H. Helmholtz.

Zwei hydrodynamische Abhandlungen.

(Crelle-Borchardt, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LV, S. 25—55. Berlin, 1858).

(Monatsberichte d. konigl. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1868, S. 215—228).

MOSKAU.

1902 г.

H. Helmholtz.

Два изслѣдованія по гидродинамикѣ.

I. О вихревомъ движеніи. II. О прерывномъ движеніи жидкости.

Переводъ подъ редакціей

С. А. Чаплыгина

професс. Императорскаго Московскаго Инженернаго Училища В. П. С.

МОСКВА.

1902 г.

I.

Объ интегралахъ уравненій гидродинамики, соотвѣтствующихъ вихревымъ движеніямъ.

До сихъ поръ интегралы уравненій гидродинамики отыскивались почти исключительно въ томъ предположеніи, что прямоугольные компоненты скорости каждой жидкой частицы могутъ быть приравнены производнымъ, взятымъ по соотвѣтственнымъ направленіямъ отъ нѣкоторой опредѣленной функціи, которую мы условимся называть *потенціаломъ скоростей* [1]). И, дѣйствительно, еще Лагранжъ *) доказалъ, что это предположеніе допустимо во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда движеніе жидкой массы возникло и продолжается подъ дѣйствіемъ силъ, которыя сами могутъ быть представлены какъ производныя отъ потенціала силъ; онъ далѣе показалъ, что и вліяніе движущихся твердыхъ тѣлъ, которыя приходятъ въ соприкосновеніе съ жидкостью, не измѣняетъ пригодности этого предположенія. Но такъ какъ большинство поддающихся точному математическому опредѣленію силъ природы можетъ быть представлено въ

*) Mécanique analytique. Paris. 1815. T. II, p. 304.

видѣ производныхъ отъ потенціала силъ, то отсюда и большая часть подлежащихъ математическому разсмотрѣнію случаевъ движенія жидкости принадлежитъ именно къ тѣмъ, при которыхъ существуетъ потенціалъ скоростей.

Между тѣмъ уже Эйлеръ *) обратилъ вниманіе на то, что существуютъ и такіе случаи движенія жидкости, при которыхъ не имѣетъ мѣста потенціалъ скоростей, напримѣръ, вращеніе жидкости около оси при одинаковой угловой скорости всѣхъ частицъ. Къ силамъ, способнымъ вызвать такого рода движенія, принадлежатъ силы магнитныя, дѣйствующія на жидкость, по которой пробѣгаетъ электрическій токъ, и въ особенности треніе частицъ жидкости между собой и о твердыя тѣла. Вліяніе тренія въ жидкостяхъ до сихъ поръ еще не поддавалось математическому опредѣленію, а между тѣмъ во всѣхъ случаяхъ, гдѣ дѣло идетъ не о безконечно малыхъ колебаніяхъ, оно очень велико и порождаетъ весьма значительныя отклоненія дѣйствительности отъ теоріи. Трудность опредѣленія этого вліянія и изысканія метода для его измѣренія обусловливались, главнымъ образомъ, пожалуй, тѣмъ, что не имѣлось вовсе нагляднаго представленія о формахъ такихъ движеній, которыя вызываются въ жидкости треніемъ. Въ этомъ отношеніи мнѣ казалось поэтому весьма важнымъ подвергнуть изслѣдованію формы движенія, при которыхъ не существуетъ потенціала скоростей.

---

*) Histoire de l'Acad. des Sciences de Berlin. An. 1755, p. 292.

Дальнѣйшее изслѣдованіе покажетъ намъ, что въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ существуетъ потенціалъ скоростей, мельчайшія частицы жидкости не имѣютъ вращательнаго движенія, но, по крайней мѣрѣ, часть жидкихъ частицъ находится во вращеніи, разъ потенціалъ скоростей не имѣетъ мѣста.

Вихревыми линіями я называю линіи, проведенныя въ жидкой массѣ такимъ образомъ, что ихъ направленіе повсюду совпадаетъ съ направленіемъ мгновенной оси вращенія лежащихъ на нихъ частицъ жидкости.

Вихревыми нитями я называю части жидкой массы, которыя выдѣлятся изъ нея, если черезъ всѣ точки контура безконечно малаго элемента поверхности провести соотвѣтственныя вихревыя линіи.

Изслѣдованіе показываетъ, что если для всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на жидкость, существуетъ потенціалъ силъ, то:

1) ни одна жидкая частица не можетъ придти во вращательное движеніе, если только она не обладала имъ уже съ самаго начала;

2) жидкія частицы, расположенныя для какого-нибудь момента времени на вихревой линіи, всегда будутъ и при своемъ перемѣщеніи принадлежать одной и той же вихревой линіи;

3) произведеніе поперечнаго сѣченія на скорость вращенія для безконечно тонкой вихревой нити на всемъ ея протяженіи постоянно и сохраняетъ свою величину при передвиженіи нити. Поэтому вихревыя нити должны внутри жидкости замыкаться въ себѣ; онѣ могутъ оканчиваться не иначе, какъ на ея границахъ.

Это послѣднее положеніе даетъ возможность опредѣлить скорости вращенія, если дана форма соотвѣтственныхъ вихревыхъ нитей для различныхъ моментовъ времени *). Далѣе разрѣшается задача объ опредѣлении скоростей жидкихъ частицъ для извѣстнаго момента времени, если для этого момента даны скорости вращенія; при этомъ остается неопредѣленной только одна произвольная функція, которую нужно подобрать такъ, чтобы удовлетворялись граничныя условія.

Эта послѣдняя задача приводитъ насъ къ замѣчательной аналогіи между вихревыми движеніями жидкости и электромагнитными дѣйствіями электрическихъ токовъ. Именно, если въ односвязномъ **) пространствѣ, заполненномъ движущейся жидкостью, существуетъ потенціалъ скоростей, то скорости жидкихъ частицъ совпадаютъ по величинѣ и направленію съ тѣми силами, которыя проявили бы извѣстнымъ образомъ распредѣленныя на поверхности пространства магнитныя массы на магнитную частицу, помѣщающуюся внутри его. Если же, напротивъ, въ такомъ пространствѣ существуютъ вихревыя нити, то скорости жидкихъ частицъ должно положить равными

*) Рѣшенія этой задачи Гельмгольцемъ не дано. *Прим. ред.*

**) Я употребляю это выраженіе въ такомъ же смыслѣ, въ какомъ Riemann (Crelle's Journal, Bd. LIV. S. 108) говоритъ объ односвязныхъ и многосвязныхъ поверхностяхъ. Такъ что n-связное пространство есть такое пространство, которое можно пересѣчь не болѣе, какъ $(n-1)$ поверхностями, не раздѣляя его на двѣ совершенно разъединенныя части. Такъ кольцо въ этомъ смыслѣ есть двусвязное пространство. Пересѣкающія поверхности должны быть вполнѣ ограничены замкнутой линіей, по которой онѣ пересѣкаютъ границы пространства.

силамъ, возникающимъ отъ дѣйствія на магнитную частицу замкнутыхъ электрическихъ токовъ, которые частью проходятъ по вихревымъ нитямъ внутри массы, частью по ея поверхности, и сила которыхъ пропорціональна произведенію поперечнаго сѣченія вихревыхъ нитей на скорость вращенія.

Въ виду этого въ дальнѣйшемъ я позволю себѣ часто воображать присутствіе магнитныхъ массъ или электрическихъ токовъ для того только, чтобы, пользуясь этимъ, получить болѣе краткое и наглядное выраженіе для природы функцій, которыя являются именно такими функціями отъ координатъ, какъ потенціальныя функціи или силы притяженія указанныхъ массъ или токовъ на магнитную частицу.

Благодаря этимъ положеніямъ, цѣлый рядъ формъ движенія, скрытыхъ въ неразработанномъ классѣ интеграловъ уравненій гидродинамики, становится, по крайней мѣрѣ, доступнымъ представленію, хотя окончательное выполненіе интеграціи возможно лишь для немногихъ простѣйшихъ случаевъ, когда имѣется только одна или двѣ прямолинейныя или круговыя вихревыя нити въ безграничныхъ или только отчасти ограниченныхъ безконечною плоскостью жидкихъ массахъ.

Можно доказать, что прямолинейныя параллельныя вихревыя нити въ жидкой массѣ, ограниченной только перпендикулярными къ нитямъ плоскостями, вращаются вокругъ общаго ихъ центра тяжести, если для опредѣленія этой точки принимать скорость вращенія равной плотности массы. Положеніе центра тяжести остается неизмѣннымъ. Наоборотъ, въ случаѣ круговыхъ вихревыхъ нитей, которыя всѣ расположены перпендикулярно къ общей оси, центръ тяжести ихъ поперечнаго сѣченія перемѣщается параллельно этой оси.

§ 1.

Опредѣленіе вращенія.

Пусть внутри капельной жидкости въ точкѣ, опредѣляемой прямоугольными координатами x, y, z для времени t, давленіе равно p; компоненты скорости, параллельные тремъ координатнымъ осямъ, суть u, v, w; компоненты внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на единицу жидкой массы X, Y, Z, и плотность, измѣненія которой мы принимаемъ исчезающе малыми, равна h; тогда для точекъ [3]) внутри жидкости, какъ извѣстно, имѣютъ мѣсто такія уравненія движенія:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X-\frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dx}&=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz},\\ Y-\frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dy}&=\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz},\\ Z-\frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dz}&=\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz},\\ 0&=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.\end{aligned}\right.$$

До сихъ поръ разсматривали почти исключительно такіе случаи, гдѣ не только силы X, Y и Z имѣютъ потенціалъ V, такъ что могутъ быть представлены въ формѣ:

$$(1a)\quad X=\frac{dV}{dx},\quad Y=\frac{dV}{dy},\quad Z=\frac{dV}{dz},$$

но гдѣ, кромѣ того, можно найти и потенціалъ скоростей [1]) φ, такъ что

$$(1b)\quad u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz}.$$

Этимъ задача значительно упрощается, такъ какъ три первыхъ уравненія (1) даютъ одно общее интегральное уравненіе, изъ котораго можно найти p, опредѣливъ предварительно φ изъ четвертаго уравненія, которое въ данномъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0,$$

и такимъ образомъ совпадаетъ съ извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ для потенціала магнитныхъ массъ, помѣщающихся внѣ пространства, для котораго должно имѣть мѣсто это уравненіе. Извѣстно также, что всякая функція φ, удовлетворяющая этому дифференціальному уравненію внутри односвязнаго *) пространства, можетъ быть представлена, какъ потенціалъ извѣстнаго распредѣленія магнитныхъ массъ на его границахъ, какъ я объ этомъ упоминалъ уже во введеніи.

Для того, чтобы подстановки, указанныя уравненіемъ (1b), имѣли мѣсто, необходимо, чтобы:

---

*) Въ многосвязныхъ пространствахъ φ можетъ сдѣлаться многозначной, а для многозначныхъ функцій, удовлетворяющихъ указанному дифференціальному уравненію, основной законъ теоріи электричества Green'a (Crelle's Journal, Bd. XLIV. S. 360) не имѣетъ силы, а, слѣдовательно, не имѣетъ мѣста и большая часть вытекающихъ изъ нея положеній, выведенныхъ Gauss'омъ и Green'омъ для магнитныхъ потенціальныхъ функцій, которыя по своей природѣ всегда однозначны.

$$(1c)\quad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0,\quad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=0,\quad \frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=0.$$

Чтобы уяснить себѣ механическій смыслъ этихъ трехъ условій, мы можемъ представить себѣ, что измѣненіе, которое претерпѣваетъ безконечно малый объемъ жидкости въ элементъ времени dt, слагается изъ трехъ различныхъ движеній: 1) перемѣщенія жидкой частицы въ пространствѣ; 2) растяженія или сжатія частицы по тремъ главнымъ направленіямъ растяженія, при чемъ всякій прямоугольный параллелепипедъ жидкости, стороны котораго параллельны главнымъ направленіямъ растяженія, остается прямоугольнымъ, такъ что стороны его хотя и измѣняются по длинѣ, но тѣмъ не менѣе остаются параллельными прежнимъ направленіямъ; 3) изъ поворота около произвольно направленной мгновенной оси вращенія, при чемъ этотъ поворотъ по извѣстной теоремѣ всегда можно разсматривать, какъ результатъ сложенія трехъ поворотовъ около осей координатъ [5]).

Положимъ, что для точки съ координатами $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ и $\mathfrak{z}$ выполнены условія (1c); обозначимъ значенія u, v и w и ихъ производныя въ этой точкѣ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}
u&=A, & \frac{du}{dx}&=a, & \frac{dw}{dy}&=\frac{dv}{dz}=\alpha,\\
v&=B, & \frac{dv}{dy}&=b, & \frac{du}{dz}&=\frac{dw}{dx}=\beta,\\
w&=C, & \frac{dw}{dz}&=c, & \frac{dv}{dx}&=\frac{du}{dy}=\gamma.
\end{aligned}$$

Для точекъ, координаты которыхъ x, y, z безконечно мало разнятся отъ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, мы получимъ:

$$\begin{aligned}
u&=A+a(x-\mathfrak{x})+\gamma(y-\mathfrak{y})+\beta(z-\mathfrak{z}),\\
v&=B+\gamma(x-\mathfrak{x})+b(y-\mathfrak{y})+\alpha(z-\mathfrak{z}),\\
w&=C+\beta(x-\mathfrak{x})+\alpha(y-\mathfrak{y})+c(z-\mathfrak{z}),
\end{aligned}$$

или положивъ:

$$\begin{aligned}
\varphi&=A(x-\mathfrak{x})+B(y-\mathfrak{y})+C(z-\mathfrak{z})\\
&+\tfrac{1}{2}a(x-\mathfrak{x})^2+\tfrac{1}{2}b(y-\mathfrak{y})^2+\tfrac{1}{2}c(z-\mathfrak{z})^2\\
&+\alpha(y-\mathfrak{y})(z-\mathfrak{z})+\beta(x-\mathfrak{x})(z-\mathfrak{z})+\gamma(x-\mathfrak{x})(y-\mathfrak{y}),
\end{aligned}$$

имѣемъ

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz}.$$

Извѣстно, что надлежащимъ выборомъ направленія прямоугольныхъ координатъ x_1, y_1, z_1 съ началомъ въ точкѣ ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) можно выраженіе для φ привести къ такому виду:

$$\varphi=A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+\tfrac{1}{2}a_1x_1^2+\tfrac{1}{2}b_1y_1^2+\tfrac{1}{2}c_1z_1^2;$$

разложенныя по этимъ новымъ осямъ координатъ скорости u_1, v_1, w_1 получаютъ значенія:

$$u_1=A_1+a_1x_1,\quad v_1=B_1+b_1y,\quad w_1=C_1+c_1z_1.$$

Такимъ образомъ скорость u_1, параллельная оси x_1, одна и та же для всѣхъ жидкихъ частицъ, для которыхъ x_1 имѣетъ одну и ту же величину; иначе, частицы, лежавшія въ началѣ элемента времени dt въ плоскости параллельной плоскости y_1z_1, находятся въ таковой же и въ концѣ элемента времени dt. То же самое справедливо и для плоскостей x_1y_1 и x_1z_1. Такимъ образомъ, если мы вообразимъ себѣ параллелепипедъ, ограниченный тремя плоскостями, параллельными тремъ упомянутымъ, координатнымъ плоскостямъ и безконечно близкими къ нимъ, то заключающіяся въ немъ жидкія частицы и по истеченіи элемента времени dt образуютъ прямоугольный параллелепипедъ, грани котораго параллельны тѣмъ же координатнымъ плоскостямъ.

Все движеніе такого безконечно малаго параллелепипеда при условіи (1 *c*) слагается такимъ образомъ лишь изъ поступательнаго передвиженія въ пространствѣ и изъ растяженія или сжатія его реберъ; вращательнаго же движенія въ этомъ случаѣ совершенно нѣтъ.

Возвратимся къ нашей первой системѣ координатъ x, y, z и вообразимъ себѣ, что къ разсмотрѣннымъ движеніямъ безконечно малыхъ массъ жидкости, окружающихъ точку $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, присоединяются еще вращательныя движенія около осей параллельныхъ осямъ x, y, z и проходящихъ черезъ точку $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Если угловыя скорости этихъ вращательныхъ движеній соотвѣтственно равны ξ, η, ζ, то вносимые ими компоненты скорости, параллельные координатнымъ осямъ x, y, z, будутъ соотвѣтственно:

$$\begin{array}{ccc} 0, & (z-\mathfrak{z})\,\xi, & -(y-\mathfrak{y})\,\xi; \\ -(z-\mathfrak{z})\,\eta, & 0, & (x-\mathfrak{x})\,\eta; \\ (y-\mathfrak{y})\,\zeta, & -(x-\mathfrak{x})\,\zeta, & 0. \end{array}$$

Скорости частицы, координаты которой x, y, z, выразятся тогда слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} u &= A + a\,(x-\mathfrak{x}) + (\gamma+\zeta)\,(y-\mathfrak{y}) + (\beta-\eta)\,(z-\mathfrak{z}), \\ v &= B + (\gamma-\zeta)\,(x-\mathfrak{x}) + b\,(y-\mathfrak{y}) + (\alpha+\xi)\,(z-\mathfrak{z}), \\ w &= C + (\beta+\eta)\,(x-\mathfrak{x}) + (\alpha-\xi)\,(y-\mathfrak{y}) + c\,(z-\mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Дифференцируя получаемъ:

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\,\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\,\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\,\zeta. \end{aligned} \right.$$

Такимъ образомъ, лѣвыя части уравненій, которыя по уравненіямъ (1 *c*) должны равняться нулю, разъ существуетъ потенціалъ скоростей, равны удвоеннымъ скоростямъ вращенія соотвѣтственныхъ жидкихъ частицъ около трехъ координатныхъ осей. Слѣдовательно, существованіе потенціала скоростей исключаетъ возможность существованія вращательнаго движенія жидкихъ частицъ.

Какъ дальнѣйшую характерную особенность движенія жидкости съ потенціаломъ скоростей, нужно привести здѣсь то, что въ пространствѣ S, ограниченномъ неподвижными стѣнками, совершенно заполненномъ жидкостью и односвязномъ, такого движенія существовать не можетъ. Въ самомъ дѣлѣ, если мы черезъ n обозначимъ направленную внутрь нормаль къ поверхности такого пространства, то перпендикулярные къ стѣнкамъ компоненты скорости $\frac{d\varphi}{dn}$ вездѣ должны быть равны нулю. Тогда по извѣстной теоремѣ *) Green'a [6]):

$$\iiint \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dxdydz = -\int \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\omega,$$

гдѣ слѣва интеграція должна быть распространена на все пространство S, а справа на граничную поверхность элементъ площади которой обозначенъ $d\omega$. Если теперь $\frac{d\varphi}{dn}$ на всей поверхности равно нулю, то и интегралъ въ лѣвой части долженъ равняться нулю, что воз-

*) Уже упоминавшаяся выше теорема въ Crelle's Journal, Bd. XLIV. S. 360, не распространяющаяся на многосвязныя

можно лишь въ томъ случаѣ, когда во всемъ пространствѣ S

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi}{dz}=0,$$

т. е. если совсѣмъ не происходитъ никакого движенія жидкости. Такимъ образомъ, всякое движеніе ограниченной жидкой массы въ односвязномъ пространствѣ, обладающее потенціаломъ скоростей, необходимо связано съ движеніемъ поверхности жидкости. Если это движеніе поверхности, т. е. $\frac{d\varphi}{dn}$, вполнѣ намъ дано, то тѣмъ самымъ однозначно опредѣлено и движеніе всей заключенной внутри ея массы жидкости. Въ самомъ дѣлѣ, если бы существовали функціи $\varphi_{,}$ и $\varphi_{,,}$, которыя одновременно удовлетворяли бы внутри пространства S уравненію:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0,$$

и на поверхности условію: $\frac{d\varphi}{dn}=\psi$, гдѣ ψ обозначаетъ величины $\frac{d\varphi}{dn}$, обусловленныя движеніемъ поверхности, то и функція $(\varphi_{,}-\varphi_{,,})$ удовлетворяла бы первому уравненію внутри пространства S, на поверхности же было бы

$$\frac{d(\varphi_{,}-\varphi_{,,})}{dn}=0;$$

отсюда слѣдовало бы, какъ уже было показано выше, что внутри пространства S

$$\frac{d(\varphi_{,}-\varphi_{,,})}{dx}=\frac{d(\varphi_{,}-\varphi_{,,})}{dy}=\frac{d(\varphi_{,}-\varphi_{,,})}{dz}=0.$$

Такимъ образомъ, обѣимъ функціямъ соотвѣтствовали бы совершенно тѣ же скорости и внутри всего пространства S.

Такимъ образомъ, только въ томъ случаѣ, когда не существуетъ потенціала скоростей, возможны вращенія жидкихъ частицъ; лишь въ этомъ случаѣ линіи тока могутъ замыкаться внутри односвязнаго вполнѣ замкнутаго пространства. Мы можемъ поэтому движенія, не обладающія потенціаломъ скоростей, вообще характеризовать какъ вихревыя [7]).

§ 2.

Постоянство вихревого движенія.

Прежде всего опредѣлимъ, какъ измѣняются скорости вращенія ξ, η, ζ во время движенія, если дѣйствуютъ только силы, допускающія потенціалъ силъ. Замѣчу, во-первыхъ, вообще, что если ψ есть функція x, y, z и t и возрастаетъ на $\partial\psi$, при возрастаніи этихъ четырехъ величинъ на ∂x, ∂y, ∂z и ∂t, то

$$\partial\psi=\frac{d\psi}{dt}\partial t+\frac{d\psi}{dx}\partial x+\frac{d\psi}{dy}\partial y+\frac{d\psi}{dz}\partial z.$$

Если мы теперь желаемъ опредѣлить измѣненіе ψ за элементъ времени ∂t для нѣкоторой опредѣленной частицы жидкости, то величинамъ ∂x, ∂y и ∂z должно дать тѣ значенія, которыя они имѣютъ для движущейся частицы, а именно:

$$\partial x=u\partial t,\ \partial y=v\partial t,\ \partial z=w\partial t,$$

получаемъ [8])

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{d\psi}{dt}+u\frac{d\psi}{dx}+v\frac{d\psi}{dy}+w\frac{d\psi}{dz}.$$

Обозначеніе $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ въ дальнѣйшемъ я буду всегда употреблять въ томъ смыслѣ, чтобы $\frac{\partial\psi}{\partial t}dt$ выражало измѣненіе ψ за время dt для одной и той же жидкой частицы, координаты которой въ началѣ времени dt были x, y, z.

