

*Принципы
проектирования*

СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ

ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИ-
РОВАНИЯ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ



Principles of CONTROL SYSTEMS ENGINEERING

VINCENT DEL TORO

Associate Professor of Electrical Engineering
The School of Technology
The City College of New York

SYDNEY R. PARKER

Assistant Professor of Electrical Engineering
The School of Technology
The City College of New York

MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC
NEW YORK TORONTO LONDON 1960

ВИНЦЕНТ ДЕЛЬ ТОРО И СИДНЕЙ Р. ПАРКЕР

ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Перевод с английского
инж. А. М. ЛАДОГИНА
Под редакцией
д-ра тех. наук
проф. В. А. БОДНЕРА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

В книге изложены теория, принципы построения и особенности проектирования систем автоматического управления. Синтез характеристик систем управления ведется во временной и комплексной областях, а также путем использования корневого метода. Каждая глава книги заканчивается хорошо подобранными примерами и задачами.

Книга может быть полезна для инженерно-технических работников, занимающихся вопросами проектирования и использования систем автоматического управления, а также может быть полезна для студентов вузов.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Книга посвящена теории, принципам построения и проектированию систем автоматического управления. Теория и синтез систем автоматического управления излагаются в различных аспектах. Первые главы книги посвящены вопросам динамики систем управления во временной области. Здесь дается анализ влияния параметров систем, а также сигналов по производным и интегралам на качество регулирования.

В книге подробно рассмотрены вопросы динамики систем управления в комплексной области. После введения передаточных функций систем и их элементов излагаются правила перехода к частотным характеристикам. Обстоятельно изложены методы синтеза систем на основе метода логарифмических частотных характеристик.

Значительное место в книге уделяется корневым методам синтеза систем, причем возможности метода иллюстрируются на примерах.

При решении задач синтеза и проектирования систем управления большое значение приобретают методы моделирования, изложению которых посвящена отдельная глава.

В книге изложены также принципы построения самонастраивающихся систем управления.

Все разделы сопровождаются большим количеством задач и примеров, которые позволяют лучше усвоить основные теоретические положения.

Эта книга, написанная на основе курса лекций, читаемых авторами в высших учебных заведениях США, использовалась в качестве учебного пособия.

Издаваемая на русском языке книга отличается от оригинала тем, что в нее не включены главы, в которых излагаются хорошо освещенные в отечественной литературе общие понятия и определения, структурные и принципиальные схемы, методы решения дифференциальных уравнений, а также принципы проектирования дискретных вычислителей.

В целом книга окажется полезной для инженерно-технических работников, занимающихся вопросами проектирования и использования систем автоматического управления, а также для студентов вузов.

В. Боднер

ДИНАМИКА СИСТЕМ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Динамика систем управления с обратной связью анализируется в настоящей книге разными методами, каждый из которых занимает определенное место и имеет свое назначение в определении общей сложной картины изучаемых процессов. В каждом случае необходимо начинать с составления дифференциального уравнения, описывающего систему. Первый метод изучения динамики системы состоит в непосредственном решении дифференциального уравнения, что и является основным предметом рассмотрения настоящей главы. Первоначально рекомендуется решить дифференциальное уравнение системы второго порядка, так как динамическая реакция систем более высокого порядка может быть определена в основном через простую пару комплексных сопряженных корней.

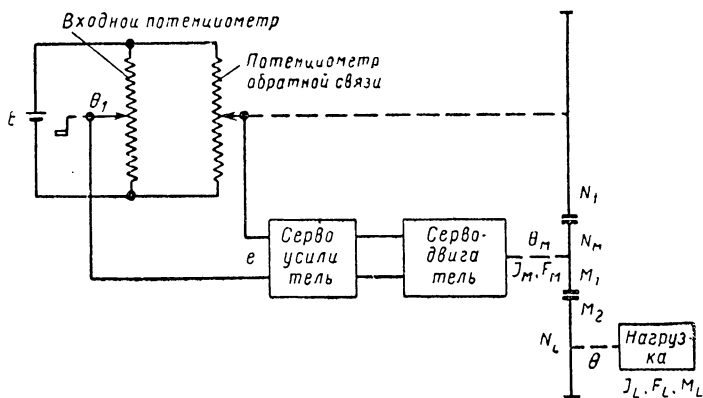
Максимум информации о динамической характеристике системы обычно дает полное решение дифференциального уравнения. Поэтому проектировщик системы управления стремится, где это удобно, найти первоначально решение в общем виде. Однако это не легко применить к системам высшего порядка и, даже более того, в действительности невозможно осуществить порядок расчета, который бы позволял целесообразно изменять непосредственно реакцию в переходном режиме. В подобных случаях ищут другие, более простые и прямые методы, если даже их применение означает ухудшение точности получаемого решения.

Возникновение переходных процессов в системах связано с наличием элементов, задерживающих и накапливающих энергию, и с воздействием внешних возмущений на систему. Эти возмущения могут возникать на входе или выходе или одновременно на обоих концах. Часто переходные процессы связаны с колебаниями, которые могут даже поддерживаться в зависимости от величины параметров. Одна из задач настоящей главы состоит в том, чтобы выяснить роль, которую играют параметры системы второго порядка в определении характера динамической реакции. Для большей наглядности рассмотрим реакцию сервомеханизма, на вход которого действует единичная и кусочно-линейная возмущающие функции. Решение выразим

в безразмерной форме, так как его можно легко интерпретировать и вообще применить к системам второго порядка с обратной связью. Общеприменимость результатов и определение переходного процесса через два характерных параметра (например, относительный коэффициент демпфирования и собственную частоту системы) являются важнейшими приемами анализа, о чем будет сказано в следующих главах. В настоящей же главе описываются два очень важных способа компенсации в переходном процессе систем управления с обратной связью при одновременном удовлетворении требований к характеристике установившегося режима. Эти способы применимы к системам более высокого порядка.

1. 1. АНАЛИЗ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ВХОДНАЯ ЕДИНИЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ

Анализируемая система представляет сервомеханизм, схема которого изображена на фиг. 1. 1. Он состоит из двух элементов, накапливающих энергию в виде инерции и упругости вала,¹ вследствие чего сервомеханизм приобретает характер системы второго порядка.



Фиг. 1. 1. Схема сервомеханизма с редуктором на валу двигателя к нагрузке и к потенциометру обратной связи.

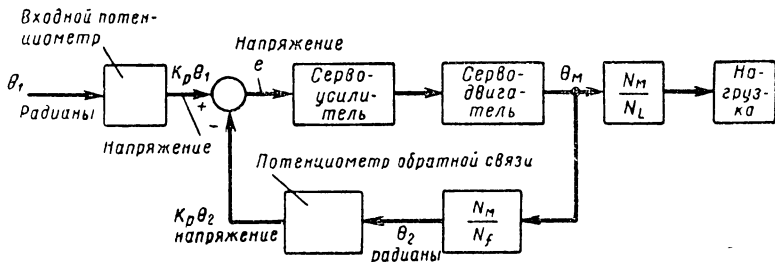
Заметим, что угловое перемещение двигателя θ_M уменьшается у нагрузки и потенциометра обратной связи из-за редукторной передачи.

На фиг. 1. 2 дана блок-схема² системы, где передаточные отношения обозначены следующим образом: N_M — число зубьев шестерни

¹ Жесткость связана с упругостью при кручении соединенных роторов сервоусилителя-серводвигателя, что влияет на систему так, как будто бы входное звено соединено упругим валом с инерционной нагрузкой.

² В настоящей главе на блок-схемах приводятся только коэффициенты усиления звеньев системы. В дальнейшем дается более полное описание с указанием передаточных функций.

на валу двигателя; N_L — число зубьев шестерни на ведомом валу; N_f — число зубьев шестерни потенциометра обратной связи. Как известно, наклон кривой зависимости момент — скорость двигателя эквивалентен коэффициенту вязкого трения. Обозначим эту величину F , причем ее размерность равна $кгм/рад/сек$. Кроме того, предположим, что сама нагрузка характеризуется другим коэффициентом F_L вязкого трения с той же размерностью. Чтобы иметь возможность определить динамику системы, необходимо предварительно установить, каким образом вязкое трение нагрузки действует на вал двигателя через зубчатую передачу между ними. Естественно, если передаточное отношение равно единице, то общий коэффициент вязкого трения был бы простой суммой двух величин. В связи с этим



Фиг. 1. 2. Блок-схема сервомеханизма, показанного на фиг. 1. 1.

возникает задача: определить, как инерция нагрузки J_L влияет на вал двигателя. Ответы на оба вопроса нетрудно найти путем следующих рассуждений. Применяв обозначения, показанные на фиг. 1. 1, можно написать уравнение, связывающее момент двигателя с моментом сопротивления

$$M_d = J_M \frac{d^2\theta_M}{dt^2} + F_M \frac{d\theta_M}{dt} + M_1, \quad (1. 1)$$

где M_d — момент, создаваемый двигателем;

J_M — момент инерции двигателя;

F_M — коэффициент вязкого трения двигателя;

M_1 — суммарный момент, создаваемый нагрузкой и отнесенный к валу двигателя;

θ_M — угловое перемещение двигателя.

Уравнение (1. 1) справедливо в любой момент времени, включая динамическое состояние, так как оно учитывает компоненты момента, связанные с инерцией двигателя и вязким трением. Практически у любого сервомеханизма отношения N_M/N_L и N_M/N_f меньше единицы. Для удобства допустим, что $n_1 = N_M/N_L$ и $n_2 = N_M/N_f$; тогда получим

$$M_1 = n_1 M_2. \quad (1. 2)$$

Следовательно, M_2 представляет момент, приложенный на стороне нагрузки, и он должен быть равен сумме противоположных моментов, что приводит к уравнению

$$M_2 = J_L \frac{d^2\theta}{dt^2} + F_L \frac{d\theta}{dt} + M_L, \quad (1.3)$$

где M_L — внешний приложенный момент нагрузки или может даже представлять момент кулонова трения нагрузки в случае применения индикаторного сервомеханизма. Хотя перед M_L стоит положительный знак, однако следует подразумевать, что сама величина M_L может быть положительной или отрицательной, в зависимости от ее направления: одинакового или встречного направления с величиной M_d . Чтобы ввести в уравнение (1.3) угол θ_M поворота ротора двигателя, необходимо учесть, что $N_M\theta_M = N_L\theta$ или $\theta = n_1\theta_M$. Отсюда

$$M_2 = n_1 J_L \frac{d^2\theta_M}{dt^2} + n_1 F_L \frac{d\theta_M}{dt} + M_L. \quad (1.4)$$

Подстановка уравнений (1.2) и (1.4) в уравнение (1.1) приводит к выражению

$$M_L = (J_M + n_1^2 J_L) \frac{d^2\theta_M}{dt^2} + (F_M + n_1^2 F_L) \frac{d\theta_M}{dt} + n_1 M_L, \quad (1.5)$$

которое означает, что параметры инерционной нагрузки и вязкого трения увеличиваются на валу двигателя в n_1^2 раз сравнительно с первоначальными значениями. Ввиду того, что величина n_1 мала для большинства сервомеханизмов, отсюда следует, что превалирующими факторами являются параметры самого сервомеханизма.

Уравнение (1.5) можно выразить через момент двигателя, отнесенный к ведомому валу, для чего следует каждый член разделить на величину n_1 . Если затем величину θ_M заменить на ее эквивалент, т. е. на θ/n_1 , то уравнение (1.5) приобретает вид

$$\frac{M_d}{n_1} = \left(\frac{J_M}{n_1^2} + J_L \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{F_M}{n_1^2} + F_L \right) \frac{d\theta}{dt} + M_L. \quad (1.6)$$

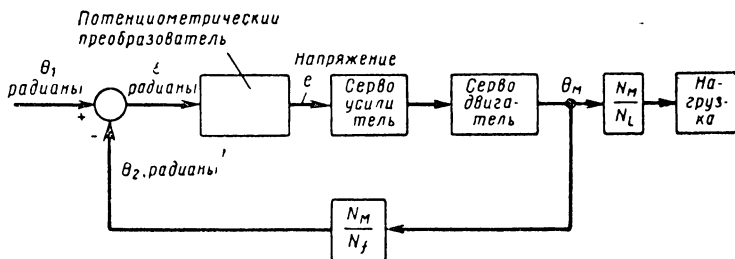
Последнее выражение показывает, что параметры двигателя J_M и F_M могут быть отнесены к нагрузочной стороне путем деления первоначальных значений на n_1^2 . Вышеизложенные результаты сведены в следующую таблицу:

Таблица 1.1

Величина	Эквивалентная величина, отнесенная к валу двигателя	Эквивалентная величина, отнесенная к валу нагрузки
Момент инерции	$J_M + n_1^2 J_L$	$\frac{J_M}{n_1^2} + J_L$
Коэффициент вязкого трения	$F_M + n_1^2 F_L$	$\frac{F_M}{n_1^2} + F_L$

В большинстве случаев приходится иметь дело с величинами, отнесенными к валу двигателя. Причина преимущественного использования этих величин состоит в том, что устойчивость системы связана с замкнутой цепью и обратная связь берется с вала двигателя (см. фиг. 1. 2).

Блок-схему на фиг. 1. 2 можно дать в упрощенном виде, как показано на фиг. 1. 3. Подобное изменение всегда возможно при условии, что преобразователи входного сигнала и сигнала обратной связи создают одинаковые величины. В рассматриваемом случае действу-



Фиг. 1. 3. Видоизмененная блок-схема, показанная на фиг. 2. 1.

щий входной сигнал, подаваемый в первую усилительную ступень, представляет собой напряжение

$$e = K_p (\theta_1 - \theta_2), \quad (1. 7)$$

где K_p — постоянная преобразователя, выраженная в вольтах на радиан;

θ_1 и θ_2 — угловые перемещения в радианах.

Если определить рассогласование в радианах в виде

$$\varepsilon = \theta_1 - \theta_2, \quad (1. 8)$$

то ясно, что $e = K_p \varepsilon$, так что K_p можно принять за дополнительный коэффициент усиления, связанный с прямой цепью передачи, как изображено на фиг. 1,3.

Для определения реакции на внешние возмущения необходимо составить корректное дифференциальное уравнение. Тогда решение этого дифференциального уравнения даст описание динамики системы. Для системы фиг. 1.3 дифференциальное уравнение движения находится приравнованием момента двигателя сумме противоположно действующих моментов. Момент, создаваемый двигателем, определяется из условия, что ошибка возникает при изменении положения входного звена, причем эта ошибка, в свою очередь, выражается в виде входной величины серводвигателя, и, следовательно,

создаваемого момента. Отсюда следует, что дифференциальное уравнение, выражающее моменты системы, будет

$$\varepsilon K_p K_A K_M = J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F \frac{d \theta_M}{dt} + M'_L, \quad (1.9)$$

где J — эквивалентный момент инерции, отнесенный к валу двигателя и равный $J_M = n_1^2 J_L$;

F — эквивалентный коэффициент вязкого трения, отнесенный к валу двигателя и равный $F_M + n_1^2 F_L$;

M'_L — возмущающая нагрузка, отнесенная к валу двигателя и равная $n_1 M'_L$;

K_M — постоянная момента двигателя в $кгм/в$;

K_A — коэффициент усиления усилителя в $в/в$;

K_p — постоянная преобразователя в $в/рад$;

$\varepsilon = \theta_1 - \theta_2$ — ошибка в радианах;

θ_M — выходное угловое перемещение двигателя в радианах;

$$n_1 = N_M : N_L;$$

$$n_2 = N_M : N_f.$$

Уравнение, которое описывает сигнал рассогласования, выраженный в радианах, будет

$$\varepsilon = \theta_1 - n_2 \theta_M. \quad (1.10)$$

Подстановка θ_M из последнего уравнения в уравнение (1.9) позволяет получить неоднородное дифференциальное уравнение системы, которое содержит величину ошибки и внешнее приложенное возмущение, т. е.

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d \varepsilon}{dt} + n_2 K_p K_A K_M \varepsilon = J \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + F \frac{d \theta_1}{dt} + n_2 M'_L. \quad (1.11a)$$

Для упрощения введем

$$K = n_2 K_p K_A K_M, \quad (1.12)$$

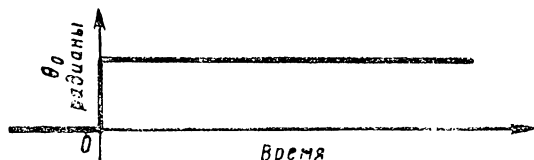
что представляет коэффициент усиления разомкнутой цепи. Эта величина представляет очень важный параметр как для установившегося состояния, так и для переходного режима. Однако необходимо всегда отличать этот коэффициент усиления от коэффициента усиления передачи, который определяется в виде произведения коэффициентов усиления, начиная с выходного суммирующего звена до места, где появляется регулируемая переменная. Заметим, что после надлежащего построения блок-схемы усиление разомкнутой цепи нетрудно найти размыканием цепи в первичной точке обратной связи и, образуя произведение коэффициентов усиления каждого звена, расположенного в цепи от выходной точки суммирующего устройства и до разомкнутой точки. Для системы на фиг. 1, 3 разница между

коэффициентом усиления разомкнутой цепи и коэффициентом усиления прямой передачи равняется коэффициенту усиления обратной связи.

Перепишем уравнение (1. 11а), введя коэффициент K ,

$$J \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + F \frac{d\varepsilon}{dt} + K\varepsilon = J \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + F \frac{d\theta_1}{dt} + n_2 M'_L. \quad (1. 11б)$$

Полное решение последнего уравнения можно найти, применив преобразование Лапласа. Конечно, обычный метод решения дифференциального уравнения может быть также легко применен; для наглядного сравнения обоих методов они будут применены в следующем разделе для нахождения реакции системы второго порядка, подверженной единичной входной функции скорости. До применения преобразования Лапласа к уравнению (1. 11б) необходимо задать



Фиг. 1. 4. Ступенчатая входная команда положения.

начальные условия при $t = 0^+$. В нижеследующей таблице приведены начальные условия, которые соответствуют ступенчатой входной величине θ_0 у звена управления, когда на систему при $t < 0$ не действует возмущение (см. фиг. 1,4). При этом можно написать начальные условия с учетом того, что положение и скорость выходного звена не могут изменяться скачком вследствие влияния инерции. Однако обычный метод преобразования Лапласа может быть всегда применен, когда возможно в сомнительных случаях проверить начальные условия.

Допустим, что неизвестное решение $\varepsilon(t)$ во временной области представлено функцией $E(s)$ в комплексной области, так что $\mathcal{L} \varepsilon(t) = E(s)$. Тогда дифференциальное уравнение после преобразования Лапласа приобретает вид

$$\begin{aligned} J \left[s^2 E(s) - s\varepsilon(0^+) - \frac{d\varepsilon}{dt}(0^+) \right] + F [sE(s) - \varepsilon(0^+)] + KE(s) = \\ = J \left[s^2 R(s) - s\theta_1(0^+) - \frac{d\theta_1}{dt}(0^+) \right] + \\ + F [sR(s) - \theta_1(0^+)] + n_2 M'_L(s). \end{aligned} \quad (1. 13)$$

Предположим, что M'_L является заданной ступенчатой возмущающей функцией нагрузки с амплитудой M'_0 , тогда введение начальных условий и

$$R(s) = \frac{\theta_0}{s}; \quad M'_L(s) = \frac{M'_0}{s}$$

приводят к следующему выражению после перегруппировки членов:

$$E(s)(s^2J + sF + K) = \theta_0(sJ + F) + \frac{n_2M'_0}{s}.$$

Следовательно, решение для погрешности, найденное в комплексной области, будет

$$E(s) = \frac{\left(s + \frac{F}{J}\right)\theta_0}{s^2 + \left(\frac{F}{J}\right)s + \frac{K}{J}} + \frac{\frac{n_2M'_0}{J}}{s \left[s^2 + \left(\frac{F}{J}\right)s + \frac{K}{J}\right]}. \quad (1.14)$$

Напомним, что решение применимо к тому случаю, когда к входным и выходным звеньям подаются одновременно возмущения и общее решение представляет наложение друг на друга влияния каждого возмущения. Более подробное изучение уравнения (1.14) вскрывает некоторые интересные факты, касающиеся общего решения. Прежде всего применение теоремы конечных значений показывает, что ступенчатая входная функция положения, т. е. $M'_0 = 0$, означает отсутствие ошибки по положению в установившемся состоянии, в то время как ступенчатое возмущение нагрузочного момента постоянной величины сопряжено с рассогласованием между положением входного вала и положением вала обратной связи на величину¹, равную $n_2M'_0/K$. Следует подчеркнуть, что такой же вывод получается при рассмотрении физических процессов, что очевидно из уравнения (1.14) вследствие наличия полюса при $s = 0$.

Кроме того, заметим, что знаменатель обоих членов этого уравнения содержит квадратные выражения. Это квадратное выражение точно равняется характеристическому уравнению системы, которое непосредственно следует из уравнения (1.11), когда внешние возмущения обращаются в нуль. Следовательно, режимы колебаний без источника имеют одинаковый характер, независимо от того, связаны ли они с возмущением, происходящим на входе или выходе.

Для определения решения уравнения (1.14) во временной области, соответствующего решению в комплексной области, необходимо найти корни характеристического уравнения. Ввиду того что при анализе систем управления наиболее часто встречаются подобные квадратные выражения, особое внимание следует обратить на этот

¹ Интересно отметить, что чем больше величина K , тем система более жесткая. Этот вывод становится более очевидным, если переписать выражение для установившейся ошибки в виде

$$\frac{e_{ss}}{M'_0} = \frac{n_2}{K} = \frac{1}{K_p K_A K_M},$$

что часто называют податливостью системы. Отметим, что эта форма создает удобный способ измерения усиления прямой цепи. Систему требуется только подвергнуть постоянному воздействию M'_L и затем измерить соответствующую величину e_{ss} .

случай с целью обобщения результатов, выраженных через надлежащие параметры, которые легко можно определить. Начнем с характеристического уравнения в виде уравнения (1.14). Таким образом

$$s^2 + \frac{F}{J}s + \frac{K}{J} = 0.$$

Корнями являются

$$s_{1,2} = -\frac{F}{2J} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}}.$$

В зависимости от значения подкоренной величины реакция может быть одной из следующих:

- 1) передемпфирование, когда $\left(\frac{F}{2J}\right)^2 > \frac{K}{J}$;
- 2) недодемпфирование, когда $\left(\frac{F}{2J}\right)^2 < \frac{K}{J}$;
- 3) критическое демпфирование, когда $\left(\frac{F}{2J}\right)^2 = \frac{K}{J}$.

Желательно, чтобы сервомеханизм был быстродействующим. Ввиду того что передемпфированная система по своему характеру является медленно действующей, этот случай исключается из дальнейшего рассмотрения сервосистемы. Однако, имея в виду другие области применения системы с обратной связью, этот случай может иметь очень большое значение, особенно тогда, когда требуется низкое усиление и высокая инерция, например, в системах регулирования температуры. Критическое демпфирование встречается тогда, когда коэффициент затухания (в данном случае F) связан с усилением и инерцией следующим соотношением:

$$F_c = 2\sqrt{KJ}. \quad (1.15)$$

Ввиду того, что наиболее часто имеют дело с недодемпфированными системами, сосредоточим свое внимание на этом случае, для которого корни характеристического уравнения можно написать в виде

$$s_{1,2} = -\frac{F}{2J} \pm j\sqrt{\frac{K}{J} - \left(\frac{F}{2J}\right)^2}. \quad (1.16)$$

Введем следующее определение относительного коэффициента демпфирования

$$\zeta = \frac{\text{общее демпфирование}}{\text{критическое демпфирование}} = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}, \quad (1.17)$$

чтобы придать этим корням форму, которая имеет большую наглядность. Кроме того, частоту собственных колебаний системы определим следующим образом:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}. \quad (1.18)$$

Отсюда

$$\frac{F}{2J} = \frac{\zeta F_c}{2J} = \frac{2\zeta \sqrt{KJ}}{2J} = \zeta \omega_n$$

и

$$\sqrt{\frac{K}{J} - \left(\frac{F}{2J}\right)^2} = \sqrt{\omega_n^2 - \zeta^2 \omega_n^2} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Следовательно, уравнение (1. 16) можно переписать

$$s_{1, 2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (1. 19)$$

Если подставить

$$\omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad (1. 20)$$

то уравнение (1. 19) упрощается

$$s_{1, 2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_d. \quad (1. 21)$$

Величина ω_d представляет частоту демпфированных колебаний, причем $0 \leq \zeta \leq 1$. Одно из отличительных свойств уравнения (1. 21) состоит в том, что действительная и мнимая части имеют размерности, обратные времени, т. е. представляют частоты. Это обстоятельство позволяет применить термин «комплексная частота».

Физическая интерпретация этого понятия состоит в том, что действительная часть комплексной частоты представляет коэффициент демпфирования, связанный с затухающими переходными явлениями, а мнимая часть относится к действительной частоте демпфированных колебаний.

Уравнение (1. 14) можно написать в виде

$$E(s) = \frac{(s + 2\zeta \omega_n) \theta_0}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} + \frac{n_2 \frac{M'_0}{J}}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (1. 22)$$

Для нахождения решения, соответствующего выражению (1. 22), необходимо разложить правую часть на простейшие дроби. Однако для упрощения алгебраических преобразований предположим, что возмущающая нагрузка отсутствует, т. е. $M'_0 = 0$. Следовательно,

$$E(s) = \frac{(s + 2\zeta \omega_n) \theta_0}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_1^*}{s - s_2}, \quad (1. 23)$$

где s_1 и s_2 определяются уравнением (1. 21). Определим K_1

$$K_1 = \frac{(s + 2\zeta \omega_n) \theta_0}{s - s_2} \Big|_{s=s_1} = \frac{\zeta \omega_n + j \omega_d}{j 2 \omega_d} \theta_0. \quad (1. 24)$$

Ввиду того что K_1^* должна быть комплексной величиной, сопряженной с величиной K_1 , то

$$K_1^* = \frac{\zeta \omega_n - j \omega_d}{-j 2 \omega_d} \theta_0. \quad (1. 25)$$

Подстановка выражений (1.24) и (1.25) в уравнение (1.23) дает

$$E(s) = \frac{\zeta\omega_n + j\omega_d}{j2\omega_d} \frac{\theta_0}{s - s_1} + \frac{\zeta\omega_n - j\omega_d}{-j2\omega_d} \frac{\theta_0}{s - s_2}. \quad (1.26)$$

Эта форма изображения пригодна для применения обратного преобразования Лапласа. Следовательно, временное решение будет

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\zeta\omega_n + j\omega_d}{j2\omega_d} \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} e^{j\omega_d t} + \frac{\zeta\omega_n - j\omega_d}{-j2\omega_d} \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} e^{-j\omega_d t} = \\ &= \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} + \frac{1}{2} (e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}) \right] = \\ &= \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Последнее уравнение может быть дополнительно упрощено, а именно

$$\varepsilon(t) = \frac{\theta_0 e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi), \quad (1.28)$$

где $\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$; оно справедливо при $0 \leq \zeta \leq 1$ и $M_0 = 0$.

Решение при отсутствии демпфирования. Одно частное значение уравнения (1.28) соответствует условию, когда $\zeta = 0$. Тогда угол $\varphi = 90^\circ$ и, следовательно,

$$\varepsilon(t) = \theta_0 \sin(\omega_d t + 90^\circ) = \theta_0 \cos \omega_n t. \quad (1.29)$$

Решение для постоянного сигнала рассогласования представляет поэтому незатухающие колебания; этого вообще следовало ожидать, так как система имеет два элемента, которые могут накапливать энергию и нет демпфирования (см. фиг. 1.5). Частота колебаний равняется $\omega_d = \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$, которая соответствует собственной частоте системы, так как она зависит от двух элементов, накапливающих энергию, т. е. K (коэффициент жесткости) и J (момент инерции).

Критически демпфированная реакция. Другое частное значение уравнения (1.28) соответствует условию, когда $\zeta = 1$ и $\omega_d = 0$, что означает отсутствие колебаний. Наиболее удобной для применения в данном случае формой функции $\varepsilon(t)$ является уравнение (1.27). Следовательно,

$$\varepsilon(t) = \theta_0 e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right).$$

Заметим, что после введения условий $\zeta = 1$ и $\omega_d = 0$ это выражение становится неопределимым. Применим правило Лопиталья для

устранения неопределенности, после чего получим выражение для реакции системы

$$\varepsilon(t) = \theta_0 e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t). \quad (1.30)$$

Интересно отметить, что решение (1.30) соответствует равенству корней характеристического уравнения при критическом демпфировании, или, что все равно, наличию двойного полюса в решении преобразованного по Лапласу уравнения.

Решение для выходного перемещения. Если необходимо найти решение уравнения (1.9), то следует так выбрать сигнал рассогласования (выраженный в радианах), чтобы он был зависимой переменной.

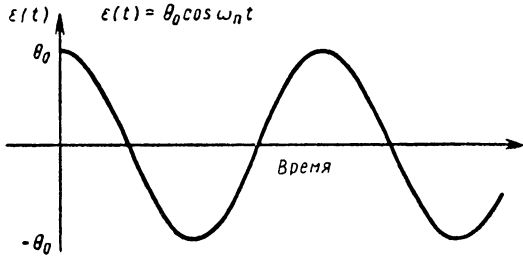


Рис. 1. 5. Кривая сигнала рассогласования при $\zeta = 0$.

Это приводит к уравнению (1.11 б), решение которого было только что найдено. Конечно, можно было также легко изменить уравнение (1.9) таким образом, чтобы зависимой переменной была величина θ , т. е. угловое выходное перемещение ведомого вала (нагрузки). Метод решения оставался бы одинаковым и привел бы к одинаковому характеристическому уравнению, так как реакция системы без источников энергии зависит только от ее параметров и не зависит от каких-либо внешних возмущений. При наличии решения относительно ε легко найти решение для выходного перемещения, определив предварительно угол поворота вала двигателя из уравнения (1.10); таким образом,

$$\theta_M = \frac{1}{n_2} (\theta_1 - \varepsilon)$$

и тогда узнаем, что угловое перемещение двигателя отличается от углового перемещения нагрузки на передаточное отношение $n_1 = \frac{N_M}{N_L}$. Полная временная реакция по выходному углу θ на единичную входную функцию, θ_0 , выраженную в радианах, будет

$$\theta = n_1 \theta_M = \frac{n_1}{n_2} \left[\theta_0 - \frac{\theta_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \right]$$

или

$$\theta = \frac{n_1}{n_2} \theta_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right], \quad (1.31)$$

где φ определяется по уравнению (1.28). Если передаточное отношение от вала двигателя к ведомому валу (нагрузке) равно передаточному отношению от вала двигателя к звену обратной связи, тогда выходной угол θ в установившемся состоянии равняется углу команды θ_1 .

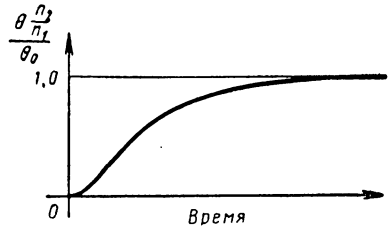
Универсальные кривые. Желательно и полезно графически изобразить реакцию системы второго порядка при особых значениях коэффициента демпфирования, независимо от величины входной единичной возмущающей функции или от параметров системы. Рассмотрим, например, решение для выходного углового перемещения при критическом демпфировании, т. е.

$$\theta = \frac{n_1}{n_2} \theta_0 [1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)]. \quad (1.32)$$

Для получения графика этого уравнения, независимо от приложенной входной величины, построим отношение $\theta \left(\frac{n_2}{n_1} \right) / \theta_0$.

Непосредственно видно, что величина $\theta \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$ представляет выходное перемещение, отнесенное к валу преобразователя обратной связи. Это позволяет легко сравнить с выходным перемещением. В этом случае одна кривая представляет критически демпфированный случай при всех значениях входной величины θ_0 . На фиг. 1.6 построена кривая, но она неприменима для разных систем второго порядка, несмотря на то, что эта система может быть критически демпфирована. Для иллюстрации предположим, что одна система имеет частоту собственных колебаний $\omega_n = 1 \text{ рад/сек}$, а вторая система имеет частоту 2 рад/сек вследствие других значений коэффициента усиления и момента инерции. Далее примем, что в обеих системах коэффициент демпфирования равен 1. Из уравнения (1.32) следует, что по истечении одной секунды $\theta \left(\frac{n_2}{n_1} \right) / \theta_0 = 1 - e^{-1} (1 + 1) = 0,264$ для пер-

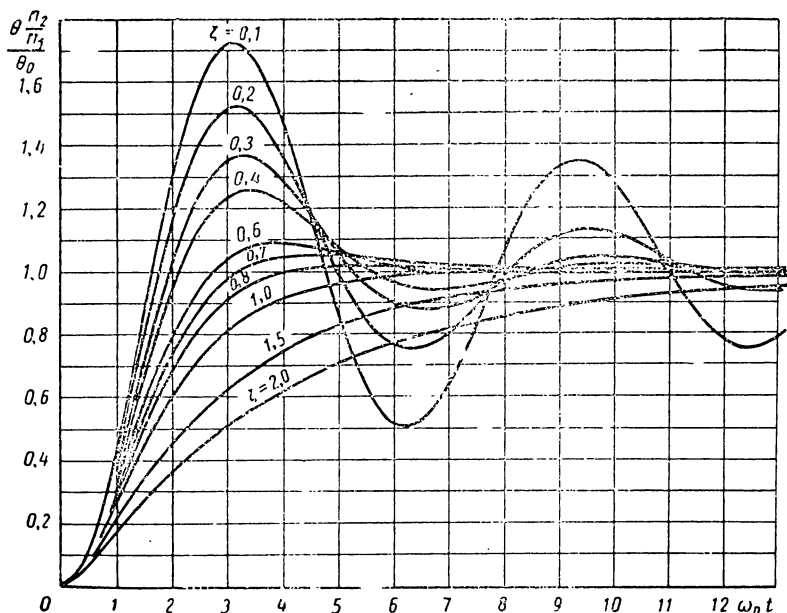
вой системы; для второй же системы это значение равняется 0,5. Если кривую реакции построить так, как показано на фиг. 1.6, то каждый раз, когда рассматриваемая система имеет другую частоту собственных колебаний, необходимо построить другое семейство кривых. Однако при дальнейшем рассмотрении можно обнаружить, когда системы имеют одинаковое отношение выходной величины к входной, что они будут иметь также одинаковые значения $\omega_n t$.



Фиг. 1. 6. Кривая при критическом демпфировании.

Отсюда следует, что при замене значения абсциссы t (фиг. 6) на безразмерное время, например $\omega_n t$, простой график можно построить для изображения реакции любой линейной системы второго порядка при заданном коэффициенте демпфирования. По очевидным соображениям подобные кривые называются универсальными кривыми; они изображены на фиг. 1. 7 при разных значениях относительного коэффициента демпфирования.

Критерии, определяющие реакцию переходного режима. Динамика любой линейной системы второго порядка полностью описывается



Фиг. 1. 7. Универсальные кривые переходного процесса в системе второго порядка при единичной входной возмущающей функции.

двумя параметрами ζ и ω_n . Для определения — какая величина участвует в реакции переходного режима, начнем с установления момента времени, когда наблюдается максимальное перерегулирование. Дифференцирование уравнения (1. 31) по времени приводит после упрощения к выражению

$$\frac{d}{dt} \frac{\theta}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \theta_0} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t. \quad (1. 33)$$

Теперь ясно, что первое перерегулирование наступает тогда, когда

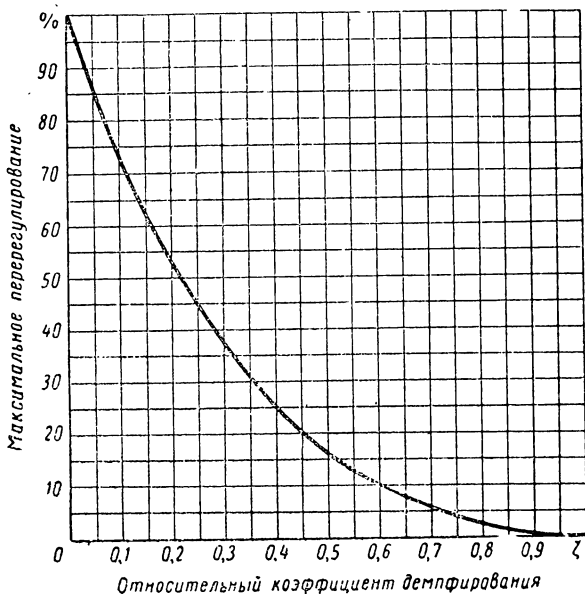
$$\omega_d t = \pi$$

или

$$\omega_n t = \pi / \sqrt{1-\zeta^2}. \quad (1. 34)$$

Подстановка этого результата в уравнение (1. 33) дает выражение для максимального мгновенного значения выходной величины. Следовательно,

$$\left[\frac{0}{\left(\frac{n_1}{n_2} \right) \theta_0} \right]_{\max} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (1.35)$$



Фиг. 1. 8. Кривая зависимости максимума перерегулирования (в процентах) от относительного коэффициента демпфирования для линейной системы второго порядка.

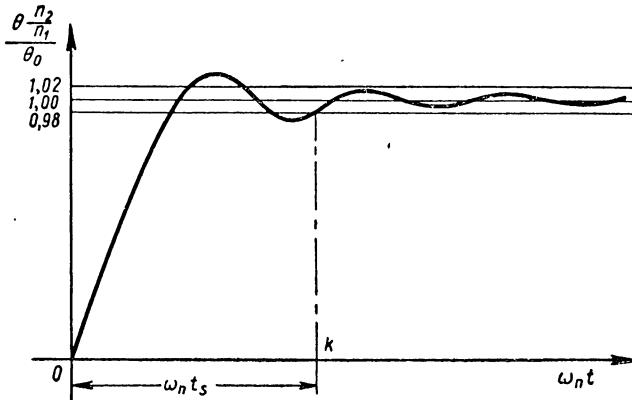
Кроме того, из уравнения (1. 35) следует, что максимальное перерегулирование в процентах равняется

$$\frac{\theta_{\max} - \theta}{\left(\frac{n_1}{n_2} \right) \theta_0} = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \%. \quad (1.36)$$

На фиг. 1. 8 показана кривая зависимости максимального перерегулирования в функции относительного коэффициента демпфирования ζ . На основании этой кривой следует, что заданному значению относительного коэффициента демпфирования соответствует вполне определенное максимальное перерегулирование данной системы. Следовательно, если параметры системы выбраны такими, что относительный коэффициент демпфирования равняется 0,4, то отсюда следует, что максимальное перерегулирование будет равно 25%.

Поэтому относительный коэффициент демпфирования можно рассматривать как критерий, который определяет максимальное перерегулирование системы.

Информация, которую можно непосредственно получать, зная собственную частоту и реакцию в переходном режиме, находится из безразмерной выходной реакции на единичную входную функцию при данном относительном коэффициенте демпфирования. Подобный график показан на фиг. 1. 9, причем одновременно нанесены линии, определяющие ширину зоны произвольных допусков $\pm 2\%$. Эту систему следует рассматривать в установившемся состоянии тогда, когда колебания не выходят за пределы допустимой зоны.



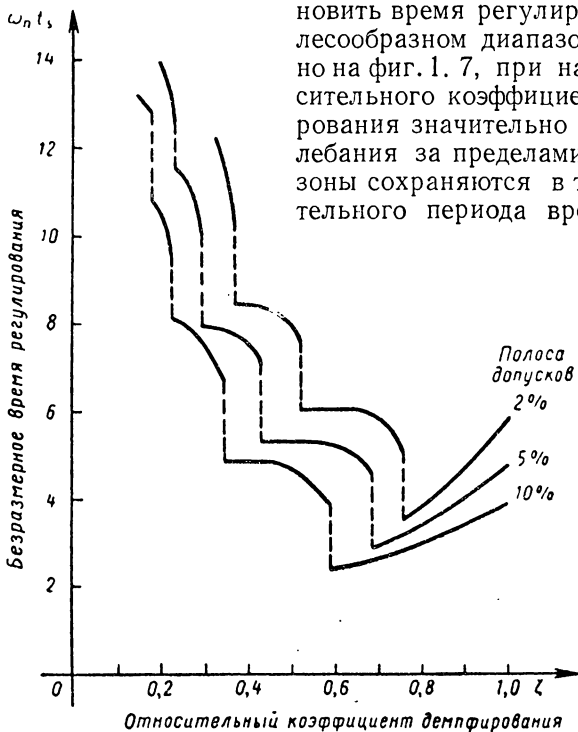
Фиг. 1. 9. Определение времени регулирования при $a \pm 2\%$ допустимой зоне.

Время, необходимое для достижения этого режима, называется временем регулирования. В качестве практического примера времени реакции любых систем необходимо построить допустимую зону, более или менее узкую или широкую, в зависимости от частных условий применения. Например на фиг. 1, 9 изображена допустимая зона при времени регулирования, равном $t_s = \frac{K}{\omega_n}$. Важнейший факт, определяемый на основании этой фигуры, состоит в том, что время регулирования обратно пропорционально частоте собственных колебаний системы. Если кривая реакции, показанная на фиг. 1. 9, применима к двум различным системам с одинаковым относительным коэффициентом демпфирования, то отсюда ясно, что одна из них с большей собственной частотой будет иметь меньшее время регулирования при реакции на входные команды или возмущения нагрузки. Следовательно, значение собственной частоты системы можно интерпретировать как критерий, который определяет величину времени регулирования.

Значения относительных коэффициентов демпфирования в системах управления с обратной связью часто находятся в пределах

$$0,3 \leq \zeta \leq 0,8.$$

Верхнее ограничение обусловлено тем, что при $\zeta > 0,8$ замедляется реакция системы в начальный момент времени и вследствие этого система становится вялой. Иными словами, время разгона системы велико. Время разгона обычно определяется в виде отрезка времени, необходимого для протекания процесса от 10 до 90 % конечного значения. С другой стороны, нижний предел имеет целью установить время регулирования в целесообразном диапазоне. Как видно на фиг. 1. 7, при наличии относительного коэффициента демпфирования значительно ниже 0,3 колебания за пределами допустимой зоны сохраняются в течение длительного периода времени.



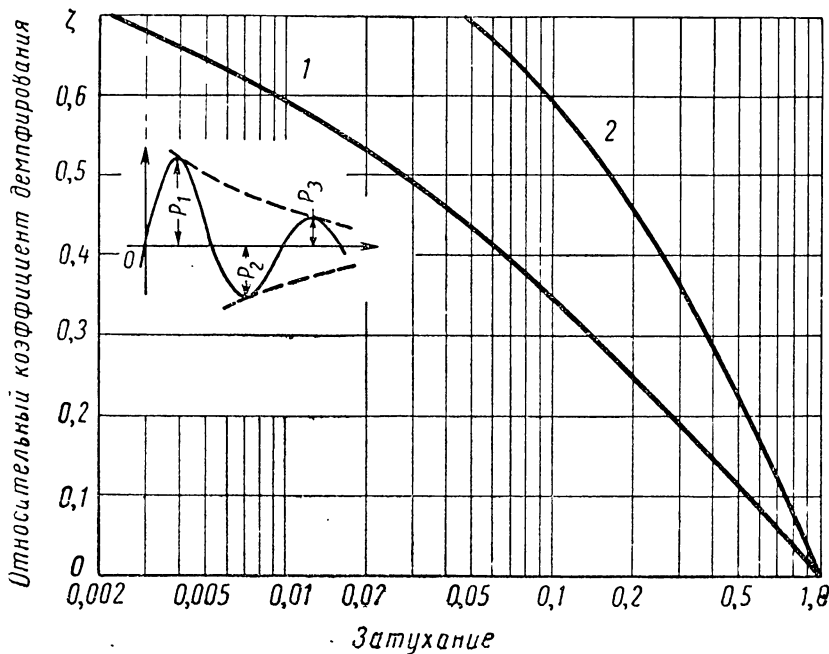
Фиг. 1. 10 а. Кривые времени регулирования в зависимости от коэффициента демпфирования для нескольких зон допусков.

Влияние коэффициентов усиления на время регулирования. Из уравнения (1. 31) следует, что затухание переходных явлений с постоянной времени, равной $\frac{1}{\zeta \omega_n} = 2 \frac{J}{F}$, очевидно не зависит от коэффициента усиления K системы.

Время регулирования можно тогда приравнять трех-пятикратному значению постоянной времени.

Однако выражение для времени регулирования получается более наглядным, если его определить через диапазон допусков. Подобное описание приводит к выводу, что на время регулирования влияет до некоторой степени коэффициент усиления разомкнутой цепи. Измерение времени регулирования, выраженное через $a \pm 5\%$ диа-

пазона допусков, полностью подтверждает этот вывод после нанесения на кривые фиг. 1. 7 для каждого заданного значения относительного коэффициента демпфирования. Эти результаты воспроизведены на фиг. 1. 10а. Коэффициенты инерции и демпфирования предполагаются постоянными, а величина ζ изменяется в результате изменения коэффициента усиления. Следовательно, при увеличении коэффициента усиления выше значения, при котором $\zeta = 1$, время регулирования сперва уменьшается, достигает оптимального значения около



Фиг. 1. 10б. Кривые относительного коэффициента демпфирования системы второго порядка в зависимости от затухания за период или полупериод:

1 — затухание за период $P_2/P_1 = \sqrt{P_2/P_1}$; 2 — затухание за полупериод P_2/P_1 .

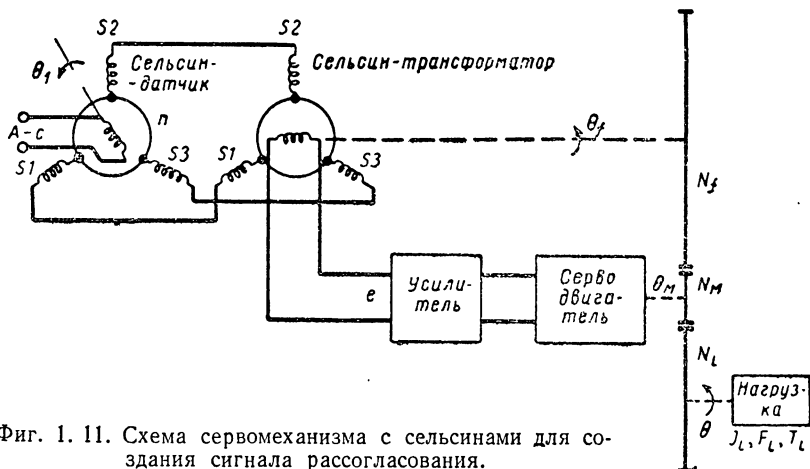
0,7, а затем увеличивается при низких значениях ζ . Прерывность этой кривой обусловлена тем, что конечное вхождение в допустимую зону может произойти в течение одного периода колебаний.

Затухание за период. При экспериментальных исследованиях и при моделировании часто необходимо определить величину коэффициента затухания системы второго порядка или того или иного ее звена. Для этой цели можно подвергнуть систему воздействию единичной входной функции и проверить наличие или отсутствие максимального перегуливания выходной величины, как это показано на фиг. 8. Другой способ состоит в подаче импульса на вход системы и в сравнении отношения амплитуды второго положительного пика к амплитуде первого пика. Затухание линейной системы второго

порядка определимо, если оно происходит в течение первого периода, начинающегося с момента возникновения первого пика. Конечно, степень затухания в течение периода зависит от коэффициента демпфирования. На фиг. 1. 10б построены кривые по значениям, применимым к затуханию, измеренному за половину периода или за полный период.

1. 2. АНАЛИЗ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ВХОДНАЯ ЕДИНИЧНАЯ ФУНКЦИЯ СКОРОСТИ

Применение пары потенциометров, соединенных по мостовой схеме, для определения ошибки системы, которая следит за командами скорости, не является практичным по сравнению с использованием пары сельсинов. Это связано с тем обстоятельством, что сельсины могут непрерывно вращаться (в противоположность однооборотным и десятиоборотным потенциометрам) и практически лишены

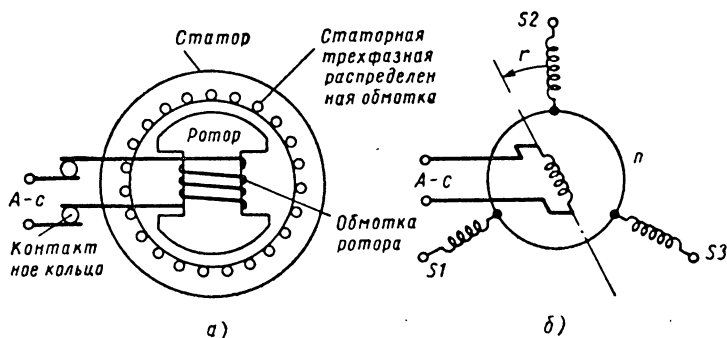


Фиг. 1. 11. Схема сервомеханизма с сельсинами для создания сигнала рассогласования.

недостатков, связанных с разрешающей способностью и с проблемами щеточных контактов. На фиг. 1. 11 показана усовершенствованная система. Перед тем, как начать анализ подобной системы, изучим сперва рабочие характеристики сельсина для полного понимания работы этой системы.

Конструктивные особенности сельсина. Датчик сигналов управления состоит из неподвижной части, называемой статором, и вращающейся части, называемой ротором. Внутренняя поверхность статорного железа имеет пазы для размещения распределенной трехфазной обмотки, для чего обычно применяются концентрические катушки. Ротор имеет цилиндрическую конструкцию с вырезами для размещения многовитковой роторной обмотки, как показано на фиг. 1. 12, а. В обмотку ротора подается переменное напряжение через контактные кольца, через обмотку начинает течь ток возбуждения и возникает

переменное магнитное поле. Согласно определению электрическое нулевое положение соответствует максимальной связи с фазой 2 статорной обмотки. На фиг. 1. 12, б показано положение, когда ось ротора смещена из этого электрического нулевого положения на угол θ . Если ротор закреплен в этом положении в пространстве и через обмотку ротора протекает ток, то в каждой фазе статора наводится напряжение, как и во вторичной трансформаторной обмотке. При пред-



Фиг. 1. 12. Конструктивные особенности сельсина-датчика и его схема.

положении, что магнитный поток распределен синусоидально в воздушном зазоре, следует, что э. д. с. во второй фазе сельсина пропорциональна $\cos \theta$. Отсюда

$$E_{n2} = E_m \cos \theta, \quad (1.37)$$

где E_m — среднеквадратичное напряжение, наведенное во второй фазе и соответствующее условиям максимальной связи. При смещении третьей фазы на 120° относительно второй фазы по направлению, противоположному предполагаемому перемещению ротора, среднеквадратичное напряжение, наведенное в этом положении, будет равняться

$$E_{n3} = E_m \cos (\theta + 120). \quad (1.38)$$

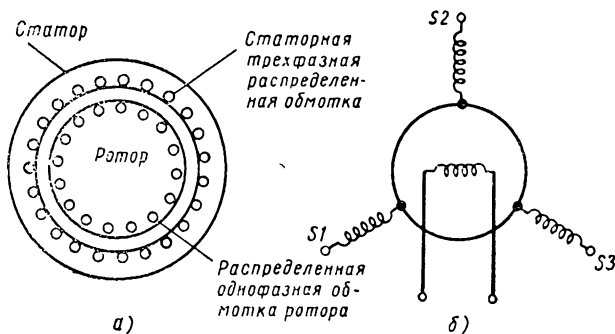
Аналогично для фазы s_1

$$E_{n1} = E_m \cos (\theta - 120). \quad (1.39)$$

Косинусные функции в основном учитывают изменения коэффициента связи между роторной обмоткой и соответствующей статорной фазовой обмоткой. Наведенные напряжения сдвинуты по фазе на одинаковый угол, так как они создаются тем же магнитным потоком.

Детали конструкции сельсина-трансформатора несколько отличаются от сельсинов-датчиков, предназначенных для передачи сигнала

управления. Основная разница состоит в том, что воздушный зазор одинаков вследствие цилиндрической конструкции ротора, как показано на фиг. 1. 13. Эта конструктивная особенность позволяет свести до минимума магнитное рассеяние по сравнению с конструкцией, показанной на фиг. 1. 12. Далее, роторная обмотка обычно равномерно распределена по окружности ротора в противоположность концентрированной обмотке, применяемой в сельсине-датчике. Еще одно различие состоит в определении электрического нулевого положения. У сельсин-трансформатора оно определяется как положение ротора, которое имеет связь с фазой 2 статорного нуля. Это положение показано на фиг. 1. 12, б. Статорная обмотка является также уравновешенной трехфазной обмоткой, однако она отличается от сель-



Фиг. 1. 13. Конструктивные особенности сельсина-трансформатора и его схема с ротором в электрическом нуле.

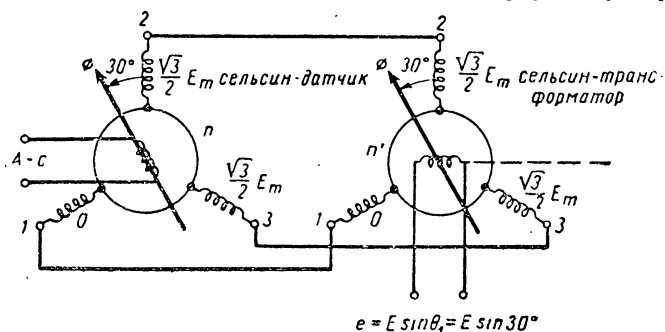
сина-датчика в том отношении, что обладает более высоким сопротивлением на фазу. Эта последняя особенность позволяет питать некоторые сельсины-трансформаторы от простого датчика.

