

3 в. 10 к. Переплет 60 к.

**С. П. ТИМОШЕНКО**

**ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ  
В ИНЖЕНЕРНОМ  
ДЕЛЕ**



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО**

Проф. С. П. ТИМОШЕНКО

Э43

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ  
В ИНЖЕНЕРНОМ  
ДЕЛЕ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
ИНЖЕНЕРА Н. А. ШОШИНА

*Второе издание  
(ст. реотипное)*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА \* 1932 \* ЛЕНИНГРАД

FOC IN  
HAYCH  
PAPHA  
BICKAR

1609  $\frac{1}{60}$

1  
3438

S. TIMOSHENKO  
VIBRATION PROBLEMS  
IN ENGINEERING

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Предисловие . . . . .	5
Глава первая. Гармонические колебания систем с одной степенью свободы.	
1. Свободные гармонические колебания . . . . .	7
2. Примеры . . . . .	10
3. Вынужденные колебания . . . . .	13
4. Технические применения (простое гармоническое колебание) . . . . .	18
5. Другой метод определения вынужденных колебаний . . . . .	24
6. Затухание пропорциональное скорости . . . . .	27
7. Постоянное затухание . . . . .	30
8. Вынужденные колебания при затухании . . . . .	31
9. Технические применения (вынужденные колебания при затухании) . . . . .	38
10. Уравновешивание вращающихся машин . . . . .	43
11. Машины для балансировки . . . . .	45
12. Общий случай возмущающей силы . . . . .	52
13. Принцип сохранения энергии при изучении задач колебаний . . . . .	57
14. Метод Рейлея . . . . .	60
15. Критическая скорость вращающегося вала . . . . .	65
Глава вторая. Негармонические колебания систем с одной степенью свободы.	
16. Основные положения . . . . .	72
17. Примеры псевдогармонических колебаний . . . . .	73
18. Свободные псевдогармонические колебания . . . . .	77
19. Графическое решение . . . . .	79
20. Численное решение . . . . .	84
21. Вынужденные псевдогармонические колебания . . . . .	86
22. Квазигармонические колебания . . . . .	91
23. Колебания в спарниках ведущей системы электровозов . . . . .	96
Глава третья. Системы, имеющие несколько степеней свободы.	
24. Принцип д'Аламбера и начало возможных перемещений . . . . .	111
25. Обобщенные координаты и обобщенные силы . . . . .	114
26. Уравнения Лагранжа . . . . .	117
27. Сферический маятник . . . . .	121
28. Свободные колебания. Общее решение . . . . .	122
29. Вынужденные колебания . . . . .	128
30. Колебания экипажей . . . . .	129
31. Колебания кручения валов и систем передачи . . . . .	139
32. Боковые колебания валов на нескольких опорах . . . . .	160
33. Жироскопическое влияние на критические скорости вращающихся валов . . . . .	172
34. Влияние песка вала и дисков на критическую скорость . . . . .	183
35. Влияние гибкости валов на уравновешивание машин . . . . .	187
36. Теория динамического поглотителя колебаний . . . . .	190

## Глава четвертая. Колебания упругих тел.

37. Продольные колебания призматических стержней . . . . .	198
38. Колебание стержня с грузом на конце . . . . .	208
39. Колебание кручения круглых валов . . . . .	216
40. Боковое колебание призматических стержней . . . . .	221
41. Влияние перерезывающей силы и инерции вращения . . . . .	227
42. Свободное колебание стержня с шарнирными концами . . . . .	228
43. Иные виды закрепления концов . . . . .	232
44. Вынужденное колебание балки с опертыми концами . . . . .	237
45. Колебания мостов . . . . .	243
46. Влияние осевых сил на боковые колебания . . . . .	252
47. Колебание балок, лежащих на упругом основании . . . . .	256
48. Способ Ритца . . . . .	258
49. Колебание стержней переменного поперечного сечения . . . . .	263
50. Колебание лопаток турбины . . . . .	269
51. Колебания корпуса судна . . . . .	275
52. Боковой удар стержней . . . . .	278
53. Продольный удар призматических стержней . . . . .	283
54. Колебания кругового кольца . . . . .	291
55. Колебание мембран . . . . .	296
56. Колебание пластинок . . . . .	306
57. Колебание в дисках турбин . . . . .	318
Приложение. Приборы для измерения колебаний.	
1. Общие замечания . . . . .	325
2. Приборы для измерения частоты . . . . .	325
3. Измерение амплитуд . . . . .	326
4. Сейсмические вибрографы . . . . .	328
5. Торсиограф . . . . .	332
6. Измеритель кручения . . . . .	333
7. Приборы для записи напряжений . . . . .	335
Указатель имен . . . . .	341
Предметный указатель . . . . .	342

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

С увеличением размеров современных машин и их скоростей разрешение задач колебаний получает все более и более существенное значение при проектировании в инженерном деле. Хорошо известно, что такие задачи огромного практического значения, — как, например, уравнивание машин, колебания кручения валов и зубчатых передач, колебания лопаток и дисков турбины, скручивание вращающихся валов, колебания рельсового пути и мостов под действием подвижных нагрузок, колебания фундаментов, — могут быть вполне разрешены только на основании теории колебаний. Только при помощи этой теории можно найти наиболее благоприятные пропорции в проекте, которые отодвинут условия работы машины скóль возможно далеко от критических условий, при которых могут возникнуть опасные колебания.

В этой книге изложены основы теории колебаний, причем их применение к решению технических задач пояснено различными примерами, взятыми во многих случаях из действительных наблюдений над колебаниями машин и конструкций в работе. При составлении книги автор использовал лекции по колебаниям, читанные им в 1925 г. инженерам-механикам фирмы Вестингауз, (Westinghouse Electric and Manufacturing Company), а также некоторые главы своей ранее опубликованной книги по теории упругости <sup>1)</sup>.

Содержание книги в общем следующее:

Первая глава посвящена рассмотрению гармонических колебаний систем с одной степенью свободы. В ней изложена общая теория свободного и вынужденного колебания и показано применение этой теории к уравниванию машин и к приборам, записывающим колебания. Далее в ней рассмотрен приближенный способ Рейлея для исследования колебаний более сложных систем и его применение к определению критических скоростей вращающихся валов переменного сечения.

---

<sup>1)</sup> Теория упругости, том II, 1916, Петроград.

Вторая глава содержит теорию негармонического колебания систем с одной степенью свободы. В ней рассмотрены приближенные способы исследования свободных и вынужденных колебаний. Детально изложен частный случай, когда гибкость системы переменна по времени. Результаты этой теории применены к определению колебаний электровозов с боковыми спарниками.

В третьей главе рассмотрены системы нескольких степеней свободы. Изложена общая теория колебаний таких систем, а также ее приложение к решению таких инженерных задач, как: колебание экипажей, колебание кручения валов, критические скорости валов на нескольких опорах и поглотители колебаний — амортизаторы.

Четвертая глава содержит теорию колебаний упругих тел. Рассмотрены задачи: продольного скручивающего и бокового колебаний призматических стержней, колебания стержней переменного поперечного сечения, колебаний мостов, лопаток турбины и корпуса судна, теории колебания круговых колец, мембраны, пластинок и дисков турбины.

Краткое описание наиболее существенных приборов для записи колебаний, которые применяются при опытном исследовании колебаний, дано в приложении.

Автор выражает глубокую благодарность упомянутой выше фирме Вестингауз, давшей ему возможность заняться этим трудом и использовать в качестве примеров различные действительные случаи колебания машин, которые были исследованы инженерами фирмы. Он пользуется случаем высказать благодарность также многочисленным лицам, которые помогали ему различным образом в подготовке рукописи, в частности: Дж. Лессельсу, Дж. Ормондройду и Дж. Ден-Хартогу, которые прочли всю рукопись и сделали много ценных указаний.

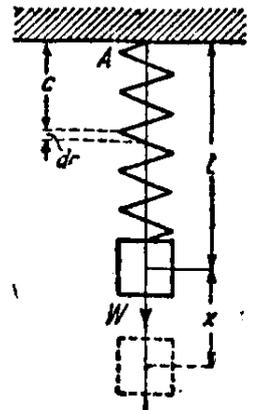
*С. Тимошенко.*

Анн Арбор, Мичиган  
22 мая 1928 г.

## ГЛАВА ПЕРВАЯ.

### ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.

1. Свободные гармонические колебания. — Если упругая система, как-то нагруженная балка, скрученный вал или деформированная рессора, будет выведена из положения равновесия ударом или внезапным приложением добавочной силы, силы упругости системы в новом положении не будут уже уравновешиваться нагрузкой и возникнут колебания. Вообще упругая система может давать колебания разных типов, например, струна или балка во время колебания может принимать различные формы, зависящие от числа точек перегиба, подразделяющих длину элемента. В простейших случаях форма колебания системы может быть определена одной только величиной. Такие системы называются *системами с одной степенью свободы*.



Фиг. 1.

Рассмотрим простейший случай, изображенный на фиг. 1. Если устройство таково, что возможны только вертикальные перемещения груза  $W$ , и если масса пружины будет мала сравнительно с величиной груза  $W$ , то система может быть рассматриваема, как имеющая *одну степень свободы*. Деформация может быть определена вполне вертикальным перемещением груза.

При ударе или внезапном приложении и удалении внешней силы возникнут колебания. Такие колебания, которые вызываются только упругой силой пружины, называются *свободными* или *независимыми* колебаниями. Аналитическое выражение этих колебаний может быть найдено из дифференциального уравнения движения, которое всегда может быть написано, если известны силы, действующие на движущееся тело.

Пусть  $k$  обозначает груз, необходимый для того, чтобы вызвать единицу растяжения пружины, тогда статическая деформация пружины под действием груза  $W$  будет

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}.$$

Обозначая вертикальное перемещение груза от его положения равновесия через  $x$  и считая это перемещение положительным при направлении вниз, получим выражение для растягивающей силы в пружине, отвечающее любому положению груза:

$$F = W + kx. \quad [0]$$

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение движения, применим принцип д'Аламбера. На основании этого принципа уравнение движения может быть получено тем же способом, как и уравнение статики. Необходимо только, кроме внешних и упругих сил, принять во внимание силы инерции. В настоящем случае сила инерции определяется выражением  $-Wx''/g$ , в котором  $x''$  — вторая производная перемещения  $x$  по времени  $t$  — представляет ускорение движущегося груза  $W$ , а  $g$  — ускорение силы тяжести. Прибавляя силу инерции к грузу  $W$  и приравнивая сумму силе  $F$  в пружине, имеем:

$$W - \frac{Wx''}{g} = W + kx, \quad [1]$$

откуда

$$x'' + p^2x = 0, \quad [2]$$

где

$$p^2 = \frac{kg}{W} = \frac{g}{\delta_{st}}. \quad [3]$$

Уравнение [2] будет удовлетворено, если мы положим  $x = A \cos pt$ , или  $x = B \sin pt$ , где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Сложив эти корни, получим общее решение уравнения [2]:

$$x = A \cos pt + B \sin pt. \quad [4]$$

Из этого видно, что вертикальное движение груза  $W$  имеет колебательный характер. *Период* этого колебания

$$\tau = \frac{2\pi}{p}$$

и частота

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi}.$$

Подставляя вместо  $p$  его выражение [3], имеем

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \quad [5]$$

т. е. период колебаний груза  $W$ , подвешенного на пружине, такой же, как математического маятника, длина которого равна  $\delta_{st}$ . Ампли-

туда колебаний [4], т. е. наибольшее перемещение груза от положения равновесия остается постоянным, так как  $A$  и  $B$  постоянны. Колебательное движение, представленное уравнением [4], называется *гармоническим движением*.

Для определения произвольных постоянных  $A$  и  $B$  должны быть рассмотрены начальные условия. Положим, например, что в начальный момент ( $t=0$ ) груз  $W$  имеет перемещение  $x_0$  от положения равновесия и что его начальная скорость  $x_0'$ . Подставляя  $t=0$  в уравнение [4], получаем

$$x_0 = A. \quad [a]$$

Взяв теперь производную ур-ия [4] по времени и подставляя в эту производную  $t=0$ , имеем

$$\frac{x_0'}{p} = B. \quad [b]$$

Подставляя значения произвольных постоянных [a] и [b], получим следующее выражение колебательного движения груза  $W$ :

$$x = x_0 \cos pt + \frac{x_0'}{p} \sin pt. \quad [6]$$

Из этого видно, что в общем случае колебание состоит из двух частей: колебание, пропорциональное  $\cos pt$  и зависящее от начального перемещения системы, и другое, пропорциональное  $\sin pt$  и зависящее от начальной скорости  $x_0'$ . Такое движение, как выражаемое ур-ием [6], может быть всегда представлено как простое синусоидальное движение. Пусть

$$x_0 = M \sin \alpha, \quad [c]$$

$$\frac{x_0'}{p} = M \cos \alpha, \quad [d]$$

где  $M$  и  $\alpha$  постоянные, подлежащие определению.

Подставляя в ур-ие [6], имеем

$$x = M \sin(pt + \alpha). \quad [7]$$

Амплитуда  $M$  этого колебания и угол  $\alpha$ , фаза колебания, могут быть легко найдены из ур-ий [c] и [d]. Возведя в квадрат и сложив оба ур-ия, получим

$$M^2 = x_0^2 + \frac{(x_0')^2}{p^2}$$

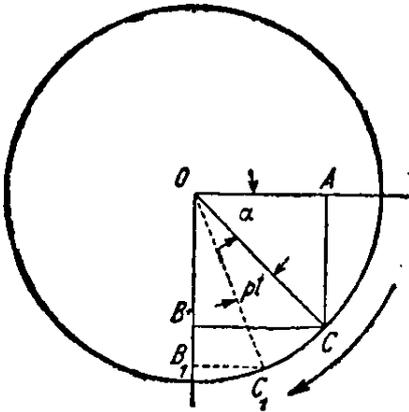
или

$$M = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0')^2}{p^2}}. \quad [8]$$

Разделив [с] на [d], получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 p}{x_0'} \quad [9]$$

Амплитуда  $M$  и угол  $\alpha$  могут быть получены также графически, как показано на фиг. 2. Взяв  $OA = x_0'/p$  и  $OB = x_0$ , имеем из прямоугольного треугольника  $OAC$ :



Фиг. 2.

$$\overline{OC} = \sqrt{x_0'^2 + \frac{(x_0')^2}{p^2}} = M;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{x_0 p}{x_0'}.$$

Вообразим теперь, что радиус  $\overline{OC}$  движется с постоянной угловой скоростью  $p$  по часовой стрелке; тогда в промежуток времени  $t$  точка  $C$  перейдет в  $C_1$ , и вертикальная проекция  $\overline{OB_1}$  радиуса  $\overline{OC_1}$ , равная  $M \sin(pt + \alpha)$ , представит вертикальное

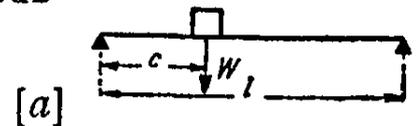
перемещение  $x$  (см. ур-ие [7]) груза  $W$  при колебании.

Из этого видно, что собственное колебание системы, изображенной на фиг. 1, может быть всегда представлено как простое гармоническое колебание, период которого (см. ур-ие [5]) зависит от  $\delta_{st}$ , т. е. от жесткости пружины и веса груза. Амплитуда и фаза зависят от начального перемещения и начальной скорости груза.

**2. Примеры.** — Следующие примеры служат для освещения различных пунктов предыдущей теории и показывают, как может быть исчислен в разных случаях период собственных колебаний системы.

*а. Колебание груза  $W$  на балке* (фиг. 3). — Пренебрегая весом балки и применяя простую теорию изгиба, получим статический прогиб балки непосредственно под грузом равным

$$\delta_{st} = \frac{Wc^2(l-c)^2}{3EI}.$$



Фиг. 3.

Этот прогиб прямо пропорционален грузу, и балка поэтому может быть рассматриваема, как пружина, жесткость которой определяется величиной

$$k = \frac{3EI}{c^2(l-c)^2},$$

представляющей груз, необходимый, чтобы вызвать прогиб балки,

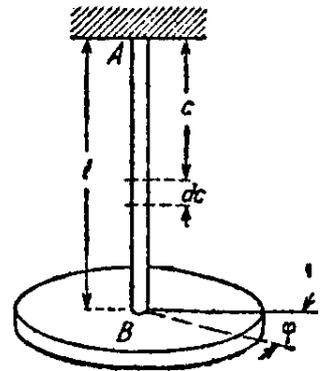
равный единице. Подставляя  $\delta_{st}$ , полученное выше (см. ур-ие [a]), в ур-ие [5], легко можем вычислить период собственного колебания груза на балке. Величина периода, полученного таким способом, будет немного меньше, чем действительный период, в силу того, что весом самой балки мы пренебрегли. Более детальное рассмотрение этого случая колебания будет дано в п° 14.

*b. Колебания кручения.* — Если диск сопряжен со стержнем, как показано на фиг. 4, и к нему в его плоскости приложена и внезапно удалена пара сил, то возникнет свободное колебание кручения стержня вместе с диском. Пусть  $\varphi$  — угол скручивания стержня в любой момент колебания,  $k$  — скручивающий момент, необходимый, чтобы вызвать угол скручивания стержня, равный одному радиану.

В случае постоянного кругового поперечного сечения стержня диаметра  $d$  имеем

$$k = \frac{G}{l} \frac{\pi d^4}{32}.$$

Скручивающий момент в стержне в любое мгновение колебания будет  $k\varphi$ . Пренебрегая массой стержня и приравнявая скручивающий момент в стержне моменту сил инерции диска, получим следующее уравнение движения диска:



Фиг. 4.

$$I\varphi'' + k\varphi = 0, \tag{10}$$

в котором:  $I$  — момент инерции диска относительно оси  $AB$  стержня, перпендикулярной плоскости диска.

В случае кругового диска постоянной толщины

$$I = \frac{\pi D^4 h \gamma}{32g} = \frac{WD^2}{8g},$$

где  $h$  — толщина,  $D$  — диаметр диска,  $\gamma$  — вес единицы объема,  $W$  — вес диска.

Если вместо сплошного кругового диска взять колесо и если предположить его массу сосредоточенной на ободе. то:

$$I = \frac{WD^2}{4g}.$$

В общем случае диска переменной толщины  $h$

$$I = \frac{2\pi}{g} \int_0^{1/2 D} h \gamma r^3 dr.$$

Деля уравнение [10] на  $I$  и полагая

$$p^2 = \frac{k}{I},$$

получим ур-ие той же формы, что и ур-ие [2], общее решение которого будет

$$\varphi = A \cos pt + B \sin pt. \quad [11]$$

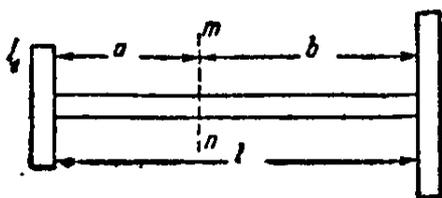
Из этого видно, что период колебания кручения

$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}. \quad [12]$$

В случае стержня постоянного кругового сечения

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{32I}{G\pi d^4}}, \quad f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4}{32I}}. \quad [13]$$

Это получено для того случая, когда стержень имеет постоянный диаметр  $d$ . Если стержень переменного диаметра в разных частях, то его легко привести к стержню постоянного диаметра. Необходимо только помнить, что угол скручивания стержня пропорционален четвертой степени диаметра. Поэтому без изменения угла скручивания часть стержня, длиной  $a_1$  и диаметром  $d_1$ , может быть заменена соответственной частью длиной  $a_2$  и диаметром  $d_2$ , при соблюдении условия



$$\frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4. \quad [14]$$

Фиг. 5.

Полученные результаты применимы также к валу с двумя вращающимися массами (фиг. 5). Подобное устройство имеет большое практическое значение в инженерном деле и встречается, например, в случае гребного вала<sup>1)</sup>. Если массой вала можно пренебречь по сравнению с массой, приложенной на концах, то система, изображенная на фиг. 5, может быть рассматриваема как имеющая две степени свободы: (1) одна, обуславливаемая тем, что вал с дисками может вращаться на подшипниках как твердое тело, и (2) вторая, обуславливаемая тем, что вал может дать колебание кручения, при котором диски вращаются в направ-

<sup>1)</sup> Эта задача изучена впервые *H. Frahm*'ом; см. его *Neue Untersuchungen über dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen v. Schiffsmaschinen*, „V. D. I.“, 1902. Он показал опытным путем, что, при определенной скорости колебания вызывают очень большие величины напряжений в гребных валах.

влениях, противоположных друг другу. Предположим, например, что в начальный момент ( $t=0$ ) на концы вала действуют две равные противоположные скручивающие пары и затем внезапно удаляются. Таким только образом могут быть получены колебания кручения, и диски будут вращаться в противоположных один по отношению к другому направлениях, так что общий момент системы относительно оси вала всегда будет равен нулю, как в начальный момент ( $t=0$ ). Во время таких колебаний некоторое промежуточное сечение  $mn$  вала будет оставаться неподвижным. Это сечение называется *узловым сечением*, и его положение может быть найдено из условия, что части вала справа и слева (фиг. 5) имеют тот же период колебания. Применяя ур-ие [13] к каждой из двух частей вала, получаем:

$$\sqrt{I_1 a} = \sqrt{I_2 b}$$

или

$$\frac{a}{b} = \frac{I_2}{I_1}. \quad [a]$$

По фиг. 5 имеем:

$$a + b = l. \quad [b]$$

Тогда, из [a] и [b],

$$a = \frac{I_2 l}{I_1 + I_2}, \quad b = \frac{I_1 l}{I_1 + I_2}.$$

Теперь из ур-ия [13] получим период и частоту колебаний учения системы:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{32I_1 I_2 l}{\pi G d^4 (I_1 + I_2)}}; \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi G d^4 (I_1 + I_2)}{32I_1 I_2 l}}. \quad [15]$$

Влияние массы вала на период колебания будет рассмотрено далее (см. п° 14).

**3. Вынужденные колебания.**— При рассмотрении колебаний системы, показанной на фиг. 1, были исследованы только *свободные колебания*. Теперь рассмотрим другой вид колебаний. Если принять, что кроме постоянной силы  $W$  на груз действует периодически переменная вертикальная *возмущающая сила*  $Q$ , то возникнут *вынужденные колебания* системы.

Соответствующее дифференциальное ур-ие движения получится добавлением в левую часть ур-ия [1] силы  $Q$ . Таким образом имеем:

$$\frac{W}{g} x'' + kx = Q \quad [16]$$

или, деля на  $\frac{W}{g}$  и применив как прежде обозначение

$$p^2 = \frac{kg}{W},$$

получим следующее уравнение:

$$x'' + p^2x = \frac{Qg}{W}. \quad [17]$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда возмущающая сила  $Q$  пропорциональна  $\cos mt$ . Период этой силы  $\tau_1 = \frac{2\pi}{m}$  и частота  $f_1 = \frac{m}{2\pi}$ . При обозначении  $\frac{Qg}{W} = q \cos mt$  ур-ие [17] для этого случая получается

$$x'' + p^2x = q \cos mt. \quad [18]$$

Если изменения возмущающей силы очень медленны, т. е.  $m$  мало по сравнению с  $p$ , то можно пренебречь членом, содержащим ускорение в ур-ии [18], и мы получим статическую деформацию:

$$x_{st} = \frac{q \cos mt}{p^2}. \quad [a]$$

Для того чтобы получить динамическое перемещение, следует воспользоваться общим решением ур-ия [18]. Это решение получим, если решение [4] однородного ур-ия [2] сложим с частным решением ур-ия [18]. Приняв  $C \cos mt$  за такое частное решение и подставив его в ур-ие [18], имеем

$$C = \frac{q}{p^2 - m^2};$$

а потому общее решение ур-ия [18] будет:

$$x = A \cos pt + B \sin pt + \frac{q}{p^2 - m^2} \cos mt. \quad [19]$$

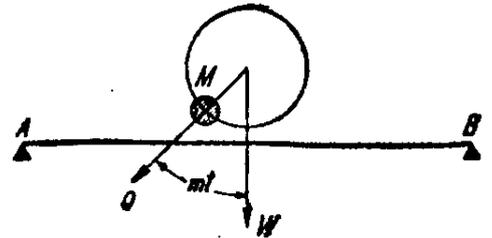
В этом уравнении первые два члена правой части представляют свободные колебания системы, которые были рассмотрены ранее, тогда как, последний член представляет *вынужденные колебания*. Эти последние имеют тот же период, что и возмущающая сила, а их амплитуда  $C$  зависит от частоты этой силы. Отношение этой амплитуды к статической деформации, определяемой ур-ием

[ $a$ ], называется *коэффициентом нарастания колебания* (magnification factor) и равняется

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{m^2}{p^2}} \quad \text{или} \quad \beta = \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}}, \quad [20]$$

где  $\tau = \frac{2\pi}{p}$  — период независимого колебания и  $\tau_1 = \frac{2\pi}{m}$  — период возмущающей силы.

Из этого видно, что для малых значений  $m/p$ , т. е. когда частота возмущающей силы мала сравнительно с частотой независимых колебаний системы, коэффициент  $\beta$  будет близок к единице и амплитуда вынужденных колебаний будет лишь немного отличаться от статической деформации по ур-ию [ $a$ ]. С увеличением отношения  $m/p$  амплитуда вынужденных колебаний увеличивается и становится бесконечно большой при  $m/p = 1$ , т. е. когда частота возмущающей силы становится равной частоте независимых колебаний системы <sup>1)</sup>. Когда это происходит, мы имеем *состояние резонанса*, и соответствующая частота возмущающей силы называется *критической частотой*.



Фиг. 6.

В инженерном деле возмущающая сила получается очень часто в результате *неуравновешенности*. Пусть, например, машина, поддерживаемая балкой  $AB$  (см. фиг. 6) и имеющая неуравновешенную массу  $M$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $m$ . Пусть  $Q$  обозначает центробежную силу от неуравновешенной массы  $M$ , тогда  $Q \cos mt$  представляет вертикальную возмущающую силу, которая вызовет колебание балки. Дифференциальное ур-ие этих колебаний будет такое же, как ур-ие [16] <sup>2)</sup>, и из этого непосредственно можно заключить, что состояние резонанса будет иметь место, когда число оборотов в минуту машины получится равным величине независимых колебаний балки, нагруженной весом  $W$  машины, т. е. когда

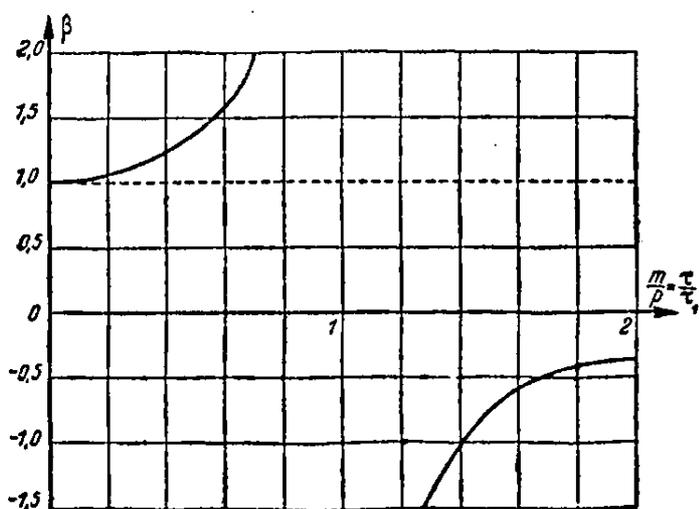
$$m = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

Скорость, соответствующая состоянию резонанса, называется *критической скоростью*. Если машина вращается с такой ско-

<sup>1)</sup> Подробное рассмотрение этого обстоятельства см. н° 29.

<sup>2)</sup> При этом пренебрегаем массой балки и действием горизонтальной составляющей центробежной силы.

ростью, могут возникнуть большие колебания балки, амплитуда которых зависит от величины затухания, вызываемого различного вида сопротивлением, как - то: сопротивление воздуха, трение опор балки, внутреннее трение в материале балки. Влияние этого



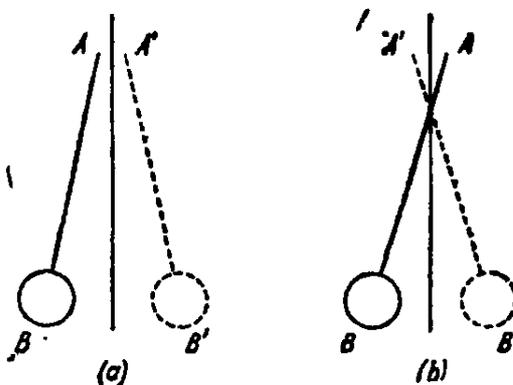
Фиг. 7.

затухания будет рассмотрено далее. В вышеприведенных рассуждениях затухание не было принято во внимание, и как результат этого получалось бесконечное увеличение амплитуды вынужденных колебаний при приближении  $m/p$  к единице.

Возвращаясь к выражению [20], видим, что с возрастанием частоты  $m$  динамической силы выше значения, отвечающего незави-

симым колебаниям системы, амплитуда вынужденных колебаний уменьшается и, если  $m$  становится очень большим сравнительно с  $p$ , амплитуда вынужденных колебаний делается очень малой сравнительно со статической деформацией, и груз  $W$  (фиг 1) может быть рассматриваем в этом случае как неподвижный. На фиг. 7 изменение величины отношения  $\beta$  амплитуды вынужденных колебаний к статической деформации представлено графически в функции  $m/p = \tau/\tau_1$ .

Рассматривая знак выражения [20], видим, что для случая  $m < p$  выражение положительно, а для  $m > p$  оно получается отрицательным. Это указывает, что когда частота возмущающей силы меньше, чем таковая независимых колебаний системы, вынужденные колебания и возмущающая сила всегда в одной и той же фазе, т. е. колеблющийся груз (фиг. 1) достигает своего низшего положения в тот же момент, когда возмущающая сила получает наивысшее значение в направлении вниз. Когда  $m > p$ , разница в фазах между вынужденными колебаниями и возмущающей силой становится равной  $\pi$ . Это значит, что в тот момент, когда сила получает максимальное значение в направлении вниз, колеблющийся груз достигает своего верхнего положения. Это явление



Фиг. 8.

становится равной  $\pi$ . Это значит, что в тот момент, когда сила получает максимальное значение в направлении вниз, колеблющийся груз достигает своего верхнего положения. Это явление

может быть пояснено следующим простым опытом. В случае простого маятника  $AB$  (фиг. 8) вынужденные колебания могут быть вызваны приданием точке  $A$  колебательного движения в горизонтальном направлении. Если это качание имеет частоту меньше чем частота маятника, крайнее положение маятника во время этих колебаний будет, как показано на фиг. 8а; движения точек  $A$  и  $B$  будут в той же фазе. Если колебательное движение точки  $A$  имеет частоту, высшую чем маятник, крайние положения маятника во время колебаний будут, как показано на фиг. 8б. Разность фаз движений точек  $A$  и  $B$  в этом случае равна  $\pi$ .

В наших рассуждениях рассматривался только третий член общего выражения [19], изображающий вынужденные колебания. При приложении возмущающей силы, однако, возникают не только вынужденные колебания, но и независимые колебания. С течением времени эти последние колебания будут затухать вследствие различного рода сопротивлений, но в начале движения они могут иметь практическое значение. Амплитуда независимых колебаний может быть легко найдена из общего решения [19] путем рассмотрения начальных условий. Положим, например, что в начальный момент ( $t=0$ ) перемещение и скорость равны нулю; произвольные постоянные решения [19] должны тогда быть определены так, чтобы при  $t=0$

$$x=0 \text{ и } x'=0.$$

Эти условия будут удовлетворены, если положить  $A + \frac{q}{p^2 - m^2} = 0$ ;  $B=0$ . Подставив в [19], имеем

$$x = \frac{q}{p^2 - m^2} (\cos mt - \cos pt). \quad [19']$$

В начале действия возмущающей силы  $q \cos mt$  возникают вынужденные и свободные колебания одинаковой амплитуды. Если частота возмущающей силы приближается к частоте независимых колебаний, имеет место *биение*.

Пусть  $\frac{1}{2}(p - m) = \Delta$ , тогда из ур-ия [19'] имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{2q}{p^2 - m^2} \sin \frac{(m+p)t}{2} \sin \frac{(m-p)t}{2} = \\ &= \frac{2q \sin \Delta t}{p^2 - m^2} \sin \frac{(m+p)t}{2}. \end{aligned} \quad [21]$$

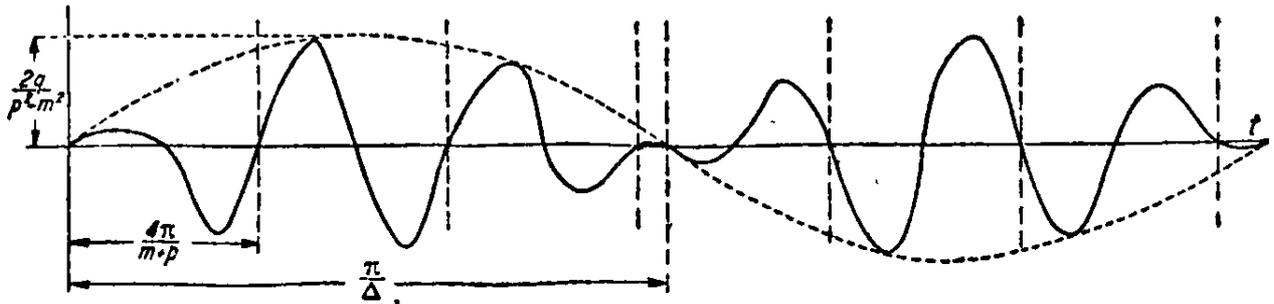
Результат может быть представлен графически, как изображено на фиг. 9.

Это дает колебания, имеющие период

$$\tau = 2\pi : \frac{m+p}{2} = \frac{4\pi}{m+p}$$

и переменную амплитуду, равную

$$\frac{2q \sin \Delta t}{p^2 - m^2}.$$



Фиг. 9.

Период биения будет  $\frac{2\pi}{\Delta}$ ; он будет увеличиваться с приближением  $m$  к  $p$  и станет бесконечным в случае резонанса ( $p = m$ ). Ур-ие [21] в этом случае может быть представлено так:

$$x = \frac{2q\Delta t}{p^2 - m^2} \sin \frac{m+p}{2} t = \frac{qt}{2m} \sin mt, \quad [21']$$

т. е. амплитуда возрастает безгранично с течением времени. Такое заключение получено нами из-за пренебрежения затухающим действием разного рода сопротивлений.

**4. Технические применения (простое гармоническое колебание).**— Для пояснения вышеизложенной теории рассмотрим несколько простых примеров. Такое движение будет иметь место главным образом в приборах для измерения колебаний.

*а. Приборы для записывания колебаний (вибрографы).*— Теория вибрографа может быть легко получена из рассмотрения системы, изображенной на фиг. 1. Вынужденные колебания груза  $W$  могут быть вызваны колебательным движением в вертикальном направлении точки подвеса пружины  $A$ . Пусть  $x_1$  — перемещение по направлению вниз точки  $A$  в какой-либо момент и  $x$  — перемещение груза  $W$  в тот же момент. Растяжение пружины будет  $x - x_1$  и растягивающее усилие в пружине будет равно  $k(x - x_1)$ . Подставив это усилие вместо  $kx$  в ур-ие [1], получим следующее ур-ие движения:

$$\frac{W}{g} x'' + k(x - x_1) = 0, \quad [22]$$

Пусть точка  $A$  совершает простое гармоническое качание, отвечающее ур-ию:

$$x_1 = b \cos mt.$$

Тогда, положив

$$\frac{kg}{W} = p^2 \quad \text{и} \quad \frac{kbg}{W} = q, \quad [a]$$

получим

$$x'' + p^2 x = q \cos mt.$$

Это уравнение подобно ур-ию [18] и к нему применимы все заключения п° 3. Если частота качающегося движения точки подвеса  $A$  очень мала сравнительно с частотой независимых колебаний груза  $W$ , подвешенного на пружине, условия движения будут лишь немного отличаться от такового в условиях статики, т. е. груз  $W$  будет совершать приблизительно то же качающееся движение, как точка подвеса  $A$ . Когда частота качаний точки  $A$  приблизится к таковой независимых колебаний системы, возникнут сильные вынужденные колебания. В случае, если  $m$  очень велико по сравнению с  $p$ , т. е. когда частота качаний точки  $A$  очень велика по сравнению с таковой независимых колебаний, амплитуда вынужденных колебаний получается очень небольшой, и груз  $W$  может быть рассматриваем как неподвижный в пространстве. Амплитуда вынужденных колебаний из ур-ия [19]:

$$C = \frac{q}{p^2 - m^2};$$

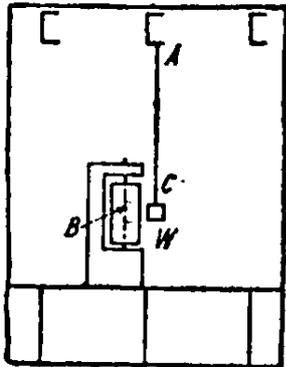
использовав ур-ие [a], имеем:

$$C = \frac{b}{1 - \frac{m^2}{p^2}}.$$

Взяв, например,  $m = 10p$ , получим амплитуду вынужденных колебаний равной  $\frac{1}{99} b$ . Это значит, что в таком случае колебания точки подвеса едва ли передадутся грузу  $W$ . На этом принципе основывается употребление подобного рода подвесок для предохранения чувствительных измерительных приборов от колебаний высокой частоты, передающихся сооружениям через основание; этот же принцип также применяется в сейсмографах — приборах для записывания колебаний земли во время землетрясения. По этому принципу также сделаны различные приборы (вибро-

графы) для записывания колебаний машин, сооружений, фундаментов, мостов и корпусов кораблей.

На фиг. 10 изображена простая схема, которая может быть применена для записывания колебаний корпуса судна. Груз  $W$  подвешен в точке  $A$  к балке при помощи резиновой струны  $AC$ .

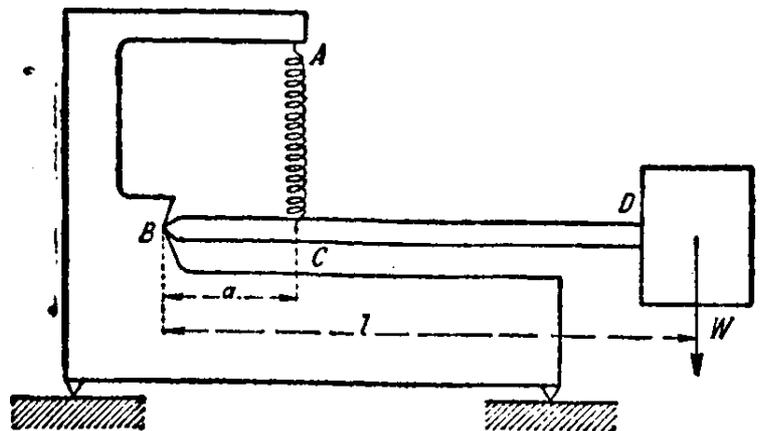


Фиг. 10.

При вертикальных колебаниях корпуса этот груз остается практически неподвижным, если период независимых колебаний его достаточно велик; карандаш, прикрепленный к нему, будет отмечать колебания корпуса на вращающемся барабане  $B$ . Для получения амплитуды колебания с достаточной точностью необходимо, чтобы период независимых колебаний груза был бы достаточно велик сравнительно с таковым корпуса судна. Для выполнения этого условия длина струны  $AC$  и ее удлинение должны быть сравнительно велики. Например, чтобы получить период независимых колебаний в две секунды, удлинение струны под действием груза  $W$  должно быть приблизительно равным одному метру (см. ур-ие [5]). Значительность требуемого удлинения является недостатком в этого рода устройствах.

Теперь рассмотрим записывающий колебания корабля прибор, для которого необходимо значительно меньшее удлинение пружины. Его схема приведена на фиг. 11<sup>1)</sup>. Пренебрегая весом рычага  $BD$  по сравнению с грузом  $W$ , получим удлинение пружины  $AC$  равным  $\frac{Wl}{ka}$  и статическое перемещение груза

$$\delta_{st} = \frac{Wl^2}{ka^2}.$$



Фиг. 11.

Это перемещение должно быть подставлено в ур-ие [5] для получения периода независимых колебаний вибрографа. Мы видим, что необходимое для колебаний такого же

<sup>1)</sup> Такая схема применена в паллографе *O. Schlick'a*, см. „Trans. Inst. Nav. Arch.“, 1893, Vol. 34, p. 167. Она же применена в вибрографе Кембриджского общества для изготовления приборов (Cambridge Instrument Co); см. „Jr. Optical Soc. of America“, 1925, Vol. 10, p. 455.

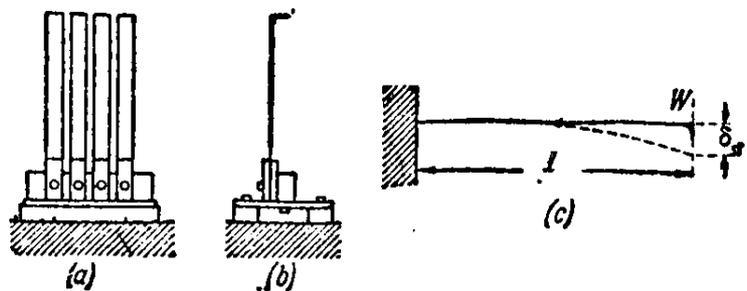
периода удлинение пружины в этом случае уменьшается в отношении  $a:l$  по сравнению с таковым устройства, изображенного на фиг. 10<sup>1)</sup>.

*b. Вибрационный тахометр Frahm'a*<sup>2)</sup>. — Тахометр Frahm'a известен как прибор, широко применяемый для измерения частоты колебаний. Он состоит из ряда стальных полос, закрепленных нижними концами, как показано на фиг. 12*b*; к верхним краям полос прикреплены небольшие массы, которым придана такая величина, что система полос представляет определенные серии частот. Разность между частотами двух последовательных полос обычно равна половине колебания в секунду.

Для определения частоты полосы можно рассматривать последнюю как закрепленную одним концом балку (фиг. 12*c*).

Чтобы учесть влияние массы полосы на колебание, необходимо четверть веса полосы  $W_1$  добавить<sup>3)</sup> к грузу  $W$ , который сосредоточен на конце. Тогда

$$\delta_{st} = \frac{(W + W_1/4)l^3}{3EI}.$$



Фиг. 12.

Эта статическая деформация должна быть подставлена в ур-ие [5] с тем, чтобы получить период независимых колебаний полосы.

При употреблении прибор прикрепляется к машине, частоту колебаний которой нужно измерить. Полоса, у которой период независимого колебания будет наиболее близким к периоду одного оборота машины, окажется в условиях, близких к резонансу, и в ней возникнут сильные колебания. По заранее известной частоте этой полосы можно установить число оборотов машины. Вместо ряда полос различной длины или прикрепления различных масс на их концах можно использовать одну полосу с грузом, перемещаемым по ее длине. Частота колебаний машины может быть тогда найдена изменением длины полосы этого прибора до получения явления резонанса. На этом последнем принципе построен широко известный виброметр Фуллартона.

*c. Индикатор паровых машин.* — Индикатор паровых машин употребляется для измерения давления пара в цилиндрах машины.

<sup>1)</sup> Более детальное рассмотрение этого вибрографа см. п° 9.

<sup>2)</sup> Этот прибор описан *F. Лух*ом „*E. T. Z.*“, 1905, S. 264, 387.

<sup>3)</sup> Более детальное рассмотрение влияния массы балки на период колебания дано в п° 14.

Точность записей подобных индикаторов зависит от способности частей индикатора, состоящего из поршня, пружины и карандаша, следовать точно за изменениями давления пара. Из общей теории п°3 известно, что эти условия будут выполнены, если частота независимых колебаний системы индикатора очень высока сравнительно с таковой изменения давления пара в цилиндре.

Пусть площадь поршня индикатора  $A = 1,2 \text{ см}^2$ ; вес поршня, штока поршня и приведенный вес прочих частей, связанных с поршнем,  $W = 0,06 \text{ кг}$ ; перемещение карандаша, вызываемое давлением пара в одну атмосферу ( $1 \text{ кг/см}^2$ ),  $s = 2,4 \text{ мм}$ ; отношение перемещения карандаша к таковому поршня  $n = 4$ .

Из условия, что давление на поршень равно  $1 \cdot 1,2 = 1,2 \text{ кг}$ , и что соответствующее сокращение пружины равно  $\frac{1}{4} \cdot 2,4 = 0,06 \text{ см}$ , мы находим для пружины:

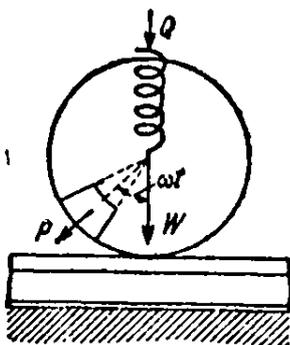
$$k = 1,2 : 0,06 = 20 \text{ кг/см.}$$

Частота свободных колебаний индикатора (см. ур-ие [5]):

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{gk}{W}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{981 \cdot 20}{0,06}} = 91 \text{ в сек.}$$

Эту частоту можно считать достаточно высокой сравнительно с обычной частотой паровых машин и запись индикатором давления пара будет достаточно точна. В случае машин больших скоростей, однако, такой прибор может дать при известных условиях совершенно неудовлетворительные записи <sup>1)</sup>.

*d. Другие приложения.* — Хорошо известно, что сила инерций противовесов колес паровоза вызывает добавочное давление на путь. Это действие противовесов можем легко определить, применяя теорию вынужденных колебаний. Пусть  $W$  — вес колеса и всех частей, жестко соединенных с колесом,  $Q$  — вес, передающийся рессорой,  $P$  — центробежная сила, вызываемая противовесом,  $\omega$  — угловая скорость колеса. Тогда, рассматривая задачу как статическую, вертикальное давление колеса (см. фиг. 13) получим равным



Фиг. 13.

$$Q + W + P \cos \omega t. \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Описание индикатора для машин высокой частоты (микрондикатор Коллинса) помещено в „Engineering“, 1922, Vol. 113, p. 716. Указатель статей по индикаторам см. „Proc. Meetings of the Inst. Mech. Eng.“, London 1923, Jan.

При небольших скоростях это выражение дает давление колеса с достаточным приближением. Чтобы получить это давление с большей точностью, должно быть учтено давление на рельс от вынужденных колебаний колеса, вызванных переменной вертикальной силой  $P \cos \omega t$ . Пусть  $k$  означает вертикальный груз на рельсе, необходимый, чтобы вызвать непосредственно под грузом прогиб рельса, равный единице, и  $\delta_{st}$  прогиб, вызванный весом  $W$ , тогда

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}.$$

Период свободных колебаний колеса на рельсе может быть получен из выражения <sup>1)</sup> (см. ур-ие [5]):

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}}. \quad [b]$$

Период одного оборота колеса, т. е. период возмущающей (динамической) силы  $P \cos \omega t$ ,

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Теперь, применяя ур-ие [20], можем заключить, что динамический прогиб рельса, вызванный силой  $P$ , будет больше такового, отвечающего статической деформации в отношении:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2}. \quad [c]$$

Давление на рельс, вызываемое центробежной силой  $P$ , увеличится в той же пропорции, и наибольшее давление колеса получится равным

$$Q + W + \frac{P}{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^2}. \quad [d]$$

<sup>1)</sup> При этих вычислениях мы пренебрегли массой рельса, и сжимающая сила  $Q$  в пружине принята постоянной. Это последнее допущение оправдывается тем обстоятельством, что период колебаний кузова паровоза на его рессорах обычно очень велик в сравнении с периодом колебаний колеса на рельсе, поэтому колебания колеса не могут быть переданы кузову, и изменения давления пружины будут очень малы.

При рельсе весом  $49,7 \text{ кг/м}$ , при модуле упругости основания, равном  $105 \text{ кг/см}^2$ , и  $W = 2,718 \text{ кг}$  мы будем иметь <sup>1)</sup>

$$\tau = 0,068 \text{ сек.}$$

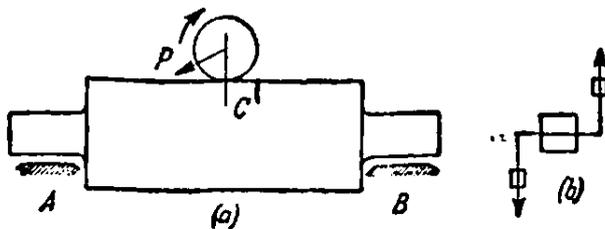
Допустив, что колесо делает пять оборотов в секунду, мы получим

$$\tau_1 = 0,2 \text{ сек.}$$

Подстановкой значений  $\tau$  и  $\tau_1$  в выражение  $[c]$  устанавливаем что динамическое действие противовеса будет примерно на 11% больше вычисленного статического.

*Частота независимых колебаний* системы может быть легко получена опытным путем приложением к этой системе такой возмущающей силы, частоту которой можно постепенно менять. На фиг. 14 показано определение частоты боковых колебаний ротора  $AB$ . Переменная возмущающая сила вызывается маленьким двигателем с переменным числом оборотов и с эксцентрично приложенным грузом. Вертикальная составляющая центробежной силы  $P$  этого груза представляет периодическую возмущающую силу, вызывающую боковые колебания ротора. Эти колебания могут быть легко определены помощью любого рода вибрографа. При постепенном изменении скорости двигателя может быть установлено число оборотов в минуту, при котором амплитуда вынужденных колебаний ротора достигает максимума. Это число представляет частоту независимых колебаний ротора. Встречаются случаи, где, чтобы вызвать вынужденные колебания, вместо возмущающей силы нужно приложить возмущающую пару сил. В таком случае можно применить двигатель с двумя эксцентрично приложенными грузами, как показано на фиг. 14 *b*.

5. Другой метод определения вынужденных колебаний. — Из общего решения [19] п° 3 видно, что в момент приложения возмущающей силы возникают не только вынужденные колебания системы, но также и свободные колебания. Эти последние будут затухать из-за различного рода сил сопротивления, но если рассматривать движение в начале возникновения колебания, то свободные колебания могут иметь существенное значение. Для того чтобы получить полное перемещение системы в начале движе-



Фиг. 14.

<sup>1)</sup> См. S. Timoshenko and J. M. Lessells, Applied Elasticity, 1925, p. 33+.

ния, применим теперь для свободных колебаний метод, основанный на ур-ии [6] п° 1. Из этого ур-ия видно, что перемещение из положения равновесия при любой начальной скорости  $x_0'$  в любой момент  $t$  равно:

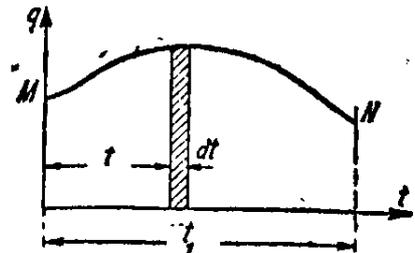
$$x = \frac{x_0'}{p} \sin pt. \quad [a]$$

Допустим теперь, что на систему, показанную на фиг. 1, действует переменная сила, и пусть  $q$  представляет эту возмущающую силу, отнесенную к единице массы (см. ур-ие [17] п° 3). Изменение этой силы в некоторый промежуток времени от  $t=0$  до  $t=t_1$  может быть представлено графически кривой  $MN$ , как показано на фиг. 15. Чтобы получить перемещение системы в любой момент  $t_1$ , представим непрерывное действие силы разделенным на элементарные промежутки  $dt$ . Под действием силы  $q$  в течение этого промежутка скорость груза  $W$  (фиг. 1) возрастает на бесконечно малую величину, которая может быть найдена из равенства

$$\frac{dx'}{dt} = q,$$

а именно

$$dx' = qdt. \quad [b]$$



Фиг. 15.

Теперь из ур-ия [a] можно заключить, что то элементарное приращение скорости для промежутка времени  $t_1$ , какое представлено выражением [b], произведет к моменту  $t_1$  (фиг. 15) перемещение, равное

$$dx = \frac{qdt}{p} \sin p(t_1 - t). \quad [c]$$

Это выражение представляет перемещение под действием силы в течение бесконечно малого промежутка  $dt$ . Чтобы получить перемещение, возникающее при непрерывном действии силы, нужно произвести суммирование этих элементарных перемещений [c]. Тогда получим перемещение в момент  $t_1$

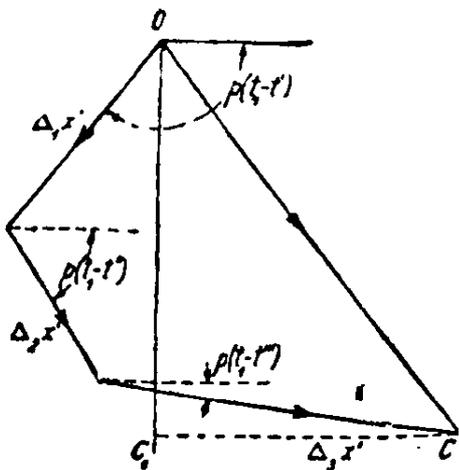
$$x = \frac{1}{p} \int_0^{t_1} q \sin p(t_1 - t) dt. \quad [24]$$

Это выражение представляет полное перемещение, возникающее от силы  $q$ , действующей во время промежутка от  $t=0$  до  $t=t_1$ . В нем заключаются и вынужденные и свободные колебания, и

оно может быть полезным для изучения движения системы в начальный момент. Этим выражением можно воспользоваться и в случаях, когда аналитическое выражение возмущающей силы неизвестно, и единичная сила  $q$  дана графически или численно. Необходимо лишь определить величину интеграла [24], применив один из приближенных способов интегрирования <sup>1)</sup>.

Как пример применения этого метода, рассмотрим колебания под действием возмущающей силы  $q = a \cos mt$  (см. ур-ие [18] п°3). Подставляя это значение  $q$  в ур-ие [24], получим

$$x = \frac{a}{p} \int_0^{t_1} \cos mt \sin p(t_1 - t) dt = \frac{a}{p^2 - m^2} (\cos mt_1 - \cos pt_1).$$



Фиг. 16.

Этот результат вполне совпадает с решением [19], полученным ранее (см. п°3).

Ур-ие [24] может быть применено в случаях, когда необходимо найти перемещение груза  $W$  (см. фиг. 1), происходящее от отдельных толчков. Допустим, например, что вследствие толчков, полученных грузом  $W$  в моменты  $t'$ ,  $t''$ ,  $t'''$ , ..., возникнут бесконечно малые приращения скоростей  $\Delta_1 x'$ ,  $\Delta_2 x'$ ,  $\Delta_3 x'$ , .... Тогда из ур-ий [b] и [24] перемещение в момент  $t_1$  будет:

$$x = \frac{1}{p} \left[ \Delta_1 x' \sin p(t_1 - t') + \Delta_2 x' \sin p(t_1 - t'') + \Delta_3 x' \sin p(t_1 - t''') + \dots \right].$$

Это перемещение можно получить очень легко графически, изображая  $\Delta_1 x'$ ,  $\Delta_2 x'$  ... как векторы, наклоненные к горизонтальной оси под углами  $p(t_1 - t')$ ,  $p(t_1 - t'')$ , ... (фиг. 16). Вертикальная проекция  $OC_1$  геометрической суммы  $OC$  этих векторов, деленная на  $p$ , будет тогда представлять перемещение  $x$ , выражаемое приведенным выше ур-ием. В случаях, когда в момент  $t = 0$  к грузу  $W$  приложена постоянная сила (фиг. 1), перемещение груза в любой момент  $t_1$  получим из ур-ия [24]:

$$x = \frac{q}{p} \int_0^{t_1} \sin p(t_1 - t) dt = \frac{q}{p^2} (1 - \cos pt_1), \quad [d]$$

где  $q/p^2$  — статическое перемещение от силы  $q$  (см. ур-ие [17]). Из ур-ия [d] видно, что наибольшее перемещение во время ко-

<sup>1)</sup> См. *v. Sanden, Practical Analysis, London, 1924.*

лебаний, возникающее от внезапно приложенной силы, равно двойному статическому перемещению, отвечающему той же силе.

6. Затухание пропорциональное скорости. — В предыдущих рассуждениях (см. п<sup>о</sup> 1) мы пренебрегли всеми силами сопротивления трения и в результате получили свободные колебания с постоянной амплитудой. В действительных условиях, однако, силы сопротивления, хоть в некоторых случаях и могущие быть небольшими, вызывают постепенное затухание первоначальных колебаний. Эти силы затухания могут вызываться различными причинами, как-то: трением воздуха или жидкости, внутренним трением в материале колеблющегося тела или трением между поверхностями скольжения.

При исчислении трения между поверхностями скольжения обычно применяется закон Кулона-Морэна <sup>1)</sup>. Принимают, что в случае сухих поверхностей сила трения пропорциональна нормальной составляющей давления, действующего между поверхностями, и не зависит от скорости скольжения. В случае поверхностей, идеально смазанных, когда между скользящими поверхностями существует пленка смазки, сила трения не зависит от давления и пропорциональна скорости скольжения. В действительных случаях обычно существует некоторое промежуточное положение между двумя вышеупомянутыми крайними положениями.

Когда тело колеблется в воздухе или в жидкости, должно быть принято во внимание сопротивление среды. В случае очень небольших скоростей, как это может быть в воздушных буферах, сила сопротивления пропорциональна скорости <sup>2)</sup>, в то время как для больших скоростей можно принять с достаточной точностью сопротивление пропорциональным второй степени скорости.

Когда упругое тело колеблется в пустоте, колебания будут постепенно затухать вследствие внутреннего трения в материале тела <sup>3)</sup>. Влияние этого рода трения на колебание может быть

<sup>1)</sup> С. А. *Coulomb*, *Theorie des machines simples*, Paris, 1821; А. *Morin*, „Mém. prés. p. div. sav.“, tome 4 (Paris, 1833) и 6 (1835). Обзор литературы по трению см. R. v. *Mises*, *Encyklopädie d. Math. Wissenschaften*, Bd 4, S. 153. Что касается новой литературы по этому предмету, см. G. *Sachs*, „Z. f. angew. Math. und Mech.“, Bd 4 (1924), S. 1 и H. *Fromm*, „Z. f. angew. Math. und Mech.“, Bd 7 (1927), S. 27.

<sup>2)</sup> См. опыты А. *Stodola*, „Schweiz. Bauzeitung“, 1893, Bd 22, S. 113.

<sup>3)</sup> Данные о величине этого внутреннего трения для различных материалов можно найти в книге E. *Lehr*, *Die Abkürzungsverfahren zur Ermittlung der Schwingungsfestigkeit von Materialien*, Dissertation, Stuttgart, 1925. См. также А. L. *Kimball*, „Mechanical Engineering“, May 1927, p. 440, и работы *Ormondroyd'a* и *Den Hartog'a*, „Trans. A. S. M. E.“, *Appl. Mech. Div.* 1928.

учтено допущением, что сила сопротивления пропорциональна скорости при коэффициенте пропорциональности, определенном из опытов. Сила сопротивления пропорциональна скорости также в случае электрических сопротивлений <sup>1)</sup>.

Рассмотрим теперь простейший случай, когда затухание пропорционально скорости <sup>2)</sup>. Возьмем ту же схему, как ранее (см. фиг. 1), и добавим силу трения  $-ax'$  к силам, действующим во время колебания на груз  $W$ ; здесь  $a$  — постоянная, зависящая от условий, и знак минус указывает, что сила трения имеет направление, обратное скорости. Получим следующее уравнение движения (см. ур-ие [1] п<sup>o</sup> 1):

$$W - \frac{W}{g} x'' - ax' = W + kx, \quad [a]$$

из которого

$$x'' + 2nx' + p^2x = 0, \quad [25]$$

где

$$p^2 = \frac{kg}{W} \quad \text{и} \quad 2n = \frac{ag}{W}. \quad [26]$$

При обозначении

$$p_1^2 = p^2 - n^2, \quad [27]$$

общее решение ур-ия [25] может быть представлено в следующей форме <sup>3)</sup>:

$$x = e^{-nt} (A \sin p_1 t + B \cos p_1 t). \quad [b]$$

Из этого видно, что полученное колебательное движение имеет период

$$\tau = \frac{2\pi}{p_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2 - n^2}}. \quad [28]$$

Если величина  $n$  мала по сравнению с  $p$ , разность между  $p_1$  и  $p$  — величина второго порядка малости (см. ур-ие [27]), и поэтому можно принять с достаточной точностью, что небольшая сила затухания, пропорциональная скорости, не влияет на период колебания.

<sup>1)</sup> Некоторые данные относительно этого рода затуханий, а также о некоторых других видах затуханий можно найти в книге *H. Holzer, Die Berechnung der Drehschwingungen*, Berlin, 1921, S. 92.

<sup>2)</sup> Затухание, пропорциональное квадрату скорости, рассмотрено *W. Hort'ом*, см. *Technische Schwingungslehre*, 2 Aufl. 1922, S. 44.

<sup>3)</sup> Здесь принято, что величина  $n$ , зависящая от трения, меньше чем  $p$ , так что корень  $\sqrt{p^2 - n^2}$  действительный; в противном случае имеет место *апериодическое* движение.

Амплитуда колебаний, выражаемая ур-ием [b], из-за множителя  $e^{-nt}$  постепенно убывает с течением времени, и первично возникшие колебания будут постепенно затухать. Чтобы получить эту амплитуду, должны быть определены из начальных условий произвольные постоянные  $A$  и  $B$  ур-ия [b]. Пусть  $x_0$  и  $x_0'$  обозначают, соответственно, перемещение системы из положения равновесия и скорость в начальный момент  $t=0$ , тогда из ур-ия [b] имеем:

$$x_0 = B.$$

Дифференцируя это же уравнение по времени и вставив величину начальной скорости  $x_0'$ , получаем

$$A = \frac{1}{p_1} (x_0' + nx_0),$$

и ур-ие [b] будет

$$x = e^{-nt} \left[ \frac{x_0'}{p_1} \sin p_1 t + x_0 (\cos p_1 t + \frac{n}{p_1} \sin p_1 t) \right]. \quad [29]$$

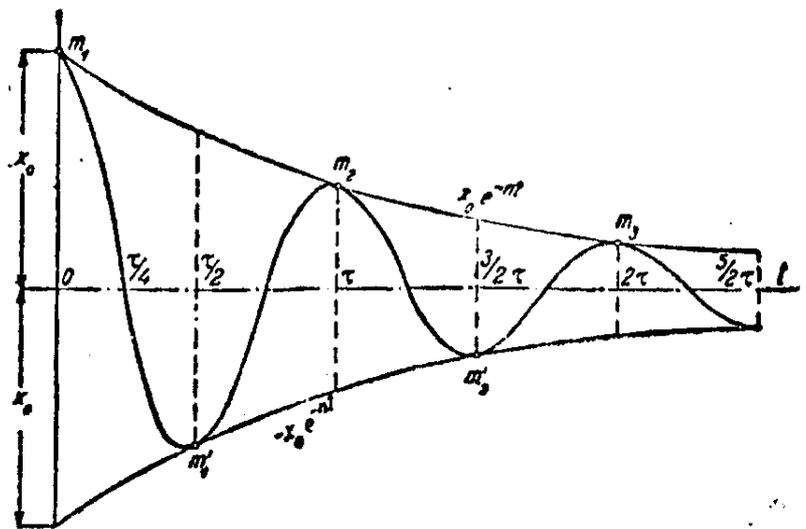
Ур-ие [29] может быть представлено графически. Например, в частном случае, когда

$$\frac{x_0'}{p_1} + \frac{nx_0}{p_1} = 0,$$

т. е. когда

$$x = x_0 e^{-nt} \cos p_1 t, \quad [c]$$

имеем кривую, изображенную на фиг. 17. Эта кривая касательна к кривой  $x = x_0 e^{-nt}$  в точках  $m_1, m_2, m_3 \dots$  при  $t=0, t=\tau, t=2\tau \dots$  и к кривой  $x = -x_0 e^{-nt}$  в точках  $m_1', m_2' \dots$  при  $t=1/2\tau, t=3/2\tau \dots$ . Эти точки не совпадают с точками крайних перемещений системы из положения равновесия, и легко видеть, что из-за затухания промежутков времени, необходимый для перемещения системы из среднего положения к следующему крайнему положению, меньше промежутка, необходимого для возвращения из крайнего положения в следующее среднее положение.



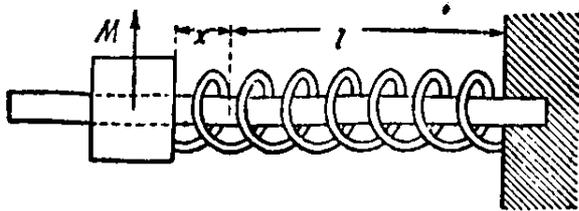
Фиг. 17.

Степень затухания зависит от величины постоянной  $n$  (ср-ие [25]). Из общего ср-ия [29] видно, что амплитуда колебаний уменьшается после каждого цикла в отношении:

$$e^{-n\tau} : 1, \quad [d]$$

т. е. уменьшается, следуя закону геометрической прогрессии. Ср-ие [d] может быть использовано для опытного определения коэффициента затухания  $n$ . Необходимо только определить из опыта, в какой пропорции уменьшается амплитуда колебания после данного числа циклов.

7. Постоянное затухание. — Как пример постоянного затухания рассмотрим схему, показанную на фиг. 18. Допустим, что груз  $W$



Фиг. 18.

помещен в его крайнее правое положение  $x = x_0$  и освобожден; тогда начинается движение в направлении налево.

Во время этого движения на груз действуют следующие силы:

1) сила натяжения пружины, равная  $kx$ <sup>1)</sup>; 2) сила инерции —  $W/gx_1''$  и 3) постоянная сила трения  $R$  между грузом и поверхностью стержня в направлении, обратном движению.

Ур-ие движения будет

$$-kx - \frac{W}{g} x'' + R = 0 \quad [a]$$

или

$$x'' + p(x - a) = 0; \quad [30]$$

здесь, как выше (ср-ие [3]),

$$p = \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

и

$$a = \frac{R}{k}. \quad [31]$$

Эта последняя величина имеет простое физическое значение. Это есть натяжение пружины, вызванное силой трения  $R$ . При обозначении  $x_1 = x - a$  ср-ие [30] получает вид

$$x_1'' + p^2 x_1 = 0.$$

<sup>1)</sup>  $x$  измеряется от незакрепленного конца пружины.

Это уравнение находится в полном соответствии с выше рассмотренным уравнением [2] (п°1), и из него могут быть сделаны следующие заключения:

1) Постоянное трение не меняет периода колебаний.

2) Среднее положение, около которого совершается простое гармоническое колебание, перемещается в направлении силы  $R$  трения на расстояние  $a$  (ур-ие [31]). Вследствие этого крайнее левое положение груза будет отстоять от положения, отвечающего незакрепленному концу пружины только на  $x_0 - 2a$ . Это означает, что уменьшение амплитуды из-за постоянного затухания на протяжении половины цикла равно  $2a$ .

Рассматривая теперь движение из крайнего левого положения в правое и применяя те же рассуждения, можно видеть, что и в течение второй половины цикла произойдет дальнейшее уменьшение амплитуды на величину  $2a$ . Из этого ясно, что в рассмотренном случае уменьшение амплитуды следует закону арифметической прогрессии. Груз  $W$  остановится в одном из его крайних положений, если только амплитуда получится меньше  $a$ . Очевидно, что в этом случае трение достаточно, чтобы уравновесить растягивающее усилие пружины.

8. Вынужденные колебания при затухании. — Взяв опять схему, показанную на фиг. 1, допустим, что в дополнение к ранее рассмотренным силам<sup>1)</sup> (см. ур-ие [a], п° 1) действует на груз  $W$  в вертикальном направлении сила  $Q \sin mt$ . Тогда при обозначении

$$\frac{gQ}{W} = q, \quad [a]$$

уравнение движения будет<sup>2)</sup>

$$x'' + 2nx' + p^2x = q \sin mt. \quad [32]$$

Общее решение этого уравнения получим, если к решению, соответствующему однородному уравнению (см. ур-ие [25] п° 6), добавим частное решение ур-ия [32]. Последнее будет иметь вид

$$x = M \sin mt + N \cos mt.$$

Подставляя это в ур-ие [32], получим следующие уравнения для определения  $M$  и  $N$

$$\begin{aligned} -Nm^2 + 2Mmn + Np^2 &= 0, \\ -Mm^2 - 2Nmn + Mp^2 &= q, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Случай вынужденного колебания при постоянном трении рассмотрен в работе *W. Eckolt'a* в „Zeitschrift f. Tech. Phys.“, 1926, Bd 7, S. 226.

<sup>2)</sup> Здесь употребляются обозначения п° 6.

откуда

$$N = -\frac{2qmn}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2}, \quad M = \frac{q(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2}$$

Тогда общее решение ур-ия [32] будет

$$x = e^{-nt}(A \sin p_1 t + B \cos p_1 t) - \frac{2qmn}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2} \cos mt + \\ + \frac{q(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2} \sin mt. \quad [33]$$

Первый член правой части, имеющий множитель  $e^{-nt}$ , представляет затухающее колебание, изученное в предыдущем п°. Два других члена, пропорциональные  $q$ , представляют вынужденные колебания. Эти последние вызываются периодической внешней силой и не будут затухать со временем. Их период  $\tau_1 = \frac{2\pi}{m}$  тот же самый, что возмущающей силы, а их амплитуда пропорциональна величине этой силы. Эта амплитуда зависит также от отношения между периодом  $\tau$  независимых колебаний системы и периодом  $\tau_1$  возмущающей силы.

Выражение для вынужденных колебаний может быть упрощено помощью следующих обозначений:

$$\frac{-2qmn}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2} = -C \sin \alpha, \quad [b]$$

$$\frac{q(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2} = C \cos \alpha. \quad [c]$$

Выражение для вынужденных колебаний будет

$$C(\cos \alpha \sin mt - \sin \alpha \cos mt) = C \sin(mt - \alpha). \quad [34]$$

Амплитуда  $C$  вынужденных колебаний из [b] и [c]:

$$C = \frac{q}{\sqrt{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2n^2}}. \quad [35]$$

Угол  $\alpha$  в ур-ии [34] представляет разницу фаз между вынужденными колебаниями и динамической силой.

Деля [b] на [c], имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2mn}{p^2 - m^2}. \quad [36]$$

Если  $p > m$ , как случается, когда период независимых колебаний системы меньше такового возмущающей силы, угол  $\alpha$  бу-

дет положителен и меньше чем  $\frac{1}{2}\pi$ . Из ур-ия [34] можно заключить, что вынужденные колебания отстают от возмущающей силы  $q \sin mt$ .

Когда  $p < m$ , то

$$\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi,$$

т. е. отставание вынужденного колебания больше чем  $\frac{1}{2}\pi$ .

Когда  $p = m$ , т. е. в случае резонанса,  $\operatorname{tg} \alpha$  в ур-ии [36] будет равен бесконечности и разность фаз будет равна  $\frac{1}{2}\pi$ . Это означает, что во время такого колебательного движения система занимает свое среднее положение в момент, когда возмущающая сила достигает своего максимального значения.

Теперь рассмотрим амплитуду  $C$  этих вынужденных колебаний. Помня, что

$$q = \frac{gQ}{W}$$

и

$$p^2 = \frac{kg}{W},$$

заключаем, что

$$\frac{q}{p^2} = \frac{Q}{k} = \delta_{st}, \quad [d]$$

где  $\delta_{st}$  обозначает перемещение, которое возникло бы при наибольшем значении возмущающей силы, если бы она была приложена статически.

Пользуясь ур-ием [d], получим выражение амплитуды вынужденных колебаний (ур-ие [35]):

$$C = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4m^2n^2}{p^4}}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}\right)^2 + \frac{\tau^2\gamma^2}{\tau_1^2}}}, \quad [37]$$

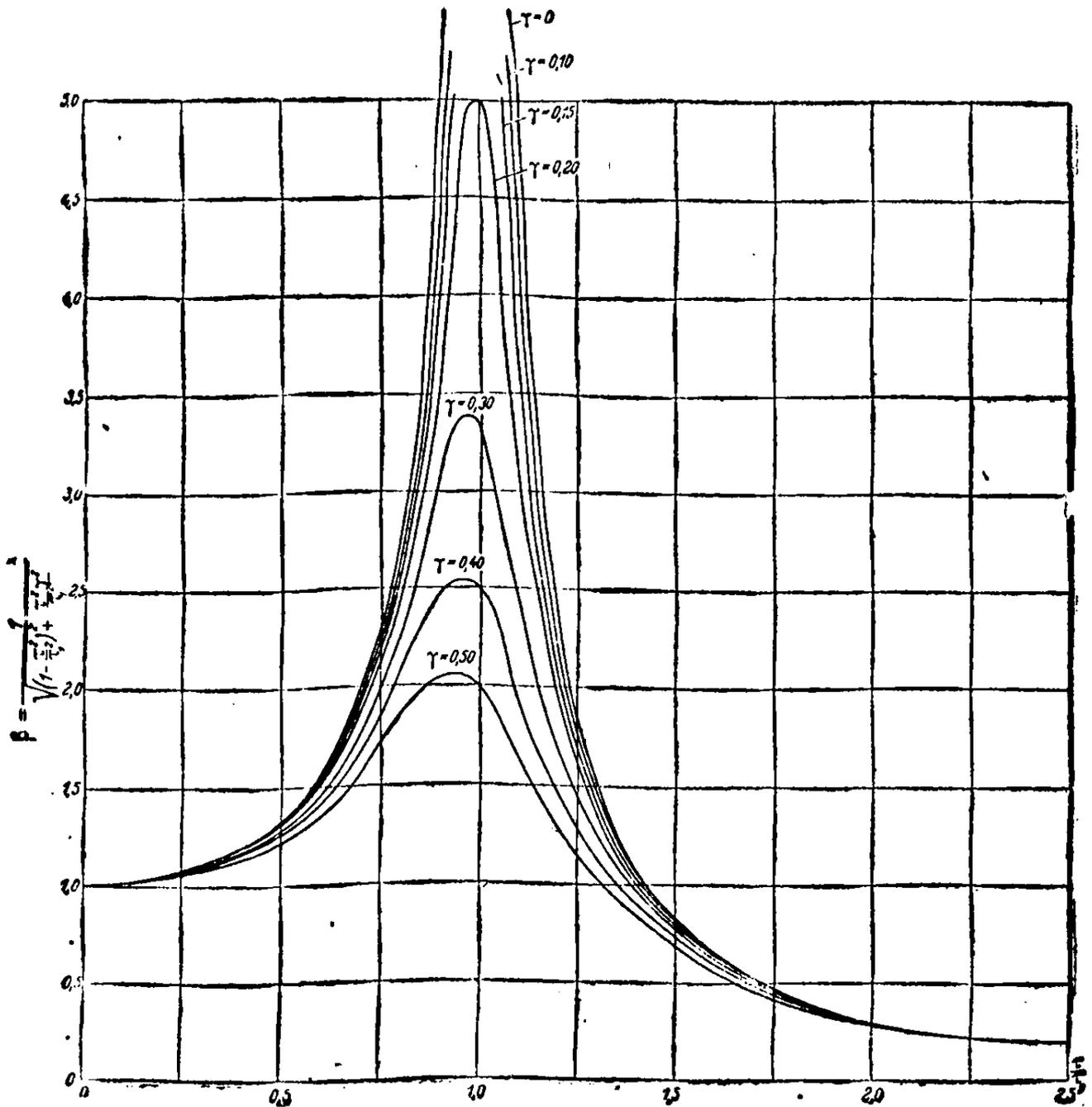
в котором  $\tau = \frac{2\pi}{p}$  — период независимых колебаний системы,

$\tau_1 = \frac{2\pi}{m}$  — период динамической силы  $Q \sin mt$ ,  $\gamma = \frac{2n}{p}$  величина,

зависящая от величины сил затухания.

Легко видеть, что, если возмущающая сила имеет очень большой период  $\tau_1$ ,  $C$  приближается к значению  $\delta_{st}$ . Это означает, что в таких случаях перемещение системы может быть исчислено при допущении, что возмущающая сила  $Q \sin mt$  действует статически. Другой крайний случай получим при допущении

нии, что  $\tau_1$  очень небольшая величина, как это бывает, когда возмущающая сила имеет очень высокую частоту. В этом случае знаменатель уравнения [37] будет очень велик, и амплитуда вынужденных колебаний приближается к нулю.



Фиг. 19.

Если  $\tau_1$  приближается к  $\tau$  и силы затухания малы, знаменатель выражения [37] будет очень мал. Это значит, что в случае резонанса сравнительно небольшая возмущающая сила может вызвать очень большие вынужденные колебания и очень серьезные напряжения в колеблющемся сооружении.

Чтобы получить ясную картину изменений амплитуды  $C$  с изменением отношения  $\tau/\tau_1$  и величины  $\gamma$ , на фиг. 19 начерчен

ряд кривых, представляющих коэффициент нарастания колебаний (magnification factor)

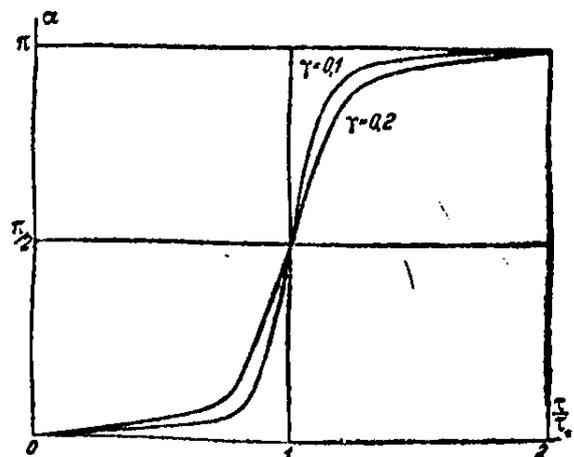
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}\right)^2 + \frac{\tau^2 \gamma^2}{\tau_1^2}}} \quad [38]$$

в функции отношения  $\tau/\tau_1$  для различных значений величины  $\gamma$ <sup>1)</sup>. Из этих кривых видно, что точка максимума амплитуды не совсем совпадает с состоянием резонанса, но что величина отношения  $\tau/\tau_1$ , отвечающая максимуму амплитуды, немного меньше единицы и приближается к единице в пределе с уменьшением затухания. Поэтому в случае малых затуханий разница между максимумом амплитуды вынужденных колебаний и амплитудой этих колебаний при резонансе очень мала и эта последняя амплитуда обычно принимается в основу вычислений максимального напряжения при вынужденных колебаниях.

Из фиг. 19 легко видеть, что затухание имеет большое влияние на вынужденные колебания только в области близкой состоянию резонанса, а именно от  $\tau/\tau_1 = 0,75$  до  $\tau/\tau_1 = 1,25$ . В этих пределах затухание значительно ослабляет амплитуду вынужденных колебаний и делает ее конечной при резонансе. С увеличением затухания действие резонанса становится менее и менее заметным.

Вне этого промежутка небольшие изменения затухания вызывают только второстепенное влияние на амплитуду колебаний, и выше сделанные заключения (см. п<sup>o</sup>3) для крайних высоких и низких частот возмущающей силы остаются неизменными и при затухании

Ранее было показано, что вынужденные колебания всегда отстают от возмущающей силы, и разница фаз  $\alpha$  может быть определена из ур-ия [36]. Эта разница фаз имеет некоторый практический интерес, и ее изменения при затухании и с изменением отношения  $\tau/\tau_1$  показаны на фиг. 20. Из диаграммы видно, что в области, близкой резонансу, имеют место очень резкие изменения фазы вынужденных колебаний, если затухание мало. Для



Фиг. 20.

<sup>1)</sup> При  $\gamma = 0$  ур-ие [38] совпадает полностью с ур-ием [20] п<sup>o</sup>3, полученным для колебаний без затухания.

$\tau/\tau_1 < 1$  разница фаз  $\alpha$  мала, она становится равной  $\pi/2$  для случая  $\tau = \tau_1$  и приближается к  $\pi$ , когда  $\tau/\tau_1 > 1$ . При постепенном уменьшении  $\gamma$  положение будет приближаться к рассмотренному в п°3 (см. стр. 16), когда разница фаз при  $\tau = \tau_1$  сразу меняется с 0 на  $\pi$ .

Из ур-ия [34] видно, что наибольшая скорость вынужденных колебаний равна  $Cm$ , поэтому максимум кинетической энергии системы пропорционален

$$C^2 m^2 = \frac{\delta_{st}^2 m^2}{\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4m^2 n^2}{p^4}} = \frac{\delta_{st}^2 p^2}{\left(\frac{p}{m} - \frac{m}{p}\right)^2 + 4\frac{n^2}{p^2}}. \quad [e]$$

Так как это выражение имеет наибольшую величину при  $m = p$ , то стало быть кинетическая энергия колеблющейся системы достигает максимума при состоянии резонанса.

Рассмотрим теперь такое соотношение, при котором работа возмущающей силы идет на поддержание колебания и лишь преодолевает сопротивления. Пусть действующая сила, отнесенная к единице массы, в любой момент  $t$  равна  $q \sin mt$  (см. ур-ие [32]). Скорость точки приложения силы в тот же момент будет равна из ур-ия [34]

$$x' = Cm \cos(mt - \alpha).$$

Величина работы, производимой действующей силой, тогда получается

$$q \sin mt \cdot Cm \cos(mt - \alpha) = \frac{qmC}{2} \left\{ \sin(2mt - \alpha) + \sin \alpha \right\}. \quad [f]$$

При вычислении среднего значения величины [f] в продолжение одного цикла, первый член в скобках в правой стороне уравнения [f] дает нам 0, и мы получим для этого среднего значения  $\omega$  следующий результат:

$$\omega = \frac{qmC \sin \alpha}{2},$$

или по ур-ию [b]

$$\omega = \frac{q^2 m^2 n}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2} = \frac{q^2}{2p} \cdot \frac{\frac{2n}{p}}{\left(\frac{p}{m} - \frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{2n}{p}\right)^2}.$$

Пользуясь обозначениями:

$$\frac{2n}{p} = \gamma, \quad \frac{p}{m} = \frac{\tau_1}{\tau} = 1 + z,$$

получим

$$\omega = \frac{q^2}{2p} \cdot \frac{\gamma}{\left(1 + z - \frac{1}{1+z}\right)^2 + \gamma^2} \quad [39]$$

Величина  $\omega$  достигает своего наибольшего значения при резонансе. Подставляя  $z=0$  в ур-ие [39], имеем

$$\omega_{\max} = \frac{q^2}{2p\gamma} = \frac{q^2}{4n} \quad [40]$$

Очевидно, что  $\omega_{\max}$  увеличивается с уменьшением  $n$ , т. е. с уменьшением затухания<sup>1)</sup>. Изучая изменения  $\omega$  (см. ур-ие [39]) вблизи точки резонанса, можем рассматривать  $z$  как бесконечно малую величину. Тогда

$$\left(1 + z - \frac{1}{1+z}\right)^2 \approx 4z^2,$$

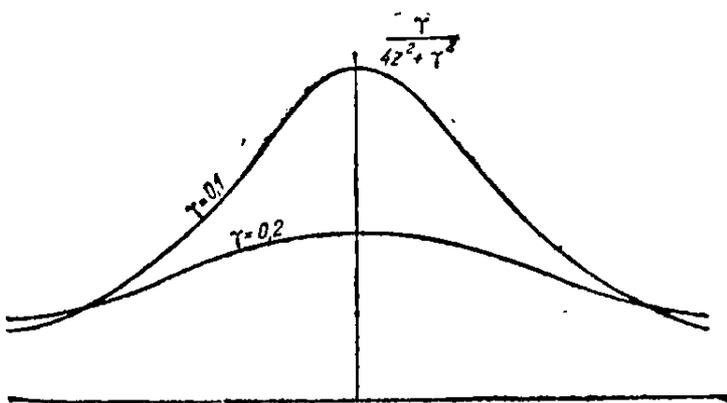
и из ур-ия [39] имеем

$$\omega = \frac{q^2}{2p} \frac{\gamma}{4z^2 + \gamma^2} \quad [39']$$

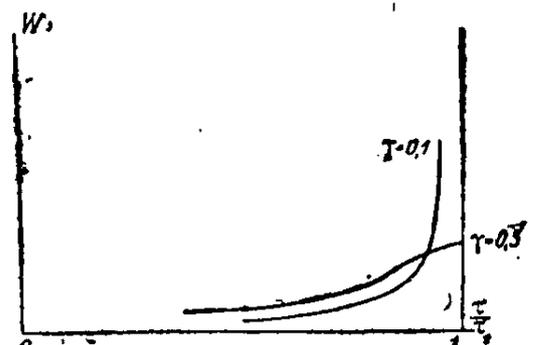
Изменение множителя

$$\frac{\gamma}{4z^2 + \gamma^2}$$

вблизи точки резонанса показано на фиг. 21. Ясно, что изменения  $\omega$  получаются все более и более заметными с уменьшением



Фиг. 21.



Фиг. 22.

затухания. На фиг. 22 работа  $w$  изображена в зависимости от отношения  $\tau/\tau_1$  для  $\gamma=0,1$  и  $\gamma=0,5$ . Из этого видно, что только вблизи точки резонанса поглощение энергии увеличивается с

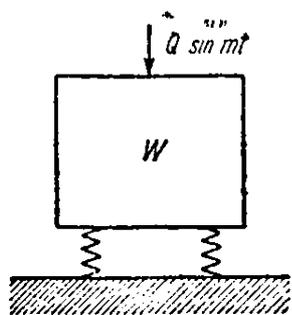
<sup>1)</sup> При  $n=0$  амплитуда колебаний бесконечно увеличивается, и приведенное выше рассуждение неприменимо.

уменьшением затухания. В других точках большему поглощению энергии соответствует большее затухание.

Это общее заключение может иметь некоторый интерес при рассмотрении количества энергии, поглощаемой фундаментами машин при колебаниях.

**9. Технические применения (вынужденные колебания при затухании).** — Нами будут рассмотрены некоторые случаи, где может быть применена выше рассмотренная теория вынужденных колебаний.

*а. Поглотители колебаний (амортизаторы).* — Для того чтобы уменьшить действие возмущающей силы на фундамент машины и чтобы предотвратить передачу колебаний сооружению, может быть полезным введение особых гибких элементов (амортизаторов) между машиной и основанием. Пусть  $W$  — вес машины,  $Q \sin mt$  — возмущающая периодическая сила. Если машина жестко прикреплена к основанию, вся возмущающая сила передается основанию. Введением гибких рессор амортизатора между машиной и основанием (фиг. 23) можно получить существенное уменьшение силы, передающейся поддерживающим частям, если только выполнены известные условия. Определение действия амортизатора может быть легко выполнено на основании выше рассмотренной теории вынужденных колебаний (см. п°8). Выбирая пружины амортизатора таким образом, чтобы период  $\tau$  независимых колебаний машины на пружинах был значительно больше периода  $\tau_1 = 2\pi/m$  возмущающей силы, мы уменьшим динамические перемещения машины при колебаниях в отношении  $\beta$  (см. ур-ие [38]) сравнительно с перемещениями, которые возникли бы от возмущающей силы  $Q \sin mt$  в статических условиях. Силы, которые передаются основанию, пропорциональны деформации рессор и потому будут уменьшены также в отношении  $\beta$ . Пренебрегая затуханием и взяв например  $\tau/\tau_1 = 4$ , т. е. допустив, что действующая скорость в четыре раза больше скорости, отвечающей резонансу, получим из ур-ия [38]  $\beta = 1/15$ , т. е., благодаря действию поглотителя колебаний, сила, передающаяся основанию, уменьшится до  $1/15$  возмущающей силы. В действительности применение амортизатора часто представляет большие затруднения главным образом из-за ограниченности места. Трудно иметь достаточное пространство для размещения рессор, которые будут достаточно сильны для передачи груза основанию и в то же время достаточно гибки, чтобы получить скорость резонанса системы малой по сравнению с действующей скоростью.



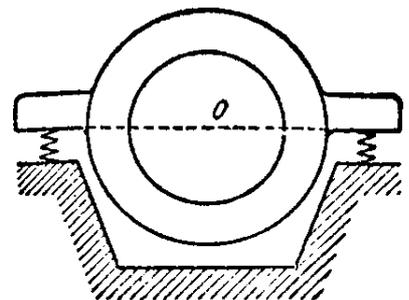
Фиг. 23.

На фиг. 24 показан схематический вид поглотителя колебаний для большого однофазного генератора<sup>1)</sup>. Чтобы уменьшить действие пульсирующего скручивающего момента, введены гибкие пружины между статором машины и фундаментом. С помощью специальных направляющих частей предотвращена возможность бокового смещения статора и остается возможным только вращение его вокруг оси  $O$ .

Пусть  $k$  — скручивающий момент, необходимый, чтобы произвести поворот статора на один радиан вокруг оси, проходящей через  $O$  и перпендикулярной плоскости фигуры;  $I$  — момент инерции статора вокруг той же оси,  $\varphi$  — угол вращения статора при колебании.

Дифференциальное уравнение колебания статора будет тогда совпадать с ур-ием [11] (см. п<sup>о</sup> 2), и период  $\tau$  колебаний найдем из ур-ия [12]. Пренебрегая затуханием, действие амортизатора можем представить коэффициентом нарастания колебаний (см. ур-ие [20])

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}},$$



Фиг. 24.

где  $\tau_1$  — период пульсирующего скручивающего действующего на статор момента. Если  $\tau$  велико по сравнению с  $\tau_1$ , только небольшая часть скручивающего момента будет передана через пружины на фундамент.

Мы рассматривали выше амортизатор, состоящий из стальных пружин. Во многих случаях для предотвращения передачи колебания сооружению употребляются амортизаторы, состоящие из подушек, сделанных из разного рода органических материалов, как-то: резина, пробка и т. д. Следует заметить, что такие амортизаторы обычно слишком жестки, чтобы существенно уменьшить действие главных гармонических колебаний возмущающей силы, но могут быть полезны для поглощения колебаний, происходящих от высших колебаний возмущающей силы. сверх того, свойство этих органических материалов обычно меняется с течением времени. По этой причине во всех более важных случаях нужно применять амортизаторы из стальных пружин, так как они более надежны.

*в. Виброграф.* — Следующим примером возьмем виброграф,

<sup>1)</sup> См. *C. R. Söderberg*, „Electric Journal“, 1924, Vol. XXI, p. 160.

изображенный на фиг. 11, рама которого подвергается простому гармоническому колебанию. Пусть  $x$  обозначает вертикальное перемещение груза  $W$  от положения равновесия и  $x_1 = b \sin mt$  — простое гармоническое движение в вертикальном направлении рамы вибрографа. Тогда сила инерции груза  $W$  будет  $-Wx''/g$ , сила пружины будет  $-k(x - x_1)(a/l)$  и сила затухания, действующая на груз  $W$ , будет  $-cx'$ . Пренебрегая массой рычага  $BD$  и беря момент всех сил вокруг конца острья  $B$ , имеем

$$-\frac{W}{g} x''l - cx'l - k(x - x_1) \frac{a^2}{l} = 0$$

или

$$x'' + 2nx' + p^2x = q \sin mt. \quad [a]$$

Здесь:

$$\frac{cg}{W} = 2n; \quad \frac{kga^2}{Wl^2} = p^2; \quad \frac{kbg a^2}{Wl^2} = q. \quad [b]$$

Общее решение ур-ия [a] уже нами получено (см. ур-ие [33] стр. 32). Соответствующие вынужденные колебания (см. ур-ие [34] и [37] стр. 32 и 33):

$$x = \frac{b \sin(mt - \alpha)}{\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4m^2n^2}{p^4}}} = \beta b \sin(mt - \alpha), \quad [c]$$

где  $\beta$  обозначает коэффициент нарастания колебаний. Записывающий прибор обычно дает перемещение  $x - x_1$  груза  $W$  относительно рамы вибрографа. Применяя ур-ие [c], имеем

$$\begin{aligned} x - x_1 &= b \{ \beta \sin(mt - \alpha) - \sin mt \} = \\ &= b \{ (\beta \cos \alpha - 1) \sin mt - \beta \sin \alpha \cos mt \}. \end{aligned}$$

Это представляет простое гармоническое движение с амплитудой (см. ур-ие [8])

$$A = b \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \alpha + 1}. \quad [d]$$

Из этого видно, что масштаб записей зависит не только от коэффициента нарастания колебаний  $\beta$ , но также и от величины отставания  $\alpha$ . Если затуханием можно пренебречь, то  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$  (см. стр. 16), и ур-ие [d] получает вид:

$$A = b (\beta \pm 1). \quad [d']$$

Знак минус отвечает случаю, когда  $p > m$ , т. е. когда частота динамической силы меньше чем таковая независимых колебаний

вибрографа. Знак плюс соответствует случаю  $p < m$ . Величина амплитуды может быть получена для обоих случаев по фиг. 7, при перенесении горизонтальной оси, как показано пунктирной линией.

Подставляя в ур-ие  $[d']$  значение  $\beta$ , из ур-ия  $[c]$  и пренебрегая затуханием, имеем:

$$A = \frac{b}{\frac{p^2}{m^2} - 1}, \quad [d'']$$

где знак действителен для всех значений  $m$ . Теперь, если частота  $p$  независимых колебаний прибора мала сравнительно с  $m$ , находим, что приблизительно

$$A = -b.$$

Следовательно амплитуда записи равна амплитуде возмущающего движения. Потому, если мы хотим применить прибор, как *виброграф* (для записей *движений*), необходимо, чтобы  $p$  было значительно меньше  $m$ .

Если, однако, имеет место обратное положение ( $p$  значительно больше  $m$ ), то уравнение  $[d'']$  приводится к виду:

$$A = b \frac{m^2}{p^2},$$

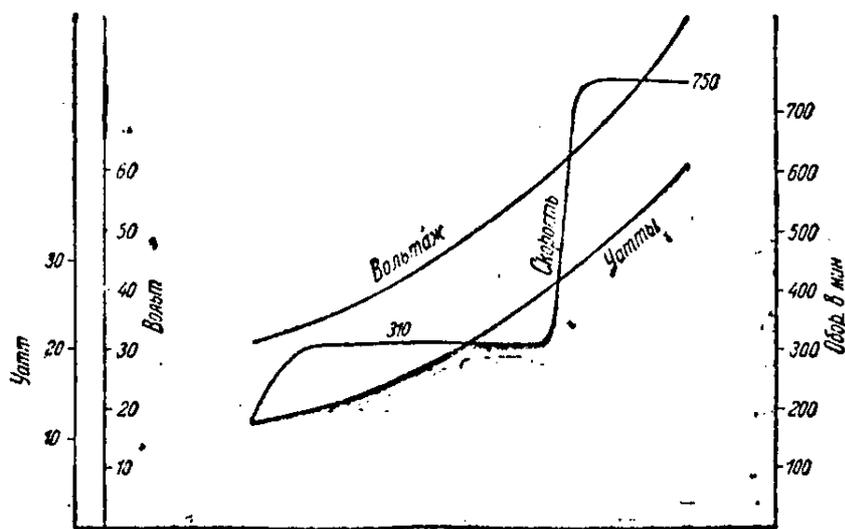
и, так как в данном приборе  $p$  постоянно, амплитуда записи пропорциональна  $b m^2$ . Возмущающее движение —  $b \sin mt$ ; его ускорение —  $b m^2 \sin mt$ , которое также пропорционально  $b m^2$ . Поэтому, если прибор сделан так, что  $p$  значительно больше  $m$ , то его можно употреблять как *измеритель ускорения* — *акселерометр*.

Вблизи состояния резонанса ( $p = m$ ) имеет место резкое изменение величины отставания  $\alpha$ , и коэффициент  $\beta$  зависит в большой степени от величины затухания. Это показывает, что нахождение амплитуды  $A$  из ур-ия  $[d]$  становится около этой точки неопределенным, и запись вибрографа в этой области не может дать нам положительных результатов.

*с. Опыт Зоммерфельда*<sup>1)</sup>. — Этот опыт показывает очень ясно, как много энергии может рассеяться и поглотиться основанием, когда машина работает в состоянии резонанса. В своих опытах Зоммерфельд прикреплял небольшой мотор постоянного тока к верху стола. Мотор имел эксцентрично относительно его оси прикрепленный груз, так что во время вращения возникала возмущающая сила, которая действовала на стол. При постепенном

<sup>1)</sup> A. Sommerfeld, „Zeitschrift d. V. d. Ing.“. 1904.

увеличении скорости мотора легко было установлено, что при 310 оборотах в минуту имело место большое горизонтальное движение верха стола. Очевидно, это указывало на условия резонанса для системы, состоящей из доски стола и ножек. При этих колебаниях доска стола вела себя как твердое тело, и горизонтальное движение происходило только вследствие изгиба ножек. Имея такое состояние резонанса и постепенно увеличивая вольттаж мотора, можем с полной ясностью показать, что мотор будет иметь тенденцию сохранять постоянную скорость, отвечающую резонансу ( $n = 310$  в этом случае), и что добавочная энергия вызовет только дальнейшее увеличение вынужденного колебания (см. фиг. 25), которое поглощается фундаментом. Только после



Фиг. 25.

того как вольттаж мотора был значительно увеличен, мотор оказался в состоянии увеличить свою скорость выше критического предела, после чего вынужденные колебания быстро сошли на нет.

Вторая критическая скорость для случая опыта Зоммерфельда была получена при 750 оборотах в минуту. При этой скорости изгибающие колебания доски стола имели резонанс, и получались большие изгибающие колебания верха стола. Опять условия становились такими, что фундамент начинал поглощать значительную долю энергии, которая расходовалась на поддержание вынужденных колебаний системы<sup>1)</sup>.

Интересно упомянуть здесь, что, когда вышеописанная система находится в состоянии резонанса, и значительное количество энергии передается основанию, может получиться внезапное увеличение скорости мотора без изменения вольттажа при предотвращении помощью какого-либо рода противодействия больших вынужденных колебаний основания. Автор довел до конца этот опыт, пользуясь маленьким мотором, укрепленным на гибкой стальной балке на двух опорах. Когда система находилась в резонансе, имели место сильные изгибающие колебания балки. Надавлива-

Интересно упомянуть здесь, что, когда вышеописанная система находится в состоянии резонанса, и значительное количество энергии передается основанию, может получиться внезапное увеличение скорости мотора без изменения вольттажа при предотвращении помощью какого-либо рода противодействия больших вынужденных колебаний основания. Автор довел до конца этот опыт, пользуясь маленьким мотором, укрепленным на гибкой стальной балке на двух опорах. Когда система находилась в резонансе, имели место сильные изгибающие колебания балки. Надавлива-

<sup>1)</sup> См. предыдущие рассуждения, стр. 36 и 37.

нием руки на балку эти колебания предотвращались, и легко демонстрировалось внезапное увеличение скорости мотора.

Нужно здесь заметить, что задача вынужденных колебаний фундаментов имеет огромное практическое значение и становится все более и более существенной с увеличением мощности установок больших турбогенераторов. В общем эта задача значительно сложнее, чем описано выше, и некоторое дальнейшее развитие ее будет рассмотрено далее при изучении систем, имеющих несколько степеней свободы.

**10. Уравновешивание вращающихся машин.** — Одно из самых важных применений теории колебаний — решение задач уравновешивания. Известно, что вращающееся тело не оказывает никакого возмущающего воздействия на подставки, когда ось вращения совпадает с одной из главных осей инерции тела. Трудно точно удовлетворить этому условию в процессе изготовления частей машины, так как всегда существуют некоторые неправильности в распределении масс вследствие неточности геометрических размеров и неоднородности материала. В результате этого имеют место различные возмущающие силы, которые вызывают колебания машины. Чтобы устранить эти колебания в машинах и установить спокойные условия движения, необходимо произвести уравновешивание. Важность уравновешивания становится особенно велика для машин больших скоростей. В таких случаях самая легкая неуравновешенность может вызвать очень большую возмущающую силу. Например, при 1800 оборотов в минуту неуравновешенность, равная 0,45 кг при радиусе в 0,76 м, вызывает возмущающую силу, равную 1250 кг.

Чтобы пояснить различные состояния неуравновешенности, рассмотрим вращающееся тело, показанное на фиг. 26 а <sup>1)</sup>.

Представим вращающееся тело разделенным на две части некоторым поперечным сечением *mn*. Могут быть три следующих типовых случая неуравновешенности:

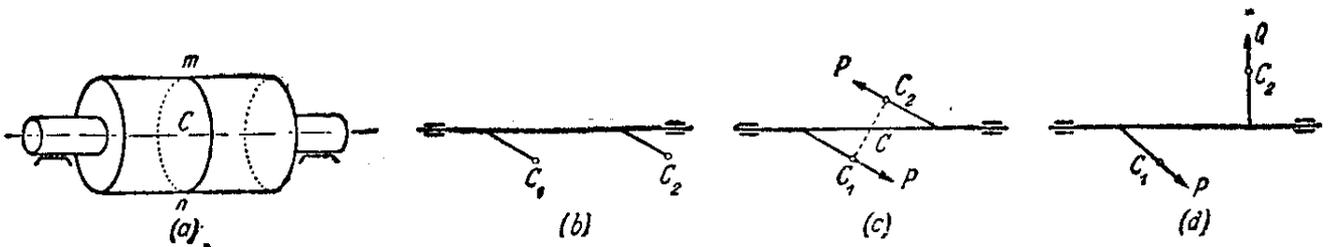
1. Центры тяжести обеих частей могут быть в одной и той же осевой плоскости и по одну и ту же сторону от оси вращения, как показано на фиг. 26 б. Центр тяжести *S* всего тела будет следовательно в той же плоскости на определенном расстоянии от оси вращения. Это называется *статической неуравновешенностью*, так как она может быть обнаружена статической проверкой. При проверке статической уравновешенности вращающееся тело двумя концами его вала укладывают на абсолютно

---

<sup>1)</sup> Вращающееся тело рассматриваем как абсолютно жесткое тело и колебаниями вследствие упругих деформаций его пренебрегаем.

горизонтальные параллельные бруски. Если центр тяжести всего тела находится на оси (фиг. 26 *c*), вращающееся тело будет находиться в равновесии в любом положении. Если центр слегка отходит от вала, как на фиг. 26 *b*, оно будет катиться по брускам, пока центр тяжести не займет его низшего положения.

2. Центры тяжести обеих частей могут быть в одной и той же осевой плоскости, но на противоположных сторонах от оси вращения, как показано на фиг. 26 *c*, и на таком радиальном расстоянии, что центр тяжести  $C$  всего тела будет точно на оси вращения. В этом случае тело будет уравновешено в условиях статики, но при вращении возмущающая пара центробежных сил  $P$  будет действовать на вращающееся тело. Эта пара вращается вместе с телом и вызывает колебания в фундаменте. Такой случай называется *динамической неуравновешенностью*.



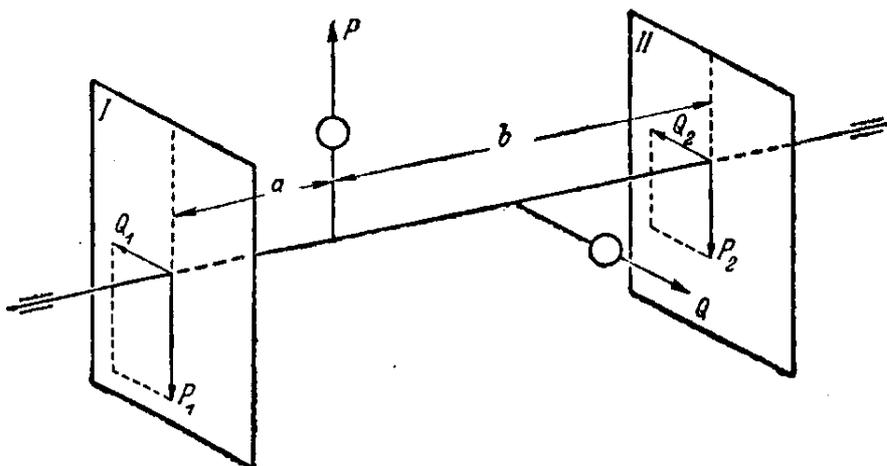
Фиг. 26.

3. В самом общем случае центры тяжести  $C_1$  и  $C_2$  могут лежать в различных осевых сечениях, и во время вращения на тело будет действовать система двух сил, образованных центробежными силами  $P$  и  $Q$  (см. фиг. 26 *d*). Эта система сил всегда может быть приведена к паре, действующей в некотором осевом сечении, и радиальной силе, т. е. это случай совместной статической и динамической неуравновешенности.

Можно показать, что во всех случаях полное уравновешивание может быть получено прикреплением к вращающемуся телу в плоскостях двух произвольно выбранных поперечных сечений, в каждой, по грузу. Рассмотрим, например, случай, изображенный на фиг. 27. Вследствие неуравновешенности, на вращающееся тело действуют во время движения две центробежные силы  $P$  и  $Q$ . Допустим теперь, что грузы, необходимые для уравновешивания, должны быть расположены в плоскостях поперечных сечений  $I$  и  $II$ . Центробежная сила  $P$  может быть уравновешена двумя силами  $P_1$  и  $P_2$ , лежащими в том же осевом сечении, что и  $P$ . Величина этих сил может быть определена из следующих уравнений статики:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= P, \\ P_1 \cdot a &= P_2 \cdot b. \end{aligned}$$

Тем же способом сила  $Q$  может быть уравновешена силами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Равнодействующая сил  $P_1$  и  $Q_1$  в плоскости  $I$  и равнодействующая  $P_2$  и  $Q_2$  в плоскости  $II$  будут тогда определять величины и положения уравновешивающих грузов, необходимых для полного уравновешивания вращающегося тела. Из этих рассуждений видно, что уравновешивание может



Фиг. 27.

быть сделано без каких-либо затруднений, если известны положение и величина неуравновешенности. Для установления этой неуравновешенности употребляются различного типа машины для балансировки; рассмотрим главнейшие из этих машин.

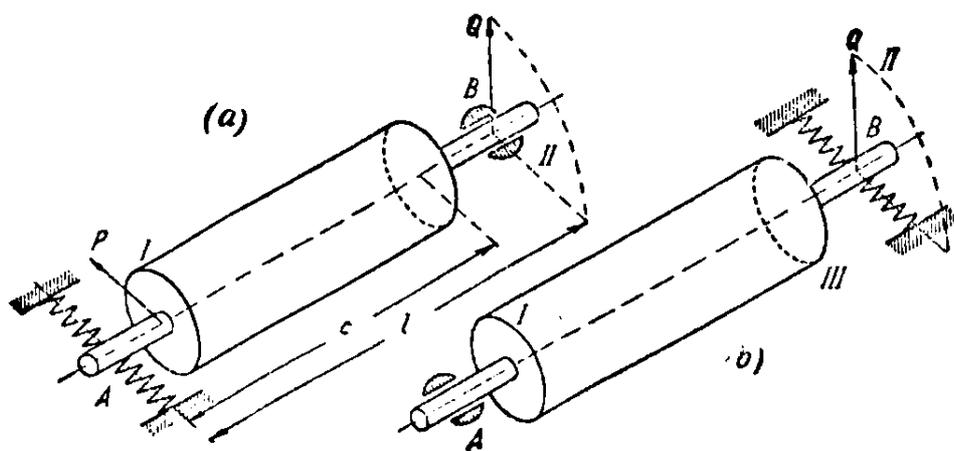
**11. Машины для балансировки.** — Машины для балансировки представляют обыкновенно устройство, при котором эффект любой неуравновешенности во вращающемся теле, которое подвергается испытанию, может быть увеличен резонансом. Существуют два главных типа машин для балансировки: 1) машины, где положение и величина неуравновешенности определяются записями колебаний, как в машине Лавачек-Хеймана, и 2) машины, в которых эти величины определяются помощью компенсирующих грузов, как в машине Акимова.

*Машина Лавачека-Хеймана* состоит по существу из двух независимых опорных частей. Два подшипника, поддерживающие вращающееся тело (ротор), располагаются между пружинами, которые допускают колебания концов вращающегося тела в горизонтальной осевой плоскости. Один из подшипников закрепляется при уравновешивании, производимом на другом конце (см. фиг. 28). Любая неуравновешенность вызовет колебание вращающегося тела вокруг закрепленного подшипника, как опоры.

Чтобы увеличить эти колебания, все наблюдения делаются при *состоянии резонанса*. Специальным двигателем вращающееся тело приводится к скорости выше критической и тогда движущая сила устраняется. Вследствие трения скорость вращающегося тела постепенно уменьшается, и, как только она достигнет своей *критической величины*, возникнут при любой неуравновешенности указанные вынужденные колебания незакрепленного

подшипника. Процесс уравнивания состоит в устранении этих колебаний прикреплением соответствующих выправляющих грузов.