Исключая изъ уравненій (1) дифференцированіемъ величину p, вводя обозначенія, подставляя значенія изъ уравненій (2) и принимая, что силы X, Y, Z удовлетворяютъ уравненіямъ (1a), получаемъ слѣдующія три уравненія [9]:

$$
(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dx} + \eta\frac{du}{dy} + \zeta\frac{du}{dz},\\
\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \xi\frac{dv}{dx} + \eta\frac{dv}{dy} + \zeta\frac{dv}{dz},\\
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \zeta\frac{dw}{dz},
\end{aligned}\right.
$$

или же

$$
(3a)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dx} + \eta\frac{dv}{dx} + \zeta\frac{dw}{dx},\\
\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dy} + \eta\frac{dv}{dy} + \zeta\frac{dw}{dy},\\
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \xi\frac{du}{dz} + \eta\frac{dv}{dz} + \zeta\frac{dw}{dz}.
\end{aligned}\right.
$$

Если для выбранной частицы ξ, η, ζ одновременно равны нулю, то и

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0.$$

Такимъ образомъ, ***жидкія частицы, не находившіяся уже во вращательномъ движеніи, не придутъ въ таковое и по истеченіи нѣкотораго времени.***

Какъ извѣстно, вращательныя движенія можно складывать по методу параллелограмма силъ. Если ξ, η, ζ суть скорости вращенія около координатныхъ осей, то скорость вращенія σ [10]) около мгновенной оси вращенія есть

$$\sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

а косинусы угловъ, которые образуетъ эта ось съ координатными осями, соотвѣтственно равны:

$$\frac{\xi}{\sigma},\quad \frac{\eta}{\sigma} \text{ и } \frac{\zeta}{\sigma}.$$

Если мы въ направленіи этой мгновенной оси вращенія отложимъ безконечно малый отрѣзокъ $\sigma\varepsilon$, то проекціи его на оси координатъ будутъ соотвѣтственно равны $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$ и $\varepsilon\zeta$. Если въ точкѣ x, y, z компоненты скорости суть u, v и w, то на другомъ концѣ отрѣзка $\sigma\varepsilon$ они имѣютъ величины:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u + \varepsilon\xi\frac{du}{dx} + \varepsilon\eta\frac{du}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{du}{dz},\\
v_1 &= v + \varepsilon\xi\frac{dv}{dx} + \varepsilon\eta\frac{dv}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{dv}{dz},\\
w_1 &= w + \varepsilon\xi\frac{dw}{dx} + \varepsilon\eta\frac{dw}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{dw}{dz}.
\end{aligned}
$$

Такимъ образомъ, по истеченіи времени dt проекціи разстоянія между обѣими частицами, ограничивавшими въ началѣ dt отрѣзокъ $\sigma\varepsilon$, получатъ значенія, которыя на основаніи уравненій (3) можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$\varepsilon\xi + (u_1 - u)\,dt = \varepsilon\left(\xi + \frac{\partial\xi}{\partial t}\,dt\right),$$

$$\varepsilon\eta + (v_1 - v)\,dt = \varepsilon\left(\eta + \frac{\partial\eta}{\partial t}\,dt\right),$$

$$\varepsilon\zeta + (w_1 - w)\,dt = \varepsilon\left(\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t}\,dt\right).$$

Слѣва здѣсь стоятъ проекціи отрѣзка $\sigma\varepsilon$ въ его новомъ положеніи, справа — умноженныя на постоянный факторъ ε проекціи новой скорости вращенія; изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что линія, соединяющая двѣ частицы, которыя въ началѣ времени dt ограничивали отрѣзокъ $\sigma\varepsilon$ мгновенной оси вращенія, и по истеченіи времени dt совпадаетъ съ измѣнившейся теперь осью вращенія [11]).

Если линію, направленіе которой вездѣ совпадаетъ съ направленіемъ мгновенной оси вращенія находящихся на ней жидкихъ частицъ, мы назовемъ, какъ уже раньше условились, вихревой линіей, то мы можемъ только-что полученный выводъ формулировать такъ: ***всякая вихревая линія остается постоянно составленной изъ однѣхъ и тѣхъ же частицъ жидкости и передвигается въ жидкости вмѣстѣ съ ними.***

Прямоугольные компоненты угловой скорости ... личиваются въ томъ же отношеніи, какъ и прое... отрѣзка $\sigma\varepsilon$ оси вращенія; отсюда слѣдуетъ, что ***результирующая скорость вращенія опредѣленной жидкой частицы измѣняется въ такомъ же отношеніи, какъ разстояніе этой частицы отъ сосѣднихъ на оси вращенія.***

Вообразимъ себѣ, что черезъ всѣ точки контура безконечно малой площади проведены вихревыя линіи; этимъ способомъ мы выдѣлимъ жидкую нить съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ; будемъ называть ее вихревою нитью. Объемъ отрѣзка такой нити, ограниченнаго двумя опредѣленными частицами, по только что доказанному остается все время наполненнымъ однѣми и тѣми же частицами жидкости; при передвиженіи объемъ этотъ не измѣняется [12]), и, слѣдовательно, его поперечное сѣченіе должно измѣняться обратно пропорціонально длинѣ. Поэтому указанное выше положеніе можно формулировать и такъ: ***произведеніе скорости вращенія на поперечное сѣченіе въ части вихревой нити, состоящей изъ однѣхъ и тѣхъ же частицъ воды, остается постояннымъ при передвиженіи нити.***

Изъ уравненій (2) непосредственно слѣдуетъ, что

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

откуда далѣе

$$\iiint\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0.$$

Эта интеграція можетъ быть распространена на вполнѣ произвольный объемъ S жидкой массы; проинтегрировавъ почленно, имѣемъ

$$\iint \xi\,dy\,dz + \iint \eta\,dx\,dz + \iint \zeta\,dx\,dy = 0,$$

при чемъ интеграція распространяется на всю поверхность объема S. Назовемъ черезъ $d\omega$ элементъ площади этой поверхности и чрезъ α, β, γ — углы, которые образуетъ внѣшняя нормаль къ $d\omega$ съ осями координатъ [13]); тогда

$$dy\,dz = \cos\alpha d\omega,\ \ dx\,dz = \cos\beta d\omega,\ \ dxdy = \cos\gamma d\omega.$$

Слѣдовательно:

$$\iint(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)\,d\omega = 0,$$

или называя черезъ σ результирующую скорость вращенія и чрезъ ϑ уголъ ея съ нормалью,

$$\iint\sigma\cos\vartheta\,.\,d\omega = 0,$$

гдѣ интеграція распространяется на всю поверхность объема S.

Пусть теперь S представляетъ отрѣзокъ вихревой нити, ограниченной двумя безконечно малыми плоскими элементами $\omega_{,}$ и $\omega_{,,}$, перпендикулярными къ оси нити; тогда $\cos\vartheta$ для одного изъ этихъ элементовъ равенъ 1, для другого — 1, на всей остальной поверхности нити равенъ нулю; пусть далѣе, $\sigma_{,}$ и $\sigma_{,,}$ суть скорости вращенія въ точкахъ сѣченій $\omega_{,}$ и $\omega_{,,}$; тогда послѣднее уравненіе даетъ

$$\sigma_{,}\omega_{,} = \sigma_{,,}\omega_{,,},$$

откуда слѣдуетъ: ***произведеніе скорости вращенія на поперечное сѣченіе есть величина постоянная на всей длинѣ одной и той же нити.*** Что оно не измѣняется и при передвиженіи нити, это было доказано уже раньше.

Изъ этого положенія вытекаетъ также, что вихревая нить нигдѣ внутри жидкости не можетъ пресѣчься; она либо замыкается внутри жидкости, образуя кольцо, либо распростирается до границъ ея. Въ самомъ дѣлѣ, если бы вихревая нить кончалась гдѣ-нибудь внутри жидкости, то можно было бы построить замкнутую поверхность, для которой интегралъ $\int\sigma\cos\vartheta\,d\omega$ не равнялся бы нулю.

§ 3.

Интеграція по объему.

Если возможно опредѣлить движеніе имѣющихся въ жидкости вихревыхъ нитей, то съ помощью установленныхъ положеній вполнѣ опредѣляются и величины ξ, η и ζ. Мы перейдемъ теперь къ задачѣ объ опредѣленіи скоростей u, v и w по даннымъ ξ, η и ζ.

Итакъ, пусть внутри жидкой массы, заполняющей пространство S, даны значенія 3-хъ величинъ ξ, η и ζ, удовлетворяющія условію:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0. \tag{2a}$$

Требуется найти u, v и w такъ, чтобы они внутри всего пространства S удовлетворяли уравненіямъ:

$$(1)_{1} \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\,\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\,\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\,\zeta. \end{aligned}\right.$$

Сюда присоединяются еще условія, которыя должны выполняться на границахъ пространства S и которыя зависятъ всякій разъ отъ природы задачи. При данномъ распредѣленіи величинъ ξ, η и ζ можетъ оказаться, что лишь часть вихревыхъ нитей, заключенныхъ внутри пространства S, замыкаются, а всѣ остальныя нити достигаютъ границъ S и здѣсь обрываются. Нити этой послѣдней категоріи всегда можно продолжить либо по поверхности S, либо внѣ объема S, такъ чтобы онѣ замкнулись, тогда мы будемъ имѣть большій объемъ S_1, который будетъ заключать въ себѣ лишь замкнутыя вихревыя нити, и на поверхности котораго величины ξ, η, ζ и сами результирующія ихъ σ будутъ равняться нулю, или, по крайней мѣрѣ,

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = \sigma \cos\vartheta = 0. \quad (2b).$$

Здѣсь, какъ и раньше, α, β и γ обозначаютъ углы между нормалью въ соотвѣтственной части поверхности S_1 и осями координатъ, ϑ — уголъ между нормалью и осью вихреваго вращенія.

Значенія u, v, w, удовлетворяющія уравненіямъ $(1)_4$ и (2), мы получаемъ, полагая:

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{dP}{dx} + \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \\ v &= \frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \\ w &= \frac{dP}{dz} + \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}, \end{aligned}\right.$$

и опредѣляя величины L, M, N и P изъ условій, чтобы внутри пространства S_1

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2L}{dx^2} + \frac{d^2L}{dy^2} + \frac{d^2L}{dz^2} = 2\xi, \\ &\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d^2M}{dy^2} + \frac{d^2M}{dz^2} = 2\eta, \\ &\frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} + \frac{d^2N}{dz^2} = 2\zeta, \\ &\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Какъ интегрируются эти уравненія — извѣстно. L, M, N суть потенціальныя функціи воображаемыхъ магнитныхъ массъ, распредѣленныхъ въ пространствѣ S_1 съ плотностями $-\frac{\xi}{2\pi}$, $-\frac{\eta}{2\pi}$ и $-\frac{\zeta}{2\pi}$; P есть потенціальная функція массъ, расположенныхъ внѣ пространства S [14]). Обозначимъ разстояніе точки съ координатами a, b, c отъ точки (x, y, z) черезъ r, а величины ξ, η, ζ въ точкѣ (a, b, c) черезъ ξ_a, η_a, ζ_a; имѣемъ:

$$(5a) \qquad \left\{\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi_a}{r}\, da\, db\, dc, \\ M &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\eta_a}{r}\, da\, db\, dc, \\ N &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\zeta_a}{r}\, da\, db\, dc, \end{aligned}\right.$$

гдѣ интеграція распространяется на весь объемъ S_1 и

$$P = \iiint \frac{k}{r}\, da\, db\, dc,$$

гдѣ k — произвольная функція отъ a, b, c и интеграція распространяется на ту часть S_1, которая лежитъ внѣ объема S. Произвольную функцію k нужно опредѣлить такъ, чтобы выполнялись граничныя условія — задача, по своей трудности подобная задачамъ объ электрическихъ и магнитныхъ распредѣленіяхъ. Что величины u, v и w, данныя формулами (4), удовлетворяютъ условію $(1)_4$, въ этомъ легко убѣдиться, продифференцировавъ ихъ и принявъ во вниманіе четвертое изъ уравненій (5).

Далѣе, дифференцируя уравненія (4) и принимая во вниманіе первыя три изъ (5), находимъ, что

$$\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=2\xi-\frac{d}{dx}\left[\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right],$$

$$\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=2\eta-\frac{d}{dy}\left[\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right],$$

$$\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=2\zeta-\frac{d}{dz}\left[\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}\right].$$

Такимъ образомъ, уравненія (2) будутъ также выполнены, если можно будетъ доказать, что во всемъ пространствѣ S_1

$$(5b)\qquad \frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0.$$

Что это дѣйствительно имѣетъ мѣсто, ясно изъ уравненій (5*a*):

$$\frac{dL}{dx}=+\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\xi_a(x-a)}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

или, интегрируя по частямъ,

$$\frac{dL}{dx}=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\xi_a}{r}\,db\,dc-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\xi_a}{da}\,da\,db\,dc,$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\eta_a}{r}\,da\,dc-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\eta_a}{db}\,da\,db\,dc,$$

$$\frac{dN}{dz}=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\zeta_a}{r}\,da\,db-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\cdot\frac{d\zeta_a}{dc}\,da\,db\,dc.$$

Складывая эти три уравненія и называя элементъ поверхности S_1 чрезъ $d\omega$ [15]), получаемъ:

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{Nd}{dz}=\frac{1}{2\pi}\int(\xi_a\cos\alpha+\eta_a\cos\beta+\zeta_a\cos\gamma)\frac{1}{r}d\omega$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{1}{r}\left(\frac{d\xi_a}{da}+\frac{d\eta_a}{db}+\frac{d\zeta_a}{dc}\right)da\,db\,dc.$$

Но такъ какъ внутри всего объема

$$(2a)\qquad \frac{d\xi_a}{da}+\frac{d\eta_a}{db}+\frac{d\zeta_a}{dc}=0$$

и на всей поверхности

$$(2b)\qquad \xi_a\cos\alpha+\eta_a\cos\beta+\zeta_a\cos\gamma=0,$$

то оба интеграла равны нулю, и уравненія (5*b*) такъ же, какъ и уравненія (2), удовлетворены. Слѣдовательно, уравненія (4) и (5), или (5*a*) дѣйствительно суть интегралы уравненій $(1)_4$ и (2).

Изъ этихъ формулъ обнаруживается упомянутая уже во введеніи аналогія между дѣйствіемъ вихревыхъ нитей и электромагнитнымъ дѣйствіемъ обтекаемыхъ токомъ проводовъ, аналогія, которая дастъ намъ очень хорошее средство составить себѣ наглядное представленіе о характерѣ вихревыхъ движеній.

Если мы вставимъ въ уравненіе (4) значенія L M и N изъ уравненій (5*a*) и обозначимъ безконечно малыя части u, v и w, вносимыя въ интегралъ пространственнымъ элементомъ $dadbdc$, чрезъ Δu, Δv и Δw, а ихъ равнодѣйствующую черезъ Δp, то:

$$\Delta u=\frac{1}{2\pi}\,\frac{(y-b)\,\zeta_a-(z-c)\,\eta_a}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

$$\Delta v=\frac{1}{2\pi}\,\frac{(z-c)\,\xi_a-(x-a)\,\zeta_a}{r^3}\,da\,db\,dc,$$

$$\Delta w = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-a)\eta_a - (y-b)\xi_a}{r^3} da\,db\,dc.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуетъ, что

$$\Delta u\,(x-a) + \Delta v\,(y-b) + \Delta\,w\,(z-c) = 0,$$

т. е. Δp — равнодѣйствующая Δu, Δv, Δw — образуетъ съ r прямой уголъ. Далѣе:

$$\xi_a \Delta u + \eta_a \Delta v + \zeta_a \Delta w = 0,$$

т. е. та же равнодѣйствующая и съ осью вращенія въ точкѣ a, b, c образуетъ прямой уголъ. Наконецъ:

$$\Delta p = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} = \frac{da\,db\,dc}{2\pi r^2}\,\sigma \sin \nu,$$

гдѣ σ результирующая ξ_a, η_a, ζ_a и ν—уголъ ея съ r, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\sigma r \cos \nu = (x-a)\,\xi_a + (y-b)\,\eta_a + (z-c)\,\zeta_a.$$

Такимъ образомъ, *каждая вращающаяся жидкая частица* **a** *вызываетъ въ каждой другой частицѣ* **b** *той же жидкой массы скорость, направленную перпендикулярно къ плоскости, проходящей черезъ ось вращенія частицы* **a** *и частицу* **b**. *Величина этой скорости прямо пропорціональна объему частицы* **a**, *скорости вращенія ея и синусу угла между прямой* **ab** *и осью вращенія, и обратно пропорціональна квадрату разстоянія между обѣими частицами.*

Совершенно такому же закону слѣдуетъ сила, съ которой дѣйствовалъ бы элементъ электрическаго тока, текущаго по оси вращенія частицы a на магнитную частицу, расположенную въ b [16]).

Это математическое сродство двухъ классовъ явленій природы имѣетъ свое основаніе въ томъ, что при существованіи въ жидкости частицы a,

вихрей, въ тѣхъ частяхъ жидкой массы, гдѣ нѣтъ вращательнаго движенія, существуетъ потенціалъ скоростей φ, удовлетворяющій уравненію

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

и только внутри вихревыхъ нитей это уравненіе не имѣетъ мѣста. Но если мы представимъ себѣ вихревыя нити всегда замкнутыми либо внутри жидкой массы, либо внѣ ея, то пространство, въ которомъ имѣетъ мѣсто дифференціальное уравненіе для φ, будетъ многосвязнымъ *), такъ какъ оно останется связнымъ, если мы вообразимъ въ немъ сѣкущія поверхности, изъ которыхъ каждая вполнѣ ограничена вихревою нитью. Но въ такихъ многосвязныхъ пространствахъ функція φ, удовлетворяющая приведенному дифференціальному уравненію, можетъ сдѣлаться многозначной; она и должна быть многозначной, разъ существуютъ замкнутыя линіи тока; въ самомъ дѣлѣ, скорости жидкой массы внѣ вихревыхъ нитей выражаются производными функціи φ; поэтому, слѣдуя по линіи тока, мы должны получать для φ все бо́льшія и бо́льшія значенія. Такъ какъ эта линія сама собою замыкается, то, слѣдуя по ней, мы возвратимся, наконецъ, въ ту же точку, изъ которой вышли, и, такимъ образомъ, находимъ для этого положенія второе большее значеніе φ. Такъ какъ этотъ обходъ можно произвести неограниченное число разъ,

---

*) Исключительными являются тѣ случаи, когда сама вихревая масса занимаетъ односвязный объемъ, какъ, напр., сферическій вихрь Hill'я. См. Lamb. Hydrodynamics. 1895.

Прим. ред.

то для каждой точки такого многосвязнаго пространства должно существовать безконечное множество различныхъ значеній φ, которыя разнятся между собою на одну и ту же величину, какъ это имѣетъ мѣсто для различныхъ значеній многозначной функціи $\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{x}{y}\right)$, удовлетворяющей нашему дифференціальному уравненію [17]).

Совершенно такъ же обстоитъ дѣло и съ электромагнитными дѣйствіями замкнутаго электрическаго тока. Послѣдній оказываетъ такое же дѣйствіе на разстояніи, какъ извѣстное распредѣленіе магнитныхъ массъ по поверхности, ограниченной проводникомъ. Поэтому, внѣ самаго тока, силы, съ которыми онъ дѣйствуетъ на магнитную частицу, могутъ быть разсматриваемы какъ производныя потенціальной функціи V, удовлетворяющей уравненію:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0.$$

Но и здѣсь пространство, которое окружаетъ замкнутый проводникъ тока и для котораго это уравненіе имѣетъ силу, будетъ многосвязнымъ, и функція V — многозначной.

Такимъ образомъ, при вихревыхъ движеніяхъ жидкости такъ же, какъ и при электромагнитныхъ дѣйствіяхъ, скорости или силы внѣ пространства, занятаго вихревыми нитями или электрическими токами, зависятъ отъ многозначныхъ потенціальныхъ функцій, удовлетворяющихъ общему дифференціальному уравненію магнитныхъ потенціальныхъ функцій; между тѣмъ внутри пространства, занятаго вихревыми

нитями или электрическими токами, на мѣсто потенціальныхъ функцій, которыя сюда не распространяются, выступаютъ другія функціи, опредѣляемыя уравненіями (4), (5), (5*a*). Напротивъ, при движеніи жидкости въ односвязномъ пространствѣ и магнитныхъ силахъ, мы имѣемъ дѣло съ однозначными потенціальными функціями такъ же, какъ при тяготѣніи, электрическихъ притяженіяхъ и стаціонарныхъ электрическихъ и термическихъ токахъ.

Тѣ интегралы уравненій гидродинамики, при которыхъ существуетъ однозначный потенціалъ скоростей, мы можемъ назвать *интегралами перваго класса.* Тѣ же интегралы, при которыхъ имѣетъ мѣсто вращеніе нѣкоторой части жидкихъ частицъ, и вслѣдствіе этого въ области частицъ, не находящихся во вращеніи, существуетъ многозначный потенціалъ скоростей, мы назовемъ *интегралами второго класса.* Въ послѣднемъ случаѣ иногда задача требуетъ разсмотрѣнія лишь тѣхъ частей пространства, которыя не заключаютъ въ себѣ вращающихся частицъ жидкости; напримѣръ, при движеніи воды въ кольцеобразныхъ сосудахъ, можно представить себѣ, что вихревая нить проходитъ черезъ ось сосуда; такимъ образомъ, эта задача принадлежитъ къ числу тѣхъ, которыя могутъ быть разрѣшены, при допущеніи потенціала скоростей. Въ гидродинамическихъ интегралахъ перваго класса скорости жидкихъ частицъ пропорціональны по величинѣ и совпадаютъ по направленію съ силами, которыя вызывало бы извѣстное распредѣленіе магнитныхъ массъ внѣ жидкости, относительно магнитной частицы, помѣщенной на мѣстѣ частицы этой жидкости.