Работа системы. После электрического соединения зажимов статора, как показано на фиг. 1. 14, и возбуждения ротора сельсина-датчика переменным напряжением, пара сельсинов может быть использована в качестве устройства для определения рассогласования между положением вала ротора сельсина-датчика и положением вала ротора сельсина-трансформатора, которое выражается в виде напряжения ошибки, появляющегося на зажимах ротора сельсина-трансформатора. Предположим, например, что ротор сельсина-датчика сигналов смещен на угол 30° ; тогда согласно уравнениям (1. 37)—(1. 39) среднеквадратичные значения фазовой наведенной э. д. с. будут такими, как показано на фиг. 1. 14. Ось переменного магнитного поля совпадает с осью ротора. Ввиду того что статор сельсина-датчика соединен со статором сельсина-трансформатора, первый питает токком намагничивания статор сельсина-трансформатора, в котором в свою очередь возникает пульсирующее поле в его воздушном зазоре. Величина фазовых токов в статоре сельсина-трансформатора должна быть такой, чтобы результирующий магнитный поток в воздушном зазоре наводил напряжения в каждой фазе,

которые должны быть равны и противоположны по направлению напряжения в статоре сельсина-датчика. Это представляет условие равновесия при данном значении θ сельсина-датчика. Результирующий магнитный поток в сельсине-трансформаторе увеличивается до положения, которое соответствует совпадению с осью ротора сельсина-датчика. Если ротор сельсина-трансформатора закреплен по предположению в своем электрическом нулевом положении, то отсюда ясно, что наведенное напряжение в роторной обмотке будет определяться выражением

$$e = E \sin \theta, \quad (1.40)$$

где E — максимальное среднеквадратичное значение напряжения, наведенного в роторной обмотке сельсина- трансформатора при макси-



Фиг. 1. 14. Принципиальная схема соединения сельсина-датчика и сельсина-трансформатора, предназначенная для работы в качестве измерения угла рассогласования.

мальной связи с магнитным полем. Величина этого роторного напряжения является, следовательно, показателем рассогласования между положениями роторов сельсина-датчика и сельсина-трансформатора. Если теперь ротор сельсина-трансформатора повернуть вручную против часовой стрелки на угол 30° , как показано на фиг. 1. 13, то э. д. с. роторной обмотки будет равна нулю и тем самым свидетельствовать о точном совпадении между перемещениями сельсина-датчика и сельсина-трансформатора. Конечно, если применить эти устройства в системе управления с обратной связью, как показано на фиг. 1. 11, то на выходе сельсина-трансформатора появится сигнал рассогласования для системы, причем этот сигнал рассогласования будет сведен до нуля под действием входных сигналов положения, поступающих через обратную связь.

Обратим внимание на работу этой системы, когда на вход поступает сигнал скорости; это означает, что ротор сельсина-датчика вращается с постоянной скоростью. В конечном состоянии желательно, чтобы выход вращался также с постоянной скоростью в соответствии с сигналами команды. Чтобы понять, как система, изображенная на фиг. 1. 11, осуществляет это, рассмотрим, что происходит непосредственно после появления на входе единичной функции скорости,

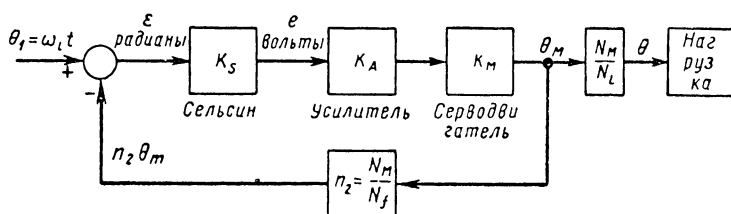
Предположим, что первоначально ротор находится в своем электрическом нулевом положении. Напомним, что соединение двух сельсинов представляет детектор ошибки, чувствительный к положению, как это становится очевидно из уравнения (1. 40). Следовательно, сигнал рассогласования будет генерироваться до тех пор, пока существует рассогласование положения двух валов (независимо от того, как это возникло), т. е. роторное напряжение будет генерироваться до тех пор, пока ротор сельсина находится в фиксированном смещенном положении или его положение будет линейно увеличиваться со временем (входная функция скорости), или параболически увеличиваться со временем (входная функция ускорения). Следует подчеркнуть, что входной величиной для ротора сельсина-датчика является скорее угловое перемещение $\theta = \omega_i t$, чем $\frac{d\theta}{dt}$, как это видно на фиг. 1. 11.

Предположим теперь, что угловое положение, измеряемое величиной θ_1 , увеличивается со временем, вследствие чего ротор смещается из электрического нуля и на входных зажимах усилителя появляется сигнал рассогласования. Непосредственно после появления сигнала на входе, ротор сельсина-трансформатора остается неподвижным вследствие инерционных сил, связанных с выходным валом. По истечении некоторого времени сигнал рассогласования возрастает и система сервоусилитель-серводвигатель будет развивать достаточный момент, чтобы ускорить вращение нагрузки до скорости входной команды. При достижении этого положения скорость вала сельсина-трансформатора будет соответствовать скорости сигналов команды на валу сельсина-датчика. Однако между двумя роторами будет существовать сдвиг по фазе; это условие абсолютно необходимо для возникновения сигнала рассогласования, чтобы генерировать достаточный момент для преодоления вязкого трения, следовательно, для поддержания постоянной выходной скорости. Конечно, величина сигнала рассогласования зависит от коэффициента усиления прямой цепи. Чем больше этот коэффициент усиления, тем слабее сигнал рассогласования и, следовательно, меньше динамическая погрешность системы.

Работу этой системы можно лучше понять, напомнив, что ротор сельсина-датчика вращается со скоростью команды; ось магнитного поля также вращается с этой скоростью. Кроме того, соответствующие намагничивающие токи, создающие магнитный поток в статоре сельсина-трансформатора, будут такими чтобы результирующий магнитный поток, который является пульсирующим, одновременно вращался с такой же скоростью, как и входная скорость.

Когда ротор сельсина-датчика перемещается из электрического нулевого положения под действием входной величины, магнитный поток в сельсине-трансформаторе также перемещается из его электрического нулевого положения и тем самым наводит напряжение в роторной обмотке. Если входное угловое перемещение быстро возрастает вследствие большой скорости команды, то сигнал рассогласования

становится соответственно большим, а это в свою очередь означает возможность образования момента для большого ускорения с целью установления регулируемой выходной скорости. Когда же ротор сельсина-трансформатора вращается с одинаковой скоростью, как и ротор сельсина-датчика, то не будет относительного перемещения между магнитным полем сельсина-трансформатора и его роторной обмотки. Однако при этих обстоятельствах ось роторной обмотки не будет находиться под прямым углом к оси магнитного поля, чтобы обеспечить достаточную связь между ними и, таким образом, сигнал рассогласования, необходимый для генерирования выходной величины, будет сохраняться вследствие трансформации напряжения в сельсине-трансформаторе. Интересно заметить, что при наличии подобной схемы выходная скорость точно соответствует



Фиг. 1. 15. Блок-схема с указанием коэффициентов усиления звеньев.

величине команды, т. е. система работает без ошибки скорости, но возможна ошибка положения. Например, если передаточные отношения обратной связи и редуктора нагрузки равны единице, то выходная скорость будет одинакова с входной скоростью в конечном состоянии. В другом же случае сигнал рассогласования будет изменяться синусоидально с частотой, пропорциональной разнице скоростей; это означает, что такая система не будет работать надежно, так как сигнал рассогласования изменяет свой знак, и, следовательно, вращение выходного звена также реверсируется. Способность системы работать без ошибки регулируемой скорости следует приписать применению позиционно чувствительного детектора ошибки.

Если сельсины заменить устройствами, чувствительными к скорости, например, на пару электрических тахометров, то система будет работать с ошибкой скорости для создания момента, необходимого для преодоления вязкого трения.

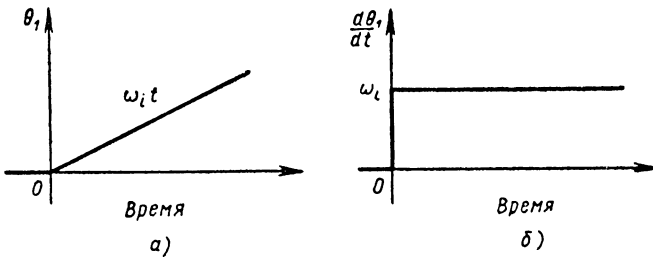
Математический анализ. Блок-схема системы показана на фиг. 1. 15. Для упрощения предполагается, что момент нагрузки M'_L равен нулю, так что дифференциальное уравнение, описывающее систему, будет

$$\epsilon K_S K_A K_M = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + F \frac{d \theta}{dt}, \quad (1.41)$$

где K_S — постоянная сельсина, выраженная в $v/\text{рад}$; другие постоянные имеют одинаковые значения, как было сказано выше.

Кривая входной функции показана на фиг. 1. 16. На фиг. 1. 16, а показано изменение входного перемещения, выраженного в радианах; на этой фигуре изображена кусочно-линейная входная функция положения с наклоном $\omega_i \text{ рад./сек.}$ Ввиду того что детектор ошибки является позиционно-чувствительным, такая входная функция имеет существенное значение. Слева на фиг. 1. 16 дана единичная входная функция скорости, которая показывает только то, что наклон кривой зависимости положения от времени равняется нулю при $t = 0^-$, в то время как при $t = 0^+$ этот наклон изменяется до конечного значения, например ω_i и сохраняет это значение в дальнейшем. Сигнал рассогласования, выраженный в радианах, равен

$$\varepsilon = \theta - n_2 \theta_M. \quad (1. 42)$$



Фиг. 1. 16. Входная функция для системы, показанной на фиг. 11.

Теперь благодаря значительному упрощению динамика системы может быть определена сперва путем решения относительно сигнала рассогласования, а затем применением уравнения (1. 42) для получения решения для выходной величины. Подстановка уравнения (1. 42) в уравнение (1. 41) приводит к выражению

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d \varepsilon}{dt} + n_2 K_s K_A K_M \varepsilon = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + F \frac{d \theta}{dt}. \quad (1. 43)$$

Введение

$$\frac{d \theta_1}{dt} = \omega_i \quad \text{и} \quad K = n_2 K_s K_A K_M \quad (1. 44)$$

позволяет написать последнее уравнение в следующем виде:

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d \varepsilon}{dt} + K \varepsilon = J \frac{d \omega_i}{dt} + F \omega_i. \quad (1. 45)$$

Для нахождения решения этого уравнения можно применить обычный способ.

Решение ε_{ss} находится путем приравнивания нулю производных по времени в уравнении (1. 45). Следовательно,

$$\varepsilon_{ss} = \frac{F}{K} \omega_i \text{ рад.} \quad (1. 46)$$

Здесь ϵ_{ss}^* выражено в радианах. Напомним, что эта величина представляет погрешность положения вследствие воздействия входной функции скорости. У системы с неизменными параметрами большей входной скорости соответствует больший сигнал рассогласования, необходимый для генерирования выходной скорости. Из равенства (1.46), кроме того, следует, что момент, создаваемый двигателем в установившемся состоянии, должен быть достаточен для преодоления влияния вязкого трения. Отсюда

$$\epsilon_{ss} K_s K_A K_M = F \omega_M.$$

Но $\omega_f = n_2 \omega_M = \omega_i$, где ω_f — скорость вала обратной связи. Так как

$$\epsilon_{ss} K_s K_A K_M = F \frac{\omega_i}{n_2},$$

то отсюда следует, что

$$\epsilon_{ss} = \frac{F}{n_2 K_s K_A K_M} \omega_i = \frac{F}{K} \omega_i.$$

Для обобщения результатов, выраженных через ζ и ω_n , величину $\frac{F}{K}$ можно заменить на

$$\frac{F}{K} = \frac{\zeta F_c}{K} = \frac{2\zeta \sqrt{KJ}}{K} = \frac{2\zeta}{\omega_n}. \quad (1.47)$$

Тогда уравнение (1.46) приобретает вид

$$\epsilon_{ss} = \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega_i. \quad (1.48)$$

Приравнивая внешнее возмущение нулю в уравнении (1.45), получим характеристическое уравнение

$$s^2 + \left(\frac{F}{J}\right) s + \frac{K}{J} = 0,$$

которое совпадает с уравнением для системы на фиг. 1.1. Этот результат не является неожиданным, потому что в обоих случаях детекторы ошибок являются позиционным чувствительными устройствами. Корни этого уравнения имеют тот же вид, как и раньше, а именно

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_d.$$

Отсюда решение может быть записано в виде

$$\epsilon_c = e^{-\zeta \omega_n t} (k' \cos \omega_d t + k'' \sin \omega_d t), \quad (1.49)$$

где k' и k'' представляют произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям.

* ϵ_{ss} имеет одинаковую форму, как и задающая функция, т. е. постоянна

Общее решение уравнения (1. 45) равняется сумме выражений (1. 48) и (1. 49). Следовательно

$$\varepsilon = 2\zeta \frac{\omega_i}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} (k' \cos \omega_d t + k'' \sin \omega_d t). \quad (1. 50)$$

Возможные варианты начальных условий при $t = 0^+$ представлены в таблице. На фиг. 1. 16 показано, что $\theta_1 = 0$ и $\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_i$ при $t = 0^+$, так как влияние инерции θ_M и $\frac{d\theta_M}{dt}$ равны нулю. Соответствующие значения ε были определены из уравнения (1. 42)

	θ_1	ε	θ_M
	0	0	0
$\frac{d}{dt}$	ω_i	ω_i	0

Подстановка первого начального условия в выражение для общего решения дает

$$k' = -2\zeta \frac{\omega_i}{\omega_n}. \quad (1. 51)$$

Чтобы применить второе начальное условие, необходимо предварительно дифференцировать уравнение (1. 50), что приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & -k' \zeta \omega_n \cos \omega_d t e^{-\zeta\omega_n t} - k' \omega_d e^{-\zeta\omega_n t} + \\ & + k'' \omega_d e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - k'' (\zeta\omega_n) \sin \omega_d t e^{-\zeta\omega_n t}. \end{aligned}$$

Введение начальных условий дает

$$k'' = \frac{\omega_i}{\omega_d} (1 - 2\zeta^2). \quad (1. 52)$$

Если значения k' и k'' ввести в уравнение (1.50), то получим

$$\varepsilon = \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega_i + e^{-\zeta\omega_n t} \left[-\frac{2\zeta}{\omega_n} \omega_i \cos \omega_d t + \frac{\omega_i}{\omega_d} (1 - 2\zeta^2) \sin \omega_d t \right].$$

После перегруппировки имеем

$$\varepsilon \frac{\omega_n}{\omega_i} = 2\zeta \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right]. \quad (1. 53)$$

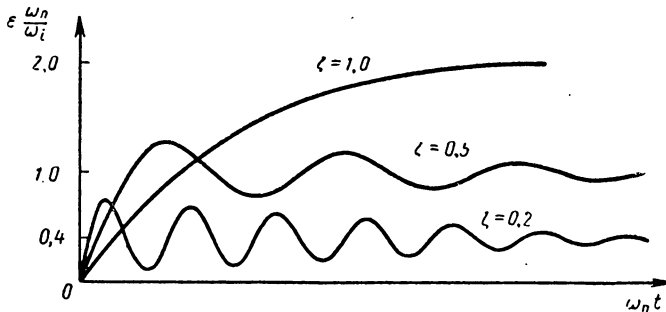
Объединяя члены с синусами и косинусами, можно получить более простую форму

$$\varepsilon \frac{\omega_n}{\omega_i} = 2\zeta \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi_d) \right], \quad (1.54)$$

где

$$\varphi_d = \arctg \frac{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}.$$

Эти выражения для сигнала рассогласования справедливы при $0 \leq \zeta \leq 1,0$ и $M'_L = 0$. На фиг. 1.17 построены кривые этого решения при некоторых значениях коэффициента затухания. Эти графики



Фиг. 1. 17. Кривые, характеризующие уравнение (1. 54), для нескольких значений относительного коэффициента демпфирования.

показывают, что с уменьшением ζ ошибка запаздывания в установившемся состоянии также уменьшается. Отсюда следует, что уменьшение относительного коэффициента демпфирования влечет за собой увеличение коэффициента усиления, а последнее в свою очередь означает уменьшение величины ε_{ss} , как это подтверждает уравнение (1. 46). Здесь предполагалось, что величины F и J остаются постоянными.

Решение для выходного перемещения. Угол поворота ротора двигателя определяется из уравнения (1. 42) и равен $\theta_M = \frac{1}{n_2} (\theta_1 - \varepsilon)$. Угол поворота вала нагрузки связан с углом поворота вала двигателя соотношением $\theta = n_1 \theta_M$, где n_1 представляет передаточное отношение редуктора, соединяющего вал двигателя с валом нагрузки.

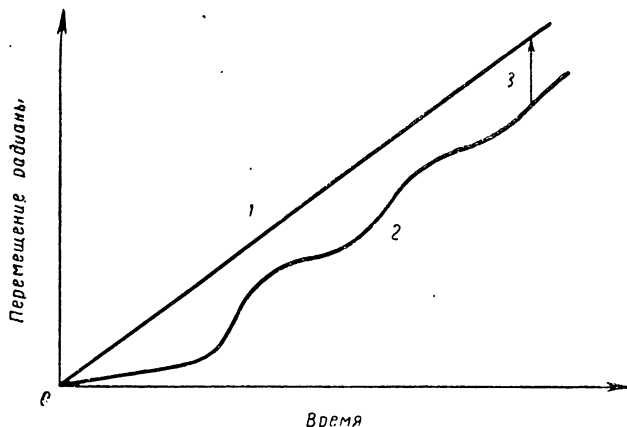
Поэтому угол выходного перемещения равен

$$\theta = \frac{n_1}{n_2} (\theta_1 - \varepsilon). \quad (1.55)$$

Если в последнее уравнение ввести $\theta_1 = \omega_i t$ и подставить ε из уравнения (1. 54), то получим требуемый результат

$$\theta \frac{n_2}{n_1} = \left[\omega_i t - \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega_i \left(1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \varphi_d \right) \right]. \quad (1.56)$$

Графическое построение этого решения дано на фиг. 1. 18. Заметим, что после окончания переходного процесса наклон кривой выходного перемещения равен наклону кривой входного перемещения; это



Фиг. 1. 18. Характеристика реакции системы второго порядка на единичную входную функцию скорости:

1 — $\theta_1 = \omega t$; 2 — по уравнению (1. 56) при $n_1 = n_2$; 3 — ошибка запаздывания установившегося состояния.

означает, что две скорости равны между собой, но между двумя валами имеет место запаздывание при установлении положения, т. е. ошибка запаздывания по положению.

1. 3. ТРЕБОВАНИЯ К ХАРАКТЕРИСТИКАМ СИСТЕМ

При проектировании систем второго порядка, которые применяются для регулирования скорости, часто ограничивается допустимая ошибка запаздывания по положению в установившемся режиме, а также максимальное перерегулирование в переходном режиме. Обычно невозможно удовлетворить обоим требованиям при заданных параметрах. Реакция системы в установившемся режиме описывается уравнением (1. 46)

$$\epsilon_{ss} = \frac{F}{K} \omega_i, \quad (1. 57)$$

а реакция системы в переходном режиме содержит относительный коэффициент демпфирования согласно уравнению (1. 17)

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}. \quad (1. 58)$$

Как правило, члены, связанные с вязким трением и инерцией, делаются возможно малыми, так что в системе остается одна регулируемая переменная величина, а именно коэффициент усиления K

разомкнутой цепи. Из равенства (1. 57) следует, что значение коэффициента усиления K , необходимого для удовлетворения требования о допустимой ошибке запаздывания по положению, может быть легко определено при заданных значениях F и ω . Однако трудности возникают в связи с тем, что применение этого коэффициента усиления в уравнении (1. 58) может быть связано с такими значениями ζ , которые делают невозможным сохранение максимального перерегулирования в допустимых пределах. Отсюда вытекает необходимость изменения основной конструкции самой системы второго порядка.

Такая задача возникает не только в случае входной функции скорости, хотя эта функция определенно имеет большое значение, но, кроме того, она возникает для таких систем второго порядка, которые следят за сигналами команды положения при наличии внешних возмущений нагрузки. При этих условиях рассогласование между выходной величиной и командой определяется

$$\varepsilon_{ss} = \frac{M'_0}{K} n_2, \quad (1. 59)$$

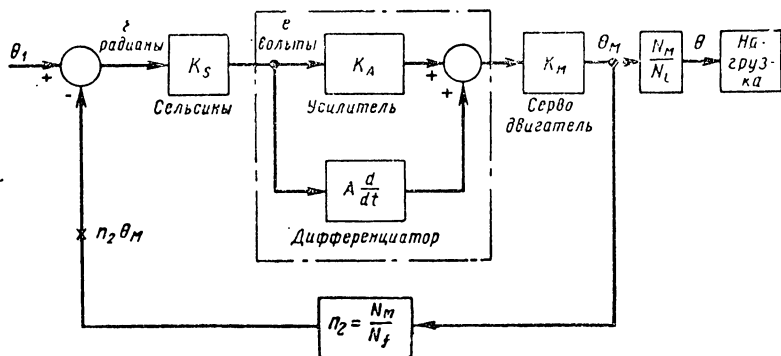
где M'_0 — величина внешней нагрузки. Если эта величина не выходит за определенные пределы, то необходимо обеспечить достаточно большое усиление, что в свою очередь выражается в низком относительном коэффициенте демпфирования с последующим ухудшением характеристики переходного режима. Такая же задача возникает в случае, когда нет внешних возмущений, но требуется очень высокая точность. В этих условиях приобретают большое и вредное влияние недостатки звеньев системы, например, такие недостатки, как кулоново трение и трение скольжения в потенциометрах и сельсинах, влияние зоны нечувствительности и зазоров в серводвигателе. Подобные влияния могут быть значительно уменьшены применением высокого коэффициента усиления.

Очевидно, что необходимость высокого коэффициента усиления для точных систем регулирования с обратной связью является неизбежной и что одинаково неизбежна необходимость сохранения удовлетворительных динамических свойств.

Отсюда ясно, что существует необходимость в надлежащих компенсационных схемах, которые могут предотвратить ухудшение характеристики переходного режима, несмотря на применение высокого коэффициента усиления. Хотя имеется несколько методов подобной компенсации, но только два из них являются действительно практически пригодными и поэтому широко применяются. Первый метод состоит в применении демпфирования, пропорционального скорости рассогласования регулируемой величины, по второму методу применяются демпфирование, пропорциональное скорости выходной величины. Рассмотрение схем, рекомендуемых эти методы, входит в задачу последующих разделов настоящей главы.

1. 4. СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДЕМПФИРОВАНИЕМ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ СКОРОСТИ РАССОГЛАСОВАНИЯ. ВХОДНАЯ ФУНКЦИЯ СКОРОСТИ

Система в состоянии демпфировать пропорционально скорости рассогласования, когда образование выходной величины зависит от скорости изменения сигнала рассогласования. Применение демпфирования, пропорционального скорости рассогласования в системе, схема которой изображена на фиг. 1. 19, осуществляется просто путем включения усилителя, который создает выходной сигнал, содержащий член, пропорциональный производной входной величины, и сигнал, пропорциональный самой входной величине. Тогда



Фиг. 1. 19. Блок-схема системы второго порядка с демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования.

момент, создаваемый серводвигателем, будет зависеть не только от величины позиционной ошибки, но также от скорости ее изменения во времени. Подобная система регулирования называется пропорциональным регулятором с регулированием по производной. Когда демпфирования пропорционального скорости рассогласования нет, то система будет называться просто пропорциональным регулятором. На фиг. 1. 19 показана блок-схема системы с демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования. Выходные звенья усилителя (пропорциональный и по производной) показаны в виде двух параллельных цепей, которые суммируют сигнал до подачи его в серводвигатель. Величина A — коэффициент усиления скорости рассогласования — обычно выражается в $в/в/сек$ или проще в $сек$. Одной из задач последующего анализа является оценка величины A при заданных коэффициентах демпфирования.

Работа системы с блок-схемой фиг. 1. 19 одинакова с работой системы на фиг. 1. 11 за исключением того, что коэффициент демпфирования теперь зависит от совместного влияния эквивалента вязкого трения двигателя и рассогласования скорости. До нахождения аналитического решения рассмотрим физический процесс в системе:

Дифференциальное уравнение движения системы в данном случае будет

$$\varepsilon K_s K_A K_M + K_s K_M A \frac{d\varepsilon}{dt} = J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F \frac{d\theta_M}{dt}. \quad (1.60)$$

Левая часть уравнения представляет момент, создаваемый двигателем, и отличается от соответствующего члена уравнения (1.41) только множителем в виде производной. Сигнал рассогласования ε , выраженный в радианах, может быть определен из уравнения (1.42). Вводя θ_M из этого уравнения в уравнение (1.60), получим

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + (F + n_2 K_s A K_M) \frac{d\varepsilon}{dt} + n_2 K_s K_A K_M \varepsilon = J \frac{d\theta_1}{dt^2} + F \frac{d\theta_1}{dt}. \quad (1.61)$$

Коэффициент усиления разомкнутой цепи пропорциональной системы был определен в разделе 1.2,

$$K = n_2 K_s K_A K_M. \quad (1.62)$$

Для системы фиг. 1.19 он имеет то же значение. Определим следующую дополнительную величину для упрощения последующих математических выкладок.

Коэффициент усиления разомкнутой цепи по скорости рассогласования

$$Q_\varepsilon \equiv n_2 K_s A K_M. \quad (1.63)$$

Проверка размерностей этого равенства показывает, что Q_ε представляет действительный член вязкого трения, амплитуду которого можно независимо регулировать путем изменения величины A .

Размерный характер величины Q_ε можно легко проверить при рассмотрении уравнения (1.61), из которого следует, что эта величина объединена с членом вязкого трения F . Эти выражения для K и Q_ε могут быть легко получены на основании блок-схемы на фиг. 1.19. Для этого необходимо только разомкнуть цепь в точке присоединения обратной связи, а затем образовать произведение коэффициентов усиления каждого блока, начиная с выходного звена суммирующего устройства, вплоть до зажимов, где цепь была разомкнута. Следовательно, для получения коэффициента K необходимо разомкнуть цепь в точке X на фиг. 1.19 и затем перемножить коэффициенты усиления блоков, расположенных в пропорциональном канале, который включает сельсин K_s , усилитель K_A , серводвигатель K_M и элементы обратной связи n_2 . Для нахождения Q_ε необходимо рассмотреть канал сигнала скорости рассогласования, который содержит сельсин K_s , дифференциатор A , серводвигатель K_M и элементы обратной связи n_2 .

После подстановки уравнений (1. 62) и (1. 63) в уравнение (1. 61), а также $\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_i$ дифференциальное уравнение системы при постоянной входной скорости приобретает вид

$$J \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + (F + Q_e) \frac{d\varepsilon}{dt} + K\varepsilon = J \frac{d\omega_i}{dt} + F\omega_i. \quad (1. 64)$$

Применив опять обычный метод нахождения решения дифференциального уравнения, получаем, что значение сигнала рассогласования, необходимого при установившемся состоянии, равняется, как и раньше, $\varepsilon_{ss} = \frac{F}{K} \omega_i$ (радиан). Характеристическое уравнение однако изменяется, а именно

$$s^2 + \frac{F + Q_e}{J} s + \frac{K}{J} = 0, \quad (1. 65)$$

так что корни этого уравнения, определяющие характер переходного режима, будут равны

$$s_{1, 2} = -\frac{F + Q_e}{2J} \pm j \sqrt{\frac{K}{J} - \left(\frac{F + Q_e}{2J}\right)^2}. \quad (1. 66)$$

Они получены для случая, когда демпфирование меньше критического. Из последнего уравнения следует, что критическое вязкое демпфирование равно

$$(F + Q_e)_c = 2\sqrt{KJ}. \quad (1. 67)$$

Сравнение уравнений (1. 67) и (1. 15) показывает, что независимо от характера демпфирования системы (только вязкого демпфирования или одновременного вязкого демпфирования и демпфирования, пропорционального скорости рассогласования) критическое значение коэффициента демпфирования будет определяться величиной $2\sqrt{KJ}$; это означает, что коэффициент демпфирования сохраняет свою зависимость от пропорционального усиления разомкнутой цепи и инерции системы.

Как следует из уравнения (1. 17), относительный коэффициент демпфирования системы второго порядка всегда выражается через отношение значений суммарного демпфирования к критическому значению. В этом случае относительный коэффициент демпфирования приобретает значение

$$\zeta = \frac{F + Q_e}{2\sqrt{KJ}}. \quad (1. 68)$$

При рассмотрении характеристического уравнения становится очевидно; что выражение для собственной частоты остается неизменным, т. е.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}.$$

Уравнение (1. 66) приобретает следующую форму, если его выразить через относительный коэффициент демпфирования и собственную частоту

$$s_{1, 2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d.$$

Как видно, это то же уравнение, что и уравнение (1. 21). Конечно имеется разница, которая связана с относительным коэффициентом демпфирования. Полное выражение для сигнала рассогласования будет

$$\varepsilon = \frac{F}{K} \omega_i + e^{-\zeta\omega_n t} (k' \cos \omega_d t + k'' \sin \omega_d t). \quad (1. 69)$$

Для введения установившейся ошибки, выраженной через величины ζ и ω_n , можно поступать так же, как это было сделано выше. Однако, чтобы иметь возможность быстро сравнить реакции в данном случае с реакцией системы без демпфирования пропорционального скорости рассогласования, введем новую величину

$$q \equiv \frac{F}{F + Q_\varepsilon}. \quad (1. 70)$$

Эта величина позволяет произвести сравнение характеристик систем, которые имеют либо только вязкое демпфирование, либо одновременно вязкое демпфирование и демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования. Часто величина F представляет допустимое минимальное вязкое трение, которое определяется главным образом выбранным серводвигателем, с целью удовлетворить требования к выходной величине. Поступим как и раньше для определения ошибки установившегося состояния через величины ζ и ω_n . Следовательно,

$$\frac{F + Q_\varepsilon}{K} = \frac{\zeta(F + Q_\varepsilon)c}{K} = \frac{\zeta 2 \sqrt{KJ}}{K} = \frac{2\zeta}{\omega_n}. \quad (1. 71)$$

Тогда подстановка выражения для $F + Q_\varepsilon$ из уравнения (1. 70) приводит к

$$\frac{F}{K} = \frac{2\zeta}{\omega_n} q. \quad (1. 72)$$

Теперь можно выразить решение для величины ε в установившемся состоянии не только через ζ и ω_n , но также через сравнительное отношение q . После этого уравнение (1. 69) приобретает вид

$$\varepsilon = 2q\zeta \frac{\omega_i}{\omega_n} + e^{-\zeta\omega_n t} (k' \cos \omega_d t + k'' \sin \omega_d t). \quad (1. 73)$$

Здесь начальные условия одинаковы с теми, которые были применены в уравнениях (1. 51) и (1. 52). Введем эти начальные условия

в уравнение (1. 73) и произведем те же операции, тогда получим следующие значения для постоянных:

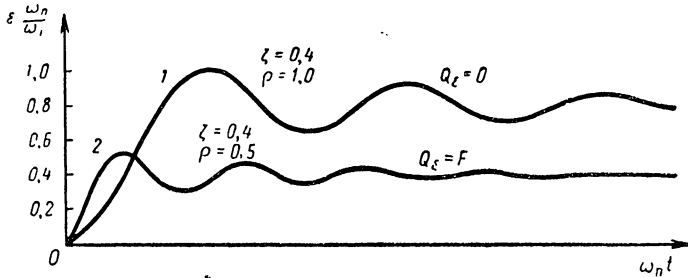
$$k' = - \varrho 2\zeta \frac{\omega_i}{\omega_n} \quad (1. 74)$$

и

$$k'' = - \frac{\omega_i}{\omega_d} (2\varrho\zeta^2 - 1). \quad (1. 75)$$

Введение значений k' и k'' в уравнение (1. 73) и перегруппировка членов дает требуемый результат, а именно

$$\varepsilon \frac{\omega_n}{\omega_i} = 2\varrho\zeta \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{2\varrho\zeta^2 - 1}{2\varrho\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right]. \quad (1. 76)$$



Фиг. 1. 20. Реакция системы второго порядка на входную функцию скорости:

1 — система без демпфирования; 2 — система с демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования.

Этот результат справедлив при $0 \leq \zeta \leq 1,0$ и $M_L = 0$. Конечно, при $\varrho = 1$ уравнение (1. 76) сводится к уравнению (1. 53).

Основное преимущество демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, выражающееся в улучшении характеристики системы, может быть выявлено после тщательного изучения последнего математического выражения. С целью облегчения этого изучения уравнение (1. 76) графически изображено на фиг. 1. 20 при неизменном значении ζ и двух разных значениях ϱ . Кривая 2 на этой фигуре соответствует положению, когда степень демпфирования, пропорционального скорости рассогласования Q_ξ , добавленного к системе, равно первоначальному вязкому трению F . Уровень установившегося состояния по этой кривой равняется только половине значения кривой 1, соответствующей правой части уравнения (1. 76), которая показывает, что установившаяся позиционная ошибка при заданной входной скорости была уменьшена без уменьшения ζ . Это объясняется тем, что для сохранения одинакового значения ζ при наличии демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, необходимо увеличить коэффициент усиления разомкнутой цепи [см. уравнение (1. 68)]. В виду того, что установившаяся ошибка

$\varepsilon_{ss} = \left(\frac{F}{K}\right) \omega_l$, отсюда следует, что значение ε_{ss} должно уменьшаться при увеличении коэффициента K . Для случая, изображенного на фиг. 1. 20, с целью сохранить то же значение $\xi = 0,4$ при $Q_e = F$ требуется повысить в 4 раза усиление разомкнутой цепи; этот вывод непосредственно следует из уравнения (1. 68). Хотя установившиеся значения на фиг. 1. 21 отличаются на множитель $\frac{1}{2}$, необходимо напомнить, что значение ординаты этой кривой теперь больше, так как собственная частота увеличилась из-за повышения коэффициента усиления разомкнутой цепи. Отсюда можно вывести правило о демпфировании, пропорциональном скорости рассогласования; это демпфирование допускает применение более высокого коэффициента усиления без вредного влияния на коэффициент демпфирования и этим путем возможно удовлетворить заданные требования об относительном коэффициенте демпфирования и установившейся ошибке. Этот способ дает дополнительное преимущество, состоящее в увеличении собственной частоты системы, что в свою очередь означает снижение времени регулирования. Выводы суммированы в табл. 1. 2.

Таблица 12

Сравнение системы с вязким демпфированием и системы с вязким демпфированием и демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования

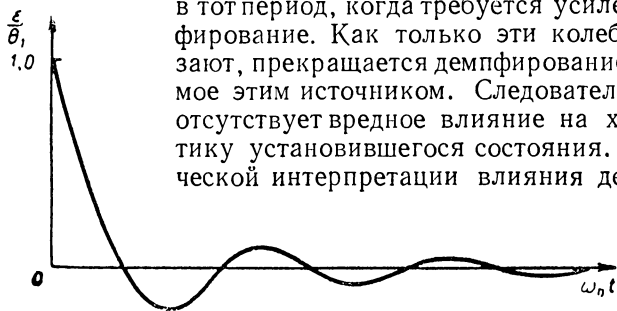
Первый случай ¹	Второй случай ²	Примечания ³
$\varepsilon_{ss} = \frac{F}{K} \omega_i$	$\varepsilon'_{ss} = \frac{F}{K'} \omega_i$	При заданном ω_i вычисляется значение K' , требуемое для удовлетворения условий установившегося режима
$\xi = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}$	$\xi' = \frac{F + Q_e}{2\sqrt{K'J}}$	При $\xi = \xi'$ определяют требуемое значение Q_e
$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$	$\omega'_n = \sqrt{\frac{K'}{J}}$	$\omega'_n > \omega_n$, следовательно, более быстрая реакция, т. е. меньше время регулирования
$\xi\omega_n = \frac{F}{2J}$	$\xi'\omega'_n = \frac{F + Q_e}{2J}$	Это равняется относительному коэффициенту демпфирования и он больше для второго случая, что свидетельствует о более быстрой реакции

¹ Первоначальное вязкое трение равняется F . K — коэффициент усиления разомкнутой цепи: деформирования, пропорционального скорости рассогласования, нет.

² Первоначальное вязкое трение равняется F ; увеличенный коэффициент усиления разомкнутой цепи равняется K' ; демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, равняется Q_e .

³ Сравнение сделано на основе одинаковых значений относительного коэффициента демпфирования в обоих случаях.

Вязкое демпфирование эффективно воздействует на колебания входного сигнала, так как оно представляет приложенную к системе задерживающую силу, пропорциональную скорости изменения регулируемой переменной величины. В тех случаях, когда требуется неизменная выходная скорость, вязкое демпфирование становится очень важным фактором, определяющим установившуюся ошибку. Отметим одну отличительную особенность демпфирования, пропорционального скорости рассогласования. При этом демпфировании нет необходимости усиливать сигнал рассогласования для создания требуемой выходной скорости. Эта особенность объясняется тем, что демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, основано на изменениях сигнала рассогласования при переходном процессе, т. е.



Фиг. 1. 21. Безразмерная кривая реакции на сигнал рассогласования.

в тот период, когда требуется усиленное демпфирование. Как только эти колебания исчезают, прекращается демпфирование, создаваемое этим источником. Следовательно, здесь отсутствует вредное влияние на характеристику установившегося состояния. Для физической интерпретации влияния демпфиро-

вания, пропорционального скорости рассогласования, рассмотрим динамику системы, изображенной на фиг. 1. 19, когда она подвергается входной единичной функции положения (последняя выбрана вместо единичной функции скорости вследствие большей простоты).

Предположим, что коэффициент усиления разомкнутой цепи очень большой; тогда при наложении единичной входной функции посредством пропорционального канала будет создаваться очень большой момент, который приведет в действие выходное звено с целью быстрого достижения требуемого значения. Но как только выходная величина достигнет своего нового значения, это повлияет на скорость изменения выходного сигнала $\frac{d\varepsilon}{dt}$, которая первоначально имеет отрицательное значение, как показывает наклон кривой на фиг. 1. 21. Ввиду того, что результирующий момент выражен через

$$\varepsilon K_s K_A K_M + K_s K_M A \frac{d\varepsilon}{dt},$$

отсюда следует, что перемещение выходного звена связано с уменьшением большого пропорционального компонента под действием скорости рассогласования. Благодаря этому сильное перерегулирование или даже неустойчивость предотвращаются, несмотря на высокие коэффициенты усиления.

Когда единичная входная функция прилагается к системе с демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования, если система первоначально находится в покое, тогда при $t = 0^+$ первоначальная скорость имеет значение $\frac{Q_e}{J}$, как это можно определить из уравнения (1. 61). Следовательно, реакция на единичную функцию системы с демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования, отличается от аналогичной реакции, показанной на фиг. 1. 7. Это объясняется отчасти введением дополнительного члена, а именно

$$\frac{Q_e}{J\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t},$$

который становится частью решения переходного процесса. Очевидно, когда Q_e становится очень малой величиной, реакция на единичную функцию приближается к реакции первоначальной системы.

Выбор коэффициента скорости рассогласования и коэффициента усиления усилителя. Определение коэффициента скорости рассогласования, необходимого для создания заданной характеристики переходного режима и минимальной установившейся ошибки производится на основе уравнения (1.63) после того как основные контуры системы были выбраны. После выбора надлежащего серводвигателя и элементов обратной связи, а также выбора сельсинов, как устройств генерирования сигнала рассогласования, остается только определить коэффициент скорости рассогласования. Первоначально вычисляется необходимое усиление разомкнутой цепи на основании заданных минимально допустимых значений ϵ_{ss} . После этого ограничение значений ζ и использование уравнения (1. 68) позволяют вычислить величину Q_e , откуда затем находится A . Нетрудно обнаружить, что требуемое усиление K_A аналогично определяется из уравнения (1. 62).

Пример 1. Система на фиг. 1. 11 имеет следующие коэффициенты усиления и другие параметры:

- K_s — постоянная сельсина, равная $57,3$ в/рад;
- K_M — постоянная момента двигателя, равная $1,82 \times 10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/в;
- F_M — эквивалентный коэффициент вязкости трения двигателя, равный $1,5 \times 10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;
- F_L — коэффициент вязкого трения нагрузки, равный нулю;
- J_M — момент инерции двигателя, равный $4,0 \times 10^{-6} \times \Pi_2^*$ кг·см²;
- J_L — момент инерции нагрузки, равный $8,64 \times 10^{-4} \times \Pi_2^*$ кг·см²;
- n_1 — передаточное отношение от вала двигателя к валу нагрузки $\left(\frac{1}{12}\right)$;
- n_2 — равно $\frac{1}{12}$;
- K_A — коэффициент усиления усилителя, равный 10 в/в;
- M_L' — момент нагрузки, равный нулю.

* См. конец главы 1.

а) При разомкнутой цепи находим значение сигнала рассогласования, необходимого для образования скорости двигателя 1000 об/мин . Результат выражаем в вольтах и радианах.

б) Вычисляем полное решение для сигнала рассогласования, выраженного в радианах, когда цепь замкнута и подвергается единичному входному сигналу, равному $0,2 \text{ рад}$.

в) Определяем полное решение для выходного перемещения, соответствующего условиям пункта «б».

г) К замкнутой системе подается сигнал входной скорости $0,1 \text{ рад/сек}$ и находится решение по времени для сигнала рассогласования и выходной величины.

д) Усилитель изменяется таким образом, чтобы он включал член скорости рассогласования в дополнение к пропорциональному члену. Предполагая отсутствие изменений пропорционального усиления, вычисляем коэффициент скорости рассогласования, необходимый для увеличения относительного коэффициента демпфирования до $0,7$.

е) Определяем полное решение для выходного перемещения, соответствующего условиям пункта «д» при входной скорости $0,1 \text{ рад/сек}$.

ж) Вычисляем мощность, поглощаемую демпфером вязкого трения, расположенного на валу двигателя, с целью создать относительный коэффициент демпфирования $0,7$ вместо демпфирования, пропорционального скорости рассогласования. Предполагаем, что входная скорость равна 10 рад/сек .

Решения находятся следующим образом.

а) После достижения установившейся скорости при разомкнутой цепи двигатель должен создавать достаточный момент для преодоления момента вязкого трения. Следовательно,

$$eK_A K_M = F_M \omega_M,$$

$$\text{где } \omega_M = \frac{2\pi 1000}{60} = 104,6 \text{ рад/сек.}$$

Отсюда

$$e = \frac{1,5 \times 10^{-4} \times 104,6}{10 \times 1,82 \times 10^{-4}} = 8,63 \text{ в.}$$

Значение этого сигнала рассогласования, выраженное в радианах, равняется

$$e = \frac{8,63}{57,3} = 0,151 \text{ рад.}$$

б) Ввиду того, что нагрузочный момент равняется нулю, требуемое решение выражается уравнением (1. 28).

Поэтому нахождение решения требует только определения значений параметров ζ и ω_n . Усиление разомкнутой цепи равняется

$$K = n_2 K_s K_A K_M = \frac{1}{12} 57,3 \times 10 \times 1,82 \times 10^{-4} = 86,9 \times 10^{-4} \times \Pi_1^* \text{ кгм/рад.}$$

Необходимо также определить эквивалентный момент инерции, отнесенный к валу двигателя, т. е.

$$J_{eM} = J_M + n_1^2 J_L = 4 \times 10^{-6} + \frac{8,64 \times 10^{-4}}{144} = 10^{-5} \times \Pi_2^* \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Собственная частота системы

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} = \sqrt{\frac{86,9 \times 10^{-4}}{10^{-5}}} = 29,5 \text{ рад/сек.}$$

Относительный коэффициент демпфирования

$$\xi = \frac{F}{2\sqrt{KJ}} = \frac{1,5 \times 10^{-4}}{2\sqrt{86,9 \times 10^{-4} \times 10^{-5}}} = \frac{1,5 \times 10^{-4}}{5,88 \times 10^{-4}} = 0,254,$$

а также $\omega_d = 29,4 \sqrt{1 - 0,255^2} = 28,4 \text{ рад/сек.}$

Введение этих величин в уравнение (1. 28) дает решение

$$\varepsilon(t) = 0,207e^{-7,6t} \sin(28,4t + 75,2^\circ).$$

в) Из уравнения (1. 31) непосредственно вытекает последнее выражение, следовательно

$$c(t) = 0,2 [1 - 1,04e^{-7,6t} \sin(28,4t + 75,2^\circ)].$$

г) Решение для сигнала рассогласования следует из уравнения (1. 54). Подстановка приводит к следующему расчету

$$\varepsilon(t) = 0,00174 [1 - 2,03e^{-7,6t} \sin(28,4t + 75,2^\circ)] \text{ (рад.)}$$

Уравнение (1. 56) позволяет найти решение для выходной величины. Отсюда имеем

$$c(t) = 0,1t - 0,00174 [1 - 2,03e^{-7,6t} \sin(28,4t + 150,5^\circ)] \text{ (рад.)}$$

д) Из уравнения (1. 68) имеем

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon &= \xi (2\sqrt{KJ}) - F_M = 0,7 (5,88 \times 10^{-4}) - 1,5 \times 10^{-4} = \\ &= 2,62 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Тогда применение уравнения (1. 63) дает

$$A = \frac{Q_\varepsilon}{n_2 K_s K_M} = \frac{2,62 \times 10^{-4}}{\frac{1}{12} \times 57,3 \times 1,82 \times 10^{-4}} = 0,302 \text{ в/в/сек.}$$

* Значения переводных коэффициентов Π_1 , Π_2 , Π_3 см. в конце главы.

е) Решение во времени будет

$$c(t) = r(t) - \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ определяется уравнением (1.76). Более развернутое решение имеет вид

$$c(t) = \omega_i t - \varrho \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega_i \left[1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{2\varrho\zeta^2 - 1}{2\varrho\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \right].$$

Из результатов пункта «д» следует

$$\varrho = \frac{F}{F + Q_\varepsilon} = \frac{1,5 \times 10^{-4}}{(1,5 + 2,62) \times 10^{-5}} = 0,364.$$

Отсюда

$$\varrho \frac{2\zeta}{\omega_n} \omega_i = 0,364 \frac{2 \times 0,7}{29,4} \times 0,1 = 0,00174 \text{ рад.}$$

Как предполагалось, на эту величину не влияет демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования. Заметим, что при введении надлежащих значений для ϱ и ζ левая часть последнего равенства сводится к $(F/K) \omega_i$. Далее

$$\zeta \omega_n = 0,7 \times 29,4 = 20,6$$

$$\omega_d = 29,4 \sqrt{1 - 0,49} = 21 \text{ рад/сек}$$

$$\text{и} \quad \frac{2\varrho\zeta^2 - 1}{2\varrho\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{-0,644}{0,364} = -1,77.$$

Подстановка этих значений в выражение для $c(t)$ дает

$$c(t) = 0,1t - 0,00174 [1 - 2,03e^{-20,6t} \sin(21t + 150,5^\circ)] \text{ (рад).}$$

ж) Внешний вязкий демпфер должен обеспечивать коэффициент вязкого демпфирования, равный $2,62 \times 10^{-4} \times P^* \text{ кгм/рад/сек.}$

Таким образом, поглощаемая мощность равна

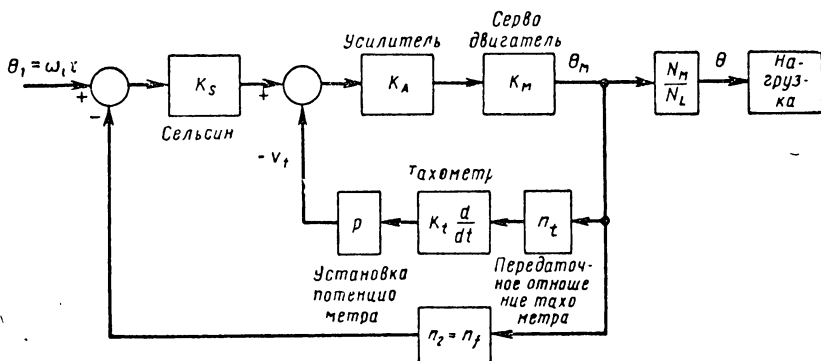
$$P = F\omega_M^2 = 2,62 \times 10^{-4} (12 \times 10)^2 = 3,78 \times P_3^* = 5,13 \text{ вт.}$$

Интересно отметить, что применение демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, устраняет необходимость учитывать подобные потери, потому что они покрываются за счет демпфирования во время переходного процесса, а не установившегося режима.

* См. конец главы.

1. 5. РАССМОТРЕНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДЕМПФИРОВАНИЯ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО СИГНАЛУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В системе осуществлено демпфирование посредством введения сигнала обратной связи; в этом случае генерирование выходной величины определенным образом зависит от скорости изменения регулируемой переменной величины. Для этого демпфирования часто требуется введение вспомогательной цепи, что делает систему многоконтурной. В системах управления с обратной связью для демпфирования может быть использована тахометрическая обратная связь, для чего тахометр соединяется с валом серводвигателя через



Фиг. 1. 22. Блок-схема с демпфированием посредством тахометрической обратной связи.

соответствующий редуктор или без него. Для пояснения общих результатов и показа метода анализа рассмотрим систему, представляющую сервомеханизм второго порядка с применением тахометрической обратной связи. Хотя большинство выведенных результатов применимо только к данной системе, но ясно, что порядок расчета и выводы могут быть использованы вообще для систем управления с обратной связью.

На фиг. 1. 11 дана блок-схема рассматриваемого сервомеханизма. Эта система видоизменена тем, что предполагается привод тахометра от вала серводвигателя через редуктор с передаточным отношением n_t , его выходная величина подведена к потенциометру и таким образом суммирующим звеном является сервоусилитель, где происходит сопоставление с пропорциональным сигналом. Можно выбрать тахометр постоянного или переменного тока, в зависимости от конструкции остальной части системы. Наиболее часто применяется двухфазный тахометр, у которого обмотка питается переменным током, а выходное напряжение прямо пропорционально скорости вращения ротора. Блок-схема такой измененной системы с тахометрической обратной связью показана на фиг. 1. 22. Наличие вспомогательной цепи ничего не изменяет в основной работе системы.

Порядок работы остается тот же, как и у системы фиг. 1. 11; это означает, что она ведет себя в основном, как позиционная система.

Таким образом, чтобы следить за сигналом скорости, система должна иметь ошибку запаздывания положения в установившемся состоянии. Поэтому целесообразно предположить, что демпфирование посредством тахометрической обратной связи окажет, в первую очередь, эффективное влияние на характер переходного процесса. Это обстоятельство следует помнить при последующем математическом анализе.

Дифференциальное уравнение системы, изображенной на фиг. 1. 22, составляется обычным образом. Однако по причинам, которые будут очевидны позднее, сигнал, поступающий от тахометрического генератора, должен быть введен с обратным знаком по сравнению с первоначальным знаком пропорционального члена. Учитывая это, дифференциальное уравнение рассматриваемой системы при отнесении к выходному валу двигателя будет

$$\varepsilon K_s K_A K_M - v_t K_A K_M = J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F \frac{d\theta_M}{dt}, \quad (1. 77)$$

где J и F представляют эквивалентные момент инерции и коэффициент вязкого трения, отнесенные также к валу двигателя. Кроме того, когда выходное перемещение вала двигателя изменяется со временем, то напряжение тахометра v_t будет определяться

$$v_t = p n_t K_t \frac{d\theta_M}{dt}, \quad (1. 78)$$

где p — положение потенциометра;

n_t — передаточное отношение звена связи между валом тахометра и валом двигателя;

K_t — постоянная напряжения тахометра в $v/\text{рад}/\text{сек}$.

Подстановка этого выражения в уравнение (1. 77) дает

$$\varepsilon K_s K_A K_M - p n_t K_t K_A K_M \frac{d\theta_M}{dt} = J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F \frac{d\theta_M}{dt}. \quad (1. 79)$$

Левая часть этого уравнения представляет момент, создаваемый двигателем, и совершенно ясно, что он содержит один компонент, пропорциональный сигналу рассогласования, и второй компонент с отрицательным знаком, пропорциональный первой производной выходного перемещения. Сигнал рассогласования может быть определен из уравнения (1. 42) и его введение в последнее выражение приводит к следующим результатам

$$\begin{aligned} J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + (F + p n_t K_t K_A K_M) \frac{d\varepsilon}{dt} + n_2 K_s K_A K_M \varepsilon = \\ = J \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + (F + p n_t K_t K_A K_M) \frac{d\theta_1}{dt}. \end{aligned} \quad (1. 80)$$

Здесь опять можно заметить, что коэффициент усиления разомкнутой цепи, который является коэффициентом при ε , одинаков с прежним значением [см. уравнения (1.62) и (1.44)]. Для упрощения уравнения (1.80) введем обозначение $Q_t \equiv pn K_s K_A K_M$ — коэффициент усиления сигнала тахометрической обратной связи разомкнутой цепи (1.81).

Как подчеркивалось раньше, этот результат был уже получен путем образования произведения коэффициентов усиления для рассматриваемой цепи с тахометрической обратной связью. Проверка размерностей величины Q_t показывает, что она аналогична величине F и соответственно представляет средство регулирования демпфирования системы. Перепишем уравнение (1.80), введя эту новую величину

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + (F + Q_t) \frac{d\varepsilon}{dt} + K_e = J \frac{d\omega_i}{dt} + (F + Q_t) \omega_i. \quad (1.82)$$

Отсюда характеристическое уравнение системы

$$s^2 + \frac{F + Q_t}{J} s + \frac{K}{J} = 0. \quad (1.83)$$

Сравнение последнего выражения с уравнением (1.65) показывает, что наличие регулирования по производной выходной величины влияет на реакцию переходного режима точно таким же образом, как влияет демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования. Отсюда следует, что включение вспомогательной цепи не изменяет порядка системы, а только влияет на величину коэффициента эффективного демпфирования. Коэффициент демпфирования системы на фиг. 1.22 аналогичен с коэффициентом, определяемым из уравнения (1.68), т. е.

$$\zeta = \frac{F + Q_t}{2\sqrt{KJ}}. \quad (1.84)$$

Конечно, выражение для собственной частоты сохраняется прежним, а именно $\omega_n = \sqrt{K/J}$.