Наиболее подходящими плоскостями для помещения этих грузов являются плоскости на концах вращающегося тела, где обыкновенно устраиваются для укрепления таких грузов специальные отверстия по ободу. При подобном расположении получаются наибольшие расстояния между выправляющими грузами; поэтому величина этих грузов доводится до минимума. Когда плоскость для такого выправляющего груза выбрана, остаются



Фиг. 28

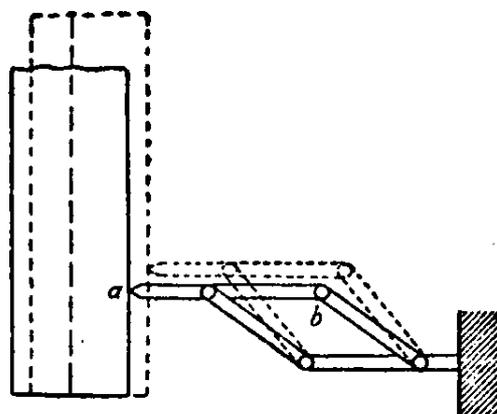
два вопроса, которые нужно решить: 1) положение выправляющего груза, 2) его величина.

Оба эти вопроса могут быть разрешены путем проб. Чтобы определить положение, в плоскости уравнивания должен быть помещен некоторый произвольный выправляющий груз, и должны быть сделаны несколько проб с грузом в различных положениях по окружности вращающегося тела. Таким образом может быть получена кривая, представляющая изменения амплитуды колебаний в зависимости от изменения угла положения груза. Тогда наименьшая амплитуда укажет правильное положение выправляющего груза. Таким же образом постепенным изменением величины груза может быть установлена правильная величина выправляющего груза.

Чтобы упростить процесс определения положения выправляющего груза, очень полезно метить вал или записывать колебания конца вала.

Для метки вала употребляется в машине Лавачека специальный указатель, представленный на фиг. 29. Во время колеба-

ния вал нажимает на карандаш *ab*, соответственно укрепленный, и смещает его в положение, отвечающее наибольшему перемещению конца вала так, что конец прочерченной на поверхности вала линии определяет угол положения вала в момент наибольшего перемещения. Если допустить, что при резонансе отставание вынужденных колебаний равно  $\pi/2$ , то положение возмущающей силы будет отстоять на  $90^\circ$  в направлении вращения вала от точки, где кончается метка. Теперь может быть легко получено правильное положение выправляющего груза. Вследствие того обстоятельства, что вблизи состояния резонанса отставание меняется очень резко со скоростью, а также зависит от затухания (см. фиг. 20, стр. 35),



Фиг. 29.

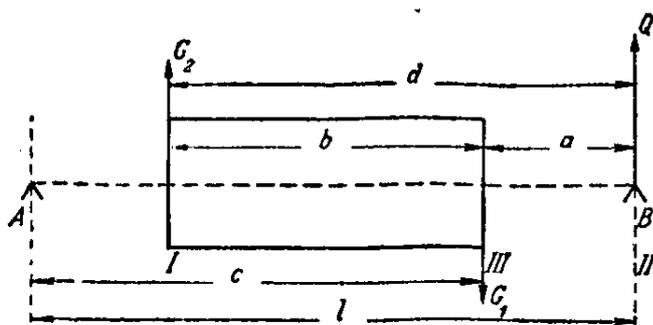
обычно необходимы две пробы для точного определения положения неуравновешенности. При вращении вала попеременно в противоположных направлениях и при метке вала, как объяснено выше, биссектриса между двумя метками определяет осевую плоскость, в которой нужно поместить выправляющие грузы.

Для определения положения неуравновешенности помощью записи колебаний конца вала ротора, в машине Лавачека употребляется специальный пишущий прибор. Бумага для записывания прикрепляется к торцу вала и вращается с телом. Карандаш прибора совершает перемещения, которые являются увеличенными боковыми перемещениями конца вала относительно неподвижной подставки машины. Таким образом получается в некотором роде полярная диаграмма боковых колебаний вала на вращающейся бумаге, укрепленной на конце вала. При вращении вала в двух противоположных направлениях получим две диаграммы на вращающейся бумаге. Ось симметрии для этих двух диаграмм определяет плоскость, в которой должен быть помещен выправляющий груз <sup>1)</sup>.

Теперь опишем производство уравнивания вращающегося тела (ротора) *AB* (см. фиг. 28). Допустим сперва, что подшипник *B*

<sup>1)</sup> Более детальное описание методов уравнивания при употреблении машины Лавачека-Хеймана можно найти в статье *Ernst Lehr*, *Der heutige Stand der Auswuchttechnik*, „Maschinenbau“, 1922 — 1923, Bd. 16 S. 62. См. также статью *E. v. Brauchisch*, *Zur Theorie und experimentellen Prüfung des Auswuchtens*, „Zeitschr. f. angew. Math. und Mech.“, 1923, Bd. 3, S. 61.

закреплен, а конец  $A$  тела может свободно колебаться в горизонтальной осевой плоскости. Мы раньше видели (см. п° 10, стр. 44), что в наиболее общем случае неуравновешенность может быть представлена двумя центробежными силами, действующими в произвольно выбранных плоскостях, перпендикулярных к оси вала. Пусть сила  $P$  в плоскости  $I$  (см. фиг. 28  $a$ ) и сила  $Q$  в плоскости  $II$ , проходящая через центр закрепленного подшипника  $B$ , представляют неуравновешенность ротора. В рассматриваемом случае только сила  $P$  будет вызывать колебания. Поступая как выше описано, можем определить силу  $P$ , а колебания могут быть уничтожены соответственным выбором выправляющих грузов. Чтобы уравновесить силу  $Q$ , нужно закрепить подшипник  $A$ , а подшипнику  $B$  дать свободу колебаться (см. фиг. 28  $b$ ). Взяв плоскость  $III$  для помещения выправляющего груза и поступая как раньше, можем определить величину и положение



Фиг. 30.

этого груза. Пусть  $G$  означает центробежную силу, отвечающую этому грузу, тогда из уравнения статики

$$G \cdot c = Q \cdot l$$

имеем

$$Q = \frac{Gc}{l}. \quad [a]$$

Легко видеть, что помещением выправляющего груза в плоскости  $III$  мы уничтожаем колебания, вызываемые  $Q$ , только при условии, что подшипник  $A$  закреплен. Иначе здесь будут колебания вследствие того, что сила  $Q$  и сила  $G$  действуют в двух различных плоскостях  $II$  и  $III$ . Чтобы получить полное уравновешивание, нужно поместить по одному выправляющему грузу в каждой из двух плоскостей  $I$  и  $III$  так, чтобы соответствующие центробежные силы  $G_1$ ,  $G_2$  имели своей равнодействующей силу —  $Q$ , равную и противоположную силе  $Q$  (фиг. 30). Тогда из статики имеем

$$\begin{aligned} G_1 - G_2 &= Q, \\ G_2 \cdot b &= Q \cdot a, \end{aligned}$$

из последнего, пользуясь ур-ием [a], получим

$$G_2 = \frac{Qa}{b} = \frac{Gac}{bl}, \quad [b]$$

$$G_1 = Q + G_2 = \frac{Gcd}{bl}. \quad [c]$$

Из этого видно, что при уравнивании конца  $B$  и определении этим способом величины  $G$  можно найти правильный выправляющий груз для плоскости  $III$  и добавочный выправляющий груз для плоскости  $I$  из ур-ий  $[b]$  и  $[c]$  и получить полное уравнивание вращающегося тела.

*Машина для балансировки Акимова* <sup>1)</sup> состоит из жесткого стола, на котором установлены вращающееся тело (ротор) и компенсирующее приспособление. Стол прикреплен к подставкам таким образом, что он может свободно колебаться или около оси, параллельной оси вращающегося тела, или около оси, перпендикулярной к оси такового. В первом случае только статическая неуравновешенность вызывает колебания; во втором же обе, и статическая и динамическая, неуравновешенности будут причиной колебаний. Начав с уничтожения статической неуравновешенности, мы должны подпереть стол таким путем, чтобы получать колебания около оси, параллельной оси вращения ротора. Способ для определения места и величины неуравновешенности состоит в создании искусственной неуравновешенности в некоторой двигающейся части машины, чтобы нейтрализовать подлежащую определению неуравновешенность тела. Когда эта искусственная неуравновешенность будет в точности нейтрализовать неуравновешенность испытуемого тела, все в целом перестает колебаться, а величина и угол плоскости неуравновешенности указываются машиной.

После уничтожения статической неуравновешенности для испытания вращающегося тела в отношении динамической неуравновешенности следует переустроить подставки стола таким образом, чтобы ось колебаний была перпендикулярна к оси вращения. Величина и угол плоскости динамических колебаний будут тогда легко найдены таким же способом, как изложено выше, введением искусственной пары неуравновешенных сил в движущуюся часть машины. Важно отметить, что статическая неуравновешенность должна быть устранена полностью, прежде чем контролировать динамическую неуравновешенность <sup>2)</sup>.

*Уравнивание на месте работ.* — Опыт с агрегатами очень высоких скоростей показывает, что, когда уравнивание доведено до конца машиной для балансировки в лаборатории,

<sup>1)</sup> „Trans. A. S. M. E.“, 1916, Vol. 38.

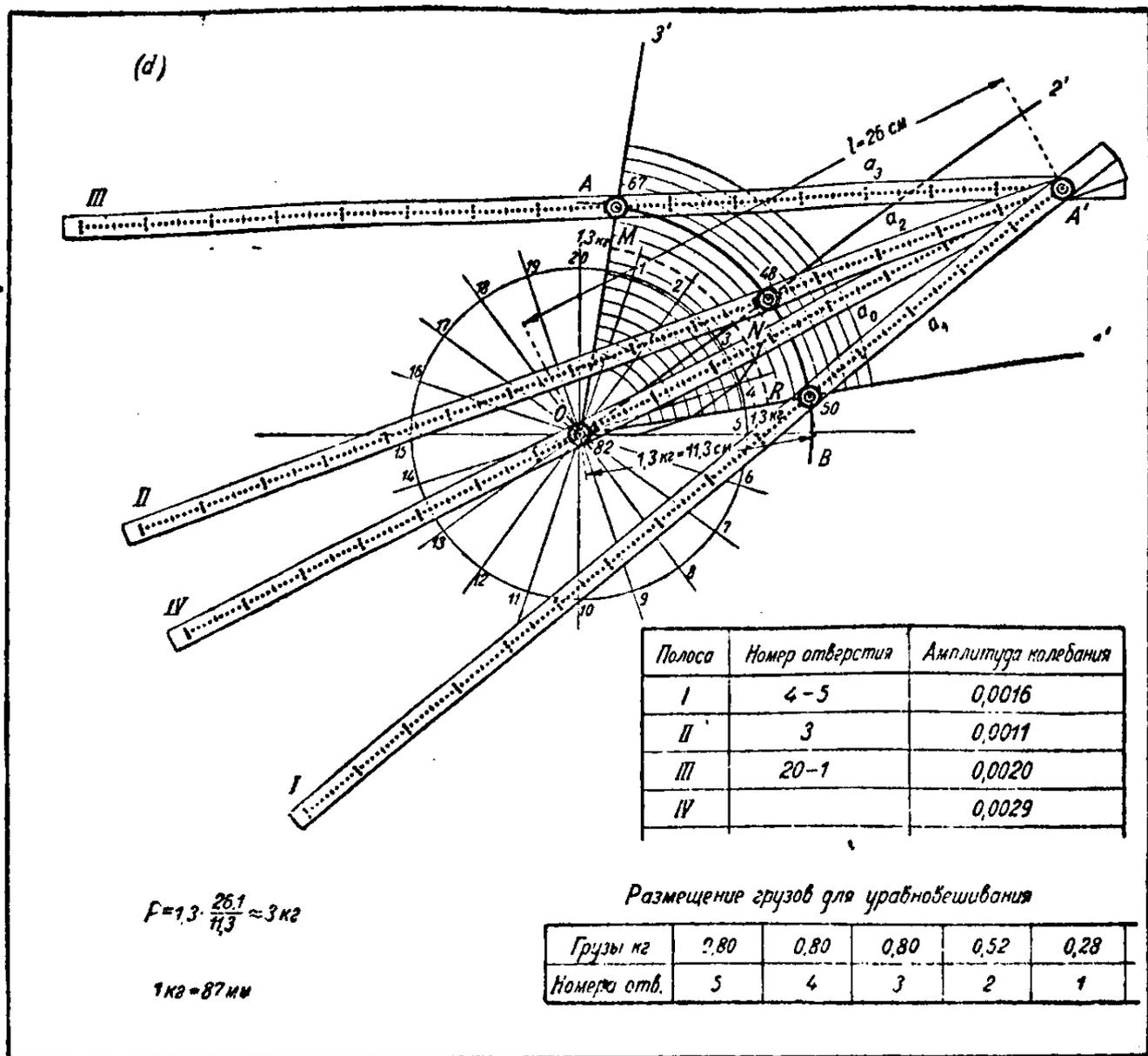
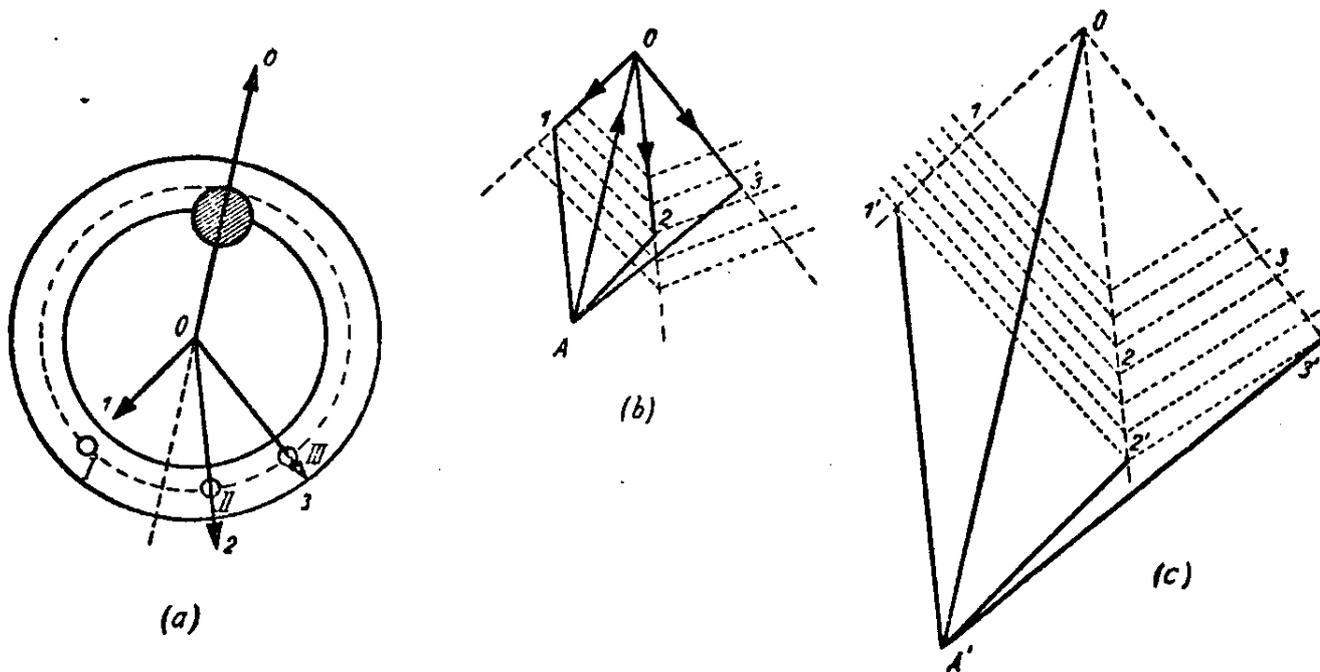
<sup>2)</sup> Машина для балансировки, помощью которой определяются оба рода неуравновешенности одновременно, была изобретена *C. R. Söderberg*'ом и *W. E. Trumpler*'ом. См. доклад *C. R. Söderberg*'а на весеннем общем собрании A. S. M. E. 1923 года.

можно получить хорошие результаты, несмотря на то, что это испытание обычно производится при сравнительно небольшой скорости; но в работе, когда действующие скорости высоки, неуравновешенность может все же появиться вследствие ничтожных изменений в распределении масс. Поэтому необходимо также контролировать условия уравнивания для нормальной рабочей скорости. Это испытание выполняется или в лаборатории, где ротор помещается для этой цели на жестких подшипниках, или на месте работ после установки в машину. Производство уравнивания в таких условиях может быть примерно таким, как описано выше при рассмотрении машины Лавачека для уравнивания. Оно состоит в последовательном уравнивании обоих концов ротора. При выправлении неуравновешенности одного из концов допускают, что колебания соответствующей опоры вызываются только неуравновешенностью этого конца <sup>1)</sup>. Величина и положение выправляющего груза могут быть тогда найдены из измерений амплитуд колебаний опоры, которые записываются соответствующим прибором. Необходимы четыре измерения для четырех разных положений ротора, чтобы иметь достаточные данные для полного решения задачи. Первое измерение должно быть сделано для ротора в его начальном состоянии, а три остальных для ротора с некоторыми произвольными грузами, помещаемыми последовательно в трех различных отверстиях в балансирном кольце на конце ротора, для которого производится уравнивание. Грубое приближение положения выправляющего груза может быть найдено разметкой вала ротора в его начальном положении, как было изложено выше (стр. 46). Три последовательных пробных отверстия должны быть взяты вблизи найденного положения.

На основании этих четырех измерений может быть произведено определение неуравновешенности при допущении, что амплитуды колебаний опоры пропорциональны неуравновешенности. Пусть  $OO$  (фиг. 31 *a*) есть вектор, представляющий неизвестную начальную неуравновешенность и пусть  $O1$ ,  $O2$ ,  $O3$  векторы, отвечающие пробным выправляющим грузам *I*, *II* и *III*, помещенным на балансирном кольце конца ротора во время второй, третьей и четвертой проб последовательно. Тогда векторы  $A1$ ,  $A2$ ,  $A3$  (фиг. 31 *b*) представляют результирующие неуравновешенности для этих трех проб. Эти векторы, согласно сделанному допущению, пропорциональны амплитудам колебаний опоры, измеренным во время последовательных проб. Когда ротор уравнивается, ве-

---

<sup>1)</sup> Это допущение достаточно точно в случаях роторов значительной длины.



Фиг. 31.

личины и направления  $01, 02, 03$  (фиг. 31 *b*) известны, и может быть построена сетка, показанная пунктирными линиями на фиг. 31 *c*. Взяв теперь три отрезка  $A'1', A'2'$  и  $A'3'$ , пропорциональные амплитудам, наблюдаемым во время опытных проб, и пользуясь сеткой, можем построить диаграмму (фиг. 31 *c*), геометрически подобную таковой 'фиг. 31 *b*. Направление  $0A'$  дает тогда положение правильного выправляющего груза, а длина  $0A'$  представит величину выправляющего груза в том же масштабе, в каком  $01', 02', 03'$  изображают пробные грузы *I, II* и *III* соответственно. Следует отметить, что длина  $0A'$ , если она измерена в том же масштабе, как амплитуды  $A'1', A'2', A'3'$ , должна дать амплитуду начального колебания опоры; это является проверкой полученного решения. На фиг. 31 *d* показан простой прибор для решения этой задачи, состоящий из четырех полос, соединенных вместе шарниром  $A'$  <sup>1)</sup>. Если взять один и тот же выправляющий груз при трех пробных испытаниях, сетка фиг. 31 *c* превратится в ряд концентрических окружностей, как показано на фиг. 31 *d*. Взяв теперь три отрезка  $a_1, a_2$  и  $a_3$  на полосах, пропорционально амплитудам, наблюдаемым во время пробных вращений, и перемещая концы этих полос вдоль векторов выправляющих грузов, нам не трудно будет найти положение системы, при котором все эти три конца будут расположены на той же самой окружности. Соответствующий вектор  $0A'$  будет тогда определять по положению и по величине искомый выправляющий груз.

**12. Общий случай возмущающей силы.** — В предшествующих рассуждениях о вынужденных колебаниях (см. п° 8) был рассмотрен частный случай возмущающей силы, пропорциональной  $\sin mt$ . В общем периодическая возмущающая сила в функции от времени  $f(t)$  может быть получена как сумма членов, состоящих из простых синусов и косинусов, которая может быть представлена в форме тригонометрического ряда, подобного нижеследующему:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos mt + a_2 \cos 2mt + \dots + b_1 \sin mt + b_2 \sin 2mt + \dots, [a]$$

в котором  $\frac{m}{2\pi}$  — частота возмущающей силы,  $\tau_1 = \frac{2\pi}{m}$  — период возмущающей силы.

Чтобы вычислить любой из коэффициентов ур-ия  $[a]$ , если только  $f(t)$  известна, нужно поступить следующим образом. Допустим, что отыскивается некоторый коэффициент  $a_i$ , тогда обе

<sup>1)</sup> Этот прибор был изобретен *G. B. Karelisz'*ом и оказался очень полезным для уравнивания на месте работ. См. „Power“, 1928, Febr. 7 и 14.

части уравнения должны быть помножены на  $\cos imt dt$  и проинтегрированы от  $t=0$  до  $t=\tau_1$ . Можно показать, что:

$$\int_0^{\tau_1} a_0 \cos imt dt = 0; \int_0^{\tau_1} a_k \cos kmt \cos imt dt = 0;$$

$$\int_0^{\tau_1} b_k \sin kmt \cos imt dt = 0; \int_0^{\tau_1} a_i \cos^2 imt dt = \frac{a_i}{2} \tau_1,$$

где  $i$  и  $k$  обозначают целые числа 1, 2, 3, ... Применяя эти формулы, получаем:

$$a_i = \frac{2}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(t) \cos imt dt. \quad [b]$$

Таким же способом, умножая ур-ие [a] на  $\sin imt dt$ , получаем:

$$b_i = \frac{2}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(t) \sin imt dt. \quad [c]$$

Наконец, умножая ур-ие [a] на  $dt$  и интегрируя от  $t=0$  до  $t=\tau_1$ , имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(t) dt. \quad [d]$$

Очевидно, что, пользуясь формулами [b], [c] и [d], можем вычислить коэффициенты ур-ия [a], если  $f(t)$  известна аналитически. Если  $f(t)$  дана графически, тогда как аналитическое выражение ее не может быть дано, для вычисления интегралов [b], [c] и [d] следует воспользоваться каким-нибудь приближенным способом, или они могут быть получены механически одним из известных приборов для исследования кривых, выраженных тригонометрическими рядами <sup>1)</sup>.

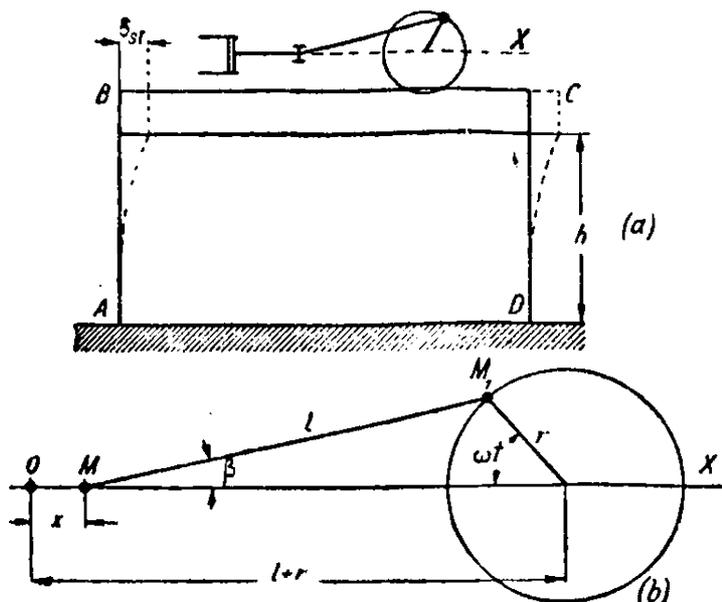
Допустим, что возмущающая сила выражается в виде тригонометрического ряда; уравнение вынужденных колебаний тогда будет (см. ур-ие [32], стр. 31):

$$x'' + 2nx' + p^2x = a_0 + a_1 \cos mt + a_2 \cos 2mt + \dots + b_1 \sin mt + b_2 \sin 2mt + \dots \quad [e]$$

<sup>1)</sup> Рассмотрение различных методов для исследования кривых, выраженных тригонометрическими рядами, и описание приборов гармонического анализа можно найти в книге *H. v. Sanden, Practical Analysis, London, 1924.*

Общее решение этого ур-ия будет состоять из двух частей: одна для свободных колебаний (см. ур-ие [25], стр. 28) и одна для вынужденных. Свободные колебания будут последовательно затухать вследствие трения. При рассмотрении вынужденных колебаний следует отметить, что в случае линейного уравнения, как ур-ие [e], вынужденные колебания будут получаться наложением друг на друга вынужденных колебаний, получающихся от каждого члена ряда [a]. Эти последние колебания могут быть найдены тем же способом, как изложено в п° 8, и на основании решения [33] (см. стр. 31) можно заключить, что большие вынужденные колебания могут произойти, когда период одного из членов ряда [a] совпадает с периодом  $\tau$  независимых колебаний системы, т. е. если период  $\tau_1$  возмущающей силы равен или кратен периоду  $\tau$ .

Для примера рассмотрим колебания, вызванные в раме  $ABCD$  силами инерции горизонтального двигателя (фиг. 32), вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Допустим, что горизонтальная балка  $BC$  очень жесткая и что можно рассматривать возникновение горизонтальных колебаний только из-за изгиба колонн.



Фиг. 32.

Период этих независимых колебаний может быть легко получен. Необходимо только вычислить статическое перемещение  $\delta_{st}$  ригеля рамы под действием горизонтальной силы  $Q$ , равной весу двигателя вместе с весом горизонтальной платформы  $BC$  (массой вертикальных стоек при этих вычислениях пренебрегаем).

Допустив, что балка  $BC$  абсолютно жесткая и свободно опирается на двух стойках, имеем

$$\delta_{st} = \frac{Q}{3EI} \left( \frac{h}{2} \right)^3.$$

Подставив это в уравнение

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}},$$

найдем период независимых колебаний.

В рассматриваемом случае вынужденные колебания будут вызываться силами инерции вращающихся и двигающихся взад и вперед масс двигателя. При рассмотрении этих сил масса шатуна с достаточной точностью может быть заменена двумя массами: одна в цапфе кривошипа, а вторая на крейцкопфе. В те же две точки легко могут быть перенесены все прочие неуравновешенные при движении массы так, что окончательно должны подлежать рассмотрению только две массы  $M_1$  и  $M$  (фиг. 32 *b*). Горизонтальная составляющая силы инерции массы  $M_1$

$$-M_1 \omega^2 r \cos \omega t, \quad [f]$$

где  $\omega$  — угловая скорость двигателя,  $r$  — радиус кривошипа,  $\omega t$  — угол, составляемый кривошипом с осью  $X$ .

Действие масс  $M$ , движущихся взад и вперед, более сложно. Пусть  $x$  обозначает перемещение  $M$  от мертвого положения и  $\beta$  — угол между шатуном и осью  $X$ . По чертежу имеем:

$$x = l(1 - \cos \beta) + r(1 - \cos \omega t) \quad [g]$$

и

$$r \sin \omega t = l \sin \beta. \quad [h]$$

Из [h]

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \omega t.$$

Длина  $l$  обычно в несколько раз больше, чем  $r$ , и с достаточной точностью можно принять, что

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \omega t} \approx 1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t.$$

Подставляя в ур-ие [g], имеем

$$x = r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t. \quad [k]$$

Из этого уравнения скорость движущихся взад и вперед масс

$$x' = r\omega \sin \omega t + \frac{r^2\omega}{2l} \sin 2\omega t,$$

а соответствующая сила инерции

$$-Mx'' = -M \omega^2 r (\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t). \quad [l]$$

Соединяя это с [f], получим полную возмущающую силу. Отметим, что это выражение состоит из двух членов: одного, имеющего частоту, равную числу оборотов машины, и другого, име-

ющего вдвое большую частоту. Из этого можно заключить, что в рассматриваемом случае имеются две критические скорости для двигателя: первая, когда число оборотов машины в секунду равно частоте  $1/\tau$  независимых колебаний системы, и вторая, когда число оборотов машины равно половине предыдущей величины. Соответствующим выбором жесткости стоек  $AB$  и  $CD$  всегда возможно создать условия, достаточно далекие от таких критических скоростей, и таким образом устранить возможность больших колебаний. Следует отметить, что выражение [L] для сил инерции двигающихся взад и вперед масс было получено при допущении некоторых приближений. Более точное решение будет содержать гармонические ряды и высшего порядка. Это свидетельствует, что будут также критические скорости порядка низшего, чем рассмотренные выше, но обычно они не имеют практического значения вследствие того, что соответствующие силы слишком малы, чтобы вызвать существенные колебания системы.

Из предыдущего рассмотрения было исключено переходное состояние. Было допущено, что свободные колебания системы, обычно возникающие при начале движения, были уничтожены затуханием, и рассматривались только вынужденные колебания. Когда перемещение системы в начале движения исследовано, то можно воспользоваться способом, описанным в п° 5. Мы видели (см. ур-ие [29], стр. 29), что, когда затухание пропорционально скорости, перемещение в любой момент  $t$ , вызываемое начальной скоростью  $x_0'$ , равно

$$\frac{x_0'}{p_1} e^{-nt} \sin p_1 t.$$

Если  $f(t)$  обозначает возмущающую силу, отнесенную к единице массы системы, элементарное перемещение  $dx$  в момент  $t_1$  вследствие действия силы  $f(t)$  в течение промежутка от  $t_1$  до  $t_1 + dt$ , будет представляться следующим выражением (см. ур-ие [c], стр. 25):

$$dx = \frac{f(t_1)}{p_1} e^{-n(t-t_1)} \sin p_1(t-t_1) dt_1.$$

Полное перемещение системы вследствие действия силы  $f(t_1)$  за время  $t$  от  $t_1=0$  до  $t_1=t$  будет тогда выражаться следующим интегралом:

$$x = \frac{1}{p_1} \int_0^t f(t_1) e^{-n(t-t_1)} \sin p_1(t-t_1) dt_1. \quad [41]$$

Это выражение полного перемещения системы особенно применимо для тех случаев, где  $f(t_1)$  не может быть представлена с достаточной точностью только небольшим числом членов тригонометрического ряда [а], как например, в случае удара или резких колебаний вынуждающей силы.

**13. Принцип сохранения энергии при изучении задач колебаний.** — Задача колебаний системы, показанная на фиг. 1 (см. стр. 7), может быть легко разрешена рассмотрением энергии системы. Принцип сохранения энергии также очень полезен для приближенного вычисления частоты более сложных систем. Рассматривая схему фиг. 1 и пренебрегая сперва массой пружины, получим кинетическую энергию системы во время колебаний равной

$$\frac{W}{2g} (x')^2. \quad [a]$$

Потенциальная энергия системы состоит из двух частей: первая — потенциальная энергия деформации пружины и вторая — потенциальная энергия груза, зависящая от его положения. Из рассмотрения энергии деформации растягивающая сила в пружине, соответствующая любому перемещению  $x$ , будет  $(\delta_{st} + x)k$ , а соответствующая энергия пружины:

$$k \frac{(\delta_{st} + x)^2}{2}.$$

Энергия пружины в положении равновесия ( $x = 0$ ):

$$\frac{k \delta_{st}^2}{2},$$

поэтому энергия, накопленная в пружине во время перемещения  $x$ , будет:

$$k \frac{(\delta_{st} + x)^2}{2} - \frac{k \delta_{st}^2}{2} = k \delta_{st} x + \frac{kx^2}{2} = Wx + \frac{kx^2}{2}. \quad [b]$$

Что касается энергии, обуславливаемой положением груза, мы видим, что она уменьшается при перемещении  $x$  на величину

$$Wx. \quad [c]$$

На основании [b] и [c] полное изменение потенциальной энергии при перемещении  $x$  будет равно

$$\frac{kx^2}{2}. \quad [d]$$

Вследствие того, что груз  $W$  всегда уравновешивается начальной растягивающей силой пружины, возникающей при статическом растяжении  $\delta_{st}$ , окончательное выражение [d] для потенциальной энергии системы то же самое, что для случая, когда  $W=0$  и удлинение пружины равно  $x$ . Теперь на основании принципа сохранения энергии при пренебрежении затуханием сумма кинетической и потенциальной энергии системы остается постоянной. Поэтому из ур-ий [a] и [d] имеем

$$\frac{W}{2g} (x')^2 + \frac{kx^2}{2} = \text{const.} \quad [e]$$

Величина постоянной в правой части ур-ия [e] зависит от начальных условий. Возьмем, например, что при  $t=0$  перемещение равно  $x_0$  и начальная скорость 0; тогда ур-ие [e] получает вид:

$$\frac{W}{2g} x'^2 + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad [f]$$

Это значит, что при колебании сумма кинетической и потенциальной энергии остается равной начальной энергии деформации. Когда при колебании  $x$  становится равным  $x_0$ , скорость груза  $W$  получается равной нулю и энергия системы состоит из потенциальной энергии. Когда  $x$  становится равным нулю, что происходит, когда груз при колебании проходит через свое среднее положение, скорость достигает своего наибольшего значения и соответствующая энергия из ур-ия [f] получается равной

$$\frac{W (x')_{\max}}{2g} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad [g]$$

Это значит, что в этот момент вся энергия системы — кинетическая и равна той потенциальной энергии, которая была накоплена в системе при первоначальном перемещении  $x_0$  из положения равновесия.

Ур-ие [g] может быть использовано для вычисления частоты колебания системы. Выше было показано, что в рассматриваемом случае мы имеем простое гармоническое движение, т. е. мы можем положить

$$x = x_0 \cos pt \quad \text{и} \quad (x')_{\max} = x_0 p.$$

Подставив это в ур-ие [g], получим:

$$p^2 = \frac{kg}{W}.$$

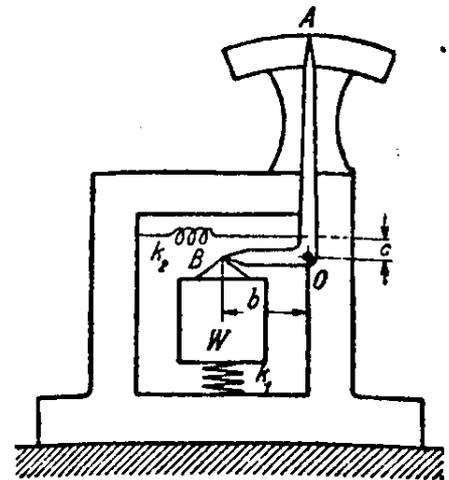
Это совпадает с ур-ием [3], ранее полученным (см. стр. 8).

Описанный способ, основанный на принципе сохранения энергии, может быть также применен для более сложных случаев. Рассмотрим, как пример, колебания *измерителя амплитуды*, показанного схематически на фиг. 33. Груз  $W$  на пружине  $k_1$  имеет низкую независимую частоту. Если измеритель амплитуды прикреплен к телу, колеблющемуся при высокой частоте в вертикальном направлении, груз  $W$  остается практически неподвижным в пространстве, и указатель  $A$ , скрепленный с  $W$ , указывает на шкале увеличенный размах колебания. Чтобы получить частоту свободных колебаний прибора с большей точностью, следует подвергнуть рассмотрению не только груз  $W$  и пружину  $k_1$ , но также рычаг  $AOB$  и пружину  $k_2$ . Пусть  $x$  обозначает небольшое вертикальное перемещение груза  $W$  из положения равновесия. Тогда потенциальная энергия двух пружин при обозначении жесткости пружин  $k_1$  и  $k_2$  будет

$$\frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2}{2} \left(\frac{c}{b}\right)^2 x^2. \quad [h]$$

Кинетическая энергия груза  $W$  будет, как прежде,

$$\frac{W}{2g} x'^2. \quad [k]$$



Фиг. 33.

Угловая скорость рычага  $AOB$ , вращающегося около точки  $O$  равна  $\frac{x'}{b}$  и кинетическая энергия того же рычага будет

$$\frac{I}{2} \frac{x'^2}{b^2}. \quad [l]$$

Теперь уравнение движения, отвечающее вышеуказанному уравнению [e], из [h], [k] и [l] будет:

$$\left(\frac{W}{2g} + \frac{I}{2b^2}\right) x'^2 + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2 c^2}{2b^2}\right) x^2 = \text{const.}$$

Мы видим, что это уравнение имеет такую же форму, что и уравнение [e], только вместо массы  $W/g$  мы теперь имеем *приведенную массу*

$$\frac{W}{g} + \frac{I}{b^2},$$

а вместо жесткости пружины  $k$  имеем *приведенную жесткость пружины*

$$k_1 + k_2(c^2/b^2).$$

**14. Метод Рейлея.** — Во всех вышерассмотренных случаях таких, как показанные на фиг. 1, 3 и 4, задача была приведена к простейшему случаю колебания системы с одной степенью свободы применением известных упрощений; например, в схеме, указанной на фиг. 1, было пренебрежено массой пружины сравнительно с массой груза  $W$ , тогда как в схеме, указанной на фиг. 3, было пренебрежено массой балки, а в случае, изображенном на фиг. 4, было пренебрежено моментом инерции вала по сравнению с моментом инерции диска. Хотя эти упрощения достаточно точны для многих случаев практики, но есть некоторые технические задачи, в которых становится необходимым более подробное рассмотрение точности этих приближений.

Чтобы определить влияние этих упрощений на частоту колебаний, лордом Рейлеем <sup>1)</sup> был предложен приближенный способ, который мы теперь рассмотрим. При применении этого способа нужно сделать некоторые допущения относительно конфигурации системы во время колебаний. Частота колебаний будет тогда найдена из рассмотрения энергии системы. Как простейший пример применения метода Рейлея возьмем случай, показанный на фиг. 1 и рассмотренный в н° 13.

При допущении, что масса пружины мала по сравнению с массой груза  $W$ , *тип колебания* не может существенно зависеть от массы пружины, и с достаточной точностью можно допустить, что перемещение любого поперечного сечения пружины на расстоянии  $c$  от закрепленного конца то же самое, что в случае невесомой пружины, т. е. равно

$$\frac{xc}{l}, \quad [a]$$

где  $l$  — длина пружины.

Если перемещение, как допущено выше, не зависит от массы пружины, выражение для потенциальной энергии системы будет то же, что в случае невесомой пружины (см. ур-ие [d] стр. 57), и только кинетическую энергию системы нужно будет рассмотреть заново. Пусть  $q$  обозначает вес пружины на единицу длины.

<sup>1)</sup> См. книгу *Lord Rayleigh, Theory of Sound, 2d Ed., Vol. I, pp. 111 и 287.*

Тогда масса элемента пружины длиной  $dc$  будет  $qdc/g$ , а соответственная кинетическая энергия из ур-ия [a]

$$\frac{q}{2g} \left( \frac{x'c}{l} \right)^2 dc.$$

Полная кинетическая энергия пружины будет

$$\frac{q}{2g} \int_0^l \left( \frac{x'c}{l} \right)^2 dc = \frac{x'^2}{2g} \cdot \frac{ql}{3}.$$

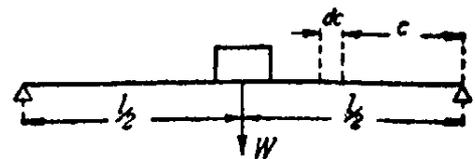
Это следует прибавить к кинетической энергии груза  $W$ ; и тогда уравнение сохранения энергии получается:

$$\frac{x'^2}{2g} \left( W + \frac{ql}{3} \right) + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}. \quad [b]$$

Сравнив это уравнение с ур-ием [f] предыдущего п°, можем заключить, что для оценки влияния массы пружины на период собственных колебаний нужно только прибавить одну треть веса пружины к грузу  $W$ .

Это заключение, полученное при допущении, что вес пружины очень мал по сравнению с грузом, можно использовать с достаточной точностью даже в случаях, где вес пружины является величиной того же порядка, что  $W$ . Например, для  $ql = 0,5W$  ошибка приближенного решения около  $1/2\%$ . Для  $ql = W$  ошибка около  $3/4\%$ , для  $ql = 2W$  ошибка около  $3\%$  <sup>1)</sup>.

Как второй пример рассмотрим случай колебания балки постоянного поперечного сечения, несущей груз по середине (см. фиг. 34). Если вес  $ql$  балки мал сравнительно с грузом  $W$ , можно допустить с достаточной точностью, что кривая прогибов балки при колебании имеет такую же форму, как кривая статических прогибов. Тогда, обозначив через  $x$  перемещение груза  $W$  при колебании, получим перемещение любого элемента  $qdc$  балки на расстоянии  $c$  от опоры



Фиг. 34.

$$x \cdot \frac{3cl^2 - 4c^3}{l^3}.$$

Кинетическая энергия самой балки будет:

$$2 \int_0^{l/2} \frac{q}{2g} \left( x' \frac{3cl^2 - 4c^3}{l^3} \right)^2 dc = \frac{17}{35} ql \frac{x'^2}{2g}. \quad [42]$$

<sup>1)</sup> Более детальное рассмотрение этой задачи дано в п° 48.

Эта кинетическая энергия колеблющейся балки должна быть прибавлена к энергии  $Wx'^2/2g$  груза, сосредоточенного по середине пролета, чтобы оценить влияние веса балки на период колебания; т. е. период колебания будет такой же, как при невесомой балке, нагруженной по середине грузом

$$W + 17/35 ql.$$

Нужно заметить, что ур-ие [42], полученное при допущении, что вес балки мал сравнительно с грузом  $W$ , можно применять во всех случаях практики. Даже в крайнем случае, где  $W=0$  и где сделано допущение, что  $17/35 ql$  сосредоточено в середине балки, точность приближенного метода удовлетворительна. Прогиб балки под действием груза  $17/35 ql$ , приложенного по середине:

$$\delta_{st} = 17/35 ql \cdot \frac{l^3}{48EI}.$$

По подстановке этого значения в ур-ие [5] (см. стр. 8) период собственных колебаний будет равен

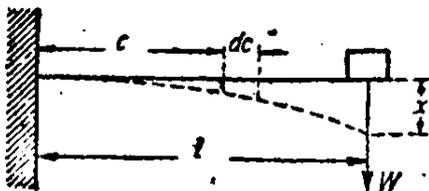
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 0,632 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}.$$

Точное решение для этого случая <sup>1)</sup> дает период

$$\tau = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}} = 0,637 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}.$$

Из этого видно, что ошибка приближенного решения для этого частного случая меньше 1%.

Тот же способ можно применить также в случае, показанном на фиг. 35. Допустив, что при колебании форма упругой линии



Фиг. 35.

балки та же, что вызываемая статическим грузом, приложенным на конце, и обозначив через  $x$  вертикальное перемещение груза  $W$ , получим, что кинетическая энергия консольной балки постоянного поперечного сечения равна:

$$\int_0^l \frac{q}{2g} \left( x' \frac{3c^2 l - c^3}{2l^3} \right)^2 dc = \frac{33}{140} ql \frac{x'^2}{2g}. \quad [43]$$

Период колебаний будет тот же, что для невесомой консольной балки, несущей на конце груз:  $W + 33/140 ql$ . Этот результат был

<sup>1)</sup> См. п<sup>о</sup> 42, уравнение [137'].

получен при допущении, что вес  $ql$  балки мал сравнительно с  $W$ , но это также достаточно точно, для случаев, когда  $ql$  не мало. Применяя этот результат к крайнему случаю, где  $W=0$ , мы получим

$$\delta_{st} = \frac{33}{140} ql \frac{l^3}{3EI}.$$

Соответственный период колебаний будет:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = \frac{2\pi}{3,567} \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad [c]$$

Точное решение для того же случая <sup>1)</sup>

$$\tau = \frac{2\pi}{3,515} \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad [d]$$

Из этого видно, что ошибка приближенного решения около  $1\frac{1}{2}\%$ .

Для случая  $W=0$  можно получить лучшее приближение. Нужно только допустить, что при колебании вид упругой балки такой же, как происходящий от равномерно распределенной нагрузки. Прогиб  $y_0$  любого поперечного сечения на расстоянии  $c$  от закрепленного конца будет выражаться следующим ур-ием:

$$y_0 = x_0 \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{c}{l} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{c}{l}\right)^4 \right\}, \quad [e]$$

в котором  $x_0 = \frac{ql^4}{8EI}$  представляет прогиб конца консоли.

Потенциальная энергия изгиба будет:

$$V = \frac{q}{2} \int_0^l y_0^2 dc = \frac{8}{5} \cdot \frac{EIx_0^2}{l^3}.$$

Кинетическая энергия колеблющейся балки

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{q}{g} y'^2 dc.$$

Возьмем (см. стр. 58)

$$y = y_0 \cos pt \quad \text{и} \quad (y')_{\max} = y_0 p.$$

<sup>1)</sup> См. п° 43.

Уравнение для определения  $p$  будет (см. ур-ие [g] стр. 58):

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{q}{g} (y_0 p)^2 dc = \frac{8}{5} \frac{Elx_0^2}{l^3}.$$

Подставив [e] вместо  $y_0$  и выполнив интегрирование, получим

$$p = 3,530 \sqrt{\frac{Elg}{ql^4}}.$$

Соответствующий период колебаний

$$\tau = \frac{2\pi}{3,530} \sqrt{\frac{ql^4}{Elg}}. \quad [f]$$

Сравнивая этот результат с точным решением [d], можем заключить, что в этом случае ошибка приближенного решения только около  $1/2\%$ .

Следует отметить, что упругая балка представляет систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Выбор определенного вида упругой линии при употреблении способа Рейлея равносильен введению некоторых дополнительных ограничений, которые приводят к системе, имеющей одну степень свободы. Такие дополнительные ограничения могут только увеличить жесткость системы, т. е. увеличить частоту колебаний. Во всех случаях, рассмотренных выше, приближенные значения частот, полученных по способу Рейлея, несколько выше, чем соответствующие точные значения.

В случае колебаний кручения (см. фиг. 4) можно применить этот же приближенный способ, чтобы вычислить влияние инерции вала на частоту колебаний кручения. Пусть  $i$  обозначает момент инерции вала на единицу длины. Тогда, допустив, что тип колебаний такой же, как в случае невесомого вала, угол поворота поперечного сечения на расстоянии  $c$  от закрепленного конца вала равен  $c\varphi/l$ , и кинетическая энергия элемента вала будет

$$\frac{idc}{2} \left( \frac{c\varphi'}{l} \right)^2.$$

Кинетическая энергия всего вала будет

$$\frac{i}{2} \int_0^l \left( \frac{c\varphi'}{l} \right)^2 dc = \frac{\varphi'^2}{2} \cdot \frac{il}{3}. \quad [44]$$

Эта кинетическая энергия должна быть добавлена к кинетической энергии диска, чтобы оценить влияние массы вала на частоту

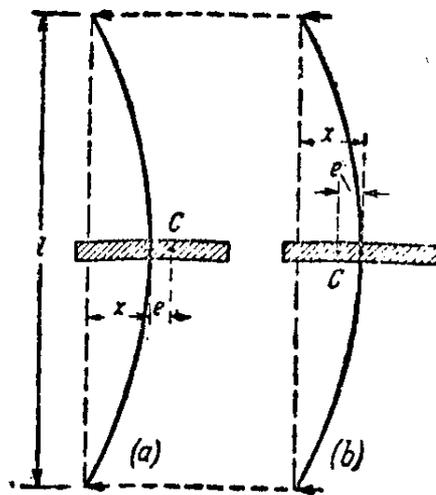
колебаний, т. е. период колебаний будет тот же, что для невесомого вала, имеющего на конце диск, момент инерции которого равен

$$I + il/3.$$

Применение способа Рейлея для вычисления критической скорости вращающегося вала будет показано в следующем п°.

15. Критическая скорость вращающегося вала.— Хорошо известно, что вращающиеся валы при известных скоростях становятся динамически неустойчивыми, и возможно возникновение больших колебаний. Это явление происходит вследствие резонанса, и на простом примере можно показать, что *критическая скорость* для вала есть такая скорость, при которой число оборотов вала в секунду равно частоте его собственных боковых колебаний <sup>1)</sup>.

*Вал с одним диском.*— Чтобы исключить из нашего рассмотрения влияние веса вала и поставить задачу возможно проще, возьмем вертикальный вал с одним круговым диском (фиг. 36 а). Пусть  $C$  — центр тяжести диска и  $e$  — небольшой эксцентриситет, т. е. расстояние от  $C$  до оси вала. При вращении из-за эксцентриситета  $e$  на вал будет действовать центробежная сила и вызовет прогиб. Величина прогиба  $x$  легко может быть получена из условия равновесия центробежной силы и противодействующей силы  $P$  изогнутого вала. Эта последняя сила пропорциональна прогибу  $x$  и может быть представлена в следующем виде:



Фиг. 36.

$$P = kx.$$

Величина коэффициента  $k$  может быть исчислена, когда известны размеры вала и условия закрепления. Допуская, например, что вал имеет постоянное сечение и диск помещен в середине между опорами, имеем

$$k = \frac{48EI}{l^3}.$$

Теперь из условия равновесия получим следующее уравнение для определения  $x$ :

$$\frac{W}{g}(x + e)\omega^2 = kx, \quad [a]$$

<sup>1)</sup> Более детальное рассмотрение боковых колебаний вала дано в п° 32

где  $\frac{W}{g}$  — масса шкива,  $\omega$  — угловая скорость вала.

Из ур-ия [a] имеем:

$$x = \frac{e}{\frac{kg}{\omega^2 W} - 1}. \quad [b]$$

Помня (см. ур-ие [3], стр. 8), что

$$\frac{kg}{W} = p^2,$$

можем заключить из [b], что прогиб  $x$  стремится быстро возрастать, когда  $\omega$  приближается к  $p$ , т. е. когда число оборотов в секунду вала приближается к частоте боковых колебаний вала и диска. Критическое значение скорости будет:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{kg}{W}}. \quad [44']$$

При этой скорости знаменатель в [b] получается равным 0, и в вале возникают большие боковые колебания. Интересно отметить, что при скоростях больших, чем критическая, снова возобладает состояние спокойного вращения. Опыты показывают, что в этом случае центр тяжести будет расположен между линией, соединяющей опоры и искривленной осью вала, как показано на фиг. 36 b. Ур-ие для определения прогиба будет:

$$\frac{W}{g}(x - e)\omega^2 = kx,$$

из которого

$$x = \frac{e}{1 - \frac{kg}{\omega^2 W}}. \quad [c]$$

Отсюда видно, что с увеличением  $\omega$  прогиб  $x$  уменьшается и приближается в пределе к  $e$ , т. е. при очень больших скоростях центр тяжести диска достигает линии, соединяющей опоры, и изогнутый вал вращается вокруг центра тяжести  $C$  диска.

*Вал, нагруженный несколькими дисками.* — Выше было показано на простейшем случае, что критическое число оборотов в секунду вала равно частоте собственных боковых колебаний этого вала. Определив эту частоту, можно легко установить критическую скорость для вала с многими дисками (фиг. 37), пользуясь методом Рейлса. Пусть  $W_1, W_2, W_3$  обозначают грузы, а  $x_1, x_2,$

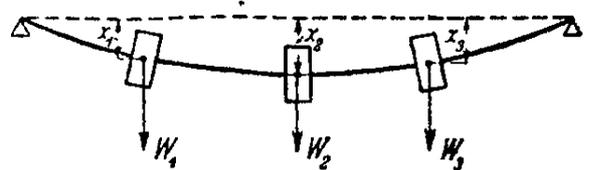
$x_3$  — соответственные прогибы. Тогда потенциальная энергия деформации, накапливаемая в балке во время изгиба, будет:

$$V = \frac{W_1 x_1}{2} + \frac{W_2 x_2}{2} + \frac{W_3 x_3}{2}. \quad [d]$$

При определении периода колебаний самого низшего типа статическая упругая линия, показанная на фиг. 37, может быть взята с приемлемым приближением за упругую линию балки во время колебания. Вертикальные перемещения грузов  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  во время колебания можно написать так:

$$x_1 \cos pt, \quad x_2 \cos pt, \quad x_3 \cos pt. \quad [e]$$

Тогда наибольшие отклонения вала от положения равновесия будут те же, что указаны на фиг. 37; поэтому увеличение потенциальной энергии колеблющегося вала за время его отклонения от положения равновесия до крайнего положения будет выражаться ур-ием [d]. С другой стороны кинетическая энергия системы достигает максимума в момент, когда балка при колебании проходит через свое среднее положение. Отметим, что по формулам [e] скорости грузов, отвечающие этому положению, равны  $px_1$ ,  $px_2$ ,  $px_3$ , и кинетическая энергия системы будет



Фиг. 37.

$$\frac{p^2}{2g} (W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2). \quad [f]$$

Приравнявая [d] и [f], получим следующее выражение для  $p^2$ :

$$p^2 = \frac{g(W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3)}{W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2}. \quad [45]$$

Период колебания:

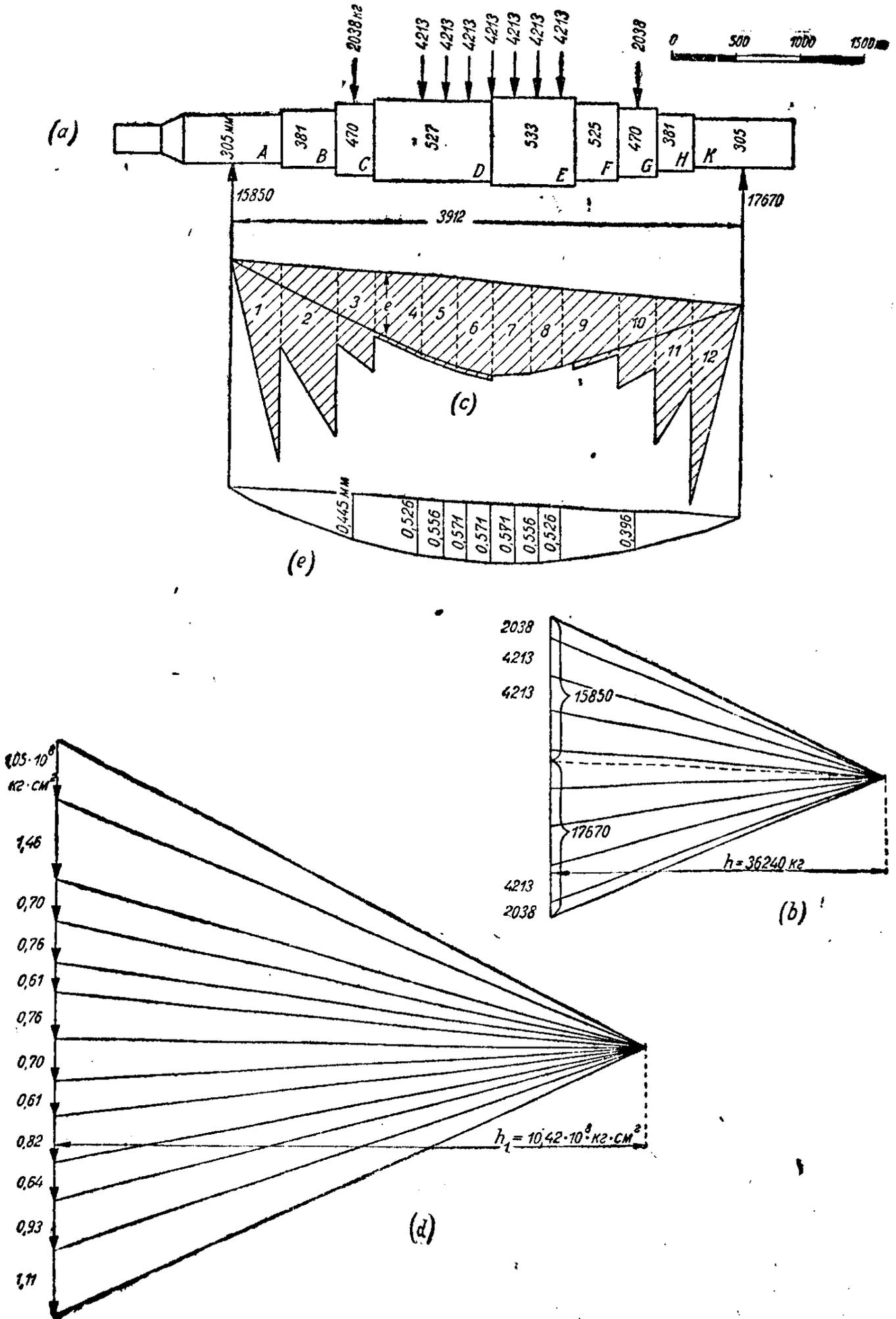
$$\tau = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 + W_3 x_3^2}{g(W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3)}}. \quad [46]$$

Вообще, когда  $n$  грузов действуют на вал, период колебания будет:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_1^n W_i x_i^2}{g \sum_1^n W_i x_i}}. \quad [47]$$

Из этого видно, что для вычисления  $\tau$  необходимы только статические прогибы вала  $x_1, x_2, \dots$ . Эти величины можно легко получить обычными способами. Если вал имеет переменное поперечное сечение, следует применить графический метод для получения прогибов. Действие веса самого вала тоже можно принять во внимание. Необходимо для этой цели разделить вал на несколько частей, веса которых, приложенные в их соответственных центрах тяжести, следует рассматривать, как сосредоточенные грузы.

Возьмем, например, вал, изображенный на фиг. 38 *a*, диаметры которого и грузы, действующие на него, указаны на этой фигуре. Построив многоугольник сил (фиг. 38 *b*) и соответственный веревочный многоугольник (фиг. 38 *c*), получим диаграмму изгибающих моментов. Чтобы определить численное значение изгибающего момента в любом поперечном сечении  $mn$  вала, необходимо только измерить соответствующую ординату  $e$  диаграммы моментов в том же масштабе, который был применен для длин вала, и умножить ее на полюсное расстояние  $h$ , измеренное в масштабе сил многоугольника сил (в нашем случае  $h = 36\,240$  кг). Чтобы получить упругую линию, необходимо построение второго веревочного многоугольника, в котором построенная диаграмма изгибающих моментов, полученная ранее, должна рассматриваться как диаграмма воображаемых грузов. Чтобы учесть изменения поперечного сечения вала, интенсивность этой воображаемой нагрузки для каждого сечения следует умножить  $I_0/I$ , где  $I_0$  — момент инерции наибольшего поперечного сечения вала и  $I$  — момент инерции рассматриваемого участка вала. Таким образом получится окончательная воображаемая нагрузка, представленная заштрихованной площадью (фиг. 38 *c*). Разделив эту площадь на несколько частей, измерив площади этих частей в кв. см и помножив их на полюсное расстояние  $h$ , измеренное в кг, получим воображаемые грузы в измерении кг · см<sup>2</sup>. Для этих грузов построим второй многоугольник сил (фиг. 38 *d*). При полюсном расстоянии  $h_1$ , равном  $EI_0/n$ , где  $EI_0$  наибольшая жесткость на изгиб вала и  $n$  — любое целое число (в нашем случае  $n = 200$ ). Следует отметить, что воображаемые грузы и полюсные расстояния  $EI/n$  имеют одинаковое измерение, т. е. кг · см<sup>2</sup>, и должны быть изображены в многоугольнике сил в том же масштабе. При помощи второго многоугольника сил мы легко можем построить второй веревочный многоугольник (фиг. 38 *e*) и упругую линию вала, касательную к этому многоугольнику. Чтобы получить числовые значения прогибов  $e$ , нужно только измерить их в том же масштабе, в котором начерчена длина вала, и разделить их на



Фиг. 38.

число  $n$ , примененное выше при построении второго многоугольника. Все числовые результаты, полученные из чертежа и необходимые для применения ур-ия [47], даны в нижеследующей таблице 1.

Таблица 1—для вычисления критической скорости.

$W$ кг	$x_i \times 10^2$ см	$x_i^2 \times 10^4$ см <sup>2</sup>	$Wx_i$ кг·см	$Wx_i^2$ кг·см <sup>2</sup>
2038	4,45	19,7	91	4,01
4213	5,26	27,6	222	11,65
4213	5,56	30,9	235	13,09
4213	5,71	32,6	241	13,80
4213	5,71	32,6	241	13,80
4213	5,71	32,6	241	13,80
4213	5,56	31,5	235	13,09
4213	5,26	27,6	222	11,65
2038	3,96	15,7	81	3,19

Отсюда  $\sum Wx_i = 1809$  кг·см;  $\sum Wx_i^2 = 98,08$  кг·см<sup>2</sup>.

Критическое число оборотов в минуту получится теперь следующим:

$$N_{кр} = \frac{60}{\tau} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \sum_1^n W_i x_i}{\sum_1^n W_i x_i^2}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{981 \cdot 1809}{98,08}} = 1284 \text{ обор. в мин.}$$

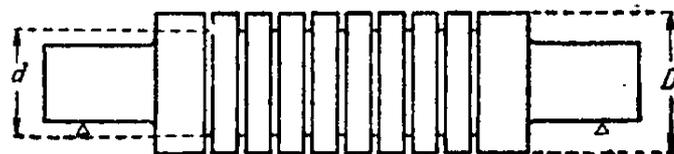
Следует отметить, что ступицы рабочих шкивов или маховика, надетые на вал в горячем состоянии, увеличивают жесткость вала и могут значительно повысить его критическую скорость. При рассмотрении этого явления можно допустить, что напряжения, возникающие из-за колебаний, малы, а давления из-за сужения надетой в горячем состоянии ступицы между ступицей и валом достаточны, чтобы предотвратить какое-либо относительное движение этих двух частей, так что ступицу можно рассматривать как часть вала увеличенного диаметра. Поэтому воздействие ступицы на критическую скорость<sup>1)</sup> получится введением

<sup>1)</sup> Проф. А. Стодола в своей книге *Dampf- und Gasturbinen*, 6. Aufl., 1924, S. 383, дает пример, где принятое во внимание влияние сужений на жесткость частей дало удовлетворительный результат, и вычисленная критическая скорость хорошо согласовалась с опытом. См. также статью В. Eck, *Versteifender Einfluss der Turbinenscheiben*, „V. D. I.“, 1928, Bd 72, S. 51.

этого увеличенного диаметра в графическое построение, изложенное выше.

В случае ротора, снабженного желобами (фиг. 39), если расстояние между желобами того же порядка, что глубина желобов, материал между двумя желобами не принимает каких-либо напряжений от изгиба, и гибкость такого ротора близка к таковой ротора диаметра  $d$ , измеренного по дну желобов <sup>1)</sup>.

Следует отметить также, что на фиг. 37 были приняты жесткие опоры. В некоторых случаях жесткость опор бывает настолько мала, что оказывает существенное влияние на величину критической скорости.



Фиг 39.

Если дополнительная гибкость, вызванная осадкой опор, одинакова в вертикальном и горизонтальном направлениях, то влияние этой гибкости может быть легко учтено. Необходимо только добавить к прогибам  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  предыдущих выкладок вертикальное перемещение вследствие деформации опор под действием грузов  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ . Такие дополнительные прогибы будут понижать критическую скорость вала.

<sup>1)</sup> В. Eck, *idem*.

## ГЛАВА ВТОРАЯ.

### НЕГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.

16. Основные положения. — Все задачи колебаний, заключающиеся в предшествующей главе, были такого рода, что рассмотрение их требовало решения дифференциального уравнения:

$$x'' + 2nx' + p^2x = f(t), \quad [a]$$

коэффициенты которого рассматривались, как постоянные. Было допущено, что затухание и постоянная пружинности системы не зависят от перемещения  $x$  или от времени  $t$ . Во многих технических задачах подобные допущения могут делаться без большой ошибки, так что решение уравнения [a] для таких случаев представляет с достаточной точностью действительное движение системы. На основании этого решения могут быть установлены следующие заключения:

1. Частота свободных колебаний таких систем не зависит от амплитуды, т. е. колебания являются изохронными.

2. В случае периодической возмущающей силы колебания системы могут быть разделены на две части: свободные колебания и вынужденные колебания.

3. Отставание вынужденных гармонических колебаний данной частоты не зависит от начальных обстоятельств движения и остается постоянным при колебании.

4. Если вынужденные колебания вызываются несколькими силами, то результирующее движение получается наложением друг на друга колебаний, вызванных отдельными силами.

5. Если частота возмущающей силы совпадает с таковой собственных колебаний системы, наступает состояние резонанса, и следует ожидать большого увеличения амплитуды вынужденных колебаний.

Эти пять пунктов характеризуют простое гармоническое колебание.

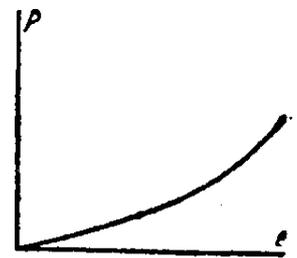
Однако могут встретиться случаи, когда уравнение [a] с постоянными коэффициентами применимо при допущении, что перемеще-

ния  $x$  весьма малы. Есть такие случаи, при которых условия задачи могут быть выражены только дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами.

В дальнейшем будут рассмотрены две основные группы колебаний: 1) колебания, в которых гибкость системы зависит от перемещения и которые будут называться в дальнейшем *псевдогармоническими колебаниями*, и 2) колебания, в которых постоянная пружинности зависит от времени  $t$  и которые будут называться *квазигармоническими колебаниями*.

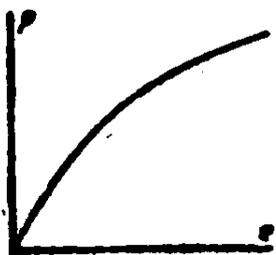
Точные решения обеих этих задач известны только для некоторых простых случаев, и для получения решения при рассмотрении действительных технических задач обычно применяют приближенные графические и числовые методы.

**17. Примеры псевдогармонических колебаний.** — Есть случаи, где постоянная пружинности колеблющейся системы изменяется с перемещением, т. е. восстанавливающая сила уже не пропорциональна перемещению. Такие условия получаются, если материал пружины не следует закону Гука. Иногда, например, употребляется в соединениях и амортизаторах такой органический материал, как резина или кожа. Диаграмма испытания на растяжение для этих материалов имеет вид, показанный на фиг. 40; модуль упругости увеличивается с удлинением. При небольших амплитудах колебаний этим изменением модуля можно пренебречь, но с увеличением амплитуды увеличение модуля может вызвать существенное увеличение частоты колебаний.



Фиг. 40.

Другой пример переменной гибкости встречается в случае сооружений, сделанных из таких материалов, как чугун или бетон. В обоих случаях диаграмма растяжения имеет вид, показанный на фиг. 41, т. е. модуль упругости уменьшается с деформацией. Поэтому следует ожидать некоторого уменьшения частоты с увеличением амплитуды колебаний.

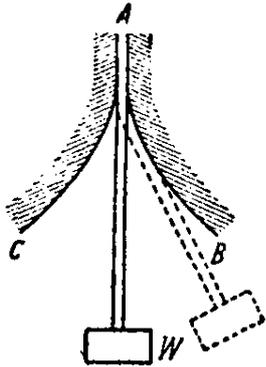


Фиг. 41.

Иногда применяются стальные пружины особых типов, таких, что их свойства упругости изменяются с перемещением. Собственная частота систем, имеющих такие пружины, зависит от величины амплитуды. При употреблении пружин таких типов неблагоприятный эффект резонанса может быть уменьшен. Если, вследствие резонанса, амплитуда колебаний начинает увеличиваться, то частота колебаний меняется, т. е. условия резонанса исчезают. Простой пример подобной пружины показан на фиг. 42. Плоская пружина, поддерживающая груз  $W$ , укреплена в конце

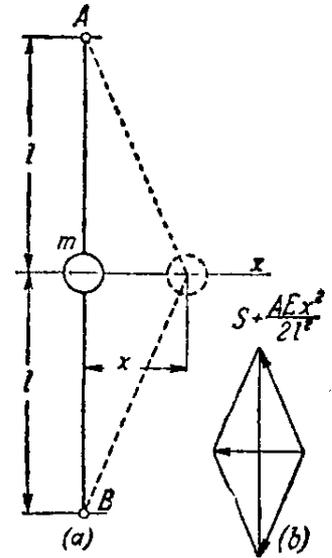
А. При колебании пружина частично соприкасается с одной из двух цилиндрических поверхностей  $AB$  или  $AC$ . Вследствие этого свободная длина консоли изменяется с амплитудой, так что жесткость пружины увеличивается с увеличением отклонения. Условия таковы же, как в случае, представленном на фиг. 40, т. е. частота колебания увеличивается с увеличением амплитуды.

Если измерения пружины и вид кривых  $AB$  и  $AC$  известны, кривая, представляющая восстанавливающую силу в функции отклонения конца пружины, может быть легко получена.



Фиг. 42.

В качестве другого примера негармонического движения рассмотрим теперь колебания вдоль оси  $x$ -ов массы  $m$ , прикрепленной к натянутой проволоке  $AB$  (фиг. 43). Пусть  $S$  — начальная растягивающая



Фиг. 43.

сила в проволоке,  $x$  — небольшое перемещение массы  $m$  в горизонтальном направлении,  $A$  — площадь поперечного сечения проволоки,  $E$  — модуль упругости проволоки. Тогда относительное удлинение проволоки, вследствие перемещения  $x$ , будет

$$\frac{\sqrt{l^2 + x^2} - l}{l} = \frac{x^2}{2l^2}.$$

Соответствующая растягивающая сила проволоки

$$S + AE \cdot \frac{x^2}{2l^2},$$

и восстанавливающая сила, действующая на массу  $m$  (см. фиг. 43b), будет

$$\left( S + AE \cdot \frac{x^2}{2l^2} \right) \frac{2x}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{2Sx}{l} + AE \frac{x^3}{l^3}.$$

Дифференциальное уравнение движения массы  $m$  таким образом получается:

$$mx'' + \frac{2Sx}{l} + AE \frac{x^3}{l^3} = 0. \quad [a]$$

Из этого видно, что при очень небольших перемещениях и когда начальная растягивающая сила  $S$  достаточно велика, по-

следним членом левой части ур-ия [a] можно пренебречь, и получится простое гармоническое колебание массы  $m$  в горизонтальном направлении. В противном случае следует принять во внимание все три члена ур-ия [a]. Тогда восстанавливающая сила будет увеличиваться в большей пропорции, чем перемещение, и частота колебаний будет увеличиваться с амплитудой.

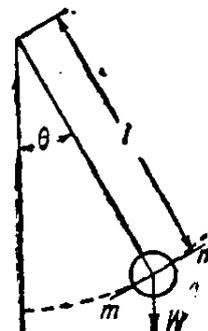
В случае простого математического маятника (фиг. 44), применяя принцип д'Аламбера и проектируя груз  $W$  и силу инерции на направление касательной  $mn$ , получим следующее ур-ие движения:

$$\frac{W}{g} l \theta'' + W \sin \theta = 0$$

или

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

[b] Фиг. 44.

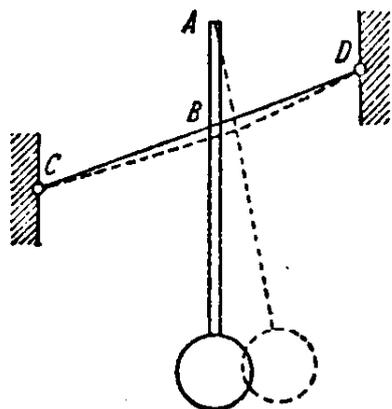


где  $l$  — длина маятника,  $\theta$  — угол между маятником и вертикалью.

Очевидно, что только в случае небольших амплитуд, когда  $\sin \theta \approx \theta$ , колебания такого маятника могут рассматриваться как простые гармонические. Если амплитуды не малы, имеет место более сложное движение, и период колебания будет зависеть от величины амплитуды. Ясно, что восстанавливающая сила не пропорциональна перемещению, а увеличивается в меньшем размере, так что частота будет уменьшаться с увеличением амплитуды колебания. Развернув  $\sin \theta$  в ряд по степеням и взяв только первые два члена ряда, получим вместо ур-ия [b] следующее ур-ие:

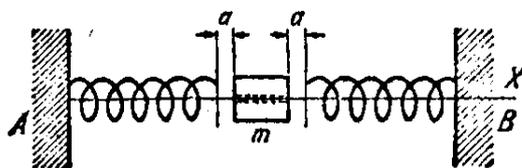
$$\theta'' + \frac{g}{l} \left( \theta - \frac{1}{6} \theta^3 \right) = 0. \quad [c]$$

Сравнивая это ур-ие с ур-ием [a], легко видеть, что, соединив маятник с натянутой струной (фиг. 45), прикрепленной к стержню маятника в точке  $B$ , и перпендикулярной к плоскости колебания, можем получить лучшее приближение к изохронным колебаниям.



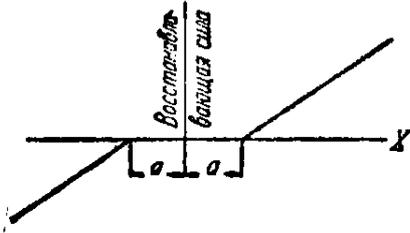
Фиг. 45.

На фиг. 46 дан другой пример системы, в которой период колебаний зависит от амплитуды. Масса  $m$  колеблется между дву-



Фиг. 46.

мя пружинами, скользя без трения вдоль стержня  $AB$ . Измеряя перемещения от среднего положения массы  $m$ , можем представить



Фиг. 47.

графически, как показано на фиг. 47, изменение восстанавливающей силы в зависимости от перемещения. Частота колебаний будет зависеть не только от жесткости пружины, но также и от величины просвета  $a$  и от начальных обстоятельств.

Допустим, напр., что в начальный момент ( $t=0$ ) масса  $m$  находится в своем среднем положении и имеет начальную скорость  $v$  в направлении  $X$ . Тогда время, необходимое для того, чтобы пройти просвет  $a$ , будет:

$$t_1 = \frac{a}{v}. \quad [d]$$

После того как пройден просвет, масса  $m$  войдет в контакт с пружиной, и дальнейшее движение в направлении  $X$  будет простым гармоническим. Время, в течение которого скорость массы меняется от  $v$  до 0 (четверть периода простого гармонического движения), будет (см. ур-ие [5], стр. 8):

$$t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad [e]$$

где  $k$  — жесткость пружины. Полный период колебаний массы  $m$  будет

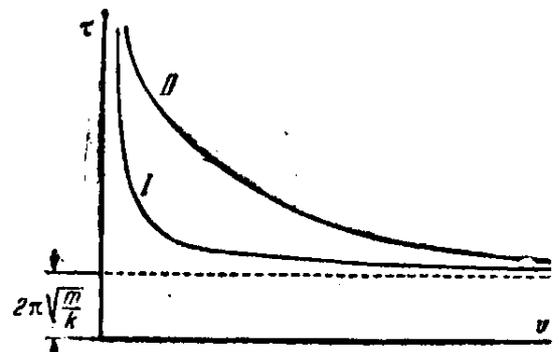
$$\tau = 4(t_1 + t_2) = \frac{4a}{v} + 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad [f]$$

Для данной величины просвета, данной массы  $m$  и данной жесткости пружины  $k$  период колебания зависит только от начальной скорости  $v$ . Период получается очень большим для малых значений  $v$  и уменьшается с увеличением  $v$ , приближаясь к пределу (см. фиг. 48)

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

когда  $v = \infty$ . Такие условия всегда получаются, если в системе между колеблющейся массой и пружиной имеются просветы.

Если просветы очень малы, период  $\tau$  остается почти постоянным для большей части значений скорости  $v$ , как показывает на фиг. 48 кривая  $I$ . С увеличением просвета для значительной ча-



Фиг. 48.

сти значений скорости  $v$  имеет место заметное изменение периода колебания (см. кривую II на фиг. 48). Период колебания подобной системы может иметь любое значение между  $\tau = \infty$  и  $\tau = \tau_0$ . Если действует периодическая возмущающая сила, имеющая период бóльший, чем  $\tau_0$ , то всегда возможно дать массе  $m$  такой толчок, что соответствующий период колебаний получится равным  $\tau$ , и таким образом установятся условия резонанса. Этим обстоятельством объясняются некоторые опасные колебания электровозов <sup>1)</sup>.

18. Свободные псевдогармонические колебания. — Если пренебречь затуханием, то общее ур-ие движения для этого случая имеет вид:

$$\frac{W}{g} x'' + k^2 f(x) = 0 \quad [a]$$

или

$$x'' + p^2 f(x) = 0, \quad [48]$$

в котором  $p^2 f(x)$  представляет восстанавливающую силу, отнесенную к единице массы, в функции от перемещения  $x$ . Чтобы получить первый интеграл ур-ия [48], умножим его на  $\frac{dx}{dt}$ , тогда оно может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{dx}{dt} d\left(\frac{dx}{dt}\right) + p^2 f(x) dx = 0$$

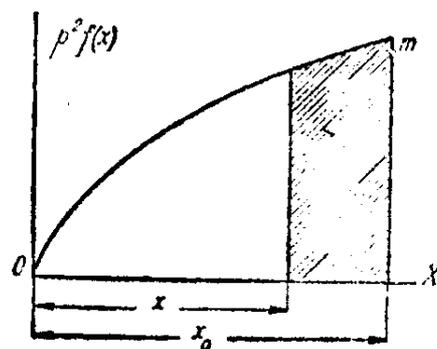
или

$$\frac{1}{2} d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + p^2 f(x) dx = 0,$$

из которого интегрированием получаем:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + p^2 \int f(x) dx = 0. \quad [b]$$

Если известна функция  $f(x)$  и начальные условия, из ур-ия [b] может быть вычислена скорость движения для любого положения системы. Допустим, например, что изменение восстанавливающей силы в зависимости от перемещения выражается кривой  $Om$  (см. фиг. 49) и что в начальный момент  $t=0$  система имеет перемещение, равное  $x_0$ , и началь-



Фиг. 49.

<sup>1)</sup> См. А. Wiechert, Schüttelerscheinungen bei elektrischen Lokomotiven, „Forschungsarbeiten“, Heft 266, 1924.

ную скорость, равную нулю. Тогда из ур-ия [b] для любого положения системы имеем:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx, \quad [c]$$

из которого ясно, что, при любом положении системы, кинетическая энергия равна разности между потенциальной энергией, которая была накоплена в пружине в начальный момент, вследствие перемещения  $x_0$ , и потенциальной энергией в рассматриваемый момент. На фиг. 49 это уменьшение потенциальной энергии изображено заштрихованной площадью.

Из ур-ия [c] имеем <sup>1)</sup>:

$$dt = \frac{dx}{-\sqrt{2p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx}}. \quad [d]$$

Интегрированием этого ур-ия получим время  $t$  в функции перемещения:

$$t = \int \frac{dx}{-\sqrt{2p^2 \int_x^{x_0} f(x) dx}}. \quad [e]$$

Возьмем, например, случай простого гармонического колебания. Тогда

$$f(x) = x.$$

Из ур-ия [d] получим:

$$t = \int \frac{dx}{-p \sqrt{x_0^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}{-p \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}$$

или

$$t = \frac{1}{p} \arccos \frac{x}{x_0},$$

откуда

$$x = x_0 \cos pt.$$

Этот результат совпадает с тем, который мы получили ранее для простого гармонического движения.

<sup>1)</sup> Знак минус взят потому, что в нашем случае увеличение времени связано с уменьшением  $x$ .

Для второго примера положим

$$f(x) = x^{2n-1}.$$

Подставляя это в ур-ие [e], получим

$$t = \frac{\sqrt{n}}{p} \int \frac{dx}{\sqrt{x_0^{2n} - x^{2n}}}.$$

Период колебаний будет:

$$\tau = \frac{4\sqrt{n}}{p} \frac{1}{x_0^{n-1}} \int_0^{x_0} \frac{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{2n}}}. \quad [49]$$

Значение интеграла этого уравнения зависит от величины  $n$  и из ур-ия [49] можно заключить, что только при  $n=1$ , т. е. для простого гармонического движения, период не зависит от начального перемещения  $x_0$ . Для  $n=2$  имеем:

$$\int_0^{x_0} \frac{d\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^4}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = 1,31.$$

Подставляя в [49], получаем:

$$\tau = 5,24 \frac{\sqrt{2}}{p} \cdot \frac{1}{x_0},$$

т. е. период колебаний обратно пропорционален амплитуде. Подобные колебания мы имеем, например, в случае, представленном на фиг. 43 (см. стр. 74), если начальное растяжение  $S$  проволоки равно нулю.

В более общем случае, когда

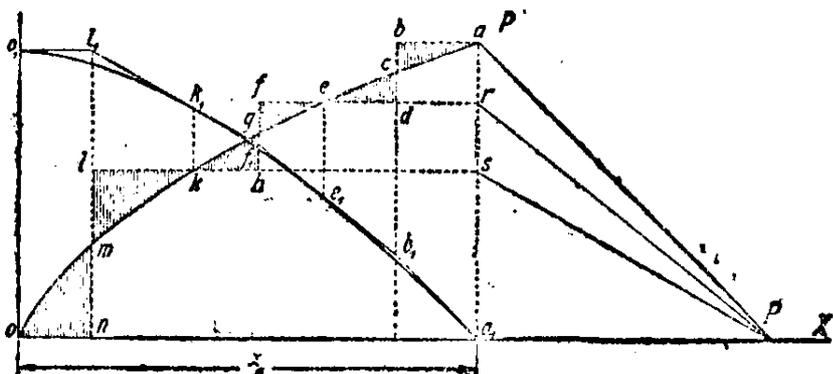
$$f(x) = ax + bx^2 + cx^3,$$

решение ур-ия [48] может быть получено при помощи эллиптических функций<sup>1)</sup>. Но эти решения очень сложны и неудобны для применения в технике. Поэтому в дальнейшем будут рассмотрены некоторые графические и численные методы решения ур-ия [48].

**19. Графическое решение.**— Для решения общего ур-ия [48] псевдогармонического колебания должны быть выполнены два

<sup>1)</sup> Некоторые примеры подобного рода рассмотрены в книге *G. Duffing's Erzwingene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*. Braunschweig, 1918.

интегрирования, указанные в ур-иях [b] и [e] предыдущего п°. Только в простейших случаях возможно точное интегрирование этих ур-ий, но приближенное графическое решение может быть получено всегда, и на основании его может быть вычислен период свободных колебаний для любой амплитуды с достаточной точностью.



Фиг. 50.

Пусть кривая  $op$  (фиг. 50) представляет в известном масштабе восстанавливающую силу в функции перемещения  $x$  системы от ее среднего положения. Из ур-ия [b] (стр. 77) видно, что, построив

интегральную кривую для кривой  $op$ , получим величину  $(x')^2$  в функции перемещения  $x$ . Это графическое интегрирование может быть выполнено следующим образом. Непрерывная кривая  $op$  заменяется ступенчатой линией  $abdfhln$  таким образом, чтобы  $\triangle abc = \triangle cde$ ,  $\triangle efg = \triangle ghk$  и  $\triangle klm = \triangle mno$ , так что площадь, заключенная между линией  $abdfhln$  и осью  $X$ , получается равной площади между кривой  $op$  и осью  $X$ .

Теперь выберем полюсное расстояние  $Pa_1$  таким, чтобы оно представляло единицу в том же масштабе, в каком изображены ординаты кривой  $op$ , и прочертим лучи  $Pa$ ,  $Pr$ ,  $Ps$ . Проведя теперь  $a_1b_1 \parallel Pa$ ,  $b_1f_1 \parallel Pr$ ,  $f_1l_1 \parallel Ps$  и  $l_1o_1 \parallel Pa_1$ , получим многоугольник  $a_1b_1f_1l_1o_1$ , наклоны сторон которого равны соответствующим значениям функции, представленной линией  $abdfhln$ . Это означает, что линия  $a_1b_1f_1l_1o_1$  является интегральной кривой для линии  $abdfhln$ . Вследствие равенства заштрихованных треугольников (см. фиг. 50), упомянутых выше, стороны многоугольника  $a_1b_1f_1l_1o_1$  должны быть касательными к интегральной кривой для  $op$ ; точки касания при этом будут  $a_1$ ,  $e_1$ ,  $k_1$  и  $o_1$ . Поэтому кривая  $a_1e_1k_1o_1$ , касательная к многоугольнику  $a_1b_1f_1l_1o_1$  в точках  $a_1$ ,  $e_1$ ,  $k_1$  и  $o_1$ , представляет интегральную кривую для кривой  $op$  и дает в известном масштабе изменение кинетической энергии системы за время движения от крайнего положения ( $x = x_0$ ) до среднего положения ( $x = 0$ ). Если ординаты кривой  $op$  равны в известном масштабе  $2p^2 f(x)$  (см. ур-ие [b], стр. 78), а полюсное расстояние  $Pa_1$  равно единице того же масштаба, тогда ординаты кривой  $a_1e_1k_1o_1$ , если их измерить в масштабе перемещения  $x_0$ , дают величины  $(x')^2$ . По этим данным легко вычислить скорость  $x'$  и обратную вели-

чину  $\frac{1}{x'}$  и можно вычертить (см. фиг. 51) кривую  $pn$ , представляющую  $\frac{1}{x'}$  в функции  $x$ .

Время, которое нужно, чтобы система достигла от своего крайнего положения ( $x = x_0$ ) своего среднего положения ( $x = 0$ ), будет представляться следующим интегралом (см. ур-ие [e] стр. 78):

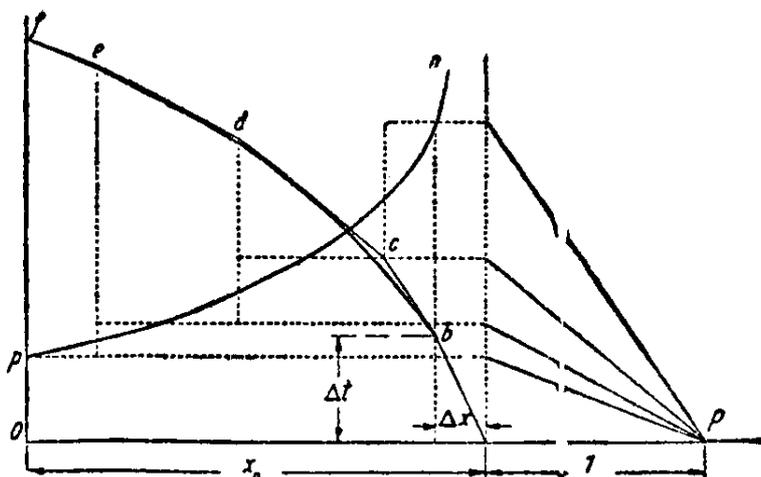
$$t = \int_{x_0}^0 - \frac{dx}{x'}$$

Это значит, что время  $t$  может быть получено построением интегральной кривой для кривой  $pn$  (см. фиг. 51), точно так же, как изложено выше. Крайняя ордината  $of$ , измеренная в том же масштабе, что  $x_0$ , даст время  $t$ . В случае системы, симметричной относительно среднего положения, время  $t$  будет представлять четверть периода свободных колебаний при амплитуде  $x_0$ . Следует отметить, что для  $x = x_0$ ,  $x' = 0$ , т. е.  $\frac{1}{x'}$  получается бесконечно большим в этой точке. Для устранения этого затруднения построение интегральной кривой можно начать от некоторой точки  $b$ , малые координаты  $\Delta x$  и  $\Delta t$  которой могут быть определены при допущении, что в начале, на небольшом расстоянии  $\Delta x$ , система движется с постоянным ускорением, равным  $p^2 f(x)$  (см. ур-ие [48], стр. 77). Тогда

$$\Delta x = \frac{\Delta t^2}{2} p^2 f(x_0), \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2\Delta x}{p^2 f(x)}}$$

Лордом Кельвином <sup>1)</sup> предложен другой графический метод, который также может быть применен при решении дифференциального уравнения свободного псевдогармонического колебания.

<sup>1)</sup> См. *Lord Kelvin, On Graphic Solution of Dynamical Problems, „Phil. Mag.“, Vol. 34, 1892.* Описание этого и некоторых других графических способов интегрирования дифференциальных ур-ий можно найти в книге *W. Hort'a Die Differentialgleichungen des Ingenieurs, 2 Aufl., Berlin, 1925,* которая содержит применение этих методов к решению технических задач. См. также *H. von Sanden, Practical Mathematical Analysis, New York, 1926.*



Фиг. 51.

В общем случае дифференциальное ур-ие движения может быть представлено в следующем виде:

$$x'' = f(x, t, x'). \quad [50]$$

Решение этого ур-ия представляет перемещение  $x$  в функции времени  $t$ . Эту функцию можно изобразить графически помощью кривой время-перемещение (см. фиг. 52).

Чтобы получить определенное решение, должны быть известны начальные обстоятельства, т. е. начальное перемещение и начальная скорость системы.

Пусть при  $t=0$

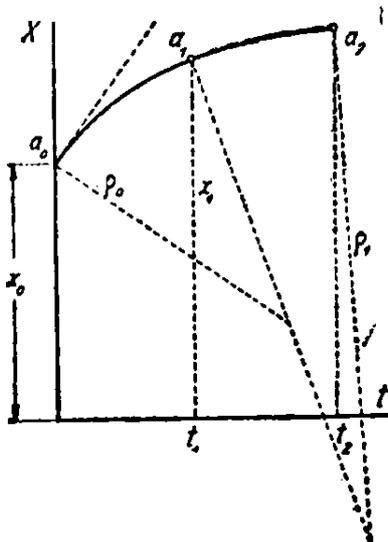
$$x = x_0 \quad \text{и} \quad x' = x'_0.$$

Тогда мы будем знать начальную ординату и начальный наклон кривой время-перемещение будут известны. Подставляя начальные значения  $x$  и  $x'$  в ур-ие [50], можно вычислить начальное значение  $x''$ .

Теперь из известного ур-ия

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + x'^2)^3}}{x''} \quad [a]$$

найдем радиус кривизны  $\rho_0$  в начале кривой время-перемещение. При помощи этого радиуса можно нанести небольшой элемент  $a_0a_1$  кривой время-перемещение как дугу круга (фиг. 52), и значения ординаты  $x = x_1$  и наклоны  $x' = x'_1$  в новой точке  $a_1$  могут быть взяты из чертежа, а соответствующее значение  $x''$  вычислено из ур-ия [50]. Теперь из ур-ия [a] получим величину радиуса кривизны  $\rho = \rho_1$ , при помощи которого можно нанести смежный элемент  $a_1a_2$  кривой. Продолжая это построение, как описано, получим графически кривую время-перемещение.



Фиг. 52.

Необходимые вычисления могут быть несколько упрощены, если воспользоваться углом наклона касательной к кривой время-перемещение. Пусть  $\theta$  обозначает этот угол, тогда

$$x' = \operatorname{tg} \theta$$

и

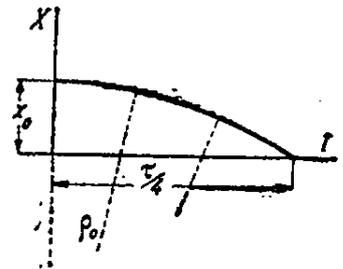
$$x'' = f(x, t, \operatorname{tg} \theta).$$

Подставляя в ур-ие [a], получим

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^3}}{f(x, t, \operatorname{tg} \theta)} = \frac{1}{\cos^3 \theta f(x, t, \operatorname{tg} \theta)}. \quad [b]$$

При этом вычислении квадратный корень взят с положительным знаком, так что знак  $p$  тот же самый, что и знак  $x''$ . Если  $x''$  отрицательно, центр кривизны должен быть взят таким образом, чтобы получить кривую выпуклостью вверх (см. фиг. 52).

В случае свободного колебания, если пренебречь затуханием, ур-ие [50] получает вид ур-ия [48], и вышеописанное графическое интегрирование получается очень простым, так как функция  $f$  зависит в этом случае только от величины перемещения  $x$ . Взяв для начальных условий при  $t=0$   $x=x_0$  и  $x'=0$ , будем иметь кривую время-перемещение в общей форме, показанной на фиг. 53. В случае системы, симметричной относительно среднего положения, пересечение этой кривой с осью  $X$  определит период  $\tau$  свободного колебания системы. Величина  $\tau$  всегда может быть определена подобным образом с точностью, достаточной для практических применений.



Фиг. 53.

На фиг. 53, например, взят случай простого гармонического колебания, для которого дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$x'' + p^2x = 0$$

и точное решение дает

$$\tau = \frac{2\pi}{p}.$$

Ур-ие [b] для этого случая получается

$$v = \frac{1}{\cos^3\theta \cdot p^2x}. \quad [b']$$

Начальное перемещение  $x_0$  на фиг. 53 взято равным 20 единицам длины, а  $p_0$  равным 100 единицам длины. Тогда из ур-ия [b'] для  $\theta=0$  получим:

$$\frac{1}{p} = \sqrt{20 \cdot 100} = 44,7 \text{ единицы}. \quad [c]$$

Величина  $\frac{1}{p}$  имеет измерение времени, а длина, получающаяся из уравнения [c], должна быть использована при определении по

фиг. 53 периода. Путем измерения получаем из этой фигуры

$$\frac{\tau}{4} = 69,5 \text{ ед.}$$

или, пользуясь [с], имеем

$$\tau = \frac{1}{p} \cdot \frac{4 \times 69,5}{44,7} = \frac{6,22}{p}.$$

Отсюда видно, что, взяв при графическом решении только 7 промежутков, получим результат с точностью около 1%.

**20. Численное решение.** — Псевдогармонические колебания, представленные ур-ями [48] и [50], могут быть также получены численным путем. Рассмотрим, например, свободные колебания без затухания. Соответствующее дифференциальное уравнение будет:

$$x'' + p^2 f(x) = 0. \quad [a]$$

Пусть начальные условия при  $t = 0$

$$x = x_0; \quad x' = 0. \quad [b]$$

Подставляя  $x_0$  вместо  $x$  в ур-ие [a], можно вычислить величину  $x_0''$ . При помощи значения  $x_0''$ , ускорения при  $t = 0$ , можно вычислить величины  $x_1'$  и  $x_1$ , т. е. скорость и перемещение в любой момент  $t_1$ , выбранный очень близко к времени  $t = 0$ . Пусть  $\Delta t$  обозначает небольшой промежуток времени между моментом  $t = 0$  и моментом  $t = t_1$ . Приближенные значения  $x_1'$  и  $x_1$ , будут тогда получаться из следующих ур-ий:

$$x_1' = x_0' + x_0'' \Delta t; \quad x_1 = x_0 + \frac{x_0' + x_1'}{2} \Delta t. \quad [c]$$

Подставляя значение  $x_1$  вместо  $x$  в ур-ие [a], получим значение  $x_1''$ . Пользуясь этим последним значением, можно вычислить более точные приближенные значения для  $x_1'$  и  $x_1$  из следующих уравнений:

$$x_1' = x_0' + \frac{x_0'' + x_1''}{2} \cdot \Delta t \quad \text{и} \quad x_1 = x_0 + \frac{x_0' + x_1'}{2} \Delta t. \quad [d]$$

Теперь, подставив второе приближение  $x_1$  (ур-ие [d]) в ур-ие [a], мы получим для  $x_1''$  еще более точное приближение. Затем, сделаем следующий шаг и, пользуясь  $x_1$ ,  $x_1'$  и  $x_1''$ , вычислим величины  $x_2$ ,  $x_2'$ ,  $x_2''$  для момента  $t = t_2 = 2 \Delta t$  точно так же, как изложено выше. Взяв промежутки  $\Delta t$  достаточно малыми и проделав вычисления для каждого значения  $t$  дважды, как указано выше, чтобы получить вторую степень приближения, мы можем

этим способом численного интегрирования получить всегда точность, достаточную для практических применений <sup>1)</sup>.

Чтобы пояснить порядок вычислений и дать понятие о точности этого метода, мы рассмотрим случай простого гармонического колебания, для которого уравнение движения таково:

$$x'' + p^2 x = 0.$$

Точное решение этого ур-ия при начальных условиях [b] будет:

$$x = x_0 \cos pt; \quad x' = -x_0 p \sin pt. \quad [e]$$

Результаты численного интегрирования даны в нижеследующей таблице 2.

Таблица 2. — Численное интегрирование.

$t$	$x$	$x'$	$x''$	$\cos pt$	$\sin pt$
0	$x_0$	0	$-p^2 x_0$	1	0
$\Delta t$	0,9687 $x_0$	-0,2500 $p x_0$	-0,9687 $p^2 x_0$	0,9689	0,2474
$2\Delta t$	0,9692 "	-0,2461 "	-0,9692 "	0,8776	0,4794
	0,8774 "	-0,4884 "	-0,8774 "		
$3\Delta t$	0,8788 "	-0,4769 "	-0,8788 "	0,7317	0,6816
	0,7321 "	-0,6966 "	-0,7321 "		
$4\Delta t$	0,7344 "	-0,6783 "	-0,7344 "	0,5403	0,8415
	0,5419 "	-0,8619 "	-0,5419 "		
$5\Delta t$	0,5449 "	-0,8378 "	-0,5449 "	0,3153	0,9490
	0,3184 "	-0,9740 "	-0,3184 "		
$6\Delta t$	0,3220 "	-0,9457 "	-0,3220 "	0,0707	0,9975
	0,0755 "	-1,0262 "	-0,0755 "		
$7\Delta t$	0,0794 "	-0,9954 "	-0,0794 "	-0,1782	0,9840
	-0,1719 "	-1,0153 "	-0,1719 "		
	-0,1680 "	-0,9838 "	-0,1680 "		

Величина промежутков времени была взята равной  $\Delta t = 1/4p$ . Помня, что период колебаний в этом случае  $\tau = 2\pi/p$ , видим что  $\Delta t$ , выбранный промежуток, равен приблизительно  $1/6$  четверти периода  $\tau$ . В первой строке таблицы приведены начальные условия. Чтобы получить первое приближение для  $x_1'$  и  $x_1$ , при

<sup>1)</sup> Этот способ может быть также применен и в случае более общего вида уравнения, напр., как ур-ие [50] (см. стр. 82). Этот способ применялся автором при решении задачи распределения напряжений во вращающихся шкивах (см. „Известия Технологического Института“, С. Петербург, 1912) и оказался удовлетворительным.

времени  $t = \Delta t = \frac{1}{4}p$ , были использованы ур-ия [c]. Полученные результаты даны во второй строке таблицы. Для получения следующего приближения для  $x_1'$  и  $x_1$ , были применены ур-ия [d], и результаты помещены в третьей строке таблицы. Таким образом была вычислена вся таблица. В двух последних столбцах даны соответствующие значения  $\cos pt$  и  $\sin pt$ , пропорциональные точным решениям [e], так что из этой таблицы непосредственно видна точность численного интегрирования. Отметим, что вычисленные скорости отличаются всегда большей точностью. Наибольшая же ошибка в вычислении перемещения усматривается в последней строке таблицы и составляет около 1% начального перемещения  $x_0$ .

Эти результаты мы получили, взяв в четверти периода только 6 промежутков времени. При увеличении числа промежутков, можно повысить точность, но в то же время число необходимых вычислений получается больше.

Пользуясь таблицей, можно вычислить также период колебаний. Из первого и второго столбцов видно, что, при  $t = 6\Delta t$ , кривая время-перемещение имеет положительную ординату, равную  $0,0794 x_0$ . При  $t = 7\Delta t$ , ордината той же кривой отрицательна и равна  $0,1680 x_0$ . Точка пересечения кривой время-перемещение с осью  $t$  дает время, равное четверти периода колебания. Помощью линейной интерполяции это время можно найти из равенства:

$$\frac{1}{4} \tau = 6\Delta t + \Delta t \frac{0,0794}{0,0794 + 0,1680} = 6,32 \Delta t = \frac{6,32}{4p} = \frac{1,58}{p}.$$

Точное значение четверти периода колебания  $\pi/2p = 1,57/p$ . Из этого видно, что путем указанного вычисления период колебания получается с ошибкой менее 1%. Из этого примера легко видеть, что описанный численный метод может быть весьма полезен для вычисления периода колебаний системы, имеющей гибкость, изменяющуюся с перемещением.

**21. Вынужденные псевдогармонические колебания.** — Допустим теперь, что система, в которой жесткость пружины меняется с перемещением, подвержена действию периодической возмущающей силы, пропорциональной  $\sin mt$ . Тогда, вместо ур-ия [48], вынужденные колебания выразятся следующим ур-ием:

$$x'' + p^2 f(x) = a \sin mt. \quad [51]$$

В дальнейшем рассмотрим частный случай системы, для которой ур-ие [51] получается

$$x'' + p^2 x - \gamma x^3 = a \sin mt. \quad [52]$$

Эта система симметрична относительно своего среднего положения; это видно из того, что, при замене  $x$  через  $-x$ , величина восстанавливающей силы не меняется. Свободные колебания этой системы могут быть изучены одним из способов, описанных выше, и можно показать, что, если  $\gamma > 0$ , период колебаний системы возрастает с увеличением амплитуды. Следует отметить, что ур-ие [52] не является линейным, поэтому его общее решение не может быть получено сложением вынужденного колебания, представленного частным решением ур-ия [52], со свободными колебаниями. На том же основании, если вместо синусоидальной силы  $a \sin mt$  на систему действует более сложная сила, представленная рядом Фурье, то получающееся движение не может быть получено простым сложением движений, вызванных отдельными синусоидальными членами ряда.

Общее решение ур-ия [52] не найдено, так что при изучении вынужденных колебаний приходится применять какой-нибудь приближенный способ. Используемые выше для исследования свободных колебаний графический и численный методы могут быть также применены и здесь, но постепенное интегрирование требует слишком много труда и недостаточно точно, если для установления изменений амплитуды вынужденных колебаний по времени требуется исследовать несколько циклов. Более удовлетворительный результат получим, применяя метод последовательных приближений, который мы сейчас опишем.

Рассмотрим сперва случай простого гармонического движения т. е. при  $\gamma$  в ур-ии [52] равной нулю. Тогда уравнение движения будет:

$$x'' + p^2 x = a \sin mt$$

или

$$x'' = -p^2 x + a \sin mt. \quad [a]$$

Мы не будем рассматривать здесь начальные условия и возьмем за первое приближение решения ур-ия [a] выражение

$$x_1 = A \sin mt. \quad [b]$$

Подставив это в правую сторону ур-ия [a], получим следующее ур-ие для вычисления второго приближения:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = (a - p^2 A) \sin mt,$$

из которого

$$x_2 = \frac{Ap^2 - a}{m^2} \sin mt, \quad [c]$$

Теперь произвольную постоянную выберем так, чтобы приравнять амплитуды колебаний  $x_1$  и  $x_2$ , тогда

$$A = \frac{Ap^2 - a}{m^2},$$

и мы получим

$$A = \frac{a}{p^2 - m^2}. \quad [d]$$

Это совпадает с точным решением для случая вынужденных гармонических колебаний (см. ур-ие [19], (стр. 9).

Поступая таким же образом в общем случае ур-ия [52] ( $\gamma \neq 0$ ), допустим, что  $x_1 = A \sin mt$  представляет первое приближение для решения этого уравнения. Тогда для вычисления второго приближения получится следующее ур-ие (см. ур-ие [52]):

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -p^2 x_1 + \gamma x_1^3 + a \sin mt = (a - Ap^2) \sin mt + A^3 \gamma \sin^3 mt. \quad [e]$$

Принимая во внимание, что

$$\sin^3 mt = \frac{1}{4} (3 \sin mt - \sin 3mt),$$

мы получим после интегрирования ур-ия [e]:

$$x_2 = \frac{1}{m^2} \left( Ap^2 - a - \frac{3}{4} A^3 \gamma \right) \sin mt + \frac{A^3 \gamma}{36 m^2} \sin 3mt.$$

Теперь мы определим произвольную постоянную  $A$  так, чтобы амплитуды основных колебаний в первом и во втором приближениях были равны, тогда

$$\frac{1}{m^2} \left( Ap^2 - a - \frac{3}{4} A^3 \gamma \right) = A,$$

и мы получим

$$a + A (m^2 - p^2) = -\frac{3}{4} A^3 \gamma. \quad [53]$$

Второе приближение тогда будет иметь вид

$$x_2 = A \sin mt + \frac{a^3 \gamma}{36 m^2} \sin 3mt, \quad [54]$$

в котором  $A$  — корень кубического ур-ия [53].

Пользуясь этим результатом, можем получить из ур-ия [52] третье приближение, и так далее. Этот метод последовательного приближения основан на допущении, что величина  $(\gamma/m^2)A^2$  мала по сравнению с единицей; но более детальное рассмотрение схо-

димости этих вычислений показывает <sup>1)</sup> что приближенное решение [54] всегда достаточно точно для технических применений.

Для нахождения корней кубического уравнения [53] очень полезен графический способ. Представив это уравнение в виде

$$A \left( 1 - \frac{m^2}{p^2} \right) - \frac{a}{p^2} = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{p^2} A^3, \quad [53']$$

мы получим корни, как абсциссы точек пересечения прямой линии

$$y = A \left( 1 - \frac{m^2}{p^2} \right) - \frac{a}{p^2} \quad [f]$$

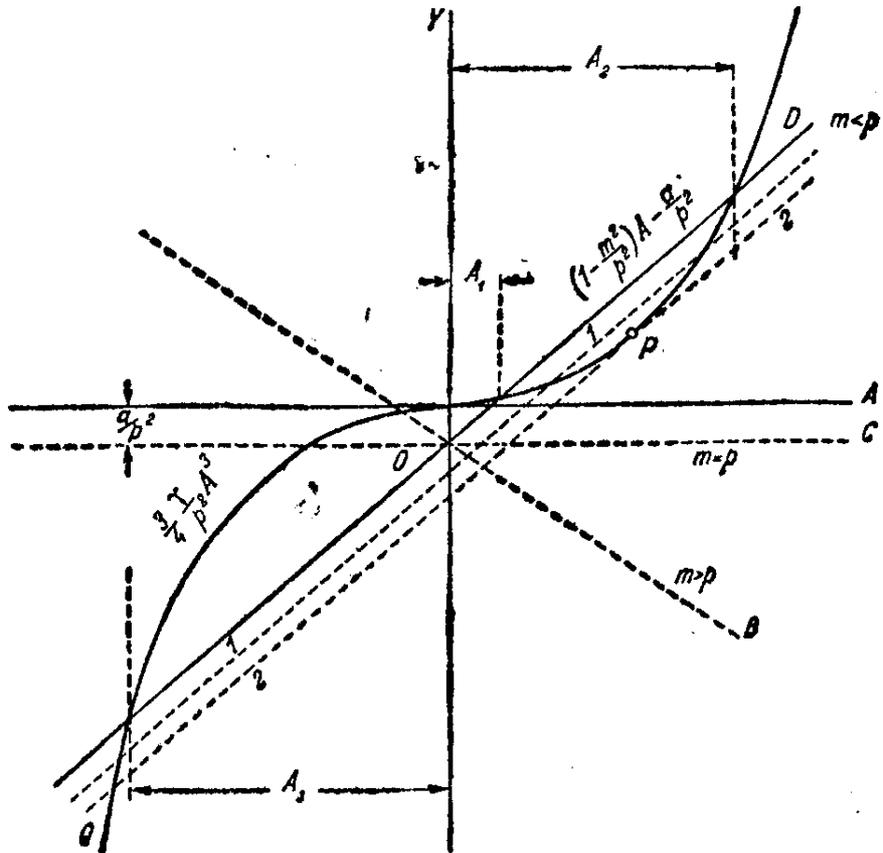
с кубической параболой

$$y = \frac{3}{4} \frac{\gamma}{p^2} A^3. \quad [g]$$

Этим способом выполнено построение на фиг. 54.

Проводим три прямые линии *OB*, *OC* и *OD*, соответствующие трем различным соотношениям между *m* и *p* в уравнении [f], при том же значении  $a/p^2$ .

Если имеют место колебания с очень небольшой амплитудой, перемещение *x* очень мало, и членом, содержащим  $x^3$  в уравнении [52], можно пренебречь. Таким образом получим простое гармоническое движение с периодом  $\tau = 2\pi/p$ . Прямая линия *OB* на фиг. 54 представляет условие, когда частота возмущающей силы выше, чем частота этого гармонического движения



Фиг. 54.

<sup>1)</sup> Задача свободных и вынужденных псевдогармонических колебаний рассмотрена в книге *Georg Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz*, Braunschweig, 1918. См. также статью *Rüdenberg'a, Einige unharmonische Schwingungsformen mit grosser Amplitude*, „*Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech.*“, 1923, Bd 3 S. 454.

( $m > p$ ). Из этой фигуры видно, что в этом случае мы имеем только одну точку пересечения, которая вполне определяет амплитуду вынужденных колебаний. Эта амплитуда уменьшается с увеличением частоты возмущающей силы, т. е. с увеличением отношения  $m/p$ .

Когда  $m = p$ , также возможно только одно действительное решение. Соответствующая амплитуда колебания снова будет получена как абсцисса точки пересечения линии  $OC$  с кубической параболой.