Въ гидродинамическихъ интегралахъ второго класса скорости жидкихъ частицъ пропорціональны по величинѣ и совпадаютъ по направленію съ силами, происходящими отъ совмѣстнаго дѣйствія на магнитную частицу, съ одной стороны, замкнутыхъ электрическихъ токовъ, текущихъ по вихревымъ нитямъ съ напряженіемъ пропорціональнымъ скорости вращенія этихъ вихревыхъ нитей, и, съ другой — магнитныхъ массъ, расположенныхъ внѣ жидкости. Электрическіе токи перемѣщались бы внутри жидкости вмѣстѣ съ соотвѣтственными вихревыми нитями и сохраняли бы неизмѣнное напряженіе. Предполагаемое распредѣленіе магнитныхъ массъ внѣ жидкости или по ея границамъ должно быть опредѣлено такимъ образомъ, чтобы удовлетворялись граничныя условія. Извѣстно затѣмъ, что всякая магнитная масса можетъ быть замѣнена также электрическими токами. Поэтому вмѣсто того, чтобы въ выраженіяхъ для u, v и w прибавлять еще потенціальную функцію P внѣ лежащей массы k, можно получить столь же общее рѣшеніе, если величинамъ ξ, η и ζ внѣ жидкости или даже только на поверхности ея дать произвольныя значенія, но такія, чтобы образовались лишь замкнутые токи **), и затѣмъ распространить интеграцію въ уравненіяхъ (5a) на все пространство, для котораго ξ, η и ζ отличны отъ нуля.

**) Произволъ и въ этомъ случаѣ стѣсняется необходимостью выполнить условія на границахъ.

Прим. ред.

§ 4.

Вихревыя поверхности и энергія вихревыхъ нитей.

Въ гидродинамическихъ интегралахъ перваго класса, какъ я выше показалъ, достаточно знать движеніе граничной поверхности. Этимъ движеніе внутри жидкости вполнѣ опредѣляется. Напротивъ того, въ интегралахъ второго класса требуется опредѣлить еще движеніе имѣющихся внутри жидкости вихревыхъ нитей, принимая въ разсчетъ ихъ взаимное вліяніе и граничныя условія, вслѣдствіе чего задача значительно усложняется. Но для нѣкоторыхъ простыхъ случаевъ все-таки возможно рѣшить и эту задачу, именно для тѣхъ случаевъ, когда вращеніе жидкихъ частицъ происходитъ лишь на нѣкоторыхъ поверхностяхъ или линіяхъ, при чемъ форма этихъ поверхностей и линій при передвиженіи остается неизмѣнной.

Свойства поверхностей, къ которымъ прилегаетъ безконечно тонкій слой вращающихся частицъ жидкости, легко обнаружить изъ уравненій (5a). Если ξ, η и ζ лишь въ безконечно тонкомъ слоѣ отличны отъ нуля, то по извѣстнымъ положеніямъ потенціальныя функціи L, M и N будутъ имѣть на обѣихъ сторонахъ слоя одинаковыя значенія, а производныя ихъ, взятыя въ направленіи нормали къ слою, будутъ различны. Положимъ теперь, что оси координатъ выбраны такъ, чтобы въ разсматриваемомъ мѣстѣ вихревой поверхности ось z совпадала съ нормалью къ поверхности, а ось x съ осью вращенія жидкихъ частицъ на поверхности [18]), такъ что въ этомъ мѣстѣ $\eta = \zeta = 0$; тогда потенціалы M и N, а также и ихъ производныя будутъ имѣть одни и тѣ же значенія на обѣихъ сторонахъ слоя; то же имѣетъ мѣсто для

$$L\frac{dL}{dx} \text{ и } \frac{dL}{dy};$$

напротивъ величина

$$\frac{dL}{dz}$$

будетъ имѣть два значенія, разнящіяся на $2\xi\varepsilon$, если ε обозначаетъ толщину слоя. Уравненія (4) показываютъ, что u и w обладаютъ одинаковыми значеніями на обѣихъ сторонахъ вихревой поверхности, а v значеніемъ, разнящимся на $2\xi\varepsilon$. Такимъ образомъ, *тотъ компонентъ скорости, который направленъ перпендикулярно къ вихревымъ линіямъ и касается поверхности, имѣетъ на обѣихъ сторонахъ вихревой поверхности различныя значенія.* Внутри слоя вращающихся частицъ нужно представлять себѣ соотвѣтственный компонентъ скорости возрастающихъ равномѣрно отъ того значенія, которое имѣетъ мѣсто на одной сторонѣ поверхности, до значенія на другой. Въ самомъ дѣлѣ, если ξ во всей толщинѣ слоя остается постояннымъ, и α обозначаетъ правильную дробь, v' значеніе v на одной сторонѣ, v_1 — на другой, v_α въ самомъ слоѣ на разстояніи $\alpha\varepsilon$ отъ первой стороны, то легко видѣть, что $v' - v_1 = 2\xi\varepsilon$, такъ какъ между обѣими сторонами слой толщиною въ ε и скорость вращенія на немъ ξ. На томъ же основаніи $v' - v_\alpha = 2\xi\varepsilon\alpha = \alpha(v' - v_1)$, а въ этомъ и заключается

указанное положеніе. Вращающіяся частицы мы должны представлять себѣ движущимися и измѣненіе въ распредѣленіи ихъ по поверхности зависящимъ отъ этого движенія ихъ; скорость каждой изъ нихъ равна средней изъ скоростей, имѣющихъ мѣсто въ толщѣ слоя; — эта скорость совпадаетъ съ средней ариѳметической скоростей, имѣющихъ мѣсто на обѣихъ сторонахъ слоя.

Такая вихревая поверхность образовалась бы, напримѣръ, если бы двѣ прежде разъединенныя движущіяся жидкія массы пришли въ соприкосновеніе. Тогда на поверхности соприкосновенія скорости перпендикулярныя къ ней необходимо должны сравняться, скорости же касательныя къ ней были бы вообще въ обѣихъ массахъ жидкости различны. Такимъ образомъ, поверхность соприкосновенія получила бы свойства вихревой поверхности.

Напротивъ, отдѣльныя вихревыя нити вообще нельзя представлять себѣ безконечно тонкими, потому что иначе скорости на противоположныхъ сторонахъ нити получали бы безконечно большія и противоположныя значенія, вслѣдствіе чего собственная скорость нити сдѣлалась бы неопредѣленной [19]). Но чтобы все-таки вывести нѣкоторыя общія заключенія о движеніи весьма тонкихъ нитей произвольнаго сѣченія, мы воспользуемся принципомъ сохраненія живой силы. Прежде чѣмъ перейти къ отдѣльнымъ примѣрамъ, составимъ уравненіе живой силы K движущейся жидкой массы:

$$K = \tfrac{1}{2} h \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Полагая въ интегралѣ на основаніи уравненій (4)

$$u^2 = u\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right),$$

$$v^2 = v\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right),$$

$$w^2 = w\left(\frac{dP}{dz} + \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right),$$

и интегрируя по частямъ, обозначая затѣмъ черезъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и $\cos\vartheta$ косинусы угловъ, образуемыхъ направленной внутрь нормалью къ элементу $d\omega$ границы жидкой массы съ осями координатъ и съ результирующей скоростью q, на основаніи уравненій (2) и $(1)_4$ я получаю:

$$(6a)\quad K = -\frac{h}{2}\int d\omega\,[Pq\cos\vartheta + L(v\cos\gamma - w\cos\beta) + M(w\cos\alpha - u\cos\gamma) + N(u\cos\beta - v\cos\alpha)] - h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\,dx\,dy\,dz$$ [20].

Чтобы получить выраженіе $\frac{dK}{dt}$, умножаемъ первое изъ уравненій (1) на u, второе на v, а третье на w и складываемъ ихъ:

$$h\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) = -\left(u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz}\right) + h\left(u\frac{dV}{dx} + v\frac{dV}{dy} + w\frac{dV}{dz}\right) - \frac{h}{2}\left(u\frac{d(q^2)}{dx} + v\frac{d(q^2)}{dy} + w\frac{d(q^2)}{dz}\right).$$

Умножая обѣ части уравненія на $dx\,dy\,dz$, интегрируемъ по всему объему жидкой массы, и помня, что на основаніи $(1)_4$

$$\iiint\left(u\frac{d\psi}{dx} + v\frac{d\psi}{dy} + w\frac{d\psi}{dz}\right)dx\,dy\,dz = -\int \psi q\cos\vartheta\,d\omega,$$

гдѣ ψ внутри жидкой массы обозначаетъ непрерывную и однозначную функцію, получаемъ,

$$(6b)\qquad \frac{dK}{dt} = \int d\omega\,(p - hV + \tfrac{1}{2}hq^2)\,q\cos\vartheta.$$

Если жидкая масса всецѣло заключена въ неподвижныхъ стѣнкахъ, то $q\cos\vartheta$ во всѣхъ точкахъ поверхности должно равняться нулю, тогда и $\frac{dK}{dt} = 0$, т. е. K — постоянно.

Если мы вообразимъ себѣ эту неподвижную стѣнку въ безконечномъ удаленіи отъ начала координатъ, а имѣющіяся вихревыя нити на конечномъ разстояніи, то потенціальныя функціи L, M, N, массы которыхъ ξ, η, ζ каждая въ суммѣ равна нулю, при безконечномъ возрастаніи разстоянія $\mathfrak{R}$ будутъ убывать пропорціонально $\mathfrak{R}^{-2}$, а скорости, ихъ производныя, пропорціонально $\mathfrak{R}^{-3}$; элементъ поверхности $d\omega$ будетъ возрастать пропорціонально $\mathfrak{R}^2$, если онъ соотвѣтствуетъ конусу съ постояннымъ тѣлеснымъ угломъ при вершинѣ въ началѣ координатъ. Первый интегралъ въ выраженіи для K (ур-іе $6a$), который распространяется на всю поверхность жидкой массы, будетъ убывать пропорціонально $\mathfrak{R}^{-3}$, а, слѣдовательно, при $\mathfrak{R}$ безконечномъ обратится въ нуль [21]). Тогда величина K приведется къ выраженію

$$(6c)\qquad K = -h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\,dx\,dy\,dz,$$

и эта величина при движеніи не измѣняется.

§ 5.

Прямолинейныя параллельныя вихревыя нити.

Будемъ изслѣдовать тотъ случай, когда существуютъ лишь прямолинейныя вихревыя нити, параллельныя оси Z, и жидкость либо заполняетъ все безпредѣльное пространство, либо ограничена двумя перпендикулярными къ вихревымъ нитямъ плоскостями, что сводится къ тому же. Въ этомъ случаѣ всѣ движенія происходятъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси Z и во всѣхъ этихъ плоскостяхъ будутъ совершенно одинаковы. Такимъ образомъ,

$$w = \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} = 0.$$

Уравненія (2) принимаютъ видъ

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad 2\zeta = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx},$$

а уравненіе (3):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Слѣдовательно, вихревыя нити сохраняютъ постоянную скорость вращенія, а потому также и постоянное поперечное сѣченіе.

Уравненія (4) принимаютъ видъ:

$$u = \frac{dN}{dy}, \qquad v = -\frac{dN}{dx},$$

$$\frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} = 2\zeta.$$

Я положилъ здѣсь $P = 0$ на основаніи замѣчанія, сдѣланнаго мною въ концѣ § 3. Такимъ образомъ, уравненіемъ линій теченія [22]) будетъ $N = \text{Const}$.

N въ этомъ случаѣ представляетъ потенціальную функцію безконечно длинныхъ линій; она сама безконечно велика, но ея производныя конечны [23]). Если a и b суть координаты вихревой нити, поперечное сѣченіе которой равно $da\,db$, то

$$-v = \frac{dN}{dx} = \frac{\zeta da db}{\pi} \cdot \frac{x - a}{r^2}, \quad u = \frac{dN}{dy} = \frac{\zeta da db}{\pi} \cdot \frac{y - b}{r^2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что результирующая скорость q перпендикулярна къ перпендикуляру r, опущенному на вихревую нить, и что

$$q = \frac{\zeta da db}{\pi r}.$$

Положимъ, что въ массѣ, распростирающейся въ безконечность въ направленіяхъ x и y, мы имѣемъ нѣсколько вихревыхъ нитей, координаты которыхъ суть соотвѣтственно x_1, y_1, x_2, y_2 . . . . . Если мы обозначимъ произведеніе скорости вращенія на поперечное сѣченіе каждой нити чрезъ m_1, m_2 и т. д. и образуемъ суммы

$$U = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + \text{и т. д.}$$
$$V = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 + \ldots\ldots$$

то онѣ будутъ равны нулю, потому что въ суммѣ V часть, происходящая отъ дѣйствія второй вихревой нити на первую, уничтожается дѣйствіемъ первой нити на вторую. Именно эти части будутъ

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \quad \text{и} \quad m_2 \cdot \frac{m_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r^2};$$

то же самое будетъ и во всѣхъ другихъ частяхъ обѣихъ суммъ. Но теперь U представляетъ скорость центра тяжести массъ m_1, m_2 . . . . . въ направленіи x, умноженную на сумму этихъ массъ; то же значеніе имѣетъ V относительно оси y. Обѣ скорости, слѣдовательно, равны нулю, если только сумма массъ не равна нулю, въ какомъ случаѣ вообще не имѣетъ мѣста центръ тяжести. Итакъ, центръ тяжести вихревыхъ нитей при ихъ взаимномъ передвиженіи остается неизмѣннымъ, и такъ какъ это положеніе справедливо для любого распредѣленія вихревыхъ нитей, то его можно примѣнить и къ отдѣльнымъ вихревымъ нитямъ съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ.

Отсюда вытекаютъ такія слѣдствія: 1) Если мы имѣемъ отдѣльную прямолинейную вихревую нить съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ въ жидкой массѣ, распростирающейся въ безконечности во всѣхъ направленіяхъ, перпендикулярныхъ къ нити, то движеніе жидкихъ частицъ, находящихся въ конечномъ разстояніи отъ нити, зависитъ только отъ произведенія $\zeta da db = m$ изъ угловой скорости на площадь поперечнаго сѣченія нити, а не отъ формы сѣченія. Частицы жидкой массы вращаются около нея съ тангенціальной скоростью $\frac{m}{\pi r}$, гдѣ r представляетъ разстояніе отъ центра тяжести вихревой нити. Такимъ образомъ, положеніе самого центра тяжести, скорость вращенія, величина поперечнаго сѣченія, а слѣдовательно и величина m остаются неизмѣнными, если даже форма безконечно малаго сѣченія и измѣняется.

2) Если мы имѣемъ двѣ прямолинейныя вихревыя нити съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ въ безграничной жидкой массѣ, то каждая изъ нихъ относитъ другую въ направленіи, перпендикуляр-

номъ къ линіи, ихъ соединяющей. Разстояніе ихъ отъ этого не измѣняется [24]). Такимъ образомъ, обѣ нити будутъ вращаться около ихъ общаго центра тяжести, оставаясь на равномъ разстояніи другъ отъ друга. Если скорость вращенія въ обѣихъ вихревыхъ нитяхъ имѣетъ то же направленіе, т. е. имѣетъ одинаковые знаки, то центръ тяжести долженъ лежать между ними.

Если же она въ нихъ направлена въ противоположныя стороны, т. е. имѣетъ обратные знаки, то центръ тяжести будетъ лежать на продолженіи линіи, ихъ соединяющей. И если произведеніе изъ скорости вращенія на поперечное сѣченіе для обѣихъ нитей то же по величинѣ, но противоположно по знаку,—когда центръ тяжести лежалъ бы въ безконечности,—то онѣ обѣ будутъ передвигаться съ одинаковой скоростью въ томъ же направленіи, перпендикулярномъ къ линіи, ихъ соединяющей.

Къ послѣднему случаю можно свести и тотъ, когда вихревая нить съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ находится около параллельной ей безконечной плоскости. Граничное условіе для движенія воды у этой плоскости, состоящее въ томъ, чтобы движеніе происходило параллельно плоскости, выполняется, если вообразить себѣ по ту сторону плоскости вторую вихревую нить, представляющую зеркальное изображеніе первой. Отсюда слѣдуетъ, что находящаяся въ жидкой массѣ вихревая нить движется (поступательно) параллельно плоскости въ направленіи, въ которомъ движутся жидкія частицы, находящіяся между ней и плоскостью, и притомъ со скоростью равной четверти той скорости, которую имѣетъ частица жидкости, лежащая въ основаніи перпендикуляра, опущеннаго изъ вихревой нити на плоскость.

При прямолинейныхъ вихревыхъ нитяхъ введеніе безконечно малаго поперечнаго сѣченія не приводитъ насъ къ недопустимымъ слѣдствіямъ, потому что отдѣльная нить не имѣетъ движущей силы относительно самой себя, а передвигается лишь подъ вліяніемъ остальныхъ имѣющихся нитей. Иначе обстоитъ дѣло съ искривленными нитями.

§ 6.

Кольцеобразныя вихревыя нити.

Пусть въ жидкой массѣ, простирающейся въ безконечность, существуютъ лишь круговыя вихревыя нити, плоскости которыхъ перпендикулярны къ оси z и центры лежатъ на этой оси, такъ что вокругъ нея все симметрично. Преобразуемъ координаты, полагая

$$\begin{aligned} x &= \chi\cos\varepsilon, & a &= g\cos e,\\ y &= \chi\sin\varepsilon, & b &= g\sin e,\\ z &= z, & c &= c. \end{aligned}$$

Скорость вращенія σ по предположенію есть функція лишь χ и z или g и c, а ось вращенія вездѣ перпендикулярна къ χ (или g) и оси z [26]). Отсюда, прямоугольные компоненты вращенія въ точкѣ съ координатами g, e и c — суть.

$$\xi = -\sigma\sin e, \qquad \eta = \sigma\cos e, \qquad \zeta = 0.$$

Въ уравненіяхъ (5a) будемъ имѣть:

$$r^2 = (z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2\chi g\cos(\varepsilon - e),$$

$$L = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\sin e}{r}\, g\,dg\,de\,dc,$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\cos e}{r}\, g\,dg\,de\,dc,$$

$$N = 0.$$

Умножая на $\cos\varepsilon$ и $\sin\varepsilon$ и складывая уравненія для L и M [27]), получаемъ:

$$L\sin\varepsilon - M\cos\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\cos(e-\varepsilon)}{r}\, g\,dg\,d(e-\varepsilon)\,dc,$$

$$L\cos\varepsilon + M\sin\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\sin(e-\varepsilon)}{r}\, g\,dg\,d(e-\varepsilon)\,dc.$$

Въ обоихъ интегралахъ углы e и ε входятъ только въ соединеніи $(e-\varepsilon)$, такъ что эта величина можетъ быть разсматриваема какъ перемѣнное подъ интеграломъ. Во второмъ интегралѣ части, въ которыхъ $(e-\varepsilon) = \delta$, сокращаются съ тѣми, въ которыхъ $(e-\varepsilon) = 2\pi - \delta$; поэтому онъ оказывается нулемъ. Положимъ

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\cos e\cdot g\,dg\,de\,dc}{\sqrt{(z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2g\chi\cos e}}, \tag{7}$$

тогда

$$M\cos\varepsilon - L\sin\varepsilon = \psi,$$
$$M\sin\varepsilon + L\cos\varepsilon = 0,$$

или

$$L = -\psi\sin\varepsilon, \qquad M = \psi\cos\varepsilon. \tag{7a}$$

Назовемъ черезъ τ скорость въ направленіи радіуса χ и, обративъ вниманіе на то, что въ направленіи окружности круга скорость должна быть равной нулю (27 a) вслѣдствіе симметричнаго положенія вихревыхъ колецъ относительно оси, получимъ:

$$u = \tau\cos\varepsilon, \qquad v = \tau\sin\varepsilon$$

и изъ уравненій (4)

$$u = -\frac{dM}{dz}, \qquad v = \frac{dL}{dz}, \qquad w = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\tau = -\frac{d\psi}{dz}, \qquad w = \frac{d\psi}{d\chi} + \frac{\psi}{\chi},$$

или

$$(7b) \qquad \tau\chi = -\frac{d(\psi\chi)}{dz}, \qquad \chi w = \frac{d(\psi\chi)}{d\chi}.$$

Такимъ образомъ, уравненіе линій теченія [28]) будетъ

$$\psi\chi = \text{Const}.$$

Выполняя указанную въ выраженіи ψ интеграцію прежде всего для вихревой нити съ безконечно малымъ поперечнымъ разрѣзомъ, при чемъ $\sigma dg\, dc = m_1$ и обозначая обусловленную этимъ часть ψ черезъ ψ_{m_1}, имѣемъ

$$-\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\left\{\frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F\right\},$$

$$\varkappa^2 = \frac{4g\chi}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2},$$

гдѣ F и E обозначаютъ полные эллиптическіе интегралы перваго и второго рода для модуля $\varkappa$ [29]).

Положимъ для краткости

$$U = \frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F,$$

гдѣ U — функція $\varkappa$; тогда

$$-\tau\chi = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,\frac{dU}{d\varkappa}.\varkappa.\frac{z-c}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Если въ точкѣ, опредѣляемой координатами χ и z, находится вторая вихревая нить m, и мы назовемъ черезъ τ_1 скорость въ направленіи g, которую она

сообщаетъ вихревой нити m_1, то мы получимъ величину τ_1, если подставимъ въ выраженіи для τ

$$\begin{array}{lcccccc} \text{вмѣсто} & \tau & \chi & g & z & c & m_1 \\ & \tau_1 & g & \chi & c & z & m. \end{array}$$

При этомъ $\varkappa$ и U остаются неизмѣнными и m мѣсто равенство:

$$(8) \qquad m\tau\chi + m_1\tau_1 g = 0.$$

Опредѣлимъ теперь величину w параллельной оси скорости, которая обусловлена вихревой нитью m_1 съ координатами g и c. Находимъ

$$-w\chi = \frac{1}{2}\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\,U + \frac{m_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,\frac{dU}{d\varkappa}.\frac{\varkappa}{2\chi}.\frac{(z-c)^2 + g^2 - \chi^2}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Если мы обозначимъ черезъ w_1 скорость параллельную оси z и обусловливаемую вихревымъ кольцомъ m, координаты котораго суть z и χ, въ томъ мѣстѣ, гдѣ помѣщается m_1, то придется только произвести вышеуказанную уже замѣну соотвѣтствующихъ координатъ и массъ. Тогда мы найдемъ, что [30]):

$$(8a)\; 2mw\chi^2 + 2m_1w_1g^2 - 2m\tau\chi z - 2m_1\tau_1 gc = -\frac{2mm_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,U.$$

Подобныя суммы, какъ въ уравненіяхъ (8) и (8a), можно составить для любого числа вихревыхъ колецъ. Я обозначаю для n-го кольца произведеніе $\sigma dg dc$ черезъ m_n, компоненты скорости, которую оно получаетъ отъ остальныхъ вихревыхъ колецъ черезъ τ_n и w_n, при чемъ я пока не буду разсматривать скорость, которую каждое кольцо можетъ сообщить самому себѣ.