Как видно, в математическом описании переходного процесса нет различия влияний, оказываемых демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования, и демпфированием, пропорциональным производной выходной величины. Однако это не соответствует действительности, учитывая величину сигнала рассогласования, необходимого для создания требуемой регулируемой скорости. Приравнивание производной по времени в уравнении (1.82) нулю показывает, что значение сигнала рассогласования при установившемся состоянии равняется

$$\varepsilon_{ss} = \frac{F + Q_t}{K} \omega_i. \quad (1.85)$$

Сравнение с результатом, полученным в случае демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, делает очевидным, что сигнал рассогласования должен быть больше при данных значениях коэффициента усиления разомкнутой цепи и регулируемой скорости. Подобное положение полностью оправдано, при условии, когда демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, производится за счет переходного процесса, а демпфирование, пропорциональное производной выходной величины, происходит в результате генерирования установившейся скорости. Чтобы иллюстрировать это, предположим, что коэффициенты усиления системы на фиг. 1. 22 выбраны такими, что сигнал рассогласования должен быть равен $0,01 \text{ рад}$ для регулирования скорости $\omega_i \text{ рад/сек}$ при устранении тахометрической обратной связи. Этот сигнал рассогласования, выраженный в вольтах, должен иметь значение $0,573 \text{ в}$. Если предположить, что тахометрическая обратная связь включена и установившееся состояние достигается соответственно входному сигналу $\omega_i \text{ рад/сек}$, то, учитывая непрерывное вращение тахогенератора, становится ясно, что к суммирующей точке усилителя будет подведено напряжение $-v_t$. Предположим далее, что его значение равняется $-1,0 \text{ в}$.

Отсюда следует, что при достижении требуемого значения регулируемой выходной скорости сигнал рассогласования должен возрасти на достаточную величину, чтобы воздействие напряжения $-1,0 \text{ в}$, поданное тахогенератором в установившемся состоянии, было нейтрализовано. Аналогично, сигнал рассогласования должен достичь нового значения $+1,573 \text{ в}$ и это может произойти только вследствие увеличения рассогласования между положениями входного и выходного валов. Полные решения для сигнала рассогласования и для выходного перемещения при единичной входной функции скорости, пренебрежимо малом моменте нагрузки и $0 \leq \xi \leq 1$, будут равны:

$$\varepsilon \frac{\omega_n}{\omega_i} = 2\xi \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi_d) \right] \quad (1. 86)$$

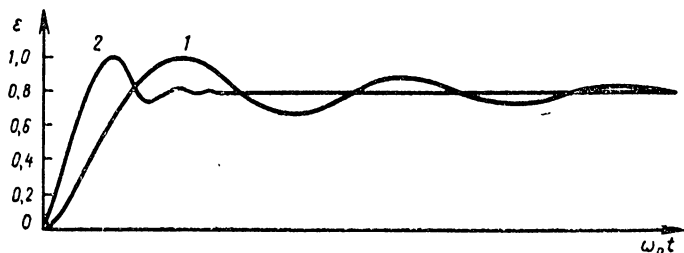
и

$$\theta = \frac{n_1}{n_2} \left[\omega_i t - \frac{2\xi}{\omega_n} \omega_i \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{2\xi \sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi_d) \right) \right], \quad (1. 87)$$

$$\varphi_d = \arctg \frac{2\xi \sqrt{1-\xi^2}}{2\xi^2 - 1}.$$

Нетрудно видеть, что эти результаты равноценны выражениям (1. 54) и (1. 56). Разница состоит в значениях параметров системы. В случае демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, включение в систему тахометрической обратной связи позволяет применять значительно большее усиление разомкнутой цепи с одновременным уменьшением времени регулирования. В табл. 1. 2 дано сравнение двух различных случаев. Обычно значения K' и Q_t ,

необходимые для получения заданных значений ϵ_{ss} и ζ , являются настолько большими, что это приводит к значительному улучшению динамики системы в переходном режиме. В первую очередь, это



Фиг. 1. 23. Кривая реакции сигнала рассогласования на команду скорости.

1 — кривая системы с вязким демпфированием; 2 — кривая системы с вязким демпфированием и с демпфированием посредством тахометрической обратной связи. Коэффициенты демпфирования и погрешности установившегося состояния одинаковы в обеих системах.

обусловлено высоким коэффициентом демпфирования. На фиг. 1. 23 изображены для сравнения две типичные кривые реакции системы.

Таблица 1. 3

Сравнение системы с вязким демпфированием и системы с вязким демпфированием и с тахометрической обратной связью

Случай 1*	Случай 2**	Примечания ***
$\epsilon_{ss} = \frac{F}{K} \omega_i$ $\zeta = \frac{F}{2\sqrt{KJ}}$	$\epsilon'_{ss} = \frac{F + Q_t}{K'} \omega_i$ $\zeta' = \frac{F + Q_t}{2\sqrt{K'J}}$	Из этих двух выражений определяются значения K' и Q_t , необходимые для обеспечения заданных значений ϵ_{ss} и ζ
$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$	$\omega'_n = \sqrt{\frac{K'}{J}}$	$\omega'_n > \omega_n$, следовательно, более быстрое регулирование
$\zeta \omega_n = \frac{F}{2J}$	$\zeta' \omega'_n = \frac{F + Q_t}{2J}$	Коэффициент демпфирования в случае 2 значительно выше, что опять свидетельствует о более быстрой реакции

* Первоначальное вязкое трение равняется F ; усиление разомкнутой цепи равняется K ; демпфирования, пропорционального выходной скорости, нет.

** Первоначальное вязкое трение F ; увеличенное усиление разомкнутой цепи K' ; демпфирование, пропорциональное выходной скорости Q_t .

*** Сравнение сделано на основе одинаковых сигналов рассогласования и коэффициентов демпфирования при одинаковом значении ω_i .

Воздействие тахометрической обратной связи на процесс регулирования переходного режима можно наиболее легко показать, подав на вход системы фиг. 1. 22 единичную входную функцию положения. Вновь предположим, что коэффициент усиления настолько велик, что тотчас же после приложения единичной входной функции развивается большой пропорциональный момент, который в свою очередь быстро воздействует на выходное звено и приводит его в новое установившееся состояние. Однако процесс протекает таким образом, что одновременно создается большая скорость изменений выходной величины. А это означает, что тахогенератор генерирует соответствующий сигнал, противодействующий пропорциональному сигналу, и тем самым устраняет тенденцию к возникновению колебаний. Из этого рассмотрения становится также ясно, почему знак выходного напряжения тахометра должен быть правильным. Совершенно понятно, что будут наблюдаться значительное перерегулирование и возможно неустойчивость, когда выходное напряжение тахометра будет способствовать, а не противодействовать пропорциональному сигналу. Неправильная полярность сигнала тахометра отражается на изменении знака величины Q_t в уравнении (1. 84), откуда становится очевидно, что характеристика переходного режима скорее ухудшается, а не улучшается.

Выбор коэффициента усиления сигнала выходной скорости. Определение коэффициента усиления сигнала выходной скорости (коэффициента усиления тахометрической обратной связи для системы фиг. 1. 22), который необходим для создания заданной характеристики переходного режима и минимальной установившейся ошибки, вытекает из уравнения (1. 81) после того, как были определены основные конструктивные элементы системы. После выбора соответствующего сервоусилителя и серводвигателя, параметры K_A и K_M становятся в общем известны. Коэффициент Q_t демпфирования, пропорционального выходной скорости, может быть вычислен, как излагалось выше, на основании изучения заданного процесса. Следовательно, значение коэффициента усиления сигнала выходной скорости должно быть равно

$$pn_t K_t = \frac{Q_t}{K_A K_M}. \quad (1. 88)$$

Величина p определяет положение ползунка потенциометра; ее значение лежит между нулем и единицей. На основании данных уравнения (1. 88) можно произвести выбор соответствующего тахогенератора и передаточного отношения связующего звена.

Сравнение методов демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, и демпфирования, пропорционального выходной скорости. На основании чего конструктор может сделать выбор того или иного метода демпфирования? Действительно, необходимо учитывать много факторов, к которым принадлежат, например, конструктивные особенности системы, свойства тех или иных звеньев,

наличие частотных помех и степень их вредности, влияние нелинейности на характеристику (насыщение) и, кроме того, практический опыт самого конструктора. Конечно, внимание здесь было ограничено только немногими важными факторами.

Демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, производится обычно в точке, где генерируется сигнал рассогласования или в звене, непосредственно следующем за ним. Уровень энергии сигнала является низким и необходимо создать значительное усиление. Поэтому, чтобы не ухудшить отношение сигнала к помехам, особое значение приобретает применение высококачественных звеньев для генерирования сигналов скорости рассогласования¹. Этот вывод не относится в одинаковой степени к выходной величине, потому что ее энергия значительно выше. Обычно это выражается в экономии общего объема требуемого оборудования.

Выше подчеркивалось, что демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, может быть применено одновременно для получения определенного коэффициента демпфирования и заданного минимального значения ошибки положения в установившемся состоянии, обусловленной входным сигналом скорости. Ввиду того что коэффициент демпфирования, пропорционального выходной скорости, входит в выражение для ошибки установившегося состояния, должна существовать разница между двумя видами демпфирования и она состоит в требуемой степени усиления разомкнутой цепи. Необходимо, чтобы это усиление было больше, когда применяется демпфирование, пропорциональное выходной скорости, что в свою очередь означает более высокую частоту собственных колебаний системы. Высокая собственная частота может означать преимущество или недостаток для линейных систем, в зависимости от тех или иных преобладающих условий. Одно существенное преимущество состоит в малом времени регулирования. Но, с другой стороны, при наличии достаточных помех высокая собственная частота может оказаться очень вредной в тот момент, когда демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, должно преобладать, как средство определения заданной характеристики системы.

Выше рассматривалась система, способная развивать любую скорость, определяемую регулятором, независимо от примененного способа демпфирования. Это вполне справедливо для линейной системы. Однако мы не должны никогда упускать из виду тот факт, что все практические системы имеют пределы линейности. Следовательно, в тех случаях, когда применяется регулирование с введением сигнала рассогласования и сигнала тахометрической обратной связи,

¹ Для получения производной от сигнала рассогласования с малыми динамическими погрешностями необходим корректирующий контур с очень малым коэффициентом усиления. Следовательно, демпфирование системы путем дифференцирования сигнала рассогласования приводит к ослаблению и без того слабого сигнала. Для поднятия уровня сигнала применяются дополнительные каскады усиления, что усложняет систему. Демпфирование системы путем введения сигналов тахометрической обратной связи не требует дополнительных каскадов усиления. (Прим. ред.).

очень важно проверить, что насыщение системы не исключает возможность создания скорости, требуемой для удовлетворения заданных значений.

Пример 2. Основная система, рассмотренная в первом примере, была изменена включением тахометрической обратной связи, как это показано на фиг. 1. 22.

а) Вычисляем значение коэффициента усиления разомкнутой цепи и демпфирование, пропорциональное выходной скорости, требуемых для получения того же относительного коэффициента демпфирования 0,1 и сигнала рассогласования, равного 0,00174 рад, как это было найдено в пункте «г» первого примера при входной скорости 0,1 рад/сек.

б) Вычисляем частоту собственных колебаний системы.

в) Находим решение для выходного перемещения в предположении, что система линейна. Эти решения находятся следующим образом:

а) Введение выражения для $F + Q_t$ из уравнения (1. 85) в уравнение (1. 84) приводит к простому уравнению, где неизвестной величиной является только коэффициент усиления разомкнутой цепи, т. е.:

$$\sqrt{K} = \frac{2\xi \sqrt{J}}{\epsilon_{ss}} \omega_t \frac{2 \times 0,7 \sqrt{10^{-5}}}{0,00174} \quad 0,1 = 0,254; \quad \text{отсюда} \quad K = 0,0645.$$

Далее, коэффициент демпфирования, пропорционального выходной скорости, определяется из уравнения (1. 85):

$$F + Q_t \frac{K \epsilon_{ss}}{\omega_t} = \frac{0,0545 \times 0,00174}{0,1} = 11,2 \times 10^{-4};$$

отсюда $Q_t = 11,2 \times 10^{-4} - 1,5 \times 10^{-4} = 9,7 \times 10^{-4}$.

Вязкое демпфирование, как видно, является теперь только небольшой частью общего демпфирования системы. Заметим, кроме того, что это значение гораздо больше, чем требовалось для получения одинаковых заданных значений при применении демпфирования, пропорционального скорости рассогласования.

б) Новое значение собственной частоты равняется

$$\omega_n = \sqrt{\frac{0,0645}{10^{-5}}} = 80,2 \text{ рад/сек.}$$

Это значение исключительно большое и в $80,2/29,4 = 2,73$ раза больше значения, соответствующего случаю применения демпфирования, пропорционального скорости рассогласования. Подобное чрезмерно высокое значение собственной частоты не только усиливает компоненты помех в сигнале, но является также практически неосуществимым вследствие насыщения и тем самым ограничения скорости, что почти всегда имеет место у серводвигателя.

в) Для нахождения решения относительно выходного перемещения требуется только вычислить новые значения коэффициента демпфирования $\zeta\omega_n$ и частоты затухающих колебаний, т. е.

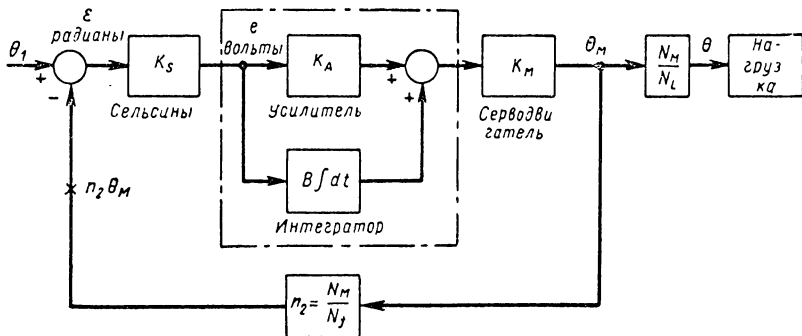
$$\zeta\omega_n = 0,7 \times 80,2 = 56,1 \text{ сек}^{-1};$$

$$\omega_d = 80,2\sqrt{1-0,7^2} = 57,1 \text{ рад/сек};$$

отсюда $c(t) = 0,1t - 0,00174 [1 - 2,03e^{-56,1t} \sin(57,1t + 150,5^\circ)] (\text{рад.})$.

1. 6. СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНОЙ КОМПЕНСАЦИЕЙ ОШИБКИ. ВХОДНАЯ ФУНКЦИЯ СКОРОСТИ

Когда генерирование выходного сигнала определенным образом зависит от интеграла сигнала рассогласования, то считают, что система содержит интегральную компенсацию. Этот вид компенсации создается путем включения интегрирующего устройства в прямую цепь передачи системы, показанной на фиг. 1. 11. Блок-схема видо-



Фиг. 1. 24. Схема системы второго порядка с интегральным управлением.

измененной системы изображена на фиг. 1. 24. Ввиду того что сигнал, поступающий на выходное устройство, в данном случае серводвигатель, состоит из двух компонентов, а именно один компонент пропорционален сигналу рассогласования, а другой — пропорционален интегралу от сигнала рассогласования, отсюда следует, что серводвигатель будет развивать выходной момент, пропорциональный каждому из этих компонентов. Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее динамику системы, можно написать в следующем виде

$$\varepsilon K_S K_A K_M + K_S B K_M \int \varepsilon dt = J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F \frac{d \theta_M}{dt}. \quad (1. 89)$$

Введение ε из уравнения (1. 42) и замена $d\theta/dt$ на ω_i дает

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d \varepsilon}{dt} + n_2 K_S K_A K_M \varepsilon + n_2 K_S K_M B \int \varepsilon dt = J \frac{d \omega_i}{dt} + F \omega_i. \quad (1. 90)$$

Коэффициент усиления разомкнутой цепи имеет такую же величину, как и у предыдущей системы. Это, совершенно естественно, так как в обоих случаях пропорциональная цепь состоит из тех же звеньев. Кроме того, из уравнения (1. 90) следует, что член с интегралом не объединен с членом вязкого трения, как это было в случае, когда вводились сигналы рассогласования и выходной скорости. Более того, член с интегралом стоит отдельно в дифференциальном уравнении, что свидетельствует о таком влиянии его на характеристику системы, которое отличается принципиально от ранее описанных методов компенсации.

Допустим, что коэффициент усиления связан с интегральным членом Γ . Тогда к системе на фиг. 1. 24 применимо

$$\Gamma = n_2 K_s B K_M. \quad (1. 91)$$

Для других систем, конечно, применяется иное сочетание коэффициентов усиления, произведение которых обозначается Γ , но порядок определения этого значения остается тот же. Так как величина B имеет размерность сек^{-1} , то величина Γ имеет размерность момент/рад/сек . Перепишем уравнение (1. 90) с введением принятых обозначений

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d\varepsilon}{dt} + K\varepsilon + \Gamma \int \varepsilon dt = J \frac{d\omega_i}{dt} + F\omega_i. \quad (1. 92)$$

Дифференцирование этого уравнения дает

$$J \frac{d^3 \varepsilon}{dt^3} + F \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + K \frac{d\varepsilon}{dt} + \Gamma \varepsilon = J \frac{d^2 \omega_i}{dt^2} + F \frac{d\omega_i}{dt}. \quad (1. 93)$$

Форма последнего уравнения позволяет заключить, что интегральная компенсация ошибки изменила порядок системы со второго до третьего. Поэтому применение интегральной компенсации означает, что в системе содержится третий независимый элемент с накоплением энергии. Воздействие интегрального члена отличается от воздействия, оказываемого на систему членами, пропорциональными скорости рассогласования или сигналу скоростной обратной связи. Влияние сигнала скоростной обратной связи ограничивается изменением коэффициента при члене первой производной и по этой причине оно не связано с появлением дополнительного независимого элемента накопления энергии.

Из уравнения (1. 93) следует, что характеристическое уравнение системы становится теперь кубическим, а именно

$$s^3 + \frac{F}{J} s^2 + \frac{F}{J} s + \frac{\Gamma}{J} = 0. \quad (1. 94)$$

Нахождение решения этого уравнения более трудно и требует больших затрат труда, чем решение уравнения для системы второго порядка. Один тот факт, что система имеет дополнительный независимый элемент накопления энергии, является достаточной причиной предполагать, что получение удовлетворительного переходного процесса будет более затруднительным. Кроме того, если решение ищется

во временной области, то возникают значительные трудности в непосредственном определении характеристик переходного процесса. Эта задача будет более подробно рассмотрена в следующем разделе. Для получения того же результата могут быть применены более простые и прямые способы решения и поэтому рассмотрение этой задачи отнесено в следующую главу.

Так как очевидно, что интегральная компенсация ошибки не дает преимуществ качества регулирования системы в переходном режиме, то спрашивается, имеется ли вообще какое-либо преимущество? Ответ на этот вопрос вытекает из второй части решения уравнения (1.93), т. е. из рассмотрения стационарного решения. Приравнивание нулю производной во времени показывает, что

$$\varepsilon_{ss} = 0, \quad (1.95)$$

т. е. значение сигнала рассогласования, необходимого для создания регулируемой выходной скорости, теперь сведено к нулю. Это в действительности имеет очень большой смысл. Практически это представляет характеристику системы с интегральной компенсацией ошибки, которая позволяет либо значительно сократить, либо устранить ошибки установившегося состояния.

Этим способом можно получить систему, удовлетворяющую очень строгим требованиям по точности.

На первый взгляд вывод из уравнения (1.95) кажется непонятным, так как можно сказать, что система на фиг. 1.24 способна создавать конечную выходную скорость без входного сигнала. Это объясняется тем, что условия были слишком упрощены. Возвращаясь к уравнению (1.89), можно определить, что момент, создаваемый двигателем, состоит из компонента, пропорционального ошибке, и второго компонента, который зависит от ошибки и времени. При установившемся состоянии первая часть этого уравнения является постоянной; это означает, что для создания выходной скорости требуется неизменный момент, равный

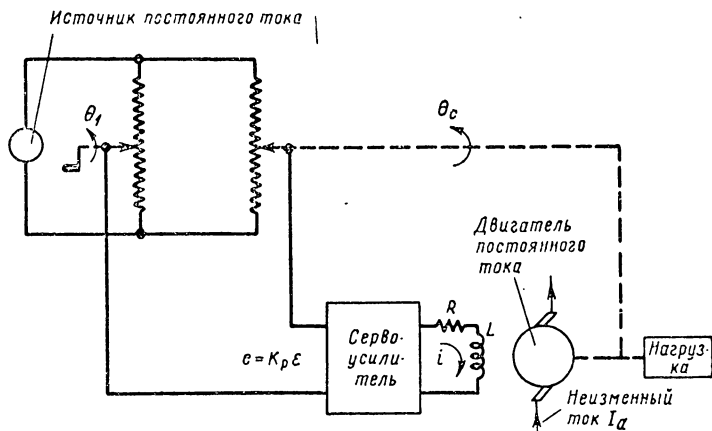
$$\frac{Fd\theta_M}{dt}.$$

Следовательно, с возрастанием времени интегральный компонент непрерывно увеличивает момент, но, так как требуется только определенное значение момента, сигнал рассогласования непрерывно уменьшается. В действительности, когда коэффициент усиления интегрального члена становится достаточно большим, тогда сигнал рассогласования сводится к нулю в течение сравнительно малого промежутка времени.

1.7. ТРУДНОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Когда расчет системы управления с обратной связью приводит к характеристическому уравнению, порядок которого выше 2, то метод анализа на основании дифференциальных уравнений сопряжен

по некоторым причинам с рядом недостатков. Как подчеркивалось в предыдущем разделе, одна из причин состоит в необходимости решения алгебраических уравнений более высокого порядка, чем второго; нахождение этого решения требует много времени и труда. Однако наиболее важная причина, особенно с точки зрения конструктора, лежит в том факте, что теперь становится более трудно определять связь параметров системы с требуемыми характеристиками переходного процесса, как это можно было делать в случае систем второго порядка. Конструктор вынужден в подобных случаях прибегать к методам последовательного приближения, прежде чем он



Фиг. 1. 25. Система управления третьего порядка с обратной связью.

сможет получить необходимые соотношения. Если даже конструктор достигает результата, часто этот результат не является оптимальным.

Для лучшего пояснения этого вопроса рассмотрим систему на фиг. 1. 25. Серводвигателем служит в этом случае машина постоянного тока с независимым возбуждением и неизменным током якоря. Рассмотрим постоянную времени, связанную с индуктивным сопротивлением управляющей обмотки серводвигателя. Примем, кроме того, для простоты, что передаточное отношение от вала двигателя к валу нагрузки и от вала двигателя к потенциометру обратной связи одинаково и равно единице. Тогда динамику замкнутой системы будут описывать три следующих уравнения:

$$\varepsilon = \theta_1 - \theta; \quad (1. 96)$$

$$K_p K_A \varepsilon = iR + L \frac{di}{dt} \quad (1. 97)$$

и

$$K_f i = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt}. \quad (1. 98)$$

Уравнение (1. 97) определяет выходное напряжение усилителя, как сумму падения напряжений в регулируемой обмотке серводвигателя. Здесь означает: R — активное сопротивление в омах и L — индуктивность обмотки возбуждения в генри; i — ток в амперах, протекающий через эту цепь. Левая часть уравнения (1. 98) определяет момент двигателя, выраженный через K_f , где K_f имеет размерность момента на единицу тока возбуждения. Правая часть этого уравнения содержит сумму противодействующих моментов, где J и F , конечно, представляют суммарные величины, отнесенные к валу двигателя. Предполагается, что момент нагрузки равен нулю. Уравнения (1. 97) и (1. 98) можно переписать в другом виде

$$K_p K_A \varepsilon = R \left(i + \tau_f \frac{di}{dt} \right), \quad (1. 99)$$

где постоянная времени обмотки возбуждения

$$\tau_f = \frac{L}{R} \quad (1. 100)$$

и

$$K_f i = F \left(\tau_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} \right), \quad (1. 101)$$

где механическая постоянная времени двигателя

$$\tau_m = \frac{J}{F}. \quad (1. 102)$$

После введения выражения для ε из уравнения (1. 99) в уравнение (1. 96) получаем

$$\theta_1 = \theta + \varepsilon = \theta + \frac{R}{K_p K_A} \left(i + \tau_f \frac{di}{dt} \right). \quad (1. 103)$$

Значение тока i из уравнения (1. 101) можно ввести в последнее уравнение; тогда перегруппировка членов даст

$$\theta_1 = \theta + \frac{RF}{K_p K_A K_f} \left[\tau_m \tau_f \frac{d^3 \theta}{dt^3} + (\tau_m + \tau_f) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} \right]. \quad (1. 104)$$

Допустим теперь

$$K = \frac{K_p K_A K_M}{RF}. \quad (1. 105)$$

После подстановки в уравнение (1. 104) получаем в результате дифференциальное уравнение системы

$$K \theta_1 = \tau_m \tau_f \frac{d^3 \theta}{dt^3} + (\tau_m + \tau_f) \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + K \theta, \quad (1. 106)$$

из которого следует, что характеристическое уравнение будет

$$\tau_m \tau_f s^3 + (\tau_m + \tau_f) s^2 + s + K = 0. \quad (1. 107)$$

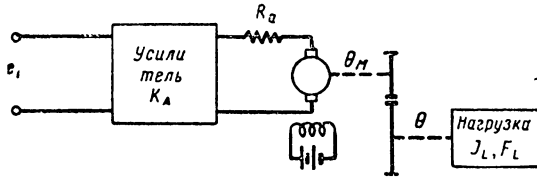
Изучение последнего уравнения позволяет сделать два важных вывода. Во-первых, оно показывает, что постоянная времени обмотки возбуждения увеличилась, когда система стала третьего порядка. Во-вторых, после проверки коэффициентов уравнения (1. 107) становится очевидно, что постоянные времени τ_m и τ_f появляются не один раз и в различных сочетаниях. Следовательно, коэффициент при s^3 для рассматриваемой системы равняется произведению двух постоянных времени; коэффициент при s^2 содержит те же величины в виде суммы. Если конструктору необходимо изучить влияние параметров τ_m , τ_f и K на динамику системы, то очевидно он не может это осуществить на основании прямого решения уравнения (1. 107). Из этого, конечно, не следует, что подобные методы не могут быть разработаны. Они могут быть разработаны и были выведены для систем третьего порядка, но окончательные уравнения являются значительно более сложными, чем для систем второго порядка. Однако еще более важно отметить, что с повышением порядка системы сложность подобных результатов возрастает еще в большей степени, вследствие чего сводится на нет полезность подобных методов проектирования. Пример системы третьего порядка был описан только для того, чтобы подчеркнуть характер трудностей. Поэтому в заключение можно сказать, что нелегко, применяя метод дифференциальных уравнений, определить непосредственное влияние изменения параметров системы, например, постоянной времени τ_f , на максимальное перерегулирование, время разгона, время регулирования и др. Кроме того, при введении нового значения того или иного параметра необходимо произвести большую расчетную работу; отсюда становится очевидной необходимость в более прямых методах решения. Частотный метод анализа динамики системы удовлетворяет этому требованию.

Частотный метод позволяет изучать динамику системы во временной области таким образом, что влияние любого параметра на динамику системы делается совершенно очевидным. Эта особенность объясняется двумя факторами. Первый состоит в том, что динамика звеньев системы в переходном режиме, как и всей системы в целом, может быть описана при помощи передаточных функций. Вторым фактором состоит в том, что информация о переходной реакции замкнутой цепи системы может быть получена простым и прямым способом путем изучения передаточной функции разомкнутой системы. Преимущество этого последнего метода связано с тем, что каждый параметр системы исследуется отдельно, т. е. создается возможность изучения изменений того или иного параметра и его влияния на общую характеристику.

К сожалению, эта простота анализа и расчета не была получена без ущерба, в первую очередь, за счет точности. Характеристика часто определяется через соответствующие предельные значения, которые применимы в большей степени к частотной области и менее применимы к точному решению во временной области.

ЗАДАЧИ

1. 1. В результате экспериментальных исследований были определены параметры для системы, показанной на фиг. 1. 26, а именно:
- K_M — постоянная момента двигателя, равная $10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/а;
 - K_n — постоянная противоэлектродвижущей силы, равная 0,2 в/об/сек;
 - K_A — коэффициент усиления усилителя, равный 0,15 в/в;
 - J_M — момент инерции якоря двигателя, равный $1,0 \times 10^{-6} \times \Pi_2^*$ кг·см²;
 - J_L — момент инерции нагрузки, равный $225 \times 10^{-6} \times \Pi_2^*$ кг·см²;
 - F_L — коэффициент вязкого трения нагрузки, равный $5,68 \times 10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;
 - n_1 — отношение числа зубьев шестерни на валу двигателя к числу зубьев шестерни на валу нагрузки, равное 1/15;
 - R_a — сопротивление якоря двигателя, равное 0,2 ом.



Фиг. 1. 26. Схема системы с известными параметрами.

Написать дифференциальное уравнение системы, связывающее θ_M с выходным напряжением и решить его относительно θ_M и ω_M при единичном ступенчатом напряжении, приложенном к входному звену.

1. 2. Измерениями на сервомеханизме была определена погрешность реакции

$$\frac{e}{\theta_M} = 1,66e^{-8t} \sin(6t + 37^\circ),$$

когда входное звено было подвергнуто внезапному перемещению θ_0 .

а) Определить собственную частоту, коэффициент демпфирования и круговую частоту затухающих колебаний системы.

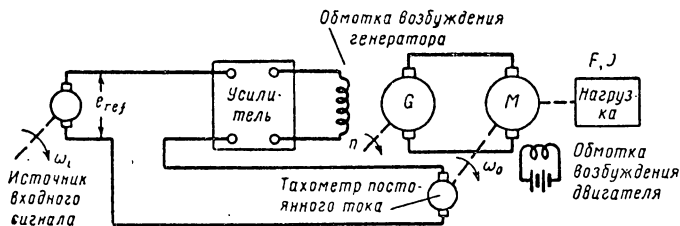
б) Инерция выходного звена известна и равна $0,01 \times \Pi_1^*$ кгм/сек², а коэффициент вязкого трения равен $0,16 \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек; определить коэффициент усиления цепи K .

в) Насколько возможно повысить коэффициент усиления цепи, чтобы относительный коэффициент демпфирования не был меньше чем 0,4?

* Значения переводных коэффициентов Π_1, Π_2, Π_3 см. в конце настоящей главы.

1.3. Предполагается, что тахометры исходной цепи и обратной связи одинаковы у системы, показанной на фиг. 1.27.

- а) Построить блок-схему системы с указанием каждого звена.
 б) Составить дифференциальное уравнение системы и решить его относительно ошибки скорости ω_e , когда исходный двигатель, начиная с неподвижного состояния, приобретает внезапно постоянную угловую скорость ω_1 .



Фиг. 1.27. Схема системы с тахометрической обратной связью.

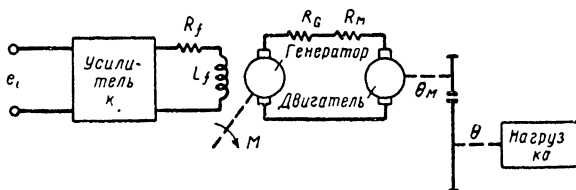
- в) Объяснить, может ли любое регулирование усиления усилителя вызвать незатухающие колебания системы?

1.4. Система, показанная на фиг. 1.28, имеет следующие параметры:

R_f — активное сопротивление обмотки возбуждения генератора в ом ;

L_f — индуктивность обмотки возбуждения генератора в гн ;

K_G — коэффициент усиления генератора в в/а тока возбуждения;



Фиг. 1.28. Схема системы управления без обратной связи.

K_n — коэффициент скорости двигателя в в/рад/сек ;

R_G — активное сопротивление обмотки якоря генератора в ом ;

R_M — активное сопротивление якорной обмотки двигателя в ом ;

K_M — постоянная момента двигателя в кгм/а тока якоря;

J_L — момент инерции нагрузки;

F_L — коэффициент вязкого трения нагрузки;

n_1 — передаточное отношение от двигателя к нагрузке.

Инерцией двигателя, индуктивными сопротивлениями якорных обмоток двигателя и генератора пренебрегаем.

- а) Составить дифференциальное уравнение движения системы при ступенчатом входном напряжении e_1 , используя буквенные обозначения на фиг. 1.28.

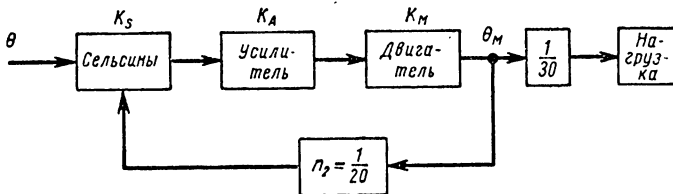
б) Написать характеристическое уравнение.

в) Указать, какие необходимо осуществить изменения, чтобы устройство фиг. 1. 28 составляло часть системы регулирования скорости с обратной связью, работающей без ошибки скорости.

1. 5. Блок-схема сервомеханизма показана на фиг. 1. 29. Эта система имеет следующие параметры: $K_S = 60$ в/рад; $K_A = 20$ в/в; $K_M = 30 \times 10^{-6} \times \Pi_1^*$ кгм/в; $J = 10 \times 10^{-6} \times \Pi_2^*$ кг·см²; $F = 161 \times 10^{-6} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек.

а) Определить относительный коэффициент демпфирования.

б) Вычислить рассогласование между положениями валов входного звена и обратной связи в установившемся режиме при входной скорости 2 рад/сек.



Фиг. 1. 29. Блок-схема сервомеханизма.

в) Параметры системы были пересмотрены таким образом, что сигнал рассогласования в установившемся режиме не превышал 1°, когда команда изменения скорости равнялась 2 рад/сек. Относительный коэффициент демпфирования сохраняется тот же, как и в случае пункта «а». Для осуществления этого усилитель был пересчитан, чтобы создавать выходной сигнал, определяемый $K_A = A \frac{d}{dt}$, причем $A = 1,5$. Определить, удовлетворяет ли заданное значение ζ в предположении, что заданное значение сигнала рассогласования в установившемся режиме удовлетворяет.

г) Вычислить требуемое значение коэффициента усиления разомкнутой цепи, когда тахометрическая обратная связь была применена вместо демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, с целью осуществить заданное значение пункта «в».

1. 6. Выбранная конструкция системы управления с обратной связью на 400 гц для самолета состоит из синусного детектора ошибки, усилителя, серводвигателя на 400 гц и нагрузки. Система имеет следующие параметры:

- K_S — постоянная сельсина, равная 25 в/рад; $n_2 = n_1 = 1/30$;
- K_M — константа момента двигателя, равная $40 \times 10^{-6} \times \Pi_1^*$ кгм/в;
- F_M — коэффициент вязкого трения двигателя, равный $9 \times 10^{-6} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;

* См. конец главы.

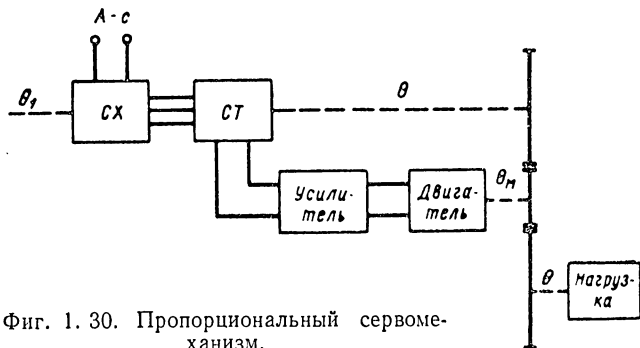
F_L — коэффициент вязкого трения нагрузки, равный $45 \times 10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;

J_M — момент инерции двигателя, пренебрежимо малый;

J_L — момент инерции нагрузки, равный $9 \times 10^{-4} \times \Pi_2^*$ кг·см²;
 $K_A = 3$ в/в.

а) Вычислить установившееся значение ошибки скорости для описанной системы, а также сигнал рассогласования в установившемся режиме (в радианах) при входной скорости 1 рад/сек.

б) Вычислить относительный коэффициент демпфирования при условиях, изложенных в пункте «а». Какую специфическую информацию дает эта величина относительно динамики системы?



Фиг. 1. 30. Пропорциональный сервомеханизм.

в) Вычислить степень демпфирования, пропорционального скорости рассогласования для осуществления условия, когда желательно уменьшить величину сигнала рассогласования в установившемся состоянии до 0,035 рад, при сохранении неизменного значения ζ .

г) Повторить расчет пункта «в» при условии применения демпфирования, пропорционального сигналу скоростной обратной связи вместо демпфирования, пропорционального скорости рассогласования.

д) Определить время регулирования для двух случаев пунктов «в» и «е» в предположении, что время регулирования точно соответствует четырехкратному значению постоянной времени системы.

е) Если частоты помех, превышающие 3 гц, должны быть ослаблены даже за счет увеличения времени регулирования, то какая из видоизмененных систем пунктов «в» и «г» сможет осуществить это? Дать объяснение.

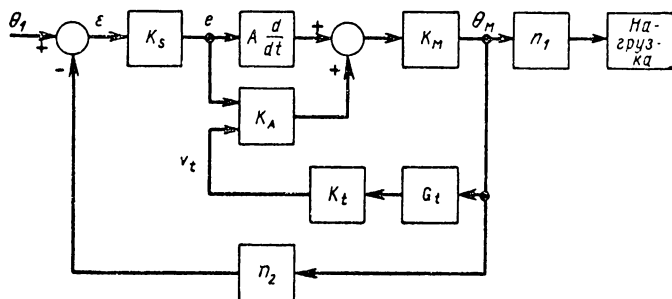
1. 7. На фиг. 1. 30 показан пропорциональный сервомеханизм, у которого сельсины и передаточные звенья обладают пренебрежимо малой инерцией и трением.

Цепь обратной связи разомкнута в результате удаления связующего звена у вала сельсина. Тогда вал нагрузки заторможен

* См. конец главы.

и между двумя валами сельсина вводится перемещение $1,0 \text{ рад}$ (предполагается, что сельсины линейные). Затем вал нагрузки внезапно освобождается и наблюдается его вращение. Он достигает постоянной скорости 20 рад , причем $63,2\%$ этого значения достигается через $0,1 \text{ сек}$ (это время измерено с момента освобождения вала). После этого цепь замыкается возвращением на свое место связующего звена сельсина и положение сервомеханизма доводится до нуля. Затем входной вал подвергается ступенчатому перемещению θ_1 . Вычислить время, необходимое для того, чтобы выходная величина θ могла достигнуть 2% своего нового значения в установившемся состоянии (замечание — в этой задаче не следует применять четырехкратное значение постоянной времени).

1. 8. Сервомеханизм имеет блок-схему, показанную на фиг. 1. 31. В ней применены оба вида демпфирования — пропорционального



Фиг. 1. 31. Блок-схема сервомеханизма с тахометрической обратной связью и демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования.

скорости рассогласования и посредством тахометрической обратной связи. В качестве детектора ошибки использовано сельсинное устройство. Система имеет следующие параметры:

J — эквивалентный момент инерции на валу двигателя, равный $11 \times 10^{-6} \times \Pi_2^* \text{ кг} \cdot \text{см}^2$;

F_M — коэффициент вязкого трения двигателя, равный $10 \times 10^{-6} \times \Pi_1 \text{ кгм/рад/сек}$;

$F_L = 0$ (т. е. коэффициент вязкого трения нагрузки сведен к нулю);
 $A = 1,2 \text{ в/сек}$; $K_A = 20$;

$K_M = 30 \times 10^{-6} \times \Pi_1^* \text{ кгм/в}$; $K_S = 1 \text{ в/град}$ (постоянная сельсина);

$K_t = 0,191 \text{ в/рад/сек}$; $n_2 = 1/20$ (передаточное отношение обратной связи);

G_t — передаточное отношение тахометра;

$n_1 = 1/30$ (передаточное отношение нагрузки).

а) Определить характеристическое уравнение этой системы.

б) Найти значение n_t при условии, что относительный коэффициент демпфирования равен $0,7$ и в предположении, что система обладает приведенными выше заданными значениями параметров.

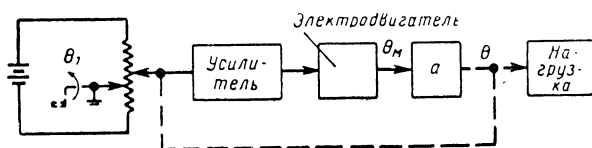
* См. конец главы.

в) Вычислить сигнал рассогласования в установившемся режиме, когда входная скорость равна 10 рад/сек , в предположении, что условия соответствуют пункту «б».

г) Вычислить новое значение параметров, которые могут быть рекомендованы в случае, когда ошибка запаздывания положения установившегося состояния не должна быть больше $6,5^\circ$ при входной скорости 10 рад/сек и в предположении, что сохраняется $\zeta = 0,7$. Определить, какие изменения необходимо осуществить.

1. 9. а) Пяснить какое преимущество может быть получено, если динамическую реакцию системы второго порядка выразить в безразмерной форме.

б) Собственная частота системы второго порядка не должна выходить за предельные значения, определяемые временем регулирования сервомеханизма. Дать объяснение.



Фиг. 1. 32. Блок-схема сервомеханизма с инерционной нагрузкой.

1. 10. а) Объяснить, почему система регулирования с обратной связью отличается следующими двумя конструктивными особенностями: отрицательной обратной связью и чувствительностью к знаку.

б) Сервомеханизм описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2\theta_M}{dt^2} + 6,4 \frac{d\theta_M}{dt} = 160\varepsilon,$$

где $\varepsilon = \theta_1 - 0,4\theta_M$; θ_M — положение выходного вала двигателя.

Найти значение относительного коэффициента демпфирования. Какую информацию о характеристике переходного процесса дает эта величина?

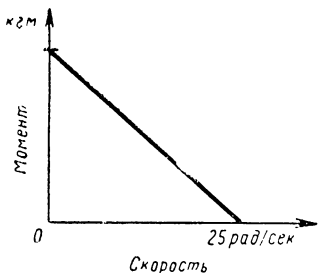
1. 11. Найти решение для сигнала рассогласования системы фиг. 1. 31, когда она подвергается ступенчатой возмущающей функции нагрузки с величиной M_0 . Предполагается, что система первоначально находилась в покое при нулевом моменте нагрузки, причем $\zeta = 1$.

1. 12. Схема сервомеханизма дана на фиг. 1. 32. Двигатель приводит в движение инерционную нагрузку через редуктор a . Следующие сведения известны о системе: момент инерции нагрузки $0,05 \times 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{см}^2$; момент инерции двигателя $2 \times 10^{-5} \times 10^{-2} \text{ кг}\cdot\text{см}^2$;

* См. конец главы.

вязкое трение нагрузки пренебрежимо мало; напряжение ошибки $a_1(\theta_1 - \theta)$, где $a_1 = 20$ в/рад; усиление усилителя $a_2 = 20$ в/в; передаточное отношение $n = 1/100$.

Кривая зависимости между скоростью и моментом дана на фиг. 1. 33 (предполагается, что точки пересечения с осями пропорциональны приложенному напряжению). Определить дифференциальное уравнение системы.

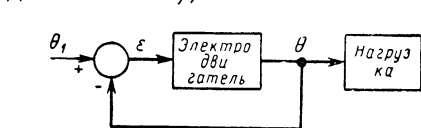


Фиг. 1. 33. Кривая зависимости моментов от скорости при напряжении на двигателе 100 в.

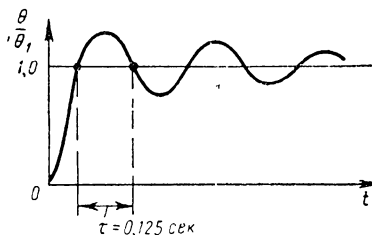
1. 13. Сервомеханизм состоит из двигателя, который создает момент, пропорциональный ошибке, из нагрузки выходного звена, обладающей инерцией и вязким демпфированием, и из позиционно чувствительных устройств измерения ошибки. Схема системы показана на фиг. 1. 34. Момент двигателя равен $M = K\varepsilon$. Функция системы на единичную входную функцию дана на фиг. 1. 35. Только интервал времени τ точно известен. Когда на входе системы создается постоянная скорость 1 рад/сек, то ошибка запаздывания положения равна $1/8,333\pi$ рад. Если входной вал заторможен, так что он не может вращаться, а к выходному валу приложен момент, то ошибка установившегося состояния равна $1/\pi^2$ радиана на единицу (P_1^*) приложенного момента. Определить на основании этих данных:

а) собственную частоту незатухающих колебаний (возможны два значения);

б) относительный коэффициент демпфирования ζ (возможны два значения);



Фиг. 1. 34. Схема сервомеханизма с двигателем, создающим момент, пропорциональный ошибке.



Фиг. 1. 35. Кривая реакции сервомеханизма на единичную входную функцию.

в) коэффициент вязкого демпфирования F (возможно только одно решение); определить размерности;

г) момент инерции J (возможны два значения); определить размерности.

1. 14. Сервомеханизм состоит из звеньев, как показано на фиг. 1. 36. Двухфазный серводвигатель развивает момент в соответствии с уравнением

$$M_d = -D \frac{d\theta_M}{dt} + B\varepsilon_0,$$

где D — константа, равная $10^{-5} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;
 B — константа, равная $1,5 \times 10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/в;
 e_o — напряжение, приложенное к регулируемой обмотке возбуждения двигателя.

Выходное напряжение усилителя определяется выражением

$$e_o = Ke_i + \frac{Ade_i}{dt}.$$

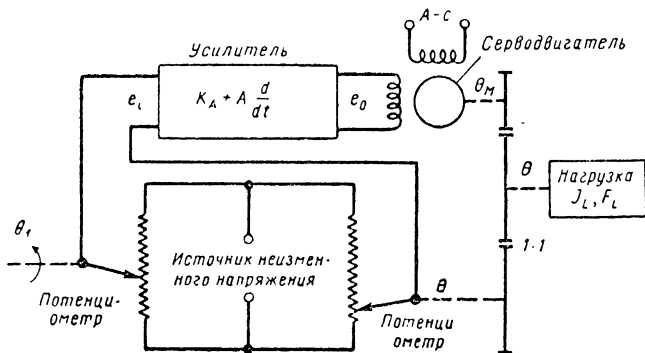
Значения K и A не заданы. Другие параметры системы равны:

J_L — момент инерции нагрузки, равный $2,5 \times 10^{-6} \times \Pi_2^*$ кгсм²;

F_L — коэффициент вязкого трения нагрузки, равный $0,01 \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;

$n = 1/40$ (передаточное отношение);

$K_p = 100$ в/рад (постоянная потенциметрического преобразователя).



Фиг. 1. 36. Схема сервомеханизма с двухфазным серводвигателем.

а) Определить дифференциальное уравнение системы относительно вала двигателя. Коэффициенты уравнений следует выразить через заданные буквенные обозначения.

б) Используя численные значения параметров системы, вычислить коэффициент усиления K и коэффициент A демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, при условии, что система будет иметь ошибку запаздывания положения в установившемся режиме, равную $0,01$ рад, при входной скорости $\theta_1 = \omega_1 t$, где $\omega_1 = 6$ рад/сек и, кроме того, сервомеханизм должен быть критически демпфирован.

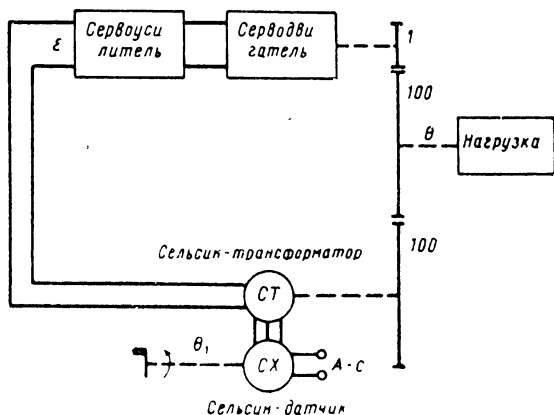
1. 15. У сервомеханизма, схема которого показана на фиг. 1. 37, общий коэффициент демпфирования F_1 , измеренный на валу двигателя, равен $50 \times 10^{-6} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек. Относительный коэффициент демпфирования ζ равен $0,25$. Момент инерции J , измеренный на валу двигателя, равен $1 \times 10^{-6} \times \Pi_2^*$ кгсм². Вал мотора соединен с нагрузкой

* См. конец главы.

через редуктор с передаточным отношением $100 : 1$. Регулирование двигателя производится по напряжению ошибки через усилитель. Двигатель создает момент $M_d = 0,02 \times \Pi_1^*$ кгм, когда напряжение на его зажимах составляет 100 в. Момент двигателя пропорционален приложенному напряжению; сельсин-трансформатор создает напряжение 1 в/град напряжения ошибки.

а) Определить коэффициент усиления усилителя.

б) Вычислить собственную частоту ω_n и частоту затухающих колебаний ω_d системы.



Фиг. 1. 37. Схема серводвигателя.

в) Вычислить величину сигнала рассогласования, выраженного в радианах, когда входное звено вращается с постоянной скоростью $\omega_i = 20$ об/мин.

г) Вычислить установившуюся ошибку при входном ступенчатом перемещении в 1 рад.

1. 16. Построить годограф $s_{1,2}$, определяемый уравнением (1. 19) в комплексной плоскости, когда величина ζ изменяется от нуля до бесконечности. Предположим, что величина ζ была изменена, когда значение F изменялось от нуля до бесконечности; ω_n принята постоянной.

1. 17. Определить полную реакцию позиционного сервомеханизма при $\theta_1(t) = 0$ и при возмущающей функции нагрузки $M_L = t$ и (t) .

1. 18. На фиг. 1. 38 показана схема позиционного сервомеханизма со следующими параметрами: для усилителя $i_p = K_1 e_a$; для двигателя $M = K_2 i_p$; для генератора $e_g = \frac{K_3 d\theta}{dt}$; для потенциометра $\epsilon_1 = K_4 (\theta_1 - \theta)$; предполагается, что двигатель нагружен моментом инерции J плюс постоянной нагрузкой M_L .

а) Написать дифференциальное уравнение системы.

б) Определить значение θ на единицу приложенного внешнего момента M_L , когда величина θ_1 сохраняется неизменной.

1. 19. Блок-схема сервомеханизма показана на фиг. 1. 39, причем коэффициенты усиления имеют следующие значения: $K_s = 60 \text{ в/рад}$; $K_A = 20 \text{ в/в}$; $K_M = 30 \times 10^{-6} \times \Pi_1^* \text{ кгм/в}$; $J = 10 \times 10^{-6} \times \times \Pi_2^* \text{ кг} \cdot \text{см}^2$; $F = 161 \times 10^{-6} \times \Pi_1^* \text{ кгм/рад/сек}$; $K_t = 0,25 \text{ в/рад/сек}$; $n_t = 1,0$; $n_1 = 1/30$; $n_2 = 1/20$.

а) Вычислить установившуюся скорость нагрузки при входном перемещении 1° , когда цепь обратной связи разомкнута.

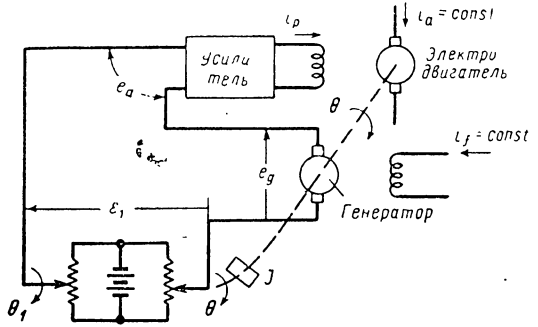
б) Определить относительный коэффициент демпфирования системы.

в) Определить степень общего демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, необходимого для получения относительного коэффициента демпфирования 0,7 при условии, что установившаяся ошибка, определяемая сельсинами, не будет превышать 2° при входной скорости 2 рад/сек .

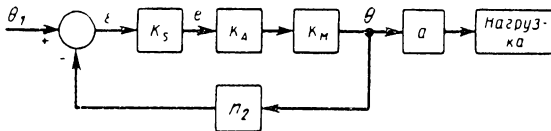
г) Вычислить собственную частоту системы.

1. 20. Система на фиг. 1. 38 дополнена демпфированием с помощью тахометрической обратной связи, причем параметры равны приведенным выше значениям.

а) Найти значение коэффициента усиления разомкнутой цепи, необходимого для получения относительного коэффициента демпфи-



Фиг. 1. 38. Схема позиционного сервомеханизма.



Фиг. 1. 39. Структурная схема сервомеханизма.

рования 0,7 при условии, что установившаяся ошибка, определяемая сельсинами, не будет превышать 2° при входной скорости 2 рад/сек .

б) Вычислить общее демпфирование посредством тахометрической обратной связи, требуемое для осуществления заданных условий.

в) Сравнить характеристики систем с применением демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, как это было определено в задаче 1. 19, и системы с тахометрической обратной связью; в каком случае время регулирования будет меньше? Дать пояснение.

* См. конец главы.

1. 21. Схема сервомеханизма с сельсинным детектором ошибки показана на фиг. 1. 40. Для этой системы известны следующие данные: постоянная сельсина 1 в/град ; коэффициент усиления 20 в/в ; постоянная момента двигателя $30 \times 10^{-6} \times P_1^* \text{ кгм/в}$; эффективный момент инерции на валу двигателя $11 \times 10^{-6} \times P_2^* \text{ кг}\cdot\text{см}^2$; эффективный коэффициент вязкого трения на валу двигателя $45 \times 10^{-6} \times P_1^*$.