Рассмотрим теперь случай, когда  $m < p$ . Пусть  $OD$  представляет для этого случая прямую линию, отвечающую ур-ию  $[f]$ . Точка пересечения этой линии с осью  $A$  найдется из ур-ия:

$$\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)A - \frac{a}{p^2} = 0,$$

откуда

$$A = \frac{a}{p^2 - m^2}.$$

Это — амплитуда простого гармонического движения (см. ур-ие  $[d]$ ) и, в случае небольших амплитуд, только немного отличается от величины корня  $A_1$  кубического ур-ия [53]. Это значит, что если действует очень небольшая возмущающая сила, то получаются колебания, которые лишь незначительно отличаются от простого гармонического движения. Представим теперь, что мы постепенно увеличиваем величину возмущающей силы, т. е. величину  $a$ , не меняя ее частоты. Линия  $OD$  тогда перемещается в направлении вниз, параллельно самой себе, пусть, например, в положение  $1-1$  на фиг. 54. Амплитуда вынужденных колебаний также увеличивается. Из этой фигуры видно, что, при постепенном увеличении силы, мы доходим в конце концов до ограничивающего условия, представленного линией  $2-2$ , касательной к положительной ветви кубической параболы. За пределами этого ограничивающего условия корни  $A_1$  и  $A_2$  становятся мнимыми, и амплитуда вынужденных колебаний будет тогда определяться третьим корнем  $A_3$ , отвечающим пересечению прямой линии с отрицательной ветвью кубической параболы. Произведенные опыты<sup>1)</sup> показывают, что, при постепенном увеличении возмущающей силы, возникают ко-

<sup>1)</sup> Очень солидные опытные исследования псевдогармонических колебаний были сделаны *O. Martienssen*'ом („Phys. Zeitschr.“, 1910, S. 48). Он первый показал опытным путем, что, в случае псевдогармонических колебаний, одна и та же возмущающая сила может вызвать вынужденные колебания двух отдельных и различных амплитуд. Некоторые опыты при помощи маятника по псевдогармоническим вынужденным колебаниям описаны на стр. 76 вышеупомянутой книги *G. Duffing*'а.

лебания, отвечающие корню  $A_1$  (фиг. 54). За пределами ограничительного условия, представленного линией 2—2, колебания, отвечающие корню  $A_1$ , совершенно исчезают, а возникают колебания нового типа с фазой, отстающей на  $\pi$  ( $180^\circ$ ), и с амплитудой, представляемой корнем  $A_3$ .

Следует отметить, что описанный выше графический способ может быть применен также при рассмотрении свободных псевдогармонических колебаний. Нужно только в нашем предыдущем исследовании положить  $a=0$ . Тогда точка  $O$  на фиг. 54 совпадет с началом координат. Для любой частоты колебаний ( $0 < m < p$ ), возможной для рассматриваемой системы, может быть построена прямая линия

$$y = A \left( 1 - \frac{m^2}{p^2} \right).$$

Абсцисса точки пересечения этой линии с кубической параболой (ур-ие [g]) определит в этом случае соответствующую амплитуду свободных колебаний системы.

Из этого рассуждения видно, что, применяя метод последовательных приближений, можем получить решение ур-ия вынужденных псевдогармонических колебаний, которые имеют тот же период, как возмущающая сила. Амплитуда этих колебаний всегда остается *конечной*, и состояние, называемое „резонансом“ в случае гармонических колебаний, не встречается в системах с переменной гибкостью. Если для таких систем применить термин „резонанс“ к случаю, когда  $m=p$ , то можно установить, что для этого случая тогда, когда частота возмущающей силы больше чем таковая „резонанса“, амплитуда колебаний имеет конечное значение. Для случая  $m < p$  может иметь место, при известных условиях, отвечающих внезапному переходу от  $P$  к  $Q$  на фиг. 54, большое изменение в амплитуде и в отставании *вынужденного* колебания. Чтобы получить устойчивое положение и устранить возможность больших изменений в амплитуде вынужденного колебания следует  $m$  взять или большим, чем  $p$ , или в несколько раз меньше, чем  $p$ . Из фиг. 54 можно видеть, что, когда  $m$  сильно отличается от  $p$ , точки пересечения, определяющие амплитуду вынужденных колебаний, будут расположены в плоской части кубической параболы, и тип движения лишь слегка отличается от простого гармонического колебания.

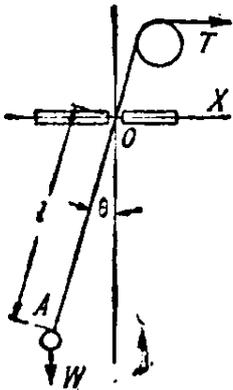
**22. Квазигармонические колебания.** — Есть некоторые технические задачи, в которых колеблющаяся система имеет характеристику пружинности, зависящую от времени. Движение таких

систем называется квазигармоническим и может быть представлено ур-ием:

$$x'' + 2nx' + p^2x = f(t),$$

где характеристика пружинности  $p^2$  или коэффициент затухания  $2n$  являются периодическими функциями от времени. Разберем несколько примеров таких колебаний, а задачу колебаний электро-возов определенного типа рассмотрим подробно.

Начнем с простейшего примера — с колебаний маятника переменной длины  $l$  (фиг. 55). Натягиванием струны  $OA$  силой  $T$  можем вызвать изменение длины  $l$  маятника. Чтобы



Фиг. 55.

получить дифференциальное уравнение движения, применим закон изменения момента количества движения. Количество движения движущейся массы  $W/g$  можно разложить на две составляющие: одну в направлении струны  $OA$ , а другую в направлении, перпендикулярном к  $OA$ . При определении момента количества движения вокруг точки  $O$  должна быть принята во внимание только вторая составляющая, равная  $(W/g)l\theta'$ . Производная этого момента количества движения по времени должна быть равна моменту действующих сил около точки  $O$ . Отсюда ур-ие

около точки  $O$ . Отсюда ур-ие

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{W}{g} l^2 \theta' \right) = -Wl \sin \theta,$$

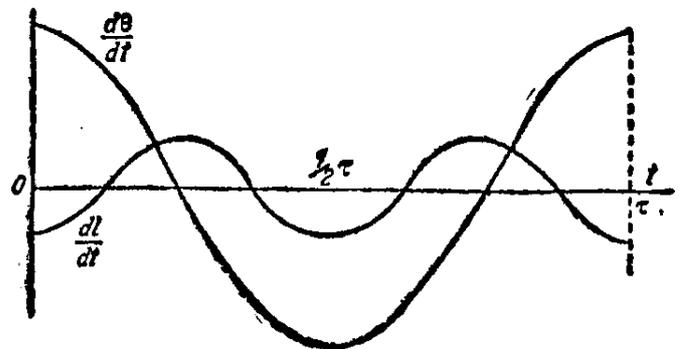
$$\theta'' + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \theta' + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad [55]$$

В случае колебаний с малой амплитудой в ур-ие [55] вместо  $\sin \theta$ , можно подставить  $\theta$ , и мы получим

$$\theta'' + \frac{2}{l} \frac{dl}{dt} \theta' + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad [55']$$

Сравнивая это ур-ие с ур-ием [25] (см. стр. 28), для затухающих колебаний, мы видим, что член, содержащий производную  $dl/dt$ , занимает место члена, представляющего затухание в ур-ии [25]. Соответственным изменением длины  $l$  со временем можно вызвать такой же эффект как бы „отрицательного затухания“. В этом случае в системе происходит постепенное накопление энергии, вместо ее рассеяния, и амплитуда колебаний маятника возрастает с временем. Легко видеть, что такое накопление энергии является результатом работы, производимой силой натяжения  $T$  при изменении длины  $l$  маятника. Можно представить различные способы изменения длины  $l$ , которые будут давать накопление энергии в колеблющейся системе.

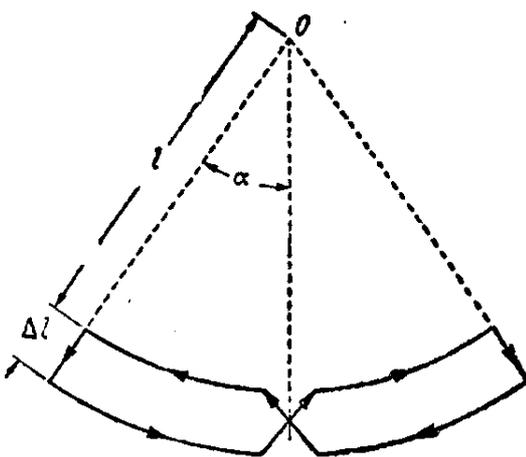
Как пример рассмотрим случай, представленный на фиг. 56, в котором угловая скорость  $d\theta/dt$  маятника и скорость  $dl/dt$  изменения длины маятника изображены в функциях от времени. Период изменения длины маятника взят равным половине периода колебания маятника, и линия  $d\theta/dt$  расположена по отношению к линии  $dl/dt$  таким образом, что наибольший отрицательный затухающий эффект совпадает с наибольшей скоростью. Это показывает, что уменьшение длины  $l$  нужно производить пока скорость  $d\theta/dt$  велика, а увеличение длины  $l$ , когда скорость сравнительно мала.



Фиг. 56.

Вспомнив, что растягивающая сила  $T$  действует в направлении, противоположном радиальной составляющей груза  $W$ , вместе с центробежной силой, легко видеть, что в случае, представленном на фиг. 56, работа, выполняемая силой  $T$ , при любом уменьшении длины  $l$  будет больше, чем работа, получающаяся при обратном увеличении длины  $l$ . Этот избыток работы вызывает увеличение энергии колебания маятника.

Определение увеличения энергии в колеблющемся маятнике особенно просто в случае, показанном на фиг. 57. В этом случае допущено, что длина маятника внезапно уменьшается на величину  $\Delta l$ , когда маятник в своем среднем положении, и внезапно увеличивается на ту же самую величину, когда маятник в своих крайних положениях.



Фиг. 57.

Траектория массы  $W/g$  показана на фигуре сплошной линией. Масса испытывает два полных цикла колебания за время одного колебания маятника. Работа, выполняемая во время укорочения длины  $l$  маятника, будет <sup>1)</sup>:

$$\left( W + \frac{W v^2}{g l} \right) \Delta l. \quad [a]$$

Здесь  $v$  обозначает скорость массы  $W/g$  маятника, когда он на-

<sup>1)</sup> В этих выкладках пренебрегаем изменением центробежной силы при укорочении маятника.

ходится в своем среднем положении. Работа, получающаяся при крайних положениях маятника,

$$W\Delta l \cos \alpha. \quad [b]$$

Прирост энергии за время одного полного колебания маятника будет

$$\Delta E = 2 \left\{ \left( W + \frac{W v^2}{g} \frac{1}{l} \right) \Delta l - W\Delta l \cos \alpha \right\},$$

или, полагая

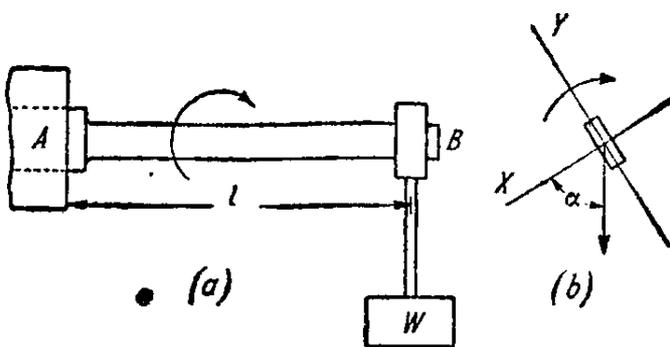
$$v^2 = 2gl(1 - \cos \alpha),$$

имеем

$$\Delta E = 6W\Delta l(1 - \cos \alpha). \quad [c]$$

Из-за этого увеличения энергии, в случае, изображенном на фиг. 57, имеет место постепенное увеличение амплитуды колебаний маятника.

В качестве второго примера рассмотрим еще гибкие колебания вращающегося стержня, несущего на своем конце груз  $W$



Фиг. 58.

(фиг. 58). Этот случай представляет обычную схему прибора для испытания на усталость консольной балки. Если жесткость стержня на изгиб одинакова во всех осевых сечениях, прогиб конца  $B$  остается постоянным при вращении, и колебания не имеют места.

Допустим теперь, что главные моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  поперечного сечения стержня различны (фиг. 58  $b$ ). Тогда статический вертикальный прогиб конца  $B$  стержня будет зависеть от угла  $\alpha$  между направлением действия груза и осью  $X$  и может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{Wl^3}{6EI_x} \left\{ 1 + \frac{I_x}{I_y} - \left( 1 - \frac{I_x}{I_y} \right) \cos 2\alpha \right\}. \quad [d]$$

Вследствие такого изменения вертикального прогиба, частота свободных вертикальных колебаний груза  $W$ , укрепленного на конце  $B$  стержня  $AB$ , будет зависеть от величины угла  $\alpha$ .

Допустим далее, что стержень  $AB$  вращается с постоянной скоростью  $\omega$ . Тогда можем положить в ур-ии [d]  $\alpha = \omega t$ , и ха-

рактеристика пружинности для случая вертикального колебания груза  $W$  получается (из [d])

$$k = \frac{6EI_x}{l^3 \left[ 1 + \frac{I_x}{I_y} - \left( 1 - \frac{I_x}{I_y} \right) \cos 2\omega t \right]}, \quad [e]$$

т. е. характеристика пружинности — периодическая функция частоты вдвое большей, чем частота вращения стержня.

По этой схеме при  $I_y = 0,84 I_x$ , было произведено несколько испытаний, и было найдено, что могут быть установлены две критические скорости

вращения, при кото

рых имеют место

большие вертикаль

ные колебания груза

$W$ . Результат одного

из таких опытов по

казан на фиг. 59. На

этой фигуре ампли

туда колебания на

несена в функции от

груза  $W$ , причем

стержень вращался

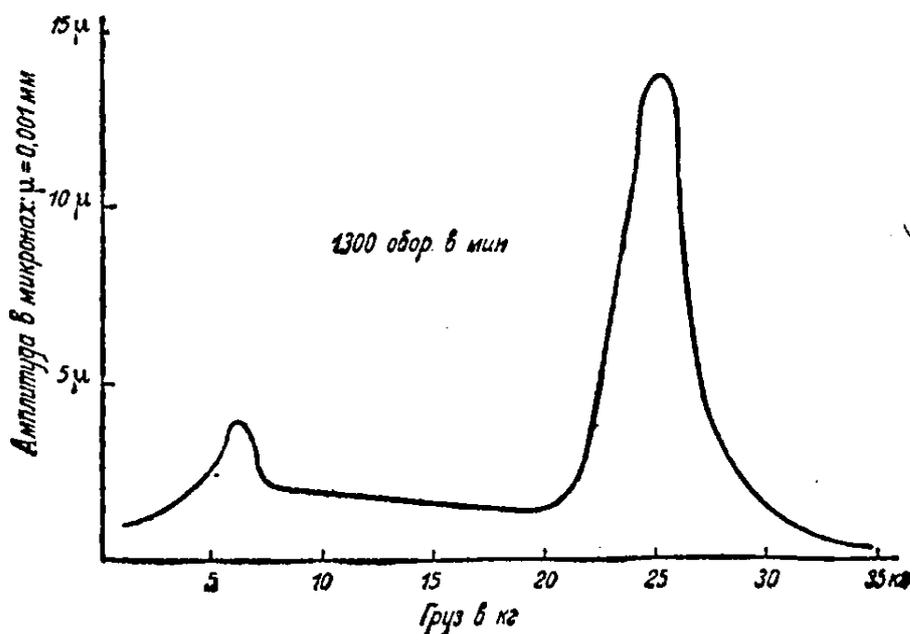
с постоянной ско

ростью в 1300 обо

ротов в минуту. Бы

ло получено два критических положения.

Критические колебания



Фиг. 59.

при бoльшем грузе отвечают собственной частоте вертикальных

колебаний груза, укрепленного на стержне (при этом момент инер

ции стержня взят равным среднему из двух крайних значений

его). В этом случае имеются два полных цикла изменений гиб

кости за один цикл колебания. Другая критическая область (при

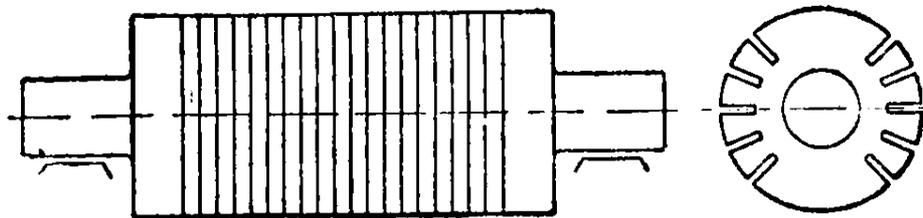
$W_{кр}$ , равном 1/4 предыдущего груза) отвечает собственной час

тоте груза при 2600 оборотах в минуту. В этом случае один

цикл изменений гибкости отвечает одному циклу колебаний.

Подобного рода колебания могут возникнуть в роторе, имею

щем неодинаковую жесткость на изгиб, напр., в двухполюсном



Фиг. 60.

роторе турбогене

ратора (фиг. 60)

Прогиб такого ро

тора под дей

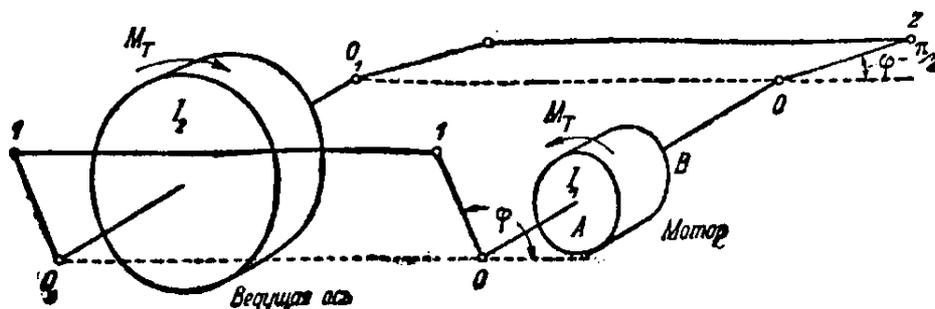
ствием его соб

ственного веса ме

няется при вращении, и, при известной скорости, имеют место вследствие этой переменной гибкости сильные колебания.

**23. Колебания в спарниках ведущей системы электровозов.**— *Общие указания.*— Один из наиболее важных в технике примеров квазигармонических колебаний встречается в электровозах с передачей спарниками. Гибкость системы между валом мотора и ведущими осями зависит от положения кривошипов, и при установившемся движении электровоза это обычно сложная функция, период которой соответствует одному обороту ведущих осей. Мы видели в предыдущем параграфе, что подобные системы переменной гибкости в известных условиях могут быть подвержены сильным колебаниям. Вследствие того, что такие колебания сопровождаются изменением угловой скорости больших вращающихся масс мотора, в ведущей системе электровоза возникают большие добавочные динамические силы. Многие поломки, особенно в ранний период электровозостроения, следует приписать именно этой динамической причине<sup>1)</sup>.

*Переменная жесткость передачи спарниками.*— Чтобы показать, как изменяется гибкость передачи спарниками во время вращения мотора, рассмотрим простейший пример, показанный на фиг. 61. Момент кручения  $M_T$ , действующий на ротор, пере-



Фиг. 61.

дается ведущей оси  $O_1O_1$  через вал мотора  $OO$ , кривошипы  $O1$  и  $O2$  и спарники  $11$  и  $22$ . Рассмотрим угол поворота ротора по отношению к ведущей оси  $O_1O_1$  в зависимости от скручивания вала  $OO$  и деформации спарников. Пусть  $M_T'$  и  $M_T''$  моменты

<sup>1)</sup> Важнейшими статьями, трактующими о колебаниях электровозов, являются:

1. Prof. E. Meissner, Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität, „Schweizerische Bauzeitung“, Bd 72, 1918, S. 95;

2. K. E. Müller, Ueber Schüttelschwingungen des Kuppelstangenantriebes, „Schweizerische Bauzeitung“, Bd 74, 1919, S. 141;

3. L. Dreyfus, Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität, „A. Föppl zum siebzigsten Geburtstag“, 1924, S. 89;

4. A. Wiechert, Schüttelerscheinungen, „Forschungsarbeiten“, Heft 266, 1924;

5. E. E. Seefehlner, Elektrische Zugförderung, 1924.

кручения, передающиеся ведущей оси через спарники 11 и 22 соответственно, тогда

$$M_T = M_T' + M_T'',$$

и если  $K_1$  — характеристика пружинности конца  $OA$  вала, то угол поворота мотора вследствие скручивания вала будет выражаться

$$\Delta_1\varphi = \frac{M_T'}{K_1}.$$

Рассмотрим теперь угол поворота  $\Delta_2\varphi$  из-за укорочения вследствие сжатия спарника 11. Пусть  $S_1$  — сжимающая сила в этом спарнике,  $\delta = \frac{S_1 l}{AE}$  — соответствующее укорочение спарника,  $A$  — площадь сечения спарника,  $E$  — модуль упругости его материала  $r$  — радиус кривошипа. Тогда имеем

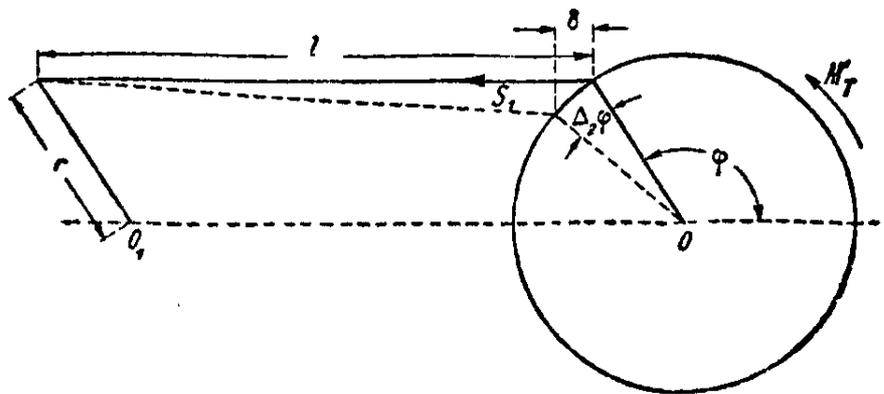
$$M_T' = S_1 r \sin \varphi, \quad [c]$$

и из геометрического соотношения (см. фиг. 62).

$$\delta = r \Delta_2\varphi \sin \varphi. \quad [d]$$

Вспомнив, что

$$S_1 = \delta \frac{AE}{l},$$



Фиг. 62.

имеем из ур-ий [c] и [d]

$$\Delta_2\varphi = \frac{M_T' l}{AE r^2 \sin^2 \varphi}$$

или, положив

$$\frac{AE r^2}{l} = K_2,$$

имеем

$$\Delta_2\varphi = \frac{M_T'}{K_2 \sin^2 \varphi}. \quad [e]$$

Полный угол поворота мотора по отношению к движущей оси будет <sup>1)</sup>

$$\Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi = M_T' \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \sin^2 \varphi} \right). \quad [f]$$

Тот же угол должен получиться из рассмотрения скручивания конца  $OB$  вала и укорочения спарника 22. Допустив, что устрой-

<sup>1)</sup> В этом анализе принята во внимание только деформация спарников и вала  $OO$ .  
Теория колебаний в инженерном деле. 7

ство симметрично относительно продольной оси электровоза, и повторив то же рассуждение, что и выше, мы получим:

$$\Delta\varphi = M_T'' \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \cos^2 \varphi} \right). \quad [g]$$

Из ур-ий [a], [j] и [g] мы имеем:

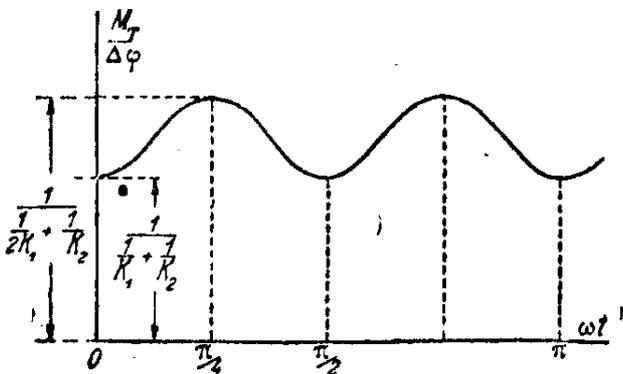
$$\begin{aligned} M_T &= \Delta\varphi \frac{\frac{2}{K_1} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \frac{1}{K_2}}{\left( \frac{1}{K_1} \sin^2 \varphi + \frac{1}{K_2} \right) \left( \frac{1}{K_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{K_2} \right)} = \\ &= \Delta\varphi \frac{\frac{2}{K_1} + \frac{8}{K_2} - \frac{2}{K_1} \cos 4\varphi}{\frac{8}{K_2^2} + \frac{8}{K_1 K_2} + \frac{1}{K_1^2} - \frac{1}{K_1^2} \cos 4\varphi}. \end{aligned} \quad [h]$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t, & \frac{2}{K_1} + \frac{8}{K_2} &= a, & \frac{2}{K_1} &= b, \\ \frac{8}{K_2^2} + \frac{8}{K_1 K_2} + \frac{1}{K_1^2} &= c, & \frac{1}{K_1^2} &= d, \end{aligned}$$

имеем

$$M_T = \Delta\varphi \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t}. \quad [56]$$



Фиг. 63.

Очевидно, что гибкость системы является функцией с периодом в четыре раза меньшим, чем период одного оборота вала. На фиг. 63 представлено графически изменение гибкости при изменении угла. При найденном

значении момента кручения угол скручивания достигает максимума и равен

$$M_T \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right),$$

когда  $\varphi = \omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \dots$

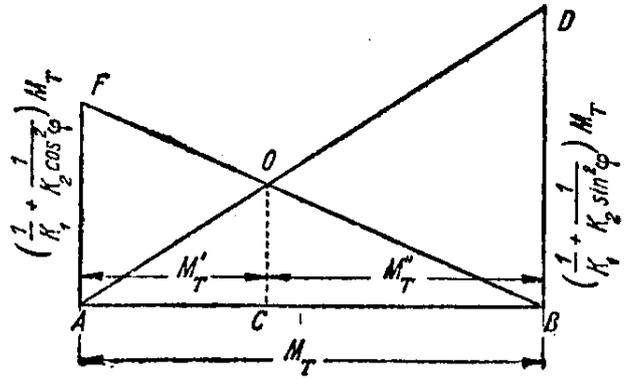
Он достигает минимума и равен

$$M_T \left( \frac{1}{2K_1} + \frac{1}{K_2} \right),$$

когда  $\varphi = \omega t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \dots$

Легко видеть, что изменяемость гибкости системы уменьшается, когда жесткость вала, т. е. величина  $K_1$ , увеличивается. При абсолютно жестком вале гибкость системы остается постоянной во время вращения.

В нашем предыдущем рассмотрении ур-ия [a], [f] и [g] были решены аналитически. Те же ур-ия, однако, могут быть легко решены графически<sup>1)</sup>. Пусть  $AB$  представляет в известном масштабе величину крутящего момента  $M_T$  (см. фиг. 64); тогда, если ординаты на концах его  $AF$  и  $BD$  равны



Фиг. 64.

$$\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \cos^2 \varphi}\right) M_T \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \sin^2 \varphi}\right) M_T,$$

вертикаль  $OC$ , проведенная через точку пересечения линий  $BF$  и  $AD$ , будет определять отрезками  $AC$  и  $CB$  величины моментов  $M_T'$  и  $M_T''$ . Из этой фигуры имеем также, что

$$OC = M_T' \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \sin^2 \varphi}\right) = \Delta \varphi,$$

т. е.  $OC$  равно углу поворота мотора вследствие деформации вала и спарника, вызванной крутящим моментом  $M_T$ .

Этот графический метод особенно полезен, когда кроме упругих деформаций принимаются во внимание просветы. Рассмотрим, например, влияние просвета между спарником и цапфой кривошипа. Пусть  $a$  обозначает величину этого просвета<sup>2)</sup>, тогда перемещение  $\delta$  (см. фиг. 62) будет равно укорочению спарника плюс просвет  $a$ :

$$\delta = \frac{S_1 l}{AE} + a;$$

и, пользуясь ур-иями [c] и [d], мы имеем

$$r \Delta_2 \varphi \sin \varphi = \frac{M_T'}{r \sin \varphi} \frac{1}{AE} + a;$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{M_T'}{K_2 \sin^2 \varphi} + \frac{a}{r \sin \varphi}.$$

<sup>1)</sup> Этот метод был применен А. Wiechert'ом, см. его упомянутую выше на стр. 96 статью.

<sup>2)</sup>  $a$  — обозначает разницу между радиусом отверстия и радиусом цапфы.

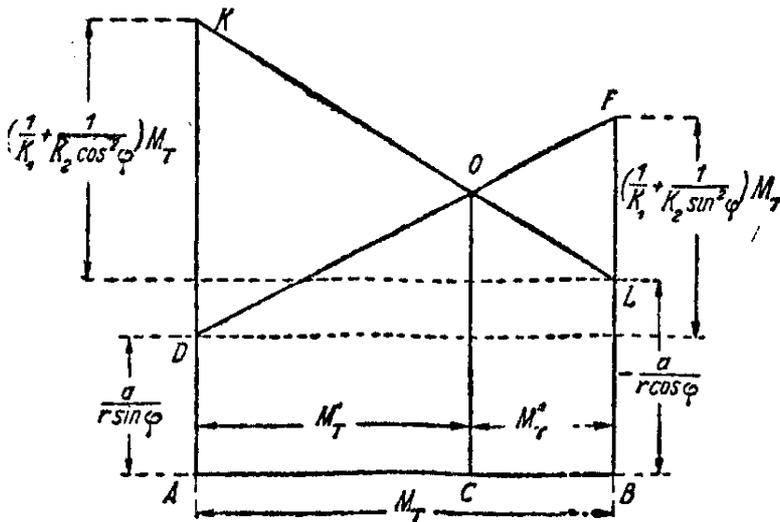
Полный угол вращения будет

$$\Delta\varphi = \Delta_1\varphi + \Delta_2\varphi = \frac{M_T'}{K_1} + \frac{M_T'}{K_2 \sin^2 \varphi} + \frac{a}{r \sin \varphi}. \quad [k]$$

Таким же способом, рассматривая другой кривошип, получим

$$\Delta\varphi = \frac{M_T''}{K_1} + \frac{M_T''}{K_2 \cos^2 \varphi} - \frac{a}{r \cos \varphi}. \quad [l]$$

Из ур-ий [k], [l] и [a] могут быть определены моменты  $M_T'$  и  $M_T''$  и угол  $\Delta\varphi$ . Графическое решение этих уравнений показано



Фиг. 65.

на фиг. 65.  $AB$  представляет, как и раньше, полный крутящий момент  $M_T$ . Прямые линии  $DF$  и  $LK$  представляют правые части ур-ий [k] и [l] в линейных функциях от  $M_T'$  и  $M_T''$  соответственно. Точка пересечения  $O$  этих двух линий дает нам решение задачи. Легко видеть, что ордината  $OC$  равна углу  $\Delta\varphi$  и что расстояния  $AC$  и  $CB$  равны

крутящим моментам  $M_T'$  и  $M_T''$  соответственно.

Из фиг. 65 видно, что для того положения кривошипов, когда

$$-\frac{a}{r \cos \varphi} = \frac{a}{r \sin \varphi} + \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \sin^2 \varphi} \right) M_T, \quad [m]$$

$M_T''$  становится равным нулю. Для меньших значений  $\varphi$ <sup>1)</sup>, чем получающееся из ур-ия [m], спарник 11 принимает на себя весь крутящий момент, и  $M_T' = M_T''$ . Тем же способом для углов больших, чем угол, получающийся из ур-ия:

$$\frac{a}{r \sin \varphi} = -\frac{a}{r \cos \varphi} + \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2 \cos^2 \varphi} \right) M_T, \quad [n]$$

$M_T' = 0$ , и полный крутящий момент принимается спарником 22. Пользуясь графическим решением (фиг. 65) в пределах границ, определяемых ур-иями [m] и [n], и применяя ур-ия [k] и [l] за этими пределами, можем получить полную картину изменений угла  $\Delta\varphi$  для  $\pi/2 < \varphi < \pi$ . Подобным способом можно рассмотреть и прочие положения кривошипа и построить кривую, предста-

<sup>1)</sup> Здесь принято во внимание положение, показанное на фиг. 62, при котором кривошипы расположены в первой и второй четвертях.

вляющую переменную характеристику пружинности  $M_T/\Delta\varphi$  в функции  $\omega t$ , такую же, как показано на фиг. 63.

*Колебания в ведущей системе спарников.* — Рассматривая движение системы, изображенной на фиг. 61, примем следующие обозначения:  $I_1$  — момент инерции массы, вращающейся вокруг оси  $OO$ ,  $I_2$  — момент инерции массы, вращающейся вокруг оси  $O_1O_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — углы вращения вокруг  $OO$  и  $O_1O_1$  соответственно,  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  — угловое перемещение мотора по отношению к ведущей оси, вследствие деформации валов и спарников,  $\psi$  — переменная гибкость передачи спарниками, равная крутящему моменту, необходимому, чтобы вызвать угловое смещение  $\Delta\varphi$ , равное одному радиану. В частном случае, рассмотренном выше (ур-ие [56], стр. 98), имеем

$$\psi = \frac{M_T}{\Delta\varphi} = \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t}. \quad [56']$$

Пусть  $M_T$ ,  $M_r$  — моменты внешних сил, действующих на массы  $I_1$  и  $I_2$  соответственно. При движении электровоза постоянный крутящий момент  $M_T$  действует на массу, имеющую момент инерции  $I_1$  (фиг. 61), и обратно ему начинает действовать момент  $\psi(\varphi_1 - \varphi_2)$ , который представляет противодействие сил упругости скручиваемого вала  $OO$ . Дифференциальное уравнение движения<sup>1</sup> будет

$$-I_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + M_T - \psi(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad [a]$$

Тем же способом получим дифференциальное уравнение движения для второй массы

$$-I_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - M_r + \psi(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad [b]$$

В действительных случаях  $I_1$  и  $I_2$  представляют обычно эквивалентные моменты инерции, величина которых может быть вычислена из рассмотрения конструкции системы.

Из ур-ий [a] и [b] имеем:

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} + \psi \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{M_T}{I_1} + \frac{M_r}{I_2}.$$

Обозначив

$$\varphi_1 - \varphi_2 = x, \quad \psi \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = \theta, \quad [57]$$

получим следующее ур-ие:

$$x'' + \theta x = \frac{M_T}{I_1} + \frac{M_r}{I_2}. \quad [c]$$

в котором  $\theta$  есть некоторая периодическая функция по времени. В случае, показанном на фиг. 61, мы имеем из ур-ия [56] (стр. 98)

$$\theta = \psi \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{a - b \cos 4\omega t}{c - d \cos 4\omega t}. \quad [57']$$

Если жесткость вала очень велика по сравнению с жесткостью спарников, величинами  $b$  и  $d$  в ур-ии [57'] можно пренебречь (см. стр. 98), и мы получим

$$\theta = K_2 \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}.$$

Мы пришли к имеющей постоянную гибкость системе, период свободных колебаний которой можно легко найти из следующего выражения (см. стр. 13)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{K_2 (I_1 + I_2)}}.$$

Под действием переменного крутящего момента могут возникнуть сильные колебания в системе, если период  $M_T$  равен или кратен<sup>1)</sup> периоду свободных колебаний системы. Этим способом устанавливается ряд скоростей критических для системы.

В случае переменной гибкости задача получается более сложной. Вместо определенных *критических скоростей* существуют определенные *области скоростей*, в пределах которых могут произойти сильные колебания. Чтобы определить границы этих критических областей, становится необходимым рассмотрение ур-ия

$$x'' + \theta x = 0, \quad [59]$$

представляющего свободные колебания системы. Коэффициент  $\theta$  в этом уравнении — периодическая функция от времени, зависящая от переменной гибкости системы, и определяется ур-ием [57]. Пусть  $T$  обозначает период этой функции, а  $x(t)$  — решение ур-ия [59]. Тогда, как показано Мейснером<sup>2)</sup>, значениями  $T$ , отвечающими границам *критических областей*, являются такие значения, при которых выполнено одно из двух следующих условий:

$$x(t - T) = x(t), \quad [d]$$

$$x(t - T) = -x(t). \quad [e]$$

При дальнейшем рассмотрении мы будем называть случай [d] ур-ия [59] *периодическим решением первого рода*, а случай [e] *периодическим решением второго рода*. Это значит, что значения  $T$ ,

<sup>1)</sup> Принято, что  $M_T$  представляется тригонометрическим рядом (см. п° 12); тогда резонанс возникнет, если период одного из членов этого ряда станет равным  $\tau$ .

<sup>2)</sup> См. упомянутую выше на стр. 96 его статью.

определяющие границы *критических областей*, являются такими значениями, при которых ур-ие [59] имеет периодические решения или первого, или второго рода.

Прежде чем перейти к применению этого общего заключения к вычислению критических областей, дадим более детальное рассмотрение дифференциального ур-ия [59].

*Рассмотрение дифференциального уравнения* [59] <sup>1)</sup>.— Общее решение линейного дифференциального ур-ия [59], которое является уравнением второго порядка, может быть всегда представлено в следующем виде:

$$x = a_1 \eta_1(t) + a_2 \eta_2(t), \quad [60]$$

в котором  $a_1$  и  $a_2$  две произвольные постоянные,  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  два частных решения ур-ия [59], выбранные так, чтобы удовлетворить следующим начальным условиям:

$$\eta_1(0) = 1, \quad \eta_1'(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0, \quad \eta_2'(0) = 1. \quad [a]$$

В случае постоянной гибкости, когда  $\theta = p$ , мы имеем, например:

$$\eta_1(t) = \cos pt; \quad \eta_2(t) = \frac{\sin pt}{p}.$$

Допустив, что условия [a] выполнены, получим, для произвольных постоянных в общем решении [60], очень простые значения, именно:

$$a_1 = (x)_{t=0} = x_0, \quad a_2 = (x')_{t=0} = x_0'.$$

Это значит, что полное перемещение системы при колебании, выражающееся общим решением [60], состоит из двух частей, одна — зависящая от начального перемещения  $x_0$  системы, и другая — зависящая от начальной скорости  $x_0'$ .

Если начальное перемещение и начальная скорость даны, приближенное решение ур-ия [59] может всегда быть получено, пользуясь графическим или численным способом, описанным выше в п° 19 и 20.

Чтобы получить картину постепенного возникновения колебаний, интегрирование должно быть распространено на период времени во много раз больший, чем период  $T$  функции  $\theta$ . Это требует значительного труда, и вместе с тем точность этих вычислений уменьшается с увеличением  $t$ . Теперь покажем, что общие заключения относительно характера решения [60] можно сделать, допустив, что функции  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  известны в пределах  $0 \leq t \leq T$ . Для получения этих функций в указанном выше промежутке необходимо только найти решения ур-ия [60] для двух частных начальных условий, выражающихся так:

$$x_0 = 1; \quad x_0' = 0$$

и

$$x_0 = 0; \quad x_0' = 1.$$

Это легко сделать каким-либо приближенным способом, и таким образом мы получим функции  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  в промежутке  $0 \leq t \leq T$ .

Вследствие того, что функция  $\theta$  в ур-ии [59] имеет период  $T$ , это ур-ие не изменится, если вместо  $t$  подставим  $t + T$ . Поэтому  $\eta_1(t + T)$  и  $\eta_2(t + T)$  также являются решениями ур-ия [59] и должны иметь такой же вид, как решение [60], т. е.

$$\begin{aligned} \eta_1(t + T) &= a\eta_1(t) + b\eta_2(t); \\ \eta_2(t + T) &= c\eta_1(t) + d\eta_2(t). \end{aligned} \quad [b]$$

<sup>1)</sup> Нижеприводимый анализ имеет только теоретический интерес и может быть опущен без вреда для понимания следующих отделов.

Подставив  $t=0$  в эти ур-ия и в их производные по времени, получим следующие значения для постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ :

$$\begin{aligned} a &= \eta_1(T), & c &= \eta_2(T); \\ b &= \eta_1'(T), & d &= \eta_2'(T). \end{aligned} \quad [c]$$

Теперь видно, что, зная  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  в промежутке  $0 \leq t \leq T$ , можно вычислить значения этих функций для промежутка  $T < t < 2T$ , пользуясь ур-иями [b] и [c]. Повторяя то же самое рассуждение, получим дальнейшее расширение промежутка, в котором значения функций  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  известны.

После этих предварительных замечаний мы снова вернемся к ур-ию [59] и постараемся получить решение  $N(t)$  этого ур-ия, так, чтобы по истечении времени, равного периоду  $T$ , колебание вновь повторялось, но с увеличенными амплитудами. Это представляется так:

$$N(t+T) = kN(t). \quad [d]$$

Как и каждое решение ур-ия [59], решение  $N(t)$  имеет вид

$$N(t) = a_1 \eta_1(t) + a_2 \eta_2(t), \quad [e]$$

откуда

$$N(t+T) = a_1 \eta_1(t+T) + a_2 \eta_2(t+T),$$

или, пользуясь ур-ием [b],

$$N(t+T) = a_1 \{ a \eta_1(t) + b \eta_2(t) \} + a_2 \{ c \eta_1(t) + d \eta_2(t) \}. \quad [f]$$

Теперь подставив [e] и [f] в ур-ие [d], имеем

$$a_1 \{ a \eta_1(t) + b \eta_2(t) \} + a_2 \{ c \eta_1(t) + d \eta_2(t) \} = k \{ a_1 \eta_1(t) + a_2 \eta_2(t) \}.$$

Это ур-ие может быть удовлетворено при каждом значении  $t$ , если

$$\begin{aligned} a a_1 + c a_2 &= k a_1; \\ b a_1 + d a_2 &= k a_2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы имеем

$$\frac{a_1}{a_2} = - \frac{c}{a-k} = - \frac{d-k}{b}, \quad [g]$$

т. е. коэффициент  $k$  должен удовлетворять следующему ур-ию:

$$(a-k)(d-k) = bc,$$

или

$$k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0. \quad [h]$$

Это ур-ие можно упростить, если примем во внимание, что  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  являются решениями ур-ия [59], так что

$$\begin{aligned} \eta_1''(t) + \theta \eta_1(t) &= 0; \\ \eta_2''(t) + \theta \eta_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Исключив из этих уравнений  $\theta$ , мы имеем

$$\eta_1''(t) \eta_2(t) - \eta_2''(t) \eta_1(t) = 0,$$

из которого после интегрирования получим:

$$\eta_1'(t) \eta_2(t) - \eta_2'(t) \eta_1(t) = \text{const.}$$

Подставляя в это ур-ие  $t=0$  и  $t=T$  и пользуясь ур-ием [a] и ур-ием [c], получим

$$-1 = bc - ad.$$

И ур-ие [h] получает вид

$$k^2 - (a+d)k + 1 = 0, \quad [k]$$

из которого

$$k_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - 1}. \quad [l]$$

Для каждого из этих двух корней можно вычислить из ур-ия [g] соответствующие значения отношения  $\frac{a_1}{a_2}$ , и таким способом мы получим два обыкновенных интеграла (см. ур-ие [e])  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$ , так что

$$N_1(t+T) = k_1 N_1(t), \quad N_2(t+T) = k_2 N_2(t).$$

Очевидно, что изменение интегралов  $N_1(t)$  и  $N_2(t)$  по времени будет зависеть от значения корней  $k_1$  и  $k_2$  ур-ия [k].

Если

$$\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 > 1, \quad [p]$$

то оба корня действительны и, вследствие того, что  $k_1 k_2 = 1$ , абсолютная величина одного из этих корней будет больше единицы. Это указывает, что соответственный интеграл увеличивается бесконечно с временем. Возьмем, напр.,  $|k_1| > 1$ , тогда, после промежутка времени равного  $nT$ , имеем

$$N_1(t+nT) = k_1^n N_1(t).$$

Ясно, что степень увеличения амплитуды колебания зависит от величины  $|k_1|$ .

Условие [p] представляет критические области, в которых можно ожидать сильные колебания.

Если

$$\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 < 1, \quad [q]$$

то оба корня ур-ия [m] получаются мнимыми, и соответствующие колебания всегда сохраняют конечную амплитуду<sup>1)</sup>.

Границы критических областей найдутся из условия

$$\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 1$$

В этом случае,  $k_1 = k_2 = +1$ , или  $k_1 = k_2 = -1$  и ур-ие [59] имеет или периодическое решение первого рода, или периодическое решение второго рода (см. стр. 102). Если  $k_1 = k_2 = 1$ , имеем  $N(t+T) = N(t)$  периодическое решение первого рода; если же  $k_1 = k_2 = -1$ , мы имеем  $N(t+T) = -N(t)$  периодическое решение второго рода (см. стр. 102).

В первом случае период можно представить формулой  $\frac{2T}{n}$ , в которой  $n = 2, 4, 6 \dots$ . Во втором случае период можно представить такой же формулой, но при  $n = 1, 3, 5 \dots$ . Из этого видно, что для определения границ критических областей для системы с переменной гибкостью нужно только определить такие значения периода  $T$  функции  $\theta$  в ур-ии [59], при которых это ур-ие имеет или периодическое решение первого рода, или периодическое решение второго рода. Эти значения  $T$  представят границы критических областей.

*Определение областей критических скоростей*<sup>2)</sup>.— В случае электровоза изменяемость гибкости системы обычно мала и области критических скоростей можно

<sup>1)</sup> См. выше на стр. 96 упомянутую статью Мейснера.

<sup>2)</sup> См. Karl E. Müller, Ueber die Schüttelschwingungen des Kuppelstangenantriebes, Dissertation der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich.

вычислить последовательным приближением. Порядок этих вычислений покажем теперь на частном случае, когда функция  $\theta$  в общем ур-ии

$$x'' + \theta x = 0 \quad [59']$$

имеет следующий вид

$$\theta = \frac{a + b \cos 2\omega t + c \cos 4\omega t}{p + q \cos 2\omega t + r \cos 4\omega t} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}. \quad [61]$$

В случае симметричности схемы, рассмотренной выше,  $b = q = 0$ , и мы придем к виду, указанному в ур-ии [57'], стр. 102.

Допустив, что функция  $\theta$  при движении электровоза претерпевает лишь небольшие изменения, получим величины  $b, c, q$  и  $r$  в ур-ии [61] небольшими сравнительно с  $a$  и  $p$  и, произведя деление, можем представить это ур-ие в следующем виде:

$$\theta = \left\{ \frac{a}{p} + \frac{b}{p} \cos 2\omega t + \frac{c}{p} \cos 4\omega t \right\} \left\{ 1 - \left( \frac{q}{p} \cos 2\omega t + \frac{r}{p} \cos 4\omega t \right) + \left( \frac{q}{p} \cos 2\omega t + \frac{r}{p} \cos 4\omega t \right)^2 - \dots \right\} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}. \quad [a]$$

Пусть

$$\frac{a}{p} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = g_0; \quad \frac{b}{p} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = g_1 \epsilon; \quad \frac{c}{p} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = g_2 \epsilon; \quad \frac{q}{p} = g_3 \epsilon; \quad \frac{r}{p} = g_4 \epsilon,$$

где  $g_1, g_2, g_3$  и  $g_4$  величины того же порядка, что  $g_0$ , а  $\epsilon$  обозначает небольшую величину. Тогда, пользуясь тождеством

$$2 \cos 2mt \cos 2nt = \cos 2(m+n)t + \cos 2(m-n)t, \quad [b]$$

ур-ие [a] можем представить в следующем виде:

$$\theta = \pi^2 \left\{ a_0 + \epsilon(a_1 \cos 2\omega t + a_2 \cos 4\omega t) + \epsilon^2(a_3 \cos 2\omega t + a_4 \cos 4\omega t + a_5 \cos 6\omega t + a_6 \cos 8\omega t) + \epsilon^3(a_7 \cos 2\omega t + \dots) + \dots \right\}, \quad [c]$$

в котором постоянные  $a_0, a_1, a_2, \dots$  можно выразить в вышеуказанных величинах  $g_0, g_1, \dots$

Итак, очевидно, что функция  $\theta$ , зависящая от переменной гибкости системы, имеет период

$$T = \frac{\pi}{\omega}, \quad [d]$$

т. е. два полных периода  $\theta$  соответствуют одному обороту кривошипа.

В последующем рассмотрении дифференциального уравнения [59'] введем угол  $\varphi$ , как новую независимую переменную, вместо времени  $t$ . Эта переменная определяется ур-ием:

$$\varphi = \omega t \quad [e]$$

и будет представлять угол вращения кривошипа:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{d\varphi}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2x}{d\varphi^2}.$$

Подставляя в ур-ие [59'] и пользуясь ур-ием [d], имеем

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + \frac{T^2}{\pi^2} \theta x = 0, \quad [62]$$

в котором из ур-ия [c]

$$\theta = \pi^2 \left\{ a_0 + \epsilon(a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi) + \epsilon^2(a_3 \cos 2\varphi + a_4 \cos 4\varphi + a_5 \cos 6\varphi + a_6 \cos 8\varphi) + \epsilon^3(a_7 \cos 2\varphi + \dots) + \dots \right\}, \quad [f]$$

т. е. период функции  $\theta$  теперь равен  $\pi$ .

На основании предыдущего рассмотрения границы *критических областей* движения системы соответствуют таким значениям периода  $T$ , при которых ур-ие [62] имеет *периодическое* решение первого или второго рода, т. е.

$$x(\varphi + \pi) = x(\varphi) \quad [g]$$

или

$$x(\varphi + \pi) = -x(\varphi).$$

Для вычисления этих частных значений  $T$ , допустим, что  $T$  и  $x(\varphi)$  развернуты в следующие ряды:

$$\begin{aligned} T &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \alpha_3 \varepsilon^3 + \dots, \\ x(\varphi) &= x_0(\varphi) + \varepsilon x_1(\varphi) + \varepsilon^2 x_2(\varphi) + \dots, \end{aligned} \quad [h]$$

в которых  $\varepsilon$  обозначает ту же самую небольшую величину, как и в ур-ии [f] выше

Подставив ряды [f] и [h] в ур-ие [62], имеем

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x_0(\varphi)}{d\varphi^2} + \varepsilon \frac{d^2 x_1(\varphi)}{d\varphi^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2 x_2(\varphi)}{d\varphi^2} + \dots (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots)^2 \times \\ &\times \{ a_0 + \varepsilon(a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi) + \varepsilon^2(a_3 \cos 2\varphi + \dots) \} \times \\ &\times \{ x_0(\varphi) + \varepsilon x_1(\varphi) + \varepsilon^2 x_2(\varphi) + \dots \} = 0. \end{aligned}$$

Перепишав левую часть этого ур-ия по восходящим степеням  $\varepsilon$  и приравняв коэффициенты каждой степени  $\varepsilon$  нулю, получим следующую систему ур-ий:

$$\frac{d^2 x_0(\varphi)}{d\varphi^2} + \alpha_0^2 a_0 x_0(\varphi) = 0, \quad [k]$$

$$\frac{d^2 x_1(\varphi)}{d\varphi^2} + \alpha_0^2 a_0 x_1(\varphi) + x_0(\varphi) \{ 2a_0 \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_0^2 (a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi) \} = 0. \quad [l]$$

Ур-ие [k] представляет простое гармоническое движение, решение которого можно написать в следующем виде:

$$x_0 = A \cos(n\varphi + \delta_0), \quad [m]$$

в котором

$$n = \sqrt{a_0 \alpha_0^2}, \quad [n]$$

а  $A$  и  $\delta_0$  произвольные постоянные.

Чтобы удовлетворить условиям [g], необходимо взять  $n = 2, 4, 6, \dots$  для *периодических* решений *первого рода* и  $n = 1, 3, 5, \dots$  для *периодических* решений *второго рода*. Подставляя это в ур-ие [n] и принимая во внимание, что из ур-ия [h]  $\alpha_0$  есть первое приближение для периода  $T$ , а  $\pi^2 a_0 = \theta_0$  представляет некоторое среднее значение  $\theta$ , имеем

$$T_n = \frac{n}{\sqrt{a_0}} = \frac{n\pi}{\sqrt{\theta_0}}, \quad [63]$$

в котором  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Сравнивая этот результат с  $\tau = 2\pi/\sqrt{\theta_0}$  — периодом собственных колебаний системы, имеющей постоянную гибкость  $\theta = \theta_0$ , можем заключить, что в первом приближении вместо *областей критических скоростей* получаются определенные критические скорости. При этой критической скорости период  $2T$  одного оборота кривошипа равен или кратен периоду  $\tau$  собственных колебаний системы с постоянной жесткостью, отвечающей некоторому среднему значению  $\theta_0$  функции  $\theta$ .

Второе приближение для решения ур-ия [59'] мы получим теперь, подставляя первое приближение [m] в ур-ие [l]. Это дает

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x_1(\varphi)}{d\varphi^2} + \alpha_0 \alpha_0^2 x_1(\varphi) = -2a_0 \alpha_0 \alpha_1 A \cos(n\varphi - \delta_0) - \\ &- \alpha_0^2 A \cos(n\varphi - \delta_0) (a_1 \cos 2\varphi + a_2 \cos 4\varphi), \end{aligned}$$

или, пользуясь тождеством [b],

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1(\varphi)}{d\varphi^2} + a_0 a_0^2 x_1(\varphi) = & -2a_0 a_0 a_1 A \cos(n\varphi - \delta_0) - \\ & - \frac{a_0^2 a_1}{2} A \left\{ \cos[(n+2)\varphi - \delta_0] + \cos[(n-2)\varphi - \delta_0] \right\} - \\ & - \frac{a_0^2 a_2}{2} A \left\{ \cos[(n+4)\varphi - \delta_0] + \cos[(n-4)\varphi - \delta_0] \right\}. \quad [o] \end{aligned}$$

Общее решение этого ур-ия состоит из двух частей: первая — свободные колебания, представляемые функцией

$$B \cos(n\varphi - \delta_1),$$

где  $B$  и  $\delta_1$  являются двумя произвольными постоянными, а  $n = \sqrt{a_0 a_0^2}$ , другая же часть — вынужденные колебания. При вычислении этих последних колебаний воспользуемся общим выражением [24] (стр. 25). Обозначая через  $R(\xi)$  правую сторону ур-ия [o], можем представить вынужденные колебания в следующем виде:

$$\frac{1}{n} \int_0^\varphi R(\xi) \sin n(\varphi - \xi) d\xi. \quad [p]$$

Члены правой части ур-ия [o] имеют следующую общую форму:

$$N \cos[(n \pm m)\varphi - \delta].$$

Подставляя это в [p], имеем:

$$\begin{aligned} \frac{N}{n} \int_0^\varphi \cos[(n \pm m)\xi - \delta] \sin n(\varphi - \xi) d\xi = & -\frac{N}{2n} \cdot \frac{1}{\pm m} \left\{ \cos[(n \pm m)\varphi - \delta] - \right. \\ & \left. - \cos(n\varphi - \delta) \right\} + \frac{N}{2n} \frac{1}{2n \pm m} \left\{ \cos[(n \pm m)\varphi - \delta] - \cos(n\varphi + \delta) \right\}. \quad [q] \end{aligned}$$

Существует два исключительных случая  $m=0$ , и  $2n \pm m=0$ . В первом исключительном случае ( $m=0$ ), первый член правой части ур-ия [q] получается равным

$$\frac{N}{2n} \varphi \sin(n\varphi + \delta).$$

Во втором исключительном случае [ $2n \pm m=0$ ] второй член правой части ур-ия [q] получается равным

$$\frac{N}{2n} \varphi \sin(n\varphi + \delta).$$

После этих предварительных замечаний общее решение ур-ия [o] можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 = & B \cos(n\varphi - \delta_1) - 2a_0 a_0 a_1 A \frac{1}{2n} \varphi \sin(n\varphi - \delta_0) - \\ & - \frac{2a_0 a_0 a_1 A}{(2n)^2} [\cos(n\varphi - \delta_0) - \cos(n\varphi + \delta_0)] - \\ & - \frac{a_0^2 a_1 A}{2} \left\{ \begin{aligned} & [\cos(n+2)\varphi - \delta_0] \left( -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2} \right) + \\ & + \cos[(n-2)\varphi - \delta_0] \left( \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-2} \right) + \\ & + \cos(n\varphi - \delta_0) \left( \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2} \right) + \\ & + \cos(n\varphi + \delta_0) \left( -\frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-2} \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha_0^2 a_2 A}{2 \cdot 2n} \left\{ \begin{array}{l} \cos [(n+4)\varphi - \delta_0] \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2n+4} \right) + \\ + \cos [(n-4)\varphi - \delta_0] \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2n-4} \right) + \\ + \cos (n\varphi - \delta_0) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \\ + \cos (n\varphi + \delta_0) \left( \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n-4} \right) \end{array} \right\}. \quad [r]$$

Отсюда видно, что все члены полученного решения, за исключением члена

$$-2a_0 \alpha_0 \alpha_1 A \frac{1}{2n} \varphi \sin (n\varphi - \delta),$$

являются периодическими или полупериодическими; поэтому условия [g] будут удовлетворяться подстановкой  $\alpha_1 = 0$ .

Таким способом получим второе приближение для  $T$ , пользуясь первым из выражений [h], приближенное значение которого совпадает с первым приближением. Исключительные случаи встречаются только, если  $n=1$  и  $n=2$ .

При  $n=1$ , члены

$$-\frac{\alpha_0^2 a_1 A}{2} \left\{ \cos [(n-2)\varphi - \delta_0] \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-2} - \cos (n\varphi + \delta_0) \frac{1}{2n} \frac{1}{2n-2} \right\}$$

в общем решении [r] принимают вид  $\infty - \infty$  и должны быть заменены членом

$$-\frac{\alpha_0^2 a_1 A}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \varphi \sin (\varphi + \delta_0).$$

Для того чтобы решение [r] сделать периодическим или полупериодическим необходимо принять в этом случае

$$-2a_0 \alpha_0 \alpha_1 A \frac{1}{2} \varphi \sin (\varphi - \delta_0) - \frac{\alpha_0^2 a_1 A}{2} \frac{1}{2} \varphi \sin (\varphi + \delta_0) = 0,$$

или

$$\sin \varphi \cos \delta_0 \left( -a_0 \alpha_0 \alpha_1 - \frac{\alpha_0^2 a_1}{4} \right) + \cos \varphi \sin \delta_0 \left( a_0 \alpha_0 \alpha_1 - \frac{\alpha_0^2 a_1}{4} \right) = 0. \quad [8]$$

Имеются две возможности удовлетворить этому ур-ию:

$$1) \quad \delta_0 = 0, \quad -a_0 \alpha_0 \alpha_1 - \frac{\alpha_0^2 a_1}{4} = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_0 a_1}{4a_0}$$

или

$$2) \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_0 \alpha_0 \alpha_1 - \frac{\alpha_0^2 a_1}{4} = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_0 a_1}{4a_0}.$$

Подставляя полученные значения  $\alpha_1$  в первое из ур-ий [h] и принимая во внимание, что из ур-ия [n], при  $n=1$ ,  $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{a_0}}$ , мы имеем как второе приближение для  $T_1$ , соответствующее границам критической области:

$$\begin{aligned} (T_1)_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} - \epsilon \frac{1}{\sqrt{a_0}} \cdot \frac{a_1}{4a_0}; \\ (T_1)_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{a_0}} + \epsilon \frac{1}{\sqrt{a_0}} \cdot \frac{a_1}{4a_0}. \end{aligned} \quad [64]$$

Ясно, что вместо критической скорости, полученной при  $n=1$  из ур-ия [63], мы получим критическую область между пределами  $(T_1)_{\min}$  и  $(T_1)_{\max}$ . Расши-

рение этой области зависит от величины небольшого количества  $\epsilon$  и она уменьшается с уменьшением изменяемости гибкости системы. Интересно отметить также, что разница в фазе  $\delta_0$  между функцией  $\theta$  и свободным колебанием системы имеет два определенных значения для двух предельных положений  $\delta_0 = 0$  и  $\delta_0 = \pi/2$ . Следует отметить еще, что критическая область при  $n = 1$ , рассмотренная выше, отвечает наивысшей скорости вращения и является по существу наиболее опасной областью.

Для случая  $n = 2$ , т. е. для ближайшей низшей критической области, пользуясь тем же самым способом, как выше, мы получим

$$(T_2)_{\min}^{\max} = \sqrt{\frac{4}{a_0}} \mp \epsilon \sqrt{\frac{4}{a_0} \cdot \frac{a_2}{4a_0}}. \quad [65]$$

Чтобы получить критические области, отвечающие  $n = 3$  и  $n = 4$ , следует рассмотреть третье приближение и ур-ие для  $x_3$ . Это ур-ие может быть получено из общего ур-ия [о] тем же способом, как ур-ия [k] и [l] были использованы выше для вычисления первого и второго приближений.

Пользуясь описанным методом, можем установить критические области для ур-ия [59], представляющего свободные колебания электровоза. Эти области как раз те, в которых могут возникать сильные колебания под действием внешних сил см. ур-ие [c] стр. 101)<sup>1)</sup>. Рассмотрение действительных случаев показывает<sup>2)</sup>, что размеры критических областей малы, и что первое приближение, в котором переменная жесткость заменена некоторой средней постоянной жесткостью и в котором критические скорости определяются ур-ием [63], дает хорошее приближение к действительному распределению критических скоростей.

В нашем исследовании были рассмотрены лишь перемещения, зависящие от упругих деформаций системы. В действительных условиях задача колебаний электровоза гораздо сложнее из-за различного рода просветов, которые всегда имеют место в действительной конструкции, и влияние которых на гибкость системы было уже рассмотрено выше. Когда скорость движущегося электровоза достигает критической области, могут возникнуть сильные колебания системы, при которых движущие массы дважды за каждый цикл будут смыкать просветы<sup>3)</sup>. Условия будут тогда аналогичны указанным на фиг. 44 (стр. 75). Такого рода движение сопровождается толчками и весьма вредно при работе. Многие неприятные случаи, особенно на первых порах электровозостроения, следует отнести за счет этих колебаний. Для исключения этого типа колебаний гибкость системы должна быть выбрана так, чтобы действующая скорость электровоза была возможно дальше от критических областей. Опыт показывает, что вредное действие этих колебаний может быть доведено до минимума введением в систему гибких членов, как напр., гибких передач. Этим способом изменяемость гибкости системы будет уменьшена и размер областей критических скоростей сократится. Введение в систему добавочного затухания также может быть полезным, так как оно будет устранять возможность постепенного нарастания амплитуды колебаний<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> См. статью проф. *Мейснера*, упомянутую выше на стр. 96.

<sup>2)</sup> См. статью *Мюллера*, указанную выше на стр. 105.

<sup>3)</sup> Возможность появления этого типа колебаний может быть в значительной мере устранена введением гибкой системы передачи.

<sup>4)</sup> Различные способы введения затухания рассмотрены в книге *Вахерта*, упомянутой выше на стр. 96.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

### СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩИЕ НЕСКОЛЬКО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ.

24. Принцип д'Аламбера и начало возможных перемещений.— В предыдущем рассмотрении колебаний систем, имеющих одну степень свободы, нами часто применялся принцип д'Аламбера (см. п° 1, стр. 8). Тот же принцип можно также применять к системам с несколькими степенями свободы.

Как первый пример рассмотрим движение частицы свободной в пространстве. Для определения положения этой частицы необходимы три координаты. Беря декартовы координаты и обозначая через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  составляющие равнодействующей всех сил, действующих на точку, получим уравнения равновесия точки:

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0. \quad [66]$$

Если точка находится в движении, дифференциальные уравнения движения можно написать таким же порядком, как и уравнения статики, на основании принципа д'Аламбера. Необходимо только добавить к данным внешним силам силу инерции. Составляющие этой силы на направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  равны соответственно  $-mx''$ ,  $-my''$ ,  $-mz''$ , и уравнения движения будут

$$X - mx'' = 0, \quad Y - my'' = 0, \quad Z - mz'' = 0. \quad [67]$$

Если рассматривается система нескольких частиц свободных в пространстве, то уравнения [67] должны быть написаны для каждой точки системы.

Рассмотрим теперь системы, в которых перемещения частиц, составляющих систему, не вполне независимы, а подчинены некоторым *ограничениям*, которые могут быть выражены уравнениями между координатами этих точек<sup>1)</sup>. На фиг. 66 представлены некоторые простейшие примеры таких систем. В случае сферического маятника (фиг. 66а) расстояние частицы  $m$  от начала координат  $O$  должно оставаться постоянным во время движения

<sup>1)</sup> Случай, когда уравнения ограничения заключают не только координаты, но также и скорости частиц и время, здесь не будут рассматриваться. Мы, например, не рассматриваем колебаний маятника, длина которого особым прибором изменяется во время движения, т. е. случай, когда  $l$  — некоторая функция от  $t$ .

и равным длине  $l$  маятника. Поэтому координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  этой точки уже не независимы — они должны удовлетворять ур-ию:

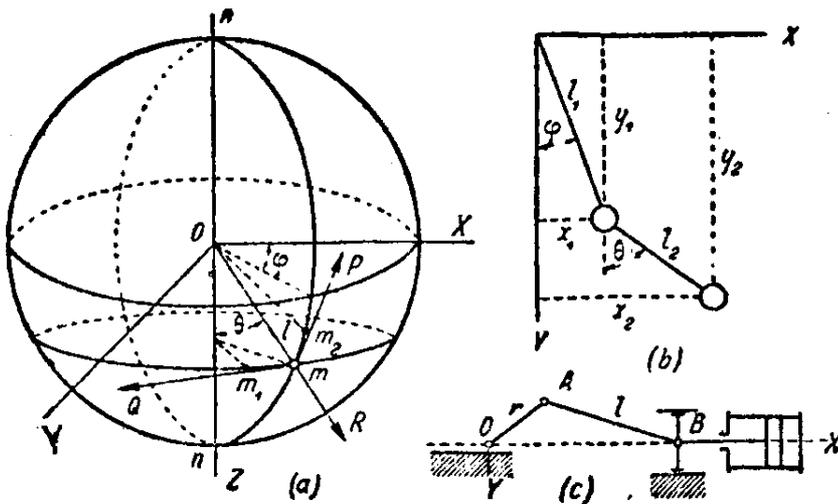
$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad [a]$$

В случае двойного маятника (фиг. 66 *b*) ограничительные условия представляются следующими ур-иями:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2; \quad [b]$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2. \quad [c]$$

В случае системы из шатуна и кривошипа (фиг. 66 *c*) точка  $A$  движется по кругу радиуса  $r$ , а точка  $B$  движется вдоль оси  $X$



Фиг. 66.

Положение системы определяется одной только координатой, т. е. система имеет лишь одну степень свободы.

При рассмотрении условий равновесия таких систем применим *начало возможных перемещений*. Это начало состоит в том, что если система в равновесии, то работа

всех сил на каждом *виртуальном перемещении системы* (малые возможные перемещения, т. е. перемещения, которые могут произойти без нарушения ограничительных условий системы) должна быть равна нулю. Например, в случае сферического маятника, обозначив через  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  составляющие равнодействующей всех сил, действующих на массу  $m$ , получим ур-ие возможных перемещений в виде:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0, \quad [d]$$

где  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  — составляющие виртуального перемещения точки  $m$ , т. е. небольшие изменения координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  точки  $m$ , удовлетворяющие ограничительному условию [a]. Тогда

$$(x + \delta x)^2 + (y + \delta y)^2 + (z + \delta z)^2 = l^2,$$

или, пренебрегая величинами высшего порядка малости,

$$x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0!$$

Это ур-ие показывает, что возможное перемещение перпендикулярно стержню  $l$  маятника, и что любое малое перемещение

частицы  $m$  по поверхности шара можно рассматривать как возможное перемещение. Ур-ие [d] будет удовлетворяться, если равнодействующая всех сил, действующих на  $m$ , нормальна к сферической поверхности, так как только в этом случае работа этих сил на каждом возможном перемещении будет равна нулю.

Теперь, соединяя начало возможных перемещений и принцип д'Аламбера, можем легко получить дифференциальные ур-ия движения системы, имеющей ограничения. Например, в случае сферического маятника, прибавив силу инерции к внешним силам, действующим на частицу  $m$ , получим следующее общее ур-ие движения:

$$(X - mx'') \delta x + (Y - my'') \delta y + (Z - mz'') \delta z = 0, \quad [68]$$

в котором  $\delta x, \delta y, \delta z$  — составляющие возможного перемещения, т. е. малого перемещения, удовлетворяющего условию ограничения [a]. Тем же способом для системы, состоящей из  $n$  частиц  $m_1, m_2, m_3, \dots$  и подверженной действию сил  $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ , получим общее ур-ие движения:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ (X_i - m_i x_i'') \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i \right\} = 0, \quad [69]$$

в котором  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, \dots$  являются составляющими возможного перемещения, т. е. малыми перемещениями, удовлетворяющими ограничительным условиям системы. Например, в случае двойного маятника (фиг. 66 b), возможные перемещения должны удовлетворять условиям (см. ур-ия [b], [c]):

$$\begin{aligned} (x_1 + \delta x_1)^2 + (y_1 + \delta y_1)^2 &= l_1^2, \\ (x_2 + \delta x_2 - x_1 - \delta x_1)^2 + (y_2 + \delta y_2 - y_1 - \delta y_1)^2 &= l_2^2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что  $X_i, Y_i$  и  $Z_i$  обозначают составляющие равнодействующей всех сил, действующих на частицу  $m_i$ , но существуют некоторого рода силы, которые не дают работы на возможных перемещениях, например, реакции шатуна с кривошипом неизменяемой длины, реакции закрепленных цапф, реакции гладких поверхностей или кривых, с которыми движущиеся частицы вынуждены оставаться в соприкосновении. В дальнейшем допущено, что  $X_i, Y_i$  и  $Z_i$  заключают только силы, которые производят работу на возможных перемещениях.

Если нет ограничений и частицы системы совершенно свободны, малые величины  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  в ур-ии [69] вполне независимы, и ур-ие [69] будет удовлетворяться для каждого значения виртуальных перемещений только в том случае, если выполнены для каждой частицы системы ур-ия

$$X_i - m_i x_i'' = 0, \quad Y_i - m_i y_i'' = 0, \quad Z_i - m_i z_i'' = 0.$$

А это есть ур-ия [67], ранее полученные для движения свободной частицы.

Ур-ие [69] — общее уравнение движения системы частиц, из которого можно получить необходимое число уравнений движения, равное числу степеней свободы системы. Получение этих уравнений будет показано в п° 26.

**25. Обобщенные координаты и обобщенные силы.** — В предыдущем п°, где были применены декартовы координаты, было показано, что эти координаты, примененные для выражения положения системы, не являются обычно независимыми. Кроме того они должны удовлетворять некоторым ограничительным ур-иям, например, ур-иям [a], [b] и [c], зависящим от устройства системы. Обычно более удобно выразить положение системы помощью величин, совершенно независимых друг от друга. Не является необходимым, чтобы эти величины имели измерение длины. Они могут иметь другие измерения; например, в некоторых случаях полезно принимать за координаты углы между некоторыми направлениями или величины некоторых объемов. Такие независимые величины, выбранные для выражения положения системы, обыкновенно называются *обобщенными координатами* <sup>1)</sup>.

Возьмем, например, ранее рассмотренный случай сферического маятника (фиг. 66 a). Положение маятника будет вполне определено двумя углами  $\varphi$  и  $\theta$ , показанными на фигуре. Эти два независимых количества могут быть взяты в этом случае за обобщенные координаты. Декартовы координаты точки  $m$  могут легко быть выражены через новые координаты  $\varphi$  и  $\theta$ . Проектируя длину маятника  $Om$  на оси координат, имеем

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= l \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= l \cos \theta. \end{aligned} \quad a]$$

В случае двойного маятника (фиг. 66 b) могут быть использованы как обобщенные координаты углы  $\varphi$  и  $\theta$ , показанные на фигуре, и декартовы координаты будут выражаться в этих новых координатах следующим образом:

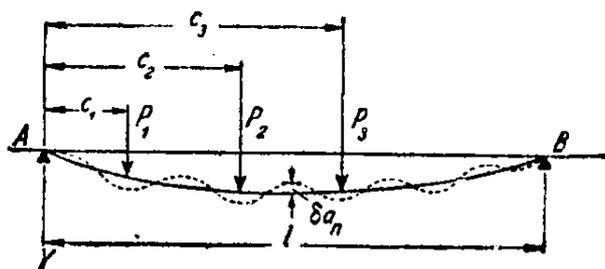
$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \varphi, & y_1 &= l_1 \cos \varphi, \\ x_2 &= l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \theta, & y_2 &= l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad [b]$$

Если твердое тело однородного и изотропного материала подвергается однообразному внешнему давлению  $p$ , то все его измерения будут уменьшаться в той же пропорции, и новая конфигу-

<sup>1)</sup> Термины „обобщенные координаты“, „обобщенные скорости“, „обобщенные силы“ были введены Thomson'ом и Tait'ом, Natural Philosophy, 1 ed., Oxford, 1867.

рация будет полностью определяться изменением  $v$  объема  $V$  тела. Величина  $v$  может быть взята как обобщенная координата для этого случая.

Рассмотрим теперь изгиб балки, опертой на концах (фиг. 67). Чтобы изобразить состояние этой упругой системы, необходимо бесконечное число координат. Упругая линия может быть определена указанием прогиба в каждой точке балки, или мы можем действовать иначе и представить упругую линию в форме тригонометрического ряда:



Фиг. 67.

$$y = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad [c]$$

Упругая линия будет вполне определена, если даны коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Эти количества можно взять за обобщенные координаты в случае изгиба балки, опертой концами.

Если обобщенные координаты применить для изображения состояния системы, то можно получить все независимые типы возможных перемещений системы, придавая каждой из этих координат последовательно небольшие приращения. Дав, например, в случае сферического маятника (фиг. 66 а) небольшое приращение  $\delta\varphi$  углу  $\varphi$ , получим небольшое перемещение  $mm_1 = l \sin\theta \delta\varphi$  по окружности параллели. Прибавление координате  $\theta$  небольшого количества  $\delta\theta$  отвечает малому приращению  $mm_2 = l \delta\theta$  в меридиональном направлении. Любое другое малое перемещение точки  $m$  можно всегда разложить на два составляющие, такие как  $mm_1$  и  $mm_2$ .

В случае изгиба балки, опертой на концах (фиг. 67), малое приращение  $\delta a_n$  любой обобщенной координаты  $a_n$  (см. ур-ие [c]) предполагает возможный прогиб  $\delta a_n \sin(n\pi x/l)$ , представленный на фигуре пунктирной линией и имеющий  $n$  полуволн. Всякое отклонение балки от положения равновесия можно получить наложением друг на друга подобных синусоидальных перемещений.

Пользуясь обобщенными координатами, мы в наших рассуждениях приходим к понятию *обобщенной силы*. Существует известная зависимость между обобщенной координатой и соответственной обобщенной силой, которую мы поясним сперва на простейших примерах. Возвращаясь снова к случаю сферического маятника, положим, что  $P, Q$  и  $R$  (фиг. 66 а) представляют составляющие силы, действующие на частицу в направлениях, каса-

тельных к меридиану и к кругу параллели, и в радиальном направлении, соответственно. Если малое приращение  $\delta\varphi$  дать координате  $\varphi$ , то точка  $m$  получит малое перемещение  $mm_1 = l \sin\theta \delta\varphi$ , и сила, действующая на эту точку, будет давать работу, равную

$$Q \cdot mm_1 = Ql \sin\theta \delta\varphi.$$

Множитель  $Ql \sin\theta$ , на который следует помножить приращение  $\delta\varphi$  обобщенной координаты  $\varphi$ , чтобы получить работу, производимую на перемещении  $\delta\varphi$ , называется *обобщенной силой*, соответствующей координате  $\varphi$ . Таким образом мы получаем полную аналогию с выражением  $X\delta x$  — работы силы  $X$  на перемещении  $\delta x$  в направлении силы. В рассматриваемом случае эта сила имеет простое физическое значение. Она представляет момент сил, действующих на точку  $m$ , около вертикального диаметра  $n-n$ . Таким же порядком можно показать, что обобщенная сила, соответствующая координате  $\theta$  сферического маятника, будет представлять момент сил, действующих на точку  $m$  около диаметра, перпендикулярного плоскости  $mOn$ .

В случае тела, подверженного со всех сторон действию гидростатического давления  $p$ , если принять уменьшение объема  $v$  за обобщенную координату, то соответствующая обобщенная сила будет давление  $p$ , так как величина  $p v$  представляет работу, произведенную внешними силами на „перемещении“  $v$ .

Теперь рассмотрим более сложный случай, именно, балку под действием изгибающих сил  $P_1, P_2, \dots$  (см: фиг. 67). Если принять для упругой линии обобщенное выражение  $[c]$  и рассматривать  $a_1, a_2, a_3, \dots$  как обобщенные координаты, то обобщенная сила, соответствующая одной из этих координат, например  $a_n$ , будет найдена из рассмотрения работы, произведенной всеми силами на перемещении  $\delta a_n$ . Это перемещение показано на фигуре пунктиром.

При исчислении работы, произведенной на этом перемещении, должны быть приняты во внимание не только внешние грузы  $P_1, P_2$  и  $P_3$ , но также внутренние силы упругости балки. Вертикальные перемещения точек приложения грузов  $P_1, P_2, P_3$ , соответствующие приращению  $\delta a_n$  координаты  $a_n$ , будут  $\delta a_n \sin(n\pi c_1/l)$ ,  $\delta a_n \sin(n\pi c_2/l)$  и  $\delta a_n \sin(n\pi c_3/l)$  соответственно. Работа, произведенная силами  $P_1, P_2$  и  $P_3$  на этом перемещении, будет

$$\delta a_n \left( P_1 \sin \frac{n\pi c_1}{l} + P_2 \sin \frac{n\pi c_2}{l} + P_3 \sin \frac{n\pi c_3}{l} \right). \quad [d]$$

Чтобы найти работу, произведенную силами упругости, будем пользоваться выражением для потенциальной энергии изгиба. В

случае изгиба балки постоянного поперечного сечения эта энергия

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad [e]$$

где  $EI$  обозначает жесткость на изгиб балки.

Подставляя в это ур-ие ряд [c] вместо  $y$  и принимая во внимание, что

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0; \quad \int_0^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{l}{2},$$

где  $m$  и  $n$  обозначают различные целые числа, получим

$$V = \frac{EI}{2} \left( \frac{a_1^2 \pi^4}{2l^3} + \frac{a_2^2 2^4 \pi^4}{2l^3} + \dots \right) = \frac{EI \pi^4}{4l^3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^4. \quad [f]$$

Увеличение потенциальной энергии изгиба, вызванное приращением  $\delta a_n$  координаты  $a_n$ , получим из ур-ия [f]:

$$\frac{\partial V}{\partial a_n} \delta a_n = \frac{EI \pi^4}{2l^3} n^4 a_n \delta a_n. \quad [g]$$

Это приращение потенциальной энергии является следствием работы сил упругости. Работа, произведенная этими силами, равна [g], но с обратным знаком. Теперь из ур-ий [d] и [g] обобщенная сила, соответствующая координате  $a_n$  системы, показанной на фиг. 67, будет

$$P_1 \sin \frac{n\pi c_1}{l} + P_2 \sin \frac{n\pi c_2}{l} + P_3 \sin \frac{n\pi c_3}{l} - \frac{EI \pi^4}{2l^3} n^4 a_n. \quad [h]$$

Поступая таким же образом, можно найти обобщенные силы также и в любом ином случае. Обозначив в общем случае через  $q_1, q_2, q_3, \dots$  обобщенные координаты системы, найдем соответствующие обобщенные силы  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  из условий, что  $Q_1 \delta q_1$  представляет работу, произведенную всеми силами на перемещении  $\delta q_1$ ; таким же образом  $Q_2 \delta q_2$  представит работу, произведенную на перемещении  $\delta q_2$ , и т. д.

**26. Уравнения Лагранжа.**— При выводе на основании принципа д'Аламбера общего уравнения [69] было отмечено, что составляющие  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  возможных перемещений не являются независимыми друг от друга и что они должны удовлетворять определенным ограничительным условиям, зависящим от особенностей системы. Большое упрощение при выводе уравнений движения системы можно получить при помощи независимых обобщенных

координат и обобщенных сил. Пусть  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  обобщенные координаты системы с  $n$  степенями свободы, и пусть такие уравнения:

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad y_i = \psi_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \quad z_i = \theta_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad [a]$$

представляют зависимости между декартовыми и обобщенными координатами. Допускаем, что эти уравнения не содержат явно время  $t$  и скорости  $q_1', q_2', \dots, q_n'$ .

Чтобы преобразовать общее ур-ие [69] в этих новых координатах, напишем его в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i) = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \quad [b]$$

и рассмотрим возможное перемещение, соответствующее приращению  $\delta q_i$  только какой-нибудь одной обобщенной координаты  $q_i$ . Тогда непосредственно из определения обобщенной координаты и обобщенной силы (см. н° 25) следует, что правая часть ур-ия [b] представляет работу, произведенную на возможном перемещении, и равна

$$Q_i \delta q_i, \quad [c]$$

где  $Q_i$  представляет обобщенную силу, соответствующую координате  $q_i$ .

Чтобы преобразовать левую часть ур-ия [b] в новых координатах, следует отметить, что в рассматриваемом случае, когда изменяется одна только координата  $q_i$ , изменения координат  $x_i, y_i, z_i$  будут

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_i} \delta q_i; \quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \delta q_i,$$

где символ  $\partial/\partial q_i$  обозначает частную производную по  $q_i$ , а  $x, y, z_i$  определяются ур-ием [a].

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'' \delta x_i + y_i'' \delta y_i + z_i'' \delta z_i) = \\ & = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + y_i'' \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + z_i'' \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \\ & = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \\ & - \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \end{aligned} \quad [d]$$

Это ур-ие можно упростить, пользуясь выражением

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

для кинетической энергии системы.

Вернувшись к ур-иям [a], из которых скорости  $x_i', y_i', z_i'$  могут быть представлены в функциях обобщенных координат  $q_i$  и обобщенных скоростей  $q_i'$ , мы получим следующие выражения для частных производных  $\partial T / \partial q_i'$  и  $\partial T / \partial q_i$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_i'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_i'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_i'} \right), \quad [e]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_i} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_i} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_i} \right). \quad [f]$$

Приняв во внимание, что

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_n} q_n', \quad [g]$$

имеем

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1'} = \frac{\partial x}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial x'}{\partial q_2'} = \frac{\partial x}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial x'}{\partial q_n'} = \frac{\partial x}{\partial q_n}.$$

Теперь ур-ие [e] можно написать так:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \right). \quad [h]$$

Рассматривая ур-ие [d], мы замечаем, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_i} q_1' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_i} q_2' + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_i} q_n',$$

или, пользуясь ур-ием [g],

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i'}{\partial q_i}.$$

Таким же образом мы имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_i} = \frac{\partial y_i'}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_i} = \frac{\partial z_i'}{\partial q_i}.$$

Подставляя это в ур-ие [f], получим:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left( x_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + y_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + z_i' \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_i} \right). \quad [k]$$

Теперь, пользуясь ур-иями  $[h]$  и  $[k]$ , можем написать выражение  $[d]$ , представляющее левую часть ур-ия  $[b]$ , в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Пользуясь для правой части этого же уравнения выражением  $[c]$ , мы окончательно получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad [70]$$

Этот вид дифференциальных ур-ий движения дан Лагранжем<sup>1)</sup>. Такое уравнение можно написать для каждой обобщенной координаты системы, так что в конце концов число уравнений будет равно числу обобщенных координат, т. е. числу степеней свободы системы.

До сих пор обобщенные силы  $Q_1, Q_2, \dots$  не были подвержены никакому ограничению. Они могли быть постоянными силами либо функциями времени, положения или скорости. Рассмотрим теперь частный случай сил, имеющих потенциал, и пусть  $V$  обозначает потенциальную энергию системы. Тогда из того обстоятельства, что работа на возможном перемещении равна уменьшению потенциальной энергии, имеем

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \dots = - \frac{\partial V}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2} \delta q_2 - \frac{\partial V}{\partial q_3} \delta q_3 - \dots,$$

или, приняв во внимание, что малые перемещения  $\delta q_1, \delta q_2, \dots$  независимы, получим

$$Q_1 = - \frac{\partial V}{\partial q_1}; \quad Q_2 = - \frac{\partial V}{\partial q_2}; \quad Q_3 = - \frac{\partial V}{\partial q_3}, \dots,$$

и уравнение Лагранжа [70] получает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad [71]$$

Если на систему действует два рода сил: 1) силы, имеющие потенциал, и 2) прочие силы, для которых мы сохраним прежние обозначения  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ , уравнения Лагранжа получаются такими:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i. \quad [72]$$

<sup>1)</sup> Lagrange, Mécanique Analytique, Paris 1788.

В нашем предыдущем рассмотрении было допущено, что ур-ия [a], представляющие геометрические соотношения между декартовыми и обобщенными координатами, не содержат время  $t$  в явном виде. Пользуясь тем же способом, как выше, можно, однако, показать, что уравнения Лагранжа сохраняют свой вид также в случае, когда ур-ия [a] непрерывно изменяются с временем, будучи такого вида:

$$x_i = \varphi_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n); \quad y_i = \psi_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n); \quad z_i = \theta_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Случай такой системы получим, если, например, допустим, что длина сферического маятника  $l$ , показанного на фиг. 66 a, не остается постоянной, а при помощи какого-либо особого устройства непрерывно меняется с временем.

**27. Сферический маятник.** — Как простейший пример применения ур-ий Лагранжа к решению задач движения, рассмотрим теперь случай сферического маятника (фиг. 66 a). Пользуясь углами  $\varphi$  и  $\theta$ , как обобщенными координатами частицы  $m$ , получим скорость точки  $m$  равной

$$v = \sqrt{(l\theta')^2 + (l\sin\theta\varphi')^2},$$

и кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{m}{2} \left\{ (l\theta')^2 + (l\sin\theta\varphi')^2 \right\}. \quad [a]$$

Допустив, что вес  $mg$  есть единственная сила, действующая на массу, и поступая, как пояснено в п° 25, мы найдем, что обобщенная сила, соответствующая координате  $\varphi$ , равна нулю, и сила, соответствующая координате  $\theta$ , равняется:

$$\Theta = -mgl \sin\theta. \quad [b]$$

Пользуясь выражениями [a] и [b], получим из общего ур-ия [70] следующие два ур-ия движения:

$$\theta'' - \cos\theta \sin\theta \varphi'^2 = -\frac{g \sin\theta}{l}, \quad [c]$$

$$\sin^2\theta \varphi' = \text{const} = h. \quad [d]$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи движения.

Если начальная скорость частицы  $m$  имеет направление касательной к меридиану, путь точки совпадает с этим меридианом, т. е.  $\varphi' = 0$ , и ур-ие [c] приводит к известному ур-ию простого маятника:

$$\theta'' + \frac{g}{l} \sin\theta = 0.$$

Случай конического маятника получим при допущении, что угол  $\theta$  остается постоянным во время движения, тогда  $\dot{\varphi}$  должно быть также постоянным в соответствии с ур-ием [d]. Пусть

$$\theta = \alpha; \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Тогда из ур-ий [c] и [d]

$$\omega^2 = \frac{g}{l \cos \alpha} = \frac{h^2}{\sin^3 \alpha}, \quad [e]$$

из которого можно определить угловую скорость  $\omega$  и постоянную  $h$ , соответствующую данному углу  $\alpha$  конического маятника.

Рассмотрим теперь более сложный случай, где равномерное движение массы  $m$  конического маятника по горизонтальной окружности слегка нарушается таким образом, что имеют место небольшие колебания этой массы относительно горизонтальной окружности. Пусть

$$\theta = \alpha + \xi, \quad [f]$$

где  $\xi$  обозначает весьма малое изменение угла  $\theta$  при этом движении. Удерживая во всех дальнейших выкладках только первую степень весьма малой величины  $\xi$ , получим

$$\sin \theta = \sin \alpha + \xi \cos \alpha; \quad \cos \theta = \cos \alpha - \xi \sin \alpha.$$

Подставив в ур-ие [c] и пользуясь ур-ием [d], имеем

$$\xi'' - \frac{h^2}{\sin^3 \alpha} \left\{ \cos \alpha - \xi \left( \frac{3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha \right) \right\} = -\frac{g}{l} (\sin \alpha + \xi \cos \alpha).$$

Допустив, что постоянная  $\alpha$  выбрана так, что равенство [e] выполнено, получим

$$\xi'' + (1 + 3 \cos^2 \alpha) \omega^2 \xi = 0,$$

из которого можно заключить, что изменение  $\xi$  величины  $\theta$  имеет период

$$\frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}.$$

Когда  $\alpha$  мало, этот период приближается к величине  $\pi/\omega$ , т. е. на каждый оборот конического маятника приходится почти два колебания.

**28. Свободные колебания. Общее решение.**—Если система выведена из своего положения устойчивого равновесия ударом или приложением и внезапным удалением дополнительной силы, то в возмущенном положении силы не будут уже в равновесии,

и возникнут колебания. Мы рассмотрим сперва случай, в котором переменные внешние силы отсутствуют, и имеют место *свободные колебания*. Допустив, что во время колебания система производит только небольшие перемещения, положим, что  $q_1, q_2, q_3 \dots q_n$  будут обобщенные координаты, выбранные таким образом, что они становятся равными нулю, когда система находится в состоянии равновесия. Теперь при допущении, что силы, действующие на части системы, имеют характер сил упругости, их величины будут однородными линейными функциями весьма малых перемещений системы, т. е. линейными функциями координат  $q_1, q_2, \dots q_n$ . Потенциальная энергия системы будет тогда однородной функцией второй степени от тех же координат:

$$2V = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + 2c_{12}q_1q_2 + \dots \quad [73]$$

Выражение для кинетической энергии системы будет:

$$2T = \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

или, подставляя сюда вместо декартовых координат их выражения через обобщенные координаты (см. ур-ие [a] п° 25),

$$2T = a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2 + \dots + 2a_{12}q_1'q_2' + \dots \quad [74]$$

В общем случае коэффициенты  $a_{11}, a_{22}, \dots$  будут функциями координат  $q_1, q_2, \dots$ , но в случае весьма малых перемещений они могут быть рассматриваемы как постоянные и равные их значениям при положении равновесия. Подставляя теперь выражения [73] и [74] в ур-ия Лагранжа, получим общие уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0. \quad [a]$$

Рассмотрим сперва случай системы с двумя только степенями свободы. Тогда

$$2V = c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + 2c_{12}q_1q_2, \quad [b]$$

$$2T = a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2 + 2a_{12}q_1'q_2'. \quad [c]$$

Подставляя в ур-ие [a],

$$\begin{aligned} a_{11}q_1'' + a_{12}q_2'' + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0, \\ a_{22}q_2'' + a_{12}q_1'' + c_{22}q_2 + c_{12}q_1 &= 0. \end{aligned} \quad [d]$$

Решения этих двух линейных ур-ий с постоянными коэффициентами можно взять в следующей форме:

$$q_1 = \lambda_1 \cos(pt + \alpha); \quad q_2 = \lambda_2 \cos(pt + \alpha); \quad [e]$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, p$  и  $\alpha$  обозначают постоянные, которые нужно выбрать так, чтобы удовлетворялись ур-ия [d].

Подставляя [e] в ур-ия [d], получим

$$\begin{aligned}\lambda_1(a_{11}p^2 - c_{11}) + \lambda_2(a_{12}p^2 - c_{12}) &= 0, \\ \lambda_1(a_{12}p^2 - c_{12}) + \lambda_2(a_{22}p^2 - c_{22}) &= 0.\end{aligned}\quad [f]$$

Исключая теперь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получаем

$$(a_{11}p^2 - c_{11})(a_{22}p^2 - c_{22}) - (a_{12}p^2 - c_{12})^2 = 0. \quad [g]$$

Это ур-ие является квадратным относительно  $p^2$ , и можно показать, что оно имеет два действительных положительных корня.

Из условия, что выражения [b] и [c] для потенциальной и кинетической энергии по существу положительны, вытекает, что между коэффициентами, заключающимися в этих выражениях, существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned}c_{11} > 0, & \quad c_{22} > 0, & \quad c_{12}^2 - c_{11}c_{22} < 0, & \quad [h] \\ a_{11} > 0, & \quad a_{22} > 0, & \quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0. & \quad [k]\end{aligned}$$

Подставляя теперь в ур-ие [g]  $p^2 = 0$  или  $p^2 = +\infty$  и пользуясь соотношениями [h] и [k], можно заключить, что левая часть этого ур-ия имеет положительное значение. С другой стороны, при  $p^2 = (c_{11}/a_{11})$  или  $p^2 = (c_{22}/a_{22})$  левая часть ур-ия [g] получается отрицательной. Это значит, что между  $p^2 = 0$  и  $p^2 = +\infty$  кривая, представляющая левую часть ур-ия [g], пересекает ось абсцисс в двух точках, представляющих два положительных корня для  $p^2$ . Пусть  $p_1^2$  один из этих двух корней. Подставляя его в первое из ур-ий [f], имеем

$$\frac{\lambda_1}{a_{12}p_1^2 - c_{12}} = \frac{\lambda_2}{c_{11} - a_{11}p_1^2} = \mu_1.$$

Из этого видно, что для этого частного корня  $p_1^2$  существует определенное соотношение между амплитудами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которое определяет вид колебания, и решение [e] получается таким:

$$q_1 = \mu_1(a_{12}p_1^2 - c_{12}) \cos(p_1 t + \alpha_1); \quad q_2 = \mu_1(c_{11} - a_{11}p_1^2) \cos(p_1 t + \alpha_1).$$

В этом решении следует для  $p_1$  взять только положительное значение, так как решение не меняется, когда  $p_1$  и  $\alpha_1$  меняют знаки. Вторым корнем  $p_2^2$  ур-ия [g] дает подобное же решение с постоянными  $\mu_2$  и  $\alpha_2$ . Соединяя эти два решения, получим общее решение ур-ий [d]:

$$\begin{aligned}q_1 &= \mu_1(a_{12}p_1^2 - c_{12}) \cos(p_1 t + \alpha_1) + \mu_2(a_{12}p_2^2 - c_{12}) \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ q_2 &= \mu_1(c_{11} - a_{11}p_1^2) \cos(p_1 t + \alpha_1) + \mu_2(c_{11} - a_{11}p_2^2) \cos(p_2 t + \alpha_2),\end{aligned}\quad [l]$$

содержащее четыре произвольных постоянных  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые могут быть определены, когда даны начальные значения координат  $q_1$  и  $q_2$  и соответствующих скоростей  $q_1'$  и  $q_2'$ .

Из этого видно, что в случае системы с двумя степенями свободы возможны *два вида колебаний*, соответствующие двум различным корням ур-ия  $[g]$ , называемого *уравнением частоты*. В каждом из этих видов колебаний обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$  являются простыми гармоническими функциями одинакового периода и одинаковой фазы. Каждый из этих видов называется *нормальным или главным видом колебания*. Их период определяется составом системы, а также их *типом*, так как соотношение между амплитудами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  является определенным, и только абсолютная величина амплитуды произвольна. Когда система колеблется одним из нормальных видов колебаний, каждая точка совершает простое гармоническое движение одинакового периода и одинаковой фазы; все части системы проходят одновременно через свои соответственные положения равновесия.

Обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , определяющие положение системы, можно выбрать различными способами; один из этих способов особенно прост для аналитического рассмотрения. Допустим, что координаты выбраны таким образом, что члены, содержащие произведения координат и соответствующих скоростей в выражениях  $[b]$  и  $[c]$  исчезают, тогда

$$\begin{aligned} 2V &= c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2, \\ 2T &= a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2. \end{aligned}$$

Соответствующие ур-ия движения будут

$$a_{11}q_1'' + c_{11}q_1 = 0; \quad a_{22}q_2'' + c_{22}q_2 = 0;$$

мы получаем два независимых дифференциальных ур-ия, так что в каждом нормальном виде колебаний переменной является лишь одна координата. Такие координаты называются *нормальными или главными координатами* системы.

В общем случае системы с  $n$  степенями свободы, при постановке выражений [73] и [74] для потенциальной и кинетической энергий в ур-ия Лагранжа  $[a]$ , мы получим дифференциальные ур-ия движения такого вида:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}q_1'' + a_{12}q_2'' + a_{13}q_3'' + \dots + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + c_{13}q_3 + \dots &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_{n1}q_1'' + a_{n2}q_2'' + a_{n3}q_3'' + \dots + c_{n1}q_1 + c_{n2}q_2 + c_{n3}q_3 + \dots &= 0. \end{aligned} \right\} [m]$$

Эти совместные дифференциальные ур-ия — линейные второго порядка, с постоянными коэффициентами. Частные решения этих ур-ий можно получить, приняв:

$$q_1 = \lambda_1 \cos(pt + \alpha), \dots, \quad q_n = \lambda_n \cos(pt + \alpha).$$

Подставляя в ур-ия  $[m]$ , имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_1(a_{11}p^2 - c_{11}) + \lambda_2(a_{12}p^2 - c_{12}) + \dots + \lambda_n(a_{1n}p^2 - c_{1n}) &= 0, \\ \dots & \\ \lambda_1(a_{n1}p^2 - c_{n1}) + \lambda_2(a_{n2}p^2 - c_{n2}) + \dots + \lambda_n(a_{nn}p^2 - c_{nn}) &= 0. \end{aligned} \quad [n]$$

Поступая как и в случае системы с двумя степенями свободы и исключая  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  из ур-ий  $[n]$ , мы приходим к уравнению частоты

$$\Delta(p^2) = 0, \quad [75]$$

где  $\Delta(p^2)$  следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}p^2 - c_{11}), & (a_{12}p^2 - c_{12}), & \dots, & (a_{1n}p^2 - c_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1}p^2 - c_{n1}), & (a_{n2}p^2 - c_{n2}), & \dots, & (a_{nn}p^2 - c_{nn}) \end{vmatrix}$$

Ур-ие [75] является ур-ием  $n$ -ой степени относительно  $p^2$  и можно показать<sup>1)</sup>, что все  $n$  корней этого ур-ия действительны и положительны, если мы имеем колебание около положения устойчивого равновесия системы. Пусть  $p_s^2$  является одним из этих корней. Подставляя его в ур-ия  $[n]$ , получим  $(n-1)$  отношений

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \dots : \lambda_n$$

и все амплитуды сможем выразить, как функции одной произвольной постоянной, положим  $\mu_s$ . Соответственное решение ур-ий  $[m]$  будут

$$q_1 = \lambda_1 \cos(p_s t + \alpha_s), \quad \dots, \quad q_n = \lambda_n \cos(p_s t + \alpha_s). \quad [o]$$

Оно содержит две произвольных постоянных  $\mu_s$  и  $\alpha_s$  и представляет один из главных видов колебания. Частота этого колебания, зависящая от величины  $p_s$ , и тип колебания, зависящий от отношений  $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots$ , вполне определяются составом системы. Во время этого колебания все частицы системы совершают простые гармонические движения одинакового периода  $2\pi/p_s$  и одинаковой фазы  $\alpha_s$ , проходя одновременно через свои соответственные положения равновесия.

Общее решение ур-ия  $[m]$  получим наложением  $n$  главных видов колебаний, таких как  $[o]$ , отвечающих  $n$  различным корням ур-ия частоты [75]<sup>2)</sup>.

Для пояснений этой общей теории рассмотрим теперь простой пример колебания вертикально натянутой струны  $AB$  с тремя

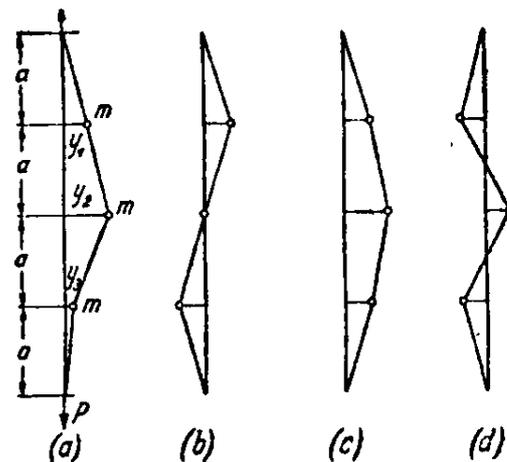
<sup>1)</sup> См., напр., *H. Lamb, Higher Mechanics*, p. 222.

<sup>2)</sup> Относительно частного случая равных корней ур-ия частоты см., напр., *H. Lamb, Higher Mechanics*, p. 222.

равными и равноотстоящими частицами  $m$  (фиг. 68 а). Допустив, что боковые отклонения  $y$  струны во время колебания очень малы, и пренебрегая соответствующими небольшими изменениями в растягивающей силе  $P$ , получим потенциальную энергию растяжения умножением  $P$  на удлинение струны

$$V = Pa \left( \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{(y_2 - y_1)^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{(y_3 - y_2)^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{y_3^2}{a^2} \right) =$$

$$= \frac{P}{a} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_2 y_3).$$



Фиг. 68.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2} (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2)$$

Подставляя в ур-ия Лагранжа [71], получим

$$\left. \begin{aligned} my_1'' + \frac{P}{a} (2y_1 - y_2) &= 0, \\ my_2'' + \frac{P}{a} (2y_2 - y_1 - y_3) &= 0, \\ my_3'' + \frac{P}{a} (2y_3 - y_2) &= 0. \end{aligned} \right\} [r]$$

Положив

$$y_1 = \lambda_1 \cos(pt - \alpha); \quad y_2 = \lambda_2 \cos(pt - \alpha); \quad y_3 = \lambda_3 \cos(pt - \alpha)$$

и подставив в ур-ия [r], получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (p^2 - 2\beta) + \lambda_2 \beta &= 0, \\ \lambda_1 \beta + \lambda_2 (p^2 - 2\beta) + \lambda_3 \beta &= 0, \\ \lambda_2 \beta + \lambda_3 (p^2 - 2\beta) &= 0, \end{aligned} \right\} [s]$$

где  $\beta = \frac{P}{ma}$ .

Найдя определитель ур-ий [s], мы придем к следующему ур-ию частоты:

$$(p^2 - 2\beta)(p^4 - 4p^2\beta + 2\beta^2) = 0. \quad [t]$$

Подставив корень  $p^2 = 2\beta$  этого ур-ия в ур-ия [s], имеем:

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = -\lambda_3;$$

соответствующий тип колебаний представлен на фиг. 68 b: Два

других корня  $p^2 = (2 \pm \sqrt{2})\beta$  того же ур-ия (t), подставленные в ур-ия [s], дают нам

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_2.$$

Соответствующие типы колебаний показаны на фиг. 68 c и d. Положение (c), где все частицы движутся одновременно в том же направлении, представляет низший или основной тип колебания, так как его период наибольший. Тип (d) — наивысший тип колебания, которому соответствует наивысшая частота.

29. Вынужденные колебания. — В тех случаях, когда на систему действуют периодические возмущающие силы, будут иметь место вынужденные колебания. При помощи ур-ий Лагранжа в их общем виде [72] и при подстановке вместо T и V их общих выражений [74] и [73] получаем ур-ия движения:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}q_1'' + a_{12}q_2'' + a_{13}q_3'' + \dots + c_{11}q_1 + c_{21}q_2 + c_{31}q_3 + \dots &= Q_1 \\ \dots & \\ a_{n1}q_1'' + a_{n2}q_2'' + a_{n3}q_3'' + \dots + c_{n1}q_1 + c_{n2}q_2 + c_{n3}q_3 + \dots &= Q_n \end{aligned} \right\} \cdot [a]$$

Теперь разберем наиболее важный случай, где обобщенные силы являются силами гармонического типа, имеющими тот же период и ту же фазу, так что каждая из этих сил может быть представлена в виде  $Q_s = b_s \cos(mt + \beta)$ , при  $m$  и  $\beta$  постоянных для любой отдельной силы.

Частное решение ур-ий [a] можно взять в таком виде:

$$q_1 = \lambda_1 \cos(mt + \beta); \quad q_2 = \lambda_2 \cos(mt + \beta); \quad \dots; \quad q_n = \lambda_n \cos(mt + \beta).$$

Подставляя в ур-ия [a]

$$\left. \begin{aligned} c_{11} - a_{11}m^2 \lambda_1 + (c_{12} - a_{12}m^2) \lambda_2 + \dots + (c_{1n} - a_{1n}m^2) \lambda_n &= b_1 \\ \dots & \\ (c_{n1} - a_{n1}m^2) \lambda_1 + (c_{n2} - a_{n2}m^2) \lambda_2 + \dots + (c_{nn} - a_{nn}m^2) \lambda_n &= b_n \end{aligned} \right\} \cdot [b]$$

Из этих ур-ий можно получить амплитуды  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  колебаний.

Следует отметить, что когда определитель ур-ий [b] приближается к нулю, т. е. когда период возмущающей силы приближается к одному из собственных периодов колебания системы, амплитуды колебания становятся очень большими. Это и есть явление *резонанса*, которое было рассмотрено выше для случая систем с одной степенью свободы.

Если обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  являются *нормальными или главными координатами* системы, выражения для кинетической и потенциальной энергий получаются такими:

$$\begin{aligned} 2T &= a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2 + \dots + a_{nn}q_n'^2, \\ 2V &= c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \dots + c_{nn}q_n^2. \end{aligned}$$

Подставляя в ур-ия Лагранжа [72], получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}q_1'' + c_{11}q_1 &= Q_1, \\ \dots \dots \dots \\ a_{nn}q_n'' + c_{nn}q_n &= Q_n. \end{aligned} \right\} \quad [76]$$

Снова приняв

$$\begin{aligned} Q_s &= b_s \cos(mt + \beta), \\ q_1 &= \lambda_1 \cos(mt + \beta), \\ \dots \dots \dots \\ q_n &= \lambda_n \cos(mt + \beta), \end{aligned}$$

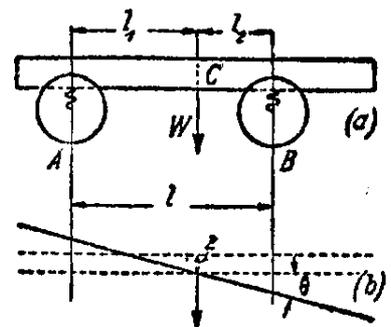
имеем из ур-й [76]

$$\lambda_s = \frac{b_s}{c_{ss} - m^2 a_{ss}} = \frac{b_s}{c_{ss}} \frac{1}{1 - \frac{m^2}{p^2}}.$$

Здесь  $b_s/c_{ss}$  представляет вызываемый силой  $Q_s$  статический прогиб в точке ее приложения, а  $m^2/p^2$  — квадрат отношения между частотой силы и частотой свободного колебания. Подобный результат был ранее получен для систем с одной степенью свободы (см. ур-ие [20]).

В наших предыдущих рассуждениях мы пренебрегали трением. Допустив, что есть небольшое трение и что силы трения пропорциональны обобщенным скоростям, можно показать<sup>1)</sup>, что отношения  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \dots : \lambda_n$  и частоты  $p$  свободных колебаний только немного будут отличаться от значений, которые они имели бы, если бы не было трения, и что главное действие весьма малого трения отражается на амплитудах колебания, причем это действие того же самого рода, как выше показанное для систем с одной степенью свободы. Изложенная общая теория будет теперь применена к решению нескольких частных задач.

**30. Колебания экипажей.**— *Общие уравнения.*— Задача колебания четырехколесного экипажа (автомобиля, вагона), как системы с многими степенями свободы, весьма сложна. На следующих страницах эта задача упрощена, и рассмотрено только продольное качание в одной плоскости<sup>2)</sup> (фиг. 69). В таком случае система имеет только две степени свободы, и ее положение при колебании можно определить двумя координатами: вертикальным перемещением  $z$  центра тяжести  $C$



Фиг. 69.

<sup>1)</sup> См. Lord Rayleigh, Theorie of Sound, Vol. 1.

<sup>2)</sup> Боковые качания экипажа исключаются из последующего рассмотрения.

и углом поворота  $\theta$ , как указано на фиг. 69 *b*. Обе эти координаты будем измерять от положения равновесия.

Пусть  $W$  — наддресорный вес экипажа;  $I = (W/g)i^2$  — момент инерции наддресорной массы около оси, проходящей через центр тяжести  $C$ ;  $i$  — радиус инерции;  $k_1, k_2$  — жесткость рессор осей  $A$  и  $B$  соответственно;  $l_1, l_2$  — расстояния центра тяжести экипажа до тех же осей<sup>1)</sup>.

