

Ю. В. ВОРОБЬЕВ

МЕТОД МОМЕНТОВ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

$$\begin{array}{r} 937/9 \\ \hline 59. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \hline 2636 \end{array}$$

*Библиотека выпускается под общим руководством
кафедры вычислительной математики
Московского государственного университета.
Заведующий кафедрой акад. С. Л. Соболев.*

~~814 518~~
~~B 751 B 751~~

АННОТАЦИЯ

В книге изложена теория приложений метода моментов для приближенного отыскания собственных значений линейных операторов и решения линейных уравнений. Теория иллюстрируется рядом конкретных прикладных задач. Рассчитана на научных работников и аспирантов в области прикладной математики, физики и техники, а также на студентов старших курсов соответствующих специальностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Аппроксимация линейных ограниченных операторов	7
§ 1. Абстрактное гильбертово пространство	7
§ 2. Линейные ограниченные операторы	16
§ 3. Проблема моментов в пространстве Гильберта	22
§ 4. Аппроксимация линейных ограниченных операторов	28
Глава II. Уравнения с вполне непрерывными операторами	33
§ 1. Проблема моментов для вполне непрерывных операторов	33
§ 2. Неоднородные уравнения, содержащие вполне непрерывные операторы	36
§ 3. Однородные уравнения. Определение характеристических чисел	48
§ 4. Пример вычисления характеристических чисел	56
Глава III. Метод моментов для самосопряженных операторов	60
§ 1. Самосопряженные операторы	60
§ 2. Проблема моментов в пространстве Гильберта для самосопряженных операторов	66
§ 3. Определение спектра самосопряженных операторов .	74
§ 4. Решение линейных неоднородных уравнений с самосопряженными ограниченными операторами	80
Глава IV. Ускорение сходимости линейных итеративных процессов	95
§ 1. Линейные итеративные процессы	95
§ 2. Метод моментов и ускорение сходимости линейных итеративных процессов	98
§ 3. Решение уравнений в конечных разностях	103

Глава V. Решение нестационарных задач методом моментов	113
§ 1. Уравнения с положительно-определенными операторами	113
§ 2. Колебания систем с конечным числом степеней свободы	122
§ 3. Распространение тепла в неоднородном стержне	113
§ 4. Переходный процесс в системе автоматического регулирования	133
§ 5. Колебания самолета с автопилотом типа Сперри	138
Глава VI. Обобщения метода моментов	143
§ 1. Неограниченные операторы	143
§ 2. Обобщенный метод моментов	146
Глава VII. Решение интегральных и дифференциальных уравнений	155
§ 1. Интегральные уравнения	155
§ 2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	158
§ 3. Уравнения в частных производных с переменными коэффициентами	167
§ 4. Изгиб балки переменного сечения	173
§ 5. Расчет поля электростатической электронной линзы	177
Литература	183

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многочисленные задачи механики, физики и техники приводят к рассмотрению линейных уравнений как неоднородных в статических задачах, так и однородных в проблеме колебаний. Идея применения метода последовательных приближений (итеративного метода) для решения этих уравнений возникла уже давно. Итеративный метод был использован еще Лиувиллем [1] в его исследованиях в области линейных дифференциальных уравнений. Тот же метод применял Нейман [1] в теории потенциала.

Вычисление решений линейных уравнений последовательными приближениями связано с рядом трудностей. Во-первых, процесс приближений может не сходиться к решению. Это обстоятельство сильно сужает круг задач, где этот метод может быть использован. Во-вторых, даже если процесс приближений сходится к решению, часто оказывается, что сходимость настолько медленная, что для фактического вычисления решения с удовлетворительной точностью нужно проделать очень большое количество вычислений.

Ограниченная область применения и медленная сходимость процессов приближений рассеяли на время интерес к теории итеративных методов. Лишь в последнее время с появлением автоматических счетных машин итеративные методы вследствие простоты вычислительной схемы стали широко применяться в практических расчетах. Это, естественно, возбудило интерес к их теории.

В предлагаемой работе мы из большого числа различных итеративных методов, развитых за последние годы, излагаем лишь один класс методов, построенных на вариационном принципе и тесно связанных с классической проблемой моментов Чебышева — Маркова. Эти методы выгодно отличаются как широтой круга задач, где они могут быть

использованы, так и быстротой сходимости последовательных приближений.

Общая постановка задачи и использование аппарата функционального анализа позволили объединить все методы рассматриваемого класса в единый метод моментов.

Для облегчения чтения книги мы сочли необходимым изложить в нужных местах в краткой и по возможности доступной форме терминологию и основные результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Однако для более глубокого понимания некоторых разделов книги необходимо знакомство со спектральной теорией самосопряженных операторов и теорией неограниченных операторов. Эти вопросы прекрасно изложены в курсах Л. Люстерника и В. Соболева «Элементы функционального анализа» и Ф. Рисса и Б. Надя «Лекции по функциональному анализу», к которым мы и отсылаем читателя.

Материал этой книги неоднократно обсуждался с Л. А. Люстерником, сделавшим мне ряд ценных указаний, которые мною использованы при написании книги, за что я и приношу ему свою глубокую признательность.

ГЛАВА I

АППРОКСИМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Абстрактное гильбертово пространство

Абстрактным гильбертовым пространством H называется множество элементов $x, y, z, \dots$, обладающее следующими свойствами:

1. H является линейным пространством, то есть в H определены действия сложения и умножения на действительные или комплексные числа, подчиняющиеся обычным правилам векторной алгебры. В частности, H содержит элемент 0 , равный $0 \cdot f$ при любом f из H .

2. В пространстве H с помощью понятия скалярного произведения введена метрика. Это означает, что любой паре элементов x, y ставится в соответствие действительное или комплексное число (x, y) , называемое их скалярным произведением, причем выполняются следующие условия: $(ax, y) = a(x, y)$, каково бы ни было число a ; $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; $(x, y) = \overline{(y, x)}$; $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $(x, x) = 0$ при $x = 0$.

Норма $\|x\|$ элемента x определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

а расстояние между x и y полагается равным $\|x - y\|$. Норма любого элемента, кроме нулевого, положительна.

Если $(x, y) = 0$, то и $(y, x) = 0$, и в этом случае элементы называются *ортгоналичными* ($x \perp y$).

Примером гильбертова пространства может служить обычное трехмерное векторное пространство, где элементами являются векторы, определяемые тремя составляющими в

какой-либо системе координат. Сложение и умножение на число двух векторов x и y с составляющими x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 определяется по законам векторной алгебры. То есть, если

$$z = ax + by,$$

то

$$z_1 = ax_1 + by_1, \quad z_2 = ax_2 + by_2, \quad z_3 = ax_3 + by_3.$$

Скалярное произведение равно сумме произведений составляющих

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

и норма равна длине вектора

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Нулевым элементом является вектор с составляющими, равными нулю.

Это пространство естественно обобщается на n -мерное (комплексное) векторное пространство H_n , где элементами являются векторы x , которые определяются последовательностями (комплексных) чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, называемых составляющими этого вектора. Обычным образом определяются операции сложения и умножения на число: если $z = ax + by$, то $z_i = ax_i + by_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Скалярное произведение определяется как число, равное следующей сумме:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

и норма имеет вид

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Нулевым элементом является вектор, все составляющие которого равны нулю.

Отметим, что иногда при определении скалярного произведения вводят весовые множители и полагают:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i \bar{y}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i |x_i|^2,$$

$$\rho_i > 0.$$

Наряду с конечномерным рассматривают бесконечномерное векторное пространство l_2 , элементами которого являются бесконечные последовательности комплексных чисел $x_1, x_2, \dots$,

такие, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Числа $x_1, x_2, \dots$ можно рассматривать как составляющие бесконечномерного вектора x в некоторой системе координат. Сложение элементов, умножение на число, скалярное произведение определяются так же, как и в конечномерном пространстве, причем ряд

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

всегда сходится, если x и y принадлежат l_2 , то есть, если сходятся ряды $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2$. Аналогичным образом определяется и норма

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}.$$

Примером функционального гильбертова пространства может служить пространство L_2 , элементами которого являются функции (вообще говоря комплексные) $x(t)$, заданные на некотором отрезке $[a, b]$ и интегрируемые с квадратом, то есть для которых

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < +\infty.$$

Интегрируемость (суммируемость), вообще говоря, следует понимать в смысле Лебега, однако в приложениях мы обычно имеем дело с обыкновенными римановыми интегралами.

Сложение и умножение на число в L_2 производится по обычным правилам сложения и умножения функций. Скалярное произведение и норма определяются формулами

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt, \quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}.$$

Вернемся к абстрактному гильбертову пространству и выведем ряд свойств скалярного произведения и нормы.

Пусть x и y — любые элементы H . Для любого действительного λ имеем

$$0 \leq \|x + \lambda(x, y)y\|^2 = (x + \lambda(x, y)y, x + \lambda(x, y)y) = \\ = (x, x) + (x, \lambda(x, y)y) + (\lambda(x, y)y, x) + \lambda^2((x, y)y, (x, y)y).$$

Из определения скалярного произведения следует:

$$(x, \lambda(x, y)y) = \lambda \overline{(x, y)} (x, y) = \lambda |(x, y)|^2,$$

$$(\lambda(x, y)y, x) = \lambda(x, y) \overline{(x, y)} = \lambda |(x, y)|^2,$$

$$((x, y)y, (x, y)y) = (x, y) \overline{(x, y)} (y, y) = |(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2,$$

где мы воспользовались вещественностью λ ($\lambda = \bar{\lambda}$). Теперь легко видеть, что многочлен второй степени относительно λ вида

$$\|x\|^2 + 2\lambda |(x, y)|^2 + \lambda^2 |(x, y)|^2 \cdot \|y\|^2 = \|x + \lambda(x, y)y\|^2$$

не отрицателен и, следовательно, не может иметь различных вещественных корней, поэтому его дискриминант должен быть меньше или равен нулю:

$$|(x, y)|^4 - \|x\|^2 \|y\|^2 |(x, y)|^2 \leq 0.$$

Таким образом (даже в случае $(x, y) = 0$),

$$|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

или

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (1)$$

Это неравенство называется неравенством Буняковского — Шварца.

В обычном трехмерном векторном пространстве, где норма вектора равна его длине, а скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла между ними, неравенство Буняковского — Шварца выражает элементарный факт, что косинус угла по абсолютной величине не превосходит единицы.

Рассмотрим теперь квадрат нормы для суммы $x + y$:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x).$$

Принимая во внимание, что $|(x, y) + (y, x)| \leq 2|(x, y)|$, в силу неравенства (1) можно написать

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|,$$

или

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (2)$$

Это неравенство называется неравенством треугольника и в обычном векторном пространстве выражает тот факт, что длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон.

Применяя неравенство (2) к сумме $x - y = (x - z) + (z - y)$, получим формулу

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|. \quad (3)$$

Важнейшую роль в дальнейшей теории играет понятие линейной зависимости. Элементы $z_1, z_2, \dots, z_n$ гильбертова пространства называются *линейно-зависимыми*, если можно найти такие числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, не все равные нулю, так чтобы выполнялось равенство

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n = 0.$$

Указанные элементы называются *линейно-независимыми*, если последнее равенство осуществляется только при

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Для того чтобы элементы $z_1, z_2, \dots, z_n$ гильбертова пространства были линейно-независимыми, необходимо и достаточно, чтобы определитель Грама

$$\begin{vmatrix} (z_1, z_1) & (z_1, z_2) & \dots & (z_1, z_n) \\ (z_2, z_1) & (z_2, z_2) & \dots & (z_2, z_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (z_n, z_1) & (z_n, z_2) & \dots & (z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Можно показать, что определитель Грама может иметь только вещественные неотрицательные значения.

Введем понятие предела. Пусть в гильбертовом пространстве H задана последовательность его элементов $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n, \dots$. Говорят, что эта последовательность сходится

(сильно) или стремится к x , если x принадлежит H и

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4)$$

Элемент x называется пределом последовательности $\{x_n\}$. Мы будем записывать это обстоятельство, пользуясь обычной символикой

$$x_n \Rightarrow x \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Поясним это определение на примерах.

а) В векторном пространстве сходимость $x_n \Rightarrow x$ означает, что

$$\sum_{k=1}^N (x_{n,k} - x_k)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $x_{n,k}$ — составляющие векторов x_n , N — число измерений пространства. Отсюда следует, что $x_{n,k} \rightarrow x_k$ в обычном смысле.

б) В функциональном пространстве L_2 сходимость $x_n \Rightarrow x$ означает, что

$$\int_a^b [x_n(t) - x(t)]^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Такого рода сходимость называют сходимостью в среднем. Отметим, что из сходимости в среднем отнюдь не вытекает обычная сходимость функций, даже если $x(t)$ и $x_n(t)$ непрерывны.

Если $x_n \Rightarrow x$ и $y_n \Rightarrow y$, то $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Действительно, легко проверить, что

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) - (x, y) &= (x_n - x, y_n - y) + \\ &+ (x, y_n - y) + (x_n - x, y). \end{aligned}$$

Отсюда по неравенству Буняковского — Шварца

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq$$

$$\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n - y\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| + \|y\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Сходимость x_n к x влечет за собой сходимость (x_n, y) к (x, y) при любом y и сходимость $\|x_n\|$ к $\|x\|$.

Вернемся к общему понятию сходимости.

Пусть в гильбертовом пространстве H дана сходящаяся к элементу x последовательность $\{x_n\}$. По определению $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Пользуясь неравенством треугольника (3), получим

$$\|x_m - x_n\| = \|(x_m - x) - (x_n - x)\| \leq \|x_m - x\| + \|x_n - x\|.$$

Правая часть стремится к нулю при неограниченном возрастании n и m , то есть

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|x_n - x_m\| = 0. \quad (5)$$

Таким образом, если $x_n \Rightarrow x$, то необходимо выполнено и равенство (5). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. То есть при выполнении условия (5) может оказаться, что предел последовательности $\{x_n\}$ не принадлежит рассматриваемому гильбертову пространству.

Гильбертово пространство H называется полным, если всякая последовательность его элементов, удовлетворяющая условию (5), имеет предел в H .

Неполное гильбертово пространство можно сделать полным, добавив к нему некоторые новые элементы, подобно тому как множество рациональных чисел дополняется до всей числовой прямой введением иррациональных чисел.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию (5), но не имеет предела в H . Припишем последовательности $\{x_n\}$ в качестве предела новый элемент x , называемый *предельным*. Если при этом предельные элементы x и y определяются соответственно последовательностями $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то примем, что $x = y$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

Скалярное произведение предельных элементов определяется формулой

$$(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n),$$

и

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|.$$

Существование пределов этих числовых последовательностей легко установить.

Присоединение к H всех предельных элементов делает H полным пространством. Эта операция называется *замыканием*.

Приведенные выше конечномерное векторное пространство H_n , бесконечномерное векторное пространство l_2 и функциональное пространство L_2 являются полными гильбертовыми пространствами.

В дальнейшем, говоря о гильбертовом пространстве, мы будем предполагать его полным.

Введем некоторые понятия, связанные с рассмотрением множеств элементов из H . Множество L элементов называется *линеалом* при соблюдении следующего условия: если элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ принадлежат L , то и любая их линейная комбинация $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ также принадлежит L . Если, кроме того, всякая сходящаяся последовательность элементов линеала L имеет пределом элемент, также принадлежащий L , то есть L содержит в себе все свои предельные элементы, то такой линеал называется *подпространством*.

В конечномерном пространстве H_n всякий линеал замкнут и является подпространством. В обычном вещественном трехмерном векторном пространстве примерами подпространств будут: все пространство, плоскость, проходящая через начало координат, и прямая, проходящая через начало координат.

Если x_1 — любой элемент H , то множество элементов ax_1 , где a — произвольное комплексное число, представляет собою подпространство. Если $x_1, \dots, x_n$ — любые n линейно-независимых элементов (n — конечно), то множество элементов $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — любые комплексные числа, есть также подпространство. Все это примеры подпространств с конечным числом измерений. Могут быть подпространства с бесконечным числом измерений. Подпространство можно рассматривать как самостоятельное гильбертово пространство.

Докажем теперь теорему, имеющую основное значение для всего дальнейшего.

Теорема I. Если L — подпространство, то любой элемент x из H может быть представлен единственным образом в виде

$$x = y + z, \quad (6)$$

где y принадлежит L ($y \in L$) и z — ортогонален ко всем элементам подпространства L ($z \perp L$).

Если $x \in L$, то указанное представление очевидно. Положим, что x не принадлежит L . Пусть d — точная нижняя граница множества положительных чисел $\|x - y\|^2$, когда y пробегает все подпространство L . Существует такая последовательность элементов y_n из L , что

$$\|x - y_n\|^2 = (x - y_n, x - y_n) = d_n \rightarrow d.$$

Пусть u — любой элемент L , тогда элементы $y_n + \varepsilon u$ также принадлежат L и, принимая во внимание, что d есть точная нижняя граница, мы можем написать: $(x - y_n - \varepsilon u, x - y_n - \varepsilon u) \geq d$. Раскрывая скалярное произведение, получим неравенство

$$(u, u) \varepsilon^2 - \varepsilon [(x - y_n, u) + (u, x - y_n)] + (d_n - d) \geq 0.$$

Так как $(u, x - y_n) = \overline{(x - y_n, u)}$, то

$$(u, u) \varepsilon^2 - 2 \operatorname{Re} (x - y_n, u) \varepsilon + (d_n - d) \geq 0.$$

Трехчлен, стоящий слева, для любых вещественных ε неотрицателен, поэтому

$$|\operatorname{Re} (x - y_n, u)| \leq \sqrt{d_n - d} \cdot \|u\|.$$

Это неравенство можно усилить. Пусть φ — аргумент комплексного числа $(u, x - y_n)$, то есть $(u, x - y_n) = |(u, x - y_n)| e^{i\varphi}$. Заменяя в неравенстве элемент u элементом $ue^{-i\varphi}$, также принадлежащим L , и принимая во внимание, что $\|ue^{-i\varphi}\| = \|u\|$, получим

$$(ue^{-i\varphi}, x - y_n) = e^{-i\varphi} (u, x - y_n) = |(u, x - y_n)|,$$

откуда

$$|(u, x - y_n)| \leq \sqrt{d_n - d} \cdot \|u\|. \quad (7)$$

Напомним, что в этом неравенстве x — заданный элемент из H , y_n — последовательность элементов из L такая, что $\|x - y_n\|^2 \rightarrow d$ и u — любой элемент L .

Оценим модуль скалярного произведения $(u, y_n - y_m)$. Представляя разность $y_n - y_m$ в виде $y_n - y_m = (y_n - x) + (x - y_m)$ и пользуясь неравенством (7), получим

$$\begin{aligned} |(u, y_n - y_m)| &\leq |(u, x - y_n)| + |(u, x - y_m)| \leq \\ &\leq (\sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}) \cdot \|u\|. \end{aligned}$$

Полагая в этом неравенстве $u = y_n - y_m$ и сокращая обе части на $\|y_n - y_m\|$, придем к неравенству

$$\|y_n - y_m\| \leq \sqrt{d_n - d} + \sqrt{d_m - d}.$$

При беспредельном возрастании n и m правая его часть стремится к нулю и, следовательно, в силу полноты подпространства L последовательность y_n имеет предел в L $y_n \Rightarrow y, y \in L$.

Переходя к пределу в неравенстве (7), получаем для любого элемента u , принадлежащего L , что

$$(z, u) = 0, \quad z = x - y.$$

Остается доказать единственность полученного представления. Пусть имеются два представления

$$x = y + z = y_1 + z_1,$$

где y и y_1 принадлежат L , а z и z_1 — ортогональны ко всем элементам L . Из равенства $y - y_1 = z_1 - z$ умножением на $y - y_1$ и $z - z_1$ получим: $\|y - y_1\| = 0$ и $\|z - z_1\| = 0$. Теорема доказана.

Элемент y , входящий в формулу (6) и принадлежащий L , называется *проекцией элемента x в подпространство L* .

§ 2. Линейные ограниченные операторы

Оператором в H называют всякий определенный закон, согласно которому любому элементу x из H сопоставляется определенный элемент y из H . Обозначается это следующим образом:

$$y = Ax.$$

Оператор A , переводящий элементы x пространства H в элементы Ax того же пространства, называется *линейным и ограниченным*, если он

а) аддитивен: $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$,

б) однороден: $A(ax) = aAx$,

в) ограничен: существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|Ax\| \leq M\|x\|.$$

Наименьшее из чисел M называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

Всякий линейный ограниченный оператор непрерывен в том смысле, что если последовательность элементов x_n пространства H сходится к элементу x , то и последовательность Ax_n сходится к Ax ; в самом деле

$$\|Ax - Ax_n\| = \|A(x - x_n)\| \leq \|A\| \|x - x_n\| \rightarrow 0.$$

Для линейных ограниченных операторов очевидным образом определяются действия сложения и умножения:

$$(aA)x = aAx, \quad (A+B)x = Ax + Bx, \quad (AB)x = A(Bx).$$

Легко видеть, что при этом

$$\|aA\| = |a| \cdot \|A\|, \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \\ \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|,$$

в частности, для степеней оператора $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2 = A^2A$, ... выполняются неравенства

$$\|A^2\| \leq \|A\|^2, \dots, \|A^n\| \leq \|A\|^n, \dots$$

Приведем примеры линейных ограниченных операторов.

В n -мерном векторном пространстве H_n линейный оператор представляет собою линейное преобразование с помощью некоторой матрицы

$$y = Ax$$

или

$$y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где x_k и y_k — составляющие векторов x и y .

Легко видеть, что такой оператор всегда ограничен. В этом пространстве неравенство Буняковского — Шварца имеет вид

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \sum_{k=1}^n |y_k|^2.$$

Следовательно,

$$(Ax, Ax) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} x_k \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{s=1}^n |x_s|^2 \right] = \\ = \sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{s=1}^n |x_s|^2.$$

Таким образом,

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|^2 \|x\|^2$$

и

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|^2}.$$

В бесконечномерном векторном пространстве l_2 линейные операторы определяются бесконечными матрицами. Однако уже не всякая бесконечная матрица определяет ограниченный оператор. Примером бесконечной матрицы, определяющей ограниченный оператор в l_2 , может служить матрица, для которой сходится двойной ряд $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|^2 < +\infty$. Совершенно аналогично тому, как это делалось для конечномерного пространства, показывается, что

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|^2}.$$

В функциональном пространстве L_2 интеграл

$$Ax = \int_a^b K(s, t) x(t) dt$$

представляет собою линейный оператор. Этот оператор будет, например, ограничен, если существует интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)| ds dt.$$

Неравенство Буняковского — Шварца (1) в L_2 имеет вид

$$\left| \int_a^b x(t) y(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \int_a^b |y(t)|^2 dt.$$

Применяя это неравенство к выражению $\left[\int_a^b K(s, t) x(t) dt \right]^2$,

получим

$$|Ax|^2 \leq \int_a^b |K(s, t)|^2 dt \cdot \int_a^b |x(t)|^2 dt.$$

Интегрируя это неравенство по s от a до b , будем иметь

$$\|Ax\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt \|x\|^2.$$

Таким образом,

$$\|A\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds dt}.$$

Введем понятия сопряженного и обратного операторов.

Пусть A — некоторый линейный ограниченный оператор; рассмотрим скалярное произведение (Ax, y) для любых элементов x и y из гильбертова пространства H . Сопряженный оператор A^* вводится равенством

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Можно показать, что это равенство полностью определяет оператор A^* , причем $(A^*)^* = A$.

Оператор A^* также ограничен и $\|A^*\| = \|A\|$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|A^*x\|^2 &= (A^*x, A^*x) = \\ &= (AA^*x, x) \leq \|AA^*x\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \|A^*x\| \|x\|, \end{aligned}$$

и сокращая на $\|A^*x\|$, получим

$$\|A^*x\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Отсюда $\|A^*\| \leq \|A\|$. В силу того, что $(A^*)^* = A$, мы также можем доказать обратное неравенство: $\|A\| \leq \|A^*\|$, следовательно, $\|A\| = \|A^*\|$.

Ограниченный оператор A называют *самосопряженным*, если $A = A^*$. Таким образом для самосопряженного оператора характерным является равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Если положить в этом равенстве $x = y$ и принять во внимание, что $(Ax, x) = (x, Ax)$, то мы увидим, что в случае

самосопряженного оператора (Ax, x) вещественно для любого элемента x . Справедливо и обратное утверждение.

Важным в теории операторов является понятие обратного оператора. Говорят, что линейный оператор A имеет *ограниченный обратный оператор*, если существует такой ограниченный оператор B , что

$$AB = BA = E,$$

где E — оператор тождественного преобразования, то есть $Ex = x$. Ограниченный обратный оператор может быть только один, так как, если $AC = E$, то, применяя к обеим частям равенства оператор B и пользуясь тем, что $BE = B$, получим $C = B$. Обратный оператор обозначается обычно символом A^{-1} . Таким образом,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Обратные операторы играют основную роль при решении неоднородных уравнений

$$Ax = y,$$

где y — заданный элемент и x — искомый. Применяя к обеим частям равенства обратный оператор, получим

$$x = A^{-1}y.$$

Таким образом, если существует ограниченный обратный оператор, то линейное неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части из H .

Наряду с неоднородными уравнениями в приложениях встречаются и однородные уравнения

$$Au = \lambda u,$$

где u — искомый элемент, λ — численный параметр. Число λ — называется *собственным значением оператора A* , если однородное уравнение имеет решения, отличные от нулевого; эти решения называют *собственными элементами оператора A* , соответствующими указанному собственному значению. Число линейно-независимых собственных элементов, соответствующих собственному значению, называется его *кратностью*. Кратность собственного значения может быть и бесконечной.

Сходимость последовательности ограниченных линейных операторов A_n к ограниченному оператору A может быть определена по-разному. Мы будем пользоваться двумя понятиями сходимости.

Последовательность ограниченных линейных операторов A_n сходится к ограниченному линейному оператору A , если для любого элемента x из H последовательность $A_n x$ сходится к Ax : $A_n x \Rightarrow Ax$. Подобную сходимость иногда называют сильной сходимостью.

Наряду с этим введем понятие *равномерной сходимости*.

Последовательность ограниченных линейных операторов A_n сходится к A равномерно, если $\|A - A_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Эту сходимость иногда называют сходимостью по норме. Из равномерной сходимости следует и простая сходимость:

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \rightarrow 0$$

для любого x из H .

В заключение настоящего параграфа остановимся на одном классе линейных операторов, который мы в дальнейшем будем широко использовать. Пусть L — некоторое подпространство. Согласно теореме 1 любой элемент x из H может быть представлен единственным образом в виде $x = y + z$, $y \in L$ и $z \perp L$. Оператор, преобразующий элемент x в его проекцию y , называется *оператором проектирования в подпространство L* . Обозначают его символом E_L :

$$y = E_L x.$$

Так как элементы y и z ортогональны, то

$$\|x\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2,$$

отсюда

$$\|y\|^2 = \|E_L x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

причем равенство достигается, если $x \in L$, следовательно, $\|E_L\| = 1$.

Очевидно, что если x принадлежит L , то $E_L x = x$. Следовательно, для любого x из H $E_L E_L x = E_L x$ и

$$E_L^2 = E_L.$$

Здесь мы воспользовались следующими соотношениями: так как $E_n z_n$ — проекция z_n в H_n , то $z_n - E_n z_n$ ортогональна к любому элементу из H_n , так что

$$(z_n - E_n z_n, z_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

и, следовательно,

$$(E_n z_n, z_k) = (z_n, z_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Определитель системы уравнений (11) есть определитель Грама элементов $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ и в силу их линейной независимости отличен от нуля. Поэтому система (11) имеет единственное решение.

Пусть теперь λ — собственное значение, а u — собственный элемент оператора A_n ,

$$A_n u = \lambda u. \quad (12)$$

Так как u принадлежит подпространству H_n , то его можно представить в виде

$$u = \xi_0 z_0 + \xi_1 z_1 + \dots + \xi_{n-1} z_{n-1},$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ — некоторые числа. Подставляя это выражение в уравнение (12) и пользуясь формулами (8) и (9), получим

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_0 \xi_{n-1} z_0 + (\xi_0 - \alpha_1 \xi_{n-1}) z_1 + \dots + (\xi_{n-2} - \alpha_{n-1} \xi_{n-1}) z_{n-1} = \\
 & = \lambda (\xi_0 z_0 + \xi_1 z_1 + \dots + \xi_{n-1} z_{n-1}).
 \end{aligned}$$

Так как элементы z_k линейно независимы, то в этом равенстве можно приравнять коэффициенты, что и дает систему уравнений для определения λ и ξ_k :

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_0 \xi_{n-1} &= \lambda \xi_0, \\ \xi_0 - \alpha_1 \xi_{n-1} &= \lambda \xi_1, \\ \xi_1 - \alpha_2 \xi_{n-1} &= \lambda \xi_2, \\ &\vdots \\ \xi_{n-2} - \alpha_{n-1} \xi_{n-1} &= \lambda \xi_{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для того чтобы система имела нетривиальное решение, определитель ее, равный $P_n(\lambda)$, должен равняться нулю и, следовательно, собственные значения оператора A_n есть корни

Так как x принадлежит H_n , то его можно также представить через полином от оператора A_n

$$x = Q_{n-1}(A_n) z_0.$$

Подставляя в уравнение (16), получим

$$[A_n Q_{n-1}(A_n) - F_{n-1}(A_n)] z_0 = 0,$$

но в силу единственности определения полинома $P_n(A_n)$ любой полином n -й степени от A_n , аннулирующий элемент z_0 , может отличаться от $P_n(A_n)$ только на постоянный множитель, поэтому

$$A_n Q_{n-1}(A_n) - F_{n-1}(A_n) = C \cdot P_n(A_n).$$

Приравнявая свободные члены, находим постоянную C

$$C = - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)}.$$

Таким образом,

$$Q_{n-1}(A_n) = A_n^{-1} \left[F_{n-1}(A_n) - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(A_n) \right],$$

и искомое решение уравнения (16) имеет вид

$$x = A_n^{-1} \left[F_{n-1}(A_n) - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(A_n) \right] z_0 \quad (17)$$

или, раскрывая скобки,

$$\begin{aligned} x &= A_n^{-1} \left[\left(b_1 - \frac{b_0}{\alpha_0} \alpha_1 \right) A_n + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(b_{n-1} - \frac{b_0}{\alpha_0} \alpha_{n-1} \right) A_n^{n-1} - \frac{b_0}{\alpha_0} A_n^n \right] z_0 = \\ &= \left(b_1 - \frac{b_0}{\alpha_0} \alpha_1 \right) z_0 + \dots + \left(b_{n-1} - \frac{b_0}{\alpha_0} \alpha_{n-1} \right) z_{n-2} - \frac{b_0}{\alpha_0} z_{n-1}. \end{aligned} \quad (17')$$

Формула (17) (или (17')) определяет обратный оператор. Условие его существования — $P_n(0) = \alpha_0 \neq 0$, то есть нуль не должен быть собственным значением оператора A_n .

Наряду с уравнениями вида (16) встречаются уравнения второго рода

$$x = \mu A_n x + f, \quad (18)$$

где μ — некоторый параметр.

Решение этого уравнения может быть получено совершенно аналогично. Полагая $x = Q_{n-1}(A_n)z_0$ и $f = F_{n-1}(A_n)z_0$, и подставляя в уравнение (18), получим

$$[Q_{n-1}(A_n) - \mu A_n Q_{n-1}(A_n) - F_{n-1}(A_n)]z_0 = 0,$$

откуда

$$(1 - \mu\lambda)Q_{n-1}(\lambda) - F_{n-1}(\lambda) = CP_n(\lambda). \quad (19)$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{\mu}$, находим постоянную C

$$C = - \frac{F_{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)}.$$

Таким образом,

$$Q_{n-1}(A_n) = (E - \mu A_n)^{-1} \left[F_{n-1}(A_n) - \frac{F_{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} P_n(A_n) \right],$$

и решение уравнения (18) имеет вид

$$x = (E - \mu A_n)^{-1} \left[F_{n-1}(A_n) - \frac{F_{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} P_n(A_n) \right] z_0. \quad (20)$$

Это решение можно выразить и явно через исходные элементы $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Полагая

$$Q_{n-1}(\lambda) = a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k,$$

$$F_{n-1}(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k,$$

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k$$

и подставляя в равенство (19), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k - \mu \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k + C \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k.$$

Но

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^{k+1} = \sum_{k=1}^n a_{k-1} \lambda^k,$$

поэтому

$$a_0 - b_0 - C\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - \mu a_{k-1} - b_k - C\alpha_k) \lambda^k - \\ - (\mu a_{n-1} + C) \lambda^n \equiv 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях λ и подставляя выражение постоянной C , получим рекуррентные формулы для определения коэффициентов полинома $Q_{n-1}(\lambda)$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 - \frac{F_{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} \alpha_0, \\ a_k &= \mu a_{k-1} + b_k - \frac{F_{n-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} (21)$$

Коэффициент при λ^n будет равен нулю автоматически в силу выбора постоянной C .

Вычислив a_k по рекуррентным формулам (21), можно выписать и искомое решение уравнения (18)

$$x = Q_{n-1}(A_n) z_0 = a_0 z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_{n-1} z_{n-1}. \quad (20')$$

Это решение существует, если $\frac{1}{\mu}$ не является корнем полинома $P_n(\lambda)$, то есть если $\frac{1}{\mu}$ не совпадает с собственным значением оператора A_n .

§ 4. Аппроксимация линейных ограниченных операторов

Покажем теперь, как с помощью итеративного процесса можно построить последовательность изученных нами операторов A_n , сходящуюся к любому, наперед заданному ограниченному оператору.

Пусть в гильбертовом пространстве H задан линейный ограниченный оператор A . Произвольно выбрав элемент z_0 ,

строим ряд его итераций оператором A

$$z_0, z_1 = Az_0, z_2 = Az_1 = A^2 z_0, \dots, z_n = Az_{n-1} = A^n z_0, \dots$$

Элементы $z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$ пока будем считать линейно-независимыми.

Решение проблемы моментов определяет последовательность операторов A_n , каждый из которых определен в своем подпространстве H_n , образованном из элементов, являющихся линейными комбинациями $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

При увеличении n эти подпространства расширяются и H_{n+1} содержит в себе все элементы H_n .

Формулы (8') принимают вид

$$\left. \begin{aligned} z_k &= A^k z_0 = A_n^k z_0 \quad (k=0, 1, \dots, n-1), \\ E_n z_n &= E_n A^n z_0 = A_n^n z_0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где $E_n A^n z_0$ — проекция элемента $A^n z_0$ в подпространство H_n .

Если ввести E_n — оператор проектирования в подпространство H_n , то легко видеть, что

$$A_n = E_n A E_n. \quad (23)$$

Действительно, возьмем любой элемент x из H_n :

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_k.$$

По определению проекционного оператора $E_n x = x$, поэтому

$$A E_n x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A z_k.$$

Используя формулы (22), получим

$$A E_n x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^{k+1} z_0 = \sum_{k=0}^{n-2} a_k A_n^{k+1} z_0 + a_{n-1} A^n z_0.$$

Проектируя в подпространство H_n , будем иметь

$$\begin{aligned} E_n A E_n x &= \sum_{k=0}^{n-2} a_k A_n^{k+1} z_0 + a_{n-1} E_n A^n z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_n^{k+1} z_0 = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_n z_k = A_n x. \end{aligned}$$

Формула (23) расширяет область определения оператора A_n на все пространство H . Кроме того, из этой формулы вытекает очень важное следствие, что операторы A_n ограничены в совокупности, и

$$\|A_n\| \leq \|A\|. \quad (24)$$

Рассмотрим линеал L_z , состоящий из элементов вида

$$x = Q(A) z_0,$$

где $Q(\lambda)$ — произвольный полином, и, пополнив его предельными элементами, образуем подпространство H_z . Это подпространство приводит оператор A . Действительно, если $x = Q(A) z_0 \in L_z$, то и $Ax = AQ(A) z_0 \in L_z$. Если же x — предельный элемент, то существует такая последовательность $x_n = Q_n(A) z_0 \in L_z$, что

$$\|x - x_n\| \rightarrow 0,$$

тогда

$$\|Ax - Ax_n\| \leq \|A\| \|x - x_n\| \rightarrow 0,$$

и так как $Ax_n \in L_z$, то Ax , являясь пределом элементов из L_z , должен принадлежать подпространству H_z . Таким образом можно рассматривать A как оператор в H_z .

Основой всего метода моментов является следующая

Теорема II. Если A — ограниченный линейный оператор и A_n — последовательность решений проблемы моментов (22), тогда последовательность операторов A_n сильно сходится к A в подпространстве H_z .

Если $x = Q(A) z_0 \in L_z$, то в силу равенств (22) $Ax = A_n x$ при любом n , превосходящем степень полинома $Q(\lambda)$ более чем на две единицы. Если же x предельный элемент и $\{x_m\}$ — последовательность элементов линеала L_z , сходящаяся к нему, то

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\| &\leq \|Ax - Ax_m\| + \|Ax_m - A_n x_m\| + \\ &+ \|A_n x_m - A_n x\| \leq 2\|A\| \|x - x_m\| + \|A_n x_m - Ax_m\|. \end{aligned}$$

Увеличением m первый член суммы, стоящей справа, можно сделать сколь угодно малым, а так как $x_m \in L_z$, то при достаточно большом n второй член просто равен нулю. Таким образом

$$\|Ax - A_n x\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Мы до сих пор предполагали, что элементы последовательности $\{z_k\}$ линейно-независимы. Случай когда между ними встречаются линейно-зависимые сравнительно прост. Допустим для определенности, что z_n линейно зависит от $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, и тем самым $z_n = E_n z_n \in H_n$. Легко видеть, что тогда подпространство H_n совпадает с H_z и приводит

оператор A , то есть, если $x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_k \in H_n$, то и $Ax = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z_{k+1} \in H_n$. Следовательно, в этом случае можно рассматривать A как оператор в H_n , где он совпадает с A_n . Последнее непосредственно следует из равенств (22).