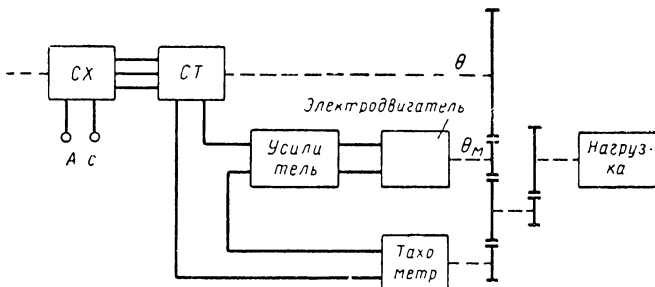
Постоянная тахометра $0,2 \text{ в/рад/сек}$.

Передаточное отношение от вала двигателя к нагрузке $1 : 30$.

Передаточное отношение от вала двигателя к тахометру $1 : 1$.

Передаточное отношение от вала двигателя к сельсину $1 : 60$.

а) Найти частоту колебаний выходного вала двигателя при единичной входной возмущающей функции, в предположении, что тахометр отсоединен.



Фиг. 1. 40. Блок-схема системы с тахометрической обратной связью.

б) Определить значение относительного коэффициента демпфирования, когда тахометр включен в систему.

в) Установить изменения, которые могут быть рекомендованы с целью получить относительный коэффициент демпфирования $0,5$ для системы пункта «б». Вычислить новое значение этой величины и определить преимущество этого метода по сравнению с любыми другими методами определения требуемого относительного коэффициента демпфирования.

г) В случае, когда тахометр отключен, усилитель заменен на другой, обладающий характеристикой выходного напряжения, определяемый выражением

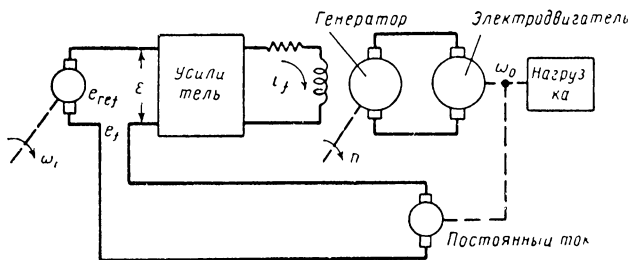
$$e_o = Ae_i + B \int e_i dt,$$

необходимо написать дифференциальное уравнение системы при условии, что выходное звено сервомеханизма вращается со скоростью $\omega_0 \text{ рад/сек}$; комментировать установившуюся ошибку.

1. 22. Система, показанная на фиг. 1. 41, использована для регулирования скорости большой нагрузки. Система характери-

* См. конец главы.

зается следующими параметрами: для усилителя $K_A = 10 \text{ а/в}$; для генератора $K_G = 100 \text{ в/а}$ тока возбуждения; для мотора $K_M = = 0,5 \times \Pi_1^* \text{ кгм/в}$. Кривая зависимости между скоростью и моментом показана на фиг. 1. 42. Оба тахометра постоянного тока как исходный, так и обратной связи, одинаковы и имеют постоянную $0,01 \text{ в/об/мин}$.



Фиг. 1. 41. Схема системы управления скоростью при большой нагрузке.

а) Определить скорость, с которой исходный двигатель должен вращаться, чтобы выходная скорость регулируемого двигателя равнялась 600 об/мин при отсутствии нагрузки.

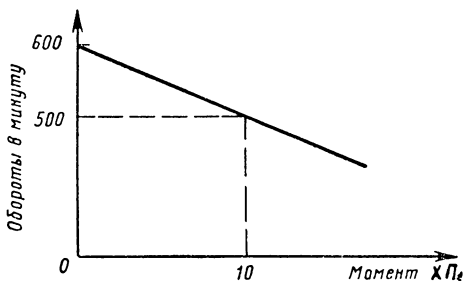
б) Определить изменение выходной скорости, когда нагрузочный момент внезапно повышается с 0 до $12 \times \Pi_1^* \text{ кгм}$.

в) Система работает с разомкнутой цепью (т. е. тахометрическая обратная связь разомкнута) и следует вычислить увеличение напряжения исходного тахометра, необходимого для сохранения скорости 600 об/мин после повышения нагрузки.

1. 23. Предположим, что детекторная часть системы, показанная на фиг. 1. 41, была изменена таким образом, что теперь регулируемый выходной момент пропорционален ошибке перемещения, а не ошибке скорости.

а) Написать дифференциальное уравнение движения, описывающее динамику системы.

б) Вычислить частоту (в рад/сек), при которой выходная величина будет колебаться около нового своего значения после внезапного изменения. Значение J равняется $5,0 \times \Pi_1^* \text{ кгм/сек}^2$.



Фиг. 1. 42. Характеристика электродвигателя. Зависимость числа оборотов от момента.

* Коэффициенты для перевода в метрическую систему измерений имеют следующие значения: $\Pi_1 = 0,1382 \text{ кгм}$; $\Pi_2 = 1,3569 \cdot 10^4 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$; $\Pi_3 = 1,3558 \text{ вт}$.

ГЛАВА 2

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ

Частотный метод изучения систем управления с обратной связью является одним из наиболее старых и наиболее полезных научных инструментов, доступных для инженера. Его можно применить, как правило, для изучения поведения систем при чисто синусоидальных входных функциях. Всегда предполагается, что синусоидальная входная функция действует в течение длительного времени, так что реакция при отсутствии источника энергии затухает и может быть достигнуто так называемое синусоидальное установившееся состояние. Если входная функция линейной системы имеет синусоидальный характер, то реакция всех звеньев системы должна быть также синусоидальной с одинаковой частотой, отличаясь только по амплитуде и фазе от первоначальных синусоидальных колебаний. Частотный метод состоит в изучении амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик звеньев или всей системы. Перед тем, как перейти к описанию самого метода, кратко укажем, почему этот метод имеет такое практическое значение. Для этого имеется несколько основных причин.

Прежде всего, существует определенная связь между частотной характеристикой системы в установившемся состоянии и всеми другими видами ее поведения. Эта связь играет большую роль в нашем рассмотрении, но, к сожалению, ее не просто выразить математически. Однако некоторые хорошо известные примеры, которые полезны в качественном отношении, могут быть приведены. Между первоначальной реакцией системы на внезапную входную величину (например, на ступенчатую входную функцию) и наибольшей частотой синусоидальных колебаний, на которую реагирует система с любой значительной амплитудой, существует связь. Кроме того, связь существует между наиболее низкой частотой, на которую реагирует система, и длительным или установившемся состоянием. В действительности, эти соображения вытекают из теорем начальных и конечных значений преобразования Лапласа. Другой аналогичный пример состоит в связи между резонансным пиком в частотной области и частотой затухающих колебаний системы без источника энергии. При малых значениях демпфирования резонансная частота и частота затухающих колебаний очень близки друг к другу. Об этом

можно сказать еще более подробно, но в настоящий момент достаточно подчеркнуть, что связь между временной и частотной областями образует основу большинства расчетных способов и критериев расчета. Наиболее общий способ состоит в интерпретировании требуемого поведения системы во временной области через частотные характеристики. Расчет обычно начинается в частотной области, затем частотная характеристика проверяется и обратно преобразуется во временную область. Следовательно, имеется постоянная взаимная связь характеристик в двух областях и проектировщик имеет возможность работать по обоим методам.

Другое важное преимущество частотного метода состоит в том, что он позволяет удобно производить непосредственные измерения. Генераторы синусоидальных колебаний и другие типы измерительных приборов и методов применяются в лабораториях и при практических испытаниях. Таким образом, теоретические результаты и характеристики как для отдельных звеньев, так и систем в целом могут быть вычислены и измерены. Математические основы частотного анализа хорошо известны для большинства инженеров. В настоящей главе в первую очередь освещаются математические методы частотного анализа, которые могут быть полезны как для анализа, так и для синтеза систем управления.

2. 1. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. СВЯЗЬ С ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ

В литературе достаточно подробно рассматривается реакция линейной системы на экспоненциальную вынуждающую функцию. Кратко повторим результаты подобных исследований, обращая особое внимание на источники установившихся синусоидальных колебаний.

Если начать с линейного дифференциального уравнения следующего вида:

$$B_0 + B_1 \frac{dc}{dt} + B_2 \frac{d^2c}{dt^2} + \dots + B_n \frac{d^nc}{dt^n} = A_0 r(t) + A_1 \frac{dr(t)}{dt} + A_2 \frac{d^2r}{dt^2} + \dots + A_m \frac{d^m r}{dt^m}, \quad (2.1)$$

то решение для вынуждающей функции типа $r(t) = \bar{R}e^{s_g t}$ (где \bar{R} , как правило, комплексная постоянная и $s_g = \sigma_g + j\omega_g$) определяется $c(t) = \bar{C}e^{s_g t}$, где

$$\frac{\bar{C}}{\bar{R}}(s) = \frac{A_0 + A_1 s_g + A_2 s_g^2 + \dots + A_m s_g^m}{B_0 + B_1 s_g + B_2 s_g^2 + \dots + B_n s_g^n} = \frac{A(s_g)}{B(s_g)}. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) представляет передаточную функцию системы при комплексной частоте $s = s_g$. Как видно, это совпадает с результатом, получаемым при лапласовом преобразовании уравнения (2.1)

при нулевых начальных условиях, образуя отношение $C(s)/R(s)$ и допуская, что $s = s_g$. Для практических систем можно также предположить, что $n \geq m$.

Когда возмущающая функция имеет синусоидальный характер, тогда $r(t)$ можно обычно написать в виде действительной или мнимой части экспоненциального выражения источника

$$s_g = j\omega_g,$$

где ω_g — круговая частота колебаний источника энергии.

Приравнивание мнимой или действительной части характеристики системы к экспоненциальной возмущающей функции можно осуществить в конце решения задачи.

Итак, передаточная функция при синусоидальных установившихся колебаниях по уравнению (2.2) становится

$$\begin{aligned} \frac{\bar{C}}{\bar{R}}(j\omega_g) &= \left. \frac{\bar{C}}{\bar{R}}(s) \right|_{s=j\omega_g} = \\ &= \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_ms^m}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_ns^n} \Bigg|_{s=j\omega_g}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) можно также разложить на множители, т. е.

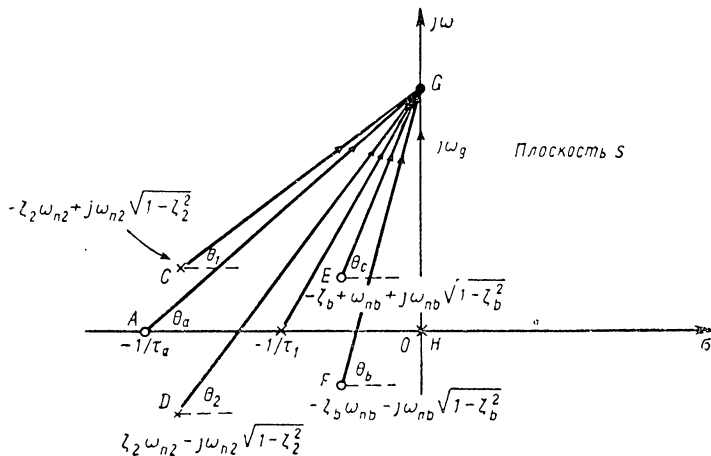
$$\begin{aligned} \frac{\bar{C}}{\bar{R}}(j\omega_g) &= \left. \frac{\bar{C}}{\bar{R}}(s) \right|_{s=j\omega_g} = \\ &= \frac{K' \left(s + \frac{1}{\tau_a} \right) \dots \left(s^2 + 2\zeta_b \omega_{nb} s + \omega_{nb}^2 \right) \dots}{s^N \left(s + \frac{1}{\tau_1} \right) \dots \left(s^2 + 2\zeta_2 \omega_{n2} s + \omega_{n2}^2 \right) \dots} \Bigg|_{s=j\omega_g}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где K' — постоянная величина; полиномы в числителе и знаменателе разложены на линейные и квадратичные множители. Таким образом, корни уравнения $A(s) = 0$ равны: $s = -\frac{1}{\tau_a}, \dots, s = -\zeta_b \omega_{nb} \pm \pm j\omega_{nb} \sqrt{1 - \zeta_b^2}$, где $\zeta_b \leq 1$; эти корни являются нулями передаточной функции.

Корни уравнения $B(s) = 0$ дают значения s , которые приводят к $\frac{\bar{C}}{\bar{R}}(s) \rightarrow \infty$ и связаны с полюсами передаточной функции. Они встречаются при $s = 0$ (с кратностью N), $s = -\frac{1}{\tau_1}, \dots, s = -\zeta_2 \omega_{n2} \pm j\omega_{n2} \sqrt{1 - \zeta_2^2}$, где $\zeta \leq 1$.

Если $s_g = j\omega_g$ подставить в уравнение (2.4), то в результате получим комплексное число, которое графически изображено на фиг. 2. 1. Член $j\omega_g + \frac{1}{\tau_a}$ изображен вектором \overline{AG} . Член второй степени изображен произведением двух векторов, т. е.

$$(s^2 + 2\zeta_b\omega_{nb}s + \omega_{nb}^2) \Big|_{s=j\omega_g} = \\ = (s + \zeta_b\omega_{nb} - j\omega_{nb}\sqrt{1-\zeta_b^2})(s + \zeta_b\omega_{nb} + j\omega_{nb}\sqrt{1-\zeta_b^2}) \Big|_{s=j\omega_g} = (\overline{FG})(\overline{EG}).$$



Фиг. 2. 1. Графическое определение частотной характеристики в плоскости s .

На основании изложенного выше уравнение (2.4) можно написать в виде

$$\frac{\overline{C}}{\overline{R}}(j\omega_g) = \frac{K'(\overline{AG})(\overline{FG})(\overline{EG})}{(\overline{HG})^N(\overline{BG})(\overline{DG})(\overline{CG})}. \quad (2.5)$$

Ввиду того, что $\frac{\overline{C}}{\overline{R}}$ является комплексным числом, его можно также выразить в векторной форме, т. е.

$$\frac{\overline{C}}{\overline{R}}(j\omega_g) = \overline{T}(j\omega_g) = T(\omega_g) e^{j\varphi(\omega_g)} = T(\omega_g) \angle \varphi(\omega_g). \quad (2.6)$$

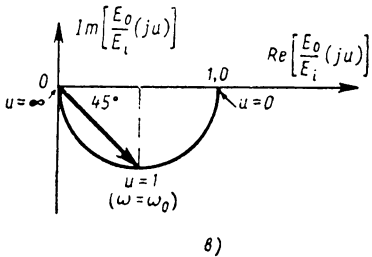
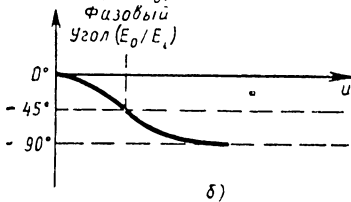
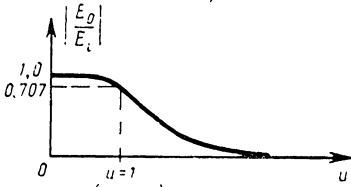
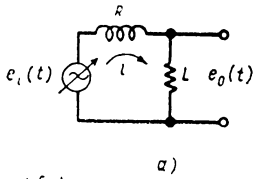
Из уравнений (2.5) и (2.6) получаем

$$\left| \frac{\overline{C}}{\overline{R}} \right| = T(\omega_g) = \frac{K' |\overline{AG}| |\overline{FG}| |\overline{EG}|}{|\overline{HG}|^N |\overline{BG}| |\overline{DG}| |\overline{CG}|} \quad (2.7a)$$

и

$$\varphi(\omega_g) = (\theta_a + \theta_b + \theta_c) - (90N^\circ + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (2.7b)$$

Если частоту источника колебаний считать теперь переменной величиной, то функцию $\bar{T}(j\omega_g)$ можно определить графически, рассматривая влияние перемещения точки G вдоль мнимой оси на последние два уравнения. При этих условиях нет необходимости определять



Фиг. 2. 2. Частотные характеристики контура RL :

a — контур RL ; b — амплитуда и фазовый угол в зависимости от u ; c — амплитудно-фазовая характеристика $\frac{E_o}{E_i}(ju)$ как функция параметра u .

частоту источника колебаний как $j\omega_g$ и ее можно просто обозначить $j\omega$, причем отсутствие индекса будет означать, что частота может иметь любое значение вдоль мнимой оси. Рассмотрим два простых примера для пояснения и иллюстрации связи между частотной характеристикой и характеристикой во временной области.

Система первого порядка. Рассмотрим контур RL на фиг. 2. 2, a , где e_i представляет входное напряжение и e_o — выходное напряжение. Уравнения, определяющие входную и выходную величины, будут

$$e_i = Ri + L \frac{di}{dt}; \quad (2.8a)$$

$$e_o = Ri. \quad (2.8б)$$

Рассмотрим теперь реакцию этого контура, когда e_i является синусоидальной функцией

$$e_i = E_i \sin \omega t = E_i \text{Im}(e^{j\omega t}). \quad (2.9)$$

Тогда уравнения (2.8a) и (2.8б) при этих условиях принимают вид:

$$E_i = (R + j\omega L) I; \quad (2.10a)$$

$$E_o = RI, \quad (2.10б)$$

где E_o и I — комплексные числа, представляющие амплитуду и фазу выходного напряжения и соответственно ток цепи, причем за исходный вектор взят E_i . Разделив уравнение (2.10б) на уравнение (2.10a) получаем передаточную функцию, т. е.

$$\frac{E_o}{E_i}(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \left(\frac{L}{R}\right)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\frac{1}{\tau} + j\omega}, \quad (2.11)$$

где $\tau = \frac{L}{R}$; τ , конечно, представляет постоянную времени контура, которая непосредственно входит в выражение переходного процесса в контуре.

Если допустить, что $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$, то уравнение (2. 11) можно переписать

$$\frac{E_0}{E_i}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \angle -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2. 12)$$

Это уравнение определяет отношение выходного напряжения к входному, выраженное через параметры контура и частоту колебаний источника напряжений. Важно отметить, что параметры контура содержатся в члене ω_0 , который имеет размерность *рад/сек* и равен обратному значению постоянной времени контура. На основании уравнения (2. 12) можно написать выходное напряжение в функции времени, а не в функции комплексного переменного, т. е.

$$e_0(t) = \frac{E_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (2. 13)$$

Если частоту источника напряжения варьировать, то комплексную величину $\frac{E_0}{E_i}(j\omega)$ можно изобразить графически. Прежде чем ограничивать результаты особым значением частоты ω_0 , их можно обобщить, допустив, что $\frac{\omega}{\omega_0} = u$, где величина u является теперь безразмерной, нормализованной частотной переменной (или безразмерным отношением частот). Отсюда уравнение (2. 12) переписывается следующим образом:

$$\frac{E_0}{E_i}(ju) = \frac{1}{1 + ju} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \angle -\arctg u. \quad (2. 14)$$

На фиг. 2, 2, б изображены амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. На фиг. 2, 2, в дана в комплексной плоскости амплитудно-фазовая характеристика $\frac{E_0}{E_i}(ju)$, как функция параметра u . Причину точной формы этих кривых можно объяснить, как это рассматривалось выше; сейчас достаточно только подчеркнуть, что они характеризуют передаточную функцию, когда частота источника синусоидального напряжения изменяется. Критическая точка встречается при $u = 1$, т. е. тогда, когда частота источника напряжения равна ω_0 . Если ω меньше чем ω_0 ($u < 1$), то отношение $E_0 : E_i$ больше, чем 0,707 и амплитуды E_0 и E_i приближаются друг к другу. Отношение $|E_0 : E_i|$ быстро снижается до нуля при частотах выше ω_0 . Следовательно, рассматриваемый контур ведет себя как фильтр нижних частот. Критическая частота или частота среза встречается при $u = 1$ или $\omega = \omega_0$. При $\omega = \omega_0$, $|E_0| = 0,707 |E_i|$ мощность на зажимах сопротивления R определяется $\frac{E_0^2}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{E_i^2}{R}\right)$, которая

точно равняется половине максимальной мощности, создаваемой на сопротивлении R (что имеет место при постоянном токе, когда $\omega = 0$). Следовательно, частота ω_0 называется также частотой половинной мощности.

Тот факт, что частота среза непосредственно связана с постоянной времени контура, можно иллюстрировать при рассмотрении характеристики выходного напряжения в переходном процессе. На основании уравнений (2. 8, а и б) можно написать дифференциальное уравнение, связывающее величины e_0 и e_i , т. е.

$$e_0 + \frac{L}{R} \cdot \frac{de_0}{dt} = e_i \quad \text{или} \quad e_0 + \tau \frac{de_0}{dt} = e_i. \quad (2. 15)$$

Характеристическое уравнение представляет $1 + s\tau = 0$, так что характеристика контура без источника напряжения определяется

$$e_0 = ke^{-t/\tau},$$

где k — произвольная постоянная, которую следует определить по начальным условиям. Таким образом, можно показать, что постоянную времени переходной характеристики определяют из выражения

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0}.$$

Другая важная связь между временной и частотной областями может быть установлена при рассмотрении характеристики контура, когда входное напряжение может быть выражено любой входной функцией, поддающейся преобразованию Лапласа и приложенной при $t = 0$ при нулевых начальных условиях. Допустим $\mathcal{L}e_i(t) = E_i(s)$. Применяв преобразование Лапласа к уравнению (2. 15), получаем следующий простой результат для отношения выходного напряжения к входному

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{1}{1 + s\tau} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}. \quad (2. 16)$$

Уравнение (2. 16) сходно с уравнением (2. 11), только величина $j\omega$ заменена на s . Отсюда видно, что передаточная функция $\frac{E_0}{E_i}(j\omega)$ одинакова с отношением $\frac{E_0}{E_i}(s)$, когда переменная s заменена на $j\omega$. Приравнивание знаменателя уравнения (2. 16) нулю приводит к характеристическому уравнению контура.

Передаточная функция уравнения (2. 16) имеет один полюс, расположенный при

$$s = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, частотная характеристика, соответствующая уравнениям (2. 11) или (2. 12), может быть определена, используя диаграмму в комплексной плоскости на фиг. 2. 3, на основании соотношения

$$\frac{E_0}{E_i}(j\omega) = \frac{1}{|AG|} \angle -\theta. \quad (2. 17)$$

С увеличением частоты точка G перемещается до мнимой оси; благодаря этому графику на фиг. 2. 2, б можно легко сочетать с фиг. 2. 3.

Если принять $e_i(t)$ за единичный импульс $e_i(t) = \delta(t)$, то можно сделать другой важный вывод. Ввиду того что

$$E_i(s) = \mathcal{L}e_i t = \mathcal{L}\delta(t) = 1,$$

то отсюда следует, что $E_0(s)$ определяется следующим образом:

$$E_0(s) = \frac{1}{1 + s\tau}.$$

Обратное преобразование этого уравнения дает импульсную характеристику контура. Отсюда,

$$e_0(t) = \mathcal{L}^{-1}E_0(s) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{1 + s\tau} = \mathcal{L}^{-1}\frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + s} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (2. 18)$$

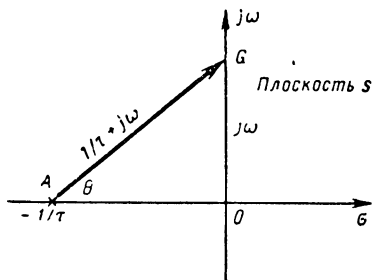
При изучении уравнения (2. 18) можно обнаружить, что оно идентично с точностью до постоянного множителя, с характеристикой контура без источника напряжения, описываемого уравнением (2. 25). Следовательно, импульсная характеристика и переходная характеристика без источника напряжения одинаковы по своему характеру.

Система второго порядка. Рассмотрим теперь частотную характеристику системы второго порядка, описанной в предыдущей главе. Для простоты предположим, что $n_2 = 1$ и $M'_L = 0$. Из уравнений (1. 9) и (1. 10) можно получить дифференциальное уравнение, связывающее выходное и входное напряжения. Следовательно, можно написать

$$J \frac{d^2c(t)}{dt^2} + F \frac{dc(t)}{dt} + Kc(t) = Kr(t) \quad (2. 19)$$

или

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t), \quad (2. 20)$$



Фиг. 2. 3. Графическое изображение частотной характеристики контура RL в плоскости s .

где частота собственных недемпфированных колебаний равна

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}},$$

относительный коэффициент демпфирования

$$\zeta = \frac{\frac{F}{2}}{\sqrt{\frac{K}{J}}} \leq 1.$$

Реакция этой системы на входные синусоидальные колебания находится теперь в следующем порядке. Первоначальное уравнение (2. 20) подвергнем лапласовому преобразованию в предположении нулевых начальных условий, т. е.

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) C(s) = \omega_n^2 R(s)$$

или

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + s^2 + 2\zeta\omega_n s}. \quad (2. 21)$$

После замены s на $j\omega$ выражение приобретает вид

$$\begin{aligned} \bar{T}(j\omega) &= \frac{\bar{C}(j\omega)}{\bar{R}(j\omega)} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} = \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}. \quad (2. 22) \end{aligned}$$

Фиг. 2. 4. Графическое изображение частотной характеристики системы в плоскости s при $\zeta \leq 1$ и

$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=j\omega}.$$

Вышеприведенный результат может быть связан с картиной распределения нулей и полюсов уравнения (2. 21), как показано на фиг. 2. 4. Уравнение (2. 21) имеет пару комплексных сопряженных полюсов при $\zeta < 1$. Когда $\zeta > 1$, тогда эти полюса лежат вдоль отрицательной действительной оси; при $\zeta = 1$ они совпадают в точке $s = -\omega_n$. В любом случае можно написать на основании фиг. 2. 4

$$\bar{T}(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(\overline{AG})(BG)} \angle -(\theta_1 + \theta_2).$$

Примем $u = \omega/\omega_n$, тогда новая безразмерная частота будет равна отношению действительной круговой частоты источника напряжения к недемпфированной собственной частоте системы, отсюда получаем следующий результат

$$\bar{T}(ju) = \frac{1}{1 + j2\zeta u - u^2} = |\bar{T}(ju)| e^{j\varphi(ju)}. \quad (2. 23)$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики будут определяться выражениями

$$|\bar{T}(ju)| = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}}; \quad (2.24)$$

$$\varphi(ju) = -\arctg \frac{2\zeta u}{1-u^2}. \quad (2.25)$$

Для полноты следует рассмотреть значения уравнений (2.24) и (2.25), выраженных через реакцию системы на входную синусоидальную функцию

$$r(t) = R \sin(\omega t + \theta),$$

где R — амплитуда;

θ — произвольный угол сдвига фаз.

Реакция системы на эту входную величину в установившемся состоянии определяется

$$c(t) = \frac{R}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}} \sin\left(\omega t + \theta - \arctg \frac{2\zeta u}{1-u^2}\right), \quad (2.26)$$

причем $u = \omega/\omega_n$, как определялось раньше. Важно отметить, что вышеописанное применение комплексных чисел и их связь с частотной характеристикой совершенно понятны.

На фиг. 2.5 амплитуда $\bar{T}(ju)$ построена в зависимости от отношения частот и при разных значениях отношения коэффициентов демпфирования согласно уравнению (2.24). Из этих кривых становится очевидно, что характеристика имеет резонансный пик при значениях $\zeta < \sqrt{2}/2 \approx 0,707$. Когда коэффициент демпфирования приближается к нулю, то значение резонансного пика приближается к бесконечности, а частота, при которой это происходит, приближается к частоте собственных недемпфированных колебаний системы, т. е. $u = 1$. Уравнение для резонансного пика может быть определено посредством дифференцирования выражения (2.24) по u и приравнивания производной нулю. Отсюда

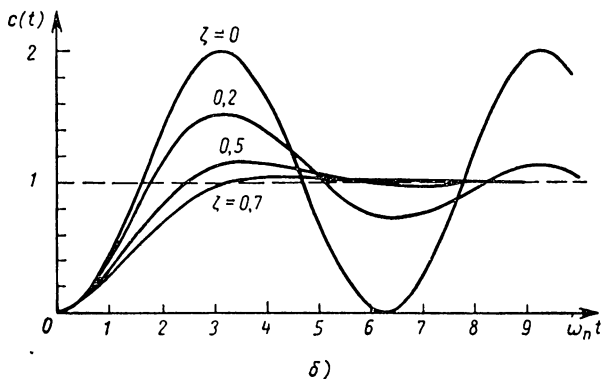
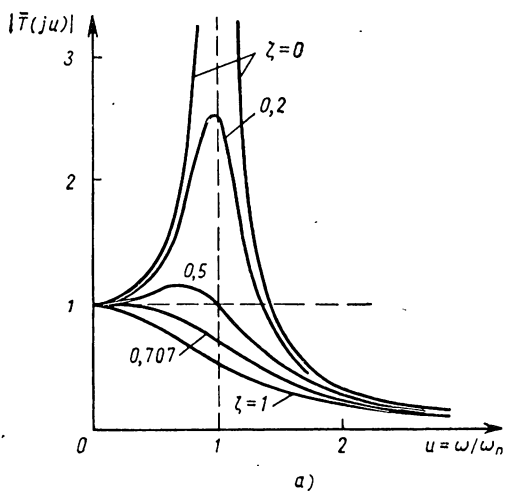
$$u_{\text{резонанс}} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \text{ при } \zeta \leq 0,5\sqrt{2}. \quad (2.27)$$

Величину резонансного пика можно определить подстановкой уравнения (2.27) в уравнение (2.24), что приводит к

$$|\bar{T}(ju)|_{\text{max}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (2.28)$$

Оба предыдущих выражения имеют физический смысл только тогда, когда $\zeta < 1/\sqrt{2}$, так как наклон кривой по уравнению (2.24) всегда отрицателен и резонансного пика нет, если относительные

коэффициенты демпфирования больше приведенного значения. Сплошная кривая на фиг. 2. 6 представляет величину резонансного пика, построенную при разных значениях ζ ; сплошная кривая на фиг. 2. 7 определяет частоту, при которой имеет место резонанс, причем параметром также служит ζ .



Фиг. 2. 5. Характеристики системы второго порядка,

a — амплитудно-частотные характеристики системы второго порядка при нормализованной частоте u ;

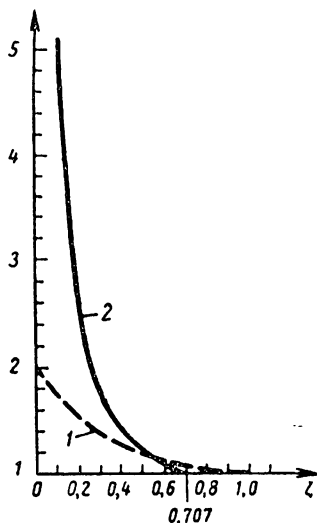
$$\bar{T}(ju) = \frac{C(ju)}{R(ju)} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}};$$

б — кривые реакции системы второго порядка на единичную входную функцию.

Связь между амплитудно-частотной характеристикой и кривой переходного процесса может быть найдена при рассмотрении результатов главы 1. Реакция на единичную входную функцию построена на фиг. 2. 5 при разных значениях относительных коэффициентов

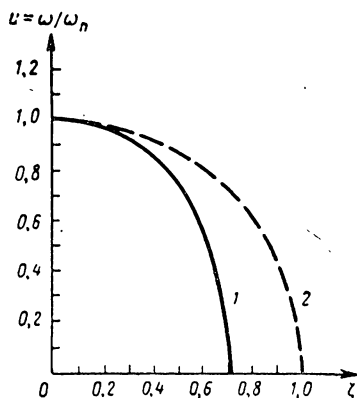
демпфирования. При $\zeta < 0,707$ имеет место перерегулирование, причем система возвращается к установившемуся состоянию с затухающими колебаниями. Пунктирная кривая на фиг. 2. 6 определяет зависимость между резонансным пиком амплитудно-частотной характеристики и пиковым значением перерегулирования переходного процесса при разных относительных коэффициентах демпфирования.

Частота демпфированных колебаний системы была выведена в главе 1 и определяется по соотношению $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Если эту частоту выразить через нормализованную частотную переменную (через безразмерное отношение частот) $u = \omega/\omega_n$, то получаем



Фиг. 2. 6. Зависимость между резонансным пиком амплитудно-частотной характеристики и перерегулированием кривой переходного процесса системы второго порядка:

1 — величина резонансного пика в зависимости от относительного демпфирования; 2 — максимум перерегулирования системы при реакции на единичную входную функцию при разных значениях относительного коэффициента демпфирования.



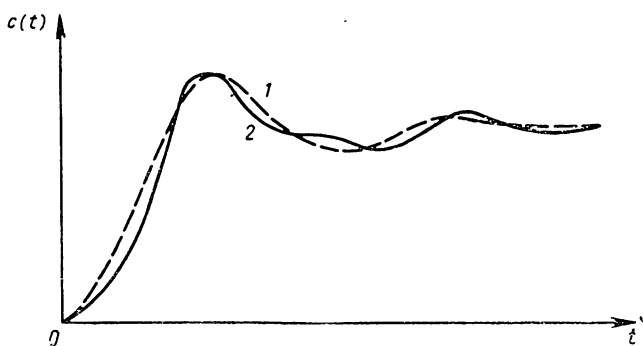
Фиг. 2. 7. Зависимость между резонансной частотой и частотой демпфированных колебаний реакции системы второго порядка на единичную входную функцию:

1 — резонансная частота в зависимости от относительного коэффициента демпфирования; 2 — частота демпфированных колебаний системы при реакции на единичную входную функцию в зависимости от относительного коэффициента демпфирования.

$u = \sqrt{1 - \zeta^2}$. Пунктирная кривая на фиг. 2. 7 определяет частоту демпфированных колебаний в зависимости от отношения коэффициентов демпфирования. Кривые на фиг. 2. 6 и 2. 7 графически изображают зависимость между характеристиками в частотной и временной областях. На фиг. 2. 6 видно, что резонансный пик и пиковое значение перерегулирования приближаются друг к другу в ограниченном диапазоне отношений коэффициентов демпфирования ζ . Из фиг. 2. 7 следует, что резонансная частота демпфи-

рованных колебаний связаны друг с другом при любом данном значении ζ . Следовательно, между этими двумя областями может быть установлена определенная связь. Конечно, изложенные результаты применимы специально к линейной системе второго порядка. Для систем высшего порядка существуют аналогичные зависимости, но они являются более сложными. В этом отношении система второго порядка является особенно полезной для вывода общего правила, но необходимо быть осторожным и не переносить эти результаты на системы высшего порядка.

В связи с этим рассмотрим неизвестную систему, реакцию которой на единичную функцию удалось измерить и определить, как показано на фиг. 2. 8. В качестве первого приближения к этой реакции на сту-



Фиг. 2. 8. Характеристика реакции системы, определяемая по эквивалентной схеме системы второго порядка: 1 — реакция системы второго порядка на единичную входную функцию; 2 — реакция действительной системы на единичную входную функцию.

пенчатую функцию можно принять реакцию системы второго порядка при данном относительном коэффициенте демпфирования и недемпфированной резонансной частоте ω_n . Очевидно, что передаточная функция системы и ее динамика определяются в той степени, насколько сохраняется справедливость этого приближения, парой комплексных сопряженных полюсов в комплексной плоскости, соответствующих полюсам эквивалентной системы второго порядка. Хотя этот тип приближения кажется несколько наивным, он имеет полное значение для расчета систем вследствие простоты связи между временной и частотной областями, которая превалирует в системах второго порядка.

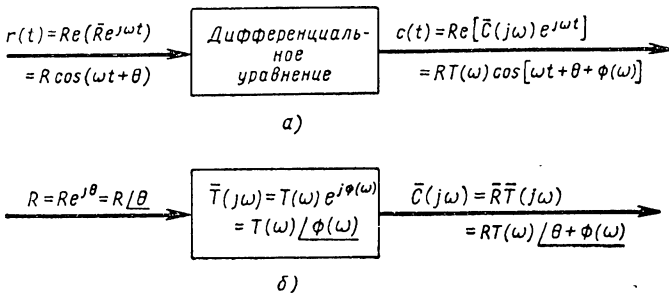
Точная математическая зависимость между временной и частотной областями выражается преобразованием Лапласа или интегралом Фурье, причем последний идентичен с лапласовым преобразованием, при условии, что $s = j\omega$ (лучше, чем при условии $s = \sigma + j\omega$) в предположении $f(t) = 0$ для $t < 0$.

2. 2. ГРАФИЧЕСКИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим общую передаточную функцию $\bar{T}(j\omega)$ между входной величиной $\bar{R} = R \angle \theta$ и реакцией $\bar{C}(j\omega)$. $T(j\omega)$ определяется из дифференциального уравнения, связывающего выходную и входную величины, т. е.

$$\bar{T}(j\omega) = T(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = T(\omega) / \angle \varphi(\omega) = T(\omega) \cos \varphi(\omega) + jT(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (2. 29)$$

Фиг. 2. 9 иллюстрирует связь между величинами во временной и частотной областях. Ввиду того, что $\bar{T}(j\omega)$ является функцией



Фиг. 2. 9. Обозначение частотных характеристик на схемах:

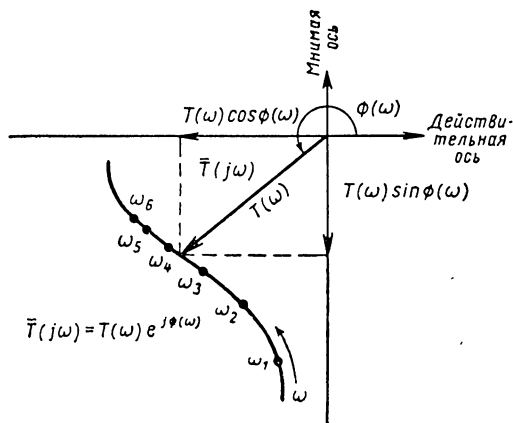
— временная область б — частотная область

комплексного переменного ω , ее можно графически изобразить несколькими способами, из которых наиболее распространенные и полезные будут рассмотрены ниже с целью подчеркнуть преимущества и недостатки каждого способа.

Векторная диаграмма и полярная кривая. При любой данной частоте функция $T(j\omega)$ может быть изображена в виде вектора¹ определенной величины и направления, как показано на фиг. 2. 10. Проекции вектора $\bar{T}(j\omega)$ на действительную и мнимую оси являются действительной и мнимой составляющими функции. Когда частота синусоидальной входной функции изменяется (ее амплитуда R и произвольный фазовый угол θ остаются постоянными), или когда тот или иной параметр системы изменяется, тогда функция $\bar{T}(j\omega)$ изменяется по величине и фазе. Конец вектора, изображающего функцию $\bar{T}(j\omega)$, оставляет след в виде кривой на комплексной плоскости; каждая точка этой кривой определяет положение вектора при любом частотном значении переменного параметра. Обычно переменным параметром является входная частота ω ; результирующая кривая известна как полярная кривая передаточной функции (или

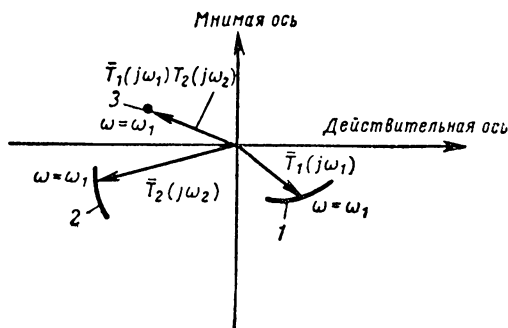
¹ Автор применяет термин «фазор» вместо обычного термина «вектор», мотивируя это тем, что здесь речь идет главным образом о комплексных числах, а не о векторах в физическом смысле. (Прим. пер.).

амплитудно-фазовая характеристика). Как правило, постоянные приращения частоты не отделяются между собой равными интервалами вдоль полярной кривой; интервалы приращения зависят от изменения вектора функции



Фиг. 2. 10. Графическое изображение амплитудно-фазовой характеристики в полярных координатах.

нагрузки пренебрежимо мало (т. е. выход первой системы не изменяется в результате присоединения второй системы), общая передаточная функция составной системы определяется комплексным произведением двух отдельных передаточных функций. На векторной диаграмме это будет означать, что векторы отдельных передаточных функций при каждой частоте должны быть умножены по алгебраическим правилам умножения комплексных переменных для получения вектора общей передаточной функции. Это показано на фиг. 2. 11, на которой можно видеть, что подобное соединение систем не является особенно удобным для изображения на векторной диаграмме. Но, с другой стороны, на полярной диаграмме можно легко определить функцию $1 + \bar{T}(j\omega)$. Как видно на фиг. 2. 12,



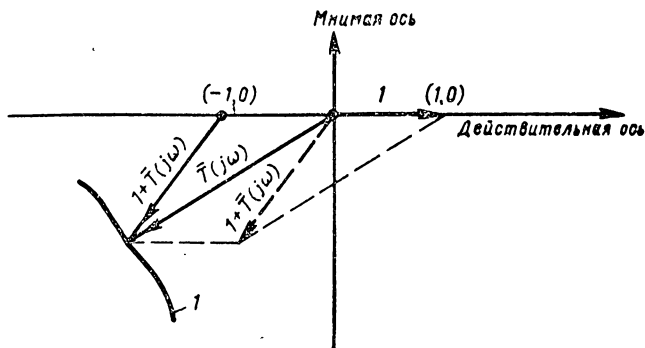
Фиг. 2. 11. Общая амплитудно-фазовая характеристика двух последовательно соединенных систем (без влияния нагрузки):

1 — амплитудно-фазовая характеристика первой системы; 2 — амплитудно-фазовая характеристика второй системы; 3 — точка на амплитудно-фазовой кривой двух последовательно соединенных систем при равенстве $\omega = \omega_1$.

функция $1 + \bar{T}(j\omega)$ представляет просто векторную сумму единичного вектора (+1) и вектора $T(j\omega)$. Результирующая величина оди-

накова с вектором, проведенным из точки $(-1,0)$ к первоначальной полярной кривой для $\bar{T}(j\omega)$. Иными словами, полярная кривая для $1 + \bar{T}(j\omega)$ идентична с полярной кривой для $\bar{T}(j\omega)$, когда начало координат смещено в точку $(-1,0)$.

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Передаточную функцию можно также изобразить двумя графиками; один из них определяет амплитудно-частотную характеристику, другой — фазо-частотную характеристику. Другая возможность состоит в построении семейства кривых, определяющих действительную и мнимую части зависимости $\bar{T}(j\omega)$. Последний графический



Фиг. 2. 12. Определение функции $1 + \bar{T}(j\omega)$ на полярной диаграмме:

— амплитудно-фазовая характеристика.

метод не часто применяется для изображения передаточной функции, хотя иногда он используется для построения импедансных функций. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики очень удобны, в особенности при определении характеристик зависимости между выходной и входной величинами электрических звеньев, например, сервоусилителей. Интересно отметить, что амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики (как и характеристики действительной и мнимой частей функции) не являются независимыми. Они связаны между собой более сложной интегральной формулой, так что одна из них может быть определена на основании другой характеристики¹.

Когда диапазон частот достаточно большой, тогда функции $T(\omega)$ и $\phi(\omega)$ часто строятся в зависимости от логарифма ω , т. е. частота наносится в логарифмическом, а не в линейном масштабе. Полезность амплитудно-частотной характеристики связана с тем, что она выявляет свойства пропускания нижних или верхних частот.

¹ Эта зависимость не была выведена здесь, но ее можно найти в других источниках, например, в книге Боде: «Теория цепей и расчет усилителей с обратной связью».

Когда две системы соединены последовательно с пренебрежимо малым влиянием нагрузки одной системы на другую, тогда передаточная функция объединенной системы находится умножением отдельных амплитудно-частотных характеристик и сложением фазо-частотных характеристик на каждой частоте в отдельности.

Логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Один из наиболее полезных методов графического изображения передаточной функции состоит в построении логарифмических амплитудно-частотных характеристик. Для этой цели используется полулогарифмическая диаграмма, причем частоты наносятся в логарифмическом масштабе. Логарифм функции $\bar{T}(j\omega)$ может быть взят с основанием 10 или как натуральный логарифм. Рассмотрим первоначально натуральный логарифм функции, т. е.

$$\ln \bar{T}(j\omega) = \ln [|\bar{T}(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}] = \ln |\bar{T}(j\omega)| + j\varphi(\omega). \quad (2.30)$$

Действительная часть логарифмической функции $\ln \bar{T}(j\omega)$ представляет натуральный логарифм амплитуды и она измеряется в единицах, называемых непер. Мнимая часть является фазо-частотной характеристикой.

Наиболее широко применяются амплитудно-частотные характеристики, построенные по логарифмическим значениям с основанием 10. Обычный порядок состоит в нанесении значений $20 \lg |\bar{T}(j\omega)|$ и зависимости фазового угла от логарифма частоты, т. е. частота наносится в логарифмических значениях. Основная размерность для величины $20 \lg |\bar{T}(j\omega)|$ называется децибел или сокращенно *дб*.

Логарифмические амплитудно-частотные характеристики обладают двумя преимуществами, которые станут более очевидны при последующем рассмотрении. Во-первых, когда две системы соединены последовательно с пренебрежимо малым нагрузочным влиянием друг на друга, тогда их отдельные логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные кривые могут быть суммированы для получения общей характеристики. Это вполне справедливо, так как умножение амплитуд эквивалентно сложению логарифмов их величин. Во-вторых, логарифмические амплитудно-частотные кривые легко построить, применяя метод приближения при помощи ряда прямолинейных отрезков. Другое преимущество логарифмических амплитудно-частотных кривых состоит в применении логарифмических значений частоты. Благодаря уменьшению масштаба одинаково подчеркиваются все части частотной характеристики. Это способствует связи между временной и частотной областями и существенно облегчает расчет необходимых корректирующих контуров.

Логарифмические амплитудно-фазовые характеристики. Другой метод, применяемый в теории регулирования, состоит в построении логарифмических амплитудно-фазовых кривых. При этом способе значения $20 \lg |\bar{T}(j\omega)|$ наносятся в зависимости от фазового угла $\varphi(\omega)$ в прямоугольных координатах, причем переменным пара-

метром служит частота, как и в случае амплитудно-фазовой характеристики. Подобный способ является очень удобным и часто используется в расчете.

2.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

До рассмотрения частотных характеристик любого данного звена или системы управления рассмотрим предварительно частотные характеристики, связанные с некоторыми основными операционными функциями. Задача состоит в том, чтобы показать связь между операцией и соответствующей частотной передаточной функцией и, кроме того, получить основные формы, из которых можно создать более сложные типы систем. Для каждой из них даются амплитудно-фазовая и амплитудно-частотная характеристики (в линейном масштабе), логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики и графическое распределение полюсов и нулей. Зависимость фазового угла от частоты не рассматривается вследствие ее сходства с полулогарифмической фазо-частотной характеристикой. Как правило, характеристики строятся в зависимости от отношения частот $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_b}$, так что кривые могут быть применены для любой шкалы частот, τ — постоянная, имеющая размерность времени, $\omega_b = \frac{1}{\tau}$ — круговая частота, известная как частота точки сопряжения. В дальнейшем при применении этой частоты станет очевидной полезность подобной нормализации понятия.

Чистое дифференцирование. Выходная и входная величины будут связаны в этом случае путем операции дифференцирования, т. е.

$$c(t) = \frac{\tau dr(t)}{dt} \quad (2.31)$$

или

$$C(s) = \tau s R(s), \quad (2.32)$$

где τ является постоянной, имеющей размерность времени, когда $c(t)$ и $r(t)$ имеют одинаковую размерность. Передаточная функция имеет один нуль в начале координат, как показано на фиг. 2.13, а.

Частотная характеристика определяется

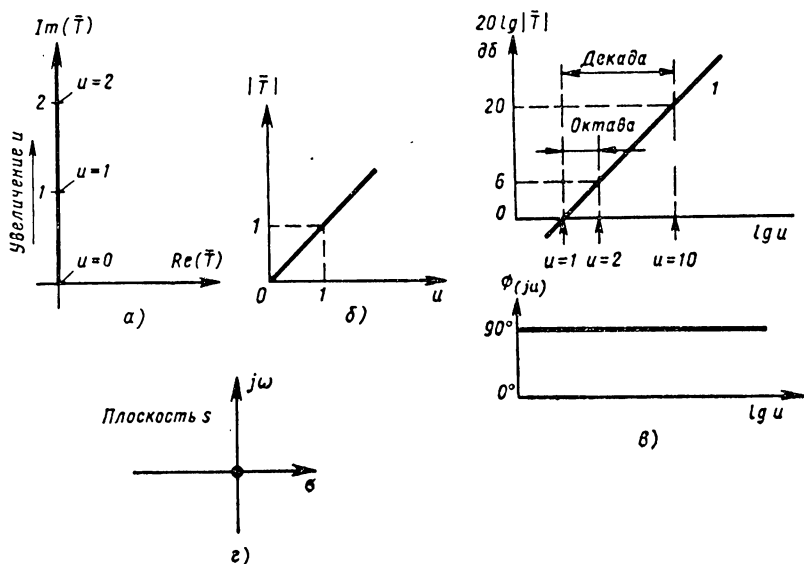
$$\bar{T} = j\omega\tau = \omega\tau \angle 90^\circ; \quad \bar{T} = ju = u \angle 90^\circ, \quad (2.33)$$

где $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_b}$ — безразмерное отношение частот.

Амплитудно-фазовая характеристика по уравнению (2.33) представляет прямую линию вдоль мнимой оси, как показано на фиг. 2.13, а. Амплитудно-частотная характеристика также прямая линия, как показано на фиг. 2.13, б. Логарифм модуля уравнения (2.33) дается

$$\partial\delta = 20 \lg |\bar{T}| = 20 \lg u. \quad (2.34)$$

Если значения в децибелах нанести в зависимости от логарифма отношения частот, то в результате получаем прямую линию, которая проходит через точку 0 дб при $u = 1$ (т. е. когда $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_b$). Наклон этой линии соответствует $20 \text{ дб/единичное значение } \lg u$. Единичное приращение $\lg u$ соответствует приращению отношения u частот или круговой частоты ω в 10 раз, так как $\lg 10 = 1$. Следовательно, этот наклон может быть определен как 20 дб/декада ,



Фиг. 2. 13. Графики частотных характеристик при чистом дифференцировании; зависимость $\bar{T} = (ju)$, где $u = \omega\tau$:

а — амплитудно-фазовая характеристика; *б* — амплитудно-частотная характеристика; *в* — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики; *г* — положение нуля при $T(s) = s\tau$; *1* — наклон $20 \text{ дб/декада} = 6 \text{ дб/октава}$.

где декада соответствует множителю 10 в выражении для частоты. Часто наклон также определяется через дб/октава , где октава соответствует удвоению частоты. В этом случае число в децибелах увеличивается на $20 \lg 2 = 6,02 \text{ дб}$ каждый раз, когда частота удваивается, так что наклон характеристики определяется как 6 дб/октава . Эти значения наклона характеристик и коэффициенты умножения неоднократно появляются в передаточных функциях. На фиг. 2. 13, в построены логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Согласно уравнению (2. 33) угол сдвига фаз очевидно равняется 90° и не зависит от частоты. Опережение фазы на 90° , связанное с этой передаточной функцией в частотной области, свидетельствует о чистом дифференцировании во временной области; таким образом одну характеристику можно вывести из другой.

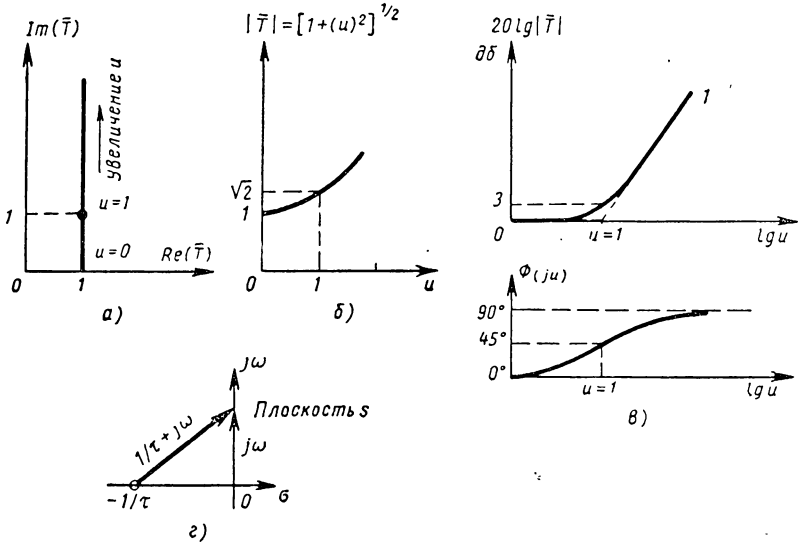
Пропорциональное регулирование с одновременным регулированием по производной. В этом случае выходная и входная величины связаны между собой выражением

$$c(t) = r(t) + \tau \frac{dr(t)}{dt} \quad (2.35)$$

или

$$C(s) = (1 + \tau s) R(s), \quad (2.36)$$

где τ — постоянная величина, имеющая размерность времени, когда $c(t)$ и $r(t)$ имеют одинаковую размерность. Передаточная функция



Фиг. 2. 14. Частотные характеристики системы $T = 1 + j\omega$, где $u = \omega\tau$:

a — амплитудно-фазовая характеристика; *б* — амплитудно-частотная характеристика; *в* — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики; *г* — положение нуля при $T(s) = 1 + s\tau$; 1 — наклон = 20 дб/декада = 6 дб/октава.