Я называю далѣе радіусъ кольца черезъ ρ_n и его разстояніе отъ неподвижной плоскости, перпендикулярной къ оси, черезъ λ_n. Хотя обѣ эти величины по направленію и совпадаютъ съ χ и z, но, принадлежа опредѣленному вихревому кольцу, онѣ представляютъ собой функціи времени, а не независимыя перемѣнныя, какъ χ и z. Пусть, наконецъ, величина ψ, насколько она обусловлена другими вихревыми кольцами, будетъ ψ_n. Тогда мы получимъ изъ уравненій (8) и (8a), составляя соотвѣтственныя уравненія для каждой пары вихревыхъ колецъ и складывая ихъ [31]):

$$\Sigma\left[m_n \rho_n \tau_n\right] = 0,$$

$$\Sigma\left[2 m_n w_n \rho_n^2 - 2 m_n \tau_n \rho_n \lambda_n\right] = \Sigma\left[m_n \rho_n \psi_n\right].$$

Пока въ этихъ суммахъ имѣется конечное число раздѣльныхъ и безконечно тонкихъ вихревыхъ колецъ, мы подъ w, τ и ψ можемъ подразумѣвать только тѣ части этихъ величинъ, которыя обусловлены присутствіемъ другихъ колецъ. Но если представить себѣ, что пространство непрерывно заполнено безконечно большимъ числомъ такихъ колецъ, то ψ будетъ потенціальная функція непрерывной массы, а w и τ — производныя этой потенціальной функціи. Извѣстно, что назначеніе такой функціи, и ея производныхъ, массы, заключенныя въ безконечно маломъ объемѣ, окружающемъ соотвѣтственную точку, оказываютъ безконечно малое вліяніе въ сравненіи съ массами, лежащими на конечномъ разстояніи *). Если поэтому мы перейдемъ отъ суммъ къ интеграламъ, то можемъ подъ w, τ и ψ подразумѣвать полное значеніе этихъ величинъ въ соотвѣтственной точкѣ и положить

$$w = \frac{d\lambda}{dt} \qquad \tau = \frac{d\rho}{dt}.$$

*) См. Гауссъ въ „Resultate des Magnetischen Vereins im Jahre 1839", стран. 7.

Величину m мы для этой цѣли замѣнимъ произведеніемъ $\sigma\, d\rho\, d\lambda$.

(9) $$\iint \sigma\rho \frac{d\rho}{dt} d\rho\, d\lambda = 0,$$

(9a) $$2\iint \sigma\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} d\rho\, d\lambda - 2\iint \sigma\rho\lambda \frac{d\rho}{dt} d\rho\, d\lambda = \iint \sigma\rho\psi\, d\rho\, d\lambda.$$

Такъ какъ произведеніе $\sigma d\rho d\lambda$ по § 2 относительно времени [31a]) постоянно, то уравненіе (9) можетъ быть интегрировано по t, и мы получаемъ

$$\frac{1}{2}\iint \sigma\rho^2 d\rho d\lambda = \text{Const}.$$

Вообразимъ себѣ, что пространство раздѣлено плоскостью, проходящей черезъ ось z и пересѣкающею, слѣдовательно, всѣ имѣющіяся вихревыя кольца, будемъ разсматривать σ какъ плотность массивнаго слоя и обозначимъ черезъ $\mathfrak{M}$ всю массу, лежащую въ этомъ слоѣ, такъ что

$$\mathfrak{M} = \iint \sigma d\rho d\lambda$$

и черезъ R^2 среднюю величину ρ^2 всѣхъ элементовъ массы, тогда

$$\iint \sigma\rho . \rho d\rho d\lambda = \mathfrak{M} R^2;$$

такъ какъ этотъ интегралъ и величина $\mathfrak{M}$ сохраняютъ при движеніи постоянное значеніе, то и R остается неизмѣннымъ.

Поэтому, если въ неограниченной массѣ жидкости существуетъ только одна кольцеобразная вихревая нить съ безконечно малымъ поперечнымъ сѣченіемъ, то радіусъ ея остается неизмѣннымъ.

Величина живой силы въ нашемъ случаѣ, согласно уравненію (6c), выражается такъ

$$K = -h\iiint(L\xi + M\eta)\,da\,db\,dc$$
$$= -h\iiint\psi\sigma.\rho d\rho d\lambda d\varepsilon$$
$$= -2\pi h\iint\psi\sigma.\rho d\rho d\lambda.$$

Она также относительно времени постоянна [32]).

Замѣчая далѣе, что $\sigma d\rho d\lambda$ относительно времени постоянно, имѣемъ:

$$\frac{d}{dt}\iint\sigma\rho^2\lambda d\rho d\lambda = 2\iint\sigma\rho\lambda\frac{d\rho}{dt}d\rho d\lambda + \iint\sigma\rho^2\frac{d\lambda}{dt}d\lambda d\rho;$$

обозначая затѣмъ черезъ l значеніе λ для центра тяжести поперечнаго сѣченія вихревой нити, умножая на эту величину уравненіе (9) и складывая это послѣднее съ уравненіемъ (9a), мы приводимъ уравненіе (9a) къ слѣдующему виду:

$$(9b)\quad 2\frac{d}{dt}\iint\sigma\rho^2\lambda d\rho d\lambda + 6\iint\sigma\rho(l-\lambda)\frac{d\rho}{dt}d\rho d\lambda = -\frac{K}{2\pi h}.$$

Если поперечное сѣченіе вихревой нити безконечно мало и ε безконечно малая величина того же порядка, какъ $l-\lambda$ и остальные линейные размѣры поперечнаго сѣченія, а $\sigma d\rho d\lambda$ конечно, то ψ, а также K будутъ количества безконечно большія порядка $\log\varepsilon$. Такимъ образомъ, для весьма малыхъ значеній разстоянія v отъ вихревого кольца мы имѣемъ:

$$v = \sqrt{(g-\chi)^2 + (z-c)^2},$$
$$\chi^2 = 1 - \frac{v^2}{4g^2},$$
$$\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi}\log\left(\frac{\sqrt{1-\chi^2}}{4}\right) = \frac{m_1}{\pi}\log\frac{v}{8g}\ ^{33}).$$

Въ выраженіи для $K\psi$ умножается еще на ρ или g. Если g конечно и v одного порядка съ ε, то K будетъ порядка $\log\varepsilon$. Только если g есть безконечно большая величина порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, то K будетъ величиною порядка $\frac{1}{\varepsilon}\log\varepsilon$. Тогда кругъ переходитъ въ прямую. Напротивъ, величина $\frac{d\rho}{dt}$, равная $\frac{d\psi}{dz}$, будетъ порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, и потому второй интегралъ будетъ конеченъ и при конечномъ ρ исчезаетъ въ сравненіи съ K [34]). Въ этомъ случаѣ λ въ первомъ интегралѣ можно замѣнить постояннымъ l, и мы получаемъ:

$$2\frac{d(\mathfrak{M}R^2l)}{dt} = -\frac{K}{2\pi h}$$

или

$$2\mathfrak{M}.R^2l = C - \frac{K}{2\pi h}t.$$

Такъ какъ $\mathfrak{M}$ и R постоянны, то измѣняться пропорціонально времени можетъ только l. Если $\mathfrak{M}$ положительно, то движеніе жидкихъ частицъ на внѣшней сторонѣ кольца направлено въ сторону положительныхъ z, на внутренней въ сторону отрицательныхъ z; K, h и R по своей природѣ всегда положительны. Отсюда слѣдуетъ, *что въ кольцеобразной нити съ весьма малымъ поперечнымъ сѣченіемъ, находящейся въ безпредѣльной массѣ жидкости, центръ тяжести поперечнаго сѣченія движется параллельно оси вихревой нити съ приблизительно постоянной и весьма большой скоростью, направленной въ ту же сторону, въ какую жидкость течетъ сквозь кольцо.*

Безконечно тонкія вихревыя нити съ конечнымъ радіусомъ получили бы безконечно большую скорость передвиженія. Если же радіусъ вихревого кольца есть безконечно большая величина порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, то R^2 становится безконечно большимъ въ сравненіи съ K, и l будетъ постояннымъ. Вихревая нить, превратившаяся въ прямую, становится стаціонарной, какъ мы это нашли уже раньше для прямолинейныхъ вихревыхъ нитей.

Мы можемъ теперь въ общихъ чертахъ разсмотрѣть также, какъ двѣ кольцеобразныя вихревыя нити, имѣющія одну и ту же ось, будутъ вліять другъ на друга, такъ какъ каждая, кромѣ собственнаго передвиженія, слѣдуетъ еще движенію жидкихъ частицъ, вызываемому другой нитью. Если онѣ имѣютъ одинаковое направленіе вращенія, то обѣ передвигаются въ одну и ту же сторону; движущаяся впереди нить будетъ расширяться и замедлять свое движеніе, слѣдующая же за ней станетъ суживаться и передвигаться быстрѣе; если скорости передвиженія не слишкомъ различны, то второе кольцо наконецъ догонитъ первое и пройдетъ сквозь него. Затѣмъ то же явленіе повторяется съ первымъ, такъ что кольца будутъ поочередно проходить одно черезъ другое [35].

Если вихревыя нити имѣютъ равные радіусы и равныя, но противоположныя скорости вращенія, то онѣ будутъ приближаться другъ къ другу подъ взаимнымъ вліяніемъ; наконецъ, когда онѣ подойдутъ весьма близко другъ къ другу, то взаимное сближеніе ихъ будетъ происходить все слабѣе, расширеніе же, напротивъ, будетъ происходить съ возрастающей скоростью. Если обѣ вихревыя нити вполнѣ симметричны, то для частицъ, лежащихъ въ срединной плоскости, скорость параллельная оси равна нулю. Поэтому, не возмущая движенія, мы можемъ вообразить здѣсь твердую стѣнку, и такимъ образомъ получаемъ случай одного вихревого кольца, направляющагося къ твердой стѣнкѣ.

Я замѣчу еще, что движенія круглыхъ вихревыхъ колецъ легко наблюдать въ дѣйствительности, быстро продвинувъ на небольшое разстояніе параллельно поверхности воды на половину погруженный въ нее кружокъ или имѣющій приблизительно форму полукруга кончикъ ложки и затѣмъ быстро вынимая ихъ; тогда въ жидкости остаются половины вихревыхъ колецъ, ось которыхъ лежитъ на свободной поверхности. Такимъ образомъ, свободная поверхность образуетъ плоскость, проходящую черезъ ось и ограничивающую массу воды, что не вызываетъ никакого существеннаго измѣненія въ движеніи. Вихревыя кольца передвигаются поступательно, расширяются, приближаясь къ стѣнкѣ; далѣе, они расширяются или суживаются подъ вліяніемъ другихъ вихревыхъ колецъ совершенно такъ, какъ мы это вывели изъ теоріи.

II.

О прерывномъ движеніи жидкости.

Г. фонъ-Гельмгольца.

Извѣстно, что для внутренней массы несжимаемой жидкости, которая не подвержена тренію и частицы которой не обладаютъ вращательнымъ движеніемъ, уравненія гидродинамики приводятъ совершенно къ такому же дифференціальному уравненію съ частными производными, которое имѣетъ мѣсто для стаціонарныхъ электрическихъ или тепловыхъ токовъ въ проводникахъ съ равномѣрной проводимостью. Поэтому можно было бы ожидать, что при одинаковой формѣ области, въ которой происходятъ теченія, и при одинаковыхъ граничныхъ условіяхъ, форма теченія капельныхъ жидкостей, электричества и тепла должна быть одна и та же, если пренебречь незначительными уклоненіями, зависящими отъ побочныхъ условій. Между тѣмъ, въ дѣйствительности во многихъ случаяхъ выступаетъ весьма замѣтное и существенное различіе въ характерѣ теченія капельной жидкости и указанныхъ невѣсомыхъ.

Такое различіе обнаруживается особенно рѣзко, если теченіе вступаетъ черезъ отверстіе съ острыми краями въ болѣе широкое пространство. Въ такихъ случаяхъ линіи тока электричества расходятся сейчасъ же отъ отверстія по всѣмъ направленіямъ, между тѣмъ какъ текущая жидкость, будь то вода или воздухъ, движется отъ отверстія сначала компактной струей, которая затѣмъ въ большемъ или меньшемъ отдаленіи разрѣшается въ вихри. Напротивъ, частицы жидкости, примыкающія къ отверстію, но лежащія внѣ струи, могутъ оставаться почти въ полномъ покоѣ. Каждый знакомъ съ движеніемъ этого рода: его очень наглядно иллюстрируетъ потокъ воздуха, насыщеннаго дымомъ. Оказывается, что сжимаемость воздуха не играетъ въ этихъ процессахъ существенной роли, и воздухъ съ незначительными отклоненіями обнаруживаетъ здѣсь тѣ же формы движенія, какъ и вода.

При столь значительныхъ отклоненіяхъ между дѣйствительностью и имѣвшимися до сихъ поръ выводами теоретическаго анализа, уравненія гидродинамики должны были казаться физикамъ практически весьма несовершеннымъ приближеніемъ къ дѣйствительности. Причину этого можно было подозрѣвать во внутреннемъ треніи жидкости, хотя различнаго рода странныя, прерывнаго характера неправильности, съ которыми вѣроятно приходилось бороться каждому, предпринимавшему наблюденія надъ движеніями жидкости, не могли быть объяснены даже и треніемъ, дѣйствующимъ во всякомъ случаѣ непрерывно и равномѣрно.

Изслѣдованіе тѣхъ случаевъ, когда періодическія движенія вызываются непрерывнымъ потокомъ воздуха, какъ, наприм., въ органныхъ трубахъ, убѣдило меня въ томъ, что такое дѣйствіе можетъ быть вызвано лишь прерывной или, по крайней мѣрѣ, весьма близко подходящей формой движенія воздуха, и это привело меня къ обнаруженію нѣкотораго обстоятельства, которое должно быть принято въ разсчетъ при интеграціи гидродинамическихъ уравненій, но съ которымъ до сихъ поръ, насколько я знаю, не считались; принимая же его въ соображеніе, мы въ самомъ дѣлѣ въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ вычисленіе можно довести до конца, получаемъ именно тѣ виды движенія, какіе наблюдаемъ въ дѣйствительности. Дѣло въ слѣдующемъ.

Въ уравненіяхъ гидродинамики скорости и давленіе текущихъ частицъ трактуются, какъ непрерывныя функціи координатъ. Съ другой стороны въ природѣ капельной жидкости, если мы разсматриваемъ ее совершенно жидкой, т. е. не подверженной тренію, нѣтъ ни одной черты, благодаря которой два плотно примыкающіе другъ къ другу слоя жидкости не могли бы скользить одинъ по другому съ конечной скоростью. По крайней мѣрѣ, тѣ свойства жидкостей, которыя принимаются въ разсчетъ въ уравненіяхъ гидродинамики, а именно постоянство массы въ каждомъ элементѣ пространства и равенство давленія по всѣмъ направленіямъ, очевидно не представляютъ никакого препятствія къ тому, чтобы съ двухъ сторонъ воображаемой внутри жидкости поверхности тангенціальныя слагающія скорости могли разниться на конечную величину. Наоборотъ, перпендикулярные къ поверхности компоненты скорости и давленія, понятно, должны быть равны на обѣихъ сторонахъ поверхности. Въ моей работѣ о вихревыхъ движеніяхъ я уже обратилъ вниманіе на то, что такой случай долженъ возникнуть, если двѣ жидкія массы, прежде разъединенныя и находившіяся въ различныхъ движеніяхъ,

приходятъ въ соприкосновеніе своими поверхностями. Въ этой работѣ я пришелъ къ понятію такой поверхности раздѣла или, какъ я ее тамъ называлъ, вихревой поверхности, представляя себѣ непрерывно расположенныя на ней вихревыя нити, масса которыхъ можетъ сдѣлаться исчезающе малой безъ того, чтобы при этомъ исчезалъ ихъ моментъ вращенія [36]).

Но въ жидкости, находящейся въ покоѣ или въ непрерывномъ движеніи, различіе на конечную величину въ движеніи непосредственно смежныхъ частицъ жидкости можетъ быть вызвано только движущими силами, дѣйствующими прерывно. Изъ внѣшнихъ силъ сюда относятся только удары [37]). Но въ самой жидкости существуетъ источникъ, который можетъ породить прерывность движенія. Именно, давленіе можетъ принимать любое положительное значеніе, и плотность жидкости будетъ тогда измѣняться съ нимъ непрерывно. Но какъ только давленіе, переходя о, должно бы сдѣлаться отрицательнымъ, произойдетъ прерывное измѣненіе плотности, — жидкость разорвется.

Величина давленія въ движущейся жидкости зависитъ отъ скорости, и именно въ несжимаемыхъ жидкостяхъ уменьшеніе давленія при прочихъ равныхъ условіяхъ прямо пропорціонально живой силѣ движущихся жидкихъ частицъ [38]). Если поэтому послѣдняя превзойдетъ нѣкоторую опредѣленную величину, то давленіе въ самомъ дѣлѣ должно будетъ сдѣлаться отрицательнымъ, и въ жидкости произойдетъ разрывъ. Въ точкѣ разрыва ускоряющая сила, пропорціональная производной давленія, очевидно будетъ прерывной, и этимъ выполняется условіе, необходимое для того, чтобы вызвать прерывное движеніе жидкости. Движеніе жидкости въ области такой точки можетъ происходить только такъ, что, начиная отсюда, образуется поверхность раздѣла.

Скорость, обусловливающая разрывъ жидкости, есть та, какую жидкость получила бы, если бы она подъ тѣмъ давленіемъ, которое испытывала бы въ данномъ мѣстѣ въ состояніи покоя, вытекала въ пустое пространство. Это вообще сравнительно значительная скорость, но надо замѣтить, что если бы капельныя жидкости текли непрерывно, какъ электричество, то скорость у каждаго остраго края, огибаемаго потокомъ, имѣла бы безконечно большую величину *). Отсюда слѣдуетъ, ***что всякій геометрически совершенный острый край, около котораго протекаетъ жидкость, даже при самой незначительной скорости остальной массы жидкости, долженъ произвести въ ней разрывъ и образовать поверхность раздѣла.*** Около не вполнѣ совершенныхъ, закругленныхъ краевъ то же самое произойдетъ лишь при нѣкоторыхъ достаточно большихъ скоростяхъ. Остроконечныя выступы на стѣнкахъ проточнаго канала должны производить подобное же дѣйствіе.

Что касается газовъ, то съ ними происходитъ то же самое, что и съ жидкостями; только здѣсь живая сила движенія частицы не прямо пропорціональна

*) На весьма маломъ разстояніи ρ отъ остраго края, плоскости котораго сходятся подъ угломъ α, скорости становятся безконечно большими, какъ ρ^{-n} гдѣ
$$n = \frac{\pi-\alpha}{2\pi-\alpha}$$ [33]).

пониженію давленія p, но вслѣдствіе охлажденія газа при расширеніи она пропорціональна величинѣ p^m, гдѣ $m = 1 - \frac{1}{\gamma}$, и γ есть отношеніе удѣльной теплоты при постоянномъ давленіи къ удѣльной теплотѣ, при постоянномъ объемѣ [38]). Для атмосфернаго воздуха показатель m равенъ 0,291. Такъ какъ эта величина положительная и дѣйствительная, то p^m, какъ и p, при высокихъ значеніяхъ скорости, можетъ убывать лишь до нуля и не можетъ сдѣлаться отрицательнымъ. Иначе было бы, если бы газы слѣдовали просто закону Маріота и не претерпѣвали бы температурныхъ измѣненій. Тогда вмѣсто p^m вошла бы величина $\log p$, которая можетъ получить безконечно большое отрицательное значеніе, хотя бы p и не было отрицательнымъ. При такомъ условіи разрывъ массы воздуха не былъ бы необходимъ.

Легко удостовѣриться въ дѣйствительномъ существованіи такихъ прерывностей, если выпустить струю воздуха, насыщеннаго дымомъ, черезъ круглое отверстіе или цилиндрическую трубку съ умѣренной скоростью, такъ чтобы не произошло шипѣнія. При благопріятныхъ обстоятельствахъ можно получить тонкія струи съ діаметромъ около одной линіи и длиною въ нѣсколько футовъ. Въ этомъ случаѣ внутри цилиндрической поверхности воздухъ находится въ движеніи съ постоянной скоростью между тѣмъ какъ внѣ ея, даже въ непосредственной близости со струей, воздухъ совсѣмъ не движется или движется едва замѣтно. Очень ясно можно наблюдать этотъ рѣзкій раздѣлъ, если пропустить спокойно текущую цилиндрическую струю воздуха черезъ кончикъ пламени, изъ котораго она вырѣзаетъ рѣзко ограниченную часть, между тѣмъ какъ остальная часть пламени останется совсѣмъ незатронутой, и самое большее слегка разстраивается очень тонкій пограничный слой, подвергающійся вліянію тренія [40]).

Что касается математической теоріи этихъ движеній, то я уже указалъ граничныя условія для внутренней поверхности раздѣла жидкости. Они состоятъ въ томъ, что давленія на обѣихъ сторонахъ поверхности должны быть одинаковы такъ же, какъ и компоненты скорости, перпендикулярные къ поверхности раздѣла. Такъ какъ движеніе повсюду внутри несжимаемой жидкости, частицы которой не имѣютъ вращательнаго движенія, вполнѣ опредѣлено, если дано движеніе всѣхъ границъ и прерывности внутри ея, то въ случаѣ неподвижности граничныхъ стѣнокъ жидкости обыкновенно все сводится къ изученію движенія поверхности раздѣла и измѣненій прерывности на ней.

Такую поверхность раздѣла можно математически трактовать совершенно такъ, какъ если бы она была вихревой поверхностью, т. е. какъ если бы она была непрерывно покрыта вихревыми нитями съ безконечно малой массой, но съ конечнымъ моментомъ вращенія. На всякомъ элементѣ такой поверхности найдется такое направленіе, въ которомъ тангенціальныя слагающія скоростей одинаковы. Оно совпадаетъ съ направленіемъ вихревыхъ нитей въ этой точкѣ. Моментъ этихъ нитей нужно положить пропорціональнымъ разности между перпендикулярными съ нимъ компонентами касательной скорости на обѣихъ сторонахъ поверхности [36]).