Возможность с помощью операторов A_n аппроксимировать любые ограниченные операторы позволяет использовать их для получения приближенных решений различных линейных задач.

При исследовании этого вопроса мы ограничимся рассмотрением двух важнейших классов операторов: вполне непрерывных и самосопряженных.

Представление операторов A_n в виде (23) указывает, что метод моментов укладывается в общую схему метода Б. Галеркина, как ее в настоящее время понимают.

Абстрактная схема метода Б. Галеркина для операторов, заданных в гильбертовом пространстве H , состоит в следующем: пусть в H имеется система линейно-независимых элементов $\{\varphi_k\}$ такая, что любой элемент x из H однозначным образом представим сходящимся рядом

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где a_k — некоторые коэффициенты, зависящие от x . Вводятся операторы проектирования P_n , определяемые равенством

$$P_n x = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k. \quad (25)$$

При решении различных задач методом Б. Галеркина входящие в уравнения операторы, необязательно линейные, заменяют на приближенные. Если B — оператор в гильбертовом

пространстве H , то B_n — приближенный оператор, равен

$$B_n = P_n B P_n. \quad (26)$$

При такого рода замене оператора уравнения в функциональном пространстве переходят в системы алгебраических уравнений.

Как видно из сравнения формул (23) и (26), метод моментов отличается лишь специальным выбором операторов проектирования E_n .

Первые общие результаты о сходимости приближенных решений, получаемых по методу Галеркина, были получены М. Келдышем [1], работа которого основана на исследовании бесконечных определителей. В дальнейших работах Л. Канторовича [3], С. Михлина [1], Н. Польского [1] и М. Красносельского [2] применялись методы функционального анализа; в этих последних работах, как правило, исследование сводилось к изучению вполне непрерывных операторов как линейных, так и нелинейных. В работах Н. Польского и М. Красносельского даны общие оценки быстроты сходимости приближенных решений, даваемые методом Галеркина.

Так как метод моментов укладывается в общую схему метода Галеркина, то некоторые из теорем относительно сильной сходимости приближенных решений к точным, доказываемые в следующей главе, являются следствием общих теорем о сходимости метода Галеркина.

Успех применения метода Галеркина целиком определяется удачным выбором системы элементов $\{\varphi_k\}$, по которым ведется разложение. В методе моментов предлагается конкретный и достаточно общий выбор элементов $\varphi_k = z_k$, тесно связанный с изучаемой задачей, что позволяет получить, как это будет видно из дальнейшего, быстро сходящиеся последовательности приближенных решений.

Этот выбор элементов, по которым ведется разложение, позволяет применить метод моментов в задачах, где возможность использования общей схемы метода Галеркина является сомнительной. В частности, это относится к задаче о колебаниях систем с конечным числом степеней свободы, исследуемых в гл. V.

Г Л А В А II

УРАВНЕНИЯ С ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

§ 1. Проблема моментов для вполне непрерывных операторов

Оператор A называется *вырожденным*, если он может быть представлен в виде

$$Ax = \sum_{k=1}^n (x, \psi_k) \varphi_k,$$

где n — конечное число, а φ_k и ψ_k — заданные элементы рассматриваемого гильбертова пространства. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если, каково бы ни было положительное число ε , он может быть представлен в виде

$$Ax = A'_\varepsilon x + A''_\varepsilon x,$$

где A'_ε — вырожденный оператор, а $\|A''_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Вполне непрерывный оператор ограничен. Действительно,

пусть $A'_\varepsilon x = \sum_{k=1}^n (x, \psi_k) \varphi_k$, тогда

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\leq \sum_{k=1}^n |(x, \psi_k)| \cdot \|\varphi_k\| + \varepsilon \|x\| \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \|\psi_k\| \cdot \|\varphi_k\| + \varepsilon \right) \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|A\| \leq \sum_{k=1}^n \|\psi_k\| \cdot \|\varphi_k\| + \varepsilon.$$

Теорема III. Для того чтобы оператор A был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы из всякой бесконечной последовательности элементов, все нормы которых не превосходят некоторого числа, можно было выделить такую подпоследовательность x_n , чтобы последовательность Ax_n сходилась к некоторому пределу.

Вернемся теперь к проблеме моментов.

Если исходный оператор A вполне непрерывен, то теорему II можно усилить, а именно имеет место следующая

Теорема IV. Если A — вполне непрерывный оператор, то последовательность операторов A_n — решений проблемы моментов (22) гл. I, равномерно (по норме) сходится к A в подпространстве H_z :

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть E_n — оператор проектирования, отображающий H_z на H_n . Отметим некоторые его свойства, которыми мы воспользуемся:

$$E_n = E_n^*, \quad \|E_n\| = 1, \quad \|E - E_n\| = 1, \quad E_n \rightarrow E.$$

Последнее свойство непосредственно вытекает из полноты последовательности $A^n z_0$ в H_z . Действительно, по определению подпространства H_z для любого $x \in H_z$ найдется такая последовательность элементов x_n вида $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k z_0$, что $\|x - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, по известному свойству проекции имеем:

$$\|x - E_n x\| \leq \|x - x_n\| \rightarrow 0,$$

откуда в силу произвольности выбора x и следует, что

$$E_n \rightarrow E \quad \text{в } H_z.$$

Доказательство теоремы будем вести от противного. Если бы теорема была неверна, то есть $\|A - A_n\|$ не стремилась бы к нулю при $n \rightarrow \infty$, то существовала бы такая последовательность нормированных элементов $f_n \in H_z$ ($\|f_n\| = 1$), что при сколь угодно большом n

$$\|(A - A_n)f_n\| \geq q,$$

где q — положительное число, не зависящее от n .

Так как оператор A вполне непрерывен, то по теореме III из последовательности $\{Af_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{Af_{n_j}\}$. Кроме того, по той же причине из последовательности $\{A(E - E_n)f_{n_j}\}$ можно опять выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{f_n\}$ как раз является подпоследовательностью, которая переводится указанными операторами в сходящиеся последовательности, и пусть

$$g = \lim Af_n,$$

$$h = \lim A(E - E_n)f_n.$$

Исходя из равенства

$$A - A_n = A - E_n A E_n = (E - E_n)A + E_n A (E - E_n),$$

получаем

$$\begin{aligned} \|(E - E_n)Af_n\| &\leq \|(E - E_n)(Af_n - g)\| + \|(E - E_n)g\| \leq \\ &\leq \|Af_n - g\| + \|g - E_n g\| \rightarrow 0, \\ \|E_n A(E - E_n)f_n\| &\leq \|A(E - E_n)f_n\| \rightarrow h, \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} \|h\|^2 = \lim (A(E - E_n)f_n, h) &= \lim (f_n, (E - E_n)A^*h) \leq \\ &\leq \lim \|(E - E_n)A^*h\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|(A - A_n)f_n\| \rightarrow 0,$$

что противоречит нашему допущению. Теорема доказана.

§ 2. Неоднородные уравнения, содержащие вполне непрерывные операторы

В этом параграфе мы покажем, как проблема моментов может быть использована для фактического вычисления решений линейных неоднородных уравнений, содержащих вполне непрерывные операторы.

Рассмотрим уравнение

$$x = \mu Ax + f, \quad (1)$$

где x — искомый, а f — данный элемент некоторого гильбертова пространства H , A — вполне непрерывный оператор в этом пространстве и μ — численный параметр.

Для уравнения (1), содержащего вполне непрерывный оператор, сохраняется так называемая альтернатива Фредгольма: либо неоднородное уравнение разрешимо, и притом единственным образом при любом свободном члене f и тогда соответствующее однородное уравнение ($f=0$) имеет только тривиальное решение $x=0$, либо неоднородное уравнение разрешимо не при любом свободном члене, и тогда соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения. Первая часть альтернативы имеет место если μ — правильное, вторая, если μ — характеристическое. При правильном значении μ существует ограниченный обратный оператор $(E - \mu A)^{-1}$.

При достаточно малых значениях параметра μ уравнение (1) всегда разрешимо, а именно имеет место следующая

Теорема V (Банах). Если $|\mu| < \frac{1}{\|A\|}$, то уравнение

(1) разрешимо при любой правой части.

Доказательство довольно просто. Рассмотрим ряд

$$f + \mu A f + \mu^2 A^2 f + \dots$$

и обозначим через $x^{(n)}$ сумму n первых членов ряда. Тогда в силу того, что $|\mu| \cdot \|A\| < 1$

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^{(m)}\| &= \|\mu^m A^m f + \mu^{m+1} A^{m+1} f + \dots + \mu^n A^n f\| \leq \\ &\leq (|\mu|^m \|A\|^m + |\mu|^{m+1} \|A\|^{m+1} + \dots + |\mu|^n \|A\|^n) \cdot \|f\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при n и $m \rightarrow \infty$. Так как пространство H полное, то последовательность $x^{(n)}$ имеет предел x из H . Легко видеть, что x является решением уравнения (1). Действительно, $\mu A x = \mu A f + \mu^2 A^2 f + \dots = x - f$, и

$$x = \mu A x + f.$$

Отметим, что эта теорема справедлива для любых ограниченных операторов.

Чтобы решить уравнение (1) для любых правильных значений μ , воспользуемся методом моментов. Полагая $z_0 = f$, строим ряд итераций

$$z_0 = f, \quad z_1 = A f, \quad \dots, \quad z_n = A^n f, \quad \dots$$

Уравнение (1) заменяем «приближенным» уравнением

$$x_n = \mu A_n x_n + f, \quad (2)$$

где оператор A_n — решение проблемы моментов (22) гл. I.

Решение этого уравнения было получено нами в гл. I и, если воспользоваться тем, что $f = z_0$, имеет вид

$$x_n = a_0 f + a_1 A f + \dots + a_{n-1} A^{n-1} f,$$

где коэффициенты a_k вычисляются по рекуррентным формулам

$$a_0 = 1 - \frac{\alpha_0}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)},$$

$$a_k = \mu a_{k-1} - \frac{\alpha_k}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Числа α_k — коэффициенты полинома $P_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$ определяются из системы (11) гл. I. Конечно, с изменением n меняются как a_k , так и α_k .

Относительно приближенного решения x_n имеет место следующая

Теорема VI. *Если решение уравнения (1) существует при любом f из H , то есть μ — правильное значение уравнения, и A — вполне непрерывный оператор, то при достаточно большом n уравнение (2) разрешимо и последовательность x_n сходится (сильно) к решению уравнения (1).*

Для доказательства воспользуемся методом, предложенным Шмидтом. Уравнение (2) запишем в виде

$$x_n - \mu A x_n + \mu (A - A_n) x_n = f.$$

По условиям теоремы существует ограниченный оператор $(E - \mu A)^{-1}$; применив его к обеим частям равенства, получим

$$x_n - \mu (E - \mu A)^{-1} (A_n - A) x_n = (E - \mu A)^{-1} f = x. \quad (3)$$

По теореме Банаха решение этого уравнения существует, если

$$\|\mu (E - \mu A)^{-1} (A_n - A)\| < 1, \quad (4)$$

но

$$\|\mu(E - \mu A)^{-1}(A_n - A)\| \leq |\mu| \|(E - \mu A)^{-1}\| \|A - A_n\|.$$

Последний множитель справа стремится к нулю вследствие равномерной сходимости последовательности операторов A_n к A , поэтому при достаточно большом n условие (4) всегда будет выполнено. Существование приближенного решения x_n таким образом доказано. Чтобы установить справедливость второй части теоремы, воспользуемся следующим выражением для обратного оператора:

$$(E - \mu A_n)^{-1} = (E - \mu(E - \mu A)^{-1}(A_n - A))^{-1}(E - \mu A)^{-1}.$$

Разлагая в степенной ряд, получим

$$(E - \mu(E - \mu A)^{-1}(A_n - A))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k ((E - \mu A)^{-1}(A_n - A))^k.$$

Этот ряд сходится вследствие того, что при достаточно большом n

$$\|\mu(E - \mu A)^{-1}(A_n - A)\| < 1$$

Последовательность операторов $(E - \mu A_n)^{-1}$ ограничена в совокупности для достаточно больших n , так как

$$\|(E - \mu A_n)^{-1}\| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \|(E - \mu A)^{-1}\| \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^k \|(E - \mu A)^{-1}\|^k \|A - A_n\|^k = \\ &= \frac{\|(E - \mu A)^{-1}\|}{1 - |\mu| \|(E - \mu A)^{-1}\| \|A - A_n\|} \end{aligned}$$

и $\|A - A_n\| \rightarrow 0$.

Покажем теперь, что последовательность операторов $(E - \mu A_n)^{-1}$ равномерно сходится к $(E - \mu A)^{-1}$ в подпространстве H_z . Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} (E - \mu A_n)^{-1} - (E - \mu A)^{-1} &= \\ &= [(E - \mu(E - \mu A)^{-1}(A_n - A))^{-1} - E](E - \mu A)^{-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k [(E - \mu A)^{-1}(A_n - A)]^k (E - \mu A)^{-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \| (E - \mu A_n)^{-1} - (E - \mu A)^{-1} \| \leq \\ & \leq \| (E - \mu A)^{-1} \| \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|^k \| (E - \mu A)^{-1} \|^k \| A_n - A \|^k = \\ & = \frac{|\mu| \| (E - \mu A)^{-1} \|^2}{1 - |\mu| \| (E - \mu A)^{-1} \| \| A - A_n \|} \| A - A_n \| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $\| A - A_n \| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в H_z . Очевидно, что f принадлежит H_z , поэтому последовательность $x_n = (E - \mu A_n)^{-1} f$ сходится (сильно) к $x = (E - \mu A)^{-1} f$. Теорема доказана.

Из формулы (20) гл. I можно получить и оценку достигнутой точности. В нашем случае $F_{n-1}(\lambda) \equiv 1$ и

$$x_n = (E - \mu A_n)^{-1} \left[E - \frac{1}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} P_n(A_n) \right] f. \quad (5)$$

С другой стороны, $x_n = Q_{n-1}(A_n) f$ — полином $n-1$ -й степени от A_n . По самому построению оператора A_n $A_n^k f = A_n^k f$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Поэтому $x_n = Q_{n-1}(A_n) f = Q_{n-1}(A) f$

$$x_n = (E - \mu A)^{-1} \left[E - \frac{1}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)} P_n(A) \right] f,$$

и

$$x - x_n = (E - \mu A)^{-1} \frac{P_n(A) f}{P_n\left(\frac{1}{\mu}\right)}.$$

Таким образом, для погрешности имеет место следующая оценка:

$$\| x - x_n \| \leq \| (E - \mu A)^{-1} \| \frac{\| P_n(A) f \|}{\left| P_n\left(\frac{1}{\mu}\right) \right|}. \quad (6)$$

Отметим, что при решении уравнения (1) методом моментов совсем не обязательно брать f в качестве исходного элемента, полагая $z_0 = f$. Можно в качестве z_0 брать любой элемент, подчиненный лишь условию, что f принадлежит подпространству H_z .

Заменяя уравнение (1) «приближенным» уравнением

$$x_n = \mu A_n x_n + f_n,$$

где f_n — проекция f в H_n , можно по формулам гл. I найти приближенное решение x_n .

Может случиться, что фактическое вычисление приближенных решений x_n при больших значениях n окажется затруднительным. Это связано главным образом с тем, что при определении коэффициентов полинома $P_n(\lambda)$ приходится решать систему линейных уравнений (11) гл. I. С увеличением n растет и число этих уравнений, кроме того, определитель этой системы, в особенности если мы имеем дело с вполне непрерывным оператором, довольно быстро убывает, что приводит к прогрессивной потере точности вычислений. Поэтому может оказаться более рациональным использовать метод моментов не для фактического вычисления приближенного решения, а для ускорения сходимости итеративного процесса.

В классическом процессе Лиувилля—Неймана последовательные приближения строятся по формуле

$$x_{n+1} = \mu A x_n + f, \quad x_0 = f,$$

или

$$x_n = f + \mu A f + \dots + \mu^n A^n f.$$

Последовательные приближения сходятся к решению лишь в круге

$$|\mu| < \frac{1}{\|A\|},$$

при этом сходимость процесса будет медленной, если $|\mu|$ близок к $\frac{1}{\|A\|}$.

С помощью метода моментов этот процесс можно преобразовать так, что новый процесс будет сходиться при любом правильном значении μ , причем скорость сходимости будет находиться под нашим контролем.

По ряду итераций

$$z_0 = f, \quad z_1 = A f, \quad \dots, \quad z_n = A^n f$$

при фиксированном n строим оператор A_n .

Уравнение (1) запишем в виде

$$x - \mu A_n x + \mu (A_n - A) x = f.$$

Если n достаточно велико, то существует оператор $(E - \mu A_n)^{-1}$, применяя который к обеим частям равенства, получим

$$x = \mu (E - \mu A_n)^{-1} (A - A_n) x + (E - \mu A_n)^{-1} f. \quad (1')$$

Это уравнение будем решать, используя процесс Лиувилля—Неймана. Полагая $x^{(0)} = (E - \mu A_n)^{-1} f$, последовательные приближения будем находить по формуле

$$x^{(k+1)} = \mu (E - \mu A_n)^{-1} (A - A_n) x^{(k)} + (E - \mu A_n)^{-1} f. \quad (7)$$

Для фактического вычисления $x^{(k+1)}$ по $x^{(k)}$ нужно решить уравнение

$$x^{(k+1)} - \mu A_n x^{(k+1)} = \mu (A - A_n) x^{(k)} + f. \quad (8)$$

Применяя к обеим частям равенства оператор проектирования в подпространство H_n и пользуясь тем, что $E_n f = f$ и $E_n A_n = E_n^2 A E_n = A_n = E_n A E_n^2 = A_n E_n^*$), будем иметь

$$E_n x^{(k+1)} - \mu A_n E_n x^{(k+1)} = \mu (E_n A - A_n) x^{(k)} + f. \quad (9)$$

Решение этого уравнения, которое мы обозначим через $x_n^{(k+1)} = E_n x^{(k+1)}$, можно найти по формулам (20), (20'), (21) гл. I. Вычитая почленно (9) из (8), получим

$$x^{(k+1)} - x_n^{(k+1)} = \mu (A - E_n A) x^{(k)},$$

откуда

$$x^{(k+1)} = x_n^{(k+1)} + \mu (A - E_n A) x^{(k)}. \quad (10)$$

Допустим, что $x^{(k)}$ имеет вид

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^{n+k-1} d_j^{(k)} z_j,$$

и вычислим $(A - A_n) x^{(k)}$.

$$\begin{aligned} (A - A_n) x^{(k)} &= (A - E_n A E_n) x^{(k)} = \sum_{j=0}^{n+k-1} d_j^{(k)} z_{j+1} - \\ &- \sum_{j=0}^{n-2} d_j^{(k)} z_{j+1} - \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} E_n A E_n z_j = \\ &= \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (z_{j+1} - E_n A E_n z_j). \end{aligned}$$

*) Напомним, что по определению проекционного оператора $E_n^2 = E_n$.

Пусть теперь $E_n z_j = \sum_{s=0}^{n-1} l_s^{(j)} z_s$, где $l_s^{(j)}$ вычисляются из системы уравнений

$$(z_p, z_0) l_0^{(j)} + (z_p, z_1) l_1^{(j)} + \dots + (z_p, z_{n-1}) l_{n-1}^{(j)} = (z_p, z_j) \\ (p = 0, 1, \dots, n-1).$$

Тогда

$$AE_n z_j = \sum_{s=0}^{n-1} l_s^{(j)} z_{s+1},$$

и

$$E_n AE_n z_j = \sum_{s=0}^{n-2} l_s^{(j)} z_{s+1} + l_{n-1}^{(j)} E_n z_n = \sum_{s=1}^{n-1} l_{s-1}^{(j)} z_s - l_{n-1}^{(j)} \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s z_s = \\ = \sum_{s=0}^{n-1} (l_{s-1}^{(j)} - l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) z_s \quad (l_{-1}^{(j)} = 0). \quad (11)$$

Таким образом,

$$(A - A_n) x^{(k)} = \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} \left(z_{j+1} - \sum_{s=0}^{n-1} (l_{s-1}^{(j)} - l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) z_s \right) = \\ = \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (z_{j+1} - E_n z_{j+1}) + \\ + \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} \left[\sum_{s=0}^{n-1} (l_s^{(j+1)} - l_{s-1}^{(j)} + l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) z_s \right].$$

Применяя к обеим частям равенства оператор E_n , получим

$$(E_n A - A_n) x^{(k)} = \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} \left[\sum_{s=0}^{n-1} (l_s^{(j+1)} - l_{s-1}^{(j)} + l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) z_s \right] = \\ = \sum_{s=0}^{n-1} z_s \left[\sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (l_s^{(j+1)} - l_{s-1}^{(j)} + l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) \right]$$

и, вычитая из предыдущего,

$$(A - E_n A) x^{(k)} = \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (z_{j+1} - E_n z_{j+1}) = \\ = \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} \left(z_{j+1} - \sum_{s=0}^{n-1} l_s^{(j+1)} z_s \right) = \sum_{s=0}^{n+k} h_s^{(k+1)} z_s,$$

где

$$h_s^{(k+1)} = - \sum_{j=n-1}^{n+k-1} l_s^{(j+1)} d_j^{(k)} \quad (s=0, 1, \dots, n-1),$$

$$h_s^{(k+1)} = d_{s-1}^{(k)} \quad (s=n, \dots, n+k).$$

Остается еще решить уравнение

$$x_n^{(k+1)} - \mu A_n x_n^{(k+1)} = \mu (E_n A - A_n) x^{(k)} + f. \quad (12)$$

Полагая

$$x_n^{(k+1)} = x_0 + \mu \sum_{s=0}^{n-1} a_s^{(k+1)} z_s,$$

находим коэффициенты $a_s^{(k+1)}$ по формулам (21) гл. I:

$$\begin{aligned} a_0^{(k+1)} &= \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (l_0^{(j+1)} + l_{n-1}^{(j)} \alpha_0) - \frac{F_{n-1}^{(k+1)} \left(\frac{1}{\mu} \right)}{P_n \left(\frac{1}{\mu} \right)} \alpha_0, \\ a_s^{(k+1)} &= \sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (l_s^{(j+1)} - l_{s-1}^{(j)} + l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) + \\ &+ \mu a_{s-1}^{(k+1)} - \frac{F_{n-1}^{(k+1)} \left(\frac{1}{\mu} \right)}{P_n \left(\frac{1}{\mu} \right)} \alpha_s \quad (s=1, 2, \dots, n-1), \end{aligned}$$

где

$$F_{n-1}^{(k+1)}(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} \left[\sum_{j=n-1}^{n+k-1} d_j^{(k)} (l_s^{(j+1)} - l_{s-1}^{(j)} + l_{n-1}^{(j)} \alpha_s) \right] \lambda^s.$$

Таким образом, из (10) окончательно имеем

$$x^{(k+1)} = \sum_{s=0}^{n+k} d_s^{(k+1)} z_s,$$

где

$$\begin{aligned} d_s^{(k+1)} &= \mu h_s^{(k+1)} + d_s^{(0)} + \mu a_s^{(k+1)} \quad (s=0, 1, \dots, n-1), \\ d_s^{(k+1)} &= \mu h_s^{(k+1)} \quad (s=n, \dots, n+k). \end{aligned}$$

Особенно простой вид имеет первое приближение. Полагая $k=0$ и пользуясь тем, что

$$l_s^{(n)} = -\alpha_s, \quad l_s^{(j)} = \begin{cases} 0 & j \neq s \\ 1 & j = s \end{cases} \quad (j < n),$$

получим

$$h_s^{(1)} = -l_s^{(n)} d_{n-1}^{(0)} = \alpha_s d_{n-1}^{(0)} \quad (s = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$h_n^{(1)} = d_{n-1}^{(0)}.$$

Кроме того, так как

$$l_s^{(n)} - l_{s-1}^{(n-1)} + l_{n-1}^{(n-1)} \alpha_s = -\alpha_s + \alpha_s = 0,$$

то $F_{n-1}^{(1)}(\lambda) \equiv 0$ и, следовательно, $x_n^{(1)} = x^{(0)}$, поэтому

$$x^{(1)} = \sum_{s=0}^n d_s^{(1)} z_s,$$

где

$$d_s^{(1)} = \mu \alpha_s d_{n-1}^{(0)} + d_s^{(0)},$$

$$d_n^{(1)} = \mu d_{n-1}^{(0)}.$$

Перейдем к исследованию сходимости процесса. С этой целью вернемся к основной формуле

$$x^{(k+1)} = \mu (E - \mu A_n)^{-1} (A - A_n) x^{(k)} + (E - \mu A_n)^{-1} f. \quad (7)$$

Запишем для краткости формулу (7) в виде

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + x^{(0)}, \quad (7')$$

где $x^{(0)} = (E - \mu A_n)^{-1} f$, $B = \mu (E - \mu A_n)^{-1} (A - A_n)$. Так как операторы $(E - \mu A_n)^{-1}$ ограничены в совокупности для достаточно больших n и $\|A - A_n\| \rightarrow 0$, то по любому сколь угодно малому числу $q > 0$ найдется такое n , что

$$\|B\| \leq |\mu| \cdot \|(E - \mu A_n)^{-1}\| \cdot \|A - A_n\| < q.$$

Выбрав таким образом n , зафиксируем его.

Из формулы (7') следует, что

$$x^{(k)} = \sum_{j=0}^k B^j x^{(0)}.$$

Если обозначить через x_* искомое решение уравнения (1'), то из теоремы Банаха получим

$$x_* = \sum_{j=0}^{\infty} B^j x^{(0)}.$$

Вычитая почленно, будем иметь

$$\|x_* - x^{(k)}\| = \left\| B^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} B^j x^{(0)} \right\| \leq \|B\|^{k+1} \cdot \|x_*\|,$$

откуда

$$\|x_* - x^{(k)}\| \leq q^{k+1} \cdot \|x_*\|. \quad (13)$$

Таким образом, процесс сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем q , который увеличением n может быть сделан сколь угодно малым.

Так как элементы $x^{(k)}$ имеют вид полинома от A :

$$x^{(k)} = G_{n+k-1}(A)f,$$

то попутно нами доказана следующая

Лемма. Если x_ — решение уравнения*

$$x = \mu Ax + f, \quad (1)$$

и μ — правильное значение, а A — вполне непрерывный оператор, то по сколь угодно малому числу $q > 0$ найдется такой полином $G_{m-1}(\lambda)$ и такое число C , не зависящее от m , что имеет место оценка

$$\|x_* - G_{m-1}(A)f\| \leq Cq^m.$$

Действительно, полагая $G_{m-1}(A)f = x^{(m-n)}$, из неравенства (13) получим

$$\|x_* - G_{m-1}(A)f\| = \|x_* - x^{(m-n)}\| \leq q^{m-n+1} \cdot \|x_*\| = Cq^m,$$

где $C = \|x_*\| q^{1-n}$ не зависит от m .

С помощью этой леммы можно доказать теорему, дающую представление о скорости сходимости приближенных решений, даваемых методом моментов.

Теорема VII. *Если μ — правильное значение уравнения*

$$x = \mu Ax + f \quad (1)$$

и A — вполне непрерывный оператор, то последовательность x_m решений уравнений

$$x_m = \mu A_m x_m + f$$

сходится к x_* — решению уравнения (1), быстрее геометрической прогрессии с любым сколь угодно малым знаменателем $q > 0$.

Для доказательства обозначим через y_m полином $G_{m-1}(A)f$, фигурирующий в лемме: $y_m = G_{m-1}(A)f$. Тогда

$$y_m - \mu A_m y_m = E_m y_m - \mu E_m A E_m y_m = E_m (y_m - \mu A y_m),$$

где мы воспользовались принадлежностью y_m к пространству H_m .

Далее,

$$x_m - \mu A_m x_m = f = x_* - \mu A x_* = E_m (x_* - \mu A x_*).$$

Вычитая одно из другого, получим

$$x_m - y_m - \mu A_m (x_m - y_m) = E_m [x_* - y_m - \mu A (x_* - y_m)],$$

откуда

$$x_m - y_m = (E - \mu A_m)^{-1} E_m [x_* - y_m - \mu A (x_* - y_m)],$$

и

$$\begin{aligned} \|x_m - y_m\| &\leq \| (E - \mu A_m)^{-1} \| \|E - \mu A\| \|x_* - y_m\| \leq \\ &\leq \| (E - \mu A_m)^{-1} \| \|E - \mu A\| C q^m. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством треугольника, будем иметь

$$\begin{aligned} \|x_* - x_m\| &\leq \|x_* - y_m\| + \|y_m - x_m\| \leq \\ &\leq C [1 + \| (E - \mu A_m)^{-1} \| \|E - \mu A\|] q^m. \end{aligned}$$

Так как операторы $(E - \mu A_m)^{-1}$ ограничены в совокупности для достаточно больших m , то найдется такая постоянная D , не зависящая от m , что

$$C (1 + \| (E - \mu A_m)^{-1} \| \cdot \|E - \mu A\|) \leq D,$$

откуда

$$\|x_* - x_m\| \leq D \cdot q^m,$$

где q — произвольное сколь угодно малое положительное число. Теорема доказана,

§ 3. Однородные уравнения. Определение характеристических чисел

Перейдем к решению однородных уравнений с вполне непрерывными операторами. Имеет место следующая

Теорема VIII. Если оператор A вполне непрерывен и μ — его характеристическое число, так что уравнение

$$u - \mu Au = 0 \quad (14)$$

имеет в пространстве H_z нетривиальное решение, то такое решение (с точностью до множителя) единственно, то есть каждому характеристическому числу соответствует лишь один собственный элемент из H_z . При возрастании n одно из решений уравнения

$$u_n - \mu_n A_n u_n = 0 \quad (15)$$

стремится к решению уравнения (14) быстрее геометрической прогрессии с любым сколь угодно малым знаменателем $q > 0$.

Перепишем уравнение (14) в виде

$$u - \mu Au = u - \mu (A - A_n) u - \mu A_n u = 0. \quad (15')$$

По теореме Банаха все значения μ , лежащие в круге

$$|\mu| < \frac{1}{\|A - A_n\|}, \quad (16)$$

для оператора $E - \mu(A - A_n)$ являются правильными или, иными словами, существует обратный оператор $(E - \mu(A - A_n))^{-1}$. Выполнение условия (16) всегда можно обеспечить, так как при возрастании n $\|A - A_n\| \rightarrow 0$.

Уравнение (15) можно преобразовать к виду

$$u - \mu Au = (E - \mu(A - A_n)) [E - \mu(E - \mu(A - A_n))^{-1} A_n] u = 0.$$

Отсюда, применяя к обеим частям равенства оператор $(E - \mu(A - A_n))^{-1}$, получим

$$u = \mu (E - \mu(A - A_n))^{-1} A_n u. \quad (17)$$

Так как $A_n u \in H_n$, то $A_n u$ можно представить в виде

$$A_n u = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{\mu} z_k,$$

где b_k — некоторые коэффициенты. Введя обозначения

$$\xi_k = (E - \mu(A - A_n))^{-1} z_k, \quad (18)$$

из уравнения (17) получим выражение для собственного элемента u :

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \xi_k. \quad (19)$$

Элементы ξ_k линейно-независимы. Действительно, если допустить обратное, то есть что существуют числа C_k , не все равные нулю и

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k \xi_k = 0,$$

то

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k \xi_k = (E - \mu(A - A_n))^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} C_k z_k = 0.$$

Отсюда следует равенство нулю последней суммы, что невозможно в силу линейной независимости элементов z_k .

Из уравнений для определения ξ_k

$$\xi_k - \mu(A - A_n) \xi_k = z_k$$

в силу формул (22) гл. I следует, что

$$\xi_k = z_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-2).$$

Таким образом,

$$A_n u = \sum_{k=0}^{n-2} b_k z_{k+1} + b_{n-1} A_n \xi_{n-1},$$

$$(E - \mu(A - A_n))^{-1} A_n u =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} b_k \xi_{k+1} + b_{n-1} (E - \mu(A - A_n))^{-1} A_n \xi_{n-1}. \quad (20)$$

Так как $A_n \xi_{n-1}$ принадлежит H_n , то найдутся такие числа $\alpha_s(\mu)$, что

$$A_n \xi_{n-1} = - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s(\mu) z_s$$

и

$$(E - \mu(A - A_n))^{-1} A_n \xi_{n-1} = - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s(\mu) \xi_s. \quad (21)$$

Подставляя выражения (19), (20) и (21) в уравнение (17), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1} [b_k - \mu b_{k-1} + \mu \alpha_k(\mu) b_{n-1}] \xi_k = 0, \quad b_{-1} = 0,$$

откуда, вследствие линейной независимости ξ_k , следует равенство нулю коэффициентов

$$b_k - \mu b_{k-1} + \mu \alpha_k(\mu) b_{n-1} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (22)$$

Приравнявая нулю определитель этой системы линейных однородных уравнений, получим уравнение для определения характеристических чисел μ :

$$\Delta(\mu) = \frac{1}{\mu^n} + \frac{a_{n-1}(\mu)}{\mu^{n-1}} + \dots + \frac{a_1(\mu)}{\mu} + a_0(\mu) = 0. \quad (23)$$

Найдя характеристическое число μ , собственный элемент можно получить по формуле (19), где коэффициенты b_k вычисляются по рекуррентным формулам

$$b_k = \mu [b_{k-1} - \alpha_k(\mu)] \quad (k = 0, 1, \dots, n-2), \quad b_{n-1} = 1. \quad (22')$$

Так как коэффициенты b_k находятся единственным образом, то каждому характеристическому числу соответствует лишь один собственный элемент, определенный, естественно, с точностью до скалярного множителя.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Уравнение

$$u_m - \mu A_m u_m = 0$$

для достаточно больших m ($m > n$) совершенно аналогично тому, как это делалось выше, может быть преобразовано к виду

$$u_m = \mu (E - \mu(A_m - A_n))^{-1} A_n u. \quad (17')$$

Введя $\xi_k^{(m)} = (E - \mu(A_m - A_n))^{-1} z_k$, будем искать u_m в виде

$$u_m = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(m)} \xi_k^{(m)}, \quad \xi_k^{(m)} = z_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-2).$$

Повторяя вычисления, сделанные при определении характеристических чисел и собственных элементов оператора A , придем к системе уравнений, аналогичной (22)

$$b_k^{(m)} - \mu b_{k-1}^{(m)} + \mu \alpha_k^{(m)}(\mu) b_{n-1}^{(m)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (22'')$$

где $\alpha_k^{(m)}(\mu)$ определяются равенством

$$A_n \xi_{n-1}^{(m)} = - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s^{(m)}(\mu) z_s.$$

Так как ξ_{n-1} и $\xi_{n-1}^{(m)}$ есть решения уравнений

$$\xi_{n-1} - \mu (A - A_n) \xi_{n-1} = z_{n-1},$$

$$\xi_{n-1}^{(m)} - \mu (A_m - A_n) \xi_{n-1}^{(m)} = z_{n-1}$$

и последовательность операторов A_m равномерно сходится к A , то согласно лемме (§ 2) найдется такой полином $\tilde{Q}_s(A - A_n) z_{n-1}$, что

$$\|\xi_{n-1} - \tilde{Q}_s(A - A_n) z_{n-1}\| \leq Cq^s,$$

где q — любое положительное число. Но $\tilde{Q}_s(A - A_n) z_{n-1} = Q_{s+n-1}(A) z_0$, так что при $m = n + s$

$$\|\xi_{n-1} - Q_{m-1}(A) z_0\| \leq Cq^{m-n} = C_1 q^m.$$

Пусть $y_{n-1}^{(m)} = Q_{m-1}(A) z_0$, тогда

$$y_{n-1}^{(m)} - \mu (A_m - A_n) y_{n-1}^{(m)} = E_m [y_{n-1}^{(m)} - \mu (A - A_n) y_{n-1}^{(m)}]$$

и

$$\xi_{n-1}^{(m)} - \mu (A_m - A_n) \xi_{n-1}^{(m)} = z_{n-1} = E_n [\xi_{n-1} - \mu (A - A_n) \xi_{n-1}].$$

Вычитая почленно, получим

$$\begin{aligned} \xi_{n-1}^{(m)} - y_{n-1}^{(m)} - \mu (A_m - A_n) (\xi_{n-1}^{(m)} - y_{n-1}^{(m)}) &= \\ &= E_n [\xi_{n-1} - y_{n-1}^{(m)} - \mu (A - A_n) \cdot (\xi_{n-1} - y_{n-1}^{(m)})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\xi_{n-1}^{(m)} - y_{n-1}^{(m)}\| &\leq \| (E - \mu (A_m - A_n))^{-1} \| \times \\ &\times \| E - \mu (A - A_n) \| \cdot \|\xi_{n-1} - y_{n-1}^{(m)}\|. \end{aligned}$$

Таким образом, найдется постоянная C_2 , что

$$\|\xi_{n-1}^{(m)} - y_{n-1}^{(m)}\| \leq C_2 q^m.$$

Используя неравенство треугольника, получим

$$\|\xi_{n-1} - \xi_{n-1}^{(m)}\| \leq C_3 q^m.$$

Из определения функций $\alpha_s(\mu)$ и $\alpha_s^{(m)}(\mu)$ следует, что для них имеет место такого же рода оценка

$$|\alpha_s(\mu) - \alpha_s^{(m)}(\mu)| \leq C^{(s)} \cdot q^m,$$

где постоянные $C^{(s)}$ не зависят от m .