$\frac{C}{R}(s) = 1 + \tau s = \tau \left(\frac{1}{\tau} + s \right)$ имеет один нуль, расположенный в точке $s = -\frac{1}{\tau}$, как показано на фиг. 2. 14. Передаточная функция при синусоидальных входных колебаниях определяется

$$\begin{aligned} \bar{T} &= 1 + j\omega\tau = 1 + ju = \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \angle \text{arc tg } \omega\tau = \\ &= \sqrt{1 + u^2} \angle \text{arc tg } u, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_b}$. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой прямую линию, параллельную мнимой оси, как показано на фиг. 2. 14, *г*. Амплитудно-частотная характеристика дана на

фиг. 2. 14, б. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется

$$\delta b = 20 \lg |\bar{T}| = 10 \lg (1 + u^2). \quad (2. 38)$$

Кривую по уравнению (2. 38) нетрудно построить, рассмотрев ее поведение при предельных значениях частоты. Когда $u \ll 1$ (т. е. когда $\omega \ll \omega_b$) выражение (2. 38) становится равным $10 \lg 1 = 0$. Когда $u \gg 1$ (т. е. когда $\omega \gg \omega_b$), тогда выражение (2. 38) становится равным $10 \lg (\omega\tau)^2 = 20 \lg u$. Очевидно последнее выражение представляет прямолинейную характеристику, идентичную случаю чистого дифференцирования и проходящую через точку 0 дб, когда $u = 1$ (т. е. $\omega = \omega_b$) и имеющую наклон 20 дб/декада или 6 дб/октава . Эти асимптоты показаны пунктирными линиями на фиг. 2. 14, в. Частота, при которой высокочастотная асимптота пересекается с низкочастотной (т. е. когда $u = 1$ или $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_b$), известна под названием частоты точки сопряжения. Когда $u = 1$, тогда уравнение (2. 38) равно в действительности $10 \lg 2 = 3,01 \text{ дб}$. Отсюда можно видеть, что логарифмическая амплитудно-частотная характеристика при частоте точки сопряжения лежит на 3 дб выше пересечения асимптот. Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики обычно достаточно знать эти две асимптоты и значение частоты точки сопряжения. На фиг. 2. 15 дана поправочная кривая в децибелах, применяемая к асимптотам для определения действительной кривой при разных значениях отношения частот. Необходимо также отметить, что амплитуда характеристики равна $\sqrt{2}$ при частоте точки сопряжения. Фазо-частотная характеристика согласно уравнению (2. 37) лежит между $\text{arctg } 0 = 0^\circ$ и $\lim_{u \rightarrow \infty} \text{arctg } u = 90^\circ$, как показано на фиг. 2. 14, в. Тот факт, что фазовый угол представляет опережение между 0 и 90° , свидетельствует о пропорциональном регулировании с одновременным регулированием по производной. С увеличением частоты и с приближением фазового угла к 90° дифференциальный член становится преобладающим.

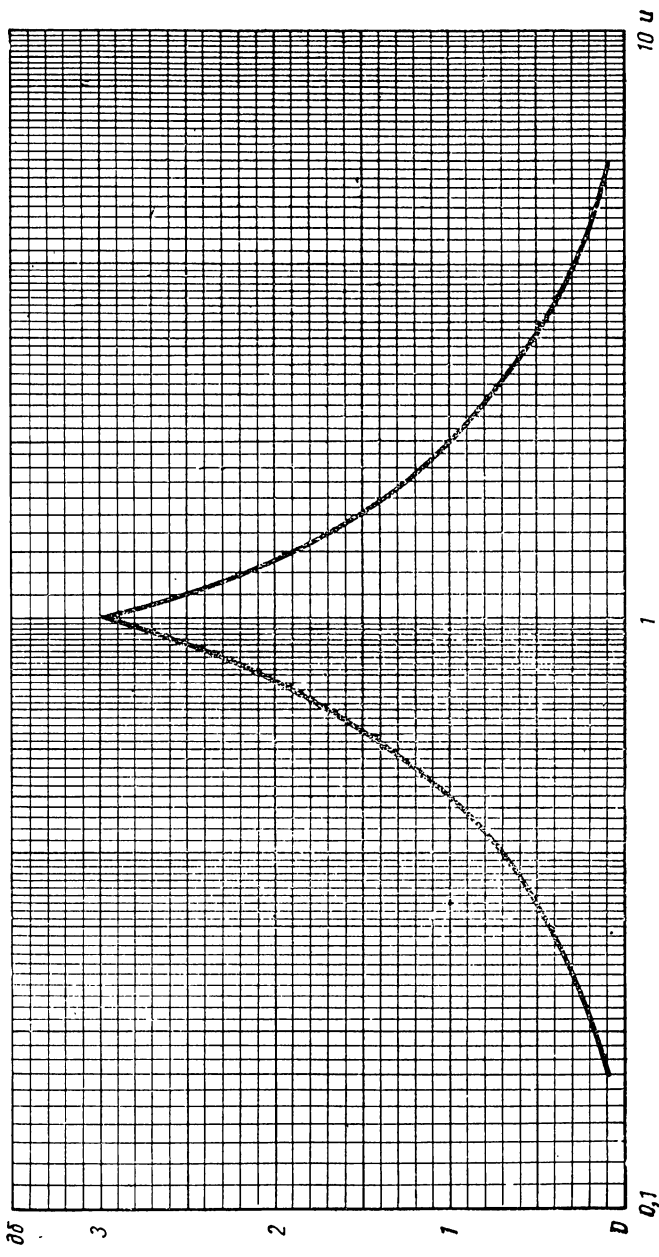
Чистое интегрирование. В этом случае входная и выходная величины связаны выражениями

$$c(t) = \frac{1}{\tau} \int r(t) dt \quad (2. 39)$$

или

$$C(s) = \frac{R(s)}{\tau s}, \quad (2. 40)$$

где τ представляет постоянную величину, имеющую размерность времени, когда $c(t)$ и $r(t)$ имеют одинаковую размерность. Как видно, передаточная функция $\frac{C}{R}(s) = \frac{1}{\tau s}$ имеет полюс в начале координат,



Фиг. 2. 15. Поправочная кривая. Коррекция в децибелах добавляется к асимптотическому значению передаточных функций в виде $|\bar{T}| = (1 + u^2)^{1/2}$. При применении к функциям вида $|\bar{T}| = (1 + u^2)^{-1/2}$ коррекция в децибелах должна быть вычтена из асимптоты.

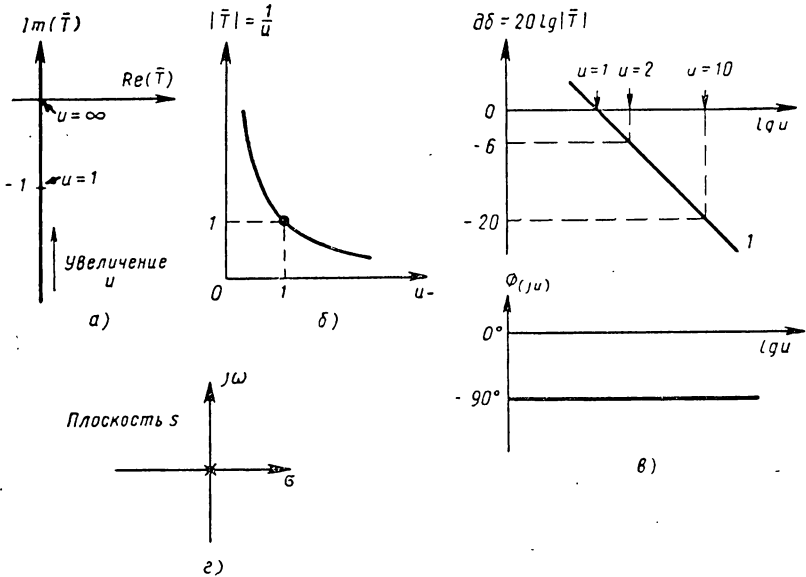
I — наклон = 20 дБ/декада = 6 дБ/октава.

как показано на фиг. 2. 16, *г*. Частотная характеристика определяется выражением

$$\bar{T} = \frac{1}{j\omega\tau} = \frac{1}{\omega\tau} \angle -90^\circ = \frac{1}{ju} = \frac{1}{u} \angle -90^\circ, \quad (2.41)$$

где $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_b}$.

Амплитудно-фазовая характеристика по уравнению (2.41) очевидно изображается прямой линией вдоль отрицательной мнимой оси,



Фиг. 2. 16. Графики частотных характеристик при чистом интегрировании. Зависимость $\bar{T} = 1/j\omega\tau$, где $u = \omega\tau$:

а — фазо-частотная характеристика; *б* — амплитудно-частотная характеристика; *в* — логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика; *г* — положение полюсов при $\bar{T}(s) = 1/\tau s$; 1 — наклон = -20 дб/декада = -6 дб/октава.

как показано на фиг. 2. 16, *а*. Амплитудно-частотная кривая имеет гиперболический характер (фиг. 2. 16, *б*). Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется

$$\delta\delta = 20 \lg |\bar{T}| = 20 \lg \frac{1}{u} = -20 \lg u. \quad (2.42)$$

Эта характеристика также прямолинейна, подобно случаю чистого дифференцирования, но наклон ее отрицательный, т. е. -20 дб/декада или -6 дб/октава. Эти кривые даны на фиг. 2. 16, *в*. Запаздывание по фазе на 90° свидетельствует о чистом интегрировании.

Пропорциональное плюс интегральное регулирование. Выходная и входная величины связаны в этом случае уравнением

$$c(t) = r(t) + \frac{1}{\tau} \int r(t) dt \quad (2.43)$$

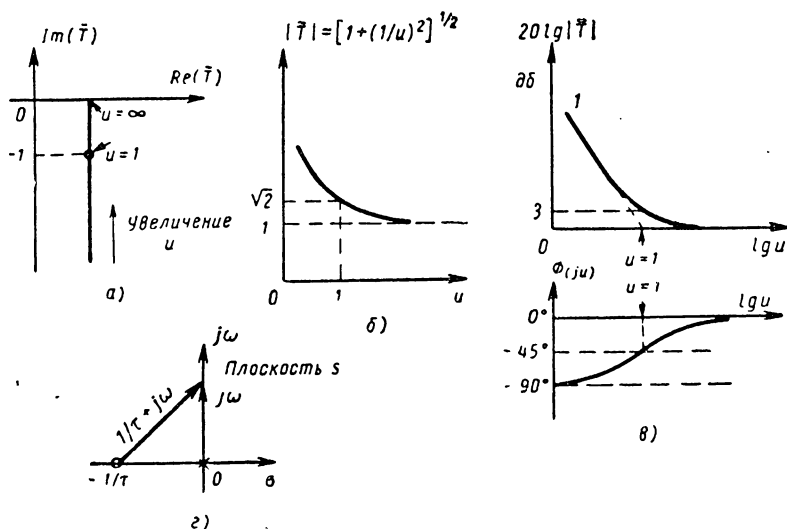
или

$$C(s) = \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right) R(s), \quad (2.44)$$

где τ — постоянная величина, имеющая размерность времени, когда $c(t)$ и $r(t)$ имеют одинаковую размерность.

Как видно, передаточная функция

$$\frac{C}{R}(s) = 1 + \frac{1}{\tau s} = \frac{1 + \tau s}{\tau s} = \frac{1}{\tau} + \frac{s}{s}$$



Фиг. 2. 17. Графики частотных характеристик $\bar{T} = 1 + 1/j\omega\tau$, где $u = \omega\tau$:

a — амплитудно-фазовая характеристика; *б* — амплитудно-частотная характеристика; *в* — логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика; *г* — положение нуля и полюсов при $\bar{T}(s) = 1 + 1/\tau s = (1 + \tau s)/\tau s$; *д* — наклон = -20 дБ/декада = -6 дБ/октава.

имеет ноль в точке $s = -\frac{1}{\tau}$ и полюс в точке $s = 0$, что показано на фиг. 2. 17, *г*. Частотная характеристика определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{T}(j\omega) &= 1 + \frac{1}{j\omega\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2} \angle -\arctg \frac{1}{\omega\tau} = \\ &= 1 + \frac{1}{ju} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{u}\right)^2} \angle -\arctg \frac{1}{u}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_b}$.

Амплитудно-фазовая характеристика представляет прямую линию, параллельную мнимой оси (фиг. 2. 17, *а*). Амплитудно-частотная

характеристика дана на фиг. 2. 17, б. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta\delta &= 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{1}{u}\right)^2} = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{1}{u}\right)^2\right] = \\ &= 10 \lg(1 + u^2) - 10 \lg u^2. \end{aligned} \quad (2. 46)$$

Уравнение (2. 46) нетрудно графически построить путем рассмотрения его поведения при крайних значениях частоты. Когда $u \gg 1$, тогда выражение (2. 46) становится равным 0 дб. Когда $u \ll 1$, тогда уравнение (2. 46) становится равным $10 \lg \left(\frac{1}{u}\right)^2 = -20 \lg u$. Это означает прямую линию с наклоном -20 дб/декада или -6 дб/октава , которая пересекает асимптоту 0 дб в точке $u = 1$ или $\omega = \frac{1}{T} = \omega_b$. При $u = 1$ выражение (2. 46) равняется $10 \lg 2 = 3,01 \text{ дб}$, так что действительная кривая находится на 3 дб выше пересечения асимптот при частоте точки сопряжения $u = 1$.

Поправочная кривая на фиг. 2. 15 может быть также использована для определения действительной характеристики с учетом этих асимптот. В конкретном случае поправка в децибелах должна быть просуммирована со значением асимптоты. Фазовый угол по уравнению (2. 45) изменяется от -90° , когда $\omega = 0$, до 0° , когда $\omega = \infty$. Эти характеристики изображены на фиг. 2. 17, в. То обстоятельство, что сдвиг фазы представляет запаздывание между 90 и 0° свидетельствует о пропорциональном и интегральном регулировании с преобладанием интегрального члена при более низких частотах.

2. 4. ПОВТОРНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ ФОРМ

В предыдущем разделе передаточные функции часто имели следующие общие формы:

$$\bar{T} = (ju)^{\pm n} = (u)^{\pm n} \angle \pm 90^\circ n; \quad (2. 47)$$

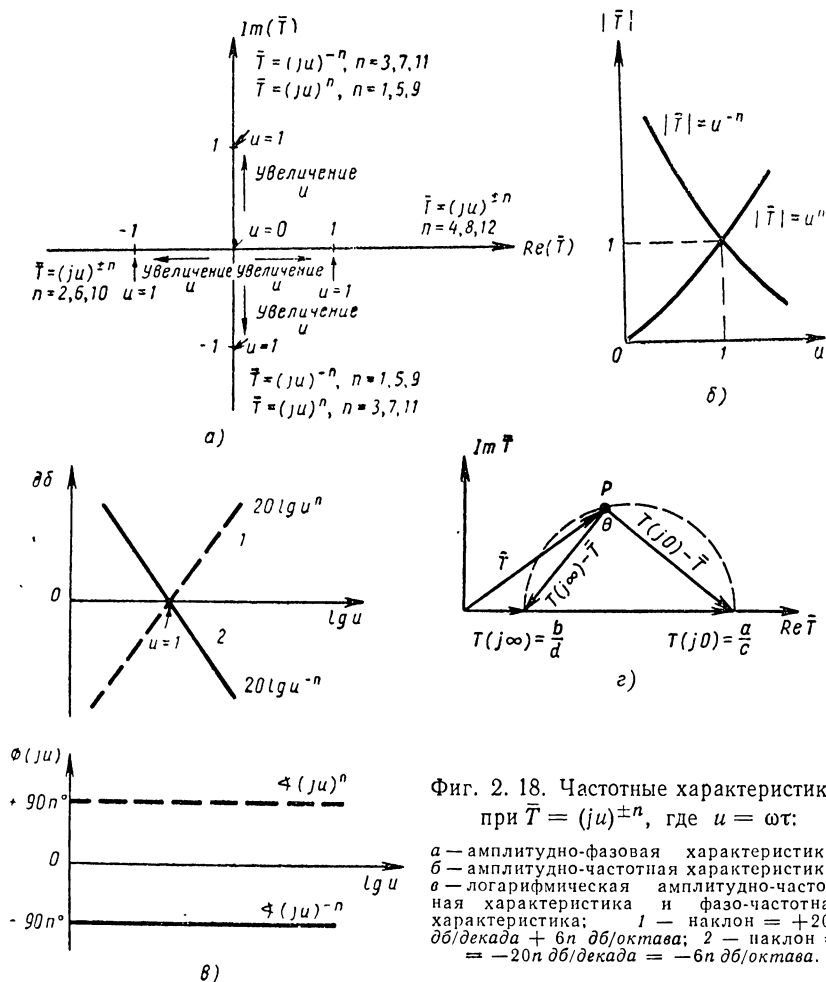
$$\bar{T} = (1 + ju)^{\pm n} = [1 + (u)^2]^{\pm n/2} \angle \pm n \text{ arc tg } u; \quad (2. 48)$$

$$\bar{T} = \left(1 - \frac{j}{u}\right)^{\pm n} = \left[1 + \left(\frac{1}{u}\right)^2\right]^{\pm n/2} \angle \mp n \text{ arc tg } \frac{1}{u}, \quad (2. 49)$$

где $u = \omega T$ и n может быть любым положительным числом.

Уравнение (2. 47) представляет последовательные дифференцирования или интегрирования в зависимости от знака (положительного или отрицательного) показателя степени. Амплитудно-фазовая кривая согласно уравнению (2. 47) проходит вдоль оси $\pm j$ или ± 1 , в зависимости от частного значения числа n и знака показателя степени, как показано на фиг. 5. 18, а. Логарифмическая амплитудно-

частотная характеристика согласно уравнению (2. 47) определяется из равенства $20 \lg u^{\pm n} = \pm 20n \lg u$. Как видно, эта прямая линия, проходящая через точку 0 дБ при $u = 1$, с наклоном ± 20 дБ/декада или ± 6 дБ/октава. Эти характеристики изображены на фиг. 2. 18. Частотные характеристики по уравнению (2. 48) зависят от поло-



Фиг. 2. 18. Частотные характеристики при $\bar{T} = (ju)^{\pm n}$, где $u = \omega\tau$:

а — амплитудно-фазовая характеристика; б — амплитудно-частотная характеристика; в — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика и фазо-частотная характеристика; 1 — наклон = +20 дБ/декада + 6 н дБ/октава; 2 — наклон = -20 н дБ/декада = -6 н дБ/октава.

жительного или отрицательного знака у показателя степени. Теперь амплитудно-фазовая кривая не является прямой линией и поэтому ее более трудно построить. Если число n имеет положительное значение, то амплитудно-фазовая кривая для \bar{T} приближается к бесконечности, когда отношение частот становится большим. Если же число n имеет отрицательное значение, то амплитудно-фазовая кривая приближается к нулю с увеличением отношения частот.

В частном случае, когда $u = 1$, амплитудно-фазовая кривая¹ превращается в полуокружность, но в других случаях получаются более сложные кривые, как можно видеть на фиг. 2. 18, а. Однако логарифмические амплитудно-частотные кривые продолжают оставаться простыми, так как асимптоты могут быть легко найдены. Следовательно,

$$20 \lg(1 + u^2)^{\pm n/2} = \pm 10n \lg(1 + u^2). \quad (2.50)$$

Когда $u \ll 1$, тогда выражение (2.50) превращается в линию 0 дб. Когда $u \gg 1$, тогда выражение (2.50) становится равным $\pm 20n \lg u$. Оно представляет прямую линию в логарифмических координатах с наклоном ± 20 дб/декада или ± 6 дб/октава, причем она проходит через 0 дб, когда $u = 1$. При $u = 1$ уравнение (2.50) будет

$$\pm 10n \lg 2 = \pm 3,01n \text{ дб.}$$

Таким образом, действительная точка лежит выше или ниже точки сопряжения на $3n$ дб, в зависимости от знака показателя первоначальной степени. На фиг. 2. 19 построены характеристики согласно уравнению (2.48).

¹ Можно показать, что амплитудно-фазовая кривая любой функции вида

$$\bar{T}(j\omega) = \frac{(a + j\omega b)}{(c + j\omega d)}$$

представляет полуокружность, причем a , b , c и d — действительные постоянные. Рассмотрим следующие выражения

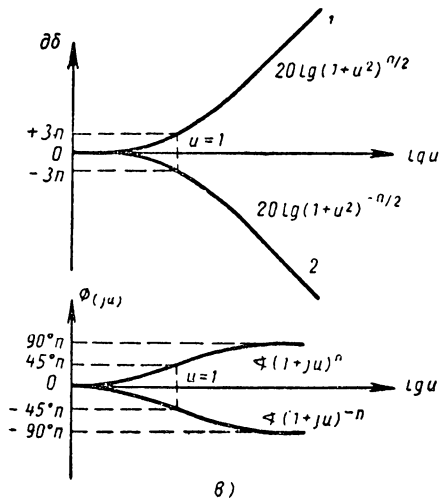
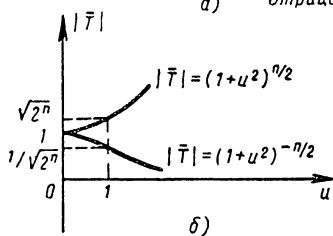
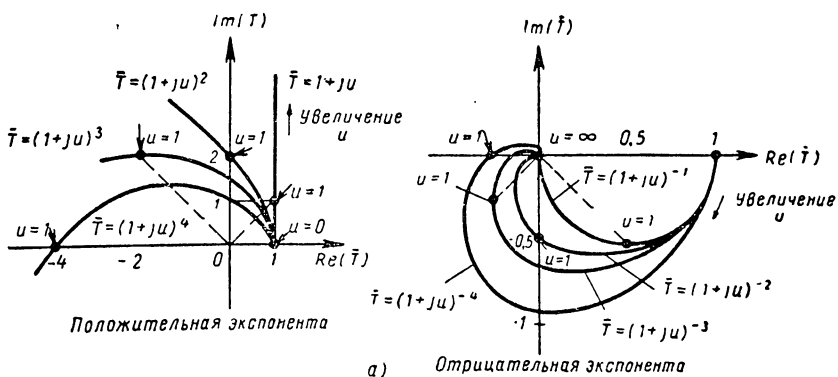
$$\bar{T}(j0) = \frac{a}{c}; \quad \bar{T}(j\infty) = \frac{b}{d};$$

$$\bar{T}(j0) - \bar{T} = \frac{a}{c} - \frac{a + j\omega b}{c + j\omega d} + \frac{j\omega(ab - bc)}{c(c + j\omega d)};$$

$$\bar{T}(j\infty) - \bar{T} = \frac{b}{d} - \frac{a + j\omega b}{c + j\omega d} = \frac{-(ad - bc)}{d(c + j\omega d)}.$$

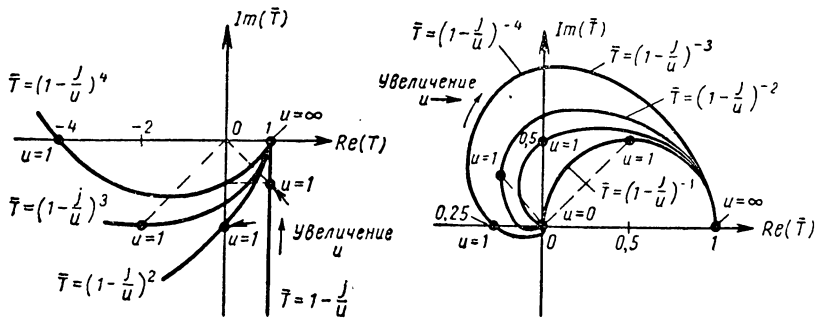
$$\begin{aligned} \text{Теперь } |\theta| &= \left| \angle [\bar{T}(j\infty) - \bar{T}] - \angle [\bar{T}(j0) - \bar{T}] \right| = \left| \angle \frac{\bar{T}(j\infty) - \bar{T}}{\bar{T}(j0) - \bar{T}} \right| = \\ &= \left| \angle \frac{-(ad - bc)}{d(c + j\omega d)} \cdot \frac{c(c + j\omega d)}{j\omega(ad - bc)} \right| = 90^\circ. \end{aligned}$$

Итак, внутренний угол θ в точке P равняется 90° при всех значениях круговой частоты ω . Отсюда следует согласно равенству вписанных углов полуокружности, что геометрическое место точек P представляет полуокружность (см. фиг. 2. 18, а).



Фиг. 2. 19. Частотные характеристики при $\bar{T} = (1 + ju)^{\pm n}$, где $u = \omega t$:

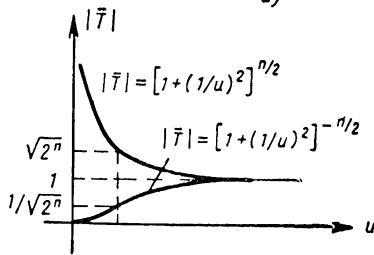
a — амплитудно-фазовая характеристика $(1 + ju)^{\pm n}$; *б* — амплитудно-частотная характеристика; *в* — логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики; 1 — наклон = 20 н дб/декада = 6н дб/октава; 2 — наклон = -20н дб/декада = -6н дб/октава.



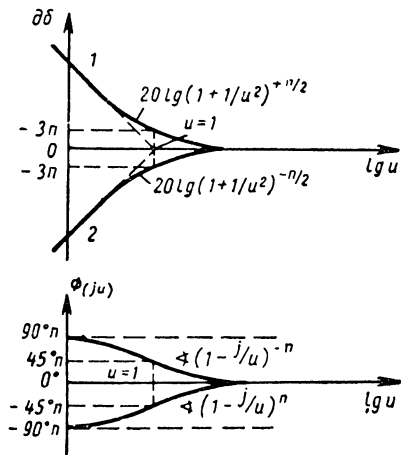
Положительная экспонента

Отрицательная экспонента

а)



б)

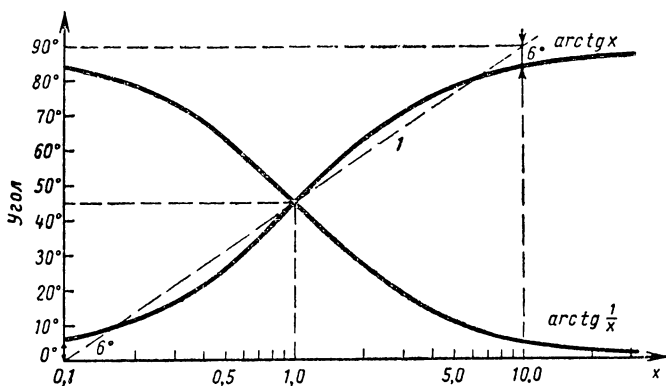


в)

Фиг. 20. Частотные характеристики при $T = (1 + 1/j\omega)^{\pm n} = (1 - j/\omega)^{\pm n}$, где $u = \omega T$:

а — амплитудно-фазовая характеристика $(1 + 1/j\omega)^{\pm n}$; б — амплитудно-частотная характеристика; в — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики; 1 — наклон = $-20n$ дБ/декада = $-6n$ дБ/октава; 2 — наклон = $20n$ дБ/декада = $6n$ дБ/октава.

Частотные характеристики по уравнению (2.49) идентичны с частотными характеристиками уравнения (2.48), за исключением того, что отношение частот заменено на отрицательное значение обратного отношения частот ($-\frac{1}{u}$). Эти характеристики построены



Фиг. 2. 21. Зависимость арктангенса угла от аргумента:
 l — приближенная прямая линия.

на фиг. 2. 20. Для облегчения точного построения этих характеристик можно составить таблицу со значениями $20 \lg N$ в зависимости от числа N и построить кривые $\arctg \operatorname{tg} x$ и $\arctg \left(\frac{1}{x}\right)$ в зависимости от x , как это сделано на фиг. 2. 21.

2. 5. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ЗВЕНА

Частотная характеристика колебательного звена является одной из наиболее распространенных, причем входная и выходная величины связаны между собой следующим уравнением, которое идентично дифференциальным уравнениям системы второго порядка [см. уравнение (2. 20)] при $\tau = \frac{1}{\omega_n}$,

$$\tau^2 \frac{d^2c(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (2. 51)$$

или

$$(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1) C(s) = R(s), \quad (2. 52)$$

где τ и ζ — действительные числа с ограничением¹, что $\zeta < 1$.

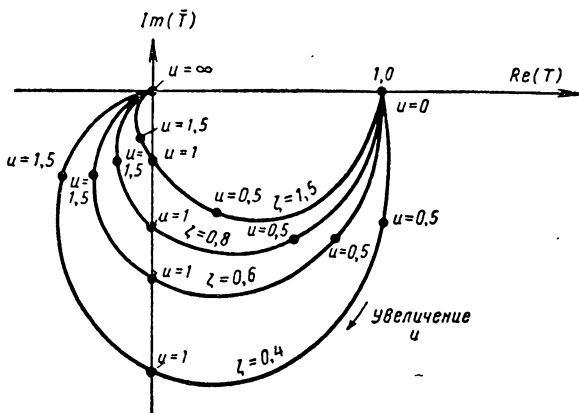
¹ Если $\zeta \geq 1$, то квадратное выражение может быть разложено на два линейных множителя, содержащих действительные корни.

На фиг. 2. 4 показано распределение нулей и полюсов для этой передаточной функции. Частотная характеристика определяется

$$\begin{aligned} \bar{T}(j\omega) &= [\tau^2(j\omega)^2 + 2\zeta\tau j\omega + 1]^{-1} = \\ &= [(j\omega\tau)^2 + 2\zeta\omega\tau j + 1]^{-1}. \end{aligned} \quad (2. 53)$$

Если $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_n}$, то

$$\bar{T}(ju) = [(ju)^2 + j2\zeta u + 1]^{-1} = [(1 - u^2) + j2\zeta u]^{-1}. \quad (2. 54)$$



Фиг. 2. 22а. Амплитудно-фазовая характеристика колебательного звена при

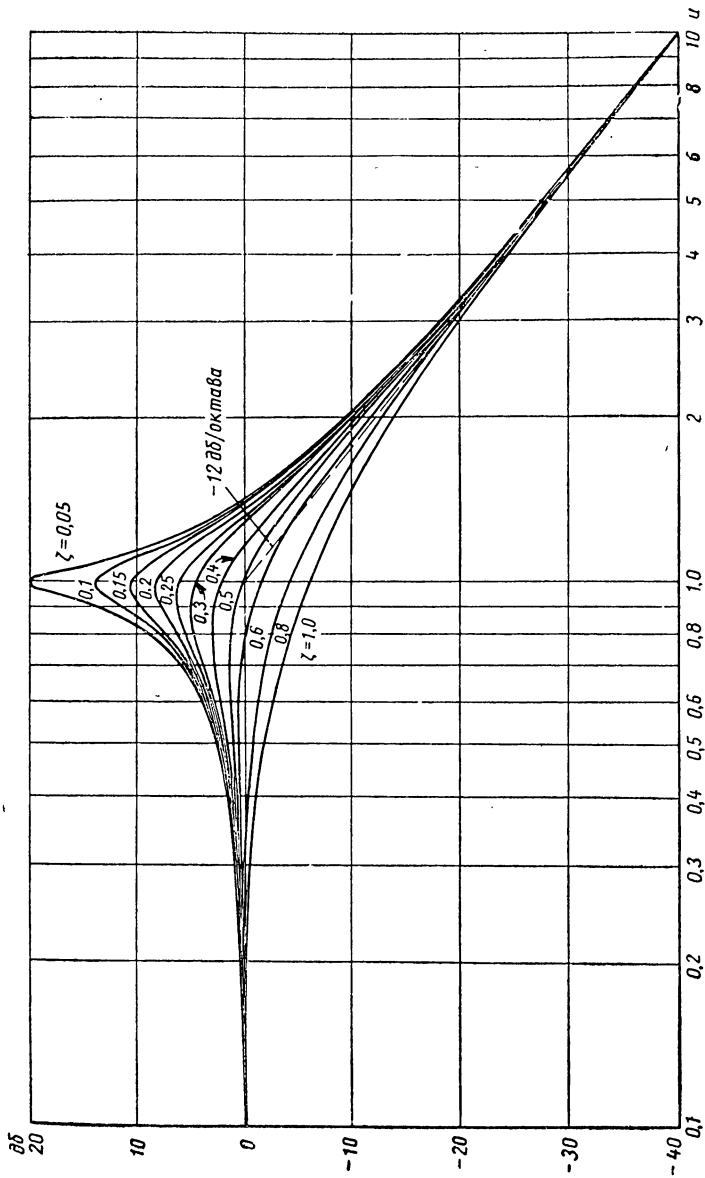
$$\bar{T} = \frac{1}{(ju)^2 + j2\zeta u + 1} = \frac{1}{1 - u^2 + j2\zeta u},$$

где $u = \omega\tau$.

На фиг. 2. 22 построены амплитудно-фазовые и логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется

$$\delta\delta = 20 \lg [(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2]^{-1/2}. \quad (2.. 55)$$

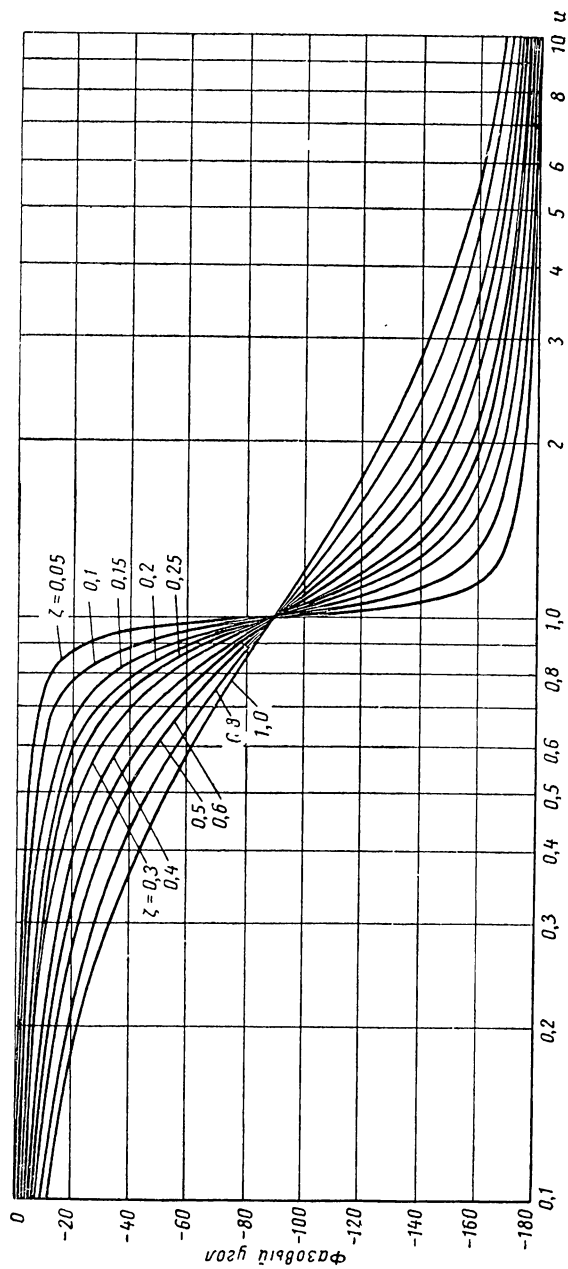
Если $u \ll 1$, то кривая приближается к линии 0 дб . Если $u \gg 1$, то кривая приближается к линии $20 \lg (u^4)^{-1/2} = -40 \lg u$, которая имеет наклон -40 дб/дгада или -12 дб/октава . Эти асимптоты не зависят от значения ζ . Однако относительный коэффициент демпфирования определяет величину резонансного пика вблизи значения $u = 1$; при малых значениях ζ эти поправки становятся большими и ими нельзя пренебречь.



Фиг. 2. 22б. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика при разных значениях относительного коэффициента демпфирования для

$$\bar{T} = \frac{1}{(j\omega)^2 + j2\zeta\omega + 1} = \frac{1}{1 - u^2 + j2\zeta u},$$

где $u = \omega\tau$.



Фиг. 2. 22в. Фазо-частотная характеристика при разных значениях относительного коэффициента демпфирования для

$$\bar{T} = \frac{1}{(ju)^2 + j2\zeta u + 1} = \frac{1}{1 - u^2 + j2\zeta u},$$

где $u = \omega\tau$.

2. 6. ХАРАКТЕРИСТИКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ФАЗЕ

Один из наиболее важных видов передаточных функций представляет характеристика с запаздыванием по фазе, когда входная и выходная величины связаны между собой следующим дифференциальным уравнением:

$$c(t) + \alpha\tau \frac{dc(t)}{dt} = r(t) + \tau \frac{dr(t)}{dt} \quad (2. 56)$$

или

$$(1 + \alpha\tau s) C(s) = (1 + \tau s) R(s), \quad (2. 57)$$

где τ постоянная времени, если $c(t)$ и $r(t)$ имеют одинаковую размерность, а α определяется как безразмерная константа больше единицы. Передаточная функция выражается

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha\tau s} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{\tau} + s}{\frac{1}{\alpha\tau} + s}$$

и, как видно, имеет нуль в точке $s = -\frac{1}{\tau}$ и полюс в точке $s = -\frac{1}{\alpha\tau}$. На фиг. 2. 23, *в* показано расположение нулей и полюсов. Частотная характеристика согласно уравнению (2. 57) определяется

$$\bar{T} = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\alpha\omega\tau} = \frac{1 + ju}{1 + jau}, \quad (2. 58)$$

где $u = \omega\tau = \frac{\omega}{\omega_b}$.

Амплитудно-фазовая характеристика по уравнению (2. 58) может быть определена наиболее просто путем сведения к полярной форме

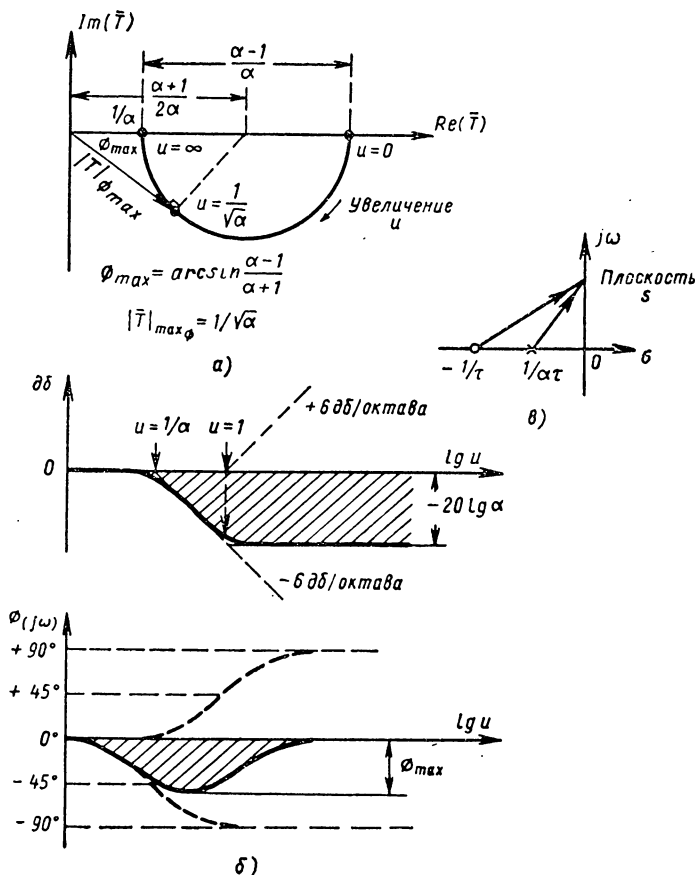
$$\begin{aligned} \bar{T}(ju) &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+\alpha^2u^2}} \angle \arctg u - \arctg \alpha u = \\ &= \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+\alpha^2u^2}} \angle \arctg \frac{u - \alpha u}{1 + \alpha u^2}. \end{aligned} \quad (2. 59)$$

Амплитудно-фазовая характеристика построена на фиг. 2. 23, *а*, как видно, она представляет полуокружность с центром в точке $(\frac{1+\alpha}{2\alpha}, 0)$. Максимальный угол сдвига фаз запаздывания, который может быть создан этой передаточной функцией, обозначается φ_{\max} и имеет место в точке $u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. На основании геометрических соотношений на фиг. 2. 23, *а* можно доказать, что

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}. \quad (2. 60)$$

Амплитуда \bar{T} при $u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ обозначается $|\bar{T}|_{\varphi_{\max}}$ и определяется

$$|\bar{T}|_{\varphi_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.61)$$



Фиг. 2.23. Характеристики запаздывания по фазе $\bar{T} = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + ja\omega\tau} = \frac{1 + ju}{1 + jau}$;

a — амплитудно-фазовая характеристика; *б* — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики; *в* — положение нуля и полюса для

$$\bar{T}(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + a\tau s} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1/\tau + s}{1/a\tau + s}.$$

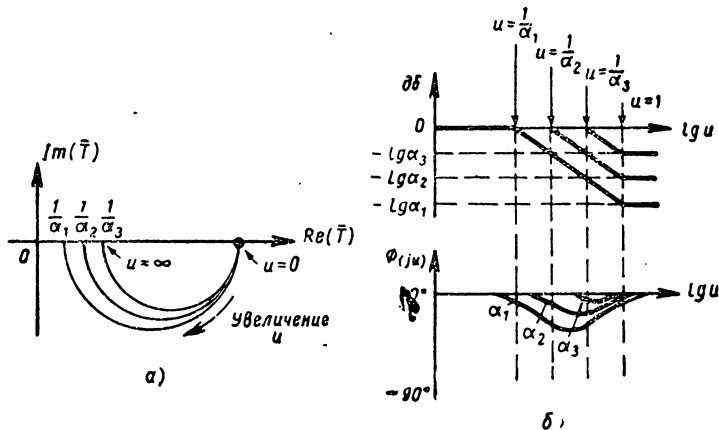
Кривые зависимости максимального угла и максимальной амплитуды от параметра α даны на фиг. 2.24. Эти кривые имеют значение для последующих рассуждений. Из приведенных выше уравнений становится очевидно, что с увеличением параметра α для усиления запаздывания функция $|\bar{T}|(ju)$ уменьшается таким образом, что

запаздывание по фазе достигается за счет большего затухания, вводимого в передаточную функцию.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика по уравнению (2. 59) определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta\delta &= 20 \lg (1 + u^2)^{1/2} - 20 \lg (1 + \alpha^2 u^2)^{1/2} = \\ &= 10 \lg (1 + u^2) - 10 \lg (1 + \alpha^2 u^2). \end{aligned} \quad (2. 62)$$

Уравнение (2. 62) имеет два члена. Первый член, соответствующий числителю уравнения (2. 59), характеризует пропорциональное регу-



Фиг. 2. 24. Характеристики запаздывания по фазе для функции, изображенной на фиг. 2. 23, при разных значениях α , где $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 1$:

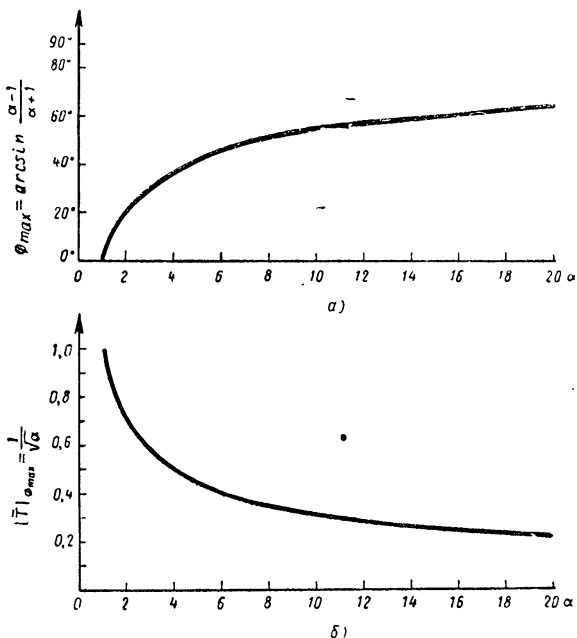
a — амплитудно-фазовая характеристика; b — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

лирование с одновременным регулированием по производной, когда логарифмическая амплитудно-частотная кривая имеет точку сопряжения при частоте $u = 1$ ($\omega = \frac{1}{\tau}$). Второй член, представляющий знаменатель уравнения (2. 58), имеет вид члена $(1 + jau)^{-1}$ (см. фиг. 2. 23, б), причем точка сопряжения соответствует частоте $u = \frac{1}{\alpha}$ ($\omega = \frac{1}{\alpha\tau}$). Эти два члена построены графически на фиг. 2. 23, б; их сумма представляет логарифмическую амплитудно-частотную характеристику согласно уравнению (2. 59). Отметим зависимость между частотами точек сопряжения и расположением нулей и полюсов функции на фиг. 2. 23, в. Если $\alpha \gg 1$, то частоты обеих точек сопряжения достаточно отличаются друг от друга, так что действительная кривая удалена на 3 дБ от пересечения асимптот в точках сопряжения.

Аналогично фазовая характеристика определяется

$$\varphi(ju) = \arctg u - \arctg au = \arctg \frac{u - au}{1 + au^2} = -\arctg \frac{(\alpha - 1)u}{1 + au^2}. \quad (2. 63)$$

На фиг. 2. 23, б графически построена сумма фазовых характеристик, связанных с каждым из этих членов. На фиг. 2. 25 даны амплитудно-фазовые и логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные кривые при разных значениях параметра α .



Фиг. 2. 25. Кривые максимального угла сдвига фаз φ_{\max} и $|T|_{\varphi_{\max}}$ в зависимости от α для передаточных функций опережающих и запаздывающих корректирующих контуров. Знак (+) применяется при опережении по фазе. Знак (-) при запаздывании по фазе.

Фиг. 2. 28 позволяет точно определить фазо-частотную кривую и она будет использована в дальнейшем. На фиг. 2. 29 изображены амплитудно-фазовые характеристики для двух передаточных функций с запаздыванием и опережением по фазе.

2. 7. ХАРАКТЕРИСТИКА С ОПЕРЕЖЕНИЕМ ПО ФАЗЕ

Наряду с передаточной функцией с запаздыванием по фазе применяется функция с опережением по фазе; в этом случае входная и выходная величины связаны между собой дифференциальным уравнением

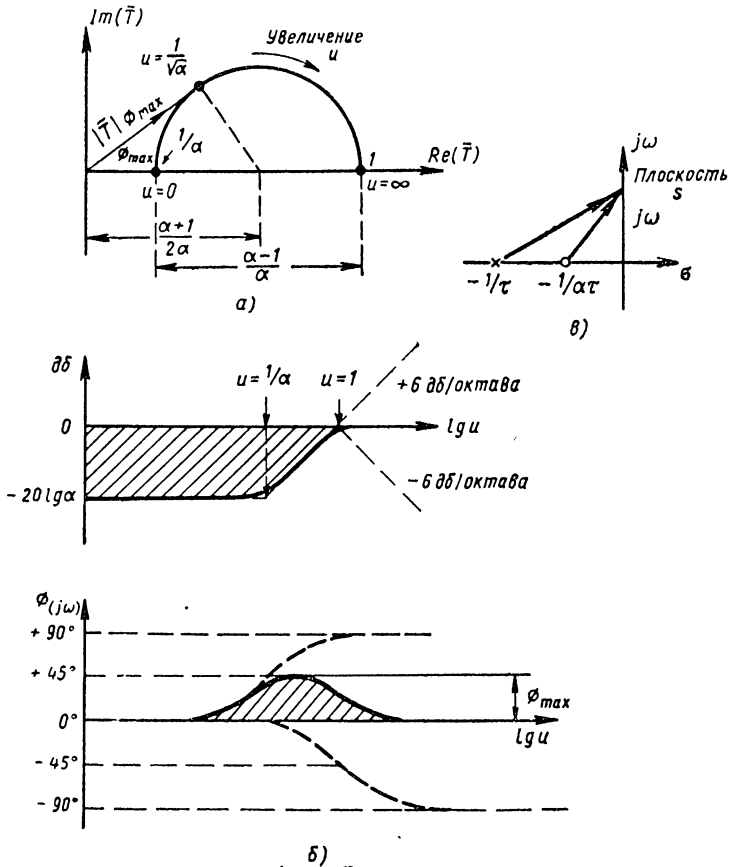
$$\alpha c(t) + \alpha\tau \frac{dc(t)}{dt} = r(t) + \alpha\tau \frac{dr(t)}{dt} \quad (2. 64)$$

или

$$\alpha (1 + \tau s) C(s) = (1 + \alpha\tau s) R(s), \quad (2. 65)$$

где τ — постоянная времени, когда $c(t)$ и $r(t)$ имеют одинаковую размерность, а параметр α вновь представляет безразмерную константу больше единицы. Передаточная функция дается выражением

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{\alpha(1 + \tau s)} = \frac{\frac{1}{\alpha\tau} + s}{\frac{1}{\tau} + s}$$



Фиг. 2. 26. Характеристика опережения по фазе для

$$\bar{T} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\omega\alpha\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\alpha u}{1 + j u}$$

где $u = \omega\tau$;

a — амплитудно-фазовая характеристика; $б$ — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики; $в$ — положение нуля и полюса для $\bar{T}(s) = (1 + \alpha\tau s)/[\alpha(1 + \tau s)]$.

Как видно, она имеет полюс в точке $s = -\frac{1}{\tau}$ и ноль в точке $s = -\frac{1}{\alpha\tau}$. На фиг. 2. 26, в показано расположение нулей и полюсов.

Частотная характеристика согласно уравнению (2. 65) определяется

$$\bar{T} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\omega\alpha\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\alpha u}{1 + ju}, \quad (2. 66)$$

где $u = \omega\tau$.

Амплитудно-фазовая кривая по уравнению (2. 66) построена на фиг. 2. 26, а; она имеет вид полуокружности с центром, расположенным в точке $\left(\frac{1 + \alpha}{2\alpha}, 0\right)$. Геометрические соотношения в этом случае одинаковы с геометрическими соотношениями для характеристик с запаздыванием по фазе, так что те же уравнения для максимального угла сдвига фаз и максимальной амплитуды могут быть применены, как и в предыдущем разделе. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика по уравнению (2. 66) определяется

$$\begin{aligned} \delta b &= -20 \lg \alpha + 20 \lg \sqrt{1 + \alpha^2 u^2} - 20 \lg \sqrt{1 + u^2} = \\ &= -20 \lg \alpha + 10 \lg (1 + \alpha^2 u^2) - 10 \lg (1 + u^2). \end{aligned} \quad (2. 67)$$

Эта характеристика построена для каждого члена аналогичным образом, как и в случае характеристики с запаздыванием по фазе; она показана на фиг. 2. 26, б. Фазо-частотная характеристика дана выражением

$$\begin{aligned} \varphi(ju) &= \arctg \alpha u - \arctg u = \\ &= \arctg \frac{\alpha u - u}{1 + \alpha u^2} = \arctg \frac{u(\alpha - 1)}{1 + \alpha u^2}. \end{aligned} \quad (2. 68)$$

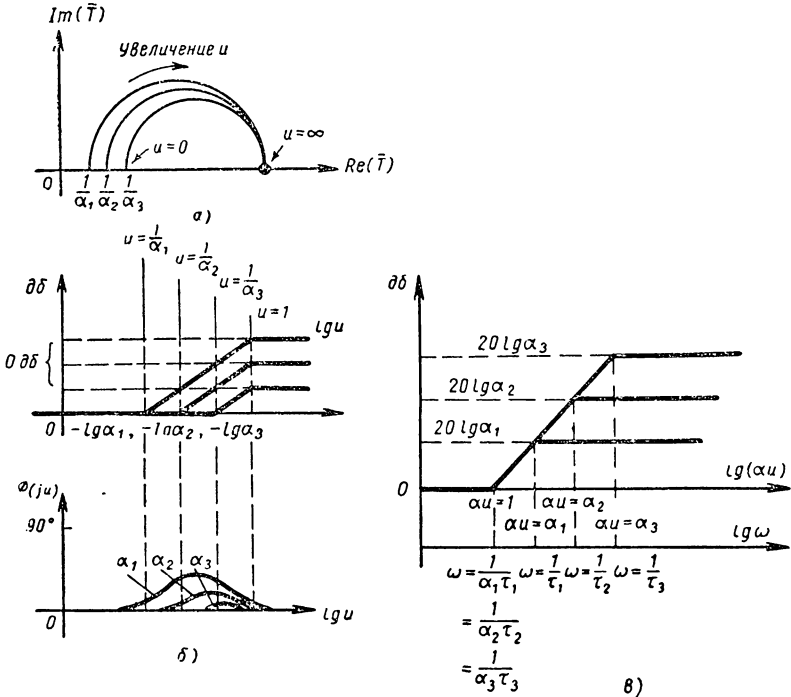
Эта характеристика аналогична характеристике с запаздыванием по фазе, кроме положительного значения угла сдвига фаз. Для точного определения фазового угла можно использовать фиг. 2. 28; на фиг. 2. 29 представлена диаграмма Николя, из которой можно определить требуемые значения фазовых углов, передаточная функция при разных значениях параметра α может быть оценена по фиг. 2. 27.