Существованіе такихъ вихревыхъ нитей въ случаѣ идеальной жидкости безъ тренія есть математическая фикція, облегчающая интеграцію. Въ дѣйствительной, подверженной тренію жидкости эта фикція быстро становится дѣйствительностью, такъ какъ благодаря тренію пограничныя частицы приходятъ во вращательное движеніе; вслѣдствіе этого тамъ образуются вихревыя нити съ конечной постепенно возрастающей массой, между тѣмъ какъ прерывность движенія при этомъ выравнивается.

Движеніе вихревой поверхности и лежащихъ на ней вихревыхъ нитей опредѣляется по правиламъ, установленнымъ мною въ моей работѣ о вихревыхъ движеніяхъ. Математическія трудности этой задачи можно преодолѣть, разумѣется, лишь въ немногихъ, болѣе простыхъ случаяхъ. Но во многихъ другихъ случаяхъ можно, по крайней мѣрѣ, пользуясь указаннымъ принципомъ, заключать о направленіи наступающаго измѣненія.

Въ особенности слѣдуетъ упомянуть, что по закону, выведенному для вихревыхъ движеній, нити, а съ ними и вихревыя поверхности внутри жидкости безъ тренія не могутъ ни возникать, ни исчезать, и что, наоборотъ, каждая вихревая нить должна сохранить неизмѣнно тотъ же моментъ вращенія; далѣе, что вихревыя нити переносятся вдоль самой вихревой поверхности со скоростью, равной среднему ариѳметическому скоростей, имѣющихъ мѣсто на обѣихъ сторонахъ поверхности [36]). Отсюда слѣдуетъ, что *поверхность раздѣла можетъ удлиняться всегда только въ томъ направленіи, куда направлено болѣе быстрое изъ обоихъ соприкасающихся на ней теченій.*

Въ дальнѣйшемъ изложенiи я старался подыскать такiе примѣры поверхностей раздѣла, неизмѣнно сохраняющихся въ стацiонарныхъ теченiяхъ, при которыхъ интеграцiя выполнима, чтобы такимъ образомъ провѣрить, доставляетъ ли теорiя формы теченiя, которыя соотвѣтствуютъ опыту лучше, чѣмъ если оставлять безъ вниманiя прерывность движенiя. Если поверхность раздѣла, отдѣляющая покоящуюся жидкость отъ движущейся, должна оставаться стацiонарной, то вдоль ея давленiе въ движущемся слоѣ должно быть то же, какъ въ покоящемся; отсюда слѣдуетъ, что касательная скорость жидкихъ частицъ на всемъ протяженiи поверхности должна быть постоянной [41]) такъ же, какъ и плотность воображаемыхъ вихревыхъ нитей. Начало и конецъ такой поверхности могутъ лежать только на стѣнкѣ сосуда или въ безконечности. Въ первомъ случаѣ они должны касаться стѣнки сосуда, разъ допускать, что кривизна ея здѣсь непрерывна, такъ какъ компоненты скорости, нормальные къ стѣнкѣ сосуда, должны равняться нулю.

Стацiонарныя формы поверхностей раздѣла отличаются, впрочемъ, какъ на это указываетъ опытъ въ полномъ согласiи съ теорiей, чрезвычайною наклонностью къ измѣнчивости при самыхъ незначительныхъ возмущенiяхъ, такъ что по своему характеру онѣ въ нѣкоторомъ отношенiи ведутъ себя подобно тѣламъ, находящимся въ неустойчивомъ равновѣсiи. Поразительная чувствительность цилиндрической струи воздуха, насыщеннаго дымомъ, къ звуку, описана уже Тиндалемъ [42]); я самъ удостовѣрился въ томъ же. Это, очевидно, свойство поверхности раздѣла, которое

играетъ въ высшей степени важную роль при вдуванiи воздуха въ трубы.

Теорiя указываетъ, что если образуется какая-нибудь неправильность на поверхности стацiонарной струи, она въ остальныхъ частяхъ должна привести къ распространяющемуся все далѣе спиралеобразному свертыванiю соотвѣтственной части поверхности (распространяющемуся по струѣ) [43]).

Это стремленiе къ спиралеобразному свертыванiю при всякомъ возмущенiи легко, между прочимъ, можно замѣтить на наблюдаемыхъ струяхъ. По теорiи призматическая или цилиндрическая струя могла бы быть безконечно длинной; въ дѣйствительности же такой струи получить нельзя, такъ какъ въ столь подвижномъ элементѣ какъ воздухъ, никогда невозможно устранить совершенно возмущающiя влiянiя.

Легко убѣдиться въ томъ, что такая безконечно длинная цилиндрическая струя, вытекающая изъ трубы съ соотвѣтственнымъ поперечнымъ сѣченiемъ въ покоящуюся внѣшнюю жидкость и состоящая изъ жидкости, которая движется повсюду параллельно ея оси съ равномѣрной скоростью, — удовлетворяетъ условiямъ стацiонарнаго состоянiя [43a]).

Далѣе я даю лишь набросокъ математической обработки одного случая противоположнаго характера, когда теченiе изъ широкаго пространства переходитъ въ узкiй каналъ; цѣль моя дать примѣръ примѣненiя метода, при помощи котораго можно рѣшить нѣкоторыя задачи въ ученiи о потенцiальныхъ функцiяхъ, представлявшiя до сихъ поръ затрудненiя [44]).

Я ограничусь тѣмъ случаемъ, когда движенiе стацiонарно и зависитъ отъ двухъ прямоугольныхъ координатъ x, y, и когда при этомъ въ жидкости, свободной отъ тренія съ самаго начала, не существуетъ вращающихся частицъ, слѣдовательно, и съ теченіемъ времени таковыя появиться не могутъ. Обозначимъ для жидкой частицы, находящейся въ точкѣ (x, y), компонентъ скорости параллельный оси x черезъ u, а параллельный оси y черезъ v, тогда, какъ извѣстно, можно найти такія двѣ функціи отъ x и y, что [45]).

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{d\psi}{dy}, \\[2ex] v = \dfrac{d\varphi}{dy} = -\dfrac{d\psi}{dx}. \end{cases}$$

Этими уравненіями непосредственно выполняются внутри жидкости условія, чтобы масса въ каждомъ элементѣ пространства оставалась постоянной, а именно:

$$(1a)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0.$$

Обозначая потенціалъ внѣшнихъ силъ черезъ V, мы найдемъ давленіе внутри при постоянной плотности h, изъ уравненія:

$$(1b)\qquad \begin{cases} V - \dfrac{p}{h} + C = \frac{1}{2}\left[\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] \\[2ex] \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left[\left(\dfrac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\psi}{dy}\right)^2\right] \end{cases}$$

Кривыя

$$\psi = Const$$

суть линіи тока [22]) жидкости, а кривыя

$$\varphi = Const.$$

ортогональны къ нимъ. Послѣднія суть кривыя равнаго потенціала или равной температуры, если электричество или тепло течетъ стаціонарнымъ токомъ по проводникамъ съ постоянной проводимостью.

Изъ уравненій (1) слѣдуетъ, какъ интегральное уравненіе, что величина $\varphi + \psi i$ есть функція $x + yi$ (гдѣ $i = \sqrt{-1}$). Найденныя до сихъ поръ рѣшенія выражаютъ обыкновенно φ и ψ, какъ суммы членовъ, которые сами суть функціи отъ x и y. Но можно, наоборотъ, $x + yi$ разсматривать, какъ функцію отъ $\varphi + \psi i$, и разыскивать рѣшеніе въ такой формѣ.

Въ задачахъ о теченіи между твердыми стѣнками ψ вдоль границъ постоянно, и если поэтому мы будемъ разсматривать φ и ψ, какъ прямоугольныя координаты на плоскости, то мы должны искать функцію $x + yi$ въ ограниченной двумя параллельными прямыми $\psi = c_0$ и $\psi = c_1$ полосѣ этой плоскости такъ, чтобы у края удовлетворялось уравненіе стѣнки, а внутри получались данныя прерывности [46]).

Такой случай мы будемъ имѣть, если положимъ:

$$(2)\qquad x + yi = A\,(\varphi + \psi i + e^{\varphi + \psi i})$$

или

$$x = A\varphi + Ae^{\varphi}\cos\psi,$$
$$y = A\psi + Ae^{\varphi}\sin\psi.$$

При значеніи $\psi = \pm\pi$, y становится постояннымъ и

$$x = A\varphi - Ae^{\varphi}.$$

Если φ измѣняется въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то x измѣняется одновременно отъ $-\infty$ до $-A$ и затѣмъ опять до $-\infty$. Кривыя тока $\psi = \pm\pi$ соотвѣтствуютъ, такимъ образомъ, теченію вдоль двухъ прямыхъ стѣнокъ, для которыхъ $y = \pm A\pi$, а x измѣняется между $-\infty$ и $-A$ [47]).

Такимъ образомъ, если разсматривать ψ, какъ выраженіе кривыхъ тока, то уравненіе (2) соотвѣтствуетъ теченію изъ канала ограниченной двумя параллельными плоскостями въ безконечное пространство. На краю канала, гдѣ $x = -A$ и $y = \pm A\pi$ и гдѣ далѣе

$$\varphi = 0 \text{ и } \psi = \pm\pi,$$

мы имѣемъ:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 0,$$

и такимъ образомъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \infty\ ^{48)}.$$

Электричество и теплота могутъ течь такимъ образомъ, капельная же жидкость должна разорваться.

Если отъ краевъ канала начинаются стаціонарныя линіи раздѣла, которыя, конечно, будутъ продолженіями расположенныхъ вдоль стѣнокъ линій тока $\psi = \pm\pi$, а внѣ этихъ линій раздѣла, ограничивающихъ текущую жидкость, долженъ имѣть мѣсто покой, то давленіе на обѣихъ сторонахъ линій раздѣла должно быть одинаково. Это значитъ, что вдоль тѣхъ частей линій $\psi = \pm\pi$, которыя соотвѣтствуютъ свободнымъ линіямъ раздѣла, мы должны имѣть, согласно (1b):

$$(3) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = Const.$$

Чтобы сохранить основныя черты даннаго въ уравненіи(2) движенія, прибавимъ къ вышенаписанному выраженію для $x + yi$ еще одинъ членъ $\sigma + \tau i$, который есть та же функція отъ $\varphi + \psi i$.

тогда имѣемъ:

$$(3\,a) \qquad \begin{cases} x = A\varphi + Ae^\varphi \cos\psi + \sigma, \\ y = A\psi + Ae^\varphi \sin\psi + \tau \end{cases}$$

и должны опредѣлить $\sigma + \tau i$ такъ, чтобы вдоль свободной части поверхности раздѣла $\psi = \pm\pi$:

$$\left(A - Ae^\varphi + \frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = Const.$$

Это условіе выполнится, если мы сдѣлаемъ здѣсь

$$(3\,b) \qquad \frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \text{ или } \sigma = Const.$$

и

$$(3\,c) \qquad \frac{d\tau}{d\varphi} = \pm A\sqrt{2e^\varphi - e^{2\varphi}}.$$

Такъ какъ ψ вдоль стѣнки постоянно, то мы можемъ интегрировать послѣднее уравненіе по φ и найденный интегралъ обратить въ функцію $\varphi + \psi i$, подставляя вездѣ $\varphi + i\,(\psi \pm \pi)$ вмѣсто φ. Такимъ образомъ, при надлежащемъ выборѣ постоянной интеграціи [49]) мы получимъ:

$$(3\,d) \qquad \begin{cases} \sigma + \tau i = Ai\Big\{\sqrt{-2e^{\varphi+\psi i} - e^{2\varphi + 2\psi i}} \\ \qquad\qquad - 2\ arc\ sin\left[\frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\varphi + \psi i)}\right]\Big\}. \end{cases}$$

Точки развѣтвленія этого выраженія лежатъ при $e^{\varphi + \psi i} = -2$, т. е. при $\psi = \pm(2a+1)\pi$ и $\varphi = log\ 2$.

Такимъ образомъ ни одна изъ нихъ не лежитъ въ предѣлахъ между $\psi = +\pi$ и $\psi = -\pi$. Функція $\sigma + \tau i$ здѣсь непрерывна.

Вдоль стѣнки [50]) будемъ имѣть:

$$\sigma + \tau i = \pm Ai\left\{\sqrt{2e^\varphi - e^{2\varphi}} + 2\,arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{1}{2}\varphi}\right]\right\}.$$

Если $\varphi < log\ 2$, то вся эта величина чисто мнимая, слѣдовательно $\sigma = 0$, между тѣмъ $\frac{d\tau}{d\varphi}$ получасть данное въ ($3c$) значеніе. Эта часть линій $\psi = \pm\pi$ соотвѣтствуетъ такимъ образомъ свободной части струи.

Если $\varphi > log\ 2$, то все выраженіе становится дѣйствительнымъ, за исключеніемъ слагаемаго $\pm Ai\pi$, которое прибавляется къ значенію τi, т. е. yi.

Итакъ, уравненіе ($3a$) и ($3d$) соотвѣтствуютъ вытеканію жидкости изъ неограниченнаго сосуда въ каналъ, ограниченный двумя плоскостями, ширина котораго равна $4A\pi$ и сторона котораго простирается отъ $x = -\infty$ до $x = -A\ (2 - log\ 2)$.

Свободная линія раздѣла текущей жидкости искривляется сначала отъ края отверстія въ сторону положительныхъ x, гдѣ при $\varphi = 0$, $x = -A$ и $y = \pm A\ (\frac{1}{2}\pi + 1)$, она достигаетъ наибольшаго значенія x, потомъ направляется внутрь канала и наконецъ приближается асимптотически къ обѣимъ прямымъ $y = \pm A\pi$, такъ что въ концѣ ширина вытекающей струи равняется ровно половинѣ ширины канала [51]).

Скорость вдоль поверхности раздѣла и на концѣ вытекающей струи равна $\frac{1}{A}$. Вдоль твердой стѣнки и внутри жидкости она вездѣ меньше $\frac{1}{A}$, такъ что эта форма движенія можетъ существовать при любой величинѣ скорости вытеканія.

Въ этомъ примѣрѣ я обращаю особенное вниманіе на то, что форма теченія жидкости въ трубѣ на длинномъ пути опредѣляется формой начала струи.

Приложеніе, касающееся распредѣленія электричества.

Если въ уравненіи (2) величину ψ разсматривать, какъ электрическій потенціалъ, то въ предыдущемъ мы получаемъ распредѣленіе электричества вблизи краевъ двухъ плоскихъ и весьма близкихъ пластинокъ, допуская, что разстояніе между ними можно считать исчезающе малымъ сравнительно съ радіусомъ кривизны ихъ краевъ. Такимъ образомъ мы имѣемъ очень простое рѣшеніе задачи, которую трактовалъ Клаузіусъ *). При этомъ получается то же самое распредѣленіе электричества, какое было найдено и имъ, по крайней мѣрѣ, поскольку дѣло касается зависимости этого распредѣленія отъ кривизны краевъ [52]).

Прибавлю еще, что этимъ же методомъ можно опредѣлить распредѣленіе электричества на двухъ параллельныхъ, безконечно длинныхъ плоскихъ полосахъ, четыре края которыхъ въ поперечномъ сѣченіи образуютъ вершины прямоугольника.

Потенціальная функція ψ для такого распредѣленія представится уравненіемъ формы:

$$(4)\qquad x + yi = A\,(\varphi + \psi i) + B\,\frac{1}{\Pi\,(\varphi + \psi i)},$$

гдѣ $\Pi(u)$ представляетъ функцію, введенную Jacobi въ его Fundamenta nova, p. 172, какъ числитель $sin\ am\ u$. По тамошнему обозначенію, заряженныя полосы соотвѣтствуютъ значенію $\varphi = \pm 2K$, гдѣ $x = \pm 2AK$

---

*) *Poggendorff*'s Annalen. Bd. LXXXVI.

равно половинѣ разстоянія между полосами, а отъ отношенія постоянныхъ A и B зависитъ ширина полосы.

Форма уравненій (2) и (4) показываютъ, что φ и ψ можно выразить какъ функціи отъ x и y лишь при помощи разложеній въ весьма сложные ряды.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

Замѣтки о жизни и трудахъ Гельмгольца.

Германъ ф. Гельмгольцъ родился 31 августа 1821 г. въ Потсдамѣ, гдѣ его отецъ былъ учителемъ гимназіи; по окончаніи гимназіи онъ сталъ изучать медицину въ Берлинскомъ военно-медицинскомъ учебномъ заведеніи „Friedrich-Wilhelms Institut“ и въ 1842 г. сдѣлался военнымъ врачемъ въ Потсдамѣ. Опубликованные имъ научные труды, въ особенности появившаяся въ 1847 году статья о сохраненіи энергіи, открыли ему чисто-научную карьеру. Въ 1848 г. онъ сдѣлался ассистентомъ при анатомическомъ музеѣ въ Берлинѣ и преподавателемъ анатоміи въ тамошней школѣ искусствъ, въ 1849 г. профессоромъ физіологіи и общей патологіи въ Кенигсбергѣ въ Пруссіи; въ 1856 году онъ переселился въ Боннъ, а въ 1858 г. занялъ каѳедру физіологіи въ Гейдельбергѣ. Въ 1871 г. онъ взялъ на себя послѣ Магнуса профессуру физики въ Берлинѣ и наконецъ оставилъ ее, чтобы занять мѣсто предсѣдателя въ „Physikalisch-technische Reichsanstalt“. При этомъ онъ продолжалъ читать лекціи въ университетѣ. Онъ умеръ 8 сентября 1894 года. Изъ внѣшнихъ отличій, выпавшихъ въ изобиліи на его долю, мы здѣсь упомянемъ лишь дарованное ему въ 1883 г. потомственное дворянство.

Гельмгольцъ былъ не только однимъ изъ ученыхъ новѣйшаго времени, отличавшихся своей разносторонностью и познаніями, онъ принадлежалъ къ величайшимъ, наиболѣе глубокимъ изслѣдователямъ всѣхъ временъ, къ тѣмъ, которые указывали наукѣ новые пути. Рѣшающее значеніе имѣла уже небольшая статья о сохраненіи энергіи. Съ закономъ сохраненія энергіи была найдена связь, соединяющая между собой разнообразнѣйшія силы природы.

По опубликованіи этой работы, Гельмгольцъ снова обратился къ изслѣдованіямъ по физіологіи. Изъ результатовъ его работъ упомянемъ здѣсь только: измѣреніе скорости распространенія нервнаго раздраженія, изобрѣтеніе глазного зеркала, изслѣдованія по смѣшенію цвѣтовъ и цвѣтовымъ ощущеніямъ, обоснованіе теоріи возникновенія пространственныхъ представленій. Собраніе его собственныхъ работъ, посвященныхъ изученію зрительнаго чувства и всего уже извѣстнаго въ этой области, представляетъ его капитальный трудъ „Handbuch des physiologischen Optik" (Лейпцигъ, 1856 — 1867 г. второе изданіе, первый выпускъ котораго вышелъ въ 1885 году, еще не окончено). Вслѣдъ за этимъ трудомъ появился въ 1862 г. еще болѣе извѣстный трудъ, вышедшій въ четырехъ изданіяхъ—это „Die Lehre von den Tonempfindungen".

Въ обоихъ трудахъ трактуются обстоятельно не только чисто физіологическіе вопросы, но и примыкающіе сюда вопросы физики; разработка этихъ-то вопросовъ и привела Гельмгольца къ спеціализаціи въ области физики, которой принадлежатъ его важнѣйшіе труды. Особенно замѣчательны его работы по вопросамъ теоретической физики. Первыя изъ относящихся сюда работъ были по гидродинамикѣ,

аэродинамикѣ и акустикѣ, за ними слѣдовали, начиная съ 1870 г., изслѣдованія по электродинамикѣ, далѣе по различнымъ вопросамъ оптики и термодинамики. Мы должны довольствоваться лишь этимъ перечнемъ дисциплинъ, въ которыхъ онъ работалъ; оцѣнка отдѣльныхъ его трудовъ завела бы насъ здѣсь слишкомъ далеко.

Рядомъ съ физикой онъ занимался теоріею познанія. Уже съ 50-хъ годовъ онъ старался изслѣдовать природу чувственныхъ воспріятій. При этомъ онъ пришелъ къ воззрѣнію, что чувственныя воспріятія для нашего сознанія суть только знаки внѣшнихъ предметовъ и фактовъ, и этотъ фактъ натолкнулъ его на важное изслѣдованіе объ основахъ геометріи (1868 г.). Здѣсь, а также и по отношенію къ аксіомамъ ариѳметики въ работѣ, опубликованной въ 1887 году къ юбилею Целлера („Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet)", онъ выступилъ противъ представленія Канта о трансцендентности пространства и времени. При этомъ онъ включилъ въ кругъ своихъ изслѣдованій не только основы чистой математики, но также и основы механики и физики. Труды послѣднихъ десяти лѣтъ его жизни на ряду съ нѣсколькими важными трактатами о движеніи атмосферы были посвящены изслѣдованію и опредѣленію принциповъ механики.

Научные трактаты Гельмгольца, опубликованные первоначально въ разныхъ журналахъ или изданіяхъ академіи, собраны въ трехъ томахъ; первые два тома появились въ 1882 г. и въ 1883 г., третій въ 1895 г.— послѣ смерти ученаго. Это собраніе не содержитъ названныхъ выше двухъ трудовъ, академическихъ рѣчей и популярно-научныхъ лекцій; послѣднія составляютъ содержаніе особаго собранія, вышедшаго въ 1884 году третьимъ изданіемъ. Желающимъ ближе ознакомиться съ научными заслугами Гельмгольца рекомендуемъ посвященную его памяти рѣчь W. v. Bezold'a (Лейпцигъ, 1895), далѣе составленное C. Wiedemann'омъ введеніе къ III тому собранія сочиненій и, наконецъ, статью Konigsberger'a: „Hermann v. Helmholtz, Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik“, Leipzig, 1896 г.).

Общія замѣчанія о напечатанныхъ здѣсь трактатахъ Гельмгольца.