Тогда кинетическая энергия движения будет

$$T = \frac{1}{2} \frac{W}{g} z'^2 + \frac{1}{2} \frac{W}{g} i^2 \theta'^2. \quad [a]$$

Пусть  $\delta_a, \delta_b$  при определении потенциальной энергии обозначают начальные прогибы рессор осей  $A$  и  $B$  соответственно, тогда

$$\delta_a = \frac{Wl_2}{lk_1}, \quad \delta_b = \frac{Wl_1}{lk_2}. \quad [b]$$

Приращение потенциальной энергии от деформации рессор при движении будет

$$V_1 = \frac{k_1}{2} [(z - l_1\theta) + \delta_a]^2 + \frac{k_2}{2} [(z + l_2\theta) + \delta_b]^2 - \frac{k_1\delta_a^2}{2} - \frac{k_2\delta_b^2}{2},$$

или, пользуясь обозначениями [b], имеем

$$V_1 = \frac{k_1}{2} (z - l_1\theta)^2 + \frac{k_2}{2} (z + l_2\theta)^2 + Wz.$$

Уменьшение потенциальной энергии системы из-за понижения центра тяжести будет

$$V_2 = Wz.$$

Поэтому полное выражение для потенциальной энергии системы при движении получится:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{k_1}{2} (z - l_1\theta)^2 + \frac{k_2}{2} (z + l_2\theta)^2. \quad [c]$$

Подставляя [a] и [c] в ур-ия Лагранжа [71], получим следующие ур-ия свободных колебаний экипажа:

$$\frac{W}{g} z'' = -k_1(z - l_1\theta) - k_2(z + l_2\theta),$$

$$\frac{W}{g} i^2 \theta'' = l_1 k_1 (z - l_1\theta) - l_2 k_2 (z + l_2\theta).$$

<sup>1)</sup> Эти расстояния рассматриваются в дальнейшем изложении как постоянные.

Приняв обозначения:

$$\frac{(k_1 + k_2)g}{W} = a; \quad \frac{(-k_1 l_1 + k_2 l_2)g}{W} = b; \quad \frac{(l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2)g}{W} = c, \quad [d]$$

имеем

$$\begin{aligned} z'' + az + b\theta &= 0, \\ \theta'' + \frac{b}{i^2} z + \frac{c}{i^2} \theta &= 0. \end{aligned} \quad [e]$$

Эти два совместные дифференциальные уравнения показывают что вообще координаты  $z$  и  $\theta$  не являются независимыми друг от друга, и, если, например, для того чтобы вызвать колебания, рама экипажа была перемещена параллельно самой себе в направлении  $z$ -ов и затем внезапно отпущена, то во время последующего колебания будут иметь место не только вертикальное перемещение  $z$ , но также и вращение  $\theta$ . Координаты  $z$  и  $\theta$  становятся независимыми только в случае, когда в уравнениях [e]  $b = 0$ . Это происходит, когда

$$k_1 l_1 = k_2 l_2, \quad [f]$$

т. е. когда жесткости рессор обратно пропорциональны расстояниям рессор от центра тяжести. В таких случаях груз, приложенный к центру тяжести, вызовет только вертикальное перемещение рамы без вращения. Такие условия имеют место в случае железнодорожных вагонов, где обычно  $l_1 = l_2$  и  $k_1 = k_2$ .

Возвращаясь теперь к общему случаю, мы возьмем решение уравнений [e] в следующем виде:

$$z = A \cos(pt + \alpha); \quad \theta = B \cos(pt + \alpha).$$

Подставляя в уравнения [e], получим:

$$\begin{aligned} A(a - p^2) + bB &= 0, \\ \frac{b}{i^2} A + \left(\frac{c}{i^2} - p^2\right) B &= 0. \end{aligned} \quad [g]$$

Исключая  $A$  и  $B$  из уравнений [g], получим следующее уравнение частоты:

$$(a - p^2) \left(\frac{c}{i^2} - p^2\right) - \frac{b^2}{i^2} = 0. \quad [h]$$

Оба корня уравнения [h], рассматриваемого как уравнение для  $p^2$ , будут:

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{i^2} + a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c}{i^2} + a\right)^2 - \frac{ac}{i^2} + \frac{b^2}{i^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c}{i^2} + a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c}{i^2} - a\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}. \end{aligned} \quad [k]$$

Приняв во внимание в соответствии с обозначениями [d], что

$$ac - b^2 = \frac{g^2}{W^2} k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2,$$

можем заключить, что оба корня ур-ия [h] действительны и положительны.

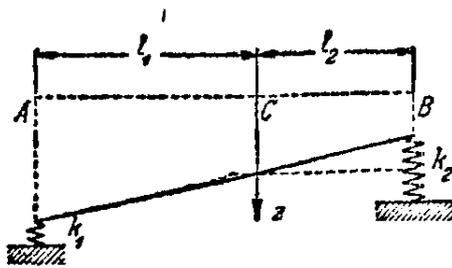
*Главные виды колебания.*—Подставляя [k] в первое из ур-ий [g], получим следующие значения для отношения  $A/B$  между амплитудами:

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{p^2 - a} = \frac{b}{\frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} - a \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}}. \quad [l]$$

Знак (+), как видно из выражения [k], отвечает виду колебания, имеющему высшую частоту, тогда как знак (—) отвечает колебаниям низшей частоты.

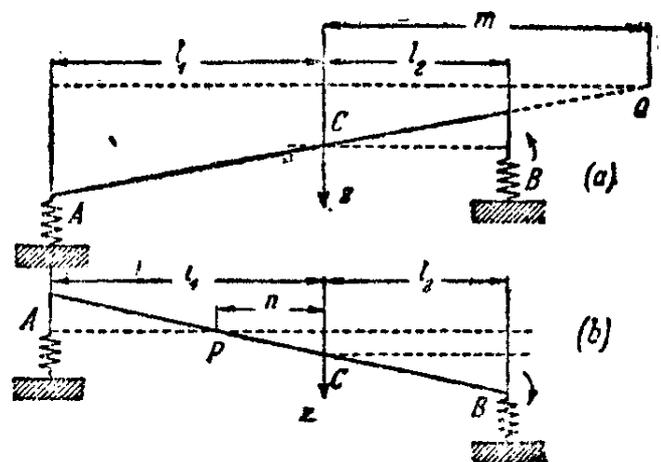
В дальнейшем изложении примем, что

$$b > 0 \text{ или } k_2 l_2 > k_1 l_1.$$



Фиг. 70.

Это значит, что при действии собственного веса экипажа перемещение его будет таким, как показано на фиг. 70; перемещение в направлении вниз связано с вращением в направлении отрицательного угла  $\theta$ . При этом допущении амплитуды  $A$  и  $B$  будут иметь противоположные знаки, если в знаменателе выражения [l] перед корнем был взят отрицательный знак, и они будут иметь одинаковые знаки, если был взят положительный знак. Два соответственных типа колебания показаны на фиг. 71. Тип (a) имеет более низкую частоту и может быть рассматриваем, как вращение вокруг определенной точки  $Q$  вправо от центра тяжести  $C$ . Тип (b), имеющий более высокую частоту, состоит из вращения около определенной точки  $P$  влево от  $C$ . Расстояния  $m$  и  $n$  точек  $Q$  и  $P$  от центра тяжести определяются абсолютной величиной правой части ур-ия [l], и мы получим очень простое соотношение



Фиг. 71.

определяются абсолютной величиной правой части ур-ия [l], и мы получим очень простое соотношение

$$m\pi = \frac{b}{\frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} - a \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}} \times$$

$$\times \frac{b}{\frac{1}{2} \left( \frac{c}{i^2} - a \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{c}{i^2} - a \right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}} = i^2. \quad [m]$$

В частном случае, когда  $b=0$ , т. е. когда  $k_1 l_1 = k_2 l_2$ , расстояние  $n$  получается равным нулю, а  $m$  становится бесконечно большим. Это значит, что в этом случае один из главных видов колебания состоит из вращения вокруг центра тяжести, а другой состоит в поступательном движении без вращения. Вертикальный груз, приложенный к центру тяжести, в этом случае будет вызывать только вертикальное перемещение, а обе рессоры будут испытывать одинаковое сжатие.

Если, кроме  $b$ ,  $[(c/i^2) - a]$  станет равным нулю, то обе частоты, как показывает ур-ие  $[k]$ , получатся равными, и оба типа колебания будут иметь одинаковый период.

*Численный пример.* — Рассмотрим теперь численный пример применения вышеизложенной теории<sup>1)</sup>. Возьмем экипаж со следующими данными:  $W = 437$  кг;  $i^2 = 1,21$  м<sup>2</sup>;  $l_1 = 1,22$  м,  $l_2 = 1,52$  м;  $k_1 = 2293$  кг/м;  $k_2 = 3568$  кг/м. Эти жесткости отвечают статическим прогибам (см. ур-ие  $[b]$ )  $\delta_a = 10,2$  см;  $\delta_b = 5,5$  см. Из ур-ий  $[d]$   $a = 133,3$ ,  $b = 56,9$ ,  $c = 265$ .

Подставив в выражение  $[k]$ , получим следующие два корня  $p_1^2 = 109$ ,  $p_2^2 = 244$ . Соответствующие частоты будут:  $p_1 = 10,5$  радиана в секунду и  $p_2 = 15,6$  радиана в секунду, или соответственно  $N_1 = 100$  и  $N_2 = 150$  полных колебаний в минуту.

Из ур-ия  $[l]$  имеем

$$\frac{A}{B} = -2,35 \text{ м} \quad \text{или} \quad \frac{A}{B} = 0,525 \text{ м}.$$

Это значит, что при колебании низшего вида наддрессорный вес колеблется на 2,35 м на радиан продольного качания, или на 41 мм на градус.

При высшем виде колебаний наддрессорный вес колеблется на 0,525 м на каждый радиан продольного качания, или на 9 мм на градус.

Грубо говоря, при низшем виде колебания экипаж подсаки-

<sup>1)</sup> См. статью H. S. Rowell'я „Proc. Inst. Automobile Engineers“, London, 1923, Vol. XVII, Part II, p. 455.

вает, причем прогибы обеих рессор имеют одинаковый знак и находятся в отношении

$$\frac{\delta_b'}{\delta_a'} = \frac{2,35 - 1,52}{2,35 + 1,22} = 0,23.$$

При высшем виде колебания экипаж преимущественно продольно качается.

Интересно отметить, что удовлетворительное приближение для частот главных видов колебания может быть получено при пользовании теорией системы с одной степенью свободы. Допустим сперва, что рессора в  $B$  (см. фиг. 69) устранена, так что экипаж может прыгать на рессоре  $A$ , вращаясь вокруг оси  $B$  как на шарнире. Тогда ур-ие движения будет:

$$\left(I + \frac{W}{g} l_2^2\right) \theta'' + k_1 l^2 \theta = 0,$$

так что „вынужденная“ частота

$$p_1' = l \sqrt{\frac{k_1}{I + \frac{W}{g} l_2^2}},$$

или, подставляя численные значения предыдущего примера,

$$p_1' = 2,74 \sqrt{\frac{2293}{\frac{437}{9,81} (1,21 + 1,52^2)}} = 10,7.$$

Это согласуется с частотой 10,5, полученной выше для низшего вида колебания экипажа. Таким же способом, рассматривая прыгание экипажа на рессоре  $B$  с вращением около оси  $A$  как на шарнире, получим  $p_2' = 15,0$  сравнительно с  $p_2 = 15,6$ , полученным выше для более быстрого вида колебания.

На основании этого практический способ для получения частот главных видов колебания при испытаниях состоит в том, что закрепляют передние рессоры и заставляют подпрыгивать экипаж, затем закрепляют задние рессоры и снова заставляют подпрыгивать экипаж. Полученные при этих испытаниях частоты будут представлять удовлетворительное приближение.

*Явление биения.* — Возвращаясь теперь к общему решению ур-ий [e] и обозначая через  $p_1$  и  $p_2$  оба корня, получаемые из [k], имеем

$$\begin{aligned} z &= A_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ \theta &= B_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \quad [r]$$

в которых (см. ур-ие [l])

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{b}{p_1^2 - a}; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{p_2^2 - a}. \quad [s]$$

Общее решение [r] включает четыре произвольных постоянных  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые следует определить для каждого частного случая так, чтобы были удовлетворены начальные условия. Допустим, например, что в начальный момент существует перемещение  $\lambda$  в направлении вниз без вращения, и что экипаж затем внезапно отпущен. В таком случае начальные условия таковы:

$$(z)_{t=0} = \lambda; \quad (z')_{t=0} = 0; \quad (\theta)_{t=0} = 0; \quad (\theta')_{t=0} = 0.$$

Эти условия будут удовлетворяться принятием в ур-ях [r]

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \\ A_1 = \lambda \frac{a_1^2 - p_2^2}{p_1^2 - p_2^2}; \quad A_2 = \lambda \frac{p_1^2 - a}{p_1^2 - p_2^2}; \\ B_1 = A_1 \frac{(p_1^2 - a)}{b}; \quad B_2 = A_2 \frac{(p_2^2 - a)}{b}. \end{aligned} \quad [t]$$

Мы видим, что при принятых условиях будут возникать оба вида колебания, которые вначале будут одинаковой фазы, но с течением времени, вследствие разницы в частотах, они будут смещаться одно по отношению к другому, и будет иметь место сложное совместное движение. Если разница частот очень мала, будет иметь место характерное „явление биения“, т. е. колебания с периодически изменяющимися амплитудами. При рассмотрении этого особого случая допустим в ур-ии [k], что

$$\frac{c}{i^2} - a = 0 \quad \text{и} \quad \frac{b}{i} = \delta,$$

где  $\delta$  — весьма малая величина. Тогда

$$p_1^2 = a - \delta; \quad p_2^2 = a + \delta$$

и из [t] получим:

$$A_1 = \frac{\lambda}{2}; \quad A_2 = \frac{\lambda}{2}; \quad B_1 = -\frac{\lambda}{2i}; \quad B_2 = \frac{\lambda}{2i}.$$

Решение [n] получает вид

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \lambda \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t, \\ \theta &= \frac{\lambda}{2i} (-\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \frac{\lambda}{i} \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t. \end{aligned} \quad [u]$$

Вследствие того, что  $p_1 - p_2$  малая величина, функции

$$\cos \{(p_1 + p_2)/2\} t \quad \text{и} \quad \sin \{(p_1 + p_2)/2\} t$$

будут быстро изменяющимися функциями, так что они будут выполнять несколько циклов, прежде чем медленно изменяющиеся функции

$$\sin \{(p_1 - p_2)/2\} t \quad \text{или} \quad \cos \{(p_1 - p_2)/2\} t$$

могут подвергнуться значительному изменению. В результате получатся колебания с периодически изменяющимися амплитудами (см. фиг. 9).

*Вынужденные колебания.* — Возмущающие силы, вызывающие вынужденные колебания экипажа, передаются рессорами. В общем рассуждении выше было показано, что два главных вида колебания есть колебания вокруг двух определенных точек  $P$  и  $Q$  (фиг. 71). Соответственные обобщенные силы в таком случае есть моменты сил рессор вокруг точек  $P$  и  $Q$ . Из этого можно заключить, что любое изменение в силе рессоры, вызываемое любого рода неровностью дороги, будет вызывать одновременно оба типа колебаний, если только эта сила рессоры не проходит через одну из точек  $P$  или  $Q$ . Допустим, напр., что передние колеса при движении экипажа встречают препятствие на дороге; соответствующее сжатие передних рессор вызовет колебания экипажа. Теперь, когда задние колеса достигнут того же препятствия, колеблющемуся экипажу будет дан дополнительный толчок. Колебания, вызванные этим новым толчком, наложатся на предыдущие колебания и результирующее движение будет зависеть от величины  $t$  промежутка времени между двумя толчками, или, обозначая через  $v$  скорость экипажа, от величины  $l/v$ . Легко видеть, что при определенном значении  $v$  действия обоих толчков будут складываться, и мы получим очень неблагоприятные условия для этих *критических скоростей*. Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  обозначают периоды двух главных видов колебания, и допустим, что интервал  $t = (l/v)$  кратен этим периодам, т. е.

$$t = m_1 \tau_1 = m_2 \tau_2,$$

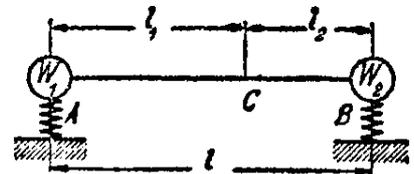
где  $m_1$  и  $m_2$  целые числа. Тогда толчки будут повторяться после целого числа колебаний, и будут иметь место *условия резонанса*<sup>1)</sup>. При таких условиях могут возникнуть большие колебания, если в рессорах нет достаточного трения.

<sup>1)</sup> См. *P. Lemaire*, „La Technique Moderne“, январь 1921 г. См. также статью *H. S. Rowell*'я, упомянутую выше.

Из этого рассуждения ясно, что схема устройства, где толчок, вызванный одной рессорой, не отражается на другой рессоре, может иметь практический интерес. Это условие будет выполнено, когда корпус экипажа можно заменить динамической моделью с двумя массами  $W_1$  и  $W_2$  (фиг. 72), сосредоточенными у рессор  $A$  и  $B$ . В этом случае имеем:

$$W_1 = \frac{Wl_2}{l}; \quad W_2 = \frac{Wl_1}{l};$$

$$W_1 l_1^2 + W_2 l_2^2 = W i^2,$$



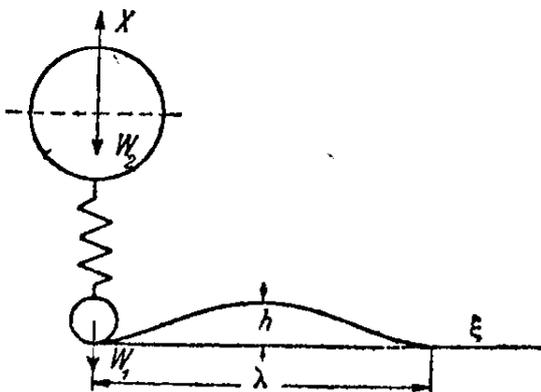
Фиг. 72.

откуда

$$l_1 l_2 = i^2. \quad (77)$$

Сравнивая с ур-ием  $[m]$ , можно заключить, что точки  $P$  и  $Q$  (см. фиг. 71) совпадают в этом случае с точками  $A$  и  $B$ , так что изменения в силах, возникающих в рессорах, будут независимы друг от друга, и условия резонанса будут исключены. Следует отметить, что когда  $l_1 = l_2$ , условие [77] совпадает с правилом, данным проф. Райнером, что радиус инерции наддресорной массы экипажа должен быть равен половине базы экипажа. В большинстве современных автомобилей база больше, чем та, которую дает ур-ие [77]. Это ра. хождение следует приписать условиям управления автомобилем и бокового скольжения, которые требуют увеличения этой базы.

*Давление на дорогу.* — Вследствие динамических причин, давление колеса на путь во время движения будет обычно отличным от такового, которое было бы в статических условиях. Взяв простой случай, изображенный на фиг. 72, можем найти давление



Фиг. 73.

колеса из рассмотрения движения системы, показанной на фиг. 73, в которой  $W_1$  — вес, непосредственно передающийся на путь<sup>1)</sup>,  $W_2$  — вес, передающийся рессорами,  $v$  — постоянная скорость движения колеса вдоль горизонтальной оси,  $x_1, x_2$  — перемещения по направлению вверх грузов  $W_1$  и  $W_2$  от их положений равновесия, показанных на фиг. 73.

Если нет неровностей пути, то во время движения колебаний не будет, и давление на путь будет равно статическому. Допустим теперь, что поверхность дороги

<sup>1)</sup> Пружинным действием шины колеса при этом рассмотрении мы пренебрегаем.

твердая, а продольный профиль ее может быть представлен ур-ием:

$$y = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi\xi}{\lambda} \right),$$

где  $\xi$  измеряется по горизонтальной оси, а  $\lambda$  является длиной волны.

Тогда, при движении с постоянной скоростью  $v$  вдоль этих волн, вертикальные перемещения колеса, рассматриваемого жестким, будут представляться ур-ием:

$$x_1 = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \right). \quad [a]$$

Соответствующее ускорение в вертикальном направлении будет:

$$x_1'' = \frac{h}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda}.$$

Присоединяя силу инерции к весу, получим давление на путь одной только массы, не покоящейся на рессорах:

$$W_1 + \frac{W_1}{g} \frac{h}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2} \cos \frac{2\pi vt}{\lambda}. \quad [b]$$

Наибольшее давление получится, когда колесо займет низшее положение на профиле пути, и оно равно

$$W_1 + \frac{W_1}{g} \frac{h}{2} \frac{4\pi^2 v^2}{\lambda^2}.$$

Очевидно, что динамическое действие, вызванное силами инерции, увеличивается пропорционально квадрату скорости.

Чтобы получить полное давление на путь, должно быть прибавлено к давлению [b], вычисленному выше, давление, вызываемое силой рессоры. Эта сила выразится так:

$$W_2 - k(x_2 - x_1), \quad [c]$$

где второй член представляет изменение в силе действия рессоры вследствие относительного перемещения  $x_2 - x_1$  масс  $W_1$  и  $W_2$ . Это перемещение можно получить из дифференциального ур-ия

$$\frac{W_2}{g} x_2'' + k(x_2 - x_1) = 0, \quad [d]$$

представляющего уравнение движения веса  $W_2$ , несомого рессорами.

Подставляя [a] вместо  $x_1$ , имеем

$$\frac{W_2}{g} x_2'' + kx_2 = \frac{kh}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi vt}{\lambda} \right). \quad [e]$$

Это уравнение представляет колебания надрессорного веса, вызванные волнистым профилем пути. Допустив, что в начале движения  $x_1 = x_2 = 0$  и  $x_1' = x_2' = 0$ , получим решение ур-ия [e] в следующем виде:

$$x_2 = \frac{h}{2} \left( 1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} - \frac{\tau_2^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} \right), \quad [f]$$

где  $\tau_1 = 2\pi \sqrt{(W_2/kg)}$  — период собственных колебаний надрессорного веса,  $\tau_2 = (\lambda/v)$  — время, необходимое для прохода волны длиной  $\lambda$ . Сила, возникающая в рессоре, из ур-ий [a] и [c] получается равной

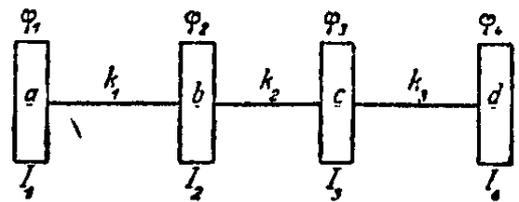
$$W_2 = \frac{kh}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \left( \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} - \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} \right). \quad [g]$$

Теперь из [b] и [g] давление на путь, в дополнение к статическому давлению, равно

$$\frac{W_1}{g} \frac{h}{2} \frac{4\pi^2}{\tau_2^2} \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} - \frac{kh}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \left( \cos \frac{2\pi t}{\tau_1} - \cos \frac{2\pi t}{\tau_2} \right). \quad [h]$$

Значение первого члена увеличивается со скоростью, тогда как второй член становится значительным в условиях резонанса. На этом основании можно заключить, что при хорошей поверхности дороги и большой скорости масса, не покоящаяся на рессорах, является решающей для величины давления на путь, а в случае неровного пути приобретает значение надрессорная масса экипажа.

**31. Колебания кручения валов и систем передачи.** — *Общее решение.* — При предыдущем рассмотрении колебаний кручения (см. п° 2) был рассмотрен простой случай вала с двумя вращающимися массами на концах. Теперь рассмотрим более общий случай колебания вала с несколькими вращающимися массами (см. фиг. 74). К подобной системе могут быть приведены многие задачи крутящих колебаний в электромашиностроении, двигателях Дизеля и гребных валах<sup>1)</sup>. Пусть  $I_1, I_2, I_3, \dots$  — моменты инерции вращающихся масс относительно оси вала,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  — углы вращения этих масс при колебании,  $k_1, k_2, k_3, \dots$  — характеристики



Фиг. 74.

<sup>1)</sup> Библиографию по этому вопросу можно найти в очень подробном исследовании колебаний кручения в двигателях Дизеля, выполненном F. M. Lewis'ом; см. „Trans. Soc. of Naval Architects and Marine Engineers“, Vol. 33, New York 1925. p. 109.

пружинности вала, для участков длиной  $ab$ ,  $bc$  и  $cd$  соответственно. Тогда  $k_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,  $k_2(\varphi_2 - \varphi_3)$ , ... представляют крутящие моменты для тех же участков. Пренебрегая моментом инерции вращающегося вала по сравнению с моментами инерции  $I_1, I_2, \dots$  вращающихся масс, получим кинетическую энергию колеблющейся системы

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1'^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2'^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3'^2 + \dots \quad [a]$$

Потенциальная энергия системы, состоящая в этом случае из энергии кручения, будет

$$V = \frac{1}{2} k_1 (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} k_3 (\varphi_3 - \varphi_4)^2 + \dots \quad [b]$$

Подставляя [a] и [b] в ур-ия Лагранжа [71], получим следующие дифференциальные ур-ия свободного колебания вала:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) - k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) - k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \\ \dots & \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + k_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - k_{n-2} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) &= 0, \\ I_n \ddot{\varphi}_n - k_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [c]$$

Складывая эти уравнения вместе, получим

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + I_2 \ddot{\varphi}_2 + \dots + I_n \ddot{\varphi}_n = 0.$$

Это значит, что момент количества движения системы вокруг оси вала остается постоянным при свободном колебании. В дальнейшем этот момент количества движения будем принимать равным нулю. Таким образом выпадает из рассмотрения любое вращение вала как твердого тела, и рассматривается только колебательное движение, вызываемое скручиванием вала.

Применяя теперь общий метод (см. стр. 125) и подставляя в ур-ия [c]

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos(pt + \alpha), \quad \varphi_2 = \lambda_2 \cos(pt + \alpha), \quad \dots, \quad [c]$$

получим

$$\left. \begin{aligned} I_1 \lambda_1 p^2 - k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) &= 0, \\ I_2 \lambda_2 p^2 + k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) - k_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0, \\ \dots & \\ I_n \lambda_n p^2 + k_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [d]$$

Исключая из этих ур-ий  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , получим уравнение частоты для определения  $p^2$ .

*Случай трех дисков.* — Рассмотрим сперва простейший случай трех вращающихся масс. Система ур-ий [d] при этом получается:

$$\begin{aligned} I_1 \lambda_1 p^2 - k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) &= 0, \\ I_2 \lambda_2 p^2 + k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) - k_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0, \\ I_3 \lambda_3 p^2 + k_2 (\lambda_2 - \lambda_3) &= 0. \end{aligned} \quad [e]$$

Сложив эти ур-ия, имеем

$$I_1 \lambda_1 + I_2 \lambda_2 + I_3 \lambda_3 = 0. \quad [f]$$

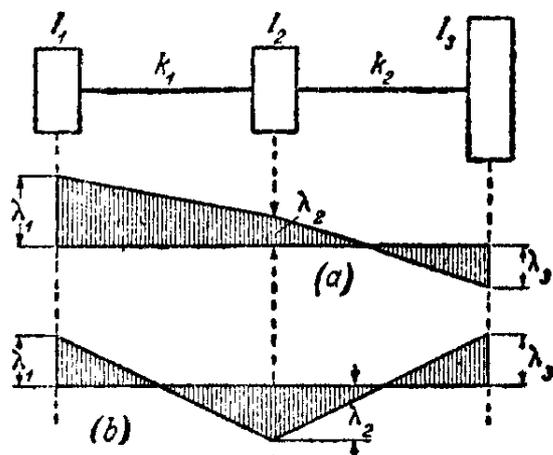
Из первого и третьего ур-ий [e]

$$\lambda_1 = -\frac{k_1 \lambda_2}{I_1 p^2 - k_1}, \quad \lambda_3 = -\frac{k_2 \lambda_2}{I_3 p^2 - k_2}. \quad [g]$$

Подставляя в ур-ие [f], получим следующее ур-ие частоты:

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{k_1 k_2} p^4 - \left( \frac{I_1 I_2 + I_1 I_3}{k_1} + \frac{I_2 I_3 + I_1 I_3}{k_2} \right) p^2 + (I_1 + I_2 + I_3) = 0. \quad [77']$$

Это выражение является квадратным ур-ием для  $p^2$ , и два корня, его  $p_1^2$  и  $p_2^2$ , соответствующие двум главным видам колебания могут быть легко определены. Подставляя  $p_1^2$  и  $p_2^2$  в ур-ия [g], получим значения отношений  $\lambda_1/\lambda_2$  и  $\lambda_2/\lambda_3$  для двух главных видов колебания<sup>1)</sup>, и таким путем могут быть установлены соответственные состояния системы во время колебания. Оба вида колебания представлены на диаграммах фиг. 75. Низший вид колебания, имеющий один узел, показан на фиг. 75 a, а высший вид колебания с двумя узлами — на фиг. 75 b.



Фиг. 75.

*Случай нескольких дисков.* — В общем случае ур-ие частоты получим, приравнявая нулю определитель ур-ий [d] (см. ур-ие [75] стр. 126). Взяв, например, случай четырех вращающихся масс, имеем

$$\begin{vmatrix} I_1 p^2 - k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & I_2 p^2 - k_1 - k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & I_3 p^2 - k_2 - k_3 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & I_4 p^2 - k_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<sup>1)</sup> Ур-ие частоты для случая четырех дисков, см. Hütte, 25 Aufl. 1925, Bd I, S. 409.

Разделив ряды этого определителя на  $I_1, I_2, I_3$  и  $I_4$  соответственно и приняв обозначения:

$$p^2 = x; \quad \frac{k_1}{I_1} = x_1; \quad \frac{k_1 + k_2}{I_2} = x_2; \quad \frac{k_2 + k_3}{I_3} = x_3; \quad \frac{k_3}{I_4} = x_4;$$

$$\frac{k_1}{I_2} = n_{12}; \quad \frac{k_2}{I_2} = n_{22}; \quad \frac{k_2}{I_3} = n_{23}; \quad \frac{k_3}{I_3} = n_{33},$$

получим ур-ие частоты

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_1 & 0 & 0 \\ n_{12} & x - x_2 & n_{22} & 0 \\ 0 & n_{23} & x - x_3 & n_{33} \\ 0 & 0 & x_4 & x - x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Развернув этот определитель обычным способом, получим:

$$(x - x_1) \begin{vmatrix} x - x_2 & n_{22} & 0 \\ n_{23} & x - x_3 & n_{33} \\ 0 & x_4 & x - x_4 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} n_{12} & n_{22} & 0 \\ 0 & x - x_3 & n_{33} \\ 0 & x_4 & x - x_4 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(x - x_1)(x - x_2) \begin{vmatrix} x - x_3 & n_{33} \\ x_4 & x - x_4 \end{vmatrix} -$$

$$- (x - x_1)n_{22} \begin{vmatrix} n_{23} & n_{33} \\ 0 & x - x_4 \end{vmatrix} - x_1 n_{12} \begin{vmatrix} x - x_3 & n_{33} \\ x_4 & x - x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) - (x - x_1)(x - x_2)x_4 n_{33} -$$

$$- (x - x_1)(x - x_4)n_{22}n_{23} - (x - x_3)(x - x_4)x_1 n_{12} + x_1 x_4 n_{12} n_{33} = 0. \quad [h]$$

Приняв во внимание, что

$$x_2 = n_{12} + n_{22}, \quad x_3 = n_{23} + n_{33},$$

получим постоянный член в ур-ии  $[h]$  равным нулю, а потому один из корней получается равным нулю. Этот результат является следствием свободы вращения вала как твердого тела вокруг его оси. Три остающиеся корня ур-ия  $[h]$ , отличные от нуля, дают нам частоты трех главных видов колебания рассматриваемой системы.

*Числовой пример.* — Теперь возьмем для примера следующие числовые данные <sup>1)</sup>:  $I_1 = 347 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$ ;  $I_2 = 100600 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$ ;  $I_3 = 1380 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$ ;  $I_4 = 0,429 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$ ;  $k_1 = 363 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{см}$  на

<sup>1)</sup> Эти числовые данные представляют действительный случай расчета синхронного электрического конденсатора, произведенного I. Ormondroyd'ом, инженером лаборатории Westinghouse Elec. and Manfg. Co., East Pittsburgh, Pa.

радиан;  $k_2 = 131,7 \cdot 10^6$  кг · см на радиан;  $k_3 = 1,25 \cdot 10^6$  кг · см на радиан.

Подставляя эти данные в ур-ие [h] и пользуясь далее новым обозначением  $x = 0,0001 p^2$ , получим

$$x^3 - 407 x^2 + 34492 x - 296230 = 0. \quad [k]$$

Для вычисления корней ур-ий высших степеней, таких как вышеприведенное, очень удобен способ *Хорнера*<sup>1)</sup>. Этот способ представляет простейший путь для вычисления числового значения целой рациональной функции такого вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad [l]$$

для любого данного значения  $k$  аргумента  $x$ . Вместо того, чтобы вычислять значения  $k^n, k^{n-1}, \dots$ , умножать их на  $a_n, a_{n-1}, \dots$  и затем складывать их вместе, применим следующий прием. Помножим  $a_n$  на  $k$  и сложим  $a_n k$  с  $a_{n-1}$ . Пусть  $a_{n-1}'$  обозначает сумму  $a_n k + a_{n-1}$ . Теперь, помножив  $a_{n-1}'$  на  $k$  и сложив с  $a_{n-2}$ , получим сумму  $a_{n-2}' = a_{n-1}' k + a_{n-2}$ . Поступая далее таким же образом, получим  $a_{n-3}' = a_{n-2}' k + a_{n-3}$  и, наконец,  $a_1' = a_2' k + a_1$  и  $a_0' = a_1' k + a_0$ . Все эти вычисления могут быть представлены в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & a_n k & a_{n-1}' k & \dots & a_3' k & a_2' k & a_1' k \\ \hline a_n & a_{n-1}' & a_{n-2}' & \dots & a_2' & a_1' & \underline{a_0'} \end{array} \quad [m]$$

Легко показать, что значение  $a_0'$ , вычисленное этим способом, представляет значение  $f(k)$  функции [l] при  $x = k$ .

Эта же схема вычисления может быть применена также для развертывания  $f(x)$  в ряд Тэйлора следующего вида:

$$f(x) = a_0' + A_1(x - k) + A_2(x - k)^2 + \dots + A_n(x - k)^n,$$

где

$$a_0' = f(k); \quad A_1 = f'(k); \quad A_2 = \frac{f''(k)}{1 \cdot 2}; \quad \dots, \quad A_n = \frac{f^{(n)}(k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}.$$

Например, возьмем:

$$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Чтобы представить эту функцию в форме ряда

$$f(x) = a_0' + A_1(x - k) + A_2(x - k)^2 + A_3(x - k)^3 + A_4(x - k)^4, \quad [n]$$

мы начнем вычисление точно таким же способом, как изложено

<sup>1)</sup> Относительно приближенных методов для вычисления корней алгебраических ур-ий высших степеней см. *v. Sanden, Practical Analysis*.

выше в таблице [m], и придем к значению  $f(k) = a_0'$ , данному в нижеследующей таблице [o]

	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$	
I		$ka_4$	$ka_3'$	$ka_2'$	$ka_1'$	I
	$a_4$	$a_3'$	$a_2'$	$a_1'$	$a_0'$	
II		$ka_4$	$ka_3''$	$ka_2''$		II
	$a_4$	$a_3''$	$a_2''$	$a_1'' = A_1$		
III		$ka_4$	$ka_3'''$			III
	$a_4$	$a_3'''$	$a_2''' = A_2$			
IV		$ka_4$				IV
	$a_4 = A_4$	$a_3'''' = A_3$				

С числами  $a_4, a_3', a_2', \dots, a_0'$  третьей строки этой таблицы мы поступаем точно таким же способом, как с числами  $a_4, a_3, a_2, \dots$  первой строки, только последнее число  $a_0'$  не следует принимать во внимание. Таким способом получим числа под чертой II—II. Последнее из этих чисел, а именно  $a_1''$ , представляет коэффициент  $A_1$  ряда [n]. Поступая таким же способом, мы придем к значениям  $a_2''' = A_2, a_3'''' = A_3$  и  $a_4 = A_4$ . Таким образом все коэффициенты ряда [n] вычислены.

Схема [o] может быть теперь применена для вычисления действительных корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами такого вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad [p]$$

Пусть  $k$  является грубым приближением вычисляемого корня. Тогда, поступая, как изложено в таблице [o], и полагая  $x - k = u$ , получим следующее ур-ие

$$f(x) = A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \dots + A_1 u + a_0' = 0, \quad [q]$$

в котором  $u$  есть разность между действительным значением корня и его первым приближением  $k$ . Допустив теперь, что эта разность мала, и пренебрегая членами высших степеней  $u$  в ур-ии [q], мы получим приближенно

$$u_1 = -\frac{a_0'}{A_1},$$

и второе приближение для корня ур-ия [p] будет

$$x = k + u_1.$$

Чтобы получить следующее приближение, мы поступаем с ур-ием [q] точно так же, как мы поступили с ур-ием [p]. Полагая  $u - u_1 = v$

и снова следуя схеме вычислений, указываемой таблицей [o], получим следующее ур-ие для  $v$

$$B_n v^n + B_{n-1} v^{n-1} + \dots + B_1 v + a_0'' = 0.$$

Дальнейшая поправка:

$$v_1 = -\frac{a_0''}{B_1},$$

и третье приближение для  $x$  равно

$$x = k + u_1 + v_1.$$

Поступая таким образом, можно вычислить корень ур-ия [p] с любой желаемой точностью.

Применяя этот способ к решению численного ур-ия [k] и взяв за первое приближение  $x = 9$ , получим следующую таблицу:

1	— 407	34492	— 296230
	9	— 3582	278190
1	— 398	30910	— 18040
	9	— 3501	
1	— 389	27409	
	9		
1	— 380		

Ур-ие для первой поправки  $u = x - 9$  будет

$$u^3 - 380u^2 + 27409u - 18040 = 0. \quad [r]$$

Взяв за приближенное значение этой поправки

$$u_1 = \frac{18040}{27409} \approx 0,6$$

и поступая с ур-ием [r], как раньше, получим следующую таблицу:

1	— 380	27409	— 18040
	0,6	— 227,6	16309
1	— 379,4	27181	— 1731
	0,6	227	
1	— 378,8	26954	
	0,6		
1	— 378,2		

Ур-ие для второй поправки будет

$$v^3 - 378,8v^2 + 26954v - 1731 = 0,$$

из которого

$$v_1 = \frac{1731}{26954} \approx 0,064.$$

Отсюда корень ур-ия  $[k]$  можно принять равным

$$x_1 = 9 + u_1 + v_1 = 9,664.$$

Два остальных корня этого же ур-ия будут

$$x_2 = 105; \quad x_3 = 292.$$

Соответствующие частоты в секунду будут:

$$\frac{100\sqrt{x_1}}{2\pi} = 49,5; \quad \frac{100\sqrt{x_2}}{2\pi} = 163; \quad \frac{100\sqrt{x_3}}{2\pi} = 272.$$

Интересно отметить, что в числовом примере, приведенном выше, моменты инерции  $I_1$  и  $I_3$  малы по сравнению с  $I_2$ ; кроме того,  $I_4$  мало по сравнению с  $I_3$ . В таком случае хорошее приближение для частот получим, пользуясь простым ур-ием [12] (см. стр. 12), выведенном для случая одного диска. Рассматривая  $I_2$  бесконечно большим и пренебрегая  $I_4$ , мы найдем для крутящего колебания диска  $I_3$  частоту

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{I_3}} = \frac{1000}{2\pi} \sqrt{\frac{131,7}{1380}} = 49,3 \text{ в сек.},$$

которая очень близка к частоте 49,5, найденной выше для основного вида колебаний системы с четырьмя дисками.

Рассматривая тем же способом колебание диска  $I_1$ , когда  $I_2$  принято бесконечно большим, и колебание  $I_4$ , когда  $I_3$  принято бесконечно большим, мы найдем следующие значения для частот:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{I_1}} = \frac{1000}{2\pi} \sqrt{\frac{363}{347}} = 163 \text{ в сек.}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_3}{I_4}} = \frac{1000}{2\pi} \sqrt{\frac{1,25}{0,429}} = 272 \text{ в сек.},$$

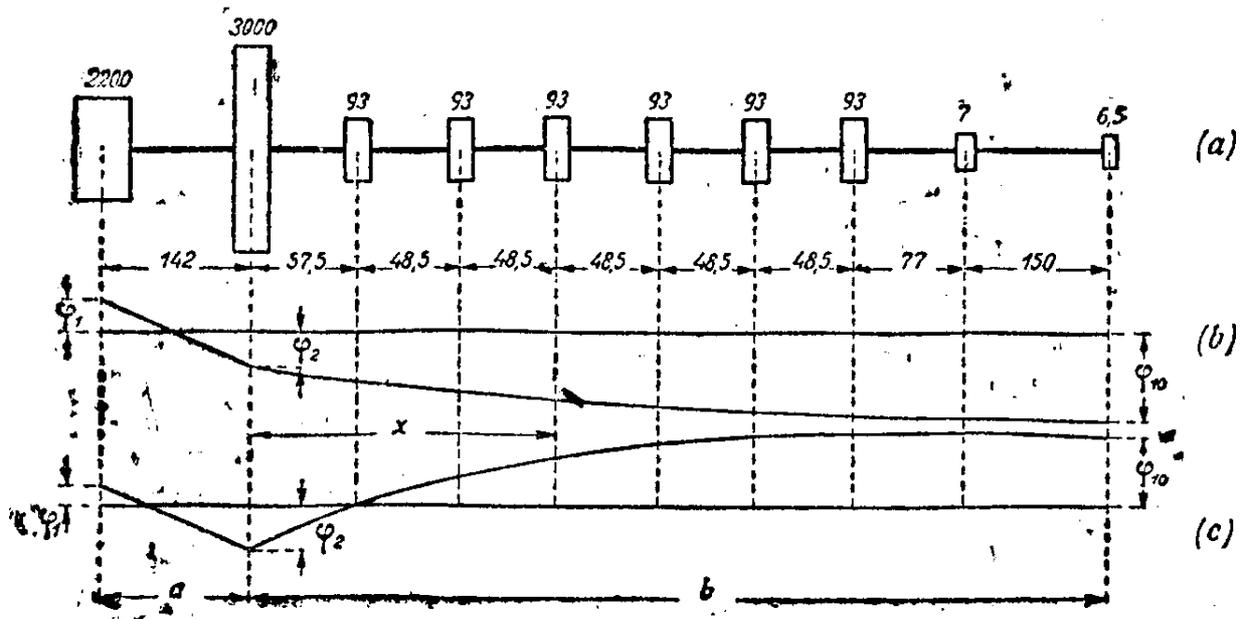
которые совпадают с ранее вычисленными значениями.

Зачастую подобное упрощение задач колебаний является возможным при приближенном вычислении частот. Подобное упрощение особенно выгодно в случаях сложных систем с большим числом вращающихся масс, как это встречается, например, в двигателях Дизеля.

Рассмотрим, например, систему, изображенную на фиг. 76, на которой указаны моменты инерции генератора, маховика, шести

цилиндров и двух воздушных насосов, а также расстояние между этими массами<sup>1)</sup>.

Вал заменен эквивалентным валом постоянного сечения (см. стр. 157 ниже) с жесткостью кручения  $C = 10^{10} \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ . Вследствие того что массы генератора и маховика много больше, чем остальные массы, хорошее приближение для частоты низшего типа колебания можно получить путем замены всех малых масс одной массой, имеющей момент инерции  $I_3 = 93 \times 6 + 7 + 6,5 \approx 572$  и расположенной на расстоянии  $57,5 + 2,5 \times 48,5 \approx 179 \text{ см}$  от ма-



Фиг. 76.

ховика. Приведя, таким образом, данную систему к трем массам, можем легко вычислить частоты из ур-ия [77'] и получим

$$p_1^2 = 49000 \quad \text{и} \quad p_2^2 = 123000.$$

Точное решение для той же задачи дает

$$p_1^2 = 49840 \quad \text{и} \quad p_2^2 = 141000.$$

Из этого видно, что для колебания основного вида получается хорошее приближение. Чтобы получить еще лучшее приближение, можно употребить метод Рейля (см. п° 14).

*Метод Рейля.* — Пусть  $a$  и  $b$  обозначают расстояния маховика от концов вала, и допустим, что формы двух главных видов колебаний будут такие, как показано на фиг. 76  $b$  и  $c$  и что часть  $b$  упругой линии может быть заменена параболой, такой, чтобы угол кручения  $\varphi$  для любого сечения, отстоящего от маховика на расстоянии  $x$ , удовлетворял ур-ию:

$$\varphi = \varphi_2 + \frac{(\varphi_{10} - \varphi_2)(2b - x)x}{b^2}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Этот пример разобран в упомянутой выше на стр. 28 книге Хольцера. За единицы взяты килограмм и сантиметр.

Легко видеть, что для  $x=0$  и  $x=b$  угол  $\varphi$  вышеприведенного ур-ия имеет значения  $\varphi_9$  и  $\varphi_{10}$  соответственно. Из ур-ия [r] и первого из ур-ий [d] имеем:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \left( 1 - \frac{I_1 p^2}{k_1} \right). \quad [s]$$

Углы поворота всех остальных масс могут быть представлены функциями от  $\varphi_1$  и  $\varphi_{10}$  и эти два последние угла можно рассматривать, как обобщенные координаты данной системы.

Тогда потенциальная энергия системы будет:

$$V = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2 C}{2a} + \frac{1}{2} C \int_0^b \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \frac{C}{2} \left\{ \frac{\varphi_1^2 \gamma^2}{a} + \frac{4}{3} \frac{[\varphi_{10} - \varphi_1(1 - \gamma)]^2}{b} \right\}, \quad [t]$$

где

$$\gamma = \frac{I_1 p^2}{k_1}. \quad [u]$$

Кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=10} \frac{I_k \dot{\varphi}_k'^2}{2},$$

или, пользуясь ур-иями [r] и [s] и обозначая через  $x_k$  расстояние от маховика до любой вращающейся массы  $k$  и  $\alpha_k = \frac{(2b - x_k)x_k}{b^2}$ , получим

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1'^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{k=10} I_k [\dot{\varphi}_{10}' \alpha_k + \dot{\varphi}_1' (1 - \gamma)(1 - \alpha_k)]^2. \quad [v]$$

Подставляя выражения [v] и [t] в ур-ия Лагранжа [71] и приняв как раньше

$$\varphi_1 = \lambda_1 \cos(pt + \beta), \quad \varphi_{10} = \lambda_{10} \cos(pt + \beta),$$

получим два следующих ур-ия:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left\{ \gamma - \frac{4}{3} \frac{a}{b} (1 - \gamma) + \frac{\gamma(1 - \gamma)}{I_1} \sum_{k=2}^{k=10} I_k (1 - \alpha_k)^2 \right\} + \\ & + \lambda_{10} \left\{ \frac{4}{3} \frac{a}{b} + \frac{\gamma}{I_1} \sum_{k=2}^{k=10} I_k \alpha_k (1 - \alpha_k) \right\} = 0, \\ & \lambda_1 \left\{ \frac{4}{3} \frac{a}{b} (1 - \gamma) + \frac{\gamma(1 - \gamma)}{I_1} \sum_{k=2}^{k=10} I_k \alpha_k (1 - \alpha_k) \right\} + \\ & + \lambda_{10} \left\{ -\frac{4}{3} \frac{a}{b} + \frac{\gamma}{I_1} \sum_{k=2}^{k=10} I_k \alpha_k^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель этих ур-ий нулю, получим ур-ие частоты, два корня которого дадут нам частоты двух типов колебания, показанных на фиг. 66 *b* и *c*. Все необходимые вычисления даны в таблице 3.

Таблица 3. — К определению частот по методу Рейлея.

$k$	$I_k$	$x_k$	$\frac{x_k}{b}$	$\frac{x_k}{2-b}$	$\alpha_k$	$1-\alpha_k$	$\alpha_k^2$	$I_k \alpha_k^2$	$(1-\alpha_k)^2$	$I_k (1-\alpha_k)^2$	$\alpha_k (1-\alpha_k)$	$I_k \alpha_k (1-\alpha_k)$
1	2200	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	3000	0	0	2	0	1	0	0	1	3000	0	0
3	93	57,5	0,1091	1,8909	0,2062	0,7938	0,0425	186,2	0,6301	133,8	0,1637	121,2
4	93	106	0,2011	1,7989	0,3618	0,6382	0,1309		0,4073		0,2309	
5	93	154,5	0,2932	1,7068	0,5004	0,4996	0,2504		0,2496		0,2500	
6	93	203	0,3852	1,6148	0,6220	0,3780	0,3869		0,1429		0,2351	
7	93	251,5	0,4772	1,5228	0,7268	0,2732	0,5282		0,0746		0,1986	
8	93	300	0,5693	1,4307	0,8145	0,1855	0,6634		0,0344		0,1511	
9	7	377	0,7154	1,2846	0,9190	0,0810	0,8446	5,91	0,0065	0,0744	0,52	
10	6,5	527	1,0000	1,0000	1,0000	0	1,0000	6,50	0	0	0	0

$$\sum_{k=2}^{k=10} I_k \alpha_k^2 = 198,6; \quad \sum_{k=2}^{k=10} I_k (1-\alpha_k)^2 = 3133,8; \quad \sum_{k=2}^{k=10} I_k \alpha_k (1-\alpha_k) = 121,7.$$

Наименьший корень ур-ия частоты будет

$$\gamma = 1,563,$$

и из [u] получим:

$$p^2 = 50000.$$

Ошибка этого приближенного решения по сравнению с вышеприведенным точным решением только  $\frac{1}{6}\%$ .

Второй корень ур-ия частоты дает частоту второго вида колебания с точностью  $4,5\%$ . Следует отметить, что, пользуясь этим приближенным методом, можно легко вычислить воздействие массы вала на частоту<sup>1)</sup>.

В предыдущем были рассмотрены свободные колебания кручения валов и были определены частоты собственных колебаний. Если на вал действуют переменные крутящие моменты, в дополнение к вышерассмотренным свободным колебаниям возникнут вынужденные колебания. Период этих вынужденных колебаний будет равен периоду переменного кручения. Амплитуда вынужденных колебаний будет зависеть не только от величины переменного кручения, но также от его частоты. Если эта частота приближается к одной из собственных частот вала, вычисленных выше, имеет место состояние резонанса, и амплитуда вынужден-

<sup>1)</sup> См. статью автора в „Известиях С.-Петербургского Политехнического Института“, 1905 г.

ных колебаний становится очень большой, если только нет достаточного затухания. В последующем рассмотрим приближенный способ вычисления частот собственных видов колебаний и амплитуды вынужденных колебаний.

*Определение частот способом постепенных приближений.* — Частоты различных видов колебаний кручения можно вычислить из ур-ий [d] также путем постепенных приближений. Для этой цели эти ур-ия следует написать в таком виде:

$$\lambda_2 = \lambda_1 - \frac{I_1 p^2}{k_1} \lambda_1, \quad [w]$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{p^2}{k_2} (I_1 \lambda_1 + I_2 \lambda_2), \quad [y]$$

$$\lambda_4 = \lambda_3 - \frac{p^2}{k_3} (I_1 \lambda_1 + I_2 \lambda_2 + I_3 \lambda_3), \quad [z]$$

.....

Взяв теперь грубое приближение значения  $p^2$  и приняв произвольное значение для  $\lambda_1$ , найдем из ур-ия [w] угловое перемещение первого диска, отвечающее значению  $\lambda_2$ . Тогда из ур-ия [y] найдем  $\lambda_3$ ; из ур-ия [z]  $\lambda_4$  и т. д. Если величина  $p^2$  была выбрана правильно, ур-ие

$$I_1 \lambda_1 p^2 + I_2 \lambda_2 p^2 + \dots + I_n \lambda_n p^2 = 0,$$

представляющее сумму ур-ий [d], будет удовлетворено. В противном случае, углы  $\lambda_2, \lambda_3, \dots$  пришлось бы вычислять снова с новым приближенным значением для  $p^2$  <sup>1)</sup>. Результаты этих вычислений удобно располагать в виде таблиц.

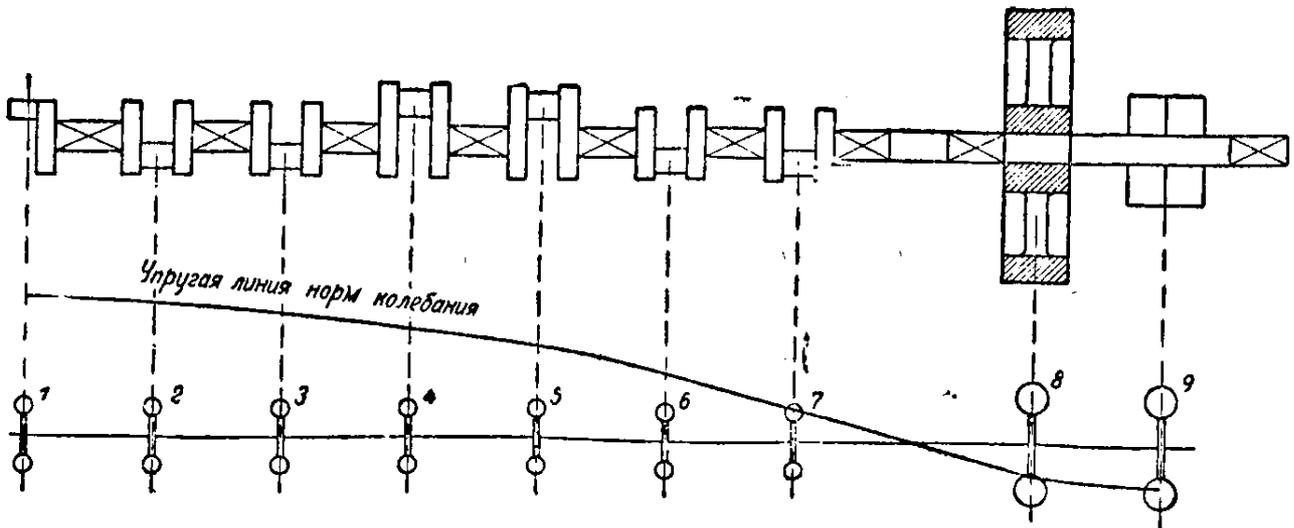
Для примера в нижеприведенных таблицах 4 и 5 даны подсчеты для установки с двигателем Дизеля, показанной на фиг. 77 <sup>2)</sup>.

Первый столбец таблиц даст моменты инерции масс, причем за единицы взяты кг, см, сек. Третий столбец начинается произвольным значением угла вращения первой массы. Этот угол взят равным единице. Четвертый столбец дает моменты сил инерции последовательных масс, а пятый столбец суммарный крутящий момент сил инерции всех масс слева от рассматриваемого поперечного сечения. Разделив крутящий момент на характеристики пружинности, данные в шестом столбце, мы получим углы

<sup>1)</sup> Несколько примеров таких вычислений можно найти в книге *H. Holzer's*, *Die Berechnung der Drehschwingungen*, 1921, Berlin, изд. J. Springer'a. См. также статью упомянутого выше *F. M. Lewis'a* и *Max'a Tolle*, *Regelung der Kraftmaschinen*, 3-Aufl. 1921.

<sup>2)</sup> Эти подсчеты взяты из статьи *F. M. Lewis'a*, упомянутой выше на стр. 139.

скручивания последовательных участков вала. Они даны в седьмом столбце. Последнее число столбца 5 представляет сумму моментов сил инерции всех масс. Эта сумма должна быть равна



Фиг. 77.

нулю в случае свободного колебания. Приняв для таблицы 4  $p = 96,2$ , последнюю величину столбца 5 получили положительной. Для  $p = 96,8$  (таблица 5) соответствующая величина — отрицательна. Это показывает, что точное значение для  $p$  лежит между вышеуказанными двумя значениями и правильные значения в столбцах 3 и 5 будут получены интерполяцией. Пользуясь величинами столбца 3, можно построить упругую линию, представляющую вид колебания, как показано на фиг. 77. Столбец 5 дает со-

Таблица 3. — Вычисления для дизельной установки (фиг. 77) при  $p = 96,2$ ;  $p^2 = 9250$ .

Массы	1	2	3	4	5	6	7
	$J$	$Ip^2$	$\lambda$	$Ip^2 \lambda$	$\Sigma Ip^2 \lambda$	$k$	$\frac{1}{k} \Sigma Ip^2 \lambda$
1	814	$7,42 \times 10^6$	1	$7,42 \times 10^6$	$7,42 \times 10^6$	$2380 \times 10^6$	0,0031
2	4510	$41,7 \times 10^6$	0,9969	$41,6 \times 10^6$	$49,0 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,0585
3	4510	$41,7 \times 10^6$	0,9383	$39,1 \times 10^6$	$88,1 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,1050
4	4510	$41,7 \times 10^6$	0,8333	$34,7 \times 10^6$	$122,8 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,1462
5	4510	$41,7 \times 10^6$	0,6871	$28,7 \times 10^6$	$151,5 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,1803
6	4510	$41,7 \times 10^6$	0,5068	$21,1 \times 10^6$	$172,6 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,2060
7	4510	$41,7 \times 10^6$	0,3008	$12,5 \times 10^6$	$185,1 \times 10^6$	$462 \times 10^6$	0,4010
8	160700	$1487 \times 10^6$	-0,1002	$-149,5 \times 10^6$	$35,6 \times 10^6$	$1534 \times 10^6$	0,0238
9	30400	$281 \times 10^6$	-0,1235	$-34,7 \times 10^6$	$0,9 \times 10^6$	—	—

Таблица 4. — Вычисления для дизельной установки (фиг. 77) при  $p = 96,8$ ;  $p^2 = 9380$ .

Массы	1	2	3	4	5	6	7
	$I$	$I p^2$	$\lambda$	$I p^2 \lambda$	$\Sigma I p^2 \lambda$	$k$	$\frac{1}{k} \Sigma I p^2 \lambda$
1	814	$7,65 \times 10^6$	1	$7,65 \times 10^6$	$7,65 \times 10^6$	$2380 \times 10^6$	0,0032
2	4510	$42,3 \times 10^6$	0,9968	$42,2 \times 10^6$	$49,9 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,0594
3	4510	$42,3 \times 10^6$	0,9374	$39,7 \times 10^6$	$89,6 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,1069
4	4510	$42,3 \times 10^6$	0,8305	$35,2 \times 10^6$	$124,8 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,1487
5	4510	$42,3 \times 10^6$	0,6818	$28,8 \times 10^6$	$153,6 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,1830
6	4510	$42,3 \times 10^6$	0,4988	$21,1 \times 10^6$	$174,7 \times 10^6$	$840 \times 10^6$	0,2080
7	4510	$42,3 \times 10^6$	0,2908	$12,3 \times 10^6$	$187,0 \times 10^6$	$462 \times 10^6$	0,4040
8	167700	$1509 \times 10^6$	-0,1132	$-170,8 \times 10^6$	$16,2 \times 10^6$	$1531 \times 10^6$	0,0106
9	30400	$285 \times 10^6$	-0,1238	$-35,3 \times 10^6$	$-19,1 \times 10^6$	—	—

ответствующие крутящие моменты для каждой части вала, когда амплитуда первой массы равна 1 радиану. Если эта амплитуда имеет какое-либо другое значение  $\lambda_1$ , то амплитуды и крутящие моменты остальных масс могут быть получены умножением величин столбцов 3 и 5 на  $\lambda_1$ .

*Определение вынужденных колебаний* <sup>1)</sup>. — Если нет трения и приложен простой гармонический крутящий момент  $M \sin mt$  к одной из вращающихся масс, то возникнут вынужденные колебания периода  $\tau = (2\pi/m)$ , и колебание каждой массы будет иметь вид  $\lambda \sin mt$ . Амплитуды вынужденных колебаний могут быть определены составлением таблицы, подобной примененной выше в случае свободных колебаний. При допущении, что амплитуда первой массы равна  $x$ , может быть вычислен крутящий момент в каждом участке тем же способом, как раньше. Нужно только прибавить максимум  $M$  внешнего скручивающего момента в точке его приложения к моменту сил инерции вращающихся масс. Последний член столбца 5 будет иметь вид  $ax + b$ , и линейное уравнение для определения  $x$  получим, приравнявая этот член нулю, так как он представляет момент по ту сторону последней массы.

<sup>1)</sup> Приближенный способ определения вынужденных колебаний при затухании был разработан Видлером в книге *Drehschwingungen in Kolbenmaschinenanlagen*, Berlin, 1922. См. также статью упомянутого выше на стр. 139 F. M. Lewis'a и John'a F. Fox'a, *Some Experiences with Torsional Vibration Problems in Diesel Engine Installations*, „Journal Amer. Soc. of Naval Engineers“, 1926.

Когда период внешнего гармонического крутящего момента совпадает с периодом одного из видов собственного колебания системы, имеет место состояние резонанса. Этот вид колебания получается очень значительным, и является необходимым принять во внимание силы затухания, чтобы получить действительное значение амплитуды колебания. Допустив, что сила затухания пропорциональна скорости, и пренебрегая воздействием этой силы на вид колебания, т. е. допустив, что соотношения между амплитудами устойчивого вынужденного колебания вращающихся масс те же, что для соответственного типа свободного колебания, можем вычислить приближенные значения амплитуд вынужденного колебания следующим образом. Пусть  $\varphi_m = \lambda_m \sin pt$  — угол вращения при колебании массы, на которую действует затухание. Тогда момент сопротивления сил затухания будет

$$-\alpha \frac{d\varphi_m}{dt} = -\alpha \lambda_m p \cos pt,$$

где  $\alpha$  есть постоянная, зависящая от условий затухания. Разница фаз между крутящим моментом, который вызывает вынужденное колебание, и перемещением должна быть при резонансе равна  $90^\circ$ . Принимая этот момент в виде  $M \cos pt$  и полагая угол вращения массы, на которую он действует, равным  $\varphi_n = \lambda_n \sin pt$ , найдем амплитуду вынужденного колебания из условия, что при устойчивом состоянии вынужденного колебания работа, производимая гармоническим крутящим моментом за время одного колебания, должна быть равна энергии, поглощенной в точке, где приложено затухание. Таким образом получим

$$\int_0^{2\pi} \alpha \frac{d\varphi_m}{dt} \frac{d\varphi_m}{dt} dt = \int_0^{2\pi} M \cos pt \frac{d\varphi_n}{dt} dt,$$

или, подставляя

$$\varphi_m = \lambda_m \sin pt; \quad \varphi_n = \lambda_n \sin pt,$$

получим

$$\lambda_m = \frac{M}{\alpha p} \frac{\lambda_n}{\lambda_m}, \quad [a']$$

и амплитуда колебания первой массы будет

$$\lambda_1 = \frac{M}{\alpha p} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \frac{\lambda_1}{\lambda_m}. \quad [b']$$

Зная постоянную затухания  $\alpha$  и беря отношения  $\lambda_n/\lambda_m$  и  $\lambda_1/\lambda_m$  из нормальной упругой линии (см. фиг. 77), можем вычислить ампли-

туды вынужденного колебания для случая простого гармонического крутящего момента при затухании, приложенном к определенному сечению вала.

Если на вал действуют несколько простых гармонических скручивающих моментов, то результирующая амплитуда  $\lambda_1$  первой массы может быть получена из ур-ия [b'] применением принципа наложения. Она будет равна

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha p} \frac{\lambda_1}{\lambda_m^2} \Sigma M \lambda_n, \quad [c]$$

где знак суммы обозначает геометрическую сумму, причем каждый крутящий момент взят в соответствующей фазе.

В действительных случаях внешний крутящий момент обычно бывает более сложного характера. Для двигателей Дизеля, например, *вращающее усилие*, производимое отдельным цилиндром, зависит от положения коленчатого вала, от давления газа и от сил инерции. *Диаграмму вращающего усилия* каждого цилиндра можно построить по соответствующей диаграмме давления газа, приняв во внимание силы инерции движущихся взад и вперед масс. При исследовании вынужденных колебаний, эту кривую следует представить тригонометрическим рядом<sup>1)</sup>

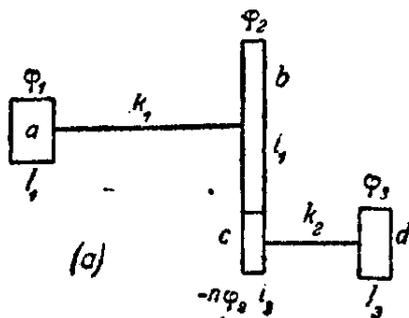
$$f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + \dots, \quad [d']$$

где  $\varphi = 2\pi$  представляет период кривой. Этот период равен одному обороту коленчатого вала при двухтактном двигателе и двум оборотам при четырехтактном двигателе. Условия резонанса наступают, и критическая скорость будет получаться каждый раз, когда частота одного из членов ряда [d'] совпадает с частотой одного из видов собственного колебания вала. Для отдельного цилиндра двухтактного двигателя получим этим способом критические скорости порядка 1, 2, 3, ..., где цифра порядка обозначает число циклов колебания за один оборот коленчатого вала. В случае четырехтактного двигателя мы можем получить критические скорости порядка  $1/2, 1, 1 1/2, \dots$ , т. е. порядка каждого целого и половинного числа. Получится целый ряд таких критических скоростей для каждого вида собственного колебания. Амплитуда вынужденного колебания данного типа, вызванного отдельным цилиндром, может быть вычислена, как было показано выше. Чтобы получить суммарное действие всех цилиндров, необходимо применить принцип наложения, беря вращающее усилие каждого

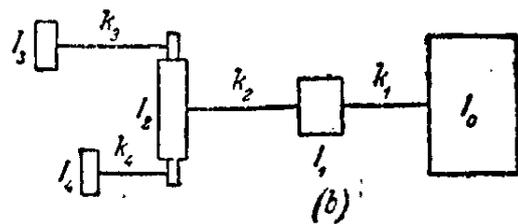
<sup>1)</sup> Примеры такого исследования можно найти в статьях *H. Wydler'a*, указанной на стр. 152, и *F. M. Lewis'a*, упомянутой на стр. 139.

цилиндра в соответствующей фазе. В частных случаях, когда число колебаний за один оборот равно или кратно числу вспышек (наивысшая критическая скорость), разница фаз равна нулю, и колебания, вызываемые отдельными цилиндрами, будут просто складываться вместе. Несколько примеров вычисления амплитуд вынужденного колебания можно найти в упомянутых выше статьях Видлера и Льюиса. В этих статьях приведены также данные о величине затухания в таких частях, как гребной винт, генератор, цилиндры, равно как и данные о потерях, вызываемых внутренним трением<sup>1)</sup>. Применение в частных случаях описанного приближенного способа дает удовлетворительную точность при вычислении амплитуды вынужденного колебания и соответствующих наибольших напряжений.

*Системы зубчатых передач.* — Изложенный выше метод вычислений частот колебаний кручения валов можно применить также к случаю систем зубчатых передач таких, как показаны на



Фиг. 78.



Фиг. 78-а.

фиг. 78 а. Пусть  $I_1, I_3$  — моменты инерции вращающихся масс,  $\varphi_1, \varphi_3$  — соответственные углы их поворота,  $i_1, i_3$  — моменты инерции зубчатых колес,  $n$  — передаточное число,  $\varphi_2$  и  $(-n\varphi_2)$  — углы вращения зубчатых колес,  $k_1, k_2$  — характеристика пружинности валов.

Тогда кинетическая энергия системы будет:

$$T = \frac{I_1(\varphi_1')^2}{2} + \frac{i_1(\varphi_2')^2}{2} + \frac{i_3(n\varphi_2')^2}{2} + \frac{I_3(\varphi_3')^2}{2}. \quad [e']$$

Потенциальная энергия системы:

$$V = \frac{1}{2} k_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_2(\varphi_3 + n\varphi_2)^2. \quad [f]$$

<sup>1)</sup> Библиографию по этому вопросу и некоторые новые данные о внутреннем трении можно найти в книге E. Lehr'a Die Abkürzungsverfahren zur Ermittlung der Schwingungsfestigkeit, Stuttgart, Dissertation, 1925.

Пусть

$$i_1 + n^2 i_3 = I_2; \quad n^2 I_3 = I_4; \quad \varphi_3 = -n \varphi_4; \quad n^2 k_2 = k_3. \quad [g']$$

Ур-ия [a] и [b] получаются

$$T = \frac{I_1(\varphi_1')^2}{2} + \frac{I_2(\varphi_2')^2}{2} + \frac{I_4(\varphi_4')^2}{2},$$

$$V = \frac{1}{2} k_1(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} k_3(\varphi_2 - \varphi_4)^2.$$

Эти выражения имеют ту же форму, что выражения [a] и [b], полученные ранее (стр. 140) для колебания кручения вала. Из этого можно заключить, что дифференциальные ур-ия колебания зубчатой передачи, показанные на фиг. 78 a, будут те же, что и ур-ия вала с дисками, если пользоваться обозначениями [g']. Это заключение можно распространить также на случай зубчатой передачи с более чем двумя валами <sup>1)</sup>.

Другая схема зубчатой передачи показана на фиг. 78 b, где  $I_0, I_1, I_2, I_3$  и  $I_4$  — моменты инерции вращающихся масс, а  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — жесткость валов на кручение. Пусть  $n$  — передаточное число,  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$  углы вращения шкивов  $I_0, I_1, I_2 \dots$ . Если  $I_0$  значительно больше по сравнению с другими моментами инерции, мы можем принять  $\varphi_0 = 0$ , тогда кинетическая и потенциальная энергия системы будут:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \varphi_1'^2 + I_2 \varphi_2'^2 + I_3 \varphi_3'^2 + I_4 \varphi_4'^2),$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ k_1 \varphi_1^2 + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + k_3 (\varphi_3 + n \varphi_2)^2 + k_4 (\varphi_4 + n \varphi_2)^2 \right\},$$

и дифференциальные ур-ия движения Лагранжа получаются:

$$I_1 \varphi_1'' + k_1 \varphi_1 - k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) = 0;$$

$$I_2 \varphi_2'' + k_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + n k_3 (\varphi_3 + n \varphi_2) + n k_4 (\varphi_4 + n \varphi_2) = 0;$$

$$I_3 \varphi_3'' + k_3 (\varphi_3 + n \varphi_2) = 0;$$

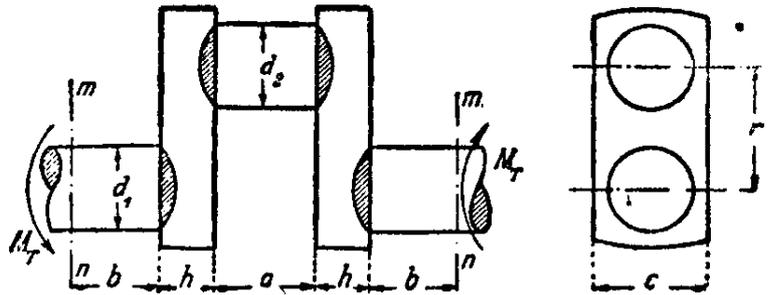
$$I_4 \varphi_4'' + k_4 (\varphi_4 + n \varphi_2) = 0,$$

из которых можно получить ур-ие частоты тем же способом, как раньше. Частоты будут тогда представлены корнями этого последнего ур-ия.

*Колебания кручения коленчатых валов.* — В случае коленчатых валов должна быть рассмотрена сначала задача жесткости на

<sup>1)</sup> Такие системы рассмотрены в статье *T. H. Smith's Nodal Arrangements of Geared Drives*, „Engineering“, 1922, p. 438 и 467.

кручение одного колена (фиг. 79). Эта жесткость зависит от условий ограничения в подшипниках. Допуская, что зазоры в подшипниках таковы, что возможны свободные перемещения поперечных сечений  $m-n$  и  $m-n$  во время кручения, можем легко получить угол скручивания, вызываемый крутящим моментом  $M_T$ . Этот угол состоит из трех частей: а) от скручивания коренных шеек, б) от скручивания шейки кривошипа и с) от изгиба щек вала.



Фиг. 79.

Пусть  $C_1 = \frac{\pi d_1^4 G}{32}$  — жесткость на кручение коренной шейки,  $C_2 = \frac{\pi d_2^4 G}{32}$  — жесткость на кручение шейки кривошипа,  $B = \frac{hc^3 E}{12}$  — жесткость на изгиб щеки.

Чтобы учесть местные деформации щек в частях, заштрихованных на фигуре, из-за скручивания, длины коренных и кривошипной шеек взяты равными  $2b_1 = 2b + 0,9h$  и  $a_1 = a + 0,9h$ , соответственно <sup>1)</sup>. Угол скручивания  $\theta$  кривошипа, вызванный крутящим моментом  $M_T$ , будет тогда

$$\theta = \frac{2b_1 M_T}{C_1} + \frac{a_1 M_T}{C_2} + \frac{2r M_T}{B}.$$

При вычислении колебаний кручения коленчатого вала каждый кривошип может быть заменен эквивалентным валом постоянного поперечного сечения с жесткостью кручения  $C$ . Длину эквивалентного вала найдем из ур-ия

$$\frac{M_T l}{C} = \theta,$$

где  $\theta$  угол скручивания, исчисленный выше.

Таким образом длина эквивалентного вала

$$l = C \left( \frac{2b_1}{C_1} + \frac{a_1}{C_2} + \frac{2r}{B} \right). \quad [78]$$

<sup>1)</sup> Такое допущение вполне согласуется с произведенными опытами; см. статьи Seelmann'a „V. D. I.“, Bd 69, 1925, S. 601 и F. Sass'a „Maschinenbau“, Bd 4, 1925, S. 1223, а также F. M. Lewis'a, упомянутую выше на стр. 139.

Другой крайний случай получим при допущении, что закрепление в подшипниках полное, отвечающее отсутствию зазоров. В этом случае длину  $l$  эквивалентного вала найдем из ур-ия <sup>1)</sup>:

$$l = C \left\{ \frac{2b_1}{C_1} + \frac{a_1}{C_2} \left( 1 - \frac{r}{k} \right) + \frac{2r}{B} \left( 1 - \frac{r}{2k} \right) \right\}, \quad [79]$$

где

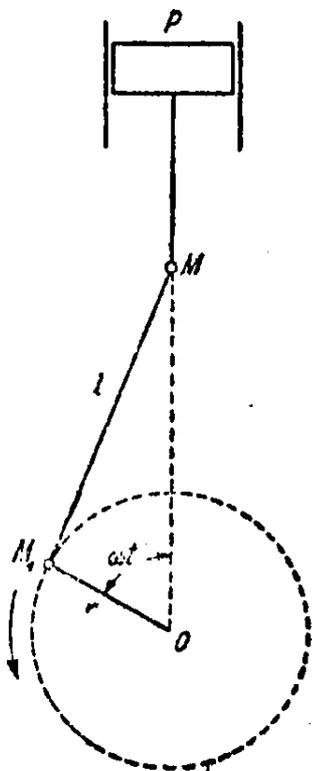
$$k = \frac{\frac{r(a+h)^2}{4C_3} + \frac{ar^2}{2C_2} + \frac{a^3}{24B_1} + \frac{r^3}{3B} + \frac{1,2}{G} \left( \frac{a}{2F} + \frac{r}{F_1} \right)}{\frac{ar}{2C_2} + \frac{r^2}{2B}}; \quad [80]$$

здесь  $C_3 = \frac{c^3 h^3 G}{3,6(c^2 + h^2)}$  — жесткость на кручение щеки как стержня прямоугольного поперечного сечения со сторонами  $h$  и  $c$ ,  $B_1 = \frac{\pi d_2^4 E}{64}$  — жесткость на изгиб шейки кривошипа,  $F, F_1$  — площади поперечных сечений шейки кривошипа и щеки, соответственно.

При  $a_1 = 2b_1$  и  $C_1 = C_2$ , полное закрепление, как это видно из ур-ий [78] и [79], уменьшает длину эквивалентного вала в отношении  $1 : [1 - (r/2k)]$ . В действительных условиях длина эквивалентного вала будет иметь промежуточное значение между этими двумя рассмотренными крайними случаями.

Другой вопрос, который следует разрешить при рассмотрении колебания кручения коленчатых валов, это — определение инерции движущихся масс. Допустим, что масса  $m$  шатуна заменена обычным образом <sup>2)</sup> двумя массами:  $m_1 = (I/l^2)$  в цапфе кривошипа, и  $m_2 = m - (I/l^2)$  в крестковом, где  $I$  обозначает момент инерции шатуна вокруг центра крестков. Все остальные движущиеся массы могут также быть замещены массами, сосредоточенными в этих же двух пунктах, так что окончательно должны быть приняты во внимание (фиг. 80) только две массы  $M$  и  $M_1$ .

Пусть  $\omega$  — постоянная угловая скорость,  $\omega t$  — угол поворота кривошипа, измеряемый от его



Фиг. 80.

<sup>1)</sup> Детальное рассмотрение скручивания коленчатых валов дано автором в „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, Vol. 44, 1922, p. 653; см. также Applied Elasticity.

<sup>2)</sup> См. например Max Tolle, Regelung der Kraftmaschinen, 3 Aufl. 1921, S. 116.

Мертвого положения, как показано на фиг. 80. Тогда скорость массы  $M_1$  равна  $\omega r$ , а скорость массы  $M$ , как указано в п° 12 (стр. 55), равна

$$\omega r \sin \omega t + \frac{r^2 \omega}{2l} \sin 2\omega t.$$

Кинетическая энергия движущихся масс одного кривошипа будет

$$T = \frac{1}{2} M_1 \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \left( \sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right)^2.$$

Среднее значение  $T$  за один оборот будет:

$$T_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d(\omega t) = \frac{1}{2} \left\{ M_1 + \frac{1}{2} M \left( 1 + \frac{r^2}{4l^2} \right) \right\} \omega^2 r^2.$$

Пользуясь этим средним значением, можно заменить инерцию движущихся частей, соединенных с одним кривошипом, инерцией эквивалентного диска, имеющего момент инерции, равный

$$I = \left\{ M_1 + \frac{1}{2} M \left( 1 + \frac{r^2}{4l^2} \right) \right\} r^2.$$

Заменяя все кривошипы валами эквивалентной длины и все движущиеся массы эквивалентными дисками, мы можем свести задачу колебания коленчатых валов к задаче колебания кручения валов, и критические скорости можно вычислить так, как это было показано ранее. Следует отметить, что такой метод исследования колебания следует рассматривать только как грубое приближение. Действительная задача гораздо сложнее, и в простейшем случае только одного кривошипа с маховиком она сводится к задаче колебаний кручения вала с двумя дисками, один из которых имеет переменный момент инерции. Более детальные исследования показывают<sup>1)</sup>, что в такой системе „вынужденные колебания“ возникают не только от давления расширяющихся газов на поршень. Они возникают также вследствие неполного уравновешивания движущихся взад и вперед частей. Практически все явления, связанные с опасными критическими скоростями, будут появляться, если подача горючего прекратится, и двигатель будет работать в холостую с соответственной скоростью.

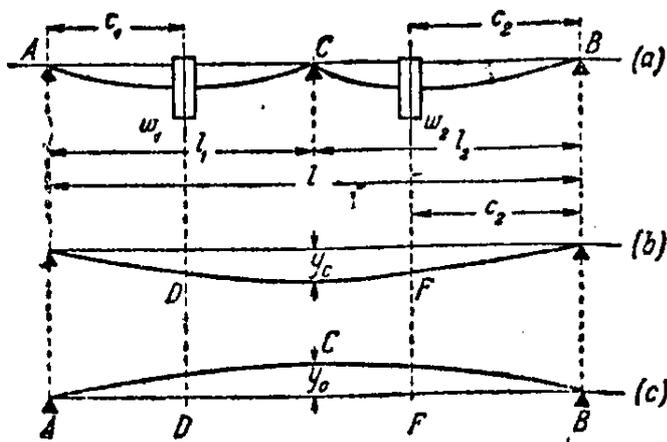
Положения, при которых появляются критические скорости в подобных системах, приблизительно те же, что найденные

<sup>1)</sup> См. статью *G. R. Goldsbrough*, Torsional Vibration in Reciprocating Engine Shafts, „Proc. of the Royal Society“. Vol. 109, 1925, p. 99.

обычным способом, т. е. путем замены движущихся масс эквивалентными дисками.

32. Боковые колебания валов на нескольких опорах. — *Общие замечания.* — В наших предыдущих рассуждениях (n° 15) был рассмотрен простейший случай вала на двух опорах, и тогда было показано, что критическая скорость вращения вала та же, что скорость, при которой число оборотов в секунду равно частоте его свободных боковых колебаний. На практике, однако, встречаются случаи валов на *нескольких* опорах, и теперь мы дадим различные способы, которые могут быть применены для определения частот собственных видов бокового колебания таких валов<sup>1)</sup>.

*Аналитический способ.* — Этот способ можно применить без затруднений в случае вала постоянного поперечного сечения, несущего несколько дисков.



Фиг. 81.

Сначала рассмотрим простейший случай вала на трех опорах, несущего два диска (фиг. 81), вес которых  $w_1$  и  $w_2$ . Статические прогибы вала под этими грузами можно представить выражениями:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2, & [a] \\ y_2 &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2, & [b] \end{aligned}$$

в которых постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  и  $a_{22}$  могут быть опреде-

лены следующим способом. Удалим промежуточную опору  $C$  и рассмотрим прогибы, вызванные одним только грузом  $w_2$  (фиг. 81 *b*); тогда ур-ие упругой линии для левой части вала будет

$$y = \frac{w_2 c_2}{6IEI} (-x^3 + l^2 x - c_2^2 x), \quad [c]$$

и прогиб в точке  $C$

$$y_c = \frac{w_2 c_2}{6IEI} (-l_1^3 + l^2 l_1 - c_2^2 l_1).$$

Теперь определим реакцию  $R_2$  промежуточной опоры  $C$  таким образом, чтобы сделать этот прогиб равным нулю (фиг. 81 *c*). Пользуясь ур-ием [c] для определения прогиба  $y_0$  под действи-

<sup>1)</sup> Это обстоятельство рассмотрено детально *A. Stodola, Dampf- und Gastmaschinen*, 6 Aufl., Berlin, 1924.

ем силы  $R_2$  и приравнивая этот прогиб прогибу  $y_c$ , полученному выше, имеем:

$$\frac{\omega_2 c_2}{6IEI} (-l_1^3 + l^2 l_1 - c_2^2 l_1) = \frac{R_2 l_2}{6IEI} (-l_1^3 + l^2 l_1 - l_2^2 l_1),$$

откуда

$$R_2 = \frac{\omega_2 c_2 (l^2 - l_1^2 - c_2^2)}{2l_1 l_2^2}.$$

Тем же способом можно определить реакцию  $R_1$ , вызванную грузом  $\omega_1$ , и получим полную реакцию  $R = R_1 + R_2$  средней опоры. Теперь, пользуясь ур-ием [c], прогиб  $y_1$ , вызванный грузами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и реакцией  $R$ , можем представить выражением [a], где

$$a_{11} = \frac{1}{12l_1^2 EI} \{4l_1^2 (l - c_1)^2 c_1^2 - c_1 (-c_1^3 + l^2 c_1 - l_2^2 c_1) (l^2 - l_2^2 - c_1^2)\}, \quad [d]$$

$$a_{12} = \frac{1}{12l_1 l_2 EI} \{2l_1 l_2 c_1 c_2 (l^2 - c_1^2 - c_2^2) - c_2 c_1 (l^2 - l_2^2 - c_1^2) (l^2 - l_1^2 - c_2^2)\}.$$

Сделав взаимную замену  $l_2$  и  $l_1$  и  $c_2$  и  $c_1$  в вышеприведенных ур-иях, получим постоянные  $a_{21}$  и  $a_{22}$  ур-ия [b], и из этого можно заключить, что  $a_{12} = a_{21}$ , т. е. груз, помещенный в  $D$  (фиг. 81 c), вызовет в  $F$  такой же прогиб, как груз той же величины, помещенный в  $F$ , вызовет в  $D$ . Такой результат и следовало ожидать на основании *теоремы взаимности*.

Рассмотрим теперь колебания грузов  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в плоскости фигуры около их положения равновесия, найденного ранее. Пусть  $y_1$  и  $y_2$  теперь обозначают переменные перемещения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  от их положения равновесия при колебании. Тогда, пренебрегая массой вала, получим кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{\omega_1}{2g} (y_1')^2 + \frac{\omega_2}{2g} (y_2')^2. \quad [e]$$

Для определения возрастания потенциальной энергии системы вследствие перемещения из положения равновесия применим выражения [a] и [b] для статических прогибов. Положив для простоты  $a_{11} = a$ ,  $a_{12} = a_{21} = b$ ,  $a_{22} = c^1$ , получим из вышеприведенных ур-ий [a] и [b] следующие силы, необходимые для того чтобы вызвать прогибы  $y_1$  и  $y_2$ :

$$P_1 = \frac{c y_1 - b y_2}{a c - b^2}; \quad P_2 = \frac{a y_2 - b y_1}{a c - b^2};$$

<sup>1)</sup> Постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$  можно определить в любом частном случае, пользуясь выражениями [d].

и потенциальная энергия системы будет равна<sup>1)</sup>:

$$V = \frac{P_1 y_1}{2} + \frac{P_2 y_2}{2} = \frac{1}{2(ac - b^2)} (c y_1^2 - 2b y_1 y_2 + a y_2^2). \quad [f]$$

Подставляя [e] и [f] в ур-ия Лагранжа [71], мы получим следующие дифференциальные ур-ия для свободного бокового колебания вала:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{g} y_1'' + \frac{c}{ac - b^2} y_1 - \frac{b}{ac - b^2} y_2 &= 0, \\ \frac{\omega_2}{g} y_2'' - \frac{b}{ac - b^2} y_1 + \frac{a}{ac - b^2} y_2 &= 0. \end{aligned} \quad [g]$$

Допустив, что вал совершает один из видов собственных колебаний, и подставляя в ур-ия [g]

$$y_1 = \lambda_1 \cos(pt - \alpha); \quad y_2 = \lambda_2 \cos(pt - \alpha),$$

получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( \frac{c}{ac - b^2} - \frac{\omega_1}{g} p^2 \right) - \frac{b}{ac - b^2} \lambda_2 &= 0, \\ -\frac{b}{ac - b^2} \lambda_1 + \lambda_2 \left( \frac{a}{ac - b^2} - \frac{\omega_2}{g} p^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad [h]$$

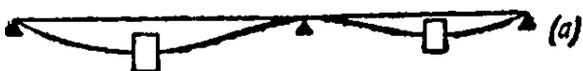
Приравняв определитель этих ур-ий нулю, получим следующее ур-ие частоты:

$$\left( \frac{c}{ac - b^2} - \frac{\omega_1}{g} p^2 \right) \left( \frac{a}{ac - b^2} - \frac{\omega_2}{g} p^2 \right) - \frac{b^2}{(ac - b^2)^2} = 0, \quad [k]$$

откуда

$$p^2 = \frac{g}{2(ac - b^2)} \left\{ \frac{c}{\omega_1} + \frac{a}{\omega_2} \pm \sqrt{\left( \frac{c}{\omega_1} + \frac{a}{\omega_2} \right)^2 - \frac{4(ac - b^2)}{\omega_1 \omega_2}} \right\}. \quad [81]$$

Таким образом получаются два положительных корня для  $p^2$ , отвечающих двум главным видам колебания вала. Подставляя



Фиг. 82.

эти два корня в одно из ур-ий [h], получим два различных значения отношения  $\lambda_1/\lambda_2$ . Для большего значения  $p^2$  отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  получается положительным, т. е. оба шкива во время колебания движутся одновременно в одинаковых направлениях, и вид колебания таков, как изображен на фиг. 82a. Если меньший ко-

1) Вследствие того, что грузы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  всегда уравниваются начальными напряжениями изгиба, вызванными статическим прогибом вала, выражение для потенциальной энергии будет содержать только члены, зависящие от изменения изгиба вала (см. стр. 57 — 58).

рень  $p^2$  подставить в ур-ие [h], отношение  $\lambda_1/\lambda_2$  получается отрицательным, и соответствующий вид колебания будет таким, как показано на фиг. 82b. Возьмем, например, частный случай, когда (см. фиг. 81)  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ;  $l_1 = l_2 = l/2$  и  $c_1 = c_2 = l/4$ . Подставив в выражения [d] и пользуясь условиями симметрии, получим:

$$a = c = \frac{23}{48 \cdot 256} \frac{l^3}{EI} \quad \text{и} \quad b = -\frac{9}{48 \cdot 256} \frac{l^3}{EI}$$

Подставляя в ур-ие [81], имеем:

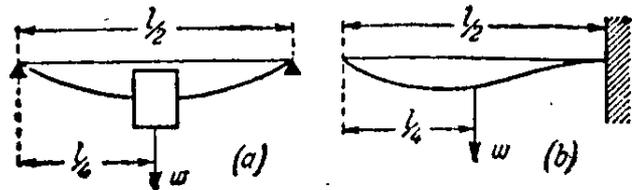
$$p_1^2 = \frac{g}{(a-b)\omega} = \frac{g48EI}{\omega(l/2)^3}; \quad p_2^2 = \frac{g768EI}{7\omega(l/2)^3}$$

Эти две частоты можно также легко вывести, подставляя в ур-ие [5] (см. стр. 8) статические прогибы:

$$\delta_{st}' = \frac{\omega(l/2)^3}{48EI}$$

и

$$\delta_{st}'' = \frac{7\omega(l/2)^3}{768EI}$$



Фиг. 83.

для случаев, изображенных на фиг. 83.

Другой способ решения задачи боковых колебаний вала состоит в применении принципа д'Аламбера. При применении этого принципа ур-ия колебания будут того же вида, как ур-ия статики. Необходимо только к силам, действующим на вал, присоединить силы инерции. Обозначая, как выше, через  $y_1$  и  $y_2$  прогибы вала от его положения равновесия под грузами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, получим силы инерции:  $-(\omega_1/g)y_1''$  и  $-(\omega_2/g)y_2''$ . Эти силы инерции должны находиться в равновесии с силами упругости, возникшими из-за добавочного прогиба, и можно написать два ур-ия, эквивалентные ур-иям [a] и [b], нижеследующим образом:

$$y_1 = -a \frac{\omega_1}{g} y_1'' - b \frac{\omega_2}{g} y_2'',$$

$$y_2 = -b \frac{\omega_1}{g} y_1'' - c \frac{\omega_2}{g} y_2''.$$

[L]

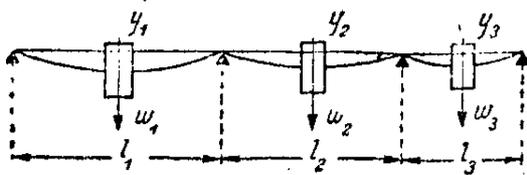
Положив, как выше,

$$y_1 = \lambda_1 \cos(pt - \alpha); \quad y_2 = \lambda_2 \cos(pt - \alpha),$$

и подставив в ур-ия [l], получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( 1 - \frac{a\omega_1}{g} p^2 \right) - \lambda_2 b \frac{\omega_2}{g} p^2 &= 0, \\ -\lambda_1 b \frac{\omega_1}{g} p^2 + \lambda_2 \left( 1 - \frac{c\omega_2}{g} p^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad [m]$$

Приравняв определитель этих двух ур-ий нулю, получим ур-ие частоты [k], которое мы нашли раньше.



Фиг. 84.

Рассмотренные выше способы определения частоты боковых колебаний можно применить также и в случаях, где число дисков или число пролетов больше чем два. Возьмем, например, случай, показанный на фиг. 84. Пользуясь спо-

собом, подобным примененному в предыдущем примере, можем представить статические прогибы вала под дисками в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + a_{13}\omega_3, \\ y_2 &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + a_{23}\omega_3, \\ y_3 &= a_{31}\omega_1 + a_{32}\omega_2 + a_{33}\omega_3, \end{aligned} \quad [n]$$

где  $a_{11}, a_{12}, \dots$  постоянные, зависящие от расстояний между опорами, от расстояний дисков от опор и от жесткости на изгиб вала. Из *теоремы взаимности* можно заключить непосредственно, что  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{13} = a_{31}$  и  $a_{23} = a_{32}$ . Применяя теперь принцип д'Аламбера и обозначая через  $y_1, y_2$  и  $y_3$  перемещения дисков во время колебания от положения равновесия, выведем из ур-ий статики [n] следующие ур-ия колебания:

$$\begin{aligned} y_1 &= -a_{11} \frac{\omega_1}{g} y_1'' - a_{12} \frac{\omega_2}{g} y_2'' - a_{13} \frac{\omega_3}{g} y_3'', \\ y_2 &= -a_{21} \frac{\omega_1}{g} y_1'' - a_{22} \frac{\omega_2}{g} y_2'' - a_{23} \frac{\omega_3}{g} y_3'', \\ y_3 &= -a_{31} \frac{\omega_1}{g} y_1'' - a_{32} \frac{\omega_2}{g} y_2'' - a_{33} \frac{\omega_3}{g} y_3'', \end{aligned}$$

откуда ур-ие частоты, третьей степени для  $p^2$ , может быть получено обычным порядком. Три корня этого ур-ия дадут частоты трех главных видов колебания рассматриваемой системы<sup>1)</sup>.

Следует отметить, что ур-ие частоты для боковых колебаний

<sup>1)</sup> Графический способ решения ур-ий частоты дан С. R. Söderberg'ом „Phil. Mag.“, Vol. 5, 1928, p. 47.

валов может быть использовано также для определения *критических скоростей* вращения. Критическая скорость вращения есть скорость, при которой центробежные силы вращающихся масс достаточно велики, чтобы удерживать вал в изогнутом состоянии (см. п° 15). Возьмем снова случай двух дисков (фиг. 81а) и допустим, что  $y_1$  и  $y_2$  прогибы, вызванные центробежными силами<sup>1)</sup>  $(\omega_1/g)\omega^2 y_1$  и  $(\omega_2/g)\omega^2 y_2$  вращающихся дисков. Такие прогибы могут существовать, если только центробежные силы удовлетворяют следующим условиям равновесия (см. ур-ия [а] и [б]):

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} \frac{\omega_1}{g} \omega^2 y_1 + a_{12} \frac{\omega_2}{g} \omega^2 y_2, \\ y_2 &= a_{21} \frac{\omega_1}{g} \omega^2 y_1 + a_{22} \frac{\omega_2}{g} \omega^2 y_2. \end{aligned} \quad [o]$$

Эти ур-ия могут дать для  $y_1$  и  $y_2$  решения, отличные от нуля, только в случае, когда их определитель равен нулю. Отметив, что ур-ия [о] однородны с ур-иями [m], приведенными выше, и приравнявая их определитель нулю, получим для определения критических скоростей вращения ур-ие, подобное ур-ию [к].

*Графический способ.* — В случае валов переменного поперечного сечения и валов, имеющих несколько дисков, описанный выше аналитический способ определения критических скоростей получается очень сложным, и следует прибегнуть к графическим способам. Рассмотрим в качестве простейшего примера вал, опертый на концах (фиг. 37). Допустим некоторый *первоначальный прогиб* вращающегося вала, удовлетворяющий условиям опор, где  $y_1, y_2, \dots$  прогибы под дисками  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Если  $\omega$  угловая скорость, то соответствующие центробежные силы будут  $(\omega_1/g)\omega^2 y_1, (\omega_2/g)\omega^2 y_2, \dots$ . Рассматривая эти силы статически приложенными к валу, можем получить графически, как было изложено в п° 15, соответствующую упругую линию. Если наше допущение относительно формы начальной упругой линии было правильным, прогибы  $y_1', y_2', \dots$ , полученные графически, должны быть пропорциональны прогибам  $y_1, y_2, \dots$ , начально принятым, и критическая скорость будет найдена из ур-ия

$$\omega_{кр} = \omega \sqrt{\frac{y_1}{y_1'}}. \quad [82]$$

Это можно пояснить следующим образом.

Взяв  $\omega_{кр}$ , как она дается ур-ием [82], вместо  $\omega$  в выше рассмотренном определении центробежных сил, получим все эти

<sup>1)</sup> Влияние веса вала на критические скорости будет рассмотрено далее.

силы возросшими в отношении  $y_1/y_1'$ ; графически полученные прогибы теперь также возрастут в той же пропорции, и упругая линия, полученная графически, совпадет теперь с *начально принятой* упругой линией. Это значит, что при скорости, определяемой ур-ием [82], центробежные силы достаточны, чтобы удерживать вращающийся вал в изогнутом состоянии. Такая скорость называется *критической скоростью* (см. п° 29).

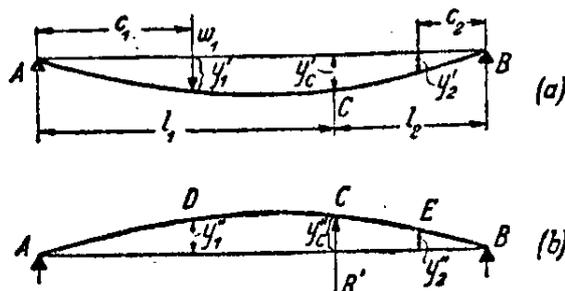
В предыдущем изложении было допущено, что упругая линия, полученная графически, имела прогибы, пропорциональные таковым первоначально взятой упругой линии. Если в форме этих двух кривых получится значительная разница и желательно более близкое приближение для  $\omega_{кр}$ , описанное выше построение следует повторить, приняв упругую линию, полученную графически, за начальную<sup>1)</sup>.

Рассмотрим теперь случай вала на трех опорах, имеющего по одному диску в каждом пролете (фиг. 81). При решении этой задачи мы можем поступить точно так же, как выше при аналитическом решении, а сперва установить зависимости

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2, & [a'] \\ y_2 &= a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 & [b'] \end{aligned}$$

между действующими силами и получающимися прогибами.

Чтобы получить величины постоянных  $a_{11}, a_{12}, \dots$  графически, мы сперва допустим, что действует только груз  $\omega_1$  и что средней опоры нет (фиг. 85a); тогда прогибы  $y_1', y_2'$  и  $y_c'$  можно легко получить, пользуясь графическим способом, описанным выше (см. стр. 64). Теперь, пользуясь тем же способом, нужно построить упругую линию, получающуюся от вертикальной силы  $R'$ , приложенной в  $C$  и действующей в направлении снизу вверх, и измерить прогибы  $y_1'', y_c''$  и  $y_2''$  (фиг. 85b). Приняв во внимание, что прогиб опоры  $C$  должен быть равен нулю, найдем реакцию  $R$  этой опоры из ур-ия<sup>2)</sup>



Фиг. 85.

$$R = R' \frac{y_c'}{y_c''}, \quad [p]$$

<sup>1)</sup> При рассмотрении метода Рейлея было отмечено (см. п° 13), что значительная ошибка в форме принятой упругой линии оказывает только небольшое влияние на величину  $\omega_{кр}$ , если только условия на концах удовлетворены.

<sup>2)</sup> В этом выражении берутся абсолютные значения прогибов.

а действительные прогибы точек  $D$  и  $E$ , вызванные грузом  $w_1$ , будут:

$$\begin{aligned} y_{11} &= y_1' - y_1'' \frac{y_c'}{y_c''}, \\ y_{21} &= y_2' - y_2'' \frac{y_c'}{y_c''}. \end{aligned} \quad [q]$$

Сравнивая эти ур-ия с ур-иями  $[a']$  и  $[b']$ , получим:

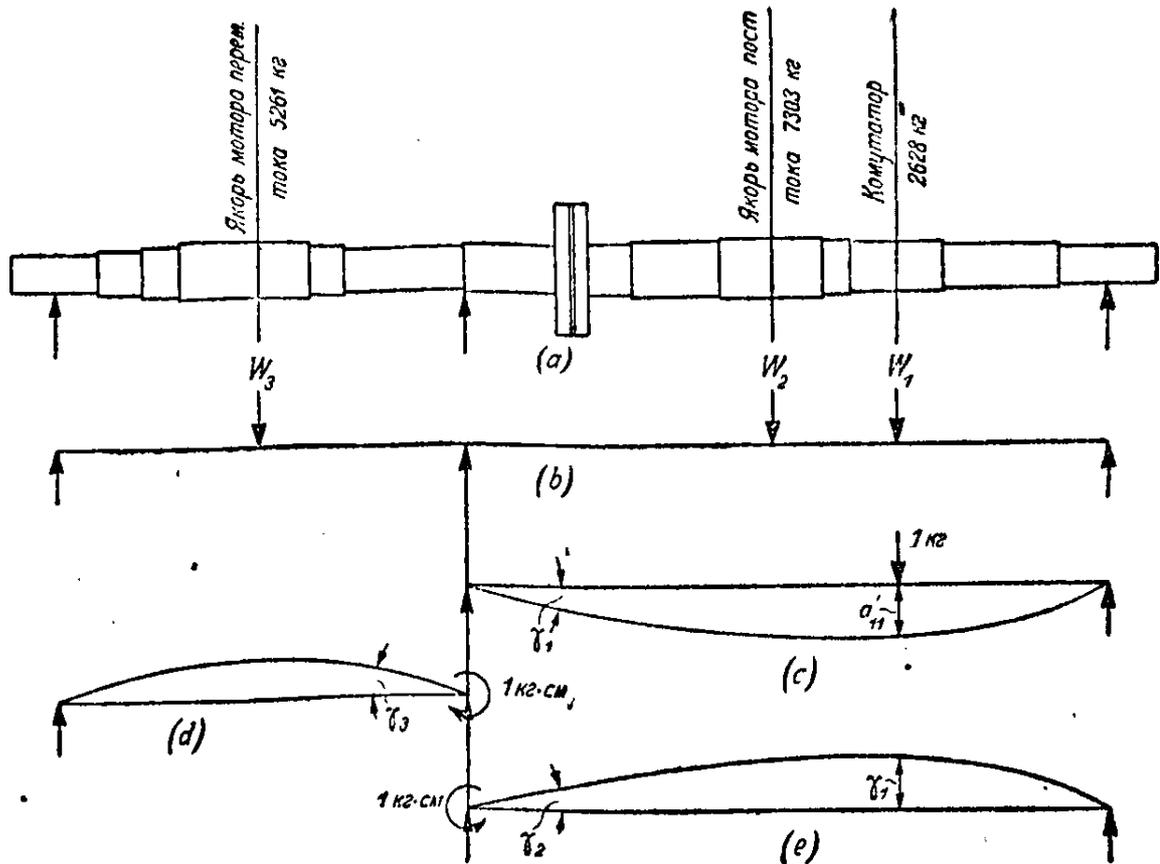
$$\begin{aligned} a_{11} w_1 &= y_1' - y_1'' \frac{y_c'}{y_c''}, \\ a_{21} w_1 &= y_2' - y_2'' \frac{y_c'}{y_c''}, \end{aligned}$$

откуда можно определить постоянные  $a_{11}$  и  $a_{21}$ . Тем же способом, рассматривая  $w_2$ , можем найти постоянные  $a_{12}$  и  $a_{22}$ . Все постоянные ур-ий  $[a']$  и  $[b']$  таким образом определены; пользуясь формулой [81], можем теперь определить две критические скорости вала при  $a = a_{11}$ ;  $b = a_{12} = a_{21}$ ;  $c = a_{22}$ .

В предыдущих выкладках реакция  $R$  средней опоры принималась за статически неопределимую величину. В случае нескольких опор проще принимать за статически неопределимые изгибающие моменты промежуточных опор. Для пояснения этого способа расчета, рассмотрим силовую установку, состоящую из мотора переменного тока и генератора постоянного тока, поддерживаемых тремя подшипниками<sup>1)</sup>. Размеры вала переменного поперечного сечения даны на фиг. 86 а. Допустим, что массы якоря мотора переменного тока, якоря постоянного тока, а также коммутатора постоянного тока сосредоточены в их центрах тяжести (фиг. 86 б). Чтобы учесть массу вала, одну половину массы левого пролета вала прибавим к массе мотора переменного тока, а половину массы правого пролета вала примем равномерно распределенной между якорем генератора постоянного тока и коммутатором постоянного тока. Таким образом, задача сводится к задаче трех степеней свободы, и прогибы  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  масс  $W_1$ ,  $W_2$  и  $W_3$  во время колебания могут быть взяты за координаты. Статические прогибы под действием грузов  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  можно представить ур-иями  $[n]$  и постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ... этих ур-ий определим теперь, взяв изгибающий момент промежуточной опоры за статически неопределимую величину. Чтобы

<sup>1)</sup> Эти числовые данные представляют действительный случай расчета, выполненного *J. P. Den Hartog*'ом, инженером-исследователем *Westinghouse Electric and Manufacturing Company*, East Pittsburgh Pennsylvania.

получить  $a_{11}$ , допустим, что вал разрезан на две части над промежуточной опорой и что в правом пролете в том поперечном сечении, где приложен груз  $W_1$  (фиг. 86 *c*), приложен груз в 1 кг. Пользуясь графическим способом, изложенным в п° 15, получим прогиб под грузом  $a'_{11} = 13,7 \times 10^{-6}$  см и угол наклона касательной над левой опорой в радианах  $\gamma_1 = 13,1 \times 10^{-8}$  радиана. Приложив теперь изгибающий момент, равный 1 кг·см, к промежуточной опоре и пользуясь тем же графическим способом, полу-



Фиг. 86.

чим в радианах углы наклонов  $\gamma_2 = 3,67 \times 10^{-9}$  (фиг. 86 *d* и *e*) и  $\gamma_3 = 3,04 \times 10^{-9}$  (фиг. 86 *d*). Из *теоремы взаимности* следует, что прогиб в точке  $W_1$  для этого случая численно равен углу наклона  $\gamma_1$  в случае, показанном на фиг. 86 *c*. Сравнивая эти результаты, можно теперь заключить, что изгибающий момент над промежуточной опорой, вызванный грузом, равным 1 кг, приложенным в точке  $W_1$ , равен

$$M = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_3} \text{ кг} \cdot \text{см},$$

и что прогиб под этим грузом будет

$$a_{11} = a'_{11} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} = 111 \times 10^{-7} \text{ см}.$$

Поступая таким же образом с остальными постоянными ур-ий [n], получим следующие числовые значения в см:

$$a_{22} = 109 \times 10^{-7}; \quad a_{33} = 42 \times 10^{-7}; \quad a_{12} = a_{21} = 101 \times 10^{-7}; \\ a_{13} = a_{31} = -20 \times 10^{-7}; \quad a_{23} = a_{32} = -26 \times 10^{-7}.$$

Теперь, подставив в ур-ия [n] центробежные силы  $W_1 \omega^2 y_1/g$ ;  $W_2 \omega^2 y_2/g$  и  $W_3 \omega^2 y_3/g$  вместо грузов  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ , найдем следующие ур-ия:

$$\left(1 - a_{11} \frac{W_1 \omega^2}{g}\right) y_1 - a_{12} \frac{W_2 \omega^2}{g} y_2 - a_{13} \frac{W_3 \omega^2}{g} y_3 = 0, \\ -a_{21} \frac{W_1 \omega^2}{g} y_1 + \left(1 - a_{22} \frac{W_2 \omega^2}{g}\right) y_2 - a_{23} \frac{W_3 \omega^2}{g} y_3 = 0, \\ -a_{31} \frac{W_1 \omega^2}{g} y_1 - a_{32} \frac{W_2 \omega^2}{g} y_2 + \left(1 - a_{33} \frac{W_3 \omega^2}{g}\right) y_3 = 0.$$

Если определитель этой системы ур-ий приравнять нулю, а выше найденные величины взять за постоянные  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ..., то получим следующее ур-ие частоты для определения критических скоростей:

$$(\omega^2 10^{-7})^3 - 3,76 (\omega^2 10^{-7})^2 + 1,93 (\omega^2 10^{-7}) - 0,175 = 0,$$

откуда три критических скорости, выраженные в числе оборотов в минуту, будут:

$$n_1 = \frac{\omega_1 60}{2\pi} = 1070; \quad n_2 = \frac{\omega_2 60}{2\pi} = 2240; \quad n_3 = \frac{\omega_3 60}{2\pi} = 5620.$$

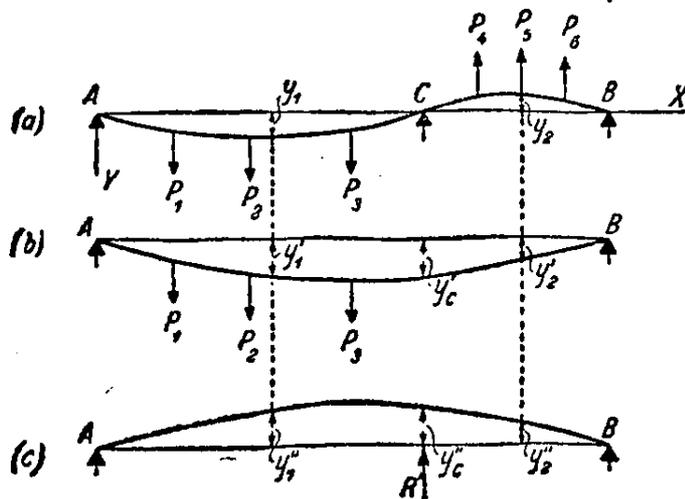
Кроме вышеописанного способа, к настоящему случаю двух пролетов можно также применить прямой способ графического решения, ранее изложенный для однопролетного вала. В этом случае следует взять начальную упругую линию, удовлетворяющую условиям на опорах (фиг. 82 а и б), и принять некоторую угловую скорость  $\omega$ . Центробежные силы, действующие на вал, будут тогда равны:

$$\frac{w_1}{g} \omega^2 y_1 \quad \text{и} \quad \frac{w_2}{g} \omega^2 y_2.$$

Пользуясь графическим способом, можно построить упругую линию, вызванную этими двумя силами, и если начальная упругая линия была выбрана правильно, то построенная упругая линия будет геометрически подобна начальной линии, и критическая скорость будет получаться из ур-ия, подобного ур-ию [82]. Если получится значительная разница в форме этих двух кривых, сле-

дует повторить построение, взяв полученную упругую линию за начальную <sup>1)</sup>.