Изучение логарифмических амплитудно-частотных кривых на фиг. 2. 27, б позволяет судить о том, что их трудно построить, так как точное расположение оси $0 \delta b$ зависит от заданного значения параметра α . По этой причине, а также вследствие практического способа применения характеристик с опережением по фазе, эти кривые обычно перечерчиваются, как это видно на фиг. 2. 27, в. На этой диаграмме характеристика построена в зависимости от $\lg \alpha u$, значения которого наносятся по оси абсцисс. Здесь величина (αu) представляет безразмерную частоту $\frac{\omega}{\omega_b}$, причем ω_b соответствует нижней частоте точки сопряжения опережающего контура,

а именно $\frac{1}{\alpha\tau}$. Для построения асимптот логарифмической амплитудно-частотной характеристики желательно переписать уравнение (2. 67) в следующем виде:

$$\partial\delta = -20 \lg \alpha + 10 \lg (1 + \alpha^2 u^2) - 10 \lg \left(1 + \frac{\alpha^2 u^2}{\alpha^2} \right). \quad (2. 69)$$

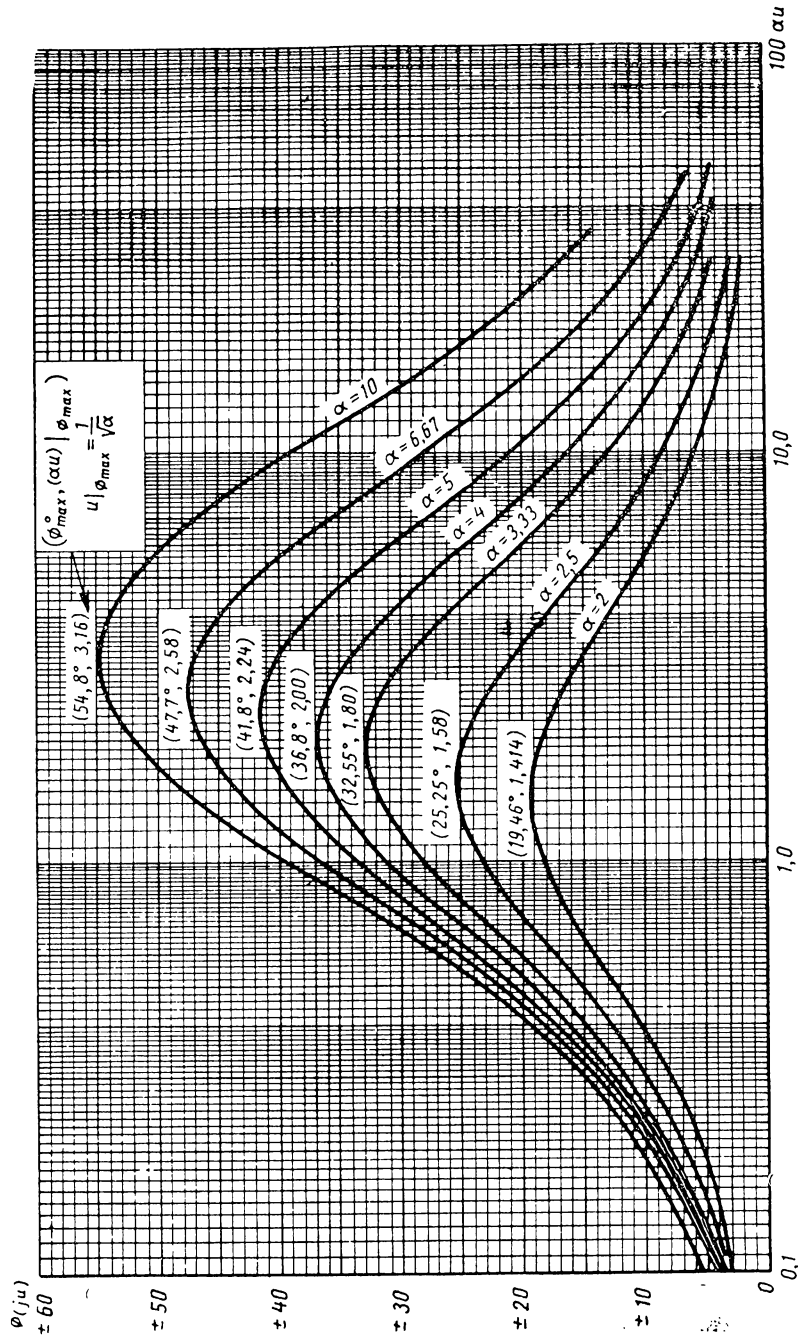
Когда (αu) принято за переменную величину, тогда второй член будет иметь частоту точки сопряжения при $(\alpha u) = 1$, а последний



Фиг. 2. 27. Характеристика опережения по фазе функции, изображенной на фиг. 2. 24, при разных значениях α , где $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 1$:

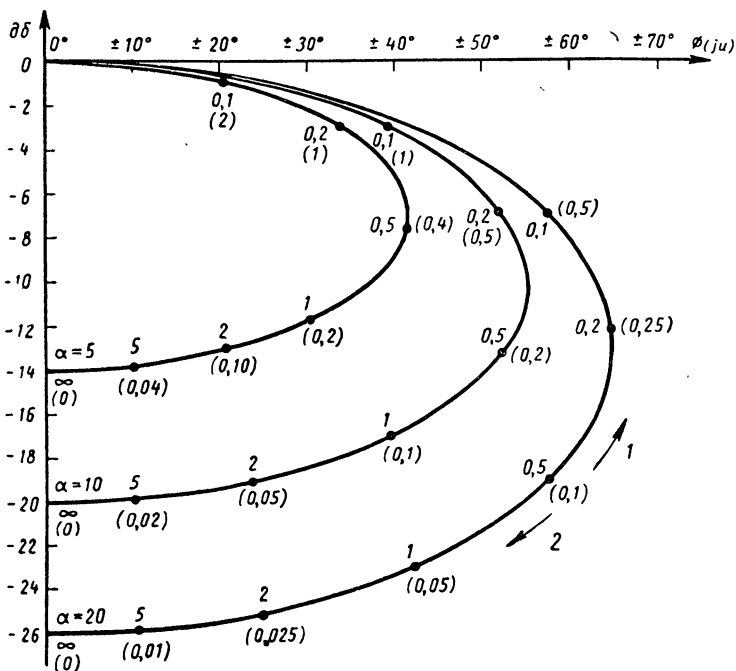
а — амплитудно-фазовая характеристика; б — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики; в — логарифмические зависимости амплитуды от $lg \alpha u$, $lg \omega$.

член — соответственно частоту точки сопряжения при $(\alpha u) = \alpha$. Эти асимптоты построены на фиг. 2. 27, в при разных значениях параметра α . Нижняя частота точки сопряжения встречается при $\alpha u = 1$, что является неизменной точкой при любых значениях параметра α . Верхняя частота точки сопряжения имеет место при $(\alpha u) = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — частные значения параметра α , для которых были построены характеристики с опережением по фазе.



Фиг. 2. 28. Кривые углов сдвига фаз для опережающего и запаздывающего контуров.

Точка ординаты 0 дб на фиг. 2. 27, в расположена таким образом, что она является одинаковой для всех кривых. Это означает, что к выражению (2. 69) был добавлен перед построением кривых постоянный член, равный $20 \lg \alpha$.



Фиг. 2. 29. Диаграмма Николая. Логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика (в децибелах) для опережающего и запаздывающего контуров с параметром u :

1 — увеличение (u), опережающий контур; 2 — увеличение (u), запаздывающий контур.
 П — примечание. $(u_{\text{опереж}}) \times (u_{\text{запад}}) = 1/\alpha$.

2. 8. ОБОБЩЕННАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Как правило, передаточная функция системы или звена определяется отношением двух полиномов, рассмотренных в разделе 2. 1, т. е.

$$T(s) = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_ms^m}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_ns^n}. \quad (2. 70)$$

Числитель и знаменатель могут быть разложены на множители, причем каждый множитель будет соответствовать действительному корню или паре комплексных сопряженных корней. Множители, соответствующие любой комплексной сопряженной паре, могут быть умножены для образования квадратного члена. Следовательно,

передаточная функция вместо выражения (2. 70) может быть написана в другом виде, где для общности добавлены кратные значения нулей и полюсов

$$T(s) = \frac{(1 + s\tau_a)^P (s^2 + 2\zeta_b\omega_{nb}s + \omega_{nb}^2) \dots}{s^N (1 + s\tau_1)^Q (s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2) \dots}, \quad (2. 71)$$

причем $T(s)$ имеет ноль P -го порядка при $s = -\frac{1}{\tau_a}$, пару комплексных сопряженных нулей при $s = -\zeta_b\omega_{nb} \pm \omega_{nb}\sqrt{1 - \zeta_b^2}$, полюс Q -го порядка при $s = -\frac{1}{\tau_1}$, пару комплексных сопряженных полюсов при $s = -\zeta_2\omega_{n2} \pm \omega_{n2}\sqrt{1 - \zeta_2^2}$ и полюс N -го порядка при $s = 0$. Относительный коэффициент демпфирования ζ всегда меньше единицы. Частотную характеристику получаем, как и раньше, путем приравнивания $s = j\omega$. Изучение уравнения (2. 71) позволяет обнаружить, что каждый множитель соответствует одной из основных передаточных функций, описанных в предыдущем разделе. Следовательно, обобщенная передаточная функция может быть выражена путем объединения этих основных функций. Для этой цели особенно полезно использовать логарифмическую амплитудно-частотную характеристику. Итак, если $|\bar{T}(j\omega)|$ по уравнению (2. 71) выражена в децибелах, то

$$\begin{aligned} 20 \lg |\bar{T}(j\omega)| &= 20 \lg (1 + \omega^2\tau_a^2)^{P/2} - 20 \lg (1 + \omega^2\tau_1^2)^{Q/2} + \\ &+ 20 \lg [(\omega_{nb}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_b^2\omega^2\omega_{nb}^2]^{1/2} - \\ &- 20 \lg [(\omega_{n2}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_2^2\omega^2\omega_{n2}^2]^{1/2} - \\ &- 20 \lg \omega^N + \dots = \\ &= 10P \lg (1 + \omega^2\tau_a^2) - 10Q \lg (1 + \omega^2\tau_1^2) + \\ &+ 10 \lg [(\omega_{nb}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_b^2\omega^2\omega_{nb}^2] - \\ &- 10 \lg [(\omega_{n2}^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_2^2\omega^2\omega_{n2}^2] - \\ &- 20N \lg \omega + \dots \end{aligned} \quad (2. 72)$$

Аналогично фаза функции $\bar{T}(j\omega)$ определяется

$$\begin{aligned} \varphi(j\omega) &= P \arctg \omega\tau_a - Q \arctg \omega\tau_1 + \\ &+ \arctg \frac{2\omega\omega_{nb}\zeta_b}{\omega_{nb}^2 - \omega^2} - \arctg \frac{2\omega\omega_{n2}\zeta_2}{\omega_{n2}^2 - \omega^2} - 90^\circ N + \dots \end{aligned} \quad (2. 73)$$

Уравнения (2. 72) и (2. 73) могут быть графически построены путем объединения логарифмических амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик для каждого члена. Порядок построения можно пояснить на некоторых простых примерах.

Пример 2. 1. Рассмотрим передаточную функцию, определяемую выражением

$$T(s) = \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}, \quad (2.74)$$

где $\tau_1 > \tau_a > \tau_b > \tau_2$. По этим значениям можно построить асимптотические, логарифмические и амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Для синусоидального входа эта функция приобретает вид

$$\bar{T}(s) = \frac{(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (2.75)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика дается выражением

$$20 \lg |T(j\omega)| = 20 \lg (1 + \omega^2\tau_a^2)^{1/2} - 20 \lg (1 + \omega^2\tau_1^2)^{1/2} + \\ + 20 \lg (1 + \omega^2\tau_b^2)^{1/2} - 20 \lg (1 + \omega^2\tau_2^2)^{1/2}. \quad (2.76)$$

Фазо-частотная характеристика определяется

$$\varphi(j\omega) = \arctg \omega\tau_a - \arctg \omega\tau_1 + \arctg \omega\tau_b - \arctg \omega\tau_2. \quad (2.77)$$

Каждый член соответствует линейному множителю с частотами точек сопряжений при $\omega_a = \frac{1}{\tau_a}$, $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$, $\omega_b = \frac{1}{\tau_b}$, $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$; наклон ± 6 дБ/октава зависит от множителя соответственно в числителе или знаменателе. Таким образом, передаточную функцию по уравнению (2.75) можно графически изобразить как показано на фиг. 2.30. Когда первоначальная передаточная функция содержит квадратные множители, то этот порядок сохраняется, но нужно напомнить, что действительная логарифмическая амплитудно-частотная характеристика расположена выше или ниже асимптот.

Это приобретает особое значение, когда частоты точек сопряжения близки друг другу.

Пример 2. 2. Рассмотрим передаточную функцию вида, определяемого уравнением (2.78), где a, b, c, d, e и f представляют положительные действительные числа

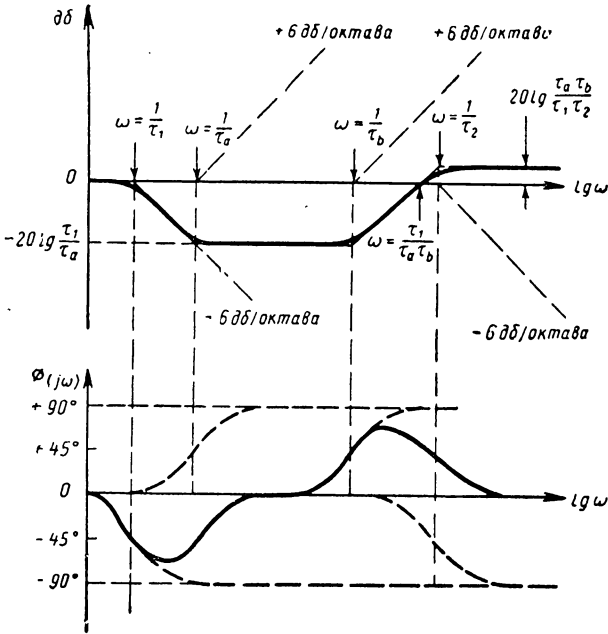
$$T(s) = \frac{A(s+a)}{(s+b)(cs+d)(s^2+es+f)}. \quad (2.78)$$

По значениям этой функции можно построить асимптотические логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики. Предположим, что квадратный множитель имеет пару комплексных сопряженных корней. Тогда уравнение (2.78) можно написать следующим образом:

$$T(s) = \frac{Aa}{bdf} \cdot \frac{1 + \frac{s}{a}}{\left(1 + \frac{s}{b}\right) \left(1 + \frac{sc}{d}\right) \left[\frac{s^2}{f} + \left(\frac{e}{f}\right)s + 1\right]}. \quad (2.79)$$

При синусоидальном входе эта функция приобретает вид

$$T(j\omega) = \frac{Aa}{bdf} \cdot \frac{1 + \frac{j\omega}{a}}{\left(1 + \frac{j\omega}{b}\right) \left(1 + \frac{j\omega c}{d}\right) \left[\frac{(j\omega)^2}{f} + \frac{e}{f} j\omega + 1\right]} \quad (2.80)$$



Фиг. 2. 30. Логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики для

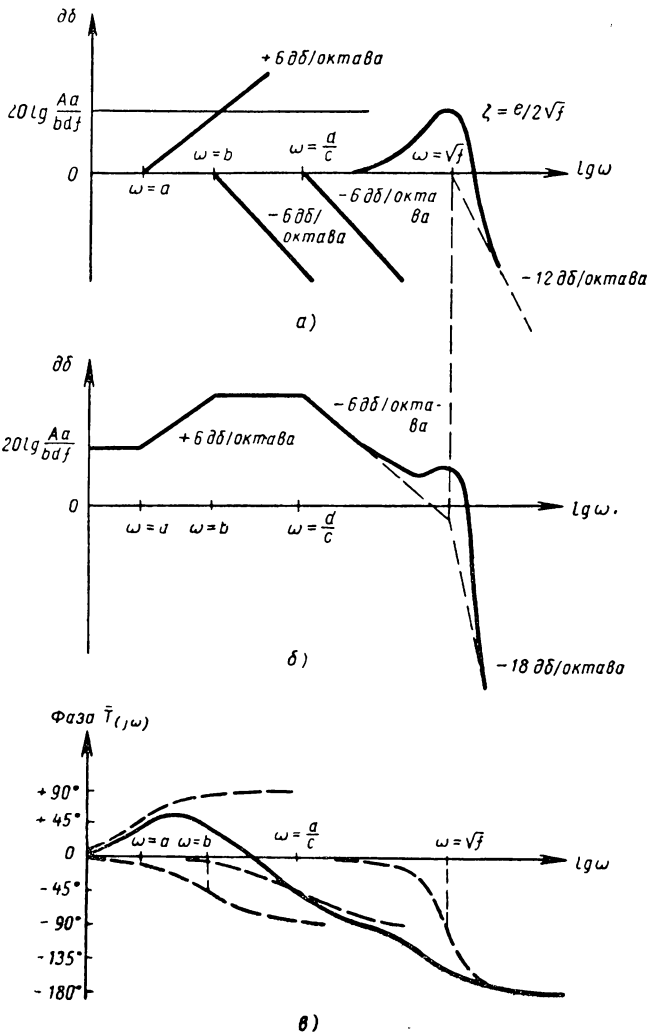
$$\bar{T}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)},$$

где $\tau_1 > \tau_a > \tau_b > \tau_2$.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика определяется

$$20 \lg T(\omega) = 20 \lg \frac{Aa}{bdf} + 20 \lg \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)^{1/2} + 20 \lg \left(1 + \frac{\omega^2}{b^2}\right)^{-1/2} + 20 \lg \left(1 + \frac{\omega^2 c^2}{a^2}\right)^{-1/2} + 20 \lg \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{f}\right)^2 + \frac{\alpha^2 c^2}{f}\right]^{-1/2}. \quad (2.81)$$

Первый член имеет постоянное (в смысле независимости от частоты) значение. Следующие три члена представляют линейные множители с частотами точек сопряжения при $\omega = a$, $\omega = b$; $\omega = \frac{d}{c}$ и имеют наклоны ± 6 дБ/октава, в зависимости от соответствующего множителя в числителе или знаменателе. Квадратный множи-



Фиг. 2.31. Асимптотические частотные характеристики

$$\bar{T}(j\omega) = \frac{Aa}{bdf} \times \frac{1 + j\omega/a}{\left(1 + \frac{j\omega}{b}\right) \left(1 + j\omega \frac{c}{d}\right) \left[\frac{(j\omega)^2}{f} + \frac{e}{f}(j\omega) + 1\right]} = \frac{A(j\omega + a)}{(j\omega + b)(j\omega c + d)[(j\omega)^2 + j\omega e + 1]}$$

a — асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика каждого члена; b — конечная асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика; e — фазо-частотная характеристика.

тель соответствует виду уравнения (2. 53) или (2. 54). Сравнение с уравнением (2. 55) показывает, что $u^2 = \frac{\omega^2}{f}$, так что $u = \omega\tau = \omega \sqrt{\frac{1}{f}}$. Следовательно, для этого квадратного множителя резонансная частота незатухающих колебаний равняется $\omega_n = \frac{1}{\tau} = \sqrt{f}$.

На основании уравнения (2. 55) можно заметить, что относительный коэффициент демпфирования определяется равенством

$$4\zeta^2 u^2 = \frac{\omega^2 e^2}{f^2}.$$

Подстановка значения $u = \omega = \sqrt{\frac{1}{f}}$ дает

$$\frac{4\zeta^2 \omega^2}{f} = \frac{\omega^2 e^2}{f^2},$$

так что относительный коэффициент демпфирования будет определяться

$$\zeta = \frac{e}{2} \sqrt{f}.$$

При построении логарифмической амплитудно-частотной характеристики колебательного звена можно использовать кривые на фиг. 2. 22 при соответствующем значении ζ . Резонансный пик имеет место при $u = 1$, что в данном примере соответствует недемпфированной резонансной частоте $u = \omega_n = \sqrt{f}$. На фиг. 2. 31 построены кривые для различных членов логарифмической амплитудно-частотной характеристики. Фазо-частотная характеристика определяется суммированием характеристик каждого члена; этот результат показан на фиг. 2. 31, в.

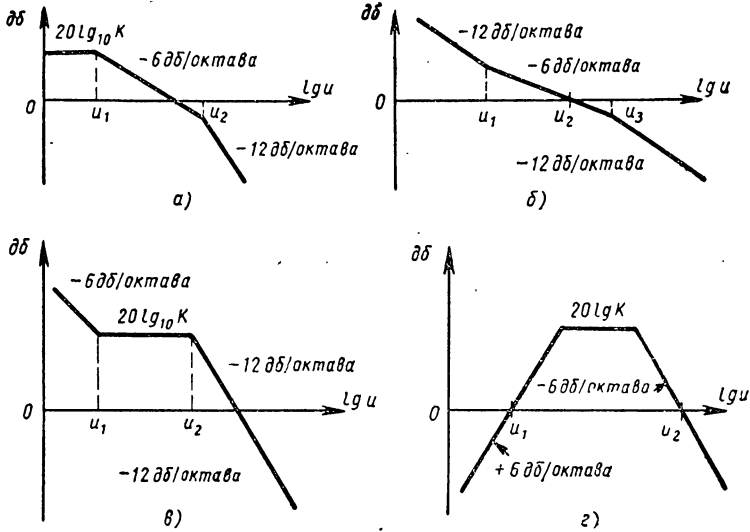
ЗАДАЧИ

2. 1. Построить логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные кривые для следующих передаточных функций. Определить частоты точек сопряжения. Построить картины распределения нулей и полюсов для функции $T(s)$:

- | | |
|---|--|
| а) $\bar{T} = \frac{10(1+ju)}{(ju)^2}$; | г) $\bar{T} = \frac{(ju)^3}{1+j5u+j6u^2+(ju)^3}$; |
| б) $\bar{T} = \frac{1}{3+2ju}$; | д) $\bar{T} = \frac{1}{(1+ju)(1+\alpha ju)}$; где $\alpha > 1$; |
| в) $\bar{T} = \frac{(1+ju)^2}{2+\sqrt{2}ju+(ju)^2}$; | е) $\bar{T} = \frac{\alpha(ju)^2+g}{\beta(ju)^2+g}$, где $\beta > \alpha$. |

2. 2. Построить амплитудно-фазовую кривую для каждой передаточной функции предыдущей задачи.

2. 3. Если опережение по фазе и запаздывание по фазе имеет одинаковое значение α , то необходимо показать, что частоты, при



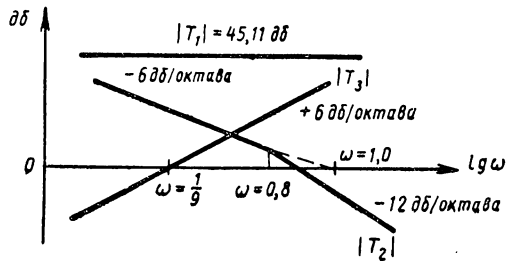
Фиг. 2. 32. Асимптотические логарифмические амплитудно-частотные характеристики.

которых логарифмы амплитуд имеют одинаковые значения, связаны между собой формулой

$$[u_{\text{запаздывания}}] \times [u_{\text{опережения}}] = \frac{1}{\alpha}.$$

2. 4. Асимптотические кривые логарифмической амплитудно-частотной характеристики для разных передаточных функций построены на фиг. 2. 32. Для каждого случая требуется построить соответствующую фазо-частотную характеристику и амплитудно-фазовую характеристику. Определить передаточные функции для каждого случая.

2. 5. Написать три передаточных функции, для которых на фиг. 2. 33 построены асимптотические логарифмические амплитудно-частотные характеристики. Определить логарифмическую амплитудно-частотную характеристику, фазо-частотную и амплитудно-фазовую характеристики для следующей объединенной передаточной функции



Фиг. 2. 33. Асимптотические логарифмические амплитудно-частотные характеристики.

$$T_4(j\omega) = \frac{T_1 T_2}{(1 + T_2 T_3)}.$$

Замечание. Первоначально следует написать выражения для каждой передаточной функции, а затем алгебраически объединить для построения требуемого результата.

2. 6. Построить логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики и написать следующие передаточные функции:

- а) при чистом дифференцировании;
- б) при пропорциональном регулировании плюс регулировании по производной;
- в) при чистом интегрировании;
- г) при пропорциональном плюс интегральном регулировании.

2. 7. Показать, что критические точки и значения, показанные на фиг. 2. 30, правильны.

ГЛАВА 3

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей главе рассматриваются передаточные функции звеньев различного рода и простых систем с целью показать, как можно физически осуществить основные математические зависимости, изложенные в предыдущей главе. Задача определения передаточной функции состоит в получении выражения, которое описывает динамику звена таким образом, чтобы влияние его работы могло быть включено в общий анализ динамики всей системы. Как правило, каждое звено включается в схему основной системы управления. Следовательно, его передаточная функция становится частью передаточной функции одного из основных блоков подобной схемы. Особое внимание будет сосредоточено на некоторых типичных звеньях, которые содержатся в блоке элементов управления, в объекте регулирования и в блоке элементов обратной связи. Использование перечисленных звеньев не обязательно ограничивается указанными блоками и они могут быть включены в другие части системы управления с обратной связью.

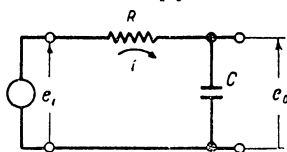
Ряд других причин повлияли на выбор рассматриваемых звеньев. Во-первых, были выбраны типичные звенья, применяемые на практике, и, следовательно, они представляют основу в обычно применяемых системах управления; во-вторых, вывод передаточной функции является показательным для основных методов составления передаточной функции; в-третьих, выведенные передаточные функции могут быть использованы позднее при рассмотрении других систем управления, которые встречаются на практике. Конечно, необходимость заставляет ограничивать глубину и объем рассмотрения передаточной функции звеньев системы управления. Подобные сведения о технически доступных звеньях систем управления можно найти в литературных источниках.

3.1. ЭЛЕМЕНТЫ УПРАВЛЕНИЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Часть системы управления с обратной связью, состоящая из элементов регулирования, часто должна реагировать на сигнал согласования с целью стабилизировать систему или отрегулировать

ее соответственно заданным значениям. Для этого можно произвести во временной области дифференцирование или интегрирование или обе эти операции вместе. Если рассматривать процессы в частотной области, то для этого будет необходимо изменить форму частотной характеристики. Практически оба эти метода представляют только различные аспекты одной и той же проблемы, причем исходной точкой в обоих случаях служит передаточная функция.

Интегрирующие контуры. Запаздывание по фазе. В качестве первого примера рассмотрим задачу осуществления операции интегрирования при помощи электрического контура. Использование подобного контура удобно, принимая во внимание размеры, доступность конструкции и простоту ее работы. Одна из очевидных возможностей состоит в применении простого контура из сопротивления и емкости, показанного на фиг. 3. 1. Грубо говоря, работа этого контура, как интегратора, основана на том, что напряжение на зажимах конденсатора пропорционально интегралу тока, протекающего через этот конденсатор. Для определения действительного поведения контура необходимо знать передаточную



Фиг. 3. 1. Интегрирующий контур или контур с запаздыванием по фазе.

функцию между входным и выходным напряжениями. Дифференциальные уравнения, описывающие поведение контура, будут

$$e_i = Ri + \frac{1}{C} \int i dt; \quad (3. 1a)$$

$$e_o = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (3. 1б)$$

Применив преобразование Лапласа к приведенным выше уравнениям и предположив, что $e_o(0^+) = 0$, придем к следующему результату

$$\frac{E_o}{E_i}(s) = \frac{1}{1 + RCs}. \quad (3. 2)$$

Одно свойство контура на фиг. 3. 1 можно определить при рассмотрении высокочастотной характеристики этого контура. Если $s = j\omega$ ввести в уравнение (3. 2), то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{E_o}{E_i}(j\omega) \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = 0. \quad (3. 3)$$

Физически это можно интерпретировать таким образом: когда импеданс конденсатора приближается к сопротивлению короткозамкнутого контура, тогда частота повышается настолько, что на выходе возможно нулевое напряжение. Следовательно, этот контур работает как фильтр нижних частот и, если его постоянная времени была выбрана большой для улучшения интегрирующих свойств, то частота среза будет очень низкой. При включении подобного

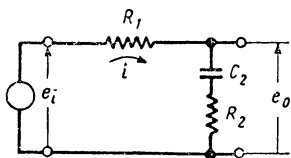
контура в прямую цепь передачи системы он будет сильно понижать высокочастотную характеристику. На практике поэтому необходимо изменить контур на фиг. 3. 1 таким образом, чтобы затухание при высоких частотах было ограничено. Это можно легко осуществить включением дополнительного сопротивления, как показано на фиг. 3. 2. Емкость конденсатора при высоких частотах приближается к значению короткозамкнутого контура, как и в предыдущем случае, но теперь передаточная функция приобретает вид

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{E_0}{E_i}(j\omega) \right| = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.4)$$

Точную частотную характеристику в установившемся режиме для контура фиг. 3.2 можно найти, используя импеданс $\frac{1}{Cs}$ для конденсатора и применив теорему распределения напряжения из теории цепей для случая последовательного соединения импедансов.

Отсюда

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}. \quad (3.5)$$



Фиг. 3. 2. Контур запаздывания с фиксированным затуханием на высокой частоте.

После подстановки $s = i\omega$ и перегруппировки членов получаем частотную характеристику

$$T = \frac{E_0}{E_i}(j\omega) = \frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega C_2 (R_1 + R_2)} = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau}, \quad (3.6)$$

где

$$\tau = R_2 C_2; \quad (3.7)$$

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.8)$$

Следует заметить, что когда $R_2 \rightarrow 0$, тогда $\tau \rightarrow 0$ и $\alpha\tau \rightarrow R_1 C_2$. Контур и соответствующая передаточная функция приближаются поэтому к контуру и функции на фиг. 3. 1.

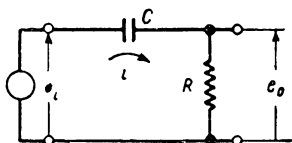
Форма уравнения (3.6) одинакова с уравнением (2.58) для случая запаздывания по фазе. Эта передаточная функция графически изображена на фиг. 2. 19, 2. 23. Значения α и τ определяются при нормальном порядке расчета по характеристикам на фиг. 2. 25 и 2. 28, которыми должна обладать система по заданию. Затем отдельные значения для сопротивлений R_1 , R_2 и емкости C_2 выбираются таким образом, чтобы получить правильные значения α и τ . Ввиду того что здесь имеются три элемента R_1 , R_2 , C_2 и только два уравнения (3.7) и (3.8), связывающие эти величины с требуемыми значениями α и τ , то возможно несколько решений, удовлетворяющих отдельным значениям элементов. Практически конструктор может произвольно выбирать какое-либо значение для одного элемента, а значения

для других элементов могут быть определены в зависимости от выбранного значения и величин α и τ , используя уравнения (3. 7) и (3. 8).

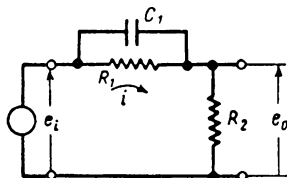
Например, если выбрано сопротивление R_2 , то C_2 определяется из $\frac{\tau}{R_2}$ и сопротивление R_1 вычисляется по R_2 ($\alpha - 1$).

Выбор сопротивления R_2 зависит от таких факторов, как приемлемые значения для того или иного элемента и импеданса, при котором желательна работа контура (что в свою очередь зависит от той части системы, в которую включен этот контур).

Дифференцирующие контуры. Опережение по фазе. На фиг. 3. 3 показан электрический дифференцирующий контур. Его работа принципиально основана на том, что ток, протекающий через конденсатор,



Фиг. 3. 3. Дифференцирующий контур или контур с опережением по фазе.



Фиг. 3. 4. Опережающий контур с фиксированным затуханием в установившемся режиме.

пропорционален производной от напряжения на конденсаторе. Передаточная функция между выходным и входным напряжениями определяется выражением

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{RCs}{1 + RCs}. \quad (3. 9)$$

Применение этого простого дифференциатора RC встречает серьезное ограничение, потому что через контур должен передаваться нулевой сигнал при постоянном входном сигнале. В общем, этот контур ведет себя как фильтр верхних частот. Это означает, что включение подобного контура в прямую цепь системы управления приведет к нулевой реакции при установившемся режиме. Конечно, это непрактично во многих случаях и необходимо изменить контур согласно фиг. 3. 4 с целью получить возможность передачи сигнала на нулевой частоте. При построении входного сигнала отношение выходного напряжения к входной будет определяться $\frac{R_2}{(R_1 + R_2)}$.

Точная передаточная функция для контура на фиг. 3. 4 имеет вид

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + C_1 s}} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \cdot \frac{1 + R_1 C_1 s}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1 s}$$

или

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}, \quad (3.10)$$

где

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (3.11)$$

и

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1. \quad (3.12)$$

Когда $R_1 \rightarrow \infty$ (разомкнутая цепь), тогда схема на фиг. 3.4 сводится к контуру фиг. 3.3 и $\alpha \rightarrow \infty$, так как $\tau \rightarrow R_2 C_1$.

При синусоидальном входе уравнение (3.10) приобретает вид

$$T = \frac{E_0}{E_i}(j\omega) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\omega\alpha\tau}{1 + j\omega\tau}. \quad (3.13)$$

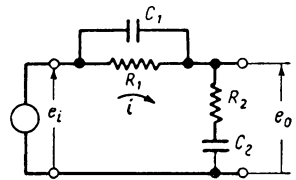
Нетрудно определить, что этот результат идентичен с уравнением (2.66) для случая опережения по фазе. Передаточная функция графически изображена на фиг. 2.26 и 2.27. При обычном порядке расчета величины α и τ вновь определяются по заданным значениям для системы; отдельные значения для R_1 , R_2 и C_1 выбираются в соответствии с правильными значениями для α и τ . Как и в случае контура с запаздыванием, возможно выбрать одно из значений для элементов и определить значения для двух других через выбранное значение и величины α и τ . Тот или иной выбор значения для элемента вновь зависит от практических значений и величины импеданса, при котором желательна работа контура. Шунтирующее сопротивление R_1 следует выбрать значительно меньше нормального сопротивления утечки конденсатора.

Контур с запаздыванием и опережением по фазе. Во многих случаях желательно включить в систему контур с запаздыванием и опережением, комбинируя влияния двух предыдущих рассмотренных контуров. На фиг. 3.5 показан подобный контур. Передаточная функция между выходным и входным напряжениями определяется

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + C_1 s}}. \quad (3.14)$$

После некоторых алгебраических преобразований последнее уравнение будет иметь вид

$$T(s) = \frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{\tau_a\tau_b s^2 + (\tau_a + \tau_b + \tau_{ab})s + 1}, \quad (3.15)$$



Фиг. 3.5. Контур запаздывания и опережения.

$$\text{где} \quad \tau_a = R_1 C_1; \quad (3.16a)$$

$$\tau_b = R_2 C_2; \quad (3.16b)$$

$$\tau_{ab} = R_1 C_2. \quad (3.16в)$$

Прежде чем эту передаточную функцию можно будет изобразить графически, необходимо исследовать член второй степени в знаменателе, чтобы установить возможность разложения его на два множителя с действительными корнями или на два комплексных сопряженных множителя. Корни этого квадратного полинома определяются следующим выражением:

$$s = \frac{-(\tau_a + \tau_b + \tau_{ab}) \pm \sqrt{(\tau_a + \tau_b + \tau_{ab})^2 - 4\tau_a\tau_b}}{2\tau_a\tau_b} =$$

$$= \frac{-(\tau_a + \tau_b + \tau_{ab}) \pm \sqrt{(\tau_a - \tau_b)^2 + 2(\tau_a + \tau_b)\tau_{ab} + \tau_{ab}^2}}{2\tau_a\tau_b}. \quad (3.17)$$

Изучение радикала в уравнении (3.17) показывает, что его значение является действительным при всех положительных действительных значениях τ_a , τ_b и τ_{ab} , так что квадратное выражение можно всегда разложить на два линейных действительных члена. Следовательно, уравнение (3.15) можно переписать в виде

$$T(s) = \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}, \quad (3.18)$$

$$\text{где} \quad \tau_1\tau_2 = \tau_a\tau_b \quad (3.19a)$$

и

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_a + \tau_b + \tau_{ab}. \quad (3.19б)$$

Последние два уравнения служат для определения τ_1 и τ_2 через величины τ_a , τ_b , τ_{ab} ; они представляют постоянную времени для данного контура. При изучении уравнения (3.19a) можно обнаружить, что

$$\frac{\tau_a}{\tau_1} = \frac{\tau_2}{\tau_b}. \quad (3.20)$$

Предположим теперь, что $\tau_1 > \tau_a$, так что мы можем определить число $\alpha > 1$, а именно

$$\tau_1 = \alpha\tau_a. \quad (3.20a)$$

Из уравнения (3.20) следует

$$\tau_b = \alpha\tau_2. \quad (3.20б)$$

Таким образом, уравнение (3.18) будет

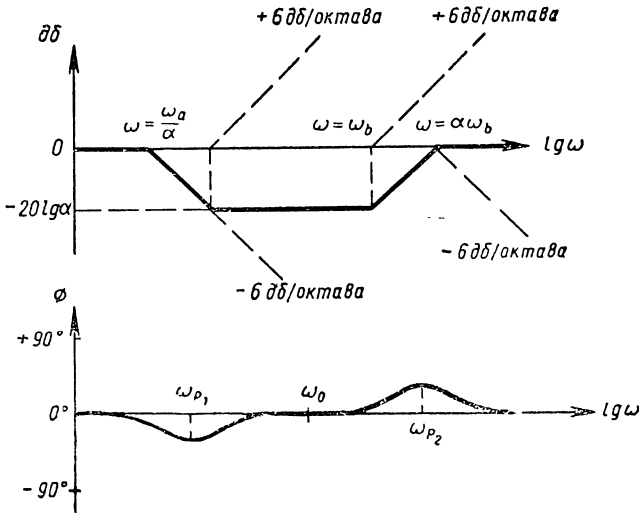
$$T(s) = \frac{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{(1 + s\alpha\tau_a) \left[1 + s \left(\frac{\tau_b}{\alpha} \right) \right]}. \quad (3.20в)$$

При синусоидальном входе уравнение (3. 20в) принимает вид

$$T(j\omega) = \frac{\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)\right] \left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)\right]}{\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\frac{\omega_n}{\alpha}}\right)\right] \left[1 + j\left(\frac{\omega}{\alpha\omega_b}\right)\right]}, \quad (3. 21)$$

где $\omega_a = \frac{1}{\tau_a}$ и $\omega_b = \frac{1}{\tau_b}$.

Форма этого выражения одинакова с уравнением (3. 75). Поэтому логарифмическая амплитудно-частотная характеристика будет оди-



Фиг. 3. 6. Графики зависимости логарифмических амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик контура запаздывания и опережения:

$$\bar{T} = \frac{(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)},$$

где $\tau_1\tau_2 = \tau_a\tau_b$ и $\tau_1 = \alpha\tau_a$, $\alpha > 1$.

наковой с характеристикой, изображенной на фиг. 2. 30, с дополнительным ограничением согласно уравнению (3. 20). Это ограничение означает, что асимптотическая характеристика возвращается к 0 дб при $\omega = \frac{1}{\tau_2}$. Это физически подтверждается при проверке передаточной функции, когда $\omega \rightarrow \infty$. При высоких частотах конденсаторы становятся короткозамкнутыми элементами и выходное напряжение равняется входному напряжению, что соответствует 0 дб. На фиг. 3. 6 построены логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для контура с запаздыванием и опережением по фазе.

Из фазо-частотной характеристики можно вывести дополнительную полезную зависимость. Если частоту нулевого сдвига фаз обозначить ω_0 , то получим следующую формулу:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_a \tau_b}}. \quad (3.22)$$

Проверку этого выражения оставляем для практических упражнений читателя.

Необходимо отметить, что здесь имеется четыре параметра контура, но только три постоянных времени. Следовательно, возможно произвольно определить один из параметров контура, остальные найти через произвольно выбранный элемент и требуемые значения постоянных времени.

3. 2. ЭЛЕМЕНТЫ УПРАВЛЕНИЯ. УСИЛИТЕЛЬ

Во всех замкнутых системах необходимо усилить сигнал расогласования, который очень мал, что неизбежно из-за обратной связи. Это усиление может быть осуществлено многими способами. Часто неотъемлемой частью усилителя являются контуры, рассмотренные в предыдущем разделе. Во многих случаях усилитель так тесно связан с объектом регулирования, что они не могут быть разделены при образовании передаточной функции. Для иллюстрации этого рассмотрим несколько более подробно различные типы усилителей, чтобы показать характер их передаточной функции.

Электронные и магнитные усилители. Электронно-вакуумные лампы и магнитные усилители очень часто используются для получения требуемого усиления. Как правило, постоянная времени, связанная с такими усилительными контурами, очень мала по сравнению с основной постоянной времени всей системы. По этой причине передаточную функцию усилительного контура можно часто выразить как постоянный коэффициент усиления K . Конечно, из этого правила делается немало исключений. Инженер всегда должен учитывать это обстоятельство и проверять, что постоянная времени действительно пренебрежимо мала, прежде чем принять передаточную функцию за постоянный коэффициент усиления. Это особенно относится к магнитным усилителям.

Передаточная функция насыщенного магнитного усилителя реакторного типа становится аналогичной передаточной функции линейного контура RL . В случае магнитного усилителя реакторно-выпрямительного типа наблюдается задержка времени на один период напряжения питания. При дальнейшем рассмотрении мы будем исходить из предположения, что передаточная функция для любого усилителя может быть заменена постоянным коэффициентом усиления. Если это не соответствует для того или иного частного случая, то необходимо найти и применить надлежащую передаточную функцию.

Амплитуды нашел широкое применение в тех сервомеханизмах, где требуется высокий выходной сигнал мощностью от 0,5 до 50 квт

и выше. Часто амплидин служит каскадом усиления мощности для привода двигателя постоянного тока. Управляющая обмотка возбуждения (например, с несколькими секциями) обычно соединена с выходным каскадом электронного усилителя. Во время второй мировой войны это устройство широко применялось в системах управления пулеметными турелями военных машин. В настоящее время оно часто применяется для решения трудных промышленных и военных вопросов.

Амплидин в принципе представляет генератор постоянного тока. Он вращается с постоянной скоростью от соответствующего двигателя, который служит источником мощности для агрегата. Величина выходного напряжения регулируется током возбуждения, протекающим через управляющую обмотку. Обычно обмотка якоря двигателя постоянного тока присоединена к выходным зажимам амплидина и поэтому важно учесть влияние этой нагрузки на образование передаточной функции амплидина. Это влияние нагрузки необходимо надлежащим образом учесть при определении инерции и вязкого трения двигателя, а также присоединенной механической нагрузки.

Принцип действия амплидина является достаточно простым. Небольшой ток, протекающий через управляющую обмотку, создает магнитный поток с направлением, показанным на фиг. 3.7. Ввиду того что якорная обмотка вращается с полной скоростью, в ней наводится напряжение e_q , которое появляется на щетках $q - q$. При коротком замыкании этих щеток и низком значении сопротивления якорной обмотки через якорь может протекать очень большой ток. Например, если e_q равно 1 в и сопротивление якорной обмотки составляет 0,01 ом, то через якорную обмотку будет течь ток в 100 а. Вследствие реакции якоря, связанной с такими высокими значениями тока, будет создан очень большой магнитный поток Φ_q , направленный перпендикулярно к первоначальному магнитному потоку Φ_d . Если разместить второй комплект щеток $d - d$, нормально к поперечному магнитному потоку Φ_q , то можно получить источник высокого напряжения, которое можно подать в двигатель постоянного тока; тогда последний в свою очередь создаст необходимый выходной момент для механической нагрузки. На практике обычно щетки $q - q$ накоротко закорачиваются через последовательную обмотку возбуждения. Это позволяет создавать требуемую величину поперечного магнитного поля при небольшом токе якоря по поперечной оси. Другое видоизменение состоит во включении компенсационной обмотки в цепь возбуждения продольного магнитного поля. Ее назначение состоит в том, чтобы предотвратить образование магнитного поля из-за реакции якоря, вызываемого выходным током i_d вследствие уменьшения первоначального магнитного поля Φ_d . Компенсационная обмотка рассчитывается на 100%-ную компенсацию. Это условие абсолютно необходимо для получения небольших значений продольного магнитного поля Φ_d при нормальной работе.

Передающую функцию амплитудина как отдельного агрегата, т. е. без присоединенной нагрузки, можно найти, рассматривая наведенное напряжение e_d по продольной оси, как выходную величину и приложенное напряжение v_c управляющей обмотки, как входную величину. Приведенный ниже вывод основан на предположении, что между продольным магнитным потоком и поперечным магнитным потоком существует нулевая связь и что насыщение магнитной цепи пренебрежимо мало. Дифференциальное уравнение для обмотки возбуждения обычно имеет вид

$$v_c = i_c R_c + L_c \frac{di_c}{dt}, \quad (3.23)$$

где R_c — сопротивление управляющей обмотки в $ом$;

L_c — индуктивность управляющей обмотки в $гн$;

v_c — приложенное напряжение управляющей обмотки в $в$;

i_c — ток управляющей обмотки в $а$.

После преобразования последнее уравнение будет

$$\frac{I_c}{V_c}(s) = \frac{1}{R_c(1 + s\tau_c)}, \quad (3.24)$$

где постоянная времени (в $сек$) управляющей обмотки возбуждения

$$\tau_c = \frac{L_c}{R_c}. \quad (3.25)$$

Кроме того,

$$e_q = K_q \Phi_d, \quad (3.26)$$

где K_q — коэффициент, включающий в себя коэффициент якорной обмотки амплитудина и учитывающий скорость ее вращения. Наиболее удобная форма уравнения (3.26) получается, когда продольное магнитное поле Φ_d пропорционально току i_c , так что можно написать

$$e_q = K_1 i_c, \quad (3.27)$$

где K_1 — коэффициент пропорциональности, представляющий напряжение в $в$, наведенное по поперечной оси, на единицу тока возбуждения в $а$.

Далее, применив закон Кирхгофа к напряжению по поперечной оси, будем иметь

$$e_q = i_q R_q + L_q \frac{di_q}{dt}, \quad (3.28)$$

где R_q — общее сопротивление цепи по поперечной оси, в $ом$;

L_q — общее индуктивное сопротивление цепи по поперечной оси, в $гн$;

i_q — ток в $а$, протекающий через цепь по поперечной оси.

Преобразование последнего уравнения и объединение его с уравнением (3. 27) дают

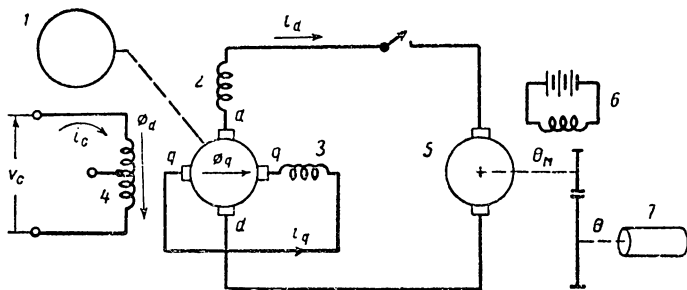
$$\frac{I_q}{I_c}(s) = \frac{K_1}{R_q(1 + s\tau_q)}, \quad (3. 29)$$

где

$$\tau_q = \frac{L_q}{R_q}. \quad (3. 30)$$

Наконец, когда выходная цепь амплидина разомкнута, то выходное напряжение пропорционально току i_q . Отсюда

$$e_d = K_2 i_q, \quad (3. 31)$$



Фиг. 3. 7. Схема амплидинного генератора:

1 — электропривод; 2 — компенсационная обмотка; 3 — последовательная обмотка возбуждения в поперечной оси магнитного поля; 4 — управляющая обмотка возбуждения; 5 — электродвигатель постоянного тока; 6 — обмотка возбуждения электродвигателя; 7 — нагрузка.

где K_2 — постоянная генератора, которая выражается через напряжение в θ , наведенное в цепи продольной оси, на ток в a по поперечной оси. Уравнение (3. 31) упрощается, если применить к нему преобразование Лапласа

$$\frac{E_d}{I_q}(s) = K_2. \quad (3. 32)$$

Умножение уравнений (3. 24), (3. 29) и (3. 32) приводит к передаточной функции для случая без нагрузки. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{E_d}{V_c}(s) &= \left[\frac{I_c}{V_c}(s) \right] \left[\frac{I_q}{I_c}(s) \right] \left[\frac{E_d}{I_q}(s) \right] = \\ &= \frac{K_1 K_2}{R_c R_q} \cdot \frac{1}{(1 + s\tau_c)(1 + s\tau_q)}. \end{aligned} \quad (3. 33)$$

Применимость этого выражения ограничена случаями, когда выходной нагрузочный ток амплидина i_d пренебрежимо мал. Это определено не относится к случаю, изображенному на фиг. 3. 7.

Передаточную функцию для этой схемы необходимо определять, рассматривая двигатель постоянного тока как часть цепи продольной оси амплидина и этим путем учесть влияние нагрузки. Тогда результирующая передаточная функция даст правильное описание динамики схемы, сочетающей амплидин и двигатель. Для ее вывода следует сделать дополнительное предположение, что выходной контур полностью компенсирован и тем самым обеспечено, что ток нагрузки i_d не влияет на магнитное поле Φ_d .

Для полного анализа необходимо иметь еще два уравнения. Первое из них получается в результате применения закона Кирхгофа к продольной цепи, т. е.

$$e_d = K_2 i_q = i_d R_d + K_n \frac{d\theta_M}{dt}. \quad (3.34)$$

Индуктивное сопротивление якорной обмотки амплидина по продольной оси очень мало участвует в уравнении (3.34). После преобразования уравнение (3.34) становится

$$K_2 I_q(s) = I_d(s) R_d + K_n (s\theta_M). \quad (3.35)$$

В этих уравнениях R_d представляет общее сопротивление по продольной оси, которое в нашем случае включает сопротивления якоря амплидина и компенсационной обмотки, а также якорной обмотки двигателя постоянного тока. Последний член в правой части уравнения (3.34) означает электродвижущую силу, создаваемую вращающимся якорем двигателя, причем величина K_n имеет размерность $v/\text{рад/сек}$. Второе уравнение можно получить, если написать уравнение момента, приложенного к валу двигателя, т. е.

$$K_T i_d = J \frac{d^2\theta_M}{dt^2} + F \frac{d\theta_M}{dt}, \quad (3.36)$$

где K_T — постоянная момента двигателя (*момент/а* по продольной оси);

J — общий момент инерции, отнесенный к валу двигателя (*момент/рад/сек*);

F — общий коэффициент вязкого трения, отнесенный к валу двигателя, в P^*_1 *кгм/рад/сек*.

Перепишав уравнение в преобразованной форме, получим

$$\frac{\theta_M}{I_d}(s) = \frac{K_T}{F} \cdot \frac{1}{s(1 + s\tau_m)}, \quad (3.37)$$

где

$$\tau_m = \frac{J}{F}. \quad (3.38)$$

* См. конец гл. 1.

Из формы уравнения (3. 37) вытекает, что выходной величиной объединенной схемы амплидина и двигателя принято перемещение вала двигателя. Если ввести $s\theta_M$ из уравнения (3. 37) в уравнение (3. 35), то это приведет к

$$\frac{I_d}{I_q}(s) = \frac{K_2(1 + s\tau_M)}{R_d(1 + s\tau_m) + \frac{K_T K_n}{F}}. \quad (3. 39)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{I_d}{I_q}(s) &= \frac{K_2(1 + s\tau_m)}{R_d \left[\left(1 + \frac{K_T K_n}{F R_d} \right) + s\tau_m \right]} = \\ &= \frac{K_2}{R_d \left(1 + \frac{K_T K_n}{F R_d} \right)} \cdot \frac{(1 + s\tau_m)}{(1 + s\tau'_m)}, \end{aligned} \quad (3. 40)$$

где

$$\tau'_m = \frac{\tau_m}{1 + \frac{K_T K_n}{F R_d}}. \quad (3. 41)$$

Передаточная функция для объединенной системы амплидина и двигателя будет вытекать из зависимости

$$\frac{\theta_M}{V_c}(s) = \left[\frac{I_c}{V_c}(s) \right] \left[\frac{I_q}{I_c}(s) \right] \left[\frac{I_d}{I_q}(s) \right] \left[\frac{\theta_M}{I_d}(s) \right]. \quad (3. 42)$$

Сюда могут быть непосредственно введены уравнения (3. 24), (3. 29), (3. 40) и (3. 37), так как все влияния нагрузки были учтены. Поэтому

$$\frac{\theta_M}{V_c}(s) = \frac{K_1 K_2}{R_c R_q} \cdot \frac{K_T}{F R_d + K_T K_M} \cdot \frac{1}{s(1 + s\tau_c)(1 + s\tau_q)(1 + s\tau'_m)}. \quad (3. 43)$$

Сравнение последнего выражения с уравнением (3. 33) показывает, каким образом наличие двигателя видоизменяет передаточную функцию. Это изменение сводится к появлению интегрирующего и инерционного звена с постоянной времени τ_m .

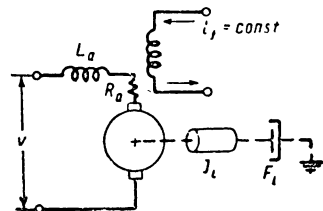
Заметим, что в случае пренебрежимо малого влияния нагрузки двигателя постоянная времени будет большой и будет несколько отличаться коэффициент усиления. Значения постоянных времени амплидина τ_c и τ_q изменяются с изменением размеров устройства. Хотя при любых данных размерах машины τ_c и τ_q имеют одинаковый порядок величины, эти значения колеблются от 0,05 сек для полукиловаттного агрегата до 0,4 сек для агрегата 50 квт. Конечно, значение τ'_m зависит от размеров двигателя и характера присоединенной нагрузки, вследствие чего оно может легко приобрести порядок нескольких секунд. Применение подобного агрегата в системе управления приводит к стабилизации характеристики благодаря четырем задержкам во времени, связанным с общей передаточной функцией,

3. 3. ЭЛЕМЕНТЫ УПРАВЛЕНИЯ. СЕРВОДВИГАТЕЛИ

Во многих системах конечный элемент управления содержит силовое звено для преобразования электрического сигнала рассогласования (после его создания и усиления) в механическое выходное перемещение. Для этой цели используются многие звенья, включая электрические соленоиды, гидравлические приводы и электродвигатели. Наиболее широко используется последний вид привода и по этой причине рассмотрим, в первую очередь, передаточную функцию для двигателей постоянного и переменного тока.

Двигатель постоянного тока может служить хорошим примером электромеханического устройства и поэтому постараемся исследовать его передаточную функцию при разных условиях. Двигатель постоянного тока применяется как серводвигатель во многих случаях, хотя серводвигатели переменного тока не имеют недостатков, связанных с коллектором и щетками двигателя постоянного тока, с дрейфом усилителя и другими связанными с этим проблемами.

