всякая фигура, представляющая разность между двумя перспективно подобными фигурами, с угловой точкой в качестве центра подобия. В данном случае эта разность равна $2n+1$. Таким путем можно найти, что квадратные числа представляют суммы последовательных нечетных чисел; если же принять и $2n+1$ за квадратное число, то можно получить рациональные стороны прямоугольного треугольника или же решение в целых числах неопределенного уравнения: $x^2+y^2=z^2$. Это решение приписывалось Пифагору, а для получения решения, приписываемого Платону, надо принять ширину гномона за 2.

Если придать гномону произвольную ширину, то можно получить самое общее решение этого уравнения в целых числах. С этой целью Эвклид в первой лемме к теореме 28 второй книги пользуется преобразованием, соответствующим на нашем теперешнем алгебраическом языке, примерно, введению новых неизвестных $z+x=u$, $z-x=v$ (т. е. ширина гномона равна v); uv должно равняться тогда некоторому квадрату y^2. Эвклид в этом случае может опираться на геометрическую алгебру, развитую им во второй книге „Начал“; мы здесь же сформулируем шестую теорему этой книги, теорему, с которой мы вскоре снова встретимся (см. ниже), в следующем виде: если C — середина AB, а D точка на продолжении AB, то

$$AD \cdot BD = CD^2 - CB^2,$$

т. е. пользуясь данными выше обозначениями,

$$uv = z^2 - x^2.$$



Фиг. 1.

Если все линии представляют целые числа, то, чтобы $AB = 2CB$ (или $u - v = 2x$) могло быть четным, необходимо, чтобы $AD (= u)$ и $BD (= v)$ были оба либо четными числами, либо нечетными; с другой стороны, необходимым и достаточным условием того, чтобы гномон $AD \cdot BD$ был квадратным числом, является то, чтобы AD и BD представляли подобные числа, или на нашем алгебраическом языке, чтобы $AD = am^2$, $BD = an^2$; тогда

$$z = CD = a\frac{m^2 + n^2}{2}, \quad x = CB = a\frac{m^2 - n^2}{2}, \quad y = a \cdot mn.$$

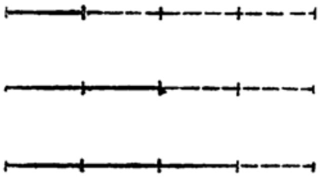
Мы увидим, что такое представление чисел прямоугольниками и квадратами дало начало принципу геометрической алгебры, между тем как геометрическая арифметика пользовалась еще другими фигурами.

Мы сказали, что введение понятия о треугольных числах приписывалось пифагорейцам. Под треугольными числами понимают суммы первых последовательных чисел натурального числового ряда; при этом единицы каждого числа изображают в виде строк из точек, располагаемых друг под другом, так что они составляют треугольник.

Легко заметить, что этот способ представления мог дать начало настоящему исчислению: действительно, достаточно для этого построить, наряду с первым треугольником из точек, второй так, чтобы они составляли вместе параллелограм. Так как в каждой строке имеется одинаковое число точек ($n + 1$, если n означает число строк), то совокупность точек, параллелограма, т. е. удвоенное треугольное число, равно $n(n+1)$; это, как мы видим, тот же метод, каким пользуются в алгебре, когда прибавляют к самой себе арифметическую прогрессию, взятую в обратном порядке.

Так как единица, являющаяся разностью этого ряда, может быть выбрана произвольно и так как *аддитивная* постоянная дает в каждом члене только произведение, которое должно быть прибавлено к сумме, то легко можно было получить сумму любой арифметической прогрессии. Впрочем, можно изобразить также разность, как на фиг. 2, отрезком, обозначающим непосредственно произвольное количество. Из обширного исследования о спиралях, данного Архимедом в его *Трактате о спиралях*, видно, что суммирование было произведено только что указанным способом.

Но вернемся к изображению единиц точками, чтобы указать еще на один известный, благодаря Никомаху, способ геометрического представления арифметических прогрессий с 1 в качестве первого члена прогрессии и произвольным целым числом $(n-2)$ в качестве разности ее; метод этот состоит в употреблении так называемых *многоугольных* (n-угольных) чисел. Второй член $(n-1)$ прогрессии изображают с помощью точек, составляющих вместе с некоторой неподвижной точкой n-угольник. Рассматривая неподвижную точку, как центр подобия, переходят от этого многоугольника к ряду подобных n-угольников с помощью ряда гномонов, каждый из которых представляет член прогрессии. В частности для $n=4$ получают четыреугольные числа или, — так как вид четыреугольника не имеет никакого значения, — квадратные числа, как мы это уже видели.

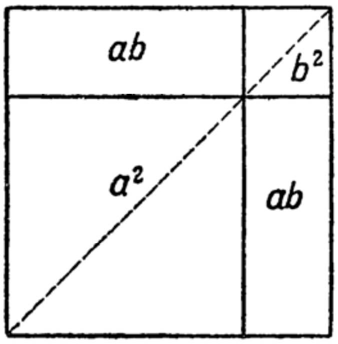


Фиг. 2.

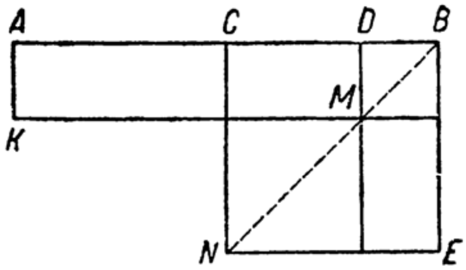
Эту геометрическую арифметику распространили даже на пространство. *Пространственные числа* — это числа, изображаемые с помощью параллелепипеда, т. е. произведения *трех* сомножителей; если эти сомножители равны между собой, то мы имеем кубические числа. Множители двух подобных пространственных чисел пропорциональны друг другу, и следовательно, их отношение равно отношению двух кубических чисел. *Пирамидальное число* — это сумма ряда n-угольных чисел, имеющего первым членом 1, причем предполагается, что многоугольники положены друг на друга так, чтобы образовать пирамиду.

4. Геометрическая алгебра. Какая-нибудь крайне общая — рациональная или иррациональная — величина может, прежде всего, быть изображена длиной прямолинейного отрезка; для вычитания или сложения изображенных таким образом величин надо будет нанести один из отрезков на другой или на его продолжение. Мы отметили выше применения этого метода в случае суммирования арифметических прогрессий у Архимеда; он особенно пригоден для представления уравнений первой степени с целыми коэфициентами или даже рациональными коэфициентами, ибо последние могут быть приведены к целым числам.

Умножение общих величин, взятое в непосредственном смысле слова, есть бессмыслица, но с этим справились, применив к общим величинам уже известное нам геометрическое представление произведения двух целых чисел. Однако в древности не обобщали, как в современной математике, арифметических понятий умножения и произведения. Вместо того чтобы говорить о *произведении общих величин*, говорили о прямоугольнике, образованном двумя отрезками, изображающими сомножители, и производили действия над этим прямоугольником. Но так как подобным же образом представляли настоящие произведения целых чисел, то можно было всегда руководиться применяемым в этом последнем случае арифметическим подходом. Поэтому я смогу в нижеследующем, не боясь вызвать этим недоразумений, обозначать через ab прямоугольник, образованный из a и b, а через a^2 квадрат, построенный на a.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Таким образом получали второе геометрическое представление величин, именно, как площадей, и, прежде всего, как прямоугольников и квадратов. Чтобы складывать или вычитать их, им нужно было придать общую сторону, но не прибегая при этом к теории пропорций, ибо теория эта в том объеме, в каком ею владели в V в., основывалась исключительно на пользовании соизмеримыми величинами. Поэтому при введении в прямоугольник новой стороны основывались на следующей теореме: прямые, параллельные сторонам прямоугольника и пересекающиеся между собой на диагонали, делят этот прямоугольник на четыре других, из коих два равновелики между собой, — именно те, через которые не проходит рассматриваемая диагональ (см. фиг. 3—5, только следует для данного случая заменить квадраты прямоугольниками); если один из этих прямоугольников есть заданный прямоугольник, то нетрудно придать другому данную сторону.

Это построение, соответствующее делению, подобно тому, как построение прямоугольника по данным сторонам соответствует умножению, носит название *приложения площадей* (παραβολή) или простой παραβολή в противоположность эллиптической или гиперболической παραβολή, о которых речь будет ниже. Мы увидим, что употребляемая при этом фигура имеет еще и другие важные применения: часть, состоящая из двух равновеликих прямоугольников и одного из двух других прямоугольников, называется здесь, как и в геометрической арифметике, *гномоном*,— например, на фиг. 4 это $CBEM$.

Рассматриваемая теорема употребляется таким способом у Эвклида (I, 43—44), но в несколько более общей форме: прямоугольники здесь заменены параллелограмами. Наоборот, в книге II тот же самый Эвклид пользуется прямоугольниками. Что касается вопроса о пользовании задолго до Эвклида теоремами этой II книги (ибо, как утверждают, пифагорейцы были знакомы с приложением площадей), то объяснение этого следует искать в VI книге, хотя в ней применения названных теорем даны в обобщенном виде, являющемся открытием либо Эвклида, либо его непосредственных предшественников *.

Прямоугольник, стороны которого являются сами суммами, представляет сумму всех прямоугольников, имеющих сторонами один член каждой из данных сумм.

Вместо современной формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Эвклид (II, 4) пользовался фиг. 3.

Задача, которую в настоящее время мы выразили бы уравнением

$$ax - x^2 = b^2 \tag{1}$$

выражалась древними следующим образом (фиг. 4):

Построить на данном отрезке AB $(=a)$ прямоугольник AM, равный данному квадрату (b^2), таким образом, чтобы часть площади, недостающей до прямоугольника ax на AB, была квадратом

$$(BM = x^2).$$

Для получения этого построения, называемого эллиптическим *приложением площадей* — от слова ἔλλειψις — нехватка, недостаток — приводят к предыдущей фигуре ту, с помощью которой решают задачу: действительно, если C есть середина AB и если приложить прямоугольник CK к стороне DB (он занимает положение DE), то ясно, что прямоугольник AM равен гномону, т. е. равен разности квадратов, построенных на BC и CD или, пользуясь нашим алгебраическим обозначением, что

$$b^2 = ax - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Теперь, зная b и $CB = \frac{a}{2}$, можно с помощью пифагоровой теоремы найти $CD = \frac{a}{2} - x$, а следовательно, и x.

Из эвклидовых „Начал“ (VI, 28) можно заключить, что таким приблизительно способом была решена эта задача, хотя в указываемой теореме она дана в более общем виде; но употребленное нами преобразование имеется уже у Эвклида (II, 5), где говорится, что если C есть середина, а D какая-нибудь другая точка AB, то:

$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2.$$

Эта теорема дает непосредственно решение этой же самой задачи, выраженной, однако в следующей форме: *разделить данный отрезок AB на два других, образующих прямоугольник*

---

* Значение этого обобщения объясняется у нас в § 16.

с данной площадью (но, чтобы иметь возможность применить пифагорову теорему, нам надо предположить на время, что площадь эта дана нам в виде квадрата b^2). Эвклидовы „Data" (§ 85 показывают нам, что древние знали рассматриваемую задачу также и в этом виде, являющемся геометрической формулировкой следующей задачи: найти два количества, сумма и произведение которых известны.

Вышеуказанный нами первый способ представления рассматриваемой задачи в виде *эллиптического* приложения площади имел то неудобство, что, пользуясь им, древние давали обыкновенно лишь одно решение уравнения (1); неудобство это отпадало теперь при втором способе представления ее.

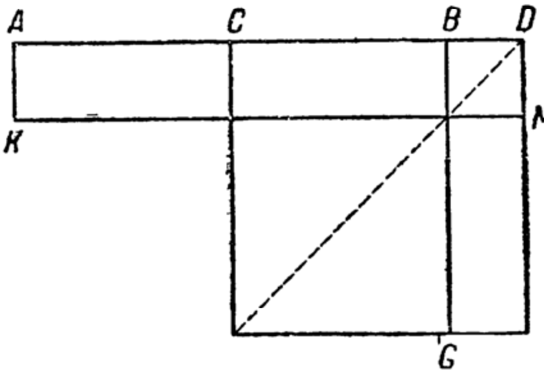
В книге II, 6, „Начал" Эвклид дает абсолютно такое же (содержащееся в VI, 29) решение уравнения

$$ax + x^2 = b^2, \tag{2}$$

которое древние выражали следующим образом: на данном отрезке $AB\ (=a)$ построить прямоугольник AM, равный данному квадрату (b^2), таким образом, чтобы избыточная (над прямоугольником ax на AB) часть площади BM была квадратом (b^2). Это построение называется *гиперболическим приложением площади*, от ὑπερβολή — избыток. Приняв C за середину AB, мы, решив задачу, видим, что прямоугольник AM изменяется в гномон, если перенести прямоугольник, построенный на AC, в положение GM.

Тогда, взяв D на продолжении AB, находим, что:

$$AD \cdot BD = CD^2 - CB^2.$$



Фиг. 5.

Это геометрическое преобразование в точности соответствует алгебраическому преобразованию, с помощью которого мы в настоящее время решаем уравнение (2), именно:

$$b^2 = ax + x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

затем с помощью пифагоровой теоремы определяют

$$CD\left(= \frac{a}{2} + x\right).$$

Из теоремы „Начал" (II, 6) непосредственно вытекает решение этой задачи в нижеследующем другом виде: определить два отрезка (AD и BD), разность и прямоугольник которых (равный квадрату b^2) даны; задача эта представляет, в свою очередь, лишь геометрическую форму следующей задачи: определить два количества, зная их разность и произведение; и так как задача эта встречается также в этом втором виде у древних (эвклидовские „Data", 84), то не имеет никакого значения тот факт, что мы не встречаем у них никакой формы для передачи уравнения

$$x^2 - ax = b^2 \tag{3}$$

столь же прямым способом, каким приложения площадей передают уравнения (1) и (2).

Чтобы получить на языке нашей алгебраической символики уравнение (2) или уравнение (3), нам достаточно переписать положение „Начал“ (II, 6) по-современному, положив

$$BD = x \text{ или } AD = x.$$

Таким образом древние, как мы видим, рассмотрели все виды уравнения второй степени, дающие положительные корни, а о других у них не могло быть и речи, поскольку им было совершенно чуждо представление об отрицательных количествах. Для данного нами здесь геометрического решения мы предположили, что известный член — являющийся из соображений однородности всегда площадью — задан в виде квадрата; в таком случае решение получается с помощью так называемой пифагоровой теоремы. Теорема эта — частные случаи которой, несомненно, были известны египтянам — приписывалась Пифагору, но мы ничего не знаем о способе, каким он доказал ее. Возможно, что в своем доказательстве он опирался на подобие треугольников. В таком случае, при тогдашнем состоянии теории пропорций, она могла быть точной лишь тогда, когда стороны были соизмеримы; действительно, лишь в это время начали вводить геометрические построения общего характера, и именно Эвклид, как нам это определенно сообщают, был, повидимому, подлинным автором общего доказательства, приводимого в книге I, 47 „Начал“.

Так как Эвклид доказывает, что квадрат, построенный на одном катете, равен прямоугольнику (т. е. произведению) из проекции этого катета на гипотенузу и всей гипотенузы, то весьма вероятно, что в старом доказательстве, которое он желал заменить своим, пользовались соответствующими теоремами о средних пропорциональных.

Впрочем, для доказательства можно было воспользоваться также операциями, служившими для решения уравнений. Из фиг. 3 ясно, что:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$

разности, равной квадрату гипотенузы прямоугольного треугольника со сторонами a и b: это можно показать. построив при четырех углах квадрата $(a + b)^2$ такого рода треугольники, причем остается квадрат посредине. Может быть, свидетельством всеобщего употребления этого доказательства является то, что Сократ (в платоновском диалоге Менон) поступает именно так, чтобы убедить раба Менона в истинности этой теоремы для частного случая $a = b$; но по сравнению со столь простым доказательством даваемое Эвклидом доказательство не являлось бы вовсе шагом вперед. Возможность такого объяснения показывает, что насчет ранних методов доказательства у нас нет никаких надежных свидетельств, которыми мы могли бы руководствоваться в своих изысканиях.

Что касается преобразования какой-нибудь фигуры в квадрат, преобразования, которым должны были пользоваться либо для того, чтобы придать уравнениям приведенную нами выше форму, либо чтобы построить, не прибегая к пифагоровой теореме, величину, представляемую в современном решении квадратным корнем, то пифагорейцам определенным образом приписывают знакомство с следующей задачей:

Построить фигуру, равновеликую данной фигуре и подобную другой фигуре. Во всяком случае, речь здесь могла итти только о прямолинейных фигурах, а в интересующем нас частном случае вторая фигура это квадрат; более общая форма задачи имеется в „Началах" (VI, 25), где Эвклид пользуется ею для своих обобщенных приложений площадей. Один позднейший автор, приписавший пифагорейцам знакомство с задачей в этом последнем виде, хотел этим дать понять, что пифагорейцы обладали предпосылками, необходимыми для приложения площадей; но простое приложение площадей требует лишь преобразования фигуры в квадрат.

Преобразование прямолинейной фигуры в прямоугольник не представляет особенных трудностей; Эвклид, кроме того, показывает нам, как можно преобразовать прямоугольник в квадрат, не прибегая к средним пропорциональным и не опираясь на теорию пропорций, бывшую еще несовершенной до Эвдокса. В своей книге II, 14 он пользуется для этого лишь геометрической алгеброй; действительно, построение основывается на вышеупомянутой теореме II, 5 (или 6), согласно которой прямоугольник можно представить как разность двух квадратов. Сторона квадрата, равного прямоугольнику, получается затем с помощью пифагоровой теоремы.

Это преобразование соответствует уравнению

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

и оно содержит решение *чистого квадратного уравнения.*

Пифагорейцам приписывают определенное геометрическое употребление приложения площадей, именно, построение правильного пятиугольника (или десятиугольника). Как известно, построение это зависит от уравнения

$$x^2 = a(a-x),$$

которое преобразуется в

$$a^2 = x^2 + ax,$$

а это уравнение можно решить путем гиперболического приложения площадей. Для решения названной задачи Эвклид (II, 11) пользуется в точности этим же самым преобразованием уравнения в геометрической форме.

Теоремы II, 5 и 6, служат не только для решения уравнений второй степени; так, мы уже упоминали выше об арифметическом приложении их Эвклидом в десятой книге „Начал", и мы уже сказали, что с их помощью можно обойтись без средни циональных. Другой пример того, что геометрическая алгебра избавляла от необходимости пользоваться пропорциями, встречается у Эвклида (III, 35—37) при доказательстве им теорем о степени точки по отношению к окружности. Согласно теоремам II, 5 и 6, мы видели (см. вышеприведенные фигуры), что если дано C, середина AB, и D, точка на AB или продолжении ее, то

$$AD \cdot DB = \pm (CB^2 - CD^2);$$

если теперь A и B представляют точки пересечения с окружностью, центр которой O, то на основании пифагоровой теоремы получают

$$CB^2 - CD^2 = OB^2 - OD^2,$$

чем доказываются теоремы о степени точки.

Однако изложенные здесь начатки геометрической алгебры касаются, главным образом, уравнений второй степени, т. е. той области, где, в связи с появлением иррациональных величин, почувствовалась необходимость иного представления величин, чем посредством чисел. При рассмотрении этих уравнений можно было ограничиться употреблением прямоугольников и квадратов, если только заданные величины не были представлены площадью какой-нибудь другой фигуры; но по мере дальнейшего развития геометрической алгебры и ее приложений, в частности, к теории конических сечений — ее расширили и стали пользоваться другими фигурами (кроме прямоугольника и квадрата) для изображения рассматриваемых величин.

Однако ясно, что геометрическая алгебра в своем приложении к прямоугольникам — и даже параллелограмам, ибо в ней никогда не вводят определенных единиц и оперируют, таким образом, всегда однородными уравнениями — ясно, что эта алгебра включает и геометрическую арифметику; действительно, только в этом случае можно заменить точки, представляющие в арифметике единицы, равными квадратами или параллелограмами. Но треугольные числа не имеют никакого отношения к площади треугольника; между тем, благодаря смешению этих двух понятий, римские землемеры стали впоследствии пользоваться при определении площади равностороннего треугольника со стороной a формулой

$$\frac{a(a+1)}{2}.$$

5. Численные квадратные уравнения; извлечение квадратного корня. Из совпадения результатов приложения геометрической алгебры и арифметики к прямоугольникам следует, что естественно было перенести найденное для квадратных уравнений общее решение на заданные численно уравнения. Здесь, однако, возникало одно неудобство: корни были, вообще говоря, иррациональными.

Исследователи выискивали случаи, свободные от этого неудобства; это видно хотя бы из попыток решения неопределенных уравнений вида $x^2+y^2=z^2$. Но в геометрических задачах или в случае других приложений приходилось брать величины такими, какими они были, и если невозможно было найти рациональное решение, т. е. решение, выразимое точно в числах, то оставалось сделать следующие две вещи: 1) доказать, что искомые количества действительно не были рациональными и, перейдя к уравнениям, где заданые величины были уже иррациональными, классифицировать различные представляющиеся иррациональные количества; 2) в приложениях вычислять иррациональные количества с максимально возможным приближением.

Особенно много изысканий было произведено греками в первом направлении; мы уже привели пример исследований этого рода в решении Эвклидом уравнения $x^2+y^2=z^2$, и так как он его решил полностью, то нашел не только достаточные, но и необходимые условия для того, чтобы $\sqrt{x^2+y^2}$ и $\sqrt{x^2-y^2}$ были рациональными; он нашел, таким образом, что если условия эти не выполнены, то рассматриваемые корни иррациональны.

Гораздо менее сложно доказательство иррациональности $\sqrt{2}$, вероятно, очень старое и помещаемое ошибочно в некоторых изданиях в конце десятой книги „Начал". Отвлекаясь от геометрического способа представления его можно выразить приблизительно следующим образом: если имеем $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, дроби, насколько возможно сокращенной), то имеем также $m^2=2n^2$, откуда следует, что m^2, а также и m четное число; так как $\frac{m}{n}$ представляет наипростейшую дробь, то n должно быть нечетным. Но если m — четное, то m^2 должно делиться на 4, в таком случае n^2 должно делиться на 2; т. е. n должно быть четным. Но так как n не может быть одновременно четным и нечетным, то $\sqrt{2}$ не может быть несократимой дробью.

Этим методом, как известно, пользуются вообще для доказательства, что корень целого числа не может быть дробью.

Ряд теорем восьмой книги „Начал" введен, вероятно, первоначально с этой целью; это относится, например, к шестой теореме, утверждающей,—хотя и в другой форме, — что степень несократимой дроби должна быть, в свою очередь, несократимой дробью. Таково, во всяком случае, общее доказательство, которым пользовались впоследствии, как это видно из комментария Эвтокия к Архимеду.

Однако Эвклид в десятой книге „Начал" дает еще общий способ проверки рациональности какой-нибудь величины или, — что сводится к одному и тому же—соизмеримости двух величин. Способ этот сводится к тому же алгорифму, с помощью которого находят общую наибольшую меру двух величин. Представив эти величины с помощью двух отрезков, наносят меньший из них b на больший до тех пор, пока не получится остаток c, меньший b, затем таким же образом наносят c на b и т. д.; если операцию приходится продолжать до бесконечности, то сравниваемые величины несоизмеримы. Этим способом легко убедиться, что отрезок, разделенный в среднем и крайнем отношении, дает два отрезка, несоизмеримые между собой и с первоначальным целым отрезком. Действительно, если мы назовем отрезок a, а части его от деления x и y, то мы имеем:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{x-y}.$$

Так как операция для получения общей меры приводит к новому аналогичному с первоначальным подразделению получившихся от деления отрезков, то ясно, что ее никогда нельзя довести до конца.

Этим способом можно доказать, что $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и, следовательно, также $\sqrt{5}$ иррациональны. Весьма вероятно, между прочим, что Теэтэт пользовался аналогичным приемом в своих доказательствах иррациональности таких величин, как $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$.

Так как корни уравнений второй степени в случае несоизмеримости их с заданными величинами не могут быть выражены точным образом с помощью этих величин, то понятно, что греки в своих точных вычислениях не вводили никаких приближенных значений, а только продолжали действия с найденными количествами, изображенными отрезками, которые получались при построении, соответствовавшем решению задачи. По существу мы поступаем таким же образом, когда вместо вычисления корней мы довольствуемся выражением их с помощью знаков квадратного корня или других алгебраических символов.

Однако так как всякий отрезок похож на любой другой отрезок, то этим способом нельзя было достигнуть прозрачности нашей алгебраической символики, и пришлось предпринять классификацию иррациональных количеств, получаемых при последовательных решениях уравнений второй степени.

Попытку такого рода классификации предпринял во времена Платона Теэтэт, работу которого продолжал Эвклид, включив ее в десятую книгу „Начал".

При разборе этой книги мы вернемся к этому вопросу; пока же заметим, что в труде этом должны были рассматриваться также случаи, когда величина, принадлежащая по видимости к одному классу, сводится в действительности к другому классу, иначе говоря — в нем должен был быть разобран вопрос об упрощении двойной иррациональности.

Приложения этой классификации мы встречаем в тех случаях, когда желают определить в точности величины, зависящие от квадратных корней; мы с этим встречаемся при определении сторон простейших правильных многоугольников, а также ребер правильных многогранников. Теэтэт, в частности, занимался особенно много этим последним вопросом, играющим кардинальную роль в эвклидовых „Началах".

Зато в „Началах“ совершенно отсутствует приближенное вычисление чисел. Объясняется это, может быть, тем, что при таком вычислении отказываются от абсолютно точного определения, к которому стремились в геометрии, а может быть, и тем, что греки не обладали необходимыми для настоящих вычислений способностями. Этот недостаток обнаруживается, например, у Геродота, который, оказывается, не может произвести правильного деления на 48; он еще более поразителен, когда приходится выйти за пределы четырех простых арифметических действий, чтобы вычислить, скажем, какой-нибудь квадратный корень.

Ограничиваясь пока обыкновенными арифметическими действиями, надо, однако, заметить, что если бы упражняться с детства в греческой письменной нумерации (о которой подробнее мы поговорим в дальнейшем), как мы это делаем с нашей собственной нумерацией, то она, возможно, оказалась бы гораздо более практичной, чем это представляется нам на первый взгляд. При вычислениях пользовались также механическими средствами, как, например, счетными дощечками, снабженными делениями. Но для изображения больших чисел греческая нумерация не годилась; это видно хотя бы из того факта, что в эпоху высшего расцвета греческой математики такие ученые, как Архимед и Аполлоний, в сочинениях которых даже современный образованный математик может найти еще незнакомые ему теоремы и доказательства, должны были построить особые системы для обозначения чисел неограниченной величины. Этим, именно, и занимается Архимед в своем сочинении об исчислении песка, в котором он хочет дать представление о бесконечности числового ряда и в котором, в частности, он высчитывает, сколько песчинок может быть во вселенной, если приписать последней и песчинкам определенные размеры.

Наконец, не в пользу обычно применявшихся греками способов вычисления говорит то обстоятельство, что греческие астрономы, не удовольствовавшись ими, заимствовали у вавилонян, наряду с астрономией, их шестидесятиричную систему для астрономических выкладок.

Возвращаясь к вопросу о вычислении квадратного корня у греков, упомянем прежде всего об одном особенном определении $\sqrt{2}$. Мы знакомы с ним по сообщению одного сравнительно позднейшего математика, но оно восходит к гораздо более ранней эпохе, ибо мы встречаем его в „Началах“ (II, 9 и 10). Кроме того, это определение $\sqrt{2}$ представляет образчик применения геометрической алгебры. Если C есть середина отрезка AB, а D некоторая другая точка его, то согласно теореме (9):

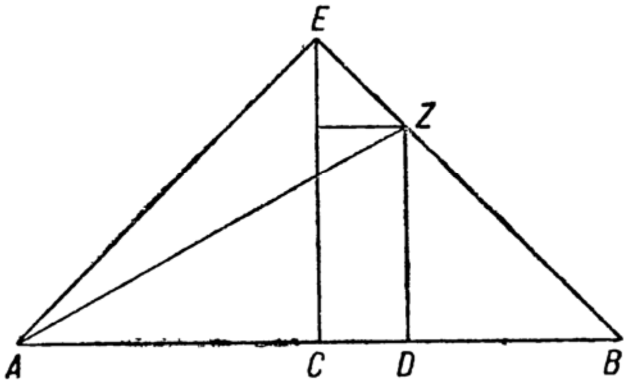
$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2,$$

теорему эту можно было бы доказать с помощью преобразований прямоугольников, но Эвклид для доказательства ее пользуется приложением пифагоровой теоремы к равнобедренным прямоугольным треугольникам. Это связано, может быть с тем, что $\sqrt{2}$ изображается гипотенузой AB подобного треугольника AEB. Если Z есть точка, в которой перпендикуляр, восстановленный к AB в D, пересекает катет EB, то мы имеем:

$$DB = DZ$$

и

$$AD^2 + DZ^2 = AE^2 + EZ^2 = 2AC^2 + 2CD^2.$$



Фиг. 6.

Чтобы сделать еще более ясным приложение найденного уравнения, положим

$$CD = x, \ BD = y,$$

откуда

$$AD = 2x + y, \ AC = x + y,$$

обозначив последние два количества через y_1 и x_1, имеем:

$$2x_1^2 - y_1^2 = -(2x^2 - y^2).$$

Найденное уравнение даст возможность получить на основании решения в целых числах одного из двух неопределенных уравнений,

$$2x^2 - y^2 = \pm 1,$$

решение другого уравнения с бо́льшими числами $x_1 = x + y$ и $y_1 = 2x + y$. Если продолжать поступать таким образом, то значения $\frac{y}{x}$, $\frac{y_1}{x_1}$ и т. д., которые поочередно или слишком велики, или слишком малы, все более приближаются к $\sqrt{2}$; можно начать с $x = y = 1$.

Впрочем, пифагорейцы знали уже приближенное значение $^7/_5$.

Возможно, что и в других частных случаях пытались произвести таким образом извлечение квадратного корня; это относится к уже упомянутым выше доказательствам иррациональности ряда частных корней (стр. 50). Кроме того, данный Эвклидом метод для проверки иррациональности содержит в себе подобное извлечение корня, обнаруживая сходство с современным употреблением непрерывных дробей, и их подходящих. Это сходство заметно уже в изложенном нами вычислении $\sqrt{2}$; возможно, впрочем, что и при извлечении других частных корней тоже пользовались неопределенными уравнениями второй степени, которые вместе с другими неопределенными уравнениями (как, например, $x^2 + y^2 = z^2$), с помощью коих составляли числовые примеры, свободные от извлечения квадратного корня, способствовали развитию у греков искусства решать некоторые неопределенные уравнения второй степени, — искусства, о котором свидетельствуют сочинения Диофанта, относящиеся к гораздо более поздней эпохе.

Но именно тот факт, что приходилось прибегать к такого рода специальным методам, свидетельствует достаточно убедительно о том, что вообще не обладали искусством извлекать квадратные корни. Между тем, в распоряжении тогдашних математиков были те же средства, что и в наше время, а именно выражения $(a \pm b)^2$, геометрическая форма которых была столь же практична, как и современная алгебраическая форма. Возможно, в частности, что Архимед пользовался этими выражениями для получения корней, которые встречаются — к сожалению, без всякого указания на метод получения — в его „Измерении круга".

Целая часть квадратных корней некоторых семизначных, по нашей нумерации, целых чисел должна была быть получена, примерно, с помощью тех же действий, что и в настоящее время, ибо для поправок к добытым уже приближенным значениям (a) пользовались неравенствами

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b^2} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Точно так же, когда Архимед устанавливал неравенства

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

то он мог получить вышеуказанным методом эти неравенства из приближения $\frac{26}{15}$, или, правильнее, из значения 26, как приближенного значения $15\sqrt{3}\,(=\sqrt{26^2-1})$.

Это следует из вышеприведенных неравенств, если положить в них $a = 26$, $b = 1$; аналогичным образом $\frac{26}{15}$ получается из более простого приближения $\frac{5}{3}$.

Лучшим доказательством того, что не существовало общих методов извлечения любых квадратных корней, является тот факт, что только такой ученый, как Архимед, смог определить, что π находится между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{11}$, вещь, недоступную его предшественникам. В дальнейшем, правда, мы покажем, что до Архимеда ученые умели справиться без особенного труда с геометрическими трудностями, но они отступили перед числовыми выкладками и требуемым ими извлечением квадратных корней, — выкладками, неизбежными, если хотели воспользоваться практически этими корнями. Естественно поэтому, что большинство этих выкладок мы встречаем у Герона, ставившего себе именно практические задачи; недавно удалось даже открыть метод, с помощью которого он их производил и который мало отличался от метода, приписываемого нами Архимеду. Тем не менее, достигнутая Героном в его вычислениях степень точности не очень велика по сравнению с тем, чего добилась общая теория, установленная за ряд веков до него.

Впрочем, произведенные им извлечения корней относятся к другой задаче. Действительно, у Герона мы встречаем впервые примеры разбора численных уравнений второй степени. Так, например, имея дело с численным коэфициентом a при члене x^2 он, путем умножения уравнения на a, изменял этот член на a^2x^2 и рассматривал потом в качестве неизвестной ax. Правда, и Эвклид, как мы увидим, рассматривал подобные уравнения, и притом с помощью общего метода, применимого даже в случае иррациональности коэфициента a, но метод этот, именно в силу своей общности, не показывает с достаточной ясностью, как поступали при практических выкладках.

Мы дошли, таким образом, до эпохи Герона, и, однако, мы ничего еще не сказали о произведенных до него астрономами вычислениях с целью составления таблиц хорд, для которых пользовались шестидесятиричной системой, заимствованной, между тем, за это время у халдеев. Так как Герон совершенно не пользуется этой системой, то можно допустить, что его метод совпадает по существу с исконным греческим методом, но является более развитым, чем это было в занимающую нас в данный момент эпоху.

Наоборот, квадратные корни, встречающиеся у Птолемея, вычислены в шестидесятиричных единицах приблизительно тем же способом, каким мы вычисляем их в настоящее время в десятичных единицах. Мы выше сказали, что греки уже давно были знакомы с теоретической основой этих вычислений по формуле $(a+b)^2$; это, в связи со все возраставшими со стороны астрономии требованиями численной точности, могло привести их к выполнению на практике такого рода выкладок. Возможно, однако, что упомянутые уже на стр. 28 старые таблицы шестидесятиричных квадратных или кубических чисел свидетельствуют о знакомстве вавилонян уже в глубокой древности с извлечением корней и что и в этом пункте греки научились кое-чему у восточных народов, когда они переняли у них шестидесятиричную систему.

Мы не ошибемся, если скажем, что открытие и изучение в дальнейшем иррациональных величин было источником как главных преимуществ, так и главных недостатков греческой математики.

С одной стороны, не жалели усилий, чтобы добиться применимости всякого доказательства даже к тем величинам, которые могут быть выражены числами лишь приближенным образом и для которых, следовательно, недостаточно всякое числовое доказательство. Здесь корень постоянных стремлений греков к непогрешимости их дедукций и к точности выражений—двух качеств, благодаря которым математика стала *точной наукой* по преимуществу, а выражение *математическая достоверность* — синонимом абсолютной достоверности. Греки, таким образом, заложили основание, бывшее необходимым для величественного научного здания, сооруженного Архимедом и Аполлонием. К этой основе должна была вернуться и новая математика, когда после продолжительного периода застоя она искала источника для нового творчества. Мало того, даже в наше время математика вынуждена была обратиться к столь тщательно развитым и столь высоко ценившимся греками логическим принципам как для того, чтобы добиться на избранном ею арифметическом пути той же достоверености, которой греки добились в геометрии, так и для того, чтобы сделать неуязвимыми основы исчисления бесконечно-малых.

С другой стороны, столь грандиозная работа не должна была бы повлечь за собой равнодушного отношения к попыткам вычислить приближенным образом то, что не допускает полной и окончательной точности. Ведь Архимед показал, что можно выразить безупречным образом результаты даже подобного вычисления, если указать *пределы*, между которыми должны быть расположены искомые количества. Но его пример не нашел подражателей у авторов других строго математических трудов, в которых практические выкладки вскоре стали рассматриваться, как нечто второстепенное. Математики в строгом смысле слова перестали уделять им должное внимание; в дальнейшем мы увидим, какой непоправимый вред самой математике причинило это пренебрежительное отношение к ним.

6. Бесконечное. Известно, что Пифагор видел в числе принцип всего сущего и говорил: *вещи суть числа*. Так как слово „число" означало у греков целые числа, числа натурального числового ряда, то афоризм этот, вообще говоря, вполне гармонировал с вышерассмотренными исследованиями пифагорейцев по теории целых чисел, а также с мистическим значением, которое они придавали некоторым численным отношениям. Трудно, однако, придать тексту этого изречения значение, прямо соответствующее пифагорейской математике; и следует предполагать, что такое непосредственное значение предшествовало позднейшим, более идеалистического порядка, объяснениям разбираемого афоризма.

Сами по себе слова эти означают просто, что все доступно числовому определению, и так как речь здесь могла итти лишь о величине вещей, то они означают, что величина эта может быть выражена числами. Это, действительно, относится к соизмеримым величинам, если взять достаточно малую единицу меры. Таким образом в приведенном изречении не было бы ничего загадочного, если бы именно пифагорейцы не открыли, что величины одной и той же природы не всегда бывают соизмеримы и что, следовательно, понимаемое буквально изречение это ложно.

Отсюда не следует, однако, что данное нами объяснение, — которое одно только соответствует греческому употреблению слова *число*, — является ошибочным. Возможно, что цитированное выше пифагорейское изречение древнее открытия несоизмеримых количеств; возможно даже, что попытки доказать его правильность привели к открытию этих количеств. Философскую формулу, с которой связан целый комплекс различных соображений, не отбрасывают так легко даже тогда, когда убедились в ошибочности ее первоначального смысла; смысл этот пытаются видоизменить так, чтоб им можно было пользоваться и в дальнейшем, и возможно, что пифагорейцы сделали попытки такого рода.

В рассматриваемом случае нетрудно было сделать соответствующее видоизменение. Несоизмеримость величин получалась, когда приходилось продолжать до бесконечности вычисления, служившие для определения наибольшей общей меры. Отсюда недалеко до предположения, что наибольшая общая мера в этом случае бесконечно-мала и что она содержится бесконечное множество раз в сравниваемых между собой величинах. В этом случае вещи определялись с помощью бесконечных чисел или бесконечных приближений, даваемых отношениями между все возрастающими числами.

Но это объяснение допустимо лишь в том случае, если можно доказать, что математики — как пифагорейцы, так и другие — действительно определяли в ту эпоху величины указанным способом, путем бесконечных приближений. Хотя у нас нет никаких прямых сообщений насчет такого рода определений, но кампания, ведшаяся против них другой школой, именно элейской, свидетельствует об их существовании. Говоря здесь о кампании, я имею в виду знаменитые софизмы, выдвинутые в середине V века основателем элейской школы Зеноном. Общая цель его аргументов показать те нелепости, к которым приходят, когда пытаются получить непрерывные величины из бесконечно-малых частиц, взятых в бесконечном множестве.

Два из софизмов Зенона доказывают, что движение невозможно. Первый аргумент его таков: чтобы дойти от одного места до другого, надо, прежде чем достигнуть последнего, пройти сначала половину пути, затем половину этой половины и т. д. до бесконечности; это предполагает, что надо пройти бесчисленное множество кусочков пути. Следовательно, говорит Зенон, движение невозможно.

Быстроногий Ахилл, говорит далее Зенон во втором софизме, не в состоянии был бы догнать медленной черепахи, ибо ему нужно сперва достигнуть того места, которое черепаха занимает в данный момент, затем пройти кусок пути, сделанного черепахой за этот промежуток времени и т. д. до бесконечности; но эта бесконечность неисчерпаема.

Хотя Зенон в своих утонченных умозрениях дошел до полного отрицания физической реальности движения, но аргументация, которой он пользуется в своем парадоксе, представляет для нас интерес. Движение, которое по природе своей должно быть непрерывным, невозможно согласно Зенону, ибо мы не можем представить его себе таковым, поскольку мы не можем выразить непрерывного движения путем разложения его на изолированные и раздельные моменты. Между тем, такого рода оспариваемые им разложения производили его противники. Рассмотрим теперь аргументацию Зенона.

Первый софизм оспаривает правильность утверждения, что $1=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$ до бесконечности, а второй — утверждение (если допустить, что Ахилл движется в n раз скорее черепахи), что сумма $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots$ имеет конечное значение, при бесконечном увеличении числа членов этого ряда.

Но так как во времена Зенона, несомненно, умели вычислить время, необходимое Ахиллу, чтобы в действительности догнать черепаху, то противники Зенона должны были также знать, что сумма рассматриваемых членов, взятых в бесконечном количестве, равна $\frac{n}{n-1}$. Эти положительные результаты содержатся столь очевидным образом в нелепых, по мнению Зенона, рассуждениях его противников, что, если не допустить вместе со мной, что именно последние пришли к этим результатам, — или к подобным им, — то остается приписать их чуть ли не ему самому. Действительно, трудно предположить, чтобы человек, лишенный математической интуиции и проницательности, стал заниматься столь плодотворными с математической точки зрения разложениями.

Мы видим, таким образом, что в середине V в. занимались суммированием бесконечной геометрической прогрессии, суммированием, которое, как мы увидим, производил впоследствии Архимед с помощью гарантирующего более надежные результаты способа.

Однако с чисто логической точки зрения Зенон прав. Действительно, недопустимо для получения каких-нибудь положительных результатов пользоваться бесконечными количествами, пока бесконечность объяснена лишь по названию, содержащему в себе чисто отрицательное представление о том, что бесконечное не может быть достигнуто. Греческие математики стали на сторону Зенона, так что в следующем столетии идея бесконечного как средства положительного доказательства была отвергнута или, во всяком случае, излагалась таким образом, чтобы не давать повода для подобных возражений.

Но это произошло не сразу. Нет сомнений, что атомистическая школа, утверждавшая, что физические тела состоят из неделимых частиц, в свою очередь занималась вопросом о геометрическом сложении этих тел из бесконечно малых элементов. Во всяком случае, это можно сказать о Демокрите, самом выдающемся представителе этой школы. Рассказывают, будто он занимался вопросом, следует ли считать равными или неравными два параллельных и бесконечно близких друг к другу плоских сечения конуса: во втором случае конус был бы *ступенчатым*, в первом же — цилиндром. Вопрос этот должен был, естественно, возникнуть перед всяким, кто захотел бы вычислить путем своего рода интегрирования объем конуса или хотя бы только доказать теоремы о равенстве конусов по тому способу, каким пользуются еще и в наше время в элементарных учебниках в вопросе об объеме пирамиды. Название некоторых из утраченных сочинений Демокрита: „О несоизмеримых линиях и телах“, „О числах“, а возможно также „О касании круга и шара“, может быть, также говорят в пользу предположения, что он занимался проблемой бесконечности. Тем не менее, мы ничего не знаем о его математических трудах. Это объясняется, вероятно, тем, что в непосредственно следующую эпоху математикой занимались, главным образом, ученые, близкие к школе Платона, целиком отвергавшей философию Демокрита.

Демокрит, несомненно, углубил идею бесконечности, придав тем известный авторитет теоретически построенным на ней рассуждениям. Возможно даже, что он показал применимость ее к некоторым проблемам математики, как, например, к определению объема конуса. Но, тем не менее, идея эта не утвердилась в качестве законного средства для математического доказательства. Гибельный удар ей нанесла, впрочем, не столько диалектика Зенона, который, исходя из философской точки зрения, пытался доказать недостаточность идеи бесконечного для получения известных, совершенно бесспорных результатов, сколько ошибочные заключения, к которым она могла привести.

В качестве примера подобных ошибочных заключений приведем доказательство софиста Антифона, утверждавшего возможность квадратуры круга, т. е. возможность построения квадрата, в точности равновеликого данному кругу. Доказательство это, — если положиться на рассказ противников Антифона, — сводилось к следующему: в круг можно вписать равносторонний треугольник, а затем, деля дуги пополам, правильные многоугольники со все возрастающим числом сторон; если продолжать это построение до бесконечности, то многоугольник сольется с окружностью. Так как для всякого многоугольника можно построить равновеликий ему квадрат, то такой же квадрат можно получить и для круга.

Такого рода неправильные применения идеи бесконечности подорвали веру в нее, и она не смогла удержаться в области точной математики, несмотря на все старания Аристотеля доказать в своей „Физике“, что непрерывность изменения присуща природе пространства, времени и движения. Во всяком случае, софизмы Зенона, равно как и ответ на них Аристотеля, показывают нам, что если греки отказались от пользования бесконечно-малыми, то не благодаря непониманию их, а вполне сознательно, под влиянием чисто логических соображений. Изобретенный до Аристотеля Эвдоксом метод позволял принять такое решение. Действительно, с помощью этого метода, — так называемого метода *исчерпывания*, — можно было доказать, не прибегая к бесконечно-малым величинам, правильность рассматриваемых дедукций. Но я остановлюсь на этом методе лишь после ознакомления с приложениями его у Эвклида; точно так же с объяснением *теории* *пропорций* Эвдокса, связанной с доказательством путем метода исчерпывания, я подожду, пока мы не встретим этой теории в пятой книге „Начал". Заметим здесь только, что она непосредственно применима как к соизмеримым, так и к несоизмеримым величинам, так что после Эвдокса пропорции между несоизмеримыми величинами получили такое же значение, как и пропорции между соизмеримыми количествами.

7. Квадратура круга. Перейдем теперь от этих принципиальных вопросов к некоторым частным исследованиям, которые были начаты тоже в V в. и которыми занимались математики в течение всего доэвклидовского периода и даже после него. Мы выше коснулись вопроса о квадратуре круга; под этим следует понимать как проблему *вычисления* с достаточным приближением длины окружности и площади круга, так и задачу *построения* квадрата, равновеликого площади круга, а также отрезка, равного длине окружности.

Из вышеизложенного ясно, что решение этой второй задачи как в силу точного характера ее, так и благодаря возможности использовать ее затем для вычислений должно было казаться достойным всяческих усилий; по этой причине вплоть до Архимеда математики пренебрегали вычислениями, дававшими лишь неточные результаты. Как мы уже видели, отвращение к подобным выкладкам побудило Антифона обратиться к вписанным многоугольникам — прекрасному средству для производства *вычислений*, чтобы защитить безнадежный тезис о решении рассматриваемой задачи *путем построения*.

Греки знали также способ вычисления верхнего предела для площади, именно — описанные многоугольники, но и это дало повод ко всякого рода софизмам. Так, некий Бризон, как рассказывают, утверждал, будто для нахождения площади круга достаточно провести новый многоугольник между периметрами вписанного и описанного многоугольников: действительно, так как новый многоугольник будет, подобно кругу, больше вписанного многоугольника и меньше описанного, то следовательно (!), он будет равновелик кругу.

Софизм этот, вместе с рассуждением Антифона, доказывает, во всяком случае, что в эту эпоху уже были знакомы с методом получения и проверки приблизительных определений площади круга. Меньшую ценность представляли решения, заключавшиеся в том, чтобы найти число, являющееся одновременно и квадратным числом и так называемым *циклическим* числом, т. е. таким, что квадрат его оканчивается той же цифрой, что и само число. Из этого грубого софизма видно, что борьба, начатая Зеноном против неточных или неполных выражений правильных мыслей в математике, привела не только к тому, что математики стали тщательнее заботиться о точности своих рассуждений; она, с другой стороны, научила софистов, не бывших одновременно и математиками, пользоваться математическими приемами для получения нелепых заключений.

Однако, когда Аристотель и его комментаторы, сообщающие о случаях подобного извращения математической мысли, обвиняют такого математика, как Гиппократ хиосский, в том, что он утверждал, будто он добился квадратуры круга, то, очевидно, они смешивают преследовавшуюся Гиппократом цель с реально полученным им результатом. Но благодаря этому обвинению мы имеем хоть возможность познакомиться с исследованиями Гиппократа, которые не только привели их автора к интересному результату, именно к первым квадратурам площадей, ограниченных кривыми линиями, но и представляют прекрасный образчик методов, находившихся в распоряжении талантливого геометра V в., а также того, как он умел ими пользоваться. Ввиду всех этих соображений мы приведем здесь извлечение из сообщения Эвдема о работах Гиппократа.

Согласно Эвдему, Гиппократ доказывает прежде всего, что в кругах площади подобных сегментов пропорциональны квадратам диаметров; для доказательства этого положения он, вероятно, пользовался соответствующей теоремой о двух кругах. С помощью этой теоремы он находит потом площадь *луночки*, ограниченной полуокружностью и дугой в 90°, построенной на диаметре этой полуокружности, и доказывает, что эта *луночка* равновелика равнобедренному прямоугольному треугольнику, имеющему гипотенузой диаметр полуокружности. После этого он получает следующим образом луночку, бóльшая дуга которой больше полуокружности: сперва строят трапецию, три стороны которой равны a, а четвертая $a\sqrt{3}$ („в степени в три раза больше других“, т. е. такая, что ее квадрат в три раза больше квадрата каждой из других сторон); вокруг этой трапеции описывают окружность и берут луночку, заключенную между большей дугой хорды $a\sqrt{3}$ и дугой, стягиваемой той же хордой и подобной дуге хорды a. Нетрудно видеть тогда, что *луночка* равновелика трапеции.

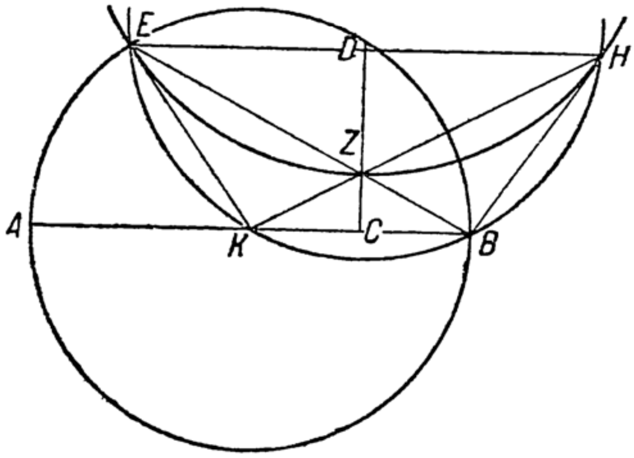
Гиппократ построил еще третью луночку, доступную квадратуре. Я изложу это построение и то, как им пользуется автор его, приведя дословно отрывок из сообщения Эвдема *.

„Пусть дан круг, имеющий диаметром прямую AB $(=2r)$, а центром — точку K. Проведем прямую CD, перпендикулярную к середине прямой BK. Проведем между этим перпендикуляром и окружностью прямую EZ, направленную к B и равную в степени полуторакратному радиусу $\left(=r\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Проведем прямую EH параллельно прямой AB. Соединим K с E и Z. Пусть H будет точкой пересечения прямой EH и продолжения прямой KZ. Соединим, наконец, B с Z и H. Ясно, что одна из этих двух

* В том виде, в каком пытался восстановить его П. Таннери в Mémoires de la Société de Bordeaux, t. V, 2^e série 2^e fascicule, удалив из него дополнение Симплиция; квадратные скобки содержат пояснительные добавления Таннери к переводу греческого текста.

последних прямых будет продолжением прямой EZ, упирающейся в B, и что другая — прямая BH — будет равна прямой EK. Если допустить все это, то вокруг трапеции $EKBH$ можно описать окружность. Проведем также сегмент, описанный вокруг треугольника EZH [каждый из двух сегментов на прямых EZ, ZH будет подобен каждому из трех сегментов на прямых EK, KB, BH].

Если принять это, то получившаяся луночка будет равновелика прямолинейной фигуре, составленной из трех треугольников, „т. е. пятиугольнику $EKBHZ$...“ Это можно доказать на основании того факта, что каждый из обоих сегментов, расположенных на EZ и ZH, равновелик каждому из трех сегментов, расположенных на EK, KB и BH, взятому полтора раза.



Фиг. 7.

Гиппократ доказывает еще, что внешняя дуга $EKBH$ этой луночки меньше полуокружности, ибо угол, вписанный в сегмент EKH, тупой. Доказательство это с помощью наших символов можно выразить следующим образом:

$$EZ^2 = \frac{3}{2}r^2 = EK^2 + \frac{1}{2}KB^2,$$

$$EZ^2 > EK^2 + KZ^2.$$

Что KB^2 больше $2KZ^2$, Гиппократ выводит из того факта, что угол KZB тупой, но нам не сообщают, как он доказывает это; вероятно, он вывел это из того, что смежный с ним угол EZK, противолежащий стороне EK, которая меньше, чем EZ, должен быть острым.

В сохранившемся до нашего времени отрывке имеется еще построение одной луночки, которая вместе с некоторым кругом дает площадь, доступную квадратуре; квадратура этой луночки привела бы к квадратуре круга, но она не тождественна ни с одной из тех, для которых были найдены ранее квадратуры, и Гиппократ, сумевший сам построить эти луночки так, что они были доступны квадратуре, должен был, что бы ни утверждал Аристотель, не хуже нас понимать это.

Чтобы составить себе ясное представление об уровне тогдашних математических знаний на основании только что приведенных отрывков, следует, прежде всего, обратить внимание на краткость указания о построении трапеции по ее сторонам; заметим также, что пользование величиной сторон треугольника для определения того, острый ли, прямой ли или тупой некоторый угол его, считается чем-то общеизвестным, равно как признается общеизвестной теорема, что площади кругов относятся междусобой, как квадраты, построенные на их диаметрах. Однако тогда еще не могли знать ни эвклидова доказательства этой теоремы, ни какого-нибудь другого доказательства ее, которое удовлетворило бы позднейших греческих математиков. В правильности ее убедились, вероятно, с помощью соображений, аналогичных тем, которыми злоупотреблял Антифон.

Отрезок, равный $r\sqrt{\frac{3}{2}}$, могли построить без труда либо с помощью упоминавшегося в главе о геометрической алгебре метода, дававшего возможность преобразовать в квадрат прямоугольник со сторонами r и $\frac{3}{2}r$, либо с помощью пифагоровой теоремы. *Вставка* отрезка $EZ = r\sqrt{\frac{3}{2}}$ между CD и окружностью так, чтобы продолжение его проходило через B, зависит от уравнения второй степени, которое уже умели, как мы это можем утверждать с уверенностью, решать в то время при помощи геометрического построения. Возможно, однако, как мы вскоре покажем, что для этого построения пользовались иным приемом.

Различные попытки построить с помощью линейки и циркуля квадрат, равновеликий кругу, оказались бесплодными; в наше время было доказано, что это и не могло быть иначе. Поэтому, чтобы найти точное решение, которое, согласно тогдашним требованиям, приводило бы путем построения к геометрическому представлению, приходилось обратиться к другим кривым, кроме прямой и окружности. Впрочем, дело шло здесь не о механическом получении таких кривых и тем менее о получении прерывного ряда точек их, ибо такие точки дали бы только приближение. Основное в этом случае, как и в других, подобных ему, заключалось в том, чтобы с помощью точной дефиниции создать математически надежную теоретическую базу, на которой можно было бы в случае необходимости продолжать новые исследования, где фигурировала бы построенная величина. Для этого поступали тогда так, как мы поступаем в настоящее время, когда мы вводим новые функции для определения величин, которые с помощью ранее известных функций можно представить только приближенным образом.

Лучше всего было бы, разумеется, если бы одна и та же кривая могла служить для различных построений, если бы, таким образом, общая теория этой кривой могла быть применима ко всем построениям.

Такую роль и сыграла одна кривая, которой воспользовались для квадратуры круга и которая поэтому получила название *квадратрисы*. Квадратриса была, повидимому, придумана Гиппием элейским первоначально для решения совершенно другой проблемы, именно, трисекции угла. Если обозначить через y ординату какой-нибудь точки квадратрисы в прямоугольной системе координат, а через ϑ угол, образуемый радиусом-вектором этой точки с осью абсцисс, то свойство, служившее древним для определения ее, можно выразить при помощи следующего уравнения:

$$\frac{y}{b}=\frac{\vartheta}{\varrho},$$

где ϱ означает прямой угол, а b — значение y, соответствующее $\vartheta=\varrho$; углы измеряются дугами, стягиваемыми ими как центральными углами круга с радиусом b, так что $\varrho=b\,\frac{\pi}{2}$, пользуясь обычным теперешним обозначением π.

Так как y пропорционально ϑ, то сразу убеждаемся, что эта кривая может служить для деления угла на равные части или же на части, находящиеся в данном отношении. Динострат первый понял, что квадратриса пригодна для квадратуры круга, или, во всяком случае, первый доказал это, показав, что абсцисса точки пересечения ее с осью абсцисс равна $\frac{b^2}{\varrho}$ или $\frac{2b}{\pi}$. Действительно, частное $\frac{b^2}{\varrho}$ не может быть ни больше ни меньше названной абцисcы: если бы оно было больше, то, так, как радиусы-векторы возрастают вместе с ϑ, на кривой должна была бы иметься точка, радиус-вектор которой равнялся бы $\frac{b^2}{\varrho}$, и мы должны были бы иметь (заменив для большей ясности пропорции Динострата нашими равенствами и тригонометрическими знаками):

$$\frac{b^2}{\varrho}\sin\vartheta=y=b\,\frac{\vartheta}{\varrho}=\frac{b^2}{\varrho}\cdot\frac{\vartheta}{b},$$

иначе говоря, синус в круге с радиусом $\frac{b^2}{\varrho}$ должен был бы равняться соответствующей дуге того же самого круга. Если же, наоборот, частное $\frac{b^2}{\varrho}$ было бы меньше рассматриваемой абсциссы, то на кривой имелась бы точка с абсциссой $\frac{b^2}{\varrho}$, для которой мы имели бы:

$$\frac{b^2}{\varrho}\operatorname{tg}\vartheta=y=\frac{b^2}{\varrho}\frac{\vartheta}{b},$$

иначе говоря, тангенс в круге с радиусом $\frac{b^2}{\varrho}$ должен был бы равняться соответствующей дуге того же самого круга. В обоих этих случаях мы приходим к невозможным выводам.

Вдумываясь в сущность этого доказательства, мы видим, что Динострат не довольствуется замечанием того рода, которое мы выразили бы равенствами

$$\lim \frac{\sin z}{z} = 1, \text{ или } \lim \frac{\operatorname{tg} z}{z} = 1,$$

а предпочитает вместо обращения к бесконечному приближению пользоваться просто неравенствами:

$$\sin z < z < \operatorname{tg} z,$$

которые, впрочем, оба необходимы для определения каждого из предельных значений. Способ, каким он избегает прямого определения пределов, отлично гармонирует с тем, что имеет место при *доказательстве путем исчерпывания*. Впрочем, Динострат был учеником Эвдокса, открывшего этот способ доказательства.

Мы увидим в дальнейшем, что изучение зависимости между изменениями круговых дуг и длин отрезков, представленными квадратрисой, легло в основу некоторых числовых определений.