Если теперь обозначить через $\Delta_m(\mu)$ левую часть характеристического уравнения для оператора A_m :

$$\Delta_m(\mu) = \frac{1}{\mu^n} + \frac{\alpha_{n-1}^{(m)}(\mu)}{\mu^{n-1}} + \dots + \alpha_0^{(m)}(\mu) = 0,$$

то из оценки для $\alpha_s(\mu)$ следует, что

$$|\Delta(\mu) - \Delta_m(\mu)| \leq C' q^m.$$

Пусть теперь μ_0 — характеристическое число (корень уравнения $\Delta(\mu) = 0$ кратности ρ), удовлетворяющее условию (16). Тогда при достаточно малом $r = |\mu - \mu_0|$

$$|\Delta(\mu)| \geq C'' r^\rho.$$

Далее, при $r = \left(\frac{C'}{C''}\right)^{1/\rho} (\bar{V}q)^m$ имеем

$$|\Delta(\mu) - \Delta_m(\mu)| \leq C'' r^\rho \leq |\Delta(\mu)|,$$

поэтому по теореме Руше $\Delta_m(\mu) = \Delta(\mu) + \Delta_m(\mu) - \Delta(\mu)$ имеет в круге $|\mu - \mu_0| \leq r$ ровно ρ корней $\mu_m^{(1)}, \dots, \mu_m^{(\rho)}$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\mu_0 - \mu_m^{(k)}| \leq \bar{C} \bar{q}^m \quad (k = 1, \dots, \rho),$$

где

$$\bar{C} = \left(\frac{C'}{C''}\right)^{1/\rho}, \quad \bar{q} = q^{1/\rho},$$

откуда вследствие произвольности выбора q получаем, что характеристические числа «приближенного» уравнения (15)

сходятся к характеристическим числам уравнения (14) (если таковые существуют) быстрее геометрической прогрессии с любым сколь угодно малым положительным знаменателем. Из оценки для характеристических чисел и формул (22), (22') и (22'') следует, что такого же рода сходимость имеет место и для собственных элементов. Теорема доказана.

Вычисление характеристических чисел μ_n и собственных элементов u_n может быть произведено методом, изложенным в § 3 гл. I. Нужно лишь помнить, что характеристические числа связаны с собственными значениями оператора A_n соотношением

$$\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Как уже отмечалось выше, фактическое вычисление коэффициентов полиномов $P_n(\lambda)$, а следовательно, и определение характеристических чисел операторов A_n при больших значениях n может оказаться затруднительным и связанным с большими потерями точности вычислений. В таких случаях может оказаться полезным метод Шмидта, использованный нами при доказательстве теоремы VII. С его помощью можно, не увеличивая n , вычислить несколько наименьших по модулю характеристических чисел и соответствующих им собственных элементов.

Будем считать n фиксированным и покажем, как можно построить степенные ряды для вычисления $\alpha_k(\mu)$ коэффициентов уравнений (22) и (23), из которых определяются характеристические числа и собственные элементы.

Коэффициенты $\alpha_s(\mu)$ определялись нами с помощью равенства

$$A_n \xi_{n-1} = - \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s(\mu) z_s,$$

где

$$\xi_{n-1} = (E - \mu(A - A_n))^{-1} z_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j (A - A_n)^j z_{n-1}.$$

Выведем рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов написанного степенного ряда. Пусть

$$(A - A_n)^j z_{n-1} = \sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} z_s,$$

тогда

$$(A - A_n)^{j+1} z_{n-1} = \sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} z_{s+1} - \\ - \sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} A_n z_s = \sum_{s=n-1}^{n+j-1} d_s^{(j)} z_{s+1} - \sum_{s=n-1}^{n+j-1} d_s^{(j)} A_n z_s.$$

Из формулы (11) имеем

$$A_n z_s = \sum_{k=0}^{n-1} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) z_k,$$

так что

$$(A - A_n)^{j+1} z_{n-1} = \sum_{s=0}^{n+j} d_s^{(j+1)} z_s = \\ = \sum_{s=n-1}^{n+j-1} d_s^{(j)} z_{s+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z_k \left[\sum_{s=n-1}^{n+j-1} d_s^{(j)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) \right].$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} d_s^{(j+1)} &= d_{s-1}^{(j)} \quad (s = n, \dots, n+j), \\ d_s^{(j+1)} &= - \sum_{k=n-1}^{n+j-1} d_k^{(j)} (l_{s-1}^{(k)} - l_{n-1}^{(k)} \alpha_s) \quad (s = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} (24)$$

и

$$\xi_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j (A - A_n)^j z_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} z_s.$$

Вычислим теперь $A_n \xi_{n-1}$:

$$A_n \xi_{n-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \left[\sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} A_n z_s \right] = \\ = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} \sum_{k=0}^{n-1} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) z_k \right] \mu^j$$

или, изменяя порядок суммирования,

$$A_n \xi_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z_k \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \left[\sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) \right] \right\} = \\ = - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\mu) z_k,$$

откуда получаем ряды для $\alpha_k(\mu)$

$$\alpha_k(\mu) = - \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{n+j-1} d_s^{(j)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) \right] \mu^j. \quad (25)$$

Эти ряды абсолютно сходятся в круге

$$|\mu| < \frac{1}{\|A - A_n\|}.$$

Вычислим первые два члена ряда

$$\alpha_k(\mu) = - \sum_{s=0}^{n-1} d_s^{(0)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) - \mu \sum_{s=0}^n d_s^{(1)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) - \dots$$

$$\xi_k = z_k \quad (k = 0, 1, \dots, n-2),$$

$$\xi_{n-1} = z_{n-1} + \mu (A - A_n) z_{n-1} + \dots = z_{n-1} + \mu \sum_{s=0}^n d_s^{(1)} z_s + \dots$$

Так как $z_{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} d_s^{(0)} z_s$, то

$$d_s^{(0)} = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n-2), \quad d_{n-1}^{(0)} = 1.$$

Если воспользоваться тем, что

$$l_s^{(n)} = -\alpha_s \quad l_s^{(j)} = \begin{cases} 0 & j \neq s \\ 1 & j = s \end{cases} \quad (j < n),$$

то по рекуррентным формулам (24) имеем

$$d_n^{(1)} = d_{n-1}^{(0)} = 1,$$

$$d_s^{(1)} = -d_{n-1}^{(0)} (l_{s-1}^{(n-1)} - l_{n-1}^{(n-1)} \alpha_s) = \alpha_s \quad (s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Таким образом,

$$\xi_{n-1} = z_{n-1} + \mu \sum_{s=0}^n \alpha_s z_s + \dots = z_{n-1} + \mu P_n(A) z_0 + \dots$$

Перейдем к вычислению $\alpha_k(\mu)$:

$$\begin{aligned} - \sum_{s=0}^{n-1} d_s^{(0)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) &= \\ &= - (l_{k-1}^{(n-1)} - l_{n-1}^{(n-1)} \alpha_k) = \alpha_k \quad (k=0, 1, \dots, n-1), \\ \sum_{s=0}^n d_s^{(1)} (l_{k-1}^{(s)} - l_{n-1}^{(s)} \alpha_k) &= d_{k-1}^{(1)} - d_{n-1}^{(1)} \alpha_k + d_n^{(1)} (-\alpha_{k-1} + \alpha_{n-1} \alpha_k) = \\ &= \alpha_{k-1} - \alpha_{n-1} \alpha_k - \alpha_{k-1} + \alpha_{n-1} \alpha_k = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент при первой степени μ в ряде (25) равен нулю, и с точностью до членов порядка μ^2

$$\alpha_k(\mu) = \alpha_k,$$

а характеристические числа находятся из уравнения

$$\Delta_n(\mu) = P_n\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0.$$

Очевидно, что они совпадают с характеристическими числами оператора A_n .

Вычислив b_k по формулам (22'), найдем собственные элементы

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \xi_k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z_k + b_{n-1} \mu P_n(A) z_0. \quad (26)$$

§ 4. Пример вычисления характеристических чисел

При решении одной из задач теплопроводности встречается уравнение

$$-y''(x) = \mu y(x) \quad (27)$$

при краевых условиях

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \quad (28)$$

Уравнение (27) с помощью функции Грина легко приводится к интегральному уравнению

$$y = \mu \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi, \quad (29)$$

где

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \xi)x & x \leq \xi, \\ \frac{1}{2}(2 - x)\xi & x \geq \xi. \end{cases}$$

Оператор $Ay = \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi$ вполне непрерывен в функциональном пространстве L_2 , если за промежуток интегрирования брать $[0, 1]$.

Возьмем в качестве z_0 функцию

$$z_0(x) = \sin \pi x.$$

Последовательность функций z_k можно получить либо последовательным интегрированием

$$z_{k+1}(x) = \int_0^1 K(x, \xi) z_k(\xi) d\xi,$$

либо решая уравнения

$$-z''_{k+1}(x) = z_k(x)$$

при краевых условиях $z_{k+1}(0) = 0$, $z_{k+1}(1) + z'_{k+1}(1) = 0$. Последний способ несколько проще и не требует знания функции Грина.

Производя интегрирование, получаем

$$z_0(x) = \sin \pi x,$$

$$z_1(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x,$$

$$z_2(x) = \frac{x}{6\pi} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) - \frac{x^3}{12\pi} + \frac{1}{\pi^4} \sin \pi x,$$

$$z_3(x) = \left(\frac{31}{720\pi} + \frac{1}{6\pi^3} + \frac{1}{2\pi^5}\right)x - \frac{x^3}{36\pi} \left(1 + \frac{3}{\pi^2}\right) + \frac{x^5}{240\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^6}.$$

Далее вычисляем скалярные произведения

$$(z_0, z_0) = \int_0^1 z_0^2(x) dx = 0,5,$$

$$(z_0, z_1) = \int_0^1 z_0(x) z_1(x) dx = 0,1013212,$$

$$(z_0, z_2) = (z_1, z_1) = 10^{-2} \cdot 2,384240,$$

$$(z_0, z_3) = (z_1, z_2) = 10^{-3} \cdot 5,761453,$$

$$(z_1, z_3) = (z_2, z_2) = 10^{-3} \cdot 1,398529,$$

$$(z_2, z_3) = 10^{-4} \cdot 3,397373.$$

Теперь из системы (11) (гл. I, § 3) можно найти коэффициенты характеристического уравнения для трех приближений $n = 1, 2, 3$:

$$\left. \begin{aligned} n=1 \quad & 0,5\alpha_0 + 0,1013212 = 0; \\ n=2 \quad & \left. \begin{aligned} & 0,5000000\alpha_0 + 0,1013212\alpha_1 + 10^{-2}2,384240 = 0, \\ & 0,1013212\alpha_0 + 10^{-2}2,384240\alpha_1 + 10^{-3}5,761453 = 0; \end{aligned} \right\} \\ n=3 \quad & \left. \begin{aligned} & 0,5000000\alpha_0 + 0,1013212\alpha_1 + \\ & \quad + 10^{-2} \cdot 2,384240\alpha_2 + 10^{-3} \cdot 5,761453 = 0, \\ & 0,1013212\alpha_0 + 10^{-2} \cdot 2,384240\alpha_1 + \\ & \quad + 10^{-3} \cdot 5,761453\alpha_2 + 10^{-3} \cdot 1,398529 = 0, \\ & 10^{-2} \cdot 2,384240\alpha_0 + 10^{-3} \cdot 5,761453\alpha_1 + \\ & \quad + 10^{-3} \cdot 1,398529\alpha_2 + 10^{-4} \cdot 3,397373 = 0, \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

куда

$$\left. \begin{aligned} n=1 \quad & \alpha_0 = -0,2026424; \\ n=2 \quad & \left. \begin{aligned} & \alpha_0 = 10^{-3} \cdot 9,2419, \\ & \alpha_1 = -0,280922; \end{aligned} \right\} \\ n=3 \quad & \left. \begin{aligned} & \alpha_0 = -10^{-4} \cdot 1,249, \\ & \alpha_1 = 10^{-2} \cdot 1,35979, \\ & \alpha_2 = -0,296814. \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Характеристическое уравнение (14) (гл. I, § 3) для определения собственных значений операторов A_n принимает вид:

$$n = 1 \quad P_1(\lambda) = \lambda + \alpha_0 = \lambda - 0,2026424 = 0;$$

$$n = 2 \quad P_2(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \\ = \lambda^2 - 0,280922\lambda + 10^{-3} \cdot 9,2419 = 0;$$

$$n = 3 \quad P_3(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \\ = \lambda^3 - 0,296814\lambda^2 + 10^{-2} \cdot 1,35979\lambda - 10^{-4} \cdot 1,249 = 0.$$

Корни этих уравнений дают приближенные значения собственных чисел оператора A :

$$n = 1 \quad \lambda_1 = 0,2026424;$$

$$n = 2 \quad \lambda_1 = 0,242871, \\ \lambda_2 = 10^{-2} \cdot 3,8053;$$

$$n = 3 \quad \lambda_1 = 0,242963, \\ \lambda_2 = 10^{-2} \cdot 4,145, \\ \lambda_3 = 10^{-2} \cdot 1,2.$$

Полагая $\lambda = \frac{1}{\mu}$, находим характеристические числа исходной задачи. Для сравнения в таблице приведены значения первого характеристического числа, вычисленного по методу Ритца (С. Михлин [1]) и «точные» значения первых трех собственных чисел, найденные методом Ньютона из уравнения

$$\sqrt{\mu} + \operatorname{tg} \sqrt{\mu} = 0.$$

	Метод моментов	Метод Ритца	«Точные» значения
$n = 1$	$\mu_1 = 4,93$	$\mu_1 = 4,93$	
$n = 2$	$\mu_1 = 4,1174$ $\mu_2 = 26,27$	$\mu_1 = 4,59$	
$n = 3$	$\mu_1 = 4,11585$ $\mu_2 = 24,20$ $\mu_3 = 80$	$\mu_1 = 4,40$	$\mu_1 = 4,11585$ $\mu_2 = 24,14$ $\mu_3 = 63,61$

ГЛАВА III

МЕТОД МОМЕНТОВ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Самосопряженные операторы

Ограниченный оператор называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным, то есть $A = A^*$ и

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

для любых x и y из H . Границами самосопряженного оператора называются соответственно наибольшее из чисел m и наименьшее из чисел M , для которых выполняются неравенства

$$m(x, x) \leq (Ax, x) \leq M(x, x) \quad (1)$$

для любого x из H .

Если $m > 0$, то оператор A называют *положительно определенным*.

Рассмотрим теперь самосопряженный оператор A в конечно-мерном пространстве. В n -мерном пространстве можно ввести систему ортогональных координат, осями которых являются элементы (векторы) $y_1, y_2, \dots, y_n$, обладающие следующим свойством:

$$(y_i, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Обратимся к задаче о собственных значениях и рассмотрим уравнение

$$Au = \lambda u. \quad (2)$$

Все собственные значения λ вещественны, так как

$$\lambda = \frac{(Au, u)}{(u, u)}$$

откуда и следует, что при $\lambda_k \neq \lambda_i$
 $(u_k, u_i) = 0$.

Таким образом, систему собственных элементов можно принять за орты новой системы координат в пространстве и любой элемент x из H можно представить в виде суммы проекций

$$x = (x, u_1) u_1 + (x, u_2) u_2 + \dots + (x, u_n) u_n.$$

Введем понятие спектральной функции оператора. Расположим собственные значения оператора A в порядке их возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n,$$

и определим $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральную функцию оператора A , как семейство операторов проектирования, определяемых формулами:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda x &= 0 & \lambda < \lambda_1 \\ \mathcal{E}_\lambda x &= (x, u_1) u_1 & \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2 \\ \mathcal{E}_\lambda x &= (x, u_1) u_1 + (x, u_2) u_2 & \lambda_2 \leq \lambda < \lambda_3 \\ &\dots & \dots \\ \mathcal{E}_\lambda x &= (x, u_1) u_1 + \dots + (x, u_{n-1}) u_{n-1} & \lambda_{n-1} \leq \lambda < \lambda_n \\ \mathcal{E}_\lambda x &= (x, u_1) u_1 + \dots + (x, u_n) u_n = x & \lambda \geq \lambda_n \end{aligned}$$

для любого элемента x из H .

Вещественная функция $(\mathcal{E}_\lambda x, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\lambda x, x) &= 0 & (\lambda < \lambda_1), \\ (\mathcal{E}_\lambda x, x) &= |(x, u_1)|^2 & (\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2), \\ &\dots & \dots \\ (\mathcal{E}_\lambda x, x) &= \sum_{k=1}^{n-1} |(x, u_k)|^2 & (\lambda_{n-1} \leq \lambda < \lambda_n), \\ (\mathcal{E}_\lambda x, x) &= \|x\|^2 & (\lambda \geq \lambda_n). \end{aligned}$$

Таким образом, на участках изменения λ , где нет собственных значений оператора A , $(\mathcal{E}_\lambda x, x)$ постоянна, а при переходе через собственные значения λ_k $(\mathcal{E}_\lambda x, x)$ скачком увеличивается на величину $|(x, u_k)|^2$.

Если обозначить через $\Delta_k \mathcal{E}_\lambda$ величину скачка оператора проектирования,

$$\Delta_k \mathcal{E}_\lambda x = (x, u_k) u_k,$$

то формулу

$$Ax = \lambda_1(x, u_1) u_1 + \lambda_2(x, u_2) u_2 + \dots + \lambda_n(x, u_n) u_n \quad (6)$$

можно записать в виде

$$Ax = \sum_{k=1}^n \lambda_k \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x. \quad (6')$$

Аналогичная формула имеет место и для произвольного ограниченного самосопряженного оператора

$$Ax = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda x,$$

где под $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральной функцией оператора A , понимается такое семейство операторов проектирования, зависящее от вещественного параметра λ , что:

1) $\mathcal{E}_\lambda$ не убывает при возрастании λ , то есть, если $\mu > \lambda$, то подпространство, в которое проектирует оператор $\mathcal{E}_\mu$, содержит в себе подпространство, в которое проектирует оператор $\mathcal{E}_\lambda$;

2) $\mathcal{E}_m = 0$, $\mathcal{E}_M = E$,

3) $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывен справа, то есть

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda' + 0} \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{\lambda'}.$$

Совокупность точек роста спектральной функции $\mathcal{E}_\lambda$ или, иными словами, совокупность точек роста монотонных вещественных функций $(\mathcal{E}_\lambda x, x)$ для любых x из H называют *спектром* оператора. Значения λ , где $\mathcal{E}_\lambda$ меняется скачком, являются собственными значениями оператора A . Точки, в которых $\mathcal{E}_\lambda$ возрастает непрерывным образом, принадлежат *непрерывному спектру*. Как мы видели выше, спектр самосопряженного оператора в конечномерном пространстве состоит лишь из конечного числа собственных значений.

Вернемся к формуле (6) и применим к обеим частям равенства оператор A :

$$A^2 x = \lambda_1^2(x, u_1) u_1 + \lambda_2^2(x, u_2) u_2 + \dots + \lambda_n^2(x, u_n) u_n.$$

Для любой степени оператора имеем

$$A^m x = \lambda_1^m(x, u_1) u_1 + \lambda_2^m(x, u_2) u_2 + \dots + \lambda_n^m(x, u_n) u_n.$$

Эту формулу можно обобщить на произвольные функции от оператора, полагая

$$f(A)x = f(\lambda_1)(x, u_1)u_1 + f(\lambda_2)(x, u_2)u_2 + \dots + f(\lambda_n)(x, u_n)u_n$$

или

$$f(A)x = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x.$$

Имеет место очевидная формула

$$f_1(A) \cdot f_2(A)x = \sum_{k=1}^n f_1(\lambda_k) \cdot f_2(\lambda_k) \Delta_k \mathcal{E}_\lambda x.$$

Отметим одно важное свойство функций от операторов. В определении оператора $f(A)$ участвуют лишь значения функции $f(\lambda)$ в точках λ_k и $\varphi(A) = f(A)$, если $\varphi(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Аналогичным образом определяются и непрерывные функции произвольных ограниченных самосопряженных операторов

$$f(A) = \int_m^M f(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda, \quad (7)$$

причем существенными являются лишь значения функции в точках спектра оператора, где $d\mathcal{E}_\lambda \neq 0$. Имеет место формула

$$f_1(A) \cdot f_2(A) = \int_m^M f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda. \quad (8)$$

Норма оператора $f(A)$ оценивается следующим образом. Если $|f(\lambda)| \leq C$, то

$$\|f(A)x\| \leq \left\| \int_m^M C d\mathcal{E}_\lambda x \right\| = C \cdot \|x\|$$

и

$$\|f(A)\| \leq C. \quad (9)$$

Приведем примеры функций от операторов.

Обратный оператор A^{-1} определяется как интеграл

$$A^{-1} = \int_m^M \frac{1}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda. \quad (10)$$

По формуле (8) имеем

$$AA^{-1}x = A^{-1}Ax = \int_m^M \frac{\lambda}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda x = \mathcal{E}_M x - \mathcal{E}_m x = x.$$

Если на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ нет точек спектра оператора, то, так как функция $\frac{1}{\lambda}$ ограничена вне этого промежутка: $\left| \frac{1}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{\sigma}$, оператор A^{-1} ограничен, и из неравенства (9) имеем

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\sigma}.$$

Имеет место и обратное утверждение: если оператор A^{-1} ограничен, то существует такой отрезок $[-\sigma, \sigma]$, внутри которого нет точек спектра оператора A .

В качестве второго примера рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Ax,$$

где $x(t)$ элемент H , A — ограниченный самосопряженный оператор. Пусть при $t=0$ $x = x_0$, тогда решение уравнения запишется в виде

$$x(t) = e^{At}x_0 = \int_m^M e^{\lambda t} d\mathcal{E}_\lambda x_0.$$

Спектр самосопряженного вполне непрерывного оператора состоит только из собственных значений, причем если их пронумеровать в порядке убывания модулей, то $|\lambda_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Всякий элемент вида Ax может быть разложен по ортонормированной системе собственных элементов u_k :

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, u_i) u_i.$$

Если нуль не является собственным значением, то аналогичное разложение имеет место для любого x из H :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, u_i) u_i.$$

Собственные элементы u_i реализуют экстремум выражения

$$\frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}, \text{ причем } \lambda_i = \frac{(Au_i, u_i)}{\|u_i\|^2}.$$

§ 2. Проблема моментов в пространстве Гильберта для самосопряженных операторов

Самосопряженность исходного оператора A сильно упрощает решение проблемы моментов, что позволяет построить ряд удобных алгоритмов решения соответствующих линейных задач.

Решением линейных задач с симметричными конечными матрицами занимались К. Ланчос [1], [2], Л. Люстерник [2], М. Хестенс и Е. Стиффел [1]. Правда, они исходили из классической скалярной проблемы моментов Чебышева — Маркова для квадратичного функционала (Ax, x) , но в случае самосопряженного оператора скалярная проблема моментов вполне эквивалентна операторной, так как задание оператора A вполне эквивалентно заданию соответствующего ему квадратичного функционала (Ax, x) .

В дальнейшем методы, предложенные К. Ланчосом и Л. Люстерником, были обобщены на вполне непрерывные самосопряженные операторы В. Карушем [1] и И. Стесиным [1].

Различный подход к задаче, использование различных методов решения проблемы моментов привели к построению различных по форме, но очень близких по существу методов решения линейных задач.

Проблема моментов в пространстве Гильберта позволяет рассмотреть все эти методы с более общей точки зрения и расширить область их применения на весьма широкий класс самосопряженных операторов.

Пусть в гильбертовом пространстве H задан линейный самосопряженный ограниченный оператор A .

Исходя из произвольно выбранного элемента z_0 , строим ряд итераций

$$z_0, z_1 = Az_0, \dots, z_n = Az_{n-1} = A^n z_0, \dots$$

Решение проблемы моментов:

$$\left. \begin{aligned} z_k &= A^k z_0 = A_n^k z_0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \\ E_n z_n &= E_n A^n z_0 = A_n^n z_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

дает последовательность операторов A_n , каждый из которых определен в своем подпространстве H_n , образованном из элементов, являющихся линейными комбинациями $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Через E_n по-прежнему обозначен оператор проектирования в подпространство H_n . Так как по формуле (23) гл. I $A_n = E_n A E_n$, то оператор A_n также самосопряжен. Для определения его спектра воспользуемся методом последовательной ортогонализации, предложенным К. Ланчосом [1]. Положим

$$p_0 = z_0$$

и возьмем далее элемент

$$p_1 = Az_0 - a_0 z_0.$$

Легко определить коэффициент a_0 так, чтобы элемент p_1 был ортогонален к p_0 :

$$(p_1, p_0) = (Ap_0, p_0) - a_0 (p_0, p_0) = 0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{(Ap_0, p_0)}{(p_0, p_0)}.$$

Положим далее

$$p_2 = Ap_1 - a_1 p_1 - b_0 p_0.$$

Условия ортогональности p_2 к p_1 и p_2 дают

$$(p_2, p_0) = (Ap_1, p_0) - b_0 (p_0, p_0) = 0,$$

$$(p_2, p_1) = (Ap_1, p_1) - a_1 (p_1, p_1) = 0,$$

и

$$a_1 = \frac{(Ap_1, p_1)}{(p_1, p_1)}, \quad b_0 = \frac{(Ap_1, p_0)}{(p_0, p_0)} = \frac{(p_1, Ap_0)}{(p_0, p_0)} = \frac{(p_1, p_1)}{(p_0, p_0)}.$$

Легко видеть, что вообще

$$p_{k+1} = (A - a_k) p_k - b_{k-1} p_{k-1}, \quad (12)$$

где

$$a_k = \frac{(Ap_k, p_k)}{(p_k, p_k)}, \quad b_{k-1} = \frac{(p_k, Ap_{k-1})}{(p_{k-1}, p_{k-1})} = \frac{(p_k, p_k)}{(p_{k-1}, p_{k-1})}.$$

Элементы p_k ортогональны между собой: $(p_k, p_i) = 0$ при $i \neq k$ и являются полиномами от оператора A

$$p_k = P_k(A) z_0. \quad (13)$$

Полиномы $P_k(\lambda)$ имеют старший коэффициент при λ^k равным единице и связаны между собою рекуррентными соотношениями, аналогичными соотношениям (12)

$$\left. \begin{aligned} P_{k+1}(\lambda) &= (\lambda - a_k) P_k(\lambda) - b_{k-1} P_{k-1}(\lambda), \\ b_{-1} &= 0, \quad P_0 \equiv 1. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Обратимся теперь к проблеме моментов. В силу формул (12), по самому определению оператора A_n

$$p_k = P_k(A) z_0 = P_k(A_n) z_0 \in H_n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Таким образом, элементы $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ образуют ортогональную систему в подпространстве H_n . Перейдем к вычислению $P_n(A_n) z_0$.

По определению полином $P_n(\lambda)$ есть полином n -й степени со старшим коэффициентом при λ^n , равным единице, поэтому, используя формулы (11), получим

$$P_n(A_n) z_0 = E_n P_n(A) z_0 = E_n p_n.$$

С другой стороны, p_n ортогонален ко всем элементам $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$, которые образуют в подпространстве H_n полную ортогональную систему, поэтому

$$\begin{aligned} E_n p_n &= (p_n, p_0) \frac{p_0}{\|p_0\|} + (p_n, p_1) \frac{p_1}{\|p_1\|} + \dots \\ &\quad \dots + (p_n, p_{n-1}) \frac{p_{n-1}}{\|p_{n-1}\|} = 0 \end{aligned}$$

и

$$P_n(A_n) z_0 = 0. \quad (13')$$

Сравнивая это уравнение с равенством (10) гл. I, мы видим, что введенные нами полиномы $P_n(\lambda)$ совпадают с полино-

мами $P_n(\lambda)$, полученными в гл. I, и, следовательно, корни уравнения

$$P_n(\lambda) = 0$$

есть собственные значения оператора A_n .

Соответствующие собственные элементы могут быть вычислены по формулам (13) и (13') гл. I, однако их можно выразить непосредственно через $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$. Пусть

$$Au_k = \lambda_k u_k,$$

где λ_k — корень полинома $P_n(\lambda)$. Будем искать u_k в виде

$$u_k = \sum_{j=0}^{n-1} (u_k, p_j) p_j.$$

Так как оператор A_n самосопряжен, то его собственные элементы образуют полную ортонормированную систему в H_n . Разлагая p_j по собственным элементам, получим

$$p_j = P_j(A_n) z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} P_j(\lambda_k) (z_0, u_k) u_k,$$

откуда

$$(u_k, p_j) = P_j(\lambda_k) (z_0, u_k).$$

Теперь мы можем выписать собственный элемент u_k в виде

$$u_k = C \sum_{j=0}^{n-1} P_j(\lambda_k) p_j$$

и выбрать постоянную C из условия нормировки:

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} P_j^2(\lambda_k)}} \sum_{j=0}^{n-1} P_j(\lambda_k) p_j. \quad (14)$$

Таким образом, знание системы полиномов $P_k(\lambda)$ позволяет легко вычислить весь спектр оператора A_n .

Ввиду важности вопроса укажем другой метод вычисления полиномов $P_n(\lambda)$, основанный на теории непрерывных дробей. Разложим исходный элемент z_0 по собственным элементам оператора A_n (это возможно, так как z_0

принадлежит всем H_n)

$$z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k$$

и рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = \frac{a_0^2}{\lambda - \lambda_0} + \frac{a_1^2}{\lambda - \lambda_1} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda - \lambda_{n-1}},$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — собственные значения оператора A_n . Разлагая ее в ряд по обратным степеням λ , получим

$$\varphi(\lambda) = \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \frac{c_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{c_s}{\lambda^{s+1}} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{c_s}{\lambda^{s+1}}. \quad (15)$$

Оставляя в стороне вопросы сходимости, вычислим формально коэффициенты ряда:

$$\frac{a_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \frac{a_k^2}{\lambda} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda} \right)^s$$

и

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \lambda_k^s \right] \frac{1}{\lambda^{s+1}},$$

следовательно,

$$c_s = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \lambda_k^s.$$

С другой стороны,

$$z_s = A_n^s z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_k^s u_k,$$

и

$$(z_s, z_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \lambda_k^s = c_s \quad (s=0, 1, \dots, n-1).$$

Вообще, для любых i и k вследствие самосопряженности оператора A_n

$$c_{i+k} = (A_n^i z_0, A_n^k z_0).$$

Проблема моментов дает и способ вычисления коэффициентов c_s до c_{2n-1} включительно, а именно: по самому

определению оператора A_n (11)

$$c_{i+k} = (z_i, z_k) \quad (i+k \leq 2n-1).$$

Перейдем к вычислению полинома $P_n(\lambda)$. Так как λ_k — его корни и коэффициент при λ^n равен единице, то

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^2}{\lambda - \lambda_k} = \frac{Q_{n-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} = \frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \dots,$$

где $Q_{n-1}(\lambda)$ — некоторый полином $n-1$ -й степени. Умножая обе части равенства на $P_n(\lambda)$, получим

$$Q_{n-1}(\lambda) = P_n(\lambda) \left(\frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \dots \right).$$

Пусть $P_n(\lambda) = \sum_{s=0}^n \alpha_s^{(n)} \lambda^s$, $\alpha_n^{(n)} = 1$. Производя умножение

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^n \alpha_s^{(n)} \lambda^s \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda^{j+1}} = \\ &= \sum_{j=-n}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} = (c_j \alpha_0^{(n)} + \dots + c_{j+n-1} \alpha_{n-1}^{(n)} + c_{j+n}) = Q_{n-1}(\lambda) \end{aligned}$$

и приравнявая нулю коэффициенты при отрицательных степенях λ , будем иметь

$$c_j \alpha_0^{(n)} + c_{j+1} \alpha_1^{(n)} + \dots + c_{j+n-1} \alpha_{n-1}^{(n)} + c_{j+n} = 0, \quad j \geq 0. \quad (16)$$

Среди этих уравнений лишь n , соответствующие $j = 0, 1, \dots, n-1$, линейно-независимы, остальные являются их линейными комбинациями. Система (16) совпадает с полученной нами ранее системой (11) гл. I.

Выведем рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов полиномов $P_n(\lambda)$. В равенстве

$$Q_k(\lambda) = P_{k+1}(\lambda) \left(\frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{c_j}{\lambda^{j+1}} + \dots \right)$$

заменяем $P_{k+1}(\lambda)$ по рекуррентной формуле (12')

$$\begin{aligned} Q_k(\lambda) &= (\lambda - a_k) P_k(\lambda) \left(\frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{c_{k-1}}{\lambda^k} + \frac{c_k}{\lambda^{k+1}} + \dots \right) - \\ &- b_{k-1} P_{k-1}(\lambda) \left(\frac{c_0}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{c_{k-1}}{\lambda^k} + \frac{c_k}{\lambda^{k+1}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Полагая $P_k(\lambda) = \sum_j \alpha_j^{(k)} \lambda^j$ и приравнявая коэффициент при $\frac{1}{\lambda^k}$ к нулю, в силу уравнений (16) получим

$$c_k \alpha_0^{(k)} + c_{k+1} \alpha_1^{(k)} + \dots + c_{2k-1} \alpha_{k-1}^{(k)} + c_{2k} - \\ - b_{k-1} (c_{k-1} \alpha_0^{(k-1)} + c_{k+2} \alpha_1^{(k-1)} + \dots + c_{2k-3} \alpha_{k-2}^{(k-1)} + c_{2k-2}) = 0.$$

Приравнивание к нулю коэффициента при $\frac{1}{\lambda^{k+1}}$ дает

$$c_{k+1} \alpha_0^{(k)} + c_{k+2} \alpha_1^{(k)} + \dots + c_{2k} \alpha_{k-1}^{(k)} + c_{2k+1} - \\ - a_k (c_k \alpha_0^{(k)} + c_{k+1} \alpha_1^{(k)} + \dots + c_{2k-1} \alpha_{k-1}^{(k)} + c_{2k}) - \\ - b_{k-1} (c_k \alpha_0^{(k-1)} + c_{k+1} \alpha_1^{(k-1)} + \dots + c_{2k-2} \alpha_{k-2}^{(k-1)} + c_{2k-1}) = 0.$$

Введя обозначения

$$h_k = c_k \alpha_0^{(k)} + c_{k+1} \alpha_1^{(k)} + \dots + c_{2k-1} \alpha_{k-1}^{(k)} + c_{2k}, \\ h_{k+1/2} = c_{k+1} \alpha_0^{(k)} + c_{k+2} \alpha_1^{(k)} + \dots + c_{2k} \alpha_{k-1}^{(k)} + c_{2k+1},$$

будем иметь

$$\left. \begin{aligned} b_{k-1} &= \frac{h_k}{h_{k-1}}, \\ a_k &= \frac{h_{k+1/2}}{h_k} - b_{k-1} \frac{h_{k-1/2}}{h_k} = \frac{h_{k+1/2}}{h_k} - \frac{h_{k-1/2}}{h_{k-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Рекуррентная формула (12') дает

$$\sum_{s=0}^{k+1} \alpha_s^{(k+1)} \lambda^s = \sum_{s=0}^k \alpha_s^{(k)} \lambda^{s+1} - a_k \sum_{s=0}^k \alpha_s^{(k)} \lambda^{(s)} - b_{k-1} \sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s^{(k-1)} \lambda^s.$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях λ приводит к рекуррентным соотношениям между коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{k+1}^{(k+1)} &= \alpha_k^{(k)} = 1, \quad \alpha_k^{(k-1)} = 0, \\ \alpha_s^{(k+1)} &= \alpha_{s-1}^{(k)} - a_k \alpha_s^{(k)} - b_{k-1} \alpha_s^{(k-1)} \quad (s=0, 1, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Эти формулы выражают коэффициенты полиномов $P_k(\lambda)$ через скалярные произведения $c_i = (z_{i-k}, z_k)$.

Изложенный метод вычисления коэффициентов полиномов $P_k(\lambda)$ по сути дела эквивалентен обращению ряда (15)

в непрерывную дробь. Подобное обращение не единственно и ряд (15) можно представлять в виде непрерывных дробей различного типа. В связи с этим можно получить разные алгоритмы вычисления полиномов $P_k(\lambda)$, однако все они приводят к рекуррентным соотношениям (12') и, следовательно, являются видоизменениями приведенного нами алгоритма.

Эквивалентность операторной и скалярной проблемы моментов в случае самосопряженного оператора позволяет применить классические методы решения проблемы моментов, разработанные П. Чебышевым [1], А. Марковым [1], Т. Стильесом [1], и с помощью аппарата непрерывных дробей исследовать сходимость процессов, даваемых методом моментов при решении линейных задач. Именно такой путь исследования метода моментов был предложен Л. Люстерником [2] и использовался И. Стесиным [1] при решении задач с вполне непрерывными самосопряженными операторами.

Система полиномов $P_n(\lambda)$ обладает одним очень важным свойством ортогональности, из которого можно сделать ряд заключений о распределении их корней — собственных значений операторов A_n .

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральная функция оператора A ,

$$A = \int_m^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda,$$

m и M — соответственно нижняя и верхняя границы спектра оператора. Тогда

$$p_k = P_k(A) z_0 = \int_m^M P_k(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda z_0,$$

и в силу ортогональности элементов p_k

$$(p_i, p_k) = \int_m^M P_i(\lambda) P_k(\lambda) d(\mathcal{E}_\lambda z_0, z_0) \quad (i \neq k). \quad (19)$$

Таким образом, полиномы $P_n(\lambda)$ ортогональны в промежутке $[m, M]$ относительно неубывающей функции $(\mathcal{E}_\lambda z_0, z_0)$ в смысле (19). Отсюда следует, что *):

*) См., например, М. Шоот [1], Я. Геронимус [1].