Однако двигатель постоянного тока обладает преимуществом, связанным с отношением выходной мощности к размерам двигателя. Принципы работы двигателя постоянного тока применимы в ряде случаев, например, многие специальные устройства, как-то: акселерометр (см. раздел 3. 5) и другие виды электромеханических приводов, основаны на этих принципах.



Фиг. 3. 8. Схема электродвигателя постоянного тока с неизменным магнитным полем с инерционной нагрузкой и демпфером вязкого трения.

Двигатель постоянного тока, как серводвигатель. Первоначально рассмотрим двигатель постоянного тока с независимым возбуждением при входном напряжении, приложенном к обмотке якоря, как показано на фиг. 3. 8. Двигатель создает момент, определяемый выражением

$$M_L = K_T I_a = \frac{V - K_n \dot{\theta}_M}{R_a + L_a s} K_T, \quad (3. 44)$$

где M_L — нагрузочный момент, развиваемый двигателем;
 K_T — постоянная момента двигателя в $кгм/а$;
 R_a — сопротивление якорной обмотки в $ом$;
 L_a — индуктивность якорной обмотки в $гн$;
 K_n — постоянная противоэлектродвижущей силы двигателя в $в/рад/сек$;

$\dot{\theta}_M = \frac{d\theta_M}{dt}$ — угловая скорость в $рад/сек$;

V — напряжение, приложенное к обмотке якоря, в $в$,

Если двигатель имеет момент инерции ротора J_M и вращает инерциальную нагрузку J_L и демпфер вязкого трения F_L , то его уравнение движения будет

$$\frac{K_T(V - K_n \dot{\theta}_M)}{R_a + L_a s} = (J_M + J_L) s \dot{\theta}_M + F_L \dot{\theta}_M. \quad (3.45)$$

Объединяя члены и обозначая общий момент инерции $J = J_M + J_L$ при $\tau_a = \frac{L_a}{R_a}$, получим

$$\frac{K_T}{R_a} V = \left[\frac{K_n K_T}{R_a} + Js(1 + \tau_a s) + F_L(1 + \tau_a s) \right] \dot{\theta}_M. \quad (3.46a)$$

Следовательно,

$$K_T V = [K_n K_T + Js(R_a + L_a s) + F_L(R_a + L_a s)] \dot{\theta}_M. \quad (3.46b)$$

Уравнение (3.46b) имеет особое значение, когда $L_a = 0$ и $R_a = 0$, что соответствует двигателю без потерь. Передаточная функция приобретает вид

$$\frac{\theta_M}{V}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{K_n}. \quad (3.47)$$

Таким образом, угловое положение становится пропорциональным интегралу приложенного напряжения. Подобный двигатель работает как идеальный интегратор, когда его внутреннее сопротивление мало. Очень важно заметить, что нет необходимости доводить до нуля внешнее вязкое трение F_L , чтобы получить идеальное интегрирование. Уменьшение сопротивления R_a до нуля физически означает, что противозлектродвижущая сила двигателя становится равной приложенному напряжению. Ввиду того что противозлектродвижущая сила пропорциональна угловой скорости двигателя, то отсюда следует, что его угловое положение пропорционально интегралу напряжения V . Это свойство двигателя позволяет использовать его для операции интегрирования.

Уравнение (3.46a) может быть выражено в более сокращенной форме после обозначения общего коэффициента вязкого демпфирования $F = F_L + \frac{K_T K_n}{R_a}$ и постоянной двигателя $K_M = \frac{K_T}{R_a}$.

Следовательно,

$$K_M V = [F + Js(1 + \tau_a s) + F_L \tau_a s] \dot{\theta}_M. \quad (3.48)$$

Если теперь определить $\tau_a^* = \left(\frac{F_L}{F}\right) \tau_a$, то уравнение (3.48) можно переписать следующим образом:

$$K_M V = [Js(1 + \tau_a s) + F(1 + \tau_a^* s)] \dot{\theta}_M.$$

Решение относительно $\frac{\dot{\theta}_M}{V}$ дает передаточную функцию двигателя, когда угловая скорость принята за выходную величину

$$\frac{\dot{\theta}_M}{V} = \frac{K_M}{F \left[\frac{J}{F} s(1 + \tau_a s) + 1 + \tau_a^* s \right]} = \frac{K}{\tau \tau_a s^2 + (\tau + \tau_a^*) s + 1}, \quad (3.49)$$

где $K = \frac{K_M}{F}$ и $\tau = \frac{J}{F}$.

Если индуктивным сопротивлением якорной обмотки можно пренебречь и допустить, что $L_a = 0$ и, таким образом, $\tau_a = \tau_a^* = 0$, то передаточная функция будет

$$\frac{\dot{\theta}_M}{V}(s) = \frac{K}{1 + s\tau} \quad (3.50)$$

или

$$\frac{\theta_M}{V}(s) = \frac{K}{s(1 + s\tau)}. \quad (3.51)$$

Передаточные функции (3.51) и (3.50) при замене $s = j\omega$ могут быть выражены в следующем виде:

$$\frac{\dot{\theta}_M}{V}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau + 1)} \quad (3.52a)$$

или

$$\frac{\theta_M}{V}(j\omega) = \frac{K}{j\omega\tau + 1}. \quad (3.52б)$$

Передаточная функция, которая применима к любому данному состоянию, зависит от того, какая величина принята за выходную, т. е. угловое положение или угловая скорость двигателя.

Уравнение (3.52б) идентично одной из основных форм характеристик, описанных в разделе 2.4, которые графически изображены на фиг. 2.19.

Уравнение (3.52a) имеет форму, которая раньше не была рассмотрена. Амплитудно-фазовая характеристика, соответствующая системе (3.52a), изображена на фиг. 3.9. Свойства этой характеристики можно проверить путем преобразования уравнения (3.52a). Следовательно,

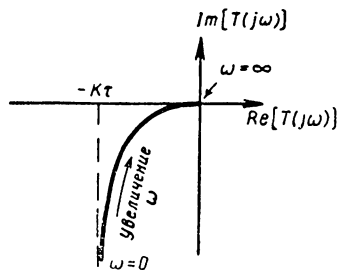
$$\frac{\theta_M}{V}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega\tau + 1)} = \frac{-K\tau}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{K}{\omega(1 + \omega^2\tau^2)}. \quad (3.53)$$

Когда ω приближается к бесконечности, тогда действительная и мнимая части уравнения (3.53) приближаются к нулю, но можно видеть, что мнимая часть более быстро приближается к нулю, чем действительная часть, потому что в знаменателе мнимой части имеется

множитель ω . Таким образом, при приближении ω к бесконечности амплитудно-фазовая характеристика приближается к началу координат вдоль отрицательной действительной оси. Когда ω приближается к нулю, то уравнение (3. 53) приближается к значению $K\tau - j\infty$, как показано на амплитудно-фазовой характеристике фиг. 3. 9. При промежуточных значениях ω характеристика находится в квадранте между -90 и -180° .

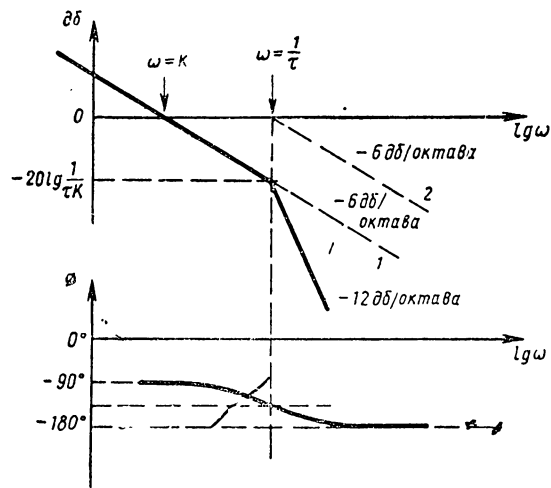
Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика по уравнению (3. 52a) определяется

$$20 \lg \left| \frac{\theta_M}{V} \right| = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg (1 + \omega^2 \tau^2)^{1/2}. \quad (3. 54)$$



Фиг. 3. 9. Амплитудно-фазовая характеристика $\bar{T}(j\omega) = K/[j\omega(1 + j\omega\tau)]$.

Два первых члена представляют прямую линию с наклоном -6 дб/октава , которая проходит через 0 дб при $\omega = K$. Третий член представляет ломаную линию с наклоном -6 дб/октава после частоты точки сопряжения $\omega = \frac{1}{\tau}$ и с нулевым наклоном — раньше этой точки. Графически эти члены уравнения построены на фиг. 3. 10 и суммарно они дают общую передаточную функцию.



Фиг. 3. 10. Логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики:

$$\bar{T}(j\omega) = K/[j\omega(1 + j\omega\tau)].$$

1 — первый и второй члены; 2 — третий член.

Фазо-частотная характеристика по уравнению (3. 52a) определяется

$$\varphi(j\omega) = -90^\circ - \arctg \omega\tau. \quad (3. 55)$$

Эта характеристика также показана на фиг. 3. 10.

В некоторых случаях, например, при регулировании скорости двигателя постоянного тока может быть также использован, как устройство с регулируемым возбуждением и постоянным током якоря (см. схему на фиг. 3. 11), при условии, что его магнитная цепь работает в ненасыщенном состоянии, т. е. равные изменения тока возбуждения создают равные изменения магнитного потока.

В предположении линейной характеристики насыщения момент T_d , создаваемый двигателем, будет определяться

$$T_d = K_{Tf} I_f, \quad (3.56)$$

где K_{Tf} — постоянная момента, определяющая развиваемый двигателем момент, отнесенный к току возбуждения при неизменном токе якоря.

Если двигатель приводит в движение такую же нагрузку, как и раньше, то его уравнение движения будет иметь вид

$$K_{Tf} i_f = J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F_L \frac{d\theta_M}{dt}, \quad (3.57)$$

где F_L — означает вязкое трение нагрузки.

Передаточная функция, связывающая выходное угловое положение с током возбуждения, определяется

$$\frac{\theta_M}{I_f}(s) = \frac{K_{Tf}}{s(Js + F_L)}. \quad (3.58)$$

Фиг. 3.11. Схема электродвигателя постоянного тока с регулируемым возбуждением: 1 — неизменный ток;

1 — обмотка возбуждения;
2 — якорь.

Уравнение (3.58) аналогично уравнению (3.51), за исключением того, что в этих уравнениях различны постоянные коэффициенты. Теперь ток возбуждения связан с приложенным напряжением обмотки возбуждения следующим уравнением:

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{R_f + L_f s}, \quad (3.59)$$

где R_f и L_f соответственно представляют активное и индуктивное сопротивление обмотки возбуждения. Подстановка уравнения (3.59) в уравнение (3.58) дает общую передаточную функцию, связывающую напряжение возбуждения с угловым положением. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\theta_M}{V_f}(s) &= \frac{K_{Tf}}{s(Js + F_L)(L_f s + R_f)} = \\ &= \frac{K_{Tf}}{F_L R_f} \cdot \frac{1}{s \left[\left(\frac{J}{F_L} \right) s + 1 \right] \left[\left(\frac{L_f}{R_f} \right) s + 1 \right]}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

По этому уравнению можно определить влияние параметров обмотки возбуждения на общую передаточную функцию. Если посто-

янной времени $\frac{L_f}{R_f}$ обмотки возбуждения можно пренебречь, то уравнение (3. 60) сводится к виду

$$\frac{\theta_M}{V_f}(s) = \frac{\frac{K_{Tf}}{F_L R_f}}{s \left[\left(\frac{J}{F_L} \right) s + 1 \right]}. \quad (3. 61)$$

Частотные характеристики могут быть получены из уравнений (3. 60) и (3. 61), причем результаты могут быть графически изображены на основании ранее изложенных правил.

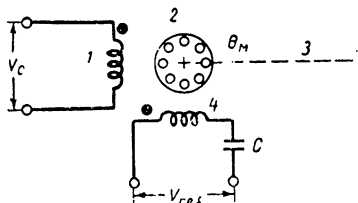
Двухфазный серводвигатель. Сервомеханизмы индикаторного типа требуют применения выходных устройств, которые могут обеспечить выходную мощность от полуатта до 100 *вт*. Для этой цели наиболее часто используется двухфазный серводвигатель. Серводвигатель этого рода не часто используется там, где требуется большая выходная мощность, потому что этому двигателю присущ низкий коэффициент полезного действия.

Двухфазный серводвигатель состоит из статора и ротора. Статор сделан из стальных листов и снабжен пазами для размещения двухфазной распределенной обмотки. Обмотки каждой фазы распределены таким образом, что их оси перпендикулярны друг другу. При этом условии двигатель в состоянии развивать больший полезный момент, чем в случае, когда это условие не удовлетворено. Конструкция ротора может быть выбрана одной из трех типов, а именно: беличья клетка, массивный ротор или ротор с фазной обмоткой. Наиболее часто применяют короткозамкнутый ротор (с беличьей клеткой). Однако в сервомеханизмах для быстродействующих точных приборов, где требуется сравнительно небольшая выходная мощность, обычно применяется ротор с фазной обмоткой. Основная причина применения этого двигателя лежит в очень малой инерции ротора, которая может быть достигнута благодаря такой конструкции.

При нормальной работе одна из двух фазных обмоток неподвижна, причем нормальное напряжение неизменно приложено в любой момент времени. По этой причине такую обмотку называют исходной (сравнительной) обмоткой. Питание для второй фазы может быть взято от предыдущей ступени цепи управления, которая часто является выходной ступенью сервоусилителя. Эту обмотку называют обмоткой управления. Конечно, для создания достаточного момента необходимо не только перпендикулярное расположение осей фазных обмоток, но фазовые напряжения должны быть сдвинуты по фазе на 90° . Обычно последнее условие удовлетворяется одним из двух способов, а именно: либо в цепь исходной обмотки включают последовательно конденсатор, как показано на фиг. 3. 12, либо сдвиг по фазе на 90° создается сервоусилителем посредством соответствующего контура сдвига фаз.

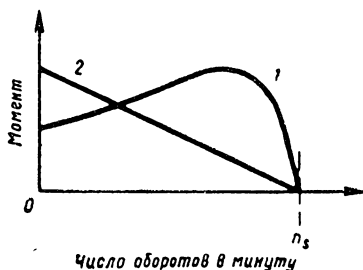
Кривая зависимости момента от скорости для обычного двухфазного двигателя показана на фиг. 3. 13 (кривая 1). Подобная характеристика двигателя вообще не пригодна для системы управления

вследствие того, что ее наклон не является отрицательным во всем диапазоне скоростей. Следует напомнить, что существуют падающие характеристики, которые создают необходимое демпфирование во многих сервомеханизмах. Положительный наклон кривой означает



Фиг. 3. 12. Схема двухфазного электродвигателя с беличьей клеткой:

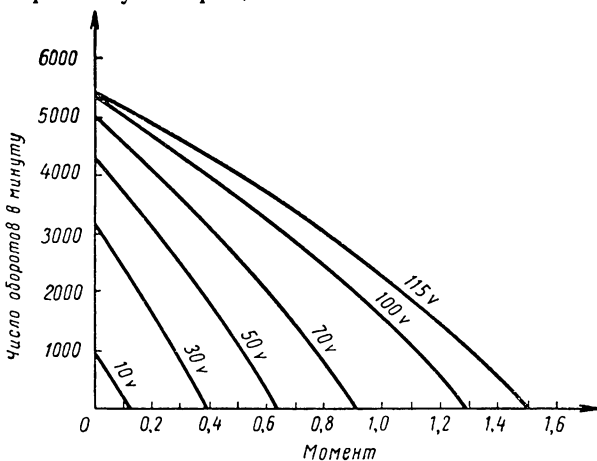
1 — управляющая обмотка; 2 — короткозамкнутый ротор; 3 — выходной вал; 4 — обмотка возбуждения.



Фиг. 3. 13.

1 — характеристика обычного двухфазного двигателя; 2 — характеристика серводвигателя.

отрицательный коэффициент демпфирования и, следовательно, может легко привести к неустойчивому состоянию. Чтобы серводвигатель имел характеристику с отрицательным наклоном во всем диапазоне



Фиг. 3. 14. Действительные кривые зависимости момента от числа оборотов. Напряжение 115 в, 400 гц. При испытании напряжение возбуждения составляло 115 в. Напряжение обмотки возбуждения — переменное.

скоростей, обмотку ротора необходимо сделать высокоомной. Тогда кривая зависимости момента от скорости будет иметь другой вид, аналогичный кривой 2 на фиг. 3. 13.

На фиг. 3. 14 показаны действительные кривые зависимости момента от числа оборотов типичного серводвигателя при разных значениях напряжения управляющей обмотки со сдвигом фаз 90° относительно фиксированного исходного напряжения.

Передаточную функцию серводвигателя нетрудно найти, когда имеется подобная внешняя характеристика. Ввиду того, что передачная функция связывает выходную величину с входной, необходимо, в первую очередь, определить эти величины. Нет сомнения, что входной величиной является в данном случае напряжение управляющей обмотки, но возникает вопрос, что является выходной величиной двигателя: его скорость или его перемещение? Из схемы на фиг. 3. 12 совершенно очевидно, что применение регулируемого напряжения само собой означает появление выходной скорости. Однако она не обязательно является фактором регулирования. Большее значение имеет функция, которую выполняет выходная величина двигателя в самой системе управления. Когда выходной величиной системы должна быть скорость, тогда требуется образовать передачную функцию, связывающую выходную скорость с напряжением управляющей обмотки. В ином случае, когда выход двигателя используется для привода позиционно чувствительного преобразовательного элемента с обратной связью, тогда становится ясно, что соответствующей выходной величиной двигателя будет его перемещение. Так как передачную функцию для выходной скорости нетрудно вывести из передачной функции двигателя, выходом которого служит перемещение, сосредоточим свое внимание на последнем случае.

В первую очередь, рассмотрим общую форму передачной функции серводвигателя. Внешняя характеристика двигателя (кривые зависимости момента от числа оборотов) показана на фиг. 3. 14.

Для упрощения задачи предположим, что они являются линейными. Изучение этих кривых позволяет установить, что увеличение момента двигателя может наступить в результате повышения напряжения управляющей обмотки или снижения числа оборотов при неизменном напряжении. Математически мы можем это выразить следующим образом:

$$\text{Момент двигателя} = K_M v_c - F_M \frac{d\theta_M}{dt}, \quad (3.62)$$

где K_M — постоянная момента двигателя в единицах момента/напряжение;

F_M — эквивалентный коэффициент вязкого трения, в единицах момента/радиан/сек;

θ_M — угловое перемещение двигателя в рад;

v_c — напряжение переменного тока, приложенное к управляющей обмотке в в.

Приравнивание этого момента к сумме моментов нагрузки дает

$$K_M v_c - F_M \frac{d\theta_M}{dt} = J \frac{d^2\theta_M}{dt^2} + F_L \frac{d\theta_M}{dt}, \quad (3.63)$$

где $J_M = J_M +$ инерция нагрузки, отнесенная к валу двигателя;

F_L — коэффициент вязкого трения, отнесенный к нагрузке.

Уравнение (3.63) не учитывает наличие постоянного момента нагрузки M_L , потому что он не влияет на общность результата.

Перегруппировка членов и применение преобразования Лапласа к уравнению (3. 63) дают

$$K_M V_c(s) = (Js^2 + Fs)\theta_M(s), \quad (3. 64)$$

где
$$F = F_M + F_L. \quad (3. 65)$$

Отсюда, искомая передаточная функция будет

$$\frac{\theta_M}{V_c}(s) = \frac{K_M}{s(1 + s\tau_m)}, \quad (3. 66)$$

где

$$K_m = \frac{K_M}{F} \left(\frac{1}{\text{в. сек.}} \right); \quad (3. 67)$$

$$\tau_m = \frac{J}{F} (\text{сек}). \quad (3. 68)$$

Постоянная времени двигателя τ_m очень часто играет существенную роль в определении динамических свойств системы управления, частью которой является этот двигатель. Это приписывается тому факту, что значение постоянной времени выражается через инерцию физических элементов, например, размеров ротора серводвигателя и влияния инерции нагрузки. Хотя влияние этих элементов может быть значительно уменьшено (например, применением фазного ротора, когда требуется небольшая выходная мощность), однако их нельзя свести к пренебрежимо малому значению, в первую очередь, потому, что величина J увеличивается одновременно с ростом требуемого уровня выходной мощности. Следовательно, инерция двигателя во многих случаях является решающим фактором, который определяет, в какой степени система будет в состоянии следовать за изменениями сигнала команды, происходящими во времени.

Влияние постоянной времени управляющей обмотки. Уравнение (3. 66) является приближенным, потому что оно не учитывает запаздывания во времени вследствие индуктивного сопротивления управляющей обмотки. Более точное описание свойств серводвигателя можно получить, если принять, что напряжение управляющей обмотки действительно создает ток возбуждения i_f , который в свою очередь создает магнитный поток, позволяющий двигателю развивать момент. Поэтому параметром внешней характеристики двигателя следует выбрать ток возбуждения, а не напряжение управляющей обмотки, как это сделано на фиг. 3. 15. Анализ на этой основе позволяет написать передаточную функцию, которая будет связывать перемещение двигателя, отнесенное к единице напряжения управляющей обмотки, а именно

$$\frac{\theta_M}{V_c}(s) = \frac{K_m}{s(1 + s\tau_m)(1 + s\tau_f)}, \quad (3. 69)$$

где τ_m — постоянная времени управляющей обмотки. Сравнение последнего выражения с уравнением (3. 66) показывает, что разница

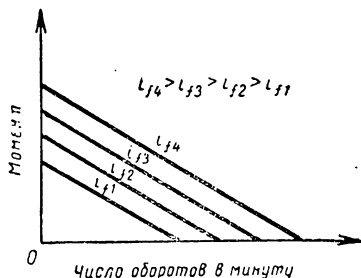
состоит в постоянной времени обмотки возбуждения, как это первоначально и предполагалось. Строго говоря, передаточная функция серводвигателя поэтому и содержит знаменатель с третьей степенью s . Но так как величина τ_f очень мала, примерно порядка 0,001 до 0,005 сек, то передаточная функция содержит в практическом смысле величину s только во второй степени.

Зависимость изменения момента серводвигателя от напряжения управляющей обмотки. Параметр K_M определяется как изменение момента на единицу изменения напряжения управляющей обмотки при постоянной скорости и неизменном исходном напряжении, т. е.

$$K_M = \frac{\Delta T}{\Delta v_c} \Big|_{\text{постоянная скорость}} \quad (3.70)$$

Аналогично коэффициент скорости двигателя F_M определяется как изменение момента на единицу изменения скорости при постоянном напряжении управляющей обмотки. Исходное напряжение, конечно, поддерживается на номинальном значении. Следовательно,

$$F_M = \frac{\Delta T}{\Delta n} \Big|_{v_c = \text{const}} \quad (3.71)$$



Фиг. 3. 15. Характеристики серводвигателя при разных значениях тока возбуждения:

i_f — ток возбуждения управляющей обмотки при нулевой скорости.

Изучение кривых на фиг. 3. 14 позволяет установить, что обе названные величины существенно изменяются в рабочем диапазоне двигателя. Иными словами, обе величины K_m и τ_m , которые содержатся в уравнениях (3. 67) и (3. 68), не являются постоянными, но практически изменяются для каждой рабочей точки характеристики двигателя. Характер этих изменений нетрудно установить следующим образом: двигатель заставляют работать с разомкнутой цепью, как показано на фиг. 3. 12 и к управляющей обмотке подается неизменное напряжение v_{c1} .

При достижении установившегося состояния выходной величиной становится скорость и характеристическое уравнение будет равняться

$$K_M v_{c1} = (F_M + F_L) \omega_M, \quad (3. 72)$$

где $\omega_M = \frac{d\theta_M}{dt}$ — скорость вращения двигателя.

Перегруппировка членов приводит к

$$\frac{\omega_M}{v_{c1}} = \frac{K_M}{F_M + F_L} = K_m. \quad (3. 73)$$

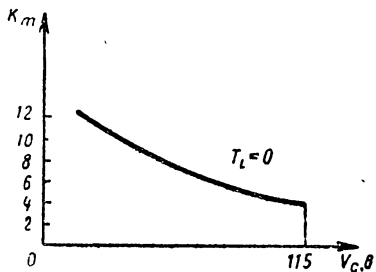
Из этого уравнения следует, что величину K_m можно определить измерением установившейся скорости двигателя при данном значении напряжения управляющей обмотки с последующим образованием

отношения этих двух величин. На фиг. 3. 16 показана кривая результатов подобных измерений, осуществленных на серводвигателе 115 в, 400 гц. Необходимо отметить, что изменение параметра K_m не превышает диапазона 2 : 1. Ввиду того, что параметр K_m является одним из коэффициентов усиления, определяющих общее усиление разомкнутой цепи, подобное изменение его значения может быть вредным. Это увеличение коэффициента усиления цепи, когда скорость вращения системы стремится к нулю (т. е. $v_c \rightarrow 0$), может создать сильно колебательную реакцию и привести даже к неустойчивости системы в некоторых крайних случаях.

Аналогичные изменения можно наблюдать у величины τ_m ; когда управляющее напряжение стремится к нулю, тогда постоянная времени двигателя возрастает в несколько раз. Следовательно, подобное изменение имеет тенденцию ухудшать переходной процесс.

Гидравлический усилитель. В системах управления нередко встречаются гидравлически управляемые звенья, например, полностью гидравлические системы с обратной связью или комбинированные гидроэлектромеханические системы. Для гидравлических элементов используют сравнительно несжимаемые жидкости, например, минеральные масла или некоторые невоспламеняющиеся синтетические жидкости, которые служат для передачи мощности в результате воздействия давления и потока жидкости. Они работают в условиях, отличных от условий работы пневматических элементов, в которых используют сжимаемую среду, например, газы или воздух. Как правило, гидравлические элементы экономичны и обладают преимуществом по сравнению с электрическими звеньями относительно удельной мощности на единицу объема и отношения развиваемого момента к моменту инерции. Кроме того, они позволяют создавать точное линейное перемещение более легко, чем электрические агрегаты. Но, с другой стороны, гидравлическим системам присущи такие проблемы, как уплотнение против утечки и попадания посторонних частиц, рабочий шум и тенденция к замедленной реакции при низких температурах вследствие увеличения вязкости жидкости. Гидравлическое управление наиболее широко распространено для управления мощностью (двигателем) и тормозами в автомобилях, для механизмов управления большими судами и для управления крупными станками.

Фиг. 3. 16. Кривая изменения параметра двухфазного серводвигателя в зависимости от положения рабочей точки. Напряжение 115 в, 400 гц.

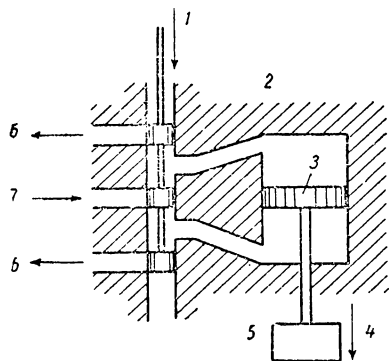


Ввиду того, что изучение гидравлических звеньев представляет собой особую область, здесь будут рассмотрены только немногие основные операции с иллюстрацией на некоторых примерах. Эти примеры выбраны также для того, чтобы показать возможность получения передаточной функции на основании опубликованных характеристик

того или иного устройства, не имея подробных сведений, как были получены эти характеристики. При последующем анализе предполагается, что гидравлическая жидкость поступает из источника постоянного давления и что сжимаемость для жидкости пренебрежимо мала. Эти факторы необходимо также учесть при более полном анализе.

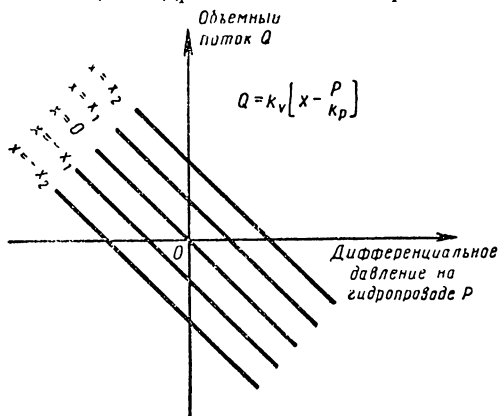
Рассмотрим систему с простым клапаном и поршнем, который служит приводом; схема этой системы показана на фиг. 3. 17. Жидкость постоянного давления поступает в среднее окно золотника.

Когда шток золотника перемещается вниз, то жидкость проходит через верхнюю часть золотника в цилиндр. Это создает разность



Фиг. 3. 17. Гидравлический привод регулятора:

1 — перемещение клапана управления;
2 — гидравлический привод; 3 — поршень;
4 — выходное перемещение y ;
5 — нагрузка; 6 — сток масла; 7 — источник постоянного давления.



Фиг. 3. 18. Характеристики гидравлического привода при постоянном давлении.

давлений, действующих на поршень, который перемещается вниз, выдавливает жидкость через нижнее окно золотника в обратную линию стока масла. Когда шток движется вверх, поток масла приобретает обратное направление.

Динамическое поведение систем может быть определено на основании характеристик золотника, показанных на фиг. 3. 18. Эти характеристики позволяют определить объемный расход жидкости для главного гидропривода и дифференциальное давление P у гидропривода при разных значениях перемещения штока x . Эти кривые были идеализированы в виде прямых линий, что допустимо при малых перемещениях штока золотника. На основании приведенных данных можно написать выражение

$$Q = k_v \left(x - \frac{P}{k_p} \right), \quad (3.74)$$

где Q — объемный расход жидкости в $\text{м}^3/\text{сек}$;
 P — разность давления на поршне двигателя в $\text{кг}/\text{см}^2$;
 x — перемещение штока в см ;
 k_v — градиент потока через клапан в см^3 ;
 k_p — градиент давления в клапане в $\text{кг}/\text{м}^3$.

Для данной системы градиенты k_v и k_p имеют постоянное значение. Изменение объемного расхода на единицу перемещения штока при постоянной разности давлений определяется градиентом k_v , т. е. $\frac{\partial Q}{\partial x} = k_v$. Аналогично изменение разности давлений на единицу перемещения штока золотника при постоянном объемном расходе определяется другим градиентом k_p , т. е. $\frac{\partial P}{\partial x} = k_p$. Эти константы можно измерить на любой данной гидравлической системе. Интересно отметить, что Q , P и x аналогичны величинам соответственно T , n и v_c в случае внешней характеристики электрического серводвигателя. Для иллюстрации использования характеристик золотника с целью определить передаточную функцию рассмотрим случай, когда поршень гидропривода перемещает груз с массой M и вязким трением F . Обозначим площадь поршня гидропривода A . Усилие, создаваемое поршнем гидропривода, равняется разности давления, умноженной на площадь поршня. Используя уравнение (3. 74), получаем развиваемое усилие

$$AP = Ak_p \left(x - \frac{Q}{k_v} \right). \quad (3. 75)$$

Это усилие приложено к механической нагрузке, так что справедливо следующее уравнение:

$$Ak_p \left(x - \frac{Q}{k_v} \right) = M \frac{d^2 y}{dt^2} + F \frac{dy}{dt}, \quad (3. 76)$$

где y — выходное перемещение поршня гидропривода.

Другую зависимость можно получить из того условия, что объемный расход несжимаемой жидкости должен быть равен скорости, с которой поршень гидропривода перемещает жидкость.

Следовательно,

$$Q = A \frac{dy}{dt}. \quad (3. 77)$$

Подстановка уравнения (3. 77) в уравнение (3. 76) и перегруппировка членов приводит к следующему результату:

$$x = \frac{M}{Ak_p} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{F}{Ak_p} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{A}{k_v} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (3. 78)$$

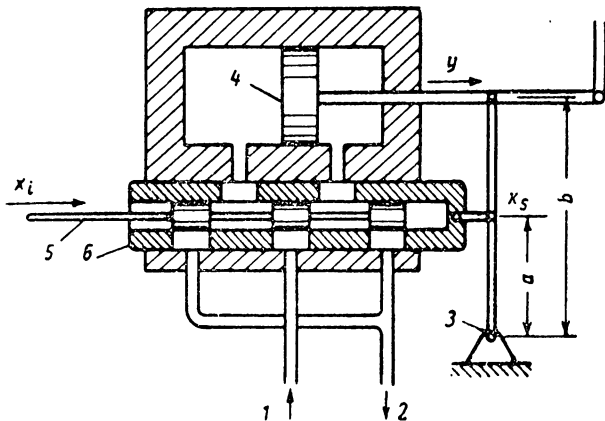
Если ввести обозначения $C_1 = \frac{k_v}{A}$ и $C_2 = Ak_p$, то последнее уравнение можно переписать в другом виде

$$x = \frac{M}{C_2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{F}{C_2} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (3. 79)$$

Отсюда передаточная функция, связывающая выходное перемещение поршня с перемещением золотника, будет определяться выражением

$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{1}{s \left[\left(\frac{M}{C_2} \right) s + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{F}{C_2} \right) \right]} \quad (3.80)$$

Форма этого выражения идентична передаточной функции, полученной для электродвигателей и рассмотренных в предыдущем раз-



Фиг. 3. 19. Гидравлический усилитель мощности:

1 — сторона высокого давления; 2 — сторона низкого давления; 3 — шарнир; 4 — поршень; 5 — клапанный шток; 6 — клапанная втулка.

деле. Когда $M = 0$, т. е. при пренебрежимо малой массе нагрузки, тогда уравнение (3. 80) приводится к виду

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s \left(\frac{1}{C_1} + \frac{F}{C_2} \right)} \quad (3.81)$$

Уравнение (3. 81) соответствует передаточной функции идеального интегратора. Рассмотрим более сложную систему гидравлического управления, подобную механизму управления двигателя, как показано на фиг. 3. 19. На этой фигуре показана связь между выходным перемещением у рычага управления и перемещением x_s подвижной втулки золотника. Между этими величинами существует соотношение

$$\frac{x_s}{y} = \frac{a}{b} < 1. \quad (3.82)$$

В этом случае открывание отверстия между штоком золотника и подвижной втулкой имеет то же назначение, как и перемещение золотника, рассмотренного выше. Допустим, что x_i представляет

перемещение штока золотника. Тогда уравнение (3. 78) можно написать в следующем виде:

$$x_i - x_s = \frac{M}{C_2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{F}{C_2} \right) \frac{dy}{dt}. \quad (3. 83)$$

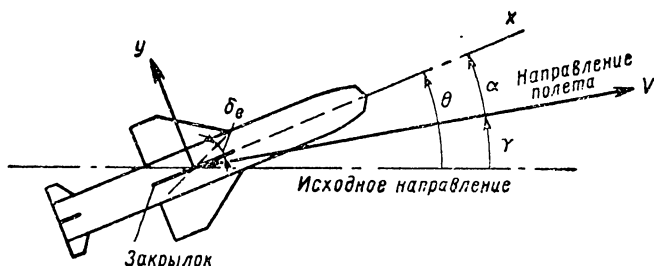
Подставив уравнение (3. 82) в уравнение (3. 83), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$x_i = \frac{M}{C_2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{F}{C_2} \right) \frac{dy}{dt} + \frac{a}{b} y. \quad (3. 84)$$

Это уравнение связывает перемещение рычага управления y с перемещением x_i штока золотника. Оно имеет вид типичного уравнения системы второго порядка, которое было рассмотрено раньше, так что все замечания, сделанные относительно систем второго порядка и их передаточных функций, применимы полностью к данному случаю.

3. 4. ОБЪЕКТЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Передаточные функции, присущие объектам регулирования, могут иметь различную форму — от простой до сложной. Например, в случае применения сервомеханизма для объекта регулирования, состоящего из стола фрезерного станка или пулеметной турели, влияние стола на динамику системы нетрудно учесть путем объединения влияния его инерции и вязкого трения с влиянием выходного



Фиг. 3. 20. Управляемый снаряд и соотношение углов. θ — угол наклона траектории; α — угол атаки; ψ — угол рыскания.

серводвигателя. В таких случаях передаточная функция объекта регулирования неизменно связана с передаточной функцией выходного устройства. Однако существует много случаев, когда динамика объекта регулирования имеет сложный характер, например, динамика технологического процесса или управления самолетом. Конечно, основной метод определения передаточной функции остается тот же, а именно — составление дифференциальных уравнений.

Передаточная функция управляемого снаряда в вертикальной плоскости. Рассмотрим случай, когда объектом регулирования является управляемый снаряд, изображенный на фиг. 3. 20. Этот

пример заслуживает особого внимания по следующим причинам: во-первых, он дает возможность получить сложную передаточную функцию для объекта регулирования и во-вторых, он иллюстрирует условия, когда передаточная функция определяется больше чем одним дифференциальным уравнением. Для простоты сосредоточим свое внимание на том, как углы θ , α , γ изменяются в зависимости от изменений отклонения δ_e руля. Вертикальная ось перпендикулярна продольной оси x и проходит через центр тяжести снаряда. Описание зависимости угла θ как функции отклонения руля δ_e имеет значение при расчете автопилота для управляемого снаряда. Вывод передаточной функции произведен с применением обозначений, одобренных Национальным комитетом по аэронавтике, и используемых при изучении аэродинамики; применены следующие обозначения:

$V_{\text{возд}}$ — воздушная скорость снаряда;
 ρ — плотность воздуха;
 L — подъемная сила, нормальная к вектору скорости;
 S — площадь крыла;
 c — хорда крыла;
 C_L — безразмерный аэродинамический коэффициент;

$C_{L\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha}$ — изменение коэффициента подъемной силы в зависимости от угла атаки;

$C_{M\alpha}$ — изменение коэффициента момента вследствие изменения угла атаки;

$C_{M\delta_e}$ — изменение коэффициента момента вследствие изменения отклонения закрылка;

C_{MQ} — изменение коэффициента момента в зависимости от скорости рысканья;

M — масса управляемого снаряда;

a — ускорение, нормальное к направлению полета;

J_{yy} — момент инерции снаряда относительно оси y ;

c — коэффициент демпфирования.

Необходимо найти соответствующие дифференциальные уравнения. Одно уравнение можно получить путем приравнивания приложенных моментов, обусловленных изменениями угла атаки α и отклонением руля δ_e , к противоположно действующим моментам

$$J_{yy} \frac{d^2\theta}{dt^2} + c' \frac{d\theta}{dt} = \Sigma \text{ приложенные моменты} = \\ = M_{\alpha}\alpha + M_{\delta_e}\delta_e. \quad (3. 85)$$

Здесь означает:

M_{α} — аэродинамический коэффициент, определяющий момент относительно поперечной оси вследствие изменения угла атаки α

$$M_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho V_{\text{возд}}^2 C_{M\alpha} S c. \quad (3. 86)$$

$M_{\delta_e}^A$ — аэродинамический коэффициент, определяющий момент относительно поперечной оси вследствие изменения положения руля

$$M_{\delta_e} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{M_{\delta_e}} S c; \quad (3.87)$$

c' — коэффициент демпфирования, которое противодействует изменению угла тангажа

$$c' = -\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{M_Q} S c. \quad (3.88)$$

Второе уравнение составляется на основании того, что перемещение, нормальное к направлению полета, обусловлено подъемными силами

$$m a = L_{\alpha} \alpha + L_{\delta_e} \delta_e, \quad (3.89)$$

где L_{α} — коэффициент подъемной силы, связанный с углом атаки α

$$L_{\alpha} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{L_{\alpha}} S, \quad (3.90)$$

L_{δ_e} — коэффициент подъемной силы, связанный с положением δ_e руля

$$L_{\delta_e} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{L_{\delta_e}} S. \quad (3.91)$$

Кроме того, из динамики полета следует, что ускорение, нормальное к направлению полета, определяется выражением

$$a = V_{\infty} \frac{d\gamma}{dt} - L_{\alpha} \alpha - L_{\delta_e} \delta_e = 0. \quad (3.92)$$

Подстановка уравнения (3.92) в уравнение (3.89) дает

$$m V_{\infty} \frac{d\gamma}{dt} - L_{\alpha} \alpha - L_{\delta_e} \delta_e = 0. \quad (3.93)$$

Уравнения (3.85) и (3.93) недостаточны для получения искомой передаточной функции, потому что они содержат три угла, т. е. θ , δ_e и γ .

Поэтому требуется третье уравнение, а именно:

$$\theta = \alpha + \gamma, \quad (3.94)$$

которое очевидно из рассмотрения фиг. 3. 20. В результате перегруппировки членов и применения преобразования Лапласа, уравнения (3.85) и (3.93) приобретают вид:

$$\frac{s^2 \theta}{\omega_a^2} - \frac{s \theta}{\omega_b} - C_{M_{\alpha}} \alpha - C_{M_{\delta_e}} \delta_e = 0 \quad (3.95)$$

и

$$\frac{s\gamma}{\omega_c} - C_{L\alpha}\alpha - C_{L\delta_e}\delta_e = 0, \quad (3.96)$$

где

$$\omega_a^2 = \frac{M_\alpha}{C_{MQ}J_{yy}}; \quad \omega_b = \frac{1}{C_{MQ}}; \quad \omega_c = \frac{L_\alpha}{mVC_{L\alpha}}.$$

Теперь можно использовать уравнения (3.94), (3.95) и (3.96) для составления любой из трех передаточных функций, характеризующих продольное движение. Передаточная функция, описывающая изменение угла θ наклона траектории на единицу изменения положения δ_e руля, определяется

$$\frac{\theta}{\delta_e}(s) = \frac{1}{As^2 + Bs + 1} \left(1 + \frac{s}{\omega_0} \right) \frac{K_2\omega_c}{s}, \quad (3.97)$$

где

$$A = - \frac{1}{\omega_a^2 \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega_b} \right) C_{L\alpha} + C_{M\alpha} \right]};$$

$$B = \frac{1}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_b} \right) C_{L\alpha} + C_{M\alpha}} \left(\frac{1}{\omega_b} - \frac{\omega_c C_{L\alpha}}{\omega_a^2} \right);$$

$$\omega_d = - \frac{\omega_c K_1}{C_{M\delta_e}};$$

$$K_1 = C_{M\alpha} C_{L\delta_e} - C_{M\delta_e} C_{L\alpha};$$

$$K_2 = \frac{K_1}{\left(\frac{\omega_c}{\omega_b} \right) C_{L\alpha} + C_{M\alpha}}.$$

Из уравнения (3.97) следует, что сложные логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики будут иметь обычные формы, рассмотренные в предыдущей главе.

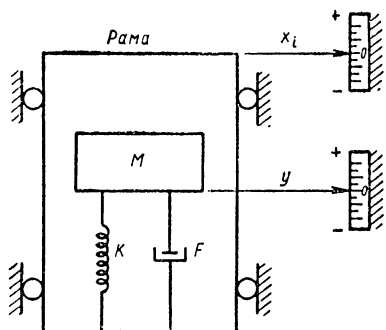
Однако рассмотренные здесь условия требуют трех названных стандартных форм для правильного описания динамических характеристик объекта регулирования.

3.5. ЭЛЕМЕНТЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Звенья, связанные с блоком обратной связи¹, обычно известны под названием «преобразователи (транздукторы)». Их назначение состоит, в первую очередь, в преобразовании регулируемой переменной величины, которая может иметь любую форму от углового положения до регулируемой температуры, в первичный сигнал обратной

¹ В русской литературе звенья обратной связи часто называются чувствительными элементами или датчиками сигналов регулируемых величин. *Прим. ред.*

связи. Последний может иметь совершенно иной характер. Конечно, применение преобразователей не ограничено цепью обратной связи и их можно часто встретить в других частях системы управления. Для преобразования сигнала обычно не расходуется энергия. В главе 1 преобразователем сигнала обратной связи был потенциометр или сельсин. В разделе 3.3 элементом обратной связи сервомеханизма управления двигателем было простое рычажное соединение между выходным звеном двигателя и штоком золотника. Передаточные функции таких устройств являются постоянными величинами и сравнительно простыми при выводе. Однако не всегда имеются такие условия и поэтому необходимо рассмотреть несколько примеров преобразователей более сложного характера.



Фиг. 3. 21. Конструктивные особенности линейного акселерометра с одной степенью свободы.

Линейный акселерометр нашел широкое применение в высокоскоростной авиации и управляемых снарядах. В любом случае он может выполнять двойную роль. С одной стороны, он может быть использован как измерительное устройство для получения необходимых данных о вибрациях и ударах, которым подвергаются управляемые снаряды или реактивные самолеты. С другой стороны, он может быть включен, как важнейшая составная часть, в систему управления снарядом или самолетом.

На фиг. 3. 21 показан линейный акселерометр с одной степенью свободы, передаточная функция которого описывается ниже. Предполагается, что рама акселерометра укреплена на раме управляемого снаряда. Обозначим далее:

y — перемещение массы M относительно инерциального пространства;

M — масса акселерометра;

x_i — перемещение рамы относительно инерциального пространства;

x_0 — перемещение M относительно рамы,

$$x_0 = y - x_i. \quad (3. 98)$$

Выходной величиной акселерометра примем x_0 . За входную величину можно взять перемещение x или входное ускорение $s^2 x_i$. Уравнение движения системы находится путем приравнивания нулю суммы сил, связанных с предполагаемым перемещением массы и рамы. Следовательно,

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + F \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx_i}{dt} \right) + K (y - x_i) = 0. \quad (3. 99)$$

Акселерометр могут характеризовать в целом три передаточные функции. Одна из них вытекает непосредственно из уравнения (3. 99).

Перегруппировка членов этого уравнения и применение преобразования Лапласа приводят к выражению

$$s^2 Y + \frac{F}{M} s Y + \frac{K}{M} Y = \frac{F}{M} s X_i + \frac{K}{M} X_i. \quad (3.100)$$

Введение

$$\frac{F}{M} = 2\zeta\omega_n$$

и

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

и образование отношения выходной величины к входной дают в результате следующее выражение:

$$\frac{Y}{X_i}(s) = \frac{1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + 1}. \quad (3.101)$$

Передаточную функцию (3.101) можно применить всегда, когда выходная величина измерена относительно инерциального пространства. Однако более полезной формой выходной величины акселерометра будет перемещение массы M , измеренное относительно рамы, но не инерциального пространства. Для получения этой передаточной функции уравнение (3.98) следует ввести в уравнение (3.99), что приводит к соотношению

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx_0}{dt} + \omega_n^2 x_0 = -\frac{d^2 x_i}{dt^2}. \quad (3.102)$$

Применив преобразование Лапласа и образовав отношение выходной величины к входной, можно получить искомый результат, а именно

$$\frac{X_0}{X_i}(s) = -\frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = -\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{s^2}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + 1}. \quad (3.103)$$

Логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики согласно этой передаточной функции показаны на фиг. 3.22. Следует заметить, что эти кривые представляют зеркальное отображение характеристик на фиг. 2.22, б, в.

Изучение уравнения (3.103) и соответствующих частотных характеристик позволяет получить некоторые полезные сведения об ограничениях применения линейных акселерометров. Например, может возникнуть вопрос о допустимости применения акселерометра, как измерительного устройства, для определения низкочастотных колебаний рамы управляемого снаряда. Уравнение (3.103) показывает,

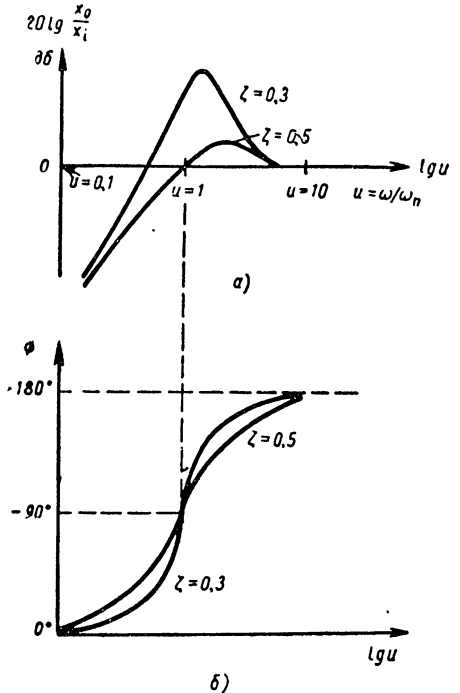
что передаточная функция при подобных условиях имеет приближенный вид

$$\frac{X_0}{X_i} \approx -\frac{1}{\omega_n^2} s^2. \quad (3.104)$$

Однако собственная частота акселерометра обычно бывает слишком высокой вследствие небольшой массы и очень жесткой пружины. Кроме того, выходное перемещение слишком незначительно для измерения при данных условиях применения. В действительности выходной сигнал может почти полностью совпадать с уровнем шумов системы, вследствие чего измерения могут оказаться ненадежными. Однако попробуем доказать, что применение акселерометра может быть удовлетворительным при определении и измерении колебаний с частотой, сравнимой с собственной частотой акселерометра.

Более важное значение имеет передаточная функция, которая связывает выходное перемещение с входным ускорением. Правая часть уравнения (3.102) представляет собой ускорение, которое мы теперь обозначим a_x . Следовательно, искомая передаточная функция будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{X_0}{a_x} &= -\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \\ &= -\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + 1}. \end{aligned} \quad (3.105)$$



Фиг. 3.22.

а — логарифмическая амплитудно-частотная характеристика линейного акселерометра;
б — логарифмическая фазо-частотная характеристика линейного акселерометра.

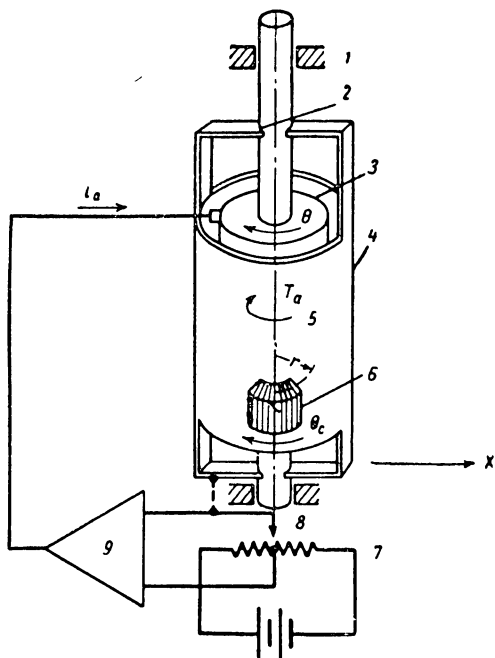
Нетрудно видеть, что она имеет обычную форму передаточной функции колебательного звена. Так как входной величиной является ускорение, то отсюда следует, что выходное перемещение X_0 пропорционально входному ускорению. Определив характер кривых реакции второго порядка, нетрудно понять, почему относительный коэффициент демпфирования у этих устройств колеблется между 0,4 и 0,7. Благодаря этому устраняется сильное перерегулирование и поэтому неправильные показания пиковых значений ускорения. Кроме того, для этой системы выбирается большая собственная частота с целью создать возможность измерения акселерометром импульсов ускорения с высокой точностью.

Ввиду того что величина X_0 создает возможность измерять ускорение управляемого снаряда, акселерометр выполняет важнейшую функцию в автопилоте. Путем включения акселерометра в цепь обратной связи корпуса управляемого снаряда создается возможность использования сигнала рассогласования для устранения этого рассогласования, когда выходное ускорение управляемого снаряда отклоняется от заданной величины.

Моторный акселерометр.

Принцип действия мотора часто используется в конструкции устройств специального назначения. Один подобный случай применения показан на фиг. 3. 23. Задача состоит в том, чтобы получить устройство, чувствительное к ускорению и создающее выходную величину, пропорциональную ускорению или преимущественно интегралу ускорения (скорости) или же двойному интегралу ускорения (т. е. расстоянию). Звенья подобного рода имеют существенное значение для работы инерциальных систем управления, которые будут рассмотрены в главе 4. На фиг. 3. 23 показано, что двигатель постоянного тока установлен вертикально.

Корпус двигателя, в котором создается постоянное магнитное поле, смонтирован таким образом, что он может также вращаться вокруг вертикальной оси. Корпус, кроме того, снабжен эксцентрично расположенной массой M . Когда вся конструкция (т. е. исходная рама вместе с смонтированным двигателем) ускоряется по направлению x , тогда эксцентричная масса и корпус двигателя перемещаются на угол θ_c вследствие инерции эксцентричной массы. Это перемещение создает сигнал, который принимается потенциометром измерения ошибки. Этот сигнал ошибки усиливается и преобразуется в ток i_a для двигателя. Ток якоря создает соответствующий момент на валу двигателя вследствие взаимодействия магнитных полей обмоток якоря и возбуждения. Направление тока выбирается таким, чтобы момент реакции, действующей на корпус, был противоположен первоначальному перемещению корпуса и, следовательно, стремился вернуть его



Фиг. 3. 23. Схема акселерометра:

- 1 — исходная рама; 2 — подшипники; 3 — якорь; 4 — вращающееся поле; 5 — входной момент; 6 — масса M , расположенная эксцентрично на якоре; 7 — потенциометр для измерения погрешности; 8 — ползунок; 9 — усилитель.