И Архимед, об измерении круга которого мы будем говорить ниже, занимался исследованием кривых, которыми можно было бы воспользоваться приблизительно для тех же целей, что и квадратрисой, именно так называемыми *архимедовыми спиралями* ($r = a\,\vartheta$). Легко заметить, что они пригодны для деления угла и для квадратуры круга, задачи, связанной у Архимеда с определением как касательных, так и площадей этих спиралей. С нашей современной точки зрения может казаться, что он пользуется, скорее, квадратурой круга, или числом π, для названных только что определений; но сравнивая его метод с употреблением квадратрисы, легко убедиться, что в то время приписывали не меньшее значение получению по его способу, т. е. путем определения касательных, если не построения, то, по меньшей мере, хорошего геометрического определения отрезка прямой, равного длине окружности.

Что касается самой кривой, то она показывает наглядным и ясным образом периодические изменения того, что мы теперь называем *круговыми функциями*.

8. Трисекция угла; вставки. Мы только что упомянули о применении квадратрисы и архимедовой спирали к задаче трисекции угла. Кроме этих двух способов мы приведем еще два других решения этой задачи, занимавших с давних времен мысль греческих математиков. Одно из этих решений, точной даты которого нельзя указать, относится, может быть, к V в.; автором же другого, содержащегося в так называемых леммах Архимеда, сохраненных для нас арабами, был, возможно, Архимед. Эти два решения сводятся к тому, что называют *вставкой*.

1. Пусть ABC будет угол, который надо разделить на три равные части. Проведем сперва AC перпендикулярно к BC и AB параллельно BC; затем между AC и AE вставим $DE = 2AB$, так

что продолжение его пройдет через B. Если F есть середина DE, то имеем:

$$\angle ABF = \angle AFB = 2\angle AEF = 2\angle CBD,$$

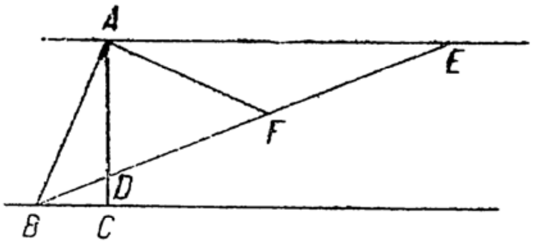
следовательно:

$$\angle CBD = \frac{1}{3}\angle CBA.$$

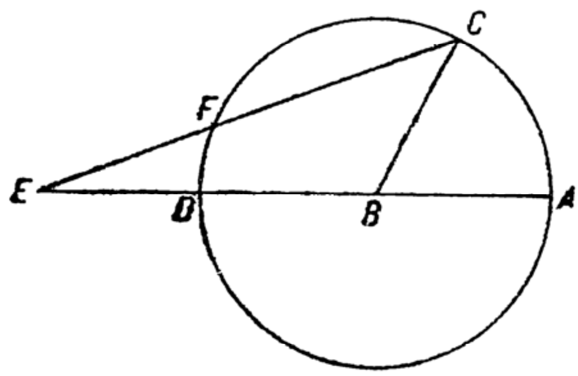
2. Пусть ABC будет угол, который надо разделить на три равные части, и пусть дан круг с центром B, пересекающий обе стороны угла и продолжение AB по другую сторону B в точках A, C и D; между продолжением BD и окружностью вставляют отрезок $EF = BC$ так, чтобы продолжение его проходило через C. Тогда имеем:

$$\angle DEF = \frac{1}{2}\angle BFC = \frac{1}{2}\angle FCB = \frac{1}{3}\angle ABC.$$

Что касается требуемых этими решениями двух вставок, то они, как и сама задача трисекции угла, зависят от уравнений третьей степени и, следовательно, не могут быть найдены с помощью круга и прямой.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Заметим здесь, что греческие геометры сводят часто известное построение к некоторой вставке, не указывая в точности, как произвести эту операцию. Так обстоит дело в цитированном выше отрывке Гиппократа, а Архимед в своем сочинении о спиралях сводит ряд других проблем к той самой вставке, с помощью которой производится приписываемое ему здесь решение проблемы трисекции угла. Может быть, это свидетельствует о том, что было время, когда, наряду с линейкой и циркулем, вставка считалась средством построения, непосредственно применимым к геометрическим построениям. Под вставкой надо понимать вообще построение отрезка прямой, концы которого лежат на данных линиях и которая сама (либо продолжение которой) проходит через некоторую данную точку; такой отрезок можно получить без труда механическим образом с помощью линейки (или куска согнутой бумаги), на которой предварительно нанесли две метки на расстоянии, равном длине заданного отрезка; эту линейку вращают вокруг неподвижной точки, перемещая ее в то же время таким образом, чтобы одна из меток двигалась в точности по одной из заданных линий; это продолжают до тех пор, пока другая метка не очутится на второй заданной линии.

Но так как при всех подобных построениях греки преследовали чисто теоретическую цель, то они не долго удовлетворялись этим легким механическим способом. А так как, с другой стороны, чтобы обойтись возможно меньшим количеством гипотез, надо было довольствоваться минимумом возможных средств построения, то вскоре отказались от прямого пользования вставками во всех тех случаях, когда их нельзя было производить с помощью линейки и циркуля, единственных средств построения, признанных в эквилидовых „Началах“. Возможно, что употребление в старину механических вставок послужило для Аполлония поводом написать две книги по этому вопросу, в которых, как нам сообщает Папп, он рассматривал вопрос о получении вставок с помощью линейки и циркуля. Нет сомнения, что он хотел таким образом заполнить пробел в более старых трудах, сводивших ряд проблем к вставкам, но не указывавших способа получения последних.

Для вставок, которые производятся не с помощью линейки и циркуля, а с помощью конических сечений, стало обязательным с известного момента пользоваться этими кривыми, т. е. стало обязательным не довольствоваться более механическим способом.

На основании того факта, что Архимед довольствовался приведением своих задач к вставкам, не говоря ничего о способе получения последних, нельзя утверждать с полной уверенностью, что вышеупомянутое обязательное требование возникло после Архимеда, ибо старый обычай пользоваться механическим способом мог еще и до него навести на мысль составить, для получения вставок с помощью конических сечений, некоторые постоянные правила, которые Архимед мог считать общеизвестными. Во всяком случае, Папп сообщает нам, как можно с помощью конических сечений получить упоминающиеся у Архимеда вставки.

В том случае, когда вставки не сводились или не могли быть сведены ни к пользованию линейкой и циркулем, ни к пользованию коническими сечениями, становилось неизбежным теоретическое исследование самой вставки. Для этого лучше всего было установить известное определение и, основываясь на нем, предпринять исследование кривой, образуемой одним из концов заданного отрезка, именно тем концом, который не связан с одной из заданных линий; задача вставки решается тогда с помощью точек пересечения этой кривой со второй заданной линией. Подобное исследование было, между прочим, предпринято после эпохи Архимеда Никомедом для случая, когда первой из заданных линий является прямая, — описываемая кривая называется в этом случае конхоидой Никомеда. Никомед, кроме того, изобрел прибор для механического описывания этой кривой. Пользование этим прибором сводится приблизительно к вышеуказанному механическому получению вставки.

Каким бы способом ни производилась вставка, метод трисекции угла, приписанный нами с надлежащими оговорками Архимеду, сыграл в дальнейшем важную роль в истории математики; именно на нем основывается данное Виетой (Viète) решение уравнения третей степени для так называемого *неприводимого* случая.

9. Удвоение куба. Среди проблем, которые в их алгебраической форме зависят от уравнений третьей степени и которые древние математики впоследствии решали с помощью конических сечений, трисекция угла не была единственной задачей, интересовавшей ученых V в. Еще более важной была задача, представляющая геометрическую форму чистого кубического уравнения, иначе говоря, *удвоение* или умножение куба.

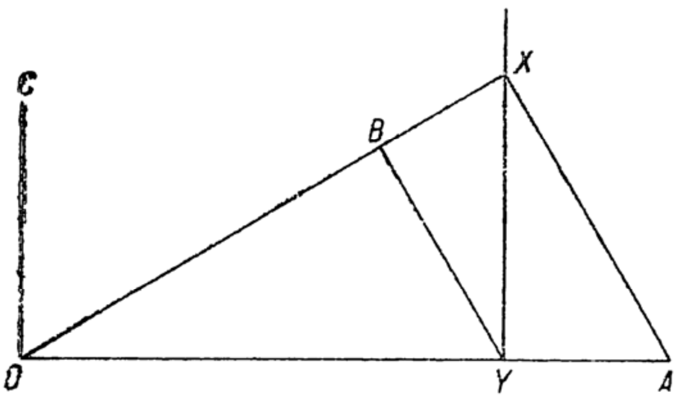
Эту задачу называют иногда *делосской задачей* в связи с одним изречением оракула, требовавшим увеличить вдвое, не изменяя его формы, находившийся на о. Делосе жертвенник кубического вида. Возможно, что в этом случае пифия находилась, скорее, под внушением математиков, чем вдохновлялась своим богом. Как мы уже указывали, в геометрической алгебре греческие математики научились уже преобразовывать всякие произведения двух сомножителей и действия над составленными из них выражениями второй степени в прямоугольники и действия над площадями и, в связи с этим, заменили извлечение квадратного корня преобразованием прямоугольника в квадрат — задача, которая, несомненно, была решена пифагорейцами.

Вполне естественна была мысль перейти от этих проблем на *плоскости* к соответствующим задачам в *пространстве*. В этом случае приходилось представить произведение *трех* величин с помощью параллелепипеда и заменить действия над выражениями третьей степени операциями над пространственными телами. Наряду со столь простыми вещами, как введение в параллелепипед нового ребра или основания и их применение к сложению и вычитанию, или преобразование параллелепипеда, имеющего основанием прямоугольник, в параллелепипед с квадратным основанием, должна была неизбежно встать задача преобразования параллелепипеда в куб, подобно тому как перед современным алгебраистом после проблемы квадратных корней возникает задача о кубических корнях. Так как первым иррациональным кубическим корнем является $\sqrt[3]{2}$, то *удвоение куба* явилось первым примером ряда проблем названного здесь типа. Эта проблема должна была как по своему существу, так и по новым, связанным с ней, трудностям вызвать огромный интерес у математиков.

Первая попытка решения этой задачи приписывается нашими источниками Гиппократу. Подобно тому как задача преобразования прямоугольника в квадрат основывается на построении средней пропорциональной, так проблема удвоения куба (и, вероятно, также несколько более общая проблема преобразования параллелепипеда в куб) сводится у Гиппократа к задаче нахождения двух средних пропорциональных. Действительно, если наш параллелепипед преобразован уже в другой a^2b, с квадратным основанием a^2 и высотой b, который, в свою очередь, должен быть преобразован в куб x^3, то x определяется из следующих пропорций:

$$a:x=x:y=y:b.$$

Принадлежит ли это преобразование Гиппократу или нет, во всяком случае, после него *делосская проблема* формулируется, обыкновенно, следующим образом: *определить две средних пропорциональных x и y к данным отрезкам a и b.*



Фиг. 10.

Первое из многочисленных решений этой задачи, данных древними математиками, принадлежит Архиту. Чтобы понять это решение, заметим, что дело идет о построении фигуры, состоящей из двух прямых OYA и OBX, между которыми должна быть проведена ломаная линия $AXYB$ так, чтобы XY была перпендикулярна к первой прямой, а AX и YB перпендикулярны ко второй прямой, причем OA и OB имеют заданную длину. Действительно, в этом случае OX и OY являются, очевидно, двумя средними пропорциональными между OA и OB, и, таким образом, мы знаем диаметр OA окружности, на которой должно лежать X, но не диаметр OY окружности, на которой лежит B.

Архит пытается определить этот последний круг, как сечение шара с диаметром OA. Так как OB задано, то точка B будет лежать на круговом сечении этого шара, линия OB, а значит, и точка X будут лежать на конусе вращения, имеющем направляющей эту полученную при сечении шара окружность. Если теперь желают получить искомое положение путем вращения вышеуказанной фигуры вокруг перпендикуляра OC, проведенного в ее плоскости в точке O к OA, то проекция Y точки X на плоскость, образуемую при этом OA, опишет окружность большого круга, а следовательно, прямая XY опишет цилиндрическую поверхность, на которой будет расположена точка X. Но так как точка X должна во время вращения находиться на окружности с диаметром OA, то она должна также находиться на кривой, которую описывает при своем движении на цилиндрической поверхности эта окружность, т. е. должна находиться на линии пересечения цилиндрической поверхности с тором, образуемым вращением круга вокруг касательной к нему в точке O. Точка X тогда определяется как место пересечения этой цилиндрической кривой и вышеуказанной конической поверхности. Это и дает нам решение поставленной нами задачи.

Нет сомнения, что практически этим решением не пользовались. На это указывает, между прочим, и то обстоятельство, что в тексте не говорится о реальном порождении пространственной кривой, ибо рассуждение о служащем для этой цели торе представляет вставленное нами самими объяснение. Так как Архит несомненно знал, что путем последовательных проб можно получить более легкие и точные определения AX и AY, то, очевидно, стремились к теоретическому определению, которое годилось бы для других исследований, содержащих в себе кубические корни. Однако, чтобы такого рода определение было удовлетворительным, надо допустить, что Архит был уже знаком с вышеуказанной пространственной кривой или, по крайней мере, с методами, позволяющими определить ее свойства, — а это маловероятно.

Несмотря на все это, его решение представляет огромную ценность, показывая размах его математического творчества. Действительно, именно руководствуясь мыслью, что круг можно применить к решению соответствующей задачи на плоскости, Архит исследует, нельзя ли воспользоваться шаром для решения аналогичных задач в пространстве. При решении ее он обнаруживает ясное понимание встречающихся на его пути трехмерных свойств пространства; он не останавливается даже перед введением кривой, которую описывает на цилиндрической поверхности некоторый круг при своем движении. Его построение свидетельствует не только о безупречности дедукции, но и об основательном знакомстве с применением геометрических мест к определению точек, знакомстве, позволявшем попытаться распространить его и на пространство. Мы в праве поэтому заключить, что во времена Архита „Геометрия в пространстве“ и употребление *геометрических мест* — по крайней мере *в плоскости* — достигли уже высокой степени развития.

Сообщают, будто Эвдокс, ученик Архита, пользовался для решения той же самой задачи другими кривыми. Было высказано предположение, что эти кривые были проекциями кривых пересечения трех поверхностей, входящих в построение Архита.

Ученик Эвдокса, Менехм, нашел, с своей стороны, другой способ, которым после него пользовались древние математики для решения этой задачи, как и множества других, — он ввел именно *конические сечения*. Действительно, согласно позднейшим авторам, Менехм определил две средние пропорциональные между a и b, как координаты x и y точки пересечения кривых, выраженных двумя из уравнений $ay = x^2$, $bx = y^2$, $xy = ab$; кроме того, он показал, что кривые эти — две параболы и одна гипербола — можно стереометрически представить, как сечения конусов вращения. Впрочем, мы еще вернемся к этому вопросу в дальнейшем ходе нашего исследования, когда займемся исключительно развитием теории конических сечений.

Но здесь мы коснемся еще мимоходом других, открытых в дальнейшем, методов построения двух средних пропорциональных. Были придуманы различные механические инструменты для построения фигуры, содержащей, как фиг. 10, подобные треугольники, с помощью которых прямо получается искомое отношение. Изобретение одного из этих инструментов приписывается Платону, другого — Эратосфену. Но так как ни один из этих приборов не имел никакого влияния на ход развития математики, то мы не будем останавливаться на описании их; заметим только, что, вероятно, под их влиянием Декарт тоже придумал один прибор, который он описывает в своей „Геометрии".

Никомед свел построение двух средних пропорциональных к проблеме вставки, но построение, которым он при этом пользуется, далеко не так просто, как те, которые употребляются для трисекции угла.

10. Теоремы и задачи; смысл и значение геометрического построения. Мы рассказали сперва о главных идеях и методах, возникших в V в. и развитых в дальнейшем греческими математиками; приведя некоторые частные исследования, мы дали затем образцы реального содержания тогдашней математики. По мере того как подвигались вперед, стали все более ощущать потребность в неизменных и надежных *формах*, которые согласовались бы с господствующими идеями и еще более укрепили бы их и которые в то же время были бы достаточно гибки, чтобы вместить новые, непрерывно увеличивавшиеся достижения.

Плодом деятельности философской школы Платона и математической школы Эвдокса и происходившей между ними теоретической борьбы была, именно, выработка этих форм.

В качестве примера этой работы мы можем привести спор по вопросу о том, в какой мере можно рассматривать математические истины как *теоремы*, и в какой как *проблемы*. Платоники высказывались в пользу понимания их, как теорем, опираясь при этом на то, что решение какой-нибудь задачи устанавливает лишь существующую уже предварительно вещь; так, например. равносторонние треугольники существуют независимо от того, строят ли их или нет, потому что идея *равностороннего треугольника* существует реально еще до всякого построения. Для учеников же Эвдокса, особенно типичным представителем которых был Менехм, суть дела заключалась в выявлении математических истин с помощью построения фигур или, по крайней мере, с помощью исследования их.

С внешней стороны, ни одной из спорящих школ не удалось победить другую, ибо в эвклидовых „Началах" теоремы и проблемы встречаются бок о бок; но более важно установить сущность различия между теоремами и проблемами. Впоследствии его формулировали приблизительно следущим образом: в теореме утверждается то, что одно только и возможно, в проблеме же ищут то, что может быть и иначе. По этим признакам и следует различать, в какой из обеих этих форм должна быть выражена какая-нибудь истина. Так, было бы, например, ошибочно выставить в качестве проблемы положение: *вписать прямой угол в полуокружность*.

Однако подобные словесные различения представляют гораздо меньший интерес, чем знакомство с ролью, которую играли теоремы и особенно проблемы в дошедших до нас сочинениях, в особенности в эвклидовых „Началах"; может быть, это дает нам возможность понять позицию Менехма лучше, чем на основании разных сообщений. Действительно, согласно этим сообщениям, платоники утверждали, что равносторонний треугольник существует до построения его, Менехм же, очевидно, должен был доказывать, что в его реальном существовании мы убеждаемся, лишь построив его и доказав при этом, что это построение приводит, действительно, к преследуемой им цели. Но так именно и поступает Эвклид: он не довольствуется определением равносторонних треугольников; прежде чем начать пользоваться ими, он убеждается в их существовании, решив в первой теореме своей первой книги задачу о построении этих треугольников; затем он доказывает правильность этого построения.

Необходимость пользоваться таким методом дает себя чувствовать особенно сильно тогда, когда приходится в дальнейшем пользоваться равносторонними треугольниками для новых построений. Следует, однако, заметить, что Эвклид прибегает к этому методу даже в случае вещей, которые в дальнейшем служат лишь для доказательства какой-нибудь теоремы: так, прежде чем позволить себе воспользоваться (книга I, 16) серединой прямой линии, он доказывает путем построения (книга I, 10), что эта точка действительно существует. Так же он поступает и во всех других подобных случаях.

Основное *значение* геометрического построения заключается в *доказательстве реального существования того самого объекта, к нахождению которого приводит это построение*.

Возможно, что Менехм первый полностью выяснил это значение геометрических задач, решаемых построением, но это сознавали уже и до него: лучшим доказательством этого является наличие геометрической алгебры. Когда было найдено, что не существует *ни числа, ни числового отношения* (дроби), которые, умноженные на самих себя, дают 2, и когда вместо поисков такого числа стали искать отрезок, который был бы стороной квадрата с площадью вдвое большей площади квадрата, построенного на данном отрезке, то прежде всего оказалось необходимым доказать существование подобного отрезка. Это именно и делают, представив его в виде диагонали квадрата, построенного на данном отрезке.

Решение общих уравнений второй степени посредством построения приобретает такое же значение. Только учитывая эту общую установку, можно вполне понять стремление тогдашних математиков получить путем построения решения задач о квадратуре круга, трисекции угла, удвоении куба или о нахождении двух средних пропорциональных. Без этого нельзя абсолютно понять, как могли удовлетворять в какой бы то ни было мере греческих математиков решения, непригодные для технического использования, вроде решения квадратуры круга с помощью квадратрисы * или нахождения средних пропорциональных Архитом. Указанная нами установка дает нам также ключ к пониманию ряда других фактов в истории греческой математики.

Впрочем, в известных случаях мы отлично понимаем эту роль построений. Это относится в особенности к тем случаям, когда какая-нибудь поставленная общим образом задача оказывается не всегда возможной, а требует для этого некоторых специальных условий. В подобных случаях греческие авторы начинают с доказательства необходимости этих условий, доказывая теорему, что *рассматриваемая фигура обладает всегда свойствами, требуемыми условиями возможности*; они доказывают затем, что эти *необходимые* условия в то же время *достаточны*, с помощью задачи, указывающей, как можно построить фигуру, если условия выполнены, доказывая, кроме того, что фигура тогда действительно получается. Первый пример этого рода встречается в „Началах", (I, 20 и 22): первое предложение содержит теорему, гласящую, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других; вторая содержит задачу: построить треугольник по заданным сторонам, которые все удовлетворяют этому условию.

11. Аналитический метод; аналитически-синтетическая форма изложения. Важнейшее из достижений школ Эвдокса ** и Платона в области внешней формы математики, придавших греческой математике тот облик, который она имеет у Эвклида и у позднейших греческих математиков, это, бесспорно, создание так называемого *апагогического* или *аналитического метода* и форм *анализа* и *синтеза*, с помощью которых удалось добиться не только надежных результатов, но и безупречного изложения этих результатов.

Аналитический метод находит непосредственное приложение при решениях задач, поэтому мы поговорим прежде всего о нем. Впрочем, мы полагаем, что логическое значение установленных для получения и изложения решения задач правил можно будет понять лучше, если мы оставим на время область греческой математики и поговорим об аналитическом решении задач, в самом общем виде пояснив применение его на примерах, заимствованных из задач и областей, совершенно чуждых грекам. Я хочу, таким образом, указать на последовательное и соответствующее их первоначальному значению употребление в математеке слов *ана-*

---

* Этот пример, может быть, не так убедителен, как следующий за ним. Действительно, доказательство, что квадратриса пересекает ось абсцисс в определенной точке, было довольно неполным; с другой стороны, квадратриса, начерченная по точкам раз навсегда посредством лекала, могла и практически употребляться для деления угла в данном отношении (Т.).

** Впрочем, *реальный* вклад школы Эвдокса в математику более важен, чем это ее достижение в области *внешней формы*.

из и *синтез, аналитический* и *синтетический*, употребление, которое следовало бы усвоить, чтобы прекратить наблюдающуюся в настоящее время путаницу, вызванную исключительно применением слова анализ к алгебраическому анализу.

Цель всякой математической задачи найти величины или фигуры, удовлетворяющие известным требованиям. При решении такой задачи часто играет известную роль догадка, основывающаяся на некоторой аналогии ее с другими задачами. Нельзя отрицать того, что таким путем, может быть, пришли первоначально к ценным результатам, но при всех своих достоинствах интуиция такого рода не представляет метода в собственном смысле слова

При методическом решении проблемы следует *анализировать* заданные условия, и прежде всего их надо ясно представить себе. что достигается лучше всего в том случае, если представить себе их выполненными, т. е. *представить себе, что задача решена.* В дальнейшем надо каким-нибудь образом — руководствуясь правилами, выведенными из задач, аналогичных разбираемой задаче, или особо придуманными, преобразовать заданные условия в условия, которые будут *непременно* выполнены, если окажутся выполненными первые, и продолжать это преобразование до тех пор, пока мы не придем. наконец, к условиям, которым мы в состоянии удовлетворить.

Путем такого *анализа* мы находим, как *должна* решаться задача, если она вообще разрешима.

Синтез заключается затем в том, чтобы, прежде всего, реально выполнить это решение, т. е. определить искомые величины и фигуры таким образом, чтобы удовлетворить получившимся в результате преобразования условиям; после этого остается еще доказать, что и первоначально заданные условия удовлетворены. При отсутствии более простого способа это доказательство совершается обыкновенно с помощью преобразования условий в обратном порядке по сравнению с тем, который имел место в анализе, и приводит к выводу, что если выполнены новые условия, которыми заменили первоначальные, то эти первоначальные условия тем самым тоже по *необходимости* удовлетворяются. Это доказательство можно опустить,—или, вернее, оно уже имеется *готовым* в анализе, — если пользоваться только обратимыми преобразованиями, так что искомые новые условия являются не только необходимыми, но и достаточными условиями первоначальных; в противном случае это доказательство надо дать.

В качестве примера мы возьмем решение задач посредством алгебраических уравнений: в этом случае вводят обозначения для неизвестных величин и вносят эти обозначения точно так, как и обозначения известных величин в уравнения, выражающие заданные условия; затем воображают себе, что эти уравнения удовлетворены и что, следовательно, задача решена.

Вышеупомянутое преобразование условий задачи представлено в этом случае преобразованием уравнений, которое приводит под конец к уравнениям, дающим искомое решение. В аналитической геометрии *, например, образуют таким образом уравнения *геометрических мест*, позволяющие решить задачу. Если применить анализ к задачам, имеющим целью найти значения неизвестных, то преобразованными уравнениями будут те уравнения, в которых неизвестные отделены. Ограничиваясь этим последним случаем, легко заметить, что следующий за анализом синтез заключается:

1) в реальном вычислении величин, данных найденными выражениями, включая сюда их преобразование согласно определенным правилам, как, например, их приведение, сведение к более простой иррациональности и т. д.;

2) в проверке этих величин.

Эта проверка совершается обыкновенно путем прямой подстановки, но ее можно сделать также согласно с тем, что было сказано выше о синтетическом доказательстве, перебирая шаг за шагом в обратном порядке употреблявшиеся уравнения. Не следует думать, будто предшествующий этому доказательству анализ делает его излишним; это видно по тем случаям, когда элиминируют путем возведения его в степень какой-нибудь радикал, ибо если этот радикал был одним из значений корня,—например, положительным значением квадратного корня,— то, как известно, можно таким путем ввести посторонние решения. Проверка в этом случае дает доказательство неправильности этих последних корней. Таким образом анализ сам по себе может ввести посторонние решения.

Если решение известно заранее, то можно ограничиться синтетическим получением как его, так и его доказательства; но здесь имеется другое неудобство. Пусть, например, задача сводится к решению уравнения

$$x^2 - ax + b = 0;$$

на основании синтеза можно написать:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b},$$

понимая под знаком радикала только положительный корень; хотя проверка или синтетическое доказательство показывает затем, что это решение верно, отсюда еще не следует, что верно только оно одно.

То, что мы сказали об алгебраическом решении, имеет вполне общее значение; *взятый сам по себе анализ может дать слишком много решений, взятый сам по себе синтез может дать их слишком мало.*

Рассмотрим еще, в каком пункте полного решения встречаются *условия возможности.*

---

* Мы будем употреблять название *аналитической геометрии* в обычном смысле, не обращая внимания на то, что чистая геометрия может тоже принимать аналитическую форму и что можно оперировать синтетически с теми методами вычисления, которые обыкновенно лишь и называют *аналитической геометрией*

В настоящее время их рассматривают обыкновенно в конце формального решения, которое лишь затем начинают *обсуждать* В вышеприведенном примере приходят на основании полученного выражения к тому выводу, что x будет вещественным в том случае, если $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b$. Но подобное обсуждение предполагает допущение, под названием *отрицательных* и *мнимых количеств,* таких количеств, в которых первоначально не видели бы вовсе решений; без этих новых видов величин условия возможности найдены были бы в ходе анализа раньше. Если, например, из вышеприведенного уравнения выводят, что

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + b = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

то отсюда можно заключить, что

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

лишь в том случае, если $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geq b$, ибо в противном случае правая сторона уравнения не имела бы никакого смысла.

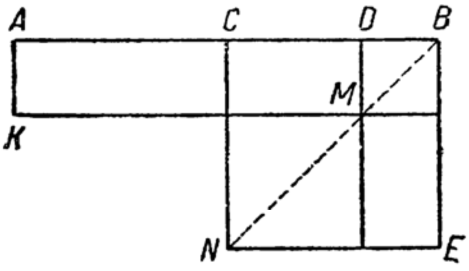
Таким образом можно при желании вывести путем анализа как условия возможности задачи, так и решение ее, но можно также удовольствоваться чисто синтетическим изложением.

Греки применяли изложенный нами только что метод решения к *геометрическим задачам*, целью которых, как мы видели, является вообще нахождение *построения*, либо реального с помощью линейки и циркуля, либо только формального. При *методических* поисках решения подобных задач к ним следует, согласно нашим общим замечаниям, подходить с методом анализа, методом, которым, вероятно, пользовались уже пифагорейцы для геометрического решения уравнений второй степени. Возможно, однако, что этот метод применялся ими лишь более или менее сознательным образом, ибо — как показывает история математики — пользоваться фактически каким-нибудь методом не одно и то же, что уяснить его себе так, чтобы можно было употреблять его каждый раз, когда в этом почувствуется необходимость, и еще менее сформулировать его так, чтобы и другие могли его употреблять.

Нахождение Архитом двух средних пропорциональных сводится к построению, которое было, очевидно, найдено аналитическим методом. Действительно, Архит не мог бы угадать применения цилиндрической кривой, которая была неизвестна до него; только путь анализа мог побудить его ввести эту кривую; абсолютно то же самое мы можем наблюдать в настоящее время в аналитической геометрии, когда требуемое для решения какой-нибудь задачи геометрическое место оказывается кривой, о которой не знали ровно ничего раньше и которая, однако, определяется вытекающим из анализа уравнением.

Употребление *геометрических мест* и само нахождение этих мест представляет, таким образом, другой пример применения аналитического метода, восходящий, вероятно, к пифагорейцам. Но лишь в школах, основанных преемниками Архита, Платоном и Эвдоксом, метод этот принял ту форму, в которой он стал обычно применяться греческими математиками.

Метод в его применении и изложении полученных с его помощью результатов состоял из ряда *звеньев*, описание которых легко дать на примере эллиптического приложения площадей (стр. 43). Но мы изложим здесь содержание этих звеньев несколько короче, чем это сделали бы древние.



Фиг. 11.

1. Задача ставится в *протазисе* (πρότασις): приложить к данному отрезку заданную площадь, так чтобы нехватало квадрата.

2. В *эктезисе* (ἔκθεσις) задачу относят к некоторой начерченной фигуре и формулируют ее: приложить к отрезку AB в виде прямоугольника (начерченный) квадрат q так, чтобы нехватало квадрата.

3. В *апагоге* (ἀπαγωγή) или преобразовании предполагают, что задача решена (с помощью прямоугольника AM, у которого нехватает квадрата BM), и сводят ее к уже известной задаче следующим путем: принимая C за середину AB, помещают прямоугольник KC на DB и получают DE.

Прямоугольник AM преобразуется, таким образом, в гномон или же в разность квадратов CB^2 и CD^2, следовательно, надо определить отрезок CD таким образом, чтобы этот гномон равнялся квадрату q.

4. В так называемом *разрешении* (résolution) исследуют, насколько действительно имеют все необходимое для решения поставленной задачи; в рассматриваемом случае это имеет место лишь тогда, когда q, которое должно равняться гномону, вырезанному из квадрата CB^2, меньше этого квадрата.

Это показывет нам, что в поставленной здесь задаче чего-то нехватает; действительно, задачи обыкновенно (по крайней мере, те, которые сохранились в дошедших до нас трудах греческих математиков) ставились с таким ограничением, которое позволяло решить их. Благодаря этому в рассматриваемом случае мы получаем вместо задачи, с одной стороны, *теорему*, а с другой, — более ограниченную *проблему*.

Цель теоремы (встречающейся в несколько более общем виде в „Началах“, VI, 27) — доказать, что прямоугольник, приложенный к отрезку так, чтобы нехватало квадрата, меньше или равен квадрату, построенному на полуотрезке или же, если угодно, что прямоугольник меньше квадрата, имеющего тот же периметр.

Проблема (встречающаяся в более общем виде в „Началах“, VI, 28) тождественна с задачей, решение которой мы пытались дать здесь, с той, однако, разницей, что данный квадрат должен быть меньше или максимум равняться квадрату, построенному на половине данного отрезка.

Такое дополнение к протазису называется *диоризмом* (διορισμός) или ограничением задачи; поэтому в эктезисе надо указать по поводу заданных фигур, что они удовлетворяют условию ($q \leq CB^2$). Благодаря *ограничению*, которое мы предположим введенным в протазис и эктезис, становится абсолютно излишним, как мы сейчас увидим, разрешение. Действительно, решение задачи нам теперь удастся, и разрешение сольется с тем, что покажет в дальнейшем синтез по вопросу о способе ее решения. Если же, наоборот, рассмотреть приложение метода к новым проблемам, а не то, в каком виде авторы сохранившихся до нас трудов сообщают нам о готовых результатах, то разрешение должно было несомненно играть важную роль. Действительно, в ходе анализа приходилось все время проверять, достаточно ли далеко доведена апагоге, чтобы можно было решить задачу, но, кроме этого, разрешение было средством достигнуть того, что мы уже назвали выше (стр. 72) главной целью разбора задач, именно, разложения первоначальной задачи на теорему и проблему, с помощью которых убеждаются, что условия существования искомой фигуры соответственно необходимы и достаточны. Результат исследования — как в других вообще случаях, так и в данном примере — это нахождение некоторого максимума или минимума.

Другим результатом разрешения было указание числа возможных решений. Так, например, в рассматриваемом случае безразлично — предполагая, что CD^2 имеет надлежащую величину — упадет ли D с той или другой стороны C, — обстоятельство, на которое могли обратить внимание, установив максимальное значение q. Однако греки, для которых построение было, главным образом, средством убедиться, что фигура вообще существует, не придавали этому факту особенного значения. Так как в других случаях многозначность задачи основывается на многозначности задач, к которым ее сводят, то, если она останется незамеченной у последних, анализ не выделит ее и в первой. Поэтому в некоторых случаях, когда эта многозначность казалась греческим математикам имеющей некоторое значение, ее делали предметом специального исследования.

Преобразование и разрешение составляют *анализ*, с помощью которого находят решение задачи, а найденное решение излагается затем в *синтезе*, который включает в себя:

5. *Построение* (κατασκευή), с помощью которого находят искомое посредством установленных приемов построения. Дело идет здесь, конечно, не о перечислении всяческих частностей, а об указании только тех уже известных построений, из которых составляется разыскиваемое построение, как, например, определение в нашем примере CD с помощью пифагоровой теоремы и т. д. Таким образом построение представляет, лишь с легким изменением в форме, повторение того, что было сказано в разрешении.

Заметим еще, что построение — нахождение которого было, разумеется, основной трудностью всего исследования — является, в конце концов, только одним из членов исследования, взятого в целом; это вполне согласуется с указанной выше целью решения задач, состоявшей в том, чтобы доказать существование фигур, которые следовало построить, и обнаруживающейся также и в изложении построений. Эта форма изложения целиком совпадает, как мы вскоре покажем, с формой изложения, употребляемой при построении фигур, необходимых для доказательства теорем: греки выражаются всегда в *повелительном наклонении совершенного вида*: *пусть взята такая-то точка, пусть проведена такая-то линия*. Таким образом построения представляют собой как бы гипотезы и не являются при решении задачи *правилами* столь же категорическими, какими считаем их мы при решении наших задач на построение. Впрочем, переход к этой последней точке зрения наблюдается уже в латинских переводах, с помощью которых распространилось в Европе в новое время знакомство с античной геометрией: действительно, в этих переводах повелительные наклонения совершенного вида можно было передать лишь через *сослагательное настоящего времени*: „возьмем такую-то точку, проведем такую-то линию".

6. Затем доказывают (*доказательство, ἀπόδειξις*), что с помощью построения удалось действительно получить искомую фигуру; при этом доказательстве пользуются обыкновенно той же цепью дедукций, что и при преобразовании, но только в обратном порядке. Так, в нашем примере образуют прямоугольник *AM* из гномона, помещая прямоугольник *DE* на *AC*.

7. Наконец, в *заключении* (*συμπέρασμα*) утверждается, что преследуемая цель действительно достигнута; для этого повторяют протазис, предпосылая ему формулу: „следовательно..." и т. д. и завершая его формулой: „что и требовалось сделать".

Если *анализ*, заключающийся в № 3 и 4, т. е. в преобразовании и разрешении, методически важен для получения решения, то он более не нужен, когда речь идет о безупречном изложении полученных результатов, бывшем всегда главной целью греческих авторов. Поэтому его часто опускают, и изложение сводится лишь к № 1, 2, 5, 6, 7; этим путем получают форму изложения, которую мы назовем *синтетической*.

Эта синтетическая форма изложения употребляется в особенности при систематической трактовке целой теории, отдельные построения которой были предварительно более или менее известны авторам или были найдены ими и объединены в систему, как в „Началах" Эвклида или в большей части теории конических сечений Аполлония. Впрочем, мы немногое узнаем и из таких мест, в которых содержится сообщение об анализе, ибо, во-первых, можно согласно сказанному нами произвести *преобразование*, обратив попросту всю цепь дедукций *доказательства*, причем *разрешение* сливается с *построением*; во-вторых, сообщаемый анализ представляет лишь анализ задачи, ограниченной диоризмом, а не анализ, как в нашем первоначальном примере, который мог привести к этому *ограничению*.

Остановившись так подробно на анализе и на связанном с ним *синтетическом* изложении проблем, мы можем более кратко коснуться приложения этого метода и соответствующих форм к теоремам. Синтетическая форма изложения состоит здесь — или, во всяком случае, может состоять — абсолютно из тех же самых звеньев, достаточно только заменить повсюду слово *проблема* словом *теорема*. *Построение* заключается здесь лишь в построении линий, необходимых для доказательства, и его можно даже опустить, если эти линии не нужны. Что касается *заключения*, то оно заканчивается здесь словами: „что и требовалось доказать".

Звенья эти, которые, как мы видим, логически достаточны также для теорем, встречаются повсюду в эвклидовых „Началах", независимо от того, идет ли речь о теоремах или о проблемах.

Однако и по отношению к теоремам может итти речь об аналитическом методе в собственном смысле слова. Это имеет место тогда, когда хотят проверить, верна или нет какая-нибудь теорема, высказанная другими авторами, либо же найденная, может быть, по догадке самим проверяющим. В этом случае начинают с предположения, что рассматриваемая теорема, которую мы обозначим через A, верна, затем с помощью цепи дедукций преобразуют эту теорему (точно так же, как в апагоге или преобразовании в случае проблем) до тех пор, пока она не приведет к некоторому новому результату K, истинность или ложность которого известна. В первом случае только возможно, но отнюдь не достоверно, что A истинно, ибо K может вытекать из цепи дедукций, в которой A не играет действительной роли. Это бывает и при пользовании современными алгебраическими методами, например, если мы, не замечая этого, умножим обе стороны данного уравнения на какую-нибудь сложную величину, которая оказывается, в действительности, равной нулю. Если установлено, что истинный результат K вытекает из A, то истинность A проверяют, перебирая по возможности в обратном порядке всю цепь дедукций, пройденную в анализе, пока не установят, что истинность K влечет за собой истинность A. Если это имеет место, то пройденная в обратном порядке цепь дедукций служит доказательством верности A, и тогда довольствуются изложением этого доказательства вышеупомянутым синтетическим образом, опустив приведший к этому анализ.

В случае же, когда получившийся из A результат ложен, можно, наоборот, сейчас же заключить, что A ложно, либо же можно, допуская, что A и B два утверждения, из которых одно необходимым образом истинно, утверждать, что B истинно, рассматривая его как теорему, доказываемую тем, что предположение, будто B ложно или A истинно, должно привести к ложному результату K. Такое доказательство от обратного носит апагогический характер, т. е. оно, собственно говоря, аналитическое, но так как оно дает абсолютное убеждение в истинности утверждения *B*, то оно находит часто применение в трудах, придерживающихся, в общем, синтетической, формы изложения например, оно встречается нередко в эвклидовых „Началах".

Динострат применил также эту антитетическую форму доказательства к квадратрисе, и ею пользовались постоянно, как мы это увидим в дальнейшем, при доказательствах методом исчерпывания.

Наконец, теорема, полученная нами в качестве побочного результата, когда мы пытались выше установить без предварительного ограничения эллиптическое приложение площадей, является отличным примером того, что какая-нибудь теорема не должна быть непременно результатом анализа теоремы, истинность которой проверяется, или обратной ей теоремы, а может быть результатом анализа связанной с этим проблемы.

12. „Начала"; вспомогательные средства анализа. Станут ли пользоватся анализом, чтобы найти решение какой-нибудь задачи или доказательство какой-нибудь теоремы, станут ли пользоваться синтезом для изложения полученных результатов, — но решение будет всегда состоять из решений более простых задач, а доказательство будет основываться всегда на истинности более простых предложений, — предполагая, конечно, что уже знают предварительно эти более простые задачи и предложения. Таким образом, чтобы быть в состоянии продвигаться вперед с помощью описанных нами только что приемов, надо прежде всего располагать собранием решений более легких задач и теорем, служащих отправным пунктом для дальнейшей работы. Труды, содержащие подобного рода собрания, называются „Началами".

Первые „Начала", о которых до нас дошли сведения, были составлены Гиппократом, но, к несчастью, мы совершенно не знакомы с этим трудом остроумного и, повидимому, довольно независимого от разных философских школ геометра. Достигнутые после него в школах успехи реального и формального порядка были впоследствии, в свою очередь, собраны в новых „Началах". Одно из подобных достижений — именно введение ограничений или диоризмов — приписывают некоему Леону, составившему после Гиппократа тоже „Начала". Но его „Начала", равно как и другие позднейшие, были потеряны после того, как эвклидовы „Начала" добились того всеобщего признания, которое они сохранили затем в течение более двух тысяч лет повсюду, куда проникла греческая математика.

Мы намерены остановиться очень подробно на этом основоположном труде. Изучая его, мы убедимся, как прочен материал его, составленный из изложенных синтетически теорем и задач, и какой надежной основой он являлся для воздвигнутого на нем математического здания. Возможно, однако, что для получения подобных результатов нужно было обладать, кроме этих пронизанных насквозь логической строгостью „Начал", еще другими вспомогательными средствами, форма которых подходила бы лучше к аналитической работе. Образцы исследований этого рода мы имеем как до Эвклида, так и после него; одно из них принадлежит самому Эвклиду. Так, мы имеем сведения, что один из преемников Эвдокса, Гермотим, написал работу о геометрических местах, вероятно, о так называемых *плоских* местах, представляемых прямой или окружностью. Великий геометр Аполлоний написал впоследствии тоже две книги по этому самому вопросу; сохранившиеся о их содержании сообщения сыграли в новое время крупную роль в деле создания аналитической геометрии.

В качестве вспомогательных средств аналитического метода мы должны упомянуть еще эвклидовы „Data". Содержание этого труда не выходит из рамок „Начал", но он выражает их в другой форме. Цель содержащихся в „Data" предложений заключается обыкновенно в том, чтобы доказать, что если „даны" некоторые величины или части фигуры, то даны также, — т. е. определяются с помощью первых, — и некоторые другие величины или части фигуры. В первых теоремах книги доказывается, что данные величины находятся в данном отношении, имеют данную сумму и т. д. В одной из дальнейших теорем доказывается, что данные прямые пересекаются в данной точке. Другие теоремы содержат условия того, чтобы какой-нибудь треугольник был дан по своему роду, т. е. был подобен некоторому заданному треугольнику; наконец, в иных теоремах доказывается, что две величины, сумма (или разность), а также прямоугольник которых даны, в свою очередь, даны сами и т. д.

Нетрудно понять значение этой книги в качестве вспомогательного средства анализа. В сталии „преобразования" дело идет о нахождении у фигуры, снабженной в случае необходимости вспомогательными линиями, известных частей, по которым можно определить части неизвестные, и если в стадии „разрешения" приходится показать, что обладаешь, действительно, всем тем, что требуется для решения задачи, то этого нельзя сделать лучше, чем ссылкой на необходимые теоремы в том виде, в каком они имеются в „Data".

Некоторые из теорем „Data" знакомят нас, кроме того, с более специальными методами анализа, находившимися в распоряжении тогдашних математиков. Так, например, в „Data" речь идет не только о том, какие элементы могут определить треугольник, но и о том, какие элементы могут определить только вид его. Это позволяет нам утверждать, что задачи решали, не только отыскивая в фигуре треугольники, при полном построении которых можно было бы приступить к решению задачи, но и отыскивая такие треугольники, один только вид которых был бы определен. Построение треугольника такого вида могло, вообще, служить исходной точкой только для предварительного построения фигуры, подобной искомой фигуре; после этого оставалось ввести реальную величину какого-нибудь отрезка. В трудах греческих математиков мы встречаем, действительно, задачи, которые решаются таким образом.

Сведение какой-нибудь задачи к нахождению двух величин, произведение (прямоугольник) и сумму либо разность которых знают, т. е. сведение ее к геометрическому решению уравнений второй степени, является, согласно вышеприведенным теоремам „Data“, методом, который можно было применять и который часто применялся греческими математиками. Мы увидим в дальнейшем, что другие теоремы „Data“ свидетельствуют о знакомстве с более сложными уравнениями, выражающимися посредством пропорций и геометрической алгебры.

13. Обзор эвклидовых „Начал“; синтетическая система. Эвклидовы „Начала“ состоят из тринадцати книг, к которым в большинстве изданий присоединяют, в качестве четырнадцатой книги, одну работу Гипсикла и, в качестве пятнадцатой, один еще более поздний и представляющий меньшее значение труд.

Первая книга содержит важнейшие предложения о сторонах и углах треугольников, о построении треугольников, о перпендикулярных и параллельных прямых, о параллелограмах и их площадях, а также о площадях треугольников. Во второй книге содержатся уже изложенные выше принципы геометрической алгебры. В третьей излагаются теория круга, прямых и образуемых ими углов внутри круга, а также теорема о степени точки по отношению к окружности. В четвертой книге говорится о вписанных и описанных многоугольниках, в частности, о построении правильного треугольника, четыреугольника, пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника.

Нет сомнения, что личный вклад Эвклида в этих книгах сводился, главным образом, к расположению и более точному, чем до него, изложению всего этого известного уже его предшественникам материала, согласно с строгими логическими требованиями, выработавшимися к его времени у греческих математиков. Но к этому, несомненно, присоединилась и творческая, в тесном смысле слова, математическая работа. Действительно, пропорции, как мы уже видели, употреблялись в геометрии еще до зарождения точной теории пропорций у Эвдокса. Когда в отдельных случаях приходилось прибегать к теории пропорций, основанной исключительно на теории рациональных величин, то неважно было, найдут ли свое место в системе эти приложения несколько раньше или позже. Но Эвклид уже был знаком с теорией Эвдокса о пропорциях, и так как она по своей новизне не могла найти места в начале системы, то он отложил ее до пятой книги. Поэтому до пятой книги следовало избегать какого бы то ни было, явного или скрытого, употребления пропорций и подобия, и весьма вероятно, например, что именно соображения этого рода заставили Эвклида — как мы уже указывали вкратце выше — придумать то доказательство пифагоровой теоремы, которое имеется в конце первой книги „Начал“.

Чтобы читатель понял, как можно было добиться таких результатов без учения о пропорциях, я напомню, что с помощью геометрической алгебры доказываются теоремы о степени точки по отношению к окружности (III, 35—37). Теоремы эти употребляются для построения равнобедренного треугольника, в котором угол у вершины равен половине угла у основания (IV, 10), причем оказывается, что основание является тогда стороной правильного пятиугольника, вписанного в ту же окружность, что и данный треугольник (IV, 11).

В пятой книге излагается теория пропорций Эвдокса, а в шестой — приложения ее к геометрии и к расширению области геометрической алгебры. Здесь снова появляются задачи о построении средних пропорциональных и о делении отрезка в среднем и крайнем отношении, решенные уже во второй книге с помощью ресурсов геометрической алгебры, но теперь они решаются (VI, 13 и 30) с помощью теории пропорций.

Мы не знаем, какие из содержащихся в этих книгах теорем и доказательств принадлежали Эвдоксу и какие связаны были раньше с менее развитой теорией пропорций. Но, во всяком случае, Эвклиду принадлежит честь систематического расположения всего этого материала.

Однако он не включил сюда специальной теории рациональных величин и целых чисел, посредством отношений которых выражаются эти величины. Теорию эту он излагает в VII—IX книгах, т. е. после общей теории пропорций, но не основывая ее на последней. Доказательства здесь, вероятно, те самые, какими пользовались до Эвдокса, но результаты которых распространили затем на иррациональные величины.

Что касается иррациональных величин, то они, в свою очередь, рассматриваются в десятой книге. Здесь находится и классификация их, начатая Теэтэтом (см. выше, стр. 51), но законченная Эвклидом. Наиболее самостоятельная часть работы Эвклида заключалась, несомненно, в этом и в применении указанной классификации к определению ребер правильных многогранников.

Но эта последняя задача предполагала развитие учения об элементарной стереометрии, составляющего содержание одиннадцатой книги. Здесь вычисление объема пирамиды требует обращения к доказательству с помощью бесконечно-малых и пределов, которое получают в замаскированном виде посредством эвдоксова метода исчерпывания, употребляемого с этой целью в двенадцатой книге, но предварительно использованного для доказательства теоремы, что площади двух кругов пропорциональны квадратам, построенным на их диаметрах. Определение элементов правильных многогранников дается только в тринадцатой книге.

Нетрудно видеть, что однородные вопросы, как, например, теория иррациональных величин, и сходные методы, как приложения доказательства с помощью исчерпывания, до известной степени объединены между собой. Однако объединение это является, отчасти, результатом предшествующего исторического развития; для Эвклида во всяком случае оно имеет второстепенное значение и подчинено следующим соображениям: в связи со строгими логическими принципами, развитыми в предыдущую эпоху и усовершенствованными, отчасти, самим Эвклидом в его труде о ложных заключениях, самым важным для него была логическая неуязвимость всего его труда, неуязвимость, гарантировавшаяся, как мы видели, в случае каждой частной задачи или теоремы синтетическим изложением. Но, кроме того, требовалось расположить — и в каждой отдельной книге, и во всем труде в целом — задачи и теоремы таким образом, чтобы основа и материал для каждой новой теоремы (или задачи) доставлялись уже предыдущими теоремами и задачами. Руководясь этим принципом, Эвклид не позволял себе пользоваться даже серединой отрезка в каком-нибудь доказательстве, прежде чем он не доказал заранее ее существования путем построения.

Такую совокупность положений, такую связь, при которой идут от известного к неизвестному, как в случае синтетического доказательства какой-нибудь отдельной теоремы, т. е. при которой поднимаются от простого и частного к сложному и общему, мы назовем *синтетической системой*, хотя мы не находим в древности никаких оправдательных документов для такого наименования. В подобной системе особенный интерес представляют исходный пункт и заключение.

По вопросу об исходном пункте надо заметить следующее. Ясно, что задачи, опирающиеся на решения, доставленные предыдущими задачами, и что теоремы, доказательства которых опираются на предшествующие теоремы и задачи, должны предполагать некоторые предварительные *первичные* построения, возможность выполнения которых считается известной, и некоторые *первичные* утверждения, истинность которых считается непосредственно очевидной: у Эвклида эти построения называются *постулатами* или *требованиями* (αἰτήματα), а эти утверждения — *общепринятыми допущениями* (Κοῖναι ἔννοιαι), но вместо этого последнего термина у других авторов — особенно философов — встречается слово *аксиомы* (ἀξιώματα). Но до этих двоякого сорта *предпосылок* надо установить еще *понятия*, к которым они относятся, и для этого служат *дефиниции или определения* (ὅροι).

В § 14 мы займемся установленными таким образом Эвклидом *идеями* и *гипотезами* и выясним тогда требования, предъявлявшиеся вообще древними к своим гипотезам.

В синтетической системе известного внимания заслуживают не только предварительные гипотезы, но и заключение ее, ибо все предшествующее ему носит как будто характер необходимых для этого заключения предпосылок. Эвклид, как мы уже говорили, заканчивает свои „Начала“ определением ребер правильных многогранников и вытекающим отсюда построением последних, однако, это, безусловно, не являлось его единственной целью, ибо в ходе своей работы он касался многих вопросов, не имеющих ни прямого, ни косвенного отношения к правильным многогранникам. Правильнее сказать, что он заложил общую основу для будущих математических исследований, и, несомненно, к этому Эвклид и стремился. Но так как построение правильных многогранников как бы венчает труд Эвклида, то под влиянием этого еще с ранних пор стали включать в „Начала“ в качестве четырнадцатой и пятнадцатой книги исследования других авторов об этих многогранниках.

Если рассматривать первую книгу „Начал“ самое по себе, то речь в ней идет о нахождении того, что логически необходимо для установления геометрической алгебры, развитой во второй книге. Основанием этой алгебры являются завершающие первую книгу теорема о гномоне (I, 43), и пифагорова теорема (I, 47). Однако, наряду с главной целью, преследуется и другая вспомогательная задача, именно, теорема (32) о сумме углов треугольника, которая необходима для главной цели и которую Эвклид связывает в средине этой книги с теорией параллельных. Наряду с этим, в книге имеется еще ряд теорем о взаимном расположении прямых линий, о перпендикулярных и параллельных прямых с соответствующими построениями, о равенстве и построении треугольников и о зависимости между равенством и неравенством сторон и углов. Все это представляет не вполне обозримую смесь разных положений, являющуюся, однако, результатом логически надежного метода, согласно которому теоремы воздвигаются друг на друге. Упомянем, например, что теоремы о равенстве треугольников даны в предложениях 4, 8 и 26; в то же время Эвклид нисколько не интересуется вопросом о равенстве треугольников, у которых равны один угол, одна прилежащая к нему сторона и сторона противолежащая; действительно, ему нечего делать с подобными теоремами. В шестой книге, где он собрал теоремы о подобии треугольников, он останавливается на соответствующем случае подобия. В конце книги даны теоремы о равенстве площадей в более тесной связи друг с другом.

Так как мы выдвинули здесь идею о *синтетической теоретической системе*, то мы скажем еще несколько слов о том, что мы понимаем под *аналитической системой*, не только антитезы ради, но и в целях полного выяснения, независимо от приложения всего этого к трудам древних, понятий анализа и синтеза.

В синтетической системе мы лишь постепенным образом поднимаемся к рассмотрению более сложных и общих отношений; наоборот, в аналитической системе мы исходим из некоторого общего принципа, который, в силу самой своей общности, может представлять известную простоту, и из этого принципа выводим требуемые в разных частных случаях отношения. Изложение геометрии, в котором начинают с прямой линии и круга, поднимаясь постепенно до конических сечений и кривых высших степеней, по существу носит *синтетический* характер, хотя бы даже частные вопросы трактовались в нем аналитически; изложение же, в котором сразу исследуют общие свойства кривых, чтобы получить отсюда частные теоремы о прямых или конических сечениях и пр., по существу *аналитическое*.

Типичный пример аналитического изложения представляет аналитическая механика Лагранжа (Lagrange), где все вытекает из принципа *виртуальных скоростей*. Если бы принцип этот был принят как гипотеза, которая должна быть доказана на основании своих приложений или своих следствий, то изложение абсолютно соответствовало бы приложению аналитического метода к частным теоремам, как мы его понимаем. Хотя у Лагранжа принцип этот предварительно доказывается, но это не меняет сущность дела, и когда изложение Лагранжа называют аналитическим, то это не расходится с принятым нами для названного слова смыслом.

Заметим еще, что, подвигаясь синтетически от более специальных случаев к более общим вопросам, мы должны, вообще говоря, притти к такой точке зрения, откуда уже может затем начать развертываться аналитическая система.

14. Геометрические гипотезы Эвклида*. Гипотезы, на которых основывается у Эвклида геометрия, содержатся в определениях, постулатах и аксиомах различных книг „Начал".

Особенный интерес представляют гипотезы первой книги, ибо вместе с полученными из них постепенно результатами они являются основой гипотез других книг. Поэтому мы остановимся на них, дополнив их, однако, сейчас же некоторыми из других гипотез, вводимых в дальнейшем. Что касается гипотез, имеющих отношение к некоторым частным теориям, как, например, теория пропорций, то их мы коснемся лишь в связи с самими этими теориями.

При первом знакомстве с определениями, постулатами и аксиомами Эвклида должно, несомненно, показаться, что они нисколько не удовлетворяют требованиям формы и логической строгости, выдвинутым, как мы сказали, древними. Так, например, можно убедиться, что различные определения не говорят ровно ничего об определяемом предмете и нисколько не гарантируют того, что существует, действительно, некоторый объект, отвечающий определениям.

Определение прямой линии** можно, по существу, заменить такого рода утверждением: существует известный вид линий, которые называются *прямыми*. Чтобы узнать, к какому сорту линий относятся прямые, т. е. каковы те свойства линий, которые мы употребили бы в настоящее время для этого определения, надо обратиться к постулатам, содержащим гипотезу, что прямая линия обладает такими-то и такими-то свойствами. Что касается самих постулатов и аксиом, то они часто сформулированы с крайней сжатостью, превращающей их в настоящие загадки и резко контрастрирующей с обстоятельным и подробным изложением всего, имеющего отношение к теоремам и чисто математическому доказательству их.

Надо заметить, что математик относит к числу определений, постулатов и аксиом все те гипотезы, которые он считает необходимыми в своей области и, делая это, он не объясняет ни *как*, ни *почему* так надо поступить. Обязанность математика дать предварительно полный перечень того, что он хочет предположить, но он должен сделать это с достаточной ясностью так, чтобы в случае необходимости пользоваться этими предпо-

* Слово гипотеза употребляется нами в общем и ходячем смысле, что, впрочем, достаточно ясно видно из контекста. В соответствии с ходячим словоупотреблением было бы лучше сказать *предположения* (suppositions).

** Надо заметить, что даваемые Эвклидом определения прямой и плоскости темны и что их истинный смысл утратился уже во времена Прокла: „Прямая линия это такая линия, которая ex aequo во всех своих точках". — „Плоскость — это такая поверхность, которая ex aequo для всех расположенных в ней прямых". Определения эти возникли, повидимому, из техники строительного искусства и имели только эмпирическое значение (Т).

ложениями он обращался только к тому, к чему он имеет право прибегать. Однако его совершенно не касается вопрос об абстракциях, побудивших его установить предварительные понятия и приписать им в постулатах и аксиомах определенные свойства, а также и вопрос о предварительном доказательстве того, что он им не приписал ни слишком много, ни слишком мало свойств. В качестве математика он отвечает только за одно,—именно, за то, что всякого, принимающего эти гипотезы, он заставит при помощи правильных дедукций принять также и все, что он сам выведет из этих гипотез. Таким образом только практика может показать, что он сделал достаточное количество гипотез. Нельзя дать такого же прямого доказательства того факта, что число сделанных им гипотез излишне велико. Но если он уже сделал эту ошибку, то он может ожидать, что другие ему докажут, что *некоторые из его гипотез противоречивы* или же *могут быть выведены друг из друга.*

Чтобы правильно разобраться в вопросе о геометрических гипотезах, явно высказанных древними — в особенности Эвклидом— надо рассмотреть, *каковы* они, а не останавливаться на вопросе о недостатке данных насчет их происхождения или на вопросе о форме, в которой они изложены. Тогда можно убедиться, что они совпадают с теми гипотезами, на которых в настоящее время основываем геометрию и мы и что изложены они с достоверностью и полнотой, позволяющими им быть образцом для исследователей, которые захотели бы частично дополнить или видоизменить их. Однако, чтобы дать возможность вполне понять их, нам придется кое-где внести незначительные изменения в недостаточную (по крайней мере, на современный взгляд) форму изложения некоторых из них.