1) полиномы $P_n(\lambda)$ образуют ряд Штурма, все их корни — собственные значения операторов A_n вещественны, различны и перемежаются друг с другом;

2) все корни лежат в промежутке $[m, M]$, где m и M — границы спектра оператора A ;

3) на участке изменения λ , где $(\mathcal{E}_\lambda z_0, z_0)$ постоянна, может быть не более одного корня полинома $P_n(\lambda)$ при любом n .

§ 3. Определение спектра самосопряженных операторов

В предыдущем параграфе мы привели методы вычисления собственных значений операторов A_n и их собственных элементов. Для вполне непрерывных операторов ранее было показано, что с возрастанием n собственные значения и собственные элементы операторов A_n стремятся к собственным значениям и собственным элементам исходного оператора. В общем случае самосопряженного ограниченного оператора имеет место следующая

Теорема IX. *Если A — ограниченный самосопряженный оператор и A_n — последовательность решений проблемы моментов (11), то последовательность $\mathcal{E}_\lambda^{(n)}$ спектральных функций операторов A_n (сильно) сходится к $\mathcal{E}_\lambda$ — спектральной функции оператора A :*

$$\mathcal{E}_\lambda^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda, \quad n \rightarrow \infty,$$

в подпространстве H_z и при всех λ , не принадлежащих к точечному спектру оператора A .

Доказательство теоремы основывается на (сильной) сходимости операторов A_n . Прежде всего из сильной сходимости операторов непосредственно следует сильная сходимость полиномов от операторов и каков бы ни был полином $P(\mu)$

$$P(A_n) \rightarrow P(A).$$

С помощью теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами этот вывод можно распространить на любые, непрерывные на отрезке $|\mu| \leq \|A\|$, функции $u(\mu)$.

Возьмем, в частности, $u(\mu) = e_\lambda(\mu)(\mu - \lambda)$, где $e_\lambda(\mu) = 1$ при $\mu \leq \lambda$ и $e_\lambda(\mu) = 0$ при $\mu > \lambda$. При этом $u(A_n) = \mathcal{E}_\lambda^{(n)} A_n$,

$u(A) = \mathcal{E}_\lambda A$ и в силу непрерывности функции $u(\mu)$

$$\mathcal{E}_\lambda^{(n)} A_n \rightarrow \mathcal{E}_\lambda A.$$

Отсюда в силу неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_\lambda^{(n)} Ax - \mathcal{E}_\lambda Ax\| &\leq \|\mathcal{E}_\lambda^{(n)} (A - A_n)x\| + \|\mathcal{E}_\lambda^{(n)} A_n x - \mathcal{E}_\lambda Ax\| \leq \\ &\leq \|(A - A_n)x\| + \|\mathcal{E}_\lambda^{(n)} A_n x - \mathcal{E}_\lambda Ax\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

вытекает, что

$$\mathcal{E}_\lambda^{(n)} A \rightarrow \mathcal{E}_\lambda A \quad \text{в } H_z.$$

Если λ не является собственным значением оператора A , то A^{-1} существует, также самосопряжен и

$$\mathcal{E}_\lambda^{(n)} x = \mathcal{E}_\lambda^{(n)} A A^{-1} x \rightarrow \mathcal{E}_\lambda A A^{-1} x = \mathcal{E}_\lambda x,$$

для любого x , принадлежащего области определения оператора A^{-1} . Так как последняя плотна в H_z и проекционные операторы $\mathcal{E}_\lambda^{(n)}$ ограничены в совокупности, то

$$\mathcal{E}_\lambda^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}_\lambda.$$

Метод приближенного построения спектральной функции самосопряженного оператора путем решения проблемы моментов тесно связан с вариационной задачей. Пусть оператор A имеет точечный спектр. Будем искать приближенно собственные элементы в виде

$$u^{(n)} = Q_{n-1}(A) z_0 \in H_n,$$

где $Q_{n-1}(\lambda)$ — полином $n-1$ -й степени. Коэффициенты полинома $Q_{n-1}(\lambda)$ и соответствующее собственное значение будем определять из вариационной задачи

$$\lambda^{(n)} = \text{exst} \frac{(Au^{(n)}, u^{(n)})}{\|u^{(n)}\|^2}.$$

Покажем, что решениями этой вариационной задачи являются собственные значения и собственные элементы оператора A_n — решения проблемы моментов.

Так как $u^{(n)} \in H_n$ и $E_n u^{(n)} = u^{(n)}$, то

$$(Au^{(n)}, u^{(n)}) = (Au^{(n)}, E_n u^{(n)}) = (E_n A E_n u^{(n)}, u^{(n)}) = (A_n u^{(n)}, u^{(n)}).$$

Таким образом, в H_n

$$\lambda^{(n)} = \text{exst} \frac{(Au^{(n)}, u^{(n)})}{\|u^{(n)}\|^2} = \text{exst} \frac{(A_n u^{(n)}, u^{(n)})}{\|u^{(n)}\|^2},$$

откуда и следует, что $\lambda^{(n)}$ и $u^{(n)}$, реализующие экстремум, есть собственное значение и собственный элемент оператора A_n .

Экстремальные свойства решения проблемы моментов позволяют исследовать и скорость сходимости процесса. Пусть A — вполне непрерывный оператор и $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ — его собственные значения, расположенные в порядке убывания модулей

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > \dots \rightarrow 0.$$

Рассмотрим подпространство R_m , состоящее из элементов H_z , ортогональных к первым m собственным элементам $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$. Тогда, если $\lambda_m > 0$,

$$\max \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} = \lambda_m, \quad x \in R_m,$$

или, если $\lambda_m < 0$,

$$\min \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2} = \lambda_m, \quad x \in R_m.$$

Для определенности рассмотрим случай $\lambda_m > 0$.

Разложим исходный элемент z_0 по собственным элементам оператора A

$$z_0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k, \quad a_k = (z_0, u_k).$$

Пусть

$$x_n = Q_{n-1}(A) z_0 = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{n-1}(\lambda_k) a_k u_k,$$

где $Q_{n-1}(\lambda)$ — полином $n-1$ -й степени, тогда $x_n \in H_n$. Если же, кроме того, $Q_{n-1}(\lambda_0) = Q_{n-1}(\lambda_1) = \dots = Q_{n-1}(\lambda_{m-1}) = 0$, то $x_n \in R_m$. Обозначим через $\lambda_{n,m}$ соответствующее собственное значение оператора A_n — корень ортогонального многочлена $P_n(\lambda)$. Из экстремального свойства решения проблемы моментов в силу положительности λ_m имеем:

$$\lambda_{n,m} \geq \frac{(Ax_n, x_n)}{\|x_n\|^2}.$$

Положим

$$Q_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{m-1})(\lambda - \lambda_{m+1}) \dots (\lambda - \lambda_{n-1}),$$

тогда

$$x_n = a_m Q_{n-1}(\lambda_m) u_m + \sum_{k=n}^{\infty} a_k Q_{n-1}(\lambda_k) u_k,$$

$$\|x_n\|^2 = a_m^2 Q_{n-1}^2(\lambda_m) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 Q_{n-1}^2(\lambda_k),$$

$$(Ax_n, x_n) = \lambda_m a_m^2 Q_{n-1}^2(\lambda_m) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k a_k^2 Q_{n-1}^2(\lambda_k),$$

и неравенство принимает вид

$$\lambda_{n,m} \geq \frac{\lambda_m + \frac{1}{a_m^2} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k a_k^2 \frac{Q_{n-1}^2(\lambda_k)}{Q_{n-1}^2(\lambda_m)}}{1 + \frac{1}{a_m^2} \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \frac{Q_{n-1}^2(\lambda_k)}{Q_{n-1}^2(\lambda_m)}}. \quad (20)$$

Покажем, что с возрастанием n $\left| \frac{Q_{n-1}(\lambda_k)}{Q_{n-1}(\lambda_m)} \right| \rightarrow 0$. Действительно, так как $k \geq n$ и, следовательно, $|\lambda_k| < |\lambda_n|$, то

$$\begin{aligned} |Q_{n-1}(\lambda_k)| &\leq (|\lambda_0| + |\lambda_n|)(|\lambda_1| + |\lambda_n|) \dots \\ &\dots (|\lambda_{m-1}| + |\lambda_n|)(|\lambda_{m+1}| + |\lambda_n|) \dots (|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|), \\ |Q_{n-1}(\lambda_m)| &\geq (|\lambda_0| - |\lambda_m|)(|\lambda_1| - |\lambda_m|) \dots \\ &\dots (|\lambda_{m-1}| - |\lambda_m|)(|\lambda_m| - |\lambda_{m+1}|) \dots (|\lambda_m| - |\lambda_{n-1}|) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{|Q_{n-1}(\lambda_k)|}{|Q_{n-1}(\lambda_m)|} &\leq \frac{|\lambda_0| + |\lambda_n|}{|\lambda_0| - |\lambda_m|} \dots \frac{|\lambda_{m-1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_{m-1}| - |\lambda_m|} \times \\ &\times \frac{|\lambda_{m+1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_m| - |\lambda_{m+1}|} \dots \frac{|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_m| - |\lambda_{n-1}|}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_m| - |\lambda_{n-1}|} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном m ,

то $\frac{|Q_{n-1}(\lambda_k)|}{|Q_{n-1}(\lambda_m)|} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отбрасывая в неравенстве (20) члены второго порядка малости, получим приближенно

$$\lambda_{n, m} \geq \lambda_m - \frac{1}{a_m^2} \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_m - \lambda_k) \frac{Q_{n-1}^2(\lambda_k)}{Q_{n-1}^2(\lambda_m)} a_k^2 \quad (\lambda_m > 0). \quad (21)$$

Отметим, что в случае $\lambda_m < 0$ из вариационной задачи следует неравенство

$$\lambda_{n, m} \leq \frac{(Ax_n, x_n)}{\|x_n\|^2}.$$

Повторяя вычисления, получим

$$\lambda_{n, m} \leq \lambda_m - \frac{1}{a_m^2} \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_m - \lambda_k) \frac{Q_{n-1}^2(\lambda_k)}{Q_{n-1}^2(\lambda_m)} a_k^2 \quad (\lambda_m < 0). \quad (22)$$

Сопоставляя (21) и (22), в общем случае произвольного знака λ_m будем иметь оценку

$$\begin{aligned} |\lambda_m - \lambda_{n, m}| &\leq \frac{1}{a_m^2} \sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_m - \lambda_k| \frac{Q_{n-1}^2(\lambda_k)}{Q_{n-1}^2(\lambda_m)} a_k^2 \leq \\ &\leq \frac{|\lambda_m| + |\lambda_n|}{a_m^2} \left[\frac{|\lambda_0| + |\lambda_n|}{|\lambda_0| - |\lambda_m|} \right]^2 \dots \\ &\dots \left[\frac{|\lambda_{m-1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_{m-1}| - |\lambda_m|} \right]^2 \dots \left[\frac{|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_m| - |\lambda_{n-1}|} \right]^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что если оператор A положителен и все $\lambda_k > 0$, то оценку (23) можно упростить:

$$\begin{aligned} |\lambda_m - \lambda_{n, m}| &\leq \frac{\lambda_m}{a_m^2} \frac{\lambda_0^2}{(\lambda_0 - \lambda_m)^2} \dots \frac{\lambda_{m-1}^2}{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)^2} \times \\ &\times \frac{\lambda_{m+1}^2}{(\lambda_m - \lambda_{m+1})^2} \dots \frac{\lambda_{n-1}^2}{(\lambda_m - \lambda_{n-1})^2} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2. \end{aligned} \quad (23')$$

Из приведенных оценок видно, что собственные значения операторов A_n — корни полиномов $P_n(\lambda)$, сходятся к соб-

ственным значениям исходного оператора A быстрее любой геометрической прогрессии. Аналогичное заключение можно сделать и о собственных элементах. Кроме того, из неравенств (23) и (23') следует, что точнее всех определяются наибольшие по модулю собственные значения.

В некоторых задачах представляет интерес вычисление собственных значений, лежащих в заданном интервале спектра оператора A .

Пусть весь спектр лежит в промежутке $[m, M]$ и нам нужно определить собственные значения и соответствующие им собственные элементы, лежащие в некотором промежутке $[a, b]$ внутри $[m, M]$. Непосредственное применение метода моментов может оказаться не эффективным, так как, прежде всего, будут определяться не интересующие нас наибольшие по модулю собственные значения и для вычисления собственных значений, лежащих в $[a, b]$, придется брать большие n . Но оператор A можно преобразовать так, что с наибольшей точностью будут определяться как раз собственные значения, лежащие в $[a, b]$.

Возьмем полином $S(\lambda)$, достигающий своего наибольшего значения в $[a, b]$ и возможно менее отклоняющийся от нуля в $[b, M]$ и $[m, a]$. В качестве $S(\lambda)$ можно, например, взять полином, наименее уклоняющийся от нуля в промежутках $[m, a]$ и $[b, M]$ и нормированный так, что $S\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1$. Образует оператор $B = S(A)$. Собственные элементы операторов B и A совпадают

$$Au_k = \lambda_k u_k, \quad Bu_k = \mu_k u_k,$$

а собственные значения связаны соотношением

$$\mu_k = S(\lambda_k).$$

Отсюда видно, что наибольшие по модулю собственные значения оператора B как раз соответствуют λ_k , лежащим в $[a, b]$. Определив μ_k методом моментов, мы можем вычислить и собственные значения оператора A в $[a, b]$ из уравнения

$$S(\lambda) = \mu_k \quad (a \leq \lambda \leq b),$$

§ 4. Решение линейных неоднородных уравнений с самосопряженными ограниченными операторами

В настоящем параграфе мы с помощью решения проблемы моментов построим последовательность операторов, сходящуюся к обратному оператору A^{-1} , ограничиваясь рассмотрением наиболее важного в приложениях случая, когда обратный оператор ограничен, или, точнее говоря, предполагая, что существует такой промежуток $[-\sigma, \sigma]$, внутри которого нет точек спектра оператора A .

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение первого рода

$$Ax = f, \quad (24)$$

где A — самосопряженный ограниченный оператор и $f \in H_z$. Возьмем непрерывную в промежутке $|\lambda| \leq \|A\|$ функцию $\varphi(\lambda)$, равную $\frac{1}{\lambda}$ вне $[-\sigma, \sigma]$. Так как весь спектр оператора лежит вне $[-\sigma, \sigma]$, то $\varphi(A) = A^{-1}$. Как уже нами отмечалось, сходимости операторов непосредственно распространяется на непрерывные функции от них. Поэтому по теореме II $\varphi(A_n) \rightarrow A^{-1}$ в подпространстве H_z , и последовательность элементов $x_n = \varphi(A_n)f$ сильно сходится к решению уравнения (24)

$$x_n = \int_m^M \varphi(\lambda) d\mathfrak{E}_\lambda^{(n)} f. \quad (25)$$

Элементы последовательности x_n — приближенные решения уравнения (24), можно вычислять непосредственно по формуле (25), так как спектральные функции $\mathfrak{E}_\lambda^{(n)}$ легко определяются. Если обозначить через $\lambda_k^{(n)}$ и $u_k^{(n)}$ собственные значения и собственные элементы оператора A_n , то

$$\mathfrak{E}_\lambda^{(n)} = \sum_k (, u_k^{(n)}) u_k^{(n)},$$

где суммирование распространяется на те значения k , для которых $\lambda_k < \lambda$. Формула (25) дает

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\lambda_k^{(n)}) (f, u_k^{(n)}) u_k^{(n)}.$$

Однако вычисление x_n можно обычно производить и не прибегая к определению спектра оператора A_n .

Рассмотрим сперва случай положительно-определенного оператора A , весь спектр которого заключен в промежутке $[m, M]$ ($m > 0$). По отмеченным в § 2 свойствам ортогональных многочленов, все собственные значения операторов A_n будут положительны и лежать в промежутке $[m, M]$, где $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, поэтому

$$x_n = \int_m^M \varphi(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} f = \int_m^M \frac{1}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} f.$$

Так как A_n есть оператор в H_n -подпространстве элементов, являющихся линейными комбинациями $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, то проектор $\mathcal{E}_\lambda^{(n)}$ проектирует любой элемент H_z на некоторую часть H_n . Поэтому, если обозначить через f_n проекцию f в H_n , $f_n = E_n f$, то $\mathcal{E}_\lambda^{(n)} f = \mathcal{E}_\lambda^{(n)} f_n$, и

$$x_n = \int_m^M \frac{1}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} f_n = A_n^{-1} f_n.$$

Таким образом, x_n удовлетворяет уравнению

$$A_n x_n = f_n, \quad (26)$$

решение которого по формуле (17) гл. I имеет вид

$$x_n = A_n^{-1} \left[F_{n-1}(A_n) - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(A_n) \right] z_0,$$

где $F_{n-1}(A_n) z_0 = f_n$. Напомним, что x_n является полиномом $n-1$ -й степени от A_n :

$$x_n = Q_{n-1}(A_n) z_0,$$

где

$$Q_{n-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[F_{n-1}(\lambda) - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(\lambda) \right].$$

Поэтому по самому построению оператора A_n , в силу формул (11),

$$Q_{n-1}(A_n) z_0 = Q_{n-1}(A) z_0$$

и

$$x_n = A^{-1} \left[F_{n-1}(A) - \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(A) \right] z_0. \quad (27)$$

Для последовательного вычисления приближенных решений x_n в случае положительно определенного оператора A можно построить удобный алгоритм. Так как все собственные значения операторов A_n — корни полиномов $P_n(\lambda)$, в этом случае положительно, то $P_n(0) \neq 0$ при любом n , и решение (27) всегда существует. Полагая

$$R_n(\lambda) = \frac{P_n(\lambda)}{P_n(0)},$$

из рекуррентных соотношений (12') получим

$$P_{n+1}(\lambda) = (\lambda - a_n) P_n(\lambda) - b_{n-1} P_{n-1}(\lambda), \quad (12')$$

$$R_{n+1}(\lambda) = \frac{P_n(0)}{P_{n+1}(0)} (\lambda - a_n) R_n(\lambda) - b_{n-1} \frac{P_{n-1}(0)}{P_{n+1}(0)} R_{n-1}(\lambda).$$

При $\lambda = 0$ будем иметь

$$1 = -a_n \frac{P_n(0)}{P_{n+1}(0)} - b_{n-1} \frac{P_{n-1}(0)}{P_{n+1}(0)}.$$

Вводя обозначение $h_n = -\frac{P_n(0)}{P_{n+1}(0)}$, можно рекуррентные формулы (12') записать в виде

$$R_{n+1}(\lambda) = \left(1 + b_{n-1} \frac{P_{n-1}(0)}{P_{n+1}(0)} - h_n \lambda \right) R_n(\lambda) - b_{n-1} \frac{P_{n-1}(0)}{P_{n+1}(0)} R_{n-1}(\lambda),$$

откуда

$$\frac{R_{n+1}(\lambda) - R_n(\lambda)}{-h_n \lambda} = R_n(\lambda) + h_{n-1} \frac{b_{n-1} P_{n-1}(0) R_n(\lambda) - R_{n-1}(\lambda)}{h_n P_{n+1}(0) - h_{n-1} \lambda}.$$

Пусть

$$\frac{R_{n+1}(\lambda) - R_n(\lambda)}{-h_n \lambda} = G_n(\lambda),$$

$$h_{n-1} \frac{b_{n-1} P_{n-1}(0)}{h_n P_{n+1}(0)} = \frac{b_{n-1} P_{n-1}^2(0)}{P_n^2(0)} = l_{n-1},$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} R_{n+1}(\lambda) &= R_n(\lambda) - h_n \lambda G_{n-1}(\lambda), \\ G_n(\lambda) &= R_n(\lambda) + l_{n-1} G_{n-1}(\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $R_0 = G_0 = 1$.

Легко видеть, что $G_n(\lambda)$ есть полином n -й степени, так как разность $R_{n+1}(\lambda) - R_n(\lambda)$ не имеет свободного члена и нацело делится на λ .

Наряду с полиномами $R_n(\lambda)$ и $G_n(\lambda)$ введем соответствующие им элементы гильбертова пространства

$$r_n = R_n(A) z_0, \quad g_n = G_n(A) z_0,$$

связанные соотношениями

$$\left. \begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - h_n A g_n, \\ g_n &= r_n + l_{n-1} g_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (28')$$

где $r_0 = g_0 = z_0$.

Элементы r_n , очевидно, ортогональны между собой, так как они отличаются лишь на скалярные множители от ортогональных элементов p_n .

Умножим первое из равенств (28') скалярно на g_k ($k < n$)

$$h_n (A g_k, g_n) = (r_n - r_{n+1}, g_k),$$

но

$$g_k = r_k + l_{k-1} g_{k-1}$$

и

$$\begin{aligned} h_n (A g_n, g_k) &= (r_n - r_{n+1}, r_k + l_{k-1} g_{k-1}) = \\ &= \bar{l}_{k-1} (r_n - r_{n+1}, g_{k-1}) = \dots = \bar{l}_{k-1} \cdot \bar{l}_{k-2} \dots \\ \dots \bar{l}_0 (r_n - r_{n+1}, g_0) &= \bar{l}_{k-1} \cdot \bar{l}_{k-2} \dots \bar{l}_0 \cdot (r_n - r_{n+1}, r_0) = 0. \end{aligned}$$

Так как $h_n \neq 0$, то $(A g_n, g_k) = 0$ ($k < n$). Вследствие самосопряженности оператора A $(A g_n, g_k) = (g_n, A g_k)$, поэтому

$$(A g_n, g_k) = 0 \quad (n \neq k).$$

Это свойство последовательности элементов g_n называется A ортогональностью. Аналогичным свойством обладают и

полиномы $G_n(\lambda)$

$$\int_m^M G_n(\lambda) G_k(\lambda) \lambda d(\mathcal{E}_\lambda z_0, z_0) = 0 \quad (n \neq k).$$

Теперь мы можем непосредственно вычислить коэффициенты h_n и l_{n-1} . Умножая первое из равенств (28') на r_n , получим

$$0 = (r_n, r_n) - h_n (Ag_n, r_n),$$

откуда

$$h_n = \frac{\|r_n\|^2}{(Ag_n, g_n)}.$$

Умножение второго из равенств (28') на Ag_{n-1} дает

$$0 = (r_n, Ag_{n-1}) + l_{n-1} (Ag_{n-1}, g_{n-1}),$$

но

$$(r_n, Ag_{n-1}) = \frac{1}{h_{n-1}} (r_n, r_{n-1} - r_n) = -\frac{1}{h_{n-1}} (r_n, r_n),$$

откуда

$$l_{n-1} = -\frac{(r_n, Ag_{n-1})}{(g_{n-1}, Ag_{n-1})} = \frac{\|r_n\|^2}{h_{n-1} (g_{n-1}, Ag_{n-1})} = \frac{\|r_n\|^2}{\|r_{n-1}\|^2}$$

Обратимся теперь к решению уравнения (26). Из (27) имеем:

$$\begin{aligned} x_n &= A^{-1} [F_{n-1}(A) - F_{n-1}(0) R_n(A)] z_0 = \\ &= A^{-1} [f_n - F_{n-1}(0) r_n], \end{aligned}$$

где $F_{n-1}(A) z_0 = E_n f = f_n$.

Так как элементы $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ образуют ортогональный базис в H_n , то

$$f_n = E_n f = \sum_{k=0}^{n-1} (f, r_k) \frac{r_k}{\|r_k\|^2},$$

$$F_{n-1}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f, r_k)}{\|r_k\|^2} R_k(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f, r_k)}{\|r_k\|^2}.$$

Используя первое из равенств (28'), получим

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= A^{-1} [F_n(A) - F_n(0) R_{n+1}(A)] z_0 = \\
 &= A^{-1} [f_{n+1} - F_n(0) r_{n+1}] = \\
 &= A^{-1} \left[f_n + \frac{(f, r_n) r_n}{\|r_n\|^2} - \left(F_{n-1}(0) + \frac{(f, r_n)}{\|r_n\|^2} \right) (r_n - h_n A g_n) \right] = \\
 &= A^{-1} \left[f_n - F_{n-1}(0) r_n + h_n \left(F_{n-1}(0) + \frac{(f, r_n)}{\|r_n\|^2} A g_n \right) \right] = \\
 &= x_n + h_n F_n(0) g_n.
 \end{aligned}$$

Таким образом, последовательные приближения x_n к решению уравнения $Ax = f$ могут быть получены путем следующего алгоритма:

$$\left. \begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + h_n F_n(0) g_n, \\
 g_n &= r_n + l_{n-1} g_{n-1}, & h_{n-1} &= \frac{\|r_{n-1}\|^2}{(A g_{n-1}, g_{n-1})}, \\
 r_n &= r_{n-1} - h_{n-1} A g_{n-1}, & l_{n-1} &= \frac{\|r_n\|^2}{\|r_{n-1}\|^2}, \\
 F_n(0) &= F_{n-1}(0) + \frac{(f, r_n)}{\|r_n\|^2}, \\
 r_0 &= g_0 = z_0, \quad F_0(0) = \frac{(f, z_0)}{\|z_0\|^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Сформулируем результаты в виде теоремы.

Теорема X. Пусть A — ограниченный самосопряженный определенно положительный (отрицательный) оператор, определенный в гильбертовом пространстве H , и z_0 — любой элемент H . Последовательность элементов x_n , получаемых по формулам (27) или, что то же самое, (29), существует и сходится (сильно) к x — решению уравнения (24), если правая часть принадлежит подпространству H_z .

В частном случае, если принять $z_0 = f$, формулы (27) и (29) упрощаются:

$$x_n = A^{-1} \left[E - \frac{P_n(A)}{P_n(0)} \right] f, \quad (27')$$

и алгоритм, описываемый формулами (29), принимает вид

$$x_{n+1} = x_n + h_n g_n,$$

$$\left. \begin{aligned} g_n &= r_n + l_{n-1} g_{n-1}, & h_{n-1} &= \frac{\|r_{n-1}\|^2}{(A g_{n-1}, g_{n-1})}, \\ r_n &= r_{n-1} - h_{n-1} A g_{n-1}, & l_{n-1} &= \frac{\|r_n\|^2}{\|r_{n-1}\|^2}, \\ r_0 &= g_0 = f, & f - A x_n &= r_n. \end{aligned} \right\} \quad (29')$$

Алгоритм, описываемый формулами (29), носит название «метода сопряженных градиентов» и был предложен М. Хестенсом и Е. Стиффелом [1] для решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно определенной матрицей.

Преимущество более общих формул (27) и (29) перед (27') и (29') состоит в том, что если нами найдено приближенное решение при одной правой части f , то решение при другой правой части может быть непосредственно вычислено по формулам (27) или (29), причем не нужно будет заново вычислять полиномов $P_n(A)$, g_n и r_n .

Полученное приближенное решение тесно связано с вариационной задачей. Как известно, решение уравнения $Ax = f$ реализует минимум квадратичного функционала

$$I(x) = (Ax, x) - 2(f, x). \quad (30)$$

Покажем, что если искать приближенное решение в H_n , то x_n , определяемое формулами (27) и (29), реализует в H_n минимум функционала (30).

Если $x \in H_n$, то $E_n x = x$ и $(f, x) = (f, E_n x) = (f_n, x)$. Кроме того, $(Ax, x) = (A E_n x, E_n x) = (E_n A E_n x, x) = (A_n x, x)$. Таким образом, в H_n

$$I(x) = (A_n x, x) - 2(f_n, x)$$

и, следовательно, x_n — решение уравнения $A_n x_n = f_n$ реализует минимум функционала $I(x)$ в H_n . Отсюда, между прочим, следует очень тесная связь этого метода с «многошаговым» процессом наискорейшего спуска Л. Канторовича [3].

Выражение приближенного решения в форме (27) и (29) позволяет дать оценку достигнутой точности.

Пусть x_* — искомое решение и η_n — погрешность приближенного решения x_n .

$$\eta_n = x_* - x_n = A^{-1}f - x_n = A^{-1}(f - f_n) + \\ + A^{-1} \frac{F_{n-1}(0)}{P_n(0)} P_n(A) z_0 = A^{-1}(f - f_n) + A^{-1} F_{n-1}(0) r_n.$$

Так как норма обратного оператора не превосходит $\frac{1}{m}$, то

$$\|\eta_n\| \leq \frac{1}{m} [\|f - f_n\| + |F_{n-1}(0)| \cdot \|r_n\|]. \quad (31)$$

В случае, когда $z_0 = f$, оценка упрощается

$$\|\eta_n\| \leq \frac{\|r_n\|}{m}. \quad (31')$$

Вместо оценки (31) можно получить более простую оценку, дающую представление о скорости сходимости процесса. Как это следует из вариационной задачи, величина

$$(A\eta_n, \eta_n) = \left(\frac{P_n(A)}{P_n(0)} f, A^{-1} \frac{P_n(A)}{P_n(0)} f \right) \quad (32)$$

достигает наименьшего значения, если $P_n(\lambda)$ — ортогональный полином, то есть если мы в формулу (32) вместо полинома $\frac{P_n(A)}{P_n(0)}$ подставим любой другой полином от A n -й степени, нормированный так, что его свободный член равен единице, то величина $(A\eta_n, \eta_n)$ может только увеличиться. Поэтому

$$(A\eta_n, \eta_n) \leq (T_n(A)f, A^{-1}T_n(A)f),$$

где $T_n(\lambda)$ — полином Чебышева, наименее отклоняющийся от нуля в промежутке $[m, M]$ и нормированный так, что $T_n(0) = 1$. Полученное неравенство можно упростить

$$(A\eta_n, \eta_n) \leq \frac{1}{m} \|T_n(A)f\|^2 \leq \frac{L_n^2}{m} \|f\|^2,$$

где L_n — максимум модуля $T_n(\lambda)$ в промежутке $[m, M]$. Таким образом, получаем

$$\|\eta_n\| \leq \frac{L_n}{m} \|f\|. \quad (33)$$

Отметим, что оценка (31) более точная, чем (33).

Перейдем к рассмотрению не положительно определенных операторов. Начнем с рассмотрения самосопряженных операторов, спектр которых обладает следующим свойством: по одну сторону от нуля он состоит из конечного числа собственных значений, пусть это будут $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < -\sigma$; по другую сторону от нуля ($\lambda > 0$) мы никаких дополнительных предположений делать не будем.

Из сходимости спектральных функций $\mathcal{E}_\lambda^{(n)}$ к $\mathcal{E}_\lambda$ и из вариационной постановки задачи следует, что при возрастании n наименьшие k корней полиномов $P_n(\lambda)$, убывая, стремятся к собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Так как на участке $[-\sigma, \sigma]$ нет точек спектра оператора A , то $(\mathcal{E}_\lambda z_0, z_0)$ в этом промежутке постоянна. По свойству 3) ортогональных многочленов в нем может быть не более одного корня полинома $P_n(\lambda)$, который при возрастании n будет стремиться к $\lambda_k < -\sigma$ и, следовательно, при некотором n выйдет из этого промежутка. Поэтому для таких n x_n — приближенное решение уравнения (24), определяемое формулой (25), будет иметь вид

$$x_n = \int_m^M \varphi(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} f = \int_m^M \frac{1}{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} f = A_n^{-1} f_n.$$

Легко видеть, что x_n в этом случае также удовлетворяет уравнению $A_n x_n = f_n$ и может быть вычислен по формулам (27) и (27').

Таким образом нами получена следующая

Теорема XI. Пусть A — самосопряженный линейный ограниченный оператор, определенный в гильбертовом пространстве H и имеющий ограниченный обратный оператор. Если спектр оператора A по одну сторону от нуля состоит из конечного числа собственных значений, а по другую сторону ограничен, то, начиная с некоторого n , x_n , определяемые формулами (27) и (27'), существуют и с возрастанием n последовательность x_n сильно сходится к решению уравнения (24), если правая часть принадлежит подпространству H_z .

При фактическом вычислении приближенных решений в случае самосопряженного оператора неудобно пользоваться формулами (27) и (27'), так как, кроме элементов ортого-

нальной последовательности p_k , дополнительно приходится вычислять и $z_k = A^k z_0$. Алгоритм же, определяемый формулами (29) и (29'), может отказать, если оператор не положительно определен, так как для некоторых n приближенного решения x_n может и не существовать ($P_n(0) = 0$), что приведет к обращению в бесконечность некоторых из коэффициентов h_n .

Приведем формулы, позволяющие непосредственно выразить приближенное решение x_n через ортогональные элементы $p_0, p_1, \dots$.

Так как x_n принадлежит H_n , то его можно представить в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k.$$

Подставляя в уравнение

$$A_n x_n = f_n$$

и пользуясь тем, что

$$A_n p_k = p_{k+1} + a_k p_k + b_{k-1} p_{k-1},$$

$$A_n p_0 = p_1 + a_0 p_0,$$

$$A_n p_{n-1} = a_{n-1} p_{n-1} + b_{n-1} p_{n-1},$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (p_{k+1} + a_k p_k + b_{k-1} p_{k-1}) = f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f, p_k)}{\|p_k\|^2} p_k.$$

Приравнивание коэффициентов дает систему уравнений для определения коэффициентов β_k

$$\beta_{k-1} + a_k \beta_k + b_k \beta_{k+1} = \frac{(f, p_k)}{\|p_k\|^2}, \quad \beta_{-1} = \beta_n = 0. \quad (34)$$

Эта система легко решается следующим приемом. Полагая $\beta_{n-1}^{(0)} = 1$, вычисляем последовательно $\beta_k^{(0)}$ по формулам

$$\beta_{k-1}^{(0)} = \frac{(f, p_k)}{\|p_k\|^2} - a_k \beta_k^{(0)} - b_k \beta_{k+1}^{(0)} \quad (k = n-1, \dots, 0).$$

При этом мы, наверное, получим $\beta_{-1}^{(0)}$ не равным нулю. Отбрасывая теперь правые части в уравнениях (34) и полагая

$\beta_{n-1}^{(1)} = 1$, вычисляем последовательно $\beta_k^{(1)}$

$$\beta_{k-1}^{(1)} = -\alpha_k \beta_k^{(1)} - b_k \beta_{k+1}^{(1)}.$$

$\beta_{-1}^{(1)} \neq 0$, если приближенное решение x_n существует, что всегда будет иметь место при достаточно больших n согласно теореме X. Разность

$$\beta_k = \beta_k^{(0)} - \frac{\beta_{-1}^{(0)}}{\beta_{-1}^{(1)}} \beta_k^{(1)}$$

дает решение системы (34).

Если выбрать $z_0 = p_0 = f$, то вычисления сильно упрощаются. Система (34) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \beta_{k-1} + a_k \beta_k + b_k \beta_{k+1} &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ \beta_{-1} + a_0 \beta_0 + b_0 \beta_1 &= 1, \\ \beta_{-1} &= \beta_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (34')$$

Полагая $\beta_{n-1}^{(0)} = 1$, вычисляем $\beta_k^{(0)}$ по формулам

$$\beta_{k-1}^{(0)} = -a_k \beta_k^{(0)} - b_k \beta_{k+1}^{(0)}, \quad \beta_{-1}^{(0)} = -a_0 \beta_0^{(0)} - b_0 \beta_1^{(0)} + 1.$$

Легко видеть, что решение системы (34') имеет вид

$$\beta_k = \beta_k^{(0)} \frac{1}{1 - \beta_{-1}^{(0)}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

В случае общих ограниченных самосопряженных операторов, имеющих бесконечное множество точек спектра по обе стороны от нуля, некоторые корни ортогональных многочленов — собственные значения операторов A_n , могут быть равны нулю или сколь угодно близки к нему при всех n . Обратные операторы A_n^{-1} могут и не существовать в H_n , однако, если обратный оператор A^{-1} ограничен, то по-прежнему последовательность $x_n = \varphi(A_n) f_n$ сильно сходится к решению уравнения $Ax = f$. Представим f_n в виде суммы $f_n = \bar{f}_n + \bar{g}_n$, где $\bar{f}_n$ — элемент подпространства $\bar{H}_n$, образованного собственными элементами оператора A_n , соответствующими собственным значениям, лежащим вне промежутка $[-\sigma, \sigma]$, и $\bar{g}_n$ — элемент подпространства собственных элементов A_n , соответствующих собственным значениям, ле-

жащим в $[-\sigma, \sigma]$. Легко видеть, что

$$\varphi(A_n)g_n \Rightarrow 0.$$

Действительно,

$$\|\varphi(A_n)g_n\| = \left\| \int_{-\sigma}^{+\sigma} \varphi(\lambda) d\mathfrak{E}_{\lambda}^{(n)} g_n \right\| \leq \max |\varphi(\lambda)| \cdot \|(\mathfrak{E}_{\sigma}^{(n)} - \mathfrak{E}_{-\sigma}^{(n)})g_n\|.$$

Так как $\mathfrak{E}_{\sigma} - \mathfrak{E}_{-\sigma} = 0$ вследствие того, что A не имеет точек спектра внутри $[-\sigma, \sigma]$, то в силу сходимости $\mathfrak{E}_{\lambda}^{(n)}$ к $\mathfrak{E}_{\lambda}$

$$\|(\mathfrak{E}_{\sigma}^{(n)} - \mathfrak{E}_{-\sigma}^{(n)})g_n\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы получили, что последовательность элементов $\bar{x}_n = \varphi(A_n)\bar{f}_n = A_n^{-1}\bar{f}_n$ также сильно сходится к решению уравнения (24). Отметим, что в подпространстве $\bar{H}_n$ обратный оператор A_n^{-1} всегда существует и его норма не превосходит $\frac{1}{\sigma}$.