Напечатанными здѣсь трактатами, изъ коихъ первый появился въ 1858 году въ 55 томѣ журнала „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, основаннаго Crell'емъ, а второй въ 1868 году въ Monatsberichte der Berliner Academie, Гельмгольцъ открылъ гидродинамикѣ новыя области и указалъ движенія жидкости, которыя раньше совершенно не были извѣстны. Между тѣмъ какъ до тѣхъ поръ трактовали почти исключительно только такія проблемы гидродинамики, при которыхъ существуетъ потенціалъ скоростей, Гельмгольцъ въ первомъ изъ нашихъ трактатовъ впервые подвергъ общему изслѣдованію тѣ формы движенія жидкостей, которыя выступаютъ, когда потенціалъ скоростей отсутствуетъ. Разсматривая измѣненіе, которое претерпѣваетъ безконечно-малый объемъ жидкости въ безконечно-малый элементъ времени, онъ нашелъ, что характерная особенность такъ называемыхъ потенціальныхъ движеній состоитъ въ томъ, что ни одна частица жидкости не имѣетъ вращательнаго движенія, между тѣмъ какъ въ случаѣ вращенія частицъ жидкости потенціала скоростей не существуетъ. Уже этотъ результатъ значительно расширилъ наше пониманіе сущности движенія жидкостей, но еще большее значеніе имѣютъ общія положенія, выставленныя Гельмгольцемъ относительно движенія безъ потенціала скоростей, которое онъ называетъ вихревымъ движеніемъ. Благодаря аналогіи, которую онъ обнаружилъ между вихревыми движеніями жидкости и магнитнымъ дѣйствіемъ электрическихъ токовъ, онъ сдѣлалъ этотъ новый родъ движенія доступнымъ нашему представленію. Приведенные въ концѣ примѣры, которые относятся къ движенію прямолинейныхъ и кольцеобразныхъ вихревыхъ нитей, также служатъ для того, чтобы дать наглядную картину движеній, о которыхъ идетъ рѣчь.

О важности разсматриваемой работы можно судить по обширной литературѣ, возникшей изъ нея, по огромному числу авторовъ, разрабатывавшихъ дальше открытую Гельмгольцемъ новую область.

Изъ нихъ мы назовемъ лишь Hankel'я (см. слѣдующее примѣчаніе 3) стр. 75), Beltrami—Memor. di Bologna (3) I — IV, 1872 — 1875] W. Thomson'a (Phils. Magaz. (4) 34, 1867, (5) 10, 1880; Trans. Roy. Sos., of Edinb. 25, 1869]. J. J. Thomson'a (A. treatise on the motion of vortex rings, 1883). На нѣкоторые другіе трактаты, напр., Greenhill'a, Coates'a, Gröbli будутъ ссылки въ слѣдующихъ примѣчаніяхъ. Названныя только что изслѣдованія W. Thomson'a (нынѣ лорда Кельвина) особенно важны потому, что этотъ ученый, изучая законы вихревого движенія, пришелъ ко взгляду, что атомы имѣютъ форму вихревыхъ колецъ. Хотя этотъ взглядъ весьма гипотетиченъ, тѣмъ не менѣе онъ представляетъ интересъ, во-первыхъ, тѣмъ, что соединяетъ ученіе о непрерывности матеріи съ атомистической гипотезой, и, во 2-хъ, тѣмъ, что показываетъ возможность устранить изъ физики дальнодѣйствія безъ посредства среды.

Вторымъ трактатомъ также открытъ гидродинамикѣ новый классъ проблемъ, и съ нимъ также связана обширная литература. Въ немъ впервые изслѣдуются условія образованія струй внутри жидкостей.

Гельмгольцъ нашелъ, что для этого явленія характерно образованіе поверхностей разрыва. Возможность такихъ поверхностей, вдоль которыхъ тангенціальная слагающая скорости измѣняется прерывно, доказана въ первомъ изъ нашихъ трактатовъ при разсмотрѣніи вихревыхъ поверхностей, и въ этомъ отношеніи обѣ работы тѣсно связаны между собой. Но здѣсь онъ отвлекается отъ существованія вихрей и сосредоточиваетъ вниманіе только на прерывности движенія. Разумѣется не всѣ задачи, выступающія при движеніяхъ такого рода, удастся разрѣшить; наоборотъ, приходится ограничиваться тѣмъ, чтобы представить возможныя движенія аналитически, а затѣмъ изслѣдовать, какимъ конкретнымъ случаямъ соотвѣтствуютъ найденныя рѣшенія*). Далѣе и это аналитическое

*) *Прим. ред.* Въ настоящее время это утвержденіе не точно: мы имѣемъ работу проф. Н. Е. Жуковскаго „Видоизмѣненія метода Кирхгоффа и т. д.“, напечатанную въ XV т. Мат. Сборн., 1890; авторъ указываетъ путь рѣшенія всѣхъ тѣхъ задачъ, въ которыхъ потокъ жидкости, всюду движущійся параллельно плоскости, прегражденъ плоскими стѣнками. Слѣдуетъ отмѣтить также статью Н. В. Берви въ Трудахъ Физ. Отд. О. Л. Е. (т. X.), гдѣ разрѣшаются нѣкоторые вопросы о струяхъ въ тяжелой жидкости.

представленіе движеній возможно лишь при извѣстныхъ допущеніяхъ. Приходится вводить предположеніе, что не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы, что движеніе принадлежитъ къ потенціальнымъ движеніямъ и стаціонарно и, наконецъ, что оно зависитъ лишь отъ двухъ координатъ. Съ математической точки зрѣнія интересна связь между относящимися сюда проблемами и теоріей конформнаго изображенія.

Только что указанныя ограниченія были сохранены и тѣми авторами, которые вслѣдъ за Гельмгольцемъ разработывали дальше проблемы образованія струй. Изъ нихъ назовемъ: Kirchhoff'a (Crelle's Journal f. Mathem. 70. 1869); лорда Rayleigh'a (Phil. Mag. [5] 2. 1876), показавшаго, какъ изъ результатовъ Kirchhoff'a получается contractio venae, Planck'a (Wiedemann Ann. [2] XXI. 1884); W. Voigt'a (Götting. Nachr., 1885 und Mathem. Annal. 28 и также Götting Nachr., 1892); наконецъ, слѣдуетъ еще упомянуть работу Weingarten'a (Götting. Nachr., 1890), въ которой опущено ограниченіе, что движеніе зависитъ только отъ двухъ координатъ.

Примѣчанія и объясненія къ тексту.

1. Вихревыя движенія.

1) къ стр. 5. Понятіе потенціала скоростей, какъ это указано въ текстѣ, встрѣчается уже у Лагранжа; новое названіе вводится здѣсь Гельмгольцемъ по ана-

логіи съ введеннымъ Гауссомъ названіемъ «потенціала»; подъ текстомъ цитируется второе изданіе Mecanique analytique Lagrang'a, первое вышло въ 1788 г. Названіе указанной работы Euler'a — Principes generaux du mouvement des fluides.

2) къ стр. 6. Со времени появленія этого трактата, по вопросу о вліяніи тренія на движеніе жидкостей сдѣлано довольно большое число подробныхъ опытныхъ и теоретическихъ изслѣдованій, именно Helmholz'емъ и Piotrowsky'мъ (Vien Sitzungsber. 40. 1860); Stefan'омъ (Vien. Sitzungsber. 46. 1862), O. E. Meyer'омъ (Crelle's Journal, Bd 59, 73, 75, Poggendorff's Annalen, 113, 143), Maxwell'омъ (Philosoph. Transact., 1866); Boussinesqu'омъ (Lionville I. 1868) и другими. Замѣтимъ еще, что общія уравненія движенія вязкой (т. е. подверженной тренію) жидкости были даны уже Navier'омъ (Mem. d'Acad. de Paris, 6, 1823), Poisson'омъ (Journ. d'Ecol. Polyt., Cahier 20. 1831) и Stokes'омъ (Combr. Phil. Trans. VIII. 1844), и что послѣдній уже примѣнилъ эти уравненія къ движенію сферическаго маятника въ воздухѣ (Comb. Frans. IX. 1851).

3) къ стр. 10. Положенныя здѣсь въ основаніе уравненія, выводъ которыхъ можно найти во всѣхъ учебникахъ механики, суть такъ называемыя уравненія Эйлера. Они опредѣляютъ скорость и давленіе жидкости, какъ функціи мѣста и времени. Вторая форма, которую можно дать уравненіямъ гидродинамики, служитъ для выраженія координатъ опредѣленной частицы жидкости, какъ функцій ея начальнаго положенія и времени. Эта вторая форма, которую называютъ формой уравненій Лагранжа, также принадлежитъ Эйлеру (Nov. Comment. Acad. Petropol. 14, 1769; по ошибкѣ эту работу всегда относятъ къ 1759 году вслѣдствіе опечатки на заглавіи соотвѣтствующаго тома. Томъ 14 принадлежитъ 1769 году и появился 1770 г.).

Теорію вихревыхъ движеній можно вывести и изъ уравненій Лагранжа; это показалъ H. Hänkel, разрѣшивъ задачу на соисканіе преміи, поставленную философскимъ факультетомъ Геттингенскаго университета (Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen 1861).

4) къ стр. 11. Цитируемыя здѣсь работы Гаусса и Грина имѣются въ изданіи Ostwald's Klassiker (№№ 2 и 61).

Теорема Грина, на которую здѣсь дѣлается ссылка, находится на стр. 24 (resp. примѣч. стр. 121) въ 61 № Ostwald's Klass. Гельмгольцъ здѣсь первый обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что потенціалъ скоростей φ въ многосвязныхъ пространствахъ можетъ сдѣлаться многозначнымъ, и что для такихъ многозначныхъ функцій теорема Грина не имѣетъ мѣста (ср. стр. 21 и 22 текста, также примѣч. 17). Какъ расширить эту теорему, если рѣчь идетъ о многозначныхъ функціяхъ, было показано M. Thomson'омъ (лордъ Кельвинъ) (On vortex. motion. Edinb. Trans. 25. 1869).

5) къ стр. 12. Важный вопросъ о разложеніи движенія жидкости, разсматриваемый здѣсь впервые съ самой общей точки зрѣнія, вызвалъ полемику между Гельмгольцемъ и Бертраномъ (Compt. rend. Bd. 66, 67, 1868).

Въ результатѣ этого спора Бертранъ долженъ былъ согласиться, что формулы Гельмгольца столь же общи, какъ и данныя имъ формулы, исходную точку которыхъ составляетъ разложеніе движенія жидкости на два основныхъ движенія: переносъ и расширеніе по тремъ направленіямъ взаимно неперпендикулярнымъ.

6) къ стр. 15. О теоремѣ Грина ср. № 61 Ostwald's Klassiker, стр. 121 (примѣч. 9). Если въ приведенной тамъ формулѣ положить $U = V = \varphi$ и принять во вниманіе, что $\delta\varphi = 0$, то получается уравненіе, приводимое въ текстѣ. Относительно ограниченія теоремы см. примѣч. 4). Цитата въ примѣчаніи содержитъ въ оригиналѣ ошибку, тамъ стоитъ: Crelle's journal, томъ LIV, стр. 108, вмѣсто XLIV, стр. 360. — Въ томѣ LIV содержится упомянутая на стр. 8 текста работа Римана.

Что у твердой стѣнки, ограничивающей жидкость, нормальная слагающая скорости $\frac{d\varphi}{dn}$ обращается въ нуль, слѣдуетъ изъ того, что поверхность жидкости, свободна ли она или несвободна, состоитъ всегда изъ тѣхъ же частицъ. Послѣднее есть слѣдствіе непрерывности жидкости.

7) къ стр. 17. Этимъ опредѣляется понятіе «вихреваго движенія», какъ такого движенія жидкости, при которомъ опредѣляемыя уравненіями (2) на стр. 14 слагающія скорости вращенія не обращаются въ нуль. Если это имѣетъ мѣсто, то потенціалъ скоростей не существуетъ. Важность этого новаго понятія особенно видна изъ слѣдующихъ открытыхъ Гельмгольцемъ теоремъ.

8) къ стр. 17. Для поясненія замѣтимъ: въ уравненіяхъ Эйлера величины, опредѣляющія движеніе жидкости, выражаются какъ функціи мѣста и времени. Поэтому $\frac{d\psi}{dt}\,dt$ обозначаетъ измѣненіе, претерпѣваемое функціей ψ за время dt въ опредѣленномъ мѣстѣ жидкости. Эта величина отнюдь не представляетъ собой измѣненія, которое испытываетъ ψ за время

dt для опредѣленной частицы жидкости, такъ какъ частица въ продолженіе времени dt не остается на одномъ и томъ же мѣстѣ, но координаты ея измѣняются на udt, vdt и wdt. Если для какой-нибудь частицы жидкости въ началѣ разсматриваемаго элемента времени ψ была нѣкоторой опредѣленной функціей отъ x, y, z, t, то въ концѣ dt ψ для нея есть та же функція отъ $x + udt$, $y + vdt$, $z + wdt$, $t + dt$. Поэтому измѣненіе ψ въ этомъ случаѣ будетъ:

$$udt\frac{d\psi}{dx} + vdt\frac{d\psi}{dy} + wdt\frac{d\psi}{dz} + dt\frac{d\psi}{dt},$$

и это выраженіе въ отличіе отъ $\frac{d\psi}{dt}\,dt$ обозначается черезъ $\frac{\partial\psi}{\partial t}dt$. Употребленный здѣсь способъ обозначенія полныхъ и частныхъ производныхъ совершенно обратный Якобіевому, который теперь вошелъ почти во всеобщее употребленіе.

9) къ стр. 18. Относительно выкладокъ, приводящихъ къ уравненіямъ (3) и (3a), замѣтимъ слѣдующее: дифференцируя первое уравненіе (1) по y, второе по x и вычитая затѣмъ второе изъ перваго, мы получаемъ, пользуясь условіемъ (1a) и послѣдующимъ уравненіемъ (2):

$$\text{(a)} \qquad 0 = \frac{d2\zeta}{dt} + u\frac{p2\zeta}{dx} + v\frac{d2\zeta}{dy} + w\frac{d2\zeta}{dz} + \frac{du}{dy}\frac{du}{dx} + $$

$$+ \frac{dv}{dy}\frac{du}{dy} + \frac{dw}{dy}\frac{du}{dz} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dx}\frac{dv}{dz}.$$

Сумма первыхъ четырехъ членовъ правой части равна $\frac{\partial 2\zeta}{\partial t}$. Сумма слѣдующихъ членовъ, если согласно четвертому уравненію (1) положить $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=-\frac{dw}{dz}$, представится въ видѣ:

(b) $$-\frac{dw}{dz}\frac{du}{dy}+\frac{dw}{dy}\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dz}-\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dz}.$$

Прибавляя и вычитая изъ этой суммы по $\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}$, можемъ сумму (b) записать такъ:

(b') $$-\frac{dw}{dx}2\xi-\frac{dw}{dy}2\eta-\frac{dw}{dz}2\zeta.$$

Подставляя это выраженіе въ (a), получаемъ послѣднее уравненіе (3). Чтобы получить послѣднее уравненіе (3a), нужно къ суммѣ (b) прибавить

$$+\frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dz}.$$

10) къ стр. 19. Въ оргиналѣ скорость вращенія обозначена не черезъ σ, а черезъ q. Измѣненіе сдѣлано для сохраненія единства въ обозначеніи, такъ какъ дальше въ оригиналѣ скорость вращенія всегда обозначается черезъ σ, между тѣмъ, какъ q есть результирующая скорость. Въ собраніяхъ сочиненій q иногда замѣнено σ.

11) къ стр. 20. Для поясненія доказанной здѣсь важной теоремы могло бы служить слѣдующее замѣчачаніе: Гельмгольцъ разсматриваетъ двѣ жидкія частицы, изъ которыхъ вторая для времени t лежитъ на оси вращенія первой, и именно на разстояніи $\varepsilon\sigma$ отъ нея. Если координаты первой частицы суть x, y и z, то координаты второй — $x+\varepsilon\xi$, $y+\varepsilon\eta$, $z+\varepsilon\zeta$; и если слагающія скорости первой u, v, w, а второй u_1 v_1, w_1, то вслѣдствіе непрерывности жидкости u_1, v_1

w_1, суть тѣ же функціи отъ $x+\varepsilon\xi$, $y+\varepsilon\eta$, $z+\varepsilon\zeta$, какъ u, v, w отъ x, y, z. Разлагая по строкѣ Тайлора, мы получаемъ для u_1, v_1, w_1 выраженія, данныя тремя уравненіями на стр. 19. По истеченіи времени dt обѣ частицы измѣнили свое положеніе въ жидкости; координаты первой стали теперь $x+udt$, $y+vdt$, $z+wdt$, а второй $x+\varepsilon\xi+u_1dt$, $y+\varepsilon\eta+v_1dt$, $z+\varepsilon\zeta+w_1dt$. Если α_1, β_1, γ_1 суть косинусы угловъ направленія прямой, соединяющей обѣ частицы для времени $t+dt$, то

(a) $$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1$$
$$=\varepsilon\xi+(u_1-u)\,dt:\varepsilon\eta+(v_1-v)\,dt:\varepsilon\zeta+(w_1-w)\,dt.$$

Вставляя значеніе u_1-u и т. д. и пользуясь уравненіями (3) на стр. 18, эти пропорціи можно написать также въ слѣдующемъ видѣ:

(b) $$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=\varepsilon\xi+\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial t}dt:\varepsilon\eta+\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial t}dt:\varepsilon\zeta+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial t}dt.$$

Съ другой стороны во время dt измѣнилось и направленіе оси вращенія первой частицы, такъ какъ компоненты скорости вращенія, имѣвшіе для времени t значенія ξ, η, ζ, для времени $t+dt$ обратились въ $\xi+\frac{\partial\xi}{\partial t}dt$, $\eta+\frac{\partial\eta}{\partial t}dt$, $\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial t}dt$. Если поэтому косинусы угловъ направленія оси вращенія для времени $t+dt$ суть α', β', γ', то:

(c) $$\alpha':\beta':\gamma'=\xi+\frac{\partial\xi}{\partial t}dt:\eta+\frac{\partial\eta}{\partial t}dt:\zeta+\frac{d\zeta}{\partial t}dt.$$

Изъ уравненій (b) и (c) слѣдуетъ:

$$\alpha_1:\beta_1:\gamma_1=\alpha':\beta':\gamma',$$

т. е. линія, соединяющая разсматриваемыя частицы, совпадавшая для времени t съ направленіемъ оси вращенія первой изъ нихъ, и для времени $t+dt$ совпадаетъ съ направленіемъ уже измѣнившейся оси вращенія; а если это справедливо въ моментъ $t+dt$, то, повторяя то же разсужденіе, мы убѣдимся, что оно должно быть справедливо и по истеченіи любого промежутка времени.

12) къ стр. 21. Что объемъ части жидкости, состоящей всегда изъ однѣхъ и тѣхъ же частицъ, постояненъ, слѣдуетъ изъ несжимаемости.

Замѣтимъ здѣсь, что выведенныя въ § 2 положенія относительно постоянства вихревого движенія не имѣютъ мѣста для жидкостей, подверженныхъ тренію.

13) къ стр. 21. Пріемъ замѣны интеграціи по двумъ координатамъ интеграціей по поверхности S употребленъ впервые Gauss'омъ (сравн. № 19 Ostwald's Klassiker, стр. 53). Тамъ показано также, какъ провести строгое доказательство для любой формы поверхности S.

Уголъ ϑ (см. стр. 22) есть уголъ между осью вращенія и нормалью.

14) къ стр. 25. Здѣсь примѣняется такъ называемое уравненіе Пуассона, по которому сумма вторыхъ частныхъ производныхъ потенціала для точекъ притягивающей массы равна плотности, умноженной на -4π (ср. № 2 Osswald's Klassiker стр. 17).

15) къ стр. 26. Въ оригиналѣ ошибочно напечатано: «и назовемъ элементъ поверхности S опять $d\omega$». Уравненіе (2a) стр. 27 есть то же, что приведено уже на стр. 23, только съ измѣненными обозначеніями.

16) къ стр. 28. Приведенный законъ о дѣйствіи

элемента тока на магнитную стрѣлку—есть законъ Biot-Savart'a.

Замѣтимъ еще, что для полученія выраженій для Δu, Δv, Δw (стр. 27) въ уравненіяхъ (4) P слѣдуетъ положить равнымъ нулю.

17) къ стр. 30. Если ds какой-нибудь элементъ дуги, то $\frac{d\varphi}{ds}$ есть компонентъ скорости по направленію ds. Если ds лежитъ въ направленіи теченія, то $\frac{d\varphi}{ds}$ представляетъ всю скорость и имѣетъ положительное значеніе. Если же $\frac{d\varphi}{ds}$ положительно, то φ возрастаетъ съ возрастаніемъ s, т. е. въ направленіи теченія φ постоянно увеличивается, и если теченіе замкнуто въ себѣ, то послѣ прохожденія теченія φ въ исходной точкѣ должно получить иное значеніе, чѣмъ прежде. Поэтому φ безконечно многозначно, подобно цикломстрическимъ функціямъ.

18) къ стр. 34. Такъ какъ вращающіяся частицы имѣются только на разсматриваемой поверхности, то и всѣ вихревыя линіи лежатъ на поверхности, и потому ось вращенія каждой частицы должна касаться поверхности; что вихревыя линіи нигдѣ не могутъ выступить съ поверхности, вытекаетъ изъ того, что § 2 вихревая нить никогда не можетъ кончаться внутри жидкости. Относительно примѣненнаго здѣсь характернаго свойства потенціала поверхности сравн. № 2 Ostwald's Klassiker, §§ 12—18.

19) къ стр. 35. Это слѣдуетъ изъ того, что потенціалъ притягивающей линіи на безконечно маломъ разстояніи t отъ линіи становится безконечнымъ, какъ

$2\rho \log\left(\frac{1}{t}\right)$, гдѣ ρ плотность и $\lim\left(t\frac{\partial V}{\partial t}\right) = -2\rho$ для $t = 0$.

20) къ стр. 36. Первая часть выраженія $\frac{2K}{h}$, а именно:

a) $$\iiint\left(u\frac{dP}{dx} + v\frac{dP}{dy} + w\frac{dP}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

по интеграціи по частямъ и замѣнѣ $dy\,dz = -d\omega\cos\alpha$ и т. д. (отрицательный знакъ входитъ потому, что α есть уголъ наклоненія нормали, направленной *внутрь*, съ осью x) переходитъ въ:

$$-\iint P(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)d\omega$$
$$-\iiint P\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)dx\,dy\,dz$$

Послѣдній интегралъ согласно четвертому уравненію (1) даетъ 0; далѣе

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = q\cos\vartheta.$$

Интегралъ a) принимаетъ видъ:

b) $$-\iint Pq\cos\vartheta\,d\omega.$$

Совершенно такъ же получается приводимая дальше общая формула, въ которой только вмѣсто P стоитъ ψ. Слѣдующая часть $\frac{2K}{h}$, а именно:

$$\iiint\left(v\frac{dL}{dz} - w\frac{dL}{dy}\right)dx\,dy\,dz$$

даетъ такимъ же образомъ:

$$-\iint L(v\cos\gamma - w\cos\beta)\,d\omega - \iiint L\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right)dx\,dy\,dz,$$

и $\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 2\xi$.