Начнем с *определений,* требующих некоторых замечаний.

Точка определяется своей *неделимостью* (I, опред. I). Затем переходят к *линии,* определяемой как длина без ширины (I, 2), к *поверхности,* имеющей длину и ширину (I, 5), и к *телу,* имеющему длину, ширину и толщину (XI, 1).

Эти определения нисколько не выясняют вопроса о том, как приходят к понятиям точки, линии, поверхности и тела, но как гипотеза, на которой приходится строить, они предполагают, что мы уже обладаем этими понятиями и что мы понимаем, что значит приписывать точке 0 измерений, линии 1 измерение и т. д.; это предполагает также, что мы понимаем, что линия есть геометрическое место точек, поверхность и тело—геометрические места линий и поверхностей.

Чтобы притти реальным образом к этим понятиям, идут обыкновенно не синтетическим путем от точки к линии, поверхности и телу, но обратным аналитическим путем, начиная с тела, как с чего-то непосредственно данного, рассматривая затем поверхность как границу тела и т. д. Между прочим, древние были знакомы и с этим обратным путем, как это видно из другого ряда определений (XI, 2, I, 6 и I, 3), которые, не являясь у Эвклида новыми определениями поверхности, линии, точки, указывают, просто, каковы границы тела, поверхности и линии.

Я уже заметил мимоходом, что объяснения того, что такое *прямая линия,* следует искать не в определениях, а в постулатах в связи с одной из аксиом. Точно так же лишь в постулатах установлено существование *круговой линии,* между тем как предшествующие этим постулатам определение (I, 15), повидимому, говорит слишком многое об ее свойствах. Действительно, в этом определении говорится не только то, что все точки окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра, но оно указывает еще, кроме того, что круг сам есть фигура, т. е. часть плоскости, ограниченная окружностью, и что центр расположен внутри этой последней. Хотя в определении не говорится, что окружность должна содержать *все* точки, обладающие первым из вышеуказанных свойств, но все же первое указание дает ценное средство для различения между всей окружностью и дугой ее, и благодаря этому оно имеет право остаться среди определений. Мы увидим, впрочем, что если бы эти указания не нашли места здесь, то их пришлось бы внести в той или иной форме в число постулатов.

Наоборот, определение диаметра круга (I, 17) содержит добавление, безусловно, излишнее не только для определения, но и, вообще, как гипотеза; в нем говорится не только, что диаметр проходит через центр, но еще — что он делит круг на две равные части, но это последнее утверждение есть предложение, которое доказывается путем наложения друг на друга обеих частей, на которые делится диаметром круг. Впрочем, возможно, что это добавление вставлено в определение каким-нибудь позднейшим издателем „Начал“, ибо оно не применяется у Эвклида ни в какой теореме.

Определение *угла* у Эвклида само по себе почти так же бессодержательно, как и определение прямой линии. Компенсируется это, однако, рядом аксиом, устанавливающих критерии для распознавания, когда какая-нибудь геометрическая величина равна, меньше или больше другой величины того же вида. Действительно, критерии эти применимы и к углам, и так как, кроме того, мы знаем, что углы можно складывать, то они получают, таким образом, вполне определенные величины (ср. ниже). Заметим еще, что первоначальное определение угла применимо и к углам, образуемым кривыми линиями. В III, 16, Эвклид пользуется этим понятием, чтобы доказать, что перпендикуляр к диаметру в какой-нибудь точке окружности образует с окружностью меньший угол (или приближается к кругу больше), чем всякая другая прямая линия.

Согласно последнему и наиболее надежному изданию текста „Начал“*, даваемые Эвклидом в первой книге их *постулаты* таковы:

---

* Euclidis Elementa; edidit et latine interpretatus est J.-L. Heiberg, Lipsiae. 1883 — 88,8°.

1. Провести прямую линию между двумя точками.

2. Продолжить неограниченным образом ограниченную прямую линию.

3. Описать данным радиусом из данного центра окружность.

4. Все прямые углы равны между собой.

5. Если прямая линия, пересекающая две другие прямые образует с одной и той же стороны внутренние углы, сумма которых меньше двух прямых, то две эти последние прямые пересекутся между собой на своем продолжении с той стороны, где сумма углов меньше двух прямых.

Построения, служащие на основании этих постулатов для всех других построений, выполняются практически с помощью линейки и циркуля, но было бы ошибочно рассматривать постулаты только с этой единственной точки зрения. Действительно, в этом случае пришлось бы, не говоря уже о других соображениях, сказать, что оба последних постулата не находятся на своем настоящем месте; этим объясняется, вероятно, ошибка издателей „Начал", начавших уже с ранних пор помещать эти постулаты среди аксиом.

Как мы видим, нигде не упоминается о линейке и циркуле: впрочем, даже с помощью их можно получить только неполное представление о математической прямой линии и круге. Что касается первых трех постулатов, то и они (в соответствии с тем, что мы сказали, вообще, о гипотезах Эвклида) не дают никакого разъяснения по вопросу о том, на основании чего и каким образом устанавливаются все эти предположения. В соответствии с тем, что интересовавшие древних проблемы сводятся, по существу, к предложениям о существовании, а их решения — к доказательству существования того, чем занимаются или чего ищут в этих проблемах, и постулаты представляют собой *утверждения о существовании* того, что желают допустить, без всякого доказательства и проверки. Таким образом смысл утверждений, содержащихся в первых трех постулатах, сводится, просто, к заявлению, что существует прямая, проходящая через две любые данные точки, что эту прямую можно продолжить неограниченным образом и что при заданном центре и радиусе существует окружность, или, иначе говоря, что существует окружность, с заданным центром и проходящая через заданную точку.

Действительно, третий постулат следует понимать именно таким образом, и из него вовсе не следует, что можно принять без доказательства существование круга с данным центром и с радиусом, данным в каком-нибудь другом месте плоскости. Это видно уже из того, что Эвклид показывает во второй теореме, как можно найти такой круг, исходя из допускаемых постулатами построений, путем изложенного в первой теореме построения равностороннего треугольника. Сделав вышеуказанные ограничения, Эвклид сообразовался лишь с требованием не делать *излишних гипотез*. Если бы речь шла только о практическом выполнении построения с помощью циркуля, то положение данного радиуса было бы безразлично; можно поэтому утверждать, что указанный во второй теореме метод не имел целью практического выполнения чертежей.

Если так понимать смысл постулатов, то ясно, что недостаточно допустить существование определенных простейшим образом прямых линий и кругов. Для выполнения геометрических построений приходится находить посредством пересечения различных линий точки, которые могут служить в дальнейшем для нахождения новых линий. В таком случае приходится постулировать существование точек пересечения на таком же основании, как и существование этих линий, ибо оно не может быть следствием последнего. Вот почему в пятом постулате высказывается в явном виде новая гипотеза, что две прямые пересекаются; но, чтобы утверждение это было истинным, приходится сделать необходимые ограничения, играющие здесь ту же роль, какую играет диоризм в случае задачи. Если бы мы не постулировали на основании пятого постулата существование точки пересечения, то решения задач, в которых пользуются точками пересечения прямых линий, не дали бы, вообще говоря, доказательств существования построенных фигур, доказательств, которые должны были бы быть существенным результатом построений.

Если эти соображения верны, то недостатком является отсутствие постулатов, утверждающих существование точек пересечения прямой с окружностью или двух окружностей между собой. Разумеется, точное разграничение случаев, когда пересечение имеет фактически место, требует уже развития ряда теорем, и возможно, что Эвклид отказался установить указываемые постулаты, потому что он не мог произвести этого разграничения тотчас же со всей требуемой общностью. Но, во всяком случае, для того чтобы можно было пользоваться общим образом кругом для построений, необходимы все же некоторые гипотезы насчет его пересечения с прямой и другими кругами. Каковы же гипотезы, которыми пользуется здесь Эвклид? Мы постараемся это выяснить на основании тех приложений, которые он делает из них.

Действительно, мы видим (теорема I, 12), как, желая убедиться, что окружность с заданным центром пересекает некоторую прямую, он проводит эту окружность через какую-нибудь точку, расположенную по ту сторону этой прямой от центра, и как он считает очевидным (теорема 1), что два круга, центры которых расположены на окружностях друг друга, пересекаются в двух точках и точно так же (теорема 22) что окружность, проходящая через точку, расположенную внутри другой окружности, и вместе с тем через точку, находящуюся вне ее, пересекает эту вторую окружность. Из приводимых здесь мест „Начал“ ясно, что он опирается на эти гипотезы; в других случаях он не утверждает ничего о пересечении окружности с прямой или с другой окружностью, не доказав предварительно существования этого пересечения.

Можно ли теперь утверждать, что в явно формулированных Эвклидом гипотезах нет ровно ничего насчет гипотез, которыми он пользуется фактически в цитированных местах „Начал" и, в частности, в теореме 12, — и пользуется при этом, очевидно, вполне сознательно? В постулатах, действительно, нет ничего. Но, как мы уже указывали, различие между постулатами и определениями не настолько резко, чтобы можно было ограничиться анализом только первых. Ясно поэтому, что Эвклид может для оправдания пользования этими гипотезами указать на определения, в которых говорится, что круг — это фигура, заключающая в себе центр, откуда следует, что окружность пересечет достаточно продолженную прямую линию в двух точках, если, конечно, ее центр находится по одну сторону этой прямой и если она проходит через точку, расположенную по другой стороне ее, и что она точно так же пересечет другую окружность, если она соединяет какую-нибудь внутреннюю точку с точкой внешней. Заметим, между прочим, что в известных случаях можно таким же образом доказать пересечение прямых линий, не прибегая к пятому постулату и принимая только во внимание, что периметры многоугольников тоже ограничивают площади конечных размеров. Эвклид пользуется этим приемом в I, 21.

Остается объяснить, как нашло себе место среди постулатов утверждение, что все прямые углы равны.

Из аксиом следует, что если углы при наложении совпадают, то они равны, в противном случае они неравны. Утверждение о равенстве всех прямых углов, таким образом, тождественно с утверждением, что все прямые углы при наложении совпадают. Но так как по определению (определение 10) прямой угол — это угол, равный смежному с ним углу, то сущность постулата сводится к утверждению, что угол, образуемый прямой и ее продолжением, имеет определенную величину или же, что продолжение какой-нибудь данной прямой за один из ее концов однозначно определено. Это, именно, и хотел сказать Эвклид своим постулатом, — в чем нетрудно убедиться, заметив, что постулат фактически применяется именно таким образом (см. доказательство теоремы I, 14).

Таким образом четвертый постулат оказывается лишь дополнением ко второму и утверждает, что содержащееся в этом втором постулате нахождение (Bdetermination) продолжения прямой линии однозначно; именно поэтому он и помещен среди постулатов, а не среди аксиом.

Впрочем, современный читатель, привыкший обращать внимание на число решений, не почувствовал бы отсутствия такого постулата, ибо он немедленно подумал бы, что *однозначность* уже подразумевается вторым постулатом. Но так как, в конце концов, этот четвертый постулат существует, то приходится пожалеть об отсутствии другого постулата, который содержал бы утверждение, что данное в первом постулате нахождение прямой линии тоже однозначно. Эвклид открыто пользуется этой *однозначностью* в теореме I, 4, в которой для своего доказательства он прибегает к аргументу, „что две прямые линии не могут заключать между собой пространство“; но это утверждение, абсолютно тождественное утверждению, что первый постулат однозначен, не встречается среди установленных гипотез. Это, несомненно, непоследовательность, которую заметили уже в древности; под влиянием ее издатели „Начал“ включали явно употребленную в I, 4 гипотезу либо в число постулатов, к которым она относится с тем же основанием, что постулат I, 4, либо, впоследствии, в число аксиом. Этот новый постулат выражает, кроме того, что нахождение точки, как точки пересечения двух прямых на основании пятого постулата, однозначно.

Наоборот, нет нужды предполагать *однозначности* третьего постулата о нахождении круга посредством центра его и радиуса. Действительно, здесь мы можем снова воспользоваться тем фактом, что уже в определениях круг определен (déterminé) более полным образом, чем прямая линия. Эвклид в состоянии благодаря этому доказать в теоремах III, 5 и 6, что концентрические окружности не могут ни пересекаться, ни касаться и что, таким образом, полное геометрическое место точек, расположенных на одинаковом расстоянии от некоторой данной точки, сводится исключительно к *одной* замкнутой кривой, или, иными словами, что третий постулат дает только *одну* окружность.

Первый, второй, четвертый и пятый постулаты Эвклида, дополненные гипотезой, которая используется в теореме I, 4 и согласно которой первый постулат приводит к однозначному результату (détermination); дополненные далее, как мы это увидим, гипотезой, содержащейся в седьмой аксиоме, выражают тогда все свойства, на которых основывается употребление прямой линии в геометрии. Эвклид, как мы увидим, воспользовался этим бессознательно также для установления основных свойств плоскости.

Данное явным образом определение плоскости (I, 7) само по себе так же бессодержательно, как определение прямой линии; плоскость упоминается еще в определениях I, 8 и 15, где говорится, что стороны угла должны быть расположены в одной и той же плоскости и что круг есть плоская фигура. Важнее, однако, то, что содержится молчаливым образом в принятых постулатах, а именно, что различные определения (déterminations), имеют место в одной и той же плоскости. Без этого пятый постулат был бы абсолютно лишен смысла.

Согласно свойству плоскости, приписываемому ей особенно первым и вторым постулатами, она содержит всякую проходящую через две ее точки прямую целиком, вместе с ее продолжением до бесконечности. Если бы Эвклид сам формулировал явным образом это свойство, то он мог бы получить реальную основу для трех первых теорем одиннадцатой книги, согласно которым прямая линия, частично расположенная в плоскости, не может выйти из нее, две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости (и определяют ее), а линия пересечения двух плоскостей есть прямая.

Между тем, Эвклид приводит для этого другие доказательства, среди которых доказательство теоремы XI, 1 предполагает необходимым образом истинность теоремы XI, 2, которая, в свою очередь, обратно опирается на теорему XI, 1.

В логическом отношении — как с принципиальной стороны, так и с формальной — стереометрия у Эвклида изложена, вообще, значительно хуже планиметрии; особенно убедительно доказывают это, как мы увидим, его аксиомы, но, несмотря на этот недостаток, надо признать, что у греческих математиков был довольно значительный запас стереометрических теорем и операций.

Если в вопросе об определениях и постулатах мы, желая составить себе точное представление о гипотезах Эвклида, должны были, отчасти, обратиться к рассмотрению того, как он применяет их в теоремах, то, с другой стороны, те *аксиомы* первой книги, в подлинности которых нет сомнения и которыми поэтому мы и займемся исключительно, — именно аксиомы 1—3 и 7—8*, дают ясное и сжатое представление об основании и применении понятий равенства и неравенства к величинам вообще и геометрическим величинам в частности.

Первый элемент понятия равенства дается первой аксиомой: величины, равные одной и той же величине, равны между собой. Наличие слова *равный* в объяснении понятия равенства не лишает это объяснение ценности: в этом можно убедиться, заметив, что нельзя в даваемом аксиомой объяснении заменить слово *равный* словом *неравный*. Однако его недостаточно для получения пригодного понятия о величинах, ибо к этому надо еще прибавить, что величина не изменяется, если ее разделить и затем обратно сложить ее части. Этой стороне дела посвящены аксиомы 2 и 3, согласно которым равное, прибавленное или вычтенное из равного, дает равное. Но чтобы иметь возможность рассматривать также неравное, надо еще указать, что если при обратном сложении берут не все части величины, то получают нечто меньшее; это и утверждает аксиома 8: целое больше части.

Эти же самые аксиомы содержат в общем виде объяснения сложения и вычитания величин: в них, кроме того, содержится утверждение, что порядок членов суммы безразличен для результатов сложения.

Если в одном современном учебнике арифметики** мы находим следующее определение идеи величины: „о свойствах предметов, которые не изменяются, если собрать их части в различном порядке, но изменяются, если отнять от них некоторые части, говорят, что они обладают величиной“, — то определение это вполне совпадает с приведенными выше аксиомами „Начал“, с тем даже преимуществом у последних, что они несколько более непо-

---

* Euclidis Elementa, Ed. Heiberg, Lipsiae, 1883—88.

** Julius Petersen, Arithmetik og Algebra til Skolebrug, Kaebenhavn, 1879, p. 3.

средственно выясняют значение понятий равный, больший или меньший.

Это общее понятие величины должно быть дополнено некоторыми частными признаками, делающими возможным применение его к различным видам величин, как, например геометрические величины, веса и т. д., а также чисто отвлеченные числовые величины. Эвклид, для которого геометрическая величина есть отвлеченная величина, ибо она служит ему в геометрической алгебре для изображения всякого рода величин, даже чисел, должен, прежде всего, дать признак равенства геометрических величин; это он делает в 7-й аксиоме первой книги, которой мы сейчас займемся. Только в пятой книге он дает непосредственное представление отвлеченных величин, как *отношений*, а также признаки их равенства и неравенства.

Отношения к единице представляют числа в современном общем смысле слова, но единица появляется только в седьмой книге и употребляется в ней лишь как мера соизмеримых величин; поэтому гипотезами, связанными с этой проблемой, мы займемся при специальном рассмотрении в дальнейшем этих книг.

После этих немногих замечаний о различных приемах определения (estimation) величины мы должны вернуться к вопросу о геометрическом определении их, содержащемуся в 7-й аксиоме первой книги. Здесь говорится, что конгруэнтные величины, т. е. величины, совпадающие при наложении, равны между собой; признак геометрического равенства здесь предшествует естественным образом признаку неравенства, содержащемуся в 8-й аксиоме и не требующему никакого специального дополнения по отношению к геометрическим величинам. В 7-й аксиоме Эвклид отмечает с большой уверенностью то, что должно быть исходным пунктом всякого исследования геометрической величины. Уже на практике измерения пользуются в качестве такого исходного пункта конгруэнтностью, отсчитывая число частей измеряемой величины, конгруэнтных с мерой; на конгруэнтность же опирается система Эвклида, а также все следовавшие за ней системы, в которых говорится о геометрических величинах. Равны между собой конгруэнтные величины, не равны величины, из которых одна есть лишь часть другой или конгруэнтна с этой частью.

Этим же самым способом пользуется Эвклид в первой книге, желая показать взаимную зависимость равенства и неравенства сторон и углов одного и того же треугольника или различных треугольников; получаемые им таким образом результаты комбинируются затем с общими гипотезами о величинах. Он старается даже возможно меньше пользоваться специфически геометрическим принципом конгруэнтности: так в I, 26 для доказательства того, что у треугольников с равными сторонами и двумя равными прилежащими к ним углами равны все элементы их, он не прибегает непосредственно к конгруэнтности, а выводит это антитетически на основании предшествующих случаев конгруэнтности.

Для прямых линий и для углов равенство тождественно конгруэнтности, но для ломаных линий, площадей и объемов равенство может существовать и без конгруэнтности; для доказательства равенства здесь приходится комбинировать между собой конгруэнтные части, согласно общим гипотезам о величинах. Первый пример этого встречается в „Началах", I, 35, когда Эвклид доказывает, что параллелограмы с одинаковыми основаниями и высотой равновелики.

Но только путем перехода к пределу можно установить величину кривых линий и поверхностей, величину плоской поверхности, ограниченной кривыми, а также величину большей части объемов; для получения их древние пользовались методом исчерпывания, причем приходилось вводить, отчасти, новые гипотезы. Мы это увидим при рассмотрении двенадцатой книги Эвклида, а также при анализе трудов Архимеда.

Зато мы должны тут же заметить, что способ применения Эвклидом в стереометрии аксиомы конгруэнтности, установленной им в 7-й аксиоме, содержит очень существенный пробел, а именно, полное отсутствие различения в его стереометрии между *конгруэнтностью* и *симметрией*. Но ясно, тем не менее, что Эвклид не считает конгруэнтными симметрические фигуры, ибо в этом случае он считал бы, что 7-я аксиома является достаточной основой для определения объемов. Между тем, он устанавливает новую гипотезу, которая годится как для конгруэнтных, так и для симметрических фигур. Согласно 10-му определению одиннадцатой книги *равны* и *подобны* пространственные фигуры, *ограниченные* одним и тем же количеством равных и подобных (т. е. конгруэнтных) плоских фигур. Это определение содержит — кроме введения терминов — определенную геометрическую гипотезу, следовательно, аксиому,— именно, что фигуры эти обладают одинаковым объемом*, и в теореме XI, 29 аксиома эта служит для доказательства того, что параллелепипеды с равными основанием и высотой равновелики; кроме того, из нее можно заключить (XI, 28), что обе трехгранные призмы, из которых складывается параллелепипед, равновелики. Но мы знаем, что призмы, которые перемещают в первом доказательстве, конгруэнтны и что трехгранные призмы последней теоремы могут быть превращены путем перемещения их частей в конгруэнтные призмы. Однако Эвклид, повидимому, не заметил этого, ибо тогда введение нового принципа для равенства тел было бы излишним и, следовательно, противоречило бы обычному его приему.

Седьмая аксиома была для указанной нами задачи только признаком геометрического равенства или, если угодно, определением этого равенства, но, во всяком случае, она содержит в себе крайне важную подлинную геометрическую гипотезу, или аксиому, выражающую тот факт, что в действительности, вообще, речь может итти о конгруэнтных фигурах, т. е. о перемещении фигур в другие части пространства. Согласно аксиоме Эвклида геометри-

* Коши (Cauchy) доказал, что фигуры этого рода, действительно, всегда конгруэнтны или симметричны.

ческие *величины* определяют все то, что остается неизменным при таком переносе, но она не дает никакого указания на то, в чем состоит это перемещение; аксиома совсем даже не говорит об этом, но приложения показывают, что имели в виду эмпирическое перемещение, с которым были знакомы на основании опыта с так называемыми *неизменными* физическими телами.

Когда выше мы сказали, что аксиома I, 7 необходима для полной характеристики прямой линии, то мы имели в виду именно гипотезу, которой пользуется Эвклид, например, при доказательстве теорем о конгруэнтности и согласно которой перемещение не изменяет прямой линии.

15. Примечание о гипотезах геометрии. Если комбинировать вышеупомянутое последнее свойство прямой линии со свойствами, выраженными уже в постулатах, — включая „однозначность" нахождения ее по двум точкам, — то определение прямой будет гласить, что это линия, которая совпадает на всем своем протяжении с другой прямой линией, когда ее переносят так, что две точки ее совпадают с двумя точками второй прямой. В этом определении нет порочного круга, хотя прямая линия определяется путем наложения на другую прямую линию; это видно из того, что никакая другая линия не обладает этим свойством. Но зато здесь в качестве гипотезы допускается возможность перемещения. Наконец, согласно этому определению, прямая линия есть геометрическое место неподвижных точек вращающегося тела, две точки которого закреплены; из него же можно вывести построение прямых линий с помощью линейки, т. е. подвижной прямой.

Правда, определение это не выражено формальным образом у Эвклида, но оно вытекает из всех свойств, которыми он фактически пользуется и которые он устанавливает последовательно в виде постулатов и аксиом. На основании этих же самых гипотез плоскость оказывается поверхностью, которая содержит целиком всякую прямую, проходящую через две ее точки. Правда, это уже больше того, что должно заключаться в хорошей дефиниции, ибо здесь плоскость не определяется ни как геометрическое место однократной бесконечности прямых, ни как геометрическое место двукратной бесконечности точек, но, во всяком случае, это определение (détermination) можно разложить на дефиницию и на аксиому или постулат: плоскость является тогда по дефиниции геометрическим местом точек, соединяющих неподвижную точку с точками неподвижной прямой; затем следует прибавить, в качестве недоказуемого, но необходимого для дальнейшего построения геометрии предположения, что эта поверхность обладает тогда вышеупомянутым общим свойством.

Неверно думать, будто можно избегнуть этой трудности с помощью следующей дефиниции плоскости: лоскость — это геометрическое место точек, равноудаленных от двух неподвижных точек. Хотя в стереометрии удается тогда доказать, что определенная (défini) таким образом плоскость содержит, действ тельно, всякую прямую, две точки которой она содержит, но это возможно сделать, опираясь лишь на планиметрию, где уже принята была эта гипотеза о плоскости, содержащей все рассматриваемые фигуры.

По отношению к плоскости высказывают еще одну гипотезу, которая не вытекает из вышеустановленной дефиниции, — мы имеем в виду гипотезу, которая содержится в пятом постулате и согласно которой (за исключением специально оговоренного случая) две расположенные в одной плоскости прямые пересекаются между собой.

Как мы уже сказали (см. выше, стр. 91), Эвклид принимает еще (не формулируя ее явно) другую геометрическую гипотезу относительно прямолинейных фигур, именно, что замкнутая (ломаная или кривая) линия плоскости заключает конечную поверхность и что она пересекается, по меньшей мере, в двух точках всякой линией, прямой или замкнутой, соединяющей внешнюю точку с внутренней. Аналогичные гипотезы требуются и для замкнутых поверхностей, но они могут играть роль лишь в том случае, если итти дальше Эвклида в этом направлении.

Таким образом геометрические аксиомы, которыми пользуется Эвклид, сводятся к следующему: 1) к аксиоме о перемещении фигур, 2) и 3) к вышеприведенным двум гипотезам о плоскости, 4) к гипотезе о замкнутых контурах (или поверхностях). Существенные пункты этих гипотез он указывает в своих определениях, постулатах и аксиомах, которые содержат сверх того объяснение употребляемых терминов, а также, в аксиомах 1—3 и 8, гипотезы, касающиеся теории величин вообще. Эти последние не ограничиваются только изложением терминов, но содержат также необходимую для построения настоящей теории величин гипотезу о неизменчивости и изменчивости величин от деления, за которым следует сложение целиком или частично полученных таким образом долей.

Благодаря ясности и прозрачности важнейших употребляемых в „Началах" геометрических аксиом основные принципы воздвигнутой на них геометрии могли стать отличным исходным пунктом для современных исследований о „значении (portée) отдельных гипотез и их взаимной независимости". Действительно, если они независимы друг от друга, то можно сохранить некоторые из них и делать вывод только из них, пренебрегая прочими гипотезами. Таким путем получают некоторую обобщенную геометрию, ибо доказанные в этом случае теоремы имеют силу как для „пространства", удовлетворяющего еще и другим гипотезам, так и для „пространств", не удовлетворяющих им. Эти теоремы могут найти также в определяемом гипотезами Эвклида пространстве другое приложение: так, например, можно заменить прямые линии известными кривыми, характеризуемыми с помощью некоторых свойств обыкновенной прямой линии, свойств, присущих не специально только прямым линиям, но еще и другим линиям.

Однако наиболее важное из таких обобщений — *проективная геометрия* — возникла, собственно говоря, не из размышлений над аксиомами. Действительно, большинство теорем проективной геометрии имеет своим источником обобщения, возникшие в области геометрии, основанной на всех гипотезах Эвклида. Но, по существу, эта геометрия свободна от некоторых из этих гипотез, и поэтому ее можно построить с самого начала без них.

В проективной геометрии удаляют аксиому о перемещении (фигур) и вытекающую из нее теорию геометрических величин; благодаря этому обходятся также, по крайней мере, до тех пор, пока проективная геометрия не создает себе своего собственного понятия о перемещении, а также о величинах — обходятся и без общих понятий о величинах, устанавливаемых в остальных аксиомах Эвклида. Но зато здесь принимают во внимание гипотезы, заключенные в постулатах, причем, однако, отвлекаются от содержащихся в них заимствований из теории величин. Благодаря этому отпадает с самого начала третий постулат о нахождении (détermination) круга, определяемого тем свойством, что его радиус обладает неизменной величиной, а затем отпадают ограничения пятого постулата, на место которого становится следующий постулат: две прямые линии одной и той же плоскости пересекаются всегда в одной точке.

Можно, однако, избегнуть прямого противоречия с геометрией, в которой пользуются всеми гипотезами Эвклида, или с „эвклидовой геометрией", допустив, что параллельные прямые этой последней пересекаются в бесконечности. Благодаря тому, что проективная геометрия не интересуется вопросом: бесконечно далеки или нет точки пересечения, ей удается охватить как эвклидову геометрию, так и неэвклидову, о которой речь будет ниже.

В проективной геометрии прямая линия обладает теми же свойствами, что и в эвклидовой геометрии, за исключением свойства перемещения, в силу которого одну прямую можно заставить совпасть с другой прямой; свойства плоскости в проективной геометрии, как и в эвклидовой, связаны со свойствами прямых: в ней сохраняются обе гипотезы, относящиеся к нахождению (détermination) плоскости. Так как в ней нельзя уже строить на аксиоме перемещения, а только на названных двух гипотезах, то ясно, что для развития проективной геометрии независимым образом и без предварительного знания эвклидовой геометрии необходимо начать с соображений стереометрического порядка, позволяющих пользоваться этими гипотезами. Что касается эвклидовой гипотезы о замкнутых контурах, то она, оказывается, не независима от опущенных гипотез, поэтому ее нельзя оставить в проективной геометрии. Наоборот, в этой геометрии, в плоскости существуют замкнутые линии двух родов, из которых одни пересекают прямую в четном числе точек (или ни в одной точке), другие — в нечетном числе.

В противоположность проективной геометрии источником так называемой *неэвклидовой геометрии* являются как раз размышления над эвклидовыми гипотезами, в особенности над одной из них, содержащейся в пятом постулате. Чтобы понять сущность этих умозрений, лучше всего, может быть, вспомнить, что постулат этот в большинстве изданий „Начал" нашел место среди аксиом, где в итоге вставок других менее подлинных аксиом он получил название „одиннадцатой аксиомы Эвклида". Пока среди постулатов находилась характеристика (détermination) точки, как места пересечения двух прямых, это являлось естественным дополнением к характеристике прямой по двум точкам; наоборот, когда та же гипотеза была включена среди соответствующих теоремам аксиом, то это должно было привлечь особенное внимание к содержащемуся здесь ограничению. Аксиома, согласно которой две прямые, у которых сумма внутренних и расположенных по одну и ту же сторону углов, образуемых третьей, пересекающей их прямой, меньше двух прямых, пересекаются между собой с этой стороны, становилась тогда дополнением к теореме, согласно которой две прямые параллельны, когда названная сумма равна двум прямым. Эвклид доказывает эту последнюю теорему в I, 27 и 16 с помощью других гипотез. Нельзя ли в таком случае доказать также одиннадцатую аксиому и вытекающую из нее важную теорему о сумме углов треугольников?

Вопрос этот породил с течением времени несчетное множество попыток доказательств. Некоторые из них были, без сомнения, до известной степени правомерны, поскольку они ставили на место эвклидовой гипотезы другие гипотезы, истинность которых можно было с самого начала признать с тем же основанием, как истинность гипотезы Эвклида. Но авторы их, в отличие от Эвклида, не всегда сознавали и говорили, что они выдвигают просто гипотезы. Мы приведем ниже для упоминаемой здесь аксиомы Эвклида и для связанных с ней теорем о том, что прямая линия однозначно определена (déterminée), когда она проходит через какую-нибудь точку и параллельна данной прямой или что „сумма углов треугольника равна двум прямым",—ряд доказательств, которые вошли в употребляемые в наше время или в употреблявшиеся в непосредственно предшествующую эпоху руководства. Среди этих доказательств те, которые отмечены нами № 2 и 3, принадлежат французскому математику Лежандру (Legendre).

1. Довольствуются тем, что стараются показать самоочевидность аксиомы и убедить читателя принять ее на тех же основаниях, на каких он принимает предшествующие геометрические гипотезы.

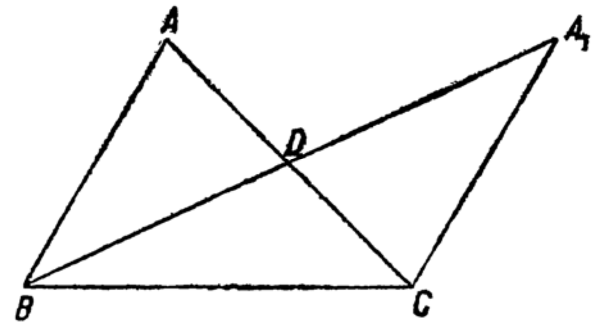
2. Теорему, что „два угла треугольника определяют третий угол его", можно свести к определению треугольника по одной стороне и двум прилежащим к ней углам. Действительно, величина одной единственной стороны может дать лишь масштаб начерченной фигуры и, следовательно, не может иметь никакого влияния на форму треугольника, а значит, и на углы, значит, два заданных угла треугольника определяют третий угол его. Нетрудно видеть, что при доказательстве здесь пользуются, в качестве геометрической гипотезы, идеей подобия или идеей независимости вида фигуры от масштаба: это в точности соответствует методу самого Эвклида, когда в своей аксиоме перемещения он устанавливает в качестве геометрического принципа величин идею конгруэнтности.

3. Другие исследователи не довольствуются, подобно Эвклиду, для определения (détermination) величины угла принципом перемещения, а рассматривают величину угла, как отношение бесконечной части плоскости, заключенной между сторонами угла, ко всей плоскости в целом. Поэтому, если бы можно было провести через точку две прямые, параллельные данной прямой, то вся полуплоскость, отсекаемая этой последней прямой, полуплоскость, равная двум прямым углам, составляла бы только часть одного из четырех углов, которые образуют обе первые прямые и которые каждый меньше двух прямых углов. Нетрудно видеть здесь, что новая гипотеза заключается в специфический дефиниции угла и сводится к утверждению, будто устанавливаемое в этой дефиниции отношение двух бесконечных количеств имеет определенное значение.

4. Другие исследователи доказывают, что сумма внешних углов многоугольника равна четырем прямым; для этого доказательства они вращают прямую последовательно вокруг вершин углов многоугольника, начиная с одной из сторон, пока она не совпадет с другой стороной; когда эта прямая вернется к своему первоначальному положению, то она, в общем, должна повернуться настолько, на сколько она повернулась бы при возвращении к первоначальному положению, вращаясь вокруг неподвижной точки. В этом доказательстве при определении

угла как величины исходят тоже не из эвклидова принципа *перемещений*, а определяют угол, скорее, как часть целого оборота. Но такое определение содержит в себе гипотезу, что эта часть обладает величиной, притом такого рода, что для нее безразлично, совершают ли целый оборот вокруг некоторой единственной точки или же разлагают его на ряд частичных оборотов вокруг различных точек. Нетрудно убедиться, что это представляет специальную гипотезу, пригодную, как и эвклидова аксиома, лишь для плоскости. Достаточно заменить плоскость сферической поверхностью, а прямые — дугами больших кругов, чтобы названная гипотеза перестала быть правильной.

5. Большее, однако, значение, в связи с вопросом об отношении эвклидовой аксиомы ко всей его системе, имеет попытка Лежандра, связанная, действительно, с другими гипотезами Эвклида. Хотя, опираясь на эти гипотезы, он не может доказать общей теоремы о сумме углов треугольника, но ему удается доказать, что *сумма углов не больше двух прямых*. Один из способов, которыми он пользуется для получения этого результата, повторяет довольно точно ход рассуждений Эвклида при доказательстве теоремы I, 16, где греческий геометр показывает, что внешний угол, смежный с углом C треугольника ABC, больше каждого из двух других углов, например A. Для доказательства этого соединяют середину D стороны AC с B и берут затем на продолжении прямой BD отрезок $DA_1 = BD$; в таком случае сумма углов треугольника A_1BC равна сумме углов треугольника ABC и угол BCA_1 равен сумме углов A и C первоначального треугольника; отсюда следует, что $A + C < 2$ прямых или что A меньше угла, смежного с C. Лежандр повторяет указанную нами здесь операцию, стараясь каждый раз, чтобы угол при B был наименьшим углом непрерывно преобразуемого треугольника у всякого нового получаемого таким образом треугольника та же сумма углов, и у него имеется один угол, B или A_1, который равен половине наименьшего из предыдущих углов или меньше этой половины. Согласно одному принципу, который Эвклид устанавливает потом в связи с методом доказательства путем исчерпывания, можно таким путем получить, наконец, треугольник, в котором один угол меньше любой заданной величины; собственная теорема Эвклида показывает, что сумма других углов меньше двух прямых, а тогда нетрудно доказать, — пользуясь, при желании, методом исчерпывания, — что оставшаяся неизменной сумма трех углов не превосходит двух прямых.



Фиг. 12.

Так как здесь удалось добиться столь значительных результатов, не пользуясь одиннадцатой аксиомой (пятым постулатом), то возникало желание итти еще дальше в этом направлении. Надо было исходить при этом из доказанного Лежандром факта, что сумма углов треугольника могла либо равняться двум прямым, либо быть меньше двух прямых; в этом последнем случае можно было доказать, что сумма углов треугольника уменьшается вместе с увеличением площади его. Исходным пунктом по вопросу о пересечении прямых линий являлась лишь гипотеза о замкнутых контурах, однако, можно было доказать, что некоторая данная прямая пересекается с прямой, проведенной через данную точку, если эта последняя прямая находится в одной из пар вертикальных углов, образованных двумя определенными прямыми, проходящими через данную точку. Другие теоремы этой созданной Лобачевским и Больяи (Bolyai) *неэвклидовой* геометрии более сходны с теоремами обыкновенной эвклидовой геометрии.

Мы можем указать еще один вид геометрии, в которой из гипотез Эвклида пользуются лишь гипотезами насчет замкнутых контуров и соответствующими этому гипотезами в пространстве; ее называют Analysis situs.

В наше время с указанными здесь геометрическими исследованиями о гипотезах геометрии связали ряд проблем о происхождении их, относящихся к *теории познания*. Это вопросы о том, представляют ли названные гипотезы результат нашего произвола? Или же они покоятся на врожденных идеях? Или же они представляют истины, заимствованные из опыта? В этом последнем случае мы не в праве говорить, что содержащиеся в гипотезах утверждения абсолютно истинны но только что отклонения от этих утверждений слишком ничтожны, чтобы быть замеченными. Эвклид, как мы уже сказали, не дает ответа на эти вопросы: он довольствуется установлением гипотез и доказательством, что если они правильны, то правильны и все вытекающие из них; уже дело того, кто захочет пользоваться этими результатами, определить для себя степень доверия к названным гипотезам.

16. Общая теория пропорций; пятая и шестая книги Эвклида.

В предыдущем мы имели уже случай указать несколько раз на те места из первых книг „Начал", в которых изложение отличается от обычного теперешнего изложения; различия эти — поскольку они не носят чисто формального характера — объясняются, главным образом, тем, что в первых книгах своего труда Эвклид должен отказаться от пользования пропорциями и обратиться к доказательствам, основывающимся на геометрической алгебре.

Это, как мы уже сказали, зависело от того, что старая теория пропорций была с полной строгостью применима лишь к соизмеримым величинам. Правда, Эвдокс устранил этот недостаток новой и, действительно, общей теорией пропорций, но Эвклид развивает ее лишь в *пятой книге* „Начал". Поэтому мы остановимся подробней на изложении этой книги, чтобы основательно познакомиться по ней с теорией пропорций, бывшей не только основой, на которой воздвиглась вся дальнейшая математика древних, но и содержавшей, кроме того, принципы будущей общей теории величин.

Чтобы лучше понять все значение этой книги, правильнее всего пренебречь сложной терминологией Эвклида для обозначения пропорций, образуемых разными способами из других пропорций, и обозначить пропорции современными алгебраическими символами. С этой целью мы станем обозначать первыми буквами алфавита $a, b, c, \ldots$ общие величины, которые Эвклид изображает с помощью отрезков, а буквами $m, n, p, \ldots$ целые числа, которым он придает на своих рисунках соответствующие небольшие значения, в зависимости от примера. Мы увидим тогда, что даваемое им в пятой книге геометрическое представление пропорций довольно ясно и удобно.

Из многочисленных определений Эвклида мы будем пользоваться лишь тремя следующими:

Определение 4 утверждает, что две величины образуют отношение, если кратные каждой из них могут с известного момента начать превосходить другую величину. Это предполагает не только то, что величины должны быть одинаковой природы, так что их можно сравнивать между собой, но и выражает еще одно важное условие, которое окажется необходимым как для распространения теории пропорций и на несоизмеримые величины, так впоследствии и для исследований в области бесконечно-малых, производившихся Эвклидом и Архимедом с помощью изобретенного Эвдоксом приема доказательств путем исчерпывания.

Определение 5 гласит, что

$$a : b = c : d,$$

если при наличии $ma \gtreqless nb$ имеем также $mc \gtreqless nd$.

Определение 7 гласит, что

$$a : b > c : d,$$

если существуют такие значения m и n, что

$$ma > nb, \text{ но } mc \leqslant nd.$$

Правда, в определении 5 не употреблено слово *равный* для обоих отношений, но так как в дальнейшем, в теоремах 11 и 13, доказывается, что $a : b = c : d$ и $c : d \geqslant e : f$ влекут за собой $a : b \geqslant e : f$, то ясно, что дело идет именно о равенстве.

Смысл этих определений величины какого-нибудь отношения становится ясным, если принять во внимание, что они, по существу, тождественны с современным определением простого иррационального числа посредством приближенных рациональных значений. Во-первых, чистое число есть отношение некоторой величины к единице того же вида, во-вторых, сравнения Эвклида приводят, действительно, к сравнениям между отношениями и рациональными приближенными значениями $\frac{n}{m}$.

Посмотрим теперь, как можно основать на этих определениях точную теорию отношений и пропорций.

В предложениях 1—3 и 5—6 Эвклид устанавливает, прежде всего, следующие леммы:

$$ma \pm mb = m(a \pm b), \qquad (1 \text{ и } 5)$$

$$ma \pm na = (m \pm n)a, \qquad (2 \text{ и } 6)$$

$$n \cdot ma = nm \cdot a. \qquad (3)$$

Правда, последние три предложения мы передаем несколько вольным образом, ибо в предложении 2, например, говорится, что $ma + na$ такое же кратное a, как $mb + nb$ кратное b, но доказательства, происходящие путем разложения целых чисел на их единицы, а также и приложения вполне согласуются с тем смыслом, какой мы здесь указываем.

Благодаря этим леммам и определению 4 нижеследующие предложения оказываются простыми следствиями определений 5 и 7: если

$$a : b = c : d,$$

то

$$ma : nb = mc : nd; \qquad (4)$$

если

$$a \geqslant b,$$

то

$$a : c \geqslant b : c, \qquad (7 \text{ и } 8)$$

но

$$c : a \leqslant c : b.$$

Если

$$a:b=c:d$$

и

$$c:d=e:f,$$

то

$$a:b=e:f, \tag{11}$$

а с этими равными отношениями можно образовать такое же равное новое, именно:

$$(a+c+e):(b+d+f); \tag{12}$$

но если

$$a:b=c:d$$

и

$$c:d>e:f,$$

то

$$a:b>e:f. \tag{13}$$

Чтобы дать образец доказательства у Эвклида, рассмотрим предложение 8, в котором, если $a>b$, требуется определить два таких целых числа m и n, что $ma>nc>mb$; для этого надо заменить названное требование следующими условиями, имеющими место, согласно определению 4:

$$mb>c \quad \text{и} \quad m(a-b)>c,$$

$$(n-1)c \leqslant mb < nc;$$

откуда следует, что

$$nc<ma.$$

Предложения 9 и 10, являющиеся обратными по отношению к 7 и 8, могут быть доказаны способом от противного.

В предложении 14 с помощью предыдущих предложений доказывают, что если

$$a:b=c:d,$$

то $a \gtreqless c$ влечет за собой $b \gtreqless d$.

В предложении 15 с помощью 12 доказывают, что

$$ma:mb=a:b.$$

Предложения 16—19 содержат ряд преобразований пропорции

$$a:b=c:d;$$

из нее получают:

$$a:c=b:d, \tag{16}$$

$$(a-b):b=(c-d):d, \tag{17}$$

$$(a+b):b=(c+d):d, \tag{18}$$

$$a:b=(a-c):(b-d). \tag{19}$$

Предложения 16 и 17 доказываются с помощью определения 5; кроме того, для предложения 16 пользуются еще обоими предыдущими предложениями. В предложении 17 из данной пропорции выводят, что для всех значений m и n,

$$mc \gtreqless (m+n)d$$

вытекает из

$$ma \gtreqless (m+n)b;$$

откуда следует, что

$$m(a-b) \gtreqless nb$$

влечет за собой

$$m(c-d) \gtreqless nd.$$

Предложения 18 и 19 получаются (первое способом от противного) из 16 и 17.

Но одно из преобразований пропорции все-таки отсутствует, именно

$$b : a = d : c.$$

Однако, так как оно явным образом употребляется при доказательстве предложения 20, то его искали в одном добавлении к предложению 7. Но это неверно, ибо в предложении 7 разбирается лишь случай, когда $b=d$; поэтому некоторые издатели относят это добавление к предложению 4. Но это не имеет особенного значения, ибо рассматриваемое преобразование вытекает непосредственным образом из определения 5.

Предложения 20—23 содержат в себе важную теорию сложных отношений. Согласно 22, если

$$a : b = d : e \text{ и если } b : c = e : f,$$

то

$$a : c = d : f.$$

Для доказательства, в предложении 20 предварительно устанавливается, что, согласно гипотезам, условие $a \gtreqless c$ (откуда, по 8, следует, что $d : e = a : b \gtreqless c : b = f : e$) влечет за собой, на основании 9 и 10, $d \gtreqless f$. Теперь, так как данные пропорции можно, согласно 4, преобразовать в

$$ma : nb = md : ne$$

и

$$nb : pc = ne : pf,$$

то из

$$ma \gtreqless pc$$

должно получиться также, что

$$md \gtreqless pf.$$

Таким же путем можно доказать предложение 23, исходя из 21:

$$a : b = e : f \text{ и } b : c = d : e$$

влекут за собой

$$a : c = d : f.$$

Из этих предложений следует, что отношение $a : c$ составлено из отношений $a : b$ и $b : c$; но если рассматривать отношение древних, как современное число, то ясно, что отношение, составленное из двух отношений, представляет то же самое, что теперь называют *произведением*. И хотя составляемые отношения должны иметь определенные формы, ибо последующий член одного равняется предыдущему числу другого, но это не является вовсе ограничением для составления отношений. Действительно, из геометрического представления отношений в книге VI, 12 следует, что всякое отношение можно преобразовать таким образом, чтобы один из его обоих членов имел данную величину. В книге VI, 23, где доказывается, что отношение между двумя параллелограмами, имеющими равные углы, составляется из отношений между сторонами их, видно также, что последним придают форму $a : b$ и $b : c$, чтобы можно было их составить.

Теоремы 22 и 23 книги V, взятые вместе с этим заимствованием из книги VI, содержат полные доказательства предложений, которые в современной формулировке гласят следующее: *произведение определяется своими сомножителями, причем порядок последних не играет никакой роли.*

Таким образом древние обладали двумя различными способами представления того, что теперь — независимо от вопроса о рациональности или иррациональности сомножителей — называют их *произведением*: во-первых, только что изложенным нами способом и, во-вторых, представлением с помощью прямоугольников, которым пользовались в геометрической алгебре. Но, по существу, оба эти способа представления выражают одну и ту же вещь, как это видно из вышеприведенной теоремы 23 книги VI.

Хотя представление путем сложных отношений более громоздко, но оно обладает одним существенным преимуществом: в то время как в геометрической алгебре речь идет обыкновенно лишь о произведениях двух сомножителей, изображаемых с помощью прямоугольников, а для изображения произведений трех сомножителей нужно обратиться к пространству и взять для этого параллелепипеды,—с помощью сложного отношения сомножителей можно представить произведение произвольного числа их. Действительно, если придать сомножителям вид:

$$a : b, \quad b : c, \quad c : d, \quad d : e,$$

то сложным отношением этих сомножителей будет, как определенно говорится в теореме 22, $a:e$.

Впрочем, в преобразовании задачи удвоения куба путем нахождения двух средних пропорциональных мы уже имели пример того, как греки пользовались общим образом сложными отношениями: так, непрерывная пропорция

$$a:x=x:y=y:b,$$

выражает у древних абсолютно то же самое, что мы написали бы в виде

$$\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{x}\right)^3 \quad \text{или} \quad \frac{b}{a}=\left(\frac{x}{a}\right)^3.$$

Аналогичным образом можно представить еще более высокие степени при помощи первого и последнего членов непрерывной пропорции, т. е. такой пропорции, члены которой образуют геометрическую прогрессию.

Уже во времена Эвклида в этом отношении было известно больше, чем об этом говорится в пятой книге „Начал“. Это видно в особенности из предложения IX, 35, где Эвклид определяет сумму членов геометрической прогрессии; содержание этой теоремы можно выразить на языке наших символов следующим образом: если

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d},$$

то

$$\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{b}=\frac{d-c}{c}=\frac{d-a}{a+b+c}.$$

Но теорема эта относится не только к сумме трех последовательных членов прогрессии, — случаю, которым ограничивается Эвклид в своем доказательстве. Так как последнее опирается лишь на теоремы пятой книги, то оно носит всеобщий характер; но Эвклид останавливается на нем на минутку лишь потому, что в следующей теореме, относящейся к теории чисел, ему придется применять его к предложению:

$$1+2+2^2+\ \ldots\ +2^n=2^{n+1}-1.$$

На этот способ представления произведений и степеней мы должны обратить тем большее внимание, что он вплоть до нового времени оставался основой алгебраических исследований, не ограничивающихся рациональными числами, а претендующих на всеобщность.

Теорема V, 24 гласит, что если

$$a:c=d:f$$

и

$$b:c=e:f,$$

то отсюда следует, что

$$(a+b):c=(d+e):f.$$

Эта теорема почти того же рода, что и теоремы, предшествующие теоремам о сложных отношениях. Однако она находит себе место только здесь, потому что теорема 22 служит для получения из двух данных пропорций, после обращения отношений во второй, пропорции

$$a : b = d : e,$$

откуда с помощью 18 получается, что

$$(a + b) : b = (d + e) : e.$$

Новое составление отношений (согласно 22) приводит тогда к искомому результату. Первое из названных приложений теоремы 22 интересно тем, что оно показывает, что для деления отношений не нужно каких-нибудь новых специальных теорем.

Согласно теореме 25, если даны четыре пропорциональных величины, то сумма наибольшей и наименьшей из них больше суммы двух других; это доказывается с помощью 19. Частным случаем этой теоремы — о котором, однако, Эвклид не говорит здесь — является предложение, что средняя между двумя величинами (арифметическая средняя) больше их средней пропорциональной (геометрической средней); это доказывается с помощью геометрической алгебры (VI, 27), и отсюда получают диоризм для уравнений второй степени.

Хотя теория пропорций, изложенная в пятой книге „Начал“, носит, несмотря на свою геометрическую форму, совершенно общий характер и приложима ко всякого рода величинам, но тем не менее она нуждалась в известном дополнении, которое согласно методу древних должно было носить геометрический характер. Существование отношений вытекает из определений, если только имеются величины, способные образовать отношения согласно определению 4; однако, как мы уже указали мимоходом выше, требуется доказать существование такой величины, которая вместе с некоторой данной величиной образует отношение, имеющее данное значение, — доказательство, которое дается путем геометрического построения четвертой пропорциональной.

Это геометрическое дополнение к учению о пропорциях находится в шестой книге „Начал“, которая, сверх того, содержит важнейшие приложения этой теории к геометрии — в особенности к подобным фигурам, — а также сочетание ее с геометрической алгеброй. Благодаря этому сочетанию удается представить геометрически и решить уравнения второй степени, в которых при x^2 имеется коэфициент; правда, если этот коэфициент a был рационален, то древние, как мы видели, умели превращать заданное уравнение в другое с неизвестным ax, без коэфициента при члене второй степени; если же этот коэфициент был иррационален и приходилось представить его некоторым отрезком, то обыкновенная геометрическая алгебра двух измерений становилась недостаточной.

Рассмотрим теорему 1, в которой доказывается, что площади треугольников и параллелограмов с одной и той же высотой пропорциональны основаниям. Здесь общее эвклидово определение равенства отношений находит отличное применение; так как при равенстве оснований равны и площади, то применение названного определения приводит непосредственно к общей теореме, причем, в отличие от изложения в современных руководствах, нет необходимости начинать со случая соизмеримости и затем лишь делать соответствующее обобщение.

За этим следуют теоремы 2 и 3 о проведенных в треугольнике параллельных прямых и о делении стороны треугольника биссектрисой противоположного угла; потом основные теоремы (4—7) о подобных треугольниках: доказательство их ведется путем построения треугольника, подобного одному из заданных и конгруэнтного другому; теоремы эти находят немедленно приложение (8) к прямоугольному треугольнику и к двум треугольникам, на которые его делит высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу.

В 9—13 содержится деление отрезка на равные или пропорциональные части, а также построение третьей пропорциональной (т. е. четвертой к a, b и b), четвертой и средней пропорциональной; это последнее построение применялось уже в геометрической алгебре для нахождения стороны квадрата, равного заданному прямоугольнику, но тогда это приходилось доказывать иным способом.

Затем идут теоремы (14—23) об отношении между площадями фигур; основную теорему (23) о площадях параллелограмов, имеющих равные углы, мы уже упоминали; в доказательстве (19), устанавливающем, что отношение площадей подобных треугольников равно — как мы теперь выражаемся — квадрату отношения двух соответственных сторон, отношение $a:b$ этих двух сторон, которое приходится сложить с самим собой, сводят к виду $b:c$, так что квадратное отношение становится $a:c$. В этой группе теорем содержится еще и следующее предложение: в пропорции прямоугольник (произведение) из внешних членов ее равен прямоугольнику из внутренних членов.

В конце книги (28—29) рассматривается, при помощи теории пропорций, вопрос об обобщенных приложениях площадей. Одно, не зависящее, впрочем, от теории пропорций, обобщение заключается в замещении прямоугольников параллелограмами с любым заданным углом; но это последнее преобразование не имеет никакого влияния на геометрико алгебраическое значение этих задач, и мы можем оставить его в стороне и заняться только прямоугольниками.

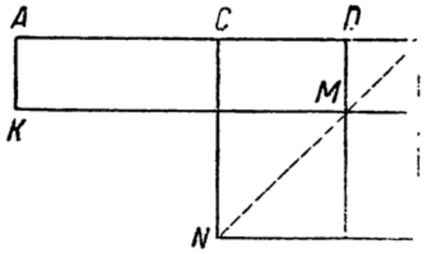
В таком случае интересующие нас задачи сводятся к следующим:

К заданному отрезку (a) *приложить заданную площадь* (B) *в виде такого прямоугольника* (*с высотой* x), *чтобы недостающий* (28) *или избыточный* (29) *прямоугольник был подобен заданному прямоугольнику* (*со сторонами* c *и* d).

Решения здесь абсолютно те же, что и решения, выведенные нами (см. выше, стр. 43—45) из II, 5 и 6 для случаев, когда недостающие или избыточные фигуры должны быть квадратами, с той, однако, разницей, что прежние квадраты заменены прямоугольниками, подобными заданным прямоугольникам; подобие их ясно обнаруживается в том, что диагональю обоих подобных прямоугольников является одна и та же прямая.

Чтобы показать обобщение, вносимое в геометрическую алгебру этими теоремами, мы прибегнем к следующему алгебраическому способу представления задач и перемещений фигур. дающих решение их:

$$B = ax \mp \frac{c}{d}x^2 = \mp \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2} \mp \frac{c}{d}x\right)^2 \pm \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$



Фиг. 13.

в котором мы стремились посредством современной символики знаков + и — избегнуть повторения формулировок. Чтобы найти x, надо построить прямоугольник $\frac{d}{c}\left(\frac{a}{2} \mp \frac{c}{d}x\right)^2$, подобный заданному прямоугольнику и равный разности или сумме известных площадей $\frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2$ и B. Для этого (предполагая, что B есть заданная прямолинейная фигура) прибегают к задаче 25, о которой уже упоминалось в связи с пифагорейцами и которая сводится к построению фигуры, равновеликой некоторой заданной прямолинейной фигуре и подобной другой фигуре.

Задача 28 требует в качестве диоризма, чтобы

$$B \leqq \frac{d}{c}\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

иначе говоря, чтобы заданная фигура была не больше прямоугольника, построенного на половине отрезка a и подобного заданному прямоугольнику cd; диоризм этот прибавлен к задаче обычным способом, но необходимость его доказывается в предыдущем предложении 27 посредством того же самого перемещения фигуры, каким пользуются в 28. Как мы уже заметили в § 11, диоризм этот получился непосредственно из анализа, соответствующего синтетическому изложению 28. Если заменить прямоугольник cd квадратом, то диоризм сводится к утверждению, что квадрат больше прямоугольника, сумма сторон которого равна сумме сторон квадрата (вывод этот вытекает также, как мы уже отметили это, из V, 25).

Теорема 30 относится к вопросу о разделении отрезка в среднем и крайнем отношении. Соответствующее построение было указано уже нами (II, 11, см. выше, стр. 47) и опиралось тогда на II,6; теперь же оно опирается на теорему VI, 29, являющуюся обобщением II, 6. Причина этого повторения та же, что и в случае со средним пропорциональными, — именно то обстоятельство, что благодаря теории пропорций задача эта выражается иначе, чем прежде.

Теорема 31 содержит обобщение пифагоровой теоремы на случай любых подобных фигур, построенных на сторонах прямоугольного треугольника. Кроме того, благодаря этой теореме 31, приписываемой самому Эвклиду можно произвести посредством прямоугольного треугольника вычитание и сложение фигур в приложениях площадей задач 28 и 29, — если B подобно или сделано подобным прямоугольнику CD.

В теореме 33, последней теореме рассматриваемой книги, доказывается, что в круге центральные или вписанные углы пропорциональны соответствующим дугам.

Итак, мы видим, что пятая и шестая книги „Начал" содержат необходимые принципы точного и вполне общего исследования — с помощью теории пропорций и геометрической алгебры — задач, которые на языке нашей алгебраической символики выражаются уравнениями первой и второй степени. Ряд сохранившихся до нас трудов греческих математиков — в особенности геометрико-алгебраическое исследование конических сечений Аполлонием, а также многочисленные задачи, сохранившиеся у Паппа, показывают, что они, действительно, пользовались этими принципами. Существовала даже особого рода пропедевтика для всей этой алгебраической работы. В этом легко убедиться на основании ряда предложений эвклидовских „Data", содержащих множество задач этого рода, изложенных так, как мы это говорили; решение этих задач предполагалось настолько известным, что в процессе анализа считали возможным довольствоваться простым сведением к ним новых задач.

Задача, которую мы выразили бы уравнением первой степени с произвольными коэфициентами, выражается в „Data" в общем виде посредством пропорции. В качестве одного примера из множества их приведем предложение 15 „Data", которое гласит: если прибавить данные величины к двум величинам, находящимся в данном отношении, то либо сами суммы находятся в данном отношении, либо же избыток одной из них над некоторой данной величиной * находится в данном отношении к другой из них.