Этот способ можно применить также к случаю нескольких дисков и к случаям, в которых масса вала должна быть принята во внимание. Мы опять начнем с того, что возьмем некоторую начальную упругую линию (фиг. 87 а) и зададимся некоторой



Фиг. 87.

угловой скоростью  $\omega$ . Тогда центробежные силы  $P_1, P_2, \dots$ , действующие на диски и на части вала, можно легко определить и построить соответствующую упругую линию следующим образом. Рассмотрим сперва силы, действующие на левый пролет вала, и, устранив среднюю опору  $C$ , построим упругую линию, показанную на фиг. 87 б. Таким же образом можно по-

лучить упругую линию, вызванную вертикальной силой  $R'$ , приложенной в  $C$  и действующей по направлению снизу вверх (фиг. 87 с), а реакцию  $R$  средней опоры, возникающую при загрузке левого пролета вала, можно определить при помощи ур-ия  $[p]$ . Тогда сможем найти прогиб в любой точке при загрузке левой части вала, пользуясь ур-иями, подобными ур-иям  $[q]$ .

Взяв, например, поперечные сечения, в которых начальная упругая линия имеет наибольшие ординаты  $y_1$  и  $y_2$  (фиг. 87 а), получим прогибы в этих поперечных сечениях при нагрузке, действующей на левую часть вала:

$$y_{1a} = y_1' - y_1'' \frac{y_c'}{y_c''},$$

$$y_{2a} = y_2' - y_2'' \frac{y_c'}{y_c''}.$$

Таким же образом можно получить прогибы  $y_{1b}$  и  $y_{2b}$  в этих поперечных сечениях при загрузке правой части вала и определить полные прогибы  $y_{1a} + y_{1b}$  и  $y_{2a} + y_{2b}$  <sup>2)</sup>. Если начальная

<sup>1)</sup> Можно показать, что этот порядок вычисления — сходящийся, если определяется наименьшая критическая скорость, и при повторении построения, описанного выше, мы приближаемся к действительной критической скорости. См. вышеупомянутую книгу *Стодола*.

<sup>2)</sup> Прогибы в направлении вниз считаются положительными.

упругая линия была выбрана правильно, то должно удовлетворяться следующее равенство:

$$\frac{y_{1a} + y_{1b}}{y_{2a} + y_{2b}} = \frac{y_1}{y_2}, \quad [r]$$

и критическая скорость будет определяться ур-ием:

$$\omega_{кр} = \omega \sqrt{\frac{y_1}{y_{1a} + y_{1b}}}. \quad [83]$$

Если отклонение от условия [r] окажется значительным, то становится необходимым получение второго приближения, для чего можно применить следующий способ<sup>1)</sup>. Легко видеть, что вышенайденные прогибы  $y_{1a}$  и  $y_{2a}$  должны быть пропорциональны  $\omega^2$  и начальному прогибу  $y_1$ , так что можно написать ур-ия:

$$\begin{aligned} y_{1a} &= a_1 y_1 \omega^2, \\ y_{2a} &= a_2 y_1 \omega^2, \end{aligned}$$

откуда можно определить постоянные  $a_1$  и  $a_2$ . Таким же образом из ур-ий

$$\begin{aligned} y_{1b} &= b_1 y_2 \omega^2, \\ y_{2b} &= b_2 y_2 \omega^2 \end{aligned}$$

можно найти постоянные  $b_1$  и  $b_2$ .

Теперь, если начальная упругая линия была выбрана правильно и если  $\omega = \omega_{кр}$ , то должны быть удовлетворены следующие ур-ия:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{1a} + y_{1b} = a_1 y_1 \omega^2 + b_1 y_2 \omega^2, \\ y_2 &= y_{2a} + y_{2b} = a_2 y_1 \omega^2 + b_2 y_2 \omega^2, \end{aligned}$$

которые можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - a_1 \omega^2) y_1 - b_1 \omega^2 y_2 &= 0, \\ -a_2 \omega^2 y_1 + (1 - b_2 \omega^2) y_2 &= 0. \end{aligned} \quad [s]$$

Ур-ие для определения критической скорости получим теперь, приравняв нулю определитель этих ур-ий:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) \omega^4 - (a_1 + b_2) \omega^2 + 1 = 0.$$

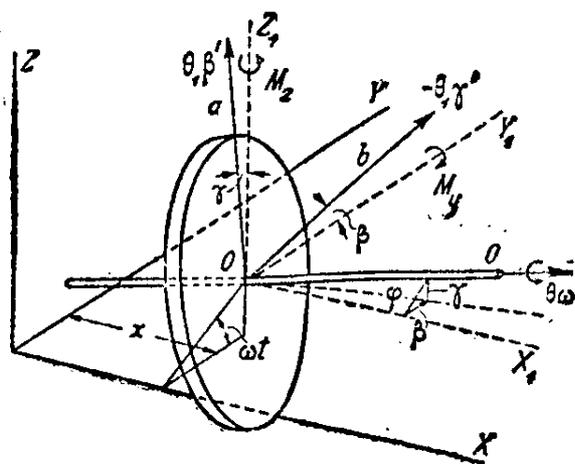
Корень этого ур-ия, который отношение  $y_1/y_2$  корней ур-ий [s] делает отрицательным, соответствует принятому виду кривой (фиг. 87 a) и дает наименьшую критическую скорость. Для получения более точного приближения отношение  $y_1/y_2$ , полученное из ур-ий [s], должно быть использовано для построения нового вида началь-

<sup>1)</sup> Этот способ был дан *Borowicz*'ем в его диссертации *Beitrag zur Berechnung krit. Geschwindigkeiten zwei und mehrhaft gelagerten Wellen*, München 1915.

ной кривой, и графическое решение должно быть повторено с этой новой кривой. В действительных случаях это дальнейшее приближение обычно не представляется необходимым.

33. Жироскопическое влияние на критические скорости вращающихся валов. — *Общие замечания.* — В наших предшествующих рассуждениях о критических скоростях вращающихся валов принимались во внимание только центробежные силы вращающихся масс. При некоторых условиях существенными являются не только эти силы, но также моменты сил инерции, возникающих вследствие угловых перемещений осей вращающихся масс, и их следует принять во внимание при определении критических скоростей. В дальнейшем рассмотрен простейший случай од-

ночного кругового диска на валу (фиг. 88).



Фиг. 88.

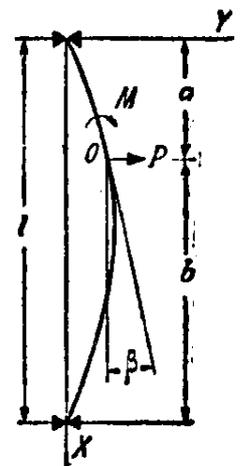
Если допустить, что прогибы  $y$  и  $z$  вала во время колебаний очень малы и что центр тяжести  $O$  диска совпадает с осью вала, то положение диска будет вполне определяться координатами  $y$  и  $z$  его центра и углами  $\beta$  и  $\gamma$ , которые образуются осью  $O-O$ , перпендикулярной к плоскости диска и касательной к упругой линии вала,

с неподвижными плоскостями  $XZ$  и  $XU$ , перпендикулярными друг к другу и проходящими через ось  $X$ , соединяющую центры подшипников. Приняв вес диска равным  $W$  и учтя только упругие противодействия вала <sup>1)</sup>, получим следующие уравнения движения центра тяжести диска:

$$\frac{W}{g} y'' = Y, \quad \frac{W}{g} z'' = Z, \quad [a]$$

где  $Y$  и  $Z$  составляющие реакции вала в направлениях  $Y$  и  $Z$ . Они являются линейными функциями координат  $y, z$  и углов  $\beta, \gamma$ , которые легко определить из рассмотрения изгиба вала.

Возьмем, например, изгиб вала с просто опертыми концами, в плоскости  $XU$  (фиг. 89), под действием силы  $P$  и пары  $M$ . Рассматривая обыч-



Фиг. 89.

<sup>1)</sup> Принятые здесь допущения отвечают случаю вертикального вала, когда вес диска не влияет на прогибы вала. Действие этого веса будет рассмотрено далее (см. стр. 186).

ным путем упругую линию вала, получим прогиб точки  $O^1$ )

$$y = \frac{Pa^2b^2}{3EI} + \frac{Mab(a-b)}{3EI} \quad [b]$$

и угол наклона касательной в той же точке

$$\beta = \frac{Pab(b-a)}{3EI} - \frac{M(a^2-ab+b^2)}{3EI}. \quad [c]$$

Из ур-ий [b] и [c] получим:

$$P = 3EI \left( \frac{a^2-ab+b^2}{a^3b^3} y + \frac{a-b}{a^2b^2} \beta \right), \quad [d]$$

$$M = 3EI \left( \frac{b-a}{a^2b^2} y - \frac{1}{ab} \beta \right). \quad [e]$$

Пользуясь выражением [d], получаем ур-ия [a] движения центра тяжести шкива такими:

$$\frac{W}{g} y'' + my + n\beta = 0; \quad \frac{W}{g} z'' + mz + n\gamma = 0, \quad [84]$$

где

$$m = 3EI \frac{a^2-ab+b^2}{a^3b^3}; \quad n = 3EI \frac{a-b}{a^2b^2}. \quad [k]$$

При рассмотрении относительного движения диска около его центра тяжести, допустим, что момент внешних сил, действующих на диск по отношению к оси  $O-O$ , всегда равен нулю; тогда скорость  $\omega$  относительно этих осей остается постоянной. Моменты  $M_y$  и  $M_z$ , взятые вокруг осей  $Y_1$  и  $Z_1$ , параллельных осям  $Y$  и  $Z$  (см. фиг. 88), и представляющие действие сил упругости вала на диск, можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_y &= -m'z + n'\gamma, \\ M_z &= m'y - n'\beta, \end{aligned} \quad [g]$$

где  $m'$  и  $n'$  постоянные, которые можно получить из упругой линии вала <sup>2)</sup>. Положительные направления для углов  $\beta$  и  $\gamma$  и для моментов  $M_y$  и  $M_z$  указаны на фигуре стрелками.

В случае, рассмотренном выше (см. ур-ие [e]), имеем:

$$m' = 3EI \frac{b-a}{a^3b^2}; \quad n' = \frac{3EI}{ab}. \quad [k]$$

<sup>1)</sup> См. книгу автора Applied Elasticity, p. 86.

<sup>2)</sup> Принято, что гибкость вала, включая гибкость опор, одинакова в обоих направлениях.

Ур-ия относительного движения диска по отношению к его центру тяжести получим теперь, пользуясь *законом изменения момента количества движения*, который состоит в том, что *степень возрастания — производная —* полного момента количества движения любой движущейся системы вокруг любой *неподвижной* оси равна полному моменту внешних сил вокруг этой оси. При определении *степени изменения — производной —* момента количества движения вокруг неподвижной оси, проведенной через мгновенное положение центра тяжести  $O$ , нам нужно учесть только относительное движение <sup>1)</sup>.

При определении составляющих момента количества движения возьмем главные оси инерции диска. Ось вращения  $OO$  — одна из таких осей. Две других оси будут два взаимно перпендикулярных диаметра диска. Один из этих диаметров  $Oa$  мы возьмем в плоскости  $OOZ_1$  (см. фиг. 88). Он образует небольшой угол  $\gamma$  с осью  $OZ_1$ . Другой диаметр  $Ob$  образует угол  $\beta$  с осью  $OY_1$ .

Пусть  $\theta$  — полярный момент инерции диска относительно оси  $OO$ ,  $\theta_1 = \theta/2$  — момент инерции диска вокруг диаметра. Тогда составляющая момента количества движения вокруг оси  $OO$  будет  $\theta\omega$  и составляющие вокруг диаметров  $Oa$  и  $Ob$  будут  $\theta_1\beta'$  и  $-\theta_1\gamma'$  соответственно <sup>2)</sup>. Положительные направления этих составляющих момента количества движения показаны на фиг. 88 стрелками. Проектируя эти составляющие на неподвижные оси  $OY_1$  и  $OZ_1$ , проведенные через мгновенное положение центра тяжести  $O$ , получим  $\theta\omega\beta - \theta_1\gamma'$  и  $\theta\omega\gamma + \theta_1\beta'$  соответственно. Тогда, на основании закона изменения момента количества движения, имеем:

$$\frac{d}{dt}(\theta\omega\beta - \theta_1\gamma') = M_y \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(\theta\omega\gamma + \theta_1\beta') = M_z, \quad [I]$$

или, пользуясь ур-ями  $[g]$ ,

$$\begin{aligned} \theta\omega\beta' - \theta_1\gamma'' &= -m'z + n'\gamma, \\ \theta\omega\gamma' + \theta_1\beta'' &= m'y - n'\beta. \end{aligned} \quad [85]$$

Четыре ур-ия [84] и [85], определяющие движение диска, будут удовлетворяться подстановкой

$$y = A \sin pt; \quad z = B \cos pt; \quad \beta = C \sin pt; \quad \gamma = D \cos pt. \quad [m]$$

Таким путем мы получим четыре линейных однородных ур-ия для  $A, B, C, D$ . Приравняв определитель этих ур-ий нулю, получим

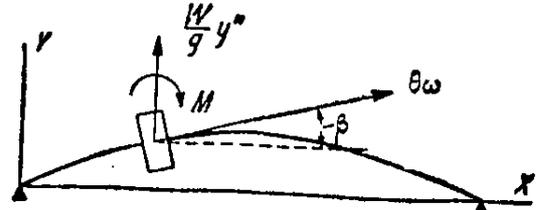
<sup>1)</sup> См., например, *H. Lamb, Higher Mechanics, 1920, p. 94.*

<sup>2)</sup> Допущено, как и ранее, что  $\beta$  и  $\gamma$  малы. Тогда  $\beta'$  и  $-\gamma'$  будут являться приближенными значениями угловых скоростей вокруг диаметров  $Oa$  и  $Ob$ .

ур-ие для определения частот  $p$  собственных колебаний <sup>1)</sup>. Теперь мы рассмотрим несколько частных случаев.

Как первый пример, рассмотрим случай, когда главная ось  $OO$ , перпендикулярная плоскости диска, остается всегда в плоскости, заключающей ось  $X$  и вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , с которой вращается диск. Обозначив через  $r$  прогиб вала, а через  $\varphi$  угол между осями  $X$  и  $OO$  (см. фиг. 88), получим для этого частного случая:

$$\begin{aligned} y &= r \cos \omega t; & z &= r \sin \omega t; \\ \beta &= \varphi \cos \omega t; & \gamma &= \varphi \sin \omega t. \end{aligned} \quad [n]$$



Фиг. 90.

Считая  $r$  и  $\varphi$  постоянными и рассматривая то мгновенное положение, когда плоскость упругой линии вала совпадает с плоскостью  $XY$  (фиг. 90), мы получим из ур-ий [n]

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi; & \beta' &= 0; & \beta'' &= -\varphi\omega^2; \\ \gamma &= 0; & \gamma' &= \varphi\omega; & \gamma'' &= 0; \\ y &= r; & y' &= 0; & y'' &= -r\omega^2; \\ z &= 0; & z' &= r\omega; & z'' &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя в ур-ия [84] и [85], получим

$$\begin{aligned} \frac{W}{g} y'' + my + n\beta &= 0; \\ (\theta - \theta_1) \beta \omega^2 &= m'y - n'\beta. \end{aligned} \quad [o]$$

Очевидно, что вал изгибается не только центробежной силой, но также моментом  $M = (\theta - \theta_1) \beta \omega^2$ , который представляет жиро­скопическое действие вращающегося диска в этом случае и делает вал жестче. Подставляя

$$y = r \cos \omega t, \quad \beta = \varphi \cos \omega t$$

в ур-ия [o], получим

$$\begin{aligned} \left( m - \omega^2 \frac{W}{g} \right) r + n\varphi &= 0, \\ -m'r + \{ n' + (\theta - \theta_1) \omega^2 \} \varphi &= 0. \end{aligned} \quad [p]$$

Прогиб вала, принятый выше, становится возможным, если ур-ия [p] могут дать для  $r$  и  $\varphi$  корни, отличные от нуля, т. е. когда угловая скорость  $\omega$  такова, что определитель этих ур-ий стано-

<sup>1)</sup> См. статьи *A. Stodola* в „Zeitschrift f. d. gesamte Turbinenwesen“, 1918 S. 252, и 1920, S. 1.

вится равным нулю. Таким способом найдем следующее уравнение для определения критических скоростей:

$$\left(m - \frac{\omega^2 W}{g}\right) \{n' + (\theta - \theta_1) \omega^2\} + nm' = 0, \quad [r]$$

или, обозначая

$$\frac{mg}{W} = p^2, \quad \frac{n'}{\theta - \theta_1} = q^2$$

и отметив, что из [h] и [k],

$$nm' = -cmn',$$

где

$$c = \frac{(a-b)^2}{a^2 - ab + b^2},$$

получим

$$(p^2 - \omega^2) (q^2 + \omega^2) - cp^2q^2 = 0$$

или

$$\omega^4 - (p^2 - q^2) \omega^2 - p^2q^2(1 - c) = 0. \quad [s]$$

Легко видеть, что (при  $c < 1$ ) уравнение [s] имеет только один положительный корень для  $\omega^2$ , именно:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(p^2 - q^2)^2 + (1 - c)p^2q^2}. \quad [t]$$

Когда гироскопическим действием можно пренебречь, следует подставить в [r]  $\theta - \theta_1 = 0$ , и мы получим:

$$\frac{\omega^2 W}{g} = \frac{mn' + nm'}{n'} = \frac{3EI}{a^2b^2},$$

из которого

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g3EI}{a^2b^2W}}$$

или

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{\delta}},$$

где

$$\delta = \frac{a^2b^2W}{3EI}$$

представляет статический прогиб вала под действием груза  $W$ . Этот результат вполне совпадает с найденным выше (см. п° 15), если рассматривать диск на валу как систему с одной степенью свободы.

В предыдущем рассмотрении было допущено, что угловая скорость плоскости изогнутого вала такая же, как вращающегося диска. Возможно также, что эти две скорости различны. Допуская, например, что угловая скорость плоскости изогнутого вала  $\lambda$ , и подставляя

$$y = r \cos \lambda t; \quad z = r \sin \lambda t; \quad \beta = \varphi \cos \lambda t; \quad \gamma = \varphi \sin \lambda t$$

в ур-ия [f] и [l], получим вместо ур-ий [o] ур-ия:

$$\frac{W}{g} y'' + my + n\beta = 0; \tag{o'}$$

$$(\theta\omega\lambda - \theta_1\lambda^2)\beta = m'y - n'\beta.$$

Положив  $\lambda = \omega$ , получим предыдущий результат. Если  $\lambda = -\omega$ , получим из второго ур-ия [o']:

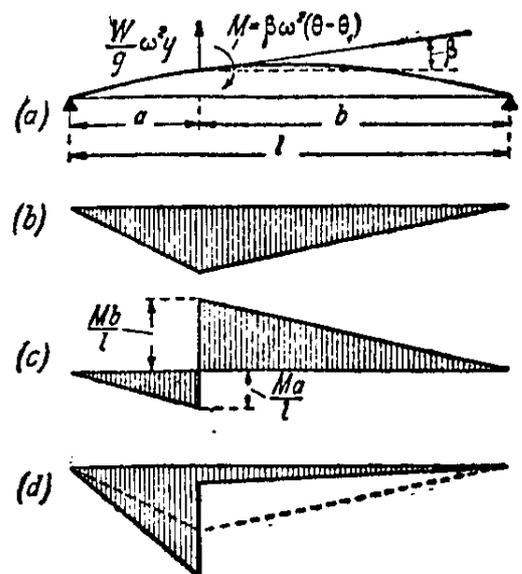
$$-(\theta + \theta_1)\omega^2\beta = m'y - n'\beta.$$

Это показывает, что, когда плоскость изогнутого вала вращается со скоростью  $\omega$  в направлении противоположном вращению диска, жирокопический эффект будет представляться моментом

$$M = -(\theta + \theta_1)\omega^2\beta.$$

Знак минус указывает, что при этих условиях жирокопический момент действует в направлении увеличения изгиба вала и поэтому понижает критическую скорость вала. Если вал с диском из состояния покоя довести до скорости  $\omega$ , то обычно имеет место условие  $\lambda = \omega$ . Но, если возмущающие силы той же частоты, что и критическая скорость при условии  $\lambda = -\omega$ , то тогда может иметь место вращение изогнутого вала в направлении, противоположном вращению диска <sup>1)</sup>.

Если имеется несколько дисков на валу и нужно принять во внимание жирокопический эффект, то можно также употребить графический способ, описанный в п° 32. Необходимо только учесть, в дополнение к центробежным силам, моменты, вызываемые жирокопическим действием. На фиг. 91 пред-



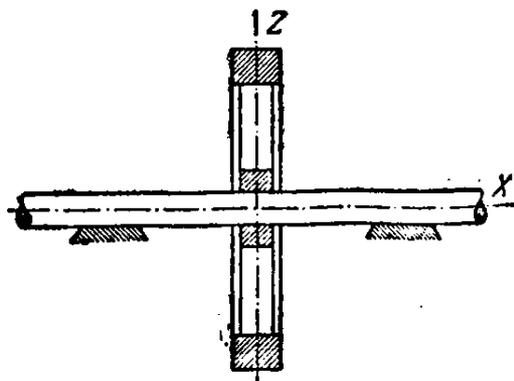
Фиг. 91.

ставлен случай одиночного шкива, при условии  $\lambda = \omega$ . Чтобы получить диаграмму изгибающих моментов в этом случае, следует изгибающие моменты, вызванные центробежной силой (фиг. 91 b)

<sup>1)</sup> См. A. Stodola, Dampf- und Gasturbinen, 1924, S. 367.

наложить на изгибающие моменты, вызванные парой  $M$  (фиг. 91 *c*). Диаграмма суммарных изгибающих моментов показана на фиг. 91 *d*. С этой диаграммой мы должны поступать дальше точно так же, как было изложено выше (см. стр. 69).

*Жироскопический эффект при колебании маховиков.* — Вторым примером рассмотрим критические скорости маховика, спицы



Фиг. 92.

которого гибки в направлении оси вала (см. фиг. 92), причем вал абсолютно жесток. Никакое колебание маховика, параллельное оси вала, не подвергается воздействию углового движения маховика, и соответствующий период можно определить из ур-ия [5], в котором  $\delta$  обозначает теперь прогиб обода маховика под действием его веса, если вал находится в вертикальном положении.

Воспользуемся изложенной теорией при рассмотрении колебаний, связанных с угловыми движениями плоскости обода маховика. При жестком вале прогибы  $y$  и  $z$  в ур-иях [85] следует взять равными нулю, и мы получим

$$\begin{aligned} \theta\omega\beta' - \theta_1\gamma'' &= n'\gamma, \\ \theta\omega\gamma' + \theta_1\beta'' &= -n'\beta, \end{aligned} \quad [v]$$

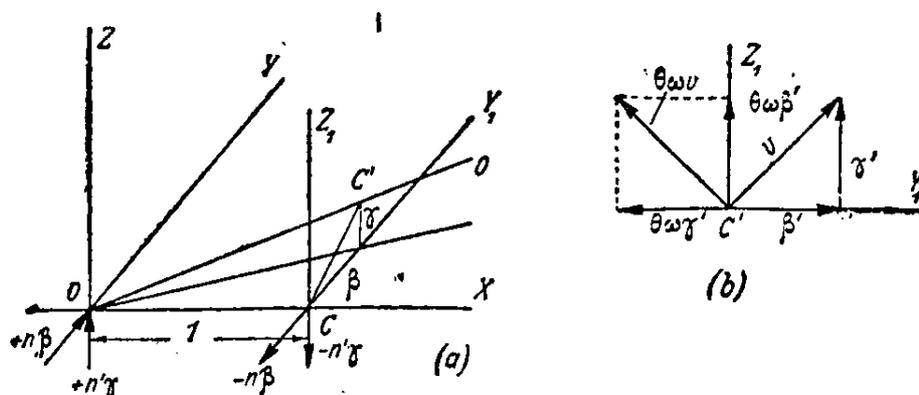
или

$$\begin{aligned} \theta_1\beta'' &= -\theta\omega\gamma' - n'\beta, \\ \theta_1\gamma'' &= \theta\omega\beta' - n'\gamma, \end{aligned} \quad [86]$$

где постоянная пружинности  $n'$  зависит от гибкости спиц. Эта постоянная  $n'$  может быть определена из условия, что  $n'\beta$  представляет такую пару сил вокруг оси  $Z$ , которая необходима чтобы вызвать поворот плоскости обода маховика вокруг этой оси на угол  $\beta$ .

Имеется интересная аналогия между ур-иями [86] и ур-иями движения частицы в плоскости. Пусть  $O$  обозначает неподвижную точку — центр тяжести обода (фиг. 93 *a*), а  $OO$  мгновенное положение главной оси, перпендикулярной к плоскости обода. Представим шар, имеющий центр в неподвижной точке  $O$ , и радиус, равный единице. Пусть  $C$  — точка, в которой ось маховика в начальном положении пересекается с единичной шаровой поверхностью, а  $C'$  — точка, в которой мгновенная ось  $OO$  пересекает ту же поверхность. Рассматривая только случаи, когда углы  $\beta$  и  $\gamma$  малы, можно допустить, что точка  $C'$  — „полюс“ жироскопа — движется в плоскости  $Y_1Z_1$ , касательной к единичной шаровой по-

верхности в точке  $C$ . Внешние силы, представляющие действие упругих сил спиц на обод, даны парами  $-n'\beta$  и  $-n'\gamma$  (фиг. 93 а). Представим теперь, что полюс  $C'$  есть частица, имеющая массу  $\theta_1$ , и что на эту частицу в дополнение к силам  $-n'\beta$  и  $-n'\gamma$ , упомянутым выше, действует воображаемая „отклоняющая сила“  $\theta\omega v$



Фиг. 93.

пропорциональная скорости  $v$  полюса в направлении всегда влево от пути, если смотреть извне шаровой поверхности (см. фиг. 93 б). Тогда ур-ия движения полюса будут точно такими же, как ранее приведенные ур-ия  $[v]$ . Это совпадение очень полезно при решении задач движения жирокопов.

Рассматривая колебания маховика, можем взять решения ур-ий  $[v]$  в таком виде:

$$\beta = A \cos pt; \quad \gamma = B \sin pt.$$

Подставляя в ур-ия  $[v]$ , получим:

$$\begin{aligned} A(n' - \theta_1 p^2) + B\theta\omega p &= 0, \\ A\theta\omega p + B(n' - \theta_1 p^2) &= 0, \end{aligned}$$

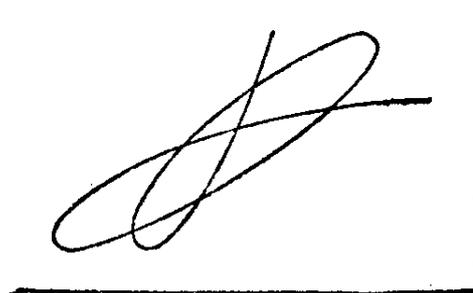
откуда получается ур-ие частоты:

$$(n' - \theta_1 p^2)^2 - \theta^2 \omega^2 p^2 = 0$$

Решение этого ур-ия будет:

$$p^2 = \frac{n'}{\theta_1} \left\{ 1 + \frac{\theta^2 \omega^2}{2\theta_1 n'} \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{\theta^2 \omega^2}{2\theta_1 n'} \right)^2 - 1} \right\}. \quad [87]$$

Мы получаем две разных частоты колебаний, и траектория полюса  $C$ , представляющая колебания маховика, состоит из двух наложенных друг на друга круговых колебаний. Пример кривой, описываемой полюсом, приведен на фиг. 94.



Фиг. 94.

В частном случае, когда  $\omega = 0$ , получим:

$$p = \sqrt{\frac{n'}{\theta_1}}$$

Возьмем теперь, например <sup>1)</sup>,

$$\frac{\theta^2 \omega^2}{2\theta_1 n'} = 2.$$

Тогда, из ур-ия [87]

$$p = \sqrt{\frac{n'}{\theta_1}} \sqrt{3 \pm \sqrt{8}},$$

и мы получим:

$$p_1 = 2,414 \sqrt{\frac{n'}{\theta_1}}; \quad p_2 = 0,414 \sqrt{\frac{n'}{\theta_1}}.$$

Троектория полюса  $C$  будет представлять два наложенные друг на друга гармонические колебания периодов  $2\pi/p_1$  и  $2\pi/p_2$ . Если на маховик действуют внешние периодические силы, то возникают вынужденные колебания. Допустим, например, что действует простая гармоническая сила того же периода, как вращение машины; тогда вместо ур-ий [86] получатся следующие ур-ия:

$$\begin{aligned} \theta_1 \beta'' &= -\theta \omega \gamma' - n' \beta + P \cos \omega t, \\ \theta_1 \gamma'' &= \theta \omega \beta' - n' \gamma + P \sin \omega t. \end{aligned} \quad [w]$$

Вынужденное колебание маховика представится частным решением этих ур-ий. Положив

$$\beta = A \cos \omega t; \quad \gamma = B \sin \omega t,$$

и подставив в ур-ия [w], получим:

$$\begin{aligned} A(n' - \theta_1 \omega^2) + B \theta \omega^2 &= P, \\ A \theta \omega^2 + B(n' - \theta_1 \omega^2) &= P, \end{aligned}$$

откуда

$$A = \frac{P \{n' - \omega^2(\theta + \theta_1)\}}{(n' - \theta_1 \omega^2)^2 - \theta^2 \omega^4}.$$

Состояние резонанса наступит, когда

$$(n' - \theta_1 \omega^2)^2 - \theta^2 \omega^4 = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{n'}{\theta_1 \left( \frac{\theta^2}{\theta_1^2} - 1 \right)} \left( -1 \pm \frac{\theta}{\theta_1} \right).$$

<sup>1)</sup> Это отношение соответствует действительному случаю маховика с гибкими спицами.

Единственным действительным корнем, дающим критическую скорость в этом случае, является:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{n}{\theta_1 \left( \frac{\theta}{\theta_1} + 1 \right)}}. \quad [88]$$

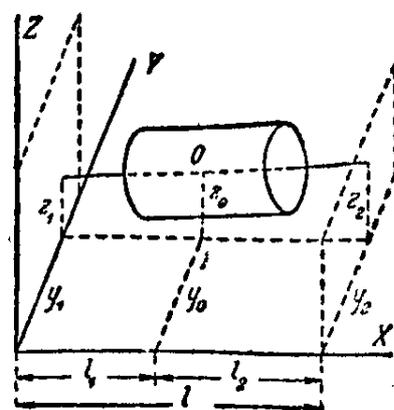
*Колебание жесткого ротора на упругих подшипниках.* — Ур-ия [84] и [85] можно также применить для изучения колебания жесткого ротора, имеющего подшипники на упругих опорах (фиг. 95). Пусть  $y_1 z_1$  и  $y_2 z_2$  бесконечно малые перемещения подшипников во время колебания. Взяв эти перемещения за координаты колеблющегося ротора, получим перемещения центра тяжести и угловые перемещения оси ротора (см. фиг. 95):

$$y_0 = y_1 \frac{l_2}{l} + y_2 \frac{l_1}{l},$$

$$z_0 = z_1 \frac{l_2}{l} + z_2 \frac{l_1}{l},$$

$$\beta = \frac{y_2 - y_1}{l},$$

$$\gamma = \frac{z_2 - z_1}{l}.$$



Фиг. 95.

Пусть  $c_1, c_2, d_1$  и  $d_2$  постоянные, зависящие от упругости опор в горизонтальном и вертикальном направлениях, так что  $-c_1 y_1, -c_2 y_2$  горизонтальные, а  $-d_1 z_1, -d_2 z_2$  вертикальные реакции подшипников, вызванные бесконечно малыми перемещениями  $y_1, y_2, z_1$  и  $z_2$  в направлении осей  $Y$  и  $Z$ . Тогда ур-ия движения центра тяжести [84] получаются:

$$\begin{aligned} \frac{W}{gl} (l_2 y_1'' + l_1 y_2'') + c_1 y_1 + c_2 y_2 &= 0, \\ \frac{W}{gl} (l_2 z_1'' + l_1 z_2'') + d_1 z_1 + d_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \quad [a']$$

Ур-ия [85], представляющие вращение ротора вокруг осей  $Y$  и  $Z$ , будут в этом случае:

$$\begin{aligned} \theta_\omega \frac{y_2' - y_1'}{l} - \theta_1 \frac{z_2'' - z_1''}{l} &= z_2 d_2 l_2 - z_1 d_1 l_1, \\ \theta_\omega \frac{z_2' - z_1'}{l} + \theta_1 \frac{y_2'' - y_1''}{l} &= -y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1. \end{aligned} \quad [b']$$

Четыре ур-ия  $[a']$  и  $[b']$  вполне определяют свободные колебания жесткого ротора на упругих опорах. Подставляя в эти ур-ия

$$y_1 = A \sin pt; \quad y_2 = B \sin pt; \quad z_1 = C \cos pt; \quad z_2 = D \cos pt,$$

получим четыре однородных линейных ур-ия для  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Приравнявая определитель этих ур-ий нулю, получим ур-ие частоты, из которого можно определить частоты четырех видов собственных колебаний ротора.

Рассмотрим теперь вынужденное колебание ротора, вызванное некоторой эксцентрично приложенной массой. Действие подобной неуравновешенности эквивалентно действию возмущающей силы с составляющими

$$Y = A \cos \omega t \quad \text{и} \quad Z = B \sin \omega t,$$

приложенными к центру тяжести, и пары сил с составляющими

$$M_y = C \sin \omega t \quad \text{и} \quad M_z = D \cos \omega t.$$

Вместо ур-ий  $[a']$  и  $[b']$  мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{W}{gl} (l_2 y_1'' + l_1 y_2'') + c_1 y_1 + c_2 y_2 &= A \cos \omega t, \\ \frac{W}{gl} (l_2 z_1'' + l_1 z_2'') + d_1 z_1 + d_2 z_2 &= B \sin \omega t, \\ \theta_\omega \frac{y_2' - y_1'}{l} - \theta_1 \frac{z_2'' - z_1''}{l} &= z_2 d_2 l_2 - z_1 d_1 l_1 + C \sin \omega t, \\ \theta_\omega \frac{z_2' - z_1'}{l} + \theta_1 \frac{y_2'' - y_1''}{l} &= -y_2 c_2 l_2 + y_1 c_1 l_1 + D \cos \omega t \end{aligned} \quad [c']$$

Частное решение этих ур-ий, представляющих вынужденное колебание ротора, будет иметь вид:

$$y_1 = A \cos \omega t; \quad y_2 = B \cos \omega t; \quad z_1 = C \sin \omega t; \quad z_2 = D \sin \omega t.$$

Подставляя в ур-ия  $[c']$ , найдем амплитуду вынужденного колебания. При этом колебании ось ротора описывает поверхность, выражающуюся ур-иями:

$$\begin{aligned} y &= (a + bx) \cos \omega t, \\ z &= (c + dx) \sin \omega t, \end{aligned}$$

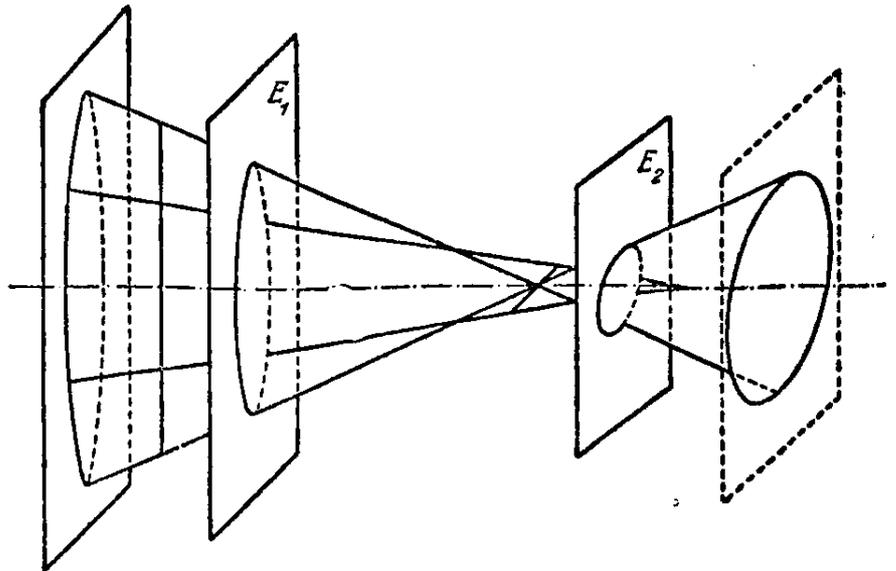
где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — постоянные. Мы видим, что каждая точка оси описывает эллипс, ур-ие которого

$$\frac{y^2}{(a + bx)^2} + \frac{z^2}{(c + dx)^2} = 1.$$

Для двух точек оси, именно для

$$x_1 = -\frac{a}{b} \text{ и } x_2 = -\frac{c}{d},$$

эллипсы обращаются в прямые линии, и общая форма поверхности, описываемой осью ротора, будет такой, как показано на фиг. 96. Очевидно, что перемещения точки оси ротора зависят не только от величины возмущающей силы (величины неуравновешенности), но также от положения точки по длине оси и от направления, в котором измеряется перемещение.



Фиг. 96.

В общем случае неуравновешенность

можно представить двумя эксцентрично приложенными массами (см. п° 10), и вынужденные колебания ротора можно получить наложением друг на друга двух колебаний такого рода, как рассмотренные выше, и имеющих некоторую разность фаз<sup>1)</sup>. Из линейности ур-ий [с'] можно также заключить, что при помещении выправляющих грузов в двух плоскостях можно всегда устранить неуравновешенность, необходимо только выбрать выправляющие грузы таким образом, чтобы соответствующие центробежные силы находились в равновесии с возмущающими силами возникающими из-за неуравновешенности<sup>2)</sup>.

**34. Влияние веса вала и дисков на критическую скорость.** — В наших предыдущих рассуждениях допущением, что ось вала вертикальна, было устранено влияние веса самих вращающихся дисков. В случае горизонтальных валов веса дисков нужно рассматривать как возмущающие силы, которые при известных скоростях вызывают значительные колебания вала. Эта скорость обычно называется „критической скоростью второго

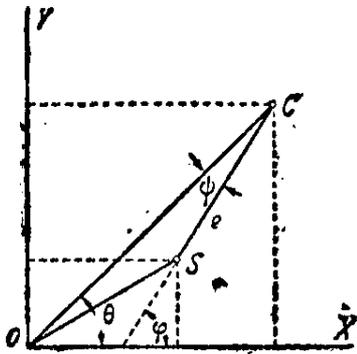
<sup>1)</sup> Этот вопрос детально рассмотрен в статье *V. Blass'a*, Ueber den Massenausgleich raschumlaufender Körper, „Z. f. angewandte Mathematik und Mechanik“, Bd 6, 1926, S. 429.

<sup>2)</sup> Влияние гибкости вала будет рассмотрено далее (см. п° 35).

порядка" <sup>1)</sup>). Для определения этой скорости необходимо более детальное изучение движения дисков.

Рассмотрим простейший случай одиночного диска и примем, что диск укреплен на валу в том поперечном сечении, где касательная к упругой линии вала остается параллельной осевой линии подшипников. Таким образом „жироскопический эффект“, рассмотренный в предыдущем параграфе, будет устранен, и нужно подвергнуть рассмотрению только движение диска в его собственной плоскости.

Пусть  $XU$  представляет горизонтальную плоскость диска, а  $O$  — центр вертикального вала в его неизогнутом состоянии (см.



Фиг. 97.

фиг. 97). Пусть при колебании  $S$  — мгновенное положение центра вала, а  $C$  — мгновенное положение центра тяжести диска, так что  $CS = e$  является эксцентриситетом, с которым диск насажен на вал. Прочие обозначения таковы:  $m$  — масса диска,  $mi^2$  — момент инерции диска вокруг оси, проходящей через точку  $C$  и перпендикулярной к диску;  $\alpha$  — постоянная пружинности вала, равная такой действующей в плоскости  $XU$  силе, чтобы получить единицу прогиба в этой плос-

кости;  $\omega_{кр} = \sqrt{\alpha/m}$  — критическая скорость первого порядка (см. п<sup>о</sup> 15);  $x, y$  — координаты центра тяжести  $C$  диска во время движения;  $\varphi$  — угол поворота диска, равный углу между радиусом  $SC$  и осью  $X$ ;  $\theta$  — угол поворота вертикальной плоскости  $OC$ ;  $\psi$  — угол поворота диска относительно плоскости  $OC$ . Тогда  $\varphi = \psi + \theta$ . Координаты  $x$  и  $y$  центра тяжести  $C$  и угол поворота  $\varphi$  примем за координаты, определяющие положение диска в плоскости  $XU$ .

Дифференциальные ур-ия движения центра тяжести  $C$  можно легко написать обычным путем, если мы примем во внимание, что только одна сила, упругое противодействие вала, действует на диск в плоскости  $XU$ . Эта сила пропорциональна прогибу  $OS$  вала, а ее составляющие по направлениям  $X$  и  $Y$ , пропорциональные координатам точки  $S$ , будут соответственно —  $\alpha(x - e \cos \varphi)$  и —  $\alpha(y - e \sin \varphi)$ . Тогда дифференциальные ур-ия движения центра  $C$  будут:

$$mx'' = -\alpha(x - e \cos \varphi); \quad my'' = -\alpha(y - e \sin \varphi)$$

<sup>1)</sup> А. Стодола первый рассмотрел эту задачу. Литературу по этому предмету можно найти в его книге, 6 изд., стр. 929. См. также статью Т. Pöschl'я в „Zeitschr. f. angew. Mathem. u. Mech.“, Bd 3. 1923, S. 297.

или

$$\begin{aligned} mx'' + \alpha x &= \alpha e \cos \varphi, \\ my'' + \alpha y &= \alpha e \sin \varphi. \end{aligned} \quad [a]$$

Третье ур-ие получим, пользуясь законом изменения момента количества движения. Момент количества движения диска вокруг оси  $O$  состоит, во-первых, из момента количества движения  $mi^2\varphi'$  диска, вращающегося с угловой скоростью  $\varphi'$  вокруг своего центра тяжести, и, во-вторых, — из момента количества движения  $m(xy' - yx')$  массы  $m$  диска, сосредоточенной в его центре тяжести. Тогда закон изменения момента движения количества дает ур-ие:

$$\frac{d}{dt} \left\{ mi^2\varphi' + m(xy' - yx') \right\} = M$$

или

$$mi^2\varphi'' + m(xy'' - yx'') = M, \quad [b]$$

где  $M$  — крутящий момент, передающийся от диска валу.

Ур-ия [a] и [b] вполне определяют движение диска. Когда  $M=0$ , частное решение ур-ий [a] и [b] получается при допущении, что центр тяжести  $C$  диска остается в плоскости  $OS$  упругой линии вала и описывает при вращении с постоянной угловой скоростью  $\varphi' = \omega$  круг радиуса  $r$ . Тогда, подставляя в ур-ия [a]  $x = r \cos \omega t$ ;  $y = r \sin \omega t$  и полагая  $\varphi = \omega t$  для случая, представленного на фиг. 98 a, и  $\varphi = \omega t + \pi$  для случая, представленного на фиг. 98 b, получим

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{\alpha e}{\alpha - m\omega^2} = \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} && \text{для } \omega < \omega_{кр}, \\ r_0 &= -\frac{\alpha e}{\alpha - m\omega^2} = \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega^2 - \omega_{кр}^2} && \text{для } \omega > \omega_{кр}. \end{aligned}$$

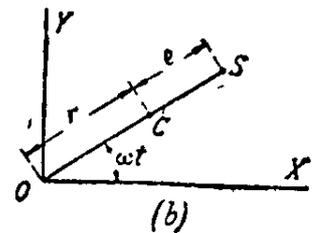
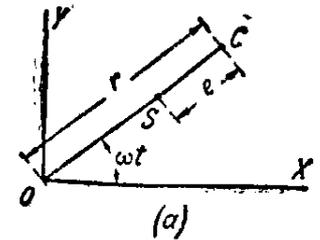
Эти результаты совпадают с полученными ранее путем элементарных выкладок (см. п<sup>о</sup> 15).

Рассмотрим теперь случай <sup>1)</sup>, когда крутящий момент  $M$  отличен от нуля и таков, что

$$M = m(xy'' - yx''). \quad [c]$$

Тогда из ур-ия [b] мы заключаем, что

$$\varphi' = \omega = \text{const},$$



Фиг. 98.

<sup>1)</sup> Этот случай подробно рассмотрен в диссертации *P. Schröder'a*, Die kritischen Zustände zweiter Art raschumlaufender Wellen, Stuttgart, 1924. Эта статья содержит очень полное перечисление новой литературы по этому вопросу.

и интегрируя, получим:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad [d]$$

где  $\varphi_0$  — произвольная постоянная, определяющая начальную величину угла  $\varphi$ .

Подставляя [d] в ур-ия [a] и пользуясь обозначением  $\omega_{кр}^2 = \alpha/m$ , получим:

$$\begin{aligned} x'' + \omega_{кр}^2 x &= \omega_{кр}^2 e \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y'' + \omega_{кр}^2 y &= \omega_{кр}^2 e \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad [e]$$

Легко показать подстановкой, что выражения

$$\begin{aligned} x &= -\frac{M_1}{e\alpha} \cos(\omega_{кр} t + \gamma_1 + \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= -\frac{M_1}{e\alpha} \sin(\omega_{кр} t + \gamma_1 + \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad [f]$$

представляют решение ур-ий [e].

Подставляя [f] в ур-ие [c], получим:

$$M = M_1 \sin\{(\omega - \omega_{кр})t + \gamma_1\}. \quad [g]$$

Из этого можно заключить, что под действием *пульсирующего момента* [g] диск вращается с постоянной угловой скоростью, и в то же самое время его центр тяжести испытывает сложное колебательное движение, представляемое ур-иями [f].

Таким же образом можно показать, что под действием *пульсирующего момента*

$$M = M_2 \sin\{(\omega_{кр} + \omega)t + \gamma_2\}$$

диск также вращается с постоянной скоростью  $\omega$ , а его центр испытывает колебательные движения, отвечающие ур-иям

$$\begin{aligned} x &= \frac{M_2}{e\alpha} \cos(\omega_{кр} t + \gamma_2 - \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ y &= -\frac{M_2}{e\alpha} \sin(\omega_{кр} t + \gamma_2 - \varphi_0) + \frac{e\omega_{кр}^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad [h]$$

Соединяя решения [f] и [h], получим полное решение ур-ий [e], содержащее четыре произвольных постоянных  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Этот результат можно теперь использовать для определения колебаний, вызываемых весом самого диска.

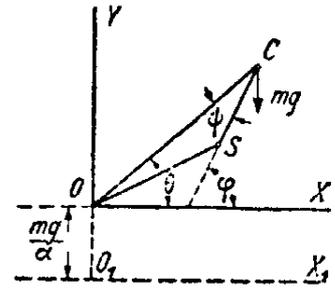
Допустим, что вал находится в горизонтальном положении, а ось  $Y$  направлена вверх, тогда, присоединив вес шкива, мы

получим фиг. 99 вместо фиг. 97. Ур-ия [a] и [b] в этом случае заменяются следующей системой ур-ий:

$$\begin{aligned} mx'' + ax &= ae \cos \varphi, \\ my'' + ay &= ae \sin \varphi - mg, \\ mi^2\varphi'' + m(xy'' - yx'') &= M - mgx. \end{aligned} \quad [k]$$

Переместим начало координат из  $O$  в  $O_1$ , как показано на фиг. 99; тогда, положив

$$y_1 = y + \frac{mg}{a},$$



Фиг. 99.

можем представить ур-ия [k] в следующем виде:

$$\begin{aligned} mx'' + ax &= ae \cos \varphi, \\ my_1'' + ay_1 &= ae \sin \varphi, \\ mi^2\varphi'' + m(xy_1'' - y_1x'') &= M - mge \cos \varphi. \end{aligned} \quad [l]$$

Эта система ур-ий совпадает с системой ур-ий [a] и [b], и влияние веса диска представляется пульсирующим моментом  $-mge \cos \varphi$ . Представим теперь, что  $M=0$  и что вал вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = \frac{1}{2}\omega_{кр}$ . Тогда влияние веса диска может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} -mge \cos \varphi &= -mge \cos(\omega t) = mge \sin(\omega t - \pi/2) = \\ &= mge \sin\{(\omega_{кр} - \omega)t - \pi/2\}. \end{aligned} \quad [m]$$

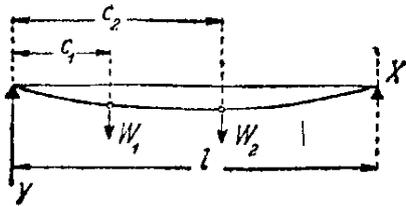
Этот возмущающий момент имеет точно такой же вид, как пульсирующий момент, выражающийся ур-ием [g], и из этого можно заключить, что, при скорости  $\omega = \frac{1}{2}\omega_{кр}$  пульсирующий момент от веса диска будет вызывать колебания вала, представленные ур-иями [f]. Это и есть так называемая *критическая скорость второго порядка*, которая наблюдалась во многих случаях в действительности<sup>1)</sup>. Следует заметить, однако, что колебания той же частоты могут быть вызваны также переменной гибкостью вала (см. стр. 95), и вполне возможно, что в некоторых случаях, где наблюдалась критическая скорость второго порядка, колебания были вызваны этой последней причиной.

**35. Влияние гибкости валов на уравнивание машин.** — В наших предыдущих рассуждениях об уравнивании машин (см. п° 10) было допущено, что ротор — абсолютно твердое тело. В таком случае полное уравнивание может быть выполнено приложением выправляющих грузов в двух произвольно выбранных плоскостях. Допущение, пренебрегающее гибкостью вала, достаточно точно при низких скоростях, но для машин высокой

<sup>1)</sup> См. O. Foerpl, „V. D. I.“, Bd 63, 1919, S. 867.

скорости, а особенно в случаях машин, работающих выше критической скорости, изгиб вала может иметь значительное влияние, и в результате этого ротор можно уравновесить только для одной определенной скорости, а при известных условиях и совсем нельзя будет уравновесить, и всегда будут затруднения из-за колебаний.

Влияние гибкости вала поясним на простом примере вала, опертого на концах и несущего два диска (см. фиг. 100). Прогиб вала  $y_1$  под грузом  $W_1$  будет зависеть не только от величины этого груза, но также и от величины груза  $W_2$ . То же самое



Фиг. 100.

заключение имеет силу и в отношении прогиба  $y_2$  под грузом  $W_2$ . Пользуясь ур-иями упругой линии вала на двух опорах, легко можем получить следующие выражения для прогибов:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} W_1 + a_{12} W_2, \\ y_2 &= a_{21} W_1 + a_{22} W_2, \end{aligned} \quad [a]$$

где  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  и  $a_{22}$  остаются постоянными для данного вала и данного положения грузов. Этими ур-иями можно воспользоваться для определения прогибов, вызванных в вале центробежными силами из-за эксцентриситеты дисков.

Пусть  $m_1$ ,  $m_2$  — массы дисков I и II,  $\omega$  — угловая скорость,  $y_1$ ,  $y_2$  — прогибы под дисками I и II соответственно,  $c_1$ ,  $c_2$  — расстояния от левой опоры до диска I и II,  $Y_1$ ,  $Y_2$  — центробежные силы, действующие на вал. Допустив, что только диск I имеет некоторый эксцентриситет  $e_1$ , и беря прогиб в плоскости этого эксцентриситета, получим центробежные силы, действующие на вал:

$$Y_1 = (e_1 + y_1) m_1 \omega^2; \quad Y_2 = y_2 m_2 \omega^2,$$

или, пользуясь ур-иями, подобными ур-иям [a]:

$$\begin{aligned} Y_1 &= e_1 m_1 \omega^2 + m_1 \omega^2 (a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2), \\ Y_2 &= m_2 \omega^2 (a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{e_1 m_1 \omega^2 (1 - a_{22} m_2 \omega^2)}{(1 - a_{11} m_1 \omega^2) (1 - a_{22} m_2 \omega^2) - m_1 m_2 a_{12} a_{21} \omega^4}, \\ Y_2 &= \frac{e_1 a_{21} m_1 m_2 \omega^4}{(1 - a_{11} m_1 \omega^2) (1 - a_{22} m_2 \omega^2) - m_1 m_2 a_{12} a_{21} \omega^4}. \end{aligned} \quad [b]$$

Из этого видно, что, вместо центробежной силы  $e_1 m_1 \omega^2$ , которую мы имели в случае жесткого вала, на гибкий вал действуют две силы  $Y_1$  и  $Y_2$ . Неуравновешенность будет такая же, как и в слу-

чае жесткого вала, на который действует сила  $R_1 = Y_1 + Y_2$  при расстоянии от левой опоры равном:

$$l_1 = \frac{Y_1 c_1 + Y_2 c_2}{Y_1 + Y_2}. \quad [c]$$

Легко видеть, пользуясь ур-иями [b], что  $l_1$  не зависит от величины эксцентриситета  $e_1$ , а зависит только от упругих особенностей вала, от положения и величины  $m_1$  и  $m_2$  и от скорости  $\omega$  машины.

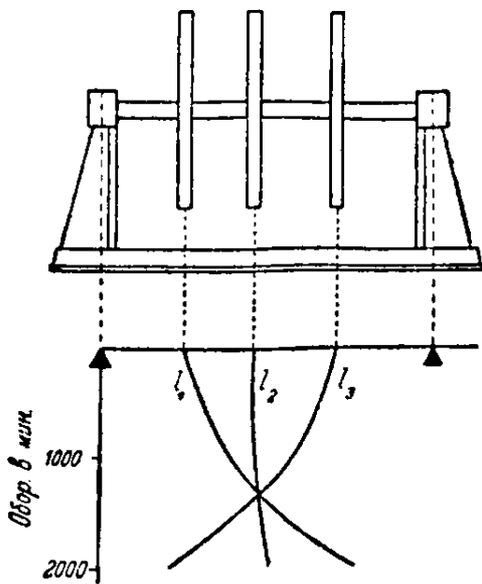
Таким же образом, как выше, можно рассмотреть влияние эксцентриситета диска II, и результат воздействия эксцентриситетов обоих дисков можно получить по принципу наложения. Из этого можно заключить, что при данной скорости неуравновешенность двух дисков на гибком валу динамически эквивалентна неуравновешенностям в двух определенных плоскостях жесткого вала. Положение этих плоскостей можно установить с помощью ур-ия [c] для одной из плоскостей и с помощью подобного же ур-ия для второй плоскости.

Подобные же заключения можно получить для гибкого вала с любым числом  $n$  дисков <sup>1)</sup> и можно показать, что неуравновешенность этих шкивов эквивалентна неуравновешенности в  $n$  определенных плоскостях жесткого вала. Так как эти плоскости остаются неизменными при данной скорости вала, то уравнивание можно выполнить приложением выправляющих грузов в двух произвольно выбранных плоскостях. При всякой иной скорости плоскости неуравновешенности эквивалентного жесткого вала меняют свое положение и выводят ротор из состояния уравнивания. Это дает нам объяснение, почему ротор, совершенно уравниваемый на балансирной машине при сравнительно низкой скорости, может оказаться неуравновешенным при рабочей скорости. Таким образом становится необходимым уравнивание в действительных условиях работы.

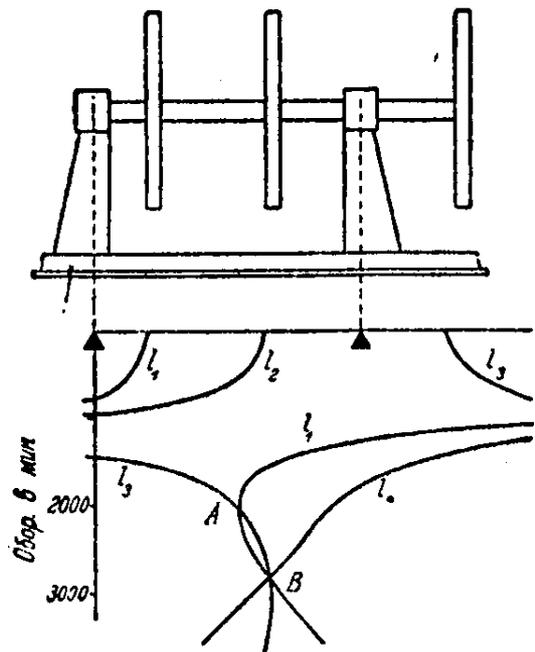
Перемещения плоскостей неуравновешенности с изменением скорости показаны ниже для двух частных случаев. На фиг. 101 представлен вал, несущий три диска. Изменения со скоростью расстояний  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  плоскостей неуравновешенности эквивалентного жесткого вала изображены на фигуре кривыми  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ . Из этого видно, что с увеличением скорости эти кривые сперва приближаются друг к другу, затем проходят через общую точку пересе-

<sup>1)</sup> Общее исследование влияния гибкости вала на уравнивание можно найти в статье *Blass'a*, упомянутой выше на стр. 183. Из этой статьи мы заимствовали фиг. 101 и 102.

чения при критической скорости, а выше ее снова расходятся. За исключением области около критической скорости, ротор можно уравновесить при любой иной скорости добавлением выправляющих грузов на любых двух или трех дисках. Более тяжелые условия показаны на фиг. 102. Из нее видно, что при скорости, равной примерно 2150 оборотов в минуту, кривые  $l_1$  и  $l_3$  проходят через одну и ту же точку  $A$ . Две плоскости эквивалентного жесткого вала совпадают и становится невозможным уравновесить машину добавлением выправляющих грузов к первому и третьему дискам. В сущности, на значительном участке скоростей около точки  $A$



Фиг. 101.



Фиг. 102.

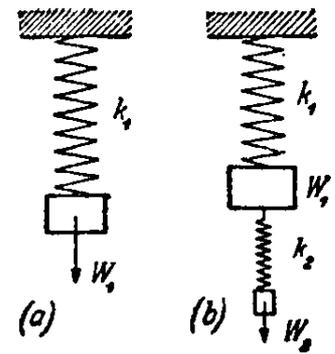
условия будут таковы, что будет трудно получить удовлетворительное уравновешивание, и следует ожидать неприятностей из-за сильных колебаний.

**36. Теория динамического поглотителя колебаний.** — Поглотитель колебаний, который мы рассмотрим ниже, состоит из небольшой колеблющейся системы, имеющей частоту, равную рабочей частоте бóльшей машины, и укрепленной на последней в соответственном месте <sup>1)</sup>. Таким способом может быть приложена к машине периодическая сила, равная по частоте и величине возмущающей силе, но действующая в направлении, обратном этой силе, чем может быть устранено соответственное колебание. Действие поглотителя колебания поясним теперь на очень простых упругих системах, изображенных на фиг. 103.

<sup>1)</sup> См. статью *J. Ormondroyd'a* и *J. P. Den Hartog'a* „Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.“, 1928.

*Поглотитель без затухания.* — Если груз  $W_1$  прикреплен к пружине, жесткость которой равна  $k_1$  (фиг. 103а), то период колебания такой системы будет  $\tau = 2\pi \sqrt{(W_1/k_1 g)}$ . Пусть возмущающая сила  $Q_0 \cos mt$ , имеющая период  $\tau_1 = (2\pi/m)$ , действует на массу  $W_1$ . Тогда устойчивое вынужденное колебание, вызванное этой силой, будет (см. стр. 14)

$$x = \frac{Q_0}{k_1} \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}} \cos mt. \quad [a]$$



Фиг. 103.

Это колебание может иметь значительную амплитуду, если только отношение  $\tau/\tau_1$  приближается к единице. Чтобы улучшить положение, прикрепим к большому грузу  $W_1$  малый груз  $W_2$  пружиной с жесткостью  $k_2$  (фиг. 103б). Таким образом получается колеблющаяся система с двумя степенями свободы, и вынужденное колебание [а] можно устранить приданием  $k_2$  и  $W_2$  определенных значений. Принимая вертикальные перемещения  $x_1$  и  $x_2$  грузов  $W_1$  и  $W_2$  за координаты, получим кинетическую и потенциальную энергию системы:

$$T = \frac{W_1}{2g} x_1'^2 + \frac{W_2}{2g} x_2'^2; \quad V = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}, \quad [b]$$

и уравнения Лагранжа [72] будут

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{g} x_1'' + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= Q_0 \cos mt; \\ \frac{W_2}{g} x_2'' + k_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad [c]$$

Устойчивое состояние вынужденного колебания получим, взяв решения ур-ий [с] в виде  $x_1 = A \cos mt$ ,  $x_2 = B \cos mt$ . Подставив последние в ур-ия [с], получим

$$\begin{aligned} x_1 &= Q_0 \frac{k_2 - m^2 \frac{W_2}{g}}{\left(k_1 + k_2 - \frac{W_1}{g} m^2\right) \left(k_2 - \frac{W_2}{g} m^2\right) - k_2^2} \cos mt, \\ x_2 &= Q_0 \frac{k_2}{\left(k_1 + k_2 - \frac{W_1}{g} m^2\right) \left(k_2 - \frac{W_2}{g} m^2\right) - k_2^2} \cos mt. \end{aligned} \quad [d]$$

Из этого видно, что колебание массы  $W_1$  можно устранить, приняв

$$k_2 - m^2 \frac{W_2}{g} = 0, \quad [e]$$

откуда

$$m = \sqrt{\frac{k_2 g}{W_2}}, \quad [f]$$

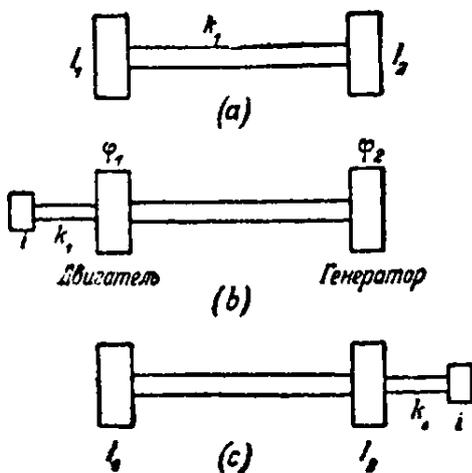
т. е. частота прикрепленной малой колеблющейся системы должна быть равна частоте возмущающей силы. Тогда из ур-ий [d]

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{Q_0}{k_2} \cos mt. \quad [g]$$

Следовательно, движение  $x_2$  груза  $W_2$  таково, что сила пружины, действующая на  $W_1$ , равна  $k_2 x_2 = -Q_0 \cos mt$ , т. е. в точности равна и противоположна вынуждающей силе. Таким образом, подвешивание дополнительного груза  $W_2$  к первоначальной системе вполне устраняет колебание груза  $W_1$ , если только условие [e] выполнено. Следует отметить, что в практических применениях имеет значение не только соотношение между  $k_2$  и  $W_2$ , но также их абсолютные величины. Из второго ур-ия [g] видно, что когда  $k_2$  взято слишком малым,  $x_2$  становится большим, и напряжения в пружине могут стать чрезмерными, т. е. может быть перейдена граница осуществимого перемещения  $x_2$ . Оба уравнения [e] и [g] при проектировании на практике поглотителя следует принимать во внимание, и величиной  $Q_0$  будут определяться наименьшие из возможных значений величин  $k_2$  и  $W_2$ .

Описанный способ устранения колебания можно применить также к случаю скручиваемых систем, показанных на фиг. 104. Система, состоящая из двух масс с моментами инерции  $I_1, I_2$  и вала с жесткостью на кручение  $k$ , имеет период собственных колебаний, равный (см. ур-ие 15)

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}}. \quad [h]$$



Фиг. 104.

Если пульсирующий вращающий момент  $M_t \cos mt$  действует на массу  $I_1$ , то вынужденные колебания кручения обоих дисков  $I_1, I_2$ , вызванные этим вращающим моментом, могут быть устранены добавлением к  $I_1$  небольшой колеблющейся системы, состоящей из диска с

моментом инерции  $i$  и вала с жесткостью на кручение  $k_1$  (фиг. 104 *b*). Необходимо только взять для  $k_1$  и  $i$  такие значения, чтобы получить частоту присоединяемой системы, равной частоте пульсирующего вращающего момента. Когда этот вращающий момент находится в резонансе с главной системой, то должно быть удовлетворено условие

$$\frac{k_1}{i} = \frac{k(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}. \quad [i]$$

Тогда углы поворота при колебании дисков  $I_1$ ,  $I_2$  и  $i$  будут

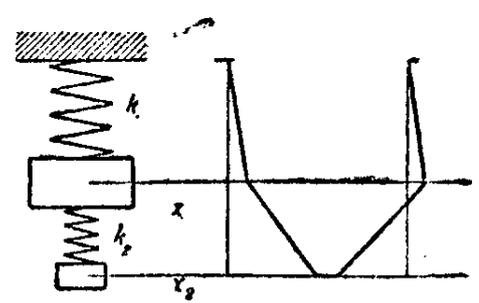
$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad \varphi_3 = -\frac{M_t}{k_1} \cos mt,$$

и пружинный момент в присоединяемом малом валу будет в точности равен и противоположен внешнему вращающему моменту  $M_t \cos mt$ .

До сих пор рассматривалось действие поглотителя только для одной частоты. Общий случай колебания системы представлен ур-иями [c], и из этих ур-ий можно заключить, что система имеет два вида собственных колебаний. Частоты этих колебаний будут определяться двумя корнями  $m_1^2$  и  $m_2^2$  ур-ия, квадратного относительно  $m^2$ , которое получим, приравняв знаменатель выражений [d] нулю. Отношение  $x_1/x_2$  для этих двух частот (из ур-ий [d]):

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_1 = 1 - \frac{m_1^2 W_2}{gk_2}; \quad \left(\frac{x_1}{x_2}\right)_2 = 1 - \frac{m_2^2 W_2}{gk_2}.$$

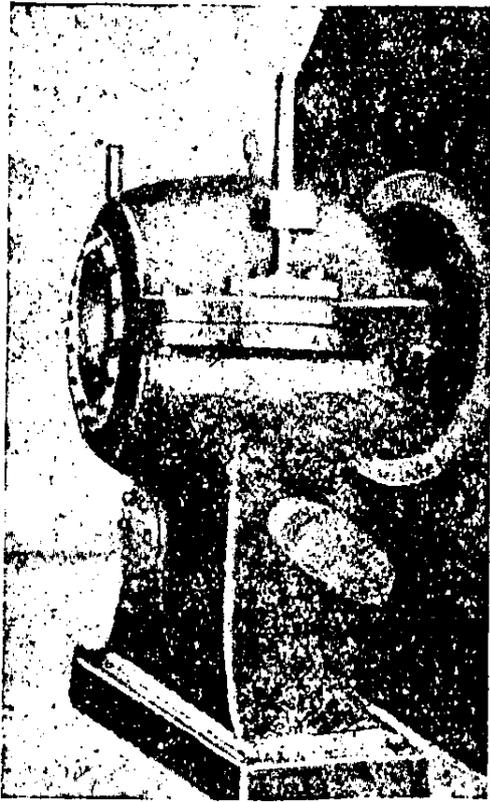
Соответствующие виды колебаний для частного случая схематически показаны на фиг. 105. Когда частота возмущающей силы такова, как представлено ур-ием [f], поглотитель устраняет колебание. Но при любой другой частоте возмущающей силы колебания не будут устранены, и, когда  $m = m_1$  или  $m = m_2$ , будет иметь место состояние резонанса. Из этого видно что применимость поглотителя без затухания ограничивается машинами с постоянной скоростью как, например, электрические синхронные или индуктивные машины.



Фиг. 105.

Одно из применений такого поглотителя показано на фиг. 106, которая представляет наружный опорный подшипник турбогенератора в 30000 киловатт. Эта опора колебалась значительно при скорости 1800 оборотов в минуту в направлении оси генератора. Прибалчиванием к опоре двух поглотителей колебания, состоя-

ших каждый из стержня длиной 50,8 см, с поперечным сечением 22 мм на 66 мм, нагруженного на конце грузом в 11,32 кг, амплитуда была доведена приблизительно до трети ее первоначальной величины.



Фиг. 106.

туда была доведена приблизительно до трети ее первоначальной величины.

*Затухающий поглотитель колебаний.* — Чтобы сделать поглотитель действительным для широкого ряда частот, необходимо в вибратор ввести затухание. Из фиг. 105 видно, что масса вибратора колеблется гораздо сильнее, чем главная масса, вследствие чего затухание, пропорциональное скорости, будет много заметнее тогда, когда оно помещено в системе вибратора, чем когда оно — в главной системе. Допустим, например, что затухание помещено между массами  $W_1$  и  $W_2$  (фиг. 103 b), и что оно пропорционально их относительной скорости  $(x_1' - x_2')$ . Тогда, приняв во внимание силу трения, получим дифференциальные уравнения движения из уравнений [c] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{W_1}{g} x_1'' + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) &= Q_0 \cos mt + \alpha(x_2' - x_1'), \\ \frac{W_2}{g} x_2'' + k_2(x_2 - x_1) &= \alpha(x_1' - x_2'), \end{aligned} \quad [k]$$

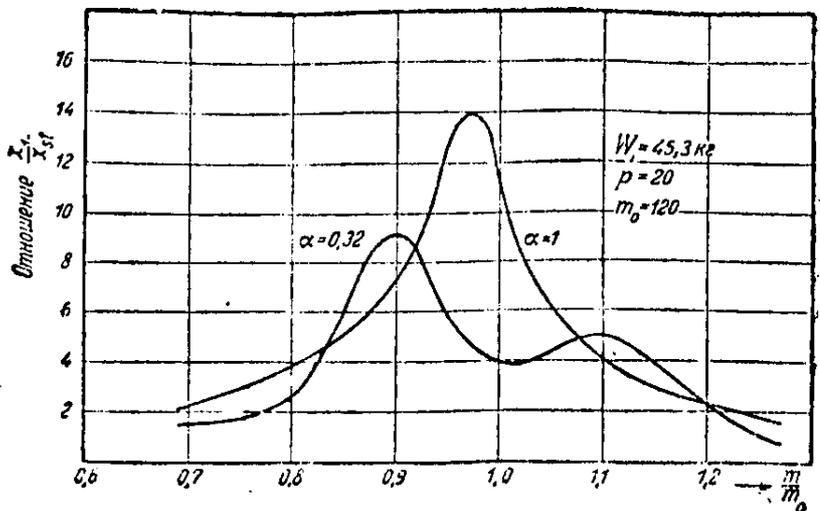
где множитель  $\alpha$  зависит от условий затухания. Принимая этот множитель очень малым, мы приближаемся к положению поглотителя колебания без затухания. Действие его в этом случае было объяснено выше. В случае бесконечно большого  $\alpha$ , не будет относительного движения между двумя массами, поглотитель колебаний не будет работать, и главная масса может получить сильное колебание в условиях резонанса. Для каждого частного случая существует определенное значение  $\alpha$ , при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает минимума. Это *наилучшее затухание* можно определить из решения уравнений [k], которое в частном случае, когда  $k_1 g / W_1 = k_2 g / W_2$ , дает следующее выражение для амплитуды вынужденного колебания<sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> См. выше цитированную статью J. Ormondroyd'a и J. P. Den-Hartog'a.

$$\frac{x_1}{x_{st}} = p \sqrt{\frac{\left(\frac{\alpha^2}{m_0^2 W_1^2}\right) \beta g^2 p^2 + (1 - \beta)^2}{\left(\frac{\alpha^2}{m_0^2 W_1^2}\right) \frac{p^2 g^2}{\beta} - [p(1 - \beta) + 1]^2 + \frac{1}{\beta^2} [p(1 - \beta)^2 - \beta]^2}} \quad [1]$$

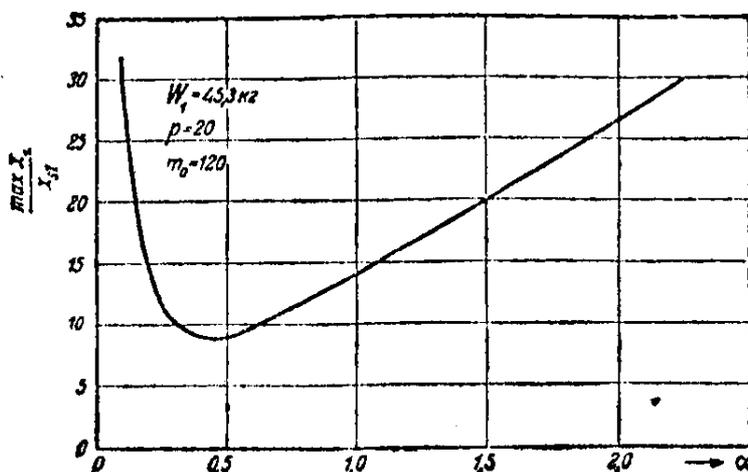
Здесь  $W_1/g$  — масса главной системы;  $x_{st} = (Q_0/k_1)$  — статический прогиб главной массы, вызванный силой  $Q_0$ ;  $m_0 = \sqrt{\frac{k_1 g}{W_1}} = \sqrt{\frac{k_2 g}{W_2}}$ ;  $\beta = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2$ ;  $p = \frac{W_1}{W_2} = \frac{k_1}{k_2}$ .

Из этого выражения можно получить значение отношения  $x_1/x_{st}$  для определенной системы и определенного значения  $\alpha$  затухания при различных значениях  $\beta$ , т. е. при различных частотах возмущающей силы  $Q_0 \cos mt$ . На фиг. 107 даны результаты этих вычислений для случая  $p = 20$ ,  $m_0 = 120$  и  $W_1 = 45,3$  кг. При  $\alpha = 0,32$  кривая, представляющая отношение  $x_1/x_{st}$  в функции  $m/m_0$ , имеет два различных максимума, отвечающих двум дающим резонанс частотам колебаний



Фиг. 107.

Для случая  $\alpha = 1$  вершина второго резонанса пропадает. Максимальная амплитуда (см. фиг. 107) всегда совпадает с первой вершиной.

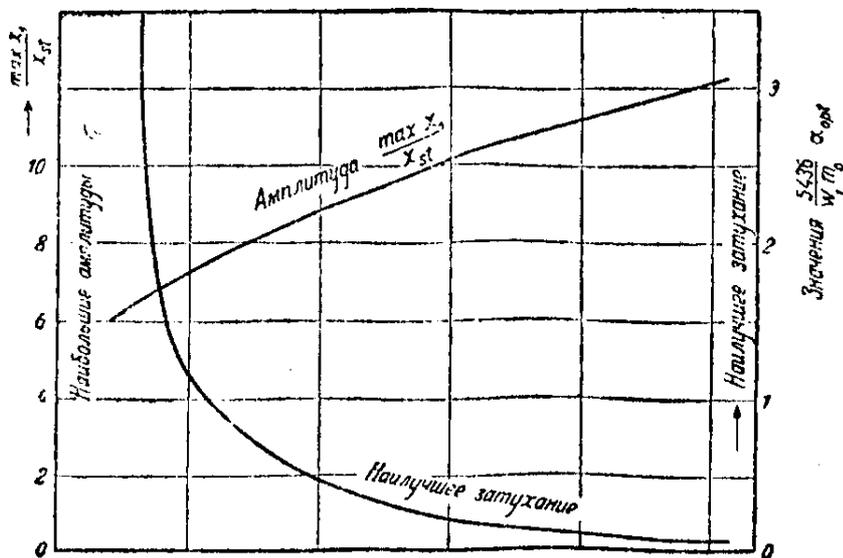


Фиг. 108.

Изображая эту наибольшую амплитуду в функции затухания  $\alpha$ , получаем кривую, изображенную на фиг. 108, откуда можно определить наилучшее затухание в рассматриваемой системе. Ряд кривых, подобных кривой фиг. 108, был вычислен для различных величин  $p$  и были опреде-

лены соответственные *наилучшие затухания*. Результаты этих вычислений представлены на фиг. 109 кривыми, изображающими наилучшее затухание  $\alpha$  и наибольшую амплитуду этого затухания, и то, и другое в функции  $p$ .

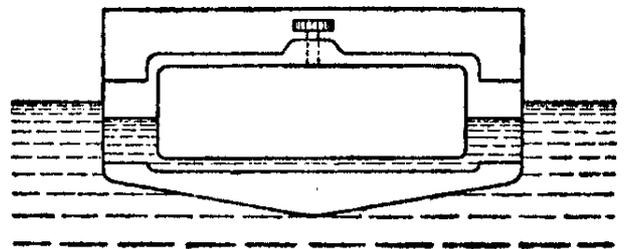
Следует отметить, что вычисления были сделаны для  $W_1 = 45,3 \text{ кг}$  и  $m_0 = 120$ , но полученные результаты можно использовать также для



Фиг. 109.

или  $m_0$ , необходимо лишь принять для ординат значение  $[5436/m_0 W_1] \alpha_{opt}$  вместо  $\alpha_{opt}$ .

Поглотитель колебаний в виде поглотителя кручения применяется на некоторых автомобильных двигателях. Его можно применить также для понижения колебаний кручения в коленчатых валах двигателей Дизеля. Тот же принцип положен в основу и известного бака против боковой качки, предложенного Фрамом в 1911 году<sup>1)</sup> для устойчивости судов. Он состоит из двух резервуаров, частично наполненных водой и соединенных двумя трубами (фиг. 110). Верхняя труба снабжена воздушным клапаном. Судно, качающееся в воде, соответствует главной системе на фиг. 103; толчки волн представляют собою возмущающую силу, а вода, переливающаяся из одного резервуара в другой — поглотитель колебаний. Затухание в системе регулируется помощью воздушного клапана. Это



Фиг. 110.

<sup>1)</sup> H. Frahm, Neuartige Schlingertanks zur Abdämpfung von Schiffsrollbewegungen, „Jahrbuch d. Schiffbautechnik Ges.“ 1911, Bd 12, S. 283.

устройство очень успешно применялось на больших пассажирских пароходах. Другой тип поглотителя колебаний применялся *Фрамом* для устранения колебаний корпуса судна. Вибратор системы, подобной паллографу (см. фиг. 11), укреплялся на корме судна, и сильные колебания массы этого вибратора, вызываемые колебаниями корпуса судна, поглощались специальным гидравлическим устройством для затухания. Таким образом оказалось возможным весьма значительно понизить колебания корпуса судна, возникавшие из-за неуравновешенности частей машины.

---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ.

При рассмотрении колебания упругих тел будем принимать, что материал тела однороден, изотропен и что он следует закону Гука. Дифференциальные уравнения движения, установленные в предыдущей главе для системы частиц, будем применять также и здесь.

Однако, в случае упругих тел, вместо нескольких сосредоточенных масс, мы имеем систему, состоящую из неопределенно большого числа частиц, между которыми действуют силы упругости. Эта система требует бесконечно большого числа координат для определения ее положения, и поэтому имеет бесконечно большое число степеней свободы, так как любое малое перемещение удовлетворяет условию непрерывности, т. е. перемещение, которое не вызывает разрывов тела, может быть принято за возможное или виртуальное перемещение. На этом основании видим, что любое упругое тело может иметь бесконечно большое число собственных видов колебаний.

Для случая тонких стержней и пластинок задача колебания может быть значительно упрощена. Эти задачи, как имеющие большое значение при многих применениях в инженерном деле будут рассмотрены в этой главе более подробно<sup>1)</sup>.

**37. Продольные колебания призматических стержней.** — *Дифференциальное уравнение продольных колебаний.* — Последующее рассмотрение основано на допущении, что при продольном колебании призматического стержня поперечные сечения стержня остаются плоскими и частицы в этих поперечных сечениях испытывают только движение в направлении оси стержня. Продольные растяжения и сжатия, которые имеют место при подобном колебании стержня, будут конечно сопровождаться некоторыми боковыми деформациями, но в дальнейшем будем рассматривать

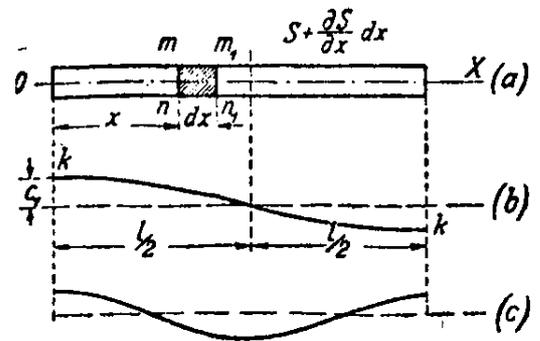
---

<sup>1)</sup> Наиболее полное рассмотрение задач колебаний упругих систем можно найти в известной книге *Lord Rayleigh, Theory of Sound*. См. также *H. Lamb, The Dynamical Theory of Sound*; *A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed. 1927 и *Handbuch der Physik*, Bd VI, 1928.

только те случаи, где длина продольных волн велика сравнительно с размерами поперечных сечений стержня. В этих случаях боковыми перемещениями при продольном колебании можно пренебречь без существенных ошибок<sup>1)</sup>.

При этих условиях дифференциальное ур-ие движения элемента стержня между двумя смежными поперечными сечениями  $mn$  и  $m_1n_1$  (см. фиг. 111), можно написать таким же образом, как для частицы.

Пусть  $u$  — продольное перемещение какого-либо поперечного сечения  $mn$  стержня при колебании,  $e$  — относительное удлинение,  $E$  — модуль упругости,  $A$  — площадь поперечного сечения,  $S = AEe$  — продольная растягивающая сила,  $\gamma$  — вес единицы объема материала стержня,  $l$  — длина стержня.



Фиг. 111.

Тогда относительное удлинение и растягивающая сила в поперечном сечении стержня будут

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad S = AE \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для смежного поперечного сечения растягивающая сила будет

$$S + dS = AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right).$$

Приняв во внимание, что сила инерции элемента  $mnm_1n_1$  стержня равна

$$-\frac{A\gamma dx}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

и пользуясь началом д'Аламбера, получим следующее дифференциальное ур-ие движения элемента  $mnm_1n_1$

$$-\frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad [89]$$

<sup>1)</sup> Полное решение задачи продольных колебаний цилиндрического стержня кругового поперечного сечения, при котором учтены также боковые перемещения, дано *L. Pochhammer*’ом, „*Journal f. Mathem.*“ Bd 81, 1876, S. 324.

где <sup>1)</sup>

$$a^2 = \frac{Fg}{\gamma}. \quad [90]$$

*Решение помощью тригонометрического ряда.* — Перемещение  $u$ , зависящее от координаты  $x$  и от времени  $t$ , должно быть такой функцией  $x$  и  $t$ , чтобы удовлетворять частному дифференциальному уравнению [89]. Частные решения этого уравнения можно легко найти, приняв во внимание, во-первых, что в общем случае любое колебание системы можно разложить на собственные виды колебаний, и, во-вторых, что, когда система испытывает один из собственных видов колебаний, все точки системы выполняют простое гармоническое колебание и двигаются одним и тем же темпом так, что все они проходят одновременно через свое положение равновесия. Допустим теперь, что стержень испытывает собственный вид колебания, частота которого  $p/2\pi$ . Тогда решение уравнения [89] следует взять в таком виде:

$$u = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad [a]$$

где  $A$  и  $B$  произвольные постоянные, а  $X$  некоторая функция одного только  $x$ , определяющая форму нормального вида рассматриваемого колебания и называемая *нормальной функцией*. Эта функция должна быть определена в каждом частном случае так, чтобы удовлетворялись условия на концах стержня. Для примера рассмотрим продольные колебания стержня со свободными концами. В этом случае растягивающая сила на концах при колебании должна быть равна нулю, и мы получаем следующие условия на концах (см. фиг. 111):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \quad [b]$$

Подставив [a] в уравнение [89], получим:

$$-p^2 X = a^2 \frac{d^2 X}{dx^2}$$

откуда

$$X = C \cos \frac{px}{a} + \sin \frac{px}{a}. \quad [c]$$

<sup>1)</sup> Далее будет показано (стр. 286), что  $a$  есть скорость распространения волны вдоль стержня.

Чтобы удовлетворить первому из условий [b], необходимо положить  $D=0$ . Второе из условий [b] будет удовлетворено, когда

$$\sin \frac{pl}{a} = 0. \quad [91]$$

Это — уравнение частоты для рассматриваемого случая, откуда можно определить частоты собственных видов продольных колебаний стержня со свободными концами. Уравнение это будет удовлетворяться при

$$\frac{pl}{a} = i\pi, \quad [d]$$

где  $i$  есть целое число. Беря  $i=1, 2, 3, \dots$ , получим частоты различных видов колебания. Частота основного типа колебания найдется при  $i=1$ ; тогда

$$p_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}. \quad [92]$$

Соответственный период колебаний будет:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1} = 2l \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}. \quad [93]$$

Форма этого вида колебания представлена на фиг. 111 b кривой  $kk$ , ординаты которой равны:

$$X_1 = C_1 \cos \frac{p_1 x}{a} = C_1 \cos \frac{\pi x}{l}.$$

На фиг. 111 c представлен второй вид колебания, где

$$\frac{p_2 l}{a} = 2\pi; \quad \text{и} \quad X_2 = C_2 \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Общий вид частного решения [a] уравнения [89] будет:

$$u = \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{l} \right). \quad [e]$$

Наложением подобных частных решений любое продольное колебание стержня<sup>1)</sup> может быть представлено в следующем виде:

$$u = \sum_{i=1, 2, 3, \dots}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{l} \right). \quad [94]$$

<sup>1)</sup> Перемещение стержня, как твердого тела, здесь не принято во внимание. Пример, когда это перемещение следует принять во внимание, будет рассмотрен на стр. 207.

Произвольные постоянные  $A_i$ ,  $B_i$  всегда можно выбрать так, чтобы удовлетворить любым начальным условиям.

Возьмем, например, что в начальный момент  $t=0$  перемещения  $u$  даются ур-ием  $(u)_{t=0}=f(x)$ , а начальные скорости ур-ием  $(u')_{t=0}=f_1(x)$ . Подставляя  $t=0$  в ур-ие [94], получим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad [f]$$

Подставляя  $t=0$  в производную по времени ур-ия [94], получим:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{i\pi a}{l} B_i \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad [g]$$

Коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  в ур-иях [f] и [g] можно теперь определить, как изложено выше (см. н° 12), при помощи формул:

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx, \quad [h]$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{i\pi x}{l} dx. \quad [k]$$

Рассмотрим теперь, например, случай, когда призматический стержень, сжимаемый силами, приложенными к его концам, внезапно освобождается от этого сжатия в начальный момент  $t=0$ . Полагая

$$(u)_{t=0} = f(x) = \frac{el}{2} - ex; \quad f_1(x) = 0,$$

где  $e$  обозначает относительное укорочение в момент  $t=0$ , мы получим из ур-ий [h] и [k]:

$$A_i = \frac{4el}{\pi^2 i^2} \text{ для } i \text{ нечетного; } \quad A_i = 0 \text{ для } i \text{ четного; } \quad B_i = 0,$$

и общее решение [94] получается таким:

$$u = \frac{4el}{\pi^2} \sum_{i=1, 3, 5, \dots}^{i=\infty} \frac{\cos \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l}}{i^2}.$$

Только нечетные целые числа  $i=1, 3, 5, \dots$  входят в это решение, и колебание — симметрично относительно среднего поперечного сечения стержня.

На общее решение [94], представляющее колебание стержня,

может быть наложено любое продольное перемещение стержня, как твердого тела.

*Решение при помощи обобщенных координат.* — Взяв за обобщенные координаты в этом случае выражения в скобках ур-ия [e] и пользуясь обозначением  $q_i$  для этих координат, мы получим:

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \cos \frac{i\pi x}{l}. \quad [l]$$

Потенциальная энергия системы, состоящая в этом случае из энергии растяжения и сжатия, будет:

$$V = \frac{AE}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{AE\pi^2}{2l^2} \int_0^l \left( \sum_{i=1}^{i=\infty} i q_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right)^2 dx;$$

$$V = \frac{AE\pi^2}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^2 q_i^2. \quad [m]$$

При вычислении определенного интеграла

$$\int_0^l \left( \sum i q_i \sin \frac{i\pi x}{l} \right)^2 dx$$

только члены, содержащие координаты  $q_i$  в квадрате, дают интегралы, отличные от нуля (см. п° 12).

Кинетическая энергия в то же время будет

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2. \quad [n]$$

Подставляя  $T$  и  $V$  в ур-ия Лагранжа [71], получим для каждой координаты  $q_i$  следующее дифференциальное ур-ие:

$$q_i'' + \frac{a^2 \pi^2 i^2}{l^2} q_i = 0, \quad [o]$$

откуда

$$q_i = A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{l}. \quad [p]$$

Этот результат вполне совпадает с полученным ранее (см. ур-ие [e]). Мы видим, что ур-ия [o] содержат каждое только одну координату  $q_i$ . Выбранные координаты независимы друг от друга, и соответствующие колебания являются „основными“ видами колебания стержня (см. стр. 125).

Применение обобщенных координат особенно полезно при рассмотрении вынужденных колебаний. Для примера рассмотрим здесь случай стержня с одним заделанным, а другим свободным концом. Решение для этого случая можно получить сразу из ур-ия [94]. Необходимо только положить в предыдущем случае, что стержень со свободными концами испытывает колебания, симметричные относительно середины стержня. Это условие будет выполнено, если в решении [94] принять  $i = 1, 3, 5, \dots$ . Тогда среднее сечение можно рассматривать закрепленным, и каждая половина стержня будет в точно таких же условиях, как стержень с одним закрепленным концом, а другим свободным. Обозначив через  $l$  длину такого стержня и взяв начало координат в закрепленном конце, получим для этого случая решение подстановкой в ур-ие [94]  $2l$  вместо  $l$  и  $\sin i\pi x/2l$  вместо  $\cos i\pi x/l$ . Таким образом имеем

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{2l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{2l} \right). \quad [95]$$

Теперь, если мы примем выражения в скобках этого решения за обобщенные координаты и воспользуемся обозначением  $q_i$  для них, получим:

$$u = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{2l}. \quad [9]$$

Подставляя это в выражения для потенциальной кинетической энергии, получим

$$V = \frac{AE}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2 AE}{16l} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} i^2 q_i^2, \quad [96]$$

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \int_0^l (u')^2 dx = \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} q_i'^2. \quad [97]$$

Ур-ие Лагранжа для свободного колебания, соответствующего любой координате  $q_i$ , будет таково:

$$q_i'' + \frac{a^2 i^2 \pi^2}{4l^2} q_i = 0,$$

откуда:

$$q_i = A_i \cos \frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{2l}.$$

Это совпадает с полученным нами выше (см. ур-ие [95]).

*Вынужденные колебания.* — Если на стержень действуют возмущающие силы, то ур-ия Лагранжа [72] будут:

$$\frac{A\gamma l}{2g} q_i'' + \frac{\pi^2 i^2 AE}{8l} q_i = Q_i$$

или

$$q_i'' + \frac{a^2 \pi^2 i^2}{4l^2} q_i = \frac{2g}{A\gamma l} Q_i, \quad [r]$$

где  $Q_i$  обозначает обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате  $q_i$ . Для определения этой силы употребим общий способ, изложенный выше (см. стр. 115). Придадим приращение  $\delta q_i$  координате  $q_i$ . Соответствующее перемещение стержня, как это следует из ур-ия [q], будет

$$\delta u = \delta q_i \sin \frac{i\pi x}{2l}.$$

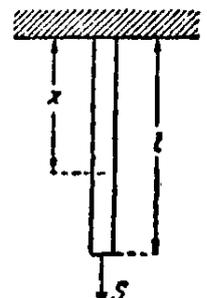
Теперь нужно определить работу, производимую возмущающими силами на этом перемещении. Эта работа, разделенная на  $\delta q_i$ , представляет обобщенную силу  $Q_i$ . Подставляя это в ур-ие [r], можем легко получить общее решение этого ур-ия, присоединяя к свободным колебаниям, полученным выше, колебания, вызываемые возмущающей силой  $Q_i$ . Это последнее колебание обычно принимается в виде определенного интеграла<sup>1)</sup>. Тогда

$$q_i = A_i \cos \frac{i\pi at}{2l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{2l} + \frac{4g}{A\gamma a \pi i} \int_0^t Q_i \sin \frac{i\pi a}{2l} (t - t_1) dt_1. \quad [s]$$

Первые два члена этого решения представляют свободное колебание, вызванное начальным перемещением и начальным импульсом. Третий представляет колебание, вызванное возмущающей силой. Подставляя решение [s] в ур-ие [q], получим общее выражение для колебаний стержня.

Для примера рассмотрим теперь колебание, вызванное силой  $S = f(t)$ , действующей на свободный конец стержня (см. фиг. 112). Придав приращение  $\delta q$  координате  $q_i$ , получим соответствующее перемещение (см. ур-ие [q]):

$$\delta u = \delta q_i \sin \frac{i\pi x}{2l}.$$



Фиг. 112.

Работа, произведенная возмущающей силой на этом перемещении, будет

$$S \delta q_i \sin \frac{i\pi}{2},$$

<sup>1)</sup> См. ур-ие [24], стр. 25.

и мы получим

$$Q_i = S \sin \frac{i\pi}{2} = (-1)^{\frac{i-1}{2}} S.$$

Подставляя в [s] и приняв во внимание только ту часть колебания, которая вызывается возмущающей силой, получим

$$q_i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} \frac{4g}{A\gamma a\pi i} \int_0^t S \sin \frac{i\pi a}{2l} (t-t_1) dt_1.$$

Подставляя в [q] и рассматривая движение нижнего конца стержня ( $x=l$ ), имеем:

$$(u)_{x=l} = \frac{4g}{A\gamma a\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \frac{1}{i} \int_0^t S \sin \frac{i\pi a}{2l} (t-t_1) dt_1. \quad [u]$$

В любом частном случае необходимо только подставить  $S=f(t_1)$  в [u] и выполнить указанное интегрирование.

Возьмем, например, частный случай колебаний, вызванных в стержне постоянной силой, внезапно приложенной в первоначальный момент ( $t=0$ ). Тогда из [u] мы получим:

$$(u)_{x=l} = \frac{8glS}{A\gamma a^2\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} \left(1 - \cos \frac{i\pi at}{2l}\right). \quad [98]$$

Из этого видно, что таким образом могут быть представлены все виды колебаний, периоды и частоты которых равны

$$\tau_i = \frac{4l}{ai}; \quad f_i = \frac{1}{\tau_i} = \frac{ai}{4l}.$$

Наибольшее удлинение произойдет при  $(i\pi at/2) = -1$ . Тогда

$$(u)_{x=l} = \frac{16glS}{A\gamma a^2\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \frac{1}{i^2},$$

или, приняв во внимание, что

$$a^2 = \frac{Eg}{\nu} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

получим

$$(u)_{x=l} = \frac{2lS}{AE}.$$

Мы пришли таким образом к общеизвестному заключению, что внезапно приложенная сила вызывает вдвое большее удлинение, чем сила, постепенно действующая<sup>1)</sup>.

В качестве другого примера рассмотрим продольное колебание стержня со свободными концами (фиг. 111), вызванное продольной силой  $S$ , внезапно приложенной к концу  $x=l$ . Наложив на колебание стержня, представленное ур-ием [l], перемещение  $q_0$  стержня как твердого тела, можем представить перемещение  $u$  в следующем виде:

$$u = q_0 + q_1 \cos \frac{\pi x}{l} + q_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + q_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \quad [v]$$

Выражения для потенциальной и кинетической энергии из [m] и [n] будут:

$$V = \frac{AE\pi^2}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^2 q_i^2; \quad T = \frac{A\gamma l}{2g} q_0'^2 + \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2$$

и ур-ия движения получаются:

$$\begin{aligned} \frac{A\gamma l}{g} q_0'' &= Q_0, \\ \dots \dots \dots & \\ \frac{A\gamma l}{2g} q_i'' + \frac{AE\pi^2 i^2}{2l} q_i &= Q_i, \\ \dots \dots \dots & \end{aligned} \quad [w]$$

Пользуясь тем же способом, как выше (см. стр. 205), можно показать, что в этом случае

$$Q_0 = S \quad \text{и} \quad Q_i = (-1)^i S.$$

Тогда, допустив, что начальные скорости и начальные перемещения равны нулю, получим из ур-ий [w]:

$$q_0 = \frac{gSt^2}{2A\gamma l},$$

$$q_i = (-1)^i \frac{2g}{A\pi a \gamma i} \int_0^t S \sin \frac{i\pi a}{l} (t-t_1) dt_1 = \frac{(-1)^i 2glS}{A\pi^2 i^2 \gamma a^2} \left( 1 - \cos \frac{i\pi at}{l} \right).$$

Подставляя в ур-ие [v], получим следующее выражение для перемещений, вызванных внезапно приложенной силой  $S$ :

$$u = \frac{gSt^2}{2A\gamma l} + \frac{2glS}{A\pi^2 a^2 \gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( 1 - \cos \frac{i\pi at}{l} \right).$$

<sup>1)</sup> Более подробное рассмотрение этого обстоятельства см. следующий п<sup>o</sup> (стр. 214).

Первый член правой части представляет перемещение, определенное как для твердого тела. К этому перемещению прибавляются колебания стержня со свободными концами. Пользуясь обозначениями  $\delta = (Sl/AE)$  для удлинения стержня, постоянно растягиваемого силой  $S$ , и  $\tau = (2l/a)$  для периода основного колебания, получим перемещение конца  $x=l$  стержня:

$$(u)_{x=l} = \frac{2\delta t^2}{\tau^2} + \frac{2\delta}{\pi^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} \left( 1 - \cos \frac{2i\pi t}{\tau} \right).$$

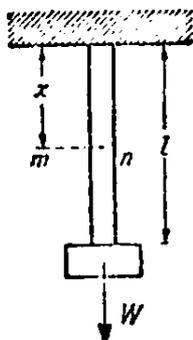
Наибольшее перемещение, вызванное колебанием, получится при  $t = (\tau/2)$ . Тогда

$$(u)_{x=l} = \frac{\delta}{2} + \frac{4\delta}{\pi^2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = \frac{\delta}{2} + \frac{4\delta}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} = \delta.$$

Подобная задача встречается при исследовании колебаний, происходящих во время подъема длинного стержня бура, применяемого для глубоких нефтяных скважин.

### 38. Колебание стержня с грузом на конце. — Собственные колебания. —

Задача колебания стержня с грузом на конце (фиг. 113) может иметь применение на практике не только в случае призматических стержней, но также когда груз поддерживается спиральной пружиной, как в случае пружины индикатора (см. стр. 22).



Если масса стержня или пружины мала сравнительно с массой груза на конце, то ею можно пренебречь, и задача сведется к системе с одной степенью свободы (см. фиг. 1). В дальнейшем рассмотрим подробно влияние массы стержня. Обозначив продольные перемещения от положения равновесия через  $u$  и пользуясь дифференциальным ур-нем [89] продольных колебаний, рассмотренным в предыдущем п<sup>с</sup>, получим:

Фиг. 113.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad [89']$$

где для призматического стержня

$$a^2 = \frac{Eg}{\gamma},$$

а для спиральной пружины

$$a^2 = \frac{klg}{q}.$$

В этом последнем случае  $k$  — жесткость пружины, которая представляет груз, необходимый, чтобы вызвать общее удлинение пружины, равное единице,  $l$  — длина пружины, а  $q$  — вес пружины на единицу длины.

Концевые условия будут таковы. На закрепленном конце перемещение должно быть равным нулю при колебании, и мы получим:

$$(u)_{x=0} = 0. \quad [a]$$

На нижнем конце, к которому прикреплен груз, растягивающая сила стержня должна быть равна силе инерции колеблющегося груза  $W$ , и мы имеем<sup>1)</sup>:

$$AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = - \frac{W}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} \quad [b]$$

Допустив, что система испытывает один из основных видов колебания, получим:

$$u = X (A \cos pt + B \sin pt), \quad [c]$$

где  $X$  нормальная функция одного только  $x$ , определяющая форму основного вида колебания.

Подставляя [c] в ур-ие [89'], получим:

$$a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + p^2 X = 0,$$

откуда

$$X = C \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a}, \quad [d]$$

где  $C$  и  $D$  произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы удовлетворить условию [a], положим  $C = 0$  в решении [d]. Из условия [b] получим:

$$AE \frac{p}{a} \cos \frac{pl}{a} = \frac{W}{g} p^2 \sin \frac{pl}{a}. \quad [b']$$

Пусть  $\alpha = \frac{A\gamma l}{W}$  — отношение веса стержня к весу груза  $W$  и  $\beta = \frac{pl}{a}$ . Тогда ур-ие [b'] получает вид:

$$\alpha = \beta \operatorname{tg} \beta. \quad [99]$$

Это — уравнение частоты для рассматриваемого случая, корни которого можно легко получить графически, если только отношение  $\alpha$  известно. Основной вид колебания обыкновенно в практических применениях является наиболее важным, и значения  $\beta_1$  наименьшего корня ур-ия [99] при различных величинах  $\alpha$  даны в нижеследующей таблице:

$\alpha = 0,01$	0,10	0,30	0,50	0,70	0,90	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00	5,00	10,0	20,0	100,0	$\infty$
$\beta_1 = 0,10$	0,32	0,52	0,65	0,75	0,82	0,86	0,98	1,08	1,20	1,27	1,32	1,42	1,52	1,568	$\pi/2$

Если вес стержня мал сравнительно с грузом  $W$ , величина  $\alpha$  и корень  $\beta_1$  будут малы, и ур-ие [99] может быть упрощено, положив  $\operatorname{tg} \beta = \beta$ ; тогда

$$\beta^2 = \alpha = \frac{A\gamma l}{W}$$

и мы получим:

$$\beta = \frac{pl}{a} = \sqrt{\frac{A\gamma l}{W}} \quad [e]$$

и

$$p = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{A\gamma l}{W}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \quad [f]$$

где  $\delta_{st} = Wl/AE$  представляет статическое удлинение стержня под действием груза  $W$ .

<sup>1)</sup> Постоянный груз  $W$ , при состоянии равновесия уравновешенный постоянным растяжением стержня, не будет влиять на условие на конце.

Этот результат совпадает с полученным ранее для системы с одной степенью свободы (см. ур-ие [3], стр. 8). Лучшее приближение получится при подстановке в ур-ие [99]  $\operatorname{tg} \beta = \beta + \beta^3/3$ . Тогда

$$\beta (\beta + \beta^3/3) = \alpha$$

или

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \beta^3/3}}. \quad [g]$$

Подставляя первое приближение [e] вместо  $\beta$  в правую часть этого ур-ия, получим:

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \alpha/3}} \quad \text{и} \quad p = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st} (1 + \alpha/3)}}. \quad [h]$$

Из сравнения [h] с [f] можно заключить, что лучшее приближение получится прибавлением одной трети веса стержня к весу  $W$  груза. Это — общеизвестное приближенное решение, полученное ранее методом Рейля (см. стр. 65).

Из сравнения приближенного решения [h] с данными вышеприведенной таблицы можно заключить, что при  $\alpha = 1$  ошибка, происходящая вследствие применения приближенной формулы, менее 1%, и во всех случаях, когда вес стержня менее веса груза, приближенное решение является удовлетворительным для практических применений.

Допустим, что для данного  $\alpha$  последовательные корни  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  ур-ия частоты [99] определены, и подставляя  $\beta_i a/l$  вместо  $p$  в решение [c], получим:

$$u_i = \sin \frac{\beta_i x}{l} \left( A_i \cos \frac{\beta_i a t}{l} + B_i \sin \frac{\beta_i a t}{l} \right).$$

Это решение представляет основной вид колебания порядка  $i$  нашей системы. Наложением друг на друга подобных колебаний можно получить любое колебание стержня с грузом на конце в виде ряда:

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{\beta_i x}{l} \left( A_i \cos \frac{\beta_i a t}{l} + B_i \sin \frac{\beta_i a t}{l} \right), \quad [k]$$

произвольные постоянные  $A_i$  и  $B_i$  которого следует определить из начальных условий.

Допустим, например, что стержень находится в покое под действием растягивающей силы  $S$ , приложенной к нижнему концу, и что в начальный момент  $t=0$  эта сила внезапно устранена. Для этого случая все коэффициенты  $B_i$  в ур-ии [k] следует приравнять нулю, так как начальные скорости равны нулю. Коэффициенты  $A_i$  следует определить таким способом, чтобы они представляли начальное положение системы. Из постоянства растяжения стержня в начальный момент получим:

$$(u)_{t=0} = \frac{Sx}{AE}.$$

Ур-ие [k] при  $t=0$  дает:

$$(u)_{t=0} = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{\beta_i x}{l}.$$

Коэффициент  $A_i$  следует определить так, чтобы удовлетворить ур-ию:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{\beta_i x}{l} = \frac{Sx}{AE}. \quad [l]$$

При определении этих коэффициентов мы поступаем совершенно так же, как было изложено в н° 12. Чтобы получить любой коэффициент  $A_i$ , обе части предыдущего ур-ия следует умножить на  $\sin (\beta_i x/l) dx$  и проинтегрировать от  $x=0$  до  $x=l$ . Помощью простых выкладок получаем:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right);$$

$$\frac{S}{AE} \int_0^l x \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{Sl^2}{AE} \left( -\frac{\cos \beta_i l}{\beta_i l} + \frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2 l^2} \right),$$

а также, приняв во внимание ур-ие [99], для каждого целого числа  $m \neq i$ :

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_i x}{l} \sin \frac{\beta_m x}{l} dx = -\frac{W}{Ay} \sin \beta_i \sin \beta_m = -\frac{l}{a} \sin \beta_i \sin \beta_m.$$

Тогда, из ур-ия [l]

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_i x}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{\beta_i x}{l} dx = \frac{S}{AE} \int_0^l x \sin \frac{\beta_i x}{l} dx$$

или

$$A_i \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right) - \frac{l}{a} \sin \beta_i \sum_{m=1, 2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots}^{m=\infty} A_m \sin \beta_m =$$

$$= \frac{Sl^2}{AE} \left( -\frac{\cos \beta_i l}{\beta_i l} + \frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2 l^2} \right).$$

Вспомнив, что из ур-ия [k]

$$\sum_{i=1, 2, 3, \dots, (i-1), (i+1), \dots}^{i=\infty} A_m \sin \beta_m = (u)_{x=l} - A_l \sin \beta_l = \frac{Sl}{AE} - A_l \sin \beta_l,$$

получим:

$$A_i \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_i l}{2\beta_i l} \right) - \frac{l}{a} \sin \beta_i \left( \frac{Sl}{AE} - A_l \sin \beta_l \right) = \frac{Sl^2}{AE} \left( -\frac{\cos \beta_i l}{\beta_i l} + \frac{\sin \beta_i l}{\beta_i^2 l^2} \right),$$

откуда, приняв во внимание, что (из ур-ия [99])

$$\frac{l}{a} \sin \beta_l = \frac{l \cos \beta_l}{\beta_l},$$

получим

$$A_i = \frac{4Sl \sin \beta_i}{AE \beta_i (2\beta_i l + \sin 2\beta_i l)};$$

начальное перемещение будет:

$$(u)_{t=0} = \frac{Sx}{AE} = \frac{4Sl}{AE} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l}}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)} \quad [100]$$

и колебания стержня будут представляться в этом случае следующим рядом:

$$u = \frac{4Sl}{AE} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \cos \frac{\beta_i at}{l}}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}. \quad [101]$$

*Вынужденные колебания.* — В дальнейшем рассмотрим вынужденные колебания системы, приняв выражения в скобках ур-ия [k] за обобщенные координаты. Тогда

$$u = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \sin \frac{\beta_i x}{l}. \quad [m]$$

Потенциальная энергия системы будет

$$V = \frac{AE}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{AE}{2l^2} \int_0^l \left( \sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i q_i \cos \frac{\beta_i x}{l} \right)^2 dx.$$

Можно показать простыми выкладками, что на основании ур-ия [99],

$$\int_0^l \cos \frac{\beta_n x}{l} \cos \frac{\beta_m x}{l} dx = 0, \quad \text{когда } m \neq n^1),$$

и

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\beta_m x}{l} dx = \frac{l}{2} \left( 1 + \frac{\sin 2\beta_m}{2\beta_m} \right).$$

Подставляя это в вышеприведенное выражение для  $V$ , получим:

$$V = \frac{AE}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i^2 q_i^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i} \right). \quad [n]$$

Кинетическая энергия системы будет состоять из двух частей: кинетическая энергия колеблющегося стержня и кинетическая энергия груза на конце стержня, и мы получим:

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \int_0^l (u')^2 dx + \frac{W}{2g} (u')^2_{x=l}.$$

Подставив выражение [m] вместо перемещения  $u$  и выполнив интегрирования:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\beta_m x}{l} dx = \frac{l}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\beta_m}{2\beta_m} \right),$$

<sup>1)</sup> То же можно вывести и из того, что координаты  $q_1, q_2, \dots$  являются главными координатами; отсюда потенциальная и кинетическая энергии должны содержать только квадраты этих координат.

$$\int_0^l \sin \frac{\beta_m x}{l} \sin \frac{\beta_n x}{l} dx = -\frac{W}{A\gamma} \sin \beta_m \sin \beta_n \quad \text{когда } m \neq n,$$

получим:

$$T = \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2 \left(1 - \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right) + \frac{W}{2g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2 \sin^2 \beta_i.$$

Теперь из ур-ия [99] имеем:

$$a = \frac{A\gamma l}{W} = \beta_i \operatorname{tg} \beta_i$$

или

$$W = \frac{A\gamma l}{\beta_i \operatorname{tg} \beta_i}.$$

Подставив это в вышеприведенное выражение для кинетической энергии, получим

$$T = \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2 \left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right). \quad [o]$$

Из этого видно, что выражения [n] и [o] для потенциальной и кинетической энергии содержат только квадраты  $q_i$  и  $q_i'$ . Произведения этих величин пропадают, так как члены рядов [k] и [l] являются главными или собственными видами колебаний рассматриваемой системы, и координаты  $q_i$  являются главными координатами (см. стр. 125). Подставив [n] и [o] в ур-ие Лагранжа [72], получим следующее ур-ие для любой координаты  $q_i$ :

$$\frac{A\gamma l}{2g} \left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right) q_i'' + \frac{AE}{2l} \beta_i^2 \left(1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i}\right) q_i = Q \quad [p]$$

где  $Q_i$  обозначает обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате  $q_i$ .