Въ уравненіи (6b) въ оригиналѣ по ошибкѣ стоитъ U (вмѣсто V). Относительно обращенія въ нуль нормальной слагающей скорости $q\cos\vartheta$ на поверхности (сравн. примѣч. 6).

21) къ стр. 37. Что массы соотвѣтствующія потенціальнымъ функціямъ L, M, N, въ общемъ даютъ нуль, выясняется такъ: такъ какъ имѣются только отдѣльныя вихревыя нити, которыя не простираются до стѣнокъ, то онѣ должны, замыкаясь, образовать безконечно тонкія кольца. Если $\varkappa$ есть поперечное сѣченіе такого кольца, σ — скорость вращенія, ds — элементъ дуги средней линіи, α — уголъ, образуемый ds съ осью x, то, помня, что ось вращенія есть касательная къ средней линіи, мы имѣемъ:

$$\xi_a = \sigma\cos\alpha,\ \ da\,db\,dc = \varkappa ds.$$

Поэтому вся масса, потенціалъ которой есть L, выразится такъ:

$$\varkappa\sigma\int\cos\alpha\,ds.$$

Но послѣдній интегралъ есть нуль, такъ какъ онъ долженъ быть распространенъ на замкнутую кривую. То же самое справедливо для всѣхъ вихревыхъ колецъ. Впрочемъ, поверхностный интегралъ въ выраженіи (6a) обратился бы въ нуль и въ томъ случаѣ, если бы массы, о которыхъ идетъ рѣчь, и не были нулями. Это слѣдуетъ изъ свойствъ потенціальной функціи и ея производныхъ въ безконечно большомъ разстояніи отъ дѣйствующихъ массъ.

22) къ стр. 38. Линіи тока или линіи теченія суть тѣ кривыя, касательныя которыхъ повсюду имѣютъ то же направленіе, какъ результирующая скорость. Дифференціальное уравненіе этихъ линій въ данномъ случаѣ, гдѣ дѣло идетъ о движеніи по плоскости, будетъ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \text{ т. е. } \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy = 0;$$

и интегралъ этого уравненія есть $N = Const.$

23) къ стр. 39. Относительно потенціальной функціи безконечно длинной прямой замѣтимъ слѣдующее. Потенціалъ линіи, параллельной оси Z и простирающейся отъ $z = -h$ до $z = +h$, въ томъ случаѣ если плотность $= 1$ и притягиваемая точка лежитъ въ плоскости xy, равенъ:

$$V = \int_{-h}^{+h} \frac{dc}{\sqrt{c^2 + \rho^2}} = \log\left(\frac{h + \sqrt{h^2 + \rho^2}}{-h + \sqrt{h^2 + \rho^2}}\right),$$

гдѣ

$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$

Этому выраженію для V можно придать слѣдующій видъ:

$$V = 2\log h + 2\log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{h^2}}\right) - 2\log\rho.$$

Для $h = \infty$ постоянный членъ $2\log h$ будетъ равенъ ∞, между тѣмъ какъ $\frac{\partial V}{\partial x}$ при $h = \infty$ остается конечнымъ, а именно $= -\frac{2(x-a)}{\rho^2}$.

Выраженіе для V, которое получается, если, опуская постоянное $2\log h$, положимъ $h = \infty$, носитъ названіе логариѳмическаго потенціала.

24) къ стр. 41. Именно если r есть длина соединяющаго отрѣзка, то

$$r\frac{dr}{dt} = (x_2 - x_1)(u_2 - u_1) + (y_2 - y_1)(v_2 - v_1).$$

Внося вмѣсто u_1, v_1, u_2, v_2 ихъ значенія, опредѣляемыя формулами стр. 19, въ правой части имѣемъ нуль; слѣдовательно, r постоянно.

25) къ стр. 42. Пусть $y = 0$ есть уравненіе стѣнки, координаты вихревой нити a, b, и произведеніе поперечнаго сѣченія на скорость вращенія есть m. Зеркальное изображеніе вихревой нити имѣетъ координаты a, $-b$, и указанное произведеніе для него имѣетъ величину $-m$. Компоненты скорости въ любой точкѣ жидкости x, y, которыя обусловливаются данной вихревой нитью, суть:

$$u = \frac{m}{\pi}\frac{y-b}{r^2}, \quad v = -\frac{m}{\pi}\frac{x-a}{r^2}, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Часть скорости x, y, обуславливаемая зеркальнымъ изображеніемъ, имѣетъ компоненты

$$u_1 = -\frac{m}{\pi}\frac{y+b}{r_1^2}, \quad v_1 = +\frac{m}{\pi}\frac{x-a}{r_1^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}.$$

У стѣнки $r = r_1$, поэтому $v + v_1 = 0$; т. е. имѣетъ мѣсто движеніе только параллельное стѣнкѣ. Для основанія перпендикуляра $x = a$, $y = 0$, поэтому $u + u_1 = = \frac{-2m}{\pi b}$. Скорость, вызываемая въ самой вихревой нити ея зеркальнымъ изображеніемъ, такъ какъ здѣсь $x = a$, $y = b$, $r_1 = 2b$, будетъ:

$$u_1 = -\frac{m}{\pi}\,\frac{2b}{4b^2} = -\frac{m}{2\pi b};$$

итакъ, эта скорость равна $\frac{1}{4}$ скорости у основанія перпендикуляра.

Задачами о движеніи прямолинейныхъ вихревыхъ нитей занимались кромѣ Beltrami въ его вышеупомянутомъ трактатѣ въ особенности еще Greenhill (Quart. j. XV. 1877), Coates (Quart. j. XV, 1878) и Grobli (vierteljahrssehrfit det naturforschenden Ges. in Zürich XXII, 1877).

26) къ стр. 42. Ось вращенія есть касательная вихревой линіи, поэтому косинусы ея направленія суть—sin e, cos e, 0, а потому компоненты скорости вращенія σ имѣютъ величины, данныя въ текстѣ.

27) къ стр. 43. Формула Z. Строки этой страницы въ оригиналѣ гласятъ:

$$L\sin\varepsilon - M\cos\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\cos(\varepsilon - e)}{r}\,g\,dg\,d(\varepsilon - e)\,dc.$$

Также и въ формулѣ на строкѣ 15 и въ слѣдующихъ строкахъ, вездѣ вмѣсто $e - \varepsilon$ стоитъ $\varepsilon - e$. При этомъ, повидимому, выпущено изъ виду, что если на мѣсто e перемѣнной интеграціи вводится $\varepsilon - e$, то предѣлы дѣлаются равными 0 и -2π. Поэтому, если далѣе въ оригиналѣ положено:

$$M\cos\varepsilon - L\sin\varepsilon = \psi = \frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\cos e\,.\,g\,dg\,de\,dc}{\sqrt{(z-c)^2+\chi^2+g^2-2g\chi\cos e}},$$

то здѣсь интегралъ по e распространится отъ 0, какъ нижняго предѣла, до -2π, какъ верхняго, между тѣмъ, какъ изъ дальнѣйшаго видно, что за предѣлы безъ оговорокъ принято 0 и $+2\pi$. По этой причинѣ измѣненіе формулъ оригинала было необходимо. Чтобы вводить по возможности меньше измѣненій въ

текстѣ, $\varepsilon - e$ замѣнено черезъ $e - \varepsilon$, и затѣмъ функція ψ опредѣлена уравненіемъ:

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\iiint\frac{\sigma\cos e\,.\,g\,dg\,de\,dc}{\sqrt{(z-c)^2+\chi^2+g^2-2g\chi\cos e}},$$

гдѣ предѣлы e суть 0 и $+2\pi$. Такимъ образомъ всѣ слѣдующія формулы на стр. 43 могли быть удержаны безъ измѣненія.

27а) къ стр. 43 Для поясненія замѣтимъ слѣдующее. Такъ какъ для разсматриваемаго здѣсь случая $P=0$, $N=0$, то по уравненіямъ (4) на стр. 24 имѣемъ:

$$u = -\frac{dM}{dz} = -\frac{d\psi}{dz}\cos\varepsilon,\quad v = \frac{dL}{dz} = -\frac{d\psi}{dz}\sin\varepsilon,$$

поэтому:

$$-u\sin\varepsilon + v\cos\varepsilon = 0,\quad u\cos\varepsilon + v\sin\varepsilon = -\frac{d\psi}{dz},$$

т. е. слагающая скорости перпендикулярная къ радіусу обращается въ нуль, а слагающая параллельная радіусу (т. е. τ) имѣетъ значеніе $-\frac{d\psi}{dz}$. Значеніе w мы получимъ, вставляя въ послѣднее уравненіе (4) на стр. 24 выраженія для M и L и замѣняя дифференцированія по x и y дифференцированіемъ по χ и ε, при чемъ надо помнить, что ψ не зависитъ отъ ε.

28) къ стр. 44. Для линій теченія имѣютъ мѣсто слѣдующія дифференціальныя уравненія (сравн. прим. 22):

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},\ \text{т. е.}\ \frac{dx}{\tau\cos\varepsilon} = \frac{dy}{\tau\sin\varepsilon} = \frac{dz}{w}.$$

Такъ какъ:

$$\sin\varepsilon dx - \cos\varepsilon dy = -d\varepsilon,$$

то по первому изъ этихъ уравненій $d\varepsilon = 0$, такъ что для линіи тока имѣемъ $dx = d\chi \cos\varepsilon, dy = d\chi \sin\varepsilon$.

Поэтому остается еще уравненіе:

$$\frac{d\chi}{\tau} = \frac{dz}{w},$$

интеграція котораго дастъ $\psi\chi = \mathrm{Const}$. Изображеніе линій тока, вызванныхъ однимъ вихревымъ кольцомъ, можно найти у Максвеля въ его Electricity and Magnetism, P. II, табл. XVIII.

29) къ стр. 44. ψ_{m_1} есть значеніе интеграла въ уравненіи (7) къ стр. 43, если отвлечься отъ интеграціи по g и e. Чтобы этотъ интегралъ привести къ нормальному виду эллиптическаго интеграла, стоитъ только замѣнить интегралъ съ предѣлами 0 и 2π удвоеннымъ интеграломъ съ предѣлами 0 и π, совершить подстановку $e = \pi - 2\vartheta$ и выразить $\cos\vartheta$ черезъ $\sin\vartheta$; тогда:

$$-\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\,\varkappa\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin^2\vartheta - 1)\,d\vartheta}{\sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\vartheta}},$$

гдѣ $\varkappa$ имѣетъ указанное въ текстѣ значеніе, а отсюда вытекаетъ приводимое въ текстѣ значеніе ψ_{m_1}. Зависимость ψ_{m_1} отъ z обусловливается лишь тѣмъ, что эта перемѣнная содержится въ $\varkappa$.

Нужно замѣтить, что въ оригиналѣ уравненія для ψ_{m_1}, $\tau\chi$ и $w\chi$ на лѣвой сторонѣ имѣютъ знакъ $+$ вмѣсто знака $-$, также и правая часть уравненія (8a). Это измѣненіе есть слѣдствіе измѣненія, выясненнаго въ примѣчаніи (27).

30) къ стр. 45. Въ оригиналѣ у третьяго и четвертаго члена лѣвой части уравненія (8a) недостаетъ множителя 2. Также нужно было прибавить множителя 2 и къ соотвѣтствующимъ членамъ слѣдующихъ уравненій на этой и слѣдующихъ страницахъ. Впрочемъ, прибавленіемъ этого множителя не измѣняется полученный результатъ, такъ какъ тамъ разсматриваемый членъ исчезаетъ въ сравненіи съ другими.

31) къ стр. 46. Переходъ отъ уравненій (8) и (8a) къ уравненіямъ средины страницы 46 можетъ вызвать у начинающихъ затрудненія въ виду того, что употребленный здѣсь способъ обозначеній совершенно отличенъ отъ предыдущаго; поэтому мы дадимъ слѣдующія разъясненія. Разсмотримъ, изъ какихъ частей слагаются величины, обозначенныя въ текстѣ черезъ τ_n, w_n, ψ_n. Для этого обозначимъ слагающія скорости, которую получаетъ первое кольцо отъ дѣйствія на него второго, черезъ τ_{12}, w_{12}, а отличныя отъ нихъ τ_{21}, w_{21} пусть будутъ слагающія скорости, которую получаетъ второе кольцо отъ перваго. Аналогично τ_{mn}, w_{mn} будутъ слагающія скорости, получаемой m'ымъ кольцомъ отъ дѣйствія n'аго.

Такимъ образомъ, если имѣется i колецъ:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \tau_{12} + \tau_{13} + \ldots + \tau_{1i},\\
\tau_2 &= \tau_{21} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{2i},\\
\tau_3 &= \tau_{31} + \tau_{32} + \ldots + \tau_{3i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_1 &= w_{12} + w_{13} + \ldots + w_{1i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Примѣняя уравненіе (8) къ первымъ двумъ кольцамъ, получаемъ:

$$m_1\tau_{12}\rho_1+m_2\tau_{21}\rho_2=0.$$

Образуя аналогичныя уравненія всѣхъ комбинацій колецъ попарно и, складывая всѣ полученныя такимъ образомъ уравненія, находимъ:

$$m_1\rho_1(\tau_{12}+\tau_{13}+\ldots+\tau_{1i})+m_2\rho_2(\tau_{21}+\tau_{23}+\ldots+\tau_{2i})$$
$$+\ldots+m_i\rho_i(\tau_{i_1}+\tau_{i_2}+\ldots+\tau_{i,i-1})=0$$

или

$$m_1\rho_1\tau_1+m_2\rho_2\tau_2+\ldots+m_1\rho_1\tau_1,$$

т. е.

$$\Sigma m_n\rho_n\tau_n=0.$$

Совершенно такимъ же образомъ получается изъ (8а) второе уравненіе въ срединѣ страницы. Что касается первой части этого уравненія, то замѣтимъ слѣдующее. Примѣняя уравненіе (8а) сперва для первыхъ двухъ колецъ, мы получаемъ справа:

$$-2\frac{m_1m_2}{\pi}\sqrt{\rho_1\rho_2}\,U_{12}$$
$$=-m_1\rho_1\frac{m_2}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\,U_{12}-m_2\rho_2\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\,U_{12}$$
$$=+m_1\rho_1\psi_{12}+m_2\rho_2\psi_{21};$$

гдѣ ψ_{12} есть часть силовой функціи ψ, представляющая дѣйствіе второго кольца на первое, а ψ_{21} — часть, происходящая отъ дѣйствія перваго кольца на второе. U_{12} есть опредѣленная на стр. 45 функція U, въ которой χ, z, g, c замѣнены соотвѣтственно черезъ ρ_1, λ_1, ρ_2, λ_2. ψ_{12} есть функція, обозначенная на стр. 44 черезъ ψ_{m_1}, въ которой m_1, g, χ замѣнены черезъ m_2, ρ_2, ρ_1. Примѣняя уравненіе (8а) послѣдо-

вательно для всѣхъ комбинацій колецъ попарно и суммируя всѣ полученныя такимъ образомъ уравненія, мы получаемъ для первой части результирующаго уравненія слѣдующее выраженіе:

$$m_1\rho_1(\psi_{12}+\psi_{13}+\ldots+\psi_{1i})+m_2\rho_2(\psi_{21}+\psi_{23}+\ldots+\psi_{2i})+\ldots$$

функцію $\psi_{12}+\psi_{13}+\ldots+\psi_{1i}$ Гельмгольцъ обозначаетъ черезъ ψ_1; такимъ же образомъ множитель при $m_2\rho_2$ онъ обозначаетъ черезъ ψ_2 и т. д. Тогда написанное выраженіе принимаетъ видъ:

$$m_1\rho_1\psi_1+m_2\rho_2\psi_2+\ldots=\Sigma(m_n\rho_n\psi_n).$$

Что касается перехода отъ конечнаго числа колецъ къ безконечно большему числу, то нужно замѣтить, что сказанное въ текстѣ относительно этого перехода относится къ величинамъ ψ_n, τ_n, w_n, которыя до сихъ поръ представляли собою конечныя суммы, теперь же переходятъ въ пространственные интегралы (а именно ψ переходитъ въ интегралъ (7) стр. 43. Обозначенное знакомъ Σ суммированіе даетъ трехкратную интеграцію; такимъ образомъ соотношенія между суммами переходятъ въ соотношенія между шестикратными интегралами. Что переходъ отъ обозначеннаго черезъ Σ суммированій къ интеграціи безъ всякихъ оговорокъ возможенъ, слѣдуетъ изъ того, что потенціалъ пространственныхъ массъ и его первыя производныя конечны и непрерывны во всемъ пространствѣ.

Указанная подъ текстомъ работа, какъ много разъ уже указывалось, напечатана въ № 2 изд. Ostwald's Kllassick. Что (стр. 46) только послѣ перехода отъ суммированія къ интеграціи положено $w=\frac{d\lambda}{dt}$, $\tau=\frac{d\rho}{dt}$, объясняется слѣдующимъ обстоятельствомъ: выведенныя до этого перехода формулы всегда относятся лишь къ дѣйствію, которое испытываетъ безконечно тонкое кольцо со стороны другихъ, находящихся отъ него на конечномъ разстояніи, между тѣмъ послѣ перехода необходимо обратить вниманіе и на дѣйствіе безконечно близкихъ колецъ, такъ что теперь только дѣлается извѣстной полная скорость въ данномъ мѣстѣ.

31a) къ стр. 47. Это теорема, указанная раньше. $d\rho d\lambda$ можно разсматривать, какъ поперечное сѣченіе вихревого кольца.

32) къ стр. 48. Различно съ обозначеніемъ на стр. 36 въ интегралѣ K перемѣнными интеграціи введены a, b, c. Нужно представлять себѣ, конечно, что въ L и M, которыя также представляются тройными интегралами, вмѣсто a, b, c введены другія перемѣнныя.

Далѣе, не согласуясь съ обозначеніемъ въ началѣ § 6, цилиндрическія координаты, въ которыхъ выражаются a,b,c, названы черезъ $\rho, \varepsilon, \lambda$. Поэтому нужно положить $\xi = -\sigma \sin \varepsilon$, $\eta = \sigma \cos \varepsilon$, между тѣмъ какъ формулы $L = -\psi \sin \varepsilon$, $M = \psi \cos \varepsilon$ остаются безъ измѣненія. Что K постоянно относительно времени, доказано на стр. 37.

33) къ стр. 48. Здѣсь мимоходомъ авторъ опять пользуется буквами g, c вмѣсто ρ, λ. Указанное здѣсь значеніе для $\varkappa$ вытекаетъ изъ даннаго на стр. , если пренебречь высшими степенями безконечно малыхъ величинъ $z - c$, $\chi - g$.

Что касается формулы для ψ_{m_1}, то она основывается на томъ, что если $\varkappa$ приближается къ значенію 1, то полный эллиптическій интегралъ перваго рода, обозначаемый Гельмгольцемъ черезъ F, становится

безконечнымъ, какъ $\log \left(\frac{4}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\right)$ (сравн. Legendre, „Traité des fonctions elliptiques I, chap. XIX, а также и „Durège", Theorie der elliptischen Functionen, § 50). Полный же эллиптическій интегралъ второго рода E при $\varkappa = 1$ равняется единицѣ.

Пренебрегая конечной величиной 2 въ сравненіи съ безконечно большой величиной F и принимая во вниманіе, что $\sqrt{\frac{g}{\chi}}$ съ точностью до безконечно малой величины $= 1$, приводимъ формулу на стр. 44 для ψ_{m_1} къ виду, данному въ текстѣ.

Приближенное значеніе F, которымъ приходится пользоваться здѣсь, можно вывести слѣдующимъ образомъ. Положимъ $1 - \varkappa^2 = \varkappa_1^2$, и разложимъ интегралъ F на сумму двухъ интеграловъ; получимъ:

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \psi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \varkappa_1^2 \sin^2\varphi}} + \int_{\frac{\pi}{2} - \psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + \varkappa_1^2 \sin^2\varphi}}.$$

Выбирая для ψ_1 такое значеніе, чтобы $\sin \psi_1$ было безконечно малымъ, но безконечно большимъ въ сравненіи съ $\varkappa_1$, мы можемъ въ первой части разложить подъинтегральную функцію по степенямъ $\varkappa_1$. Пренебрегая уже самой низшей степенью отъ $\varkappa_1^2$, мы получаемъ слѣдующее приближенное значеніе первой части F:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \psi_1} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\psi_1}{2}\right) = \log\left(\frac{2}{\psi_1}\right),$$

такъ какъ ψ_1 безконечно мало.

Вводя далѣе во второй части F вмѣсто φ новое перемѣнное $\frac{\pi}{2}-\psi$, можно, по малости ψ, вмѣсто $\sin\psi$ и $\cos\psi$, положить ψ и 1, и тогда вторая часть F приближенно будетъ равна:

$$\int_0^{\psi_1}\frac{d\psi}{\sqrt{\psi^2+\varkappa_1{}^2}}=\log\frac{\psi_1+\sqrt{\psi_1{}^2+\varkappa_1{}^2}}{\varkappa_1}=$$
$$=\log\psi_1+\log\left(1+\sqrt{1+\frac{\varkappa_1{}^2}{\psi_1{}^2}}\right)-\log\varkappa_1.$$

Складывая обѣ части F и пренебрегая $\left(\frac{\varkappa_1}{\psi_1}\right)^2$, которая безконечно мала въ сравненіи съ 1, имѣемъ $F=$ $=\log\left(\frac{4}{\varkappa_1}\right)$.

34) къ стр. 49. Послѣднія строчки представляютъ собой лишь побочное замѣчаніе для послѣдующаго. Такимъ образомъ, при опредѣленіи порядка величины $\frac{d\rho}{dt}$ g разсматривается, какъ величина конечная. Этотъ порядокъ величины $\frac{d\rho}{dt}$ получается слѣдующимъ образомъ: такъ какъ $U=\log\left(\frac{4}{\sqrt{1-\varkappa^2}}\right)$, то

$$\varkappa\frac{dU}{d\varkappa}=\frac{\varkappa^2}{1-\varkappa^2}=\frac{\varkappa^2.4g^2}{v^2}.$$

Такимъ образомъ выраженіе для $\tau\chi$ (стр. 44) содержитъ въ знаменателѣ квадратъ безконечно малой v, въ числителѣ же первую степень отъ $z-c$, которое одного порядка съ v.