Это все равно, что определить x из пропорции

$$(a+m-x):(b+n)=a:b.$$

Первая из вышеупомянутых альтернатив выражает, что x может равняться нулю, именно когда

$$m:n=a:b.$$

---

* Дело идет о x, данном собственно не по заданию, а в результате построения, которое требуется выполнить после доказательства рассматриваемого положения. Мы бы в настоящее время сказали, скорее, так: „*некоторой величиной, которую можно определить*" (Р. Т.).

Чтобы избежать отрицательного x, приведенное выше уравнение надо заменить следующим:

$$(a+m):(b+n-x)=a:b.$$

Мы уже сказали выше, что „Data" содержит задачи, которые непосредственно сводятся к приложениям площадей.

В виде образчика предложений из „Data", относящихся к задачам, которые зависят более косвенным образом от уравнений второй степени, назовем предложения 85 и 87: если два отрезка, взятые под данным углом, заключают параллелограм данной величины и если дана сумма или разность квадратов (построенных) на этих отрезках, то даны также и эти отрезки. Иными словами, древние знали решение (в геометрическом виде) уравнений

$$xy=a, \quad x^2 \pm y^2 = b.$$

17. Соизмеримые величины и их числовая трактовка; седьмая—девятая книги Эвклида. В седьмой книге Эвклид вводит *единицу*, в результате чего измеряемые ею величины выражаются в *целых числах*; затем он рассматривает в этой книге и двух следующих за ней вопросы о целых числах, их отношениях и разных других их сочетаниях. Седьмая книга содержит в применении к целым числам ряд теорем о пропорциях, доказанных со всей общностью уже в пятой книге. Объясняется это тем, что общая теория пропорций, изложенная в пятой книге, была еще слишком нова и недостаточно поэтому развита, чтобы ее можно было положить в основу всего, что она охватывает в действительности. Благодаря этому сохранившееся в седьмой книге учение о пропорциях представляет образец более старого подхода к вопросу, когда еще не учитывали возможности того, что члены отношений могут быть несоизмеримыми.

Хотя теория отношений между целыми числами, по существу, содержится в уже изложенной более общей теории, но все же нельзя было просто пройти мимо нее, ибо в случае целых чисел приходится иметь дело с рядом вопросов, не интересующих общую теорию, в особенности вопросов, связанных с проблемой делимости и упрощения числовых отношений. Это видно хотя бы из того, что для чисел Эвклид дает *новое определение пропорциональности*, определение 20. Согласно этому определению, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, когда a и c представляют или те же самые кратные, или ту же самую часть, или те же самые части b и d, иными словами, когда мы имеем одновременно $a=m\frac{b}{n}$ и $c=m\frac{d}{n}$. Разумеется, по вопросу о равенстве отношений в этом определении не содержится ничего нового по сравнению с пятым определением пятой книги, но мы вскоре увидим, как благодаря способу применения его в него вводится довольно важная гипотеза.

В теоремах 1 и 3 устанавливаются и доказываются известные правила нахождения наибольшей общей меры; здесь доказывается прямым путем, что получают общую меру, а способом от обратного, что это наибольшая мера.

В теореме 4 устанавливается, что если a и b целые числа, а f — их общая наибольшая мера, то можно всегда написать $a = mf$, $b = nf$ и, следовательно, $a = m\frac{b}{n}$: если $a < b$, то $m > 1$, $n > 1$. Согласно этому m и n—числа первые между собой; и если теперь, основываясь на этом, мы пытаемся проверить согласно определению 20, что $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то мы вводим гипотезу, что в этом случае второй множитель $c = m\frac{d}{n}$, т. е. $\frac{d}{n}$ есть целое число, и значит, что раз произведение md делится на n, которое взаимно первое с m, то на него должно делиться d.

Таким образом это основное предложение теории чисел содержится уже среди гипотез, и с теоретической точки зрения не особенно большое значение представляет тот факт, что Эвклид получает в дальнейшем на основе этих гипотез ряд теорем, содержащихся в названном предложении; так, например, в 30 говорится, что если произведение делится на некоторое первое число, то на него должен делиться один из сомножителей этого произведения. Упомянутые гипотезы используются особенно в предложении 20: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и если c и d насколько можно малы, то a делится на c и b делится на d. Это последнее предложение имеет важное значение для доказательства теоремы 30.

Как известно, при действительном доказательстве упомянутого основного предложения пользуются тем обстоятельством, что если a и b взаимно простые, то k есть наибольший общий делитель ka и kb (теорема эта, вытекающая из правил нахождения общего наибольшего делителя, не включена Эвклидом в „Начала"). У Эвклида недостает доказательства, что описанное в 4 преобразование a в $m\frac{b}{n}$ есть единственно возможное преобразование, при котором m и n взаимно простые.

Из сказанного нами ясно, что Эвклид не подвел под теорию целых чисел столь глубокое основание, как под геометрию и теорию общих непрерывных величин; но тщательность, с какой он при всем том излагает и устанавливает многочисленный ряд чисто теоретических предложений, с достаточной убедительностью свидетельствует о том, что он отлично понимал необходимость точного обоснования и арифметики и что он практически пользовался операциями, на развитие теории которых он потратил столько сил. Однако его три арифметических книги не имели такого капитального значения для судеб математики, как предшествующие им и часть следующих за ними книг „Начал";

поэтому мы ограничимся здесь лишь немногими замечаниями об остальной части их содержания.

Развитая в седьмой книге теория пропорций представляет, по существу, лишь изложение важнейших общих предложений, употребляемых при вычислении с дробями. (Поэтому, в противоположность тому, как мы поступили при изложении пятой книги, мы писали теперь отношения в виде дробей).

Непрерывные пропорции, о которых говорится в восьмой и девятой книгах, представляют, как мы уже сказали, древнюю форму геометрических прогрессий, но с целыми членами; отношение между членами, занимающими различные места в таком ряду, представляют древнюю форму различных *степеней* целых чисел и дробей. Некоторые теоремы о корнях являются результатом вставки средних пропорциональных.

Наиболее важные результаты в области теории чисел содержатся в теоремах 20 и 36 девятой книги: в первой доказывается, что существует бесконечное множество первых чисел, на основании того, что произведение всех последовательных первых чисел $+ 1$ либо само есть новое высшее первое число, либо содержит множителем такое высшее первое число; во второй же доказывается, что если в произведении $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)\, 2^n$ первый множитель является первым числом, то само это произведение представляет „совершенное" число, т. е. число, равное сумме всех своих множителей; правильность этой теоремы нетрудно доказать на основании теоремы 35, которая, как мы уже сказали (см. выше, стр. 105), дает нам необходимое для этого доказательства суммирование геометрических прогрессий.

18. Несоизмеримые величины: десятая книга Эвклида. Если мы не будем останавливаться подробнее на десятой книге „Начал", наиболее обширной книге эвклидова труда, то не потому, что содержащийся в ней материал, накапливавшийся со времен Теэтэта вплоть до Эвклида — не представляет большого значения,— наоборот; но дело в том, что, несмотря на тщательное изложение Эвклидом материала, его трудно охватить, ибо нелегко, не обладая никакой системой знаков, разобраться среди классифицированных в этой книге иррациональных величин. Хотя названные классификации употреблялись впоследствии в течение долгого времени, но все же десятая книга „Начал" не смогла приобрести столь длительного исторического значения, как другие части этого труда. Объясняется это тем, что алгебраическая символика, даже на первых шагах ее развития, дает гораздо более ясную и обозримую картину различных видов иррациональных величин. Мы сами ограничимся здесь тем, что попытаемся дать с помощью современных символов некоторое представление о том, что представляют собой классифицированные в этой книге величины, не останавливаясь на вопросе о наименованиях, служащих Эвклиду для классификации их.

Что касается самих этих наименований, то в интересах читателей, намеренных обратиться к самому тексту Эвклида, замечу, что когда он говорит о *рациональных* величинах, то он имеет в виду не только величины, соизмеримые с единицей, но и такие величины, квадраты которых соизмеримы с единицей или, как он выражается, которые „в степени соизмеримы“ с единицей. Впрочем, Эвклид не употребляет здесь термина *единица* в том смысле, который он имеет в руководствах по теории чисел; это слово обозначает некоторую произвольно выбранную величину, которая принимается за рациональную и которая играет в контексте ту же роль, что и единица.

В соизмеримости или несоизмеримости двух величин можно убедиться, как мы уже сказали выше (стр. 50), пытаясь непосредственно найти их наибольшую общую меру: несоизмеримость двух величин обнаруживается в том, что эту операцию можно продолжать до бесконечности, причем последовательные остатки непрерывно уменьшаются и могут быть сделаны меньше любой заданной величины. Это беспредельное уменьшение исследуется Эвклидом с той же научной строгостью, с какой древние рассматривали всякий случай бесконечного (indéfinie) приближения. Для этого он пользуется четвертым определением пятой книги из которого он выводит (теорема 1), что, вычитая из некоторой данной величины больше половины ее и затем, аналогичным образом, из полученных последовательно остатков больше половины их, можно получить под конец величину меньшую любой произвольно заданной величины. Пользуясь этим предложением, как исходным пунктом, Эвклид приступает затем к некоторым общим изысканиям насчет иррациональных величин, не останавливаясь на вопросе об их возникновении, а также насчет новых иррациональных величин, составленных из них; потом следуют специальные исследования о квадратных корнях, — в частности те, о которых мы говорили в связи со случаями, когда эти корни оказываются рациональными, именно о рациональных прямоугольных треугольниках. Затем Эвклид устанавливает такие виды иррациональных величин, как *корни четвертой степени* из рациональных величин, выражения вида $p \pm \sqrt{p^2 - q}$, $\sqrt{p^2 + q} \pm p$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, а также корни квадратные из этих выражений или, точнее, как мы это покажем на одном примере, — некоторые преобразования этих квадратных корней в суммы или разности; члены этих последних находятся тогда с помощью уравнений вида $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$, в которых сами a и b имеют уже заданный вид.

Кроме определений различных классов иррациональных величин, главная задача Эвклида сводится здесь к доказательствам того, что образованные величины иррациональны и, вообще, отличны друг от друга. В связи с этим последним пунктом оказывается необходимым выявить те частные случаи, когда выражение одного из указанных видов может быть сведено к более простому виду или составлено из более простых выражений. К этой категории относится, например, преобразование двояко иррационального выражения

$$\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q^2}}$$

в иррациональное выражение простого вида.

Преобразование это производится в 54 и 91 соответственно для знаков $+$ и $-$; его производят затем в 57 и 94 для преобразования выражения

$$\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}}$$

в том случае, когда q не есть квадрат, в выражение

$$\sqrt{\frac{p + \sqrt{q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p - \sqrt{q}}{2}}.$$

К этому виду приводят уравнения теорем 39 и 76, цель которых доказать существование так называемых *большей* и *меньшей* иррациональностей. Операции, с помощью которых производятся эти преобразования и другие подобные им, представлены в виде предложений геометрической алгебры, но, по существу, это те же самые операции, которые мы выразили бы теперь с помощью нашей алгебраической символики и которые служат для решения соответствующих уравнений.

19. Начатки стереометрии; правильные многогранники; одиннадцатая и тринадцатая книги „Начал“. В десятой книге „Начал“ Эвклид при рассмотрении проблем, которые исследовали бы в наше время путем повторного решения уравнений второй степени, обнаруживает огромное алгебраическое искусство. В частности, ему удается таким путем добыть новые средства для обозначения величин, к которым он приходит при нахождении сторон и ребер правильных многоугольников и многогранников. Но прежде чем добраться до последних (в тринадцатой книге „Начал“), ему приходится изложить в одиннадцатой книге своего труде начатки стереометрии.

В первых теоремах, касающихся взаимного расположения прямых и плоскостей, мы встречаемся с самого начала с теми же теоремами и доказательствами, что и в современных руководствах. Однако Эвклид должен здесь, как и в планиметрии, дать место, наряду с теоремами, некоторым построениям, ибо только с помощью последних получаются необходимые доказательства существования рассматриваемых фигур. Если принять во внимание, что построения с помощью плоскостей не подготовлены здесь так, как подготовлены в постулатах первой книги построения с помощью прямых, то естественно, что Эвклид вынужден, по мере возможности, свести их к планиметрическим построениям. Так, например (теорема 11), Эвклид, чтобы опустить перпендикуляр на плоскость из некоторой точки A, расположенной вне этой плоскости, проводит сперва из точки A перпендикуляр AD к какой-нибудь прямой BC плоскости, затем проводит из A другой перпендикуляр к расположенной в той же плоскости прямой, перпендикулярной к BC

в точке D, основании первого перпендикуляра. Далее (12), для того чтобы восстановить в какой-нибудь точке плоскости перпендикуляр к ней, он опускает сперва из какой-нибудь внешней точки перпендикуляр на плоскость, после чего он проводит из данной точки прямую, параллельную этому перпендикуляру.

В этой книге Эвклид устанавливает, в частности, ряд теорем, которые пригодятся ему впоследствии при построении параллелепипедов и многогранников, как, например в 20 и 21,—известные теоремы о плоских углах многогранного угла. После этого в 22 подготовляется, а в 23 выполняется построение трехгранного угла по заданным плоским углам; для этого на сторонах углов, данных как грани искомого трехгранного угла, откладывают равные отрезки; потом в получившихся, таким образом, трех равнобедренных треугольниках берут их основания и по ним строят треугольник, вокруг которого описывают окружность; центр этой окружности и есть проекция вершины искомого трехгранника. Эвклид тщательно доказывает возможность этого построения, исходя, конечно, из условия, что грани удовлетворяют требованиям теорем 20 и 21; и, таким образом, он показывает, что эти условия достаточны.

Остальная часть книги посвящена, главным образом, вопросу о параллелепипедах, об отношениях между их величинами и заканчивается теоремой о нахождении объема треугольной призмы. Но в доказательствах этой книги есть отмеченный уже выше (стр. 96) недостаток, связанный с геометрическими гипотезами о стереометрических величинах.

В двенадцатой книге имеется среди прочих и теорема о нахождении объема пирамиды; мы еще будем иметь случай подробнее говорить о ней, а также и о нахождении других объемов, получаемых в этой книге с помощью метода исчерпывания.

Конец стереометрии находится в тринадцатой книге, посвященной вопросу о нахождении пяти правильных многогранников, а также величины их ребер по величине диаметра описанного шара. Для этого необходимы некоторые геометрико-алгебраические леммы, а также более полное определение сторон правильных многоугольников, чем это было сделано в четвертой книге посредством построения многоугольников.

Первые предложения можно выразить на языке нашей современной алгебры следующим образом: если x и y представляют части отрезка, разделенного в среднем и крайнем отношении, причем $x > y$, то

$$x + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}. \tag{1}$$

[2 представляет теорему обратную 1];

$$y + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{5}, \tag{3}$$

$$a^2 + y^2 = 3x^2, \tag{4}$$

$$a^2 = x(a + x); \tag{5}$$

откуда следует в 6, что x и y относятся к тому виду иррациональных величин, которые получили в десятой книге название *апотомы* (apotomes).

За этим следует несколько теорем о сторонах правильного пятиугольника, шестиугольника и десятиугольника. Следует отметить, в частности, десятую теорему с ее изящным доказательством того, что сторона правильного пятиугольника является гипотенузой прямоугольного треугольника, катетами которого будут стороны правильного шестиугольника и десятиугольника.

В теореме 11 вычисляется, на основании геометрических соображений, сторона правильного пятиугольника, вписанного в круг с диаметром d; полученный Эвклидом результат мы бы выразили формулой $\frac{d}{2}\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}$, но Эвклид лишен средств для составления такого выражения; он довольствуется поэтому доказательством того, что при рациональном d сторона пятиугольника иррациональна и принадлежит к типу, названному им в десятой книге „меньшей иррациональностью". Надо заметить, что доказательство это у Эвклида очень многословно: дело в том, что ему приходилось доказать, что в выражении стороны пятиугольника нельзя устранить двойной иррациональности, ибо в последнем случае иррациональная величина принадлежала бы к другому классу.

В теореме 12 определяется сторона равностороннего треугольника.

В теореме 13 дается построение правильного тетраэдра и доказывается, что его ребро k равно $d\sqrt{\frac{2}{3}}$, где d представляет диаметр описанного шара.

В теореме 14 дается построение правильного октаэдра и доказывается, что $k=d\sqrt{\frac{1}{2}}$.

В теореме 15 дается построение правильного гексаэдра и доказывается, что $k=d\sqrt{\frac{1}{3}}$.

В теореме 16 дается построение правильного икосаэдра и доказыватся, путем действительного вычисления, что ребро его есть „меньшая иррациональность".

В теореме 17 дается построение правильного додекаэдра и доказывается, путем действительного вычисления, что ребро его принадлежит к типу иррациональных величин, называемых *апотомами*.

В теореме 18 показывается на одном и том же чертеже построение ребер различных правильных многогранников; чертеж этот служит в то же время для сравнения между собой этих различных ребер.

Построения эти доказывают, что названные пять правильных многогранников существуют в действительности; к этому в последней теореме книги присоединяется доказательство того, что это единственные возможные правильные многогранники.

В большинстве изданий „Начал" содержится еще так называемая *четырнадцатая* книга, принадлежащая одному позднейшему математику, Гипсиклу, и *пятнадцатая* книга, наверное еще гораздо более позднего происхождения; впрочем, они даются в виде приложений к труду Эвклида, ибо в них, как и в последней книге „Начал", рассматривается вопрос о правильных многогранниках.

Книга Гипсикла представляет, несомненно, шаг вперед в трактовке этого вопроса. В качестве образчика содержащихся в ней теорем мы приведем предложение, согласно которому окружности, описанные около граней правильных икосаэдра и додекаэдра, равны между собой, если оба многогранника вписаны в один и тот же шар. Являясь монографией, книга эта не принадлежит, собственно говоря, к „Началам", но она представляет собой интересный образец исследований, которым предавались математики александрийской эпохи; судя по предисловию к книге, она является продолжением ряда аналогичных изысканий, восходящих к великому геометру Аполлонию.

С этими работами о правильных многогранниках можно связать другой труд, трактующий об аналогичном вопросе, именно работу Архимеда о *полуправильных многогранниках*, т. е. о многогранниках, ограниченных правильными многоугольниками различных видов: в утерянном труде, содержание которого сохранил для нас Папп, Архимед доказывал, что существует тринадцать многогранников этого вида.

20. Доказательство посредством метода исчерпывания; двенадцатая книга „Начал". Занимаясь точным определением величин, являющихся предельными значениями для случаев бесконечного приближения, Эвдокс применил те же способы, которыми он пользовался в теории пропорций для точного исследования величин, доступных лишь приближенному определению с помощью рациональных числовых отношений. Метод, придуманный им для строгого получения этих предельных значений без помощи идеи бесконечного, неприемлемой для тогдашних математиков, представляет столь четкие и точные формы, что он вполне заслуживает особенного наименования; мы станем пользоваться наименованием, данным ему в XVII в., и будем называть его *доказательством путем исчерпывания*. Доказательство это опирается на гипотезу, выдвинутую в четвертом определении пятой книги „Начал", или более непосредственным образом на теорему 1 десятой книги, выведенную из этой гипотезы, — теорему, согласно которой, если отнять половину — или больше половины — какой-нибудь величины и если повторять эту операцию достаточное число раз, то можно, в конце концов, получить величину, меньшую любой заданной величины того же вида. На языке нашей современной символики теорему эту можно выразить следующим образом:

$$\lim \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 0, \quad \text{если } \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lesseqgtr \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим доказательство путем исчерпывания в его первом приложении у Эвклида (XII, 2), который им пользуется для установления того, что площади двух кругов пропорциональны квадратам их диаметров. В предшествующей этому теореме 1 доказывается, что площади подобных вписанных многоугольников пропорциональны квадратам диаметров соответствующих окружностей; довольствуясь краткой формулировкой, мы можем сказать, что доказательство теоремы 2 основывается на рассмотрении окружностей, как пределов этих многоугольников.

Правомерность этого перехода к *пределу* обеспечивается доказательством путем исчерпывания, а применение для этого X, 1 (имеющее место лишь в самом доказательстве) имеет целью показать в этом случае, что в окружность можно вписать многоугольник с таким числом сторон, что разность между ним и кругом может быть сделана меньше любого заданного предела; действительно, при удвоении числа сторон многоугольника мы получаем вписанные в сегменты круга треугольники; треугольники эти, дающие названную разность, равны половине прямоугольников, объемлющих эти сегменты, и, следовательно, сами больше половины сегментов.

Теперь, чтобы доказать, что если A и B — круги, а a и b их радиусы, то:

$$A : B = a^2 : b^2,$$

допускают, что:

$$a^2 : b^2 = A : C$$

и для проверки возможности того, что $C < B$, вписывают в A и B правильные подобные многоугольники A', B', с числом сторон, достаточно большим, чтобы $B - B' < B - C$, т. е. чтобы $B' > C$. В таком случае мы должны иметь:

$$a^2 : b^2 = A : C = A' : B';$$

но это невозможно, ибо $A > A'$, но $C < B'$; случай, когда $C > B$, сводится к предыдущему, ибо из $C > B$ можно вывести, что

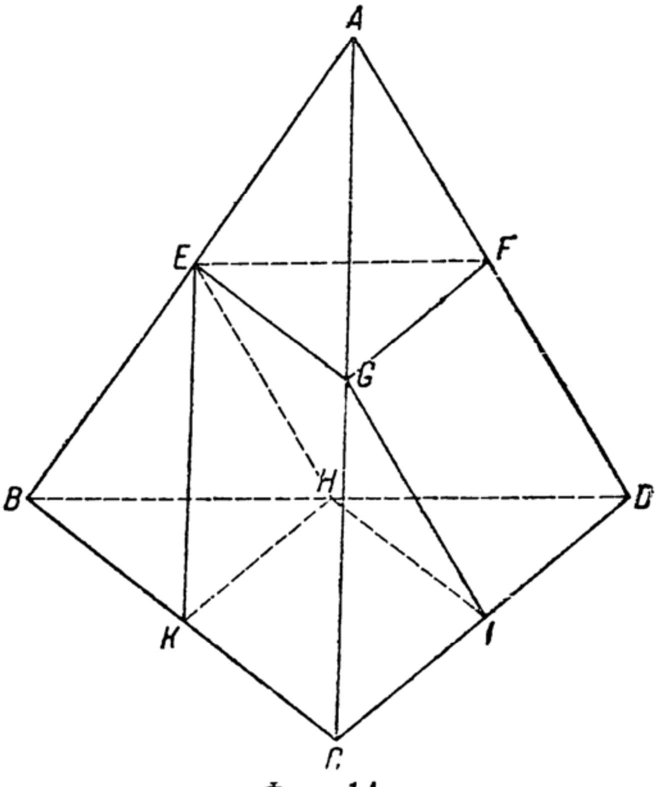
$$b^2 : a^2 = C : A = B : D,$$

где:

$$D < A.$$

Ясно, что если переменные величины A' и B' имеют предельные значения A и B и если отношение $A' : B'$ обладает постоянным значением, то тот же самый прием можно всегда применить для доказательства того, что отношение $A : B$ обладает тем же значением; в частности, если $A' = B'$, то $A = B$. Однако древние не устанавливают раз навсегда этого положения, как это сделали бы мы в настоящее время при изложении теории бесконечного, ибо это равнозначуще было бы попытке объяснить понятия той же природы, что и бесконечно-малое (infinitesimale) приближение, а следовательно, равнозначуще допущению таких понятий, на что они не могли пойти. Все они — как Эвклид, так после него Архимед — довольствуются тем, что повторяют одни и те же приемы доказательства всякий раз, когда в этом представится необходимость

Уже в теореме 5, в которой доказывается, что объемы треугольных пирамид с одинаковой высотой пропорциональны площадям их оснований, Эвклид находит повод повторить названное доказательство, доказав предварительно в теоремах 3 и 4, что необходимые для применения его гипотезы действительно существуют. Он поступает тут следующим образом: с помощью плоскостей EFG, $EGIH$ и EHK, проходящих через середины 3 или 4 ребер, он разлагает (фиг. 14) треугольную пирамиду на две подобные ей, но с половинными размерами пирамиды и на две равные между собой призмы; у каждой призмы та же высота и та же площадь основания, что у одной из малых пирамид, как это доказывается на основании теорем предшествующей книги.



Фиг. 14.

Если разделить теперь каждую из малых пирамид тем же самым способом и продолжить, таким образом, дальше, то в качестве приближенных значений объема пирамиды мы получим сумму объемов двух первых призм, 4 следующих, 8 следующих и т. д. Нетрудно заметить при переходе к каждому дальнейшему приближению, что отнимаемые у пирамиды призмы — больше половины: действительно, обе малые пирамиды, получающиеся при делении первоначальной пирамиды, меньше обеих призм, ибо их можно расположить так, что они будут составлять лишь части последних.

Если теперь мы имеем две пирамиды A и B одинаковой высоты и если принять за приближенные значения объемов этих пирамид суммы объемов призм A' и B', полученных на одинаковой ступени деления первоначальных двух пирамид, то остается лишь (4) доказать, что $A' : B'$ равно отношению между площадями оснований (F и G). Обозначим для обеих пирамид суммы двух первых призм через u_1 и v_1, суммы четырех призм, получившихся на следующей стадии деления, — через u_2 и v_2, суммы следующих 8 призм — через u_3 и v_3 и т. д., тогда мы получим искомый результат, если докажем, что

$$F:G=u_1:v_1=u_2:v_2=u_3:v_3=\ldots A':B'$$

и доказательство путем исчерпывания дает тогда (в 5):

$$A:B=F:G.$$

Значение употребленного здесь приема выступает особенно отчетливо, если обратить внимание на то, что теорема 3 содержит условия, обеспечивающие согласно X, 1 то, что

$$A=u_1+u_2+u_3+\ldots,\ \text{и т. д. ad infinitum.}$$

Это соображение вызывает желание исследовать более тщательным образом рассматриваемый сходящийся ряд. Нетрудно заметить (как это делает отчасти и сам Эвклид в XII, 4), что каждая из двух равных призм, сумма которых равна u_1, подобна двум из 4 равных призм в u_2 и т. д., откуда следует:

$$u_2=\frac{1}{4}u_1,\quad u_3=\frac{1}{4}u_2\ldots,$$

или же

$$A=u_1\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\right]=\frac{4}{3}u_1=\frac{1}{3}u_0,$$

где u_0 обозначает призму, имеющую ту же высоту и ту же площадь основания, что и пирамида P. Нетрудно, впрочем, подтвердить правильность этого вывода с помощью доказательства путем исчерпывания.

Эвклид, правда, не пользуется этим способом. Если, тем не менее, мы сочли необходимым привести его здесь, где мы желаем познакомиться с методами не только Эвклида, но вообще древних математиков, то потому, что (как мы покажем вскоре) Архимед действительно *пользуется абсолютно тем же самым методом суммирования бесконечного ряда для определения площади параболического сегмента*.

Вместо этого суммирования Эвклид для вычисления объема треугольной пирамиды прибегает в теореме 7 к известному разделению треугольной призмы на три пирамиды. Мы считаем лишним останавливаться на переходе к пирамидам с многоугольным основанием, а также на переходе от призм и пирамид к цилиндрам и конусам, — переходе, совершаемом, разумеется, с помощью доказательства путем исчерпывания.

Но приводимое в теореме 18 доказательство, что объемы шаров пропорциональны кубам радиусов, представляет большие трудности, ибо здесь невозможно составить столь простые приближенные значения, как в случае площади круга. Поэтому Эвклид, прежде чем дать это доказательство, решает предварительно следующую задачу (17): вписать в данный шар многогранник, объемлющий целиком другой, концентрический и меньший шар. Задача эта решается следующим образом: в большой круг бо́льшего шара (назовем этот круг экватором) вписывают правильный многоугольник с четным числом сторон ($2n$), так что он содержит в себе большой круг меньшего шара, расположенный в той же плоскости; затем в экватор бо̀льшего шара вписывают правильный многоугольник с вдвое бо̀льшим числом сторон ($4n$); потом через вершины этого многоугольника и полюс экватора проводят новые большие круги (меридианы), которые делят, начиная с точек пересечения их с экватором, на столько же частей ($4n$), сколько их имеется в экваторе. Получившиеся точки деления будут тогда вершинами искомого многогранника, боковые грани которого будут состоять из трапеций и треугольников, причем последние расположены около полюса.

Из всего хода доказательства Эвклида ясно следует, что он хотел дать именно это решение, хотя в сохранившемся до нас тексте имеется другое ошибочное решение, предшествуещее этому доказательству.

Хотя в данном случае мы не имеем ряда приближенных значений для объемов шаров, но и здесь, как и раньше, можно воспользоваться доказательством путем исчерпывания. Действительно, пусть A и B будут данные шары с радиусами a и b, и пусть C будет шар, концентрический с шаром B и определяемый уравнением:

$$A:C=a^3:b^3;$$

если $C<B$, то в B можно вписать многогранник B', объемлющий целиком C, а в A — многогранник A', подобный B'. С этими многогранниками мы можем тогда поступать точно так, как с величинами A' и B' в приведенном выше доказательстве путем исчерпывания.

Чтобы выяснить полностью логическую ценность доказательства путем исчерпывания, небесполезно будет сравнить его с современными аналогичными методами. Хотя древние ученые абсолютно избегали таких выражений, как „предельное значение бесконечного приближения", но, как мы уже сказали, фактически доказательство путем исчерпывания дает эти самые значения. В основе всего этого приема лежит даже строгое понятие о пределе, ибо при нем стремятся довести (конечное) приближение до того, чтобы отклонение приближенного значения от предельного значения было меньше всякой данной величины. Таким образом доказательство путем исчерпывания является точным доказательством, антитетическим доказательством однозначности такого способа вычисления или того факта, что две величины, являющиеся при этом способе пределами одних и тех же приближенных значений, равны между собой. Оно, в силу этого, является одним из необходимых элементов всякого законченного, оперирующего с бесконечно-малыми, исследования (recherche infinitésimale), притом элементом таким, что всякий раз, когда имеется налицо доказательство путем исчерпывания, можно утверждать, что мы имеем дело с исследованием в области бесконечно-малого, исследованием, приводящим к результату, правильность которого будет затем доказана.

Изыскания в области бесконечно-малых, которые встречаются у древних авторов в тех случаях, когда они пользовались доказательством путем исчерпывания, можно свести, впрочем, к некоторым употребляемым еще и ныне методам исчисления бесконечно-малых. Так, можно утверждать, что не только вычисление объема пирамиды („Начала", XII, 5) и площади параболического сегмента у Архимеда, но и вычисление площади круга (XII, 2) происходит с помощью сходящихся рядов, а также что Архимед, как мы увидим, прибегает к тем самым бесконечным суммам бесконечно-малых количеств, которые в настоящее время называются *определенными интегралами*. Доказательство путем исчерпывания обеспечивает строгое и точное применение этих способов, но древние авторы (если судить, по крайней мере, на основании сохранившихся до нашего времени трудов их) до того заняты вопросом об обеспечении этой строгости в каждом отдельном случае, что у них не остается ни места, ни времени, чтобы, выйдя из рамок занимающего их в данный момент вопроса, развить дальше методы, которыми они пользуются для получения своих результатов, и создать новые методы.

Когда в XVII в. ученые снова обратились к исследованиям в области бесконечно-малых, опираясь особенно на работы Архимеда, то их, главным образом, интересовал вопрос не только о том, чтобы понять, как он доказывает полученные им результаты, но также и о том, каким путем он пришел к ним и каким путем можно самому найти новые результаты. С этой целью и стали развивать новые методы. Тем не менее, в большинстве случаев продолжали обеспечивать строгость полученных мало-по-малу результатов, либо пользуясь доказательством путем исчерпывания, либо, по крайней мере, ограничиваясь замечанием, что к ним можно применить это доказательство. Так, например, поступал Ферма (Fermat), и так продолжали даже поступать еще тогда, когда диференциальное и интегральное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем.

Но зато с другой стороны, когда мало-по-малу приучились пользоваться методами, дававшими новые результаты, и когда манипулирование бесконечно-малыми стало обыкновенным делом, то нередко стали пренебрегать логическими предосторожностями и логической строгостью, которую преследовало доказательство путем исчерпывания. Начали считать, что бесконечно-малые величины достаточно определяются одним своим наименованием, а в отдельных случаях доходили до того, что признавали какую-нибудь величину определенной некоторым бесконечным рядом, не убедившись даже в сходимости его.

Только в XIX в. ученые снова выдвинули со всей силой вопрос о точности доказательства, которой древние математики удовлетворяли посредством доказательства путем исчерпывания;

этой логической строгости добились, показав существование предельных значений с помощью доказательств, совпадающих, по существу, с доказательством путем исчерпывания. Но только в настоящее время это последнее доказательство дается, как мы уже указали на первом примере приложения его, *один раз навсегда* или же употребляется при установлении столь общих понятий, как сумма бесконечного ряда или как определенный интеграл, между тем как в древности его повторяли по поводу каждого частного случая.

Однако существует довольно серьезное формальное различие между тем, как рассматривали вопросы этого рода древние и как они трактуются теперь, хотя различие это, имеющее своим источником различие исходных пунктов, нисколько не затрагивает логической строгости заключений. Эта разница обнаружилась уже, когда нами рассматривался в общем виде вопрос о непрерывности величин, непрерывности, существование которой для геометрически представляемых величин прямо предполагалось древними, как об этом свидетельствуют четыре первые книги „Начал"; только позже, в пятой книге, вводятся арифметические способы, которыми тоже можно пользоваться для сравнения несоизмеримых величин. В настоящее время, наоборот, начинают с этих арифметических соображений, применяя их лишь впоследствии к носящим более эмпирический характер непрерывно изменяющимся величинам.

В наше время изложение часто начинают с рассмотрения процесса сходящегося арифметического приближения, с помощью которого находят площадь какой-нибудь плоской фигуры (например круга) или какой-нибудь объем (например объем пирамиды) и пользуются им для определения понятия площади или объема. Наоборот, древние полагали, что понятия площади плоской фигуры или объема определены общими аксиомами о величинах, с которыми мы уже познакомились по первой книге „Начал"; таким образом теорема, что площадь круга больше площади всякого вписанного многоугольника и меньше площади всякого описанного многоугольника, была для них непосредственным следствием восьмой аксиомы. Из аксиом первой книги выводили способы приближения, которые служили тогда для нахождения (détermination) площадей или объемов, а теперь служат для определения (définition) соответствующих понятий. Но зато наблюдается полное согласие в том, что в древности, как и в настоящее время, требовали строгого доказательства *сходимости* применяемых процессов.

Однако, когда дело идет о нахождении длины кривой линии или площади кривой поверхности, недостаточно общих аксиом о величинах.

Поэтому в настоящее время считают особенно необходимым определить эти понятия с помощью того же самого процесса приближения, при посредстве которого находят фактически эти величины. Мы увидим, что от Архимеда, во всяком случае, не ускользнуло то затруднение, на которое я здесь намекаю. Для устранения его он не обращается, однако, к формальным определениям соответствующих понятий; вместо этого он прямо выставляет гипотезы, которыми он пользуется по способу древних — он постулирует; не ограничиваясь общими постулатами, он выдвигает эти гипотезы в процессах приближения, с помощью которых он находит значение величин, и в своих доказательствах сходимости этих процессов.

Гипотезы эти выставлены в качестве постулатов в его сочинении „О шаре и цилиндре"; согласно им:

1) прямая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками;

2) из двух линий, проведенных между теми же самыми точками и обращенных своей выпуклостью в одну и ту же сторону, внешняя линия больше;

3) плоская поверхность меньше кривой поверхности, ограниченной тем же контуром;

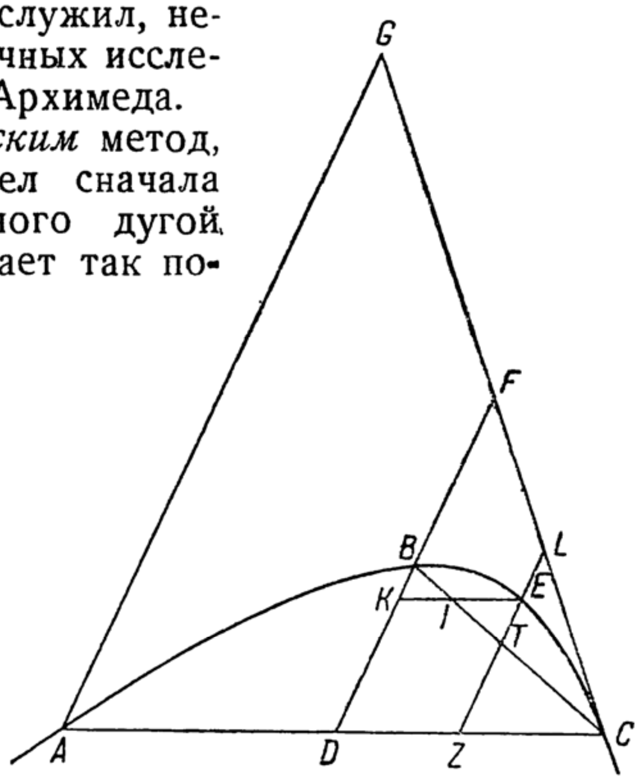
4) из двух кривых поверхностей, ограниченных одним и тем же плоским контуром и обращенных своей выпуклостью в одну и ту же сторону, внешняя поверхность больше.

Некоторые исследователи готовы были видеть в первом постулате, вырванном из контекста, определение прямой линии. Но это — явное недоразумение, ибо постулат этот и следующий за ним, скорее, служат для определения понятия длины кривой линии, а последние два — для определения понятия площади кривой поверхности. Что эти косвенные определения достаточны, это вытекает из того, что они приводят в действительности к вычислениям соответствующих величин, хотя 2 и 4 (без которых, разумеется, нельзя обойтись окончательно) содержат несколько больше, чем это строго необходимо.

Познакомившись, таким образом, с общими принципами, которыми пользовался Архимед для своих строгих вычислений в области бесконечно-малого с помощью доказательства путем исчерпывания, мы можем в дальнейшем ограничиться кратким указанием разложений, послуживших для этих вычислений, и полученных таким образом результатов, не вдаваясь в подробное рассмотрение хода доказательства.

21. Инфинитезимальные вычисления у Архимеда. Исключительные заслуги Архимеда в ряде отраслей знания достаточно известны, — мы их отчасти уже касались и вернемся еще к ним, — но особенно поражает нас творческая мысль его *исследований в области бесконечно-малого*, получивших уже у Эвдокса такую прочную основу, и в *теории равновесия*, в строгой разработке которой у Архимеда, насколько мы знаем, не было предшественников. В этих исследованиях Архимеду представляется неоднократно случай показать, что он так же хорошо знаком с коническими сечениями, как и с вопросами элементарной математики. Он даже настолько хорошо знаком с этой теорией, что изучает сечения поверхностей, получающихся от вращения конических сечений. Но так как мы предпочитаем рассмотреть в дальнейшем в одном месте все то, что относится к учению древних о конических сечениях, то, излагая здесь содержание работ Архимеда, мы ограничимся лишь упоминанием каждый раз используемых им свойств сечений, не интересуясь пока вопросом об источнике его сведений в этой области.

Наш анализ архимедовых исследований в области бесконечно-малого мы начнем с его трактата „О квадратуре параболы", ибо работа эта, в виде исключения, показывает нам не только конечный результат, но и исходный пункт исследований автора; указанный конечный результат послужил, несомненно, толчком для аналогичных исследований в других сочинениях Архимеда.



Фиг. 15.

Архимед называет *механическим* метод, с помощью которого он нашел сначала площадь сегмента, ограниченного дугой параболы и ее хордой, называет так потому, что он здесь опирается на теоремы о статических моментах и о центре тяжести треугольника, изложенные им в книге „О равновесии плоских фигур", о которой речь будет у нас ниже.

Метод его вкратце таков: возьмем хорду AC (длину которой мы обозначим через a) за ось абсцисс, а за ось ординат — диаметр AG, проходящий через конец A этой хорды; обозначим через x и y координаты какой-нибудь точки E параболы, через y_1 — соответствующую абсциссе x ординату ZL касательной CG в другом конце хорды; Архимед выводит тогда из известных уже ранее теорем о параболе, что:

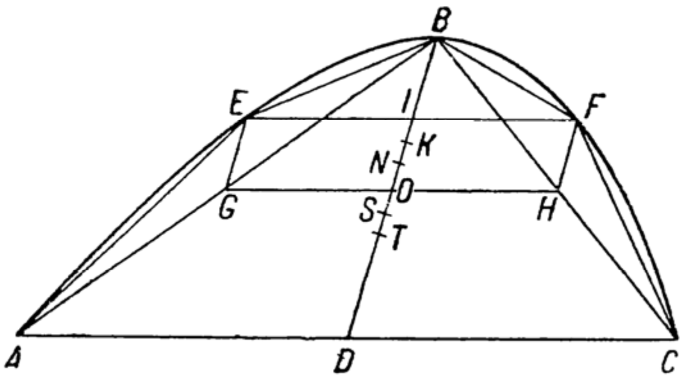
$$a \cdot y = x \cdot y_1.$$

Таким образом ордината y_1 обладает в занимаемом ею реально положении тем же моментом по отношению к линии AG, какой имела бы ордината y, если бы ее переместили параллельно самой себе до C. Разделив фигуру посредством прямых, параллельных оси ординат, на *полоски* и установив с помощью доказательства путем исчерпывания правильность операции, которую в настоящее время мы выразили бы через

$$a \int_0^a y\, dx = \int_0^a y_1 x\, dx,$$

Архимед доказывает, что момент по отношению к AG всего параболического сегмента, перенесенного в C, равен моменту треугольника ACG в его естественном положении. Но так как расстояние центра тяжести треугольника ACG от AG равняется трети расстояния от нее точки C, то отсюда следует, что сегмент равен трети треугольника ACG или двум третям треугольника, образованного хордой и обеими касательными к концам ее. [В ходе своего доказательства Архимед воображает еще, что парабола как бы подвешена на другом конце равноплечего рычага, имеющего точку опоры в A].

Несмотря на всю строгость доказательства, Архимед присоединяет к нему еще исключительно изящное геометрическое доказательство. Пусть $AEBFC$ будет сегментом, а BD — диаметром, делящим пополам хорду AC. Впишем сперва в данный сегмент треугольник ABC, затем в получившиеся таким образом малые сегменты треугольники AEB и BFC, затем в дальнейшие новые сегменты соответствующие треугольники и т. д. Легко найти тогда, что каждый треугольник (как AEB) нового ряда треугольников равен $^1/_8$ треугольника (как ABC) предыдущего ряда, и так как в каждом новом ряду число треугольников вдвое больше, чем в предыдущем ряду, то имеем:



Фиг. 16.

$$\text{сегмент } ABC = \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right] \triangle ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC.$$

Доказательство дается здесь путем исчерпывания, как мы это указали по поводу двенадцатой книги Эвклида.

В то время как геометрическая квадратура параболы действительно опирается у Архимеда на суммирование бесконечного ряда, мы, с своей стороны, воспроизводя его *механическое* доказательство, воспользовались знаками интегралов для обозначения разложения на части, одновременно убывающие до бесконечности. Однако, строго говоря, нельзя прием Архимеда назвать интегрированием, ибо, в действительности, он служит для того, чтобы избегнуть интегрирования путем сведения искомой задачи к другой, результат которой, именно определение центра тяжести треугольника, найден уже раньше без интегрирования.

Но зато в трактатах „О спиралях“ и „О коноидах и сфероидах“ мы имеем дело с настоящими интегрированиями: действительно, Архимед доказывает здесь теоремы, в точности соответствующие нашим формулам:

$$\int^c x\,dx = \frac{1}{2}c^2 \text{ и } \int_0^c x^2\,dx = \frac{1}{3}c^3,$$

и применяет их к различным геометрическим вычислениям, результаты которых мы и в настоящее время получили бы тем же самым способом, что и он, с помощью вышеприведенных интегральных формул, с той лишь разницей, что не повторяли бы в каждом отдельном случае доказательства путем исчерпывания. Среди этих теорем первая находится во введении к трактату „О коноидах и сфероидах“, вторая — в добавлении к теореме 10 о спиралях. Это следующие теоремы:

$$\frac{n^2}{2}h < h + 2h + 3h + \ldots + nh < \frac{(n+1)^2}{2}h,$$

$$\frac{n^3}{3}h^2 < h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + (nh)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}h^2.$$

Первая теорема получается непосредственно из суммирования членов арифметической прогрессии, операции, известной, несомненно, уже давно; вторая основывается на данном в теореме 10 суммировании рассматриваемого ряда.

Архимед находит, что

$$3\,[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + (nh)^2] =$$
$$= (n+1)(nh)^2 + h\,(h + 2h + 3h + \ldots + nh);$$

h, $2h$ и т. д. изображены отрезками, и если мы примем h за единицу и обозначим через s искомую сумму квадратов, то доказательство Архимеда можно изобразить следующим образом:

$$(n+1)\,n^2 = n^2 + [(n-1)+1]^2 + [(n-2)+2]^2 + \ldots +$$
$$+ [2 + (n-2)]^2 + [1 + (n-1)]^2 + n^2 =$$
$$= 2s + 2(n-1) + 4(n-2) + 6(n-3) + \ldots + 2(n-1)\cdot 1.$$

Прибавив к этому

$$(n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 1),$$

получаем:

$$2s + n + 3(n-1) + 5(n-2) + \ldots + (2n-1)\cdot 1.$$

Но эта сумма равна $3s$, как это легко видеть, взяв сумму нижеследующих равенств, вытекающих, в свою очередь, из формулы для суммы членов арифметической прогрессии:

$$n^2 = n + 2(n - 1 + n - 2 + \ldots + 1),$$
$$(n-1)^2 = n - 1 + 2(n - 2 + n - 3 + \ldots + 1),$$
$$(n-2)^2 = n - 2 + 2(n - 3 + n - 4 + \ldots + 1).$$

. . . .

Следует заметить, что хотя суммирование членов ряда $h^2 + (2h)^2 + \ldots$ как будто по внешности нечто второстепенное, но в исследовании Архимеда оно представляет важный алгебраический результат.

В своем трактате „О спиралях" Архимед применяет этот результат для вычисления площади сектора архимедовой спирали $r = a \cdot \vartheta$; так как площадь такого сектора равна:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2a}\int\limits_{r_2}^{r_1} r^2 dr,$$

то ее можно найти с помощью второго из вышенаписанных интегралов. Архимед вычисляет следующим образом отношение этой площади к площади кругового сектора с радиусом r: одновременно с секторами он делит угол $\theta_1 - \theta_0$, затем строит два ряда круговых секторов, заключенных в секторы спирали или заключающих их, потом сравнивает их с этими круговыми секторами, пользуясь доказательством путем исчерпывания.

Коноидами Архимед называет либо параболоиды вращения, либо двуполостные гиперболоиды вращения, причем в случае последних рассматривается только одна из двух полостей; *сфероиды* — это эллипсоиды вращения. В трактате об этих поверхностях Архимед вычисляет объем их сегментов, ограниченных какой-нибудь плоскостью; он знает, что представляет собой произвольное плоское сечение поверхности этого рода, а также способ найти его оси с помощью отрезков, образуемых секущей плоскостью на сопряженном диаметре поверхности. Он находит, далее, площадь эллипса, что, правда, нетрудно получить, если сравнить фигуры, вписанные в эллипс и в окружность, построенную на одной из осей эллипса, как на диаметре.

Вычисление объемов сводится к интегрированиям, известным Архимеду в другом виде.

Обе рассмотренные нами работы Архимеда представляют огромный интерес не только с точки зрения содержащихся в них вычислений площадей и объемов; из нашего изложения нетрудно видеть, что трактат „О коноидах и сфероидах" знакомит нас со сведениями Архимеда в области учения о конических сечениях; точно так же в трактате „О спиралях" встречаются некоторые из упоминавшихся выше *вставок* (intercalations).

Наряду с вычислением площадей, главной целью этого трактата является еще другой вопрос из области бесконечно-малого, именно нахождение касательных к спиралям. Для этого Архимед рассматривает (пользуясь, разумеется, обязательно доказательством путем исчерпывания) тот самый бесконечно-малый треугольник, который употребляют и теперь для нахождения касательных к кривым, выраженным в полярных координатах. В итоге он получает, что полярная подкасательная равна $r \cdot \vartheta$. Подкасательные в концах различных целых завитков спирали представляли для него, как мы уже указывали на стр. 63, особенный интерес потому, что они давали ему прямолинейные отрезки, равные окружностям.

Но, разумеется, самым крупным достижением Архимеда в области интегрирований является вычисление (в труде „О шаре и цилиндре") поверхности шара, вычисление, мало отличающееся от того, которое дается теперь в наших учебниках; он доказывает, в согласии с заголовком труда, что поверхности шарового пояса и соответственной части описанного цилиндра равны между собой. Исходя из этого, он без труда получает ряд других аналогичных вычислений и определяет также объемы шара, сектора и сегмента.

Так как Архимед (как, впрочем, и Эвклид) никогда не вводит никакой единицы, то все его вычисления объемов сводятся, по существу, к построению цилиндров и конусов, равновеликих искомым объемам.

Вторая книга рассматриваемого труда касается (помимо указанного уже нами вычисления объема сегментов) ряда вопросов об объемах, между прочим следующего вопроса: разделить шар плоскостью на два сегмента, объемы которых находятся в данном отношении друг к другу. Как известно, решение этой задачи зависит от уравнения третьей степени. К такому же уравнению сводит ее и Архимед, придав ей следующий вид: разделить отрезок DZ, на котором даны точки B и T, точкой X так, чтобы

$$DB^2:DX^2=XZ:TZ.$$

DB представляет здесь диаметр $2r$ шара, на продолжении которого откладывают $BZ=r$; DX — высота одного из сегментов, и если объем последнего относится к объему другого сегмента, как $m:n$, то

$$TZ=\frac{m}{m+n}\cdot r.$$

Архимед обещает решить это уравнение позже, замечая пока, что требуемое уравнением условие возможности фактически удовлетворено рассматриваемой задачей о шаре. Может быть, одной из причин, побудивших Архимеда отложить решение уравнения (в результате чего в нашем тексте, к сожалению, не хватает этого решения), являлось то, что это же самое уравнение он должен было применить в рассматриваемой книге вторично. Действительно, в последней (девятой) теореме книги говорится, что наибольший из шаровых сегментов, имеющих данную поверхность — это полушар; но легко заметить по приводимому (и в сохранившемся до нас тексте неполному) доказательству, что оно придумано лишь после того, как результат был найден иным способом. Наоборот, настоящее доказательство рассматриваемой теоремы должно было, естественно, быть дано в дополнении, обещанном Архимедом, к вопросу о делении шара. Действительно, теорема о максимуме, подобная девятой, встречается у греков всегда лишь в качестве диоризма к какой-нибудь задаче. В рассматриваемом случае дело должно было бы итти о нахождении шарового сегмента с данными объемом и поверхностью, а для решения этой задачи и требуется вышеназванное уравнение.

Как мы сказали, обещанное дополнение не имеется в нашем тексте. Предполагают, однако, что оно содержалось в другой, более древней рукописи, открытой и частично изданной одним комментатором Архимеда — Эвтокием. В нем архимедово уравнение решается с помощью конических сечений. Из него выводят затем условия возможности, применение которых к задаче: „найти шаровой сегмент с данными объемом и поверхностью" непосредственно должно было бы дать теорему 9. Ниже мы приведем само это решение, являющееся одним из лучших дошедших до нас образчиков того, как древние решали так называемые *пространственные* задачи.

Из примеров этого рода, содержащихся в трактате Архимеда, легко видеть, что вычисление шаровой поверхности открывало широкое поприще для ряда новых изысканий. Кроме того, оно позволяло делать практические приложения, а также приложения к другим наукам, как, например, к географии.

Возможно, что благодаря всем этим обстоятельствам Архимед ценил вычисление шаровой поверхности выше всех других своих открытий; но, по существу дела, достаточно того, что Архимеду удалось вычислить площадь кривой не линейчатой поверхности в эпоху, когда находилось еще в таком зачаточном состоянии вычисление площадей даже плоских фигур и соответствующих объемов. И как немногочисленны даже в наше время поверхности, площади которых можно выразить столь простой формулой!

Согласно выраженному Архимедом желанию, на его могиле был поставлен памятник, содержащий шар с описанным вокруг него цилиндром. Через полтора века Цицерон, в бытность его квестором Сицилии, нашел этот памятник и восстановил его*.

22. Архимедова теория равновесия. Правила равновесия равноплечего рычага были известны задолго до эпохи Архимеда,

---

* В 1906 г. Гейберг нашел новое, до того неизвестное сочинение Архимеда. Содержание его Цейтен излагает в основной статье о математике в древности и средние века, помещенной в известном издании „Die Kultur der Gegenwart". Изложив квадратуру параболы по Архимеду, Цейтен продолжает:

„Но более смелым является следующее, посланное знаменитому александрийскому ученому Эратосфену, сообщение, в котором Архимед рассказывает о приложении своего метода к целому ряду задач, замечая при этом, что он рассматривает этот вывод не как доказательство, а как указание к открытию теорем и их доказательств. Это замечательное сочинение, названное им „Учением о методе" (ἔφοδος), было открыто лишь в 1906 г. Гейбергом. В качестве первого примера Архимед приводит опять-таки параболический сегмент, но на этот раз он не пользуется вовсе доказательством методом исчерпывания, довольствуясь рассмотрением сегмента как „суммы отрезков MN", треугольника ABC как „суммы отрезков MP". Точно так же в дальнейшем он рассматривает объем как „сумму площадей", на которые он разделяется рядом параллельных плоскостей, например рассматривает шар как сумму таких круговых площадей. Этим он имеет в виду то же самое, что имеем в виду мы, когда рассматриваем площадь как сумму бесконечно многих бесконечно узких полосок, объем как сумму бесконечно многих бесконечно тонких слоев, с чем мы связываем непосредственно представление об определенном интеграле. Применяя свой метод, Архимед находит еще в „эфодиконе" объем шара и шарового сегмента, центр тяжести полушария или любого шарового сегмента, а также соответствующие результаты для тел, образующихся от вращения конического сечения вокруг оси, для гипербол, однако, только вокруг оси.

но только он первый по-настоящему доказал их на основании следующих рассуждений.

Пусть A и C—точки приложения грузов P и Q и пусть B будет некоторая точка на AC, для которой

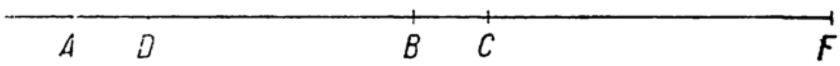
$$AB:BC=Q:P.$$

В таком случае, если точка опоры рычага (собственным весом которого пренебрегают) находится в B, то он находится в равновесии.

Действительно, разделим рычаг точкой D, для которой

$$AD:DC=P:Q,$$

и возьмем на его продолжении точки E и D, для которых $EA=AD$ и $CF=DC$. Не изменяя условий равновесия, можно распределить вес P равномерно по ED, а вес Q — по DF, так что весь вес $P+Q$ оказывается равномерно распределенным по EF. В силу симметрии равновесие имеет в этом случае место когда EF имеет точкой опоры срединную точку B.



Фиг. 17.

Однако в первой книге своего сочинения, „О равновесии плоских фигур" Архимед при доказательстве этого положения не прибегает к равномерному распределению веса. Он рассматривает сперва случай, когда P и Q соизмеримы и, следовательно, могут быть распределены на равноотстоящих точках, а затем, опираясь на доказательство путем исчерпывания, он переходит к случаю несоизмеримости P и Q. Как и всегда, он явно формулирует гипотезы, на которых основывается его доказательство

пересекающей кривую, и называемых им коноидами и сфероидами. Подробнее занимается он затем двумя ограниченными кривыми поверхностями телами, доказывая для них, что они равновелики другим телам, ограниченным только плоскостями. Первое из них—это цилиндрическое копыто, т. е. часть цилиндра, отсекаемая плоскостью, проходящей через какой-нибудь диаметр основания, другое—как теперь называют его—монастырский свод или половина пространства, общего двум равным прямым цилиндрам, оси которых взаимно перпендикулярны. К сожалению, сохранилось только первое из этих вычислений. Оно производится с помощью статического, метода, за которым следует, однако, геометрическое доказательство. Введением к этому последнему доказательству служат рассуждения инфинитезимального порядка, которые он вслед затем немедленно превращает в полное доказательство методом исчерпывания. Этот пример показывает нам, как вообще возникли его доказательства методом исчисления На основании этого можно сказать, что если отвлечься от геометрической формы, то вывод доказываемых таким образом теорем основывается на тех же соображениях, что и применение к тем же самым вопросам современного интегрального исчисления, но с той разницей, что Архимед, не обладая общеобоснованным интегральным исчислением, вынужден в каждом отдельном случае обеспечить правильность доказательства тем, что он придает ему форму доказательства методом исчерпывания.

(Die Kultur der Gegenwart, Die mathem. Wissen schften, 1 Lieferung, 1912. Стр. 58—59).

Примеч. переводчика.

в данном случае — это условия равновесия или неравновесия равноплечего рычага.

Для дальнейших своих рассуждений Архимед выставляет еще следующие гипотезы: центры тяжести подобных фигур являются гомологическими точками; центр тяжести фигуры, выпуклой во все стороны, находится внутри контура или поверхности, ограничивающей эту фигуру. Заметим, между прочим, что приводимое им доказательство того, что центр тяжести треугольника расположен в точке пересечения его медиан, — этим доказательством он и заканчивает свою первую книгу, — кажется нам теперь излишне многословным; но многословность эта объясняется тем, что он должен был строить свое доказательство лишь на явно выставленных им гипотезах.

Мы уже видели, как для вычисления площади параболического сегмента Архимед пользуется теоремами о равновесии. Впоследствии, во второй книге своего труда „О равновесии плоских фигур", он определил центр тяжести такого сегмента, опираясь при этом на теорему, согласно которой центры тяжести различных параболических сегментов должны делить свои соответственные диаметры в одном и том же отношении. Для доказательства этой теоремы делят параболические сегменты на бесконечное множество треугольников, подобно тому, как Архимед это сделал при геометрическом* вычислении площади сегмента (см. выше фиг. 16).

Что касается неизвестной величины этого постоянного отношения, то его можно найти, разложив сегмент ABC на треугольник ABC и два новых сегмента; Архимед решает затем геометрическим образом получившееся отсюда уравнение первой степени.

Архимеду известен еще другой центр тяжести, именно центр тяжести произвольного сегмента *параболоида вращения*, хотя он находит его иным способом, чем центр тяжести параболического сегмента; действительно, в данном случае приходится прибегать в том или ином виде к упомянутым уже и известным Архимеду *интегрированиям*. Архимед совершенно не объясняет, как он нашел этот центр тяжести, но он говорит о нем и пользуется им неоднократно во второй книге своего сочинения „О плавающих телах".