Рассматривая только колебания, вызванные возмущающей силой, и пренебрегая свободными колебаниями от начальных перемещений и начальных импульсов, получим решение ур-ия [p]<sup>1)</sup>:

$$q_i = \frac{2g}{A\gamma l} \cdot \frac{l}{a\beta_i} \frac{2\beta_i}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \int_0^t Q_i \sin \frac{a\beta_i}{l} (t - t_1) dt_1,$$

где, как и выше,  $a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$ .

Подставляя это в ур-ие [m], получим следующее общее решение задачи:

$$u = \frac{4g}{Aa\gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin \frac{\beta_i x}{l}}{2\beta_i + \sin 2\beta_i} \int_0^t Q_i \sin \frac{a\beta_i}{l} (t - t_1) dt_1. \quad [102]$$

В любом частном случае следует подставить в это решение соответствующее значение  $Q_i$ . Подставляя  $x=l$ , получим перемещение груза  $W$  во время колебания.

<sup>1)</sup> См. ур-ие [24], стр. 25.

*Сила, внезапно приложенная.*—Рассмотрим, например, колебание, вызванное постоянной силой  $S$ , внезапно приложенной к нижнему концу стержня. Обобщенная сила  $Q_i$ , соответствующая любой координате  $q_i$ , в этом случае (см. стр. 115) будет:

$$Q_i = S \sin \beta_i.$$

Подставляя в ур-ие [102], получим для перемещений груза  $W$  следующее выражение:

$$(u)_{x=l} = \frac{4gSl}{Aa^2\gamma} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin^2 \beta_i}{\beta_i(2\beta_i + \sin 2\beta_i)} \left(1 - \cos \frac{a\beta_i t}{l}\right). \quad [103]$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда груз  $W$ , приложенный в конце стержня, уменьшается до нуля, и условия приближаются к условиям, рассмотренным в предыдущем п°. В подобном случае  $\alpha$  в ур-ии [99] становится бесконечно большим, и корни этого трансцендентного ур-ия будут:

$$\beta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}.$$

Подставляя в ур-ие [103], получим тот же результат, что и в предыдущем п° (см. ур-ие [98], стр. 206).

Второй крайний случай будет, когда груз  $W$  очень велик сравнительно с весом стержня, и  $\alpha$  в ур-ии [99] приближается к нулю. Корни этого ур-ия тогда приближаются к значениям

$$\beta_i = (i-1)\pi.$$

Все члены ряда [103], за исключением первого, стремятся к нулю и система приближается к случаю одной степени свободы. Перемещение нижнего конца стержня будет в этом случае представляться первым членом ряда [103] и будет:

$$(u)_{x=l} = \frac{4gSl}{Aa^2\gamma} \frac{\sin^2 \beta_1}{\beta_1(2\beta_1 + \sin 2\beta_1)} \left(1 - \cos \frac{a\beta_1 t}{l}\right).$$

или, полагая  $\sin \beta_1 = \beta_1$  и  $\sin 2\beta_1 = 2\beta_1$ , получим:

$$(u)_{x=l} = \frac{gSl}{Aa^2\gamma} \left(1 - \cos \frac{a\beta_1 t}{l}\right).$$

Это выражение достигает максимума, когда

$$\cos \frac{a\beta_1 t}{l} = -1,$$

тогда

$$(u)_{\max} = \frac{2gSl}{Aa^2\gamma} = \frac{2Sl}{AE}.$$

Это показывает, что наибольшее перемещение, вызванное внезапно приложенной силой, вдвое больше статического удлинения, вызванного той же силой.

Это заключение также верно и для случая, когда  $W$  равняется нулю (см. стр. 206), но оно не верно для общего случая ур-ия [103]. Чтобы доказать это, необходимо заметить, что в двух частных выше рассмотренных случаях система в конце полупериода основного вида колебания будет находиться в условиях мгновенного покоя. В этот момент кинетическая энергия становится равной нулю, и работа внезапно приложенной постоянной силы целиком превращается в потенциальную энергию деформации, и из статического рассмотрения можно заключить, что перемещение точки приложения силы должно быть вдвое больше, чем в положении равновесия.

В общем случае, представленном ур-нем [103], корни ур-ня [99] несоизмеримы, и система никогда не проходит через такое состояние, при котором энергия является чисто потенциальной. Часть энергии всегда остается в виде кинетической энергии, и перемещение точки приложения силы будет меньше чем двойное перемещение в положении равновесия.

*Сопоставление со статическим прогибом.*—Способ обобщенных координат, примененный выше, особенно полезен для сравнения перемещений системы при колебании и статических перемещений, которые возникали бы в системе, если бы возмущающие силы изменялись очень медленно. Такие сравнения необходимы, например, при изучении индикаторных диаграмм паровых и газовых двигателей и различных приборов, употребляемых для записывания давлений газа при взрывах. В случае индикатора система представится схемой, изображенной на фиг. 113. Допустим, что пульсирующая сила  $S \sin pt$  приложена к грузу  $W$ , представляющему приведенную массу поршня (см. стр. 22). Чтобы найти обобщенную силу в этом случае, применим для перемещений выражение [m]. Придав координате  $q_i$  приращение  $\delta_i$ , получим соответствующее перемещение стержня

$$\delta q_i \sin \frac{\beta_i x}{l}$$

и работа пульсирующего груза  $S \sin pt$  при этом перемещении будет

$$S \sin pt \sin \beta_i \delta q_i.$$

Отсюда обобщенная сила

$$Q_i = S \sin pt \sin \beta_i.$$

Подставляя это выражение в решение [102] и выполняя интегрирование, мы получим

$$(u)_{x=l} = \frac{2gS}{A\gamma l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin^2 \beta_i \left( \sin pt - \frac{pl}{a\beta_i} \sin \frac{a\beta_i t}{l} \right)}{\left( 1 + \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i} \right) \left( \frac{a^2 \beta_i^2}{l^2} - p^2 \right)}. \quad [q]$$

Из этого видно, что колебание состоит из двух частей: во-первых, вынужденные колебания, пропорциональные  $\sin pt$ , имеющие тот же период, что и возмущающая сила, и во-вторых, свободные колебания, пропорциональные  $\sin a\beta_i t/l$ . Когда частота возмущающей силы приближается к одной из собственных частот колебания,  $p$  приближается к значению  $a\beta_i/l$  для этого вида колебания, и имеет место состояние резонанса. Амплитуда колебания соответствующего члена ряда [q] будет тогда увеличиваться до бесконечности, как это изложено выше (см. стр. 15 и 128). Чтобы приблизиться к условиям статики, величина  $p$  должна быть рассматриваема, как малая сравнительно с  $a\beta_i/l$  в ряду [q]. Пренебрегая тогда членами, имеющими множитель  $pl/a\beta_i$ , получим при очень медленном изменении пульсирующего груза,

$$(u)_{x=l} = \frac{4lS \sin pt}{AE} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\sin^2 \beta_i}{\beta_i (2\beta_i + \sin 2\beta_i)}, \quad [r]$$

которое представляет статическое удлинение стержня (см. ур-ие [100]). Сравнением рядов [r] и [q] можно установить разницу между статическими и динамическими прогибами<sup>1)</sup>. Из этого видно, что удовлетворительную запись давления пара или газа можно получить только, когда частота основного вида колебания индикатора выше частоты пульсирующей силы.

<sup>1)</sup> При этом рассмотрении мы пренебрегли влиянием затухания.

**39. Колебание кручения круглых валов.** — *Свободное колебание.* — В наших предыдущих рассуждениях (см. стр. 11 и 130) мы или пренебрегали массой вала, или считали ее малой сравнительно с вращающимися массами, прикрепленными к валу. В последующем дается более полная теория колебаний кручения круглого вала с двумя дисками на концах<sup>1)</sup>, на основании которой оценивается точность нашего предыдущего решения. В дальнейшем рассуждении допущено, что круговые поперечные сечения вала при колебании кручения остаются плоскими, и радиусы этих поперечных сечений остаются прямолинейными<sup>2)</sup>.

Пусть  $GI_p = C$  — жесткость вала на кручение;  $\gamma$  — вес единицы объема вала;  $\theta$  — угол скручивания в любом произвольном поперечном сечении  $mn$  (см. фиг. 111) при колебании кручения;  $I_1, I_2$  — моменты инерции дисков, помещенных на концах вала, относительно оси вала.

Рассматривая элемент вала между двумя смежными поперечными сечениями  $mn$  и  $m_1n_1$ , получим скручивающие моменты в этих поперечных сечениях равными:

$$GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{и} \quad GI_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx \right).$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения элемента вала  $m_1n_1$  (см. фиг. 111) при колебании кручения будет

$$\frac{\gamma I_p}{g} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

или, пользуясь обозначением

$$\frac{Gg}{\gamma} = a^2, \quad [104]$$

получим

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad [105]$$

Это уравнение идентично с уравнением [89], полученным выше для продольного колебания, и результаты предыдущих выкладок можно применить в различных частных случаях. Например, в слу-

<sup>1)</sup> См. статью автора в „Известиях С.-Петербургского Политехнического Института“ 1905 г., а также статью Ueber die erzwungenen Schwingungen von prismatischen Stäben, „Z. f. Math. u. Phys.“ Bd 59, 1911.

<sup>2)</sup> Более полную теорию можно найти в статье *L. Pochhammer'a*, упомянутой выше на стр. 199.

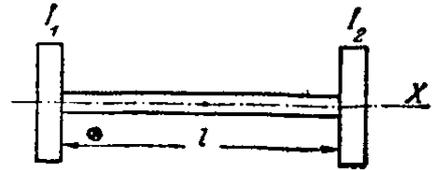
чае вала со свободными концами ур-ие частоты будет идентично с ур-ием [91], и общее решение будет (см. ур-ие [94]):

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} \left( A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{l} \right). \quad [106]$$

В случае вала с дисками на концах задача становится более сложной и нужно рассмотреть условия на концах. Из условия, что скручивание вала на концах вызывается силами инерции дисков, получим:

$$I_1 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=0} = GI_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad [a]$$

$$I_2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=l} = -GI_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=l}. \quad [b]$$



Фиг. 114.

Допустим, что вал выполняет один из нормальных видов колебания; тогда можно написать:

$$\theta = X(A \cos pt + B \sin pt), \quad [c]$$

где  $X$  — функция только одного  $x$ , определяющая форму рассматриваемого вида колебания.

Подставляя [c] в ур-ие [105], получим

$$a^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + p^2 X = 0,$$

откуда

$$X = C \cos \frac{px}{a} + D \sin \frac{px}{a}. \quad [d]$$

Произвольные постоянные  $C$  и  $D$  должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворялись условия на концах. Подставляя [d] в ур-ия [a] и [b] получим:

$$-Cp^2 I_1 = D \frac{p}{a} GI_p,$$

$$p^2 \left( C \cos \frac{pl}{a} + D \sin \frac{pl}{a} \right) I_2 = \frac{p}{a} GI_p \left( -C \sin \frac{pl}{a} + D \cos \frac{pl}{a} \right). \quad [e]$$

Исключая произвольные постоянные  $C$  и  $D$ , получим следующее уравнение частоты:

$$p^2 \left( \cos \frac{pl}{a} - \frac{paI_1}{GI_p} \sin \frac{pl}{a} \right) I_2 = -\frac{p}{a} GI_p \left( \sin \frac{pl}{a} + \frac{paI_1}{GI_p} \cos \frac{pl}{a} \right). \quad [f]$$

Обозначив

$$\frac{\rho l}{a} = \beta; \quad \frac{I_1 g}{\gamma I_p} = \frac{I_1}{I_0} = m; \quad \frac{I_2}{I_0} = n, \quad [g]$$

где  $I_0 = (\gamma I_p / g)$  — момент инерции вала вокруг его оси, получим из ур-ия [f] ур-ие частоты в следующем виде:

$$\beta n (1 - m \beta \operatorname{tg} \beta) = -(\operatorname{tg} \beta + m \beta)$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(m + n)\beta}{mn\beta^2 - 1}. \quad [107]$$

Пусть  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  — последовательные корни этого трансцендентного ур-ия, тогда соответствующие нормальные функции из ур-ий [d] и [e] будут:

$$X_i = C_i \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right)$$

и мы получим в этом случае для общего решения:

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right) \left( A_i \cos \frac{\beta_i a t}{l} + B_i \sin \frac{\beta_i a t}{l} \right). \quad [108]$$

Если моменты инерции  $I_1$  и  $I_2$  шкивов малы сравнительно с моментом инерции  $I_0$  вала, величины  $m$  и  $n$  в ур-ии [107] станут весьма малыми, а последовательные корни этого ур-ия будут приближаться к величинам  $\pi, 2\pi, \dots$  и общее решение [108] приближается к решению [106], данному ранее для вала со свободными концами.

Рассмотрим теперь другой крайний случай, более интересный с точки зрения практики, когда  $I_1$  и  $I_2$  будут велики сравнительно с  $I_0$ ; величины  $m$  и  $n$  будут тогда большими числами. В этом случае в знаменателе правой части ур-ия [107] единицей можно пренебречь по сравнению с  $mn\beta^2$  и вместо ур-ия [107] получим:

$$\beta \operatorname{tg} \beta = (1/m + 1/n). \quad [109]$$

Это ур-ие того же вида, что ур-ие [99] (см. стр. 209) для продольных колебаний. Правая часть этого ур-ия — небольшая величина, и приближенное решение для первого корня получится подстановкой  $\operatorname{tg} \beta_1 = \beta_1$ . Тогда

$$\beta_1 = \sqrt{1/m + 1/n}. \quad [h]$$

Период соответствующего вида колебания согласно ур-ию [103] будет:

$$\tau_1 = 2\pi : \frac{\beta_1 a}{l} = \frac{2\pi l}{\beta_1 a},$$

или, пользуясь ур-иями [104], [g] и [h], получим

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{GI_p (I_1 + I_2)}}. \quad [15']$$

Этот результат совпадает с ур-ием [15] (см. стр. 13), полученным нами при рассмотрении системы, имеющей одну степень свободы, когда мы пренебрегли массой вала.

Приближенные значения последовательных корней ур-ия [109] будут

$$\beta_2 = \pi + 1/\pi (1/m + 1/n); \quad \beta_3 = 2\pi + 1/2\pi (1/m + 1/n); \dots$$

Из этого видно, что все эти корни — велики сравнительно с  $\beta_1$ , и частоты соответствующих видов колебания будут очень высоки сравнительно с частотой основного типа колебания.

Чтобы получить более точное приближение для первого корня ур-ия [107], мы подставим  $\operatorname{tg} \beta_1 = \beta_1 + 1/3 \beta_1^3$ , тогда

$$\beta_1 + \frac{1}{3} \beta_1^3 = \frac{\beta_1 (m + n)}{mn \beta_1^2 - 1}$$

или

$$\beta_1^2 = \frac{m + n}{\left(mn - \frac{1}{\beta_1^2}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \beta_1^2\right)}.$$

Подставляя в правую часть этого ур-ия величину  $\beta_1$  из ур-ия [h] и пренебрегая бесконечно малыми величинами высших порядков, получим:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{mn}\right)},$$

и соответствующая частота основного колебания будет:

$$f_1 = \frac{\beta_1 a}{2\pi l} = \frac{a}{2\pi l} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{mn}\right)}. \quad [110]$$

Тот же результат получим, если в первое приближение частоты

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{GI_p (I_1 + I_2)}{I_1 I_2}},$$

полученное из ур-ия [15'], подставим вместо  $I_1$  и  $I_2$

$$I_1 + \frac{1}{3} I_0 \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad \text{и} \quad I_2 + \frac{1}{3} I_0 \frac{I_1}{I_1 + I_2}.$$

Это значит, что второе приближение [110] совпадает с результатом, который получился бы по способу Рейля (см. н° 14, стр. 60).

Согласно этому способу, следует прибавить к моменту инерции каждого диска одну треть момента инерции части вала между диском и узловым поперечным сечением. Это приближение всегда достаточно при практических применениях для исчисления частоты основного вида колебания<sup>1)</sup>.

*Вынужденное колебание.* — При изучении вынужденных колебаний кручения снова очень полезны обобщенные координаты. Рассматривая скобки, содержащие  $t$ , в общем решении [108] как такие координаты, получим:

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m \beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right), \quad [108']$$

где  $\beta_i$  — последовательные корни ур-ия [107].

Потенциальная энергия системы будет

$$\begin{aligned} V &= \frac{GI_p}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{GI_p}{2} \int_0^l \left\{ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{\beta_i}{l} q_i \left( \sin \frac{\beta_i x}{l} + m \beta_i \cos \frac{\beta_i x}{l} \right) \right\}^2 dx = \\ &= \frac{GI_p}{8l} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \beta_i q_i^2, \end{aligned} \quad [111]$$

где

$$A_i = 2\beta_i (1 + m^2 \beta_i^2) - \sin 2\beta_i + m^2 \beta_i^2 \sin 2\beta_i + 2\beta_i m (1 - \cos 2\beta_i). \quad [k]$$

Члены, содержащие произведения координат, в выражении [111] пропадают при интегрировании на основании ур-ия [107]. Такой результат и следовало ожидать, если мы вспомним, что наши обобщенные координаты являются главными или нормальными координатами системы.

Кинетическая энергия системы состоит из энергии колеблющегося вала и из энергий двух колеблющихся дисков:

$$T = \frac{\gamma I_p}{2g} \int_0^l (\theta')^2 dx + \frac{1}{2} I_1 (\theta')^2_{x=0} + \frac{1}{2} I_2 (\theta')^2_{x=l}$$

или, подставляя выражение [108'] вместо  $\theta$ , мы получим:

$$T = \frac{I_0}{8} \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \frac{1}{\beta_i} (q_i')^2, \quad [112]$$

где  $A_i$  представляется выражением [k].

<sup>1)</sup> Графический способ определения собственных частот колебания кручения валов с дисками был предложен *F. M. Lewis*'ом, см. статьи: *Torsional Vibration of Irregular Shafts*, „Journal Am. Soc. of Naval Engs“, Nov. 1919, p. 857, и *Critical Speeds of Torsional Vibration*, „Journal Soc. Automotive Engs“, Nov. 1920, p. 413.

Если воспользоваться ур-иями [111] и [112], то ур-ия Лагранжа получают вид

$$\frac{I_0}{4\beta_i} q_i'' + \frac{GI_p \beta_i}{4l} q_i = \frac{1}{A_i} Q_i$$

или

$$q_i'' + \frac{a^2 \beta_i^2}{l^2} q_i = \frac{4\beta_i}{I_0 A_i} Q_i, \quad [L]$$

где  $Q_i$  — представляет обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате  $q_i$ .

Рассматривая только колебание, вызванное возмущающей силой, получим из ур-ия [L]

$$q_i = \frac{4l}{aI_0 A_i} \int_0^t Q_i \sin \frac{a\beta_i}{l} (t - t_1) dt_1.$$

Подставляя в ур-ие [108'], найдем общее выражение для колебаний, вызванных возмущающими силами:

$$\theta = \frac{4l}{aI_0} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{A_i} \left( \cos \frac{\beta_i x}{l} - m\beta_i \sin \frac{\beta_i x}{l} \right) \int_0^t Q_i \sin \frac{a\beta_i}{l} (t - t_1) dt_1. \quad [113]$$

В каждом частном случае остается только подставить вместо  $\theta$ , соответствующее выражение и выполнить указанное интегрирование, чтобы получить вынужденные колебания. Эти вынужденные колебания имеют тенденцию бесконечно возрастать<sup>1)</sup>, когда период возмущающей силы совпадает с периодом одного из собственных колебаний.

**40. Боковое колебание призматических стержней.** — *Дифференциальное уравнение бокового колебания.* — Допустив, что колебание происходит в одной из главных плоскостей изгиба стержня и что измерения поперечного сечения малы сравнительно с длиной стержня, мы можем воспользоваться общеизвестным дифференциальным ур-ием упругой линии

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M, \quad [114]$$

где  $EI$  — жесткость на изгиб, а  $M$  — изгибающий момент в любом поперечном сечении. Направление осей и положительные направления изгибающих моментов и перерезывающих сил таковы, как показано на фиг. 115.

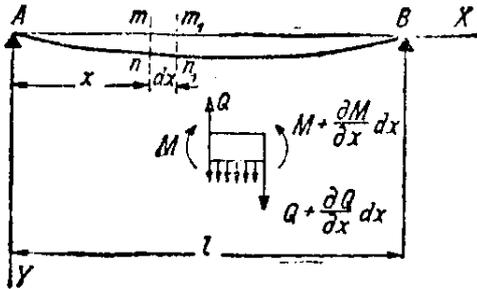
<sup>1)</sup> В наших выкладках мы пренебрегли затуханием.

Дифференцируя дважды ур-ие [114], получим:

$$\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = - \frac{dM}{dx} = - Q,$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = - \frac{dQ}{dx} = q. \quad [a]$$

Это последнее ур-ие, представляющее дифференциальное ур-ие стержня, подверженного действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$ , можно использовать также для получения ур-ия бокового колебания.



Фиг. 115.

Необходимо только применить начало д'Аламбера и предположить, что колеблющийся стержень нагружен силами инерции, интенсивность которых изменяется по длине стержня и представляется выражением:

$$- \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad [b]$$

где  $\gamma$  — вес единицы объема материала стержня,  $A$  — площадь поперечного сечения.

Подставляя [b] вместо  $q$  в ур-ие [a], получим общее ур-ие бокового колебания стержня:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = - \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad [115]$$

В частном случае призматического стержня жесткость на изгиб  $EI$  остается постоянной по длине стержня, и мы получим из ур-ия [115]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

или

$$\left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad [116] \right.$$

где

$$a^2 = \frac{Elg}{A\gamma}. \quad [117]$$

Начнем с изучения *нормальных видов* колебания. Когда стержень испытывает нормальный вид колебания, прогиб в любом месте изменяется гармонически с временем и может быть представлен так:

$$y = X (A \cos pt + B \sin pt), \quad [c]$$

где  $X$  — функция абсциссы  $x$ , определяющая форму рассматриваемого нормального вида колебания. Такие функции называются „нормальными функциями“. Подставляя [c] в ур-ие [116], получим

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{p^2}{a^2} X, \quad [118]$$

откуда можно получить нормальные функции для любого частного случая.

Пользуясь обозначением

$$\frac{p^2}{a^2} = \frac{p^2 A \gamma}{E I g} = k^4, \quad [119]$$

можно легко проверить, что  $\sin kx$ ,  $\cos kx$ ,  $\sinh kx$  и  $\cosh kx$  будут частными решения ур-ия [118], а общее решение этого ур-ия получится в виде:

$$X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx, \quad [120]$$

где  $C_1, \dots, C_4$  — произвольные постоянные, которые следует определить в каждом частном случае из условий на концах стержня. На том конце, который просто оперт, т. е. где прогиб и изгибающий момент равны нулю, имеем

$$X = 0; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 0. \quad [d]$$

В закрепленном конце, т. е. где прогиб и угол наклона касательной к упругой линии равны нулю, имеем

$$X = 0; \quad \frac{dX}{dx} = 0. \quad [e]$$

На свободном конце изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, и мы получим:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = 0. \quad [f]$$

Для двух концов колеблющегося стержня мы всегда будем иметь четыре концевых условия, из которых можно найти отношения между произвольными постоянными общего решения [120], а следовательно и получить *уравнение частоты*. Таким образом виды собственного колебания и их частоты будут установлены. Наложением друг на друга всех возможных нормальных колебаний [c] получится общее выражение свободных боковых колебаний

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} X_i (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \dots \quad [121]$$

Применение этой общей теории к частным случаям рассмотрим далее.

*Вынужденное колебание.*— При рассмотрении вынужденных боковых колебаний стержней очень полезно применение *обобщенных координат*, и в дальнейшем выражения в скобках ур-ия [121] примем за такие координаты. Обозначив их через  $q_i$ , получим

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i X_i. \quad [122]$$

Чтобы вывести ур-ия Лагранжа, необходимо найти выражения для потенциальной и кинетической энергий.

Потенциальная энергия системы есть энергия изгиба и может быть выражена так:

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i^2 \int_0^l \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 dx. \quad [123]$$

Кинетическая энергия колеблющегося стержня будет:

$$T = \frac{\gamma A}{2g} \int_0^l y'^2 dx = \frac{\gamma A}{2g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2 \int_0^l X_i'^2 dx. \quad [124]$$

Члены, содержащие произведения координат, исчезают из выражений [123] и [124] в силу основного свойства нормальных функций (см. стр. 128). Это может быть также доказано прямым интегрированием.

Пусть  $X_m$  и  $X_n$  — две нормальные функции, соответствующие нормальным видам колебания порядка  $m$  и  $n$ , имеющим частоты  $p_m/2\pi$  и  $p_n/2\pi$ . Подставляя в ур-ие [118] получим:

$$\frac{d^4 X_m}{dx^4} = \frac{p_m^2}{a^2} X_m,$$

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} = \frac{p_n^2}{a^2} X_n.$$

Умножая первое из этих ур-ий на  $X_n$ , а второе на  $X_m$ , вычитая одно из другого и интегрируя, имеем:

$$\frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} \int_0^l X_m X_n dx = \int_0^l \left( X_m \frac{d^4 X_n}{dx^4} - X_n \frac{d^4 X_m}{dx^4} \right) dx,$$

откуда, интегрированием по частям, получим следующее:

$$\frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} \int_0^l X_m X_n dx =$$

$$= \left| X_m \frac{d^3 X_n}{dx^3} - X_n \frac{d^3 X_m}{dx^3} + \frac{dX_n}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_n}{dx^2} \right|_0^l \dots [125]$$

Из условий на концах [d], [e] и [f] можно заключить, что во всех случаях правая часть вышенаписанного ур-ия равна нулю; отсюда при  $m \neq n$

$$\int_0^l X_m X_n dx = 0,$$

и члены, содержащие произведения координат, исчезают из ур-ия [124]. Пользуясь подобным способом, можно показать также, что произведения координат исчезают и из ур-ия [123].

Ур-ие [125] можно использовать также для вычисления интегралов таких, как:

$$\int_0^l X_m^2 dx \text{ и } \int_0^l \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 dx, \quad [g]$$

входящих в выражения [123] и [124] потенциальной и кинетической энергии колеблющегося стержня.

Легко видеть, что прямой подстановкой  $m = n$  в это ур-ие нельзя получить необходимых результатов, так как обе стороны ур-ия становятся равными нулю. Поэтому для вычисления интегралов [g] необходимо применить следующие выкладки. Подставим вместо  $X_n$  в ур-ие [125] весьма близкую к функции  $X_m$  функцию, которую получим из ур-ий [118] и [119] приданием величине  $k$  бесконечно малого приращения  $\delta k$ , так что  $X_n$  приближается к  $X_m$ , когда  $\delta k$  приближается к нулю. Тогда

$$\frac{p_n^2}{a^2} = (k + \delta k)^4 = k^4 + 4k^3 \delta k,$$

$$\frac{p_n^2 - p_m^2}{a^2} = 4k^3 \delta k,$$

$$X_n = X_m + \frac{dX_m}{dk} \delta k.$$

Подставляя в ур-ие [125] и пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим:

$$4k^3 \int_0^l X_m^2 dx = \left| X_m \frac{d}{dk} \frac{d^3 X_m}{dx^3} - \frac{dX_m}{dk} \frac{d^3 X_m}{dx^3} + \frac{d}{dk} \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} - \frac{dX_m}{dx} \frac{d}{dk} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right|_0^l. \quad [h]$$

В дальнейшем обозначим через  $X'$ ,  $X''$ , ... последовательные производные  $X$  по  $kx$ , тогда

$$\frac{dX_m}{dx} = kX_m'; \quad \frac{dX_m}{dk} = xX_m'.$$

При этих обозначениях ур-ие [118] получает вид:

$$X'''' = X,$$

и ур-ие [h] будет иметь следующий вид:

$$4k^3 \int_0^l X_m^2 dx = \left| 3X_m k^2 X_m''' + k^3 x X_m^2 - k^3 x X_m' X_m''' + \right. \\ \left. + k^2 X_m'' (X_m' + kx X_m'') - kX_m' (2kX_m'' + k^2 x X_m''') \right|_0^l$$

или

$$4k \int_0^l X_m^2 dx = \left| 3X_m X_m''' + kx X_m^2 - 2kx X_m' X_m''' - X_m' X_m'' + kx (X_m'')^2 \right|_0^l \cdot [k]$$

Из условий на концах [d], [e] и [f] легко видеть, что члены в ур-ии [k], содержащие произведения  $X_m X_m'''$  и  $X_m' X_m''$ , равны нулю при любом способе закрепления концов; отсюда

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{1}{4} \left| x \left\{ X_m^2 - 2X_m' X_m''' + (X_m'')^2 \right\} \right|_0^l = \\ = \frac{l}{4} \left\{ X_m^2 - 2X_m' X_m''' + (X_m'')^2 \right\}_{x=l}. \quad [126]$$

Из этого ур-ия легко найти первый из интегралов [g] для любого рода закрепления концов стержня. Если правый конец ( $x=l$ ) стержня свободен, то

$$(X_m'')_{x=l} = 0; \quad (X_m''')_{x=l} = 0,$$

и мы получим из ур-ия [126]:

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{l}{4} (X_m^2)_{x=l}. \quad [127]$$

Если тот же конец закреплен, получим:

$$\int_0^l X_m^2 dx = \frac{l}{4} (X_m'')^2_{x=l}. \quad [128]$$

Для шарнирного конца получим:

$$\int_0^l X_m^2 dx = -\frac{l}{2} (X_m' X_m''')_{x=l}. \quad [129]$$

При вычислении второго из интегралов [g] следует воспользоваться ур-ием [118]. Помножая это ур-ие на  $X$  и интегрируя по длине стержня, получим:

$$\frac{p^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx = \int_0^l \frac{d^4 X}{dx^4} X dx.$$

Интегрируя правую часть этого ур-ия по частям, получим:

$$\int_0^l \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{p^2}{a^2} \int_0^l X^2 dx. \quad [130]$$

Этот результат вместе с ур-ием [126] дает нам второй интеграл [g], и теперь можно получить выражения [123] и [124] для  $V$  и  $T$ . Ур-ия [126] и [130] очень полезны для исследования вынужденных колебаний стержней с иными концевыми условиями, чем шарнирные.

**41. Влияние перерезывающей силы и инерции вращения.** — В предыдущем рассмотрении измерения поперечного сечения стержня считались очень малыми сравнительно с длиной его, и было применено простое ур-ие [114] для упругой линии, Теперь мы дадим поправки, приняв во внимание влияние измерений поперечного сечения на частоту. Эти поправки могут иметь большое значение при изучении видов колебания высших частот, когда колеблющийся стержень подразделен *узловыми поперечными сечениями* на сравнительно небольшие части.

*Инерция вращения* <sup>1)</sup>. — Легко видеть, что при колебании элементы стержня такие, как  $mn_1n_1$  (см. фиг. 115), выполняют не только поступательное движение, но также вращаются. Переменный угол вращения, который равен углу наклона касательной упругой линии, будет выражаться  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , и соответствующая угловая скорость и угловое ускорение будут

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \text{ и } \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}.$$

Поэтому момент сил инерции элемента  $mn_1n_1$  около оси, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной к плоскости  $XU$ , будет <sup>2)</sup>

$$-\frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} dx.$$

Этот момент следует принять во внимание при рассмотрении изменения изгибающего момента вдоль оси стержня. Тогда вместо первого из ур-ий (стр. 222) мы будем иметь

$$\frac{dM}{dx} = Q - \frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}. \quad [a]$$

Подставляя это значение  $\frac{dM}{dx}$  в ур-ие упругой линии, получим:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = - \frac{d^2 M}{dx^2},$$

и, пользуясь выражением [b] (стр. 222), имеем:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad [131]$$

Это есть дифференциальное ур-ие для бокового колебания призматических стержней, в котором второй член правой части представляет влияние инерции вращения.

*Влияние перерезывающей силы* <sup>3)</sup>. — Еще более точное дифференциальное ур-ие получится, если принять во внимание не только инерцию вращения, но также прогиб, вызванный перерезывающей силой. Угол наклона касательной к упругой линии зависит не только от поворота поперечного сечения стержня, но также

<sup>1)</sup> См. *Lord Rayleigh „Theorie of Sound“*, параграф 186.

<sup>2)</sup> Момент считается положительным по направлению движения часовой стрелки

<sup>3)</sup> См. статью автора в „*Philosophical Magazine*“ (Ser. 6) Vol. 41, p. 744 и Vol. 43, p. 125.

от перерезывания. Пусть  $\psi$  обозначает угол наклона касательной к упругой линии когда силой перерезывания пренебрежено, и  $\beta$ —угол перерезывания по нейтральной оси в том же поперечном сечении, тогда мы найдем полный угол наклона равным

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \beta.$$

Из элементарной теории изгиба мы имеем для изгибающего момента и перерезывающей силы следующие ур-ия:

$$M = -EI \frac{d\psi}{dx}; \quad Q = k'\beta AG = k' \left( \frac{dy}{dx} - \psi \right) AG, \quad [b]$$

где  $k'$  — числовой коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения;  $A$  — площадь поперечного сечения,  $G$  — модуль упругости при сдвиге. Дифференциальное ур-ие поворота элемента  $mn_1n_1$  (фиг. 115) будет:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + Q dx = \frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dx.$$

Воспользовавшись ур-иями [b], получим:

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k' \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) AG - \frac{I\gamma}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad [c]$$

Дифференциальное ур-ие поступательного движения того же элемента в вертикальном направлении будет:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

или

$$\frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k' \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) AG = 0. \quad [d]$$

Исключая  $\psi$  из ур-ий [c] и [d], получим следующее более полное дифференциальное ур-ие для боковых колебаний призматических стержней:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left( \frac{\gamma I}{g} + \frac{EI\gamma}{gk'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma I}{g} \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad [132]$$

Применение этого ур-ия для определения частот будет показано в следующем п°.

#### 42. Свободное колебание стержня с шарнирными концами. —

*Общее решение.* — При рассмотрении частных случаев колебания полезно представить общее решение [120] в следующем виде:

$$X = C_1 (\cos kx + \cosh kx) + C_2 (\cos kx - \cosh kx) + \\ + C_3 (\sin kx + \sinh kx) + C_4 (\sin kx - \sinh kx). \dots [133]$$

В случае шарнирных концов условия на концах будут

$$\begin{aligned} (1) (X)_{x=0} &= 0; & (2) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} &= 0; \\ (3) (X)_{x=l} &= 0; & (4) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad [a]$$

Из первых двух условий [a] можно заключить, что постоян-

ные  $C_1$  и  $C_2$  в решении [133] следует взять равными нулю. Из условий (3) и (4) мы получим  $C_3 = C_4$  и

$$\sin kl = 0, \quad [134]$$

которое является *уравнением частоты* для рассматриваемого случая. Последовательные корни этого ур-ия будут:

$$kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad [135]$$

Частоты последовательных видов колебания получатся из ур-ия [119]:

$$p_1 = ak_1^2 = \frac{a\pi^2}{l^2}; \quad p_2 = \frac{4a\pi^2}{l^2}; \quad p_3 = \frac{9a\pi^2}{l^2}; \dots, \quad [136]$$

и частота  $f_n$  любого вида колебания найдется из ур-ия

$$f_n = \frac{p_n}{2\pi} = \frac{n^2 a \pi}{2l^2} = \frac{\pi n^2}{2l^2} \sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}. \quad [137]$$

Соответственный период колебания будет:

$$\tau_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2l^2}{\pi n^2} \sqrt{\frac{A\gamma}{EIg}}. \quad [137']$$

Из этого видно, что период колебания пропорционален квадрату длины и обратно пропорционален радиусу инерции поперечного сечения. Для геометрически подобных стержней периоды колебаний возрастают в той же пропорции, что и линейные измерения.

В случае вращающихся круглых валов постоянного поперечного сечения частоты, определенные по ур-ию [137], представляют критические числа оборотов в секунду. Когда скорость вращения вала приближается к одной из частот [137], следует ожидать значительных боковых колебаний вала.

Форма упругой линии для различных видов колебания определяется нормальной функцией [133]. Было показано, что в рассматриваемом случае  $C_1 = C_2 = 0$  и  $C_3 = C_4$ , откуда

$$X = D \sin kx.$$

Подставляя вместо  $k$  его значения из ур-ия [135], получим:

$$X_1 = D_1 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad X_2 = D_2 \sin \frac{2\pi x}{l}; \quad X_3 = D_3 \sin \frac{3\pi x}{l}; \dots$$

Из этого видно, что упругая линия при колебании является синусоидой, причем число полуволи в последовательных видах колебания равно 1, 2, 3, . . . Наложением таких синусоидальных колебаний можно представить любой вид свободных колебаний,

вызванных любыми начальными условиями. Подставив [b] в общее решение [121], получим:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} (A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t). \quad [138]$$

Произвольные постоянные  $A_i$ ,  $B_i$  этого решения следует определять в каждом частном случае так, чтобы удовлетворялись начальные условия. Допустим, например, что начальные прогибы и начальные скорости вдоль стержня даны ур-иями:

$$(y)_{t=0} = f(x) \text{ и } (y')_{t=0} = f_1(x).$$

Подставив  $t=0$  в выражение [138] и в производную этого выражения по  $t$ , получим:

$$(y)_{t=0} = f(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad [c]$$

$$(y')_{t=0} = f_1(x) = \sum_{i=1}^{i=\infty} p_i B_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad [d]$$

Теперь постоянные  $A_i$  и  $B_i$  можно определить обычным путем, умножая [c] и [d] на  $\sin(i\pi x/l) dx$  и интегрируя обе стороны этих ур-ий от  $x=0$  до  $x=l$ . Таким образом мы получим:

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx, \quad [e]$$

$$B_i = \frac{2}{lp_i} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx. \quad [f]$$

Допустим, например, что в начальный момент ось стержня — прямолинейна, и что вызванная ударом начальная скорость  $v$  придана весьма малой части  $\delta$  стержня, находящейся в расстоянии  $c$  от левой опоры. Тогда  $f(x)$  и  $f_1(x)$  равны нулю во всех точках за исключением точки  $x=c$ , для которой  $f_1(c) = v$ . Подставив эти значения в выражения [e] и [f], получим

$$A_i = 0; \quad B_i = \frac{2}{lp_i} v \delta \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Подставив в [138], имеем

$$y = \frac{2v\delta}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{p_i} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t. \quad [139]$$

Если  $c = (l/2)$ , т. е. удар произведен в середине пролета,

$$y = \frac{2v\delta}{l} \left( \frac{1}{p_1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{p_3} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t + \frac{1}{p_5} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right) =$$

$$= \frac{2v\delta l}{a\pi^2} \left( \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{l} \sin p_1 t - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{l} \sin p_3 t + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{l} \sin p_5 t - \dots \right) [g]$$

Из этого видно, что в этом случае будут возникать только виды колебаний, симметричные относительно середины пролета, и амплитуды последовательных видов колебаний, входящих в ур-ие [g], уменьшаются в отношении  $1/i^2$ .

*Влияние инерции вращения и перерезывающей силы.* — Чтобы найти величины частот более точно, следует вместо ур-ия [116] взять ур-ие [132]. Разделив ур-ие [132] на  $\frac{A\gamma}{g}$  и пользуясь обозначением

$$r^2 = \frac{I}{A}, \quad [h]$$

получим

$$a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - r^2 \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + r^2 \frac{\gamma}{gk'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad [132']$$

Это ур-ие, а также условия на концах будут удовлетворяться при

$$y = C \sin \frac{m\pi x}{l} \cos p_m t. \quad [k]$$

Подставив в [132'], получим следующее ур-ие для определения частот:

$$a^2 \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - p_m^2 - p_m^2 \frac{m^2 \pi^2 r^2}{l^2} - p_m^2 \frac{m^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{k'G} + \frac{r^2 \gamma}{gk'G} p_m^4 = 0. \quad [140]$$

Рассматривая только первые два члена этого ур-ия, имеем:

$$p_m = a \frac{m^2 \pi^2}{l^2} = \frac{a\pi^2}{\lambda^2}, \quad [l]$$

где  $\lambda = \left( \frac{l}{m} \right)$  — длина полуволн, на которые при колебании подразделяется стержень.

Это совпадает с полученным ранее результатом [136]. Взяв первые три члена ур-ия [140] и рассматривая  $\frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2}$  как весьма малую величину, получим

$$p_m = \frac{a\pi^2}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{\pi^2 r^2}{2\lambda^2} \right).$$

Таким способом учитывается *влияние инерции вращения*, и мы видим, что эта поправка становится все более существенной с уменьшением  $\lambda$ , т. е. с увеличением частоты колебания. Чтобы учесть *влияние перерезывающей силы* следует принять во внимание все члены ур-ия [140]. Подставляя первое приближение [l] вместо  $p_m$  в последний член этого ур-ия, можно показать, что этот член — величина второго порядка малости сравнительно с весьма малой величиной  $\frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2}$ .

Пренебрегая этим членом, получим:

$$p_m = \frac{a\pi^2}{\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} \left( 1 + \frac{E}{k'G} \right) \right\}. \quad [141]$$

Приняв  $E = \frac{8}{3} G$  и взяв стержень прямоугольного поперечного сечения, для которого  $k' = \frac{2}{3}$ , имеем:

$$\frac{E}{k'G} = 4.$$

Поправка для учета сдвига в четыре раза больше, чем поправка на инерцию вращения.

Допустив, что длина волны  $\lambda$  в десять раз больше, чем высота балки, получим:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2 r^2}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{1}{100} = 0,004$$

и поправка на инерцию вращения и сдвиг вместе будет около 2%.

**43. Иные виды закрепления концов.** — *Стержень со свободными концами.* — В этом случае мы имеем следующие концевые условия:

$$\begin{aligned} (1) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} &= 0; & (2) \left( \frac{d^3 X}{dx^3} \right)_{x=0} &= 0; \\ (3) \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=l} &= 0; & (4) \left( \frac{d^3 X}{dx^3} \right)_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad [a]$$

Чтобы удовлетворить условиям (1) и (2), мы должны положить в общем решении [133]

$$C_2 = C_4 = 0,$$

так что

$$X = C_1 (\cos kx + \cosh kx) + C_3 (\sin kx + \sinh kx). \quad [b]$$

Из условий (3) и (4) получим:

$$\begin{aligned} C_1 (-\cos kl + \cosh kl) + C_3 (-\sin kl + \sinh kl) &= 0, \\ C_1 (\sin kl + \sinh kl) + C_3 (-\cos kl + \cosh kl) &= 0. \end{aligned} \quad [c]$$

Решения для постоянных  $C_1$  и  $C_3$ , отличные от нуля, можно получить только в случае, когда определитель ур-ий [c] равен нулю. Таким образом получается следующее ур-ие частоты:

$$(-\cos kl + \cosh kl)^2 - (\sinh^2 kl - \sin^2 kl) = 0$$

или, вспомнив, что

$$\begin{aligned} \cosh^2 kl - \sinh^2 kl &= 1, \\ \cos^2 kl + \sin^2 kl &= 1, \end{aligned}$$

имеем

$$\cos kl \cosh kl = 1. \quad [142]$$

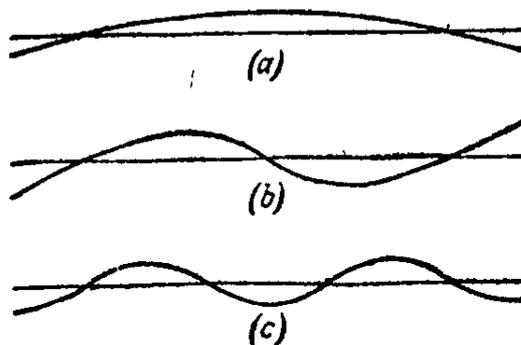
Первые шесть последовательных корней этого ур-ия даны в нижеследующей таблице:

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$	$k_6 l$
0	4,730	7,853	10,996	14,137	17,279

Теперь можем вычислить частоты, пользуясь ур-ием [119]:

$$f_1 = 0; \quad f_2 = \frac{p_2}{2\pi} = \frac{k_2^2 a}{2\pi}; \quad f_3 = \frac{p_3}{2\pi} = \frac{k_3^2 a}{2\pi}, \dots$$

Подставляя последовательные корни ур-ия [142] в ур-ие [c], можем определить отношения  $C_1/C_3$  для соответствующих видов колебания и получим тогда из ур-ия [b] форму упругой линии при колебании. На фиг. 116 показаны первые три вида собственных колебаний. На эти колебания можно наложить перемещение стержня как твердого тела. Это перемещение отвечает частоте  $k_1 l = 0$ . Тогда правая часть ур-ия [118] получается равной нулю, и, принимая во внимание условия [a] на концах, получим  $X = a + bx$ . Соответствующее движение можно исследовать таким же образом, как было показано в случае продольных колебаний (см. стр. 206).



Фиг. 116.

*Стержень с закрепленными концами.* — Концевые условия в этом случае будут:

$$\begin{aligned} (1) \quad (X)_{x=0} &= 0; & (2) \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} &= 0; \\ (3) \quad (X)_{x=l} &= 0; & (4) \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l} &= 0. \end{aligned} \quad [a]$$

Первые два условия удовлетворяются, если в общем решении [133] примем

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Из двух других условий получаются следующие ур-ия:

$$\begin{aligned} C_2 (\cos kl - \cosh kl) + C_4 (\sin kl - \sinh kl) &= 0, \\ C_2 (\sin kl + \sinh kl) + C_4 (-\cos kl + \cosh kl) &= 0, \end{aligned}$$

откуда можно вывести то же самое ур-ие частоты, как выше (см. ур-ие [142]). Это означает, что последовательные частоты колебания стержня с закрепленными концами будут те же, что для того же стержня со свободными концами <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Из ур-ия [118] можно заключить, что в этом случае нет движения, отвечающего  $k_1 l = 0$ .

*Стержень с одним закрепленным, а другим свободным концом.* — Допустив, что левый конец ( $x=0$ ) закреплен, получим следующие концевые условия:

$$(1) (X)_{x=0} = 0; \quad (2) \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0;$$

$$(3) \left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=l} = 0; \quad (4) \left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = 0.$$

Из первых двух условий мы заключаем, что в общем решении [133]  $C_1 = C_3 = 0$ . Остающиеся два условия дают нам следующее ур-ие частоты:

$$\cos kl \cosh kl = -1.$$

Последовательные корни этого ур-ия приведены в следующей таблице:

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$	$k_6 l$
1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279

Из этого видно, что, с увеличением частоты, эти корни приближаются к корням, полученным выше для стержня со свободными концами. Частота колебания любого вида будет:

$$f_i = \frac{p_i}{2\pi} = \frac{ak_i^2}{2\pi}.$$

Взяв, например, основной вид колебания, получим:

$$f_1 = \frac{a}{2\pi} \left(\frac{1,875}{l}\right)^2.$$

Соответствующий период колебания будет:

$$\tau_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{a} \frac{l^2}{1,875^2} = \frac{2\pi}{3,515} \sqrt{\frac{A\gamma l^3}{Elg}}.$$

Он отличается менее чем на 1,5% от приближенного решения, полученного при помощи способа Рейлея (см. стр. 63).

*Стержень с одним закрепленным, а другим опертым концом.* — В этом случае ур-ие частоты будет:

$$\operatorname{tg} kl = \operatorname{tgh} kl.$$

Последовательные корни этого ур-ия таковы:

$k_1 l$	$k_2 l$	$k_3 l$	$k_4 l$	$k_5 l$
3,927	7,069	10,210	13,352	16,493

*Балка на нескольких опорах*<sup>1)</sup>. — Рассмотрим случай неразрезной балки с  $n$  пролетами, просто опертой на концах и в  $(n-1)$

<sup>1)</sup> См. E. R. Darnley, „Phil. Mag.“, Vol. 41, 1921, p. 81. См. также D. M. Smith, „Engineering“, Vol. 120, 1925, p. 808.

промежуточных опорах. Пусть  $l_1, l_2, \dots, l_n$  длины последовательных пролетов, причем жесткость на изгиб балки одинакова для всех пролетов. Взяв за начало координат левый конец каждого пролета, используем решение [120] (стр. 223) для установления вида упругой линии каждого пролета при колебании.

Приняв во внимание, что прогиб левого конца ( $x=0$ ) равен нулю, получим нормальную функцию для пролета  $r$

$$X_r = a_r (\cos kx - \cosh kx) + c_r \sin kx + d_r \sinh kx, \quad [e]$$

где  $a_r, c_r$  и  $d_r$  произвольные постоянные. Последовательные производные от [e] будут:

$$X_r' = -a_r k (\sin kx + \sinh kx) + c_r k \cos kx + d_r k \cosh kx, \quad [f]$$

$$X_r'' = -a_r k^2 (\cos kx + \cosh kx) - c_r k^2 \sin kx + d_r k^2 \sinh kx. \quad [g]$$

Подставляя  $x=0$  в ур-ия [f] и [g], получим:

$$(X_r')_{x=0} = k(c_r + d_r); \quad (X_r'')_{x=0} = -2k^2 a_r$$

Из этого видно, что  $c_r + d_r$  пропорционально углу наклона касательной к упругой линии, а  $a_r$  пропорционально изгибающему моменту на опоре  $r$ . Из условий просто опертых концов можно далее заключить, что  $a_1 = a_{n+1} = 0$ .

Рассматривая условия правого конца пролета  $r$ , имеем:

$$(X_r)_{x=l_r} = 0; \quad (X_r')_{x=l_r} = (X_{r+1}')_{x=0}; \quad (X_r'')_{x=l_r} = (X_{r+1}'')_{x=0},$$

или, пользуясь ур-иями [e], [f] и [g],

$$a_r (\cos kl_r - \cosh kl_r) + c_r \sin kl_r + d_r \sinh kl_r = 0, \quad [h]$$

$$-a_r (\sin kl_r + \sinh kl_r) + c_r \cos kl_r + d_r \cosh kl_r = c_{r+1} + d_{r+1}, \quad [k]$$

$$a_r (\cos kl_r + \cosh kl_r) + c_r \sin kl_r - d_r \sinh kl_r = 2a_{r+1}. \quad [l]$$

Складывая и вычитая [h] и [l], получим:

$$a_r \cos kl_r + c_r \sin kl_r = a_r \cosh kl_r - d_r \sinh kl_r = a_{r+1},$$

откуда, если только  $\sin kl_r$  не равен нулю,

$$c_r = \frac{a_{r+1} - a_r \cos kl_r}{\sin kl_r}; \quad d_r = \frac{-a_{r+1} + a_r \cosh kl_r}{\sinh kl_r} \quad [m]$$

$$c_r + d_r = a_r (\operatorname{ctgh} kl_r - \operatorname{ctg} kl_r) - a_{r+1} (\operatorname{cosech} kl_r - \operatorname{cosec} kl_r). \quad [n]$$

Пользуясь обозначениями:

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & \operatorname{ctgh} kl_r - \operatorname{ctg} kl_r = \varphi_r, \\ & \operatorname{cosech} kl_r - \operatorname{cosec} kl_r = \psi_r, \end{aligned} \quad [o]$$

получим:

$$c_r + d_r = a_r \varphi_r - a_{r+1} \psi_r.$$



откуда частота основного вида колебания

$$f_1 = \frac{k_1^2 a}{2\pi} = \frac{3,416^2}{2\pi l_1^2} \sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}}.$$

Для следующей высшей частоты получим

$$kl_1 = 4,787.$$

Третья частота получится приблизительно при  $kl_1 = 6,690$ , так что последовательные частоты находятся в отношении  $1 : 1,96 : 3,82$ . Если длины пролетов стремятся стать равными, то, как видно из фиг. 117, наименьший корень стремится к  $kl_1 = kl_2 = \pi$ . В случае основного типа колебания каждый пролет будет находиться в условиях стержня с шарнирными концами. Другой тип колебаний получится при допущении, что касательная в промежуточной опоре горизонтальна, тогда каждый пролет будет находиться в условиях стержня с одним закрепленным, а с другим свободно опертым концом.

В случае трех пролетов получим из [r]:

$$\begin{aligned} -a_2(\varphi_1 + \varphi_2) + a_3\psi_2 &= 0, \\ r_2\psi_2 - a_3(\varphi_2 + \varphi_3) &= 0, \end{aligned}$$

и ур-ие частоты будет:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_3) - \psi_2^2 = 0. \quad [t]$$

Имея таблицы функций  $\varphi$  и  $\psi$ <sup>1)</sup>, можно найти частоту основного вида из ур-ия [t] путем пробных попыток.

**44. Вынужденное колебание балки с опертыми концами.** — *Общие замечания.* — В случае балки с опертыми концами общее выражение для колебания изгиба дается ур-ием [138]. Пользуясь обозначением  $q_i$  для обобщенных координат, получим из вышеуказанного ур-ия:

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad [a]$$

Выражения для потенциальной и кинетической энергии найдутся теперь из ур-ий [123] и [124] подстановкой  $\sin(i\pi x/l)$  вместо  $X_i$ :

$$V = \frac{EI}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i^2 \int_0^l \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 q_i^2, \quad [143]$$

<sup>1)</sup> Такие таблицы даны в статье *E. R. Darnley*'я, упомянутой выше на стр. 234. Другой способ решения — при помощи номограмм — дан в статье *D. M. Smith*'а, упомянутой выше там же, в которой показано применение этой задачи к колебаниям труб холодильника.

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2 \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{A\gamma l}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2. \quad [144]$$

Если возмущающие силы действуют на балку, то ур-ие Лагранжа [72] для любой координаты  $q_i$  будет:

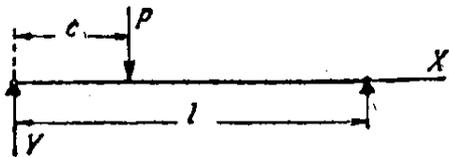
$$\begin{aligned} \frac{A\gamma l}{2g} q_i'' + \frac{EI\pi^4 i^4}{2l^3} q_i &= Q_i \\ \text{или} \\ q_i'' + \frac{i^4 \pi^4 a^2}{l^3} q_i &= \frac{2g}{A\gamma l} Q_i, \end{aligned} \quad [b]$$

где  $Q_i$  обозначает обобщенную силу, соответствующую координате  $q_i$  и  $a^2$  дается выражением [117]. Общее решение ур-ия [b] будет

$$q_i = A_i \cos \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + B_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} + \frac{l^2}{i^2 \pi^2 a} \frac{2g}{A\gamma l} \int_0^t Q_i \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t-t_1)}{l^2} dt_1. \quad [c]$$

Первые два члена этого решения представляют свободное колебание, определяемое начальными условиями, тогда как третий член представляет колебание, вызванное возмущающими силами

*Пульсирующая сила.* — Для примера рассмотрим теперь случай пульсирующей силы  $P = P_0 \sin nt_1$ , приложенной на расстоянии  $c$  от левой опоры (см. фиг. 118). Чтобы получить обобщенную



Фиг. 118.

силу  $Q_i$ , допустим, что придано небольшое приращение  $\delta q_i$  координате  $q_i$ . Соответствующий прогиб балки из ур-ия [a] будет:

$$\delta y = \delta q_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

и работа внешней силы  $P$  на этом перемещении равна

$$P \delta q_i \sin \frac{i\pi c}{l}.$$

Тогда

$$Q_i = P \sin \frac{i\pi c}{l} = P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \sin nt_1. \quad [d]$$

Подставляя в ур-ие [c] и рассматривая только ту часть колебаний, которая вызвана пульсирующей силой, получим:

$$\begin{aligned} q_i = \frac{2g}{A\gamma} P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} &\left( \frac{l^3}{i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} \sin nt - \right. \\ &\left. - \frac{n l^5}{i^2 \pi^2 a (i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4)} \sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2} \right). \end{aligned} \quad [e]$$

Подставляя в ур-ие [a], имеем:

$$y = \frac{2gP_0l^3}{A\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} \sin nt - \frac{2gnP_0l^3}{A\gamma \pi^2 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2 (i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4)} \sin \frac{i^2 \pi^2 at}{l^2}. \quad [145]$$

Отсюда видно, что первый ряд этого решения пропорционален  $\sin nt$ . Он имеет тот же период, что возмущающая сила, и представляет *вынужденные колебания* балки. Второй ряд представляет *свободные колебания* балки, возникающие при приложении силы. Эти последние колебания из-за различного рода сопротивлений будут постепенно затухать, и только вынужденные колебания, представленные ур-ием:

$$y = \frac{2gP_0l^3}{A\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4} \sin nt, \quad [f]$$

имеют практическое значение.

Если пульсирующая сила  $P$  изменяется очень медленно, то  $n$  — очень малая величина, и величиной  $n^2 l^4$  в знаменателе ряда [f] можно пренебречь; тогда

$$y = \frac{2gPl^3}{A\gamma \pi^4 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad [j]$$

или, пользуясь выражением [117], получим

$$y = \frac{2Pl^3}{EI \pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad [g]$$

Это выражение представляет статический прогиб балки, вызванный грузом  $P$ <sup>1)</sup>. В частном случае, когда сила  $P$  приложена по середине, т. е.  $c = \frac{l}{2}$ , мы получим

$$y = \frac{2Pl^3}{EI \pi^4} \left( \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^4} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^4} \sin \frac{5\pi x}{l} - \dots \right). \quad [h]$$

Ряд — быстро сходящийся, и можем получить удовлетворительное

<sup>1)</sup> См. „Applied Elasticity“, p. 131.

приближение для прогибов, взяв только первый член. Этим способом мы найдем для прогиба по середине

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} = \frac{Pl^3}{48,7 EI}.$$

Ошибка этого приближения около  $1\frac{1}{2}\%$ .

Обозначая через  $\alpha$  отношение частоты возмущающей силы к частоте основного типа свободного колебания, получим

$$\alpha = \frac{nl^2}{a\pi^2},$$

и ряд [f], представляющий вынужденные колебания, будет:

$$y = \frac{2P_0 \sin ntl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 - \alpha^2}.$$

Если пульсирующая сила приложена по середине, то

$$y = \frac{2P_0 \sin ntl^3}{EI\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 - \alpha^2} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 - \alpha^2} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4 - \alpha^2} - \dots \right). \quad [k]$$

При малых значениях  $\alpha$  первый член этого ряда дает прогиб с хорошей точностью, и, сравнивая [k] с [h], можем заключить, что отношение динамического прогиба к статическому прогибу приблизительно равно

$$\frac{y_d}{y_s} = \frac{1}{1 - \alpha^2}. \quad [l]$$

Если, например, частота возмущающей силы в четыре раза меньше частоты основного вида колебания, то динамический прогиб будет больше статического примерно на  $6\%$ .

Вследствие того, что задачи колебания балок представляются *линейными* дифференциальными уравнениями, к ним применим *принцип наложения*; и если имеется несколько пульсирующих сил, действующих на балку, то результирующее колебание можно получить наложением друг на друга колебаний, вызванных отдельными силами. Случай непрерывно распределенной пульсирующей нагрузки также может быть разрешен этим же способом, только суммирование следует заменить интегрированием по длине балки. Допустим, например, что балка загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности

$$q = q_0 \sin nt.$$

Такие условия нагрузки существуют например в спарниках паровоза под действием боковых сил инерции. Чтобы определить

колебания, следует вместо  $P_0$  в ур-ие [f] подставить  $q_0 dc$  и затем это ур-ие проинтегрировать по  $c$  в границах  $c=0$  и  $c=l$ . Таким образом получим:

$$y = \frac{4gq_0 l^4}{A\gamma\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i(i^4 \pi^4 a^2 - n^2 l^4)} \sin nt. \quad [m]$$

Если частота нагрузки весьма мала сравнительно с частотой основного вида колебания стержня, членом  $n^2 l^4$  в знаменателях ряда [m] можно пренебречь, и мы получим:

$$y = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1^5} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^5} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^5} + \dots \right). \quad [n]$$

Этот очень быстро сходящийся ряд представляет статический прогиб балки, вызванный равномерно распределенной нагрузкой  $q$ .

Взяв  $x = \frac{l}{2}$ , мы получим прогиб по середине

$$(y)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4ql^4}{EI\pi^5} \left( 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \dots \right). \quad [p]$$

Если взять только первый член этого ряда, то ошибка в прогибе по середине будет около  $1/4\%$ . Если частота пульсирующей нагрузки недостаточно мала, чтобы сделать возможным применение статического ур-ия, можно применить тот же способ, который был показан в случае одиночной силы, и мы придем к тому же заключению, которое представлено выражением [l].

*Движущаяся постоянная сила.*— Если постоянная вертикальная сила  $P$  движется по длине балки, то она вызывает колебания, которые можно определить без всяких затруднений при помощи общего ур-ия [c]. Пусть  $v$  обозначает постоянную скорость движущейся силы и пусть сила находится над левой опорой в начальный момент  $t=0$ ; тогда в любой другой момент  $t=t_1$  расстояние этой силы от этой левой опоры будет  $vt_1$ . Чтобы определить обобщенную силу  $Q_1$  для этого случая, допустим, что координата  $q_1$  в общем выражении [a] упругой линии получила бесконечно малое приращение  $\delta q_1$ . Работа силы  $P$  на этом перемещении будет

$$P(\delta y)_{x=vt_1} = P\delta q_1 \sin \frac{i\pi vt_1}{l}.$$

Отсюда обобщенная сила

$$Q_1 = P \sin \frac{i\pi vt_1}{l}$$

Подставляя это в третий член ур-ия [с], найдем следующее выражение для колебаний, вызванных движущимся грузом<sup>1)</sup>:

$$y = \frac{2gPl^3}{A\gamma\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^2 (i^2\pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{i\pi vt}{l} - \frac{2gPl^4 v}{A\gamma\pi^2 a} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l}}{i^3 (i^2\pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{i^2\pi^2 at}{l^2}. \quad [146]$$

Первый ряд этого решения представляет вынужденные колебания, а второй ряд — свободные колебания балки.

Если скорость  $v$  движущейся силы очень мала, мы можем принять в предыдущем решении  $v=0$  и  $vt=c$ ; тогда

$$y = \frac{2gPl^3}{A\gamma\pi^4 a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Это — статический прогиб балки, вызванный грузом  $P$ , приложенным на расстоянии  $c$  от левой опоры (см. ур-ие [j]).

Пользуясь обозначением

$$\alpha^2 = \frac{v^2 l^2}{a^2 \pi^2}, \quad [q]$$

можем представить вынужденные колебания общего решения [146] в следующем виде

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi vt}{l}}{i^2 (i^2 - \alpha^2)}. \quad [r]$$

Интересно отметить, что этот прогиб вполне совпадает со статическим прогибом балки<sup>2)</sup>, на которую кроме поперечной силы  $P$ ,

<sup>1)</sup> Эта задача имеет практический интерес в связи с изучением колебания мостов. Первое решение этой задачи дано *А. Н. Крыловым*, членом Академии Наук, см. Математический сборник, том 61, 1905 г., С.-Петербург. См. также статью автора в „Известиях Киевского Политехнического Института“, 1908 г. (немецкий перевод в „Zeitschr. f. Math. u. Phys.“, Bd 59, 1911). Проф. *С. Е. Inglis* в „Proc. of the Inst. of Civil Engineers“, Vol. 218, London, 1924, пришел к тем же результатам.

<sup>2)</sup> См. Applied Elasticity, стр. 163. Пользуясь известным выражением для статической упругой линии, можно получить конечную форму функции, от которой ряд [r] берет свое начало,

приложенной на расстоянии  $c = vt$  от левой опоры, действует продольная сжимающая сила  $S$ , такая, что

$$\frac{S}{S_{кр}} = \frac{Sl^2}{EI\pi^2} = a^2. \quad [s]$$

Здесь  $S_{кр}$  обозначает известную критическую сжимающую силу, при которой прямолинейная форма бруса со свободно поворачивающимися концами перестает быть устойчивой.

Из выражений [s] и [q] получим:

$$\frac{Sl^2}{EI\pi^2} = \frac{v^2 l^2}{a^2 \pi^2}$$

или

$$S = \frac{v^2 A \gamma}{g}. \quad [t]$$

Влияние этой силы на статический прогиб балки, нагруженной грузом  $P$ , равносильно динамическому действию движущейся силы  $P$  на прогиб, представляемый выражением [r] вынужденных колебаний.

Увеличением скорости  $v$  можно достигнуть положения, при котором один из знаменателей ряда [146] становится равным нулю, и имеет место резонанс. Допустим, например, что

$$a^2 \pi^2 = v^2 l^2. \quad [u]$$

В этом случае период основного колебания балки, равный  $2l^2/a\pi$ , становится равным  $2l/v$ , причем он вдвое больше, чем время, необходимое для того, чтобы сила  $P$  прошла по балке. Знаменатели первых членов обоих рядов ур-ия [146] становятся при выполнении условия [u] равными нулю, а сумма этих двух членов

$$\frac{2gPl^3}{A\gamma\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{lv}{\pi a} \sin \frac{\pi^2 at}{l^2}}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2}$$

будет иметь вид неопределенности 0/0 и может быть преобразована обычным путем так:

$$- \frac{Pg}{\gamma A \pi v} t \cos \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{Pgl}{\gamma A \pi^2 v^2} \sin \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad [v]$$

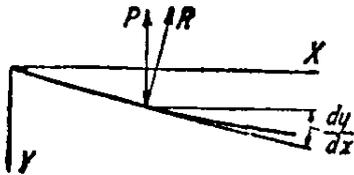
Это выражение имеет максимум, когда  $t = \frac{l}{v}$ , и равно тогда

$$\frac{Pgl}{\gamma A \pi^2 v^2} \left( \sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi vt}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} \right)_{t=l/v} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{Pl^3}{EI\pi^3} \sin \frac{\pi x}{l}. \quad [w]$$

Приняв во внимание, что выражение  $[v]$  дает удовлетворительное приближение для динамического прогиба, выраженного ур-ием [146], можем заключить, что максимальный динамический прогиб при состоянии резонанса  $[u]$  приблизительно на 50% больше, чем наибольший статический прогиб, который равен

$$\frac{Pl^3}{48EI}.$$

Интересно отметить, что динамический прогиб достигает максимума, когда сила  $P$  сходит с балки. В этот момент прогиб под силой  $P$  равен нулю; отсюда работа этой силы во время прохождения балки также равна нулю. Чтобы найти источник энергии, накапливающейся в колеблющейся балке при прохождении по ней силы  $P$ , мы должны допустить, что трения нет, и балка дает реакцию  $R$  в направлении нормали (фиг. 119). В этом случае из условия равновесия следует, что должна существовать горизонтальная сила равная  $P(dy/dx)$ . Работа этой силы за время прохода груза  $P$  по балке будет



Фиг. 119.

$$W = - \int_0^{l/v} P \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=vt} v dt.$$

Подставляя вместо  $y$  выражение  $[w]$ , получим:

$$W = - \frac{P^2 g}{\gamma A \pi v^2} \int_0^{l/v} \left( \sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{\pi vt}{l} \cos \frac{\pi vt}{l} \right) \cos \frac{\pi vt}{l} v dt = \frac{P^2 g l}{\gamma A \pi^2 v^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

или, приняв во внимание условие  $[u]$  и выражение [117],

$$W = \frac{\pi^2}{4} \frac{P^3 l^3}{EI \pi^4}.$$

Это количество работы очень близко <sup>1)</sup> к количеству потенциальной энергии изгиба балки в момент  $t = l/v$ .

В случае мостов, время потребное для того, чтобы пройти мост, обычно велико сравнительно с периодом основного типа

<sup>1)</sup> Потенциальная энергия балки, изгибаемой силой  $P$ , приложенной по середине,  $V = \frac{P^2 l^3}{96 EI}$ , и  $\frac{W}{V} = 2,43$ . Это отношение очень близко к квадрату отношения наибольших прогибов для динамического и статического состояний, которое равно  $\left( \frac{48}{\pi^3} \right)^2 = 2,38$ . Расхождение следует приписать высшим гармоническим волнам упругой линии.

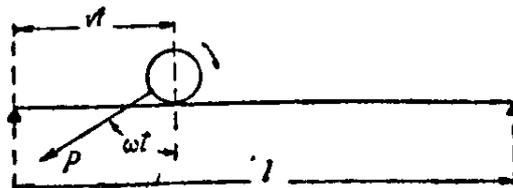
колебания, и величина  $\alpha^2$ , данная выражением  $[q]$ , мала. Тогда взяв только первый член в каждом ряду ур-ия [146] и допустив, что в наиболее неблагоприятном случае амплитуды вынужденных и свободных колебаний складываются друг с другом, мы получим наибольший прогиб

$$y_{\max} = \frac{2gPl^3}{\gamma A \pi^2} \left( \frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} + \frac{vl}{a\pi} \frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} \right) = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha^2} = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{1}{1 - \alpha}. \quad [147]$$

Это — несколько преувеличенное значение наибольшего динамического прогиба, так как в вышеприведенном рассуждении мы совершенно пренебрегли затуханием.

Пользуясь принципом наложения, можем также без труда получить решение задачи для случая системы сосредоточенных движущихся сил и для случая движущихся распределенных сил <sup>1)</sup>.

*Движущаяся пульсирующая сила* <sup>2)</sup>. — Рассмотрим теперь случай, когда пульсирующая сила движется вдоль балки с постоянной скоростью  $v$ . Такое положение может быть, например, когда по мосту проходит не вполне уравновешенный паровоз (фиг. 120). Вертикальная составляющая центробежной силы  $P$ , вызванная неуравновешенностью, будет <sup>3)</sup>  $P \cos \omega t_1$ , где  $\omega$  — угловая скорость ведущего колеса. Пользуясь тем же приемом рассуждения, как раньше, получим следующее выражение для обобщенной силы, отвечающей обобщенной координате  $q_i$ :



Фиг. 120.

$$Q_i = P \cos \omega t_1 \sin \frac{i\pi v t_1}{l}.$$

Подставив это в третий член общего решения [c], получим:

$$y = \frac{Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{ \frac{\sin \left( \frac{i\pi v}{l} + \omega \right) t}{i^4 - (\beta + i\alpha)^2} + \frac{\sin \left( \frac{i\pi v}{l} - \omega \right) t}{i^4 - (\beta - i\alpha)^2} - \frac{a}{i} \left( \frac{\sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2}}{-i^2 a^2 + (i^2 - \beta)^2} + \frac{\sin \frac{i^2 \pi^2 a t}{l^2}}{-i^2 a^2 + (i^2 + \beta)^2} \right) \right\}, \quad [148]$$

<sup>1)</sup> См. вышеупомянутую статью автора.

<sup>2)</sup> См. статью автора в „Phil. Mag.“, Vol. 43, 1922, p. 1018.

<sup>3)</sup> Допущено, что в начальный момент  $t_1 = 0$  центробежная сила действует в направлении вниз.

где  $\alpha = vl/a\pi$  — отношение периода  $\tau = 2l^2/\pi a$  основного типа колебания балки к двойному промежутку времени  $\tau_1 = l/v$ , необходимому для того, чтобы сила  $P$  прошла балку;  $\beta = \tau/\tau_2$  — отношение периода основного типа колебания балки к периоду  $\tau_2 = 2\pi/\omega$  пульсирующей силы.

Когда период  $\tau_2$  пульсирующей силы равен периоду  $\tau$  основного типа колебания балки, то  $\beta = 1$ , и мы получим состояние резонанса. Амплитуда колебания при движении пульсирующей силы будет постепенно нарастать и достигнет своего максимума в момент  $t = l/v$ , когда первый член (при  $i = 1$ ) в ряду в правой части ур-ия [148], являющийся наиболее существенной частью величины  $y$ , может быть приведен к виду

$$\frac{1}{\alpha} \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t,$$

и наибольший прогиб выражается формулой

$$\delta_{\max} = \frac{1}{\alpha} \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} = \frac{2\tau_1}{\tau} \cdot \frac{2Pl^3}{EI\pi^4}. \quad [149]$$

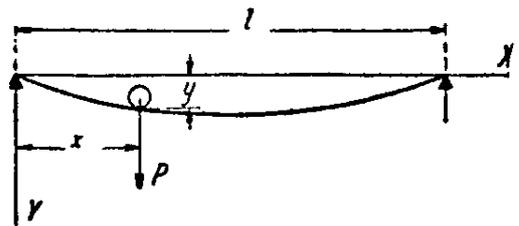
Вследствие того, что в действительных случаях промежутки времени  $\tau_1 = l/v$  велик по сравнению с периодом  $\tau$  собственного колебания, наибольший динамический прогиб, вызываемый пульсирующей силой  $P$ , будет в несколько раз больше, чем прогиб  $2Pl^3/EI\pi^4$ , который возник бы от той же силы, приложенной статически к середине балки. Некоторые применения ур-ия [149] к определению ударного действия на пролетные строения мостов будут даны в следующем п<sup>о</sup>.

**45. Колебания мостов.** — Известно, что движущийся груз вызывает в мосту или в пролетном строении большой прогиб и большие напряжения, чем та же нагрузка, действующая статически. Такое „ударное действие“ подвижной нагрузки на мосты имеет большое практическое значение, и многие инженеры работали над разрешением этой задачи <sup>1)</sup>. Из различных причин, вызывающих ударное действие на мосты, рассмотрим следующие: 1) динамическое действие перемещающейся без толчков нагрузки, 2) ударное действие противовесов ведущих колес паровоза и 3) ударное действие из-за неровностей пути и износа бандажей.

<sup>1)</sup> История этого предмета обстоятельно изложена в известной книге Клебша *Theorie der Elastizität fester Körper*, в переводе на французский *Сен-Венан* (Париж, 1883), см. примечание к параграфу 61, стр. 597.

Действие катящейся без толчков подвижной нагрузки. — При рассмотрении этой задачи мы разберем два крайних случая: 1) когда масса движущегося груза велика сравнительно с массой пролетного строения моста; 2) когда масса движущегося груза мала сравнительно с массой моста.

В первом случае массой балки можно пренебречь. Тогда прогиб балки под грузом при любом положении этого груза будет пропорционален давлению  $R$ , которое катящийся груз  $P$  оказывает на балку (фиг. 121), и его можно определить из известного ур-ия статического прогиба



Фиг. 121.

$$y = \frac{Rx^2(l-x)^2}{3EI}. \quad [a]$$

Чтобы получить давление  $R$ , следует к катящемуся грузу  $P$  добавить силы инерции  $-(P/g)(d^2y/dt^2)$ . Допустив, что груз движется вдоль балки с постоянной скоростью  $v$ , мы получим:

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

и давление на балку будет:

$$R = P \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} \right). \quad [b]$$

Подставляя в ур-ие [a], получим:

$$y = P \left( 1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} \right) \frac{x^2(l-x)^2}{3EI}. \quad [150]$$

Это ур-ие определяет траекторию точки касания катящегося груза с балкой<sup>1)</sup>. Приближенное решение ур-ия [150] получим, допустив, что траектория та же, что при скорости равной нулю ( $v=0$ ), и подставив

$$\frac{Px^2(l-x)^2}{3EI}$$

вместо  $y$  в правую часть этого ур-ия. Тогда простыми выкладками можно показать, что  $y$  становится наибольшим, когда груз на середине пролета, а наибольшее давление

$$R_{\max} = P \left( 1 + \frac{v^2}{g} \frac{Pl}{3EI} \right). \quad [c]$$

<sup>1)</sup> Это ур-ие было установлено Willis'ом, Appendix to the Report of the Commissioners... to inquire into Application of Iron to Railway Structures, London, 1849.

Наибольший прогиб по середине балки возрастает в том же отношении, как давление на нее, так что:

$$\delta_d = \delta_{st} \left( 1 + \frac{v^2}{g} \frac{Pl}{3EI} \right). \quad [151]$$

Это приближенное решение, сравнительно с точным решением ур-ия [150] <sup>1)</sup>, дает результаты достаточно точные для практических применений. Добавочный член в скобках обычно очень мал, и из этого можно заключить, что динамическое действие перемещения подвижной нагрузки в случае малых балок не имеет практического значения.

Во втором случае, когда масса груза мала сравнительно с массой пролетного строения моста, движущийся груз можно заменить с достаточной точностью движущейся силой и тогда применить результаты выкладок п<sup>о</sup> 44.

Пусть, например, для железных пролетных строений трех однопутных железнодорожных мостов с пролетами в 18,3 м, 36,6 м, и 109,7 м собственные частоты колебаний  $f$  равны <sup>2)</sup>:

\	$l = 18,3 \text{ м}$	$36,6 \text{ м}$	$109,7 \text{ м}$
	$f = 9$	$5$	$2$
(α) $v = 36,6 \text{ м в сек} = 1/9$	$= 1/9$	$1/10$	$1/12$

Приняв скорость  $v$  равной 36,6 м/сек, получим указанные в третьей строке таблицы величины  $\alpha$ , представляющие отношение периода основного типа колебания к двойному промежутку времени  $l/v$ , необходимому для прохождения грузом моста. Теперь на основании решения [147] можно заключить <sup>3)</sup>, что для пролета в 18,3 м и при очень большой скорости увеличение прогиба из-за действия подвижного груза будет около 12%, и это увеличение становится еще меньше с уменьшением скорости и

<sup>1)</sup> Точное решение ур-ия [150] получено *Стоксом*, см. „Math. and Phys. Papers“, Vol. 2, p. 179. Та же задача рассмотрена также *Циммерманном*, см. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last, Berlin, 1896. Следует заметить, что интегрирование ур-ия [150] может быть выполнено также и в численном виде, пользуясь способом, изложенным ранее (см. стр. 84). Таким образом были получены проф. *Петровым* решения для балки на упругих опорах и для разрезных балок, см. „Записки Императорского Русского Технического Общества“, 1903 г.

<sup>2)</sup> Некоторые опытные данные по колебаниям мостов, можно найти в следующих статьях: *A. Bühler*, Stosswirkungen bei eisernen Eisenbahnbrücken, Druckschrift zum Intern. Kongress für Brückenbau, Zürich, 1926, и *W. Hort*, Stossbeanspruchungen und Schwingungen... „Die Bautechnik“, 1928.

<sup>3)</sup> Пролетное строение моста рассматривается здесь как простая балка постоянного поперечного сечения. Колебание ферм рассмотрено *H. Reissner'ом* „Zeitschr. f. Baut.“, Bd 53, 1903, S. 135, и *E. Pohlhausen'ом* „Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech.“ Bd 1, 1921, S. 28.

с увеличением пролета. Если несколько подвижных грузов действуют на мост, колебания, вызванные ими, должны быть наложены друг на друга. Только в исключительном случае синхронности этих колебаний общий эффект влияния подвижной нагрузки на систему будет равен сумме эффектов отдельных грузов, и увеличение прогиба из-за этого эффекта будет происходить в той же пропорции, как для одиночного груза. Из этих примеров можно заключить, что действие подвижной нагрузки плавно движущегося груза не является существенным фактором и что в наиболее неблагоприятных случаях она вряд ли превзойдет 10%. Гораздо более серьезное действие производят, как мы далее увидим, пульсирующие силы, возникающие при вращении противовесов паровозов.

*Ударное действие неуравновешенных грузов.* — Наиболее неблагоприятные условия наступают при состоянии резонанса, когда число оборотов в секунду ведущих колес равно частоте собственных колебаний моста. Для мостов малых пролетов частота собственных колебаний обычно столь высока, что синхронность пульсирующего груза и собственного колебания не может получиться ни при какой скорости, возможной на практике. Приняв, например, шесть оборотов ведущих колес в секунду за самый высокий предел и взяв частоты собственного колебания из вышеприведенной таблицы, можно заключить, что состояние резонанса вряд ли возможно для пролетов, меньших чем 30 м. Для больших пролетов явление резонанса следует принять во внимание, и ударное действие нужно будет определить из ур-ия [149]. Пусть  $P_1$  — наибольшее суммарное давление на рельс, вызванное противовесами при вращении ведущих колес один раз в секунду;  $n$  — общее число оборотов ведущих колес при проходе моста. Тогда из ур-ия [149] получим следующий добавочный прогиб из-за ударного действия:

$$\delta_{\max} = \frac{2n 2P_1 l^3}{\tau EI\pi^4}. \quad [152]$$

Из этого ясно, что при определении ударного эффекта, вызванного неуравновешенностью, мы должны принять во внимание: 1) статический прогиб, вызванный силою  $P_1$ , 2) период  $\tau$  собственного колебания моста и 3) число оборотов  $n$ . Все эти величины обычно не принимаются во внимание формулами ударного действия, применяемыми при расчете мостов.

Чтобы получить некоторое понятие о величине этого ударного действия, применим ур-ие [152] к числовому примеру <sup>1)</sup> 100 тон-

<sup>1)</sup> Нижеприводимые выкладки взяты из статьи *Инглиса*, упомянутой выше на стр. 242.

ного паровоза, проходящего по мосту пролетом 36,6 м. Допустив, что вес паровоза равновелик равномерно распределенной нагрузке 21,75 т на погонный м, распределенной на длину 4,6 м, и что вес вагонов, следующих и предшествующих паровозу эквивалентен равномерно распределенной нагрузке 8,18 т на погонный м, получим, что наибольший статический прогиб середины каждой фермы приблизительно равен  $(2l^3/EI\pi^4) \cdot (124,6)$ . Тот же прогиб, когда паровоз подходит к опоре и поезд целиком покрывает мост, равен приблизительно  $(2l^3/EI\pi^4) \cdot (93,3)$ . Взяв число оборотов  $n = 8$  (диаметр колеса равен 1,45 м) и наибольшее пульсирующее давление на каждую ферму при состоянии резонанса равным  $P_1/\tau^2 = 8,5$  т, получим добавочный прогиб, вычисленный по формуле [152], равным  $(2l^3/EI\pi^4) \cdot (136)$ . Прибавив его к статическому прогибу, вычисленному выше для паровоза, подходящего к концу моста, получим полный прогиб по середине:  $(2l^3/EI\pi^4) \cdot (229,3)$ . Сравнивая это с наибольшим статическим прогибом по середине:  $(2l^3/EI\pi^4) \cdot (124,6)$ , указанным ранее, можно заключить, что увеличение прогиба вследствие удара равно в этом случае примерно 84%. Приняв число оборотов  $n$  равным 6 (диаметр ведущих колес равен 1,98 м) и взяв снова состояние резонанса, мы получим для того же числового примера увеличение прогиба равным 56%.

В случае мостов меньших пролетов, когда частота собственного колебания значительно больше числа оборотов в секунду ведущих колес, можно получить удовлетворительное приближение, если взять только первый член ряда [148] и наиболее неблагоприятное положение, а именно, когда  $\sin[(\pi v/l) + \omega]t$  и  $\sin[(\pi v/l) - \omega]t$  становятся равными единице и  $\sin \pi^2 at/l^3$  равным  $-1$  в момент  $t = l/2v$ , т. е., когда пульсирующая сила доходит до середины пролета. Тогда добавочный прогиб по ур-ию [148] будет равен

$$\delta = \frac{Pl^3}{EI\pi^4} \left( \frac{1}{1 - (\beta + \alpha)^2} + \frac{1}{1 - (\beta - \alpha)^2} + \frac{\alpha}{(1 - \beta)^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha}{(1 + \beta)^2 - \alpha^2} \right) =$$

$$= \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \frac{1 - \alpha}{(1 - \beta[1 + \alpha/\beta])(1 + \beta[1 - \alpha/\beta])}. \quad [153]$$

Рассмотрим, например, мост пролетом 18,3 м и возьмем такой же род нагрузки, как в предыдущем примере. Тогда наибольший статический прогиб будет приблизительно  $(2l^3/EI\pi^4) \cdot (78,4)$ . Если ведущие колеса имеют длину окружности 6,1 м и делают 6 оборотов в секунду, то наибольшая сила, действующая вниз на балку,

будет  $8,5 \left(\frac{6}{8}\right)^2 = 12,2 \text{ м}$ . Допустив, что собственная частота моста равна 9, получим из ур-ия [153]:

$$\delta = \frac{2l^3}{EI\pi^4} (12,2 \times 2,57) = \frac{2l^3}{EI\pi^4} (31,4).$$

Отсюда

$$\frac{\text{динамич. прогиб}}{\text{статич. прогиб}} = \frac{78,4 + 31,4}{78,4} = 1,40.$$

Ударное действие противовесов в этом случае достигает 40%,

Вообще из вышеизложенного можно заключить, что наиболее сильное ударное действие получим при наименьших из пролетов, которые могут оказаться в состоянии резонанса (пролеты около 30 м при сделанном выше допущении), так как при наименьших пролетах резонанс наступает, когда пульсирующая возмущающая сила достигает своей наибольшей величины. С увеличением пролета критическая скорость, равно как и величина пульсирующего груза, уменьшаются, соответственно чему уменьшается и ударное действие. Для очень больших пролетов, когда частота основного типа колебания мала, теоретически становится возможной синхронность пульсирующей силы со вторым видом колебания, имеющим узел по середине пролета, вследствие чего может произойти увеличение ударного действия при скорости приблизительно в четыре раза большей, чем первая критическая скорость.

Следует заметить, что все наши выкладки основывались на допущении, что движется вдоль моста пульсирующая сила. В действительных условиях мы имеем катящиеся массы, которые вызовут изменение собственной частоты моста в соответствии с изменением положения грузов. Эта переменность собственной частоты, которая особенно заметна при малых пролетах, очень благоприятна, так как пульсирующий груз не будет уже давать резонанса во все время прохождения по мосту, и его нарастающее действие не будет столь заметным, как это следует из вышеприведенной теории. Из опытов, выполненных комиссией по железнодорожным мостам Индии <sup>1)</sup>, следует, что в среднем наибольший прогиб появляется, когда паровоз уже прошел около двух третей пролета, и что наибольшее ударное действие равно примерно только одной трети вычисленного по формуле [152]. Следует отметить также, что ударное действие пропорционально силе  $P_1$  и зависит поэтому от типа паровоза и от способа урав-

<sup>1)</sup> См. отчет мостовой подкомиссии 1925 г., Government of India Central Publication Branch, Technical Paper № 247, Calcutta 1926.

новешивания. В то время как в плохо уравновешенном двухцилиндровом паровозе сила  $P_1$  может достигнуть величины большей  $450 \text{ кг}^1$ ), в электровозах можно получить точное уравновешивание, если не принимать во внимание переменности давления на рельс. Это отсутствие ударного действия может компенсировать увеличение нагрузки на ось в современных тяжелых электровозах.

В случае небольших главных балок и для продольных балок проезжей части, имеющих очень высокие собственные частоты, действие противовесов на прогиб и напряжения можно определить с достаточной точностью, пренебрегая колебаниями и пользуясь формулой статического прогиба, в которой следует лишь прибавить к статическому давлению на рельс центробежные силы противовесов. Влияние этих центробежных сил может оказаться особенно заметным в случае малых пролетов, когда на балке может одновременно находиться только небольшое число колес.

*Ударное действие из-за неровностей пути и износа бандажей.* — Такие неровности пути, как небольшие выбоины на рельсах, как рельсовые стыки, а также износ бандажей и т. п. могут явиться причиной значительного ударного действия, которое может стать особенно заметным в случае малых пролетов. Если форма выбоин в пути или износа бандажей представляются правильной кривой, то для вычисления добавочного давления колеса на рельс можно применять также и здесь способ, ранее использованный для рассмотрения действия неровностей дороги на колебания экипажей (см. стр. 137). Это добавочное давление будет пропорционально массе, передающейся колесам непосредственно (не через рессоры), и квадрату скорости поезда. Оно может достигнуть значительной величины и иметь практическое значение в случае мостов малых пролетов и для продольных балок. Этот добавочный динамический эффект, вызванный неправильностями пути и износом бандажей, оправдывает высокий ударный коэффициент, обычно принимаемый при расчетах пролетных строений мостов малых пролетов. Устранив рельсовые стыки на мостах и применяя проезжую часть с баластным корытом или с солидным деревянным настилом, действие этих неровностей можем уменьшить и значительно улучшить условия работы пролетных строений.

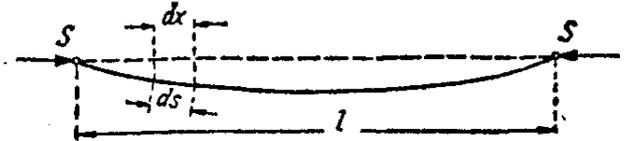
**46. Влияние осевых сил на боковые колебания. Стержень с шарнирными концами.** — В качестве первого примера этого типа

<sup>1)</sup> Некоторые данные о величинах  $P_1$  для различного типа паровозов даны в упомянутом выше отчете мостовой подкомиссии.

колебаний мы рассмотрим случай стержня, сжатого двумя силами  $S$  (фиг. 122). Общее выражение для бокового колебания будет то же, что раньше (см. ур-ие [138]):

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad [a]$$

Разница будет только в выражении для потенциальной энергии системы. Нужно подчеркнуть, что при боковом прогибе в этом случае следует рассмотреть не только энергию изгиба, но также изменение энергии сжатия. Вследствие бокового прогиба осевая линия стержня, которая вначале получила сжатие, несколько удлинится<sup>1)</sup>, и потенциальная энергия сжатия уменьшится. Увеличение длины осевой линии будет (см. фиг. 122)



Фиг. 122.

$$\int_0^l (ds - dx) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Соответствующее уменьшение энергии сжатия<sup>2)</sup>

$$\frac{S}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{S}{2} \int_0^l \left( \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \frac{i\pi}{l} \cos \frac{i\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{S\pi^2}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^2 q_i^2. \quad [b]$$

Если концы стержня могут свободно скользить в осевом направлении, то ур-ие [b] будет представлять работу сил  $S$ . Для энергии изгиба применим ранее полученное выражение [143]. Отсюда полная потенциальная энергия

$$V = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 q_i^2 - \frac{S\pi^2}{4l} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^2 q_i^2. \quad [154]$$

Кинетическая энергия стержня по формуле [144]

$$T = \frac{\gamma Al}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2. \quad [155]$$

<sup>1)</sup> Допущено, что при колебании шарниры неподвижны.

<sup>2)</sup> Здесь рассматриваются только такие прогибы, которые настолько малы, что можно пренебречь изменением продольной силы.

Ур-ие ЛAGRANЖА для любой координаты  $q_i$  будет:

$$\frac{\gamma A l}{2g} q_i'' + \frac{E l \pi^4}{2l^3} \left( i^4 - \frac{S l^2}{E l \pi^2} i^2 \right) q_i = 0.$$

Пользуясь обозначениями

$$a^2 = \frac{E l g}{\gamma A}, \quad \alpha^2 = \frac{S l^2}{E l \pi^2}, \quad [156]$$

получим:

$$q_i'' + \frac{a^2 \pi^4}{l^4} (i^4 - \alpha^2 i^2) q_i = 0,$$

откуда

$$q_i = C \cos \left( \frac{a \pi^2 i^2}{l^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{i^2}} t \right) + D \sin \left( \frac{a \pi^2 i^2}{l^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{i^2}} t \right). \quad [157]$$

Подставляя это в ур-ие [a], получим полное выражение для свободных колебаний.

Сравнивая решение [157] с выражением [136], можно заключить, что вследствие сжимающей силы  $S$ , частоты собственного колебания уменьшились в пропорции

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{i^2}}.$$

Если  $\alpha^2$  приближается к 1, то частота основного типа колебания приближается к нулю, так как при таком значении  $\alpha^2$  сжимающая сила  $S$  достигает своей критической величины  $E l \pi^2 / l^2$ , когда прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой и стержень выгибается вбок.

Если вместо сжимающей действует на стержень растягивающая сила  $S$ , то частота колебания увеличивается. Чтобы получить свободные колебания в этом случае, необходимо только переменить знак  $\alpha^2$  в ур-ии [157]. Тогда

$$q_i = C \cos \left( \frac{a \pi^2 i^2}{l^2} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{i^2}} t \right) + D \sin \left( \frac{a \pi^2 i^2}{l^2} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{i^2}} t \right). \quad [157']$$

Если  $\alpha^2$  очень большое число (такое положение получается для тонких проволок или струн), единицей можно пренебречь по сравнению с  $\alpha^2 / i^2$ , и мы получим из ур-ия [157']:

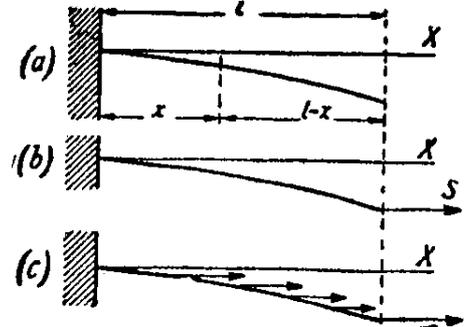
$$q_i = C \cos \frac{i \pi}{l} \sqrt{\frac{g S}{A \gamma}} t + D \sin \frac{i \pi}{l} \sqrt{\frac{g S}{A \gamma}} t.$$

Подставляя в [a], получим

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sin \frac{i\pi x}{l} \left( C \cos \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{gS}{A\gamma}} t + D \sin \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{gS}{A\gamma}} t \right). \quad [158]$$

Это — общее выражение для боковых колебаний натянутой струны, жесткостью которой можно пренебречь.

*Консольная балка.* — В этом случае дадим только приближенное решение, пользуясь методом Рейля. В основу этих выкладок возьмем для упругой линии консоли (фиг. 123) под действием собственного веса  $q$  на единицу длины ур-ие:



Фиг. 123.

$$y = \frac{q}{2EI} \left( \frac{1}{2} l^2 x^2 - \frac{1}{3} l x^3 + \frac{1}{12} x^4 \right). \quad [c]$$

Потенциальная энергия изгиба в этом случае

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{q^2 l^5}{40EI}. \quad [a]$$

Если прогиб при колебании выражается  $y \cos pt$ , то наибольшая кинетическая энергия колебания будет

$$T = \frac{qp^2}{2g} \int_0^l y^2 dx = \frac{q^3 p^2 l^5}{E^2 I^2 g} \frac{13}{8 \cdot 9 \cdot 90}. \quad [e]$$

Положив [d] равным [e], получим следующие выражения для частоты и периода колебания консоли (фиг. 123 a):

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{90 \times 9}{65}} \sqrt{\frac{EIg}{ql^4}}, \quad [159]$$

$$\tau = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{65}{90 \times 9}} \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}} = 3,530 \sqrt{\frac{ql^4}{EIg}}. \quad [160]$$

Ошибка этого приближенного решения меньше  $1/2\%$  (см. стр. 234).

Чтобы определить частоту, когда на конец консоли действует растягивающая сила  $S$  (фиг. 123 b), следует к потенциальной энергии изгиба, исчисленной выше (ур-ие [d]), прибавить величину

$$\frac{S}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{Sq^2 l^5}{8 \cdot 14 E^2 I^2}, \quad [f]$$

которая равна и противоположна по знаку работе растягивающей силы  $S$  при изгибе. Тогда

$$V = \frac{q^2 l^3}{40EI} \left( 1 + \frac{5}{14} \frac{Sl^2}{EI} \right). \quad [g]$$

Вследствие этого увеличения потенциальной энергии частота колебания найдется умножением величины [159] на

$$\sqrt{1 + \frac{5}{14} \frac{Sl^2}{EI}}. \quad [161]$$

Интересно отметить, что член  $5/14 Sl^2/EI$  отличается только примерно на 10% от величины  $\alpha^2 = 4Sl^2/EI\pi^2$ , представляющей отношение продольной силы  $S$  к критической сжимающей силе консоли.

Если растягивающие силы  $s$  равномерно распределены по длине консоли (фиг. 123 *c*), то член, который нужно прибавить к энергии изгиба, будет

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 s(l-x) dx = \frac{q^2 l^3}{8 \cdot 14 E^2 I^2} \frac{7sl}{20}. \quad [162]$$

Сравнивая с формулой [f], можно заключить, что действие на частоту равномерно распределенной растягивающей силы то же, как если бы  $7/20$  суммы этих сил было приложено к концу консоли.

Этот результат может иметь некоторый практический интерес при рассмотрении действия центробежной силы на частоту колебания лопаток турбины (см. стр. 271).

47. Колебание балок, лежащих на упругом основании. — Допустим, что балка с шарнирными концами поддерживается по всей своей длине *непрерывным упругим основанием*, жесткость которого представляется величиной  $k$  — *модуля упругости основания*.  $k$  есть нагрузка на единицу длины балки, необходимая, чтобы вызвать осадку основания на единицу. Если массой основания можно пренебречь, то колебания такой балки можно легко изучить, пользуясь теми же приемами, как выше. Необходимо только при определении потенциальной энергии системы прибавить к энергии изгиба балки энергию деформации упругого основания. Взяв, как выше при шарнирных концах,

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad [a]$$

получим:

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx = \frac{EI\pi^4}{4l^3} \sum_{i=1}^{i=\infty} i^4 q_i^2 + \frac{kl}{4} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i^2 \dots \quad [163]$$

Первый ряд этого выражения представляет энергию изгиба балки (см. ур-ие [143]), а второй ряд — энергию деформации основания.

Кинетическая энергия колебания из ур-ия [144] будет:

$$T = \frac{\gamma Al}{4g} \sum_{i=1}^{i=\infty} q_i'^2.$$

Дифференциальное ур-ие движения для любой координаты  $q_i$ :

$$q_i'' + \frac{2g}{\gamma Al} \left( \frac{EI\pi^4}{2l^3} i^4 + \frac{kl}{2} \right) q_i = \frac{2g}{\gamma Al} Q_i$$

или

$$q_i'' + \frac{a^2\pi^4}{l^4} (i^4 + \beta) q_i = \frac{2g}{\gamma Al} Q_i. \quad [b]$$

где  $Q_i$  обозначает внешнюю возмущающую силу, соответствующую координате  $q_i$ ,

$$a^2 = \frac{EIg}{\gamma A}; \quad \beta = \frac{kl^4}{EI\pi^4}. \quad [164]$$

Положив  $\beta=0$ , получим ур-ие для шарнирного стержня, не поддерживаемого никаким упругим основанием (см. стр. 238). Обозначив:

$$p_i^2 = \frac{a^2\pi^4}{l^4} (i^4 + \beta), \quad [c]$$

получим общее решение ур-ия [b]

$$q_i = A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t + \frac{2g}{\gamma Al} \cdot \frac{1}{p_i} \int_0^t Q_i \sin p_i (t - t_1) dt_1. \quad [d]$$

Первые два члена этого решения представляют свободные колебания балки, зависящие от начальных условий. Третий член представляет колебания, вызванные возмущающей силой  $Q_i$ .

Частоты собственных колебаний зависят, как видно из выражения [c], не только от жесткости балки, но также от жесткости основания.

В качестве примера рассмотрим случай, когда пульсирующая сила  $P = P_0 \sin nt$  действует на балку на расстоянии  $c$  от левой опоры (фиг. 118). Обобщенная сила, соответствующая координате  $q_i$ , будет в этом случае

$$Q_i = P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \sin nt_1. \quad [e]$$

Подставляя в ур-ие [d] и рассматривая только колебания, вызванные возмущающей силой, получим:

$$q_i = \frac{2g}{\gamma A} P_0 \sin \frac{i\pi c}{l} \left\{ \frac{l^3}{\pi^4 a^2 (i^4 + \beta) - n^2 l^4} \sin nt - \frac{n}{lp_i (p_i^2 - n^2)} \sin p_i t \right\}.$$

Подставляя в [а], имеем:

$$y = \frac{2gP_0l^3}{\gamma A} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin nt}{\pi^4 a^2 (i^4 + \beta) - n^2 l^4} - \frac{n \sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin p_i t}{l^4 p_i (p_i^2 - n^2)} \right\}. \quad [f]$$

Первый член этого выражения представляет вынужденное колебание, а второй — свободное колебание балки. Положив  $n=0$  и  $P=P_0 \sin nt$ , получим прогиб балки от постоянной силы  $P$

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 + \beta}. \quad [165]$$

Положив  $c=l/2$ , получим прогиб по середине от силы  $P$

$$y = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \left( \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{1 + \beta} - \frac{\sin \frac{3\pi x}{l}}{3^4 + \beta} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{l}}{5^4 + \beta} - \dots \right). \quad [166]$$

Сопоставляя это с ур-ием [h] (стр. 240), можем заключить, что добавочный член  $\beta$  в знаменателях представляет действие упругого основания на прогиб балки.

Сравнивая вынужденные колебания

$$y = \frac{2gl^3 P_0 \sin nt}{\gamma A} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{\pi^4 a^2 (i^4 + \beta) - n^2 l^4} = \frac{2Pl^3}{EI\pi^4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi c}{l} \sin \frac{i\pi x}{l}}{i^4 + \beta - \frac{n^2 l^4}{\pi^4 a^2}},$$

со статическим прогибом [165], можем заключить, что динамические прогибы можно получить помощью формулы статики. Необходимо только заменить  $\beta$  через  $\beta - (n^2 l^4 / \pi^4 a^2)$ .

Пользуясь обозначением [164], мы получим

$$\beta - \frac{n^2 l^4}{\pi^4 a^2} = \frac{kl^4}{EI\pi^4} - \frac{n^2 l^4 \gamma A}{\pi^4 EIg} = \frac{l^4}{EI\pi^4} \left( k - \frac{\gamma n^2 A}{g} \right).$$

Это значит, что динамический прогиб можно получить из формулы статического прогиба, заменяя в ней действительный модуль основания уменьшенной величиной  $k - (\gamma n^2 A / g)$  того же модуля. Это заключение остается верным также и в случае бесконечно длинного стержня на упругом основании. Пользуясь этим заключением, можем определить прогиб рельса, вызванный пульсирующим грузом <sup>1)</sup>.

48. Способ Ритца <sup>2)</sup>. — Было уже показано на нескольких случаях предыдущих глав (см. п<sup>o</sup> 14), что при определении частоты огненного типа колебания сложной системы можно применить

<sup>1)</sup> См. статью автора — Статические и динамические напряжения в рельсах, Intern. Congress for Applied Mechanics, Proceedings, Zürich, 1926, p. 407.

<sup>2)</sup> См. Walter Ritz, Gesammelte Werke, 1911, S. 265.

приближенный способ Рейлея. При пользовании этим способом, необходимо сделать некоторые допущения относительно формы упругой линии колеблющейся балки или колеблющегося вала. Соответственная частота будет тогда найдена из рассмотрения энергии системы. Выбор определенной формы упругой линии при этом способе равносителен введению некоторых добавочных ограничений, которые приводят сложную систему к системе, имеющей только одну степень свободы. Такие добавочные ограничения могут только увеличить жесткость системы и дают получаемую по способу Рейлея частоту колебания всегда несколько выше ее точной величины.

Лучшие приближения при определении основной частоты, а также частот высших видов колебания можно получить способом Ритца, который является дальнейшим развитием способа Рейлея. При пользовании этим способом упругая линия, представляющая вид колебания, должна быть взята с несколькими параметрами, величины которых следует выбирать так, чтобы свести до минимума частоту основного типа колебания.

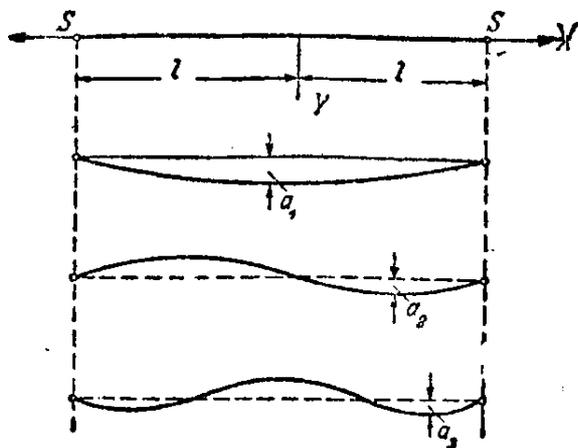
Способ выбора формы упругой линии и порядок определения последовательных частот покажем на простейшем случае колебания струны постоянного сечения (фиг. 124). Пусть  $S$  — растягивающая сила в струне,  $q$  — вес струны на единицу длины,  $2l$  — длина струны.

Если струна испытывает один из нормальных видов колебания, то упругая линия может быть представлена так:

$$y = X \cos pt, \quad [a]$$

где  $X$  — функция  $x$ , определяющая форму колеблющейся струны, и  $p$  определяет частоту колебания. Допустив, что отклонения очень малы, можем пренебречь изменением в растягивающей силе  $S$  при колебании, и увеличение потенциальной энергии деформации, вызванное отклонением, получится умножением  $S$  на увеличение длины струны. Таким образом находим следующее выражение для потенциальной энергии, причем энергия в положении равновесия принята равной нулю:

$$V = S \int_0^l \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$



Фиг. 124.

Наибольшая потенциальная энергия получится, когда колеблющаяся струна займет свое крайнее положение. В этом положении  $\cos pt = 1$  и

$$V = S \int_0^l \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx. \quad [b]$$

Кинетическая энергия колеблющейся струны:

$$T = \frac{q}{g} \int_0^l (y')^2 dx$$

Ее максимум наступает, когда колеблющаяся струна находится в своем среднем положении, т. е. когда  $\cos pt = 0$ , тогда

$$T = \frac{p^2 q}{g} \int_0^l X^2 dx. \quad [c]$$

Допустив, что не происходит потери энергии, мы можем приравнять [b] и [c], откуда получим:

$$p^2 = \frac{gS}{q} \frac{\int_0^l \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^l X^2 dx}. \quad [d]$$

Зная форму различных видов колебания и подставляя в [d] соответствующие выражения для  $X$ , можем определить частоты этих видов колебания. В случае струны постоянного поперечного сечения упругие линии при колебании — синусоидальные кривые, и для первых трех видов колебания, показанных на фиг. 124, имеем

$$X_1 = a_1 \cos \frac{\pi x}{2l}; \quad X_2 = a_2 \sin \frac{\pi x}{l}; \quad X_3 = a_3 \cos \frac{3\pi x}{2l}.$$

Подставляя в [d], получим (см. ур-ие [158]):

$$p_1^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{gS}{q}, \quad p_2^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{gS}{q}, \quad p_3^2 = \frac{9}{4} \frac{\pi^2}{l^2} \frac{gS}{q}, \quad [e]$$

и соответствующие частоты будут:

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{gS}{q}}; \quad f_2 = \frac{2}{4l} \sqrt{\frac{gS}{q}}; \quad f_3 = \frac{3}{4l} \sqrt{\frac{gS}{q}}. \quad [f]$$

Применим теперь способ Ритца к определению из ур-ия [d] частоты  $f_1$  основного типа колебания. Первое действие при при-

менении этого способа — выбор соответствующего выражения для упругой линии. Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$  — ряд функций, удовлетворяющих конечным условиям и могущих представить величину  $X$ . Тогда, полагая

$$X = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + \dots, \quad [g]$$

мы можем получить подходящую упругую линию колеблющейся струны.

Мы знаем, что, взяв конечное число членов в выражении [g], мы накладываем некоторые ограничения на возможные формы упругой линии струны, и вследствие этого частота, вычисленная из ур-ия [d], будет обычно выше, чем точное значение этой частоты. Чтобы получить возможно большее приближение, Ритц предложил выбирать коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$  в выражении [g] так, чтобы выражение [d] становилось наименьшим. Таким образом получим систему ур-ий

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \frac{\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^l X^2 dx} = 0. \quad [h]$$

Выполняя указанное дифференцирование, имеем:

$$\int_0^l X^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l X^2 dx = 0 \quad [k]$$

или, замечая из ур-ия [d], что

$$\int_0^l \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx = \frac{p^2 q}{gS} \int_0^l X^2 dx,$$

получим из ур-ия [k]:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l \left\{ \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 - \frac{p^2 q}{gS} X^2 \right\} dx = 0. \quad [l]$$

Таким путем получится система однородных и линейных относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ур-ий, число которых будет равно числу коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, \dots$  выражения [g]. Такая система ур-ий может дать для  $a_1, a_2, a_3, \dots$  решения, отличные от нуля, только если определитель этих ур-ий равен нулю. Это условие приводит нас к уравнению частоты, из которого можно определить частоты различных видов колебаний.