Направленіе движенія жидкихъ частицъ по обѣ стороны кольца опредѣляется проще всего изъ слѣдующихъ соображеній. Въ томъ мѣстѣ кольца, гдѣ $e=90^0$, $\xi=-\sigma$, $\eta=0$ $\zeta=0$. Находящаяся вблизи частица (сравн. стр. 14) вслѣдствіе вращенія имѣетъ слѣдующія слагающія скорости: 0, $-(z-\mathfrak{z})\sigma$, $+(y-\mathfrak{y})\sigma$. Для частицы, лежащей въ плоскости кольца внѣ его $z=\mathfrak{z}$, $y>\mathfrak{y}$; слѣдовательно, движеніе такой частицы направлено къ положительной оси z; между тѣмъ, для точекъ внутри кольца ($z=\mathfrak{z}$, $y<\mathfrak{y}$) и направленіе движенія будетъ противоположнымъ.

Можно тотъ же результатъ вывести и изъ формулъ для w, полагая въ нихъ $z=c$.

35) къ стр. 50. Указанный здѣсь результатъ можно обосновать слѣдующимъ образомъ. Движеніе отдѣльнаго вихревого кольца, какъ оно выведено въ предшествующемъ изложеніи, измѣняется благодаря присутствію второго кольца, и соотвѣтственное измѣненіе можно вычислить. Пусть обозначенія m, ρ, z, $\tau=\frac{d\rho}{dt}$, $w=\frac{dz}{dt}$ относятся къ одному кольцу, m_1, ρ_1, z_1, $\tau_1=$ $=\frac{d\rho_1}{dt}$, $w_1=\frac{dz_1}{dt}$ къ другому, пусть m и m_1 положительны и $z>z_1$; тогда каждое кольцо безъ наличности другого двигалось бы въ сторону отрицательныхъ z, и кольцо m_1 двигалось бы впереди. Но согласно уравненію (8) стр. 45

$$m\rho\frac{d\rho}{dt}+m_1\rho_1\frac{d\rho_1}{dt}=0.$$

Поэтому одна изъ величинъ $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{d\rho_1}{dt_1}$ должна быть положительна, другая отрицательна, т. е. радіусъ одного кольца долженъ увеличиваться, радіусъ другого уменьшаться. Какой изъ радіусовъ увеличивается, можно обнаружить изъ уравненія для $\tau\chi$ (стр. 44), которое при нашихъ обозначеніяхъ напишется такъ:

$$-\rho\frac{d\rho}{dt}=\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\rho\rho_1}\,\varkappa\frac{dU}{d\varkappa}\,\frac{z-z_1}{(\rho+\rho_1)^2+(z-z_1)^2}.$$

Но $z > z_1$, далѣе:

$$\alpha\frac{dU}{d\varkappa}=\varkappa\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin^2\vartheta-1)\,d\vartheta}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\vartheta)^3}},$$

такъ же, какъ и сама величина U всегда положительны; поэтому $\frac{d\rho}{dt}$ будетъ отрицательнымъ, т. е. кольцо, слѣдующее позади, суживается, идущее же впереди расширяется. Затѣмъ изъ формулы для w (стр. 45) слѣдуетъ:

$$-\frac{dz}{dt}=\tfrac{1}{2}\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho^3}}\,U+\tfrac{1}{2}\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho^3}}\,\varkappa\frac{dU}{d\varkappa}\,\frac{(z-z_1)^2+\rho_1^2-\rho^2}{(\rho+\rho_1)^2+(z-z_1)^2}.$$

Значеніе для $-\frac{dz_1}{dt}$ мы получаемъ отсюда, замѣняя ρ черезъ ρ_1, а U и $\varkappa\frac{dU}{d\varkappa}$ оставляя безъ измѣненія. Такъ какъ ρ_1 увеличивается, а ρ уменьшается, то $m_1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho^3}}$ и $\rho_1^2-\rho^2$ — будутъ увеличиваться, а $m\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1^3}}$ и $\rho^2-\rho_1^2$ уменьшаться. Такъ какъ U и $\varkappa\frac{dU}{dx}$ положительны, то $\frac{dz}{dt}$ будетъ все увеличиваться, а $\frac{dz_1}{dt}$ все уменьшаться. Но $-\frac{dz}{dt}$ и $-\frac{dz_1}{dt}$ суть измѣненія, ко-

торыя испытываютъ первоначальныя движенія каждаго кольца въ направленіи отрицательныхъ z въ зависимости отъ присутствія другого кольца. Такимъ образомъ кольцо, слѣдующее позади, суживаясь, будетъ перемѣщаться быстрѣе; идущее же впереди, расширяясь, будетъ двигаться все медленнѣе. Подобнымъ же образомъ можно вывести и результаты, относящіеся къ двумъ вихревымъ кольцамъ съ равными радіусами и равными, но противоположно-направленными скоростями вращенія.

II. Прерывныя движенія жидкости.

36) къ стр. 54. Относительно вихревыхъ поверхностей ср. стр. 34 въ первомъ трактатѣ.

37) къ стр. 55. Распространеніе ударовъ въ жидкости и движеніе вызванной ударами поверхности разрыва (т. е. такой поверхности, на которой скорость мѣняется прерывно) подробнѣе изслѣдованы Christoffel'емъ (Annali di Matematica [2] VIII, 1877).

38) къ стр. 55. Если существуетъ потенціалъ скоростей, то интеграція уравненій гидродинамики [(1) стр. 10] даетъ:

$$\text{(a)}\quad V-\frac{1}{h}p+\text{Const.}=\frac{d\varphi}{dt}+\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right\}.$$

Если φ не зависитъ отъ времени, то изъ (a) слѣдуетъ выставленное въ текстѣ положеніе.

Для газовъ h не постоянная величина, какъ для несжимаемыхъ жидкостей, но $h=cp$, если имѣетъ мѣсто законъ Маріотта. Поэтому въ уравненіи (a) вмѣсто p войдетъ $\frac{1}{c}\log p$. Если же принять въ разсчетъ, связанное съ измѣненіемъ плотности измѣненіе температуры, то, полагая, что газъ не получаетъ и не отдаетъ тепла, мы вмѣсто закона Маріотта имѣемъ уравненіе $h = cp^{\frac{1}{\gamma}}$, гдѣ γ имѣетъ то же значеніе, какъ и на стр. 57. Поэтому въ уравненіи (a) вмѣсто p выступаетъ членъ $\frac{1}{c}\frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}}$, гдѣ $\gamma = 1{,}41$.

39) къ стр. 56. Этотъ результатъ можно вывести слѣдующимъ образомъ. Дѣло идетъ о движеніи жидкости, обладающемъ потенціаломъ скоростей φ; притомъ потенціалъ зависитъ только отъ двухъ координатъ, если мы движеніе принимаемъ одинаковымъ во всѣхъ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ острому краю. Если примемъ этотъ край за ось z, то φ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0,$$

и если мы введемъ въ плоскости xy полярныя координаты ρ, ϑ, то у плоскостей $\vartheta = 0$ и $\vartheta = 2\pi - \alpha$ перпендикулярная къ нимъ слагающая скорости, т. е. $\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\vartheta}$, должна обращаться въ нуль. Рѣшеніе, удовлетворяющее всѣмъ этимъ условіямъ, есть:

$$\varphi = c\rho^{\nu}\cos(\nu\vartheta), \text{ гдѣ } \nu = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}.$$

Скорость въ любой точкѣ жидкости будетъ:

$$q = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi^2}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2} = \frac{\nu c}{\rho^{1-\nu}};$$

если $\alpha < \pi$, $\nu < 1$ и $1 - \nu = \frac{\pi - \alpha}{2\pi - \alpha}$.

40) къ стр. 57. Надъ вліяніемъ тренія на образованіе струй экспериментальныя изслѣдованія производились Oberbeck'омъ (Ann. d. Phys. [2] II, 1877).

41) къ стр. 60. При стаціонарномъ теченіи $\frac{d\varphi}{dt} = 0$; поэтому уравненіе (a) примѣчанія 38 дастъ:

$$V - \frac{p}{h} + \text{Const.} = \tfrac{1}{2}q^2,$$

гдѣ q полная скорость. Далѣе на одной сторонѣ поверхности раздѣла долженъ имѣть мѣсто покой, поэтому тамъ $V - \frac{1}{h}p = \text{Const.}$ Но давленіе на обѣихъ сторонахъ поверхности раздѣла имѣетъ одну и ту же величину. Слѣдовательно для движущейся части жидкости q у этой поверхности должно быть постояннымъ; кромѣ того q касается поверхности раздѣла.

42) къ стр. 60 ср. работу Тиндаля „The action of sounding vibrations on gaseous and liquid jets", Philosoph. Magaz. (4) XXXIII. 1867.

43) къ стр. 60. Это легко обнаружить изъ закона, выведеннаго на стр. 56, если разсматривать граничную поверхность струи (поверхность раздѣла) какъ вихревую поверхность. Пока поверхность остается стаціонарной, дѣйствія, которыя испытываетъ одинъ элементъ вихревой нити отъ всѣхъ другихъ, взаимно уничтожаются. Но какъ только часть поверхности сдвинется, указанныя дѣйствія уже не будутъ болѣе

уравновѣшивать другъ друга. Отсюда происходитъ свертываніе поверхности.

43a) къ стр. 61. Если x есть ось цилиндрической струи, то, чтобы удовлетворить всѣмъ условіямъ, нужно только положить $\varphi = Ax$ внутри струи и $\varphi = 0$ внѣ ея.

44) къ стр. 61. Уже раньше было упомянуто, что изслѣдованіе разсматриваемаго рода движеній нельзя вести, задавая себѣ опредѣленныя задачи и разрѣшая ихъ. Наоборотъ, приходится довольствоваться отысканіемъ формулъ, дающихъ прерывность, а затѣмъ изслѣдовать, какимъ частнымъ задачамъ эти формулы соотвѣтствуютъ. Какимъ образомъ находятся такія формулы при указанныхъ въ текстѣ ограничивающихъ предположеніяхъ, Гельмгольцъ впервые показалъ въ этой работѣ. Обобщеніе метода Гельмгольца дано въ работѣ Кирхгофа, цитированной на стр. 73 *).

45) къ стр. 61. Дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ потенціалъ скоростей:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0,$$

можно замѣнить системой двухъ уравненій перваго порядка:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx}.$$

Относительно уравненія (1b) сравн. примѣч. 38.

46) къ стр. 63. Можно также сказать: требуется найти конформное изображеніе плоскостей x, y и φ, ψ одна на другой, обладающее указаннымъ въ текстѣ свойствомъ.

47) къ стр. 63. Такъ какъ при $y = \pm A\pi\psi$ имѣется

*) См. примѣчаніе ред. къ «Общимъ замѣчаніямъ».

постоянное значеніе $\pm\pi$, если φ лежитъ между $-\infty$ и $-A$, то въ соотвѣтствующихъ частяхъ линій $y = \pm A\pi \dfrac{d\psi}{dx} = 0$, т. е. по (1) стр. 61 вдоль этихъ частей линій слагающія скорости, перпендикулярныя къ линіямъ, равны нулю. Но это есть условіе, которое должно выполняться для твердой стѣнки. Поэтому, ничего не нарушая, можно замѣнить эти части линій твердыми стѣнками.

48) къ стр. 63. Для начинающихъ нужно дать слѣдующія поясненія. Здѣсь съ одной стороны входятъ частныя производныя отъ φ и ψ по x и y, съ другой стороны производныя отъ x и y по φ и ψ, гдѣ такимъ образомъ независимыя перемѣнныя замѣнены зависимыми и наоборотъ. Связь между производными обоего рода получается слѣдующимъ образомъ. Если φ и ψ какія-нибудь функціи отъ x и y, то рѣшая уравненія:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy,$$
$$d\psi = \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy:$$

находимъ

$$dx = \frac{\dfrac{d\psi}{dy}d\varphi - \dfrac{d\varphi}{dy}d\psi}{\Delta}, \quad dy = \frac{-\dfrac{d\psi}{dx}d\varphi + \dfrac{d\varphi}{dx}d\varphi}{\Delta};$$

$$\Delta = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}$$

поэтому:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\psi}{dy}, \quad \frac{dx}{d\psi} = -\frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dy},$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{1}{\Delta}\frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{dy}{d\psi} = \frac{1}{\Delta}\frac{d\varphi}{dx}.$$

Эти формулы всегда справедливы. Если же φ и ψ удовлетворяютъ уравненіямъ (1) стр. 61, то

$$\Delta = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2,$$

и далѣе въ этомъ случаѣ:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}.$$

49) къ стр. 65. Результатъ получается такъ: $\sigma + i\tau$, такъ какъ и $x + iy$ есть функція отъ $\varphi + i\psi$:

$$\sigma + i\tau = f(\varphi + i\psi),$$

такимъ образомъ

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} + i\frac{d\tau}{d\varphi} = f'(\varphi + i\psi).$$

Но для $\psi = \pm\pi$, $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ должно равняться нулю, между тѣмъ какъ $\frac{d\tau}{d\varphi}$ принимаетъ значеніе (3c), при чемъ верхній знакъ соотвѣтствуетъ $\varphi = +\pi$, а нижній $\varphi = -\pi$. Поэтому мы имѣемъ:

$$f'(\varphi \pm i\pi) = \pm iA\sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}},$$

при чемъ, чтобы $\frac{d\tau}{d\varphi}$ было дѣйствительнымъ, нужно прежде всего положить $e^{\varphi} < 2$.

Интеграція даетъ:

$$f(\varphi \pm i\pi) = \pm iA\left\{e^{\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{2 - e^{\varphi}} + 2 \arcsin\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\varphi}}{\sqrt{2}}\right)\right\};$$

если вмѣсто φ вставимъ сюда $\varphi + i(\psi \mp \pi)$ и опустимъ ограниченіе, что $e^{\varphi} < 2$, то получимъ:

$$\sigma + i\tau = f(\varphi + i\psi) = \mp iA\left\{\pm ie^{\frac{1}{2}(\varphi + i\psi)}\sqrt{2 + e^{\varphi + i\psi}} \mp 2 \arcsin\left(\frac{ie^{\frac{1}{2}(\varphi + i\psi)}}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

Если мы введемъ знакъ $\pm$ передъ iA въ скобку и подведемъ $-ie^{\frac{1}{2}(\varphi + i\psi)}$ подъ знакъ радикала, то это выраженіе совпадетъ съ (3d). Отсюда мы узнаемъ, какой знакъ нужно приписать радикалу, встрѣчающемуся въ (3d); далѣе, что этотъ радикалъ, а также и слѣдующій arc sin мѣняютъ свои знаки, когда ψ увеличивается на 2π. Для $e^{\varphi + i\psi} = -2$ производная отъ $f(\varphi + i\psi)$ дѣлается безконечной.

Замѣтимъ еще, что въ оригиналѣ въ выраженіи (3d) передъ 2 arc sin стоитъ знакъ $+$ вмѣсто $-$; далѣе, передъ формулой (3d) сказано, что послѣ интеграціи вмѣсто φ нужно вставить $\varphi + i(\psi + \pi)$; то и другое требовало исправленія.

50) къ стр. 65. Вмѣсто «вдоль стѣны» было бы лучше сказать «для $\psi = \pm\pi$», какъ это и сдѣлано выше; потому именно, что линіи $\psi = \pm\pi$ плоскости $\varphi\psi$ не цѣликомъ соотвѣтствуютъ твердымъ стѣнкамъ.

Въ уравненіи для $\sigma + i\tau$ стр. въ оригиналѣ по ошибкѣ стоитъ знакъ $-$ передъ 2 arc sin; изъ вывода въ примѣчаніи 49 слѣдуетъ, что вмѣсто минуса нужно поставить знакъ плюсъ; потому что выступающее здѣсь значеніе $\sigma + i\tau$ тамъ обозначено черезъ $f(\varphi \pm i\pi)$.

51) къ стр. 66. Для поясненія выведенныхъ здѣсь результатовъ могутъ служить слѣдующія замѣчанія. Уравненія (3a) и (3d) представляютъ извѣстное кон-

формное изображеніе плоскости $\varphi\psi$ на плоскости xy; и при томъ изъ всей плоскости $\varphi\psi$ входитъ въ разсмотрѣніе только полоса, простирающаяся отъ $\psi = -\pi$ до $\psi = +\pi$, между тѣмъ какъ φ можетъ получать всевозможныя значенія. Это слѣдуетъ изъ того, что для $\psi = \pm\pi$ и $e^{\varphi} = 2$ производныя отъ x и y по φ и ψ становятся безконечными. Нужно изслѣдовать, какія точки плоскости xy соотвѣтствуютъ отдѣльнымъ точкамъ упомянутой полосы, и въ особенности ея граничнымъ линіямъ; разсмотрѣніе условій, имѣющихъ мѣсто для различныхъ частей граничныхъ линій, даетъ механическое значеніе соотвѣтствующихъ кривыхъ въ плоскости xy.

Для $\psi = \pm\pi$, $\sigma + i\tau$ представляется уравненіемъ на стр. строка, и именно верхній знакъ соотвѣтствуетъ значенію $\psi = +\pi$, а нижній значенію $\psi = -\pi$. Если $e^{\varphi} > 2$, то въ указанномъ выраженіи квадратный корень будетъ мнимымъ, аргументъ arc sin дѣйствительнымъ и больше единицы. Для такого аргумента m:

$$\arcsin m = \tfrac{1}{2}\pi + i \log (m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

Поэтому

$$\sigma + i\tau = \pm A i\pi + k,$$

гдѣ k обозначаетъ дѣйствительную величину, т. е. $\sigma = k$, $\tau = \pm A\pi$. Такимъ образомъ для $e^{\varphi} > 2$ и $\psi = +\pi$: $y = A\pi + A\pi$, для $e^{\varphi} > 2$ и $\psi = -\pi$: $y = -A\pi - A\pi$. Тѣмъ частямъ обѣихъ граничныхъ линій $\psi = \pm\pi$, для которыхъ $\varphi > \log 2$ соотвѣтствуютъ въ плоскости xy извѣстные отрѣзки линій $\pm 2A\pi$ параллельныхъ оси x. Такъ какъ далѣе $\varphi = +\infty$, $\psi = \pm\pi$, $x = -\infty$, а для $\varphi = \log 2$, $\psi = \pm\pi$ $x = -A(2 - \log 2)$, то указанные отрѣзки линій распространяются отъ

$x = -\infty$ до $x = -A(2 - \log 2)$. — Далѣе для $\psi = \pm\pi$, $e^{\varphi} > 2$ τ, какъ мы видѣли, постоянно, слѣдовательно $\frac{d\tau}{d\varphi} = 0$, поэтому $\frac{dy}{d\varphi} = 0$, а поэтому также (сравн. прим. 48) $\frac{d\psi}{dx} = -\frac{d\varphi}{dy} = 0$; т. е. въ соотвѣтствующихъ частяхъ линій плоскости xy перпендикулярная къ нимъ слагающая скорости $v = 0$; для этихъ частей линій выполняются условія, которыя имѣютъ мѣсто для твердыхъ стѣнокъ. Ничего не нарушая, можно эти части линій замѣнить твердыми стѣнками, а такимъ образомъ получаются результаты, выставленные для канала.

Для $\psi = \pm\pi$, $e^{\varphi} < 2$, $\sigma + i\tau$ есть чисто мнимая величина. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ $\sigma = 0$ и $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$; т. е. для $\psi = \pm\pi$ и $e^{\varphi} < 2$ выполняются всѣ условія, которыя по стр. необходимо должны выполняться для свободной части струи. Поэтому кривыя плоскости xy, которыя соотвѣтствуютъ разсматриваемымъ частямъ линій $\psi = \pm\pi$ плоскости $\varphi\psi$, могутъ быть разсматриваемы какъ свободныя части струи. Эти кривыя плоскости xy будутъ:

$$x = A(\varphi - e^{\varphi}),$$

$$y = \pm A\pi + \tau = \pm A \left\{ \pi + \sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} + 2 \arcsin\left(\frac{e^{\frac{1}{2}\varphi}}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Если φ измѣняется сперва отъ $-\infty$ до 0, затѣмъ отъ 0 до $\log 2$, то x увеличивается отъ $-\infty$ до $-A$, затѣмъ опять уменьшается до $-A(2 - \log 2)$, между тѣмъ какъ абсолютная величина y все время возрастаетъ и притомъ такъ, что $y\pi = \pm A$ для

$x = -\infty$, $y = \pm A(\frac{3}{2}\pi + 1)$ для $x = -A$ и наконецъ $y = \pm 2A\pi$ для $x = -A(2 - \log 2)$. Такимъ образомъ мы доказали положенія, высказанныя о теченіи свободной струи.

Что истеченіе изъ неограниченнаго сосуда происходитъ въ началъ, слѣдуетъ изъ того, что точки плоскости xy, соотвѣтствующія изображаемой полосѣ плоскости $\varphi\psi$, заполняютъ всю плоскость xy за исключеніемъ лежащихъ между границами канала ($\psi \pm 2A\pi$) и свободными частями струи. Для этихъ площадей, слѣдовательно, не существуетъ никакого φ, т. е. въ нихъ не происходитъ никакого теченія.

Скорость вдоль поверхности раздѣла получается слѣдующимъ образомъ. Для этой поверхности имѣютъ мѣсто уравненія (3b) и (3c) стр. 64, поэтому на ней:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = A^2.$$

Слѣдовательно:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \frac{1}{A^2}.$$

52) къ стр. 66. Результаты выведенные Clausius'омъ въ его работѣ: „Ueber die Anordnung der Elektricität auf einer einzelnen sehr dünnen Platte und auf den beiden Belegungen einer Franklin'schen Tafel“, проще доказаны G. Kirchhoff'омъ (Zur Theorie des Condensators“, Monatsber. der Ber. Akad. 1877). Кирхгофъ, опирающійся главнымъ образомъ на настоящую работу Гельмгольца, принимаетъ въ соображеніе и толщину пластинки конденсатора.

Уравненію (4) можно дать истолкованіе, какъ и уравненію (3a).