В первой книге этого труда по гидростатике устанавливается общеизвестная основная теорема о равновесии целиком или отчасти погруженных в жидкость тел, носящая в наше время название *принципа Архимеда*. Архимед рассматривает здесь этот вопрос с настолько общей точки зрения, что он может учитывать шарообразность земли и направление силы тяжести к центру. В последней теореме книги Архимед определяет положение равновесия шарового сегмента, частично погруженного в жидкость,

* В седьмом параграфе дошедшего до нас текста какой-то позднейший редактор ограничил, по явной ошибке, применимость теоремы только к подобным сегментам.

но, к сожалению, некоторые существенные части этого исследования утеряны. При доказательстве того, что не существует других положений равновесия, кроме случая, когда ось сегмента вертикальна, Архимед не мог, разумеется, довольствоваться одними соображениями симметрии; по крайней мере, так можно думать на основании даваемого им во второй книге более полного анализа следующей задачи: найти положение равновесия сегмента, образуемого сечением, перпендикулярным к оси параболоида вращения. При этом исследовании Архимед предполагает, однако, что поверхность воды плоская, и прибегает также к рассмотрению центров тяжести сегментов, получающихся от сечений, наклонных к оси.

В статике работы Архимеда являются основой как теоретической механики, так и практических приложений последней. Он сам сделал многое в области этих приложений, если верить многим позднейшим рассказам древних авторов, больше ценивших материальные результаты, чем чисто научные труды. Непосредственным приложением архимедова принципа является определение состава сплавов на основании удельного веса (корона царя Гиерона). Рассказывают, будто Архимед построил особые приспособления для передвигания огромных тяжестей при помощи незначительной силы; так называемый *архимедов винт* — несомненно, одно из его изобретений. Его инженерные таланты обнаружились особенно во время осады Сиракуз, когда им был построен ряд военных машин. Вполне возможно, что он изобрел параболические зеркала, но рассказы о том, будто он воспользовался этим изобретением, чтобы зажечь римский флот, относятся к области легенд. Наконец, в древности говорили с восхищением о механическом *планетарии*, построенном Архимедом.

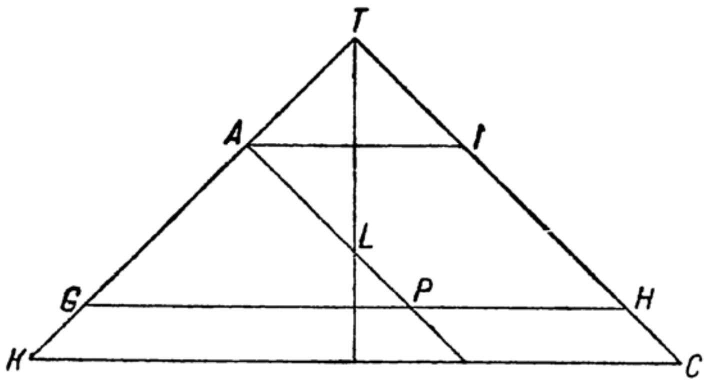
23. Теория конических сечений до Аполлония. Говоря о *делосской задаче*, а также *о построении двух средних пропорциональных*, мы уже сказали, что вопрос этот был решен Менехмом, учеником Эвдокса, посредством пересечения любых двух из кривых

$$ay = x^2, \ bx = y^2, \ xy = ab,$$

кривых, которые он рассматривал, как плоские сечения конуса вращения. Если полагаться на рассказ об этом, то естественно приписать Менехму открытие конических сечений. Известно, кроме того, что для получения последних пользовались — по крайней мере до Аполлония — плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих конической поверхности. В связи с этим эллипсы, параболы и гиперболы назывались *сечениями остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов.*

Спрашивается, обладали ли Менехм и другие математики, предшественники Аполлония, каким-нибудь особенным способом для нахождения свойств сечений, перпендикулярных к образующей конуса? Далее, нельзя ли было с такой же легкостью применить этот метод для доказательства того, что иначе проведенные сечения обладают абсолютно теми же свойствами? Мы не в праве утверждать существование такого метода, ибо в сохранившемся до нас наследии греческой математики мы не встречаем никакого следа подобного способа; да его нелегко было бы и придумать, по крайней мере, поскольку речь идет об эллипсе и гиперболе.

Однако дело можно, как мы думаем, объяснить следующим образом: чтобы найти две средние пропорциональные, можно было пользоваться кривыми, определенными с помощью вышеприведенных уравнений; но подобное определение должно было сопровождаться постулатом, утверждающим, что эти кривые существуют в действительности, или, иными словами, что точки, получаемые на основании этого определения, следуют друг за другом непрерывным образом. Впрочем, этого можно было бы избегнуть, если бы удалось дать для этих кривых построение, основывающееся на предшествующих постулатах; в этом случае было даже непозволительно вводить новые постулаты. Но построение Менехма сводится к нахождению названных кривых, как сечений круговых конусов; непрерывность конической поверхности обеспечивается в этом случае непрерывностью направляющей кривой окружности, а непрерывность кривой сечения обеспечивается, в свою очередь, непрерывностью конической поверхности.



Фиг. 18.

Для этой цели одинаково хороши все способы получения этих кривых, как сечений кругового конуса; и если необходимо убедиться, что кривую, постоянные которой известны, можно рассматривать как сечение конуса, то удобнее всего даже иметь однообразный способ решения этой задачи. Нетрудно видеть, взяв за коническую поверхность, поверхность прямого конуса, а за плоскость сечения — плоскость, перпендикулярную к одной из образующих, что такое решение вполне целесообразно, если рассматривать, прежде всего, параболические сечения, оказывающиеся сечениями прямоугольного конуса.

Пусть T будет вершина конуса, KTC — сечение вдоль оси его, GPH — след сечения, параллельного плоскости основания, y — отрезок на прямой между точкой P и поверхностью конуса, прямой, перпендикулярной к плоскости чертежа в точке P.

Если $AP \perp TK_1$, то

$$y^2 = GP \cdot PH = \sqrt{2} \cdot AP \cdot AI = 2AP \cdot AL.$$

В таком случае сечение вдоль AP, перпендикулярное к плоскости чертежа, можно выразить (если $AP = x$ и $AL = p$) через

$$y^2 = 2px.$$

В соответствии с этим построением еще Архимед называл полупараметр p *отрезком до оси*, т. е. отрезком от вершины A параболы до оси конуса.

Мы видим, таким образом, что Менехм получил, действительно, решение поставленной им себе задачи, — именно представить как коническое сечение кривую, уравнение которой — $y^2=2px$. Для этого стоило было только взять прямоугольный конус, провести сечение перпендикулярно к какой-нибудь образующей его и устроить так, чтоб *отрезок до оси* равнялся p.

Те же удобства представляют соответствующие построения для эллипса и гиперболы, рассматриваемых как сечения, перпендикулярные к одной из образующих остроугольного или тупоугольного конуса вращения. Мы на этот раз воспользуемся чертежом 18, прибавив к нему только обозначение A_1 для точки пересечения AP со второй образующей TC, расположенной в плоскости чертежа; в случае гиперболы это будет точка пересечения AP с продолжением TC за T.

Если $AP=x$, $PA_1=x_1$ и если, кроме того, как и раньше, *отрезок до оси*, или AL, есть полупараметр p, а $AA_1=2a$, то легко найти, что

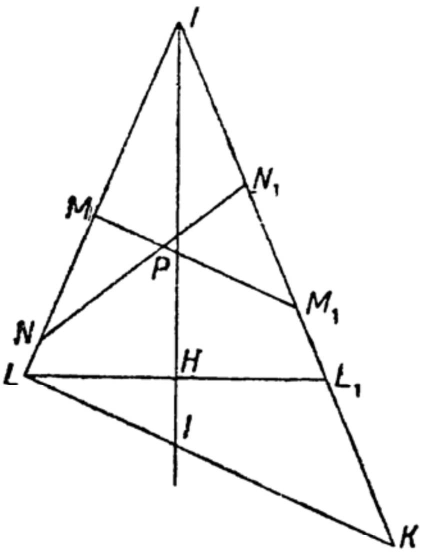
$$y^2=\frac{2AL}{AA_1}\cdot AP\cdot PA_1=\frac{p}{a}\cdot xx_1.$$

Таким уравнением по отношению к осям в том или ином виде (употреблявшееся ими выражение было ближе всего к уравнению $\frac{y^2}{xx_1}=\frac{p}{a}$) древнейшие греческие геометры и пользовались для изучения эллипса и гиперболы (эллипса, если $x+x_1=2a$, гиперболы, если $x_1-x=2a$). Так как *константы* уравнения кривой находят простое изображение на чертеже, то здесь имеется хороший и надежный метод для представления этих кривых, как сечений конуса; нетрудно доказать таким образом, что они являются коническими сечениями для всех значений этих констант.

Однако наше объяснение предполагает, что эти кривые были известны уже раньше и выражались, разумеется, геометрическим образом с помощью вышеупомянутого уравнения. Это можно, повидимому, утверждать относительно эллипса, который могли рассматривать как сечение цилиндра. Что касается гиперболы, именно равносторонней гиперболы, то, как мы указали, ею воспользовались для построения двух средних пропорциональных, хотя выражали ее другим уравнением, ибо ее относили к асимптотам. Применение ее к построению двух средних пропорциональных являлось отличным поводом для исследованя того, не представляет ли эта кривая чего-то уже прежде известного, например окружности, через преобразование с помощью средства геометрической алгебры, первоначального способа определения (détermination) ее. С помощью геометрической алгебры легко получить уравнение, отнесенное к осям, но маловероятно, чтобы была замечена прямая связь между уравнением кривой, отнесенной к асимптотам, и представлением ее, как конического сечения.

Таким образом с помощью сечений, перпендикулярных к какой-нибудь образующей, можно было представить всякую параболу, эллипс или гиперболу как сечение конуса вращения. Разумеется, нетрудно было тогда заметить и обратное, именно, что все получаемые таким образом сечения представляют параболы, эллипсы или гиперболы; и вряд ли от внимания исследователей могло ускользнуть то обстоятельство, что в этом случае особенное положение секущей плоскости не играет никакой роли.

Во всяком случае, тот же метод должен был оказаться применимым и к сечениям другого рода, как это видно из сочинения Архимеда о коноидах и сфероидах; действительно, судя по введению к этому сочинению, уже до Архимеда были знакомы со всеми эллиптическими сечениями прямых конусов, а в самом тексте этого произведения рассматриваются даже эллиптические сечения наклонных конусов с круговым основанием, именно те, которые перпендикулярны к плоскости симметрии конуса. Архимед решает здесь задачу, которую на нашем современном языке можно формулировать следующим образом: *найти круговые сечения конической поверхности второго порядка, главные сечения которой известны*; хотя Архимед ничего не говорит о расположенных аналогичным образом гиперболических сечениях, но так как он не нуждается в них для поставленных им себе задач, то его молчание на этот счет не означает вовсе, что он не был знаком с ними.



Фиг. 19

Архимед при одном случае сообщает нам даже, каким путем он нашел планиметрическое определение (détermination) плоских сечений круговых конусов.

Рассмотрим фиг. 19, где дано сечение конуса плоскостью симметрии (если конус прямой, то это всякое сечение, проходящее через ось); пусть TL и TK будут образующими, расположенными в этой плоскости. а LK — след плоскости кругового основания. Свойства плоского сечения, проекцией которого является NN_1, можно будет определить с помощью следующей планиметрической леммы: если прямые NN_1 и MM_1, пересекающие неизменные прямые LT и TK в M, N, M_1 и N_1 и пересекающиеся между собой в P, сохраняют неизменное направление, то отношение

$$\frac{PM \cdot PM_1}{PN \cdot PN_1}$$

постоянно. Назовем k это отношение. Если теперь MM_1 есть след сечения, параллельного основанию, и если y есть отрезок прямой (проекция которой на плоскости чертежа есть P) между P и поверхностью конуса, то

$$y^2 = PM \cdot PM_1 = k \cdot PN \cdot PN_1,$$

а этим свойством мы охарактеризовали выше эллипс или гиперболу.

Планиметрическая теорема, которой здесь пользуется Архимед, предполагается известной; следовательно, ею наверное пользовались и до Архимеда, чтобы вывести свойства конических сечений. Но согласно так называемой теореме *о степени*, о которой речь у нас будет ниже и которую тоже знал Архимед, эта планиметрическая теорема остается в силе даже тогда, когда точки M, N, M_1, N_1 расположены на любом коническом сечении; следовательно, Архимед мог в вышеупомянутом сочинении о поверхностях вращения второго порядка найти абсолютно тем же самым способом плоские сечения этих поверхностей.

Утверждая, что открытие Менехма заключалось, по существу, в трактовке параболы, эллипса и гиперболы, как конических сечений, мы должны были в то же время допустить, что эти кривые были изучены — по крайней мере отчасти — уже раньше, в частности в связи с делосской проблемой, и что исходным пунктом для этих исследований были те свойства, которые в настоящее время мы выражаем с помощью их простейших уравнений. Серьезным подтверждением этой гипотезы является то обстоятельство, что у всех греческих авторов в основе их исследований лежат главные планиметрические свойства этих кривых, а не рассмотрение их как конических сечений; гипотеза эта, кроме того, объясняет еще и тот факт, что теория конических сечений могла развиться у греков с той быстротой, с которой, как мы знаем, это произошло вскоре после Менехма.

Интерес к этой теории должен был возрасти, когда увидели, что конические сечения можно применить не только к построению двух средних пропорциональных, как у Менехма, но и к решению многочисленных других задач, которые тщетно пытались решить с помощью линейки и циркуля. С этой целью приходилось рассматривать конические сечения как геометрические места, *пространственные места*, по тогдашнему выражению.

Само название древнейшего цитируемого труда о конических сечениях: „Пространственные места", свидетельствует о том значении, какое придавали этому приложению конических сечений. Автором этой утерянной для нас книги был Аристей, несколько старший современник Эвклида. Что название ее имело особенное значение и не было просто наименованием общей теории конических сечений, это ясно видно из того, что появившиеся вскоре затем книги Эвклида о конических сечениях должны были не заменить, а дополнить „Пространственные места" Аристея. Трудом Аристея продолжали пользоваться даже тогда, когда появились „Конические сечения" Аполлония, окончательно вытеснившие книги Эвклида на эту тему.

Употребление, которое сделал из этих кривых Аристей и которое еще более распространилось, когда их теория была развита Эвклидом и Аполлонием, можно будет понять лучше, когда по великому труду Аполлония мы познакомимся с тем, как древние вообще подходили к этим кривым. Кроме того, благодаря названному труду мы сможем, отметив собственные достижения Аполлония, составить себе представления о том, что содержалось уже в сочинении Эвклида. Впрочем, и в данный момент уже мы можем утверждать на основании работ Архимеда, что в этом сочинении излагались достаточно важные вещи, ибо теоремы о конических сечениях, которые Архимед предполагает известными, должны были непременно содержаться в утерянном труде Эвклида. В нем, следовательно, должно было говориться не только об упомянутом уже отнесении конических сечений к их осям, а также о нахождении касательных, сопряженных диаметров и асимптот, но также и о соответствующем отнесении этих сечений к двум сопряженным диаметрам, а также об известном уже Менехму отнесении их к асимптотам. Наконец, там должна была содержаться также теорема о степени, о которой мы говорили.

24. Конические сечения Аполлония. Если Эвклиду мы обязаны знакомством с элементарной геометрией древних, то их теорию конических сечений мы знаем, главным образом, по великому труду Аполлония. Однако из восьми книг этого труда сохранилось лишь семь, из них первые четыре — по-гречески, остальные три — в арабском переводе.

Первые четыре книги содержат то, что называют *начатками теории конических сечений*, т. е. систематическое изложение главных свойств этих сечений; эти свойства служат затем как для приложения теории к решению задач на построение посредством пространственных мест, так и для более специальных исследований дальнейших свойств конических сечений. Наоборот, следующие книги посвящены именно такого рода специальным изысканиям. Так, например, пятая книга, занимающаяся вопросом о *нормалях* к коническим сечениям и о построении нормалей, выходящих из данной точки, представляет наиболее полный сохранившийся до нас образчик приложения конических сечений к построениям и, вместе с тем, образец тонкого теоретического исследования, связанного с подобными построениями.

Но все же объем сведений древних в области конических сечений мы узнаем, главным образом, из первых четырех книг. Поэтому мы остановимся на изложении их довольно подробно не только для того, чтобы дать обзор сведений древних в теории конических сечений, но и для того, чтобы выяснить, каким образом они могли достигнуть полученных ими в этой области результатов.

Рассмотрим же, как устанавливается в *первой книге* основа всей теории.

Хотя исходный пункт работы Аполлония не тот, что у его предшественников, но из его предисловия ясно, что теоремы.

из которых складывается эта основа, в значительной мере — те же самые, какими пользовались его предшественники. Однако в теоремах, относящихся к гиперболе, у Аполлония наблюдается значительный прогресс; хотя он называет обе ветви гиперболы *противолежащими гиперболами*, но он рассматривает их, как одну единственную кривую, достигая, таким образом, в теоремах об эллипсе и гиперболе однородности, которая возможна лишь при таком подходе к вопросу.

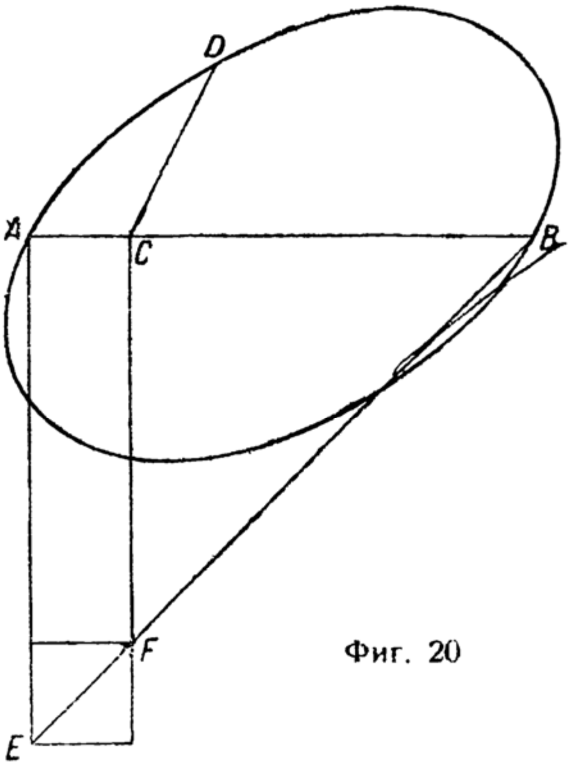
Новизна исходной точки исследования Аполлония заключается в следущем: вместо того чтобы рассматривать сечения конусов вращения плоскостями, находящимися в определенном положении, Аполлоний сразу же приступает к изучению *произвольных плоских сечений произвольных конусов с круговым основанием*. Затем, чтобы связать с этими сечениями некоторое планиметрическое свойство, способное лечь в основу для дальнейшего исследования кривых, Аполлоний обобщает прием, служивший Архимеду при изучении сечений, перпендикулярных к плоскости симметрии конуса. Но благодаря этому обобщению и указанное планиметрическое свойство принимает более общий характер; оно имеет уже место не только при отнесении конического сечения к одной из его осей и к сопряженным полухордам в качестве осей координат, но также и при отнесении кривой к любому ее диаметру и сопряженным с ним хордам. Это обстоятельство нужно иметь в виду, если желать правильно понять ход изложения книги.

Таким образом вначале мы знаем об искомых кривых лишь то, что они обладают вышеупомянутым свойством по отношению к некоторому диаметру и системе сопряженных с ним хорд, образующих, вообще, острый угол с этим диаметром. Затем, в ходе изложения оказывается, что они обладают тем же самым свойством по отношению к бесчисленному множеству диаметров, а в конце книги строятся такие *диаметры, которые перпендикулярны к сопряженным с ними хордам*, и указывается, что отнесенные к этим диаметрам кривые можно рассматривать как *сечения конуса вращения*.

Только теперь обнаруживается полное тождество между кривыми, изучаемыми Аполлонием, и коническими сечениями, рассматривавшимися до него.

Этот конечный результат являлся, собственно, основной целью Аполлония при составлении им своей первой книги. Но попутно он иногда был вынуждаем, иногда же сам пользовался случаем изложить некоторые свойства, которые должны найти приложение в позднейших книгах или которые представляют самостоятельный интерес: так, например, теория *касательных* и проведения их служит введением к основной задаче книги, именно учению о *диаметрах для систем параллельных хорд*.

Чтобы составить себе точное представление о приемах Аполлония, лучше всего сравнить их с *алгебраическим преобразованием* уравнений по отношению к новым системам координат, обычно употребляемым в настоящее время в аналитической геометрии, или же сравнить их вообще с *алгебраическими операциями* аналитической геометрии. Сам Аполлоний обращается лишь к ресурсам *геометрической алгебры*, оказывающейся здесь очень удобной; в этом можно легко убедиться, рассматривая геометрическую форму, служившую Аполлонию для изображения уравнений конических сечений, которые он вывел вначале на основании соображений стереометрического порядка; в этих уравнениях, как мы видели, кривые отнесены к некоторому диаметру и сопряженным с ним полухордам, как к осям координат.

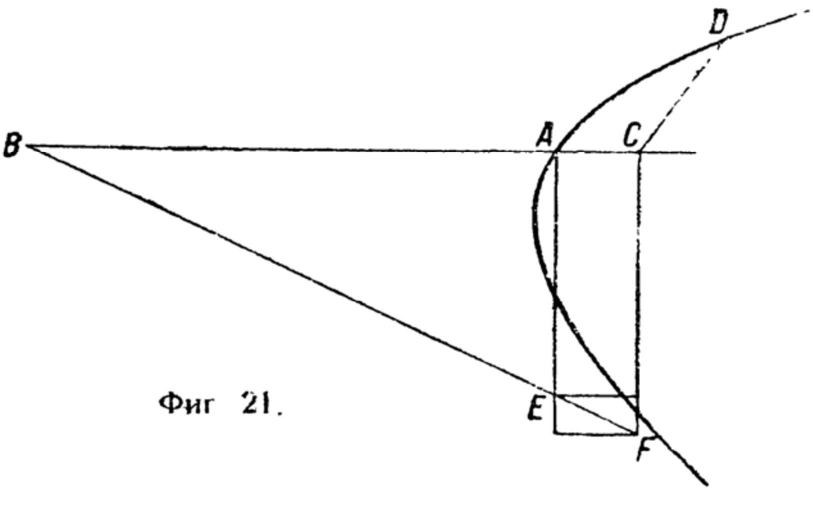


Фиг. 20

Пусть (фиг. 20—21) AB будет диаметром $2a$ эллипса или гиперболы, а CD—половиной сопряженной хорды; квадрат CD^2 должен находиться в постоянном отношении $\frac{p}{a}$ к произведению $AC \cdot CB$, что можно выразить, восставив в A и C перпендикуляры AE и CF к AB и отложив на первом перпендикуляре $AE = 2p$. Если F есть точка пересечения CF и BE, то квадрат, построенный на CD, будет равен прямоугольнику AF, ибо CF равно в этом случае произведению $\frac{p}{a} \cdot CB$. Таким образом построенная здесь фигура представляет геометрико-алгебраическую схему, с помощью которой можно изобразить в точности то, что мы выражаем уравнением:

$$y^2 = \frac{p}{a} x (2a \mp x),$$

в котором x и y представляют соответственно AC и CD. Мы видим, что выраженное таким образом основное свойство тождественно тому, которое знали до Аполлония, и что, следовательно, напрасно ему дают название теоремы Аполлония.



Фиг. 21.

Вышеприведенное построение вполне совпадает с обычными построениями геометрической алгебры, но оно приобрело исключительное значение потому, что послужило основой для новых названий конических сечений, которые Аполлоний дал им после того, как отказался от старого метода получения их, с которым были связаны старые наименования. Действительно, фигура, которой пользуются здесь, тождественна с фигурой, соответствующей преобразованию уравнения в

$$y^2 = 2px \mp \frac{p}{a} x^2$$

для выражения того, что квадрат y^2 прикладывается к отрезку $AE = 2p$, так что стороны избыточного или недостающего прямоугольника находятся в отношении $p : a$ (ср. шестую книгу Эвклида); и согласно с терминами, употреблявшимися при решении уравнений второй степени, изображенная кривая называется *эллипсом или гиперболой* в зависимости от того, недостает ли или находится в избытке прямоугольник EF.

Если нет ни недостатка, ни избытка, тогда перед нами простое прикладывание квадрата y^2 к $2p$; кривая $y^2 = 2px$ получила в этом случае то же самое название *параболы*, что и простое прикладывание площади.

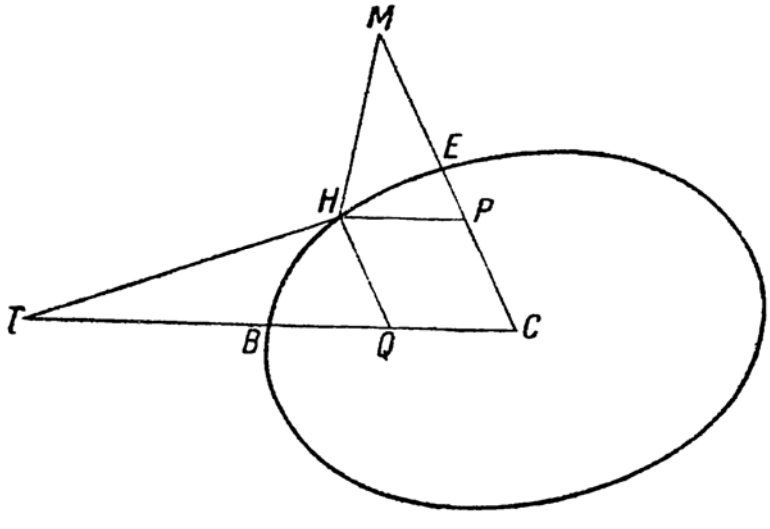
Мы видим, что геометрическая алгебра оказывает здесь такие же услуги, какие стала оказывать впоследствии алгебра в аналитической геометрии. В то время как мы в настоящее время выражаем основное свойство кривой алгебраическим уравнением, Аполлоний выражал его фигурой; а так как эта вспомогательная фигура проведена под прямым углом к оси абсцисс, хотя ординаты пересекают эту ось под другим углом, то она оказывается до известной степени независимой от фигуры, для изучения которой она служит.

Более того, так как алгебраическое уравнение кривой второй степени относительно x, то эта вспомогательная фигура тождественна с той, которой пользуются в элементарной геометрии для изображения и решения уравнения второй степени, — и поэтому, именно как *кривые второго порядка*, конические сечения оказались впоследствии столь пригодными для изучения их методом древних.

Однако геометрическая форма, приданная этим методом самой алгебре, была причиной многочисленных комбинаций между средствами и объектом геометрического исследования, комбинаций, которые должны были оставаться довольно чуждыми аналитической геометрии, в особенности, поскольку последняя стремилась превратить геометрические проблемы целиком в задачи исчисления. Наоборот, древние методы более похожи на современную трактовку аналитической геометрии, при которой учитываются также геометрические значения производимых операций.

Разумеется, мы не в состоянии проследить здесь в подробностях все те представленные в геометрической форме преобразования уравнений кривой, с помощью которых достигают мало-по-малу конечного результата, являющегося главной, как мы сказали, целью книги; но в качестве примера мы приведем все же одну из промежуточных теорем, играющую кардинальную роль как в рассматриваемой книге, так и позже, в вопросах, которым посвящена третья книга.

Коническое сечение с центром C и диаметрами CE и CB рассматривают, как геометрическое место таких точек H, что *четырехугольник $CMHT$, ограниченный этими двумя диаметрами, прямой HM, параллельной хордам, сопряженным с CB, и прямой HT, параллельной хордам, сопряженным с CE, имеет постоянную площадь*. Для нас эта *теорема площадей* носит общий характер, при условии, конечно, что в случае невыпуклых четырехугольников мы приписываем знак + или — каждой из их частей в зависимости от их положения по отношению к периметру; наоборот, Аполлоний должен разложить эту теорему на несколько различных теорем, взаимную связь которых он, однако, отлично понимает. Нетрудно понять, какое приложение делает из этой теоремы автор в первой книге, если обратить внимание на то, что сперва она выводится из уравнения кривой по отношению к одному из диаметров и сопряженным с ним хордам и что затем она приводит соответствующим образом к уравнению кривой по отношению к другому диаметру и сопряженным с ним хордам.



Фиг. 22.

Из первой книги упомянем еще о способе проведения касательных. Для этой операции надо, согласно уравнению кривой, провести через точку (x', y') кривой прямую, все другие точки которой (x, y) удовлетворяют неравенству:

$$\frac{y^2}{2px \mp \frac{p}{a}x^2} > \frac{y'^2}{2px' \mp \frac{p}{a}x'^2},$$

неравенству, в котором для параболы $\frac{p}{a}$ принимает значение нуль. Аполлоний показывает, что для эллипса и гиперболы это имеет место, если касательная и ордината в точке (x', y') делят гармонически диаметр (правда, выражение „гармонический“ — более позднего происхождения). Не воспроизводя здесь этого слишком пространного доказательства, мы ограничимся доказательством того, что прямая, выходящая из точки (x', y') параболы $y^2 = 2px$ и встречающая ось абсцисс в точке $(-x', 0)$, касательна к параболе. Это можно доказать, примерно, так: если (x, y) представляет какую-нибудь точку этой прямой, то

$$\frac{y^2}{(x'+x)^2} = \frac{y'^2}{4x'^2}.$$

Но так как из „Начал“ мы знаем, что средняя геометрическая двух величин меньше их средней арифметической, или что

$$x'x < \left(\frac{x+x'}{2}\right)^2,$$

то

$$\frac{y^2}{x} > \frac{y'^2}{x'}.$$

Убедившись, таким образом, в прочности основ, заложенных Аполлонием в первой книге, мы тем лучше можем понять, как он сумел подняться на такую высоту в других книгах, особенно в третьей и, отчасти, в пятой.

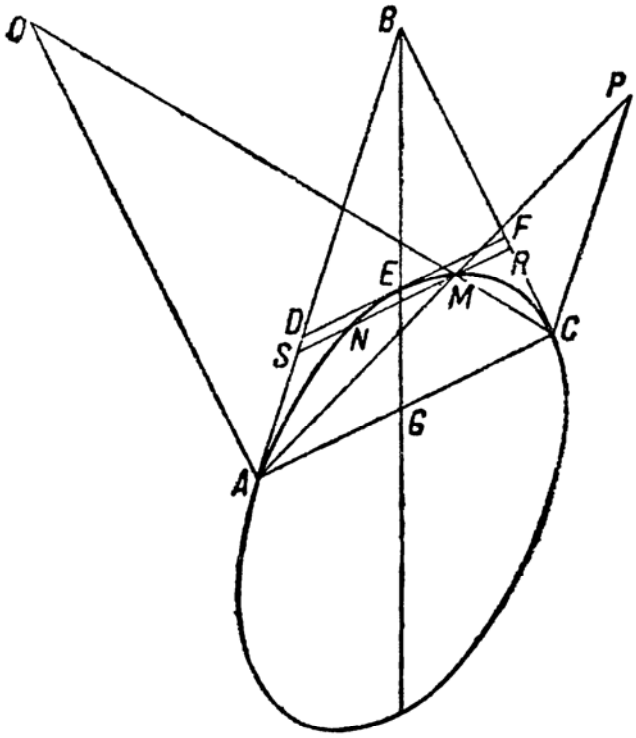
Мы должны ограничиться здесь лишь кратким обзором содержания этих книг.

Во *второй* книге выясняются основные свойства асимптот и сопряженных диаметров. В ней рассматриваются, кроме обеих ветвей какой-нибудь гиперболы, еще и *сопряженные гиперболы*, расположенные в различных углах, образуемых асимптотами, и имеющие диаметры одинаковой длины. Дело в том, что даже диаметрам, не пересекающим кривых, приписываются определенные длины, совпадающие фактически с теми, какими мы пользуемся в настоящее время. В этой книге решаются еще различные задачи о диаметрах и асимптотах, в частности, построение центров и осей данного конического сечения, построение касательной, образующей данный угол с диаметром, проходящим через точку касания, и т. д.

В *третьей* книге рассматриваются, прежде всего, свойства точек кривых, независимые от диаметров и осей. Аполлоний выводит их без труда из названной уже нами *теоремы площадей*, сводящейся фактически к отнесению кривой к двум несопряженным диаметрам. Легко понять, что это является также отличным исходным пунктом для доказательства известной уже Архимеду теоремы о *степени*, — теоремы, относящейся к хордам, имеющим данное, но произвольно выбранное направление. В этой книге встречаются также главные теоремы о полюсах и полярах и, наконец, — получение конического сечения с помощью двух *пучков прямых*, называемых в настоящее время *проективными* или *гомографическими*: вершинами этих пучков являются любые точки A и C кривой, а соответствующие прямые AM и CM характеризуются тем, что они отсекают на прямых, проведенных через C и A параллельно касательным в A и C, такие *отрезки* CP и AQ, что построенный на них прямоугольник обладает постоянной площадью.

Легко заметить, что все эти предложения неполны и даже мало понятны, если рассматривать только одну ветвь гиперболы. Поэтому ясно, какие выгоды представляет рассмотрение обеих ветвей гиперболы, как это начал делать — особенно в третьей книге своего труда,— Аполлоний, который благодаря этому возвышается над всеми прежними исследователями этого вопроса, хотя отдельные теоремы — в более ограниченном виде — и были известны до него.

Другая группа предложений той же книги относится к вопросу о простейших случаях проведения касательных, не пользуясь точками касания. В частности, здесь указывается, как провести касательные к гиперболе, рассматривая их как прямые, которые отсекают на асимптотах, считая от центра, отрезки, образующие прямоугольник с постоянной площадью, или же, как провести касательные к эллипсу и гиперболе, рассматривая их как прямые, отсекающие на параллельных между собой и неизменных касательных, считая от их точек касания, отрезки, образующие прямоугольник с постоянной площадью. Касательные к параболе находятся как прямые, точки пересечения которых с неизменными касательными проходят одновременно пропорциональные отрезки.



Фиг. 23.

Заметим еще здесь, что эти самые теоремы дают нам ключ к пониманию двух других сочинений Аполлония — „О пропорциональном сечении" и „О сечении пространства", в которых он решает с помощью геометрической алгебры и анализирует до мельчайших подробностей — по крайней мере в первом из них — задачи следующего рода: „провести из некоторой точки прямую, которая отсекает на двух данных прямых, считая от двух данных точек, отрезки, находящиеся в данном отношении или образующие прямоугольник с данной площадью". Действительно, решение этих задач с помощью линейки и циркуля приводит, в соответствии с упомянутыми теоремами третьей книги, к нахождению касательной, проведенной из данной внешней точки к некоторому достаточно определенному коническому сечению.

В этой третьей книге имеется еще небольшая замечательная глава, посвященная теории фокусов эллипса и гиперболы, разработанной средствами элементарной геометрии. Положение этих фокусов F и F_1 на главной оси AA_1 определяется на основании того, что прямоугольник $AF \cdot FA_1$ должен равняться ap, где $2a$ означает длину оси, а $2p$ — длину параметра. Опираясь на вышеприведенные теоремы о касательных к эллипсу и гиперболе, можно найти, что отрезок, отсекаемый касательными в A и A_1 на какой-нибудь подвижной касательной, виден из точек F и F_1 под прямым углом; отсюда легко получаются другие важнейшие теоремы.

Странным образом, Аполлоний не говорит ничего о фокусе параболы; впрочем, на основании лемм, вносимых Паппом в одно утерянное сочинение Эвклида, можно предполагать, что вопрос этот был известен, по крайней мере отчасти, Эвклиду.

В *четвертой* книге определяется наибольшее число точек пересечения двух конических сечений. В предисловии Аполлоний определенно заявляет, что его собственный вклад в теорию заключается, главным образом, в том, что он привлек к рассмотрению обе ветви гиперболы — обстоятельство, играющее здесь кардинальную роль. О *пятой* книге мы будем говорить подробнее, когда займемся вопросом о том, как древние изучали пространственные задачи.

В *шестой* книге говорится, с одной стороны, о *подобных конических сечениях*; с другой же, — в ней содержатся некоторые обобщения начатых еще в первой книге построений, относящихся к конусам, проходящим через данные конические сечения.

В *седьмой* книге содержится довольно значительное количество выражений для некоторых функций длин сопряженных диаметров, параметров и т. д. Здесь встречаются некоторые важные теоремы, как, например, следующие: площадь треугольника, образованного двумя сопряженными диаметрами и хордой, соединяющей их концы, — постоянна (в случае гиперболы два рассматриваемых сопряженных диаметра представляют диаметры сопряженных гипербол); сумма или разность квадратов сопряженных диаметров постоянна. В тех случаях, когда такого рода функции не обладают постоянным значением, отыскиваются их максимальные и минимальные значения.

Наконец, в седьмой книге даются доказательства, относящиеся к диоризмам задач, которые должны были быть решены в утерянной для нас *восьмой* книге, — по крайней мере, так говорится в предисловии. На основании этого мы можем предположить, что задачи эти имели целью найти сопряженные диаметры, для которых названные функции имеют данные значения. Найденные в седьмой книге выражения для этих функций непосредственно давали бы в этом случае уравнения, необходимые для решения задач.

В таком именно духе и была восстановлена Галлеем (Halley) восьмая книга.

25. Пространственные места и задачи. Как мы уже указали, первоначальной целью теории конических сечений было получение геометрических мест, пригодных при решении задач, для которых оказались недостаточными прямая и круг. Задачи, решаемые с помощью прямой и круга, называются *плоскими задачами*, а прямая и круг, рассматриваемые как геометрические места, называются *плоскими местами*. В позднейшей древности предполагали, что это последнее название — первоначальное, ибо первоначально рассматриваемые линии (прямую и круг) характеризовали тем, что они расположены в плоскости. Но с такой же вероятностью можно допустить, что название плоских относилось первоначально к задачам, которые зависят от уравнений не выше второй степени и которые, следовательно, представляются в геометрической алгебре, в плоскости, отношениями между площадями.

Если принять это последнее предположение, то название пространственных задач должно было применяться первоначально к задачам, зависящим от уравнений третьей степени и выражающимся отношениями между параллелепипедами. Что касается термина *пространственные места*, то он означает геометрические места, представленные коническими сечениями, и можно предположить, что свое название они получили оттого, что предназначались для решения пространственных задач. Однако в позднегреческую эпоху допускали, наоборот, что название *пространственные места* — первоначальное и что оно происходит от стереометрического определения конических сечений.

К несчастью, сочинение Аристея, в котором конические сечения, несомненно, рассматривались как геометрические места, оказалось утерянным, а о позднейших трудах, преследовавших ту же самую цель, мы ничего не знаем. Но так как теория конических сечений Аполлония разбирает тот же самый вопрос с другой стороны, то из нее можно сделать вывод, какие были известны или какие, по крайней мере, можно было найти пространственные места, когда требовалось применить их к какой-нибудь задаче. Уже из первой книги Аполлония видно, что так оно должно было быть в том случае, когда некоторые данные прямые можно было сразу рассматривать как сопряженные диаметры, и даже в более сложных случаях: действительно, в теореме площадей кривую относят к двум несопряженным диаметрам.

Но третья книга дает нам возможность проникнуть глубже в суть вопроса благодаря, во-первых, своему более общему характеру, а во-вторых, благодаря тому, что Аполлоний определенно указывает поставленную им себе здесь цель. Пользуясь в этой книге более совершенными методами, благодаря введению обеих ветвей гиперболы, Аполлоний может, по собственному его признанию, исправить недостатки прежнего способа определения пространственных мест. Среди этих мест определенно называется „*геометрическое место к трем или четырем прямым*“; если x, y, z, u означают расстояния какой-нибудь точки от четырех неизменных прямых, — расстояния, измеряемые на линиях, имеющих определенные направления, а K представляет некоторую постоянную, то геометрическое место к четырем прямым выразится уравнением:

$$xz = Kyu,$$

а геометрическое место к трем прямым — это кривая, выражаемая уравнением:

$$xz = Ky^2.$$

Судя по словам Аполлония, несомненно, существовали более старые, но неполные доказательства того, что этими геометрическими местами являются конические сечения; впрочем, он должен был считать их настолько известными своим читателям, что последние и без повторения этих доказательств могли видеть, в чем их дополняет третья книга аполлониева труда. Таким образом в этой книге давались, несомненно, дополнения к тем предпосылкам, на которые раньше опирались в названных доказательствах и на которые должны были опираться и в дальнейшем. Но не зная первоначального способа определения геометрических мест, мы вынуждены в своих выводах об этом исходить только из книги Аполлония. Для случая геометрического места к трем прямым это нетрудно. Любое коническое сечение является таким местом, и сам Аполлоний (в ходе своего вышеупомянутого доказательства для получения конического сечения с помощью проективных пучков) выводит этот факт из частного случая теоремы о степени. Любое коническое сечение может точно таким же образом рассматриваться как геометрическое место к четырем прямым: это вытекает из общей теоремы о степени для случая, когда две противоположные прямые $y=0$ и $u=0$ параллельны между собой.

Эти результаты представляют уже значительную ценность. Но чтобы лучше понять это, сравним их с тем представлением *пространственного места*, которое дает нам аналитическая геометрия. Взяв за начало какую-нибудь точку геометрического места, мы получаем уравнение вида:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=0,$$

которому можно придать вид:

$$x(ax+by+d)=-cy\left(y+\frac{e}{c}\right).$$

Нетрудно видеть, что кривая представлена здесь как геометрическое место к четырем прямым, из которых две противоположные параллельны.

Так как производившаяся древними операция перемещения площадей и введение коэфициентов посредством теории пропорций соответствуют в точности нашему анализу выражений второй степени, то современное представление кривой общим уравнением второй степени имеет то же геометрическое значение, что и античная характеристика ее, как геометрического места к четырем прямым, из которых две противоположные параллельны между собой. Впрочем, к этому случаю можно было привести также самое общее геометрическое место к четырем прямым.

Специальное указание Аполлония на введенное им при рассмотрении этих вопросов усовершенствование достаточно свидетельствует о том крупном значении и о том внимании, которое уделяли геометрическим местам к четырем и трем прямым.

С этим вопросом о геометрических местах к четырем прямым связано, может быть, еще другое утраченное произведение Аполлния, именно „Трактат об определенном сечении“. Действительно, известно, что в этой книге решалась и тщательно разбиралась задача о построении на некоторой прямой точек, расстояния которых от двух пар точек, расположенных на той же самой прямой, образуют прямоугольники, находящиеся между собой в некотором данном отношении. Задача эта легко сводится к нахождению точек пересечения некоторой прямой и некоторого геометрического места к четырем прямым, причем все четыре расстояния берутся параллельными данной прямой. Если рассматривать дело таким образом, то задача нахождения геометрического места к четырем прямым совпадает с теоремой об инволюции точек пересечения прямой с коническим сечением и с противоположными сторонами вписанного в него четыреугольника, теоремой, вновь найденной впоследствии Дезаргом (Desargues) и носящей его имя. Нет сомнения, что в „Трактате об определенном сечении“ содержались некоторые важные части современной теории инволюции.

Таким образом первоначально, как мы думаем, *пространственными задачами* называли задачи, которые зависели от уравнений третьей степени и которые представляли стереометрическим образом; впоследствии же так стали называть решения с помощью конических сечений, а также под конец и задачи, которые, выраженные аналитически, зависели бы от уравнений четвертой степени.

Наипростейшая пространственная задача относится к двучленному кубическому уравнению; мы уже познакомились с ней в связи с задачей удвоения куба, и мы могли одновременно с этим убедиться в том, что первоначально пользование коническими сечениями было связано с решением этого вопроса. Мы имеем далее другие образцы вопросов этого рода в случае задачи о трисекции угла или о вставках, к которым сводится эта трисекция; мы указали, кроме того, что Архимед в своем „Трактате о спиралях“ тоже пользуется при разных случаях этими самыми вставками. Папп сообщает нам, как производили эти вставки с помощью конических сечений.

Но наиболее важными примерами решения пространственных задач с помощью конических сечений, относящимися к поре высшего расцвета греческой математики, являются дошедший до нас анализ уравнения, к которому Архимед сводит свою проблему деления шара (см. выше), и затем приводимое в пятой книге Аполлония построение нормали к коническому сечению из данной точки. Особенный интерес представляют эти решения благодаря той тщательности, с которой рассматриваются условия возможности задачи, а также благодаря заботливому разбору числа решений, получаемых в различных случаях в зависимости от различных значений, принимаемых данными величинами. Нетрудно здесь убедиться, что построение с помощью конических сечений является не столько средством (между прочим, весьма недостаточным) найти искомые величины, сколько, скорее, превосходным теоретическим методом выяснить случаи, когда они существуют, — что находится в полном соответствии со всем сказанным уже нами относительно цели геометрических построений у греков. Нахождение полученных таким образом максимальных и минимальных значений для данных величин приводит к важным геометрическим теоремам, являвшимся главной целью исследования.

Мы уже видели (стр. 123), что Архимед сводил задачу деления шара к уравнению:

$$DB^2 : DX^2 = XZ : TZ,$$

где D, B, T, Z — данные точки, а X — искомая на некоторой прямой точка. В сохранившейся до нас рукописи, о которой мы уже говорили и которая, может быть, принадлежит самому Архимеду, являясь приложением ко второй книге его труда о шаре и цилиндре, — задача эта решается, примерно, следующим образом. Напишем его уравнение в виде $\frac{b^2}{x^2} = \frac{a-x}{c}$, затем приравняем оба эти частных $\frac{e}{y}$, где e представляет какой-нибудь отрезок. Тогда x и y можно определить, как координаты одной из точек пересечения параболы $x^2 = \frac{b^2}{e} y$ с гиперболой $(a-x)\, y = ce$.

В приложениях к делению шара постоянные, обозначенные нами через a и c, положительны, и надо определить такое значение x, чтобы $0 < x < \frac{2}{3}\, a$, ибо X должно находиться между D и B, концами диаметра шара $DB = \frac{2}{3}\, DZ$; но полученное геометрическое представление уравнения, благодаря различным положениям, которые могут занимать Z, T или же искомая точка X, охватывает все уравнения вида:

$$x^3 + ax^2 + b = 0,$$

и задачу можно поставить таким образом, что все корни будут годиться. Здесь перед нами убедительный пример того, о чем мы уже говорили раньше: хотя греки были незнакомы с нашим положительным и отрицательным знаками, но влияние этого недостатка сильно ослаблялось геометрическим способом представления.

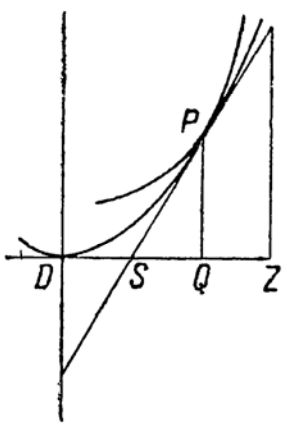
Что касается предельных условий, то в отдельных задачах они будут зависеть отчасти от того, лежит ли, или не лежит точка X в интервале, требуемом предложенной задачей. Но особенное значение во всех этих вопросах имеют предельные случаи, когда конические сечения соприкасаются между собой, когда, следовательно, два корня уравнения равны между собой, ибо тут перед нами переход между случаями, когда оба корня действительны, когда, значит, по тогдашним воззрениям, они могли существовать, или не могли.

Сохранившийся до нас отрывок показывает, что этот переходный случай имеет место, когда $x = \frac{2}{3} a$; когда, следовательно, $b^2c = \frac{4}{27}\, a^3$. Наоборот, если $x \lesseqgtr \frac{2}{3}\, a$, то $b^2c < \frac{4}{27}\, a^3$, что соответствует двум решениям.

Это нетрудно доказать, основываясь на теоремах о касательных к коническим сечениям; действительно, если касательная к параболе в точке P является в то же время касательной к гиперболе с асимптотами $y=0$ и $x=a$, то P будет серединой отрезка касательной между асимптотами; кроме того, точка S, место пересечения касательной с осью абсцисс, являющейся, в свою очередь, касательной к вершине параболы, будет серединой расстояния между точкой P и точкой пересечения касательной с осью ординат. Отсюда следует, что DQ, абсцисса точки P, равна $\frac{2}{3}DZ$. Нетрудно убедиться, что, как указывает Архимед, условие возможности

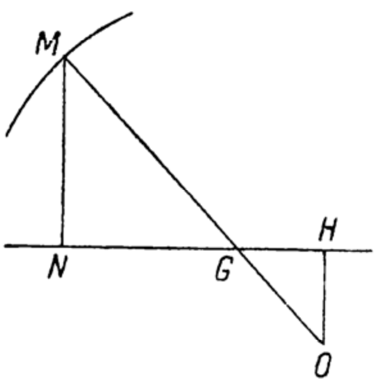
$$b^2c < \frac{4}{27}a^3$$

действительно выполняется (в задаче деления шара) в том случае, когда точка B совпадает с Q, а T лежит между Q и Z. Однако получается только одно решение, ибо точки X хотя и могут упасть по обе стороны от B, но для частной задачи, интересующей Архимеда, годится лишь точка, падающая на DB.



Фиг. 24.

Таким образом Архимед сводит свою задачу о делении шара к весьма общему кубическому уравнению; это же уравнение, как было нами указано (стр. 130), лежит в основе доказательства последней теоремы второй книги труда о шаре и цилиндре; Архимед, кроме того, пользуется им в некоторых других вопросах, касающихся нахождения сегментов эллипсоидов и гиперболоидов данного объема.



Фиг. 25.

Наоборот, нахождение Аполлонием нормалей представляет собой тип задач, решаемых непосредственно с помощью конических сечений, без обращения к каким бы то ни было уравнениям. Мы ограничимся тем, что приведем здесь решение этой задачи на языке современной алгебраической символики. Пусть O будет какая-нибудь точка, (x_1, y_1) прямой, служащей нормалью к коническому сечению в точке M (x, y), G — точка пересечения этой нормали с главной осью, N — проекция точки M на ту ось, которую мы примем за ось абсцисс. Чтобы сразу охватить все частные случаи, рассматриваемые Аполлонием, мы напишем, пользуясь теперешними знаками $+$ и $-$,

$$\frac{y}{-y_1} = \frac{NG}{x_1 - x - NG},$$

NG — это то, что теперь называют субнормалью, и в случае параболы она равна p. Поэтому найденное нами уравнение можно написать в виде:

$$xy - (x_1 - p)\,y - y_1 p = 0.$$

Для эллипса и гиперболы субнормаль (если принять центр кривой за начало координат) равна соответственно $\mp \frac{b^2}{a^2} x$, и наше уравнение примет тогда вид:

$$\left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right) xy - x_1 y \pm \frac{b^2}{a^2} y_1 x = 0.$$

Если (x_1, y_1) дана, то точка (x, y) будет в обоих случаях лежать на гиперболе; точки пересечения этой гиперболы и данной кривой будут основаниями нормалей, проведенных из точки (x_1, y_1).

Аполлоний пользуется как раз этим способом определения нормали, чтобы рассмотреть подробно, сколько нормалей можно провести из различных точек плоскости. При обсуждении этого вопроса главная цель его — найти те точки (x_1, y_1), соответствующие гиперболы которых касательны к данной кривой; действительно, геометрическое место этих точек является границей между двумя такими областями плоскости, что из точек одной можно провести двумя нормалями больше, чем из точек другой. Отыскивая условия вышеназванного касания, Аполлоний находит, как можно определить ординату какой-нибудь точки этого геометрического места, зная ее абсциссу. Кривая представляет то, что теперь называют *разверткой* конического сечения; но ни у Аполлония, ни у другого какого-нибудь древнего автора нет — за исключением приведенного только что места — никакого специального исследования по этому вопросу.

26. Вычислительная геометрия. На примере того, что мы назвали интегрированиями Архимеда, на примере аполлониевой теории конических сечений и сделанных из нее греками приложений к решению вопросов, зависящих, выражаясь языком нашего анализа, от уравнений третьей и четвертой степени, мы можем убедиться, до какой высоты древние подняли геометрию, а также другие разрабатывавшиеся ими области математики, облеченные в геометрическую форму. Мы видели также, с какой строгостью стремились обеспечить всеобщую значимость математики. Но наряду с этим нам пришлось не раз указывать на то, что под влиянием этого стремления к общезначимым результатам древние обращали слишком мало внимания на развитие вычисления, благодаря которому математика и могла только получить практическое приложение.

Разумеется, древние не пренебрегали совершенно этой стороной дела: они продолжали применять к измерению земли геометрические предложения, заимствованные у египетских землемеров, прибавив к этому еще ряд простейших, открытых ими самими теорем. Было бы, разумеется, нелепо допустить, что проницательные математики, сумевшие придать полученным ими результатам столь общую форму, не понимали практического значения этих результатов, в частности, для решения представлявшихся в практике числовых проблем. Ученые, разработавшие столь утонченную теорию пропорций, не могли, конечно, не знать, как решаются, скажем, задачи на простое или сложное тройное правило.

Если судить по собранию задач Герона (у которого, между прочим, можно встретить одну геометрическую теорему, имевшую непосредственнейшее приложение на практике — именно вычисление площади треугольника по трем сторонам его), то древние применяли числовым образом, по крайней мере, простейшие теоремы планиметрии и стереометрии и решали уравнения второй степени. Но ограниченная область геометрии, откуда черпались эти приложения, а также незначительная степень точности, которой довольствовался в своих выкладках Герон, достаточно объясняют, почему мы имеем право ставить невысоко эту сторону греческой математики.

Этот низкий уровень приложений математики к практическим выкладкам, наблюдаемый в эпоху расцвета греческой геометрии, объясняется не только недостатком способности к вычислениям, о котором мы говорили уже выше (стр. 51), но также тем, что сами результаты этой геометрии не особенно годились для таких приложений. Задачи, как мы знаем, решались с помощью построений, которые, разумеется, можно было нередко превращать в вычислительные операции, как это и делалось, наверное, задолго до Герона. Однако даже в рамках элементарной геометрии существует одна важная область, в которой превращение этого рода невозможно, — именно область задач, когда величинами, определяемыми друг через друга, оказываются не только отрезки, площади, или объемы, а также и углы. Иными словами, даже в лучшие дни александрийской эпохи греки не имели еще *тригонометрии*, — пробел, который должны были только начать заполнять великие геометры и астрономы той эпохи.

Это не значит, конечно, что до того математики совершенно не умели решать вопросов, решаемых в настоящее время тригонометрическим путем. Доказательством тому являются 12 и 13 теоремы второй книги „Начал", выражающие, по существу, то же самое, что наша формула

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A\,,$$

и заменяющие ее во всех тех общих вопросах, когда угла A не дают и не ищут в *угловых мерах*. О том, как представляли себе тогда связь между величиной углов и отношением отрезков, можно судить по предложениям эвклидовских „Data", указывающим, что при известных условиях треугольник бывает дан по форме. Согласно предложению 80 этого сочинения это относится, например, к треугольнику, один угол которого дан, а также дано отношение между прямоугольником (построенным) на заключающих его сторонах и квадратом противоположной стороны. В этом случае с помощью данных величин можно определить остальные углы треугольника и отношения между его сторонами.

Впрочем, в „Data" имеются еще более сложные предложения этого рода, но для числовых выкладок они пригодны лишь тогда, когда в том или ином виде определена зависимость между некоторым данным в угловой мере углом и отношением отрезков. Подобную зависимость знали для центральных углов некоторых правильных многоугольников, стороны которых в этом случае умели построить и вычислить, — но вычислениями этого рода, повидимому, не интересовались в течение, долгого времени, и, кроме того, вопрос шел лишь о некоторых совершенно специальных значениях углов.

Из всего этого можно сделать тот вывод, что начатое Эвдоксом приложение математики к астрономии не привело еще во времена Эвклида к особенно точным вычислениям. Действительно, более или менее точному наблюдению доступны как раз углы, а математики не умели ими пользоваться, благодаря чему, в свою очередь, совершенно не интересовались такого рода вычислениями.

В школе Эвдокса, а особенно в школе Платона, это равнодушие наверное, оправдывали так же, как и пренебрежение подробным вычислением иррациональных величин: так как в эмпирических определениях (déterminations) невозможна математическая точность, то приходится довольствоваться грубым определением. Если из подобных определений делали постулаты, то оставалось только вывести из них с абсолютной строгостью результаты, вытекающие из раз принятых гипотез.

Хотя, таким образом, стали пренебрегать измерением углов, но в астрономии никак нельзя было отделаться от вопроса о величинах углов; величины эти могли представляться, например, как отношения между временами, требующимися для описания равномерным движением какой-нибудь дуги и целой окружности. Примером того, как применяли тогда вычисление этого рода к точным математическим дедукциям, и примером в то же время неточности тогдашних измерений углов, является исследование Аристархом самосским расстояний и величин солнца и луны. В этом сохранившемся до нас исследовании — для которого у Аристарха были предшественники, в частности Эвдокс — пользуются для определения расстояния луны от земли радиусом земной тени — радиусом, отношение которого к радиусу луны вычисляют на основании продолжительности затмения—и угловым расстоянием между солнцем и луной в тот момент, когда освещена ровно половина диска последней. Затем, основываясь на теории пропорций, определяют отношения между расстояниями и радиусами, вышеназванный же угол находят в угловых мерах. Согласно Аристарху, его дополнение равно 3°, откуда он выводит, что расстояние солнца от земли в 19 раз больше расстояния ее от луны; переведенный на наш тригонометрический язык результат этот означает, что $\sin 3° = \frac{1}{19}$.

Чтобы получить его, Аристарх пользуется леммой, которую тригонометрически можно выразить следующим образом: если угол ϑ будет возрастать от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то отношение $\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}$ будет возрастать, а отношение $\frac{\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta}$ будет убывать. Он считает эту теорему общеизвестной, и мы без труда усматриваем связь ее с некоторыми предшествующими изысканиями, значение которых становится от этого еще более ясным: действительно, $\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}$ и $\frac{\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta}$ пропорциональны радиусу-вектору и абсциссе *квадратрисы* (см. стр. 62), так что приведенные нами результаты оказывались естественным образом связанными с изучением этой кривой.

Далее, благодаря вычислению сторон правильных многоугольников, знали, что $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, или же, так как $\sqrt{2}>\frac{7}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}<\frac{5}{12}$. Отсюда можно вывести для определения $\sin 3^\circ$ или $\sin\frac{\pi}{60}$:

$$\sin\frac{\pi}{60}>\frac{1}{10}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{20}$$

и

$$\sin\frac{\pi}{60}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{60}<\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{18};$$

откуда приближенно

$$\sin 3^\circ=\frac{1}{19}.$$

Благодаря двойному неравенству

$$\sin V<\vartheta<\operatorname{tg}\vartheta,$$

которое греки выражали следующим образом: периметр вписанного многоугольника меньше, а периметр описанного многоугольника больше длины окружности — этот метод можно применить также для приближенного определения значения π. Таким путем получается:

$$3<\pi<3^1/_2.$$

Вычисления этого рода умели производить уже во времена Антифона и Бризона (стр. 58—59), а зная ошибки последних, научились избегать их. Точно так же в эпоху Эвклида обладали геометрическими методами, позволявшими получать более точные результаты; методы эти состояли в вычислении периметра правильных многоугольников со все большим числом сторон. Правда, Эвклид оставляет нетронутыми иррациональности в выражении сторон многоугольника, ограничиваясь лишь теми случаями, которые ему нужны для построения правильных многогранников, и он совершенно не указывает в своем труде всего того, что можно сделать в этом направлении; но весьма вероятно, что исследователи не ограничивались одними только сторонами указанных многоугольников. К этому же выводу можно притти, рассматривая то, как Аристарх пользуется стороной правильного описанного восьмиугольника $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$.