Рассмотрим виды колебаний туго натянутой струны, симметричные относительно средней плоскости. Легко видеть, что функция, подобная  $l^2 - x^2$ , представляющая симметричную параболическую кривую и удовлетворяющая конечным условиям  $\{(y)_{x=\pm l} = 0\}$ , есть функция, подходящая для нашего случая. Умножением этой функции на  $x^2, x^4, \dots$  получим ряд кривых симметричных и удовлетворяющих конечным условиям. Таким образом мы пришли к следующему выражению упругой линии колеблющейся струны:

$$X = a_1(l^2 - x^2) + a_2x^2(l^2 - x^2) + a_3x^4(l^2 - x^2) + \dots \quad [m]$$

Чтобы показать, как быстро увеличивается точность наших вычислений с увеличением числа членов выражения  $[m]$ , мы начнем с одного только члена и положим:

$$X_1 = a_1(l^2 - x^2).$$

Тогда

$$\int_0^l (X_1)^2 dx = \frac{8}{15} a_1^2 l^5; \quad \int_0^l \left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2 dx = \frac{4}{3} a_1^2 l^3.$$

Подставляя в ур-ие  $[d]$ , получим

$$p_1^2 = \frac{5}{2l^2} \frac{gS}{q}.$$

Сравнивая это с точным решением  $[e]$ , видим, что вместо  $\pi^2/4$  получается  $5/2$ , и ошибка в частоте равна только 0,66%.

Следует заметить, что достаточно взять только один член в выражении  $[m]$ , чтобы вполне определить форму кривой, и система сводится к системе с одной только степенью свободы, как это получается в приближенном способе Рейлея.

Чтобы получить дальнейшее приближение, возьмем два члена в выражении  $[m]$ , тогда мы будем иметь два параметра:  $a_1$  и  $a_2$  и, изменяя соотношение этих двух величин, мы можем изменить также до некоторой степени форму кривой. Наилучшее приближение получим, когда это отношение таково, что выражение  $[d]$  становится наименьшим, что происходит, когда условия  $[l]$  удовлетворены.

Полагая

$$X_2 = a_1(l^2 - x^2) + a_2x^2(l^2 - x^2),$$

получим:

$$\int_0^l X_2^2 dx = \frac{8}{15} a_1^2 l^5 + \frac{16}{105} a_1 a_2 l^7 + \frac{8}{315} a_2^2 l^9;$$

$$\int_0^l \left(\frac{dX_2}{dx}\right)^2 dx = \frac{4}{3} a_1^2 l^3 + \frac{8}{15} a_1 a_2 l^5 + \frac{44}{105} a_2^2 l^7.$$

Подставляя в ур-ие [l] и взяв производные по  $a_1$  и  $a_2$ , получим:

$$\begin{aligned} a_1(1 - \frac{2}{3} k^2 l^2) + a_2 l^2 (\frac{1}{3} - \frac{2}{33} k^2 l^2) &= 0, \\ a_1(1 - \frac{2}{7} k^2 l^2) + a_2 l^2 (\frac{11}{7} - \frac{2}{21} k^2 l^2) &= 0, \end{aligned} \quad [n]$$

где

$$k^2 = \frac{p^2 q}{gS}. \quad [p]$$

Определитель ур-ий [n] равен нулю, когда

$$k^4 l^4 - 28 k^2 l^2 + 63 = 0.$$

Два корня этого ур-ия будут:

$$k_1^2 l^2 = 2,46744, \quad k_2^2 l^2 = 25,6.$$

Вспомнив, что мы рассматриваем только виды колебаний, симметричные относительно середины, и пользуясь ур-ием [p], мы получим для первого и третьего видов колебаний:

$$p_1^2 = \frac{2,46744}{l^2} \frac{gS}{q}, \quad p_3^2 = \frac{25,6}{l^2} \frac{gS}{q}.$$

Сопоставляя это с точными решениями [e]:

$$p_1^2 = \frac{\pi^2}{4l^2} \frac{gS}{q} = \frac{2,467401}{l^2} \frac{gS}{q}; \quad p_3^2 = \frac{9\pi^2}{4l^2} \frac{gS}{q} = \frac{22,207}{l^2} \frac{gS}{q}.$$

можно заключить, что точность, с которой получена основная частота, очень высока (ошибка меньше 0,001%). Ошибка в частоте третьего вида колебания около 6,5%. Беря три члена в выражении [m], получим частоту третьего вида колебания с ошибкой меньшей  $\frac{1}{2}\%$ .

Из этого видно, что помощью способа Ритца можно получить не только основную частоту, но также частоты высших видов колебания с достаточной точностью, если взять достаточное число членов в выражении упругой линии. В следующем п° покажем применение этого способа к изучению колебаний балок переменного поперечного сечения.

**49. Колебание стержней переменного поперечного сечения.** — *Общие замечания.* — В нашем предыдущем рассуждении были рассмотрены различные задачи колебания призматических стержней. Существует, однако, несколько важных инженерных задач, как, например, колебание лопаток турбины, корпуса судна, балок переменной высоты и т. д., при которых приходится прибегать к теории колебаний стержней переменного сечения. Дифференци-

<sup>1)</sup> См. упомянутую выше на стр. 258 книгу W. Ritz'a.

альное уравнение колебания подобных стержней было рассмотрено ранее (см. стр. 222) и имело следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{A\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad [115']$$

где  $I$  и  $A$  некоторые функции  $x$ . Только в некоторых особых случаях, которые рассматриваются далее, возможно установить точный вид нормальных функций, выразив их известными функциями, а обычно при решении подобных задач пользуются для определения собственных частот колебания приближенными способами, подобными способу Рейлея-Ритца. Взяв для отклонения стержня при колебании формулу:

$$y = X \cos pt, \quad [a]$$

где  $X$  определяет вид колебания, мы получим следующие выражения для максимума потенциальной и максимума кинетической энергии:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx, \quad [b]$$

$$T = \frac{p^2}{2g} \int_0^l A\gamma X^2 dx, \quad c$$

откуда

$$p^2 = \frac{Eg}{\gamma} \frac{\int_0^l I \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l AX^2 dx}. \quad [d]$$

Точное решение для частоты основного вида колебания будет то, при котором левая часть уравнения [d] достигнет минимума. Чтобы получить приближенное решение, поступим так же, как в предыдущем п<sup>о</sup>, и возьмем форму упругой линии в виде ряда:

$$X = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \dots, \quad [e]$$

где каждая из функций  $\varphi$  удовлетворяет условиям на конце стержня. Подставляя [e] в уравнение [d], получим условие для минимума:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \frac{\int_0^l I \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l AX^2 dx} = 0 \quad \text{U}$$

или

$$\int_0^l AX^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l I \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l I \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 dx \frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l AX^2 dx = 0. \quad [g]$$

Из [g] и [d] получим:

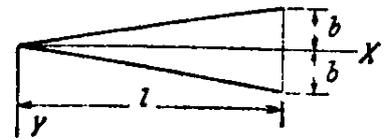
$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^l \left[ I \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 - \frac{p^3 A \gamma}{Eg} X^2 \right] dx = 0. \quad [167]$$

Задача сводится к отысканию таких значений для постоянных  $a_1, a_2, a_3, \dots$  в ур-ии [e], при которых интеграл

$$S = \int_0^l \left[ I \left( \frac{d^2 X}{dx^2} \right)^2 - \frac{p^3 A \gamma}{Eg} X^2 \right] dx \quad [h]$$

становится минимумом.

Ур-ия [167] однородны и линейны относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , и их число равно числу членов выражения [e]. Приравнявая нулю определитель этих ур-ий, получим *уравнение частоты*, помощью которого можно определить частоты различных видов.



Фиг. 125.

*Колебание клинообразной консоли.* — В случае клинообразного стержня постоянной толщины, равной единице, с одним концом свободным, а другим — заделанным (фиг. 125), имеем

$$A = \frac{2bx}{l},$$

$$I = \frac{1}{12} \left( \frac{2bx}{l} \right)^3,$$

где  $l$  — длина консоли,  $2b$  — высота консоли в заделанном конце.

Концевые условия таковы:

$$(1) \left( EI \frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=0} = 0, \quad (2) \left( EI \frac{d^3 X}{dx^3} \right)_{x=0} = 0,$$

$$(3) (X)_{x=l} = 0, \quad (4) \left( \frac{dX}{dx} \right)_{x=l} = 0.$$

Первые два условия будут всегда удовлетворяться, так как  $I = 0$  при  $x = 0$ . Чтобы удовлетворить условиям закрепленного конца, возьмем упругую линию в виде ряда:

$$X = a_1 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_3 \frac{x^2}{l^2} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^2 + \dots \quad [k]$$

Легко видеть, что каждый член, равно как и его производная по  $x$ , становятся равными нулю при  $x=l$ . Следовательно концевые условия (3) и (4) будут выполнены.

Взяв за первое приближение:

$$X_1 = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$$

и подставив в [d], получим:

$$p^2 = 10 \frac{Eg b^2}{\gamma l^4}; \quad f = \frac{p}{2\pi} = \frac{5,48 b}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}. \quad [l]$$

Чтобы получить лучшее приближение, возьмем два члена ряда [k], тогда

$$X_2 = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2.$$

Подставив в [h], имеем:

$$S_2 = \frac{2}{3} \frac{b^3}{l^3} \left[ (a_1 - 2a_2)^2 + \frac{24}{5} a_1 (a_1 - 2a_2) + 6a_2^2 \right] - \\ - \frac{2b\gamma l p^2}{Eg} \left( \frac{a_1^2}{30} + \frac{2a_1 a_2}{105} + \frac{a_2^2}{280} \right).$$

Теперь из условий

$$\frac{\partial S_2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial a_2} = 0$$

получим:

$$\left( \frac{Eg b^2}{\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{30} \right) a_1 + \left( \frac{2Eg b^2}{5\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{105} \right) a_2 = 0, \\ \left( \frac{2Eg b^2}{5\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{105} \right) a_1 + \left( \frac{2Eg b^2}{5\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{280} \right) a_2 = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этих уравнений, получим:

$$\left( \frac{Eg b^2}{\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{30} \right) \left( \frac{2Eg b^2}{5\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{280} \right) - \left( \frac{2Eg b^2}{5\gamma 3l^4} - \frac{p^2}{105} \right)^2 = 0. \quad [m]$$

Из этого уравнения можно определить  $p^2$ . Наименьший из двух корней дает

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{5,319 b}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}. \quad [n]$$

Интересно заметить, что для рассматриваемого случая существует точное решение, в котором виды нормальных функций

устанавливаются членами функций Бесселя<sup>1)</sup>. Из этого точного решения мы имеем

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{5.315}{2\pi} \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}. \quad [168]$$

Сопоставляя это с  $[l]$  и  $[n]$ , можем заключить, что точность первого приближения около 3%, тогда как ошибка второго приближения меньше 0,1%. И дальнейшее увеличение числа членов в выражении  $[e]$  необходимо только, если нужно также определить частоты высших видов колебания.

Для сравнения следует отметить, что в случае призматического консольного стержня, имеющего то же сечение, что клин в его широком конце, был получен следующий результат (см. стр. 234):

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1,875^2 a}{2\pi l^2} = \frac{3,515 b}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{Eg}{3\gamma}}.$$

Описанный выше способ можно применить также в случаях, когда  $A$  и  $I$  не могут быть представлены непрерывными функциями  $x$ . Эти функции могут иметь несколько точек разрыва или могут быть представлены различными математическими выражениями на различных промежутках вдоль длины  $l$ . В таких случаях интегралы  $[h]$  следует подразделить на промежутки так, чтобы в каждом из этих промежутков  $I$  и  $A$  могли бы быть представлены непрерывными функциями. Если функции  $A$  и  $I$  выражены графически или цифровыми таблицами, этот способ также можно применить, необходимо только при этом воспользоваться одним из приближенных способов вычисления интегралов  $[h]$ . Это делает способ Ритца особенно пригодным при изучении колебания лопаток турбины и таких сооружений, как пролетные строения мостов и корпуса судов.

*Колебание конического стержня.* — Задача колебаний конического стержня, вершина которого свободна, а основание закреплено, впервые рассмотрено Кирхгофом<sup>2)</sup>. Для основного вида он получил в этом случае:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{4,359}{2\pi} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad [169]$$

где  $r$  — радиус основания,  $l$  — длина стержня.

<sup>1)</sup> См. *G. Kirchhoff*, Berlin, Monatsberichte, S. 815, 1879, или *Ges. Abhandlungen*, S. 339. См. также *Todhunter and Pearson*, *A History of the Theory of Elasticity*, Vol. 2, p. 92.

<sup>2)</sup> См. труд упомянутый выше.

Для сравнения следует вспомнить здесь, что цилиндрический стержень той же длины и той же площади основания имеет частоту (см. стр. 234)

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1,875^2}{l^2} = \frac{1,758}{2\pi} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

Таким образом частоты основных видов для конического и цилиндрического стержней находятся в отношении 4,359:1,758. Частоты высших видов колебания конического стержня можно определить из выражения

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{r}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad [170]$$

где  $\alpha$  имеет нижеследующие величины <sup>1)</sup>:

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
4,359	10,573	19,225	30,339	43,921	59,956

*Другие случаи колебания консоли переменного поперечного сечения.* — В общем случае частота боковых колебаний консолей представляется ур-ием:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad [171]$$

де  $i$  — радиус инерции закрепленного сечения,  $l$  — длина консоли,  $\alpha$  — постоянная, зависящая от формы стержня и вида колебания.

В дальнейшем значения этой постоянной  $\alpha$  даны для некоторых частных случаев, имеющих практическое значение.

1. Если изменения площади поперечного сечения и момента инерции вдоль оси  $X$  можно выразить в виде:

$$A = ax^m; \quad I = bx^m, \quad [172]$$

причем  $x$  измеряется от свободного конца, то  $i$  остается постоянным по длине консоли, а постоянная  $\alpha$  в ур-ии [171] может быть представлена для основного вида с достаточной точностью ур-ием <sup>2)</sup>:

$$\alpha = 3,47 (1 + 1,05 m).$$

2. Если изменения площади поперечного сечения и момента инерции вдоль оси  $X$  можно выразить в виде

$$A = a \left(1 - c \frac{x}{l}\right); \quad I = b \left(1 - c \frac{x}{l}\right), \quad [173]$$

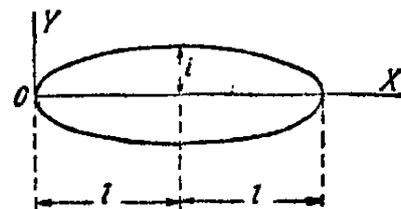
<sup>1)</sup> См. *Dorothy Wrinch*, „Proc. Roy. Soc. London“, Vol. 101, 1922, p. 493.

<sup>2)</sup> См. *Akimasa Ono*, „Journal of the Society of Mechanical Engineers“, Tokyo, Vol. 27, 1924, p. 467.

причем  $x$  измеряется от закрепленного конца, то тогда  $i$  остается постоянным по длине стержня и величина  $\alpha$  в ур-ии [171] может быть дана нижеследующей таблицей <sup>1)</sup>:

$c = 0$	0,4	0,6	0,8	1,0
$\alpha = 3,515$	4,098	4,585	5,393	7,16

*Стержень переменного поперечного сечения со свободными концами.* — Рассмотрим теперь случай стержня с обоими свободными концами, испытывающего боковые колебания, состоящего из двух равных половин, соединенных вместе своими толстыми концами (фиг. 126), причем левая половина получается вращением кривой



Фиг. 126.

$$y = ax^n \quad [o]$$

вокруг оси  $x$ . Точное решение в форме функций Бесселя получено в этом случае для некоторых значений  $n$  <sup>2)</sup> и частота основного вида может быть представлена выражением:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{\alpha r}{4\pi l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad [174]$$

где  $r$  — радиус наибольшего поперечного сечения,  $2l$  — длина стержня,  $\alpha$  — постоянная, зависящая от формы кривой [o], значения которой даны в нижеследующей таблице:

$n = 0$	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1
$\alpha = 5,593$	6,957	8,203	9,300	10,173

Применение интегральных уравнений для исследования боковых колебаний стержней переменного сечения было рассмотрено *E. Schwerin*'ом <sup>3)</sup>.

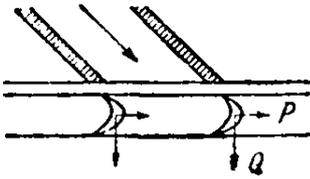
**50. Колебание лопаток турбины.** — *Общие замечания.* — Известно, что при некоторых условиях в лопатках турбины могут возникнуть опасные колебания, и этому обстоятельству может быть приписано большинство поломок таких лопаток. Возмущающая сила, вызывающая колебания в этом случае, — давление пара.

<sup>1)</sup> *Akimasa Ono*, „Journal of the Society of Mechanical Engineers“, Vol. 28, 1925, p. 429.

<sup>2)</sup> См. *J. W. Nicholson*, „Proc. Roy. Soc. of London“, Vol. 93, 1917, p. 506.

<sup>3)</sup> *E. Schwerin*, Über Transversalschwingungen von Stäben veränderlichen Querschnitts, „Zeitschr. f. techn. Physik“, Vol. 8, 1927, p. 264.

Это давление всегда может быть разложено на две составляющие: тангенциальная составляющая  $P$  и осевая  $Q$  (фиг. 127), которые вызывают изгиб лопаток в тангенциальном и осевом направлениях соответственно. Эти составляющие не остаются постоянными, а изменяются со временем, так как они зависят от относительного положения движущихся лопаток по отношению к закрепленным направляющим лопаткам.



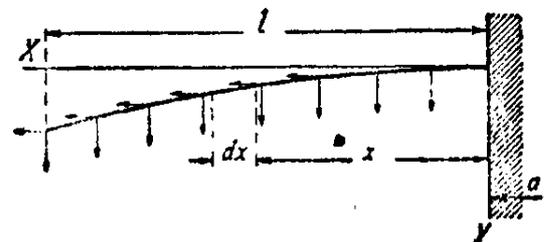
Фиг. 127

Такие пульсирующие силы, если они находятся в резонансе с одним из собственных видов колебания лопаток, могут вызвать сильные вынужденные колебания, а следовательно и высокие напряжения. Лопатки могут в конечном результате дать вследствие нарастающей усталости металла трещины в местах резких изменений поперечного сечения, где имеет место концентрация высоких напряжений.

Из этого можно видеть, что изучение колебания лопаток турбины и определение различных частот, соответствующих собственным видам колебания, могут помочь конструктору при выборе таких пропорций для лопаток, чтобы возможность резонанса была исключена. При этих исследованиях, метод Рейлея дает обычно удовлетворительное приближение. Поэтому не представляется необходимым идти дальше в уточнении вычислений, особенно если мы примем во внимание, что в действительных случаях изменения в условиях закрепления корня лопатки могут значительно повлиять на частоты собственных видов колебания <sup>1)</sup>.

Вследствие того, что два главных момента инерции поперечного сечения лопатки различны; следует изучать отдельно собственные виды колебания в двух главных плоскостях.

*Применение способа Рейлея.* — Пусть  $XU$  будет одна из этих двух главных плоскостей (фиг. 128);  $l$  — длина лопатки;  $a$  — радиус ротора у закрепленного конца лопатки;  $c$  — постоянная, определяемая ур-нем



Фиг. 128

[173];  $A$  — площадь поперечного сечения лопатки, меняющаяся вдоль оси  $X$ ;  $\omega$  — угловая скорость ротора турбины;  $\gamma$  — вес единицы объема материала;  $X$  — функция  $x$ , представляющая упругую линию лопатки под действием собственного веса.

Взяв кривую, представляемую функцией  $X$ , за основу для

<sup>1)</sup> См. W. Hort, „V. D. I.“, Bd, 70, 1926, S. 1420.

определения основного вида колебания, получим упругую линию лопатки при колебании

$$y = X \cos pt. \quad [a]$$

Максимум потенциальной энергии получится, когда лопатка находится в своем крайнем положении, и упругая линия представляется ур-ием

$$y = X. \quad [b]$$

Эта энергия состоит из двух частей: 1) энергия  $V_1$  вследствие бокового изгиба и 2) энергия  $V_2$  вследствие действия центробежных сил. Энергия  $V_1$  равна работе, производимой боковой нагрузкой при определяемом ур-ием [b] прогибе и представляется выражением

$$V_1 = \frac{\gamma}{2} \int_0^x AX dx, \quad [c]$$

где  $X$  — функцию  $x$ , представляющую упругую линию лопатки под действием ее собственного веса, можно всегда получить аналитическим или графическим способом. В последнем случае интеграл [c] можно вычислить одним из приближенных способов.

При вычислении  $V_2$  следует заметить, что центробежная сила, действующая на элемент длины  $dx$  лопатки (см. фиг. 128), равна

$$\frac{A\gamma dx}{g} \omega^2 (a + x). \quad [d]$$

Радиальное перемещение этого элемента по направлению к центру из-за изгиба лопатки:

$$\frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx, \quad [e]$$

и работа центробежной силы [d] будет

$$-\frac{A\gamma}{2g} dx \omega^2 (a + x) \int_0^x \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx. \quad [f]$$

Потенциальная энергия  $V_2$  получится теперь суммированием элементов работы [f] вдоль длины лопатки с переменной знака суммы. Итак

$$V_2 = \frac{\gamma \omega^2}{2g} \int_0^l A (a + x) dx \int_0^x \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 dx \quad [g]$$

Максимум кинетической энергии получится, когда колеблющаяся лопатка находится в своем среднем положении, и скорости, определяемые из ур-ия [a], имеют значения  $y' = pX$ . Тогда

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{A\gamma}{g} y'^2 dx = \frac{\gamma p^2}{2g} \int_0^l AX^2 dx. \quad [h]$$

Теперь из равенства

$$T = V_1 + V_2$$

получим:

$$p^2 = \frac{g \int_0^l AX dx + \omega^2 \int_0^l A(a+x) dx \int_0^x \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^l AX^2 dx}. \quad [175]$$

Это — ур-ие для определения частот, соответствующих собственным видам колебания лопатки.

Второй член в числителе правой части ур-ия представляет действие центробежной силы. Обозначив

$$f_1^2 = \frac{g}{(2\pi)^2} \frac{\int_0^l AX dx}{\int_0^l AX^2 dx}; \quad f_2^2 = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \frac{\int_0^l A(a+x) dx \int_0^x \left(\frac{dX}{dx}\right)^2 dx}{\int_0^l AX^2 dx}, \quad [176]$$

найдем из ур-ия [175], что частота колебания лопатки может быть представлена в следующем виде:

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad [177]$$

где  $f_1$  обозначает частоту колебания лопатки, когда ротор неподвижен, а  $f_2$  представляет частоту колебания лопатки, если пренебречь силами упругости и принять во внимание только центробежную силу, возникающую при вращении.

*Колебание в осевом направлении.* — При определении частоты колебания в осевом направлении хорошее приближение можно получить при допущении, что изменения площади поперечного сечения и момента инерции вдоль оси лопатки отвечают ур-иям [173]. В этом случае частоту  $f_1$  получим, пользуясь соответствующей таблицей (см. стр. 269).

Частоту  $f_2$  для того же случая можно легко определить из ур-ия [176] и представить в следующем виде:

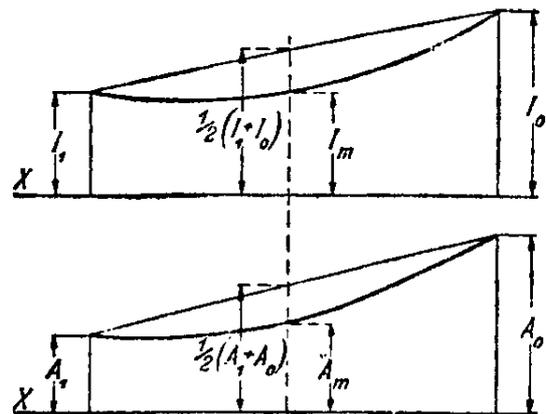
$$f_2 = \frac{\beta \omega}{2\pi}, \quad [178]$$

где  $\beta$  число, зависящее от размеров лопатки. Некоторые значения  $\beta$  даны в следующей таблице <sup>1)</sup>.

$\frac{a}{l} \searrow c =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1	1,57	1,58	1,59	1,61	1,64	1,71
2	1,98	2,00	2,01	2,04	2,09	2,19
4	2,62	2,64	2,66	2,70	2,77	2,92
6	3,13	3,15	3,18	3,23	3,31	3,50
8	3,56	3,59	3,62	3,68	3,78	4,00
10	3,95	3,98	4,02	4,08	4,19	4,44

Теперь, зная  $f_1$  и  $f_2$  найдем частоту  $f$  по формуле [177].

**Колебание в тангенциальном направлении.** — В тангенциальном направлении лопатки имеют обычно переменный радиус инерции. Следовательно, ур-ия [173] не могут быть непосредственно применены. В таком случае приближенное решение можно получить при допущении, что изменения  $I$  и  $A$  вдоль оси  $X$  (фиг. 129) можно представить ур-иями <sup>2)</sup>:



Фиг. 129.

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left( 1 - m \frac{x}{l} - m' \sin \frac{\pi x}{l} \right), \\ A &= A_0 \left( 1 - n \frac{x}{l} - n' \sin \frac{\pi x}{l} \right), \end{aligned} \quad [179]$$

где

$$\begin{aligned} m &= \frac{I_0 - I_1}{I_0}; & n &= \frac{A_0 - A_1}{A_0}; \\ m' &= \frac{1}{I_0} \left( \frac{I_0 + I_1}{2} - I_m \right); & n' &= \frac{1}{A_0} \left( \frac{A_0 + A_1}{2} - A_m \right) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Таблица взята из статьи Акимаза Оно, упомянутой выше на стр. 268.

<sup>2)</sup> W. Hort, Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics, Delft, 1925, p. 282. Числовые результаты, данные ниже, получены при допущении, что вид колебания стержня переменного сечения тот же, что и призматического стержня.

Частоты будут тогда определяться из общего ур-ия [171], в котором постоянная  $\alpha$  для основного и наивысшего из видов колебаний дается ур-ием <sup>1)</sup>:

$$\alpha_i = \alpha_{0i} \sqrt{\frac{1 - m\beta_i - m'\beta_i'}{1 - n\gamma_i - n'\gamma_i'}} \quad [180]$$

Здесь  $\alpha_{0i}$  — значение постоянной  $\alpha$  для консоли постоянного сечения (см. табл. на стр. 234) <sup>2)</sup>. Постоянные  $\beta_i, \beta_i', \gamma_i$  и  $\gamma_i'$  для различных видов колебания даны в следующей таблице:

$i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\beta_i'$	$\gamma_i'$
1	0,193	0,807	0,493	0,493
2	0,405	0,594	0,703	0,703
3	0,468	0,532	0,661	0,661
4	0,483	0,517	0,649	0,649
5	0,490	0,510	0,645	0,645
6	0,493	0,507	0,642	0,642

Если один конец лопатки закреплен, в то время как другой просто оперт, при определении  $\alpha_i$  можно воспользоваться тем же ур-ием [180]. В этом случае  $\alpha_{0i}$  следует взять из второй таблицы стр. 234. Постоянные  $\beta_i, \beta_i', \gamma_i$  и  $\gamma_i'$  даны в следующей таблице:

$i$	$\beta_i$	$\gamma_i$	$\beta_i'$	$\gamma_i'$
1	0,431	0,569	0,626	0,857
2	0,480	0,520	0,612	0,724
3	0,490	0,510	0,623	0,680
4	0,494	0,506	0,628	0,662
5	0,496	0,504	0,631	0,654
6	0,497	0,503	0,633	0,649

<sup>1)</sup> Если величины  $m, m', n$  и  $n'$  не больше чем 0,5, формула [180], согласно Хорту, верна с точностью до 2%. Чтобы получить представление об ошибке в случае  $m$  и  $n$ , равных единице, были сравнены точные решения для собственных частот лопатки конического вида и лопатки клинообразной с величинами, полученными вышеизложенным способом. Было найдено, что в этих крайних случаях ошибка была 17% и 18,5% соответственно для конусообразной и клинообразной лопаток.

<sup>2)</sup>  $k_f^2 l^3$  этой таблицы равно  $\alpha_{0i}$  ур-ия [180].

Таким образом можно вычислить  $f_1$  в выражении [177]. Для определения  $f_2$  основного вида можно пользоваться ур-ием [178] и вышеприведенной таблицей, а частота  $f$  будет тогда получаться из выражения [177], как ранее.

Следует заметить, что лопасти обычно соединяются в группы помощью проволок в виде вант. Эти проволоки не всегда существенно влияют на частоты осевых колебаний, но они могут значительно изменить частоты тангенциальных колебаний<sup>1)</sup>.

**51. Колебания корпуса судна.** — В качестве другого примера применения теории колебаний стержней переменного сечения рассмотрим теперь задачу колебания корпуса судна. Возмущающая сила в этом случае обычно возникает из-за неуравновешенности двигателя, и если частота этой силы совпадает с частотой одного из видов собственных колебаний корпуса, могут возникнуть большие вынужденные колебания. Если корпус судна принять за стержень переменного сечения со свободными концами и применить способ Ритца (см. п<sup>о</sup> 48), то частоты различных видов можно обычно вычислить с достаточной точностью помощью ур-ия [167].

Для упрощения задачи допустим, что стержень симметричен относительно среднего поперечного сечения и что, взяв начало координат в этом сечении, можем представить площадь поперечного сечения и момент инерции для любого поперечного сечения соответственно ур-иями:

$$A = A_0 (1 - cx^2); \quad I = I_0 (1 - bx^2), \quad [a]$$

где  $A_0$  и  $I_0$  обозначают соответственно площадь и момент инерции среднего поперечного сечения. При этом принято, что  $x$  может изменяться от  $x = -l$  до  $x = +l$ , причем  $2l$  — длина судна.

Допустим далее, что прогиб при колебании можно представить ур-ием

$$y = X \cos pt,$$

где  $X$  взято в виде ряда:

$$X = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + a_3 \varphi_3(x) + \dots \quad [b]$$

Мы должны выбрать для  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  подходящие функции, удовлетворяющие конечным условиям. Соотношения между коэффициентами  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и частотами получим теперь из ур-ий [167].

<sup>1)</sup> См. вышеупомянутую книгу *Стодола*, стр. 949. См. также *W. Hort*, V. D. I., Bd 70, 1926, S. 1422 и *E. Schwerin*, Über die Eigenfrequenzen der Schaufelgruppen von Dampfturbinen, „Zeitschr. f. techn. Physik“, Bd 8, 1927, S. 312.

Удовлетворительное приближение для частоты основного вида колебаний можно получить <sup>1)</sup>, приняв за функции  $\varphi(x)$  нормальные функции призматического стержня со свободными концами. Общее решение [133] для симметричных видов колебания следует взять в виде:

$$X = C_1 (\cos kx + \cosh kx) + C_2 (\cos kx - \cosh kx). \quad [c]$$

Теперь, из условий у свободных концов имеем:

$$(X'')_{x=\pm l} = (X''')_{x=\pm l} = 0. \quad [d]$$

Подставляя [c] в [d], получим:

$$\begin{aligned} C_1 (-\cos kl + \cosh kl) - C_2 (\cos kl + \cosh kl) &= 0, \\ C_1 (\sin kl + \sinh kl) - C_2 (-\sin kl + \sinh kl) &= 0. \end{aligned} \quad [e]$$

Приравняв определитель этих ур-ий нулю, получим ур-ие частоты

$$\operatorname{tg} kl + \operatorname{tgh} kl = 0, \quad [f]$$

последовательные корни которого:

$$k_1 l = 0; \quad k_2 l = 2,3650; \quad \dots$$

Подставляя из [e] отношение  $C_1/C_2$  в ур-ие [c], получим нормальные функции, соответствующие основному и высшему видам колебания:

$$X_i = C_i (\cos k_i x \cosh k_i l + \cosh k_i x \cos k_i l).$$

Произвольную постоянную, для упрощения, возьмем в виде

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 k_i l + \cosh^2 k_i l}}.$$

Нормальная функция, соответствующая первому корню  $k_1 l = 0$ , будет постоянной, и соответствующее движение будет перемещением стержня как твердого тела в направлении у. Эту постоянную возьмем равной  $1/\sqrt{2}$ .

Взяв нормальные функции, полученные таким образом, за соответствующие функции  $\varphi(x)$  в ряде [b], получим

$$X = a_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \frac{\cos k_2 x \cosh k_2 l + \cosh k_2 x \cos k_2 l}{\sqrt{\cos^2 k_2 l + \cosh^2 k_2 l}} + \dots \quad [g]$$

<sup>1)</sup> См. книгу автора — Теория упругости, том 2, Петроград, 1916 г. См. также Н. Акимов, „Trans. of the Soc. of Naval Arch.“, New-York, Vol. 26, 1918.

Подставляя вышенаписанное выражение в ур-ие [167], получим:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \left\{ I_0 \int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) \sum_{i=1,2,3,\dots} \sum_{j=1,2,3,\dots} a_i a_j \varphi_i'' \varphi_j'' dx - \right. \\ \left. - \frac{p^2 A_0 \gamma}{Eg} \int_{-l}^{+l} (1 - cx^2) \sum_{i=1,2,3,\dots} \sum_{j=1,2,3,\dots} a_i a_j \varphi_i \varphi_j dx \right\} = 0 \quad [h]$$

И обозначая

$$\int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) \varphi_i'' \varphi_j'' dx = \alpha_{ij}; \quad \int_{-l}^{+l} (1 - cx^2) \varphi_i \varphi_j dx = \beta_{ij}, \quad [k]$$

получим из [h]

$$\sum_{i=1,2,3,\dots} a_i (\alpha_{in} - \lambda \beta_{in}) = 0, \quad [l]$$

где

$$\lambda = \frac{p^2 A_0 \gamma}{El_0 g}. \quad [m]$$

Для определения основного вида колебания в сущности достаточно двух членов ряда [g]. Ур-ия [l] в этом случае получаются:

$$\begin{aligned} a_1 (\alpha_{11} - \lambda \beta_{11}) + a_2 (\alpha_{21} - \lambda \beta_{21}) &= 0, \\ a_1 (\alpha_{12} - \lambda \beta_{12}) + a_2 (\alpha_{22} - \lambda \beta_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad [n]$$

В нашем случае

$$\varphi_1'' = 0; \quad \varphi_2'' = k_2^2 \frac{-\cos k_2 x \cosh k_2 l + \cosh k_2 x \cos k_2 l}{V \cos^2 k_2 l + \cosh^2 k_2 l}.$$

Подставляя это в выражения [k] и выполняя интегрирование, получим:

$$\alpha_{11} = 0; \quad \alpha_{12} = 0; \quad \alpha_{21} = 0;$$

$$\alpha_{22} = \int_{-l}^{+l} (1 - bx^2) (\varphi_2'')^2 dx = \frac{31,28}{l^3} (1 - 0,087 bl^2); \quad [p]$$

$$\beta_{11} = l(1 - 0,333 cl^2); \quad \beta_{12} = \beta_{21} = 0,297 cl^3; \quad \beta_{22} = l(1 - 0,481 cl^2). \quad [q]$$

Подставляя в ур-ия [n] и приравнявая определитель этих ур-ий нулю, получаем ур-ие частоты:

$$\lambda^2 \left( 1 - \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11} \beta_{22}} \right) - \lambda \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} = 0. \quad [r]$$

Первый корень этого ур-ия ( $\lambda = 0$ ) отвечает перемещению стержня, как твердого тела. Второй корень

$$\lambda = \frac{\alpha_{22}}{\beta_{22}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{11} \beta_{22}}} \quad [s]$$

определяет частоту основного вида колебания. Эта частота

$$f_1 = \frac{p}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_0 g}{A_0 \gamma}}. \quad [t]$$

*Числовой пример.* — Пусть  $2l = 100$  м;  $I_0 = 20$  м<sup>4</sup>;  $A_0 \gamma = 7 \cdot 9,81$  т/м;  $b = c = 0,003$  на кв. м. Тогда вес судна

$$Q = 2A_0 \gamma \int_0^l (1 - cx^2) dx = 5150 \text{ тонн.}$$

Из ур-ий [p] и [q] получим:

$$\alpha_{22} = 23,40 \cdot 10^{-5}; \quad \beta_{11} = 37,50; \quad \beta_{12} = 11,14; \quad \beta_{22} = 31,95;$$

тогда из ур-ия [s] имеем

$$\lambda = 0,817 \cdot 10^{-5}.$$

Приняв  $E = 2 \cdot 10^7$  т/м<sup>2</sup>, получим

$$p = \sqrt{\frac{20}{7} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 0,817 \cdot 10^{-5}} = 21,6.$$

Число колебаний в минуту

$$N = \frac{60p}{2\pi} = 206.$$

Функции  $\varphi(x)$ , взятые выше, можно использовать также, когда законы изменения  $I$  и  $A$  отличны от представляемых ур-иями [a], и также когда  $I$  и  $A$  даны графически. В каждом случае необходимо только вычислить интегралы [k], что всегда можно сделать помощью какого-либо приближенного способа.

**52. Боковой удар стержней.** — *Приближенное решение.* — Задача определения напряжений и прогибов, возникающих в балке от падающего тела, имеет большое практическое значение. Точное решение этой задачи требует изучения бокового колебания балки. В случаях, когда массой балки можно пренебречь сравнительно с массой падающего тела, можно легко получить приближенное решение, допустив, что упругая линия балки при ударе имеет ту же форму, как соответственная статическая упругая линия. Тогда наибольший прогиб и наибольшее напряжение найдутся из рассмотрения энергии системы.

Возьмем например балку, опертую по концам, на которую по середине между опорами падает груз  $W$ . Если  $\delta$  обозначает прогиб середины балки, то между прогибом и действующей на балку силой  $P$  будет существовать следующее соотношение

$$\delta = \frac{Pl^3}{48EI}$$

и потенциальная энергия деформации будет:

$$V = \frac{P\delta}{2} = \frac{24EI\delta^2}{l^3}. \quad [a]$$

Если груз  $W$  падает с высоты  $h$ , то работа, производимая этим грузом при падении, будет:

$$W(h + \delta_d), \quad [b]$$

и динамический прогиб  $\delta_d$  найдется из ур-ия:

$$W(h + \delta_d) = \frac{24EI\delta_d^2}{l^3}, \quad [c]$$

откуда

$$\delta_d = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st}}, \quad [d]$$

где

$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48EI}$$

представляет статический прогиб балки под действием груза  $W$ .

В вышеизложенном рассуждении мы пренебрегли массой балки и допустили, что кинетическая энергия падающего груза  $W$  была полностью превращена в потенциальную энергию деформации балки. В действительных условиях часть кинетической энергии при ударе будет потеряна. Поэтому приведенные выше вычисления дадут нам высший предел динамического прогиба и динамических напряжений. Чтобы получить более точное решение, следует принять во внимание массу балки, подвергающейся удару.

Если движущееся тело, имеющее массу  $W/g$  и скорость  $v_0$ , ударяет центрально в неподвижное тело массы  $w/g$ , и если деформация в точке соприкосновения вполне неупруга, то конечная скорость  $v$  после удара (равная для обоих тел) может быть определена из ур-ия

$$\frac{W}{g} v_0 = \frac{W + w}{g} v,$$

откуда

$$v = v_0 \frac{W}{W + w}. \quad [e]$$

Следует отметить, что для балки, испытывающей удар, скорость  $v$  будет одинакова для тела  $W$  и балки только в точке соприкосновения. Прочие точки балки могут иметь скорости, отличные от  $v$ . Например, у опор балки эти скорости будут равны нулю. Поэтому в ур-ие [e] для определения скорости  $v$  должна быть подставлена не действительная масса балки, а несколько уменьшенная. Величина этой уменьшенной массы зависит

от вида упругой линии и может быть приближенно установлена таким же образом, как при способе Рейлея (см. ур-ие [42], стр. 61), т. е. при допущении, что упругая линия та же, что получаемая статически. Тогда

$$v = v_0 \frac{W}{W + \frac{17}{35} w},$$

где  $\frac{17}{35} w$  есть *уменьшенный вес* балки. Кинетическая энергия системы будет:

$$\frac{\left(W + \frac{17}{35} w\right) v^2}{2g} = \frac{W v_0^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{w}{W}}.$$

Эту величину следует подставить вместо  $(W v_0^2 / 2g) = Wh$  в предыдущее ур-ие [c], чтобы учесть влияние массы балки. Динамический прогиб тогда получится равным:

$$\delta_d = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st} + 2h\delta_{st} \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \frac{w}{W}}}. \quad [181]$$

Этот же способ можно применить во всех прочих случаях удара, где перемещение сооружения в точке удара пропорционально силе<sup>1)</sup>.

*Удар и колебания.* — Описанный способ дает достаточно точные результаты в случаях тонких стержней и балок, если масса падающего тела велика сравнительно с массой балки. В противном случае становится необходимым рассмотрение колебаний балки и местных деформаций в точке удара.

Боковые колебания балки, находящейся под ударом тела, движущегося с данной скоростью, были рассмотрены Сен-Венаном<sup>2)</sup>. Допустив, что, после удара, падающее тело не отделяется от балки, можем исследовать колебания, выразив прогибы как сумму рядов нормальных функций. Постоянные коэффициенты этих рядов следует установить таким образом, чтобы удовлетворились данные начальные условия. Таким способом Сен-Венану удалось показать, что приближенное решение, данное выше, достаточно точно для практических применений.

Допущение, что после удара падающее тело не отделяется от балки, вполне произвольно, и, чтобы иметь более точную кар-

<sup>1)</sup> Этот способ предложен Н. Сох'ом, „Cambridge Phil. Soc. Trans.“, Vol. 9, 1850, p. 73. См. также *Todhunter and Pearson, History...*, Vol. 1, p. 895.

<sup>2)</sup> См. книгу, упомянутую в выноске на стр. 246, последнее примечание к параграфу 61, стр. 490.

тину явления удара, следует рассмотреть местные деформации балки и падающего тела в точке соприкосновения. Некоторые результаты подобного исследования для случая, когда шар падает на плоскую поверхность прямоугольной балки, будут приведены ниже <sup>1)</sup>. Местная деформация в этом случае представится известным ур-ием Герца <sup>2)</sup>.

Пусть  $\alpha$  обозначает перемещение ударяющего шара по отношению к оси балки, вызванное этой деформацией, а  $P$  соответствующее давление шара на балку. Тогда

$$\alpha = kP^{2/3}, \quad [f]$$

где  $k$  — постоянная, зависящая от упругих свойств тел и от величины радиуса шара. Давление  $P$  при ударе будет меняться с течением времени и вызовет прогиб балки, который можно выразить общим решением [с] н° 44. Если балка подвергается удару по середине, то выражение для обобщенных сил будет

$$Q_i = P \sin \frac{i\pi}{2},$$

и прогиб по середине, вызванный давлением  $P$ , получится равным

$$y = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{\pi^2 a} \frac{2g}{\gamma Al} \int_0^t P \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_1)}{l^2} dt_1. \quad [g]$$

Полное перемещение шара от начала удара ( $t=0$ ) будет равно

$$d = \alpha + y. \quad [h]$$

То же перемещение можно найти теперь из рассмотрения движения шара. Если  $v_0$  скорость шара в начале удара ( $t=0$ ), то скорость  $v$  в любой момент  $t=t_1$  будет равна <sup>3)</sup>:

$$v = v_0 - \frac{1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1, \quad [k]$$

где  $m$  — масса шара, а  $P$  — реакция балки на шар, меняющаяся с течением времени. Перемещение шара в направлении удара будет:

$$d = v_0 t - \int_0^t \frac{dt_1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1. \quad [l]$$

<sup>1)</sup> См. статью автора в „Zeitschr. f. Math. u. Phys.“, Bd 62, 1913, S. 198.

<sup>2)</sup> *H. Herz*, „J. f. Math. (Crelle)“, Bd 92, 1881; *A. E. H. Love*, *Math. Theory of Elasticity*, 1927, p. 198.

<sup>3)</sup> Допущено, что на шар не действуют никакие другие силы кроме  $P$ .

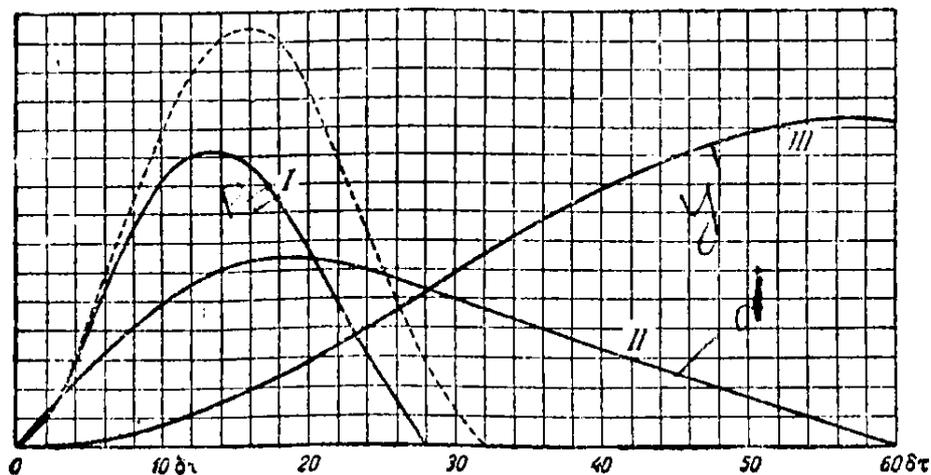
Приравнивая  $[h]$  и  $[l]$ , получим следующее ур-ие:

$$v_0 t - \int_0^t \frac{dt_1}{m} \int_0^{t_1} P dt_1 =$$

$$= kP^{2/3} + \sum_{i=1,3,5,\dots}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} \frac{l^2}{\pi^2 a} \frac{2g}{\gamma A l} \int_0^t P \sin \frac{i^2 \pi^2 a (t - t_1)}{l^2} dt_1. \quad [m]$$

Это ур-ие можно численно решить, подразделив промежуток времени от нуля до  $t$  на небольшие элементы и вычисляя, шаг за шагом, перемещения шара. В дальнейшем даны результаты таких вычислений для двух числовых примеров.

*Примеры.* — В первом примере взят стальной стержень квадратного поперечного сечения  $1 \times 1$  см и длиной 15,35 см. Сталь-

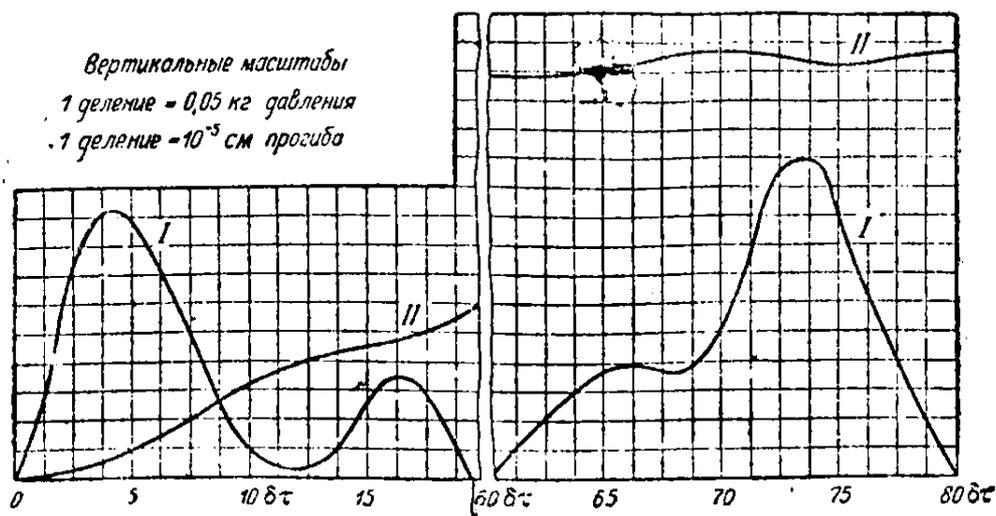


Фиг. 130.

ной шар радиуса  $r = 1$  см ударяет стержень со скоростью  $v = 1$  см в сек. Приняв  $E$  равным  $2,2 \times 10^6$  кг на кв. см и  $\gamma = 7,96$  г в куб. см, получим период основного вида колебания  $\tau$  равным 0,001 сек. В числовом решении ур-ия этот период был подразделен на 180 равных частей, так что  $\delta\tau = (1/180)\tau$ . Давление  $P$ , вычисленное для каждой части, дано на фиг. 130 в виде кривой I. (Для сравнения на той же фигуре пунктирной линией показано изменение давления со временем для случая, когда шар ударяет на бесконечно большое тело, имеющее плоскую ограничивающую поверхность.) Из этого видно, что шар остается в соприкосновении со стержнем только в течение промежутка времени, равного  $28(\delta\tau)$ , т. е. около  $1/6 \tau$ . Перемещения шара представлены кривой II, а прогиб стержня по середине — кривой III.

Более сложный случай представлен на фиг. 131. В этом случае длина стержня и радиус шара взяты вдвое больше, чем в пред-

шествующем примере. Период  $\tau$  основного вида колебания стержня в четыре раза больше, чем в предыдущем случае. При этом изменение давления  $P$  представляется более сложной кривой *I*. Из нее видно, что шар остается в соприкосновении со стержнем от  $t=0$  до  $t=19,5(\delta\tau)$ . Затем он снова ударяет стержень в момент  $t=60(\delta\tau)$  и остается в соприкосновении с последним до  $t=80(\delta\tau)$ . Увеличение прогиба стержня дано кривой *II*.



Фиг. 131.

Из этих примеров можно заключить, что явление упругого удара гораздо сложнее, чем неупругого удара, рассмотренного Сен-Венаном.

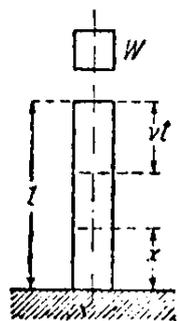
**53. Продольный удар призматических стержней.** — *Общие замечания.* — Для приближенного вычисления напряжений и прогибов, возникающих в призматическом стержне при продольном ударе движущимся телом, можно применить приближенный способ, изложенный в предыдущем п<sup>о</sup>, но для более точного решения задачи необходимо рассмотрение продольных колебаний стержня.

Юнг первым <sup>1)</sup> указал на необходимость более детального рассмотрения влияния массы стержня при продольном ударе. Он также показал, что всякое небольшое совершенно твердое тело вызовет остаточную деформацию стержня при ударе, если соотношение скорости  $v_1$  движения ударяющего тела к скорости  $v$  распространения звуковых волн в стержне больше, чем та относительная деформация, которая соответствует пределу упругости материала на сжатие. Чтобы доказать правильность этого утверждения, он допустил, что в момент удара (фиг. 132) на поверхности соприкосновения движущегося тела и стержня произой-

<sup>1)</sup> См. его Lectures on Natural Philosophy, Vol. I, p. 1244. История задачи продольного удара подробно изложена в книге Клебша, переведенной Сен-Венаном, упомянутой выше на стр. 246, см. последнее примечание к параграфу 60, стр. 480, а.

дет местное сжатие<sup>1)</sup>, которое распространяется вдоль стержня со скоростью звука. Возьмем очень небольшой промежуток времени равный  $t$ , такой, что в этот промежуток скорость ударяющего тела можно рассматривать неизменившейся. Тогда перемещение тела будет  $v_1 t$  и длина сжатой части стержня будет  $v t$ . Следовательно, относительное сжатие получается равным  $v_1/v$  (отсюда — положение, высказанное выше).

Продольные колебания призматического стержня при ударе были рассмотрены Навье<sup>2)</sup>. Он основывал свое исследование на допущении, что после удара движущееся тело не отделяется от стержня по крайней мере в течение полупериода основного вида колебания. Таким образом, задача удара получается эквивалентной задаче колебаний груза, укрепленного на призматическом стержне и имеющего в начальный момент данную скорость (см. п° 38). Решение этой задачи, в форме бесконечных рядов, данное ранее, не применимо для определения наибольших напряжений при ударе, и в дальнейшем будет рассмотрено более общее решение, данное Сен-Венаном<sup>3)</sup> и Буссинеском<sup>4)</sup>.



Фиг. 132.

*Стержень, закрепленный одним концом и ударяемый в другой*<sup>5)</sup>. — Рассмотрим сперва, пользуясь известным уже ур-ием продольных колебаний (см. стр. 199), стержень, закрепленный одним концом, другой конец которого испытывает продольный удар (фиг. 132). Это ур-ие таково:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad [a]$$

где  $u$  обозначает продольное перемещение от положения равновесия во время колебания, и

$$a^2 = \frac{Eg}{\gamma}. \quad [b]$$

Условие на закрепленном конце:

$$(u)_{x=0} = 0. \quad [c]$$

<sup>1)</sup> Допущено, что поверхности соприкосновения — две параллельные гладкие плоскости.

<sup>2)</sup> См. Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, Ed. 1823.

<sup>3)</sup> См. выноску выше на стр. 246.

<sup>4)</sup> См. Applications des Potentiels, p. 508.

<sup>5)</sup> См. Love, Theory of Elasticity, 4-th ed. 1927, p. 431.

Условие на свободном конце, где сила в стержне должна быть равна силе инерции ударяющего тела, будет:

$$AE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = - \frac{W}{g} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l}. \quad [d]$$

Обозначив через  $m$  отношение веса  $W$  ударяющего тела к весу  $A\gamma l$  стержня, получим из [d]:

$$ml \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=l} = - a^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l}. \quad [e]$$

Условия начального момента  $t=0$ , когда тело ударяет стержень, таковы:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad [f]$$

для всех значений  $x$  между  $x=0$  и  $x=l$ , тогда как на конце  $x=l$  вследствие того, что в момент удара скорость ударяемого конца стержня становится равной скорости ударяющего тела, имеем:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=l} = -v. \quad [g]$$

Задача состоит теперь в отыскании такого решения ур-ия [a], которое удовлетворяло бы конечным условиям [c] и [e] и начальным условиям [f] и [g].

Общее решение этого ур-ия можно взять в таком виде:

$$u = f(at - x) + f_1(at + x), \quad [h]$$

где  $f$  и  $f_1$  — произвольные функции.

Дифференцируя по аргументам  $(at - x)$  или  $(at + x)$ , мы можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= - \frac{\partial f}{\partial x} = -f'(at - x); & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = f''(at - x), \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} = af'(at - x); & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = a^2 f''(at - x), \end{aligned}$$

откуда видно, что выражение [h] удовлетворяет ур-ию [a].

Чтобы удовлетворить конечному условию [c], мы должны иметь.

$$f(at) + f_1(at) = 0$$

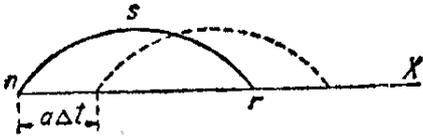
или

$$f_1(at) = -f(at)$$

при любом значении аргумента  $at$ . Отсюда можем написать решение [h] так:

$$u = f(at - x) - f(at + x). \quad [k]$$

Это решение имеет очень простой физический смысл, который можно легко пояснить следующим образом: возьмем первый член  $f(at-x)$  правой части ур-ия [k] и рассмотрим некоторый момент  $t$ . Функцию  $f$  можно представить для этого момента некоторой кривой  $nsr$  (фиг. 133), вид которой зависит от функции  $f$ . Легко видеть, что по истечении элемента времени  $\Delta t$  аргумент  $at-x$



Фиг. 133.

функции  $f$  останется неизменным, если только в этот самый промежуток времени абсциссы увеличились на элемент  $\Delta x$ , равный  $a\Delta t$ . Геометрически это означает, что за промежуток времени  $\Delta t$  кривая  $nsr$  движется без искажения в новое положение, показанное на фигуре пунктиром. Из этого можно заключить, что первый член правой части ур-ия [k] представляет волну, перемещающуюся вдоль оси  $X$  с постоянной скоростью равной

$$a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}, \quad [182]$$

которая является также скоростью распространения звуковых волн вдоль стержня. Таким же образом можно показать, что второй член правой части ур-ия [k] представляет волну, перемещающуюся со скоростью  $a$  в отрицательном направлении вдоль оси  $X$ . Общее решение [k] получается наложением друг на друга двух таких волн одинакового вида, перемещающихся с одинаковыми скоростями в двух противоположных направлениях. Ударяющее тело вызывает при ударе непрерывный ряд подобных волн, которые перемещаются в направлении к закрепленному концу и там отражаются. Вид этих последовательных волн можно теперь установить при помощи начальных условий и краевого условия на конце  $x=l$ .

При начальном моменте ( $t=0$ ) имеем из ур-ия [k]:

$$\begin{aligned} (u)_{t=0} &= f(-x) - f(+x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0} &= -f'(-x) - f'(x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= af'(-x) - af'(x). \end{aligned}$$

Теперь, на основании начальных условий [f], получим

$$\begin{aligned} -f'(-x) - f'(x) &= 0 & \text{для } 0 < x < l \\ f'(-x) - f'(x) &= 0 & \text{. } 0 < x < l \end{aligned} \quad [L]$$

Полагая  $f$  функцией аргумента  $z$ , который можно принять равным  $+x$  или  $-x$ , можно заключить из [l], что, когда  $-l < z < l$ ,  $f'(z)$  равна нулю, так как только при этом условии оба ур-ия [l] могут быть удовлетворены одновременно, и отсюда  $f(z)$  — постоянная, которую можно принять равной нулю. Имеем:

$$f(z) = 0, \text{ когда } -l < z < l. \quad [m]$$

Теперь можно определить значения функции  $f(z)$  для значений  $z$  вне промежутка  $-l < z < l$  при помощи концевых условий [e].

Подставив [k] в ур-ие [l], получим:

$$ml \{f''(at-l) - f''(at+l)\} = +f'(at-l) + f'(at+l)$$

или, полагая  $at+l = z$ ,

$$f''(z) + \frac{1}{ml} f'(z) = f''(z-2l) - \frac{1}{ml} f'(z-2l). \quad [n]$$

При помощи этого уравнения функцию  $f(z)$  можно составить шаг за шагом следующим образом:

Из [m] мы знаем, что в промежутке  $l < z < 3l$  правая часть ур-ия [n] равна нулю. Интегрированием этого ур-ия получим функцию  $f(z)$  в промежутке  $l < z < 3l$ . Правая часть ур-ия [n] становится теперь известной в промежутке  $3l < z < 5l$ . Следовательно, интегрирование этого ур-ия даст функцию  $f(z)$  для промежутка  $3l < z < 5l$ . Поступая таким же образом, можем определить функцию  $f(z)$  для всех значений  $z$  больших чем  $-l$ .

Рассматривая ур-ие [n] как ур-ие, определяющее  $f'(z)$ , получим общее решение этого линейного ур-ия первого порядка:

$$f'(z) = Ce^{-z/ml} + e^{-z/ml} \int e^{z/ml} \left[ f''(z-2l) - \frac{1}{ml} f'(z-2l) \right] dz, \quad [p]$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Для промежутка  $l < z < 3l$  правая часть ур-ия [n] исчезает, и мы получим

$$f'(z) = Ce^{-z/ml}.$$

Теперь из условия [g], имеем

$$a \{f'(-l+0) - f'(l+0)\} = -v$$

или

$$f'(l+0) = Ce^{-1/m} = \frac{v}{a}; \quad C = e^{1/m} \frac{v}{a};$$

и мы получим для промежутка  $l < z < 3l$

$$f'(z) = \frac{v}{a} e^{-(z-l)/ml}. \quad [q]$$

Когда  $3l < z < 5l$ , мы имеем, из ур-ия [q]

$$f'(z-2l) = \frac{v}{a} e^{-(z-3l)/ml}$$

и

$$f''(z-2l) - \frac{1}{ml} f'(z-2l) = -\frac{2}{ml} \frac{v}{a} e^{-(z-3l)/ml}.$$

Теперь решение [p] можно представить в следующем виде:

$$f'(z) = C e^{-z/ml} - \frac{2}{ml} \frac{v}{a} (z-3l) e^{-(z-3l)/ml}. \quad [r]$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется условием постоянства скорости на конце  $x=l$  в момент  $t=(2l/a)$ . Это условие таково:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l, t=2l/a-0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l, t=2l/a+0}$$

или из ур-ия [k]:

$$f'(l-0) - f'(3l-0) = f'(l+0) - f'(3l+0).$$

Теперь при помощи ур-ий [m], [q] и [r] получим:

$$-\frac{v}{a} e^{-2l/ml} = \frac{v}{a} - C e^{-3l/ml},$$

откуда:

$$C = \frac{v}{a} (e^{1/ml} + e^{3/ml}),$$

и мы имеем для промежутка  $3l < z < 5l$

$$f'(z) = \frac{v}{a} e^{-(z-l)/ml} + \frac{v}{a} \left(1 - \frac{2}{ml} (z-3l)\right) e^{-(z-3l)/ml}. \quad [s]$$

Зная  $f'(z)$ , когда  $3l < z < 5l$ , и пользуясь ур-ием [n], можем получить выражение для функции  $f(z)$ , когда  $5l < z < 7l$ , и т. д.

Функцию  $f(z)$  можно определить интегрированием, если функция  $f'(z)$  известна, причем постоянная интегрирования получится из условия, что перемещение  $u$  при  $x=l$  не испытывает рез-

кого изменения. Таким образом получатся, когда  $l < z < 3l$ , следующие результаты:

$$f(z) = mlv/a \{ 1 - e^{-(z-l)/ml} \}, \quad [t]$$

когда  $3l < z < 5l$ :

$$f(z) = -\frac{mlv}{a} e^{-(z-l)/ml} + \frac{mlv}{a} \left( 1 + \frac{2}{ml} (z-3l) \right) e^{-(z-3l)/ml}. \quad [v]$$

Зная  $f(z)$ , можем вычислить перемещения и напряжения в любом поперечном сечении стержня, подставляя в ур-ие [k] соответствующие значения функций  $f(at-x)$  и  $f(at+x)$ . Когда  $0 < t < (l/a)$ , член  $f(at-x)$  в ур-ии [k] равен нулю на основании ур-ия [m]. Поэтому мы имеем только волну  $f(at+x)$ , перемещающуюся в отрицательном направлении оси X. Вид этой волны получим из [t], подставив  $at+x$  вместо  $z$ . При  $t = (l/a)$  эта волна будет отражаться от закрепленного конца, и в промежуток  $(l/a) < t < (2l/a)$  мы будем иметь две волны: волну  $f(at-x)$ ,двигающуюся в положительном направлении вдоль оси X, и волну  $f(at+x)$ ,двигающуюся в отрицательном направлении. Обе волны можно получить из [t] подстановкой вместо  $z$  аргументов  $(at-x)$  и  $(at+x)$  соответственно. Продолжая итти этим путем, можем получить полную картину явления продольного удара.

Вышеприведенное решение представляет действительные условия только до тех пор, пока существует положительное давление между ударяющим телом и стержнем, т. е. до тех пор, пока относительное удлинение

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = -f'(at-l) - f'(at+l) \quad [w]$$

остается отрицательным. Когда  $0 < at < 2l$ , крайний правый член ур-ия [w] представится функцией [q] с отрицательным знаком и останется отрицательным. Когда  $2l < at < 4l$ , правая часть ур-ия [w] становится равной

$$-\frac{v}{a} e^{-at/ml} \left\{ 1 + 2e^{2/m} \left( 1 - \frac{at-2l}{ml} \right) \right\}.$$

Она становится равной нулю, когда

$$1 + 2e^{2/m} \left( 1 - \frac{at-2l}{ml} \right) = 0$$

или

$$2at/ml = 4/m + 2 + e^{-2/m}. \quad [x]$$

Это ур-ие может иметь корень в промежутке  $2l < at < 4l$  только в том случае, если

$$2 + e^{-2/m} < 4/m,$$

что будет при  $m \cong 1,73$ .

Отсюда, если отношение веса ударяющего тела к весу стержня меньше, чем 1,73, удар прекращается в один из моментов промежутка  $2l < at < 4l$ , и этот момент можно определить из ур-ия [x]. Для бóльших значений отношения  $m$  нужно исследовать, прекращается ли удар в какой-либо момент промежутка  $4l < at < 6l$ , или нет, и так далее.

Наибольшие сжимающие напряжения при ударе будут в закрепленном конце, и при больших значениях  $m$  ( $m > 24$ ) они могут быть вычислены с достаточной точностью по следующей приближенной формуле:

$$p_{\max} = E \frac{v}{a} (\sqrt{m} + 1). \quad [183]$$

Для сравнения интересно отметить, что, пользуясь приближенным способом предыдущего п<sup>о</sup> и пренебрегая  $\delta_{st}$  по сравнению с  $h$  в ур-ии [d] (см. стр. 279), мы придем к ур-ию:

$$p_{\max} = E \frac{v}{a} \sqrt{m}. \quad [184]$$

Когда  $5 < m < 24$ , нужно вместо ур-ия (183) пользоваться ур-ием

$$p_{\max} = E \frac{v}{a} (\sqrt{m} + 1,1). \quad [185]$$

Для  $m < 5$  Сен-Венан вывел следующую приближенную формулу:

$$p_{\max} = 2E \frac{v}{a} (1 + e^{-2/m}). \quad [186]$$

Помощью вышеизложенного способа можно рассмотреть случай стержня, свободного в одном и испытывающего продольный удар на другом конце, и случай продольного удара двух призматических стержней<sup>1)</sup>.

Следует отметить, что исследование продольного удара, данное выше, основывается на допущении, что поверхности соприкосновения между ударяющим телом и стержнем являются двумя идеально гладкими параллельными плоскостями. В условиях действительности будут обычно некоторые неправильности на поверхности, и потребуется известный промежуток времени, чтобы

<sup>1)</sup> См. А. Е. Н. Love, указанный выше на стр. 281 труд, стр. 435.

сгладились шероховатости. Если этот промежуток того же порядка, что время, требующееся для того, чтобы звуковая волна прошла вдоль стержня, нельзя ожидать удовлетворительного согласования между теорией и опытом<sup>1)</sup>.

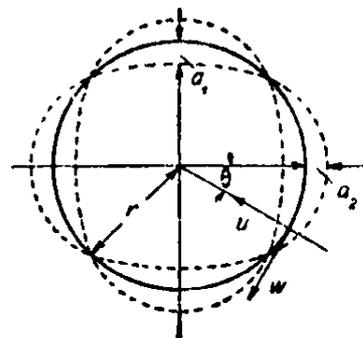
Много лучшие результаты получатся, если устроить так, чтобы промежуток времени  $l/a$  был сравнительно велик. Например, заменив жесткий стержень спиральной пружиной, *C. Ramsauer* получил<sup>2)</sup> очень хорошее соответствие между теорией и опытом. На основании этого мы можем также ожидать удовлетворительных результатов от применения этой теории при исследовании распространения волн удара в длинных однообразно нагруженных железнодорожных поездах. Подобная задача может иметь практическое значение при изучении сил, действующих на сцепки между вагонами.

Другой способ получения лучшего соответствия между теорией и опытом состоит в том, что условия соприкасания берутся более определенными. Взяв, например, стержень с закругленным концом и комбинируя теорию Герца для местной деформации в точке соприкасания с теорией Сен-Венана о волнах, перемещающихся вдоль стержня, *J. E. Sears*<sup>3)</sup> получил очень хорошее совпадение между теоретическими и опытными результатами.

**54. Колебания кругового кольца.** — Задача вого кольца встречается при исследовании частоты колебания различного рода круговых рам для вращающихся электрических машин, что, например, необходимо при изучении причин шума, производимого такими машинами. В дальнейшем рассматривается несколько простых задач на колебание кругового кольца постоянного поперечного сечения, при допущении, что размеры поперечного сечения кольца малы сравнительно с радиусом их осевой линии, и что одна из главных осей поперечного сечения расположена в плоскости кольца.

**Чистое радиальное колебание.** — В этом случае осевая линия, кольца образует круг с периодически изменяющимся радиусом и все поперечные сечения движутся радиально без вращения.

Пусть  $r$  — радиус осевой линии кольца,  $u$  — радиальное пере-



Фиг. 134.

<sup>1)</sup> Такие опыты со стержнями твердой стали были выполнены *Фойгтом* *W. Voigt*, *Wied. Ann.*, Bd 19, 1883, стр. 43.

<sup>2)</sup> *Ann. d. Phys.*, Bd 30, 1909.

<sup>3)</sup> *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 21, 1908, p. 49. Дальнейшие опыты были описаны *J. E. P. Wagstaff*ом, *London Royal Soc. Proc.* (ser. A), 1924, Vol. 105, p. 544.

мещение, одинаковое для всех поперечных сечений,  $A$  — площадь поперечного сечения кольца.

Относительное удлинение кольца в направлении окружности будет тогда —  $u/r$ . Потенциальная энергия деформации, состоящая в этом случае из энергии простого растяжения, представится равенством:

$$V = \frac{AEu^2}{2r^2} 2\pi r, \quad [a]$$

тогда как кинетическая энергия колебания будет:

$$T = \frac{A\gamma}{2g} u'^2 2\pi r. \quad [b]$$

Из [a] и [b] получим

$$u'' + \frac{Eg}{\gamma} \frac{1}{r^2} u = 0,$$

откуда

$$u = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}}.$$

Частота чистых радиальных колебаний поэтому такова <sup>1)</sup>:

$$f = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}}. \quad [187]$$

Круговое кольцо обладает также видами колебания, аналогичными продольным колебаниям призматических стержней. Если через  $i$  обозначить число волн в окружности, то частоты высших видов растягивающего колебания кольца будут определяться ур-ием <sup>2)</sup>:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}} \sqrt{1 + i^2}. \quad [188]$$

*Колебания кручения.* — Теперь займемся рассмотрением простейшего вида колебания кручения, т. е. такого, при котором осевая линия кольца не деформируется, и все поперечные сечения кольца

<sup>1)</sup> Если имеется какой-либо добавочный груз, который можно рассматривать, как равномерно распределенный вдоль осевой линии кольца, необходимо только в предыдущих выкладках (ур-ие [b]) заменить  $A\gamma$  через  $A\gamma + q$ , где  $q$  обозначает добавочный вес на единицу длины осевой линии кольца.

<sup>2)</sup> См. А. Е. Н. Love, выше на стр. 281 упомянутый труд, стр. 454.

поворачиваются при колебании на один и тот же угол (фиг. 135). Вследствие этого поворота, точка  $M$ , отстоящая на  $y$  от средней плоскости кольца, будет иметь радиальное перемещение, равное  $y\varphi$ , а соответственное удлинение по окружности можно принять приблизительно равным  $y\varphi/r$ . Потенциальная энергия деформации кольца может теперь быть выражена следующим образом



Фиг. 135.

$$V = 2\pi r \int_A \frac{E}{2} \left( \frac{y\varphi}{r} \right)^2 dA = \frac{\pi E I_x \varphi^2}{r}, \quad [c]$$

где  $I_x$  — момент инерции поперечного сечения вокруг оси  $X$ .  
Кинетическая энергия колебания будет

$$T = 2\pi r \cdot \frac{I_p \dot{\varphi}^2}{2g}, \quad [d]$$

где  $I_p$  — полярный момент инерции поперечного сечения.

Из [c] и [d] получим:

$$\varphi'' + \frac{Eg}{\gamma r^2} \cdot \frac{I_x}{I_p} \varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2} \cdot \frac{I_x}{I_p}}.$$

Частота колебания кручения выразится тогда так:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2} \cdot \frac{I_x}{I_p}}. \quad [189]$$

Сравнивая этот результат с формулой [187], можно заключить, что частоты чистого радиального колебания и колебания кручения находятся в отношении  $1: \sqrt{I_x/I_p}$ . Частоты высших видов колебания кручения выражаются<sup>1)</sup> в случае кругового поперечного сечения кольца ур-ием:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{2\gamma r^2} \sqrt{1+i^2}}. \quad [190]$$

Вспомнив, что

$$\sqrt{\frac{Eg}{\gamma r^2}} = \frac{a}{r},$$

<sup>1)</sup> См. выше на стр. 281 указанный труд А. Е. Н. Love, стр. 453.

где  $a$  — скорость распространения звука вдоль стержня, можем заключить, что растягивающее колебание и колебание кручения, рассмотренные выше, имеют обыкновенно высокие частоты. Гораздо более низкие частоты получатся при рассмотрении колебаний изгиба кольца.

*Колебания изгиба кругового кольца.* — Колебания изгиба кругового кольца распадаются на две категории, а именно: колебания изгиба в плоскости кольца и колебания изгиба, сопутствуемые двумя перемещениями: под прямым углом к плоскости кольца и скручивание<sup>1)</sup>. При рассмотрении колебания изгиба в плоскости кольца (фиг. 134) обозначим:  $\theta$  — угол, определяющий положение точки на осевой линии,  $u$  — радиальное перемещение, положительное по направлению к центру,  $w$  — тангенциальное перемещение, положительное в направлении увеличения угла  $\theta$ ,  $I$  — момент инерции поперечного сечения относительно главной оси под прямым углом к плоскости кольца.

Относительное удлинение осевой линии в любой точке, вызванное перемещениями  $u$  и  $w$ , будет:

$$e = -\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \quad [e]$$

[и изменение кривизны можно представить ур-ием<sup>2)</sup>]:

$$\frac{1}{r + \Delta r} - \frac{1}{r} = \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{u}{r^2}. \quad [f]$$

В наиболее общем случае колебаний кручения радиальное перемещение можно представить в виде тригонометрического ряда<sup>3)</sup>:

$$u = a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta \dots + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots, \quad [h]$$

в котором коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ , изменяющиеся с течением времени, представляют обобщенные координаты.

Рассматривая колебания изгиба без растяжения, получим из [e]

$$u = \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad [g]$$

откуда<sup>4)</sup>

$$w = a_1 \sin \theta + \frac{1}{2} a_2 \sin 2\theta + \dots - b_1 \cos \theta - \frac{1}{2} b_2 \cos 2\theta \dots \quad [k]$$

<sup>1)</sup> Вышеупомянутый труд *A. E. H. Love*, стр. 451.

<sup>2)</sup> Это ур-ие было установлено *J. Boussinesq*'ом „Comptes Rendus“, tome 97, 1883, p. 843.

<sup>3)</sup> Постоянный член ряда, соответствующий чистому радиальному колебанию, опущен.

<sup>4)</sup> Постоянная интегрирования, представляющая поворот кольца, рассматриваемого как твердое тело, в его плоскости, опущена в выражении [k].

Изгибающий момент в любом поперечном сечении кольца будет:

$$M = \frac{EI}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right),$$

а отсюда получим для потенциальной энергии изгиба выражение:

$$V = \frac{EI}{2r^2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right)^2 r d\theta$$

или, подставляя ряд [h] вместо  $u$  и пользуясь формулами:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = 0, \quad \text{при } m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin m\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\theta d\theta = \pi,$$

получим

$$V = \frac{EI\pi}{2r^2} \sum_{i=1}^{\infty} (1 - i^2)^2 (a_i^2 + b_i^2). \quad [l]$$

Кинетическая энергия колеблющегося кольца будет:

$$T = \frac{A\gamma}{2g} \int_0^{2\pi} (u'^2 + w'^2) r d\theta.$$

Подставив [h] и [k] вместо  $u$  и  $w$ , получаем:

$$T = \frac{\pi r A \gamma}{2g} \sum_{i=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{i^2} \right) (a_i'^2 + b_i'^2). \quad [m]$$

Из этого видно, что выражения [l] и [m] содержат только квадраты обобщенных координат и соответствующих скоростей; отсюда эти координаты являются главными или нормальными координатами, и соответствующие колебания являются главными видами колебания изгиба кольца. Дифференциальное ур-ие для любого вида колебания из ур-ий [l] и [m] будет

$$\frac{\pi r A \gamma}{g} \left( 1 + \frac{1}{i^2} \right) a_i'' + \frac{EI\pi}{r^3} (1 - i^2)^2 a_i = 0$$

или

$$a_i'' + \frac{Eg}{\gamma} \frac{I}{Ar^3} \frac{i^2(1-i^2)^2}{1+i^2} a_i = 0.$$

Отсюда частота любого вида колебания определяется выражением:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \frac{I}{Ar^4} \frac{i^2(1-i^2)^2}{1+i^2}}. \quad [191]$$

При  $i=1$  получим  $f_1=0$ . В этом случае  $u=a_1 \cos \theta$ ;  $w=a_1 \sin \theta$ , и кольцо движется как твердое тело, причем  $a_1$  — перемещение в отрицательном направлении оси  $X$ . Когда  $i=2$ , кольцо испытывает основной вид колебания изгиба. Крайние положения кольца при этом колебании показаны на фиг. 134 пунктиром.

В случае колебаний изгиба кольца кругового поперечного сечения, сопутствуемых как перемещением под прямым углом к плоскости кольца, так и перемещением скручивания, частоты главных видов колебания можно определить из ур-ия:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \frac{I}{Ar^4} \frac{i^2(i^2-1)^2}{1+i^2+\sigma}}, \quad [192]$$

где  $\sigma$  обозначает Пуассоново число.

Сравнивая [192] и [191], можем заключить, что даже при низшем виде ( $i=2$ ) частоты обеих категорий колебаний изгиба отличаются только очень слабо.

*Неполное кольцо.* — Когда кольцо имеет форму неполной круговой дуги, задача определения собственных частот колебания становится очень сложной <sup>1)</sup>. Полученные до сих пор результаты можно применить только к случаю, когда длина дуги мала по сравнению с радиусом кривизны. В таких случаях эти результаты показывают, что собственные частоты будут несколько ниже частот прямолинейного стержня из такого же материала, такой же длины и поперечного сечения. Так как в общем случае точное решение задачи чрезвычайно сложно, до настоящего времени получены только некоторые приближенные значения для низшей собственной частоты, причем для их вычисления применялся способ Рейлея-Ритца <sup>2)</sup>.

**55. Колебание мембран.** — *Общие замечания.* — При дальнейшем рассмотрении принято, что мембрана — совершенно гибкая и бесконечно тонкая пластинка из однородного материала и однообразной толщины. Кроме того, принято, что она одинаково натянута во всех направлениях настолько большим натяжением,

<sup>1)</sup> Эта задача была рассмотрена *H. Lamb*'ом, см. „London Math. Soc. Proc.“ Vol. 19, 1888, p. 365.

<sup>2)</sup> См. *J. P. Den Hartog*, The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs „Phil. Mag.“, Vol. 5, 1928, p. 400; также *Vibration of Frames of Electrical Machines* „Trans. A. S. M. E.“ Applied Mech. Div. 1928.

что изменениями в этом натяжении, вызванными небольшими отклонениями при колебании, можно пренебречь. Считая плоскость мембраны совпадающей с плоскостью  $XU$ , обозначим:  $w$  — перемещение любой точки мембраны под прямым углом к плоскости  $XU$  при колебании;  $s$  — равномерное натяжение на единицу длины контура;  $q$  — вес мембраны на единицу площади.

Увеличение потенциальной энергии мембраны при прогибе найдется обычным путем — умножением равномерного растяжения  $s$  на увеличение площади поверхности мембраны. Площадь поверхности мембраны в деформированном состоянии будет

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

или, замечая, что прогибы при колебании очень малы, имеем

$$A = \iint \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy.$$

Тогда увеличение потенциальной энергии будет

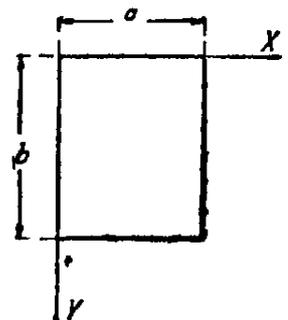
$$V = \frac{s}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy. \quad [a]$$

Кинетическая энергия пластинки при колебании будет

$$T = \frac{q}{2g} \iint w'^2 dx dy. \quad [b]$$

При помощи [a] и [b] можно определить частоты нормальных видов колебания, как теперь будет показано для некоторых частных случаев.

*Колебание прямоугольной мембраны.* — Пусть  $a$  и  $b$  обозначают длины сторон мембраны и пусть оси взяты, как показано на фиг. 136. Какова бы ни была функция координат  $w$ , ее всегда можно представить в пределах прямоугольника помощью двойного ряда



Фиг. 136.

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad [c]$$

коэффициенты  $q_{mn}$  которого берутся за обобщенные координаты для этого случая. Легко видеть, что каждый член ряда [c] удовлетворяет условиям на контуре, именно:  $w=0$  при  $x=0$  и  $x=a$  и  $w=0$  при  $y=0$  и  $y=b$ .

Подставляя [c] в выражение [a] для потенциальной энергии, получим

$$V = \frac{s\pi^2}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left( \sum \sum q_{mn} \frac{m}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)^2 + \left( \sum \sum q_{mn} \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Интегрируя это выражение в пределах площади мембраны при помощи формул н° 12 (см. стр. 52), находим

$$V = \frac{s}{2} \frac{ab\pi^2}{4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) q_{mn}^2. \quad [d]$$

Таким же путем подстановкой [c] в ур-ие [b] получим выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{q}{2g} \frac{ab}{4} \sum \sum q_{mn}'^2. \quad [e]$$

Выражения [d] и [e] не содержат произведений координат и соответствующих скоростей, поэтому избранные координаты являются главными координатами, а соответствующие колебания — нормальными видами колебания пластинки.

Дифференциальное ур-ие нормального колебания из [d] и [e] будет

$$\frac{q}{g} \frac{ab}{4} q_{mn}'' + s \frac{ab\pi^2}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) q_{mn} = 0, \quad [f]$$

откуда

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gs}{q} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \quad [193]$$

Низший вид колебания получится, если примем  $m = n = 1$ . Тогда

$$f_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gs}{q} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}.$$

Деформированная поверхность мембраны в этом случае будет

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad [g]$$

Таким же образом можно получить высшие виды колебания. Возьмем, например, случай квадратной мембраны, когда  $a = b$ . Частота низшего тона будет:

$$f_{11} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \sqrt{\frac{gs}{q}}. \quad [194]$$

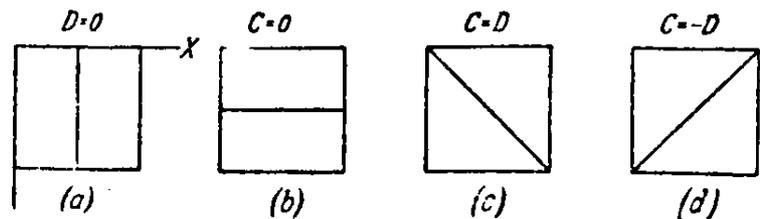
Частота прямо пропорциональна квадратному корню из натяжения  $s$  и обратно пропорциональна длине сторон мембраны и квадратному корню из нагрузки на единицу площади.

Ближайшие два высших вида колебания получатся, взяв одно из чисел  $m, n$  равным 2, а другое равным 1. Эти два вида имеют одинаковую частоту, но различный вид деформированной поверхности. На фиг. 137 *a* и *b* показаны узловые линии этих двух видов колебания. Вследствие того, что частоты одинаковы, возможно наложить друг на друга эти две поверхности при любом соотношении их наибольших прогибов. Такое положение выражается следующим образом:

$$w = \left( C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + D \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \right),$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные величины. Четыре частных случая подобного комбинированного колебания показаны на фиг. 137.

Принимая  $D=0$ , мы получим колебание, рассмотренное выше и показанное на фиг. 137 *a*. Мембрана при колебании подразделяется на две равные части вертикальной узловой линией.



Фиг. 137.

Когда  $C=0$ , мембрана подразделяется горизонтальной узловой линией, как показано на фиг. 137 *b*. Когда  $C=D$ , получим

$$w = C \left( \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} \right) = 2C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} \right).$$

Это выражение становится равным нулю, когда

$$\sin \frac{\pi x}{a} = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{\pi y}{a} = 0,$$

или же когда

$$\cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} = 0.$$

Первые два ур-ия дают нам стороны контура; из третьего ур-ия получим:

$$\frac{\pi x}{a} = \pi - \frac{\pi y}{a}$$

или

$$x + y = a.$$

Это представляет одну из диагоналей квадрата, показанного на фиг. 137 *d*. Фиг. 137 *c* представляет случай, когда  $C = -D$ . Каждую половину мембраны в последнем из двух случаев можно рассматривать как равнобедренный прямоугольный треугольник. Основная частота этой мембраны по ур-ию [193] будет

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gs}{q} \left( \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right)} = \frac{\sqrt{5}}{2a} \sqrt{\frac{gs}{q}}. \quad [195]$$

Таким же образом можно рассмотреть высшие виды колебания квадратной или прямоугольной мембраны <sup>1)</sup>.

В случае вынужденного колебания мембраны дифференциальное ур-ие [f] движения получается:

$$\frac{q}{g} \frac{ab}{4} q_{mn}'' + s \frac{ab\pi^2}{4} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) q_{mn} = Q_{mn}, \quad [h]$$

где  $Q_{mn}$  — обобщенная возмущающая сила, соответствующая координате  $q_{mn}$ . Рассмотрим, например, случай гармонической силы  $P = P_0 \cos \omega t$ , действующей в центре мембраны. Придавая приращение  $\delta q_{mn}$  координате  $q_{mn}$  в выражении [c], найдем работу силы  $P$ :

$$P_0 \cos \omega t \delta q_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

откуда мы видим, что когда  $m$  и  $n$  оба нечетные,  $Q_{mn} = \pm P_0 \cos \omega t$ , в противном случае  $Q_{mn} = 0$ . Подставляя в ур-ие [h] и пользуясь ур-ием [24] (стр. 25), получим:

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \pm \frac{4g}{abq} \frac{P_0}{p_{mn}} \int_0^t \sin p_{mn}(t-t_1) \cos \omega t_1 dt_1 = \\ &= \pm \frac{4g}{abq} \frac{P_0}{p_{mn}^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos p_{mn} t), \end{aligned} \quad [k]$$

где

$$p_{mn}^2 = \frac{gs\pi^2}{q} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Подставляя [k] в выражение [c], получим колебания, вызванные возмущающей силой  $P_0 \cos \omega t$ .

Когда на мембрану действует равномерно распределенная сила  $Z$ , обобщенная сила в ур-ии [h] становится равной:

$$Q_{mn} = \int_0^b \int_0^a Z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad [l]$$

<sup>1)</sup> Более детальное рассмотрение этой задачи можно найти в книге Рейлея, цитированной выше, стр. 306. См. также Lamé, Leçons sur l'élasticité, Paris, 1852.

Допустим, например, что равномерно распределенное давление  $Z$  внезапно приложено к мембране в начальный момент ( $t=0$ ), тогда из [l]

$$Q_{mn} = Z \frac{4ab}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi).$$

Когда  $m$  и  $n$  оба нечетны, имеем:

$$Q_{mn} = \frac{4ab}{mn\pi^2} Z; \quad [m]$$

в противном случае  $Q_{mn}$  обращается в нуль.

Подставляя [m] в ур-ие [h] и пользуясь начальным условием  $q_{mn} = 0$  при  $t=0$ , получим:

$$q_{mn} = \frac{16g}{qmn\pi^2} \frac{Z(1 - \cos p_{mn}t)}{p_{mn}^2}. \quad [n]$$

Отсюда колебания, вызванные внезапно приложенным давлением  $Z$ , будут:

$$w = \frac{16gZ}{\pi^2 q} \sum \sum \frac{1 - \cos p_{mn}t}{mnp_{mn}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad [o]$$

где  $m$  и  $n$  оба нечетны.

*Способ Рейлея-Ритца.* — При определении частот собственных видов колебания мембраны очень полезен способ Рейлея-Ритца. При применении этого способа допустим, что прогибы мембраны при колебании представляются ур-ием:

$$w = w_0 \cos pt, \quad [p]$$

где  $w_0$  — соответственная функция координат  $x$  и  $y$ , которая определяет форму деформированной мембраны, т. е. вид колебания. Подставляя [p] в выражение [a] для потенциальной энергии, найдем

$$V_{\max} = \frac{s}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad [q]$$

Максимум кинетической энергии получим из [b]

$$T_{\max} = \frac{q}{2g} p^2 \iint w_0^2 dx dy. \quad [r]$$

Приравняв [q] и [r], имеем:

$$p^2 = \frac{sg}{q} \frac{\iint \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy}{\iint w_0^2 dx dy}. \quad [s]$$

Применяя способ Рейлея-Ритца, мы возьмем выражение  $w_0$  для деформированной поверхности мембраны в виде ряда:

$$w_0 = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + a_3 \varphi_3(x, y) + \dots \quad [t]$$

каждый член которого удовлетворяет условиям на контуре (прогибы по контуру мембраны должны быть равны нулю). Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  в этом ряду следует выбрать так, чтобы выражение [s] было минимум, т. е. так, чтобы удовлетворялись все ур-ия следующего вида:

$$\frac{\partial \iint \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy}{\partial a_n} = 0$$

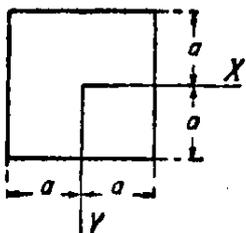
или

$$\iint w_0^2 dx dy \frac{\partial}{\partial a_n} \iint \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \iint \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \frac{\partial}{\partial a_n} \iint w_0^2 dx dy = 0.$$

Пользуясь выражением [s], это последнее ур-ие получаем равным:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \iint \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - \frac{p^2 q}{g s} w_0^2 \right\} dx dy = 0. \quad [u]$$

Таким образом, мы получим столько ур-ий типа [u], сколько имеется коэффициентов в ряду [t]. Все эти ур-ия будут линейны относительно  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и, приравнявая определитель этих ур-ий нулю, получим ур-ие частоты мембраны.



Фиг. 138.

При рассмотрении, например, видов колебания квадратной мембраны (фиг. 138), симметричной относительно осей  $X$  и  $Y$ , ряд [t] можно взять в следующем виде:

$$w_0 = (a^2 - x^2) (a^2 - y^2) (a_1 + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 x^2 y^2 + \dots).$$

Легко видеть, что каждый член этого ряда становится равным нулю, когда  $x = y = \pm a$ . Вследствие этого условия на контуре удовлетворяются.

В случае выпуклого многоугольника условия контура будут удовлетворяться, если взять

$$w_0 = (a_1 x + b_1 y + c_1) (a_2 x + b_2 y + c_2) \dots \dots (a_n x + b_n y + c_n) \sum \sum a_{mn} x^m y^n,$$

где  $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \dots$  — ур-ия сторон многоугольника. Взяв только первый член ( $m = 0, n = 0$ ) этого ряда, обыкновенно можно

получить удовлетворительное приближение для основного вида колебания. Если же отыскиваются частоты высших видов колебания, то необходимо взять больше членов.

*Круговая мембрана.* — Рассмотрим простейший случай колебания, когда деформированная поверхность мембраны симметрична относительно центра круга. В этом случае прогибы зависят только от радиального расстояния  $r$  и условия на контуре будут удовлетворены, если взять

$$w_0 = a_1 \cos \frac{\pi r}{2a} + a_2 \cos \frac{3\pi r}{2a} + \dots, \quad [v]$$

где  $a$  обозначает радиус контура.

Так как мы воспользуемся полярными координатами, то ур-ие [q] следует заменить в этом случае следующим ур-ием:

$$V_{\max} = \frac{s}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 2\pi r dr. \quad [q']$$

Вместо выражения [r] получим

$$T_{\max} = \frac{q}{2g} p^2 \int_0^a w_0^2 2\pi r dr \quad [r']$$

и ур-ие [u] примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial w_0}{\partial r} \right)^2 - \frac{p^2 q}{gs} w_0^2 \right\} 2\pi r dr = 0. \quad [u']$$

Взяв только первый член ряда [v] и подставив  $w_0 = a_1 \cos \pi r / 2a$  в ур-ие [u'], получим:

$$\frac{\pi^2}{4a^2} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi r}{2a} r dr = \frac{p^2 q}{gs} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi r}{2a} r dr,$$

откуда

$$\frac{\pi^2}{4a^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \right) = \frac{p^2 q}{gs} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right)$$

или

$$p = \frac{2,415}{a} \sqrt{\frac{gs}{q}}.$$

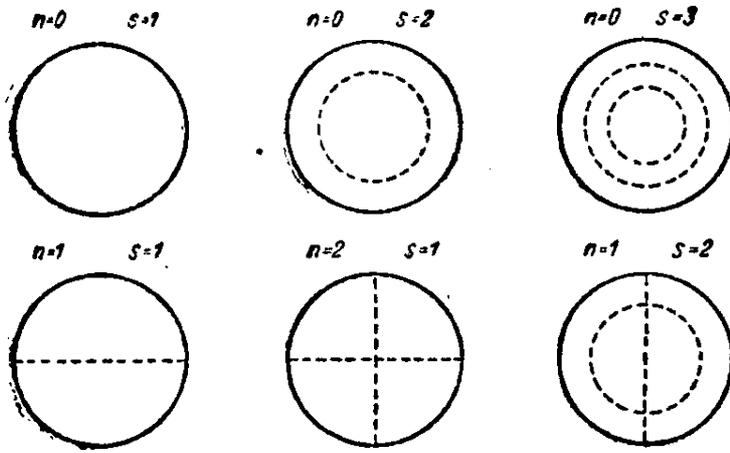
Точное решение <sup>1)</sup> дает для этого случая:

$$p = \frac{2,404}{a} \sqrt{\frac{gs}{q}}. \quad [196]$$

Ошибка первого приближения меньше  $1/2\%$ .

<sup>1)</sup> Задача колебания круговой мембраны подробно рассмотрена Рейлеем, см., упомянутую выше книгу, стр. 318.

Чтобы получить лучшее приближение для основного вида, а также и для частот высших видов колебания, следует взять большее число членов в ряду  $[v]$ . Эти высшие виды колебания будут иметь один, два, три... узловых круга, на которых при колебании перемещения  $w$  будут равны нулю.



Фиг. 139.

Кроме видов колебания, симметричных относительно центра круговой мембраны, могут существовать также виды, при которых один, два, три... диаметра круга являются узловыми линиями, вдоль которых прогибы при колебании равны нулю. Некоторые виды колебания круговой мембраны показаны на фиг. 139, где узловые круги и узловые диаметры обозначены пунктирными линиями.

Во всех случаях величины  $p$ , определяющие частоты, можно представить ур-ием:

$$p_{ns} = \frac{\alpha_{ns}}{a} \sqrt{\frac{gs}{q}}, \quad [197]$$

постоянные  $\alpha_{ns}$  которого даны в нижеследующей таблице <sup>1)</sup>.

$s$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	2,404	3,832	5,135	6,379	7,586	8,780
2	5,520	7,016	8,417	9,760	11,064	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,017	14,373	15,700
4	11,792	13,323	14,796	16,224	17,616	18,982
5	14,931	16,470	17,960	19,410	20,827	22,220
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,018	25,431
7	21,212	22,760	24,270	25,749	27,200	28,628
8	24,353	25,903	27,421	28,909	30,371	31,813

В этой таблице  $n$  обозначает число узловых диаметров, а  $s$  — число узловых кругов (круг контура входит в это число).

В предыдущих рассуждениях допущено, что мембрана имеет полную площадь круга и что она закреплена только по круговому контуру, но легко видеть, что полученные результаты включают

<sup>1)</sup> Таблица вычислена Бурже, „Ann. de l'école normale“, Vol. 3, 1866.

также решение других задач для мембран, ограниченных двумя концентрическими кругами и двумя радиусами, или для мембран, имеющих форму сектора.

Возьмем, например, мембрану в виде полукруга. Все возможные виды колебания такой мембраны будут заключаться в числе видов, которые может испытывать круговая мембрана. Необходимо только один из узловых диаметров круговой мембраны считать за закрепленный контур.

Когда контур мембраны приблизительно круговой, низший тон такой мембраны близок к таковому круговой мембраны, имеющей ту же площадь и ту же величину  $sg/q$ . Взяв ур-ие, определяющее частоту основного вида колебания мембраны в нижеследующей форме:

$$p = \alpha \sqrt{\frac{gs}{qA}}, \quad [198]$$

где  $A$  — площадь мембраны, постоянную  $\alpha$  этого ур-ия получим по ниже приводимым данным. Эта постоянная показывает влияние большего или меньшего отклонения от круговой формы <sup>1)</sup>.

В случаях, когда контур отличается от рассмотренного выше, исследование колебаний представляет математические трудности, и только в случае эллиптического контура было дано *Mathieu* полное решение <sup>2)</sup>. Полное рассмотрение теории колебания мембран с математической точки зрения дано в книге *Pockels'a* <sup>3)</sup>.

Значения постоянной  $\alpha$ :

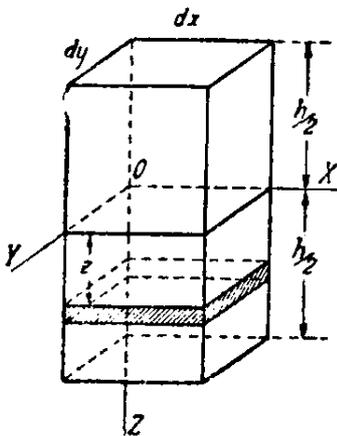
круг . . . . .	$\alpha = 2,404 \sqrt{\pi}$	$= 4,261;$
квадрат . . . . .	$\alpha = \sqrt{2} \cdot \pi$	$= 4,443;$
четверть круга . . . . .	$\alpha = \frac{5,135}{2} \sqrt{\pi}$	$= 4,551;$
круговой сектор с центральным углом $60^\circ$	$\alpha = 6,379 \sqrt{\frac{\pi}{6}}$	$= 4,616;$
прямоугольник с отношением сторон 3 : 2	$\alpha = \sqrt{\frac{13}{6} \cdot \pi}$	$= 4,624;$
равносторонний треугольник . . . . .	$\alpha = 2\pi \sqrt{\operatorname{tg} 30^\circ}$	$= 4,774;$
полукруг . . . . .	$\alpha = 3,832 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$= 4,803;$
прямоугольник с отношением сторон 2 : 1	$\alpha = \pi \sqrt{\frac{5}{2}}$	$= 4,967;$
прямоугольник с отношением сторон 3 : 1	$\alpha = \pi \sqrt{\frac{10}{3}}$	$= 5,736.$

<sup>1)</sup> Эти данные взяты из книги *Рейлея*, упомянутой выше, стр. 345.

<sup>2)</sup> „*Journal de math.*“ (Liouville), Vol. 13, 1868.

<sup>3)</sup> *Pockels*, Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$ , Leipzig, 1891

56. Колебание пластинок. — *Общие замечания.* — При дальнейшем рассмотрении допущено, что пластинка состоит из совершенно упругого, однородного, изотропного материала, и что она имеет однообразную толщину  $h$ , рассматриваемую как малая сравнительно с другими ее измерениями. Возьмем за плоскость  $XU$  среднюю плоскость пластинки и допустим, что при малых прогибах <sup>1)</sup> боковые стороны элемента, вырезанного из пластинки плоскостями, параллельными плоскостям  $ZX$  и  $ZU$  (см. фиг. 140), остаются плоскими и поворачиваются так, что остаются нормальными к изогнутой средней поверхности пластинки. Тогда напряженность тонкого слоя этого элемента, обозначенного заштрихованными гранями и отстоящего на расстоянии  $z$  от средней плоскости, можно получить из простого геометрического рассмотрения, и она представится следующими ур-иями <sup>2)</sup>:



Фиг. 140.

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{z}{R_1} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ e_{yy} &= \frac{z}{R_2} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ e_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad [a]$$

где  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  — относительные удлинения по направлениям осей  $X$  и  $Y$ ,  $e_{xy}$  — деформация перерезывания в плоскости  $XU$ ,  $w$  — прогиб пластинки,  $\frac{1}{R_1}$ ,  $\frac{1}{R_2}$  — кривизна в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ ,  $h$  — толщина пластинки.

Соответствующие напряжения получим тогда из известных ур-ий:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{E}{1 + \sigma^2} (e_{xx} + \sigma e_{yy}) = -\frac{Ez}{1 - \sigma^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ p_y &= \frac{E}{1 - \sigma^2} (e_{yy} + \sigma e_{xx}) = -\frac{Ez}{1 - \sigma^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ p_t &= G e_{xy} = -\frac{Ez}{(1 + \sigma)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad [b]$$

где  $\sigma$  обозначает коэффициент Пуассона.

<sup>1)</sup> Прогибы принимаются малыми сравнительно с толщиной пластинки.

<sup>2)</sup> Допущено, что средняя плоскость не испытывает напряжения.

Потенциальная энергия, накопленная в заштрихованном слое элемента при деформации, будет

$$dV = \left( \frac{e_{xx} p_x}{2} + \frac{e_{yy} p_y}{2} + \frac{e_{xy} p_t}{2} \right) dx dy dz,$$

или, пользуясь ур-иями [a] и [b], получим

$$dV = \frac{Ez^2}{2(1-\sigma^2)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz, \quad [c]$$

откуда помощью интегрирования получим потенциальную энергию изгиба пластинки:

$$V = \int \int \int dV = \frac{D}{2} \int \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad [199]$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  — жесткость на изгиб пластинки.

Кинетическая энергия колеблющейся пластинки будет:

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \int \int w'^2 dx dy, \quad [200]$$

где  $\gamma h/g$  — масса на единицу площади пластинки.

Из этих выражений для  $V$  и  $T$  можно получить дифференциальное ур-ие колебания пластинки.

*Колебание прямоугольной пластинки.* — В случае прямоугольной пластинки (фиг. 13б) с просто опертыми краями мы можем поступить так же, как в случае прямоугольной мембраны, и взять прогиб пластинки при колебании в виде двойного ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad [d]$$

Легко видеть, что каждый член этого ряда удовлетворяет условиям по краям, которые требуют, чтобы  $w$ ,  $\partial^2 w / \partial x^2$  и  $\partial^2 w / \partial y^2$  были равны нулю на контуре.

Подставляя [d] в ур-ие [199], получим следующее выражение для потенциальной энергии:

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} q_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad [201]$$

Кинетическая энергия будет:

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \frac{ab}{4} \sum \sum q_{mn}'^2. \quad [202]$$

Следует отметить, что выражение [201] и [202] содержат только квадраты количеств  $q_{mn}$  и соответствующих скоростей, из чего можно заключить, что эти количества являются нормальными координатами для рассматриваемого случая. Дифференциальное уравнение нормального колебания будет

$$\frac{\gamma h}{g} q_{mn}'' + \pi^4 D q_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$q_{mn} = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt,$$

где

$$p = \pi^2 \sqrt{\frac{gD}{\gamma h} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}. \quad [203]$$

Отсюда могут быть легко определены частоты низшего вида и высших видов колебания. Взяв, например, квадратную пластинку, получим для низшего вида колебания

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}. \quad [204]$$

При рассмотрении высших видов колебания и их узловых линий следует воспользоваться выводами, приведенными ранее для колебания прямоугольной мембраны. Также можно решить без какого-либо затруднения случай вынужденных колебаний прямоугольной пластинки с просто опертыми краями. Следует заметить, что случай колебания прямоугольной пластинки, у которой два противоположные конца оперты, тогда как другие два края свободны или защемлены, может быть также разрешен без больших математических затруднений<sup>1)</sup>.

Задачи колебаний прямоугольной пластинки, у которой все края свободны или защемлены, являются, однако, значительно более сложными. Для решения этих задач весьма полезным оказался способ Ритца<sup>2)</sup>. Пользуясь этим способом, мы примем

$$w = w_0 \cos pt, \quad [e]$$

<sup>1)</sup> См. *Voigt*, „Göttinger Nachrichten“, 1893, S. 225.

<sup>2)</sup> См. *W. Ritz*, „Annalen der Physik“, Bd 28, 1909, S. 737. См. также *Gesammelte Werke*, 1911, S. 265.

где  $w_0$  — функция от  $x$  и  $y$ , которая определяет вид колебания. Подставляя [e] в ур-ия [199] и [200], получим следующие выражения для максимума потенциальной и кинетической энергии:

$$V_{\max} = \frac{D}{2} \int \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy; \\ T_{\max} = \frac{\gamma h}{2g} p^2 \int \int w_0^2 dx dy,$$

откуда

$$p^2 = \frac{2g}{\gamma h} \frac{V_{\max}}{\int \int w_0^2 dx dy}. \quad [205]$$

Теперь возьмем функцию  $w_0$  в виде ряда:

$$w_0 = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \dots \quad [f]$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  — подходящие функции  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие условиям на контуре пластинки. Тогда остается только определить коэффициенты  $a_1, a_2, \dots$  таким образом, чтобы правый член ур-ия [205] был минимумом. Таким путем мы придем к системе ур-ий вида:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int \int \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\sigma) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{p^2 \gamma h}{gD} w_0^2 \right\} dx dy = 0, \quad [206]$$

которые будут линейны относительно постоянных  $a_1, a_2, \dots$ , и приравнивая нулю определитель этих ур-ий, можем приближенно вычислить частоты различных видов колебания.

Ритц применил этот способ к изучению колебания квадратной пластинки со свободными краями<sup>1)</sup>. Ряд [f] был взят для этого случая в виде

$$w_0 = \sum \sum a_{mn} u_m(x) v_n(y), \quad [f']$$

где  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  являются нормальными функциями колебания призматического стержня со свободными концами (см. стр. 232). Частоты низших и высших видов колебания будут определяться ур-ием

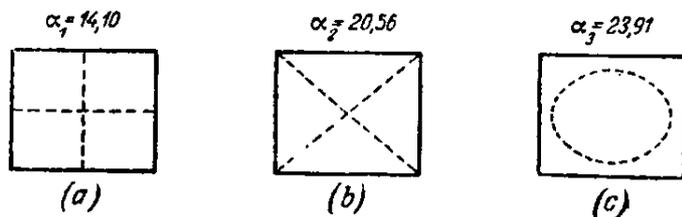
$$p = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad [207]$$

<sup>1)</sup> См. упомянутые на стр. 308 его труды.

где  $\alpha$  — постоянная, зависящая от вида колебания. Для трех низших видов значения этой постоянной таковы:

$$\alpha_1 = 14,10, \quad \alpha_2 = 20,56, \quad \alpha_3 = 23,91.$$

Соответствующие виды колебания представлены их узловыми линиями на фиг. 141. Детальное изучение узловых линий для



Фиг. 141.

этого случая и сравнение с опытными данными дано в вышеупомянутой статье Ритца.

Из ур-ия [207] можно вывести некоторые общие заключения, которые справедливы также и для других случаев колебания пластинок, а именно:

а) период колебания любого собственного вида изменяется пропорционально квадрату линейных измерений, если только толщина остается той же;

б) если все измерения пластинки, включая толщину, увеличить в одной и той же пропорции, то период увеличивается пропорционально увеличению линейных измерений;

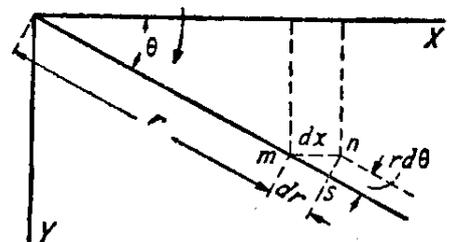
в) период изменяется обратно квадратному корню из модуля упругости и прямо пропорционально квадратному корню из плотности материала.

а) период колебания любого собственного вида изменяется пропорционально квадрату линейных измерений, если только толщина остается той же;

б) если все измерения пластинки, включая толщину, увеличить в одной и той же пропорции, то период увеличивается пропорционально увеличению линейных измерений;

в) период изменяется обратно квадратному корню из модуля упругости и прямо пропорционально квадратному корню из плотности материала.

**Колебания круговой пластинки.** — Задача колебания круговой пластинки была решена Кирхгофом<sup>1)</sup>, который вычислил также частоты некоторых видов колебания для пластинки со свободным контуром. Точное решение этой задачи требует применения функций Бесселя. В дальнейшем дается приближенное решение при помощи способа Рейлея-Ритца, который обычно дает для низшего вида точность, достаточную для практических применений. При применении этого способа полезно будет преобразовать выражения [199] и [200] для потенциальной и кинетической энергии в полярных координатах. Взяв координаты, как показано на фиг. 142, мы видим из элементарного треугольника  $mns$ , что, придав координате  $x$  небольшое приращение  $dx$ , получим:



Фиг. 142.

$$dr = dx \cos \theta; \quad d\theta = -\frac{dx \sin \theta}{r}.$$

<sup>1)</sup> См. G. Kirchhoff, „Journal f. Math.“ (Crelle), Bd 40, 1850, или Gesammelte Abhandlungen von G. Kirchhoff, Leipzig, 1882, S. 237, или Vorlesungen über math. Physik; Mechanik, Vorlesung 30.