Покажем, как можно вычислить $\bar{x}_n$. Пусть $\bar{\xi}^{(n)}$ — собственное значение оператора A_n , лежащее в промежутке $[-\sigma, \sigma]$. Представим $\bar{x}_n$ в виде

$$\bar{x}_n = A_n^{-1} \left[\bar{f}_n + C \frac{P_n(A_n)}{A_n - \bar{\xi}^{(n)}E} z_0 \right].$$

Так как $\bar{f}_n$ — элемент подпространства H_n , то его можно представить в виде полинома

$$\bar{f}_n = \bar{F}_{n-1}(A_n)z_0.$$

Выберем постоянную C из условия

$$\bar{F}_{n-1}(0) + C \frac{P_n(0)}{\bar{\xi}^{(n)}} = 0.$$

При выполнении этого условия в выражении для $\bar{x}_n$ справа стоит полином $n-1$ -й степени от A_n и в силу формул (11) мы можем A_n заменить оператором A .

Для приближенного решения получаем окончательное выражение в виде

$$\bar{x}_n = A^{-1} \left[\bar{F}_{n-1}(A) + \frac{\bar{\xi}^{(n)}\bar{F}_{n-1}(0)}{P_n(0)} \frac{P_n(A)}{A - \bar{\xi}^{(n)}E} \right] z_0.$$

Этой формулой следует пользоваться, если один из корней полиномов $P_n(\lambda)$ попадает в промежуток $[-\sigma, \sigma]$. (Попасть может не более одного.) Если же все корни лежат вне $[-\sigma, \sigma]$, то приближенное решение вычисляется по формулам, описанным выше.

Уравнения второго рода

$$x = Ax + f \quad (35)$$

могут быть решены теми же методами.

Если A самосопряжен и ограничен, а оператор $E - A$ положительно определен, что, например, всегда будет иметь место, если $\|A\| < 1$, то решение может быть найдено процессом, вполне аналогичным алгоритму (29):

$$x_{n+1} = x_n + F_n(1) h_n g_n, \quad (36)$$

$$g_n = r_n + l_{n-1} g_{n-1}, \quad h_{n-1} = \frac{\|r_{n-1}\|^2}{(g_{n-1} - A g_{n-1}, g_{n-1})},$$

$$r_n = r_{n-1} - h_{n-1} (g_{n-1} - A g_{n-1}), \quad l_{n-1} = \frac{\|r_n\|^2}{\|r_{n-1}\|^2},$$

$$F_n(1) = F_{n-1}(1) + \frac{(f, r_n)}{\|r_n\|^2},$$

$$r_0 = g_0 = z_0, \quad F_0(1) = \frac{(f, z_0)}{\|z_0\|^2},$$

или, если принять $z_0 = f$,

$$x_{n+1} = x_n + h_n g_n, \quad (36')$$

$$g_n = r_n + l_{n-1} g_{n-1}, \quad h_{n-1} = \frac{\|r_{n-1}\|^2}{(g_{n-1} - A g_{n-1}, g_{n-1})},$$

$$r_n = r_{n-1} - h_{n-1} (g_{n-1} - A g_{n-1}), \quad l_{n-1} = \frac{\|r_n\|^2}{\|r_{n-1}\|^2},$$

$$r_0 = g_0 = f, \quad r_n = f - x_n + A x_n.$$

Если же оператор $E - A$ не положительно определен, но удовлетворяет условиям теоремы XI, то приближенное решение уравнения (35) получается в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k, \quad \dots$$

где β_k определяются из системы уравнений

$$-\beta_{k-1} + (1 - a_k) \beta_k - b_k \beta_{k+1} = \frac{(f, p_k)}{\|p_k\|^2}, \quad \beta_{-1} = \beta_n = 0, \quad (37)$$

решение которой может быть найдено изложенным выше способом.

Исследуем скорость сходимости процесса в предположении, что A — самосопряжен и вполне непрерывен. Для простоты ограничимся рассмотрением наиболее важного случая $z_0 = f$.

Приближенное решение имеет вид

$$x_n = (E - A)^{-1} \left[E - \frac{P_n(A)}{P_n(1)} \right] f.$$

Справа стоит полином от A $n-1$ -й степени со старшим коэффициентом, равным $\frac{1}{P_n(1)}$. В силу проблемы моментов имеем

$$Ax_n - A_n x_n = \frac{1}{P_n(1)} (A^n f - A_n^n f). \quad (38)$$

Так как, по определению оператора A_n , $A_n^n f$ есть проекция $A^n f$ в H_n , то, каков бы ни был полином $Q_{n-1}(\lambda)$, справедливо неравенство

$$\|A^n f - A_n^n f\| \leq \|A^n f - Q_{n-1}(A) f\|. \quad (39)$$

Выберем $Q_{n-1}(\lambda)$ так, что

$$\lambda^n - Q_{n-1}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{n-1}),$$

где $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ — собственные значения оператора A , расположенные в порядке убывания модулей:

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > \dots$$

Напомним, что в подпространстве H_z спектр оператора A прост и все собственные значения различны.

Если разложить f по собственным элементам оператора A :

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, u_k) u_k,$$

то неравенство (39) принимает вид

$$\begin{aligned} \|A^n f - A_n^n f\|^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} [\lambda_k^n - Q_{n-1}(\lambda_k)]^2 (f, u_k)^2 = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_0)^2 \dots (\lambda_k - \lambda_{n-1})^2 (f, u_k)^2 \leq \\ &\leq (|\lambda_0| + |\lambda_n|)^2 \dots (|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|)^2 \sum_{k=n}^{\infty} (f, u_k)^2. \quad (40) \end{aligned}$$

Обозначим теперь через η_n погрешность приближенного решения x_n , тогда $x = x_n + \eta_n$. Подстановка в уравнение (35) дает

$$\eta_n - A\eta_n = Ax_n - x_n + f.$$

Так как $x_n = A_n x_n + f$, то, пользуясь равенством (38), получим

$$\eta_n - A\eta_n = Ax_n - A_n x_n = \frac{1}{P_n(1)} (A^n f - A_n^n f).$$

Из неравенства (40) получаем следующую оценку погрешности приближенного решения:

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| = \|\eta_n\| &\leq \|(E - A)^{-1}\| \cdot (|\lambda_0| + |\lambda_n|) \dots \\ &\dots (|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|) \frac{1}{|P_n(1)|} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} (f, u_k)^2} = \\ &= \|(E - A)^{-1}\| \frac{|\lambda_0| + |\lambda_n|}{|1 - \lambda_0^{(n)}|} \dots \frac{|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|}{|1 - \lambda_{n-1}^{(n)}|} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} (f, u_k)^2}, \quad (41) \end{aligned}$$

где $\lambda_0^{(n)}, \dots, \lambda_{n-1}^{(n)}$ — собственные значения оператора A_n . При возрастании n $\lambda_k^{(n)} \rightarrow \lambda_k$ и $|\lambda_n| \rightarrow 0$, поэтому x_n стремится к x быстрее любой геометрической прогрессии.

Несмотря на довольно быструю сходимость процесса приближений к решению, может оказаться, что если собственные значения исходного оператора медленно убывают, рациональнее использовать метод моментов в комбинации с простым итеративным процессом.

ГЛАВА IV

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Линейные итеративные процессы

Классический процесс Лиувилля—Неймана вычисления решения линейного неоднородного уравнения

$$x = Ax + f \quad (1)$$

строится следующим образом. Задаваясь произвольным элементом x_0 , находят последовательные приближения по формуле

$$x_{n+1} = Ax_n + f.$$

Последовательность x_n согласно теореме V (Банаха) сходится к решению уравнения (1), если $\|A\| < 1$. Недостатками этого метода являются: во-первых, ограниченность круга задач, в которых он может быть использован, так как условие сходимости налагает весьма жесткое условие $\|A\| < 1$; во-вторых, даже в тех задачах, где этот процесс сходится, часто оказывается, что из-за медленной сходимости для фактического вычисления решения с удовлетворительной точностью приходится делать очень большое число приближений. В связи с этим в последние годы разработаны различные методы ускорения сходимости итеративных процессов, позволяющие как расширить круг задач, решаемых итеративными методами, так и сократить количество вычислений.

Методы ускорения сходимости итеративных процессов можно разбить на два типа. К первому типу относятся методы, в которых исходное уравнение (1) заменяется ему эквивалентным

$$x = P(A)x + Q(A)f,$$

где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ — полиномы, причем $Q(\lambda) = \frac{1 - P(\lambda)}{1 - \lambda}$, $P(1) = 1$.

Полином $P(\lambda)$ подбирается так, чтобы норма оператора $P(A)$ была возможно меньше. В случае самосопряженного оператора норму $P(A)$ можно оценить с помощью соотношения

$$P(A)x = \int_m^M P(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda x.$$

Если $|P(\lambda)|$ в промежутке $[m, M]$ не превосходит q , то

$$\|P(A)\| \leq q.$$

Поэтому в работах М. Гавурина [1] и Г. Шортли [1] предлагается использовать полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля в промежутке $[m, M]$, содержащем весь спектр оператора.

Ко второму типу относятся методы, в которых предлагается, не меняя исходного уравнения, использовать ряд вычисленных последовательных приближений для непосредственного нахождения решения. Идея подобных методов была предложена Л. Люстерником [1].

При применении этих методов исходят из следующих соображений: решается уравнение (1) методом последовательных приближений

$$x_{k+1} = Ax_k + f.$$

Оператор A будем считать для простоты самосопряженным и вполне непрерывным. Погрешность k -го приближения $\eta_k = x_* - x_k$ выражается формулой

$$\eta_k = A^k \eta_0,$$

поэтому, если разложить η_0 по собственным элементам оператора A :

$$\eta_0 = \sum_{s=0}^{\infty} a_s u_s,$$

то

$$\eta_k = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_s^k a_s u_s.$$

При возрастании числа итераций члены, соответствующие малым по модулю собственным значениям, будут быстро убывать и при достаточно большом k

$$\left\| \sum_{s=n}^{\infty} \lambda_s^k a_s u_s \right\|^2 \leq |\lambda_n|^k \cdot \sqrt{\sum_{s=n}^{\infty} a_s^2} \approx 0,$$

и

$$\eta_k \approx \sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^k a_s u_s,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — наибольшие по модулю собственные числа.

Аналогичный факт имеет место и для последовательности поправок $\epsilon_k = x_{k+1} - x_k$. А именно:

$$\epsilon_k = A^k \epsilon_0,$$

и при достаточно больших k

$$\epsilon_k \approx \sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s^k (\epsilon_0, u_s) u_s,$$

где мы считаем

$$\left\| \sum_{s=n}^{\infty} \lambda_s^k (\epsilon_0, u_s) u_s \right\| \leq |\lambda_n|^k \sqrt{\sum_{s=n}^{\infty} (\epsilon_0, u_s)^2} \approx 0.$$

Пусть теперь уравнение n -й степени

$$G(\lambda) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda^k \quad (\alpha_0 = 1)$$

имеет своими корнями n наибольших по модулю собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, тогда

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \epsilon_k \approx \sum_{s=0}^{n-1} G(\lambda_s) (\epsilon_0, u_s) u_s = 0$$

и из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \epsilon_k = 0$$

тем или другим способом определяются коэффициенты α_k .

Теперь может быть легко найдено искомое решение. Действительно,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \eta_k \approx \sum_{s=0}^{n-1} G(\lambda_s) a_s u_s = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k (x_* - x_k) \approx 0.$$

Отсюда

$$x \approx \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k}{G(1)}.$$

Этот способ ускорения сходимости итеративного процесса иногда называют методом экстраполяции.

§ 2. Метод моментов и ускорение сходимости линейных итеративных процессов

Вернемся к уравнению

$$x = Ax + f, \quad (1)$$

и будем решать его обычным итеративным процессом, строя последовательные приближения по формуле

$$x_{k+1} = Ax_k + f.$$

Исходное приближение x_0 можно выбрать произвольно.

В процессе приближений удобно вычислять не сами приближения, а поправки к ним. Положим

$$x_{k+1} = x_k + \varepsilon_k.$$

Написав формулы двух последовательных приближений

$$x_k = Ax_{k-1} + f, \quad x_{k+1} = Ax_k + f$$

и вычтя одну из другой, получим

$$\varepsilon_k = A\varepsilon_{k-1}.$$

Таким образом, при использовании итеративного процесса мы фактически вычисляем ряд итераций элемента ε_0

оператором A . Допустим, что нами сделано $l+n$ приближений. Тогда x_{l+n} определяется по формуле

$$x_{l+n} = x_0 + \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l + \dots + \varepsilon_{l+n}.$$

При применении этого метода встает следующий вопрос: нельзя ли получить гораздо более точное решение, если не просто прибавлять последовательно поправки, а перед сложением умножать их на надлежащим образом выбранные коэффициенты и искать приближенное решение в виде

$$x_l^{(n)} = x_0 + \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{l-1} + a_0 \varepsilon_l + \dots + a_{n-1} \varepsilon_{l+n-1} \quad (2)$$

Покажем, как, пользуясь методом моментов, можно фактически вычислить коэффициенты a_j .

Обозначим через η_l погрешность l -го приближения:

$$x_* = x_l + \eta_l,$$

где x_* — искомое решение уравнения (2). Подстановка в уравнение дает

$$\begin{aligned} x_l + \eta_l &= Ax_l + A\eta_l + f = x_{l+1} + A\eta_l, \\ \eta_l &= A\eta_l + \varepsilon_l. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение для погрешности решаем приближенно методом моментов, заменяя оператор A аппроксимирующим оператором A_n таким, что

$$\varepsilon_{l+k} = A_n \varepsilon_{l+k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$E_n \varepsilon_{l+n} = A_n \varepsilon_{l+n-1},$$

где E_n — оператор проектирования в подпространство H_n , составленное из элементов, являющихся линейными комбинациями элементов $\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_{l+n-1}$. Решая уравнение

$$\eta_l^{(n)} = A_n \eta_l^{(n)} + \varepsilon_l, \quad (4)$$

найдем приближенное решение уравнения (1):

$$x_l^{(n)} = x_l + \eta_l^{(n)}.$$

Легко видеть, что $x_l^{(n)}$ как раз имеет вид (2).

Приведем вычисления для $n = 1$ и $n = 2$.

1) $n = 1$

$$\eta_l^{(1)} = (E - A)^{-1} \left[E - \frac{A + \alpha_0 E}{1 + \alpha_0} \right] \varepsilon_l = \frac{\varepsilon_l}{1 + \alpha_0}.$$

Коэффициент α_0 определяется из системы (11) гл. I.

$$\alpha_0 = - \frac{(\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1})}{(\varepsilon_l, \varepsilon_l)},$$

$$x_l^{(1)} = x_l + \frac{(\varepsilon_l, \varepsilon_l)}{(\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}) - (\varepsilon_l, \varepsilon_l)} \varepsilon_l.$$

2) $n = 2$

$$\begin{aligned} \eta_l^{(2)} &= (E - A)^{-1} \left[E - \frac{A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 E}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \right] \varepsilon_l = \\ &= \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} [A + (1 + \alpha_1) E] \varepsilon_l. \end{aligned}$$

Коэффициенты α_0 и α_1 находятся из уравнений

$$(\varepsilon_l, \varepsilon_l) \alpha_0 + (\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}) \alpha_1 + (\varepsilon_l, \varepsilon_{l+2}) = 0,$$

$$(\varepsilon_{l+1}, \varepsilon_l) \alpha_0 + (\varepsilon_{l+1}, \varepsilon_{l+1}) \alpha_1 + (\varepsilon_{l+1}, \varepsilon_{l+2}) = 0.$$

$$x_l^{(2)} = x_l + \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \varepsilon_l + \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \varepsilon_{l+1}.$$

При больших значениях n применение этого способа вычисления $\eta_l^{(n)}$ может оказаться не эффективным из-за большой потери точности при вычислении коэффициентов α_k . Поэтому нужно прибегать к полной или частичной ортогонализации последовательности поправок ε_k . Возьмем в исходном пространстве H какое-либо подпространство R_m , такое, что число его измерений $m \geq n$ и при этом проекции $\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_{l+n-1}$ в R_m были бы линейно-независимы. В частности, можно положить $R_m = H$. В подпространстве R_m произведем ортогонализацию проекций $\varepsilon_l, \dots, \varepsilon_{l+n-1}$, полагая

$$g_0 = \varepsilon_l,$$

$$g_1 = Ag_0 - c_0^{(1)} g_0,$$

$$\dots$$

$$g_{n-1} = Ag_{n-2} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n-1)} g_k,$$

$$c_0^{(1)} = \frac{(P_m A g_0, P_m g_0)}{(P_m g_0, P_m g_0)},$$

$$c_k^{(n-1)} = \frac{(P_m A g_{n-2}, P_m g_k)}{(P_m g_k, P_m g_k)},$$

где P_m — оператор проектирования в R_m . В качестве R_m обычно бывает удобно брать подпространство, определяемое m координатными элементами, что сильно сокращает вычисления скалярных произведений.

Полагая

$$\eta_l^{(n)} = b_0 g_0 + b_1 g_1 + \dots + b_{n-1} g_{n-1}$$

и подставляя в уравнение (4), получаем систему линейных уравнений для определения коэффициентов b_k

$$\sum_{k=0}^{n-1} b_k (g_k, g_s) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k (A g_k, g_s) + (g_0, g_s) \quad (s = 0, 1, \dots, n-1).$$

Неравенство (41) гл. III позволяет оценить и скорость сходимости процесса в случае, когда A самосопряжен и вполне непрерывен

$$\|x_* - x_l^{(n)}\| \leq \| (E - A)^{-1} \| \frac{|\lambda_0| + |\lambda_n|}{|1 - \lambda_0^{(n)}|} \dots \dots \frac{|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|}{|1 - \lambda_{n-1}^{(n)}|} \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_l, u_k)^2}.$$

Так как

$$\varepsilon_l = A^l \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_l, u_k) = \lambda_k^l (\varepsilon_0, u_k),$$

то

$$\|x_* - x_l^{(n)}\| \leq \| (E - A)^{-1} \| \frac{|\lambda_0| + |\lambda_n|}{|1 - \lambda_0^{(n)}|} \dots \dots \frac{|\lambda_{n-1}| + |\lambda_n|}{|1 - \lambda_{n-1}^{(n)}|} |\lambda_n|^l \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} (\varepsilon_0, u_k)^2}. \quad (5)$$

Таким образом, при фиксированном n этот процесс сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем $|\lambda_n|$, в то время как простой итеративный процесс оценивается, как известно, через геометрическую прогрессию со знаменателем $|\lambda_0|$. Напомним, что в силу вполне непрерывности оператора с увеличением n $|\lambda_n| \rightarrow 0$.

Отметим, что при $|\lambda_0| > 1$ простой итеративный процесс расходится, в то время как при достаточно большом n процесс, описанный выше, будет сходиться к решению уравнения (1).

Другой способ применения метода моментов для ускорения сходимости итеративных процессов был нами рассмотрен в главе о вполне непрерывных операторах, где при рассмотрении метода Лиувилля — Неймана был указан способ преобразования уравнения (1) к виду, позволяющему для нахождения решения применить итеративный метод.

Если теперь метод моментов применять при тех же предположениях, что и метод экстраполяции, то в неравенстве (5) справа в качестве множителя стоит как раз та величина, которую мы считали исчезающе малой, поэтому

$$x_k^{(n)} \approx x_*.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае порядок погрешности приближенных решений, даваемый обоими методами, примерно одинаков, но метод моментов имеет ряд существенных преимуществ:

1) При использовании метода экстраполяции мы не умеем оценивать допускаемую при этом погрешность, так как спектр оператора нам неизвестен. Это обстоятельство может привести к тому, что если попытка ускорения сходимости будет предпринята преждевременно, то мы фактически не улучшим, а испортим приближенное решение. Этого не может случиться при использовании метода моментов, сходимость которого установлена нами при весьма общих предположениях. Кроме того, мы всегда можем эффективно оценить достигнувшую точность.

2) Метод моментов может с успехом применяться для ускорения сходимости итеративного процесса и в случае, когда обычный метод либо вообще не применим, либо не эффективен. Это, наверное, будет иметь место для некоторых несамосопряженных операторов, или если собственные значения плотно прилегают друг к другу и выделение нескольких наибольших из них не имеет смысла. Для метода моментов это обстоятельство не имеет существенного значения, так как он может быть использован даже в предельном случае, когда оператор имеет непрерывный спектр.

Отметим, что последнее свойство особенно важно для решения уравнений в конечных разностях, у которых при мелкой сетке собственные значения плотно прилегают друг к другу, и в пределе при устремлении шага сетки к нулю спектр переходит в непрерывный.

§ 3. Решение уравнений в конечных разностях

Рассмотрим первую краевую задачу для линейного уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} - gu = f(x, y), \quad (6)$$

где a, b, c, d и g — постоянные, $a > 0$, $b > 0$, $g \geq 0$. На контуре области заданы значения функции $u(x, y)$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s).$$

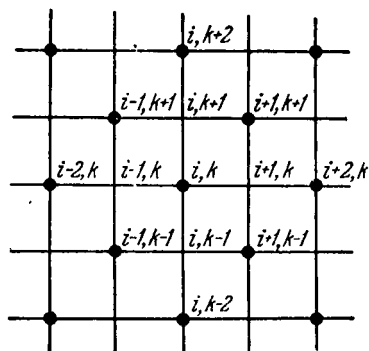
Численные методы решения уравнения (6) приводят к системе линейных уравнений. Используя квадратную сетку и заменяя в уравнении (6) производные конечно-разностными отношениями, получим

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{h}{2} c\right) u_{i+1, k} + \left(a - \frac{h}{2} c\right) u_{i-1, k} + \left(b + \frac{h}{2} d\right) u_{i, k+1} + \\ & + \left(b - \frac{h}{2} d\right) u_{i, k-1} - (2a + 2b + h^2 g) u_{i, k} = h^2 f_{i, k}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $u_{i, k}$ и $f_{i, k}$ — значения функций $u(x, y)$ и $f(x, y)$ в узлах сетки, h — шаг сетки. Допустим для простоты, что граничные узлы сетки совпадают с границей области Γ . Определитель системы уравнений (7) отличен от нуля и, следовательно, эти уравнения всегда разрешимы. Таким образом, задача, казалось бы, решена до конца. Для получения значений функции $u(x, y)$ в узлах сетки достаточно воспользоваться теоремой Крамера о решении систем линейных алгебраических уравнений с помощью определителей. Однако, для того чтобы получить значения неизвестной функции $u(x, y)$ с достаточной точностью, нужно использовать сетку с достаточно мелким шагом, число узлов которой может достигать нескольких сотен. Решение систем такого порядка «точными» алгебраическими методами — задача невыполнимая. Поэтому вопрос об эффективном решении уравнений в конечных разностях приобретает принципиальное значение.

Для решения уравнений в конечных разностях в настоящее время применяются исключительно методы последовательных приближений, но все они страдают одним существенным недостатком. С уменьшением шага сетки, что вызывается желанием уменьшить погрешность замены дифференциальных

уравнений уравнениями в конечных разностях, не только растет число узлов, в которых нужно определять значения потенциала, но и резко падает скорость сходимости последовательных приближений, и, вообще говоря, при стремлении шага сетки к нулю все процессы последовательных приближений перестают сходиться. Это обстоятельство вызвано тем фактом, что при стремлении шага сетки к нулю также стре-



Черт. 1.

мится к нулю и определитель системы уравнений в конечных разностях.

Анализ конечно-разностных операторов, проведенный в работе Л. Люстерника [3], показывает, что более быструю сходимость итеративных процессов дают более точные конечно-разностные уравнения. Использование таких уравнений позволяет удовлетворить уравнению с значительной точностью в сетках с достаточно крупным

шагом. К сожалению, дело осложняется тем, что для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, часто приходится вблизи границ пользоваться тонкой сеткой с мягким шагом, так как никакое уточнение конечно-разностных формул не может учесть всех особенностей как распределения неизвестной функции вдоль границы, так и самой границы.

Начнем с решения уравнений (7) и допустим, что граничные узлы сетки совпадают с границей области, где заданы значения функции $u(x, y)$. Исходим из приближенного решения $u^{(0)}$, которое можно выбрать произвольно. Пусть u^* — искомое решение, тогда, если

$$u^* = u^{(0)} + \eta,$$

то погрешность η удовлетворяет уравнению

$$\left(a + \frac{h}{2}c\right)\eta_{i+1,k} + \left(a - \frac{h}{2}c\right)\eta_{i-1,k} + \left(b + \frac{h}{2}d\right)\eta_{i,k+1} + \left(b - \frac{h}{2}d\right)\eta_{i,k-1} - (2a + 2b + h^2g)\eta_{i,k} = -q_{i,k}, \quad (8)$$

где

$$q_{i,k} = -h^2 f_{i,k} + \left(a + \frac{h}{2}c\right) u_{i+1,k}^{(0)} + \left(a - \frac{h}{2}c\right) u_{i-1,k}^{(0)} + \\ + \left(b + \frac{h}{2}d\right) u_{i,k+1}^{(0)} + \left(b - \frac{h}{2}d\right) u_{i,k-1}^{(0)} - (2a + 2b + h^2g) u_{i,k}^{(0)},$$

и $\eta_{i,k} = 0$ в граничных узлах сетки.

Для решения уравнений (8) исключим половину неизвестных. Выбирая узлы в шахматном порядке (черт. 1) и исключая из уравнений (8) $\eta_{i,k+1}$, $\eta_{i,k-1}$, $\eta_{i+1,k}$, $\eta_{i-1,k}$, получим

$$\eta_{i,k} = \frac{1}{(2a + 2b + h^2g)^2 - 2(a^2 + b^2) + \frac{h^2}{2}(c^2 + d^2)} \times \\ \times \left\{ \left(a + \frac{h}{2}c\right)^2 \eta_{i+2,k} + \left(a - \frac{h}{2}c\right)^2 \eta_{i-2,k} + \right. \\ + \left(b + \frac{h}{2}d\right)^2 \eta_{i,k+2} + \left(b - \frac{h}{2}d\right)^2 \eta_{i,k-2} + \\ + 2\left(a + \frac{h}{2}c\right)\left(b + \frac{h}{2}d\right) \eta_{i+1,k+1} + \\ + 2\left(a - \frac{h}{2}c\right)\left(b + \frac{h}{2}d\right) \eta_{i-1,k+1} + \\ + 2\left(a + \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i+1,k-1} + \\ + 2\left(a - \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i-1,k-1} + \\ + \left(a + \frac{h}{2}c\right) q_{i+1,k} + \left(a - \frac{h}{2}c\right) q_{i-1,k} + \\ + \left(b + \frac{h}{2}d\right) q_{i,k+1} + \left(b - \frac{h}{2}d\right) q_{i,k-1} + \\ \left. + (2a + 2b + h^2g) q_{i,k} \right\}. \quad (9)$$

Эти уравнения связывают неизвестные в узлах, отмеченных на черт. 1 черными кружками.

В узлах, прилегающих к границе области, уравнения несколько меняются. Если например, узел $i-1, k$ лежит на границе (черт. 2), и, следовательно, $\eta_{i-1,k} = 0$, то, исключая

из уравнений (8) $\eta_{i,k+1}$, $\eta_{i+1,k}$, $\eta_{i,k-1}$, получим

$$\eta_{i,k} = \frac{1}{(2a+2b+h^2g)^2 - a^2 - 2b^2 + \frac{h^2}{4}(c^2 + 2d^2)} \times$$

$$\times \left\{ \left(a + \frac{h}{2}c\right)^2 \eta_{i+2,k} + \left(b + \frac{h}{2}d\right)^2 \eta_{i,k+2} + \right.$$

$$+ \left(b - \frac{h}{2}d\right)^2 \eta_{i,k-2} + 2\left(a + \frac{h}{2}c\right)\left(b + \frac{h}{2}d\right) \eta_{i+1,k+1} +$$

$$+ 2\left(a + \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i+1,k-1} +$$

$$+ \left(a - \frac{h}{2}c\right)\left(b + \frac{h}{2}d\right) \eta_{i-1,k+1} +$$

$$+ \left(a - \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i-1,k-1} +$$

$$+ \left(a + \frac{h}{2}c\right) q_{i+1,k} + \left(b + \frac{h}{2}d\right) q_{i,k+1} +$$

$$+ \left(b - \frac{h}{2}d\right) q_{i,k-1} + (2a + 2b + h^2g) q_{i,k} \}. \quad (9')$$

Если же на границе лежат два соседних узла, например и $i-1, k$ и $i, k+1$ (черт. 3), $\eta_{i-1,k} = \eta_{i,k+1} = 0$, то уравнение принимает вид

$$\eta_{i,k} = \frac{1}{(2a+2b+h^2g)^2 - a^2 - b^2 + \frac{h^2}{4}(c^2 + d^2)} \times$$

$$\times \left\{ \left(a + \frac{h}{2}c\right)^2 \eta_{i+2,k} + \left(b - \frac{h}{2}c\right)^2 \eta_{i,k-2} + \right.$$

$$+ 2\left(a + \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i+1,k-1} +$$

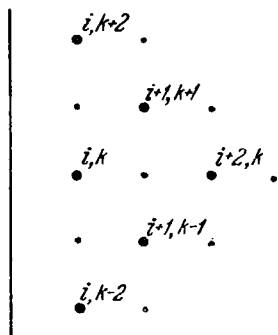
$$+ \left(a + \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i+1,k+1} +$$

$$+ \left(a - \frac{h}{2}c\right)\left(b - \frac{h}{2}d\right) \eta_{i-1,k-1} + \left(a + \frac{h}{2}c\right) q_{i+1,k} +$$

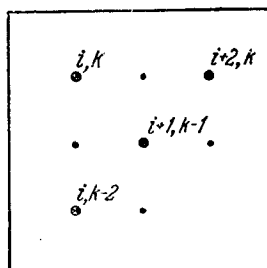
$$+ \left(b - \frac{h}{2}d\right) q_{i,k-1} + (2a + 2b + h^2g) q_{i,k} \}. \quad (9'')$$

Исключение неизвестных преследует две цели. Во-первых, итеративные процессы при решении уравнений (9) сходятся

значительно быстрее, чем для уравнений (8). Во-вторых, уменьшение неизвестных вдвое сокращает работу при вычислении скалярных произведений, необходимых при использовании метода моментов.



Черт. 2.



Черт. 3.

Уравнения (9) удобно решать методом моментов, комбинируя его с итеративным процессом Зейделя, в котором последовательные поправки вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,k}^{(s+1)} = & \frac{1}{(2a + 2b + h^2 g)^3 - 2(a^2 + b^2) + \frac{h^2}{2}(c^2 + d^2)} \times \\ & \times \left\{ \left(a + \frac{h}{2} c \right)^2 \varepsilon_{i+2,k}^{(s)} + \left(a - \frac{h}{2} c \right)^2 \varepsilon_{i-2,k}^{(s+1)} + \right. \\ & + \left(b + \frac{h}{2} d \right)^2 \varepsilon_{i,k+2}^{(s+1)} + \left(b - \frac{h}{2} d \right)^2 \varepsilon_{i,k-2}^{(s)} + \\ & + 2 \left(a + \frac{h}{2} c \right) \left(b + \frac{h}{2} d \right) \varepsilon_{i+1,k+1}^{(s+1)} + \\ & + 2 \left(a - \frac{h}{2} c \right) \left(b + \frac{h}{2} d \right) \varepsilon_{i-1,k+1}^{(s+1)} + \\ & + 2 \left(a + \frac{h}{2} c \right) \left(b - \frac{h}{2} d \right) \varepsilon_{i+1,k-1}^{(s)} + \\ & \left. + 2 \left(a - \frac{h}{2} c \right) \left(b - \frac{h}{2} d \right) \varepsilon_{i-1,k-1}^{(s)} \right\}, \end{aligned}$$

Так, например, при $n = 1$

$$\eta = \varepsilon^{(0)} + \dots + \varepsilon^{(l-1)} + \frac{(\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l)})}{(\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l+1)}) - (\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l)})} \varepsilon^{(l)},$$

а при $n = 2$

$$\eta = \varepsilon^{(0)} + \dots + \varepsilon^{(l-1)} + \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \varepsilon^{(l)} + \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \varepsilon^{(l+1)},$$

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l)}) \alpha_0 + (\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l+1)}) \alpha_1 + (\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l+2)}) &= 0 \\ (\varepsilon^{(l+1)}, \varepsilon^{(l)}) \alpha_0 + (\varepsilon^{(l+1)}, \varepsilon^{(l+1)}) \alpha_1 + (\varepsilon^{(l+1)}, \varepsilon^{(l+2)}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

При больших n нужно произвести ортогонализацию поправок $\varepsilon^{(l+k)}$ так, как это излагалось выше.

Вообще говоря, мы получим лишь приближенное решение, которое в случае необходимости можно опять уточнить зейделевским процессом.

После того как вычислено решение $u_{i,k} = u_{i,k}^{(0)} + \eta_{i,k}$ в отмеченных кружками узлах сетки, значения $u_{i,k}$ в остальных узлах непосредственно вычисляются из уравнений (7).

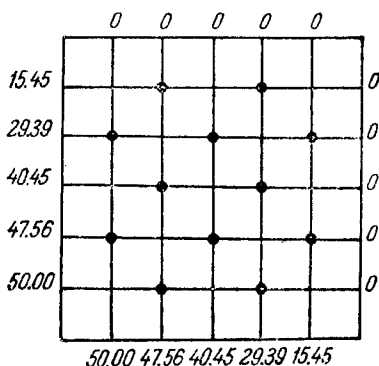
В качестве примера рассмотрим плоскую задачу Дирихле для квадрата (черт. 4).

Уравнения в конечных разностях имеют вид

$$u_{i,k+1} + u_{i+1,k} + u_{i,k-1} + u_{i-1,k} - 4u_{i,k} = 0, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{i+1,k} + \eta_{i-1,k} + \eta_{i,k+1} + \eta_{i,k-1} - 4\eta_{i,k} &= -q_{i,k} \\ q_{i,k} &= u_{i,k+1}^{(0)} + u_{i-1,k}^{(0)} + u_{i+1,k}^{(0)} + u_{i,k-1}^{(0)} - 4u_{i,k}^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta_{i,k} &= \frac{1}{6} (\eta_{i+1,k+1} + \eta_{i-1,k+1} + \eta_{i-1,k-1} + \eta_{i+1,k-1}) + \\ &+ \frac{1}{12} (\eta_{i,k+2} + \eta_{i,k-2} + \eta_{i+2,k} + \eta_{i-2,k}) + \frac{1}{3} q_{i,k} + \\ &+ \frac{1}{12} (q_{i,k+1} + q_{i,k-1} + q_{i+1,k} + q_{i-1,k}), \end{aligned} \quad (9)$$



Черт. 4.

$$\eta_{i, k} = \frac{1}{13} [2(\eta_{i+1, k+1} + \eta_{i+1, k-1}) + \eta_{i-1, k+1} + \eta_{i-1, k-1} + \\ + \eta_{i, k+2} + \eta_{i+2, k} + \eta_{i, k-2}] + \\ + \frac{1}{13} (4q_{i, k} + q_{i, k+1} + q_{i+1, k} + q_{i, k-1}), \quad (9')$$

$$\eta_{i, k} = \frac{1}{14} [2\eta_{i+1, k-1} + \eta_{i+1, k+1} + \eta_{i-1, k-1} + \\ + \eta_{i+2, k} + \eta_{i, k-2}] + \frac{1}{14} (4q_{i, k} + q_{i+1, k} + q_{i, k-1}). \quad (9'')$$

Исходное приближение $u^{(0)}$ имеет вид

$u^{(0)}$						
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
15,45	12,88	10,30	7,72	5,15	2,58	0,00
29,39	24,54	19,69	14,85	10,00	5,15	0,00
40,45	34,05	27,65	21,25	14,85	7,72	0,00
47,56	40,92	34,29	27,65	19,69	10,30	0,00
50,00	45,46	40,92	34,05	24,54	12,88	0,00
	50,00	47,56	40,45	29,39	15,45	

Продолжение

$f_{i, k}$				
— 123	— 91	— 58	— 30	— 2
— 215	— 142	— 74	0	— 30
— 264	— 132	0	— 74	— 58
— 232	— 2	— 132	— 142	— 91
0	— 232	— 264	— 215	— 123

Последовательные поправки $\varepsilon_{i,k}^{(s)}$ вычисляем, пользуясь симметрией решения относительно диагонали:

$\varepsilon^{(0)}$		$\varepsilon^{(1)}$		$\varepsilon^{(2)}$	
— 69	—42	—34	—21	—18	—11
—107	—94	—45	—52	—23	—28
		—67		—36	
—127				—25	
—100		—48			

$$(\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(0)}) = 52\,939, \quad (\varepsilon_0, \varepsilon_1) = 26\,240, \quad (\varepsilon_0, \varepsilon_2) = 13\,869,$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 13\,119, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 6946.$$

Решая уравнения

$$52\,939\alpha_0 + 26\,240\alpha_1 + 13\,869 = 0,$$

$$26\,240\alpha_0 + 13\,119\alpha_1 + 6946 = 0,$$

находим $\alpha_1 = -0,635$, $\alpha_0 = +0,053$.