Но чтобы использовать до конца геометрические ресурсы, которыми располагали тогда, либо для более точного определения π, либо для более строгого приложения измерений углов, — необходимо было сначала, чтобы в том почувствовалась потребность, и необходима была далее огромная энергия, чтобы довести до конца выкладки, в которых приходилось иметь дело с извлечениями различных квадратных корней. Потребность эта почувствовалась с особенной силой лишь после более точного определения наклона эклиптики Эратосфеном и при измерении им величины градуса меридиана. В этом последнем вопросе, чтобы применить к вычислению диаметра земли разность высот полюса в двух местах, расположенных приблизительно на одном и том же меридиане, и расстояние между этими местами, необходимо было иметь достаточно точное значение π. Архимеду в его „Измерении окружности" удалось справиться со всеми этими трудностями; поэтому мы дадим здесь краткое изложение названного труда, хотя, к сожалению, в нем не содержится никакого прямого указания на то, как Архимед справился с наибольшей из указанных трудностей, именно с извлечением крадратных корней.

Архимед сначала показывает путем доказательства методом исчерпывания, что площадь круга равна площади треугольника, основанием которого является длина окружности, а высотой — радиус круга. Таким образом квадратура круга сводится к вычислению длины окружности. Затем он доказывает, что отношение длины окружности к диаметру, т. е. число, обозначаемое нами теперь буквой π, меньше $3^1/_7$ и больше $3^{10}/_{71}$: действительно, периметр вписанного 96-угольника больше $3\frac{10}{71}d$, а периметр описанного 96-угольника меньше $3\frac{1}{7}d$, где d означает диаметр круга.

Архимед приходит к этому результату, определяя на основании отношений между сторонами прямоугольного треугольника с углом x отношения между сторонами прямоугольного треугольника с углом $\frac{1}{2}x$. Когда затем он разыскивает верхний предел для длины окружности, то он придает треугольникам с углами x и $\frac{1}{2}x$ общий катет, прилежащий к этим углам; когда же он разыскивает нижний предел, то, наоборот, он берет у этих треугольников общую гипотенузу; но в обоих случаях можно, пользуясь нашей тригонометрической символикой, выразить зависимость между отношениями через:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1+\cos x}\left(\text{или } \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x + 1}\right).$$

Однако в приложениях не наблюдается указанного единообразия: действительно, в одном случае он употребляет верхние пределы для квадратных корней, получающихся при переходе между отношениями различных сторон того же самого прямоугольного треугольника ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), в другом же случае он употребляет нижние пределы, и пределы эти выражаются различно образованными приближенными значениями.

Взяв исходным пунктом прямоугольный треугольник с углом $\frac{\pi}{6}$ и переходя от него к новым треугольникам, Архимед находит, пользуясь нашими обозначениями, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{96} < \frac{153}{4673^1/_2}$$

и

$$\sin\frac{\pi}{96} > \frac{66}{2017^1/_4},$$

получая отсюда вышеуказанные пределы для π.

После того как начало было сделано Архимедом, Аполлоний мог дать уж более точное определение π, и, может быть, ему именно принадлежит значение 3,1416. С этой именно степенью точности определялось впоследствии π в таблицах хорд дуг Птолемея и у индусских авторов.

В труде Архимеда содержатся вычисления нижних пределов $\sin\frac{\pi}{n}$ и верхних пределов $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ для $n = 6, 12, 24, 48, 96$; последнее дает также пригодный верхний предел $\sin\frac{\pi}{96}$, и сочинение Аристарха показывает, что им умели пользоваться.

Произведенное Аполлонием вычисление π должно было привести к еще более точному вычислению синуса небольшой дуги или той величины, значения которой, собранные в таблицы, были сохранены для нас позднейшими греческими астрономами — мы имеем в виду *хорду* двойной дуге. Чтобы построить полную таблицу хорд дуг, кратных данной небольшой дуге, достаточно знать лишь теорему о вписанных четыреугольниках — так называемую теперь *птоломееву теорему*, названную так потому, что Птолемей пользуется именно ею для вычисления своей таблицы хорд — или же знать какую-нибудь другую аналогичную теорему. Подобная теорема могла быть легко открыта во времена Архимеда и Аполлония или после них, когда возникла насущная потребность в таблице хорд. Однако главная трудность заключалась и здесь, разумеется, в достаточно точном извлечении квадратных корней. Но именно эта трудность и явилась причиной усовершенствования употреблявшихся методов; как мы уже сказали раньше (стр. 54), достигнутые здесь успехи были связаны с введением шестидесятиричных дробей.

Первая достоверно засвидетельствованная таблица хорд дуг относится ко второму веку до начала н. э.; составленная великим астрономом Гиппархом, она, как и другая, более близкая к нам по времени, таблица Менелая, была утеряна. Зато до нас сохранилась таблица хорд, содержащаяся в птолемеевом Альмагесте и составленная через каждые полградуса до дуги в 180°. Основанная на предшествовавших ей таблицах, она, несомненно, была более полной и точной, а так как синус какой-нибудь дуги есть половина хорды двойной дуги, то эта таблица играла ту же роль, какую играет таблица синусов дуг до 90°, составленная через каждую четверть градуса. Диаметр окружности принимается равным 120, хорды выражены по шестидесятиричной системе в целых, минутах и секундах, т. е. как и при общепринятой системе измерения углов — в дробях, имеющих знаменателями 60 и 60^2; таким образом отношение хорд к диаметру дано в дробях с знаменателем 432 000. В целях интерполяции прибавлены тридцатые доли разностей между двумя последовательными хордами, доли, соответствующие дуговым разницам в одну минуту.

При вычислении этой таблицы Птолемей пользуется, главным образом, теоремой о вписанном четыреугольнике. С ее помощью можно непосредственно вычислить хорду суммы или разности двух дуг; таким путем можно было бы получить значение хорды двойной или половинной дуги, но Птолемей выводит это последнее значение из особенного построения, соответствующего нашей формуле

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Исходя из известных хорд, можно вычислить таким путем хорды 1° 30′ и 0°45′; с помощью двух этих хорд вычисляют затем хорду дуги в 1° посредством своего рода интерполяции, основывающейся на том, что отношение хорды к дуге убывает вместе с возрастанием дуги, интерполяции, сводящейся к неравенствам:

$$\frac{\text{хорда } 0°45'}{0°\,45'}>\frac{\text{хорда } 1°}{1°}>\frac{\text{хорда } 1°\,30'}{1°\,30'}.$$

Птолемей дает изящное доказательство употребленной здесь геометрической теоремы, которой пользовался уже Аристарх. Но раз найдена хорда дуги в 1°, то с помощью птолемеевой теоремы можно последовательно вычислить все другие хорды.

Так как таблица хорд играет ту же роль, что и таблица синусов, то при желании можно, пользуясь этой таблицей и пифагоровой теоремой, вычислить любой элемент (сторону или угол) плоского прямоугольного треугольника, два других элемента которого (из коих один — это сторона) даны. Таким образом можно получить — хотя и с помощью довольно утомительных выкладок — все те результаты, к которым приводит плоская тригонометрия. В Альмагесте имеется ряд образчиков подобных вычислений, но астрономам было особенно важно уметь производить вычисления сферических треугольников, а для этого необходимо было раньше всего создать сферическую геометрию.

В приложениях своей таблицы Птолемей пользуется одним выражением для двух дуг x и y, сумму которых и отношение хорд которых он знает; представленное геометрическим образом, оно соответствует нашей формуле:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y)=\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y).$$

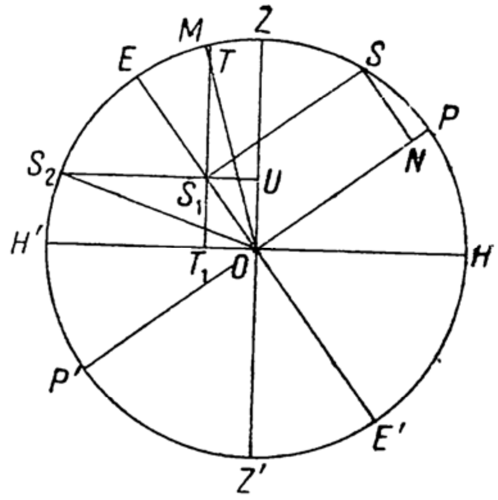
Но так как в его распоряжении имеется лишь таблица хорд, то не только необходимо свести к ней наш второй член, но приходится также вывести отношение катета прямоугольного треугольника к гипотенузе его из отношения обоих катетов, как всякий раз, когда приходится определить угол по его тангенсу.

27. Сферическая геометрия. Из области сферической геометрии мы имеем в „Началах“ лишь теорему об отношении между объемами различных шаров, к которой Архимед, как известно, прибавил теоремы, дававшие точное выражение поверхности и объема шара; но астрономы не могли ограничиться этим, — ведь им нужны были средства для определения положения на шаре точек, — звезд на небе, мест на земле. Для этого они стали относить все к некоторому большому кругу, считавшемуся так или иначе известным, — горизонту, экватору или эклиптике на небе, экватору на земле. По существу, способ этот не отличается от употребления нами теперь обыкновенных сферических координат. Когда Эратосфен, желая вычислить размеры земли, измерял расстояние между двумя расположенными на одном меридиане местами, разность широт которых известна, то он пользовался этим способом. Правда, названия широты и долготы встречаются лишь в „Географии“ Птолемея. Мы должны, впрочем, напомнить здесь, что употребляемое в двенадцатой книге „Начал“ деление шара (см. стр. 121) в точности соответствует делению с помощью подобных координат.

На изготовленном рукой токаря шаре можно продемонстрировать более или менее прямое приложение сферических координат для изображения небесных или земных точек. Нет сомнения, что так и поступали для небесных точек.

Благодаря исключительному развитию геометрии у греков они в состоянии были решать и более трудные задачи, как, например, задачу отображения шара на плоскости; они делали даже различные приложения столь важной и интересной с геометрической точки зрения стереографической проекции. Эта проекция состоит, как известно, в центральной проекции шара из некоторой определенной точки его поверхности на большой круг, для которого эта точка является полюсом. Ее характерными особенностями является то, во-первых, что проекцией каждого проведенного на шаре круга является круг на плоскости и, во-вторых, что углы сохраняют свою величину.

По сохранившимся до нас приложениям этого вида проекции, мы знаем, что грекам было известно, по крайней мере, первое из этих свойств, тесно связанное с теорией двух систем круговых сечений наклонного конуса. Уже Архимед занимался определением этих круговых сечений, но гораздо обстоятельнее развил теорию различных сечений одного и того же конуса Аполлоний. Таким образом стереографическую проекцию можно рассматривать как побочный результат теорий Архимеда и Аполлония. Во времена Гиппарха ее приложили к прибору, служившему для определения времени ночью по высоте в данный момент некоторой известной звезды *. Для этого пользовались двумя дисками: на одном из них находились проекции известных звезд, на другом — проекции горизонта и параллельных ему кругов (альмункатаратов), причем центром проекции служил небесный южный полюс; при пользовании этим прибором поворачивали просто один из дисков вокруг изображения северного полюса, пока наблюдаемая звезда не оказывалась на альмункатарате, соответствующем ее высоте.



Фиг. 26.

Другое приложение стереографической проекции находится в „Географии" Птолемея.

Кроме стереографической проекции, основывающейся на очень тонких геометрических теориях, существовала еще другая, более простая, ортогональная проекция звезд на горизонтальную плоскость, плоскость меридиана и плоскость первого вертикала. По сохранившемуся до нас под названием „Analemma" небольшому труду Птолемея можно познакомиться с построениями, связанными с этой системой прямоугольных координат в пространстве, построениями, похожими, между прочим, на операции начертательной геометрии. В сочинении этом имеются также важные приложения этих построений к тригонометрическим вычислениям, а также к проблемам механики.

Чтобы лучше понять характер этих приложений, рассмотрим один особенно простой случай, когда требуется найти высоту h и азимут ω солнца на экваторе, зная высоту полюса φ и часовой угол v; последний мы будем вместе с греками отсчитывать от восхода солнца.

Пусть $ZHZ'H'$ будет круг меридиана, ZOZ' — вертикальная ось, POP' — ось мира, HOH' и EOE' — следы горизонта и экватора; в таком случае дуга HP или ZE равна φ. Опрокинем теперь экватор на плоскость меридиана, повернув его вокруг его следа EE'. Если солнце займет при этом положение S, то дуга PS равна часовому углу v, на основании чего можно определить точку S. Точка S_1, проекция S на EE', будет проекцией солнца на мери-

* Этот самый прибор (планисферическая астролябия) служил также для определения времени по высоте солнца днем, если только знали на основании астрономических таблиц положение солнца в поясе зодиака. Инструментом этим пользовались вплоть до изобретения астрономических часов (*T*).

диан, а горизонтальная прямая S_1U, проведенная из S_1, встретит меридиан в такой точке S_2, что $H'S_2$ будет равно искомой высоте h.

Приняв за единицу радиус меридианного круга, мы видим на основании этого построения, что

$$\sin h = OU = OS_1 \cos \varphi = NS \cos \varphi = \sin \nu \cos \varphi.$$

Птолемей поступает так же, как и мы, с той лишь незначительной разницей, что он пользуется таблицей хорд и рассматривает отношение последних к диаметру круга. С другой стороны, так как S_1S есть расстояние точки, представляющей солнце, от плоскости меридиана, то очевидно, что азимут ω или угол, образуемый вертикальной плоскостью, проходящей через солнце, с плоскостью меридиана, определяется из отношения

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{S_1S}{OT_1} = \frac{\cos}{\sin \sin \varphi}.$$

Птолемей представляет эту формулу на чертеже по способу греков, принимая $T_1T = S_1S$ и указывая, что угол $T_1OT = \omega$ определяется отношением сторон прямоугольного треугольника T_1OT, отношением, определяющим отношения между катетами и гипотенузой.

Однако Птолемей не ограничивается одними случаями, которые зависят в сферической тригонометрии от решения прямоугольных треугольников; он дает также построение высоты и азимута небесного светила по его склонению и часовому углу и по данной высоте полюса и показывает, как можно воспользоваться этим построением для тригонометрического вычисления; в нашей сферической тригонометрии это вычисление свелось бы к решению косоугольного сферического треугольника по одному углу и двум прилежащим сторонам. Он указывает также, как можно получить дневную дугу какой-нибудь звезды по ее склонению: задача эта была известна уже Гиппарху, которой решал ее, вероятно, тем же самым способом.

Надо думать, что методы эти были во времена Птоломея известны всем греческим астрономам, от которых они перешли впоследствии к индусам, арабам и в новое время — к европейцам.

Тем не менее в „Великом построении“ (Альмагесте), основном творении, в котором дошла до нас греческая астрономия, Птолемей совершенно не пользуется этими методами. Для своих тригонометрических вычислений он пользуется теоремой, обнимающей весьма изящным образом решение четырех задач, относящихся к прямоугольному сферическому треугольнику. Правда, надо думать, что в эпоху, когда теорема эта была найдена Менелаем, были известны и методы, позволяющие решить эти же самые задачи порознь каждую; но, так или иначе, теоремы эти установлены в „Sphaerica“, которые отличаются еще рядом других интересных геометрических изысканий от книг по сферической геометрии, составленных в астрономических целях до Менелая.

Из „Sphaerica" видно, что понятие о сферическом треугольнике, его сторонах и углах, было уже общеизвестным. В первых двух книгах этого труда вопрос о равенстве и неравенстве сторон и углов в одном или двух сферических треугольниках исследуется с той же тщательностью, с какой Эвклид изучает в первой книге „Начал" соответствующие более легкие вопросы, относящиеся к плоским треугольникам.

Третья книга начинается с основной теоремы, на которую мы только что указали и которая является распространением на сферическую геометрию одной планиметрической теоремы, тесно связанной с вопросами, рассматриваемыми в эвклидовых „Поризмах", а именно с следующей теоремой: если прямая пересекает в точках D, E, F стороны треугольника ABC, противолежащие углам A, B, C, то

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

Легко видеть, что теорема эта сохраняет силу, если заменить прямые линии дугами больших кругов на одном и том же шаре, а прямолинейные отрезки синусами отрезков дуг — хордами двойных дуг, как сказал бы Менелай.

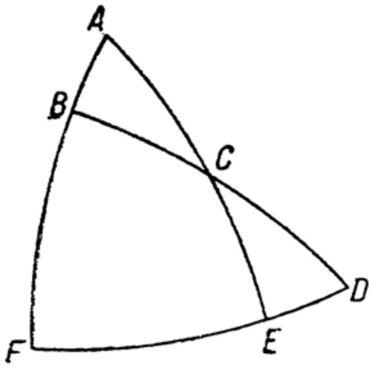
Приложения Менелаем этой теоремы являются также подражанием планиметрическим теоремам, которые можно было найти в „Началах" и „Поризмах" Эвклида или в других подобных трудах; и если мы для большей простоты употребляем выражение *синус* — как это делали еврейские и греческие авторы, сохранившие для нас утерянный в оригинале труд Менелая — то следует иметь в виду, что в названных приложениях слово *синус* никогда не относится к углам сферических фигур, а только к их сторонам или дугам больших кругов. Эти *синусы* — или в одном специальном случае их отношения к *синусам* дополнительных углов, т. е. *тангенсы* — заменяют всегда прямоугольные отрезки плоской фигуры. Отсюда можно заключить, что греки никогда не помышляли о том, чтобы найти общую зависимость между углами и сторонами треугольников — как плоских, так и сферических.

В качестве образчика результатов, получаемых Менелаем с помощью его основной теоремы, мы приведем распространение на шар эвклидовой теоремы о пропорциональности между двумя сторонами плоского треугольника и отрезками, отсекаемыми на третьей стороне биссектрисой противолежащего угла. Еще более непосредственным приложением менелаевой теоремы было предложение, широко употреблявшееся впоследствии арабскими астрономами и известное у них под названием *правила четырех величин*. Для получения его надо (см. фиг. 27) принять $AF = AE = 90°$, тогда формула Менелая сводится к

$$\frac{\sin BF}{\sin CE} = \frac{\sin BD}{\sin CD}.$$

Надо заметить, что так как Менелай не говорит о приложениях общей теоремы к практическим выкладкам, то мы не знаем, имел ли он в виду этот последний случай; наоборот, Птолемей, сообщающий нам о практических результатах, полученных греческими астрономами с помощью этой теоремы, имеет дело с еще более частным случаем треугольника, в котором и угол $B = 90°$.

Действительно, вычисления Птолемея тождественны с теми, которыми пользуются в сферической тригонометрии в случае прямоугольного треугольника, основываясь на четырех отношениях, имеющих место между тремя сторонами или между двумя сторонами и одним углом. Пусть ABC будет таким треугольником с прямым углом B, а D, E, F — точками, в которых большой круг с полюсом A пересекает стороны сферического треугольника; мы имеем тогда:



Фиг. 27.

$$\widehat{FE} = \widehat{A}$$

и

$$\widehat{ED} = 90° - \widehat{A};$$

другие дуги на чертеже — это стороны треугольника ABC или их дополнения. Если теперь рассмотреть один за другим четыре треугольника ABC, CDE, AEF и DBF, принимая при этом всегда четвертый большой круг за секущую линию, то получатся как раз четыре вышеупомянутых отношения.

28. Упадок греческой геометрии. Изложенное нами только что развитие вычислительной геометрии у греков продолжалось некоторое время после эпохи высшего расцвета основных областей греческой геометрии. Действительно, после Аполлония мы не можем указать ни на одно крупное достижение в области более абстрактных геометрических или облеченных в геометрическую форму чисто математических изысканий, доведенных греками до особенно высокой степени развития. Это не следует понимать в том смысле, будто математическое творчество немедленно же иссякло после Аполлония: заложенные основы были столь прочны, употреблявшиеся методы столь плодотворны, что ученикам великих математиков было нетрудно — пока это позволялось обстоятельствами — продолжать их дело в указанном направлении. Так оно и было на деле. Но на этом пути можно было, продолжая более простые изыскания учителей, исследовать только более специальные и менее доступные для большинства проблемы. Ясно, однако, что такое направление исследования не способно было в эпоху упадка вызвать особенно живого интереса и привлечь к себе столько сил, сколько это могли сделать лежавшие в основе его менее сложные изыскания.

Вот почему нам известно так мало результатов этой работы. До нас дошли лишь разрозненные сведения о геометрических трудах преемников или современников великих геометров. Так, мы уже говорили о Никомеде (стр. 66) и его „Конхоиде“. О Персее нам сообщают, что он занимался исследованием так называемых „спирических кривых“. Предполагают, что это были сечения* поверхности, образованной вращением круга вокруг расположенной в его плоскости оси (тор), поверхности, с частным случаем которой мы познакомились косвенным образом у Архита. Возможно, что одна из этих кривых была еще раньше изучена Эвдоксом при употреблении им особой кривой, *гиппопеды*, для представления видимых орбит планет и их узлов: предполагают, что эта кривая соответствует нашей лемнискате.

В наше время хорошо известна *циссоида* Диоклеса, являющаяся отличным образчиком для приложений диференциального и интегрального исчисления к геометрии. Тот же Диоклес является автором нового решения с помощью конических сечений кубического уравнения Архимеда (стр. 149).

Работая в направлении, указанном диоризмами более древних геометров, Зенодор занялся сравнением площадей многоугольников, имеющих один и тот же периметр. Согласно установленной им теореме, из всех фигур с одинаковым периметром наибольшая площадь — у круга. Аналогичную теорему он доказал для шара в пространстве; впрочем, мы имели уже случай указать на наличие такой теоремы у Архимеда (стр. 129).

Что касается наиболее важных результатов, имеющихся в труде Паппа и не восходящих к эпохе великих геометров, то они, несомненно, относятся к непосредственно следующему за этим периоду. Нет сомнения, что и другие открытия могли быть сделаны впоследствии в короткие периоды вспышек математического творчества. Так, Папп приписывает себе одно из таких открытий, из коих мы приведем некоторые.

Кроме найденной Архимедом площади плоской спирали (стр. 127), были найдены площади, ограниченные соответствующими спиралями на шаре; при этом пользовались методом Архимеда для вычисления шаровой поверхности.

Проекцией сечения винтовой поверхности плоскостью, содержащей какую-нибудь образующую, проекцией на плоскость, перпендикулярную к оси поверхности, является *квадратриса*.

Наконец, Папп приписывает себе открытие нижеследующей общей важной теоремы:

объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг какой-нибудь лежащей в ее плоскости прямой, равен произведению площади фигуры на окружность, описанную при вращении центром тяжести ее.

Теорема эта впоследствии быле названа *правилом Гюльдена* (Guldin) по имени математика, вновь открывшего ее. При наличии того геометрического представления, которое применяли уже во времена Архимеда к интегрированиям, необходимым для определения центра тяжести, теорема эта как бы носилась в воздухе,

* Вероятно, плоскостью, параллельной оси вращения (Т).

но Паппу все же принадлежит заслуга общей ее формулировки .

У этого математика мы встречаем еще обобщение геометрического места к четырем прямым (ср. стр. 146). Действительно, он определяет некоторую кривую нижеследующим свойством: отношение между произведениями расстояний какой-нибудь точки искомой кривой от двух групп прямых, данных в произвольном количестве, имеет некоторое постоянное значение. В соответствии с пятой книгой „Начал“ отношение этих произведений представлено в виде сложного отношения (ср. стр. 105), и хотя Папп не указывает ни одного свойства кривой, вытекающего из этого определения, но все же эта кривая явилась одним из важных исходных пунктов аналитической геометрии Декарта.

Как ни интересны сами по себе некоторые из отмеченных нами здесь результатов, все же есть одно обстоятельство, убедительно показывающее, что за период времени между Аполлонием и Паппом в геометрии не произошло никакого серьезного и длительного прогресса. Мы имеем в виду тот факт, что, если не говорить о многочисленных и важных сообщениях насчет работ старых математиков—сообщений, широко нами использованных,—у Паппа нельзя отметить ни одной по истине новой теоремы. Нет поэтому ничего удивительного в том, что истекшие после Аполлония пять веков явились эпохой значительного упадка знания и понимания математических сокровищ прошлого. В этом можно еще лучше убедиться на основании многочисленных лемм, которые сочли в эту эпоху необходимым присоединить к творениям древних мастеров и которые сохранил для нас Папп: леммы эти вдаются в подробнейшие разъяснения по поводу всякой мелочи, показывая этим, как мало уже умели тогда понимать целое.

Если теперь спросить, как возможен был такой упадок столь прочно обоснованной и столь пышно развивавшейся науки, как греческая геометрия, то является несомненным искушение приписать причину этого различным внешним обстоятельствам, на которые мы указали уже в нашем историческом обзоре. Но это все же не является достаточным объяснением. Ведь, как видно по Паппу, сохранилось множество древних трудов, на основе которых могла бы возродиться оборвавшаяся математическая традиция и могла бы начаться дальнейшая творческая эволюция. Однако в древности этого не произошло. Необходимо было, чтобы в изучение трудов древних математиков был внесен — сперва у арабов, затем в новое время у европейцев — совершенно новый, оригинальный дух, толкавший мысль в совершенно новых направлениях, — и лишь тогда стало возможным полное усвоение самого существа работы древних.

Причины этого упадка, а также невозможности возрождения математического творчества, следует поэтому искать в недостатках, присущих писаниям древних, которыми тогда все еще располагали. Мы уже мимоходом указывали на эти недостатки, но небесполезно будет еще раз обозреть их.

Первый недостаток связан с тем обстоятельством, которое в других отношениях вызывает у нас величайшее восхищение — именно с исключительной заботливостью обеспечить, при помощи строгих форм, логическую неуязвимость доказательства. Непосредственным результатом этой вечной заботы о логической строгости явилось то, что устраняли все, что могло бы облегчить для начинающего понимание постановки вопросов, что позволило бы обозреть их сразу или лучше уяснило бы цель каждой отдельной операции. Разумеется, в течение долгого времени сохранялось до известной степени понимание того, что скрывалось под строгостью этих форм; научились даже отчасти подражать им; но, тратя на это всю свою энергию и не умея охватить умственным взором всего целого науки, неизбежно стали интересоваться только этими формами, усваивая лишь простейшую часть их содержания; с другой стороны, само преклонение перед этими формами придавало им характер такого исключительного совершенства, что это должно было отбивать охоту предаваться собственному творчеству. Действительно, вначале плоды такого творчества должны были бы облекаться в несравненно менее совершенную форму.

Другим неблагоприятным обстоятельством была геометрическая форма, которую приняла алгебра и наука о величинах вообще. Конечно, эта геометрическая форма ни со стороны ясности, ни со стороны практических удобств для выполнения алгебраических операций нисколько не уступала современной алгебраической символике вопреки тому, что мог бы подумать современный читатель. Кто привык в этому способу представления и знаком с значением фигур, тот может комбинировать их и оперировать с ними так же легко, как мы комбинируем теперь и оперируем с буквенными выражениями; он может, кроме того, указывая на фигуры, объяснять устно своим ученикам производимые им действия. Благодаря этому в мирную эпоху, пока продолжало развиваться в Александрии устное преподавание, понимание математики должно было сохраняться в целости. Но лишь только был нарушен мир и благодаря этому утратилась традиция, сохранявшаяся устным преподаванием, как единственным ресурсом оказалось изучение педантически кропотливо разработанных трудов, в результате чего и произошел неизбежно заметный упадок. Действительно, изучение геометрической алгебры путем чтения дело трудное, что легко понять, если принять во внимание, что текст и чертежи существуют как бы каждые сами по себе и что поэтому их надо изучать, переходя непрерывно от одного к другим.

К этим, главным образом, формальным недостаткам присоединяется еще другой, о котором мы говорили уже неоднократно и который касается уже существа дела: греческие математики имели столь возвышенное представление о достоинстве своей науки, что из своих классических трудов они удаляли все, что не казалось им абсолютно строгим. В результате этого — как мы уже видели в связи с вопросом об извлечении квадратных корней — настоящие числовые выкладки, которые, как правило, могли давать лишь приближенные результаты, исключались ими из своих трудов и передавались в ведение менее почитаемой науки, *логистики*. Но, поступая так, отметали вместе с тем и все практические приложения математики; а между тем впоследствии, когда перестали так ценить теоретическое значение науки самой по себе, эти практические результаты могли бы сообщить новый толчок развитию математики и не дали бы замереть интересу к науке.

Это пренебрежение прикладной математикой имело пагубные следствия, выступающие особенно ярко, если сравнить их с благотворными результатами, обнаруживающимися в других областях благодаря противоположному методу. Действительно, мы видели, каких успехов достигла благодаря своим приложениям к астрономии вычислительная геометрия, после того как в других отраслях математики всякое развитие замерло. Эти успехи, с другой стороны, легли в основу крупных достижений в сфере практических вычислений. Благодаря этому лучше и ближе ознакомились с числами, что, несомненно, содействовало тому огромному прогрессу арифметики, который наблюдается у Диофанта по сравнению с его предшественниками.

29. Позднейшая греческая арифметика. Диофант. Мы уже познакомились по „Началам“ (книги 7—9) с общей научной основой арифметики; конечно, ни по размерам, ни по научной прочности ее нельзя сравнить с тем фундаментом, на котором в других книгах своего труда Эвклид возводит здание геометрии и, в геометрическом облачении, общей теории величин; но все же по форме изложение носит столь же общий характер. Хотя дело идет о числах, но предложения не иллюстрируются числовыми примерами, которые, несомненно, послужили для установления общей теории. Так, можно быть уверенным, что пифагорейцы были знакомы с примерами так называемых совершенных чисел. Касаясь геометрической арифметики, мы говорили также о различных других числовых формах, например о многоугольных числах, которыми начали интересоваться еще с ранних пор. Подобные исследования были первоначально, наверное, связаны с практическим вычислением таких чисел.

Наконец, мы видели, что в теории чисел внимание привлекала к себе целая группа исследований касательно приложения общих решений уравнений второй степени к численным уравнениям. Ученые исследовали условия, при которых комбинации чисел обеспечивают рациональные решения квадратных уравнений, т. е. условия, при которых известные числовые выражения представляют квадраты. С этой целью изучали уравнения, называемые теперь *неопределенными уравнениями второй степени*.

Мы сказали также, что эти уравнения употреблялись при приближенном извлечении квадратного корня из некоторых определенных чисел, например из 2. Однако у прежних греческих математиков встречаются только отдельные примеры подобных уравнений, и если мы сочли нужным все же упомянуть о них, то потому, что они явились, как мы вскоре увидим, исходным пунктом особенной линии развития, в которой впоследствии греки подвинулись далеко вперед. Действительно, если первоначально стремились к рациональным решениям, то впоследствии интерес стали привлекать к себе сами неопределенные уравнения.

В течение александрийского периода продолжали практически изучать определенные классы целых чисел; свидетельством этого являются работы Эратосфена и его способ получения простых чисел с помощью так называемого *эратосфенова решета* (cribrum Eratosthenis). Выписывают сперва весь ряд целых чисел до того пункта, на котором хотят остановить исследование, затем вычеркивают каждое второе число, начиная с 4, каждое третье, начиная с 6, каждое пятое, начиная с 10, и т. д. Оставшиеся числа, пропущенные, так сказать, через решето, и будут простыми числами.

Архимеду приписывают — возможно, что ошибочно — одну довольно сложную арифметическую задачу о быках Гелиоса; но зато он, как мы видели, решил другую теоретическую проблему из области арифметики, найдя сумму первых квадратных чисел. Полученные таким образом суммы дают нам пример тех пирамидальных чисел, о которых шла речь в геометрической арифметике: действительно, они дают числа, соответствующие пирамиде с квадратным основанием, а с помощью них можем вычислить без труда все прочие пирамидальные числа.

Поэтому Никомах, которому мы обязаны сведениями о знакомстве древних с фигурными числами — и не только многоугольными, но и пирамидальными, — мог в своих работах опираться на труды великих математиков. Кроме теории этих чисел, мы встречаем у него указание, дополняющее известную уже пифагорейцам теорему о получении квадратных чисел посредством сумм первых нечетных чисел, именно, что всякое кубическое число тоже можно представить в виде суммы последовательных нечетных чисел.

Однако общая теорема, выражаемая формулой

$$n^3 = (n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1),$$

повидимому, не была вполне известна Никомаху.

Один гораздо более поздний римский писатель сообщает нам еще, что в древности умели суммировать первые кубические числа, иными словами, что знали формулу:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Эту формулу могли вывести из вышеупомянутой, однако у одного арабского автора встречается доказательство, геометрическая форма которого выдает его греческое происхождение: возможно, что это доказательство привело, с одной стороны, к теореме Никомаха, а с другой — к суммированию кубических чисел. Доказательство это на языке современной алгебраической символики можно выразить следующим образом:

$$(1+2+\ldots+n)^2-(1+2+\ldots+n-1)^2=n\frac{n(n+1)}{2}+n\frac{n(n-1)}{2}=n^3.$$

Разность между двумя квадратами можно представить по греческому способу посредством гномона, состоящего здесь из двух прямоугольников:

$$n(1+2+\ldots+n)=n\frac{n(n+1)}{2}$$

и

$$n(1+2+\ldots+n-1)=n\frac{n(n-1)}{2}.$$

До 300 г. (н. э.) к сокровищнице арифметики в том объеме, в каком она имелась во времена расцвета греческой геометрии, были присоединены лишь отдельные разрозненные открытия; но и о них мы не знаем, в какую эпоху они были сделаны. Только у Диофанта александрийского мы встречаем нечто новое, представляющее довольно значительный общий интерес. Его дошедший до нас труд по арифметике показывает нам греческую математику с такой стороны, о которой мы имеем лишь слабое и неясное представление на основании сохранившихся произведений его предшественников. Разумеется, теоретическая основа труда Диофанта — та же, что и у Эвклида, и цель его интересных исследований заключается — как мы уже это указали, говоря о его предшественниках — в том, чтобы избежать иррациональных количеств. Но изыскания эти получили неизвестный до того размах; с их помощью он в состоянии дать примеры определенных задач, приводящих в самых различных формах к уравнениям с рациональными решениями, и, кроме того, выставить обширный ряд неопределенных задач, для которых нужно всегда найти рациональные решения.

Между методом Диофанта и сохранившимися до нас способами изложения его предшественников существует, кроме того, следующее крупное отличие: Диофант занимается лишь специальными числовыми задачами и для решения их пользуется лишь чисто числовыми операциями, не устанавливая никогда общих теорем. Так как не только данные числа рациональны, но должны быть рациональны и искомые числа, то он не так нуждается в геометрическом представлении, как исследователи, результаты работ которых должны были быть применены к любым величинам, независимо от того, можно ли их представить числами (т. е. рациональными числами), или нет. Правда, Диофант заимствует свою терминологию из мира геометрических представлений, говоря, например, *прямоугольник* вместо произведения и т. д., но рассматриваемые им величины представляют все же только числа. Это видно хотя бы из того, что он не соблюдает геометрической однородности, складывая, например, спокойнейшим образом сторону с площадью.

Диофант даже настолько не придает значения общей форме, что, когда в какой-нибудь задаче говорится общим образом, что известное число должно иметь данное значение, он немедленно же приписывает ему определенное числовое значение, с которым и продолжает затем свои выкладки. Этот метод не дает, конечно, решения поставленной общей задачи, — если только не невозможно, на основании выбранного автором примера, вывести способа, каким следует пользоваться в общем случае; впрочем, это и имеет чаще всего место.

Надо заметить, что целью Диофанта является общее решение; но, не имея символа для обозначения известного, однако произвольного числа, он вынужден прибегать к определенным специальным значениям. Поэтому, когда для решения не годится любое число, он формулирует явно в виде диоризма необходимое ограничение. Часто также он пользуется каким-нибудь специальным значением, как пробным значением искомой неизвестной; если оно оказывается неподходящим, то, перебирая ход выкладок, он может найти, как следует видоизменить взятое пробное значение, чтобы притти, наконец, к данной форме или к данному значению другого количества. Правило ложного положения (regula falsi), которое мы встретили уже у египтян, является лишь весьма простым случаем применения этого метода; Диофант, с своей стороны, пользуется им в гораздо более сложных случаях.

Для выкладок в обратном направлении, требуемых такими пробами, нужна большая ловкость в манипулировании числами и умение быстро обозреть предпринимаемые с ними действия. Диофант в отличие от древних греческих математиков, труды которых до нас дошли, обнаруживает эти качества, но этого калькуляторского искусства не всегда было достаточно. А так как Диофант отказывался от геометрического представления чисел, то он нуждался в новом средстве для обозначения неизвестного количества, а также простых функций его. Диофант находит его в системе алгебраических символов, и хотя символы эти являются лишь сокращениями слов письменной речи и далеко не представляют совершенного способа выражения для алгебраических операций, все же они выполняют наиболее элементарное из предъявляемых к символике требований — они обеспечивают более легкое и более быстрое обозрение производимых выкладок, чем этого можно добиться словесным изложением.

Неизвестная представлена символом, вероятно, сокращением*, похожим на опрокинутую ς, — насколько можно, по крайней мере, судить по рукописям; степени его обозначены сокращениями греческих слов, выражающими понятие квадрата и т. д.; анало-

* Символ этот в тексте рукописей Диофанта служит обозначением сокращения греческого слова αριθμος — (число), а также для обозначения неизвестной. Впрочем, византийские переписчики для изображения его пользовались двумя весьма отличными друг от друга знаками, происходившими один от греческой буквы *сигма*, другой от буквы *каппа* (Т).

тичные знаки имеются для дробей с числителями, равными 1, и знаменателями, равными самим этим величинам. Таким образом, помимо особого знака для единицы (x°), получаются символы, соответствующие

$$x^{-6},\ x^{-5},\ x^{-4},\ x^{-3},\ x^{-2},\ x^{-1},\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5,\ x^6.$$

Многочлены, составленные из этих количеств, помноженных на численные коэфициенты, можно теперь писать весьма ясным образом, и им можно придавать форму уравнений. Для этого складывавшиеся между собой члены писали рядом друг с другом, а для обозначения нашего знака *минус* пользовались опрокинутым ψ*. Даются определенные правила для умножения степеней, и, таким образом, можно производить умножение многочленов. Наконец, Диофант умеет также преобразовывать уравнения, перенося из одной стороны их в другую различные члены, множители и делители.

Но у диофантовой символики имеется один очень существенный недостаток: в ней имеются знаки только для одной единственной неизвестной и различных степеней ее. Распространение ее на две неизвестные потребовало бы создания двенадцати новых символов, потому что для каждой степени имеется свой особый символ; этого, конечно, не сделали. Но сама недостаточность орудия, как это часто бывает, явилась для пользовавшегося им, поводом обнаружить все свое искусство.

Диофант обнаруживает его не только при употреблении вышеупомянутых *пробных* значений для неизвестных, которых он не может назвать, но еще и другим способом. Так, когда какая-нибудь задача содержит несколько неизвестных, которые должны быть определены при помощи различных данных, то он выбирает среди неизвестных ту, к которой он применяет свою символику (и которую мы назовем здесь x) таким образом, что уже с самого начала он может посредством нее выразить все остальные неизвестные. Впрочем, иногда обозначения не сохраняются неизменными на протяжении какой-нибудь задачи. Так, например, вначале неизвестная будет обозначаться через x; в ходе дальнейших выкладок тот же самый x употребляется для обозначения второй и третьей неизвестной, и наконец, когда после определения этих последних возвращаются к главному вопросу, то первая неизвестная снова обозначается через x.

Отсюда ясно, что Диофант должен был производить в уме и излагать словесным образом то, что мы называем исключением (элиминированием); но зато это представляло умственное упражнение, побуждавшее его выбирать свои неизвестные таким образом, чтобы элиминирование было по возможности простым.

---

* Этот символ относится ко всем следующим за ним членам, ибо вычитавшаяся часть многочлена всегда писалась за складывавшейся частью его. Повидимому, он означает λι, сокращение слова λιπων (λιπωντα и т. д.), т. е. *оставив, уменьшив на* . . . (Т).

Могло бы казаться, что этот недостаток символов для обозначения неизвестных влечет за собой особенные трудности при решении неопределенных задач. В действительности это не так, ибо обыкновенно в задачах этих требуется в очень общих выражениях, чтобы некоторая составная величина была квадратом или чем-нибудь подобным, а тогда нет никакой нужды в специальных обозначениях для квадратного корня этой величины и т. д.

В арифметическом творчестве Диофанта величайшего внимания заслуживают именно эти *неопределенные задачи*, для которых необходимо найти рациональные решения. Вообще говоря, Диофант старается найти какое-нибудь одно решение задачи, не отыскивая общего решения ее, которое включает в себе все возможные частные решения; но не следует придавать особенного значения этому факту, если желать понять полученные Диофантом результаты, ибо его частные решения заключаются лишь в том, что он сейчас же придает определенные значения вспомогательным количествам, служащим для решения задачи. В этих случаях — как, впрочем, и в других, упомянутых выше, — он, конечно, не мог не заметить, что эти вспомогательные количества способны принимать и другие значения, кроме тех, которые он им приписывает. В этом можно в особенности убедиться тогда, когда он принимает, что образованная определенным образом величина должна быть квадратом и одновременно с этим выполнять другое условие, ибо в этом случае недостаточно придать определенное значение вспомогательной величине, которая приводит к квадрату. Наоборот, эта величина становится сама неизвестной величиной x, посредством которой Диофант должен вообще выразить первоначальные искомые величины, чтобы затем определить x с помощью второго заданного условия.

Среди решаемых Диофантом неопределенных уравнений имеется множество уравнений вида:

$$y^2 = a^2x^2 + bx + c \tag{1}$$

и

$$y^2 = ax^2 + bx + c^2. \tag{2}$$

В целях краткости изложения мы обратимся к нашей теперешней алгебраической символике. Для решения первого уравнения надо положить $y = ax + z$, а второго — $y = zx + c$. После этого можно без труда выразить x рационально через z, которое, со своей стороны, сможет принимать все рациональные значения — при условии, конечно, чтобы они не делали отрицательными никаких величин. Мы видим, что употребляемые здесь подстановки соответствуют в точности тем, которыми пользуются теперь, когда желают сделать рациональными иррациональные диференциальные выражения.

Ко второму из приведенных выше типов уравнений сводится система двух уравнений или, как выражается Диофант, *двойное уравнение*:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= ax + b^2, \\ z^2 &= cx + b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

По существу, нет нужды, чтобы последние члены на правой стороне были одинаковыми; достаточно, чтобы они были просто квадратными числами, ибо в этом случае им можно придать одинаковое значение в обоих уравнениях, умножив одно из них на квадрат.

Допустим для простоты, что это уже сделано. Вычтя одно уравнение из другого и выразив x через z, получаем:

$$y^2 - z^2 = \frac{a-c}{c}(z^2 - b^2) = \frac{a-c}{c}(z - b)(z + b).$$

Если положить $z = t + b$, то имеем:

$$y^2 = \frac{a}{c}t^2 + \frac{2ab}{c}t + b^2 \text{— уравнение типа (2).}$$

Благодаря другим уловкам того же порядка, с алгебраической точки зрения, имеющим, следовательно, общий характер, или же благодаря более специальному употреблению числовых свойств предложенных чисел, Диофант сумел найти также частные рациональные решения для уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= ax^2 + bx + c, \\ z^2 &= dx^2 + ex + f, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

однако в том только случае, если c и f или a и d представляют одновременно квадратные числа.

Но понять общий метод Диофанта можно лишь рассмотревши, как он решает ряд частных задач. Поэтому мы приведем здесь образчики его задач и их решения. Так, например, в шестой задаче шестой книги требуется найти такой прямоугольный треугольник, чтобы сумма площади его и одной стороны, выраженная в рациональных числах, равнялась некоторому данному числу. Чтобы лучше понять, когда Диофант употребляет свои символы и когда нет, мы при изложении этой задачи будем пользоваться символами x и x^2 вместо оригинальных знаков Диофанта, употребляя в то же время другие буквы для обозначения чисел, которые он выражает словами.

Задача тогда сводится к тому, чтобы найти такие рациональные значения A, B и C, которые удовлетворяют уравнениям:

$$A^2 + B^2 = C^2$$

и

$$\frac{1}{2}AB + A = a,$$

где a представляет некоторое данное число.

Диофант с самого же начала придает этому числу a значение 7; достаточно затем принять в качестве пробных значений $A = 3x$, $B = 4x$, $C = 5x$, чтобы удовлетворить первому из уравнений. В таком случае второе принимает вид:

$$6x^2 + 3x = 7.$$

Чтобы корни этого уравнения были рациональными, необходимо, чтобы $\frac{9}{4} + 6 \cdot 7$ было квадратом. В данном случае это не так, но, производя выкладки с определенными числами, Диофант узнал, каким образом величина, которая должна быть квадратом, составляется из величин, пропорциональных сторонам треугольника.

Таким образом он приходит к результату, который мы получили бы, положив

$$A = \alpha x,\ B = \beta x,\ C = \gamma x,$$

именно, что для получения рациональных решений необходимо, чтобы $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha\beta}{2} \cdot 7$ было квадратом.

Так как в конце концов это условие зависит лишь от отношения сторон, то можно принять здесь $\alpha = 1$; далее он принимает временно β за неизвестную x и в результате пробных значений получает:

$$1 + 14x = D^2.$$

Согласно первому заданному уравнению должно быть также

$$1 + x^2 = E^2,$$

а эти два уравнения относятся к общему типу (4).

Диофант выводит из них уравнение:

$$x(x - 14) = E^2 - D^2,$$

откуда он заключает, что D есть полуразность множителей, т. е. равно 7; в таком случае $x = \frac{24}{7}$. Для получения этого он, вероятно, разложил правую сторону последнего уравнения на множителей и положил $E + D = x$, $E - D = x - 14$. Полученное таким образом для x значение представляет отношение между катетами искомого треугольника.

Придав затем x первоначальное обозначение, Диофант вносит во второе из заданных уравнений $A = 7x$ и $B = 24x$; отсюда следует, что

$$7 \cdot 12x^2 + 7x = 7,$$

откуда

$$x = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{7}{4}, \quad B = 6 \text{ и } C = \frac{25}{4}.$$

Чтобы дать еще более ясное представление о многочисленных рассмотренных Диофантом задачах, мы выберем наудачу три примера, снабдив их краткими указаниями насчет того, как он их решает.

II, 20: Найти таких три квадратных числа, чтобы разность между наибольшим из них и средним находилась в данном отношении к разности между средним и наименьшим из них. Если обозначить наименьшее число через x^2, среднее через $(x+a)^2$, то наибольшее будет

$$(x+a)^2 + m\,[(x+a)^2 - x^2].$$

Условие, чтобы это последнее выражение было квадратом, выражается уравнением вышеупомянутого типа (1).

Диофант довольствуется следующими значениями для данных чисел: $m = 3$ и $a = 1$.

III, 2: Найти три таких числа, что квадрат их суммы дает новые квадраты, если к нему прибавить каждое из этих чисел.

Диофант изображает сумму символом x; тогда условия задачи будут выполнены, если искомые числа будут:

$$(a^2-1)x^2,\ (b^2-1)x^2,\ (c^2-1)x^2$$

и если

$$(a^2-1)x^2 + (b^2-1)x^2 + (c^2-1)x^2 = x,$$

откуда получается для x рациональное выражение.

Диофант дает для a, b и c лишь значения 2, 3 и 4.

IV, 27. Найти два таких числа, чтобы произведение их, сложенное с каждым из обоих чисел, было кубом.

Диофант приравнивает первое число a^3x, второе же x^2-1 и придает a значение 2; в таком случае одно из условий оказывается немедленно удовлетворенным и остается еще, чтобы

$$y^3 = a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1.$$

В соответствии с методом решения неопределенных квадратных уравнений (1) и (2) это кубическое уравнение можно решить, положив $y = ax - 1$; отсюда получается уравнение первой степени, дающее x.

Укажем еще, что некоторые из рассматриваемых Диофантом задач являются для него поводом обнаружить свое знакомство с рядом теорем, относящихся к теории чисел, как, например, со следующей теоремой: число вида $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ можно разложить двумя способами на сумму двух квадратов, именно:

$$(ac \mp bd)^2 + (ad \pm bc)^2,$$

а также со следующей другой теоремой: число вида $4n+3$ никогда нельзя разложить на сумму двух квадратов.

Эти примеры показывают с достаточной убедительностью, что Диофант искал только рациональные (и, разумеется, положительные) решения, а не непременно целочисленные решения, так что название *диофантовых уравнений*, придаваемое неопределенным уравнениям первой степени, которые требуется решить в целых числах, покоится на заблуждении. Конечно, в труде Диофанта встречаются неопределенные уравнения первой степени, но при этом его занимает лишь вопрос о возможности выразить одну из неизвестных посредством другой, так как рациональность последней влечет за собой рациональность первой.

Издатель Диофанта в XVII в. Баше де-Мезириак (Bachet de Méziriac) в связи с названными задачами исследовал сам вопрос о целочисленных решениях. Впрочем, мы увидим, что индусы решили полностью эту задачу еще до него.

Возникает вопрос, что, собственно, в труде Диофанта является продуктом его самостоятельного творчества, а что принадлежит другим исследователям? К сожалению, у нас мало данных для ответа на этот вопрос. Мы указали, что в эпоху создания греческой математики ученые занимались уже вопросами того же самого рода, которые исследовал Диофант, и если имеется так мало следов этого в сохранившихся до нас работах этих ученых, то потому, что по самому характеру этих работ в них не было места для вопросов названного рода. Тем не менее, я не думаю, чтобы ряд задач Диофанта мог относиться к этой эпохе, ибо, судя по общему впечатлению, греческие математики периода наивысшего расцвета математики не обладали тем искусством в вычислениях, которое поражает нас у этого автора. С другой стороны, столь обширное собрание разнообразнейших задач, каким является труд Диофанта, не может, конечно, быть продуктом творчества одного человека. Поэтому правильнее всего предположить, что задачи эти возникли еще в самую раннюю пору, вероятно, вскоре после открытия иррациональных количеств; в дальнейшем они продолжали накопляться даже после эпохи, когда основной массив греческой математики перестал развиваться, может быть, даже до времени Диофанта, со своей стороны значительно приумножившего это собрание.

Таким образом мы имеем здесь перед собой непрекращающееся развитие одной обособленной отрасли математики. Это зависело, без сомнения, от того, что мало-по-малу развилось столь важное для этой отрасли искусство в вычислениях, отчасти в связи с потребностями астрономии, отчасти благодаря соприкосновению греческой культуры с культурой другого народа, индусов.

Действительно, благодаря торговле Александрия завязала сношения с индусами; но последние, как мы увидим, обладали большим искусством в наименовании чисел, изображении их и в выкладках с ними; это искусство существовало у них еще до изобретения ими позиционной системы, т. е. употребляемого теперь способа начертания чисел. Благодаря торговым сношениям оно могло оказать свое действие на тогдашних греков, уровень математических знаний которых продолжал еще оставаться достаточно высоким, чтобы они могли воспользоваться этим. С своей стороны и индусы усвоили часть математических достижений греков и, как мы увидим вскоре, они сумели воспользоваться этим, особенно в тех случаях, когда они могли превратить их в числовые операции,— не сумев, впрочем, никогда проникнуть глубже в строгие теоретические умозрения греков.

Что касается, в частности, символики Диофанта, отчасти отличающейся от символики, которую мы встречаем у значительно более поздних индусских авторов, труды которых дошли до нас, то нет оснований видеть в ней какое-нибудь заимствование у чужих лиц. Действительно, употребляемые им сокращения напрашиваются сами собой, лишь только возникает желание сообщить другим комбинации, составленные из известных и неизвестных чисел, или же собираются просто зафиксировать их для памяти, не прибегая к прежнему геометрическому способу представления. Кто употребил только один раз эти сокращения, тот не мог не заметить сразу их огромных преимуществ для отчетливого обозрения всего хода выкладок. Поэтому в символике Диофанта не приходится видеть непременно продукта постепенной эволюции: она может отлично быть делом рук самого Диофанта или одного из его предшественников.

Наконец, мы желаем уже здесь вкратце указать на важную роль, сыгранную впоследствии сочинениями Диофанта. Благодаря тому, что определенные уравнения первой и второй степени были облечены у него в численную оболочку, они оказались гораздо более доступными для людей, не посвященных еще в культуру греческой математики; более доступными, чем те абстрактные геометрические формы, которые принимают у Эвклида уравнения второй степени и которые мы встречаем в сохранившихся до нас трудах других геометров для выражения уравнений первых двух степеней. Поэтому Диофант и явился главным посредником в процессе усвоения греческой алгебры арабами, благодаря которым, в свою очередь, она проникла в Европу в эпоху возрождения наук.

Мы не знаем, какое влияние оказал на индусскую математику диофантов метод решения неопределенных уравнений. Но зато можно быть уверенным, что арабские авторы продолжали его дело в указанном им направлении. Что же касается Европы, то когда здесь познакомились, наконец, с Диофантом не через посредство арабских переводчиков, а в оригинале, то для исследований по теории чисел началась новая эра расцвета: в этом отношении нам достаточно напомнить, что Ферма̀ (Fermat) глубоко изучил творения Диофанта.

ИНДУССКАЯ МАТЕМАТИКА.

1. Краткий обзор. Мы обратимся теперь к индусской математике, которая призвана была оказать совершенно исключительное влияние на ход развития нашей науки, хотя в совершенно другом направлении, чем греческая математика. Надо заметить, впрочем, что влияние это обнаружилось гораздо более благодаря непосредственному ознакомлению с индусской арифметикой, чем благодаря авторам, имена которых нам придется упомянуть. Однако этим авторам мы обязаны возможностью познакомиться непосредственным образом с тем, что знали и на что вообще способны были индусские математики. Они писали по-санскритски, — языке давно уже мертвом к тому времени, но употреблявшемся браминами в их религиозных и научных книгах таким же образом, каким впоследствии в Европе пользовались латынью.

У наиболее старых из этих авторов мы встречаем геометрические правила для черчения плана храмов, похожие на правила, употреблявшиеся в древнем Египте гарпедонаптами, и обнаруживающие следы влияния греческой геометрии. В частности, мы находим здесь некоторые из преобразований, употреблявшихся в геометрической алгебре.

Но чтобы познакомиться с наиболее действительной частью индусской математики, надо обратиться к индусским астрономам, — отчасти потому, что в книгах по астрономии содержатся математические отделы, необходимые для работ астрономов, отчасти потому, что при изложении астрономии встречаются случайные замечания по вопросам математики. Такого рода сведения мы можем почерпнуть в книге „Сурья Сиддханта“ (Sourya Siddhânta) от IV или V в. н. э., автор которой неизвестен. В астрономическом трактате Ариабхатты (Aryabhatta), родившегося в 476 г. н. э., имеется глава по математике. Еще большее значение, с математической точки зрения, имеют двенадцатая и восемнадцатая главы большого астрономического трактата Брамагупты (Brahmagoupta), родившегося в 598 г.

Наконец, более полное представление о конкретном содержании индусской математики мы получаем благодаря гораздо более поздним трудам Бхаскара Акарья (Bhâskara Acàrya, т. е. ученый), родившегося в 1114 г., трудам, озаглавленным „Лилавати“ (Lilâvati, т. е. красавица) и „Виджаганита“ (Vîjaganîta, т. е. вычисление корней). Содержание первого труда соответствует приблизительно тому, что мы называем *счетом* и *арифметикой*, а второго — нашей *алгебре*. Название первой книги следует понимать в том смысле, что *прекрасна* арифметика, о которой в задачах говорится в лирических выражениях, вполне гармонирующих с поэтическим характером формулировок задач. Существует, впрочем, предание, будто этой *красавицей* является собственная дочь Бхаскары; горести которой он пытался рассеять очарованием своих вычислений.

Хотя у индусов была, несомненно, своя собственная очень древняя и примитивная астрономия, близкая к халдейской, но „Сурья Сиддханта“ испытала, повидимому, сильное влияние со стороны либо Птолемея, либо других, более старых греческих астрономов, так что трудно теперь отличить в ней элементы чисто индусского происхождения. Надо, впрочем, заметить, что греческое влияние на индусскую цивилизацию — равно как и обратное влияние индусов на греков — восходит, несомненно, к эпохе походов Александра. В дальнейшем оно могло продолжаться либо в связи с образованием в Индии греческих колоний, либо в связи с торговыми сношениями, центром которых была Александрия. Таким образом, если мы встречаем у индусов теоремы и математические операции, известные грекам, то мы имеем все основания думать, что они были заимствованы именно у греков. Но надо, с другой стороны, признать, что в области числовых выкладок индусы пошли гораздо дальше того, чего достигли греки со своей чисто теоретической установкой.

Индусы не обнаруживали никаких способностей к теоретической строгости, но зато они были совершенно лишены той теоретической щепетильности, которая привела греческих математиков к пренебрежению реальными числовыми выкладками под тем предлогом, что последние часто дают лишь приближенные значения. Наоборот, индусы только путем числовых выкладок и их практического эмпиризма могли усвоить себе теоремы и методы, теоретического обоснования которых они, может быть, даже не понимали по-настоящему. Во всяком случае, они не формулируют словесно этих доказательств; они довольствуются проведением чертежей, на которых основывалось у греков доказательство, сопровождая их при этом словом „смотри!“

Но созданное индусами начертание чисел, а также связанные с этим правила счета имеют гораздо большее значение, чем результаты, к которым они могли притти благодаря этому исчислению в некоторых более абстрактных областях математики. Мы имеем в виду общеупотребительное теперь начертание чисел, в котором значение каждой цифры определяется ее положением (позиционная система), и то механическое выполнение выкладок, которое стало возможным благодаря этой системе. К сожалению, мы знаем лишь очень немногое о том, как была создана эта система. Десятая цифра — 0 (нуль), завершающая ее, встречается уже в Сурья Сиддханта; но и вся позиционная система возникла, повидимому, не очень задолго до появления этой книги, хотя девять остальных цифр встречаются в гораздо более древних надписях.

Есть одно обстоятельство, проливающее некоторый свет на то, как индусы обращались первоначально с числами; дело в том, что в их книгах сохраняются нередко старые методы начертания чисел либо из благоговения перед традицией, либо же потому, что методы эти представляли некоторые специальные преимущества. Тем не менее, на основании этих данных можно составить себе лишь крайне несовершенное представление о пред-истории индусской позиционной системы. Чтобы помочь делу, мы предпошлем изложению этой системы крайне сжатый обзор ее предистории вообще. Указав в самых общих чертах способы, какими пользовались при числовых выкладках до изобретения позиционной системы — во всяком случае, до того, как она стала известна в интересующих нас кругах — и коснувшись мимоходом крайне недостаточных способов, которыми должны были довольствоваться даже греки, мы сможем, во всяком случае, дать некоторое представление о значительных трудностях, которые пришлось преодолеть прежде, чем удалось создать эту систему. Что касается колоссального значения этой системы как с чисто математической точки зрения, так и с точки зрения интересов повседневной жизни, то оно очевидно.