Тогда, рассматривая прогиб  $w$ , как функцию от  $r$  и  $\theta$ , получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}.$$

Таким же образом найдем:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

Повторяя дифференцирование, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad [g]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \\ &\quad - 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad [h]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \\ &\quad - \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad [k]$$

откуда найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Подставляя в ур-ие [199] и взяв начало координат в центре пластинки, получим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\sigma) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r d\theta dr, \end{aligned} \quad [208]$$

где  $a$  обозначает радиус пластинки.

Когда прогиб пластинки симметричен относительно центра,  $w$  будет функцией только  $r$ , и ур-ие [208] станет таким:

$$V = \pi D \int_0^a \left\{ \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 - 2(1-\sigma) \frac{d^2 w}{dr^2} \cdot \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right\} r dr. \quad [209]$$

В случае пластины, заземленной по краю, интеграл

$$\int \int \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\}^2 \right] r d\theta dr$$

пропадает, и мы получим из ур-ия [208]:

$$V = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 r d\theta dr. \quad [210]$$

Если прогиб пластины симметричен относительно центра, имеем:

$$V = \pi D \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 r dr. \quad [211]$$

Выражение для кинетической энергии в полярных координатах будет:

$$T = \frac{\gamma h}{2g} \int_0^{2\pi} \int_0^a \dot{w}'^2 r d\theta dr, \quad [212]$$

а в случае симметричности прогиба

$$T = \frac{\pi \gamma h}{g} \int_0^a \dot{w}'^2 r dr. \quad [213]$$

Пользуясь этими выражениями для потенциальной и кинетической энергии, можем определить частоты собственных видов колебания круговой пластинки для различных частных случаев.

*Круговая пластинка, заземленная по контуру.* — Задача круговой пластинки, закрепленной по краям, представляет практический интерес в связи с применением в телефонных приемниках и других приборах. Пользуясь способом Рейлея-Ритца, примем

$$w = w_0 \cos pt, \quad [e]$$

где  $w_0$  — функция от  $r$  и  $\theta$ .

В случае низшего вида колебания, форма колеблющейся пластинки симметрична относительно центра пластины, и  $w_0$  будет функцией одного только  $r$ . Беря  $w_0$  в виде следующего ряда:

$$w_0 = a_1 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + a_2 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^3 + \dots, \quad [m]$$

мы удовлетворим условию симметрии. Условия по контуру также будут удовлетворены, так как каждый член ряда  $[m]$ , вместе с его первой производной, обращается в нуль, когда  $r = a$ .

Дифференциальное ур-ие [206] в рассматриваемом случае получает вид:

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^a \left\{ \left( \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \right)^2 - \frac{p^2 \gamma h}{gD} w_0^2 \right\} r dr = 0. \quad [214]$$

Взяв только один член ряда [m] и подставив его в ур-ие [214], получим:

$$\frac{96}{9a^2} - \frac{p^2 \gamma h}{gD} \frac{a^2}{10} = 0,$$

откуда

$$p = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}. \quad [215]$$

Чтобы получить более точное приближение, возьмем два первых члена ряда [m], тогда

$$\int_0^a \left( \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \right)^2 r dr = \frac{96}{9a^2} \left( a_1^2 + \frac{3}{2} a_1 a_2 + \frac{9}{10} a_2^2 \right),$$

$$\int_0^a w_0^2 r dr = \frac{a^2}{10} \left( a_1^2 + \frac{5}{3} a_1 a_2 + \frac{5}{7} a_2^2 \right).$$

Ур-ия [214] получают вид:

$$\begin{aligned} a_1 \left( \frac{192}{9} - \frac{x}{5} \right) + a_2 \left( \frac{144}{9} - \frac{x}{6} \right) &= 0, \\ a_1 \left( \frac{144}{9} - \frac{x}{6} \right) + a_2 \left( \frac{96}{5} - \frac{x}{7} \right) &= 0, \end{aligned} \quad [n]$$

где

$$x = a^4 p^2 \frac{\gamma h}{gD}. \quad [o]$$

Приравнивая нулю определитель ур-ий [n], получим:

$$x^2 - \frac{204 \cdot 48}{5} x + 768 \cdot 36 \cdot 7 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 104,3; \quad x_2 = 1854.$$

Подставив в [o], получим:

$$p_1 = \frac{10,21}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}; \quad p_2 = \frac{43,04}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad [216]$$

$p_1$  определяет второе приближение частоты низшего вида колебания пластины, а  $p_2$  дает грубое приближение частоты второго вида колебания, при которой колеблющаяся пластинка имеет одну

узловую окружность. Пользуясь тем же способом, можно также исследовать виды колебания, имеющего узловые диаметры.

Во всех случаях частота колебания будет определяться ур-ием:

$$p = \frac{\alpha}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad [217]$$

постоянная  $\alpha$  которого для данного числа  $s$  узловых окружностей и для данного числа  $n$  узловых диаметров дается в ниже-следующей таблице.

$s$	$n=0$	$n=1$	$n=2$
1	10,21	21,22	34,84
2	39,78	—	—
3	88,90	—	—

В случае тонких пластинок масса воздуха или жидкости, в которых колеблется пластинка, может значительно повлиять на частоту. Чтобы учесть это обстоятельство для случая низшего вида колебания, выше полученное ур-ие [217] нужно заменить следующим ур-ием<sup>1)</sup>:

$$p_1 = \frac{10,21}{a^2 \sqrt{1 + \beta}} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}, \quad [218]$$

где  $\beta = 0,6689 \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{a}{h}$  и  $(\gamma_1/\gamma)$  — отношение плотности жидкости к плотности материала пластинки.

Взяв, например, стальную пластинку диаметром 168 мм и толщиной 3 мм, колеблющуюся в воде, получим:

$$\beta = 0,6689 \frac{1}{7,8} \cdot 28 = 2,40; \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \beta}} = 0,542.$$

Частота низшего вида колебания уменьшится до 0,542 своей первоначальной величины.

*Другие виды условий на контуре.* — Во всех случаях частоты колеблющейся круговой пластинки можно определить из ур-ия [217]. Числовые значения множителя  $\alpha$  даны в ниже-следующей таблице.

<sup>1)</sup> Эта задача рассмотрена Н. Lamb'ом „Proc. Roy. Soc. London“, Vol. 98, 1921, p. 205.

Для свободной круговой пластинки с  $n$  узловыми диаметрами и  $s$  узловыми окружностями  $\alpha$  имеет следующие значения<sup>1)</sup>:

$s$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	5,251	12,23
1	9,076	20,52	35,24	52,91
2	38,52	59,86	—	—

Для круговой пластинки, закрепленной в центре и имеющей  $s$  узловых окружностей,  $\alpha$  имеет следующие значения<sup>2)</sup>:

$s=$	0	1	2	3
$\alpha=$	3,75	20,91	60,68	119,7

Частоты колебания, имеющего узловые диаметры, будут те же, что в случае свободной пластинки.

*Влияние натяжения по средней поверхности пластинки.* — В предыдущей теории было допущено, что прогиб пластинки мал по сравнению с ее толщиной. Если колеблющаяся пластинка находится под значительным статическим давлением, так что прогиб вызванный этим давлением, не является малым сравнительно с толщиной пластинки, следует, при определении частоты колебания, принять во внимание натяжение средней поверхности пластинки. Вследствие сопротивления пластинки такому натяжению жесткость пластинки и частота колебания увеличиваются с увеличением давления, действующего на пластинку<sup>3)</sup>. Чтобы показать, как натяжение средней поверхности может повлиять на частоту, рассмотрим снова случай круговой пластинки, зашпеленной по контуру, и допустим, что прогиб пластинки при равномерно распределенном давлении представляется ур-ием<sup>4)</sup>:

$$\omega_0 = a_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2. \quad [m']$$

Кроме перемещений  $\omega_0$  под прямым углом к пластинке, точки средней плоскости пластинки будут испытывать радиальные пере-

<sup>1)</sup> Пуассоново отношение взято равным одной трети.

<sup>2)</sup> См. статью R. V. Southwell'я, „Proc. Roy. Soc.“, A, Vol. 101, 1922, p. 133, при вычислениях  $\sigma$  взято равным 0,3.

<sup>3)</sup> Такое увеличение частоты было установлено опытным путем. См. статью J. H. Powell'я и J. H. T. Roberts'a, „Proc. Phys. Soc. London“, Vol. 35, 1923, p. 170.

<sup>4)</sup> Это ур-ие представляет прогибы, когда натяжением средней поверхности пренебрегают. Его также можно применить для приближенного вычисления влияния натяжения.

мещения  $u$ , которые равны нулю в центре и на заземленном контуре пластинки. Относительное удлинение средней поверхности в радиальном направлении, вызванное перемещениями  $w_0$  и  $u$ , будет:

$$e_r = \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dr} \right)^2 + \frac{du}{dr}. \quad [p]$$

Удлинение по направлению к окружности будет:

$$e_t = \frac{u}{r}. \quad [r]$$

Для приближенного решения задачи примем, что радиальные перемещения представляются следующим рядом:

$$u = r(a - r)(c_1 + c_2 r + c_3 r^2 + \dots), \quad [s]$$

каждый член которого удовлетворяет условиям на контуре.

Взяв только первые два члена ряда [s] и подставив [s] и [m'] в ур-ия [p] и [r], получим напряжение в средней поверхности, и энергия, соответствующая натяжению средней поверхности, может быть теперь представлена в таком виде:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi E h}{1 - \sigma^2} \int_0^a (e_r^2 + e_t^2 + 2\sigma e_r e_t) r dr = \\ &= \frac{\pi E h a^2}{1 - \sigma^2} \left( 0,250 c_1^2 a^2 + 0,1167 c_2^2 a^4 + 0,300 c_1 c_2 a^3 - 0,00846 c_1 a \frac{8a_1^2}{a^2} + \right. \\ &\quad \left. + 0,00682 c_2 a^2 \frac{8a_1^2}{a^2} + 0,00477 \frac{64a_1^4}{a^4} \right). \quad [t] \end{aligned}$$

Определив постоянные  $c_1$  и  $c_2$  так, чтобы  $V_1$  было минимумом, мы получим из ур-ий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial c_1} &= 0, & \frac{\partial V_1}{\partial c_2} &= 0, \\ c_1 &= 1,185 \frac{a_1^2}{a^3}; & c_2 &= -1,75 \frac{a_1^2}{a^4}. \end{aligned}$$

Подставляя в ур-ие [t], имеем

$$V_1 = 2,59 \pi D \frac{a_1^4}{a^2 h^2}.$$

Прибавляя энергию натяжения к энергии изгиба (ур-ие [211]), получим

$$V = \frac{32}{3} \pi D \frac{a_1^3}{a^3} + 2,59 \pi D \frac{a_1^4}{a^2 h^2} = \frac{32}{3} \pi D \frac{a_1^3}{a^3} \left( 1 + 0,244 \frac{a_1^2}{h^2} \right). \quad [u]$$

Второй член в скобках представляет поправку, вызванную натяжением средней поверхности пластинки. Легко видеть, что эта

поправка мала, и ею можно пренебречь, только когда прогиб  $a_1$  в центре пластинки мал сравнительно с толщиной  $h$ . Статический прогиб пластинки под действием равномерно распределенного давления  $q$  можно теперь найти из ур-ия возможных перемещений:

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} \delta a_1 = 2\pi q \delta a_1 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr = \delta a_1 \frac{\pi q a^3}{3},$$

откуда

$$a_1 = \frac{q a^4}{64D} \cdot \frac{1}{1 + 0,448 \frac{a_1^2}{h^2}}. \quad [219]$$

Последний множитель правой части представляет влияние натяжения средней поверхности. Из-за этого влияния прогиб  $a_1$  уже не является пропорциональным  $q$ , и жесткость пластинки увеличивается с прогибом. Взяв, например,  $a_1 = \frac{1}{2}h$ , получим из ур-ия [219]

$$a_1 = 0,89 \frac{q a^4}{64D}.$$

Прогиб на 11% меньше, чем получаемый, когда мы пренебрегаем натяжением средней поверхности.

Из выражения [и] потенциальной энергии, которое содержит не только квадрат, но также четвертую степень прогиба  $a_1$ , можно заключить сразу, что колебание пластинки около его плоского положения не будет *изохронным*, и частоты будут возрастать с амплитудой колебания. Рассмотрим теперь небольшие колебания пластинки около вогнутого положения, представляемого ур-ием [m']. Предполагается, что изгиб вызван некоторым постоянным равномерно распределенным статическим давлением  $q$ . Если  $\Delta$  обозначает амплитуду этого колебания, то увеличение потенциальной энергии деформации вследствие добавочного прогиба пластинки получится из ур-ия [и] и равно<sup>1)</sup>:

$$\delta V = \frac{32\pi D}{3} \frac{1}{a^2} \left( 2a_1 \Delta + \Delta^2 + \frac{0,244}{h^2} (4a_1^3 \Delta + 6a_1^2 \Delta^2) \right).$$

Работа, производимая постоянным давлением  $q$  при этом увеличении прогиба, будет:

$$\delta W = \frac{\pi a^2 q \Delta}{3} = \frac{\pi a^2 \Delta}{3} \cdot \frac{64a_1 D \left( 1 + 0,488 \frac{a_1^2}{h^2} \right)}{a^4}.$$

<sup>1)</sup> Членами с  $\Delta^3$  и  $\Delta^4$  в этом выражении пренебрегаем.

Полное изменение потенциальной энергии системы будет:

$$\delta V - \delta W = \frac{32 \pi D \Delta^2}{3} \frac{1}{a^2} \left( 1 + \frac{1,464 a_1^2}{h^2} \right).$$

Приравнивая это максимуму кинетической энергии

$$T_{\max} = \frac{\pi \Delta^2 p^2 \gamma h}{g} \int_0^a \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^4 r dr = \frac{\pi \Delta^2 a^2 \gamma h}{10g} p^2,$$

получим

$$p = \frac{10,33}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}} \sqrt{1 + 1,464 \frac{a_1^2}{h^2}}. \quad (220)$$

Сравнивая этот результат с ур-ием [215], можем заключить, что последний множитель правой части ур-ия [220] представляет поправку, вызванную натяжением средней поверхности пластинки.

Следует заметить, что в вышеизложенной теории было использовано для прогиба пластинки ур-ие [m'], и влиянием натяжения средней поверхности пластинки на форму изогнутой поверхности мы пренебрегли. Вот почему ур-ие [220] будет достаточно точно только в том случае, если прогибы не будут велики, т. е. если  $a_1 \leq h$ . В противном случае следует учесть влияние натяжения средней поверхности на форму изогнутой поверхности.

**57. Колебание в дисках турбин.** — *Общие замечания.* — Теперь с полной ясностью установлено, что поломки, которые происходят в дисках турбин и которые не могут быть объяснены дефектами материала или чрезмерными напряжениями, вызванными центробежными силами, могут быть отнесены на счет колебаний изгиба этих дисков. В этом отношении можно отметить, что опыты непосредственно показали<sup>1)</sup>, что такие колебания при определенных скоростях турбины становятся очень заметными и вызывают значительные дополнительные напряжения изгиба, которые могут сказаться на усталости металла и на постепенном образовании трещин, которые обычно начинаются по окружности отверстий для подачи пара и у других мест нарушения сплошности тела диска турбины, где существует концентрация напряжений.

Различные причины могут вызвать эти колебания изгиба в дисках турбин, но наиболее существенной является причина, вытекающая от непостоянства давления пара. Местное давление, действующее на обод вращающегося диска, достаточно при опре-

<sup>1)</sup> См. статью *Wilfred Campbell*'я, „Trans. Am. Soc. Mech. Eng.“, Vol. 46, 1924, p. 31, а также статью *J. von Freudenreich*'а, „Engineering“, Vol. 119, 1925, 2 p.

деленных скоростях, чтобы вызвать боковые колебания диска, и опыты показывают, что приложение местной силы только в несколько кг, такое, например, как вызываемое небольшим магнетом постоянного тока сбоку вращающегося диска турбины, заставляет последний сильно реагировать при целом ряде критических скоростей.

Допустим теперь, что существует известная неправильность в насадках, которая дает непостоянство давления пара, и предположим, что диск турбины вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в поле такого давления. Тогда для определенной точки обода диска давление будет изменяться вместе с углом вращения диска и это может быть представлено периодической функцией, период которой равен промежутку времени одного оборота диска. В более общем случае такая функция может быть представлена тригонометрическим рядом

$$q = a_0 + a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots$$

Взяв только один член ряда, например  $a_1 \sin \omega t$ , получим периодическую возмущающую силу, которая может вызвать сильное боковое колебание диска, если частота  $\omega/2\pi$  силы совпадает с одной из частот  $p/2\pi$  диска. Из этого можно установить, что определение собственных частот диска может иметь большое практическое значение.

Вращающийся диск, подобно круговой пластинке, может иметь различные виды колебаний, которые можно подразделить на два класса:

а) колебания симметричные относительно центра, имеющие узловые линии в виде концентрических кругов;

б) несимметричные, имеющие узловыми линиями диаметры.

Опыты показывают, что симметричный вид колебания случается очень редко и повреждение диска нельзя приписать этому роду колебаний.

При рассмотрении несимметричных колебаний можно допустить, что прогиб диска имеет следующий вид

$$w = w_0 \sin n\theta \cos pt, \quad [a]$$

в котором, как раньше,  $w_0$  — функция только радиального расстояния  $r$ ,  $\theta$  определяет угловое положение рассматриваемой точки и  $n$  представляет число узловых диаметров.

• Прогиб можно взять также в виде

$$w = w_0 \cos n\theta \sin pt. \quad [a']$$

Соединяя  $[a]$  и  $[a']$ , получим ур-ие:

$$w = w_0 (\sin n\theta \cos pt \pm \cos n\theta \sin pt) = w_0 \sin (n\theta \pm pt),$$

которое представляет перемещающиеся волны. Угловая скорость этих волн, перемещающихся вокруг по диску, может быть найдена из условия:

$$n\theta \pm pt = \text{const},$$

откуда

$$\theta = \pm \frac{p}{n} t + \text{const}.$$

Мы получаем две скорости —  $p/n$  и  $+p/n$ , которые являются скоростями перемещения соответственно назад и вперед волн. Опыты *Campbell'*я <sup>1)</sup> доказали существование этих двух направлений волн во вращающемся диске и показали также, что амплитуды волн, движущихся назад, обычно больше, чем амплитуды волн, движущихся вперед. Волны обратного движения становятся особенно заметными в условиях резонанса, когда обратная скорость этих волн в диске совпадает совершенно с угловой скоростью вращения вперед диска, так что волны становятся *устойчивыми в пространстве*. Опыты показывают, что этот вид колебания является в большинстве случаев причиной поломок диска.

*Определение частот колебаний диска.* — При определении частот различных видов колебания дисков турбины очень полезен способ Рейлея-Ритца <sup>2)</sup>. При применении этого способа допустим, что прогиб диска имеет вид

$$w = w_0 \sin n\theta \cos pt. \quad [a'']$$

В частном случае колебания, симметричного относительно центра, прогиб будет

$$w = w_0 \cos pt. \quad [b']$$

Рассматривая в дальнейшем этот частный случай, получим максимум потенциальной энергии деформации из ур-ия [209]:

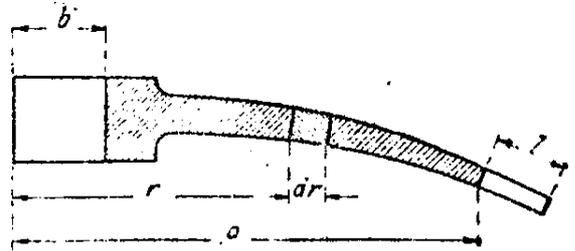
$$V_{\max} = \pi \int_b^a D \left\{ \left( \frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \right)^2 - 2(1 - \sigma) \frac{d^2 w_0}{dr^2} \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} \right\} r dr, \quad [c]$$

где  $a, b$  — наружный и внутренний радиусы диска;  $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$  — жесткость на изгиб диска, которая в этом случае будет переменной вследствие переменности толщины  $h$  диска.

<sup>1)</sup> См. упомянутую выше на стр. 320 статью.

<sup>2)</sup> Колебание диска турбины помощью этого метода было исследовано *A. Stodola*, „Schweiz. Bauz.“, Bd 63, 1914, S. 112.

При рассмотрении колебания вращающегося диска нужно принять во внимание не только энергию деформации, но также энергию, соответствующую работе, производимой при прогибе центробежными силами. Легко видеть, что центробежные силы сопротивляются любому прогибу диска, и это сказывается на увеличении частоты его собственного колебания. При исчислении работы, производимой центробежными силами, возьмем элемент, вырезанный из диска двумя цилиндрическими поверхностями радиуса  $r$  и  $r + dr$  (фиг. 143). Радиальное перемещение этого элемента по направлению к центру, вызванное прогибом, будет



Фиг. 143.

$$\frac{1}{2} \int_b^r \left( \frac{dw_0}{dr} \right)^2 dr.$$

Масса элемента:

$$\frac{2\pi r h \gamma}{g} dr,$$

и работа, производимая при прогибе центробежными силами, действующими на этот элемент, будет:

$$-\frac{2\pi r^2 \omega^2 h \gamma}{g} dr \cdot \frac{1}{2} \int_b^r \left( \frac{dw_0}{dr} \right)^2 dr. \quad [d]$$

Энергия, соответствующая работе центробежных сил, получится суммированием таких элементов ее как [d] в следующем виде:

$$V_{1\max} = \int_b^a \frac{\pi r^2 \omega^2 h \gamma}{g} dr \int_b^r \left( \frac{dw_0}{dr} \right)^2 dr. \quad [e]$$

Максимум кинетической энергии определяется ур-ием:

$$T = \int_b^a \frac{2\pi r \gamma h}{2g} w'^2 dr.$$

Подставляя выражение [b] вместо  $w$ , получим:

$$T_{\max} = \frac{\pi \gamma p^2}{g} \int_b^a h w_0'^2 r dr. \quad [f]$$

Теперь из ур-ия

$$V_{\max} + V_{1\max} = T_{\max},$$

выводим

$$p^2 = \frac{V_{\max} + V_{1\max}}{g \int_b^{a+l} h \omega_0^2 r dr} \quad [g]$$

Чтобы получить частоту, упругую линию  $\omega_0$  следует выбрать так, чтобы выражение  $[g]$  становилось минимумом. Это можем найти графически, задавшись для  $\omega_0$  подходящей кривой, по которой возьмем значения  $\omega_0$ ,  $d\omega_0/dr$  и  $d^2\omega_0/dr^2$  для ряда равноотстоящих точек, и тогда сможем вычислить выражения  $[c]$ ,  $[e]$  и  $[f]$ . Постепенным изменением формы кривой  $\omega_0$  можно получить <sup>1)</sup> из ур-ия  $[g]$  удовлетворительное приближенное значение для низшей частоты.

Чтобы учесть влияние лопаток на частоту собственного колебания, интегрирование в выражениях  $[e]$  и  $[f]$  для работы, производимой центробежными силами, и для кинетической энергии следует распространить от  $b$  до  $a+l$ , где  $l$  обозначает длину лопатки. При этом вычислении можно допустить, что лопатки при колебании диска остаются плоскими, так что не потребуется никакого дополнения к выражению  $[c]$  для потенциальной энергии.

При аналитическом определении низшей частоты колеблющегося диска возьмем  $\omega_0$  в виде такого ряда:

$$\omega_0 = a_1 (r-b)^2 + a_2 (r-b)^3 + a_3 (r-b)^4 + \dots,$$

который удовлетворяет условиям на закрепленной внутренней границе диска, где  $\omega_0$  и  $d\omega_0/dr$  становятся равными нулю. Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$  следует теперь выбрать так, чтобы выражение  $[g]$  стало минимумом. Поступая, как изложено в предыдущем п<sup>о</sup> (см. стр. 312), можем получить систему ур-ий, аналогичных ур-иям [214] и линейных относительно  $a_1, a_2, a_3 \dots$ . Приравняв нулю определитель этих ур-ий, получим ур-ие частоты.

Для того вида колебания, который имеет узловыми линиями диаметры, следует воспользоваться для прогиба выражением  $[a'']$  вместо  $[b]$ . Потенциальная энергия найдется из ур-ия [208]: необходимо только принять во внимание, что в случае дисков турбины толщина и жесткость на изгиб  $D$  изменяются вместе с радиальным расстоянием  $r$ , так что  $D$  следует ввести под знак интеграла. Без всякого затруднения можно в этом случае устано-

<sup>1)</sup> Подобный графический способ был предложен *Стодолой*, см. его книгу, упомянутую на стр. 70. Его же применил также *E. Oehler*, „V. D. I.“, Bd 69 1925, S. 335, и получил хорошее согласование с опытными данными.

вить также выражения для  $V_1$  и  $T$  и, наконец, определить частоту из ур-ия [g] точно таким же образом, как было изложено выше для случая симметричного вида колебания <sup>1)</sup>.

Когда диск устойчив,  $V_1$  исчезает, и мы получим из ур-ия [g] выражение

$$p_1^2 = \frac{V_{\max}}{a} - \frac{\pi\gamma}{g} \int_b^a h\omega_0^2 r dr \quad [g']$$

которое устанавливает частоту колебания, вызванного только силами упругости.

Другой крайний случай получается, когда диск очень гибок и восстанавливающие силы при колебании вызываются всецело центробежными силами. Такие условия встречаются, например, когда опыты производятся с гибкими дисками, сделанными из резины. Частота будет в этом случае определяться ур-ием:

$$p_2^2 = \frac{V_{1\max}}{a} - \frac{\pi\gamma}{g} \int_b^a h\omega_0^2 r dr \quad [g'']$$

Теперь из ур-ия [g] имеем

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad [h]$$

Если частоты  $p_1$  и  $p_2$  каким-либо образом определены, суммарная частота колебания диска найдется из ур-ия [h]. Для случая дисков постоянной толщины и закрепленных в центре точное решение для  $p_1$  и  $p_2$  было получено R. V. Southwell'ом <sup>2)</sup>.

Он дает для  $p_1^2$  следующее ур-ие:

$$p_1^2 = \frac{\alpha Dg}{a^4 \gamma h} \quad [k]$$

Значения постоянной  $\alpha$  для данного числа  $n$  узловых диаметров и для данного числа  $s$  узловых окружностей приведены в ниже-следующей таблице <sup>3)</sup>:

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$s=0$	14,1	0	29,0	156
$s=1$	438	422	1210	2840

<sup>1)</sup> Формулы для этого определения детально разработаны Стодолой, *idem*.

<sup>2)</sup> См. выноску на стр. 315.

<sup>3)</sup> Все прочие обозначения те же самые, что для круговых пластинок (см. стр. 310). При этих вычислениях Пуассоново отношение взято равным 0,3.

Ур-ие для определения  $p_2^2$  —

$$p_2^2 = \lambda \omega^2, \quad [I]$$

где  $\omega$  угловая скорость, а  $\lambda$  постоянная, значения которой приведены в нижеследующей таблице:

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$s=0$	0	1	2,35	4,05
$s=1$	3,3	5,95	8,95	12,3

По определении  $p_1^2$  и  $p_2^2$  из ур-ий [k] и [I] найдем частоту колебания вращающегося диска из ур-ия [h] <sup>1)</sup>.

В предыдущем изложении вопроса о колебании дисков не было принято во внимание влияние неравномерности нагревания диска. При работе турбин обод диска будет теплее, чем тело. Вследствие этого возникнут сжимающие напряжения в ободе и растягивающие напряжения в теле, которые могут значительно повлиять на частоты собственных колебаний. Опыты и вычисления <sup>2)</sup> показывают, что для колебаний при 0 или 1 узлом диаметре частота увеличивается, тогда как при большем числе узловых диаметров частота при таком неравномерном нагревании понижается.

<sup>1)</sup> Рассмотрение дифференциального ур-ия колебания в случае диска переменной толщины дано в статье *Fr. Dubois*, „Schweiz. Bauz.“, Bd 89, 1927, S. 149.

<sup>2)</sup> *Freudenreich*, статья, упомянутая выше на стр. 318.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е.

### П Р И Б О Р Ы Д Л Я И З М Е Р Е Н И Я К О Л Е Б А Н И Й.

1. Общие замечания. — До самого последнего времени разрешение практических задач колебаний и на заводах и на работах предоставлялось попечению людей, которые не обладали достаточными знаниями теории колебаний и базировали свои заключения на данных, полученных из опыта и основанных только на таких беспомощных чувствах как осязание, зрение и слух. С увеличением размеров и скоростей современных вращающихся частей машин задача устранения колебаний становится все более и более важной, и для вполне удачного решения этой задачи становится необходимым получение *количественных* данных о колебаниях таких машин и их фундаментов. Подобные количественные данные, однако, могут быть получены только при помощи *измерительных приборов*. Основные данные, подлежащие измерению при исследовании этой задачи, таковы: а) частота колебания, б) его амплитуда, в) тип волны, простой гармонический или сложный, и д) напряжения, вызываемые колебанием.

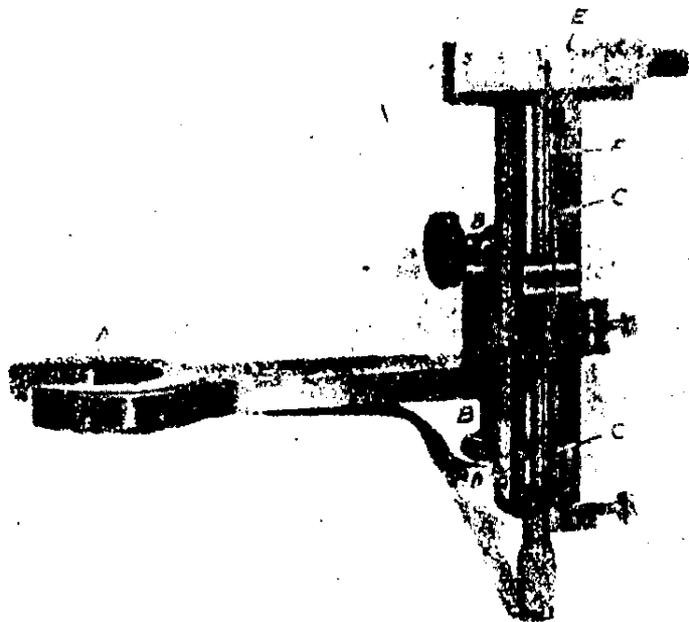
Современное производство дало много приборов для измерения вышеупомянутых величин, и в дальнейшем будут описаны некоторые из более существенных, которые имеют широкое применение<sup>1)</sup>.

2. Приборы для измерения частоты, — Знание частоты колебания очень существенно и часто дает ценные данные для изучения его первопричины. Описание очень простого измерителя частоты, *тахометра Фрама*, который давно уже применяется для турбогенераторов, было дано выше (см. стр. 21). *Виброметр Фуляртона* построен по тому же принципу. Он показан на фиг. 144. Этот прибор состоит из: захвата *A*, который может быть закреплен помощью прижимного винта; двух подвижных муфт *B*, расположенных под прямым углом одна к другой; основной рамы с укрепленными на ней: стерженьком *C*, шкалой длины *D* сбоку, шкалой амплитуды *E* наверху и длинным винтом *F*. Каретка захвата перемещается по основной раме, причем ее положение регулируется винтом. Стержень закреплен наглухо внизу рамы, а его свободная длина меняется перемещением подвижного зажима каретки. Прибор прикрепляется болтами к колеблющейся машине<sup>2)</sup>, и свободная

<sup>1)</sup> См. статью *J. Ormondroyd'a*, „Journal A. I. E. E.“, Vol. 45, 1926, p. 330. См. также статью *P. A. Borden'a*, „A. I. E. E. Trans.“, 1925, p. 238 и статью *H. Stending'a*, „V. D. I.“, Bd 71, 1927, S. 605, представляющую извлечение из очень полного исследования записывающих колебания приборов, сделанного для специальной комиссии по колебаниям, организованной V. D. I. (Обществом германских инженеров).

<sup>2)</sup> Вес машины должен быть значительно больше, чем вес прибора, чтобы исключить возможность влияния прибора на движение машины.

длина стерженька регулируется до тех пор, пока не будет получена наибольшая амплитуда движения конца стерженька. Эта амплитуда читается на поперечной шкале. Прибор тогда находится в резонансе с определяемой частотой. Эта частота может быть получена измерением свободной длины стерженька.



Фиг. 144.

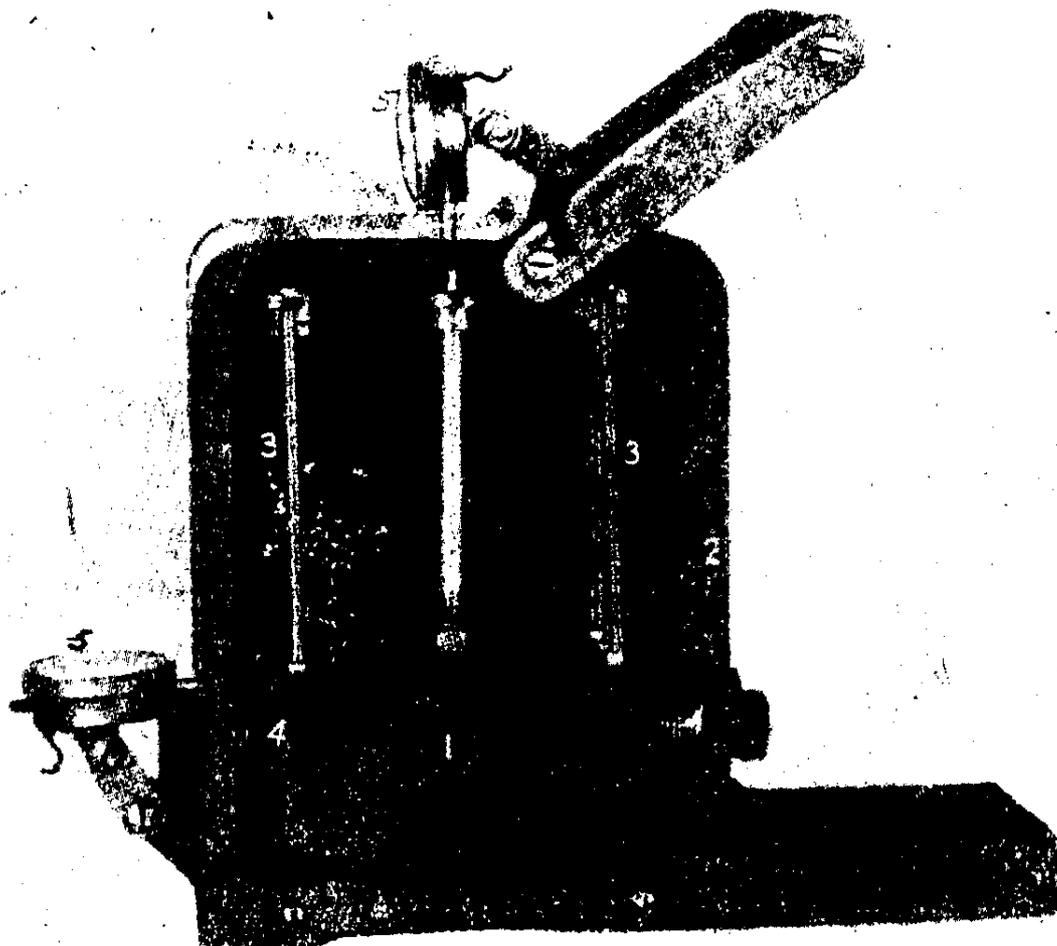
Этот прибор настолько высоко чувствителен (силы затухания чрезвычайно малы), что им можно пользоваться только для колебаний с почти абсолютно постоянной частотой. Самые малые изменения частоты вблизи точки резонанса будут давать очень большие отклонения амплитуды. Это ограничивает применение этого прибора турбогенераторами и другими

машинами, скорость вращения которых мало меняется.

**3. Измерение амплитуд.** — Во многих случаях важно измерить только амплитуду колебания. Это имеет место в большинстве случаев изучения вынужденных периодических колебаний определенной частоты, таких, которые встречаются в конструкциях или механизмах под действием вращающихся частей машин. Чаще всего, быть может, необходимость измерения амплитуд ощущается в силовых установках, где колебания сооружения, основания, фундамента или рамы вызываются известными нам импульсами, возникающими из-за неуравновешенности вращающихся частей.

Теория, на которой основаны сейсмические приборы, изложена выше (см. стр. 19). Построенный по этому принципу измеритель амплитуды Vibration Speciality Company в Филадельфии показан на фиг. 145. Фотография изображает прибор со снятой боковой крышкой. Это прибор типа сейсмографа. Стальной груз (1) подвешен на пружинах (3) к тяжелой раме (2); добавочные прижимные пружины (4) центрируют положение груза в горизонтальном направлении. Частоты собственных колебаний груза, как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях, около 200 в минуту. На раме находятся два круглых индикатора (5), стержни которых касаются груза. Прибор нужно приболтить к исследуемой конструкции. Частота колебаний, вызываемых механизмами, вращающимися с большой скоростью, обычно в несколько раз выше, чем собственная частота виброметра; и груз прибора можно рассматривать, как неподвижный в пространстве. Индикаторы отмечают вертикальные и горизонтальные составляющие относительного движения груза и рамы; стрелки индикаторов, движущиеся взад и вперед по циферблату, дают двойные амплитуды этих составляющих.

Этот прибор оказался очень полезным для силовых установок при изучении колебаний турбогенераторов. Хорошо известно, что по временам агрегат, вероятно вследствие неравномерного распределения температуры в роторе, начинает усиленно колебаться; происходит это при работе на полной скорости, причем колебания продолжаются долгое время. Это положение может быть исправлено замедлением и затем повышением вновь скорости машины. Иногда колебания могут возникнуть также при изменении нагрузки или вследствие падения вакуума, которое сопровождается



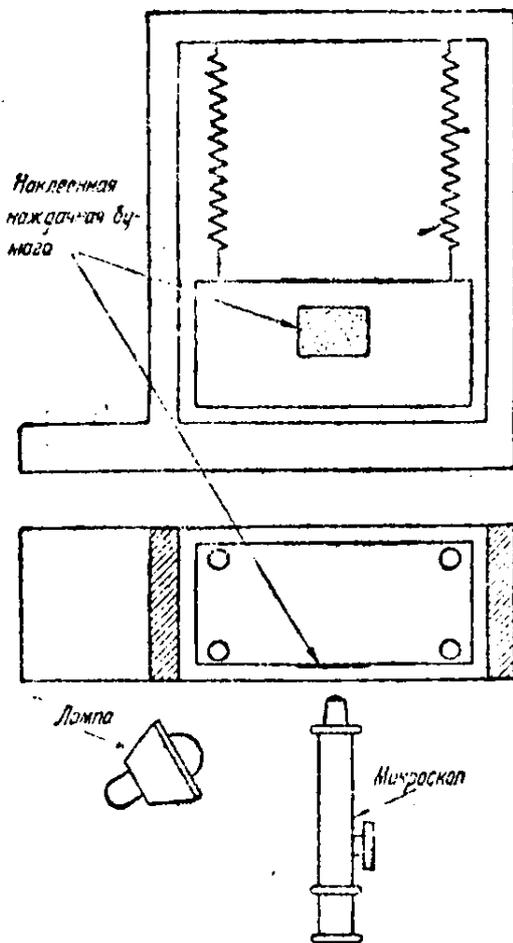
Фиг. 145.

изменением температуры частей турбины. Один или два виброметра, укрепленные на опорных подшипниках турбины, дадут полную картину подобных колебаний.

Прибор также очень полезен для уравнивания роторов при высокой скорости, особенно, когда необходимо очень точное уравнивание. В этой операции очень важно ограничить субъективный элемент. Когда установка находится уже в работе, уравнивание требует много времени; проходит иногда несколько дней между двумя последовательными наблюдениями, и числовая запись амплитуды дает точный способ сравнения состояния машины для различных положений уравнивающих грузов. Способ уравнивания при помощи измерения только амплитуд колебаний был описан выше (см. стр. 50).

Другое интересное применение этого прибора показано на фиг. 146. При открытой передней стенке прибора можно изучать действительный

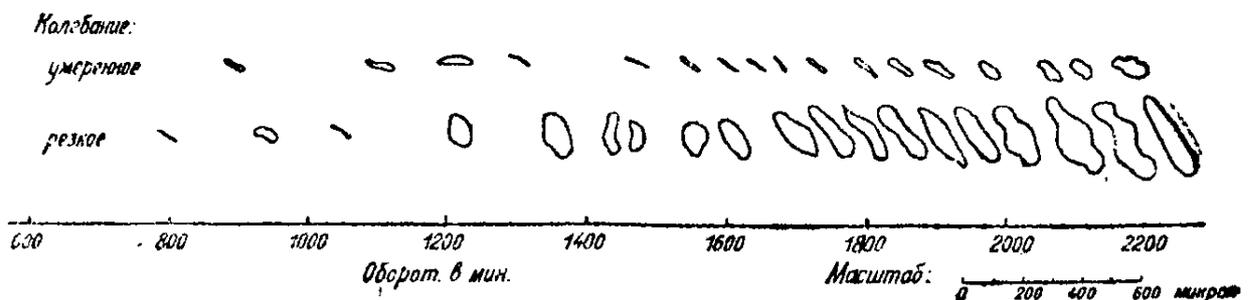
путь какой-либо точки колеблющейся опоры турбогенератора<sup>1)</sup>. Кусок наждачной бумаги средней крупности приклеен к стальному грузу прибора. Свет, падающий на наждачную бумагу, дает очень отчетливый блик на кристале карборунда. Микроскоп жестко укреплен на исследуемой опоре и фокус его установлен на наждачную бумагу. При неподвижном положении груза в пространстве можно ясно наблюдать относительное движение микроскопа и бумажки, световые блики описывают яркие контуры того же рода, как общеизвестные фигуры Лисажу. Типичные фигуры, полученные для опоры турбины при 1800 оборотах в минуту, показаны на фиг. 147.



Фиг. 146.

Сейсмические вибрографы. Сейсмические вибрографы употребляются там, где требуется полный анализ колебания. Главное применение этих приборов состоит в измерении колебаний оснований сооружений, колебаний фундаментов машин и колебаний мостов. Анализируя запись вибрографом простых гармонических колебаний, иногда можно найти источник вынуждающих сил, вызывающих эти сложные колебания.

Виброграф конструкции Cambridge Instrument Company<sup>2)</sup> показан на фиг. 148 и 149. Этот прибор предназначен для записи вертикальных колебаний. Если требуется наблюдать сильные колебания, прибор снабжается стальным рычагом длиной 914 мм (три фута), показанным на поперечном сечении пунктирными линиями (фиг. 149). Прибор состоит



Фиг. 147.

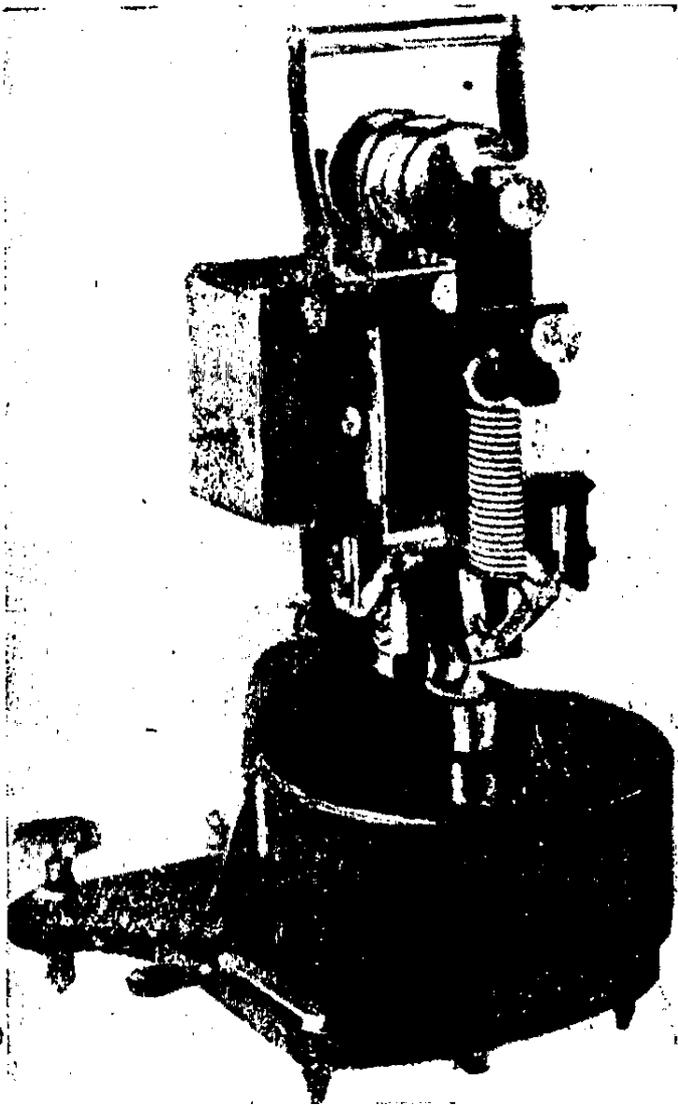
из несущей груз станины, снабженной установочными винтами с острыми концами, при помощи которых прибор, будучи помещен на конструкции или фундаменте, принимает участие в их колебаниях. Небольшие движе-

<sup>1)</sup> Этот способ был предложен *G. B. Karelitz*'ом, инженером для исследований Westinghouse Electric and Manufacturing Company.

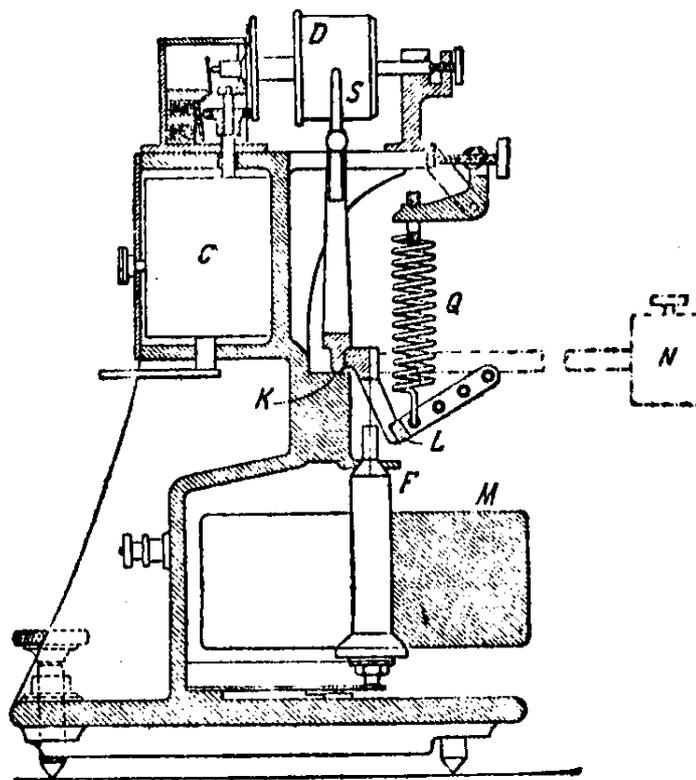
<sup>2)</sup> Более подробное описание этого прибора см. „Engineering“, Vol. 119, 1925, p. 271.

ния станины вызываемые колебаниями, записываются на движущейся целлулоидной ленте острием, укрепленным на конце плеча, соединенного с рычагом. Тело значительной массы  $M$  прикреплено металлической полосой к стальному рычагу, который укреплен на станине при посредстве острых призматических опор  $K$ . Стальной рычаг образует короткое плечо, действительная длина которого равна горизонтальному расстоянию между

полосой и остриями опор. Груз  $M$  уравнивается спиральной пружиной  $Q$ , подвешенной к верхней части станины. Нижний конец этой пружины закрепляется в одном из четырех отверстий в плече коленчатого рычага  $L$ , и



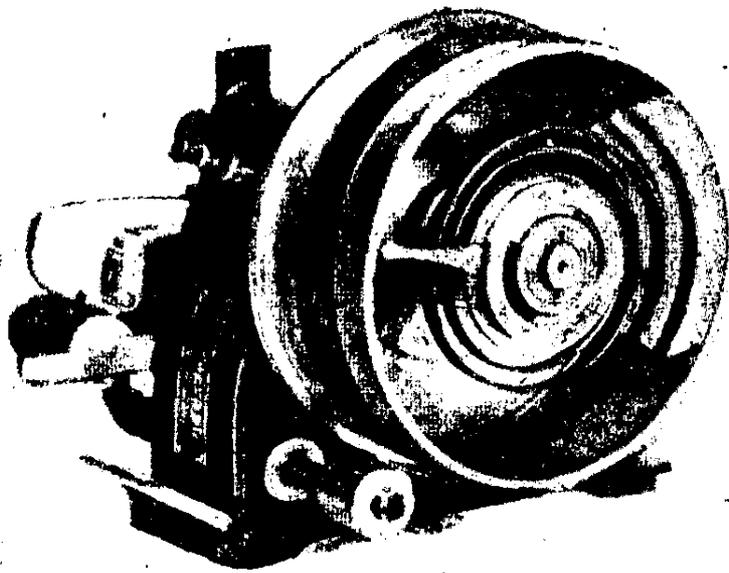
Фиг. 148.



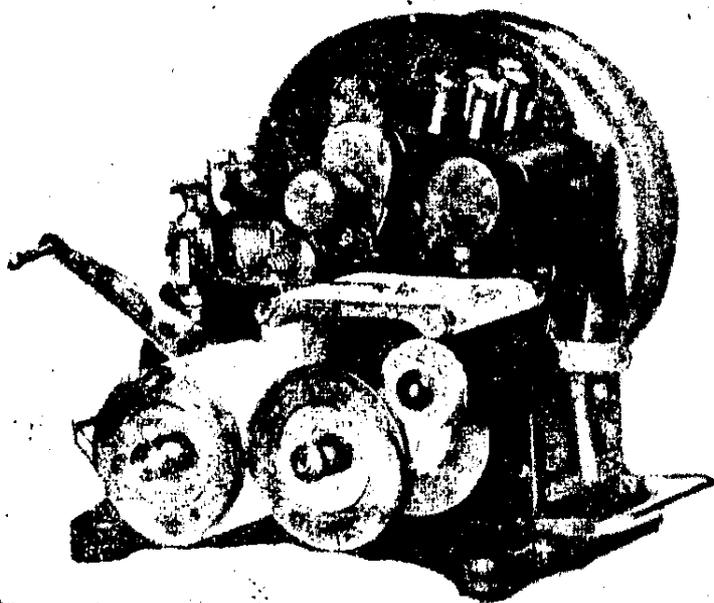
Фиг. 149.

выбором одного из этих отверстий можно изменить собственную частоту движущейся системы. Плечо, направленное вверх от опор стального рычага, упомянутое выше, снабжено на верхнем конце плоской пружиной  $S$ , несущей записывающее острие. Это острие движется по поверхности целлулоидной ленты (собственно по светлой части движущейся ленты для записывания), накрутой на раздвоенный барабан  $D$ , который приводится во вращение часовым механизмом  $C$ . Помощью установленного регулятора скорость полосы может изменяться примерно между четырьмя и двадцатью  $mm$  в секунду. В узкой щели между двумя частями раздвоенного барабана  $D$  находится второе острие, которое может перемещаться в бок помощью электромагнита, действующего посредством небольшого рычажного механизма внутри барабана. Этот электромагнит соединен с отдельным часовым механизмом, даю-

щим контакт каждую десятую часть секунды или через какой-нибудь другой промежуток времени. Таким образом на оборотной стороне ленты записывается нулевая линия с отметками промежутков времени одновременно с настоящей „вибροграммой“ на лицевой стороне.



Фиг. 150.



Фиг. 151.

Полученные записи можно читать при помощи микроскопа с точностью 0,01 мм, и, так как первоначальное увеличение записывающего приспособления—10, то можно четко измерять вертикальное перемещение основания с точностью до  $10^{-4}$  см<sup>1</sup>).

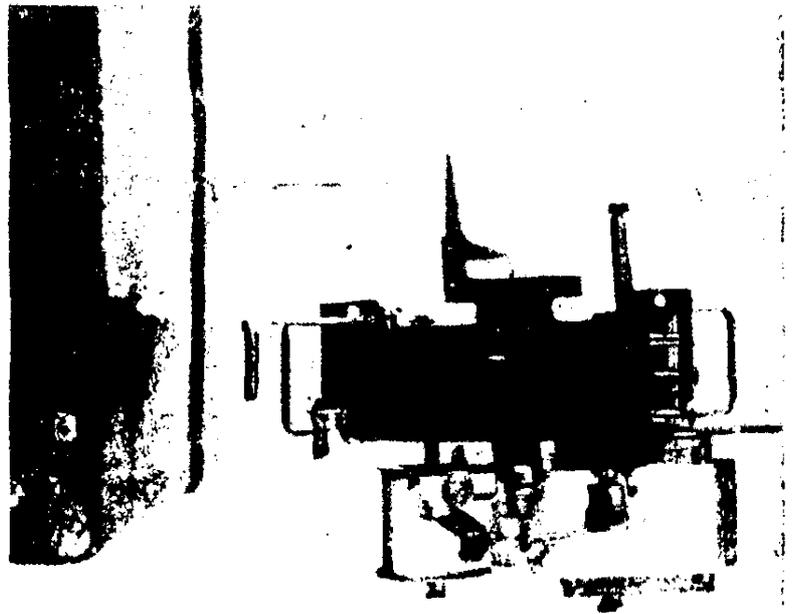
На фиг. 150 и 151 изображен виброграф Гейгера<sup>2</sup>). Весь прибор в целом, размером около  $200 \times 150 \times 150$  мм, укрепляется на колеблющейся машине или конструкции. Тяжелый груз, поддерживаемый внутри прибора на слабых пружинах, будет оставаться неподвижным в пространстве. Движение этого груза относительно рамы прибора передается небольшому перу, которое наносит запись этого движения на бумажную ленту шириною 60 мм. Часовой механизм, которому можно придавать различные скорости, двигает бумажную ленту и наворачивает ее на катушку. Для отметки промежутков времени служит прикрепленная к раме консольная пружина со стальным грузиком и пером на ее конце. Эта кон-

соль имеет собственную частоту 25 периодов в секунду. Этим приспособлением можно управлять или рукой или электричеством при помощи двух сухих элементов. Эту пружину следует отклонять каждую секунду или около того и наносить затухающую 25-цикловую волну на

<sup>1</sup>) Этот способ записывания был впервые применен Коллинсом в Кембриджском микроиндикаторе для машин высокой скорости, см. „Engineering“, Vol. 113, 1922, p. 716. См. также „Trans. of the Optical Society“, Vol. 27, 1925—1926, p. 215.

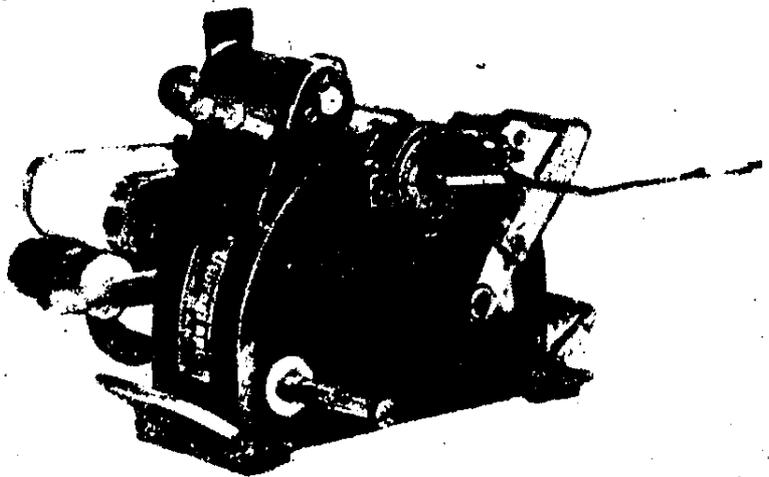
<sup>2</sup>) Что касается более детального описания этого прибора, см. „V. D. I.“, Vol. 60, 1916, S. 811.

запись. Собственный период сейсмографической массы сам по себе приблизительно равен  $1\frac{1}{2}$  секунды. Увеличение, которое дает рычажная система, соединяющая эту массу с рычажным пером, можно подобрать. Удовлетворительные записи можно получить при увеличении в 12 раз для частот свыше 130 в секунду. Прибор будет удовлетворительно работать даже при 200 колебаниях в секунду, если только увеличение выбрано не менее чем в три раза. Следует заметить, что помощью надлежащей установки сейсмографической массы можно получить запись колебания, происходящего в *любом направлении*.



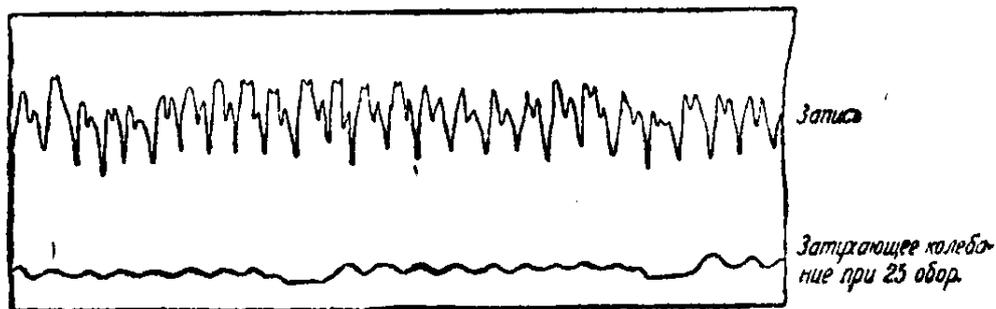
Фиг. 152.

В тех случаях, где колеблющееся тело так мало, что его колебания будут находиться под влиянием сравнительно большой массы прибора его можно употреблять просто как прибор, дающий запись колебания („универсальный записыватель колебаний“, как он назван изобретателем). Сейсмографическая масса при этом вынимается из прибора, и его нужно поддерживать неподвижным в пространстве каким-либо способом, например, подвешивая его к крану. Рычажная система записывающего пера непосредственно приводится в действие очень маленьким стерженьком, который касается



Фиг. 153.

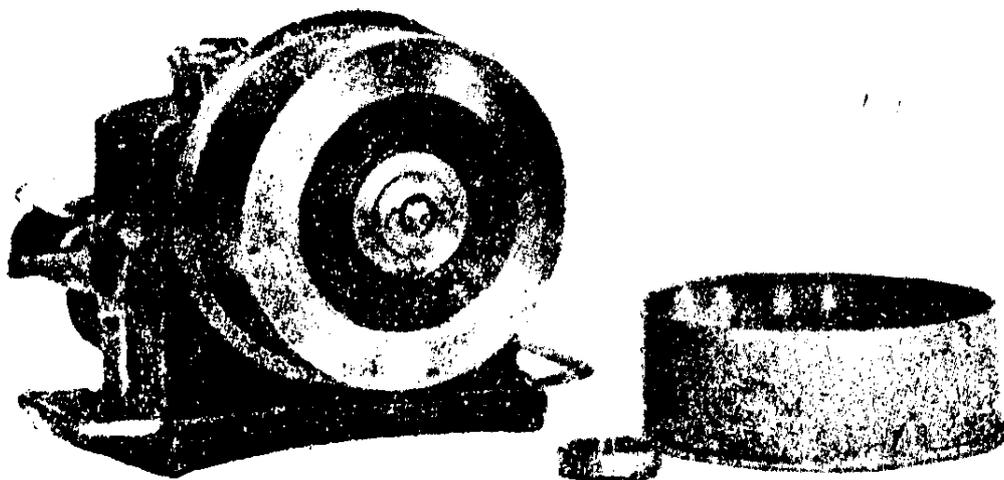
вибрирующего тела (фиг. 152 и 153). Помощью этого приспособления можно получить увеличение в 100 раз при 60 периодах и в 15 раз при 150 периодах в секунду. Запись этого прибора приведена на фиг. 154.



Фиг. 154.

вибрирующего тела (фиг. 152 и 153). Помощью этого приспособления можно получить увеличение в 100 раз при 60 периодах и в 15 раз при 150 периодах в секунду. Запись этого прибора приведена на фиг. 154.

5. Торсиограф. — Для записывания колебаний кручения в валах предложено много приборов. Прибор этого рода, нашедший широкое применение, изображен на фиг. 155. Этот прибор, изобретенный Гейгером, имеет то же самое записывающее и отмечающее время приспособление, как и описанный выше его же виброграф, но отличается от него в своей сейсмографической части. Он имеет легкую катушку, диаметром около 150 мм, на ось которой насажен концентрический тяжелый маховичок со свободным ходом относительно этой оси. Соединение между катушкой и массой маховичка выполняется очень гибкой спиральной пружиной. Собственная частота колебаний кручения этой массы, когда катушка закреплена, — около  $1\frac{1}{2}$  в секунду. При работе катушка приводится в движение помощью короткого ремня шириною в 25 мм от вала, колебания кручения которого измеряются. Катушка вращается вместе

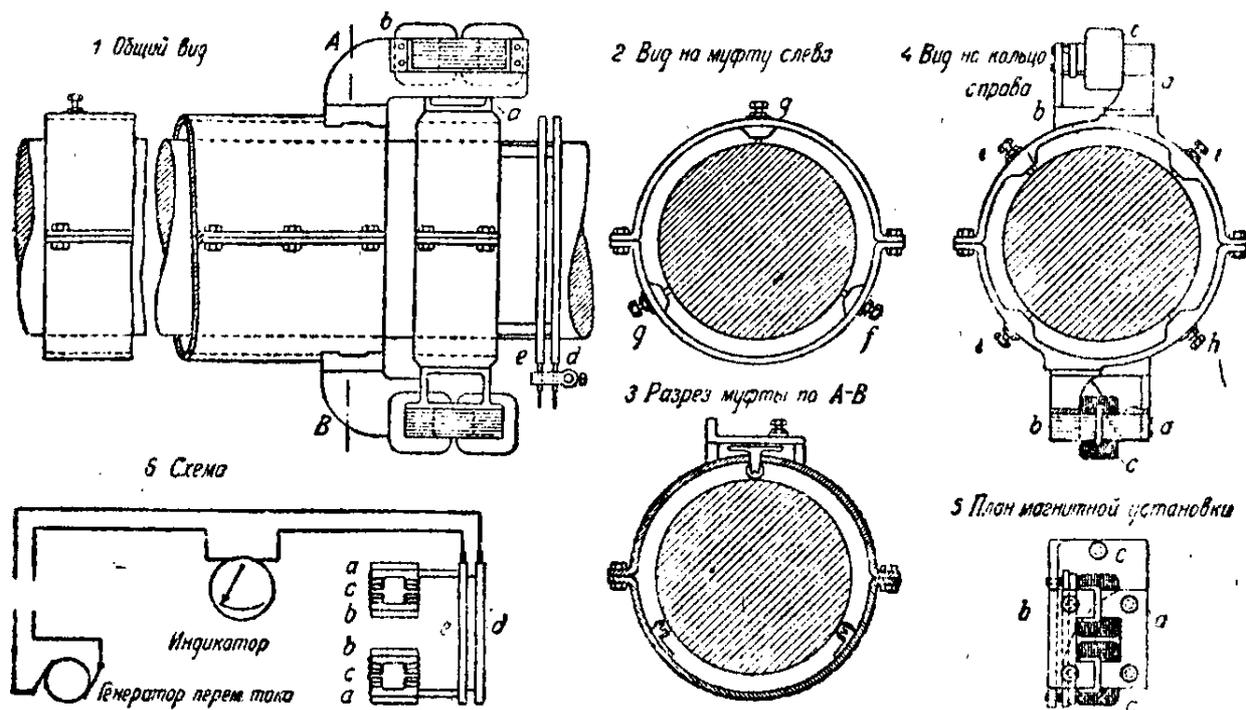


Фиг. 155.

с валом, а тяжелая масса внутри будет вращаться с практически однообразной угловой скоростью, если только частота колебаний кручения превышает определенную величину, скажем, в четыре раза больше, чем собственная частота прибора. Относительное движение катушки и острия на окружности маховичка передается помощью рычажной системы записывающему перу. Этот прибор применим при колебаниях до 200 периодов в секунду при небольших увеличениях, вообще же увеличение колебательного движения поверхности вала можно получить столь высокое, как 24 к 1 при колебаниях низкой частоты. Небольшие колебания следует записывать для частей вала возможно большего диаметра. Большие колебания следует измерять на валах малого диаметра, чтобы получить запись в пределах прибора. Размеры вращаемой катушки даются различные в зависимости от числа оборотов вала и определяются воздействием центробежных сил на спиральную пружину, которая укреплена между маховичком и катушкой. При скорости около 1500 оборотов в минуту центробежные силы деформируют пружину настолько, что перо уходит с ленты для записи. Этот прибор успешно применялся при изучении колебаний кручения в таких установках двигателей Дизеля, как в тепловозах или на подводных лодках. Недавно появился комбинированный торсиограф-виброграф — универсальный записыватель колебаний.

6. Измеритель кручения. — Есть случаи, когда интересно знать не только колебания угловой скорости, измеряемые торсиографом Гейгера, но также вращающий момент вала, передающего силу. Для этой цели было предложено много приборов, особенно для измерения силы, передающейся гребными валами судов<sup>1)</sup>.

Чаще всего применяется способ, состоящий в измерении относительного движения между двумя частями прибора, закрепленными в двух сечениях вала на определенном друг от друга расстоянии. Угол поворота этих частей относительно друг друга наблюдается или записывается по-



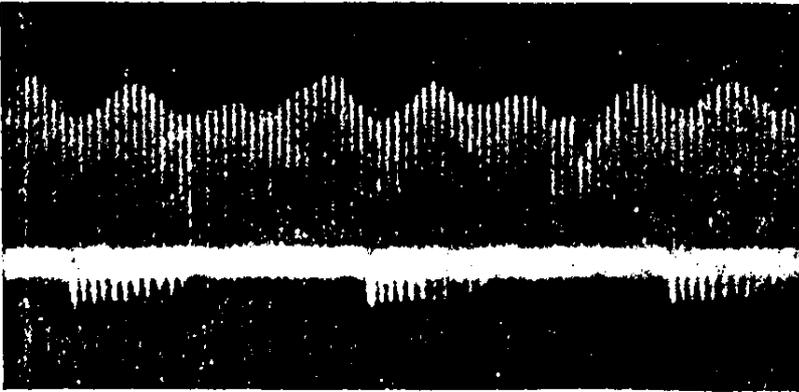
Фиг. 156.

мощью осциллографа. Зная скорость вращения вала и жесткость его на кручение, можно определить передаваемую валом мощность в лошадиных силах. Фигура 156 представляет измеритель кручения, изобретенный *E. V. Moullin*'ом (Инженерная лаборатория Кэмбриджа в Англии<sup>2)</sup>). „Относительное движение двух частей прибора измеряется помощью электричества и непрерывно в продолжение вращения, так что прибор можно закрепить в колодце гребного вала, а наблюдения делать на расстоянии. Измеритель кручения Мулэна употребляется для измерения вращающего момента, передающегося гребными валами до 250 мм диаметром при мощности до 1500 л. с. Прибор состоит из электромагнита с воздушным промежутком. Одна половина электромагнита поддерживается кольцом, закрепляемым в определенной точке вала, а другая половина находится

<sup>1)</sup> Существующие различные способы измерения и записывания угла скручивания вала можно подразделить на 4 группы: а) механические, б) оптические, в) стробоскопические и д) электрические способы. Описания приборов, построенных на основе этих различных принципов, даны в упомянутой выше (см. стр. 325) статье *Штейдинга*. См. также статью *Vivega* в журнале „Der Betrieb“, 1921, S. 318.

<sup>2)</sup> См. статью *Robert S. Whipple*, „Journal of the Optical Soc. of America“, Vol. 10, 1925, p. 455.

рядом с первой, но присоединяется к муфте, закрепленной на валу на расстоянии около 125 см (4-х футов). На фиг. 156 показано устройство обеих половин электромагнита, из которых одна *a* закреплена на кольце, а другая *b* прикреплена к муфте. Небольшой генератор переменного тока дает обмотке *c* ток частотой 60 периодов в секунду и напряжением около

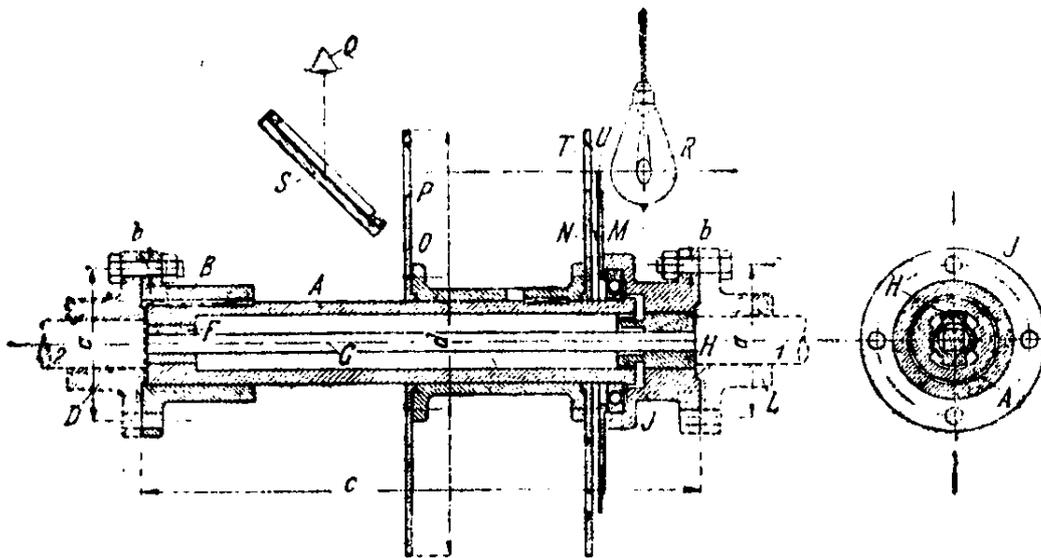


Фиг. 157.

100 вольт. Как только вал закручивается, промежуток увеличивается при переднем ходе (и уменьшается при обратном ходе), ток возрастает прямо пропорционально величине промежутка, так что записываемые измерения меняются прямо пропорционально вращающему моменту. Применяются два электромагнита, по одному

на каждом конце диаметра, так что они механически уравновешены и, соединенные электрически последовательно, не реагируют при перемещениях изгиба. Ток замыкается и размыкается в электромагнитах помощью двух скользящих колец *d* и *e*. При помощи обычного осциллографа можно получить непрерывную запись в таком виде, как изображено на фиг. 157.

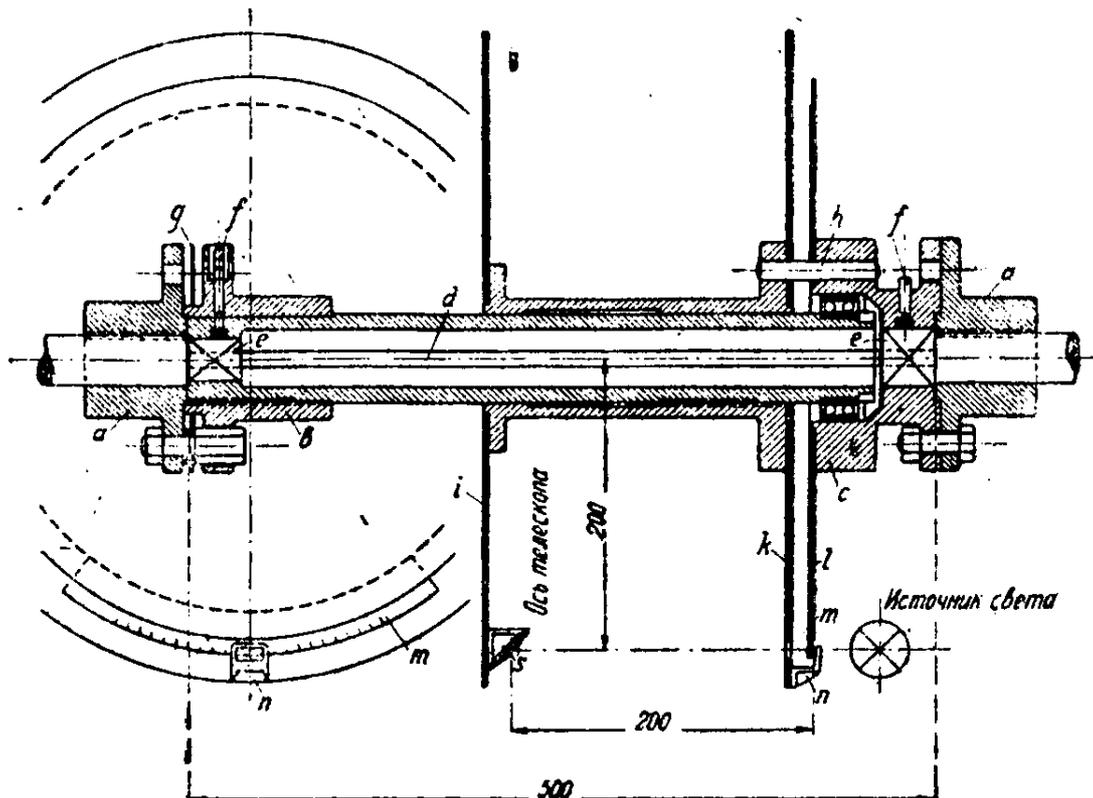
На фиг. 158 показан торсиометр Амслера, который широко применяется для измерения мощности двигателей больших скоростей. Соеди-



Фиг. 158.

нительные фланцы *D* и *L* торсиометра обычно насаживаются на концы 1 и 2 приводного и ведущего валов. Упругий стержень, передающий вращающую силу, обозначен буквой *G*. Он прикреплен концами к патронам *F* и *H*. Патрон *F* наглухо скреплен с муфтой *A*, на которой насажен фланец *B*. Фланец *B* сболчен с фланцем *D*, а фланец *J* с фланцем *L*; концы стержня *G* таким образом жестко скреплены с фланцами *D* и *L*. Чтобы измерить угол закручивания, пользуются дисками *M*, *N* и *O*. Диск *M* прикреплен к патрону фланца *L*, в то время как два других

диска *N* и *O* закреплены на муфте *A*. Когда измерительный стержень *G* скручивается под действием вращающей силы, диск *M* поворачивается относительно двух других дисков *N* и *O* на определенный угол закручивания. Край *U* диска *M* снабжен прозрачным кольцом из целлулоида, на котором нанесены деления шкалы. Против этой шкалы в диске *N* имеется маленькое отверстие *T* и узкий радиальный прорез, который служит указателем для отсчетов по шкале. Диск *O* не имеет отверстия против *T*, а снабжен только радиальным прорезом таким же, как в диске *N*, и через него наблюдатель видит при отсчете положение указателя *T* на шкале *U* при помощи зеркала *S*, помещенного под углом в 45 градусов к лучу



Фиг. 159.

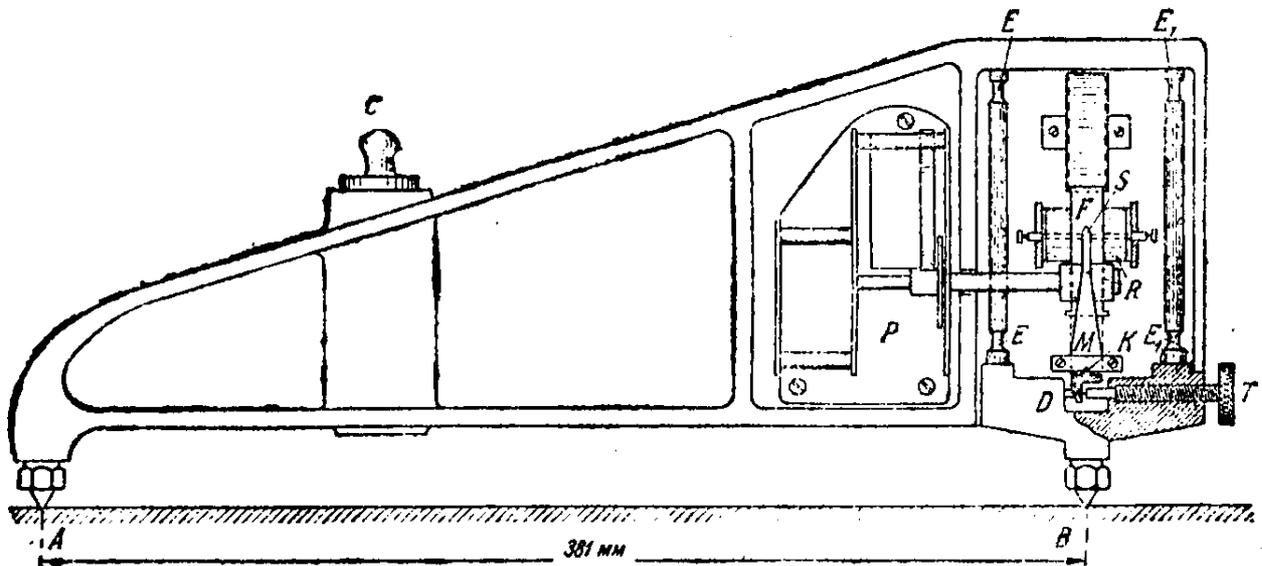
зрителя. Шкала, нанесенная на целлулоиде, ярко освещена сзади помощью лампы *R*. Если прибор получит большую скорость, скажем, не меньше 200 оборотов в минуту, то число световых впечатлений будет достаточным, чтобы получить впечатление устойчивого изображения, и чтение угла скручивания можно произвести с большой точностью, если только этот угол остается постоянным при вращении. Зная угол закручивания и жесткость кручения стержня *G*, можно легко вычислить вращающий момент и передающуюся силу.

*V. Vieweg* улучшил описанный выше прибор укреплением зеркала *S* на диске, как показано на фиг. 159, и установлением расстояния этого зеркала от шкалы *mn* равным расстоянию зеркала от оси вала. Таким путем достигнуто получение постоянного изображения шкалы, которую можно наблюдать помощью телескопа <sup>1)</sup>.

**7. Приборы для записи напряжений.** — Для изучения напряжений, возникающих в инженерных конструкциях или в частях машин при коле-

<sup>1)</sup> Описание этого прибора см. журнал „Maschinenbau“, 1923—1924, p. 1028.

баниях, необходимо пользоваться специальными приборами, записывающими деформации очень короткой продолжительности. На фиг. 160 изображен прибор подобного рода „Stress Recorder“, изготовленный Cambridge Instrument Company<sup>1)</sup>. Прибор особенно полезен для измерения быстро изменяющихся напряжений в мостовых фермах и других конструкциях под движущимися или дающими толчки грузами. Для нахождения изменений напряжений в фермах прибор закрепляется на испытываемой ферме. Зажим насаживается на видимую часть *C* головки пружины, которая, регулируя силу нажима, удерживает прибор с наперед установленным давлением на элементе, деформация которого измеряется. На одном конце прибора имеются два закрепленные острия *A*, тогда как на другом конце



Фиг. 160.

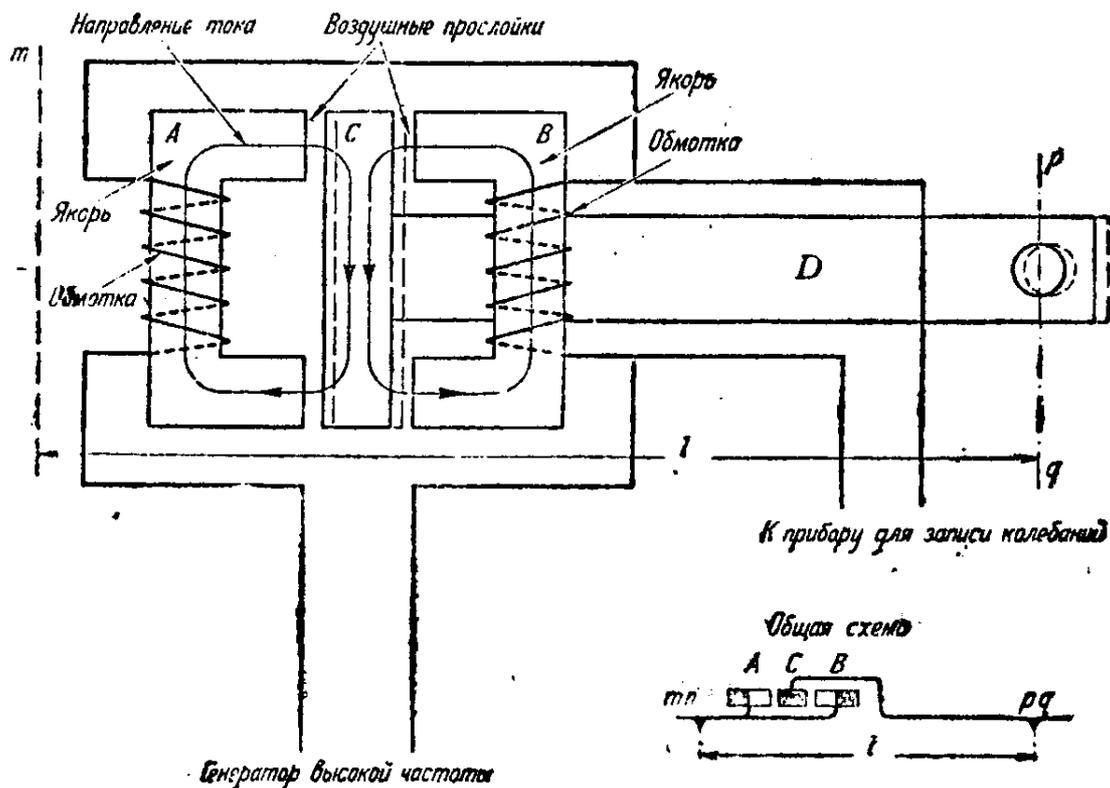
имеется одно острие *B*, несущее часть *D*, которая может свободно перемещаться в направлении, параллельном длине прибора. Это движение может иметь место, так как стерженьки *E* и *E*<sub>1</sub>, соединяющие часть *D* со станиной, имеют выточки в отмеченных этими буквами местах. Уменьшение поперечных размеров стерженьков позволяет им сгибаться в этих местах, образуя таким образом шарниры. Часть *D* соединена с могущим вращаться рычагом *M*, несущим записывающее острие *S* на своем верхнем конце. Любое перемещение точки *B* из-за перемен напряжения в испытываемой конструкции воспроизводится в увеличенном масштабе острием и записывается на ленте прозрачного целлулоида, которая движется под острием при помощи часового механизма *P* со скоростью примерно от 3 до 20 мм в секунду. Запись прибора даёт увеличение в десять раз. Записи можно рассматривать при помощи соответствующего ручного микроскопа, подобного упомянутому на стр. 328, или получить непосредственное увеличение заснятых диаграмм фотографическим способом. Таким способом записи на ленте можно прочесть с точностью до 0,01 мм. Беря расстояние между точками *A* и *B* равным 381 мм

<sup>1)</sup> Описание этого прибора см. „Engineering“, 1924, Vol. 118, p. 287.

(15 дюймам), найдем, что относительное удлинение можно измерить с точностью:

$$\frac{0,01}{10 \times 381} = 2,66 \times 10^{-6}.$$

Для стали это соответствует напряжению  $5,62 \text{ кг/см}^2$ . Записывающая часть прибора очень жестка и следовательно применима для колебаний очень высокой частоты. Например, колебания балки частотой 1400 в секунду были ясно записаны, но и это не является пределом для прибора. Его можно прикрепить почти к любой части конструкции. Часовой механизм, приводящий в движение целлулоидную ленту, пускается и останавливается либо ручкой на самом приборе, либо электрическим прибором, действующим автоматически или вручную на расстоянии. Механизмы, отмечающие время и записывающие колебания, также управляются электричеством на расстоянии. Синхронность отсчетов можно получить по числу записей, так как их можно выполнить в одно то же время и в определенных положениях.



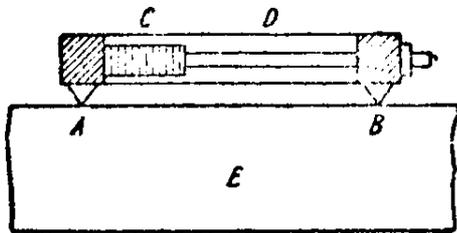
Фиг. 161.

Фигура 161 представляет схему соединений магнитного измерителя напряжений, разработанную инженерами фирмы Вестингауза <sup>1)</sup>.

Прибор укрепляется на элементе, ферме или балке, деформация которых измеряется, помощью зажимов таким образом, что два куска прокатного корытного железа, являющиеся сердечниками A и B и образующие жесткое целое, закрепляются на элементе в поперечном сечении *тп*, а хомут из прокатного железа C помощью стержня D закрепляется в поперечном сечении *pq* при длине базиса равной *l*. Любое изменение длины

<sup>1)</sup> Экстенсометр Риттера.

$l$ , происходящее из-за изменения напряжения элемента, вызывает перемещение хомута  $C$  относительно сердечников  $A$  и  $B$  и соответственно изменение величины воздушных промежутков. Обмотка наматывается на оба сердечника корытного железа. По этим обмоткам, включенным последовательно, посылается переменный ток частоты большей, чем частота измеряемых изменений напряжения. Поддерживая постоянный вольтаж в



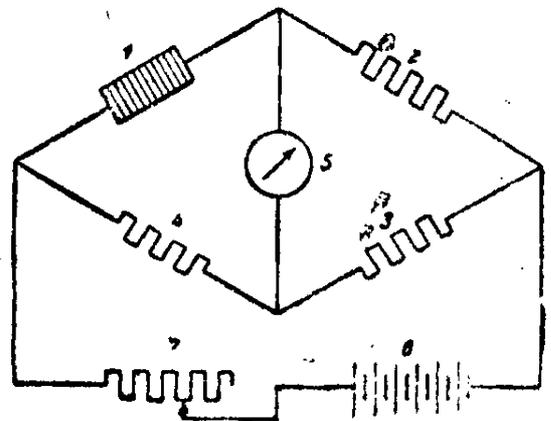
Фиг. 162.

двух последовательно соединенных обмотках, получим ток постоянного напряжения, не зависящего от изменений воздушных промежутков. Неравенство воздушных промежутков лишь разделяет общий вольтаж на две неравные части в двух обмотках. Запись вольтажа каждой обмотки производится нормального типа осциллографом. Ординаты обертывающей кривой таких диаграмм, как показано на фиг. 157, пропорциональны

напряжениям в элементе. Этот магнитный измеритель напряжений был использован<sup>1)</sup> для измерения напряжений в рельсах, вызываемых при движении паровозом, и оказался очень полезным.

Для измерителя длиной  $l = 203$  мм (8 дюймов) можно получить точность отсчетов, соответствующую напряжению  $70$  кг/см<sup>2</sup>.

*Электрический телеметр*<sup>2)</sup>. — Этот прибор основан на том общеизвестном факте, что если столбик из угольных кружков находится под давлением, то перемена давления будет сопровождаться переменной электрического сопротивления и также изменением длины столбика. Простейший вид прибора, прикрепленного к элементу  $E$ , напряжение в котором нужно измерить, показан на фиг. 162. Любое изменение расстояния между точками опор  $A$  и  $B$  вызывает перемену начального сжатия столбика  $C$  из угольных кружков. Происходящее вследствие этого изменение электрического сопротивления может быть записано помощью осциллографа. На фиг. 163 показана в основе электрическая схема прибора. Прибор  $1$  помещен в одной ветви мостика Уитстона, остальные три ветви которого  $2, 3$  и  $4$ . Измерительный прибор мостика  $5$ , который может быть миллиампером или осциллографом, указывает малейшую неуравновешенность тока в мостике. Сопротивления  $2$  и  $3$  постоянны, а  $4$  приспособляется так, чтобы уравновесить мостик, когда угольный столбик прибора находится под своим началь-



Фиг. 163.

электрическая схема прибора. Прибор  $1$  помещен в одной ветви мостика Уитстона, остальные три ветви которого  $2, 3$  и  $4$ . Измерительный прибор мостика  $5$ , который может быть миллиампером или осциллографом, указывает малейшую неуравновешенность тока в мостике. Сопротивления  $2$  и  $3$  постоянны, а  $4$  приспособляется так, чтобы уравновесить мостик, когда угольный столбик прибора находится под своим началь-

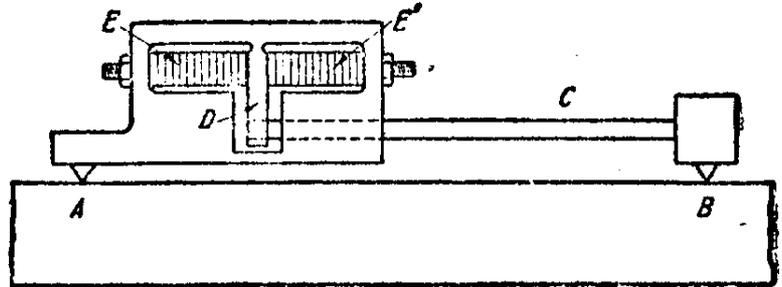
<sup>1)</sup> См. доклад автора, представленный Международному Конгрессу прикладной математики и механики в Цюрихе, 1926 год.

<sup>2)</sup> Полное описание этого прибора, сделанное *O. S. Peters*'ом и *B. Mac Col-lum*'ом, можно найти в *Technologic paper of the Bureau of Standards, No 247, Vol. 17, 1924, p. 737*; см. также доклад Петерса, сделанный им на ежегодном собрании Американского общества испытания материалов 1927 г.

ным сжатием. Любое изменение сжатия вследствие удлинения испытываемого элемента вызовет неуравновешенность мостика, величина которой будет отмечена прибором 5. Последний можно калибровать так, чтобы непосредственно читать напряжение в испытываемом элементе.

Прибор такого простого вида, как описанный выше, имеет недостаток, происходящий из-за того, что сопротивление угольного столбика не является линейной функцией перемещения.

Чтобы устранить этот недостаток в существующих приборах, пользуются двумя угольными столбиками (фиг. 164). При таком устройстве любое изменение расстояния между точками *A* и *B* из-за перемены напряжения испытываемого элемента будет

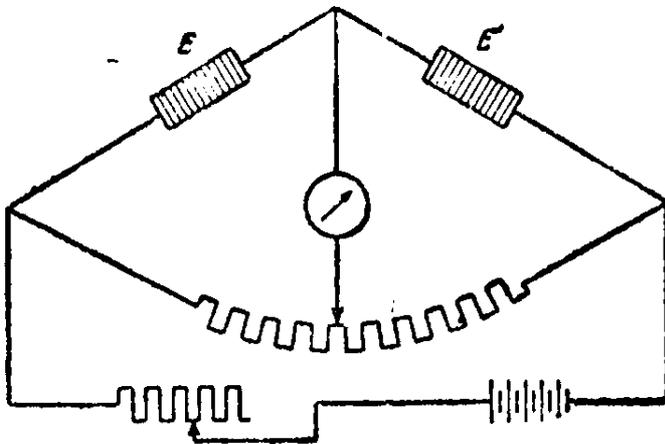


Фиг. 164.

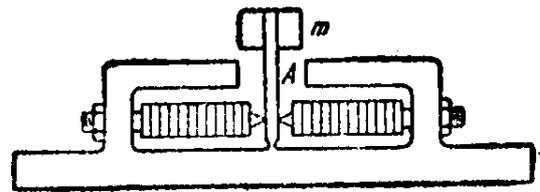
передаваться помощью стержня *C* плечу *D*. В результате этого возникнут: увеличение сжатия в одном из двух угольных столбиков *E* и *E'* и уменьшение в другом. Помещая эти два угольных столбика в мостик Уитстона, как показано на фиг. 165, получим, что эффекты изменения сопротивления обоих столбиков сложатся, и суммарный результат, который теперь получится почти пропорциональным напряжению,

будет записываться прибором мостика.

Можно получить большую степень чувствительности, меняя силу общего тока мостика. Взяв силу этого тока в 0,6 ампер, который



Фиг. 165.

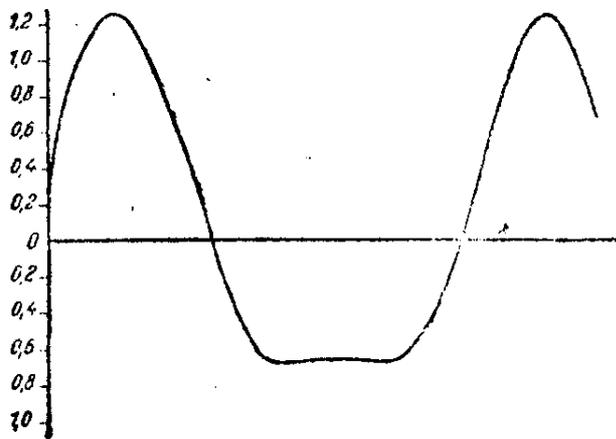


Фиг. 166.

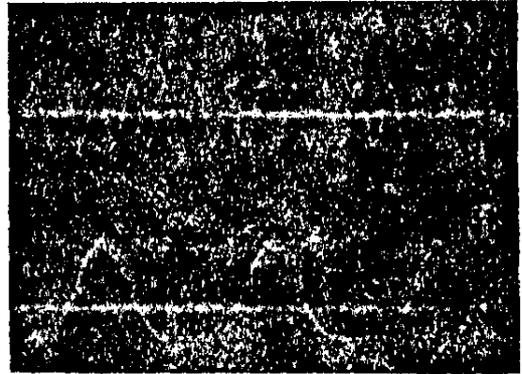
пригоден для длительных наблюдений, мы получим полное отклонение указателя прибора мостика при перемещении в 0,05 мм. Отсюда, приняв длину базы *AB* (фиг. 164) равной 200 мм, полное отклонение указателя прибора для элемента из литой стали будет представлять напряжение около 530 кг/см<sup>2</sup>. Прибор доказал свою применимость для записи быстро изменяющегося напряжения в элементе, испытывающем колебания. Колебания, большие чем 800 периодов в секунду, могут быть воспроизведены в отвечающем действительности масштабе.

Этот прибор так же успешно применяется для измерения ускорений как акселерометр. Необходимо лишь легкое видоизменение его, состоящее в присоединении небольшого груза *m* к плечу *A* (фиг. 166). Столбики действуют как пружины, так что собственный период колебания массы *m*

очень высок (порядка 250 в секунду при нижеописанных опытах). Этот прибор был установлен на колеблющемся столе, скользящем по направляющим и приводимом в движение кривошипом. Колебание такого стола, вследствие конечной длины шатуна, не является синусоидальным, но содер-



Фиг. 167.



Фиг. 168.

жит также высшие гармонические колебания, из которых наиболее существенным является колебание второго порядка. Фиг. 167 показывает диаграмму ускорения этого столика, полученную на основании вычислений, а фиг. 168 дает запись осциллографа, полученную от угольного столбика измерителя ускорений, установленного на столике. Слабо видимые зубцы на этой диаграмме имеют период собственного колебания массы  $m$ .

## УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН.

- АКИМОВ Н. (Akimoff N.) 49, 276.  
 Д'Аламбер (d'Alambert) 111.  
 Амслер (Amsler E.) 334.
- Блесс (Bläss V.) 183, 189.  
 Борден (Borden P. A.) 325.  
 Борович (Borowicz) 171.  
 Браухиш (v. Brauchisch E.) 47.  
 Бурже (Bourget) 304.  
 Буссинеск (Boussinesq J.) 284, 294.  
 Бюлер (Bühler A.) 248.
- Векстефф (Wagstaff J. E. P.) 191.  
 Вивег (Vieweg V.) 333, 335.  
 Видлер (Wydler H.) 152, 154.  
 Виллис (Willis) 247.  
 Вихерт (Wiechert A.) 77, 96, 99, 110.  
 Вринч (Wrinch D.) 268.
- Гейгер (Geiger A.) 330, 332.  
 Герц (Herz H.) 281.  
 Гольдсбреф (Goldsbrough G. R.) 159.
- Ден-Хартог (Den Hartog J. P.) 6, 27, 167,  
 190, 296.  
 Дрейфус (Dreyfus Z.) 96.  
 Дэрнлей (Darnley E. R.) 234, 237.  
 Дюбуа (Dubois F.) 324.  
 Дюффинг (Düffing G.) 79, 89, 90.
- Екк (Eck B.) 70.  
 Екольт (Eckolt W.) 31.  
 Элер (Oehler E.) 322.
- Инглис (Inglis C. E.) 212, 249.
- Закс (Sächs G.) 97.  
 Занден (v. Sanden H.) 26, 53, 81, 143.  
 Засс (Sass F.) 157.  
 Зефельнер (Seefehlner E. E.) 96.  
 Зеельман (Seelman) 157.  
 Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 41.
- Карелиц (Karelitz G. B.) 52, 328.  
 Кельвин (Lord Kelwin) 81.  
 Кимбэлл (Kimball A. L.) 27.  
 Кирхгоф (Kirchhof G.) 267, 310.  
 Клебш (Klebsch) 246, 280, 283.  
 Кокс (Cox H.) 280.  
 Коллинс (Collins W. G.) 22, 330.  
 Крылов А. Н. (Kriloff A. N.) 242.  
 Кулон (Coulomb C. A.) 27.  
 Кэмпбэлл (Campbell W.) 318, 320.
- Лавачек (Lawaczek) 45.  
 Лагранж (Lagrange J. L.) 120.  
 Лёве (Love A. E. H.) 198, 281, 284, 290,  
 292, 293, 294.  
 Лемэр (Lemaire P.) 136.  
 Лер (Lehr E.) 27, 47, 155.  
 Лисажу (Lissajous) 328.  
 Льюис (Lewis F. M.) 139, 150, 152, 154,  
 157, 220.  
 Лэмб (Lamb H.) 126, 174, 198, 296, 314.  
 Люкс (Lux F.) 21.  
 Ляме (Lamé) 300.
- Мак-Колем (Mac Collum B.) 338.  
 Мартиенсен (Martienssen O.) 90.  
 Матьё (Mathieu) 305.  
 Мейснер (Meissner E.) 96, 102, 105, 110.  
 Мизес (v. Mises R.) 27.  
 Морэн (Morin A.) 27.  
 Мулэн (Moullin E. B.) 333.  
 Мюллер (Müller K. E.) 96, 105, 110.
- Навье (Navier) 285.
- Оно (Ono A.) 268, 273.  
 Ормондройд (Ormondroyd J.) 6, 27, 190,  
 325.
- Пауэлл (Powell J. H.) 315.  
 Петерс (Peters O. S.) 338.  
 Петров Н. П. (Petroff N. P.) 248.  
 Пёшль (Pöschl T.) 184.  
 Пирсон (Pearson) 267, 280.  
 Покелс (Pockels) 306.  
 Польшаузен (Pohlhausen E.) 248.  
 Похгаммер (Pochhammer L.) 192.
- Рамзауер (Ramsauer C.) 291.  
 Рауэл (Rowell H. S.) 133, 136.  
 Рейлей (Lord Rayleigh) 60, 129, 147, 198,  
 227, 300, 303, 305.  
 Рейснер (Reissner H.) 137, 248.  
 Ритгер (Ritter J. G.) 337.  
 Ритц (Ritz W.) 258, 263, 308, 309, 320.  
 Робертс (Roberts J. H. T.) 315.  
 Рюденберг (Rüdenberg R.) 89.
- Саусвэл (Southwell R. V.) 315, 323.  
 Сёдерберг (Söderberg C. R.) 39, 49, 164.  
 Сен-Венан (St. Venant) 246, 280, 283, 284.  
 Сирс (Sears J. E.) 291.  
 Смит (Smith D. M.) 234, 237.

Смит (Smith T. H.) 156.  
 Стодола (Stodola A.) 27, 70, 160, 170, 175,  
 177, 184, 275, 320, 322, 323.  
 Стокс (Stokes G. G.) 248.  
 Тимошенко С. П. (Timoshenko S.) 24, 85,  
 158, 173, 216, 227, 239, 242, 245, 258,  
 276, 281, 338.  
 Тодгёнтгер (Todhunter) 267, 280.  
 Толле (Tolle M.) 150, 158.  
 Томсон (Thomson J. J.) 114.  
 Трэмплер (Trumppler W. E.) 49.  
 Тэт (Tait W. G.) 114.  
 Уайпл (Whipple R. S.) 333.  
 Фёпиль (Föppl O.) 187.  
 Фойгт (Voigt W.) 291, 308.

Фокс (Fox J. F.) 152.  
 Фрам (Frahm H.) 12, 21, 196.  
 Фрейденайх (v. Freidenreich) 318.  
 Фромм (Fromm H.) 27.  
 Фулляртон (Fullarton) 21.  
 Хейман (Heymann) 45.  
 Хольцер (Holzer H.) 28.  
 Хорт (Hort W.) 28, 81, 270, 273, 274, 275.  
 Циммерман (Zimmerman H.) 248.  
 Шверин (Schwerin E.) 269, 275.  
 Шлик (Schlick O.) 20.  
 Шрёдер (Schröder P.) 185.  
 Штейдинг (Scheiding H.) 325, 333.  
 Юнг (Young) 283.

### ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

Автомобильное колебание. — 129.  
 Акселерометр — измеритель ускорения. —  
 41, 339.  
 Д'Аламбера принцип. — 111.  
 Амортизатор — поглотитель колебаний — 38.  
 Амплитуды.  
 измерение — 326;  
 диаграмма — 34;  
 определение — 8.  
 Балансировка — уравнивание — 43;  
 машины:  
 Акимова — 49;  
 Лавачек-Хеймана — 45;  
 Сёдерберга — 49;  
 прибор Карелица — 50.  
 Биение — 17, 134.  
 Боковые колебания стержней, балок:  
 влияние:  
 перерезывающей силы и инерции  
 вращения — 227, 231.  
 осевых сил — 252;  
 вынужденные (балка с опертыми концами)  
 от:  
 пульсирующей силы — 238;  
 движущейся постоянной силы —  
 241;  
 движущейся пульсирующей силы —  
 245.  
 Вагона колебание — 129.  
 Вибрационный тахометр Фрама — 21.

Виброграф — прибор для записывания колебаний:  
 теория — 18, 39, 41;  
 сейсмические — 328;  
 Кембриджский — 328;  
 Гейгера — 330.  
 Виброметр — измеритель колебаний:  
 Компании Vibration Speciality —  
 326;  
 Фуллартон — 21.  
 Возможных перемещений начало — 111.  
 Вынужденные колебания:  
 балки с опертыми концами — 237;  
 методы определения — 237;  
 определение — 13;  
 при затухании — 31;  
 технические применения — 38;  
 псевдогармонические — 86;  
 продольные стержней — 205, 212;  
 системы, общая теория — 123.  
 Гармоническое движение, определение — 9.  
 Гейгера виброграф — 330.  
 Гейгера торсиограф — 332.  
 Главные виды колебаний — 125, 126.  
 Главные координаты — 125, 128.  
 Дизеля двигатель, колебания кручения —  
 150.  
 Динамический поглотитель колебаний —  
 190.  
 Диски турбины — 318.

**Жироскопическое влияние:**  
 на валы — 172;  
 на маховики — 178.

**Затухание:**  
 вынужденные колебания — 31;  
 поглощение энергии — 36;  
 постоянное — 30;  
 пропорциональное скорости — 27.

**Зоммерфельда опыт** — 41.

**Зубчатые передачи, колебания кручения** — 155.

**Измерения колебаний приборы** — 324.

**Измерители колебаний — виброметры** — 21, 326.

**Измеритель ускорения — акселерометр** — 41, 339.

**Индикатор паровых машин** — 21:  
 микро Коллинса — 22.

**Инерция движущихся частей кривошипа** — 158.

**Карелица прибор для балансировки машин** — 50.

**Квазигармонические колебания:**  
 определение — 73;  
 примеры — 91.

**Клина колебание** — 265.

**Кольца кругового колебания** — 291:  
 полного:  
 радиальное — 291;  
 кручения — 292;  
 изгиба — 294;  
 неполного — 296.

**Конического стержня колебание** — 267.

**Коллинса микроиндикатор** — 22.

**Колнчатого вала колебание кручения** — 156.

**Корпуса судна колебание** — 275.

**Кривошип, инерция движущихся частей** — 158.

**Критические области** — 102.

**Критические скорости автомобилей** — 136.

**Критические скорости валов:**  
 влияние веса — 123;  
 вращение при двух опорах:  
 с одним диском — 65;  
 с несколькими дисками — 66;  
 графический способ определения — 69.  
 вращение при нескольких опорах:  
 аналитическое определение — 165;  
 графическое определение — 165.  
 пример вала на трех подшипниках — 167.  
 жироскопическое влияние — 172;  
 переменной жесткости — 95.

**Критическая частота** — 15.

**Кручения колебания валов:**  
 влияние массы вала — 216.  
 один диск — 11;  
 два диска — 12;  
 три диска — 141;  
 несколько дисков:  
 общее решение — 140;  
 четыре диска — 141;  
 метод Рейлея — 147.

**Лагранжа уравнения** — 117.

**Лиссажу фигуры** — 328.

**Маховик, жироскопическое влияние** — 178.

**Маятник:**  
 двойной — 111;  
 сферический — 110, 121;  
 переменной длины — 92.

**Мембраны колебания:**  
 общие замечания — 296;  
 прямоугольной — 296;  
 круговой — 304.

**Мостов колебания от:**  
 движущейся массы — 247;  
 неровностей пути и износа бандажей — 252.

**Независимые — свободные колебания** — 7.

**Нормальные или главные виды колебаний** — 125, 126.

**Нормальные или главные координаты** — 125, 128.

**Неуравновешенность:**  
 определение — 15;  
 динамическая — 44;  
 статическая — 43.

**Области критических скоростей** — 102.

**Обобщенные координаты** — 114.

**Обобщенные силы** — 115.

**Ограничения свободы ур-ия** — 110.

**Осевые силы, действие на боковые колебания стержней** — 252.

**Паллограф** — 20.

**Переменные жесткости** — 94.

**Переменное поперечное сечение:**  
 консольной балки — 265;  
 стержня со свободными концами — 269.

**Период, определение** — 8.

**Пластинки колебания:**  
 влияние натяжения — 315;  
 защемленной по контуру — 312;  
 круговой — 310;  
 общие замечания — 306;  
 прямоугольной — 307;  
 свободной — 315.

**Поглотитель колебаний:**  
 амортизатор — 38.  
 динамический — 190.

- Приборы для записи колебаний — вибрографы:  
теория — 18, 39, 41;  
сейсмические — 328:  
Кембриджский — 328;  
Гейгера — 330.
- Приборы для записей напряжения:  
Кембриджский — 336;  
магнитный — 337;  
телеметрический — 338.
- Приборы для измерения колебаний — 324.
- Прибор Карелица для уравнивания вращающихся машин — 50.
- Продольные колебания стержней:  
вынужденные — 205, 212;  
дифференциальное уравнение — 198;  
решение обобщенными координатами — 203;  
решение тригонометрическими рядами — 200;  
с грузом на конце — 208;  
сила, внезапно приложенная — 214;  
удар по концу стержня — 284.
- Псевдогармонические колебания:  
вынужденные — 86;  
графическое решение — 79;  
определение — 73;  
примеры — 73;  
свободные — 77;  
численное решение — 84.
- Рамы под машинной колебание — 54.
- Резонанса определение — 15.
- Рейлея метод — 60, 147, 301.
- Рельса колебания — 258.
- Ритца метод — 258, 301.
- Ротор жесткий на упругих подшипниках — 181.
- Ротор с желобами — 71.
- Свободные колебания:  
общее решение — 122;  
определение — 7;  
системы с одной степенью свободы — 7.
- Сейсмические приборы — 19, 328.
- Спарников ведущей системы электровазов колебание — 96.
- Сплошное упругое основание — 256.
- Степень свободы, определение — 7.
- Судна корпус, колебания — 275.
- Тахометр Фрама — 21.
- Телеметр электрический — 338.
- Торсиограф — 332.
- Торсиометр:  
Амслера — 334.  
Вивега — 335;  
Мулена — 333.
- Турбины колебания:  
диска — 318;  
лопаток — 269.
- Ударное действие нагрузки на мосты — 247.
- Удар стержней:  
боковой — 278;  
продольный по концу — 284.
- Узловое сечение — 13.
- Универсальный записыватель колебаний — 331, 332.
- Упругое основание, колебание стержня на нем — 256.
- Уравнивание — балансировка вращающихся машин — 43,  
машины для него — 45.
- Фазы:  
диаграмма изменений — 35;  
определение — 9;  
при затухающем колебании — 32.
- Фрама тахометр — 21, 325.
- Фуллартона виброметр — 21, 325.
- Частота:  
измерение — 325;  
определение — 8;  
уравнение — 125, 126.
- Экипажей колебание — 129.
- Энергия:  
поглощение при затухании — 36;  
принцип сохранения энергии — 57.
- Эквивалентной длины вал — 147, 157.
- Эквивалентные диски — 159.

20  
3438

1609<sup>1</sup>/<sub>60</sub>