Таким образом, приближенное значение погрешности имеет вид ($l=0$, $n=2$)

$$\eta = \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \varepsilon^{(0)} + \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} \varepsilon^{(1)} = 0,874\varepsilon^{(0)} + 2,39\varepsilon^{(1)}$$

η		
—143		—87
—202	—206	
—271		
—201		

Складывая с $u^{(0)}$ и вычисляя решение в остальных узлах сетки по формуле

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i,k+1} + u_{i-1,k} + u_{i,k-1} + u_{i+1,k}),$$

получаем значения u_{ik} , приведенные на черт. 5. Это решение обладает несколько большей точностью, чем решение,

	0	0	0	0	0	
15.45	11.71	8.87	6.48	4.28	2.14	0
29.39	22.52	17.28	12.79	8.54	4.28	0
40.45	31.70	24.94	18.86	12.79	6.48	0
47.56	38.91	31.92	24.94	17.28	8.87	0
50.00	44.46	38.91	31.70	22.52	11.71	0
	50.00	47.56	40.45	29.39	15.45	

Черт. 5.

приведенное в справочнике Д. Ю. Панова по численному решению дифференциальных уравнений, полученное с помощью 40 итераций.

ГЛАВА V

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

§ 1. Уравнения с положительно определенными операторами

Возможность аппроксимировать методом моментов линейные операторы позволяет значительно расширить область применения итеративных методов. В частности, мы покажем, что метод моментов может быть с успехом использован для решения различных нестационарных задач. Начнем с решения задачи Коши для уравнения первого порядка относительно времени

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -Ax, \quad (1)$$

где x — элемент гильбертова пространства H , A — линейный симметричный определенно положительный оператор, заданный на всюду плотном в H множестве.

Оператор A , вообще говоря, неограниченный. К уравнению (1) нужно добавить начальные условия при $t=0$

$$x(0) = x_0 \in H.$$

Так как A — определенно положительный оператор, то он имеет ограниченный обратный, который мы будем предполагать заданным во всем H .

Перепишем уравнение (1) в виде

$$A^{-1} \frac{\partial x}{\partial t} + x = 0, \quad (1')$$

Полагая $z_0 = x_0$, $z_1 = A^{-1}z_0$, ..., $z_n = A^{-1}z_{n-1}$, ..., строим последовательность операторов A_n — решений проблемы

моментов, и уравнение (1') заменяем близким к нему уравнением

$$A_n \frac{\partial x_n}{\partial t} + x_n = 0 \quad (2)$$

с начальными условиями $x_n(0) = x_0$.

Если ввести спектральную функцию $\mathcal{E}_\lambda$ обратного оператора A^{-1} , то искомое решение может быть записано в виде

$$x = \int_0^M e^{-\frac{t}{\lambda}} d\mathcal{E}_\lambda x_0,$$

где M — верхняя граница спектра A^{-1} , $M = \|A^{-1}\|$.

Так как функция $e^{-\frac{t}{\lambda}}$ непрерывна при $\lambda \geq 0$ при всех $t \geq 0$ и из сильной сходимости операторов следует сильная сходимость непрерывных функций от них, то последовательность x_n решений уравнений (2) сходится (сильно) к x

$$\|x_n - x\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0;$$

сходимость по времени, конечно, не равномерная.

Покажем, как можно вычислить приближенное решение x_n . Полагая

$$x_n = \eta_0(t) z_0 + \eta_1(t) z_1 + \dots + \eta_{n-1}(t) z_{n-1},$$

подставляя в уравнение (2) и используя формулы (8) гл. I, получим

$$\begin{aligned} \eta_0 z_0 + \left(\eta_1 + \frac{d\eta_0}{dt} \right) z_1 + \dots \\ \dots + \left(\eta_{n-1} + \frac{d\eta_{n-2}}{dt} \right) z_{n-1} + \frac{d\eta_{n-1}}{dt} E_n z_n = 0. \end{aligned}$$

Выражая $E_n z_n$ по формуле (9) гл. I

$$E_n z_n = -\alpha_0 z_0 - \alpha_1 z_1 - \dots - \alpha_{n-1} z_{n-1},$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\eta_0 - \alpha_0 \frac{d\eta_{n-1}}{dt} \right) z_0 + \left(\eta_1 + \frac{d\eta_0}{dt} - \alpha_1 \frac{d\eta_{n-1}}{dt} \right) z_1 + \dots \\ \dots + \left(\eta_{n-1} + \frac{d\eta_{n-2}}{dt} - \alpha_{n-1} \frac{d\eta_{n-1}}{dt} \right) z_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

решение которой методом преобразования Лапласа записывается в следующей форме:

$$\eta_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(\lambda) P_{n-j-1}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda^2 P_n\left(-\frac{1}{\lambda}\right)} e^{\lambda t} d\lambda \quad (j \geq 1),$$

$$\eta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a_0 e^{\lambda t} F(\lambda)}{\lambda P_n\left(-\frac{1}{\lambda}\right)} d\lambda,$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} d\lambda.$$

Перейдем к рассмотрению колебательных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка относительно времени

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -Ax, \quad (6)$$

где A — по-прежнему положительно определенный симметричный оператор. Зададимся начальными условиями при $t = 0$:

$$x(0) = x_0, \quad \frac{\partial x(0)}{\partial t} = \dot{x}_0.$$

С помощью спектральной функции обратного оператора решение уравнения (6) записывается в виде

$$x = \int_0^M \cos \sqrt{\frac{1}{\lambda}} t d\mathcal{E}_\lambda x_0 + \int_0^M \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\frac{1}{\lambda}} t d\mathcal{E}_\lambda \dot{x}_0, \quad (7)$$

где M — верхняя граница спектра A^{-1} , $M = \|A^{-1}\|$. Написанное решение является, вообще говоря, обобщенным решением, так как x_0 и $\dot{x}_0$ могут и не принадлежать области определения оператора A .

Решение (7) представлено в виде суммы двух решений, покажем, что каждое из них может быть определено методом

моментов. Для определенности рассмотрим первое решение

$$x^{(1)} = \int_0^M \cos \sqrt{\frac{1}{\lambda}} t d\mathcal{E}_\lambda x_0.$$

Полагая $z_0 = x_0$, $z_1 = A^{-1}z_0$, ..., $z_n = A^{-1}z_{n-1}$, ... и решая проблему моментов, находим оператор A_n . Уравнение (6) заменяем близким к нему уравнением

$$A_n \frac{\partial^2 x_n^{(1)}}{\partial t^2} = x_n^{(1)}, \quad (8)$$

решение которого имеет вид

$$x_n^{(1)} = \int_0^M \cos \sqrt{\frac{1}{\lambda}} t d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} x_0.$$

Покажем, что при возрастании n последовательность $x_n^{(1)}$ сходится (сильно) к искомому решению $x^{(1)}$.

Так как существует оператор A , обратный оператору A^{-1} , то нуль не является собственным значением оператора A^{-1} , и в нуле спектральная функция $\mathcal{E}_\lambda$ непрерывна. Поэтому по $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\left\| \int_0^\delta \cos \sqrt{\frac{1}{\lambda}} t d\mathcal{E}_\lambda x_0 \right\| \leq \|\mathcal{E}_\delta x_0\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Если δ не принадлежит к точечному спектру оператора A^{-1} , что всегда можно предполагать, так как собственные значения образуют лишь счетное множество, то $\mathcal{E}_\delta^{(n)} x_0 \Rightarrow \mathcal{E}_\delta x_0$, и при достаточно большом n

$$\|\mathcal{E}_\delta^{(n)} x_0 - \mathcal{E}_\delta x_0\| < \frac{\varepsilon}{8},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\delta \cos \sqrt{\frac{1}{\lambda}} t d\mathcal{E}_\lambda^{(n)} x_0 \right\| &\leq \|\mathcal{E}_\delta^{(n)} x_0\| \leq \\ &\leq \|\mathcal{E}_\delta^{(n)} x_0 - \mathcal{E}_\delta x_0\| + \|\mathcal{E}_\delta x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-1} = 0,$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = \frac{d\eta_1}{dt} = \dots = \frac{d\eta_{n-1}}{dt} = 0.$$

Интегрирование этих уравнений производится совершенно аналогично приведенному выше интегрированию уравнений (3).

Вычисление второго решения производится точно таким же образом. Полагая $z_0 = \dot{x}_0$, $z_1 = A^{-1}z_0$, ..., $z_n = A^{-1}z_{n-1}$, ..., мы приходим к системе вида (9) с другими значениями коэффициентов $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ и начальными условиями при $t = 0$:

$$\eta_0 = \dots = \eta_{n-1} = 0,$$

$$\frac{d\eta_0}{dt} = 1, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \dots = \frac{d\eta_{n-1}}{dt} = 0.$$

Перейдем к рассмотрению неоднородной задачи

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -Ax + g \cdot f(t), \quad (10)$$

где $g \in H$, а $f(t)$ — скалярная функция. Начальные условия будем предполагать однородными. Решение уравнения (10) с помощью спектральной функции обратного оператора выражается интегралом

$$x = \int_0^M V_{\bar{\lambda}} \int_0^t f(\xi) \sin \frac{t-\xi}{V_{\bar{\lambda}}} d\xi d\mathcal{E}_{\bar{\lambda}} g$$

и является непрерывной функцией оператора A^{-1} . Поэтому, если положить $z_0 = g$, $z_1 = A^{-1}z_0$, ..., $z_n = A^{-1}z_{n-1}$, ... и решить проблему моментов, то последовательность x_n решений уравнений

$$A_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} + \dot{x}_n = A^{-1} g \cdot f(t) \quad (11)$$

сходится (сильно) к искомому решению x . Элементы последовательности x_n определяются обычным образом.

Полагая

$$x_n = \eta_0(t) z_0 + \eta_1(t) z_1 + \dots + \eta_{n-1}(t) z_{n-1}$$

Операторы M и A симметричные. В силу положительности кинетической энергии оператор M всегда определенно положителен. Если положение равновесия колебательной системы устойчиво в смысле Лагранжа, то оператор A также определенно положителен.

Уравнение малых колебаний имеет вид

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + Ax = 0. \quad (12)$$

Покажем, что это уравнение может быть приведено к уравнению (6). Так как оператор M определенно положителен, то уравнение (12) может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + M^{-1}Ax = 0.$$

Однако оператор $M^{-1}A$ становится несимметричным. Покажем, что если изменить определение скалярного произведения, то оператор $A' = M^{-1}A$ будет симметричным.

Введем новое пространство H' , образованное из элементов H , но в котором скалярное произведение определено следующим образом:

$$[x, y] = (x, My).$$

Круглыми скобками обозначено скалярное произведение в исходном пространстве H , а квадратными в новом H' . Симметричность оператора A' следует из равенств

$$[A'x, y] = (Ax, y) = (x', Ay) = [x, M^{-1}Ay] = [x, A'y].$$

Таким образом, методом моментов могут быть решены многие нестационарные краевые задачи, в частности приводящиеся к уравнениям с переменными коэффициентами — функциями от координат, где метод разделения переменных часто не может быть использован.

§ 2. Колебания систем с конечным числом степеней свободы

Теория малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, в настоящее время довольно хорошо раз-

работана и широко используется при решении различных физических и технических задач. Особенно широкое применение она нашла в теории электрических цепей, следящих систем и систем автоматического регулирования.

Исследование каждой колебательной системы, если априори неясно, что она должна работать в автоколебательном режиме, обычно и начинается с рассмотрения линейной задачи. Уже в самом начале исследователь встречается с рядом трудностей. Прежде всего для теоретического анализа реальная система заменяется идеальной схемой, движение которой в дальнейшем и изучается. При этом чем ближе идеальная схема отражает процессы, происходящие в реальной системе, тем, как правило, выше порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих ее движение. Таким образом, желание возможно точнее описать движение системы, оставаясь в рамках малых колебаний, приводит к математической задаче исследования и решения системы линейных дифференциальных уравнений высокого порядка.

В такого рода задачах классические методы, построенные на алгебраической основе, становятся уже не эффективными и нужно привлекать приближенные методы.

Мы рассмотрим две тесно связанные друг с другом задачи. Первая из них — это интегрирование системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами, когда алгебраические методы уже не эффективны. Вторая, — это задача о снижении порядка системы дифференциальных уравнений. Точнее говоря, приближенная замена данной системы, близкой к ней, но более низкого порядка. При чем под близкой понимается система, у которой при одинаковых возмущениях решения близки к решениям исходной.

На первый взгляд вторая задача не имеет смысла. Система N -го порядка имеет N собственных колебаний, каждое из которых можно возбудить при надлежащем выборе внешнего воздействия на систему. При снижении порядка системы собственные колебания не только искажаются, но и уменьшается их число, и некоторые из них, таким образом, выпадают из рассмотрения. Следовательно, можно ожидать, что если подобрать внешние возмущения так, что возбудятся отброшенные собственные колебания, то процесс в «близкой» системе будет сильно отличаться

от процесса в исходной. Однако в реальных системах внешние возмущения далеко не произвольны. Обычно возмущениям подвергается один или несколько элементов системы, остальные закрыты и движутся лишь вследствие связи их с соседними элементами. В этих условиях некоторые из собственных колебаний системы могут либо вообще не возбуждаться, либо возбуждаться очень мало и заметного влияния на процесс колебаний не оказывать. В такой постановке задача о снижении порядка системы дифференциальных уравнений уже имеет смысл и очень актуальна, так как часто порядок системы уравнений определяется не сутью физической задачи, а той степенью идеализации, которую мы приняли.

Пусть отклонение системы от положения равновесия определяется вектором x N -мерного пространства H . Систему уравнений, описывающих движение системы, будем предполагать приведенной к нормальной форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g \cdot f(t), \quad (13)$$

где A — линейный оператор (матрица) в векторном пространстве H , $g \cdot f(t)$ — вынуждающая сила, причем вектор g — ее «амплитуда», а $f(t)$ — скалярная функция. Начальные условия будем предполагать нулевыми. Впоследствии мы остановимся и на задаче Коши.

Для решения уравнения (13) применим метод моментов. Полагая $z_0 = g$, строим ряд итераций

$$z_0 = g, \quad z_1 = Az_0, \dots, z_n = A^n z_0 = Az_{n-1}, \dots$$

Векторы z_k будем пока предполагать линейно-независимыми.

Решением проблемы моментов является такой оператор A_n , определенный в подпространстве H_n , образованном из векторов, являющихся линейными комбинациями $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, что

$$\left. \begin{aligned} z_k &= A_n^k z_0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \\ E_n z_n &= A_n^n z_0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где E_n — оператор проектирования в H_n . Так как $E_n z_n$ принадлежит H_n , то найдутся такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$E_n z_n = A_n^n z_0 = -\alpha_0 z_0 - \alpha_1 z_1 - \dots - \alpha_{n-1} z_{n-1}, \quad (15)$$

Эти уравнения могут быть решены, например, следующим способом: прежде всего вычисляются корни характеристического уравнения

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0;$$

далее из уравнения

$$\eta_{n-1}^{(n)} + \alpha_{n-1}\eta_{n-1}^{(n-1)} + \dots + \alpha_0\eta_{n-1} = f(t) \quad (21)$$

находится $\eta_{n-1}(t)$ при начальных условиях $\eta_{n-1}(0) = \eta_{n-1}'(0) = \dots = \eta_{n-1}^{(n-1)}(0) = 0$, после чего остальные неизвестные определяются из системы (20) с помощью квадратур.

Перейдем к исследованию вопроса, в какой мере $x_n(t)$ можно считать приближенным решением исходной системы дифференциальных уравнений (13).

Если среди векторов $z_0, z_1, \dots, z_n$ встречаются линейно-зависимые, скажем, z_n — линейно зависит от $z_0, \dots, z_{n-1}$, то $E_n z_n = z_n$ и, как указывалось выше, операторы A и A_n совпадают. В этом случае приближенное решение $x_n(t)$ совпадает с точным. Это всегда будет иметь место при $n \geq N$, так как количество линейно-независимых векторов не может превосходить N — числа измерений пространства.

Если брать n небольшие, такие, что еще $E_n z_n \neq z_n$, то $x_n(t)$ не будет совпадать с точным решением. Обозначим через y_n погрешность приближенного решения

$$x = x_n + y_n.$$

Подстановка в уравнение (13) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{dt} z_0 + \frac{d\eta_1}{dt} z_1 + \dots + \frac{d\eta_{n-1}}{dt} z_{n-1} + \frac{dy_n}{dt} = \\ = \eta_0 z_1 + \eta_1 z_2 + \dots + \eta_{n-1} E_n z_n + \eta_{n-1} (z_n - E_n z_n) + \\ + Ay_n + g \cdot f(t), \end{aligned}$$

откуда для погрешности получаем уравнение

$$\frac{dy_n}{dt} = Ay_n + \eta_{n-1}(t)(z_n - E_n z_n).$$

Кроме того, так как

$$\eta_{n-1}(0) = \eta'_{n-1}(0) = \dots = \eta^{(n-1)}_{n-1}(0) = 0,$$

то

$$y_n(0) = \frac{dy_n(0)}{dt} = \dots = \frac{d^n y_n(0)}{dt^n} = 0.$$

Из уравнения для погрешности и начальных условий следует, что погрешность пропорциональна $\|z_n - E_n z_n\|$, и если последняя мала, то и погрешность можно считать малой. Кроме того, $x_n(t)$ близко к $x(t)$ при небольших значениях t , с возрастанием времени, вообще говоря, погрешность приближенного решения может нарастать.

Укажем два наиболее важных случая, в которых величина $\|z_n - E_n z_n\|$ оказывается малой при $n < N$, и систему дифференциальных уравнений (13) можно приближенно заменить системой (18) более низкого порядка.

Допустим для простоты, что оператор A имеет простую структуру, тогда вектор g — «амплитуда» внешней силы, разлагается по собственным векторам

$$g = \sum_{k=1}^N a_k u_k.$$

Если внешняя сила такова, что некоторые из собственных колебаний возбуждаются слабо, то есть некоторые из коэффициентов a_k малы или равны нулю:

$$\sum_{k=n+1}^N |a_k| < \delta,$$

то легко показать, что величина $\|z_n - \dot{E}_n z_n\|$ будет также малой.

Действительно,

$$z_0 = g = \sum_{k=1}^N a_k u_k, \quad z_1 = \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k u_k, \quad \dots, \quad z_n = \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k^n u_k.$$

Образует разность

$$z_n - \bar{z}_n = Q_n(A) z_0,$$

где

$$Q_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n).$$

По свойству проекции

$$\|z_n - E_n z_n\| \leq \|z_n - \bar{z}_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} Q_n(\lambda_k) a_k u_k \right\|.$$

Если обозначить через $M = \max |Q_n(\lambda_k)|$, а собственные элементы предполагать нормированными, то для разности $\|z_n - E_n z_n\|$ получаем следующую оценку:

$$\|z_n - E_n z_n\| \leq \delta M.$$

Разберем второй случай. Предполагая, что некоторые из собственных чисел малы по модулю:

$$|\lambda_k| < \delta \quad (k = m+1, \dots, N),$$

образуем разность

$$z_n - \tilde{z}_n = G_n(A) z_0,$$

где

$$G_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_m) \lambda^{n-m}.$$

По свойству проекции

$$\|z_n - E_n z_n\| \leq \|z_n - \tilde{z}_n\| = \left\| \sum_{m+1}^N \lambda_k^{n-m} (\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_m) a_k u_k \right\|,$$

откуда

$$\|z_n - E_n z_n\| \leq \delta^{n-m} (|\lambda_1| + \delta) \dots (|\lambda_m| + \delta) \sum_{m+1}^N |a_k|.$$

Таким образом, $\|z_n - E_n z_n\|$ будет мала при $n > m$, если внешнее возмущение таково, что сумма $\sum_{m+1}^N |a_k|$ невелика.

Во многих колебательных системах мы имеем обратную картину: с возрастанием номера собственные значения быстро растут по модулю и норма оператора велика, хотя он и ограничен. В таких системах процесс приближений сходится значительно быстрее, если итерировать не сам оператор A , входящий в уравнение колебаний (13), а ему обратный.

Перепишав уравнение (13) в виде

$$A^{-1} \frac{dx}{dt} = x + A^{-1} g \cdot f(t), \quad (13')$$

легко приводится к неоднородной задаче подстановкой

$$x = w + x_0,$$

где w находится из неоднородного уравнения

$$\frac{dw}{dt} = Aw - Ax_0, \quad w(0) = 0,$$

которое имеет вид (13).

Отметим, что существует тесная связь между методом моментов и методом определения спектра матриц, предложенным академиком А. Н. Крыловым [1], [2], который и пришел к нему, исходя из системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Общая схема рассуждений при выводе этого метода состоит в следующем. В N -мерном пространстве берется произвольный вектор x и составляется ряд его итераций матрицей A :

$$x, Ax, \dots, A^k x.$$

Тогда в силу конечномерности пространства найдется такое n , что $A^n x$ будет линейной комбинацией векторов $A^k x$ ($k < n$), то есть

$$A^n x + \alpha_{n-1} A^{n-1} x + \dots + \alpha_0 x = 0 \quad (22)$$

или

$$\varphi(A)x = 0;$$

это и дает уравнение для собственных значений

$$\lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0.$$

Коэффициенты α_k находятся из системы уравнений, получаемой проектированием векторного уравнения (22) на оси координат. Подпространство H_n , образованное векторами $x, Ax, \dots, A^{n-1}x$, приводит A и единственный полином n -й степени со старшим коэффициентом, равным единице, обращающийся в нуль в H_n , есть $P_n(\lambda)$ (16). Операторы A и A_n в H_n совпадают, и $\varphi_n(\lambda) = P_n(\lambda)$.

Отсюда следует, что метод моментов, который, как выше отмечалось, для конечных симметричных матриц совпадает с «методом минимальной итерации» К. Ланчоса, отличается в этом случае от метода А. Н. Крылова лишь вычислительной схемой.

Таким образом, изложенный нами способ решения уравнений малых колебаний является по сути дела развитием метода А. Н. Крылова в двух направлениях. Во-первых, конкретизируется выбор исходного элемента при определении спектра, а именно показывается, что рационально брать либо векторную «амплитуду» внешних сил, если решается задача на вынужденные колебания, либо начальные условия в задаче Коши. Подобный выбор гарантирует нам получение решения. Во-вторых, инвариантность метода моментов относительно выбранной системы координат позволяет использовать его для построения приближенного решения, когда число степеней свободы велико и точное решение уравнений затруднительно.

§ 3. Распространение тепла в неоднородном стержне

Рассмотрим распространение тепла в стержне (пластинке) с заданной теплоемкостью c , плотностью ρ и коэффициентом теплопроводности k . Температура в таком стержне удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad a = \frac{k}{c\rho}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Разберем случай, когда $a(x) = \frac{1}{1+x^2}$, начальная температура $\varphi(x, 0) = \frac{1}{2}(1-x^2)$ и на концах стержня $\varphi(-1, t) = \varphi(+1, t) = 0$.

В нашем случае

$$A\varphi = -\frac{1}{1+x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi(-1, t) = \varphi(+1, t) = 0$$

и оператор A положительно определен. Последовательность функций $z_0, z_1, z_2, \dots$ вычисляется по формуле

$$z_k(x) = A^{-1} z_{k-1}, \quad z_0 = \frac{1}{2}(1-x^2),$$

или

$$z_k''(x) = -(1+x^2) z_{k-1}(x), \quad z_k(-1) = z_k(+1) = 0.$$

Производя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} z_0(x) &= \frac{1}{2}(1 - x^2), \\ z_1(x) &= \frac{1}{60}(14 - 15x^2 + x^6) \\ &\dots \end{aligned}$$

Теперь нужно определить скалярное произведение. Можно было бы ввести пространство L_2 , где

$$(z_i, z_k) = \int_{-1}^{+1} z_i(x) \cdot z_k(x) dx,$$

однако в этом примере, так как начальное распределение температуры дважды дифференцируемо и удовлетворяет краевым условиям, удобно воспользоваться следующим определением:

$$[z_i, z_k] = (A_0 z_i, z_k) = - \int_{-1}^{+1} z_i''(x) z_k(x) dx.$$

Теперь по формулам § 1 мы можем выписать решение в первом приближении:

$$\begin{aligned} n=1 \quad \varphi_1(x, t) &= \eta_0(t) z_0(x), \\ \tau_{10} - \alpha_0 \frac{d\eta_0}{dt} &= 0, \quad \eta_0(0) = 1, \\ \alpha_0 &= - \frac{[z_1, z_0]}{[z_1, z_1]} = -0,4571 \end{aligned}$$

и во втором приближении:

$$\begin{aligned} n=2 \quad \varphi_2(x, t) &= \tau_{10}(t) z_0(x) + \eta_1(t) z_1(x), \\ \eta_0 - \alpha_0 \frac{d\eta_1}{dt} &= 0, \\ \frac{d\eta_0}{dt} + \tau_{11} - \alpha_1 \frac{d\eta_1}{dt} &= 0, \\ \tau_{10}(0) &= 1, \quad \eta_1(0) = 0, \\ \alpha_0 &= 10^{-2} \cdot 2,1781, \quad \alpha_1 = -0,50674. \end{aligned}$$

Интегрируя полученные уравнения, находим $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} n=1 \quad \varphi_1(x, t) &= z_0(x) e^{-2,187t}, \\ n=2 \quad \varphi_2(x, t) &= [2,428z_1(x) - 0,1151z_0(x)] e^{-2,177t} - \\ &\quad - [2,428z_1(x) - 1,1151z_0(x)] e^{-21,09t}. \end{aligned}$$

Приведем таблицу распределения температуры в стержне при $t=0,2$ в первом и во втором приближении:

x	φ_1	φ_2
0	0,3229	0,3292
0,2	0,3099	0,3151
0,4	0,2712	0,2725
0,6	0,2066	0,2025
0,8	0,1162	0,1087
1,0	0	0

§ 4. Переходный процесс в системе автоматического регулирования

Рассмотрим систему автоматического регулирования скорости с пятью ступенями усиления.

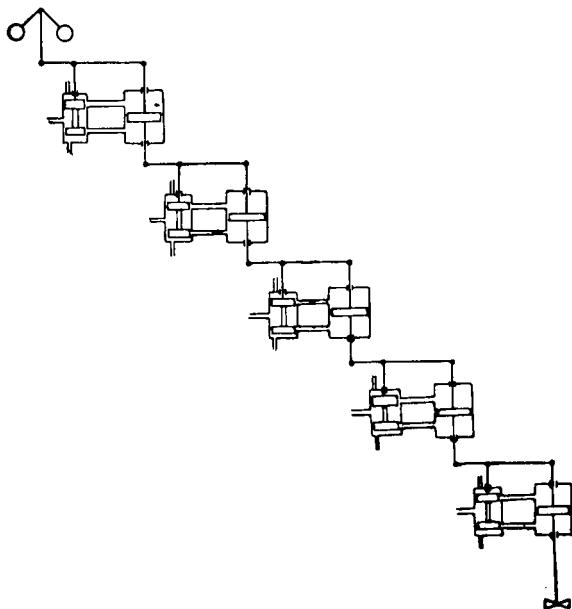
Для принципиальной схемы регулирования с пятью последовательно включенными сервомоторами однократного усиления (на черт. 6 показан простейший вариант такой схемы) уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= -x_1 + f(t), \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{1}{T_1}(x_2 - x_1), & \frac{dx_4}{dt} &= \frac{1}{T_4}(x_5 - x_4), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{T_2}(x_3 - x_2), & \frac{dx_5}{dt} &= \frac{1}{T_5}(x_0 - x_5), \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{T_3}(x_4 - x_3), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где x_0 — безразмерная угловая скорость машины, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — безразмерные координаты поршней соответствующих

сервомоторов, $f(t)$ — внешний момент, приложенный к валу машины.

Мы рассмотрим переходный процесс из одного стационарного состояния в другое. Для этого нужно положить $f(t) \equiv 1$ и при $t=0$ $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.



Черт. 6.

Введем шестимерное пространство векторов с составляющими $x_0, x_1, \dots, x_5$. Правая часть уравнений (23) определяет линейное преобразование (оператор) в этом пространстве, и уравнения (23) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g. \quad (23')$$

Для решения уравнения (23') применим метод моментов. Систему базисных векторов $z_0, z_1, \dots$ находим, итерируя

обратный оператор:

$$Az_0 = g, Az_1 = z_0, \dots, Az_j = z_{j-1}, \dots$$

В координатах эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} -x_1^{(j)} &= x_0^{(j-1)}, & \frac{1}{T_3}(x_4^{(j)} - x_3^{(j)}) &= x_3^{(j-1)}, \\ \frac{1}{T_1}(x_2^{(j)} - x_1^{(j)}) &= x_1^{(j-1)}, & \frac{1}{T_4}(x_5^{(j)} - x_4^{(j)}) &= x_4^{(j-1)}, \\ \frac{1}{T_2}(x_3^{(j)} - x_2^{(j)}) &= x_2^{(j-1)}, & \frac{1}{T_5}(x_0^{(j)} - x_5^{(j)}) &= x_5^{(j-1)}, \end{aligned}$$

где $x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \dots, x_5^{(j)}$ — составляющие вектора z_j ; вектор z_{-1} следует считать равным g . Решая эту систему, получаем рекуррентные формулы, выражающие составляющие вектора z_j через составляющие вектора z_{j-1} .

$$\begin{aligned} x_1^{(j)} &= -x_0^{(j-1)}, \\ x_2^{(j)} &= T_1 x_1^{(j-1)} + x_1^{(j)}, \\ x_3^{(j)} &= T_2 x_2^{(j-1)} + x_2^{(j)}, \\ x_4^{(j)} &= T_3 x_3^{(j-1)} + x_3^{(j)}, \\ x_5^{(j)} &= T_4 x_4^{(j-1)} + x_4^{(j)}, \\ x_0^{(j)} &= T_5 x_5^{(j-1)} + x_5^{(j)}. \end{aligned}$$

Задаваясь численными значениями времен сервомоторов $T_1 = 0,4, T_2 = T_3 = 0,2, T_4 = T_5 = 0,1$ и помня, что $z_{-1} = g$ имеет составляющие $x_0^{(-1)} = 1, x_1^{(-1)} = x_2^{(-1)} = \dots = x_5^{(-1)} = 0$, находим составляющие базисных векторов z_k по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} z_0 &= (-1, -1, -1, -1, -1, -1), \\ z_1 &= (0, 1, 0,6, 0,4, 0,2, 0,1), \\ z_2 &= (0,63, 0, 0,4, 0,52, 0,6, 0,62), \\ z_3 &= (-0,324, -0,630, -0,630, -0,550, -0,446, -0,386), \\ &\dots \end{aligned}$$

Скалярные произведения определяем обычным образом, как сумму произведений составляющих:

$$(z_0, z_0) = 6, \quad (z_0, z_1) = -2,3,$$

$$(z_1, z_1) = 1,57,$$

$$(z_0, z_2) = -2,77, \quad (z_0, z_3) = 2,966,$$

$$(z_1, z_2) = 0,630, \quad (z_1, z_3) = -1,3558,$$

$$(z_2, z_2) = 1,5777, \quad (z_2, z_3) = -1,24904.$$

Запишем теперь уравнения для определения параметров:

$$n = 1 \quad 6\alpha_0 - 2,3 = 0;$$

$$n = 2 \quad \begin{aligned} 6\alpha_0 - 2,3\alpha_1 - 2,77 &= 0, \\ -2,3\alpha_0 + 1,57\alpha_1 + 0,630 &= 0; \end{aligned}$$

$$n = 3 \quad \begin{aligned} 6\alpha_0 - 2,3\alpha_1 - 2,77\alpha_2 + 2,966 &= 0, \\ -2,3\alpha_0 + 1,57\alpha_1 + 0,630\alpha_2 - 1,3558 &= 0, \\ -2,77\alpha_0 + 0,630\alpha_1 + 1,5717\alpha_2 - 1,24904 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$n = 1 \quad \alpha_0 = 0,3833;$$

$$n = 2 \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,7022, \\ \alpha_1 &= 0,6274; \end{aligned}$$

$$n = 3 \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= 0,1718, \\ \alpha_1 &= 0,8042, \\ \alpha_2 &= 0,7751. \end{aligned}$$

Приближенные решения уравнений (23) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} n = 1 \quad x &= \eta_0 \cdot z_0; \\ n = 2 \quad x &= \eta_0 z_0 + \eta_1 z_1; \\ n = 3 \quad x &= \eta_0 z_0 + \eta_1 z_1 + \eta_2 z_2, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где функции $\eta_k(t)$ находятся из уравнений

$$n = 1 \quad -\eta_0 - 0,3833 \frac{d\eta_0}{dt} = 1;$$

$$n = 2 \quad \left. \begin{aligned} -\eta_0 - 0,7022 \frac{d\eta_1}{dt} &= 1, \\ \frac{d\eta_0}{dt} - \eta_1 - 0,6274 \frac{d\eta_1}{dt} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} n=3 \quad & -\eta_0 - 0,1718 \frac{d\eta_2}{dt} = 1, \\ & \frac{d\eta_0}{dt} - \eta_1 - 0,8042 \frac{d\eta_2}{dt} = 0, \\ & \frac{d\eta_1}{dt} - \eta_2 - 0,7751 \frac{d\eta_2}{dt} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Интегрирование этих уравнений при нулевых начальных условиях дает:

$$n=1 \quad \eta_0 = e^{-2,609t} - 1;$$

$$\begin{aligned} n=2 \quad \eta_0 &= e^{-0,4469t} (\cos 1,107t - 0,4037 \sin 1,107t) - 1, \\ \eta_1 &= -e^{-0,4469t} 1,286 \sin 1,107t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n=3 \quad \eta_0 &= 1,111e^{-3,908t} - \\ &- 2e^{-0,3865t} (0,0551 \cos 1,158t - 0,1642 \sin 1,158t) - 1, \\ \eta_1 &= 0,8598e^{-3,908t} - \\ &- 2e^{-0,3865t} (0,4299 \cos 1,158t + 0,6420 \sin 1,158t), \\ \eta_2 &= 1,654e^{-3,908t} - \\ &- 2e^{-0,3865t} (0,8274 \cos 1,158t - 0,0038 \sin 1,158t). \end{aligned}$$

Теперь по формулам (24) мы можем выписать приближенное решение. Проектируя на ось x_0 , получаем следующее выражение для угловой скорости машины:

$$n=1 \quad x_0(t) = -\eta_0(t);$$

$$n=2 \quad x_0(t) = -\eta_0(t);$$

$$n=3 \quad x_0(t) = -\eta_0(t) + 0,63\eta_2(t).$$

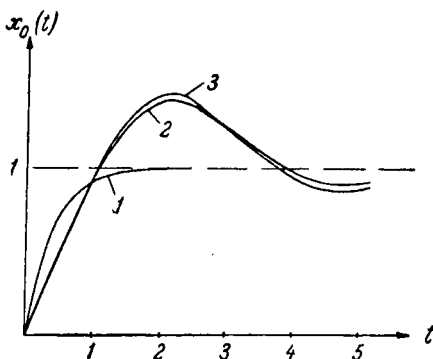
Подставляя выражения функций $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, найдем окончательно:

$$n=1 \quad x_0(t) = 1 - e^{-2,609t};$$

$$n=2 \quad x_0(t) = 1 - e^{-0,4469t} (\cos 1,107t - 0,4037 \sin 1,107t);$$

$$\begin{aligned} n=3 \quad x_0(t) &= 1 - 0,069e^{-3,908t} - \\ &- e^{-0,3865t} (0,931 \cos 1,158t - 0,3332 \sin 1,158t). \end{aligned}$$

На черт. 7 для сравнения приведены графики трех приближений, соответствующих $n=1, 2, 3$, и график точного решения, вычисленного численным интегрированием, причем оказалось, что третье приближение отличается от точного



Черт. 7.

в четвертом знаке, поэтому их графики слились. Для практических целей достаточно уже второго приближения.

§ 5. Колебания самолета с автопилотом типа Сперри

Рассмотрим переходной процесс в системе самолет — автопилот, описываемый линейным дифференциальным уравнением шестого порядка*)

$$\begin{aligned} \frac{d^6 x}{dt^6} + 16,4 \frac{d^5 x}{dt^5} + 107,4 \frac{d^4 x}{dt^4} + 364,2 \frac{d^3 x}{dt^3} + 1146,5 \frac{d^2 x}{dt^2} + \\ + 771,2 \frac{dx}{dt} + 292,1 x = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

с заданными начальными значениями искомой функции $x(t)$ и ее производных при $t=0$:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 20, \quad x''(0) = x'''(0) = x^{IV}(0) = x^V(0) = 0.$$

*) См. Иоффе Г. Ш. [1], В. В. Солодовников [1].