2. Названия чисел и знаки для обозначения их; нумерация до индусов и у них. Если мать желает дать по яблоку каждому из своих 7 детей, то ей нет нужды знать число 7; точно так же она может не знать, что $2 \cdot 7 = 14$, если она желает дать им по два яблока: она берет попросту в руки одно или два яблока и дает их Ване, затем Лизе и т. д. Она приблизится больше к идее числа, если она заметит, что в первом случае ей следует брать по одному яблоку для всех пальцев одной руки и для первого и второго пальца другой руки, но что пальцы не имеют никакого отношения к предметам, число которых должно быть равно им — в данном случае к яблокам: для матери они являются просто *знаками*, обозначениями количества требуемых предметов.

Таким именно способом народы поднялись до идеи числа. Это видно из того, что почти все народы пользуются для обозначения более или менее больших чисел десятиричной, пятиричной (являющейся просто переходной ступенью к десятиричной) или двадцатиричной системой; и системы эти возникли естественным образом, хотя для этого понадобилось, может быть, немало времени.

Затем, когда перебрали все пальцы и когда по образцу одного племени с берегов Ориноко стали считать по *целому человеку* для выражения числа 20 (взяв, таким образом, пальцы обеих рук и ног), то неизбежно пришлось начать сызнова считать по пальцам, чтобы выразить, сколько насчитали десятков, двадцатков и сколько взяли еще единиц сверх десятка, двадцатка. Так возникли числовые выражения, которые мы можем обозначить формулой $a + bx$, где x означает единицу высшего порядка, десяток или двадцаток. Впоследствии, когда при дальнейшем развитии операций с числами число десятков или двадцатков стало, со своей стороны, превышать десять или двадцать, то пришлось образовать новые, более высокие потенциальные единицы 10^2, 10^3..., или же — как у древнемексиканских ацтеков — 20^2, 20^3.. , чтобы, таким образом, представить числа типа $a + bx + cx^2 + \ldots$

На практике шли в этом направлении настолько далеко, насколько это диктовалось потребностями жизни; дальнейшее же продвижение в этом направлении, возможность безграничного образования единиц высшего порядка была установлена только на более высоком уровне развития науки, как мы это видим, например, у Архимеда в его „Счете песка".

Так возникли десятиричная и двадцатиричная системы. Последняя была создана народами, которые ходят голыми или босыми либо всегда, либо — подобно гренландцам,— в своих жилищах. Что касается заметных следов двадцатиричной системы в некоторых европейских языках (в этом отношении датский язык тоже представляет немалый интерес), то они — позднейшего происхождения и связаны, вероятно, с тем, что единица высшего порядка, двадцаток, оказалась в известных случаях удобной для торговли и потребностей повседневной жизни. Кроме указанных нами только что единиц высшего порядка, нередко пользовались в случае деления монет, мер и весов другими единицами, более удобными по теоретическим соображениям, как, например, $12 = 2^2 \cdot 3$. Еще более интересным с теоретической точки зрения типом этих систем является созданная вавилонянами шестидесятиричная система, о которой мы уже говорили.

В качестве основы для образования таким образом чисел берутся — более или менее сознательно — сложение, умножение и простейшие возведения в степень. Впрочем, при этом пользовались часто также и вычитанием. Так, например, 19 называется по-латыни un-de viginti, а по-санскритски — ekonavimçati (т. е. 20 — 1) или, просто — ûnavimçati (т. е. неполные двадцать).

В настоящее время мы пользуемся одним и тем же способом как для счета с помощью образованных таким образом чисел, так и для написания их. Но это не всегда было так, и первоначально, вероятно, для фиксирования необходимых для счета чисел прибегали к тому же способу, что и для нумерации, т. е. к пальцам. У одного африканского племени для фиксирования различных единиц один человек должен был держать поднятым палец для каждой простой единицы, второй человек — палец для каждого десятка, третий — палец для каждой сотни. Ту же самую задачу может выполнить и один человек, если он будет различными способами пользоваться суставами своих пальцев (счет на пальцах у греков и римлян).

Наконец, в различных пунктах земного шара пользовались, да продолжают и теперь еще пользоваться, другими механическими способами, как ими пользовались древние греки, римляне и в средние века в Европе. У цивилизованных народов ими пользуются в настоящее время лишь для специальных целей (счет в карточной игре) или же как дидактическим средством в начальных школах —

мы имеем в виду счетные доски, счетные машины, марки и пр. Счетные доски разделены на столбцы, содержащие единицы одного и того же порядка, обозначаемые с помощью небольших жетонов или других марок; в счетных машинах, заимствованных европейцами у азиатских народов, давно уже пользовавшихся ими, столбцы заменены струнами или проволоками, вдоль которых могут передвигаться шарики или другие предметы. В каждом столбце или на каждой проволоке могут быть два подразделения — одно с 4 или 5 марками для единиц известного рода, а другие с 1 или 2 марками для единиц в пять раз больших. Что касается счетных марок, то существуют различные формы их для обозначения различных видов единиц.

Нетрудно убедиться в практических удобствах этих приборов для простых выкладок — сложения, вычитания и умножения — с небольшими числами; поэтому мы не будем останавливаться на рассмотрении различных способов употребления их в разных местах.

Мы гораздо больше приблизимся к нашей числовой системе, когда, пользуясь делением на столбцы, мы вместо того, чтобы класть на них марки, станем вписывать в них знаки для чисел от 1 до 9. Впрочем, для этого недостаточно уметь писать, надо, сверх того, еще знать таблицы сложения и умножения или же иметь под рукой такие таблицы, ибо дело здесь не сводится к чисто механическому манипулированию марками. Позиционная система получается теперь, если вместо того, чтобы пользоваться заранее изготовленными столбцами, эти столбцы образуют с помощью самих цифр. В этом случае нуждаются в знаке, который занимает место, не обладая, однако, собственным значением: это — 0.

Разумеется, нуль не был придуман сразу — и доказательством служит хотя бы то, что позиционная система появилась так поздно. Впрочем, когда даже она была изобретена, потребовалось еще известное время, чтобы научиться пользоваться ею. Для этого, действительно, недостаточно только уметь писать и знать несколько таблиц, как в случае когда цифры вписываются в заранее начерченные столбцы, — но надо уметь еще до известной степени писать правильно и чисто, так, чтобы цифры занимали в точности подобающее им место, и надо еще большее напряжение памяти, чем его требуется, когда имеешь возможность вписать в столбцы столько цифр, сколько желаешь, — включая в них и те, что *держишь в уме*.

Указанные нами способы не требуют — за исключением последних двух — знания письма, и это относится также к первым стадиям эволюции письменной нумерации, заключавшимся просто в замене подвижных жетонов, шариков или других аналогичных предметов неподвижными марками. Для каждой единицы клали марку, точно так, как поступают еще и в настоящее время, когда единицы появляются последовательно друг за другом, как, например, при подсчете числа поданных на выборах голосов. Марки эти, взятые вместе, могли порождать новые знаки для 5 или 10 — чисел, получивших впоследствии свои особые специальные марки, а также для единиц высших порядков. Так можно притти к стройной системе обозначения чисел, вроде системы римлян, если желательно указать на всем известный пример. Легко понять, как могло возникнуть такое начертание чисел, и точно так же нетрудно найти ключ к нему, даже независимо от всяких предварительных методологических указаний.

Первоначально греки, как об этом свидетельствуют древнейшие надписи, писали числа этим способом. Однако в их сохранившихся до нас литературных памятниках они для этой цели пользуются совершенно противоположными принципами. Действительно, для каждого целого числа единиц, десятков, сотен имеется своя собственная буква; греки писали:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots,\ \vartheta,\ \iota,\ \varkappa,\ \ldots,\ \varrho,\ \sigma, \ldots,$$

для обозначения

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 9,\ 10,\ 20, \ldots,\ 100,\ 200, \ldots,$$

так что, например, $803 - \omega\gamma$, $83 - \pi\gamma$, $833 - \omega\lambda\gamma$.

На первый взгляд может показаться, что в этом способе начертания чисел нет никакой системы и что он представляет собой шаг назад; здесь как будто невозможно выделить то, что однородно, и, например, из знаков β, $\varkappa$, σ не видно, что мы имеем дело с единицами разных порядков, но взятыми в одинаковом количестве. Тем не менее, этот способ давал грекам возможность писать числа короче, чем писали их римляне, и мы не имеем основания относить его к низшей ступени развития математики, хотя бы это была единственная вещь, которую мы знаем о греках.

В наше время немало лингвистов уже отказалось от старой теории, согласно которой признаком высшей ступени развития языка является образование, как в латинском языке, всех слов согласно исчерпывающим правилам и такое комбинирование их, что, даже не имея представления о контексте, можно понять играемую каждым словом роль по формальным элементам его — и, таким образом, иметь возможность конструировать даже сам контекст. Аналогичные языковые особенности встречаются в языках самых отсталых народов. Наоборот, в настоящее время о совершенстве языка судят на основании того критерия, что он вполне понятен при минимуме потребных для этого средств, т. е. при минимуме усилий как со стороны говорящего, так и со стороны слушающего; в таких языках — примером их может служить английский — пренебрегают всеми средствами, которые могут служить для указания отношения между отдельными словами, но которые фактически бесполезны для понимания текста. Разумеется, чтобы не ошибиться насчет точного смысла текста, чтобы сделать невозможным какое бы то ни было недоразумение, необходимо более глубоко знать язык и понимать например, значение положения слов. Кто обладает таким знанием, тот способен гораздо быстрее понять смысл текста, чем если бы ему пришлось обращать внимание на согласование в роде, числе и падеже. Написание и чтение чисел у греков представляло как раз аналогичные преимущества по сравнению с громоздкой нумерацией римлян. Действительно, греки не только умели писать числа до 1000 так же быстро, как мы; для того, кто привык к их знакам, чтение их чисел представляет более быструю операцию, чем чтение римских чисел, требующее предварительного расчленения различных составляющих их знаков.

Словом, греческие знаки были очень хороши для написания не слишком больших чисел; но зато они предназначались слишком исключительно для целей письма, — вероятно, потому, что для целей счета, когда это было нужно, пользовались механическими средствами. Чтобы получить письменную нумерацию, которая годилась бы как для счета, так и для безграничного начертания чисел, необходимо было вернуться вспять, ибо такая письменная нумерация требовала сочетания греческой краткости с римской ясностью.

У китайцев мы встречаем некоторое приближение к такому сочетанию; у них имеются особые знаки для единиц различных порядков, а для обозначения числа этих единиц употребляются символы, обозначающие числа простых единиц. Если мы заменим китайские символы комбинацией римских знаков с нашими теперешними знаками, то приведенные выше несколько чисел можно будет обозначить следующим образом:

$$833 = 8C3X3,$$

$$803 = 8C3, \quad 83 = 8X3.$$

Эту систему можно еще упростить, если для указания разряда высших единиц пользоваться особыми марками, как, например, в обозначениях $833 = \ddot{8}\dot{3}3$, $803 = \ddot{8}3$, $83 = \dot{8}3$. Но все же в позиционной системе лучше всего соединяется краткость с ясностью и удобством пользования ею.

Мы попытались с помощью общеизвестных примеров выяснить общий ход процесса образования чисел, указав в то же время, каким путем научились считать и писать эти числа. Теперь нам остается дать еще краткий обзор особенностей этого развития у индусов до изобретения позиционной системы.

Индусы уже с самых древних времен оперировали большими числами; доказательством этого служит тот факт, что у них исстари имелись особые названия для всех десятиричных единиц вплоть до 10^{17}. Об их раннем интересе к этим числам свидетельствует еще и другой факт: в легендах о Будде раскаывается, будто он сам создал названия для десятиричных единиц вплоть до 10^{54} и что будто он желал пойти еще дальше в этом направлении. Отсюда, а также вообще из склонности индусов к грандиозном числам, следует, что они уже с древних пор владели тем, что у греков Архимед ввел гораздо позже в своем „Счете песка“.

Правда, наряду с обилием названий для разных десятиричных единиц, у индусов не было таких опорных пунктов, какими являются для нас тысяча, миллион и т. д. Это, конечно, недостаток. Но, тем не менее, мы можем повторить здесь то, что мы сказали по поводу письменной нумерации греков: такое множество названий, способных служить средством устного общения, свидетельствует о высокой степени развития. Следует, кроме того, заметить, что выделение с помощью особого слова каждой десятичной единицы связано с теми самыми принципами, которые впоследствии дали начало позиционной системе и которые мы встречаем даже в способе произношения чисел. Так, например, в одном отрывке число 1 577 917 828 передано сочетанием из чисел в собственном смысле слова и образных выражений, имеющих числовой смысл, причем счет идет, начиная с единиц: васу (vasû, т. е. категория из 8 богов), 2, 8, горы (7), форма (1), цифры (9), 7, горы (7). лунные дни (15, т. е полмесяца). Это последнее обозначение соответствует числу, изображаемому двумя цифрами, из которых первая 1, — и это может представиться даже посредине числа, изображенного таким способом. Таким образом число произносится быстрее, чем у нас, если только мы не захотим произносить цифры по одиночке в их порядке, но, с другой стороны, этот способ представляет тот недостаток, что одна и та же цифра может иметь различные названия, как, например, в приведенном случае 7 и 8. Это связано, однако, со способом, которым часто пользовались для запоминания известных чисел или даже математических правил и который заключался в стихотворном изложении их; объясняясь склонностью индусов к поэзии, он в то же время представлял некоторые практические удобства.

Правда, приведенный нами пример взят из Брамагупты, т. е. сочинения, написанного уже значительно позже изобретения позиционной системы, но по существу своему этот способ обозначения чисел относится к глубокой древности, ибо он предполагает наличие для каждого числа древних слов, образованных в связи с их отношениями к некоторым предметам. В приведенном нами примере нет нуля; возможно поэтому, что сам пример древнего происхождения.

Что касается письменной нумерации в собственном смысле слова, то, как мы уже сказали, девять значащих цифр встречаются в очень древних надписях. Возможно, впрочем, что при составлении из них больших чисел пользовались способом, который был еще недавно употребляем на Цейлоне: при нем отчасти дополняли — как это делали греки — ряд из девяти цифр особыми знаками для 10, 20, 30, . . ., 100, затем для 1000 и т. д., отчасти же обозначали, подобно китайцам, число сотен соответствующей цифрой, помещенной перед знаком 100. Возможно также, что пользовались полностью китайским методом.

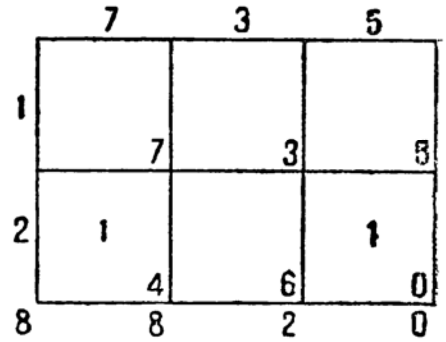
Действительно, еще Ариабхатта пользуется, примерно, этим методом; для обозначения цифр он употребляет согласные; десятичные же единицы выражаются с помощью присоединения к согласным гласных; так

$$\mathrm{ga} = 3, \quad \mathrm{gi} = 30, \quad \mathrm{gu} = 30\,000 \text{ и т. д.}$$

Таким образом он получает звуковые выражения для чисел, которые можно уложить в стихотворный размер.

Приемы счета индусов до введения цифры 0 были, возможно, очень похожи на те способы, которыми пользовались после установления позиционной системы, ибо употреблявшаяся ими письменная нумерация позволяла, во всяком случае, показать, сколько берут десятичных единиц каждого порядка.

Некоторые из методов, употреблявшихся авторами, сочинения которых дошли до нас, восходят, может быть, к весьма отдаленным временам, когда значение каждой из 9 цифр уточнялось положением ее в заранее разделенной раме; действительно, имея такую раму, можно обходиться совершенно без нуля. Нижеследующая рама (фиг. 28) показывает, как следует умножать 12 на 735; ею пользовались также и для бо́льших чисел. Произведения отдельных цифр разложены здесь на единицы и десятки; после этого остается произвести сложение в направлении одной из диагоналей малых квадратов.



Фиг. 28.

Правила счета при позиционной системе были у индусов—по крайней мере в существенных чертах — те же, что употребляемые в настоящее время. Имеющиеся различия связаны большей частью с чисто́ внешними обстоятельствами. Индусы пользовались счетными досками сравнительно небольших размеров по сравнению с размерами цифр, которые для большей ясности писали довольно большими; но эти цифры можно было легко стереть и заменить другими. Поэтому ничто не мешало производить сложение и умножение, по желанию, слева направо, лишь бы не забывали исправить написанные уже цифры, прибавив к ним те избыточные единицы высшего порядка, которые могли получиться от умножения последующих цифр.

Если производивший умножение на многозначное число настолько уж наловчился, что мог не выписывать цифр так подробно, как это указано в вышеприведенной таблице, то он мог начать с умножения на наиболее значащую цифру, затем, произведя умножение на следующую за этим цифру, сложить полученное таким образом частичное произведение с ранее полученным и т. д. Таким образом на таблице имелось кроме множимого, постоянно перемещаемого так, чтобы его единицы находились на одной вертикали с единицами образуемого частичного произведения, и кроме множителя лишь одно число, полученное от сложения образованных уже ранее частичных произведений.

Но это постоянное стирание требует большой сноровки, ибо при нем уничтожается всякая возможность проверить свои ошибки; здесь приходится рассчитывать на память, которая должна удерживать не только числа, над которыми оперируют в данный момент, но и таблицы, которыми пользуются. Еще в настоящее время в Индии выучивают наизусть подобные весьма обширные таблицы, и нет сомнения, что так поступали и в древности. Так, например, в настоящее время заучивают таблицы умножения, где одним из множителей являются числа от 1 до 10, а другим — числа от 1 до 30 и даже до 100, не говоря о дробях $^1/_4$, $^1/_2$, $^3/_4$, $1^1/_2$, $2^1/_2$, $3^1/_2$, а также заучивают обширные таблицы квадратов. При такой тренировке памяти нет ничего удивительного в том, что индусы могли производить так называемое *умножение Фурье*, состоящее в том, чтобы образовать накрест и тотчас складывать произведения отдельных цифр множителей, дающих в окончательном произведении десятиричную единицу того же порядка.

3. Приложения числового счета. Посмотрим теперь, к каким задачам индусы применяли свои способности к числовому счету, способности, красноречивейшим свидетельством которых является создание позиционной системы и которые в дальнейшем нашли в этой системе свое надежнейшее орудие. Указания по этому вопросу нам дают многочисленные правила счета и богатейшее собрание задач, содержащихся в „Лилавати“ Бхаскара, а также и в работах других авторов. Так, например, уже Ариабхатта дает нам для извлечения квадратных и кубических корней те самые правила, которые мы выводим в настоящее время из формул $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$.

Из вопросов нашей школьной арифметики индусы были знакомы с простым и сложным тройным правилом, с правилами простых и сложных процентов, с правилами товарищества, задачами на смешение и т. д. У них имелись также определенные правила для решения ряда других задач, которые в настоящее время мы решаем с помощью уравнений Среди этих правил имелось и *правило ложного положения* (regula falsi), которое мы встретили уже у египтян, но они не ограничились этим простым правилом. Из позднейших арабских источников мы знаем, что они пользовались так называемым правилом *двух ложных положений* (regula duorum falsorum). С помощью его, пользуясь двумя пробными значениями, решали задачи, которые, выраженные уравнением, зависели бы от уравнения первой степени вида:

$$f(x) = ax + b = k.$$

Если после подстановки $x = \alpha$ и $x = \beta$ в левую сторону мы получим значения $f(\alpha)$ и $f(\beta)$, отличные от k, то x можно получить из разностей $k - f(\alpha)$ и $k - f(\beta)$, взятых в сочетании с α и β, на основании правила, выражаемого формулой:

$$x = \frac{\beta[k - f(\alpha)] - \alpha[k - f(\beta)]}{[k - f(\alpha)] - [k - f(\beta)]}.$$

Легко заметить, что это правило совпадает с тем, что мы называем теперь *простой интерполяцией*; мы знаем, что оно годится не только для точных выкладок, как у индусов, если $f(x)$ есть, действительно, целая функция первой степени, но и для получения большего приближения, если α и β представляют уже приближенные значения. Но в этом новом употреблении указанное правило встречается лишь значительно позже — у арабов и европейских ученых.

Другое весьма общее правило — это правило *обращения*, заключающееся в следующем: если нужно найти число, которое после ряда операций приводит к некоторому известному числу, то для этого необходимо над этим последним числом произвести в обратном порядке все обратные операции.

Кроме того, у индусов существовал ряд специальных правил, для установления которых нам пришлось бы прибегнуть к решению уравнений первой или второй степени с одним или несколькими неизвестными. Это относится, например, к правилам насчет арифметических и геометрических прогрессий, дающим не общие отношения, в которых можно по произволу считать неизвестным то или другое из разных количеств, а применимых к частным случаям для вычисления в отдельности каждой из величин, если даны все другие величины. Правила эти излагаются без всяких доказательств в „Лилавати". Это относится также к другим довольно разнообразным правилам, которые мы рассмотрим лучше в следующей главе и которые очень показательны для вопроса о знакомстве индусов с теорией чисел.

Прежде чем покончить с вопросом об арифметике индусов, мы приведем несколько примеров того, как они пользуются своими различными арифметическими правилами.

В нижеследующем примере мы имеем чисто числовое применение названного уже нами метода обращения:

Красавица с сверкающими глазами (т. е. Лилавати), ты, знающая истинный метод обращения, назови мне число, которое, умноженное на 3, сложенное с $\frac{3}{4}$ произведения, разделенное на 7, уменьшенное на $\frac{1}{3}$ частного, умноженное на самое себя, уменьшенное на 52, после извлечения квадратного корня, прибавления 8 и деления на 10, будет равняться 2.

Нижеследующая задача решается при помощи простого правила ложного положения:

Пятая часть пчелиного роя села на цветок кадамбы, треть — на цветок силинды, тройная разность этих двух чисел улетела на цветок кутаджи, и только одна единственная пчела носится в воздухе, привлекаемая ароматом жасмина и пандануса. Назови мне, красавица, число пчел!

Задача на квадратное уравнение представлена в следующем виде:

Посреди сражения яростный сын Притхи схватил некоторое число стрел, чтобы убить Карну; половину их он употребил на собственную защиту, а четверное количество квадратного корня — против лошадей; 6 стрел пронзили возницу Салью, 3 других прорвали зонтик Карны, разбили его лук и знамя и одна пронзила ему голову. Сколько стрел было у Арджуны (сына Притхи)?

Нижеследующее представляет пример на тройное правило:

Если 16-летняя рабыня стоит 32 нисхи, то сколько стоит 20-летняя?

Автор, очевидно, считает, что цена рабыни обратно пропорциональна ее возрасту, но он ограничивается лишь заявлением, что стоимость живых существ определяется по их возрасту.

Несколько более осмысленны нижеследующие примеры на сложное тройное правило:

30 досок толщиной в 12, шириной в 16 дюймов и длиной в 14 футов стоят 100 нисх; сколько стоит 14 досок толщиной в 8, шириной в 12 дюймов и длиной в 10 футов? Если перевозка первых досок стоит 8 драхм за одну милю, то сколько будет стоить перевозка последних досок на расстояние в 8 миль?

Даже и в этом случае на практике не существует пропорциональности между размерами доски и ее ценой, а также между количеством перевозимых досок и ценой за провоз, так что можно сказать вообще, что задачи эти просто придуманы для упражнения в выкладках.

Эти несколько примеров достаточно показывают, как разнообразны источники, служащие для составления задач; в других случаях ищут то количество цветов, то высоту процента, то какую-нибудь геометрическую величину; само это богатство и разнообразие форм свидетельствует о том чистом удовлетворении, которое испытывали, составляя и решая задачи. О том же свидетельствует один автор VII в., заканчивающий свою книгу следующими словами: „Подобно тому, как солнце затмевает своим блеском звезды, так мудрец затмит славу других людей, предлагая — и особенно решая — на народных собраниях алгебраические задачи“.

4. Алгебра и теория чисел; геометрия. Мы перейдем теперь к алгебре, которую Бхаскара рассматривает, особенно, в своем „Виджаганита“ или „Вычислении корней“, представляющем просто теорию вычисления, сопровождаемую доказательствами. Правда, доказательства эти не носят печати греческой строгости: по существу, они заключаются в сведении задач к уравнению, решение которого доказывает правильность вычислений, служащих для решения этих задач; но, во всяком случае, это дает нам возможность хоть отчасти понять, как были найдены правила вычисления, данные в „Лилавати“.

Индусская алгебра похожа на алгебру Диофанта в том отношении, что она освободилась от геометрического способа представления и рассматривает числа только как таковые. Но грек Диофант требовал, чтобы получившиеся в результате вычисления величины были *рациональными* величинами, между тем как индусы, менее требовательные по части логической строгости, самым спокойным образом применяли к иррациональным числам правила вычисления рациональных чисел; благодаря этому обстоятельству они были гораздо более свободны в своих алгебраических операциях. Вместо преобразований иррациональных величин, производившихся Эвклидом в геометрической форме, мы встречаем у индусов прямые выкладки с иррациональными числами. У них, между прочим, имелись правила для приведения знаменателей дробей к рациональному виду и для уничтожения двойной иррациональности; они знали даже, что

$$\sqrt{16+\sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}}=$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6};$$

результат был получен ими, вероятно, при помощи обратного вычисления.

Еще и в других отношениях индусы переходили границы, которые ставили себе осторожные греки. Так, например, греки, не имея понятия *отрицательных величин*, должны были следить за тем, чтобы обе стороны уравнения были всегда положительными для значения неизвестной, удовлетворящей ему; а если задача все же приводила к отрицательному результату, то грек, если он знал причину этого, должен был изменять формулировку задачи так, чтобы в конце концов получилось все-таки положительное решение. Индусские математики принимали спокойно результаты вычислений, какими бы они ни были; они нисколько не интересовались вопросом о том, до каких пор стороны полученного уравнения оставались положительными, и если искомая величина оказывалась отрицательной, то нередко без сомнения они отбрасывали такого рода корень, но нередко также они довольствовались им, толкуя его, просто как долг. Они установили также правила для произведения действий с величинами, имеющими знаки, хотя первоначально они применяли их лишь к отдельным членам в выкладках с многочленами. Исходя из этого, они установили существование двух знаков у квадратного корня, а значит — и двух корней у уравнения второй степени, но, когда один из этих корней был отрицательным, они чаще всего отбрасывали его.

Другим доказательством верного математического чутья индусов является правильное объяснение индусами символа $\frac{a}{0}$, хотя, впрочем, мы встречаем у них и случаи совершенно неправильного употребления образованных таким образом величин.

Что касается технических средств анализа, то индусы для изображения искомых величин и их степеней употребляли, подобно Диофанту, символы, являвшиеся в действительности сокращениями слов, но они в этом отношении пошли дальше Диофанта, ибо они были в состоянии обозначать одновременно несколько разных неизвестных. Для этого они приписывали каждой из неизвестных особый *цвет*, название которого они тоже сокращали; это расширение символики повлекло за собой расширение операций над выраженными таким образом величинами.

Вооруженные такой усовершенствованной символикой, индусы должны были бы продвинуться дальше в исследовании определенных уравнений с одной или несколькими неизвестными, но в действительности мы в этой области не встречаем ничего нового по сравнению с греками, у которых они, несомненно, заимствовали решение уравнений второй степени. Но зато мы встречаем у них ценное нововведение в области неопределенных уравнений: в отличие от Диофанта индусы не довольствовались рациональными решениями, а искали только целочисленных решений.

При целочисленном решении неопределенного уравнения первой степени они поступали приблизительно так, как поступают и в настоящее время, решая его с помощью непрерывных дробей. Но так как соответствующие правила даны без доказательства, то мы не знаем, как они были открыты. Заметим только, что правила эти нетрудно установить, даже не пользуясь понятием о непрерывных дробях и их подходящих.

Прежде всего, ясно, что корень уравнения

$$ax - by = c$$

можно получить, путем умножения на c, из корней уравнения

$$ax = by = 1;$$

если в этом последнем уравнении $a > b$ и если деление a на b дает частное q и остаток r, то имеем:

$$y = qx + \frac{rx - 1}{b};$$

теперь нахождение такого корня x, чтобы $\frac{rx - 1}{b} = z$ было целым числом, зависит от уравнения с более простыми коэфициентами. Произведенная нами операция приводит к тем же числам, которые получаются при нахождении наибольшего общего делителя, и теперь остается продолжать ее, пока не получится коэфициент 1; после этого подстановка приводит к тем же результатам, что и вычисление с подходящими значениями непрерывной дроби.

Индусы занимались не только одним уравнением с двумя неизвестными, но также и системами уравнений с большим числом неизвестных. Так, мы встречаем у них нередко задачи, где требуется найти число, которое при делении на различные данные числа давало бы данные остатки. Возможно, что первоначально задачи эти проникли к индусам из Китая, где в древности было найдено правило для решения их. Впрочем, часто они относятся к определению астрономических периодов, по истечении которых повторяются одновременно определенные явления, как, например, к определению затмений и т. д.; но величины этих периодов (известные греческим астрономам) приводят только к однородным уравнениям.

Если, например, задают вопрос, каков промежуток времени, содержащий в себе как целое число дней x, так и целое число годов t, то, имея в виду, что 30 лет равняется 10 960 дням, получаем:

$$10\,960t = 30x$$

или

$$\frac{x}{10\,960} = \frac{t}{30}.$$

Если, наоборот, спрашивают, когда произойдет совпадение некоторых определенных явлений, то получаются полные неопределенные уравнения первой степени. Если, например, до конца дня нехватает $\frac{m}{n}$ дней, а до конца года $\frac{p}{q}$ лет и если момент совпадения нового дня с новым годом произойдет через $\left(x+\frac{m}{n}\right)$ дней $=\left(t+\frac{p}{q}\right)$ лет, то имеем:

$$10\,960\left(t+\frac{p}{q}\right)=30\left(x+\frac{m}{n}\right).$$

Но Бхаскара упрощает задачу, предполагая, что $q = 10\,960$ и $n = 30$.

Индусы решали легко уравнение $xy + ax + by = c$; для этого его преобразовывали в $(x + b)(y + a) = c + ab$, а потом разлагали $c + ab$, представляя его в виде произведения двух целых сомножителей.

Но индусы сумели справиться и с бóльшими трудностями, исследуя неопределенные уравнения второй степени по отношению к каждой из неизвестных: при этом, в отличие от Диофанта — который, вероятно, толкнул их мысль в этом направлении — они искали не просто рациональных, а целочисленных решений. В частности, они занимались изучением уравнения

$$y^2 = ax^2 + b, \qquad (1)$$

к которому сводится ряд других неопределенных уравнений второй степени.

Чтобы дать представление об употреблявшемся ими методе, мы приведем здесь их решение особенно важного уравнения

$$y^2 = ax^2 + 1, \qquad (2)$$

которое значительно позже под названием *уравнения Пелля* (Pell) занимало мысль европейских математиков; оно играет важную роль при решении вопроса о том, как выразить возможно более точным образом посредством дроби $\frac{y}{x}$ корень квадратный из числа a, не являющегося квадратом.

Начнем с приема, который отличается от приема Диофанта, но благодаря которому индусы умели получать неограниченное число рациональных решений; для этого составим сперва уравнения:

$$\left.\begin{aligned} ax_1^2 + b_1 = y_1^2, \\ ax_2^2 + b_2 = y_2^2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где для определения b_1 и b_2 берут произвольные x_1, y_1, x_2 и y_2. Если мы решим эти уравнения относительно b_1 и b_2, то произведение этих двух количеств можно написать в виде:

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2.$$

Это дает нам третье уравнение

$$\left.\begin{aligned} &ax_3^2 + b_3 = y_3^2, \\ \text{где}\quad & \\ &b_3 = b_1b_2,\ x_3 = x_1y_2 + x_2y_1, \\ &y_3 = ax_1x_2 + y_1y_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тождественно приравнивая оба уравнения (3), получаем:

$$a(2x_1y_1)^2 + b^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

или

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b}\right)^2. \tag{5}$$

Таким образом мы имеем рациональное решение уравнения (2); если продолжать подставлять произвольные значения на место x_1 и y_1, то нередко удается получать целочисленные значения x и y. Следует, в частности, отметить случаи, когда удается получить уже, что $b = \pm 1$ или ± 2.

Если $b = 1$, то можно, поступая таким образом, получить из одного какого-нибудь решения уравнения (2) новое решение и затем сколько угодно решений; если $b = -1$ или ± 2, то (5) дает, в свою очередь, целочисленное решение уравнения (2), ибо из $y_1^2 = ax_1^2 \pm 2$ можно вывести, что $ax_1^2 + y_1^2 = 2ax_1^2 \pm 2$, т. е. равно четному числу. В то же время знание одного решения (2) дает возможность благодаря (4) получить из одного решения (1) неограниченное количество решений.

Если, однако, для некоторого данного значения a последовательные пробы не приводят к уравнению вида (1), для которого b равно ± 1 или ± 2, то прибегают к так называемому *циклическому* методу для приведения значения b. Пусть, например, дано уравнение:

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2,$$

в котором b уже настолько мало, насколько этого удалось добиться с помощью проб, заключающихся, скажем, в том, чтобы приписать $\frac{y_1}{x_1}$ приближенное значение $\sqrt{a}$; x_1 и b_1 в этом случае первые между собой, ибо, имей они общего множителя, такой множитель был бы на обеих сторонах заданного уравнения квадратным множителем, и можно было бы получить более простое уравнение того же вида. Теперь берут уравнение

$$\frac{x_1 z + y_1}{b_1} = x_2,$$

из которого можно определить целочисленные значения x_2 и z, и выбирают те из них, при которых $z^2 - a$ по возможности мало; если положить тогда

$$\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2,$$

то b_2 есть целое чило, а $ax_2^2 + b_2$ — новое квадратное число y_2^2. Это нетрудно доказать, однако индусские авторы не доказывают этого, равно как и того, что таким образом можно действительно дойти до $b = 1$. Им нехватало, очевидно, математической проницательности, чтобы установить теоретически этот последний пункт, доказанный впоследствии Лагранжем (Lagrange), нашедшим со своей стороны, то же самое решение. Однако большое искусство индусов в вычислениях обнаруживается в том, что их числовые опыты привели к вполне правильному методу, приложения которого вызвали полное доверие к нему.

Помимо методов, относящихся, как вышерассмотренный, к теории чисел, индусы знали еще ряд предложений из этой области, как, например, нижеследующую теорему: величины вида

$$\left[\frac{\left(\frac{8p^2-1}{2p}\right)^2}{2} + 1\right]^2 \pm \left(\frac{8p^2-1}{2p}\right)^2 - 1$$

обе представляют квадраты.

Укажем еще, что индусы знали и пользовались формулами для определения числа перемещений и сочетаний, а также, подобно грекам, — формулами для сумм квадратов и кубов первых чисел натурального ряда.

Что касается геометрии индусов, то на ней не приходится останавливаться: большинство знакомых им теорем было, наверное, заимствовано у греков, хотя сами они нередко шли дальше в вычислениях, основанных на этих теоремах. Однако следует все же обратить внимание на одну теорему Брахмагупты, являющуюся распространением на четыреугольники формулы Герона для треугольников. Согласно этой теореме, площадь всякого четыреугольника равняется $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, где a, b, c и d представляют стороны четыреугольника, а s — полупериметр его. Уже Бхаскара знал эту формулу и, в связи с этим, высказывал ошибочное утверждение, что четыреугольник определяется его четырьмя сторонами. Правда, Брахмагупта рассматривает в действительности только два определенных класса вписанных четыреугольников, для которых теорема верна, но в формулировке ее он не оговаривает этого, и возможно, что и вообще он не принимал во внимание этого обстоятельства. Четыреугольники, которыми он занимается, это, с одной стороны, — равнобедренные трапеции, а, с другой, — вписанные четыреугольники с пересекающимися под прямым углом диагоналями.

Возможно (хотя это и не вытекает определенным образом из изложения Брахмагупты), что индусы занимались последними названными четыреугольниками потому, что, в отличие от Птолемея, они пользовались в своей тригонометрии не таблицами хорд, а таблицами синусов. Действительно, если принять диаметр окружности равным 1, а две смежные дуги соответственно равными $2x$ и $2y$, то стороны четыреугольника будут равны $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ и $\cos y$, а диагонали разделятся на отрезки, соответственно равные произведениям $\sin x \cos y$ и $\sin y \cos x$ и $\sin x \sin y$ и $\cos x \cos y$. Вероятно, этой же фигурой пользовались для определения $\sin(x+y)$.

Однако имеющиеся в Сурья Сиддханта таблицы синусов и синус-верзусов даны для промежутков не меньше $3°{}^3/_4$, между тем как птолемеевы таблицы хорд соответствуют таблицам синусов с промежутками в $0°15'$. Если таблицы эти — равно как и ряд других отделов Сурья — греческого происхождения, то они, вероятно, заимствованы из трудов, более древних, чем труд Птолемея; возможно, что источник их следует искать у александрийских астрономов, пользовавшихся, может быть, в противоположность Гиппарху и его школе, таблицами синусов. Но возможно также, что заслуга замены таблиц хорд таблицами синусов принадлежит исключительно индусам, которые при своем чутье к практическим выкладкам могли заметить преимущество таблиц синусов, применимых непосредственно к углам прямоугольных треугольников.

Во всяком случае, индусам, вероятно, принадлежит установление одного эмпирического закона для последовательного образования синусов, закона, выведенного из рассмотрения их первых и вторых разностей; наоборот, при употреблении таблицы синусов они пользовались в своих астрономических выкладках правилами, содержащимися в „Аналемме“ Птолемея (стр. 159).

Возможно также, что приближенное значение $\pi = \frac{31416}{10000}$, встречающееся у Ариабхатты, греческого происхождения, ибо, как мы знаем, Аполлоний определил π точнее, чем Архимед; но зато встречающееся у Брахмагупты приближенное значение $\pi = \sqrt{10}$ слишком произвольно, чтобы его можно было приписать грекам.

Точно так же нет греческого прототипа для следующей приближенной формулы, встречающейся у Бхаскара и позволяющей вычислить хорду k некоторой данной дуги:

$$k = 4d \frac{b(p-b)}{{}^5/_4 p^2 - b(p-b)},$$

где d — диаметр окружности, p — длина ее и b — длина дуги.

СРЕДНИЕ ВЕКА.

1. Общее введение. Уже в древности греки сумели, как мы видели, создать геометрию, изучающую свойства пространства столь полно и точно, что она могла сохранить все свое научное значение даже перед строгими требованиями современного знания. С другой стороны, так как с помощью геометрических форм можно представить также вообще непрерывные величины, то геометрия эта содержала в себе, кроме того, и значительную долю того, что мы в настоящее время называем чистой математикой. Облеченная в эту геометрическую форму, алгебра привела к решению уравнений второй степени и различным обширным приложениям этих уравнений. Она дошла даже до изучения уравнений третьей степени, которое, правда, не привело к радикалам, как это делается при решении их в настоящее время, но которое с помощью теории конических сечений позволило исследовать теоретически проблемы, зависящие от этих уравнений. Метод этот был, собственно, применим и к задачам, которые зависели бы от уравнений четвертой степени, хотя фактически задачи этого рода никогда прямо не ставились.

Наряду с этими вопросами, относящимися к обыкновенному алгебраическому анализу, греки исследовали проблемы, рассматриваемые в настоящее время в интегральном исчислении, и хотя их попытки в этом направлении касались лишь небольшого числа частных вопросов, но они были сделаны с научным мастерством, вызывающим в наше время тем большее удивление, чем выше становятся наши научные требования.

Наконец, мы видели, как мало-по-малу развились числовые приложения математики к потребностям астрономии, а у Диофанта мы нашли образцы глубокого математического анализа числовых условий рациональных решений.

С другой стороны, древнее искусство индусов в операциях над числами привело к созданию настоящей арифметики. Они употребляли *позиционную систему*, как и мы в настоящее время, а контакт с греческой математикой дал толчок их собственному творчеству. Наиболее важным из их достижений было умелое исследование вопросов, относящихся к целым числам. Но некоторые из этих достижений относятся, может быть, уже к эпохе, когда началось возрождение математической мысли у арабов.

Чтобы правильно оценить заслуги народов, к которым перешло после греков и индусов дело дальнейшего развития математики, следует принять во внимание, как малодоступна, собственно, была последняя для новых народов. Она была даже малодоступна для позднейших греков. И если у последних могло сохраниться — или, по крайней мере, временами возрождаться — правильное понимание уцелевших трудов прошлого в их частностях, то у них не осталось все же понимания этих трудов в целом, без которого невозможно было дальнейшее продвижение вперед. Впрочем, труды эти не сообщали ничего о некогда столь плодотворных методах, а традиция, которая могла бы оказать помощь в этом отношении, уже давно была утеряна. Поэтому приходилось самостоятельно открыть эти методы или какие-нибудь другие, прежде чем мог возникнуть вопрос о полном усвоении названных трудов; мало того: принадлежность ряда открытий грекам могла быть установлена лишь тогда, когда их удалось найти в другом виде Тем не менее, во время всего этого периода возрождения математики наследие греков — или хотя бы то, что научились мало-по-малу понимать в их трудах — сыграло огромную роль в качестве духовного импульса и руководства.

Благодаря легкости своих практических приложений индусская арифметика имела больше шансов проникнуть там, где представлялся случай познакомиться с ней. Надо помнить, однако, что недостаточно владеть ее принципами, чтобы быть в состоянии оценить ее по достоинству. Нам самим для пользования ею приходится затратить, начиная с детства, известные усилия, чтобы выучить наизусть простейшие таблицы и привыкнуть к манипулированию ими. Поэтому преимущества ее не бросались сразу в глаза, особенно тем, кто привык уже к другим методам счета.

Прямыми наследниками греческой математики к концу древности, наследниками нескольких сохранившихся капитальных трудов, понимание которых шло непрерывно на убыль, явились восточно-римская империя и греко-кафолическая цивилизация со столицей Константинополем. Хотя в дальнейшем сюда и могло проникнуть индусское влияние, но в действительности Константинополь представляет нам лишь картину продолжения начавшегося захирения. Сохранившиеся труды великих греческих геометров, это наследие прошлого, были без всякой пользы похоронены, и они были извлечены из забвения лишь к концу средних веков, став тогда одним из элементов европейской культуры.

Но еще до этого одна часть названных трудов, понимание и интерес к которым возродились, вернулась на Запад совсем иным путем, через посредство арабов.

Математическое наследие не досталось тем народам, которые после конца римской империи, стали играть главную роль в западной Европе; хотя они приняли христианство и подверглись влиянию римской цивилизации, но математика не составляла элемента последней. Некогда романтики изображали европейское средневековье яркими красками, далеко не соответствовавшими действительности; в настоящее время, наоборот, часто склонны впадать в другую крайность и говорить лишь о мраке средневековья;

это мнение тоже во многом ошибочно, особенно если сравнить уровень цивилизации большинства названных народов в начале средних веков с состоянием ее на исходе средневековья. В действительности, все то, что они заимствовали как у христианства, так и у римской государственности, было переработано в религиозно-духовных целях тружениками, жившими, главным образом, в монастырях; для европейских народов все эти заимствования явились, благодаря своей цивилизующей миссии, настоящим благодеянием.

Что касается, в частности, математики, то с ней тогда можно было познакомиться только по скудным извлечениям римских землемеров из практических правил египтян*, а также Герона, или, в лучшем случае, по отрывкам Эвклида либо Никомаха. Хотя преемники землемеров и отличались большими теоретическими интересами, чем они, но в научном отношении они не на много возвышались над ними; поэтому их изложение этих отрывков давало повод к многочисленным недоразумениям, как, например, к тому, что фигурные числа принимали за выражение площадей.

Наиболее полезной и наиболее практической частью математического наследия, оставшегося от римлян (которые, в свою очередь, получили его от греков), была счетная доска, абак, усовершенствованный затем — в эпоху, дату которой трудно точно установить** — следующим образом: вместо одинаковых марок или жетонов, которые помещали в различных столбцах доски и которые своим числом обозначали число десятичных единиц соответствующих столбцов, стали употреблять девять различных знаков, соответствовавших числам от 1 до 9. Разумеется, наследие это было ничтожно по сравнению с тем, что в свое время египтяне передали грекам.

Однако и монастыри и торговые города южной Европы (особенно итальянские) представляли благоприятную почву для процветания греческой математики, как это обнаружилось, когда она вернулась в Европу в новом улучшенном виде. Виновниками этого возвращения были арабы. Арабы, с одной стороны, сумели усвоить греческую математику, обогатив ее собственными достижениями, сделавшими ее более доступной пониманию, чем она была по сохранившимся древним греческим трудам; с другой стороны, они прибавили к ней в широких размерах индусскую арифметику. Разумеется, потребовалось еще некоторое время после встречи европейцев с арабами в крестовых походах или

---

* С тех пор, как, повидимому, доказано, что Герон жил, по крайней мере, веком позже Августа, утверждение о зависимости римских *агрименсоров* от Герона и от египтян вызывает серьезные сомнения. Источниками знаний *агрименсоров* являются, скорее — с одной стороны, через посредство полиграфа Варрона, этруски, а с другой, — утерянные отчасти труды греческих авторов (Т.).

** Если усовершенствование это и было сделано, наверное, до Герберта, то не доказано, что оно предшествовало введению арабских цифр в Испанию. Возможно, что оно было сделано именно в последней (еврейскими купцами) для того, чтобы можно было, пользуясь выгодами новой нумерации, продолжать употреблять римский abacus, избавлявший от необходимости писать (Т.).

в Испании и Сицилии, чтобы первые усвоили математику последних, а заодно с этим — и часть греческой и индусской математики и арифметики. Но именно в процессе этого усвоения подготовлялось то движение к возрождению, к быстрому развитию математики, которое к началу XVI в. совпало с огромными достижениями в других областях, отмечающими начало нового времени.

Из всего сказанного следует, что наиболее ранняя — и наиболее значительная — часть в развитии математики в средние века выпадает на долю арабов. Что касается внешней обстановки, в которой протекало это развитие, то прежде всего я обращу внимание на ту поразительную быстроту, с какой арабы и магометанство распространили свое владычество на огромной части земного шара. Приняв мусульманство, жители завоеванных областей скоро слились с арабами, так что ряд стран оказался связанным друг с другом. Среди этих стран был и Египет — древняя колыбель геометрии, с Александрией, где наука эта расцвела особенно пышно и где она дольше всего продолжала еще существовать, — а также ряд других областей, населенных греками или подвергшихся влиянию эллинской культуры. Арабы покорили также страны, бывшие некогда местопребыванием вавилонских и халдейских астрономов; они проникли до Индии и, таким образом, оказались в более непосредственном контакте с индусской арифметикой, чем были греки.

Но этого благоприятного стечения обстоятельств было недостаточно для полного усвоения накопленных к тому времени математических знаний. Ведь мы видели, что для самих греков греческая наука оставалась в течение очень долгого времени бесполезным сокровищем. Мы видели также, что римляне, имевшие в свое время возможность, как впоследствии арабы, усвоить греческую математику — притом в эпоху, когда последняя сохранила еще целиком почти свою первоначальную свежесть, — не сумели использовать эту возможность. Возможно, конечно, что собственная римская цивилизация была, при всей своей односторонности, слишком обширна и своеобразна, чтобы римляне были в состоянии ассимилировать себе наиболее трудные отделы греческой науки, и, в частности, математику, и сумели стать такими же хорошими учениками, какими стали по отношению к ним самим вторгшиеся в их империю варварские народы, с одной стороны, и какими оказались, с другой стороны, арабы, этот столь юный народ, по отношению к остаткам греческой цивилизации.

Не все арабские государи были такими ненавистниками науки, как Омар — второй преемник пророка, — хотя ошибочно приписывать ему варварское уничтожение александрийской библиотеки, сожженной будто бы по его повелению: она была разрушена до него и, вообще, до эпохи господства арабов. Наоборот, ряд династий считал делом чести покровительство наукам, полагая, что тем самым они способствуют усилению своей власти. Среди них достаточно назвать ряд аббассидов — Альмансура, Гарун Аррашида и Альмамуна (754—833) — бывших преемниками Омара и основавших в 762 г. Багдад, ставший их резиденцией. Еще долго после аббассидов Багдад продолжал оставаться средоточием арабской математики; с ним связаны самые крупные позднейшие математики. В Багдаде же, после завоения его монголами (1258), астроном и математик Нассир Эддин (Nassîr Eddîn) сумел добиться для своей науки привилегированного положения. Точно так же в Багдаде жил в XV в., после нового нашествия варваров, последний из арабских математиков, которого мы намерены назвать, татарский принц Олуг Бег (Oloug Beg)*. Впрочем, из Багдада наука разлилась до самых далеких окраин обширного мусульманского мира. Очень важным для дальнейшего развития математики обстоятельством было образование арабской школы на Западе, явившейся научным посредником между Востоком и западноевропейскими народами.

При аббассидах были переведены на арабский язык „Начала" Эвклида и „Альмагест" Птолемея; впоследствии были переведены труды Диофанта, Герона, Архимеда, Аполлония. Кроме этих основных трудов арабы были знакомы еще с утерянной для нас работой Гиппарха об уравнениях второй степени. Точно так же, начиная с царствования Альмансура, стали переводить астрономические сочинения индусов, Сиддханты, называвшиеся у арабов синдхинд (sindhind). Из них заимствовали употребление синусов и особенно индусскую арифметику, распространению которой способствовали еще торговые сношения.

Что касается других достижений индусской математики, то они, повидимому, не оказали большого влияния на арабов, по праву считавших себя учениками греков — особенно в научной области — и пренебрегавших недостаточно обоснованными теориями, которые они могли бы заимствовать у индусов.

Перевод наиболее трудных греческих произведений является лучшим доказательством того, что мало-по-малу научились понимать их; согласно всему сказанному нами выше, это было возможно лишь при наличии серьезной самостоятельной работы со стороны самих арабов. Дошедший до нас рассказ о переводчике Диофанта, Абуль Вафе (Aboul Wâfa) — о собственных заслугах которого у него будет речь ниже — показывает, какая требовалась со стороны каждого математика серьезная подготовка: в своей молодости он изучал у двух учителей спекулятивную и практическую арифметику (т. е. алгебру и арифметику), а еще у двух других учителей — геометрию.

2. Арифметика и алгебра арабов. Я попытался здесь показать все значение математических работ арабов — особенно по сравнению с римлянами — для того чтобы не ценили слишком низко плодов этой их деятельности на том основании, что полученные

* Нассир Эддин руководил обсерваторией в Мараге, построенной на средства Хулагона, но умер он в Багдаде в 1274 г. Однако во времена Олуг Бега, жившего в Самарканде, духовная гегемония Багдада давно уже прекратилась (Т.).

ими положительные результаты прибавили относительно немногое к тому, что уже знали греки; с другой стороны, само это последнее обстоятельство побуждает меня заняться арабами меньше, чем, казалось бы, этого требовали размеры сделанного ими в области математики. В нижеследующем мы будем говорить о крупнейших арабских математических авторах, но, скорее, как об образчиках для характеристики общего направления их трудов, чем как о значительных фигурах, важных при систематическом изложении арабской математики и ее развития.

Совсем еще недавно исследователи, благодаря плохому пониманию сохранившихся до нас трудов греческих авторов и недостаточному знакомству с индусской математикой, приписывали арабам всю честь создания алгебры, творцами которой были греки, а также арифметики, созданной индусами. Ошибка эта освящена даже словом *алгебра* и другим математическим термином, *алгорифм*, означавшим первоначально нумерацию по позиционной системе, а теперь применяемым нами ко всякой системе знаков и соглашений, позволяющей производить механически вычисления по известным правилам. Автором обоих этих терминов является один и тот же человек; с употреблением их связывалось представление, что этот автор является творцом как алгебры, так и теперешней системы нумерации.

Этот человек — Магомет ибн Муса Альховаризми (Mohammed ibn Mousâ Alkhovarizmi). Он принадлежал к той группе ученых, которой халиф Альмансур поручил переводы греческих математиков, измерение градуса меридиана и ряд других научных работ. Слово *алгорифм* это, просто, его собственное прозвище, перенесенное на заглавие одной из его книг по арифметике, в которой излагались правила письменного счета по позиционной системе; впоследствии так стали называться труды, способствовавшие распространению в Европе индусского способа счета, а затем наконец, — и сам этот счет.

Названная книга известна нам по латинскому переводу, начинающемуся словами: Dixit Algorithmi. В ней разъясняется способ начертания чисел, четыре основных действия с целыми числами и простыми дробями; но удвоение и деление на два рассматриваются здесь как особые действия. Для первых трех действий дается проверка с помощью девяти. Все в книге объясняется на словах; приводимые примеры излагаются (по крайней мере, в сохранившемся латинском тексте) не с помощью цифровых знаков, а с помощью чисел, изображенных словами, или по римскому способу. В книге не объясняется, как производить вычитание в том случае, если цифра вычитаемого больше соответственной цифры уменьшаемого.

Нетрудно понять, что от перевода такой книги индусская арифметика не стала сразу доступной европейцам; но написанная арабом, она свидетельствует о том, что индусская арифметика была к этому времени уже знакома арабам. В дальнейшем знакомство с ней могло распространиться благодаря этой книге снабженной соответствующими разъяснениями; автор ее определенно называет свой способ счета индусским.

Не вина также Магомета, если впоследствии ему стали приписывать изобретение алгебры. Он рассказывает, просто, что Альмансур предложил ему написать небольшое сочинение по „Алджебре“ (Aldschebr) и „Алмукабале“ (A'mukâbala), в котором сообщались бы самые необходимые сведения по арифметике и ее практическим приложениям; таким образом оба эти слова означали что-то уже раньше известное, ибо Магомет считает даже лишним объяснять их. Впрочем, о значении их мы можем догадаться по дословному смыслу их и по некоторым позднейшим разъяснениям. Первое слово означает операцию, с помощью которой можно перенести члены из одной стороны равенства в другую так, чтобы обе эти стороны содержали только положительные члены. Второе же слово означает следующую за этим операцию приведения (путем удаления на одной стороне уравнения и соответствующего сокращения на другой) однородных членов (т. е. членов, имеющих x в одной и той же степени), так что, в конце концов, в уравнении остается для каждой степени только один положительный член, расположенный на той или другой стороне.

Так, например, благодаря первой операции уравнение

$$2x^2 - 2x + 10 = x^2 + 5x + 4$$

превращается в

$$2x^2 + 10 = x^2 + 7x + 4,$$

а благодаря второй в

$$x^2 + 6 = 7x.$$

Название первой из этих операций, с которой должен был всегда начинаться анализ уравнений, было распространено затем на всю науку об уравнениях — алгебру. Таким образом эта наука, а впоследствии систематическое употребление требующейся для нее совокупности символов, а под конец вообще теория всяких операций с помощью символов над величинами получили название, относившееся первоначально только к одной специальной — и теперь вышедшей из употребления — операции. Действительно, мы в настоящее время — в отличие от греков, арабов и их непосредственных преемников в Европе — не требуем непременно, чтобы на каждой стороне уравнения были только положительные члены. Однако операция эта — как и все то, что идет от греческих математиков, — имела свое разумное основание, ибо, так как тогда признавали лишь положительные величины, таким путем стремились добиться того, чтобы обе стороны уравнения оставались положительными, каково бы ни было значение неизвестной.

В названном сочинении рассматриваются, в частности, уравнения второй степени и приложения их, а также уравнении первой степени. Все здесь излагается с помощью *слов*; так, неизвестная уравнения называется *корнем* или *вещью* (res), ее квадрат — просто, квадратом*.

Решение уравнений второй степени дается с помощью геометрической алгебры, как у Эвклида, но пользуются при этом отчасти другими фигурами, чем греческий геометр; так, например, для решения уравнения

$$x^2 + ax = b$$

прибегают к следующему чертежу: на четырех сторонах квадрата x^2 строят четыреугольники с высотой $\frac{a}{4}$; если теперь заполнить входящие углы получившейся фигуры квадратами со стороной $\frac{a}{4}$, то образованный таким образом квадрат со стороной $x + \frac{a}{2}$ будет иметь известное значение — $b + \frac{a^2}{4}$.

Этот способ решения, встречающийся еще у других арабских авторов и являющийся новым, по сравнению с Эвклидом, приложением геометрической алгебры, имеет, может быть, своим источником недошедшие до нас труды греков, — например, упомянутую уже работу Гиппарха о квадратных уравнениях. Однако не следует думать, будто труд Магомета представляет простое переложение какого-нибудь греческого образца; это видно хотя бы по применению уравнений к вопросам практической жизни, — например, к существовавшему у арабов наследственному праву; затем следует отметить, что Магомет ибн Муса приписывает подобно индусам два *корня* уравнению

$$x^2 + a^2 = bx.$$

Мы встречаем у него принадлежащее грекам значение $\pi = \frac{22}{7}$ и значение $\pi = 3{,}1416$, имеющее, может быть, то же самое происхождение; но он знает также встречающееся у индусов значение $\pi = \sqrt{10}$; это доказывает, что он заимствовал у них не только систему счета.

По вопросу о решении уравнений второй степени у Магомета ибн Мусы нет ничего существенно нового сравнительно с греческими авторами. И если позднейшие поколения заметили у него то, что они не нашли у греков, когда возродилось знакомство с их трудами, то это объясняется, может быть, тем, что ибн Муса кроме общих решений в геометрической форме дает еще числовые примеры, между тем как Эвклид довольствуется одними общими решениями, Герон дает лишь отдельные числовые приложения, а Диофант вообще не доказывает даваемого им решения.

* Собственно слово mâl, переведенное по-латыни через census, означает силу, состояние (Т.).

Если теперь мы перескочим к эпохе около 1000 г., то в Багдаде мы встречаем в это время две очень различных системы арифметики и счета. Из одного сочинения Альнасави (Alnasavî) видно, что к этому времени были достигнуты уже большие успехи в овладении индусским способом счета и в систематическом изложении и исследовании чисел. Так, у него имеются обозначения для дробей, которые посредством наших цифр — ведь числовые символы не одни и те же повсюду там, где употребляют позиционную систему — можно изобразить в следущем виде:

$$\frac{1}{11} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}; \quad 15\frac{7}{19} = \begin{matrix} 15 \\ 7 \\ 19 \end{matrix}.$$

Из упомянутой книги ясно, что индусская нумерация пустила к этому времени глубокие корни. Тем более странно видеть, что в это же самое время и в этом же самом месте замечательный математик Алькархи (Alkarchi) составляет книгу по арифметике, в которой нет и следа индусской нумерации. Числа здесь, наоборот, выражены словами, и иногда очень обширные выкладки производятся без употребления цифр; здесь обнаруживается как будто определенная, сознательная борьба против индусской системы, и не без основания была высказана гипотеза, что борьба эта отражает какие-то распри между религиозными сектами.