Полагая

$$\begin{aligned}x_0 &= x, & x_2 &= x'', & x_4 &= x^{IV}, \\x_1 &= x' - 20, & x_3 &= x''', & x_5 &= x^V,\end{aligned}$$

преобразуем дифференциальное уравнение (25) в систему

$$\left. \begin{aligned}x'_0 &= x_1 + 20, \\x'_1 &= x_2, \\x'_2 &= x_3, \\x'_3 &= x_4, \\x'_4 &= x_5, \\x'_5 &= -16,4x_5 - 107,4x_4 - 364,2x_3 - 1146,2x_2 - \\&\quad - 771,2x_1 - 292,1x_0 - 1542,4.\end{aligned} \right\} \quad (25')$$

При $t = 0$: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Так же как и в предыдущем примере, введем шестимерное пространство векторов с составляющими $x_0, x_1, \dots, x_5$. Правая часть уравнений (25') определяет линейный оператор в этом пространстве, и систему (25') можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g, \quad (25'')$$

где g имеет составляющие:

$$\begin{aligned}g_0 &= 20, & g_1 &= 0, & g_2 &= 0, & g_3 &= 0, & g_4 &= 0, & g_5 &= -1542,4, \\x(0) &= 0.\end{aligned}$$

Систему базисных векторов $z_0, z_1, \dots$ будем находить, итерируя обратный оператор

$$Az_0 = g, \quad Az_1 = z_0, \quad \dots, \quad Az_j = z_{j-1}, \quad \dots$$

В координатах эти векторные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}x_1^{(j)} &= x_0^{(j-1)}, & x_2^{(j)} &= x_1^{(j-1)}, & x_3^{(j)} &= x_2^{(j-1)}, \\x_4^{(j)} &= x_3^{(j-1)}, & x_5^{(j)} &= x_4^{(j-1)}, \\-16,4x_5^{(j)} &- 107,4x_4^{(j)} - 364,2x_3^{(j)} - 1146,2x_2^{(j)} - \\&- 771,2x_1^{(j)} - 292,1x_0^{(j)} = x_5^{(j-1)},\end{aligned}$$

где $x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \dots, x_8^{(j)}$ — составляющие вектора z_j . Решая эту систему, получаем рекуррентные формулы, выражающие составляющие вектора z_j через составляющие вектора z_{j-1} .

$$\begin{aligned}x_0^{(j)} &= -2,64020x_0^{(j-1)} - 3,92400x_1^{(j-1)} - 1,24684x_2^{(j-1)} - \\&- 0,36768x_3^{(j-1)} - 0,056145x_4^{(j-1)} - 0,0034235x_5^{(j-1)}, \\x_1^{(j)} &= x_0^{(j-1)}, \quad x_2^{(j)} = x_1^{(j-1)}, \quad x_3^{(j)} = x_2^{(j-1)}, \\x_4^{(j)} &= x_3^{(j-1)}, \quad x_5^{(j)} = x_4^{(j-1)}.\end{aligned}$$

Полагая $z_{-1} = g$, находим по этим рекуррентным формулам составляющие базисных векторов z_0, z_1, z_2 :

$$\begin{aligned}z_0 &= (0, 20, 0, 0, 0, 0), \\z_1 &= (-78,4800, 0, +20, 0, 0, 0), \\z_2 &= (+182,266, -78,4800, 0, +20, 0, 0).\end{aligned}$$

Скалярные произведения определяются как сумма произведений составляющих

$$\begin{aligned}(z_0, z_0) &= +400, \quad (z_0, z_1) = 0, \quad (z_0, z_2) = -1569,6, \\(z_1, z_1) &= 6559,1, \quad (z_1, z_2) = -14304,2.\end{aligned}$$

Уравнения для определения параметров α_k имеют вид

$$\begin{aligned}n=1 \quad \alpha_0 &= 0; \\n=2 \quad 400\alpha_0 - 1569,6 &= 0, \quad \alpha_0 = 3,9240, \\6559,1\alpha_1 - 14304,2 &= 0, \quad \alpha_1 = 2,1808.\end{aligned}$$

Приближенные решения уравнений (25') записываются в виде

$$\left. \begin{aligned}n=1 \quad x &= \eta_0 z_0; \\n=2 \quad x &= \eta_0 z_0 + \eta_1 z_1,\end{aligned} \right\} \quad (26)$$

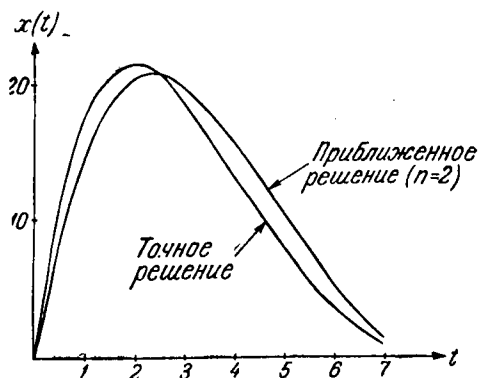
где функции $\eta_k(t)$ находятся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} n=1 & \quad \eta_0 = 1; \\ n=2 & \quad \eta_0 = 3,9240 \frac{d\eta_1}{dt} = 1, \\ & \quad \frac{d\eta_0}{dt} - \eta_1 = 2,1808 \frac{d\eta_1}{dt} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Интегрирование этих уравнений при нулевых начальных условиях дает

$$\begin{aligned} n=1 & \quad \eta_0(t) = 1; \\ n=2 & \quad \eta_0(t) = e^{-0,2779t} \cos 0,4215t - 1 - \\ & \quad - 0,6594e^{-0,2779t} \sin 0,4215t, \\ & \quad \eta_1(t) = -0,6047e^{-0,2779t} \sin 0,4215t. \end{aligned}$$

Теперь по формулам (26) можно выписать приближенные



Черт. 8.

решения. Проектируя на ось x_0 и пользуясь тем, что $x_0 = x(t)$, получим

$$\begin{aligned} n=1 & \quad x(t) = 0; \\ n=2 & \quad x(t) = -78,48\eta_1(t); \end{aligned}$$

или, подставляя выражение $\eta_1(t)$, найдем окончательно

$$n = 1 \quad x(t) \equiv 0;$$

$$n = 2 \quad x(t) = 47,46e^{-0,2779t} \cdot \sin 0,4215t.$$

Для сравнения приведем точное решение дифференциального уравнения (25):

$$\begin{aligned} x(t) = & 0,164e^{-7,150t} \cos(3,35t + 0,732) - \\ & - 1,232e^{-0,648t} \cos(3,72t - 1,342) + \\ & + 59,60e^{-0,377t} \cos(0,428t + 1,57). \end{aligned}$$

На черт. 8 приведены графики второго приближения и точного решения, откуда видно, что уже второе приближение дает для практических целей вполне удовлетворительную точность.

ГЛАВА VI

ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА МОМЕНТОВ

§ 1. Неограниченные операторы

Если исходный оператор не ограничен, то попытка провести схему метода моментов сразу же наталкивается на ряд существенных трудностей принципиального характера.

Ввиду того, что подобные попытки предпринимались без достаточных на то оснований (К. Ланчос), мы считаем необходимым остановиться на этом вопросе.

Пусть A — неограниченный симметричный линейный оператор, определен на линеале L_A — плотном в гильбертовом пространстве H . Прежде всего для постановки проблемы моментов нам нужно иметь такой элемент z_0 , на котором определены все степени оператора A . Вообще говоря, подобного элемента может и не существовать. Допустим все же, что он существует, это, например, будет иметь место, если A имеет простой спектр. Решая проблему моментов, мы можем построить последовательность операторов A_n , таких, что

$$\left. \begin{aligned} z_k &= A^k z_0 = A_n^k z_0 & (k = 0, 1, \dots, n-1), \\ E_n z_n &= A_n^n z_0. \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим линеал L_z элементов вида

$$x = Q_m(A) z_0,$$

где Q_m — произвольный полином, значок m указывает его степень. Очевидно, по самому определению z_0 все элементы L_z принадлежат области определения оператора A : $L_z \subset L_A$. На линеале L_z последовательность операторов A_n сходится

(сильно) к A , так как при $n \geq m + 1$

$$Ax = A_n x.$$

Таким образом, предельный оператор $A' = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ совпадает с A на линеале L_A . Если теперь оператор A' — замыкание оператора A — самосопряжен, так же как и исходный оператор A , то по теореме Ф. Реллиха последовательность спектральных функций операторов A_n сходится (сильно) к спектральной функции оператора A в любой точке, не принадлежащей точечному спектру оператора A . В этом случае говорят, что проблема моментов определена, в противном случае мы не можем утверждать, что спектры операторов A_n стремятся к какому-либо пределу.

Таким образом, использование метода моментов при решении задач с неограниченными операторами связано со значительными трудностями и вряд ли рационально, даже если исходный оператор и самосопряжен. Во-первых, обычно бывает довольно трудно построить элемент z_0 , на котором определены все степени оператора; во-вторых, даже после того, как элемент z_0 построен, еще нет уверенности в том, что решение можно довести до конца, так как проблема моментов может оказаться неопределенной.

Для ограниченных операторов этих трудностей не существует. Операторы всюду определены и мы ничем не связаны при выборе исходного элемента z_0 , который обычно, естественно, выбирается исходя из конкретной задачи. Кроме того, для ограниченных операторов проблема моментов всегда определена и, следовательно, можно быть уверенным, что решение задачи можно будет довести до конца.

В связи с этим встает вопрос, нельзя ли свести задачи с неограниченными операторами к линейным задачам, содержащим лишь ограниченные операторы? В некоторых случаях это удастся сделать.

Пусть линейный (неограниченный) оператор A задан на линеале L_A , плотном в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим уравнение

$$Ax = f \tag{1}$$

и предположим, что оператор A имеет вид

$$A = A_0 - K,$$

где A_0 — положительно определенный самосопряженный оператор, заданный в L_A . Ограничения на оператор K будут наложены ниже.

На линейале L_A введем новое скалярное произведение, полагая:

$$[x, y] = (A_0 x, y).$$

Так как A_0 — положительно определен, то существует такая постоянная $\gamma > 0$, что для всякого $x \in L_A$ справедливо неравенство

$$[x, x] = (A_0 x, x) \geq \gamma^2 \|x\|^2 > 0, \quad x \neq 0.$$

Введя новое скалярное произведение, мы превратили линейал L_A в гильбертово пространство, вообще говоря, неполное. Пополнив его предельными элементами, получим новое пространство H_0 . Линейал L_A всюду плотен в H_0 и все элементы H_0 принадлежат также исходному пространству H .

Если теперь допустить, что оператор K таков, что $T = A_0^{-1}K$ вполне непрерывен в H_0 или, точнее говоря, может быть расширен до вполне непрерывного, то уравнение (1)

$$A_0 x - Kx = f \tag{1}$$

можно заменить ему эквивалентным

$$x - Tx = A_0^{-1}f, \tag{2}$$

для решения которого уже можно применить метод моментов.

В качестве z_0 можно взять $A_0^{-1}f$, определяя его из уравнения

$$A_0 z_0 = f.$$

Далее $z_1 = Tz_0 = A_0^{-1}Kz_0$, откуда

$$A_0 z_1 = Kz_0.$$

Таким образом, элементы последовательности z_k определяются как решения уравнений

$$A_0 z_k = Kz_{k-1}.$$

При вычислении коэффициентов полинома $P_n(\lambda)$ нужно, конечно, скалярные произведения брать в новом пространстве H_0 ,

где

$$[z_i, z_k] = (A_0 z_i, z_k) = (K z_{i-1}, z_k).$$

После чего решение, если оно единственное, можно найти методами, изложенными в гл. II.

Этот способ решения уравнений практически может быть использован лишь в случаях, когда оператор A_0 имеет достаточно простой вид и хорошо изучен.

§ 2. Обобщенный метод моментов

Метод моментов позволяет определить спектр оператора в подпространстве H_z — замыкании линеала L_z , состоящего из элементов вида

$$x = Q_m(A) z_0,$$

где $Q_m(A)$ — произвольный полином. Вообще говоря, подпространство H_z не охватывает всей области определения оператора и зависит от выбора исходного элемента z_0 . Так, например, как нами указывалось, оператор A имеет в H_z всегда простой спектр и каждому собственному значению соответствует лишь один собственный элемент. Если исходный оператор A задан во всем гильбертовом пространстве H и имеет кратные собственные значения, то есть некоторым собственным значениям соответствует не один собственный элемент, а целое подпространство собственных элементов, то, сужая область определения оператора до H_z , мы теряем кратность собственных значений и из всего подпространства собственных элементов находим лишь один. Кроме того, при рассмотрении оператора A лишь в подпространстве H_z мы можем утратить не только собственные элементы, соответствующие кратным собственным значениям, но даже некоторые из собственных значений. В связи с этим представляет интерес обобщить метод моментов так, чтобы иметь возможность исследовать операторы в более широких подпространствах. Это может оказаться полезным и при решении некоторых практических задач.

Рассмотрим обобщенную проблему моментов.

Пусть в гильбертовом пространстве H задан ограниченный линейный оператор A . Исходим из m произвольно выбранных, линейно-независимых элементов $z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, \dots, z_0^{(m)}$.

Образуем подпространство $H_{z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(m)}}$, являющееся замыканием линейала $L_{z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(m)}}$, образованного из элементов вида

$$x = Q_1(A) z_0^{(1)} + Q_2(A) z_0^{(2)} + \dots + Q_m(A) z_0^{(m)},$$

где $Q_j(A)$ — произвольные полиномы.

Совершенно аналогично тому, как мы это делали выше, показывается, что подпространство $H_{z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(m)}}$ приводит оператор A и последовательность $A_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ при безграничном возрастании всех индексов сходится (сильно) к A в подпространстве $H_{z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(m)}}$.

Если A самосопряжен, то отсюда следует и сходимости (сильная) спектральных функций

$$\mathfrak{E}_{\lambda}^{n_1, \dots, n_m} \rightarrow \mathfrak{E}_{\lambda} \quad (n_1, n_2, \dots, n_m \rightarrow \infty).$$

Если же оператор A вполне непрерывен, то сходимости равномерная и собственные значения оператора $A_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ сходятся к собственным значениям A .

Покажем, как вычисляется спектр оператора $A_{n_1, n_2, \dots, n_m}$. Предположим, что элементы (3), составляющие базис подпространства $H_{n_1, n_2, \dots, n_m}$, линейно независимы. Так как $E_{n_1, n_2, \dots, n_m} z_{n_j}^{(j)} \in H_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ ($j = 1, 2, \dots, m$), то найдутся такие числа

$$\alpha_{0j}^{(1)}, \alpha_{1j}^{(1)}, \dots, \alpha_{n_1-1j}^{(1)}, \alpha_{0j}^{(2)}, \alpha_{1j}^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2-1j}^{(2)}, \dots, \alpha_{0j}^{(m)}, \alpha_{1j}^{(m)}, \dots, \alpha_{n_m-1j}^{(m)} \\ (j = 1, 2, \dots, m),$$

что

$$E_{n_1, \dots, n_m} z_{n_j}^{(j)} = -\alpha_{0j}^{(1)} z_0^{(1)} - \alpha_{1j}^{(1)} z_1^{(1)} - \dots - \alpha_{n_1-1j}^{(1)} z_{n_1-1}^{(1)} - \alpha_{0j}^{(2)} z_0^{(2)} - \\ - \alpha_{1j}^{(2)} z_1^{(2)} - \dots - \alpha_{n_2-1j}^{(2)} z_{n_2-1}^{(2)} - \dots - \alpha_{0j}^{(m)} z_0^{(m)} - \alpha_{1j}^{(m)} z_1^{(m)} - \dots \\ \dots - \alpha_{n_m-1j}^{(m)} z_{n_m-1}^{(m)} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Умножая скалярно равенства (7) на базисные элементы (3), получаем систему линейных алгебраических уравнений для

Если же окажется, что при некоторых $n_1, n_2, \dots, n_m$ все элементы $z_{n_1}^{(1)}, \dots, z_{n_m}^{(1)}$ линейно выражаются через предыдущие и принадлежат подпространству $H_{n_1, n_2, \dots, n_m}$, то оно приводит A и $H_{z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(m)}} = H_{n_1, n_2, \dots, n_m}$. Операторы A и $A_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ в этом подпространстве совпадают.

Обобщенный метод моментов может оказаться полезным не только для вычисления спектра операторов в более широких подпространствах, но и при решении некоторых линейных задач.

Мы не будем приводить все возможные применения обобщенного метода моментов и для иллюстрации метода ограничимся лишь одним примером.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -Ax + g_1 f_1(t) + g_2 f_2(t) + \dots + g_{m-1} \cdot f_{m-1}(t), \quad (10)$$

где $g_1, \dots, g_{m-1}$ — заданные элементы гильбертова пространства H ; A — симметричный определенно положительный оператор, вообще говоря, неограниченный; $x \in H$ — искомое решение; $f_1(t), f_2(t), \dots, f_{m-1}(t)$ — скалярные функции.

Для того чтобы полностью определить решение, нужно задаться начальными условиями:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0.$$

Так как A — определенно положительный оператор, то он имеет ограниченный обратный, который мы будем считать заданным во всем H .

Перепишем уравнение (10) в виде

$$A^{-1} \frac{\partial x}{\partial t} + x = A^{-1} g_1 \cdot f_1(t) + \dots + A^{-1} g_{m-1} \cdot f_{m-1}(t). \quad (10')$$

Это уравнение можно было бы решать и методом моментов, представив искомое решение в виде

$$x = x_0(t) + x_1(t) + \dots + x_{m-1}(t),$$

где $x_k(t)$ определяется из уравнений

$$A^{-1} \frac{\partial x_0(t)}{\partial t} + x_0(t) = 0, \quad x_0(0) = x_0,$$

$$A^{-1} \frac{\partial x_k(t)}{\partial t} + x_k(t) = A^{-1} g_k \cdot f_k(t), \quad x_k(0) = 0.$$

Так как оператор A^{-1} самосопряжен, то можно воспользоваться его представлением через спектральную функцию

$$A^{-1} = \int_0^M \lambda d\mathcal{E}_\lambda, \quad M > 0.$$

Искомое решение, как можно убедиться непосредственной проверкой, выражается следующим образом:

$$x = \int_0^M e^{-\frac{t}{\lambda}} d\mathcal{E}_\lambda x_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \int_0^M \left[\int_0^t f_j(\xi) e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\xi)} d\xi \right] d\mathcal{E}_\lambda g_j.$$

Оператор A^{-1} положителен, а функции $e^{-\frac{t}{\lambda}}$, $\int_0^t f_j(\xi) e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\xi)} d\xi$

непрерывны при положительных значениях λ , поэтому из сильной сходимости последовательности операторов $A_{n_1}, \dots, A_{n_m}$ к оператору A следует, что последовательность $x_{n_1}, \dots, x_{n_m}$ сильно сходится к x при неограниченном возрастании индексов.

Покажем, как можно вычислять приближенные решения. Так как $x_{n_1}, \dots, x_{n_m}$ принадлежит подпространству $H_{n_1}, \dots, H_{n_m}$, то он представим в виде

$$x_{n_1}, \dots, x_{n_m} = \sum_{i=1}^m (z_0^{(j)} \eta_0^{(j)}(t) + z_1^{(j)} \eta_1^{(j)}(t) + \dots + z_{n_j-1}^{(j)} \eta_{n_j-1}^{(j)}(t)),$$

где $\eta_k^{(j)}(t)$ — скалярные функции времени.

Подставляя это выражение в уравнение (11), в силу формул (5) получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left(z_1^{(j)} \frac{d\eta_0^{(j)}}{dt} + z_2^{(j)} \frac{d\eta_1^{(j)}}{dt} + \dots + z_{n_j-1}^{(j)} \frac{d\eta_{n_j-2}^{(j)}}{dt} \right) + \\ + \sum_{i=1}^m E_{n_1, \dots, n_m} z_{n_j}^{(j)} \frac{d\eta_{n_j-1}^{(j)}}{dt} + \sum_{j=1}^m (z_0^{(j)} \eta_0^{(j)} + z_1^{(j)} \eta_1^{(j)} + \dots \\ \dots + z_{n_j-1}^{(j)} \eta_{n_j-1}^{(j)}) = \sum_{j=2}^m z_1^{(j)} f_{j-1}(t). \end{aligned}$$

ГЛАВА VII

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Интегральные уравнения

Рассмотрим вещественное интегральное уравнение

$$x(s) = \mu \int_a^b K(s, t) x(t) dt + f(s) \quad (1)$$

и введем гильбертово пространство L_2 , элементы которого есть функции $x(s)$, интегрируемые с квадратом в промежутке $[a, b]$. Скалярное произведение и норма определяются в L_2 следующим образом:

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt}.$$

Если ввести оператор A

$$Ax = \int_a^b K(s, t) x(t) dt,$$

то уравнение (1) записывается в виде

$$x = \mu Ax + f. \quad (2)$$

Оператор A будет вполне непрерывен, если двойной интеграл от квадрата ядра ограничен

$$\int_a^b \int_a^b K^2(s, t) ds dt < +\infty$$
$$\|A\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b K^2(s, t) ds dt.$$

Последовательность $x_n(s)$ сходится в среднем к искомому решению

$$\int_a^b [x(s) - x_n(s)]^2 ds \rightarrow 0$$

не только при условии (3), но и при любом правильном значении μ , когда уравнение (1) разрешимо при произвольном выборе $f(s)$ из L_2 .

Вычисление приближенных решений $x_n(s)$ сильно упрощается, если ядро симметрично, в этом случае обычно можно воспользоваться алгоритмом (36') гл. III:

$$x_{n+1}(s) = x_n(s) + h_n g_n(s),$$

$$g_n(s) = r_n(s) + l_{n-1} g_{n-1}(s),$$

$$r_n(s) = r_{n-1}(s) - h_{n-1} \left[g_{n-1}(s) - \mu \int_a^b K(s, t) g_{n-1}(t) dt \right], \quad (6)$$

$$h_n = \frac{\int_a^b r_n^2(s) ds}{\int_a^b \left[g_n(s) - \mu \int_a^b K(s, t) g_n(t) dt \right] g_n(s) ds},$$

$$l_n = \frac{\int_a^b r_{n+1}^2(s) ds}{\int_a^b r_n^2(s) ds},$$

$$r_0(s) = g_0(s) = f(s),$$

$$r_n(s) = f(s) - x_n(s) + \mu \int_a^b K(s, t) x_n(t) dt.$$

Если имеет место условие (3), то оператор $E - A$ положительно определен, $x_n(s)$ существуют при всех n и сходятся

в среднем к решению уравнения (1). Если же условие (3) не выполняется, то в исключительных случаях при некотором n h_n может обратиться в бесконечность, тогда нужно пользоваться способом, изложенным в гл. III.

Как было показано, $x_n(s)$ стремится к решению быстрее любой геометрической прогрессии.

Решение интегральных уравнений методом моментов связано с вычислением большого количества квадратур. Поэтому иногда может оказаться полезным брать в качестве исходного элемента z_0 не функцию $f(s)$ — свободный член уравнения, а какую-либо другую функцию, для которой квадратуры легко вычисляются, и такую, что $f(s)$ можно с любой точностью аппроксимировать функциями вида

$$\varphi(s) = a_0 z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_n z_n + \dots,$$

тогда решение уравнения можно получить по формулам гл. II и III.

Отметим, что часто бывает рационально применять метод моментов не в чистом виде, а комбинируя его с итеративным процессом.

§ 2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$Ax = \frac{d}{dt}(p(t)x'(t)) + \frac{d}{dt}(q(t)x(t)) + r(t)x(t) = f(t), \quad (7)$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad p(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

и положим

$$Ax = A_0 x + Kx,$$

где

$$A_0 x = \frac{d}{dt}(p(t)x'(t)), \quad Kx = \frac{d}{dt}(q(t)x(t)) + r(t)x(t).$$

Оператор A_0 отрицательно определен на линейном пространстве L_A функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно и равных нулю на

концах промежутка:

$$\begin{aligned} -(A_0 x, x) &= - \int_0^1 \frac{d}{dt} (p x') x dt = \int_0^1 p(t) x'^2(t) dt \geq \\ &\geq \min p(t) \cdot \int_0^1 x'^2(t) dt \geq \frac{\min p(t)}{\pi^2} \int_0^1 x^2(t) dt = \frac{\min p(t)}{\pi^2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Введем новое пространство H_0 , в котором скалярное произведение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} [x, y] &= -(A_0 x, y) = - \int_0^1 \frac{d}{dt} (p x') y dt = \\ &= \int_0^1 p(t) x'(t) y'(t) dt. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что оператор $A_0^{-1} K$ вполне непрерывен в H_0 . Если ввести функцию Грина, то

$$v = A_0^{-1} u = \int_0^1 G(s, t) u(t) dt,$$

поэтому

$$y = A_0^{-1} Kx = \int_0^1 G(s, t) \left[\frac{d}{dt} (qx) + rx \right] dt.$$

Так как G имеет непрерывные первые производные, то

$$y'(s) = \int_0^1 \frac{\partial G(s, t)}{\partial s} \left[\frac{d}{dt} (qx) + rx \right] dt$$

или, заменяя $x(t)$ по формуле

$$x(t) = \int_0^t x'(t) dt$$

и производя интегрирование по частям, получим

$$y'(s) = \int_0^1 N(s, t) x'(t) dt, \quad (8)$$

где

$$N(s, t) = \frac{\partial G(s, t)}{\partial s} q(t) - \int_0^t \frac{\partial G(s, \xi)}{\partial s} (q'(\xi) + r(\xi)) d\xi.$$

Так как функция $N(s, t)$ непрерывна, то выражение (8) определяет вполне непрерывное преобразование, откуда и следует, что оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен.

Таким образом, уравнение (7), если оно имеет единственное решение, может быть решено методом моментов.

Исходная функция $z_0(t)$ находится из уравнения

$$\frac{d}{dt}(p(t) z_0'(t)) = f(t), \quad z_0(0) = z_0(1) = 0,$$

откуда

$$z_0(t) = \int_0^t \frac{1}{p(\xi)} \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi - \frac{\int_0^1 \frac{1}{p(\xi)} \int_0^\xi f(\eta) d\eta d\xi}{\int_0^1 \frac{d\xi}{p(\xi)}} \int_0^t \frac{d\xi}{p(\xi)}.$$

Остальные члены последовательности z_k определяются из уравнений

$$A_0 z_k = K z_{k-1},$$

$$\frac{d}{dt}(p(t) z_k'(t)) = \frac{d}{dt}(q(t) z_{k-1}(t)) + r(t) z_{k-1}(t),$$

при этом

$$\begin{aligned} [z_i, z_k] &= -(A_0 z_i, z_k) = -(K z_i, z_k) = \\ &= - \int_0^1 \left[\frac{d}{dt}(q z_{i-1}) + r z_{i-1} \right] z_k dt. \end{aligned}$$

Дальнейшее вычисление решения идет по обычной схеме. Заменяя уравнение (8) ему эквивалентным

$$x(t) + Tx(t) = A_0^{-1} f(t) = z_0(t), \quad (9)$$

где $T = A_0^{-1}K$, и пользуясь тем, что

$$z_k = Tz_{k-1},$$

можно найти решение методом, изложенным в гл. II.

Отметим лишь, что приближенные решения будут сходиться в H_0 в среднем, то есть

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} [p(t)(x' - x'_n)](x' - x'_n) dt = \int_0^1 p(t)(x' - x'_n)^2 dt \rightarrow 0.$$

Откуда, в силу положительности $p(t)$, следует равномерная сходимость приближенных решений $x_n(t)$ к решению уравнения (7).

Перейдем к проблеме собственных значений.

Так как дифференциальные операторы не ограничены, то непосредственно применять метод моментов для определения их спектра, вообще говоря, нельзя, однако, если оператор самосопряжен

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\mathcal{E}_\lambda,$$

то при вычислении его спектра можно применить метод моментов к ограниченному оператору

$$f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\mathcal{E}_\lambda,$$

где $f(\lambda)$ — ограничена на множестве точек спектра. Найдя собственные значения оператора $f(A)$ (соответствующее уравнение имеет вид: $f(A)u = \mu u$), мы легко вычислим и собственные значения исходного оператора A из уравнения

$$f(\lambda) = \mu,$$

причем собственные элементы у A и $f(A)$ совпадают.

Рассмотрим для примера задачу Штурма — Лиувилля:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{du}{dt} \right] + q(t) u(t) &= \lambda r(t) u(t), \\ u'(a) - \alpha u(a) &= 0, \quad u'(b) + \beta u(b) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $p(t)$, $r(t)$ — строго положительные, непрерывные функции от t в промежутке $a \leq t \leq b$.

Оператор

$$Au = \frac{1}{r(t)} \left[-\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{du}{dt} \right] + q(t) u(t) \right]$$

не ограничен, и его спектр состоит из вещественных собственных значений, причем отрицательных конечное число. Пусть l — вещественно и не совпадает с собственным значением уравнения (10). Тогда оператор $B = \frac{1}{A - lE}$ ограничен, самосопряжен и даже вполне непрерывен. Для определения его спектра можно применить метод моментов.

Покажем, как вычисляются элементы последовательности z_k . В качестве $z_0(t)$ можно взять любую квадратично-интегрируемую функцию. Далее, по определению,

$$z_1(t) = Bz_0(t)$$

или

$$(A - lE) z_1 = z_0.$$

Таким образом, $z_1(t)$ следует находить из неоднородного уравнения

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left[p(t) \frac{dz_1(t)}{dt} \right] + q(t) z_1(t) - lr(t) z_1(t) &= r(t) z_0(t), \\ z_1'(a) - \alpha z_1(a) &= 0, \quad z_1'(b) + \beta z_1(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Аналогично определяются и остальные члены последовательности:

$$(A - lE) z_k(t) = z_{k-1}(t). \quad (11')$$

В качестве скалярного произведения удобно взять выражение

$$(z_i, z_k) = \int_a^b r(t) z_i(t) z_k(t) dt.$$

Дальнейшее вычисление спектра оператора B производится по обычной схеме. Пусть

$$Bu = \mu u,$$

тогда $u(t)$ есть решение уравнения (10), собственные значения находятся по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\mu} + l.$$

Как ранее отмечалось, метод моментов с наибольшей точностью позволяет определить наибольшие по модулю собственные значения оператора. Так как $\mu = \frac{1}{\lambda - l}$, то наибольшие по модулю собственные значения оператора B соответствуют λ , близким к l . Таким образом, меняя l , мы можем вычислять собственные значения и собственные функции в интересующей нас области спектра дифференциального уравнения (10).

Таким способом можно вычислять и собственные значения несамосопряженных дифференциальных уравнений, достаточно лишь, чтобы обратный оператор A^{-1} был вполне непрерывен.

Предложенный способ вычисления собственных значений связан с решением дифференциальных уравнений (11) и (11'). Поэтому иногда может оказаться более рациональным определять оператор B иначе.

Введем фиктивное уравнение в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[p(t) \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial t} \right] - q(t) v(t, \xi) &= r(t) \frac{\partial v(t, \xi)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha v &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \beta v = 0, \\ t = a, \quad t = b, \\ v(t, 0) &= z_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и допустим, что каким-либо из численных методов нами найдено решение при $\xi = h, \xi = 2h, \dots, \xi = nh, \dots$

Перепишем уравнение (12) в операторной форме

$$-Av = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \xi = 0, \quad v = z_0(t).$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$v(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda \xi} d\mathcal{E}_{\lambda} z_0 = e^{-A\xi} z_0.$$

Интегрирование уравнения (14) дает

$$\left. \begin{aligned} v(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos V\bar{\lambda}\xi d\xi_\lambda z_0, \\ v(t, 0) &= z_0(t), \\ v(t, h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos hV\bar{\lambda} d\xi_\lambda z_0, \\ . &. \\ v(t, nh) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos nhV\bar{\lambda} d\xi_\lambda z_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Введем теперь ограниченный оператор B по формуле

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos V\bar{\lambda} d^p \lambda.$$

Степени этого оператора легко вычисляются, если воспользоваться формулами

$$\cos^k V_{\bar{\lambda}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left[\cos k V_{\bar{\lambda}} + \right. \\ \left. + \binom{k}{1} \cos (k-2) V_{\bar{\lambda}} + \dots + \left(\frac{k-1}{2}\right) \cos V_{\bar{\lambda}} \right]$$

при k нечетном и

$$\cos^k V_{\bar{\lambda}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left[\cos k V_{\bar{\lambda}} + \right. \\ \left. + \binom{k}{1} \cos (k-2) V_{\bar{\lambda}} + \dots + \left(\frac{k-2}{2}\right) \cos 2 V_{\bar{\lambda}} \right] + \left(\frac{k}{2}\right) \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}$$

при k четном. Действительно,

$$z_1(t) = Bz_0 = v(t, h),$$

$$\begin{aligned} z_2(t) = B^2 z_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \sqrt{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda z_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{E}_\lambda z_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\sqrt{\lambda} d\mathcal{E}_\lambda z_0 = \frac{1}{2} z_0(t) + \frac{1}{2} v(t, 2h), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$z_k(t) = B^k z_0 = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-1}} \left[v(t, kh) + \binom{k}{1} v(t, (k-2)h) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + \binom{k}{\frac{k-1}{2}} v(t, h) \right] & (k - \text{нечетное}), \\ \frac{1}{2^{k-1}} \left[v(t, kh) + \binom{k}{1} v(t, (k-2)h) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + \binom{k}{\frac{k-2}{2}} v(t, 2h) \right] + \binom{k}{\frac{k}{2}} \frac{z_0(t)}{2^k} & (k - \text{четное}). \end{cases}$$

Далее спектр оператора B находится по обычной схеме метода моментов.

Вычислив μ — собственные значения оператора B , легко найти и собственные значения исходного уравнения (10):

$$\lambda = [\arccos \mu]^2.$$

Собственные функции оператора B дают $u(t)$ — решения уравнения (10).

Для вычисления решения уравнения (14) Милном рекомендуется использовать метод конечных разностей.

§ 3. Уравнения в частных производных с переменными коэффициентами

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами

$$Au = a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - g(x, y) u = f(x, y), \quad (16)$$

где a, b, c, d, g, f непрерывны в конечной области D , a и b положительны, g — неотрицательны.

На контуре области D положим для простоты $u|_{\Gamma} = 0$. Оператор A определен на линеале L_A — функций, имеющих в D непрерывные производные до второго порядка включительно и равных нулю на контуре. На этом линеале введем скалярное произведение

$$(u, v) = \iint_D u \cdot v d\sigma.$$

На этом же линеале определен оператор

$$A_0 u = -a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_0 u,$$

где a_0, b_0, g_0 — постоянные, причем $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $g_0 \geq 0$. Оператор A_0 положительно определен.

Вводя новое скалярное произведение $[u, v] = (A_0 u, v)$ и замыкая линеал L_A , получим гильбертово пространство H_0 .

Применяя к обеим частям уравнения (16) оператор A_0^{-1}

$$A_0^{-1} A u = A_0^{-1} f, \quad (17)$$

приходим к уравнению с оператором $A_0^{-1} A$, ограниченным в пространстве H_0 .

Для решения уравнения (17) можно, вообще говоря, применить метод моментов. Сходимость процесса, даваемого методом моментов, легко устанавливается, если, например, A отрицательно определен или если a и b — положительные постоянные. В первом случае оператор $A_0^{-1} A$ самосопряжен и отрицательно определен в H_0 , во втором случае он

представим в виде суммы тождественного и вполне непрерывного оператора в H_0 .

При решении уравнения (17) методом моментов нужно строить последовательность функций

$$z_0 = A_0^{-1} f, \quad z_1 = A_0^{-1} A z_0, \dots$$

определяемых из уравнений

$$\begin{aligned} & -a_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - b_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + g_0 z_0 = f, \\ & -a_0 \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - b_0 \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + g_0 z_1 = \\ & = a \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + c \frac{\partial z_0}{\partial x} + d \frac{\partial z_0}{\partial y} - g z_0, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Таким образом, этот метод можно использовать лишь для таких областей D , для которых решение уравнения с постоянными коэффициентами

$$-a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g_0 u = h(x, y), \quad u|_{\Gamma} = 0$$

может быть эффективно найдено при любой функции $h(x, y)$. В общем случае приходится переходить к уравнениям в конечных разностях.

Используя квадратную сетку и заменяя в уравнении (16) производные конечно-разностными отношениями, получим

$$\begin{aligned} \bar{A}u = & \left(a_{i,k} + \frac{h}{2} c_{i,k}\right) u_{i+1,k} + \left(a_{i,k} - \frac{h}{2} c_{i,k}\right) u_{i-1,k} + \\ & + \left(b_{i,k} + \frac{h}{2} d_{i,k}\right) u_{i,k+1} + \left(b_{i,k} - \frac{h}{2} d_{i,k}\right) u_{i,k-1} - \\ & - (2a_{i,k} + 2b_{i,k} + h^2 g_{i,k}) u_{i,k} = h^2 f_{i,k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Введя положительно определенный оператор $\bar{A}_0$

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 u = & (2a_0 + 2b_0 + h^2 g_0) u_{i,k} - \\ & - a_0 (u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) - b_0 (u_{i,k+1} + u_{i,k-1}), \\ & a_0 > 0, \quad b_0 > 0, \quad g_0 \geq 0, \end{aligned}$$

можно привести уравнение (18) к виду, удобному для проведения итеративного процесса:

$$\bar{A}u = -\bar{A}_0u + (A + \bar{A}_0)u = h^2f.$$

Применяя к обеим частям равенства оператор $\bar{A}_0^{-1}$, получим

$$u = Tu - h^2\bar{A}_0^{-1}f, \quad (19)$$

$$T = \bar{A}_0^{-1}(\bar{A} + \bar{A}_0).$$

Для решения уравнения (19) применим итеративный процесс. Прежде всего решением уравнений

$$(2a_0 + 2b_0 + h^2g_0)\varepsilon_{i,k}^{(0)} - a_0(\varepsilon_{i+1,k}^{(0)} + \varepsilon_{i-1,k}^{(0)}) - \\ - b_0(\varepsilon_{i,k+1}^{(0)} + \varepsilon_{i,k-1}^{(0)}) = -h^2f_{i,k}$$

находим $\varepsilon^{(0)} = -h^2\bar{A}_0^{-1}f$.

Далее полагаем

$$u^{(1)} = T\varepsilon^{(0)} - h^2\bar{A}_0^{-1}f, \quad u^{(1)} = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}, \quad \varepsilon^{(1)} = T\varepsilon^{(0)},$$

$$\dots \dots \dots u^{(n+1)} = Tu^{(n)} - h^2\bar{A}_0^{-1}f, \quad u^{(n+1)} = u^{(n)} + \varepsilon^{(n)}, \quad \varepsilon^{(n)} = T\varepsilon^{(n-1)},$$

где $\varepsilon^{(n)}$ находится из уравнений:

$$\bar{A}_0\varepsilon^{(n)} = (\bar{A} + \bar{A}_0)\varepsilon^{(n-1)} = \bar{A}u^{(n)} - h^2f, \\ (2a_0 + 2b_0 + h^2g_0)\varepsilon_{i,k}^{(n)} - a_0(\varepsilon_{i+1,k}^{(n)} + \varepsilon_{i-1,k}^{(n)}) - \\ - b_0(\varepsilon_{i,k+1}^{(n)} + \varepsilon_{i,k-1}^{(n)}) = f_{i,k}^{(n)}, \quad (20)$$

где

$$f_{i,k}^{(n)} = -[2(a_{i,k} - a_0) + 2(b_{i,k} - b_0) + h^2(g_{i,k} - g_0)]\varepsilon_{i,k}^{(n-1)} + \\ + (a_{i,k} - a_0 + \frac{h}{2}c_{i,k})\varepsilon_{i+1,k}^{(n-1)} + (a_{i,k} - a_0 - \frac{h}{2}c_{i,k})\varepsilon_{i-1,k}^{(n-1)} + \\ + (b_{i,k} - b_0 + \frac{h}{2}d_{i,k})\varepsilon_{i,k+1}^{(n-1)} + (b_{i,k} - b_0 - \frac{h}{2}d_{i,k})\varepsilon_{i,k-1}^{(n-1)} = \\ = (a_{i,k} + \frac{h}{2}c_{i,k})u_{i+1,k}^{(n)} + (a_{i,k} - \frac{h}{2}c_{i,k})u_{i-1,k}^{(n)} + \\ + (b_{i,k} + \frac{h}{2}d_{i,k})u_{i,k+1}^{(n)} + (b_{i,k} - \frac{h}{2}d_{i,k})u_{i,k-1}^{(n)} - \\ - [2a_{i,k} + 2b_{i,k} + h^2g_{i,k}]u_{i,k}^{(n)} - h^2f_{i,k}.$$

Последовательность $u^{(n)}$ может, вообще говоря, и не сходиться к искомому решению уравнений (18), поэтому для получения решения нужно пользоваться методом моментов. За скалярное произведение, которое используется в методе моментов, нужно брать, так же как и для дифференциальных операторов,

$$[\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}] = (\bar{A}_0 \varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}) = \sum_{i,k} \varepsilon_{i,k}^{(m)} [(2a_0 + 2b_0 + h^2 g_0) \varepsilon_{i,k}^{(n)} - \\ - a_0 (\varepsilon_{i+1,k}^{(n)} + \varepsilon_{i,k-1}^{(n)}) - b_0 (\varepsilon_{i,k+1}^{(n)} + \varepsilon_{i,k-1}^{(n)})] = \sum_{i,k} \varepsilon_{i,k}^{(m)} \cdot f_{i,k}^{(n-1)}.$$

Отметим, что при вычислении $\varepsilon_{i,k}^{(n)}$ в прилегающих к границе узлах можно использовать стандартные уравнения (20). Отличие этих узлов состоит лишь в том, что $f_{i,k}$ имеют другой вид, так как оператор $\bar{A}$ вычисляется по интерполяционным формулам с неравными промежутками.

Постоянные a_0 , b_0 , g_0 выбирают так, чтобы процесс приближений возможно быстрее сходился и вместе с тем уравнения (20) были бы достаточно просты.

Проще всего, конечно, взять $a_0 = b_0$, $g_0 = 0$. Уравнения (20) переходят в обычные уравнения плоской задачи теории потенциала, что позволяет при их решении широко использовать электроинтеграторы.

При численных расчетах за a_0 , b_0 и g_0 рационально брать числа, близкие к средним значениям функции a , b , g в области D . Отметим, что иногда, если коэффициенты a , b , g сильно меняются, можно, разбив D на подобласти, брать a_0 , b_0 , g_0 различными в каждой подобласти. При этом, конечно, приходится изменять и определение скалярного произведения.

Таким образом, решение уравнений в конечных разностях с переменными коэффициентами приводится к последовательному решению уравнений с постоянными коэффициентами. Способы решения таких уравнений были рассмотрены нами в гл. IV § 3.

Продemonстрируем этот метод на примере задачи Дирихле с осевой симметрией:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0.$$

Уравнения в конечных разностях имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \varphi_{i, k+1} + \varphi_{i+1, k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \varphi_{i, k-1} + \\ + \varphi_{i-1, k} - 4\varphi_{i, k} = 0 \quad (k \neq 0), \\ 4\varphi_{i, 1} + \varphi_{i+1, 0} + \varphi_{i-1, 0} - 6\varphi_{i, 0} = 0 \quad (k = 0), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$r = kh.$$

Так как уравнение Лапласа при $r=0$ переходит в

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0,$$

то, положив $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{3}{2}$, в качестве оператора $\bar{A}_0$ можно взять

$$\bar{A}_0 \varphi = 5\varphi_{i, k} - \varphi_{i+1, k} - \varphi_{i-1, k} - \frac{3}{2} (\varphi_{i, k+1} + \varphi_{i, k-1}).$$

Уравнения (20), из которых вычисляются последовательные поправки, принимают вид

$$5\varepsilon_{i, k}^{(n)} - \varepsilon_{i+1, k}^{(n)} - \varepsilon_{i-1, k}^{(n)} - \frac{3}{2} (\varepsilon_{i, k+1}^{(n)} + \varepsilon_{i, k-1}^{(n)}) = f_{i, k}, \quad (20')$$

где ($k > 0$)

$$\begin{aligned} f_{i, k}^{(n)} &= \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\right) \varepsilon_{i, k+1}^{(n-1)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}\right) \varepsilon_{i, k-1}^{(n-1)} + \varepsilon_{i, k}^{(n)} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \varphi_{i, k+1}^{(n)} + \varphi_{i-1, k}^{(n)} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \varphi_{i, k-1}^{(n)} + \\ &\quad + \varphi_{i+1, k}^{(n)} - h^2 f_{i, k} - 4\varphi_{i, k}^{(n)}, \\ f_{i, k}^{(0)} &= \varepsilon_{i, 1}^{(n-1)} - \varepsilon_{i, 0}^{(n-1)} = 4\varphi_{i, 1}^{(n)} + \varphi_{i+1, 0}^{(n)} + \\ &\quad + \varphi_{i-1, 0}^{(n)} - 6\varphi_{i, 0}^{(n)} - h^2 f_{i, 0}. \end{aligned}$$

Последовательные приближения вычисляются итеративным процессом

$$\varphi_{i, k}^{(n)} = \varphi^0 + \varepsilon^0 + \varepsilon^{(1)} + \dots + \varepsilon^{(n)},$$

или методом моментов, где скалярное произведение определяется следующим образом:

$$[\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}] = \sum_{i, k} f_{i, k}^{(n-1)} \cdot \varepsilon_{i, k}^{(m)}.$$

После того как найдено решение уравнений в конечных разностях (21), его можно уточнить, используя более точные уравнения. В задаче с осевой симметрией имеют место следующие соотношения между разностями значений функции в узлах сетки и оператором Лапласа:

$$\begin{aligned}\bar{A}\varphi &= \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \varphi_{i,k+1} + \varphi_{i+1,k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \varphi_{i,k-1} + \\ &\quad + \varphi_{i-1,k} - 4\varphi_{i,k} = h^2 \Delta\varphi + O(h^4) \quad (k > 0), \\ \bar{A}\varphi &= 4\varphi_{i,1} + \varphi_{i+1,0} + \varphi_{i-1,0} - 6\varphi_{i,0} = h^2 \Delta\varphi + O(h^4) \quad (k = 0); \\ L\varphi &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3k} - \frac{1}{12k^2} + \frac{7}{192k^3}\right) \varphi_{i,k+1} + \frac{2}{3} (\varphi_{i+1,k} + \varphi_{i-1,k}) + \\ &\quad + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3k} - \frac{1}{12k^2} - \frac{7}{192k^3}\right) \varphi_{i,k-1} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{384k^3}\right) (\varphi_{i+1,k+1} + \varphi_{i-1,k+1}) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{384k^3}\right) (\varphi_{i+1,k-1} + \varphi_{i-1,k-1}) - \\ &\quad - \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{6k^2}\right) \varphi_{i,k} = h^2 \Delta\varphi + \frac{h^4}{12} \Delta\Delta\varphi + O(h^6) \quad (k > 0), \\ \bar{L}\varphi &= \frac{1}{9} \varphi_{i,2} + \frac{20}{9} \varphi_{i,1} + \frac{2}{3} (\varphi_{i+1,1} + \varphi_{i-1,1}) + \\ &\quad + \frac{1}{3} (\varphi_{i+1,0} + \varphi_{i-1,0}) - \frac{13}{3} \varphi_{i,0} = h^2 \Delta\varphi + \frac{h^4}{12} \Delta\Delta\varphi + O(h^6) \\ &\quad (k = 0).\end{aligned}$$

Таким образом, $L\varphi$ можно представить в виде

$$L\varphi = \bar{A}\varphi + \bar{B}\varphi,$$

где $\bar{B}$ имеет порядок h^4 .

Обозначим через φ^* и φ^{**} решения уравнений в конечных разностях $\bar{A}\varphi^* = 0$ и $\bar{L}\varphi^{**} = 0$.

Функция $\eta = \varphi^{**} - \varphi^*$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{L}\eta = -\bar{L}\varphi^* \quad (22)$$

или

$$\bar{A}\eta + \bar{B}\eta = -L\varphi^*.$$

Так как η имеет порядок малости h^2 , то $\bar{A}\eta = 0(h^4)$, а $\bar{B}\eta = 0(h^6)$, функция $\bar{L}\varphi^*$ имеет порядок малости h^4 . Так как при замене уравнения Лапласа уравнением $\bar{L}\varphi = 0$ пренебрегается членами порядка h^6 , то у нас нет оснований удерживать их и в уравнении (22). Поэтому поправку можно вычислять из уравнения

$$\bar{A}\eta = -L\varphi^* \quad (23)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)\eta_{i,k+1} + \eta_{i+1,k} + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)\eta_{i,k-1} + \eta_{i-1,k} - \\ - 4\eta_{i,k} = f_{i,k} \quad (k > 0), \\ 4\eta_{i,k} + \eta_{i+1,k} + \eta_{i-1,k} - 6\eta_{i,0} = f_{i,0} \quad (k = 0), \end{aligned} \right\} \quad (23')$$

где $f_{i,k} = -\bar{L}\varphi^*$.

Способ решения этих уравнений описан выше.

Таким образом, краевые задачи для уравнений в конечных разностях с переменными коэффициентами можно решать двумя способами:

1) Исходные уравнения в конечных разностях используются лишь для вычисления невязок, а фактически проемами на электроинтеграторе решаются уравнения плоской задачи для уравнения Пуассона. Для обеспечения сходимости процесса приближений и получения решения при минимальном числе итераций нужно использовать метод моментов;

2) Уравнения с переменными коэффициентами с возможной точностью заменяются уравнениями с постоянными коэффициентами так, как это делали в задаче с осевой симметрией. Уравнения с переменными коэффициентами опять используются лишь для вычисления невязок. Уравнения с постоянными коэффициентами после исключения половины неизвестных решаются итеративным процессом с использованием метода моментов для ускорения его сходимости.

§ 4. Изгиб балки переменного сечения

Рассмотрим поперечный изгиб балки с заданным модулем упругости $E \cdot J(\xi)$, находящейся под действием продольной сжимающей силы P и удельной поперечной нагрузки $p(\xi)$. Координата ξ отсчитывается вдоль балки (черт. 9). Изгиба-

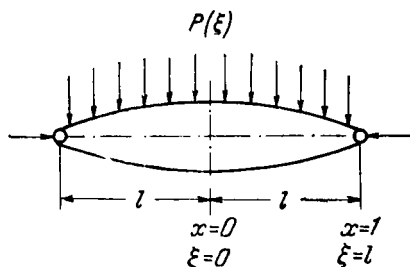
ющий момент удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 M}{d\xi^2} + \frac{P}{EJ(\xi)} M = -p(\xi).$$

Рассмотрим случай, когда модуль упругости дается выражением

$$E \cdot J(\xi) = \frac{EJ_0}{1 + \left(\frac{\xi}{l}\right)^2},$$

а сжимающая сила $P = \frac{EJ_0}{l^2}$; поперечную нагрузку $p(\xi)$ будем считать постоянной. Если ввести безразмерные



Черт. 9.

переменные $x = \frac{\xi}{l}$ и $y = \frac{M}{l^2 p}$, то дифференциальное уравнение запишется в виде

$$-y'' - (1 + x^2)y = +1. \quad (24)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по x . Краевыми условиями при шарнирном закреплении ($M = 0$ в шарнирах) будут

$$y(-1) = y(+1) = 0. \quad (25)$$

В этом примере введенные в § 2 операторы имеют вид

$$Ay = -y'' - (1 + x^2)y,$$

$$A_0 y = -y'', \quad Ky = (1 + x^2)y.$$

Последовательность функций $z_k(x)$ находится из уравнений

$$\begin{aligned} -z_k''(x) &= (1+x^2)z_{k-1}(x), \\ -z_0''(x) &= 1, \quad z_k(-1) = z_k(+1) = 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} z_0(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2), \\ z_1(x) &= \frac{1}{60}(14-15x^2+x^6). \end{aligned}$$

Далее вычисляем скалярные произведения

$$\begin{aligned} [z_0, z_0] &= (A_0 z_0, z_0) = - \int_{-1}^{+1} z_0''(x) z_0(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(1-x^2) dx = 0,666667, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [z_1, z_0] &= - \int_{-1}^{+1} z_1''(x) z_0(x) dx = \int_{-1}^{+1} (1+x^2) z_0^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1-x^4)(1-x^2) dx = 0,304762, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [z_1, z_1] &= [z_1, z_0] = - \int_{-1}^{+1} z_1''(x) z_1(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} (1+x^2) z_1(x) z_0(x) dx = \\ &= \frac{1}{120} \int_{-1}^{+1} (1-x^4)(14-15x^2+x^6) dx = 0,139913, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [z_2, z_1] &= - \int_{-1}^{+1} z_2''(x) z_1(x) dx = \int_{-1}^{+1} (1+x^2) z_1^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{360} \int_{-1}^{+1} (1+x^2)(14-15x^2+x^6)^2 dx = 10^{-2} \cdot 6,42613. \end{aligned}$$

Записав теперь исходное уравнение (24) в виде

$$y = Ty + z_0$$

находим его приближенное решение по формуле (4). Приведем вычисления для $n = 1$ и $n = 2$.

При $n = 1$ $y_1(x) = a_0 z_0(x)$,

$$a_0 = 1 - \frac{\alpha_0}{P_1(1)} = 1 - \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0} = \frac{1}{1 + \alpha_0}, \quad P_1(\lambda) = \lambda + \alpha_0, \quad \text{где}$$

коэффициент α_0 находится из уравнения

$$[z_0, z_0] \alpha_0 + [z_1, z_0] = 0,666667 \alpha_0 + 0,304762 = 0.$$

Производя вычисления, получим:

$$\alpha_0 = -0,457143,$$

$$a_0 = 1,84211,$$

$$y_1(x) = 0,92106(1 - x^2).$$

Во втором приближении, при $n = 2$

$$y_2(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x),$$

где

$$a_0 = 1 - \frac{\alpha_0}{P_2(1)} = 1 - \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_1 + \alpha_0} = \frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0},$$

$$a_1 = a_0 - \frac{\alpha_1}{P_2(1)} = \frac{1}{1 + \alpha_1 + \alpha_0}.$$

Коэффициенты α_0 и α_1 находятся из уравнений

$$\left. \begin{aligned} [z_0, z_0] \alpha_0 + [z_1, z_0] \alpha_1 + [z_2, z_0] &= 0, \\ [z_1, z_0] \alpha_0 + [z_1, z_1] \alpha_1 + [z_2, z_1] &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 0,666667 \alpha_0 + 0,304762 \alpha_1 + 0,139913 &= 0, \\ 0,304762 \alpha_0 + 0,139913 \alpha_1 + 0,0642613 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, будем иметь

$$\alpha_0 = 10^{-2} \cdot 2,1781,$$

$$\alpha_1 = -0,50674,$$

$$a_0 = 0,95771,$$

$$a_1 = 1,9416,$$

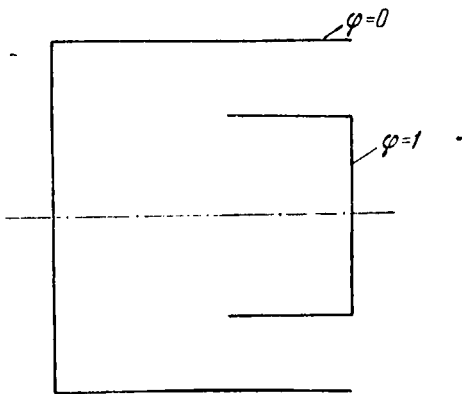
$$y_2(x) = 0,477885(1 - x^2) + 0,032360(14 - 15x^2 + x^6).$$

Для сравнения приведем таблицу приближенных решений и решения, найденного с высокой степенью точности численным интегрированием:

x	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y(x)$
0	0,92106	0,93189	0,93209
0,2	0,88422	0,89332	0,89345
0,4	0,77369	0,77774	0,77772
0,6	0,58948	0,58617	0,58616
0,8	0,33158	0,32325	0,32325
1	0	0	0

§ 5. Расчет поля электростатической электронной линзы

Приведем расчет электрического поля электронной линзы, состоящей из двух ограниченных проводящих круговых цилиндров (черт. 10).



Черт. 10.

Электрический потенциал в пространстве между электродами, если воспользоваться цилиндрической системой координат, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0.$$

На наружном цилиндре $\varphi = 0$ и на внутреннем $\varphi = 1$. Исходное приближение φ^* решенил уравнений в конечных разностях (21) было замерено на электроинтеграторе (черт. 11) (нижние цифры).

φ^*

		+12	-14	+13	+2	+22	+40	-84	+21	-14	-10	-43
6		15	33	54	83	122	173	228	256	271	281	297
		+7	-18	-20	-9	+22	+202	-340	+53	+21	-2	-41
5		31	67	111	170	254	374	525	576	595	607	625
		-4	-18	-33	-51	-150	-564					
4		46	98	162	248	375	584					
		-5	-39	-11	+1	+46	+266	-450	+105	+34	+17	+8
3		58	123	200	300	435	618	839	924	962	981	992
		+7	+2	-3	+3	+5	+70	-132	-5	+3	-9	+2
2		66	139	225	331	463	618	776	875	932	965	985
		+4	-1	-2	-8	+13	-1	-65	-19	+15	+32	+1
1		71	149	239	347	474	615	750	849	913	953	980
		-12	+2	-26	-14	-36	+17	-21	+22	+1	-13	+12
0		73	152	244	352	478	613	742	840	907	950	978

Черт. 11.

Прежде всего, используя более точные формулы, выпишем невязки $f_{i,k} = -\bar{L}\varphi^*$:

$$\begin{aligned}
 f_{i,k} = & \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{6k^2} \right) \varphi_{i,k}^* - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3k} - \frac{1}{12k^2} + \frac{7}{192k^3} \right) \varphi_{i,k+1}^* - \\
 & - \frac{2}{3} (\varphi_{i+1,k}^* + \varphi_{i-1,k}^*) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3k} - \frac{1}{12k^2} - \frac{7}{192k^3} \right) \varphi_{i,k-1}^* - \\
 & - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{384k^3} \right) (\varphi_{i+1,k+1}^* + \varphi_{i-1,k+1}^*) - \\
 & - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{384k^3} \right) (\varphi_{i+1,k-1}^* + \varphi_{i-1,k-1}^*) \quad (k > 0), \\
 f_{i,0} = & \frac{13}{3} \varphi_{i,0}^* - \frac{1}{9} \varphi_{i,2}^* - \frac{20}{9} \varphi_{i,1}^* - \frac{2}{3} (\varphi_{i+1,1}^* + \varphi_{i-1,1}^*) - \\
 & - \frac{1}{3} (\varphi_{i+1,0}^* + \varphi_{i-1,0}^*) \quad (k = 0).
 \end{aligned}$$

Невязки $f_{i,k}$ приведены также на черт. 11 (верхние цифры).

Для вычисления η — погрешности приближенного решения φ^* решаем последовательными приближениями уравнения (23). Первое приближение $\eta^{(0)}$ вычисляем из уравнений (20').

$$5\eta_{i,k}^{(0)} - \eta_{i+1,k}^{(0)} - \eta_{i-1,k}^{(0)} - \frac{3}{2}(\eta_{i,k+1}^{(0)} + \eta_{i,k-1}^{(0)}) = f_{i,k}^{(0)}.$$

Для решения этих уравнений исключим половину неизвестных. Уравнения, связывающие неизвестные в узлах, отмеченных точками на черт. 11, имеют вид

а) Во внутренних узлах

$$\eta_{i,k}^{(0)} = \frac{1}{74} [12(\eta_{i+1,k+1}^{(0)} + \eta_{i-1,k+1}^{(0)} + \eta_{i+1,k-1}^{(0)} + \eta_{i-1,k-1}^{(0)}) + \\ + 4(\eta_{i+2,k}^{(0)} + \eta_{i-2,k}^{(0)}) + 9(\eta_{i,k+2}^{(0)} + \eta_{i,k-2}^{(0)})] + \frac{1}{37} [10f_{i,k} + \\ + 2(f_{i+1,k} + f_{i-1,k}) + 3(f_{i,k+1} + f_{i,k-1})].$$

б) В узлах, прилегающих к торцам цилиндров,

$$(\eta_{i-1,k}^{(0)} = \eta_{i-1,k+1}^{(0)} = \eta_{i-1,k-1}^{(0)} = 0) \\ \eta_{i,k}^{(0)} = \frac{1}{78} [12(\eta_{i+1,k+1}^{(0)} + \eta_{i+1,k-1}^{(0)}) + 4\eta_{i+2,k}^{(0)} + 9(\eta_{i,k+2}^{(0)} + \\ + \eta_{i,k-2}^{(0)})] + \frac{1}{39} [10f_{i,k} + 2f_{i+1,k} + 3(f_{i,k+1} + f_{i,k-1})].$$

Аналогичные формулы имеют место и в узлах, где

$$\eta_{i+1,k}^{(0)} = \eta_{i+1,k+1}^{(0)} = \eta_{i+1,k-1}^{(0)} = 0.$$

в) В узлах, прилегающих к боковым поверхностям цилиндров, где $\eta_{i,k+1}^{(0)} = \eta_{i-1,k+1}^{(0)} = \eta_{i+1,k-1}^{(0)} = 0$,

$$\eta_{i,k}^{(0)} = \frac{1}{83} [12(\eta_{i+1,k-1}^{(0)} + \eta_{i-1,k-1}^{(0)}) + 4(\eta_{i+2,k}^{(0)} + \eta_{i-2,k}^{(0)}) + \\ + 9\eta_{i,k-2}^{(0)}] + \frac{1}{83} [20f_{i,k} + 4(f_{i+1,k} + f_{i-1,k}) + 6f_{i,k-1}].$$

г) В узлах, прилегающих к углам, где $\eta_{i-1,k}^{(0)} = \eta_{i-1,k-1}^{(0)} = \eta_{i-1,k+1}^{(0)} = \eta_{i,k+1}^{(0)} = \eta_{i+1,k+1}^{(0)} = 0$,

$$\eta_{i,k}^{(0)} = \frac{1}{87} [12\eta_{i+1,k-1}^{(0)} + 4\eta_{i+2,k}^{(0)} + 9\eta_{i,k-2}^{(0)}] + \frac{1}{87} [20f_{i,k} + \\ + 4f_{i+1,k} - 6f_{i,k-1}].$$

В написанных формулах выпишем свободные члены (черт. 12 — нижние цифры). Приняв их за исходное прибли-

-1		-3		-3		-1		0		0
-1		-3		-4		-1		0		0
-1		-5		-6		-4		-2		-1
-1	-3	-3	-5	-11	-4	-1	0	-3	0	0
+3	-4	+1	-7	+9	-5	-42	0	-1	0	-13
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-2	-5	-5	-15	-6	-7	-8	-1	0	-3	0
-3	-8	-7	-6	-8	-5	-1	•	•	-2	•
-3	•	-9	•	-13	•	•	•	•	•	•
-4	-4	-12	-7	-6	-6	-3	-3	-1	-1	•
-2	-5	-15	-9	-68	-9	-5	-5	-1	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-3	-7	-7	-12	-9	-11	-4	-4	0	•	•
-3	-13	-8	-18	-11	-25	-7	-11	-4	+1	-1
-3	•	-9	•	•	+10	-10	+5	-5	+5	-1
-4	-5	-11	-9	-12	-9	-13	•	-5	•	+1
+2	-6	-2	-10	-20	-12	-6	-6	-5	-3	+2
•	•	•	•	+10	•	-74	+4	•	-2	•
-3	-7	-7	-9	-9	-17	-7	-13	-4	+2	-1
-3	•	-8	-2	-11	•	-10	-17	-6	•	-1
-3	0	-9	•	-14	+4	-14	-6	-7	+8	-1
-3	•	-10	•	-13	•	-33	•	-7	•	+4
-2	•	-8	•	-7	•	-14	•	+3	•	+3
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Черт. 12.

0		0		0		0		0		0
0		0		0		0		0		0
0		0		+1		0		0		0
-2	0	-2	0	+1	0	-3	0	-1	0	0
-3	-1	-19	-1	-24	0	-49	•	-5	•	-14
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	0	-1	+3	-1	+4	-3	0	0	0	•
-1	-35	-1	-59	-1	-51	-9	•	-5	•	•
-1	•	-2	•	•	•	•	•	•	•	•
+1	-1	-1	-1	-2	-1	0	0	0	0	•
-22	-1	-65	-2	-119	-1	0	0	0	0	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-1	-2	-1	-5	-1	0	0	+1	+1	-3	0
-1	-4	-2	-69	-2	-64	0	+2	0	•	0
-1	-48	-3	•	•	•	-32	•	•	+1	0
-1	•	-4	•	•	•	•	•	•	•	•
-2	-1	-3	-1	-2	-1	+3	0	+2	0	+2
-18	-1	-56	-2	-69	-1	-135	0	-28	0	-3
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
-1	-2	-1	-5	-1	-2	0	+1	0	-1	0
-1	-39	-1	65	-1	-82	0	-73	0	-6	0
-1	•	-2	•	•	•	•	•	•	•	•
-1	•	-3	•	•	•	•	•	•	•	•
-21	•	-61	•	-80	•	-102	•	+3	-3	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Черт. 13.

жение, вычисляем последовательные поправки итеративным методом Зейделя по строкам, начиная с левого верхнего угла.

На черт. 12 приведены четыре итерации, которые мы обозначим соответственно через $\epsilon^{(0)}$, $\epsilon^{(1)}$, $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$. Для

$$\eta^{(0)}$$

	0	+3	+6	+10	+8	+7	+5	-4	-10	-2	-9
6	-5	-19	-21	-26	-22	-21	-52	-11	-6	-8	-14
5	+1	-4	0	+3	+21	+57	-76	-7	+1	-5	-9
	-14	-36	-50	-58	-60	-47	-95	-12	-1	-5	-13
4	-1	0	-11	-19	-54	-111					
	-23	-50	-70	-90	-124	-172					
3	-3	-9	-3	0	+13	+39	-59	+13	+11	+8	+2
	-26	-56	-70	-79	-80	-66	-149	-29	-7	-1	+1
2	+1	+1	+3	+1	+2	+10	-12	-3	0	-5	-3
	-23	-48	-66	-74	-76	-74	-132	-62	-25	-9	-1
1	+4	-3	+4	0	+8	-1	-12	-7	+6	+8	0
	-23	-45	-65	-76	-79	-87	-115	-71	-31	-7	-2
0	+1	-1	-2	+1	+4	+1	-16	-4	+7	+7	-4
	-25	-45	-68	-79	-87	-87	-103	-66	-35	-14	-1

Черт. 14.

$$\eta^{(1)}$$

	-1	0	-1	+5	-2	+2	+4	-2	-3	-3	0
6	-5	-19	-20	-25	-20	-21	-57	-15	-10	-10	-17
5	+4	+4	+1	+1	+9	+17	-18	-8	+1	-5	-3
	-15	-40	-54	-62	-63	-49	-113	-18	-4	-7	-16
4	+3	-6	-4	-8	-18	-25					
	-26	-54	-79	-104	-147	-202					
3	+1	-5	+1	-3	+4	0	-7	+2	+1	+3	0
	-30	-62	-78	-88	-90	-74	-168	-32	-5	+1	+2
2	+3	0	-3	+1	-4	+4	0	0	-1	-5	0
	-26	-52	-70	-80	-82	-82	-143	-70	-26	-8	-1
1	+2	-1	-4	0	0	-2	0	-1	+2	-6	0
	-25	-49	-68	-80	-83	-96	-131	-81	-32	-3	-1
0	+7	+1	-4	+1	+5	-2	-3	-1	+2	+5	+3
	-28	-49	-71	-83	-92	-96	-119	-76	-36	-11	-1

Черт. 15.

ускорения сходимости итеративного процесса применим метод моментов, приняв за скалярное произведение суммы

произведение значений функций в узлах:

$$(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(1)}) = 2391, \quad (\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}) = 1851, \quad (\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(3)}) = 1421,$$

$$(\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(2)}) = 1473, \quad (\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}) = 1137,$$

$$2391\alpha_0 + 1891\alpha_1 + 1421 = 0, \quad \alpha_0 = +0,124,$$

$$1851\alpha_0 + 1421\alpha_1 + 1137 = 0, \quad \alpha_1 = -0,927,$$

$$\eta^{(0)} \approx \varepsilon^{(0)} + 0,36\varepsilon^{(1)} + 5\varepsilon^{(2)}.$$

Полученное приближенное решение (черт. 13 — нижние цифры) опять уточняется зейделевским процессом.

φ^{**}

6		145	311	520	806	1201	1710	2223	2545	2699	2800	2953
5		296	631	1056	1638	2479	3692	5133	5740	5946	6062	6233
4		434	925	1540	2373	3598	5632					
3		550	1167	1921	2910	4260	6104	8220	9208	9615	9812	9922
2		635	1338	2179	3230	4547	6098	7612	8680	9294	9641	9849
1		685	1441	2321	3390	4657	6054	7369	8409	9098	9526	9799
0		703	1471	2368	3437	4689	6034	7301	8324	9034	9490	9780

Черт. 16.

Таким образом для вычисления $\eta^{(0)}$ (черт. 14) понадобилось 8 итераций и один шаг по методу моментов при $n=2$. Повторив процесс, находим следующее приближение для η (черт. 15). Окончательное решение φ^{**} приведено на черт. 16.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А. А.
 - 1) Об одном способе ускорения сходимости итерационных процессов. ДАН 74, 6 (1950), 1051—1052.
2. Банах (S. Banach).
 - 1) Théorie des opérations lineaires. Warszawa, 1932.
3. Бирман М. Ш.
 - 1) Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска. Успехи матем. наук, V, в. 3 (1950), 152—155.
 - 2) О вычислении собственных чисел методом наискорейшего спуска. Зап. Ленингр. горн. ин-та, т. XXVII, в. I (1952), 209—215.
4. Воробьев Ю. В.
 - 1) Операторные ортогональные многочлены и приближенные методы определения спектра линейных ограниченных операторов. Успехи матем. наук, IX, в. 2 (1954), 191—198.
 - 2) Применение операторных ортогональных многочленов к решению линейных неоднородных уравнений. Успехи матем. наук, X, в. 1 (1955), 89—96.
 - 3) Метод моментов для несамосопряженных линейных операторов и ускорение сходимости итеративных процессов. Успехи матем. наук XI, в. 2 (1956), 161—167.
 - 4) Метод моментов в задаче о колебаниях линейных систем. Вычислительная математика (Вычислительный центр АН СССР), сб. 1 (1957), 23—33.
5. Гавурин М. К.
 - 1) Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов. Успехи матем. наук, V, в. 3 (1950), 156—160.
6. Геронимус Я. Л.
 - [1] Теория ортогональных многочленов. Гостехиздат, 1950.

7. Иоффе Г. Ш.
[1] Влияние автопилота типа Снерри на боковую устойчивость самолета. Издание БНТ, 1946.
8. Канторович Л. В.
1) Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов. ДАН 48, 7 (1945), 483—487.
2) О методе наискорейшего спуска. ДАН 56, 3 (1947), 233—236.
3) Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, III, в. 6 (1948), 89—184.
9. Каруш (W. Karush).
i) Convergence of a method of solving linear problems. Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 839—851.
10. Келдыш М. В.
1) О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. Изв. АН СССР, сер. матем. 6 (1942), 309—330.
11. Келлонг (O. Kellong).
1) On the existence and closure of sets of characteristic functions, Math. Ann., т. 86 (1922), 14—17.
12. Красносельский М. А.
1) О некоторых приемах приближенного вычисления собственных значений и собственных векторов положительно определенной матрицы. Успехи матем. наук, XI, в. 3 (1956), 151—158.
2) Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, Москва, 1956.
13. Крылов А. Н.
1) О численном решении уравнений, которыми в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем. Изв. АН СССР, сер. физ.-матем. (1931), 491—539.
2) О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, АН СССР (1933).
14. Ланчос (C. Lanczos).
1) An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. Journal of Res. of the National Bur. of Standards, т. 45, № 4 (1950), 255—280.
2) Solution of systems of linear equations by minimized iterations. Journal of Res. of the National Bur. of Standards, т. 49, № 1 (1952), 33—53.
15. Лиувиль (J. Lioiville).
1) Sur le developpement des fonctions ou parties des fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même equation differentielle du second ordre, contenant un parametre

- variable. *Journal de math. pur. et appl.*, I (1836), 253—265; II (1837), 16—35, 418—436.
16. Люстерник Л. А.
1) Замечания к численному решению краевых задач для уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток. Труды Матем. ин-та АН СССР, XX (1947), 49—64.
2) Решение задач линейной алгебры методом непрерывных дробей. Труды семинара по функциональному анализу, в. 2, Воронеж (1956), 85—90.
3) О разностных аппроксимациях оператора Лапласа. Успехи матем. наук, IX, в. 2 (1954), 3—66.
17. Марков А. А.
1) Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1948.
18. Мизес и Поллячек-Геррингер (R. Mises, H. Pollaczek-Gerringer).
1) Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, *Z. für Math. und Mech.*, 9 (1929), 58—77.
19. Михлин С. Г.
1) Прямые методы в математической физике. Гостехиздат, Москва, 1950.
2) Интегральные уравнения. Гостехиздат, Москва, 1947.
20. Милн (W. Milne).
1) Численное решение дифференциальных уравнений. Издательство иностранной литературы, Москва, 1955.
21. Нейман (C. Neumann).
1) Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential. Leipzig, 1877.
22. Польский Н.
1) Некоторые обобщения метода Б. Г. Галеркина. ДАН, т. 86, № 3 (1952), 469—472.
23. Реллих (F. Rellich).
1) Störungstheorie der Spectrazerlegung. I, II, III, IV, V. *Math. Ann.*, 113 (1936), 600—619; 113 (1936), 667—685; 116 (1939), 555—570; 117 (1940), 356—382; 118 (1942), 462—484.
24. Солодовников В. В.
1) Частотный метод построения переходных процессов. Гостехиздат, Москва, 1955.

25. Стесин И. М.
1) Вычисление собственных значений при помощи непрерывных дробей. Успехи матем. наук, IX, в. 2 (60), (1954), 191—198.
26. Стильтес (T. Stieltjes).
1) Исследование о непрерывных дробях. Гостехиздат, Киев, 1936.
27. Темплъ (G. Temple).
1) The general theory of relaxation methods applied to linear systems. Proc. Royal. Soc. of London (A), т. 169 (1939), 476—500.
28. Хестенс и Каруш (M. Hestenes and W. Karush).
1) Method of gradients for the calculation of the characteristic roots and vectors of a real symmetric matrix. Journal Res. of the National Bur. of Standards, т. 47, № 1 (1951), 45—61.
29. Хестенс и Стифел (M. Hestenc and E. Stiefel).
1) Methods of conjugate gradients for solving linear systems. Journal of Res. of the National Bur. of Standards, т. 49, № 6 (1951), 409—436.
30. Чебышев П. Л.
1) Собрание сочинений, т. II, изд. АН СССР, 1918.
31. Шмидт (E. Schmidt).
1) Auflösung der allgemeiner linearen Integralgleichung. Math. Ann., 64 (1907), 161—174.
32. Шортли (G. Shortley).
1) Use of Tschebyscheff-Polynomial of Boundary-Value Problems. Journal of Applied Physics, т. 24, № 4 (1953), 392—396.
33. Шоот (M. Shohot).
1) Theorie générale des polynomes orthogonaux de Tschebyscheff. Mémoires des sciences Math. fasc LXVI (1934).
-

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ФИЗМАТГИЗ

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫХОДЯТ В СВЕТ:

Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные
математические таблицы.

Криницкий Н. А. и Китов А. И., Электронные
цифровые машины и программирование для них.

Бейтмен Г., Математическая теория распространения
электромагнитных волн (перевод с англ.).

Наймарк М. А., Линейные представления группы
Лоренца.

Новиков П. С., Элементы математической логики.

Проблемы кибернетики, выпуск 1, сборник под ред.
А. А. Ляпунова.

Воробьев Юрий Васильевич.

Метод моментов в прикладной математике.

Редактор *С. Б. Норкин.*

Технический редактор *К. Ф. Брудно.*

Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 22/V 1958 г. Подписано

к печати 19/IX 1958 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$.

Физ. печ. л. 5,87. Условн. печ. л. 9,63.

Уч.-изд. л. 8,67. Тираж 7000 экз. Т-09086.

Цена книги 4 р. 35 к. Заказ № 3189.

Государственное издательство физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой

УПП Ленсовнархоза.

Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 4 р. 35 к.

Д1
2636