Но, не довольствуясь одним этим объяснением, следует рассмотреть, не вытекало ли различие между Альнасави и Алькархи, просто, из различия поставленных ими себе задач: первый желал дать правила для простейшего выполнения на практике выкладок; второй, наоборот, хотел написать научное сочинение о числах и употреблении их и поэтому имел все основания обратиться, как к исходному пункту, к грекам, а не к индусам. Если он заимствует у последних их тройное правило, то наряду с этим он кладет в его основу теорию пропорций Эвклида; и если он не сообщает каких-нибудь механических средств для облегчения практического производства выкладок, то еще хуже обстоит в этом отношении дело у самого Эвклида, который не только умалчивает о механических способах счета, которые должны были существовать в его время, но и вообще не приводит ни одного численного примера. Но если Алькархи находит все же возможность объяснить некоторые греческие методы счета — далеко уступающие способам индусов, — то это объясняется, без сомнения, его преклонением перед греками, преклонением, внушавшим ему, с теоретической точки зрения, интерес к совокупности этих методов, какого не вызывали еще индусские методы.

Но как бы ни объяснять указанную разницу между обоими названными авторами, она все же показывает, что потребовалось немало времени, чтобы слить воедино греческие и индусские элементы в области математики и счета; с другой стороны, эти книги доказывают также, что к тому времени уже имели в своем распоряжении оба эти источника.

Во всяком случае, Алькархи тоже умел производить операции над числами, пользуясь при этом даже другими механическими способами, чем те, которые приводятся в его арифметике. Доказательством этого являются, с одной стороны, обширные выкладки, которые встречаются в самой этой книге, а с другой, принадлежащий ему важный трактат по алгебре Альфахри (Alfachri, — названный так, вероятно, по имени одного лица). В этом труде он выступает перед нами, как выдающийся ученик Диофанта, который не довольствуется простым воспроизведением исследований и примеров учителя, но дает и самостоятельные ценные работы. Так, он расширяет символику Диофанта и в некоторых местах даже пользуется символами для двух неизвестных; он дает более полные правила для алгебраических выкладок с одной неизвестной и исследует ряд проблем, отличных от тех, которые встречаются у Диофанта, рассматривая даже неопределенные задачи новых видов.

В качестве примера этого приведем уравнения:

$$y^2 = x^3 + ax^2, \quad z^2 = x^3 + bx^2;$$

если положить

$$y = mx, \quad z = nx,$$

то получается:

$$x = m^2 - a = n^2 - b,$$

где m^2 и n^2 — произвольные квадратные числа, разность которых должна равняться $a - b$.

Однако бо́льшую ценность, по-нашему, представляют достижения Алькархи в другой области, относящиеся, скорее, к вопросам методологического характера. Чтобы оценить их по достоинству, надо вспомнить, что Алькархи не просто усвоил практические методы Диофанта; он отлично понимал также, — как свидетельствует об этом его арифметика, — что означает с точки зрения греков доказательство. Однако геометрические доказательства, бывшие согласно грекам единственным типом общих доказательств, он дает лишь для решения уравнений второй степени; но и в этой области он оперирует с большей легкостью, чем греки; так, в одном случае он представляет x^2 и ax с помощью отрезков, между тем как греческий автор мог бы добиться этого в доказательстве только косвенным образом, превратив x^2 и ax в прямоугольники с одной и той же стороной. Однако он ограничивается иллюстрацией большинства правил одним единственным примером, имеющим целью показать, как правила эти вытекают из самих вычислений. Он даже определенно заявляет, что для понимания алгебраических правил надо предварительно познакомиться с общими правилами арифметики, которые он дал в своем предыдущем труде, обещая подробнее изложить такие арифметико-алгебраические правила в особом трактате, который, к сожалению, не дошел до нас.

Сами по себе эти соображения не представляют, может быть, ничего особенно оригинального, ибо практические выкладки с рациональными числами должны были служить также образцом для греков в их методе геометрического исчисления, методе, с помощью которого они стали подвергать тем же операциям и иррациональные величины; важно было, однако, то, что соображения эти были сознательно выдвинуты на первый план. То же самое можно сказать о легкости и свободе, с какими Алькархи производит операции над иррациональными радикалами. Правда, величины эти не изображены у него символами, а изложены словами, соответствующими названиям показателей степеней одной и той же величины; однако автор показывает, подобно индусам, как можно производить выкладки с этими величинами, как, с одной стороны, их можно делить или умножать, независимо от значения степени, а с другой, — как можно складывать или вычитать квадратные и кубические корни, когда степени представляют подобные плоские или пространственные числа. Для доказательства этих последних предложений Алькархи прибегает не к выведению рациональных множителей из под знака радикала, а к прямому приложению формул

$$(a+b)^2 \quad \text{и} \quad (a+b)^3.$$

Мы видим, таким образом, что Алькархи производит вычисление с иррациональными радикалами или, иными словами, что он их рассматривает тоже как числа. Он поступает так еще и косвенным образом, когда у некоторых из его определенных уравнений оказываются иррациональные корни; тогда в этих уравнениях символы, соответствующие нашему x^m, представляют степени иррациональных чисел, между тем как у Диофанта x должен быть всегда рациональным числом.

Мы видели, что индусы оперировали самым спокойным образом с иррациональными числами, но вряд ли Алькархи сознательно подражал им. Тем не менее, знаменательно это сходство в данном отношении между ними и человеком, вполне освоившимся, благодаря греческим авторам, с идеей иррационального, человеком, который, проводя различие между геометрическими доказательствами и арифметическими объяснениями, дает этим понять, что он убежден в невозможности найти в этих последних общеобязательных доводов.

Будучи учениками греков, арабы не могли довольствоваться арифметическими рассуждениями, и мы в этом можем убедиться, в частности, на примере алгебры, которую оставил замечательный математик и поэт — философ XI в., Омар Альхайями (Omar Alkhaijâmi). Объяснение значения иррациональных радикалов основывается у него на строгих теориях греков; он проводит различие между арифметическими и геометрическими решениями уравнений: от первых он требует, чтобы они были не только рациональны, как этого требовал Диофант и как этого было бы достаточно с логической точки зрения, но еще и целочисленны. Так как с этими величинами можно производить вычисления, то достаточно и арифметического доказательства правильности этих решений. Наоборот, решения второго типа могут быть иррациональными, и именно поэтому здесь необходимо геометрическое изложение и доказательство их. В связи с этим квадратные и кубические корни изображаются с помощью известных со времен греков построений одной и двух средних пропорциональных. Так как пространство имеет только три измерения, то для изображения радикалов высших степеней нет соответствующих геометрических эквивалентов, а Альхайями не знает другого общего способа представления. Наоборот, для образования высших степеней он, в соответствии с эвклидовой теорией пропорций, указывает на образование сложных отношений. Эти сложные отношения дают также косвенное объяснение того, что означают встречающиеся у Алькархи иррациональные радикалы высших степеней. Таким образом вся концепция Альхайями проведена в совершенно греческом духе, и сам Алькархи, вероятно, признал бы теоретическое значение ее.

Что касается вычисления радикалов, то относительно извлечения квадратных и кубических корней Альхайями отсылает к индусам; он прибавляет к этому, что со своей стороны он дал в одном неизвестном нам сочинении правила извлечения корней любой степени. Если это так, то он, очевидно, должен был знать коэфициенты биномиального разложения для целых показателей и, значит, владеть правилами образования этих коэфициентов. Наконец, он говорит, что рассматривал извлечение этих корней только с помощью арифметики; в таком случае извлечение имело смысл для него лишь тогда, когда оно приводило к рациональному корню; для иррациональных корней у него нет даже точного объяснения значения операции извлечения.

Ясно, однако, что извлечение таких корней, равно как квадратных и кубических корней годилось и для приближенного вычисления иррациональных корней. Между прочим, в качестве примера приближенного вычисления корней мы можем привести указание Алькархи, что если первое приближение $\sqrt{a^2+r}$ принять за a, то следующим, более приближенным, значением будет $a+\frac{r}{2a+1}$, получающееся при применении правила *двух ложных положений* (regula duorum falsorum) или же интерполяции между a и $a+1$.

Как ни различны были точки зрения Алькахри и Альхайями по вопросу об извлечении корней из радикалов, но их работы над этим вопросом должны были пробудить у арабов интерес к проблеме, отодвинутой на задний план греческими методами, именно к решению кубического уравнения с помощью квадратных и кубических корней. Если греки, может быть, и занимались этой проблемой в древности, то она должна была вскоре потерять для них свой интерес благодаря тому, что кубическое уравнение можно было решить посредством геометрических методов — тех самых методов, которыми пользовались для общего представления кубического корня — именно с помощью пересечения конических сечений. Точно так же они должны были, как мы видели, перестать интересоваться сведением задач к кубическим уравнениям, как это делал Архимед, раз можно было решить эти вопросы и помимо этого сведения теми же самыми методами.

Хотя решение кубического уравнения не было найдено арабами, но их многочисленные труды достаточно свидетельствуют об их интересе к этому вопросу. Главным исходным пунктом этих изысканий была задача Архимеда о делении шара и старое решение ее посредством конических сечений, которое приписывают Архимеду или относят, по крайней мере, к его эпохе. Так как это решение, как мы видели, охватывает — или, по крайней мере, может быть легко приведено к такому виду, чтобы охватывать — все уравнения типа $x^3+ax+b=0$, так как, кроме того, в нем определенно содержится условие равенства двух корней и так как легко либо свести к этому типу общее уравнение третьей степени, либо исследовать его тем же, по существу, способом, то в этом вопросе не приходилось преодолевать особенно значительных научных трудностей. Однако арабы в своем исследовании кубических уравнений пошли дальше, установив классификацию этих уравнений отчасти по знакам коэфициентов, отчасти по значениям последних, приводящим к большему или меньшему числу корней. Особенно подробная классификация этого рода встречается в алгебре Омара Альхайями. Рассматривая каждый отдельный класс названных уравнений, он показывает возможность решения их посредством конических сечений и указывает число корней — разумеется, положительных, ибо арабы не интересовались другими. Но в классификации Альхайями имеются и некоторые недостатки, вытекающие из того, что он не отличает диоризма, являющегося как раз главным достоинством греческого решения посредством конических сечений. Классификации других арабских авторов (в частности Алькухи—Alkouhî), придерживавшихся сохраненной Эвтокием рукописи, составлены лучше.

Благодаря тому, что уравнения третьей степени были исследованы тщательнее, чем в сочинениях греческих авторов, известных тогда и даже в настоящее время, удалось найти более прямые решения ряда задач, как поставленных греками, так и выдвинутых самими арабами. Из задач первого рода множество решений получила задача трисекции угла; так, у арабов встречается то самое решение, которое — в виду связи его с леммами Архимеда — мы, может быть, имеем право приписать последнему (ср. стр. 64). Алькухи дает также решение задачи об определении шарового сегмента по его объему и площади поверхности; решение это он снабдил методом для нахождения соответствующего диоризма — диоризма, который Архимед дает в конце второй книги своего сочинения о шаре и цилиндре.

Не найдя общего решения в радикалах уравнений третьей степени, арабы должны были придерживаться самих этих уравнений в зависящих от них и требующих практических вычислений задачах; впрочем, и в настоящее время для выкладок этот способ удобнее, чем применение общего решения. До нас сохранился очень изящный образчик числового определения корня кубического уравнения; этим вычислением пользовались в XV в. для построения тригонометрических таблиц Олуг Бега, но возможно, что оно относится к более древнему времени. Зная $\sin 3°$, требуется найти $\sin 1°$; решение сводится здесь к уравнению вида:

$$x^3 + Q = Px.$$

Так как x достаточно мало, то его можно с известным приближением принять равным $\frac{Q}{P}$; для этой величины вычисляют такое приближенное значение a, чтобы остаток от деления R был того же порядка малости, что и a^3.

Положив $x = a + y$, имеем:

$$a + y = \frac{(a+y)^3 + Q}{P},$$

откуда

$$y = \frac{(a+y)^3 + R}{P}.$$

Так как остаток R, будучи порядка a^3, велик по сравнению с a^2y, то при приближенном вычислении можно пренебречь членами, содержащими y в числителе, и тогда мы получаем с новым приближением:

$$y = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P};$$

затем подставляют в точное уравнение $y = b + z$, где z, в свою очередь, определяют таким же образом посредством приближения и т. д.; дроби при этом употребляют, между прочим, шестидесятиричные.

Разобранная нами сейчас задача относится к тригонометрии; мы скоро займемся этой дисциплиной, но, прежде чем покинуть арифметику, алгебру и теорию чисел у арабов, — различные общие концепции которых мы рассматривали до сих пор, — мы приведем некоторые из полученных ими в этой области — в частности в теории чисел — результатов.

В IX в. Табит ибн Корра (Thâbit ibn Korra) прибавил к эвклидовому способу определения *совершенных чисел* некоторые правила для определения чисел, которые пифагорейцы называли *дружественными*, т. е. таких двух чисел, что каждое из них равняется сумме делителей другого. Правило это гласит: если $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ все представляют три простые числа, то $2^n \cdot p \cdot q$ и $2^n \cdot r$ являются *дружественными числами*.

Начиная с IX в. *, арабы занимались так называемыми *магическими* квадратами, т. е. такими квадратами, что у заполняющих

* Дата эта, более ранняя, чем принятая до сих пор, устанавливается заглавием одной работы Табита по этому вопросу (Suter, Die Mathematiken und Astronomen Araben, Leipzig, Teubner, 1900. p. 36) (T).

их клетки чисел суммы строк, столбцов и диагоналей равны между собой. Древнейший пример такого магического квадрата содержится в одной китайской таблице, которой, может быть, 4000—5000 лет от роду; таблица эта такова:

$$\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$$

Арабы со своей стороны составляли магические квадраты с числами до 16, 25 и 36, и они утверждали даже, что можно составлять такие квадраты с числами до 49, 64 и 81. Впрочем, тем же вопросом занимались и индусские и византийские математики.

Гораздо более значительный математический интерес представляет следующее предложение из теории чисел, найденное около 1000 г. Альходжанди (Alkhodjandî) — именно, что уравнение $x^3+y^3=z^3$ не имеет рациональных решений.

У Алькархи мы встречаем суммирования рядов $1^2+2^2+3^2+\ldots$ и $1^3+2^3+3^3+\ldots$, имеющие греческое происхождение. Однако ему не удалось найти доказательства теоремы о сумме квадратов натуральных чисел, — очевидно он не был знаком с методом Архимеда; что касается второй суммы, то он дает то доказательство, которое мы приводили, когда говорили о знакомстве греков с этой теоремой.

Существенным достижением арабов является найденное Алькаши (Alkâschî) в XV в. выражение для суммы ряда $1^4+2^4+3^4+\ldots+r^4$, сумма эта равна по Алькархи:

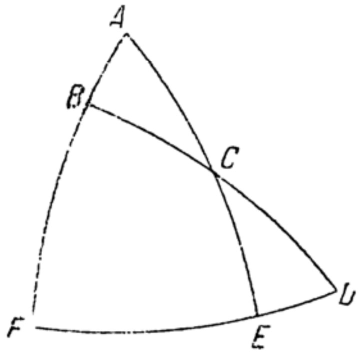
$$\left[\frac{(1+2+\ldots+r)-1}{5}+(1+2+\ldots+r)\right](1^2+2^2+\ldots+r^2).$$

3. Тригонометрия арабов. Благодаря прекрасному знакомству арабов как с греческой геометрией, так и с индусской арифметикой, они, естественно, сделали свои важнейшие открытия в области вычислительной геометрии или тригонометрии: мы можем отныне с тем большим основанием называть ее так, что арабы, подобно индусам, употребляли таблицы синусов вместо птолемеевских таблиц хорд. Само слово *синус* индусского происхождения: это точный латинский перевод арабского слова, представлявшего в свою очередь искажение индусского термина, означавшего синус.

Чтобы построить тригонометрическую таблицу, надо прежде всего вычислить $\sin 1^\circ$ или $\sin \frac{1}{2}^\circ$, которых нельзя определить посредством квадратных уравнений; мы выше познакомились с решением кубических уравнений, служащих для нахождения этих значений.

Чаще всего для этого пользовались — как и впоследствии для вычисления синуса $10'$ — интерполяцией между синусами, которые можно было выразить посредством квадратных корней. В начале довольствовались интерполяцией, совершенно сходной с той, которой пользовался Птолемей; но впоследствии, во второй половине X в., великий астроном и математик Абуль Вафа ввел в Багдаде еще более тонкую интерполяцию. Он пользовался тем фактом, что разности синусов, соответствующие равноотстоящим дугам, убывают вместе с возрастанием самих дуг: этот способ давал ему в то же время возможность судить о степени точности своих вычислений. Ему принадлежит таблица синусов через каждые десять минут с погрешностью порядка $\frac{1}{60^4}$. Наконец, для облегчения тригонометрических выкладок — там, где приходилось прибегать к пифагоровой теореме с ее беспрестанными и новыми извлечениями квадратных корней, — он построил также таблицу тангенсов.

При применении этих таблиц стали пользоваться отчасти методом, содержащимся в „Аналемме“ Птолемея, отчасти приложениями теоремы Менелая, указанными в „Альмагесте“ Птолемея. Мало-помалу научились также пользоваться более непосредственно трудом Менелая, причем эти исследования явились исходным пунктом дла серьезного усовершенствования астрономических выкладок: примером этого может служить правило четырех величин, приведенное уже нами в связи с теоремой Менелая. Абуль Вафа первый усовершенствовал правила для этих выкладок, ради которых он построил таблицы, более обширные, чем все предшествующие им; некоторые из его нововведений имели целью использовать возможно лучше новую таблицу тангенсов.



Фиг. 29.

Астрономо-тригонометрические исследования распространились повсюду, вплоть до самых западных окраин мусульманского мира, где в XI в. Джабир ибн Афла (Djâbir ibn Aflah) из Севильи, известный под именем Гебера (Geber), написал большой астрономический труд. Трактат этот отличается от предшествующих ему трудов тем, что для большинства употребляемых в нем тригонометрических предложений даются иные доказательства, чем имеющиеся у Птолемея. Кроме того, Гебер, найдя новое соотношение между двумя углами и стороной, дополнил формулы Птолемея, относящиеся к прямоугольному сферическому треугольнику. Отношение это он устанавливает посредством употреблявшейся уже Птолемеем фигуры (фиг. 29), в которой DEF представляет большой круг, имеющий полюсом вершину угла A прямоугольного (в B) треугольника ABC. У прямоугольного же треугольника DEC угол C общий с треугольником ABC, а $DE = 90° - A$, $CD = 90° - a$, откуда следует, что $\cos A = \cos a \cdot \sin C$. Это предложение носит имя Гебера.

Вернемся, однако, к Багдаду, где тригонометрии предстояло занять более самостоятельное и независимое от астрономических применений положение. Исследователи стали заниматься изучением плоских и сферических треугольников самих по себе. Большое значение приобрели теперь различные решения задач на определение по трем элементам треугольника (сторонам и углам) остальных элементов его. Одним из первых шагов в этом направлении было установление теоремы о пропорциональности в сферическом треугольнике синусов сторон синусам противолежащих углов, теоремы, автором которой был, может быть, Абуль Вафа или один из его современников.

Общий итог работ арабов в этом направлении дан нам в одном сочинении Нассир Эддина по плоской и сферической тригонометрии, ставшим известным в Европе по французскому переводу только в последнее время. Его название: „Трактат о четыреугольнике“ объясняется тем, что исходным пунктом всего труда является полный четыреугольник Менелая.

Для нас нет интереса останавливаться на вопросах плоской тригонометрии, а также на способах решения множества главных задач сферической тригонометрии. Так, вышецитированная теорема о синусах выводится в общем случае легко из частного случая прямоугольного треугольника: для этого надо треугольник разделить на два прямоугольных треугольника. Поэтому мы ограничимся лишь тем, что покажем, как Нассир Эддин решает некоторые более трудные задачи.

В сферическом треугольнике ABC (фиг. 29, где угол B уже не является прямым), стороны a, b и c которого даны, он определяет угол A следующим образом: он продолжает AB и AC до $AF = 90°$ и $AE = 90°$, потом он проводит полный четыреугольник $ABCDEF$; тогда теорема Менелая или же правило четырех величин дают:

$$\frac{\sin BD}{\sin CD} = \frac{\sin BF}{\sin CE} = \frac{\cos c}{\cos b}.$$

Так как, кроме того, известна разность a дуг BD и CD, то посредством правила, бывшего известным уже Птолемею (стр. 157), можно вычислить эти дуги. Имея это, знают гипотенузы и по одной стороне в каждом из обоих прямоугольных треугольников DBF и DCE, что дает возможность определить DF и DE, а также и их разность, т. е. угол A.

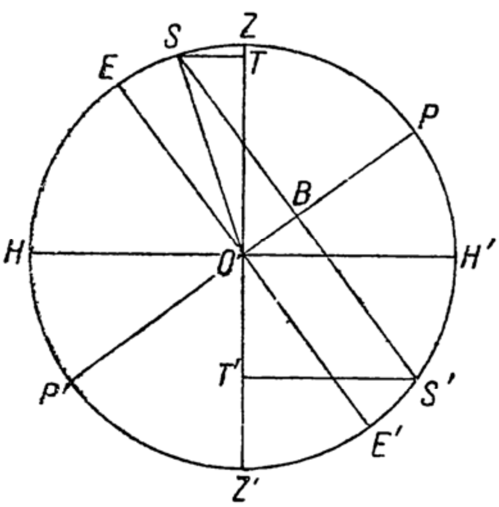
Но еще более замечателен способ, каким Нассир Эддин определяет по трем углам стороны: задачу эту он решает, как и мы в настоящее время, приведя ее к предыдущей посредством построения *полярного* или *дополнительного* к данному треугольника, т. е. треугольника, стороны которого имеют полюсами вершины данного треугольника. Как известно, в этом случае каждая вершина одного треугольника есть полюс некоторой стороны другого, а углы первого являются дополнениями сторон другого. Труд Нассир Эддина доказывает, что теорема эта, впоследствии вновь найденная европейцами, была впервые открыта арабами.

Прежде чем расстаться с этим автором, заметим еще, что он знал также следующую планиметрическую теорему: всякая точка окружности круга, катящегося внутри круга с двойным радиусом, описывает диаметр этого второго круга.

Различные тригонометрические исследования, как необходимые для составления таблиц, так и нужные для решения треугольников, требовали известных тригонометрических преобразований и решения известных уравнений. Мы намекнули выше на одно из них, бывшее известным уже Птолемею, но мы можем привести еще преобразование, выражаемое в настоящее время формулой:

$$\cos\varphi\cos\delta = \frac{1}{2}\left[\cos(\varphi-\delta)+\cos(\varphi+\delta)\right],$$

которой пользуются, чтобы сделать логарифмической сумму двух косинусов. В те времена ею пользовались, наоборот, для замены слишком трудного действия умножения операцией сложения, а впоследствии приложение ее обобщили в Европе в том же духе.



Фиг. 30.

Однако ни эти формулы, ни формулы, служившие для решения треугольников, не выражались посредством символов. Даже у арабов вся вообще математика продолжала еще облекаться в геометрическую форму; тем более это относилось к задачам, имевшим дело с величинами геометрического происхождения. Впрочем, это не представляло таких трудностей, как это может казаться нам, избалованным употреблением формул. В этом легко убедиться хотя бы по прилагаемому рисунку (фиг. 30), которым пользовался в X в. египетский астроном ибн Джунос (Ibn Jounos) в своих так называемых *гакимитских* астрономических таблицах для доказательства вышеприведенной формулы о произведении косинусов. Как и в рассмотренной выше „Аналемме“ Птолемея, чертеж берется в плоскости меридиана: HH' — линия пересечения с горизонтом, EE' — с экватором, SS' — с плоскостью, в которой движется в течение одного дня светило, Z есть зенит, Z' — надир, P — полюс мира. $H'P = ZE = Z'E' = \varphi$ дает высоту полюса, а $ES = E'S' = \delta$ — склонение светила, $ZS = \varphi - \delta$ и $Z'S' = \varphi + \delta$. В таком случае проекция SS' на вертикаль ZZ' будет:

$$\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)+\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta).$$

Но так как $SB = \cos\delta$, а SB образует с вертикалью угол φ, то проекция эта, с другой стороны, равна $2\cos\delta\cos\varphi$. Для удобства современного читателя мы приняли радиус круга равным единице.

Из арабов западной окраины мусульманского мира мы сочли необходимым упомянуть только о Гебере. Гебер сам изложил перед европейцами свой метод исследования проблем тригонометрии, в котором, впрочем, нехватало еще общего способа рассмотрения плоских и сферических треугольников. В связи с вопросом о положении математики у арабов Запада мы сделаем еще только следующее замечание: мало-помалу — параллельно с развитием математической символики, например с введением символа для квадратного корня — арифметико-алгебраический метод освободился от греческих геометрических форм.

Однако греческие авторы продолжали пользоваться огромным авторитетом и у западных арабов, через посредство которых с ними и познакомились в Европе. Впрочем, знакомство это наступило бы значительно раньше, если бы непосредственными учителями европейцев были восточные арабы.

4. Первое пробуждение математики в Европе. Мы не намерены здесь заниматься вопросом о происходившем в монастырях незаметном развитии счета с помощью римского абака, ни вопросом о путях проникновения в Европу от арабов иных способов вычисления, а также математики, стоявшей выше той, которая досталась от римлян. Не следует при этом забывать того, что некоторые новшества могли быть занесены из Константинополя и других греческих городов. Тем не менее, если мы хотим рассказать о научной деятельности величайшего математика Европы в средние века Леонарда Пизанского (около 1200 г.), то мы должны все-таки вкратце указать, какова была научная обстановка в Европе в его время. Благодаря переводам с арабского тогда имели руководства для вычислений (алгорифмы), алгебру, занимавшуюся уравнениями первой и второй степени, „Начала“ Эвклида и „Альмагест“ Птолемея. Но существовавшие несколько рукописных экземпляров этих трудов были материально доступны лишь весьма немногим лицам, да и сами эти немногочисленные читатели не очень способны были проникнуть в сущность этих сочинений и использовать их.

Уже в эту эпоху, наряду с употреблением в одних местах абака, в других местах в некоторых ученых кругах стал распространяться алгорифмический, т. е. индусский способ счета. Уже за сто лет до того Герберт (Gerbert), будущий папа Сильвестр II, ввел усовершенствования в абак, состоявшие в том, что в различные столбцы его стали вписывать числовые знаки. Разница между этими двумя методами заключалась в том, что алгорифметика, благодаря употреблению знака 0, не нуждалась в делении на столбцы. Впрочем, с разными методами связаны были еще и различные традиции, из которых нижеследующая не делала особенной чести *алгорифмикам*: мы имеем в виду то, что вслед за Магометом ибн Мусой они продолжали считать удвоение и деление на два особенными арифметическими действиями. Но зато, с другой стороны, они умели извлекать квадратные и кубические корни, между тем как *абакисты* не шли дальше квадратных корней. Наконец, алгорифмики употребляли шестидесятеричные дроби, абакисты же продолжали, отчасти, пользоваться двенадцатеричной системой, происшедшей из римской денежной системы.

Леонардо Фибоначчи (Fibonacci), т. е. сын Боначчо, как часто его называют по прозвищу отца, родился в крупном торговом центре, Пизе, где с ранних лет он научился считать на абаке. Во время предпринятых им по торговым делам (или, может быть, по служебным обязанностям) путешествий он посетил Египет, Сирию, Грецию, Сицилию и Прованс; он воспользовался этим обстоятельством, чтобы усовершенствовать свои познания в математике и искусстве вычисления. Приобретенные им таким образом у арабов и византийцев сведения он пытался сообщить „латинской расе“ в своем обширном труде „Liber Abaci“, в котором он излагает с большим искусством на множестве примеров почти все встречавшиеся нам до сих пор виды исчисления: исчисление целых чисел, производимое по *позиционной системе*, и исчисление дробей; всякого рода коммерческие счеты; решения задач, которые, если придать им вид уравнений, зависели бы от уравнений первой степени и которые он решает с помощью обоих правил ложного положения и индусского метода обращения, арифметические прогрессии и ряды членов, вторые разности которых постоянны; задачи, которые сводятся к геометрическим прогрессиям или которые — как, например, задачи о размножении кроликов — решаются подобно задачам на сложные проценты; затем некоторые задачи, которые зависят от неопределенных уравнений первой степени, правда, однородных и не представляющих поэтому серьезных трудностей; задачи на извлечение квадратных и кубических корней; наконец, задачи, зависящие от определенных и неопределенных уравнений второй степени.

Название „Liber Abaci“, собственно, не вяжется с тем, что Леонардо пользуется повсюду числовым символом 0. Но известно, что первоначально он научился счету на абаке; что касается индусской арифметики, то он заимствовал ее непосредственно у арабов и, возможно, не встретил применения ее в Европе, где она была известна лишь в некоторых монастырских кругах. Во всяком случае, он — не алгорифмик по своему первоначальному образованию, ибо он заявляет, что он нашел самостоятельно способ извлечения кубического корня; между тем, эта операция не встречается у Алькархи, того из известных арабских авторов, который оказал на него самое сильное влияние и у которого он действительно заимствовал массу задач, решаемых им, впрочем, самостоятельным образом.

Произведенное Алькархи приближенное вычисление квадратного корня (стр. 206) навело, повидимому, Леонардо на мысль о приближенном вычислении посредством правила двух ложных положений, кубического корня, целая часть которого уже известна. Если $\sqrt[3]{a^3+r}$ есть искомый кубический корень, и a представляет наибольшее целое число, содержащееся в этом корне, то приближенное значение будет:

$$a+\frac{r}{3a^2+3a+1}.$$

Свое изложение Леонардо сопровождает в „Liber Abaci" повсюду доказательствами геометрического типа. То же самое относится к его „Practica Geometriae", которая, между прочим, содержит извлечения из мало известных тогда стереометрических книг „Начал"; впрочем, доказательства Леонардо часто отличаются от доказательств Эвклида, но не принадлежат ему лично, ибо они встречаются также у более древних арабских авторов.

В упоминаемых нами здесь трудах Леонардо рассматривает наиболее важные известные до него теоремы арифметики, алгебры и геометрии, излагая их в ясной форме, обнаруживающей вполне самостоятельное усвоение материала и свободное владение им; его изложение этих вопросов делает их более доступными для понимания, чем этого можно было бы добиться простым переводом тех книг, из которых он их заимствовал; в частности, он прибегает к многочисленным примерам для пояснения проблем арифметики. Но особенно ярко выступает его способность преодолевать даже серьезные трудности при решении некоторых задач, предложенных ему философом императора Фридриха II, метром Иоаном Палермским (Johan de Palerme) в присутствии императора. В одной из этих задач требовалось найти квадратное число, которое при прибавлении к нему или отнятии от него 5 дало бы новые квадраты, т. е. требовалось найти рациональные решения уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= x^2+a, \\ z^2 &= x^2-a, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a равно 5. Впрочем, уравнения эти были исследованы уже раньше арабскими математиками, нашедшими, что x^2+a и x^2-a являются квадратными числами при условии, если:

$$x=m^2+n^2, \quad a=4mn(m^2-n^2).$$

Условие это нетрудно вывести из знакомого уже Диофанту решения двойных уравнений (стр. 172; см. также первую задачу на стр. 174) в связи с данным Эвклидом способом определения рациональных прямоугольных треугольников. Леонардо, однако, приходит к тому же самому результату несколько иным путем, опираясь на теорему о том что *квадратные числа представляют суммы первых нечетных чисел натурального ряда.* После этого остается определить m и n таким образом, чтобы $4mn(m^2-n^2)$ имело данное значение, в данном случае 5. Леонардо доказывает сперва, что числа этого вида, если m и n обозначают целые числа, делятся на 24; таким образом, чтобы получить по возможности уравнения, разрешимые в целых числах, следует умножить данные уравнения на такой квадрат, чтобы новое a делилось на 24. Леонардо умножает на 12^2; при этих условиях:

$$5 \cdot 12^2 = 4 \cdot 5 \cdot 4\,(5+4)\,(5-4),$$

и, значит, $41^2 \pm 5 \cdot 12^2$ представляют квадратные числа; чтобы получить искомые квадраты, надо тогда произвести деление на 12^2; получаем:

$$\left(\frac{31}{12}\right)^2,\ \left(\frac{41}{12}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

В своем решении, которое он дает в очень общем виде, Леонардо находит еще случай указать, как найти суммы квадратов первых нечетных чисел натурального ряда до некоторого данного предела; таким образом решение Леонардо давало больше, чем от него спрашивали.

В другой из поставленных Леонардо задач требовалось найти x из уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 10\,x = 20.$$

Леонардо находит сперва, что x заключается между 1 и 2 и, следовательно, не может быть целым числом, затем он указывает, что x не может быть ни рациональным числом, ни одним из иррациональных количеств, установленных Эвклидом в десятой книге „Начал". Он усвоил самым правильным образом содержание этой довольно трудной книги, которую он изучил именно для того, чтобы найти в ней по возможности типы иррациональностей, в точности выражающих корни заданного уравнения; однако, как заявляет Леонардо, он заменяет числами общие величины, представленные у Эвклида геометрическим образом.

Так как искомый корень не является величиной известного типа, то Леонардо должен удовлетвориться приблизительным значением его, которое он выражает в шестидесятеричных дробях:

$$x = 1^{0}\,22^{\mathrm{I}}\,7^{\mathrm{II}}\,42^{\mathrm{III}}\,33^{\mathrm{IV}}\,4^{\mathrm{V}}\,40^{\mathrm{VI}}$$

и которое больше настоящего приблизительно на $1^1/_2{}^{\mathrm{VI}}$.

Леонардо не сообщает, как он нашел это значение, но, вероятно, он не пользовался каким-нибудь существовавшим до него определенным методом; он, должно быть, поступил так, как поступил бы и в настоящее время опытный калькулятор, именно перепробовал последовательно для полученных уже значений наиболее подходящие в данном случае поправки; что же касается самих этих пробных значений, то для получения их он имел правило *двух ложных положений*, которым он умел пользоваться для целей интерполяции, как это видно из его вычислений кубических корней. Кроме того, как искусный калькулятор, он умел округлять и знаменатели в получаемых им по этому способу поправках, так что в целом его метод довольно похож на метод Виеты (Viète) — или, как обычно его называют, метод Ньютона — для приближенного вычисления корней алгебраического уравнения. Следует, впрочем, заметить, что этот метод представляет просто расширение обычного способа получения последовательных цифр квадратного или кубического корня,— способа, употреблявшегося со времен Птолемея астрономами для определения шестидесятеричных дробей в качестве последовательных приближений квадратного корня. Одним исследователем было недавно отмечено, что названное уравнение выбрано таким образом, что, пользуясь при выкладках шестидесятеричными дробями и подобрав с известным искусством последовательные приближения, можно сравнительно быстро получить значение корня, незначительно отличающееся от истинного значения его.

Если согласиться с этим замечанием, то Леонардо, может быть, разделяет честь этого большого приближения с лицом, предложившим ему задачу; возможно даже, что сам Леонардо подсказал эту задачу метру Иоану в связи с торжественным заседанием в присутствии императора; но возможно и то, что метр Иоан, сицилиец, сопровождавший императора Фридриха, горячего поклонника арабов, заимствовал эту задачу у каких-нибудь арабских математиков. Сам Леонардо был, несомненно, учеником арабов, которые, очевидно, должны были довести математику до высокой степени совершенства, чтобы искусный калькулятор мог получить значение корня с таким большим приближением. Приведенный нами (на стр. 208) пример подобного приближения, встречающийся у одного арабского автора, моложе задачи Леонардо на несколько веков.

Леонардо Пизанский изложил с большой ясностью наиболее доступную пониманию и наиболее важную часть тогдашней арабской и византийской математики. Но математика от этого еще не стала общим достоянием всех тех, кто занимался этой наукой в Европе; книгопечатание еще не было изобретено, и между учеными не было того живого общения, которое некогда объединяло рассеянных по разным странам греков. Правда, представители тогдашнего ученого сословия, духовенство в частности, члены некоторых монастырских орденов и выделившиеся мало-помалу из церковных кругов университеты поддерживали взаимные сношения в целом ряде стран; но в течение очень долгого времени сословие это стояло, повидимому, в стороне от духовного влияния, исходившего из сферы деятельности итальянских торговых кругов, сношения которых с императором-еретиком Фридрихом могли только отпугивать от них сторонников правоверия.

Когда мы говорим здесь об ученых кругах и университетах, то не следует себе представлять каких-то учебных заведений, где всегда преподавалась бы в некотором объеме математика.

Правда, в университетах имелся „Факультет искусств“, на котором слушателей подготовляли к более трудным предметам, но эта подготовка ограничивалась обыкновенно так называемым trivium (откуда произошло слово *тривиальный*), охватывавшим грамматику, риторику и диалектику, и не касалась quadrivium, обнимавшего арифметику, музыку, геометрию и астрономию. Впрочем, если иногда и прихватывали quadrivium, то в арифметике дело сводилось к начаткам счета, а в геометрии — к поверхностному изучению нескольких книг „Начал“. Об Эвклиде знали так мало, что некоторые полагали, будто его „Начала“ были первоначально написаны по-арабски, между тем как другие думали, что он дал только теоремы, доказательства же к ним представил греческий издатель его Теон. Однако случалось иногда, что вышедшие из этих кругов лица заинтересовывались математикой. Но тогда, как мы сказали, они обращались со своими запросами не к трудам Леонарда Пизанского, а к трактату по арифметике и алгебре (de Numeris datis) его современника Иордана Неморария (Iordanus Nemorarius), очень видного представителя доминиканского ордена, генералом которого он был и местопребыванием которого был Париж. Труд Неморария представлял те же достоинства и те же недостатки, которые мы нашли у алгорифмиков; но в нем содержалось и положительное новшество, принадлежавшее самому Неморарию, — именно он *повсюду изображал произвольные числа буквами*, хотя, однако, таким образом, что из этого не могло получиться буквенного исчисления, ибо эти буквы служили ему для обозначения только в контексте*.

Неморарий написал, кроме того, геометрическое сочинение о треугольниках, в котором, основываясь на „Началах“, он делает некоторые самостоятельные геометрические изыскания.

Названное нами сочинение Неморария по арифметике и алгебре далеко уступает „Liber Abaci“ Леонардо, но вместе с тем оно показывает, что в ученых кругах пытались самостоятельно усвоить и разрабатывать математику. Работой этой занимались в ряде мест. Приведем, например, Кампана (Campanus), жившего во второй половине XIII в. Его полное издание „Начал“ стало впоследствии главным источником, по которому знакомились с этим капитальным трудом Эвклида; сам он сделал несколько самостоятельных исследований, как, например, нахождение суммы углов звездообразного пятиугольника. Крупный английский математик Брадвардин (Bradwardin, 1290—1349) пошел еще дальше в этом направлении: он дал общие теоремы о сумме углов звездообразных многоугольников.

Наряду с этим и более или менее самостоятельными исследованиями продолжали переводить арабских авторов, а впоследствии — и греческих. Сочинения Леонардо имели известное влияние отчасти

* То-есть так, что если *a* и *b* означают, например, сомножителей, то произведение их будет обозначаться новой буквой *c*. Следует заметить, что такого рода употребление букв встречается уже у Аристотеля, с которым начали тогда знакомиться на Западе (Т).

на севере Италии, где 300 лет спустя должна была народиться молодая, полная творческих сил, математическая наука, отчасти в других местах, в которых наблюдается на протяжении этих 300 лет некоторый постепенный прогресс. Но мы не будем останавливаться подробнее на этом, а приведем лишь несколько примеров достигнутых за это время успехов.

Мы должны, в частности, упомянуть два сочинения французского математика Николая Оресма (Nicole Oresme, около 1328—1382). Первое из них носит название „Tractatus de latitudinibus formarum“: слова *долгота* и *широта*, взятые в нем в приложении к плоскости, означают то же, что и в приложении к шаровой поверхности, т. е. прямоугольные координаты; смысл этих названий становится особенно ясным, если обратить внимание на то, что координаты берутся внутри прямоугольника, бóльшая сторона которого расположена в направлении абсцисс (т. е. долгот). При таком способе изображения различные степени интенсивности какого-нибудь изменяющегося естественного явления — как, например, теплоты — изображаются ординатами (широта), а соответствующие им времена — абсциссами (долгота); таким путем получается в виде некоторой кривой график изменения теплоты вместе с временем. Оресм делает уже то крайне важное замечание, что по близости максимумов и минимумов изменение меньше всего. Нетрудно заметить, что применение Оресмом координат носит совершенно иной характер, чем у греков, хотя как будто он ссылается на последних; однако по всем вероятиям он не мог — ни непосредственно, ни через посредство арабов — быть знакомым с точным геометрико-алгебраическим приложением координат к изучению конических сечений и к решению различных проблем, как это практиковали греки.

Из содержания второй книги Оресма „Algorismus proportionum“ мы отметим, в частности, введение им *степеней с дробными показателями* и простейших правил для производства вычислений с такими степенями. Оресм пользуется даже специальным обозначением для степеней: он пишет $4^{1^1/_2}$ примерно так $\left(1^p\frac{1}{2}\right)4$, где буква p (proportio) означает *отношение*; действительно, как следует из точной теории пропорций Эвклида, корни этих степеней суть отношения, а степени с целыми показателями образуются как сложные отношения.

Впрочем, у древних встречается уже пример образования таким способом степени с дробным показателем. Действительно, Архимед показывает, что отношение между большими и меньшими сегментами шара, разделенного плоскостью, больше отношения между их площадями, взятого полтора раза, т. е. больше этого отношения, взятого в степени $\frac{3}{2}$.

Распространив таким образом на дробные показатели правила вычисления степеней с целыми показателями при том же основании, Оресм является до некоторой степени предшественником логарифмического исчисления.

После изобретения книгопечатания первая из названных книг Оресма переиздавалась несколько раз; впрочем, и до того она была, несомненно, очень распространена. Наоборот, вторая из них, а также книга Шюке (Chuquet), о которой у нас будет сейчас речь, были напечатаны недавно, исключительно из исторического интереса и, повидимому, в свое время не оказали особенного влияния. Так, Шюке, предшественник логарифмического исчисления — хотя в ином отношении, чем живший за сто лет до него его соотечественник Оресм, не обнаруживает никакого знакомства со второй из названных книг последнего. Однако обе эти работы заслуживают упоминания, ибо они показывают, что могли, принимая во внимание обстановку того времени, сделать тогда люди больших дарований, показывают, одним словом, уровень тогдашней математической культуры.

Упомянутый нами труд Шюке представляет образец прекрасного трактата по арифметике и алгебре в XV в.; он носит заглавие „Triparty en la science des nombres“ и он был закончен в 1484 г.

Остановимся прежде всего на вопросе, затронутом уже Оресмом, именно на вопросе о дробных показателях; некоторые из задач Шюке содержат в себе косвенным образом дробные показатели; к ним относится, например, следующая задача:

Некий путешественник проходит 1 милю в первый день, 3 — во второй, 9 — в третий и т. д.; сколько пройдет он всего в $5^1/_2$ дней?

Шюке дает решение этой задачи, предполагая, что скорость возрастает непрерывным образом и по тому же закону, что с одного дня на другой.

В другом случае требуется уже прямым образом найти показатель, т. е., иными словами, логарифм:

В сосуде имеется отверстие, через которое вытекает за сутки $^1/_{10}$ его содержимого; через сколько дней вытечет половина содержимого?

Путем простой интерполяции или применяя правило *двух ложных положений* к пробным значениям 6 и 7, находят решение $6\frac{31441}{531441}$; но сам Шюке не удовлетворен этим приближением.

Наконец, в одном месте своего труда он дает даже формальным образом одно из основных правил логарифмического исчисления: он берет ряд степеней числа 2 с их показателями и указывает, что произведение двух чисел первого ряда выражается числом этого же ряда, соответствующим сумме показателей перемножаемых чисел.

Если свое понимание дробных показателей Шюке обнаруживает лишь косвенным образом, то в своей символике он открыто пользуется показателем 0 и отрицательными показателями. Как мы видели, уже Диофант имел специальные обозначения для каждой из величин

$$x^{-6},\ x^{-5},\dots,\ 1,\dots,\ x^5,\ x^6,$$

и даваемые им правила вычисления показывают, что он сознавал соответствие этих величин; Шюке же отмечает это соответствие самим способом своего обозначения: показатели разных степеней неизвестной он выражает с помощью знака показателя, соединенного с численным коэфициентом, на который следует умножить эту степень, показатель этот может быть положительным, нулевым или отрицательным. Если он отрицательный, то его обозначают через $\bar{m}$, так что $7^3\bar{m}$ означает то, что мы теперь выражаем через $7x^{-3}$. Кроме того, у Шюке есть знак для n-го корня (но только для определенных значений n), а также знаки $\bar{m}$ и $\bar{p}$ для наших символов $+$ и $-$. Мы видим таким образом, что он был в состоянии представлять в удобообозримом виде свои уравнения, а также те из их преобразований, которые до тех пор выражали словами.

Если, как мы видели, Шюке не боится вводить отрицательные величины в показатели степеней, то вполне естественно, что он совершенно не смущается отрицательными решениями некоторых уравнений; он довольно недурно умеет объяснить их; наоборот, мнимые решения, к которым должна привести одна из его задач, имеют, повидимому, своим источником какую-то ошибку с его стороны.

Оставив в стороне ряд вопросов, которыми занимается — и удачно — в своей книге Шюке, но которые, как мы видели, встречаются и у предшествовавших ему математиков, мы упомянем лишь тот факт, что он применяет — и уверяет даже, будто сам открыл его, — правило образования простых средних величин $\left(\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}\right)$ между двумя данными величинами $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$; он пользуется им при составлении новых пробных значений для более точного решения уравнения, корень которого находится между $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$.

Труды, подобные работам Оресма и Шюке, свидетельствуют о том, что к концу средневековья были уже люди, способные к самостоятельному творчеству в области математики. Появление таких людей, разнообразие задач и изысканий, встречающихся в книге Шюке, доказывает также, что к этому времени достаточно широко распространилась математическая культура и интерес к математике. Извлеченные из немецких библиотек рукописи тоже свидетельствуют об этих достижениях. Так, в Мюнхене найден был сборник арифметических развлечений, относящийся к XIV в., и ряд аналогичных сборников от XV в., написанных на этот раз уже не по-латыни, а по-немецки.

Существует также ряд других рукописей от XV в.; одна из них, в которой вычисляются совершенные числа, написана по-немецки. Все они свидетельствуют о глубоком интересе к теории чисел. К концу XV в. через Альпы была занесена из Италии алгебра. Доказательством итальянского происхождения алгебры на немецкой почве является данное этой науке название „Cossische Kunst" и название Cossisten лицам, занимавшимся алгеброй. Действительно, это название происходит от итальянского слова cosa — вещь, т. е. искомая *вещь*, которой оперируют так, точно она известна. Из выдающихся коссистов следует упомянуть в особенности: Иоганна Видманна (Iohannes Widmann) из Эгера (занесенного в имматрукуляционные списки Лейпцигского университета в 1480 г.), который по дошедшим до нас сведениям составил университетские курсы алгебры; Адама Ризе (Adam Riese, 1492—1559) и приблизительно около того же самого времени Христофора Рудольфа (Christoph Rudolff).

Хотя в их трудах нельзя отметить особенно ценных достижений, но популяризация ими алгебраического искусства должна была привести к ряду усовершенствований на практике и подготовить почву для позднейших более крупных успехов. Так, в трактате Видманна „Быстрый и красивый способ счета для всякого рода торговли" (Behende und hubsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft) встречаются уже знаки $+$ и $-$, и не как какая-то новинка, между тем как итальянцы продолжали писать еще даже и позже *p* и *m*. Названное сочинение, написанное по-немецки, было напечатано в 1489 г.; ряд позднейших изданий свидетельствует о популярности его. Около 1483 г. была также напечатана так называемая „Бамбергская арифметика".

Если в этой области немецкие ученые ушли не намного дальше Шюке, то, наоборот, астрономия и в связи с ней тригонометрия были поставлены у них к концу средних веков на значительную высоту. Мы не будем говорить здесь о Николае Копернике из Торна (1473—1543), являющегося одним из величайших непосредственных предшественников уже нового времени, но зато мы упомянем Пейрбаха (Peurbach) и особенно его великого ученика Региомонтана (Regiomontanus). Пейрбаху (1423—1461), профессору Венского университета, принадлежит особенно заслуга введения тригонометрии Птолемея и арабов и составления новых довольно обширных таблиц синусов. Этим он подготовил почву для более глубоких и ценных работ Иоганна Мюллера (Iohann Müller), называемого обыкновенно Региомонтаном (1436—1476).

Региомонтан вел довольно непоседливый образ жизни, обосновываясь то в Италии, то в Германии и Венгрии. Ему было лишь сорок лет, когда смерть оборвала его кипучую деятельность. Благодаря своей непоседливости он смог завязать сношения с многочисленными астрономами и математиками. В Италии он имел возможность изучить греческий язык, которым он занимался главным образом для того, чтобы продолжить начатое Пейрбахом издание птолемеева „Синтаксиса" (Альмагеста); одновременно с этим он познакомился по первоисточникам с другими греческими математиками, которых он очень ценил, в особенности Диофанта.

Региомонтан обнаруживал известное предпочтение к теории чисел; интерес к ней был пробужден у него как вышеупомянутыми немецкими работами по этой теории, так и его связями с итальянскими математиками. В результате своих занятий над этими вопросами он поставил целый ряд довольно трудных, относящихся к ним, задач. Приведем в качестве примеров некоторые из них:

Найти три квадратных числа, образующих гармоническую прогрессию; найти четыре квадратных числа, сумма которых есть также квадрат.

Хотя он не дает решения этих задач, но, повидимому, он знал их.

Его труды по тригонометрии имеют очень большое значение. Укажем прежде всего на его тригонометрические таблицы, при составлении которых он первый стал употреблять десятеричную систему. Таблицы синусов, составленные им под конец, давали значения синусов через каждую минуту, а так как величину радиуса он брал равной 10^7, то полученная им степень точности была та же, что в семизначной таблице, — хотя, надо заметить, он еще не пользовался десятичными дробями в собственном смысле слова. Кроме того, Региомонтан составил таблицу тангенсов через каждый градус.

По вопросу о пользовании таблицами ряд авторов—до Гебера включительно — уже давно пытался познакомить европейских математиков с наиболее существенными элементами арабской сферической тригонометрии, — но только Региомонтан ввел окончательно в Европу эту науку, которую он значительно обогатил своими собственными открытиями. Благодаря этому сферическая тригонометрия, равно как и плоская, стали независимы от астрономии. С этой точки зрения Региомонтан сыграл в Европе приблизительно ту же роль, какую сыграл лет за двести до того в мусульманском мире Нассир Эддин, с работами которого он не был совершенно знаком. Все эти достижения Региомонтана содержатся в его наиболее важном труде „De triangulis omnimodis libri quinque"; полный, как всегда, пиетета к Пейрбаху, он приписывает последнему план составления этой книги.

В этой книге все задачи на определения треугольников по заданным элементам их рассмотрены с такой же систематичностью, как у вышеназванного персидско-арабского автора, явившегося завершителем трудов целой школы ученых. Но у Региомонтана разбирается еще и ряд других задач, при решении которых он пользуется разнообразнейшими методами, подготовляя тем почву для дальнейших более обширных исследований. Так, например, при решении задачи об определении двух сторон плоского треугольника по третьей стороне, высоте и противолежащему углу он пользуется геометрическим построением определенного таким образом треугольника. Аналогичным образом он определяет алгебраически треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и отношению двух других сторон, принимая за неизвестную полуразность отрезков, образуемых на первой стороне высотой.

При рассмотрении одной основной проблемы сферической тригонометрии Региомонтан — обнаруживая и здесь свое превосходство над Нассир Эддином — определяет непосредственно угол сферического треугольника, стороны которого даны, по правилу

$$\frac{\sin \text{ vers. } A}{\sin \text{ vers. } a - \sin \text{vers. } (b-c)} = \frac{r^2}{\sin b \cdot \sin c}$$

(где r — величина радиуса, положенного в основу таблиц), правилу, соответствующему нашей обычной формуле косинусов. Впрочем, связанные с этим выкладки не отличаются от тех, которые указаны в „Аналемме“ Птолемея для аналогичной астрономической задачи; но Региомонтану принадлежит та заслуга, что данное им правило относится к любому сферическому треугольнику.

Под конец своей недолгой жизни Региомонтан рассчитывал найти достаточно досуга в Нюрнберге, чтобы иметь возможность произвести там астрономические наблюдения, которые он надеялся затем обработать, а также издать труды древних математиков и свои собственные; но полученное из Рима почетное приглашение реформировать календарь прервало его отдых, а вскоре затем он умер.

Но Нюрнберг еще в течение долгого времени оставался центром научной деятельности. Здесь жил и работал священник Иоганн Вернер (Werner, 1468—1528), работы которого по тригонометрии примыкают к трудам Региомонтана. Он первый в Европе стал пользоваться для облегчения выкладок формулой, выражающей произведение синусов в виде разности косинусов; кроме того, он изучал с исключительным рвением древне-греческих авторов. Его особенно интересовала теория конических сечений; не зная доказательств Аполлония, относящихся к основным свойствам сечений конуса, он сам придумал такие доказательства, что делает ему величайшую честь.

В жизни Нюрнберга огромное место наряду с наукой — и, может быть, даже большее место — занимало искусство. Знаменитый живописец Альбрехт Дюрер (Dürer, 1471—1528) сумел соединить в себе наряду с художественным гением и научное дарование. Он был в курсе геометрических построений, которые он выполнял с помощью линейки и циркуля и применял даже для нахождения по точкам вполне определенных кривых; между прочим, он дает построения некоторых *эпициклоид* и аналогичных еще более сложных кривых. Он пытался дать также математические правила учения о перспективе.

Вернемся теперь снова в Италию, где, как мы видели, после долгого периода застоя появился в лице Леонардо Пизанского первый настоящий математик и где через триста лет после него должны были быть сделаны открытия, с которых началась для математики новая эра. Италия явилась центром возрождения наук и искусств, перебросившегося затем в другие страны. Здесь Леонардо да-Винчи (Vinci, 1452—1519) сумел, подобно Альбрехту

Дюреру, соединить в себе искусство и математику: подобно Дюреру этот великий живописец, скульптор и архитектор усиленно занимался физикой и математикой, отдаваясь с особенным интересом геометрическим построениям. В качестве инженера он был знаком и со статикой; так, например, он умел определить центр тяжести пирамиды; он исследовал также кинематическую задачу определения траектории, описываемой точкой плоскости, две прямые которой скользят по неподвижным точкам.

На каком уровне находилась в Италии математика непосредственно перед эпохой великих открытий это видно из обширного сочинения Луки Пачиоло (Luca Paciuolo): Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita. Судя по книге, автор ее не проник так глубоко в сущность математики, как уже до него Леонардо Пизанский, но все же он захватывает много вопросов и касается многочисленных теоретических и практических приложений математики. Но самое существенное это, что труд Пачиоло, *напечатанный* в 1494, г. в Венеции, получил широкое распространение и очутился в руках тех, кто в последующую эпоху явились главными инициаторами нового развития алгебры. Книга Пачиоло явилась для них общим исходным пунктом; благодаря ей они смогли понимать друг друга и, таким образом, объединить свои усилия.

Три следующих за Леонардом Пизанским столетия послужили, главным образом, для распространения накопленных в его трудах математических знаний и методов, явившихся впоследствии исходным пунктом для дальнейших достижений; к этому присоединилось затем непосредственное знакомство с древними авторами, заложившими основы математической науки, в особенности с Эвклидом и отчасти с Птолемеем. Кроме того, начали знакомиться с авторами, которым в ближайшем будущем предстояло дать толчок развитию математики,— именно с Архимедом, Аполлонием и Диофантом. Наконец, в области тригонометрии Региомонтаном были достигнуты существенные успехи. Ученые владели уже рядом технических приемов, которыми затем воспользовалась алгебра, и хотя символика Шюке —очень развитая— не вошла во всеобщее употребление, но наличие ее свидетельствовало о том, что математики были уже в состоянии создать себе арсенал средств, необходимых для дальнейшего развития науки.

Так подготовлялась новая эпоха расцвета математики, которая по своей плодотворности должна была достойным образом соперничать с теми несколькими веками греческой истории, когда древняя математика находилась в зените своего развития. Переломным моментом в наступлении этой новой эпохи можно считать решение кубических уравнений, показавшее, что европейские ученые в состоянии были справиться с задачей, от решения которой должны были отказаться греки и арабы; это дало исследователям совершенно новую веру в свои силы. Благодаря книгопечатанию стала возможной плодотворная концентрация научных усилий различных стран. Вскоре после упомянутого только что достижения были сделаны и другие крупные открытия в *алгебре*; одновременно с этим научились понимать трудные книги творцов греческой *геометрии*: заимствованные из последней элементы соединили с новой алгеброй — и так возникла *аналитическая геометрия*.

В стереометрическом исследовании конических сечений европейские ученые значительно превзошли древних. Изучив сочинения Архимеда по *статике*, они создали *динамику*. Опираясь на Диофанта, но производя исследования совершенно новым путем, они получили замечательнейшие предложения *теории чисел*, а знакомство с изысканиями Архимеда в области бесконечно малого, толкая творческую мысль в этом направлении, привело к созданию особых соответствующих методов, так что к концу XVII в. в руках европейских математиков оказалось уже орудие *исчисления бесконечно малых*. Наконец, предпринятые еще в конце средних веков попытки, о которых упоминалось выше, привели к созданию и практическому употреблению логарифмов.

Заканчивая наш очерк истории математики в древности и средние века, мы сочли возможным забежать несколько вперед и упомянуть о великих открытиях, сделанных лишь в последующие столетия. Но, может быть, это необходимо для лучшего понимания того, почему мы останавливались так подробно на древнегреческой математике: помимо представляемого ею огромного самостоятельного интереса, как звена в цепи разнообразных знаний, накопленных к концу средних веков, она явилась неиссякаемым источником, откуда исследователи черпали энергию для дальнейших достижений,— черпали, разумеется, тогда, когда они научились пользоваться им и сочетать с заимствованными из него идеями свои собственные творческие концепции.

ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

[1] Указатель содержит ссылки лишь на страницы, на которых имеются существенные сведения о данном предмете или лице.

В настоящее время Государственным технико-теоретическим издательством подготовляется к печати:

Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII веках.

Книга намечена к выходу из печати во втором квартале 1933 г.

Кроме того, по истории математики выходят из печати в ближайшее время:

Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам.

Вып. I-й. Арифметика и алгебра.

Вып. 2-й. Геометрия и тригонометрия.

Вып. 3-й. Аналитическая и синтетическая геометрия

Вып. 4-й. Исчисление бесконечно-малых.

Г. Попов, Сборник исторических задач по математике.

Печатается:

Г. Вилейтнер, Как зарождалась современная математика.

По серии „Классики естествознания" вышла из печати книга:

И. Листинг, Предварительные исследования по топологии.

Печатаются:

Архимед, Псаммит.

Л. Карно, Размышления о метафизике исчисления бесконечно-малых.

Готовится к печати:

Г. Галилей, Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки. Дни 1 и 2-й.