в нулевое положение. Следовательно, развиваемый момент двигателя становится мерилом первоначального ускорения и так как он также действует на якорь двигателя, то угловое перемещение якоря будет связано с ускорением. Для этой системы следует вывести передаточную функцию, но первоначально определим следующие величины:

- θ — угловое перемещение якоря в *рад.*;
- θ_c — угловое перемещение корпуса в *рад.*;
- M — эксцентричная масса корпуса;
- r — эксцентрицитет массы M ;
- Mr^2 — момент инерции корпуса;
- K_p — постоянная потенциометра в *в/рад.*;
- G_m — коэффициент усиления усилителя в *а/в.*;
- I_a — ток якоря двигателя в *а.*;
- T_m — момент, создаваемый двигателем;
- K_m — постоянная момента двигателя;
- T_a — внешний момент, приложенный к корпусу;
- J — момент инерции якоря двигателя;
- F_c — вязкое трение корпуса;
- \dot{F} — вязкое трение ротора;
- \ddot{x} — ускорение по направлению x , перпендикулярному к радиальной линии, от оси двигателя к эксцентричной массе

$$\ddot{X} = s^2 x.$$

Для упрощения анализа рассмотрим сперва поведение системы, когда она находится в покое и к корпусу приложен внешний момент T_a . В любой данный момент времени крутящий момент, действующий на корпус, будет равен $T_a - T_m$. В предположении, что корпус имеет вязкое трение, его уравнение движения будет

$$T_a - T_m = (Mr^2 s^2 + F_c s) \theta_c. \quad (3. 106)$$

Момент двигателя T_m равен $K_m I_a$ и может быть выражен через угловое перемещение корпуса θ_c , откуда следует

$$T_m = K_m I_a = K_m G_m K_p \theta_c. \quad (3. 107)$$

Если значение угла θ_c из уравнения (3. 107) ввести в уравнение (3. 106), то получим следующую формулу:

$$T_a - T_m = \frac{(Mr^2 s^2 + F_c s) T_m}{K_m G_m K_p}. \quad (3. 108)$$

После объединения членов получаем

$$T_m = \frac{T_a}{\left(\frac{Mr^2}{K_m G_m K_p}\right) s^2 + \left(\frac{F_c}{K_m G_m K_p}\right) s + 1}. \quad (3. 109)$$

Уравнение (3. 109) связывает момент, создаваемый двигателем, с приложенным моментом. Приложенный момент T_a может быть связан с ускорением \dot{x} по закону Ньютона. Следовательно, ускорение \ddot{x}

эквивалентно приложенной силе $M\ddot{x}$ к эксцентричной массе. Эта сила создает момент благодаря плечу r . Отсюда

$$T_a = Mr\ddot{x}. \quad (3.110)$$

Объединение уравнений (3.110) и (3.109) дает искомую зависимость между крутящим моментом двигателя и ускорением системы

$$T_m = \frac{Mr\ddot{X}}{\left(\frac{Mr^2}{K_m G_m K_p}\right)s^2 + \left(\frac{F_c}{K_m G_m K_p}\right)s + 1}. \quad (3.111)$$

Необходимо заметить, что ток якоря двигателя может быть использован для непосредственного измерения созданного ускорения, так как

$$I_a = \frac{T_m}{K_m} = \frac{Mr\ddot{X}}{K_m \left[\left(\frac{Mr^2}{K_m G_m K_p}\right)s^2 + \left(\frac{F_c}{K_m G_m K_p}\right)s + 1 \right]}. \quad (3.112)$$

Если коэффициент усиления G_M очень большой, тогда

$$I_a \approx \frac{Mr\ddot{X}}{K_m}.$$

Во многих случаях за выходную величину этого устройства принимается угловое перемещение якоря двигателя. Передаточную функцию для этой выходной переменной величины нетрудно найти путем приравнивания крутящего момента двигателя к нагрузке якоря, т. е.

$$T_m = (Js^2 + Fs)\theta. \quad (3.113)$$

Объединяя это уравнение с уравнением (3.111), получим передаточную функцию между угловым положением якоря и входным ускорением

$$\frac{\theta}{\ddot{X}} = \frac{Mr}{(Js^2 + Fs) \left[\left(\frac{Mr^2}{K_m G_m K_p}\right)s^2 + \left(\frac{F_c}{K_m G_m K_p}\right)s + 1 \right]}. \quad (3.114)$$

Если коэффициент усиления G_m сделать очень большим, то окончательное уравнение приобретает вид

$$\frac{\theta}{\ddot{X}} = \frac{Mr}{Js^2 + Fs}. \quad (3.115)$$

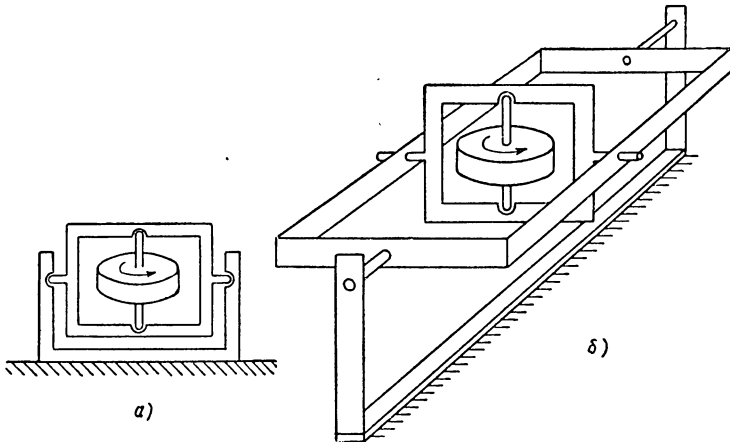
Когда вязкое трение двигателя равняется в идеальном случае нулю, то последнее выражение сводится к соотношению

$$\frac{\theta}{\ddot{X}} = \frac{Mr}{Js^2}. \quad (3.116)$$

Из равенства $\ddot{X} = s^2x$ следует, что

$$\theta = \frac{Mr}{J} x. \quad (3.117)$$

Таким образом, угловое положение якоря двигателя в любой момент времени пропорционально расстоянию перемещения по направлению x . Если счетчик оборотов был размещен на валу якоря двигателя, то его показания будут равны пройденному расстоянию аналогично отсчету километража по автомобильному спидометру. Это особенно важно, учитывая тот факт, что мы теперь имеем показа-



Фиг. 3. 24.

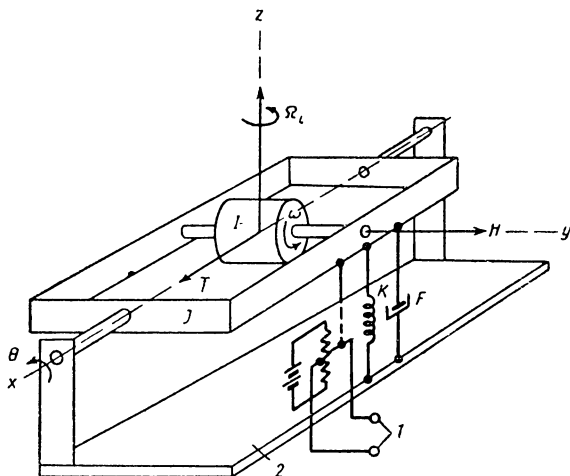
a — гироскоп с двумя степенями свободы; *b* — гироскоп с тремя степенями свободы.

ния пройденного пути без какой-либо ссылки на внешний источник информации. В настоящей главе мы попытаемся вывести передаточную функцию для более сложного устройства и теперь мы имеем возможность подробно исследовать работу такого устройства, включив его как часть более крупной системы, например, системы полного управления летательного аппарата.

Гироскоп нашел широкое применение в авиации как указательный прибор и как звено в системе управления огнем, автоматического управления самолетом и в аэронавигационных системах. Принцип действия гироскопа хорошо известен и он основан на законе сохранения момента количества движения. Когда этот прибор практически используется как звено системы управления, то перемещение вращающегося ротора гироскопа обычно ограничено вследствие монтажа его в нескольких подшипниках, называемых карданными подвесами. Гироскопы классифицируют по числу степеней свободы углового перемещения вращающегося ротора. На фиг. 3. 24, *a* показан гироскоп с двумя степенями свободы, а на фиг. 3. 24, *b* — гироскоп

стремя степенями свободы. Практически применяется несколько типов гироскопов, включая скоростной гироскоп, интегрирующий гироскоп, позиционный гироскоп и т. д. Вследствие сложности всего вопроса о гироскопах и ограниченности места будут выведены только передаточные функции для некоторых простых гироскопических звеньев.

На фиг. 3. 25 показана обобщенная схема гироскопа с двумя степенями свободы, с упругой подвеской (пружина K) и вязким демпфированием F вокруг свободной или выходной оси x . Если корпус гироскопа вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω_i , то созда-



Фиг. 3. 25. Обобщенная схема гироскопа с двумя степенями свободы:

1 — напряжение выключения; 2 — платформа.

ваемый момент $T = H\Omega_i$ будет стремиться поворачивать гироскоп на угол θ вокруг оси x подвеса. Гироскопическое устройство будет стремиться поворачиваться таким образом, чтобы вектор кинетического момента H совпал с вектором Ω_i входной угловой скорости. Этому моменту противодействует инерция системы относительно выходной оси x , упругий момент пружин и момент вязкого демпфирования.

Если момент инерции относительно оси x обозначить J и угловое перемещение θ , то уравнение при динамическом равновесии системы будет выражаться следующим образом:

$$H\Omega_i = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} + K\theta. \quad (3. 118)$$

Отсюда передаточная функция между выходным углом θ и входной угловой скоростью будет определяться

$$\frac{\theta}{\Omega_i} = \frac{H}{Js^2 + Fs + K}. \quad (3. 119)$$

Это последнее выражение математически сходно с формой уравнения (2. 52); на фиг. 3. 22 показаны частотные характеристики. Обычно выходной угол преобразуется в напряжение при помощи датчика или преобразователя, который показан на фиг. 3. 25 в виде потенциометра; но здесь могут быть также применены сельсины-трансформаторы или другие типы преобразователей.

Описываемый тип гироскопа с уравнением (3. 118) известен как скоростной гироскоп и обычно используется для измерения перемещения самолета и определения угловой скорости, значения которой вводятся в автопилот и в систему управления огнем. Применение такого устройства, как указателя скорости, можно иллюстрировать рассмотрением установившегося выходного отклонения при постоянной входной угловой скорости Ω_{i_0} . Установившееся отклонение относительно выходной оси будет определяться

$$\theta_{ss} = \frac{H}{K} \Omega_{i_0}. \quad (3. 120)$$

Следовательно, выходное угловое перемещение пропорционально постоянной входной угловой скорости. Чтобы предотвратить колебательную реакцию, всегда необходимо некоторое демпфирование гироскопа. Важно заметить, что постоянное отклонение θ_{ss} создает ошибку в системе вследствие того, что оно заставляет вектор H перемещаться от оси y и поэтому вектор Ω_i входной угловой скорости больше не совпадает с осью z . Результирующая ошибка измерения угловой скорости обусловлена геометрической взаимной связью. Чтобы свести к минимуму это влияние, угловое перемещение вокруг выходной оси должно быть ограничено малыми значениями путем увеличения постоянной (константы) пружины K . Для этого требуется, чтобы преобразователь сигнала был очень чувствительным, что, в свою очередь, усиливает проблемы дрейфа и помех. Влияние моментов трения в подшипниках подвеса и в преобразователе сигнала также представляет главный источник возникновения ошибок в системе. Таким образом, конструирование точного гироскопа становится трудной технической задачей.

Если упругую подвеску скоростного гироскопа устранить, то прибор превращается в интегрирующий гироскоп (известный также под названием герметически закрытый интегрирующий гироскоп). В этом случае уравнение при динамическом равновесии относительно выходной оси будет иметь вид

$$H\Omega_i = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt}. \quad (3. 121)$$

Передаточная функция, соответствующая уравнению (3. 121), зависит от выбора входной и выходной переменных величин, что, конечно, связано с тем или иным случаем применения. Если выходной преобразователь реагирует на угловое отклонение относительно выходной оси, то выходной переменной величиной станет угол θ .

Обычно за входную величину принимают угловое перемещение относительно входной оси z (угловое перемещение обозначается греческой буквой θ_i); реже за входную величину принимают входную угловую скорость $\dot{\Omega}_i$; (заметим, что $\Omega_i = \frac{d\theta_i}{dt}$).

Передачная функция при этих переменных величинах будет

$$\frac{\theta}{\dot{\theta}_i} = \frac{H}{J_s + F} \approx \frac{H}{F} \quad (3.122)$$

при пренебрежимо малом значении J . Эта передачная функция имеет ту же форму, что и уравнение (2.48); частотные характеристики изображены на фиг. 2.19.

Если входной величиной гироскопа является постоянный угол θ_{i_0} , то установившееся отклонение относительно выходной оси будет определяться

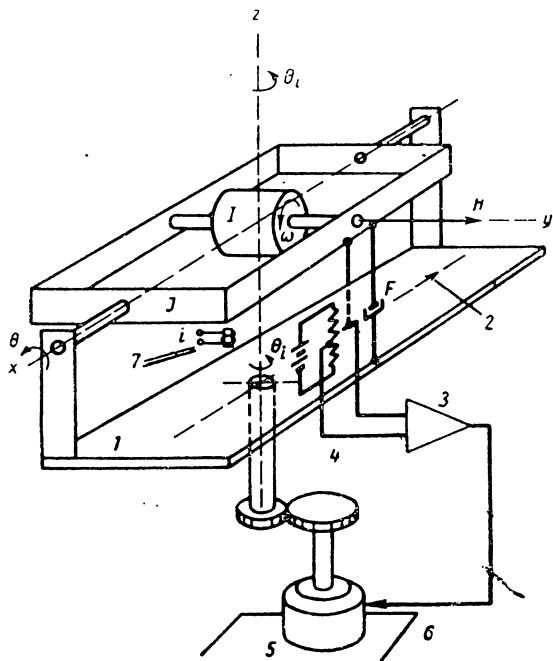
$$\theta_{ss} = \frac{H}{F} \theta_{i_0}. \quad (3.123)$$

Таким образом, выходное угловое перемещение в установившемся состоянии пропорционально входному угловому перемещению. Для интегрирующего гироскопа также возникает проблема геометрической взаимной связи. Типичные значения для $\frac{H}{F}$ имеют порядок величины от 1 до 10, так что этой проблемой нельзя пренебречь. Вследствие этого применение интегрирующих гироскопов обычно ограничено такими случаями, как стабилизированные платформы, где выходной угол почти доводится до нулевого значения посредством обратной связи.

В качестве примера применения гироскопа рассмотрим задачу создания стабильной исходной плоскости на движущейся машине. Необходимость в этом возникает потому, что современные самолеты обладают большой скоростью и высокой маневренностью, как и управляемые снаряды, и надежные внешние ориентиры отсутствуют. В силу этих обстоятельств становится необходимо создать на машине стабильную исходную плоскость, которая сохраняет свое положение в пространстве, независимо от движения самолета. Подобную плоскость называют стабильной платформой и она предназначена для сохранения постоянства своего положения относительно инерциального пространства¹.

¹ Инерциальное пространство определяется как пространство, к которому применим закон инерции Ньютона, т. е. исходная рама, на которой не ускоряется тело, свободное от действия сил. Во многих случаях инерциальное пространство определяется как пространство, в котором координатная система неподвижна относительно звезд. Это определение взято из статьи Дрейпера и др. «Интегрирующий гироскоп и его применение к задачам геометрической стабилизации на движущихся основаниях», опубликованной Аэронавигационным научным институтом 27 января 1955 г.

Когда интегрирующий гироскоп используется для создания стабильной платформы, то каждую ось необходимо стабилизировать отдельным интегрирующим гироскопом. На фиг. 3. 26 показана одноосная стабилизированная платформа; стабилизация создается по угловому положению относительно оси z . Представим себе, что эта платформа первоначально расположена таким образом, что ось x совпадает с продольной осью самолета. Угол θ_i измеряется относи-



Фиг. 3. 26. Одноосная стабилизированная платформа с интегрирующим гироскопом:

1 — платформа; 2 — стабилизированная ось; 3 — усилитель; 4 — напряжение выключения; 5 — электродвигатель; 6 — рама; 7 — генератор момента.

тельно инерциального пространства с осями x , y , z . Статор привода жестко соединен с самолетом. Когда самолет изменяет направление своего полета, то имеет место вращение θ_i самолета и платформы вокруг оси z . Гироскоп воспринимает это изменение и создает процессию относительно своих подвесов в виде угла θ . В связи с этим возникает напряжение, которое усиливается и подается на зажимы двигателя. Тогда двигатель перемещает платформу относительно самолета в таком направлении, чтобы угол θ_i был доведен до своего первоначального значения относительно инерциального пространства и упомянутое напряжение рассогласования стало равно нулю.

Передаточную функцию этой системы можно определить, если рассмотреть зависимость между углом θ_i и возмущающим моментом T_a , под действием которого платформа поворачивается вокруг оси z из своего устойчивого положения. В идеальном случае угол отклонения оставался бы постоянным, независимо от возмущающего момента T_a . Определим следующие величины:

T_a — приложенный внешний момент относительно оси z ;

T_m — момент, создаваемый двигателем и приложенный к платформе;

F_p — коэффициент вязкого трения двигателя и платформы на ее стороне;

J_p — момент инерции двигателя и платформы относительно оси на стороне платформы;

K — общий коэффициент усиления напряжения ошибки, констант усилителя и момента двигателя, создающего крутящий момент на стороне платформы, отнесенный к единице угла θ .

Уравнение равновесия моментов для платформы будет

$$T_a - T_m = J_p \frac{d^2\theta_i}{dt^2} + F_p \frac{d\theta_i}{dt}. \quad (3.124)$$

Передаточная функция между углом θ_i и углом θ рассогласования определяется уравнением (3.122), т. е.

$$\frac{\theta}{\theta_i}(s) = \frac{H}{Js + F} \approx \frac{H}{F}, \quad (3.125)$$

где J — означает момент инерции относительно оси x , который обычно мал и им можно пренебречь. Крутящий момент T_m , создаваемый двигателем, равен

$$T_m = K\theta. \quad (3.126)$$

Преобразование Лапласа и объединение уравнений (3.124)—(3.126) приводят к следующим результатам:

$$\frac{T_m}{T_a} = \left[1 + \frac{s(J_p s + F_p) F}{HK} \right]^{-1} \quad (3.127)$$

и

$$\frac{\theta_i}{T_a} = \frac{F}{s(J_p s + F_p) F + HK}. \quad (3.128)$$

Если коэффициент усиления K сделать очень большим, то момент двигателя T_m будет, как можно видеть, приближаться к T_0 и угол θ_i приближаться к нулю, так что платформа будет иметь тенденцию сохранять свое положение, совпадающее с направлением x , независимо от приложенных моментов, стремящихся нарушить или вывести ее из этого положения. У этой системы следует отметить одну важную сторону, состоящую в том, что платформа может совершать прецессию вокруг оси z при подаче тока в небольшой генератор моментов, как

показано на последней фигуре. Электромагнитное усилие генератора моментов, смонтированного на подвеске, стремится создать вращение вокруг оси x , вследствие чего возникает сигнал напряжения и тогда двигатель будет поворачивать платформу с такой угловой скоростью, которая вполне достаточна для генерирования момента прецессии относительно оси x , равного и противоположного моменту, создаваемому названным генератором моментов. Эта постоянная скорость вращения необходима в инерциальных системах управления с целью создания стабильной платформы, на которой смонтированы акселерометры, в плоскости, перпендикулярной местной вертикали, в то время, когда самолет поворачивается вокруг земли. Более подробно об этом будет сказано в следующей главе.

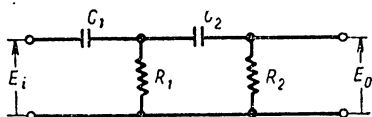
Конструирование гироскопа представляет сложную техническую задачу. Скорость дрейфа в 1 град/ч вызывает ошибку в 60 миль за час в инерциальной навигационной системе. Скорости дрейфа у некоторых гироскопов составляют меньше $0,02 \text{ град/ч}$. При любом тщательном конструировании необходимо учесть такие проблемы, как разбаланс, деформации подшипников в результате ускорения, блуждающие токи в смазочной жидкости и даже упругость материала проводов.

ЗАДАЧИ

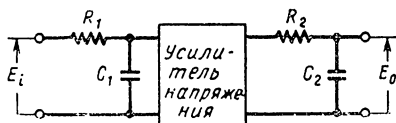
3. 1. Показать, что контур на фиг. 3. 27 имеет передаточную функцию

$$\frac{E_0}{E_i}(s) = \frac{1}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})s + 1},$$

где $\tau_1 = R_1C_1$; $\tau_2 = R_2C_2$; $\tau_{12} = R_1C_2$.

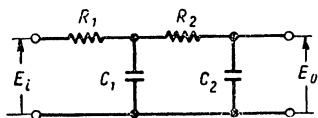


Фиг. 3. 27. Высокочастотный фильтр RC.



Фиг. 3. 28. Высокочастотный фильтр RC с усилителем.

3. 2. Определить передаточную функцию для контура, показанного на фиг. 3. 28. При каких условиях передаточную функцию задачи 3. 1 можно свести к той же форме, как и в настоящей задаче.

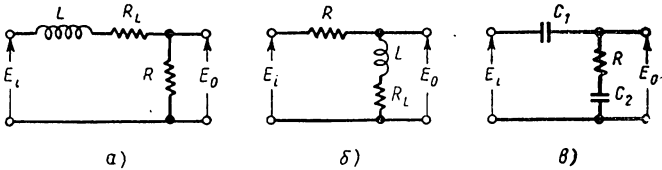


Фиг. 3. 29. Низкочастотный фильтр.

3. 3. Определить передаточную функцию для контура фиг. 3. 29. Напишите ответ в форме, аналогичной задаче 3. 1.

3. 4. Вывести передаточные функции для контуров на фиг. 3. 30. В каждом случае полученный результат написать в виде запаздывания или опережения по фазе и определить α и τ через параметры звеньев.

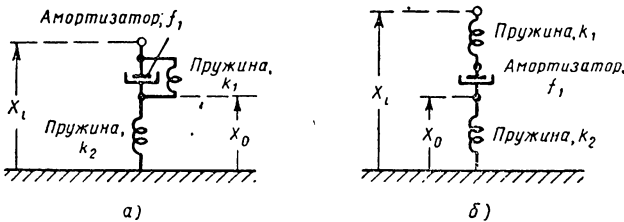
3. 5. Вывести передаточную функцию $\frac{X_0}{X_i}$ (s) для механических систем, схемы которых изображены на фиг. 3. 31. В каждом случае



Фиг. 3. 30. Фильтры:

а — низкочастотный; б — высокочастотный; с — полосовой.

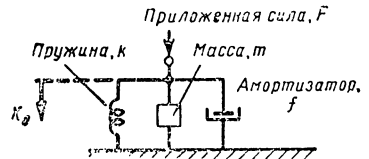
передаточную функцию следует написать в виде запаздывания или опережения по фазе и определить α и τ через параметры системы.



Фиг. 3. 31. Схемы механических передаточных систем.

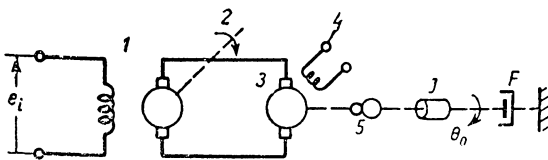
3. 6. Определить передаточную функцию $\frac{X_0}{F}$ для системы, изображенной на фиг. 3. 32. Какой основной форме, рассмотренной в настоящей главе, соответствует эта передаточная функция?

3. 7. Схема системы управления показана на фиг. 3. 33. Входное напряжение e_i приложено к обмотке возбуждения генератора; ее активное сопротивление $R_f = 100$ ом, индуктивное $L_f = 0$ гн. Генератор вращается первичным двигателем с постоянным числом оборотов. Выход генератора соединен с



Фиг. 3. 32. Схема механической передаточной системы.

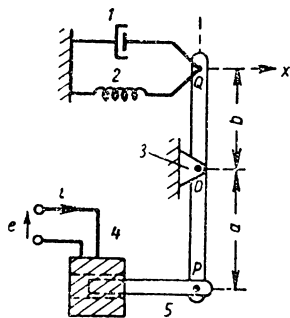
входом двигателя. Двигатель имеет неизменный ток возбуждения и вращает постоянную



Фиг. 3. 33. Схема электрической передаточной системы: 1 — генератор; 2 — постоянное число оборотов; 3 — электродвигатель; 4 — постоянная индукция; 5 — редуктор. Индуктивное сопротивление $L_f = 0$ гн. Активное сопротивление $R_f = 100$ ом.

инерциальную нагрузку J с вязким трением F через редуктор с передаточным отношением 2 : 1. Параметры генератора: наведенная

э. д. с. 100 в/а тока возбуждения; сопротивление якоря 5 ом ; параметры двигателя: постоянная противоэлектродвижущей силы равняется 100 в/об/мин ; постоянная крутящего момента $10 \times \Pi_1^* \text{ кгм/а}$; сопротивление якоря 5 ом ; параметры нагрузки: передаточное отношение $2:1$ со снижением скорости от двигателя к нагрузке; $J = 200 \times \Pi_2^* \text{ кг}\cdot\text{см}^2$; $F = 100 \times \Pi_1^* \text{ кгм/об/мин}$.



Фиг. 3.34. Электромеханический преобразователь:

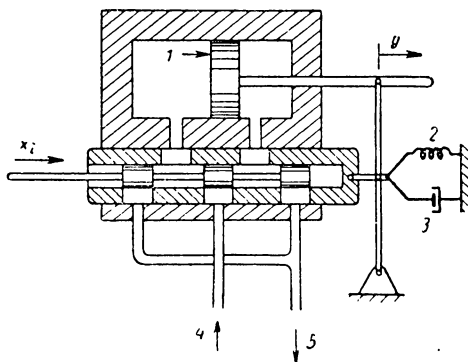
1 — вязкий демпфер F ; 2 — пружина K ; 3 — шарнир; 4 — соленоид. Сопротивление обмотки R , индуктивность L ; 5 — якорь.

а) Написать дифференциальное уравнение, связывающее входное напряжение e_i с выходным положением вала θ_0 у нагрузки.

б) Построить логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для $\frac{\theta_0}{e_i}$.

3. 8. На фиг. 3. 34 показан электромеханический преобразователь. Когда соленоид возбужден, то нижнее плечо рычага P перемещается влево, а верхнее плечо Q перемещается вправо. Катушка имеет сопротивление R и индуктивность L . Сила втягивания

соленоида определяется константой K н/а тока катушки. Определить передаточную функцию $\frac{X}{e}$ (s). Пренебречь всеми видами энергии и учесть только влияния пружины K и вязкого демпфера F .



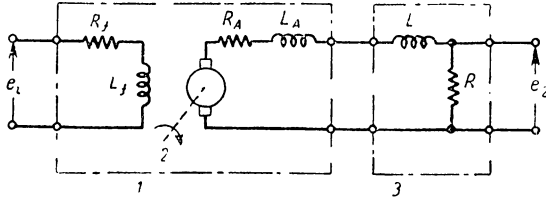
Фиг. 3. 35. Схема гидравлического привода с вязким демпфером:

1 — поршень; 2 — пружина; 3 — вязкий демпфер; 4 — высокое давление; 5 — низкое давление.

3. 9. Схема на фиг. 3. 35 идентична схеме фиг. 3. 19, за исключением добавленных пружины K и вязкого демпфера F . Найти передаточную функцию $\frac{Y}{X}$ (s).

* См. конец гл. 1.

3. 10. Определить передаточную функцию $\frac{E_2}{E_1}(j\omega)$ для системы фиг. 3. 36 со следующими параметрами генератора $L_f = 50 \text{ гн}$;



Фиг. 3. 36. Схема электрической системы:

1 — генератор параллельного возбуждения; 2 — неизменная скорость; 3 — фильтр нижних частот.

$R_f = 50 \text{ ом}$; $R_a = 1 \text{ ом}$; $L_a = 1 \text{ гн}$; постоянная э. д. с. $K_g = 200 \text{ в/а}$; параметры фильтра нижних частот $L = 1 \text{ гн}$ и $R = 1 \text{ ом}$.

3. 11. На эскизе фиг. 3. 37 дан пневматический преобразователь. При создании давления на входе сиффон расширяется и перемещает



Фиг. 3. 37. Пневматический преобразователь.

1 — anerоидная коробка; упругая постоянная K_b ; 2 — площадь A ; 3 — масса M (пренебрегаются все остальные массы); 4 — входное давление P .

рычаг. K_s и F представляют константы пружины и вязкое трение. Определить передаточную функцию между P и выходным перемещением X в предположении, что все перемещения малы по величине.

ГЛАВА 4

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ И ИХ СВОЙСТВА

В настоящей главе будет рассмотрено общее поведение всей системы управления с обратной связью. Подобные системы на практике обычно очень сложны вследствие разнообразия отдельных частей, нескольких цепей обратной связи и нескольких входных звеньев. Первый вопрос, который необходимо изучить, состоит в том, как составить структурную схему для такой системы и свести ее к удобной форме для исследования. Второй вопрос связан с применением структурной схемы и передаточных функций отдельных звеньев, чтобы заранее определить общую характеристику системы. Инженер также должен быть в состоянии связать свойства системы с поведением отдельных звеньев, чтобы системе можно было спроектировать в соответствии с заданными условиями. В силу этого основное внимание будет направлено на определение характеристик замкнутых систем в установившемся и переходном режимах, а также на определение частотной характеристики системы на основании частотной характеристики разомкнутой цепи. Ввиду того что передаточная функция разомкнутой цепи непосредственно связана с передаточными функциями отдельных звеньев, это позволяет контролировать расчет системы.

Разработано много способов проектирования систем управления. Для этого имеется две причины: во-первых, трудно обобщить результаты без некоторых упрощающих предположений; во-вторых, мы ограничены тем, что большинство методов расчета осуществляется в частотной области по заданным условиям, составленным для временной области, а зависимость между этими двумя областями не является простой.

4. 1. ОСНОВНАЯ СТРУКТУРНАЯ СХЕМА

Основная структурная схема системы управления с отрицательной обратной связью показана на фиг. 4. 1. Для этой системы определены следующие величины:

$G(s)$ — передаточная функция прямой цепи.

Как правило, $G(s)$ означает операционную передаточную функцию и включает в себе постоянный коэффициент усиления K ;

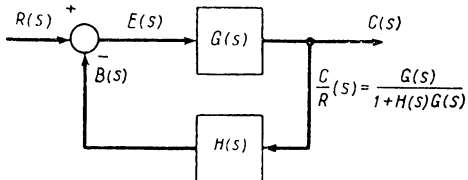
$H(s)$ — передаточная функция цепи обратной связи.

Как правило, $H(s)$ означает операционную передаточную функцию цепи обратной связи. Во многих случаях она равна единице или постоянному числу.

$G(s)H(s)$ — передаточная функция разомкнутой цепи.

Эта передаточная функция получена путем умножения всех передаточных функций, начиная с входного суммирующего звена и кончая в первичной точке обратной связи.

Если воспользоваться обозначениями на структурной схеме (фиг. 4. 1), то можно составить следующие уравнения, связывающие величины $R(s)$, $C(s)$ и $E(s)$:



$$E(s) = R(s) - B(s); \quad (4. 1a)$$

$$C(s) = G(s) E(s); \quad (4. 1б)$$

$$B(s) = H(s) C(s). \quad (4. 1в)$$

Фиг. 4. 1. Основная структурная схема системы с отрицательной обратной связью.

Из этих уравнений можно получить следующие формулы, связывающие выходной сигнал и сигнал ошибки с входной командой:

$$\begin{aligned} \frac{C}{R}(s) & \text{ — передаточная функция замкнутой цепи} = \\ & = \frac{G(s)}{1 + HG(s)} = \frac{\text{передаточная функция прямой цепи}}{(1 + \text{передаточная функция разомкнутой цепи})}; \end{aligned} \quad (4. 2a)$$

отношение сигнала рассогласования —

$$\frac{E}{R}(s) = \frac{1}{1 + HG(s)} = \frac{1}{(1 + \text{передаточная функция разомкнутой цепи})}. \quad (4. 2б)$$

Если формулу (4. 2a) написать в виде

$$[1 + HG(s)] C(s) = G(s) R(s),$$

то после приравнивания нулю входного сигнала $R(s)$ получаем характеристическое уравнение

$$1 + HG(s) = 0. \quad (4. 3)$$

В частном случае, когда передаточная функция цепи обратной связи равна единице $H(s) = 1$, формулы (4. 2a) и (4. 2б) будут иметь вид:

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (4. 4a)$$

и

$$\frac{E}{R}(s) = \frac{1}{1 + G(s)}. \quad (4. 4б)$$

Когда $H(s) = 1$, характеристическое уравнение сводится к виду

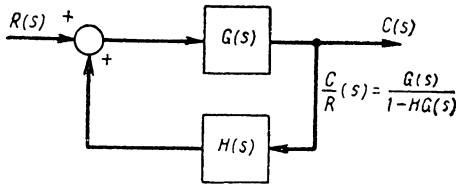
$$1 + G(s) = 0. \quad (4.5)$$

При выводе приведенных выше уравнений предполагается, что сигнал обратной связи на фиг. 4.1 подается со знаком минус. Такая обратная связь называется отрицательной. Для отрицательной обратной связи при $G(s)$ и $H(s)$ условно предполагается знак плюс. Если $H(s)$ имеет отрицательный знак, то формулы (4.2а) и (4.2б) превращаются в

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1 - HG(s)}; \quad (4.6a)$$

$$\frac{E}{R}(s) = \frac{1}{1 - HG(s)}. \quad (4.6б)$$

Это соответствует положительной обратной связи и структурная схема на фиг. 4.1 становится эквивалентной схеме на фиг. 4.2.



Фиг. 4.2. Структурная схема системы с положительной обратной связью.

Тогда характеристическое уравнение будет определяться выражением

$$1 - HG(s) = 0. \quad (4.6в)$$

При положительной обратной связи система часто оказывается неустойчивой. При такой обратной связи в системе возникает регенерация самовозбуждения. Если амплитуда сигнала обратной связи имеет достаточную величину, то при наличии в системе нелинейных элементов возникают устойчивые колебания.

Наличие неустойчивости всегда указывает на то, что корни характеристического уравнения находятся на мнимой оси или в правой половине комплексной плоскости. Очевидно величины $G(s)$ и $H(s)$ могут встречаться с другим сочетанием знаков, чем было рассмотрено. Отрицательная обратная связь будет всегда встречаться, когда сигнал обратной связи имеет противоположный знак относительно входного сигнала; положительная обратная связь будет тогда, когда оба эти сигнала имеют одинаковый знак.

Основное свойство обратной связи можно определить при рассмотрении передаточной функции замкнутой цепи, показанной на фиг. 4.1, когда коэффициент усиления K прямой цепи передачи делается очень большим. Когда этот коэффициент приближается к бесконечности, передаточная функция замкнутой цепи приближается к $[H(s)]^{-1}$, т. е. передаточная функция замкнутой системы становится независимой от прямой цепи передачи. Это свойство широко используется в схемах усилителей с обратной связью с целью получить стабильное усиление, независимое от дрейфа нулей и изменений параметров усилителя. Его также используют при синтезе некоторых операционных выражений.

4. 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ

Структурная схема системы в практическом выполнении оказывается, как правило, сложной, что обусловлено часто наличием нескольких цепей обратной связи и нескольких входных звеньев. Несколько цепей применяется из-за самого характера проблемы управления, и инженер должен быть подготовлен для анализа и расчета подобных систем. Путем преобразования структурной схемы любую многоконтурную систему можно свести к основной форме (фиг. 4. 1) и изучить ее на основании общей теории обратной связи. Любой параметр передаточной функции, например, постоянную времени, можно выделить таким образом, чтобы ее влияние на характеристику системы можно было подробно исследовать. Наличие нескольких входных звеньев свойственно всем системам управления, потому что всегда имеются дополнительные входные сигналы, например, помехи (случайные входные сигналы) и изменения дрейфа, что может наблюдаться всегда в любой системе. Здесь опять требуется применить способы преобразования структурной схемы для выделения влияний, чтобы иметь возможность изучить их на основании общей теории обратной связи.

Процесс преобразования структурной схемы осуществляется на основании нескольких простых теорем преобразования структурных схем. Некоторые из наиболее распространенных методов приведены в табл. 4. 1. В пункте 1 табл. 4. 1 дана формула преобразования для двух передаточных функций последовательно соединенных блоков. Предполагается, что влияние нагрузки одного блока на другой было учтено при выводе передаточной функции. В пункте 2 той же таблицы дана формула преобразования простой цепи обратной связи, которая одинакова с фиг. 4. 1 и 4. 2. Формула пункта 3 табл. 4. 1 предназначена для определения прямой цепи и устранения одной цепи в схеме. В пунктах 4 и 5 таблицы приведены преобразования с целью устранения одного звена из цепи обратной связи или из прямой цепи. Эквивалентная схема без труда получается при соответствующем приравнивании входных и выходных величин первоначальной схемы. Для иллюстрации способа рассмотрим случай пункта 4 таблицы. Уравнение, которое описывает зависимость для первоначальной схемы, будет

$$(M_1 \mp HM_2) G = M_2.$$

Если желательно изменить первоначальную структурную схему в систему с единичной обратной связью, то изучение предыдущего уравнения покажет, что оно эквивалентно случаю устранения H из члена HM_2 . Следовательно, измененное уравнение будет

$$\left(\frac{M_1}{H} \mp M_2\right) HG = M_2.$$

Интерпретация этого уравнения в виде структурной схемы приводит к эквивалентной схеме четвертого пункта таблицы. Схема пункта 4

Таблица 4.1
Теоремы преобразования структурных схем

Преобразование	Первоначальная схема	Эквивалентная схема	Уравнение
1. Объединение последовательных блоков			$M_2 = M_1 G_1 G_2$
2. Преобразование цепи обратной связи			$M_2 = M_1 \frac{G}{1 \pm HG}$
3. Преобразование прямой цепи			$M_2 = M_1 (G_1 \pm G_2)$
4. Преобразование одного блока из цепи обратной связи			$M_2 = M_1 \left(\frac{G}{1 \pm HG} \right)$
5. Преобразование блока из прямой цепи			$M_2 = M_1 (G_1 \pm G_2)$
6. Перемещение точки приема вперед блока			$M_2 = M_1 G$
7. Перемещение точки приема позади блока			$M_2 = M_1 G$
8. Перемещение суммирующей точки впереди блока			$M_2 = M_1 G \pm M_3$
9. Перемещение суммирующей точки позади блока			$M_2 = [M_1 \pm M_3] G$
10. Перемещение приемной точки впереди суммирующей точки			$M_2 = M_1 \pm M_3$
11. Перемещение приемной точки позади суммирующей точки			$M_2 = M_1 \pm M_3$
12. Перемещение суммирующих точек			$M_2 = M_1 \pm M_3 \pm M_4$

таблицы особенно полезна для случая, когда $H(s)$ имеет постоянное значение, благодаря чему система с обратной связью сводится к эквивалентной системе, содержащей единичную обратную связь. Пункты 9—12 рассматриваемой таблицы содержат некоторые преобразования структурных схем, когда многоцепочечные системы сводятся к более простым формам. Читатель может сам проверить эквивалентность этих преобразований. Важно заметить, что эквивалентные схемы просто получаются из измененной формы уравнения, связывающего входную и выходную величины первоначальной структурной схемы.

При наличии нескольких входных величин можно каждую из них рассматривать независимо от остальных. Знаки в любой суммирующей точке соответствуют тому, как та или иная входная величина вводится в систему. Путем суперпозиции отдельные выходные величины, обусловленные каждой своим входным сигналом, складываются для получения общей выходной величины, когда все входные сигналы действуют одновременно. Для примера рассмотрим систему с несколькими входными звеньями, изображенную на фиг. 4.3, а. Особое внимание следует обратить на знаки в суммирующих точках. Они определяют следующие зависимости:

$$E_1(s) = R_1(s) - B(s);$$

$$E_2(s) = M_1(s) + R_2(s);$$

$$E_3(s) = M_2(s) - R_3(s).$$

Для определения той или иной выходной величины, обусловленной каждым входным сигналом, схема на фиг. 4.3, а перечерчена на фиг. 4.3, б—г для каждого входного сигнала отдельно. Применяя формулы преобразования структурной схемы, приведенные в таблице, можно написать следующие передаточные функции для схемы фиг. 4.3, б—г:

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + H G_1 G_2 G_3};$$

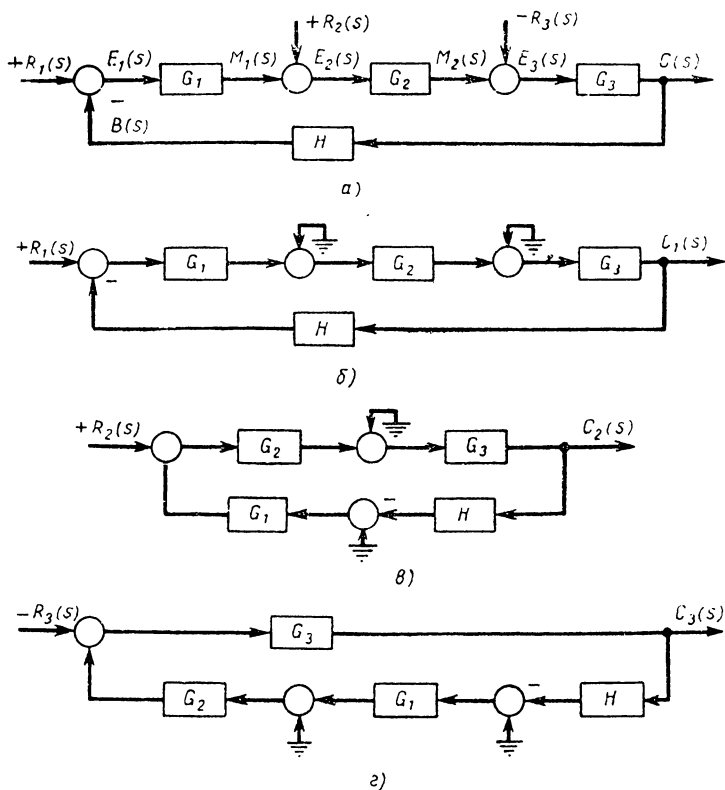
$$\frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_2 G_3}{1 + H G_1 G_2 G_3};$$

$$\frac{C_3(s)}{R_3(s)} = \frac{-G_3}{1 + H G_1 G_2 G_3}.$$

Знаменатели каждого из этих выражений должны быть одинаковы. Это справедливо, так как после приравнивания нулю каждого знаменателя, он становится характеристическим уравнением для данной системы и последняя является независимой для любого входного сигнала. Когда все входные сигналы действуют одновременно, то выходная величина будет определяться выражением

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) + C_3(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 R_1(s) + G_2 G_3 R_2(s) - G_3 R_3(s)}{1 + H G_1 G_2 G_3}.$$

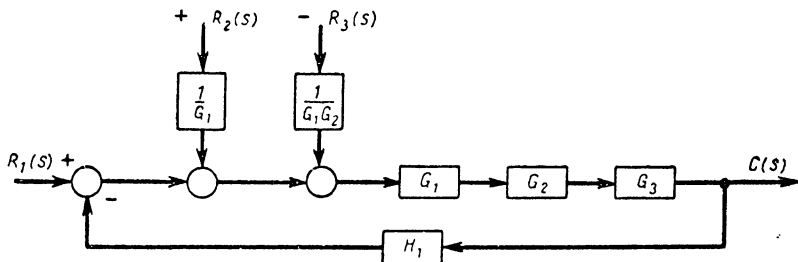
Тот же результат может быть получен другим путем при рассмотрении фиг. 4. 4, на которой изображена преобразованная схема фиг. 4. 3, причем суммирующие точки были перемещены впереди блоков с передаточными функциями G_1 , G_2 , G_3 в соответствии с пунктом 8 табл. 4. 1. Схема фиг. 4. 4 позволяет сделать интересный вывод о том, что каждый вход может быть преобразован в эквива-



Фиг. 4. 3. Порядок преобразования системы с несколькими входами:
 а — система с несколькими входами; б — система с одним входом $R_1(s)$; в — система только с одним входом $R_2(s)$; г — система только с одним входом $R_3(s)$.

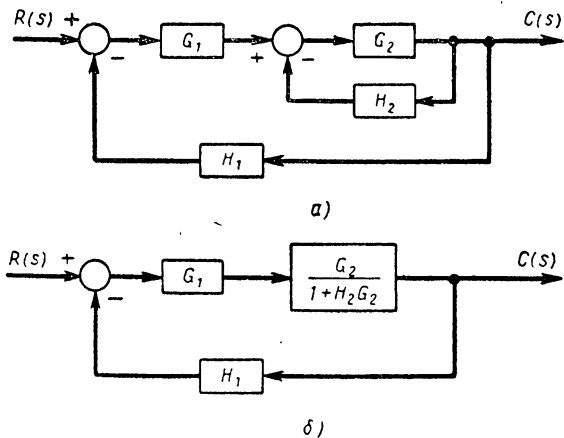
лентный вход при R_1 . Для получения эквивалентного входного сигнала первоначальный сигнал был умножен на обратные значения коэффициентов прямой передачи, которые имеют место в прямой цепи передачи от R_1 до рассматриваемого входного звена. Этот вывод полезен для сравнения влияний сигналов помех, возникающих в разных точках системы. Если G_2 — постоянный коэффициент усиления и $R_2(s)$ и $R_3(s)$ — равные входные сигналы помех, то отсюда следует, что величина помех на выходе, обусловленных $R_3(s)$, в $1/G_2$ раз больше выходного сигнала, обусловленного $R_2(s)$.

Другой пример преобразования структурной схемы показан на фиг. 4. 5. Здесь правило пункта 2 табл. 4. 1 применено для устранения одной цепи обратной связи на схеме. Примененный порядок



Фиг. 4. 4. Эквивалентная структурная схема системы, изображенной на фиг. 4. 3.

очевиден из схемы. На фиг. 4. 6 показан другой способ преобразования той же структурной схемы на фиг. 4. 5, а. Сравнение фиг. 4. 5, а и 4. 6, б показывает, что в первой схеме преобладает $H_1(s)$, а во вто-



Фиг. 4. 5. Порядок преобразования многозвенной системы; отделение $H_1(s)$:

а — первоначальная схема; б — устранение внутренней цепи обратной связи.

ром случае преобладает $H_2(s)$. Польза от этого преобразования видна при рассмотрении передаточных функций разомкнутой цепи в обоих случаях.

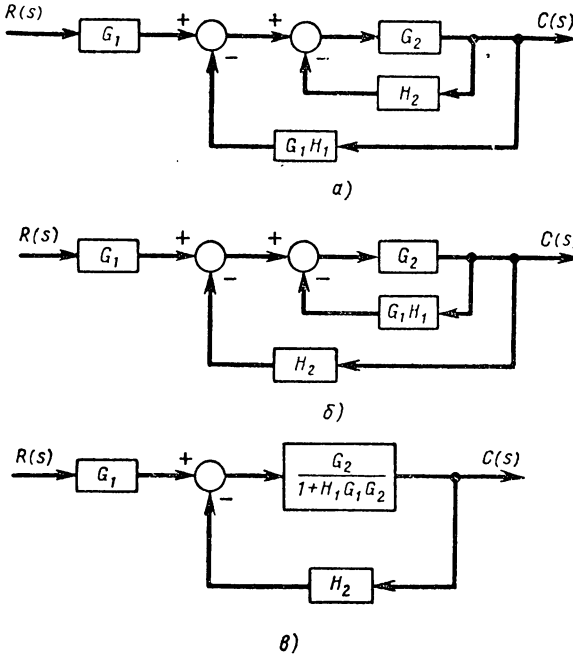
Передаточная функция цепи на фиг. 4. 5, б определяется выражением:

$$\text{передаточная функция разомкнутой цепи} = \frac{G_1 G_2 H_1}{1 + H_2 G_2}. \quad (4. 7a)$$

Передаточная функция цепи на фиг. 4. 6, в определяется выражением:

$$\text{передаточная функция разомкнутой цепи} = \frac{G_2 H_2}{1 + H_1 G_1 G_2}. \quad (4. 76)$$

Сравнение уравнений (4. 7а) и (4. 7б) показывает, что в первом случае изолирована величина H_1 , а во втором случае изолирована



Фиг. 4. 6. Альтернативный метод преобразования системы, изображенной на фиг. 4. 5, а; отделение $H_2(s)$:

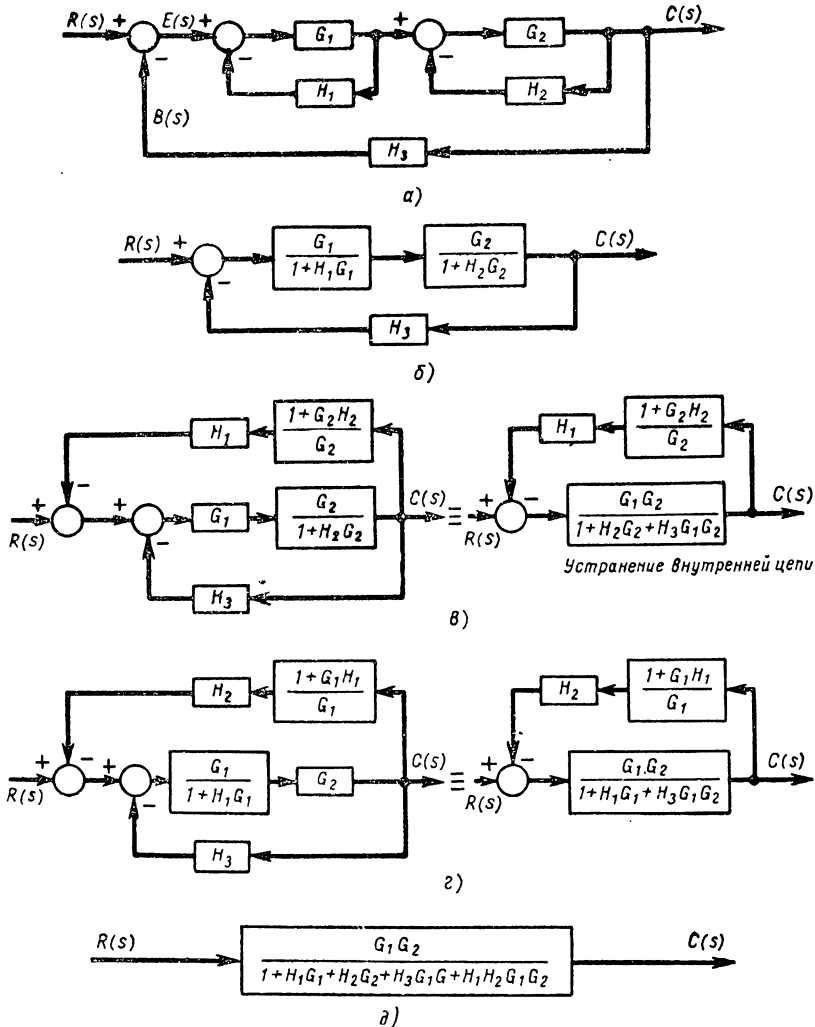
а — перемещение первой суммирующей точки позади G_1 ;
 б — взаимная замена суммирующих точек; в — устранение внутренней цепи обратной связи.

величина H_2 . Конечно, характеристическое уравнение в обоих случаях одинаково и получается в результате приравнивания нулю суммы из 1 плюс передаточная функция разомкнутой цепи. Это дает выражение

$$1 + H_1 G_1 G_2 + H_2 G_2 = 0. \quad (4. 7в)$$

Аналогично передаточная функция замкнутой цепи в обоих случаях сводится к такой же зависимости, а именно:

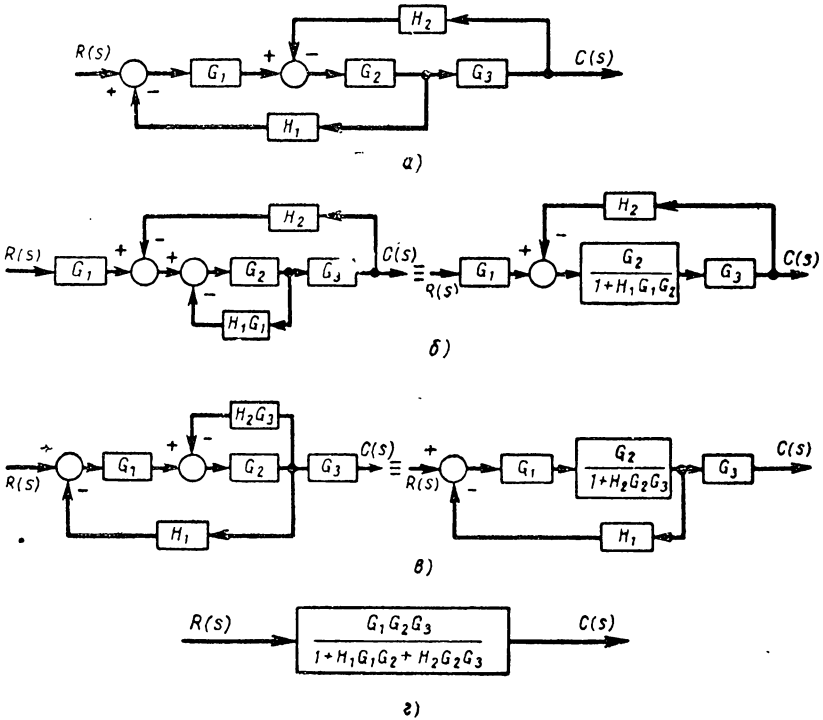
$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + H_1 G_1 G_2 + H_2 G_2}. \quad (4. 7г)$$



Фиг. 4.7. Пример преобразования структурной схемы системы с тремя цепями:

а — первоначальная блок-схема; б — отделение H_3 ; в — отделение H_1 ; устранение второй внутренней цепи обратной связи, сдвиг точки срабатывания для H_1 и взаимная замена суммирующих точек; г — отделение H_2 ; устранение первой внутренней цепи обратной связи, сдвиг суммирующей точки для H_2 и взаимная замена суммирующих точек; д — передаточная функция замкнутой цепи.

На фиг. 4. 7 показано преобразование структурной схемы системы с тремя цепями для выделения звеньев H_1 , H_2 и H_3 . Другой пример альтернативного способа преобразования многоконтурной системы показан на фиг. 4. 8.



Фиг. 4. 8. Пример преобразования структурной схемы:

а — первоначальная структурная схема; б — отделение H_2 ; перемещение суммирующей точки для H_3 позади G_1 , взаимная замена суммирующих точек и устранение внутренней цепи обратной связи; в — отделение H_1 ; перемещение точки срабатывания для H_2 впереди G_3 и устранение внутренней цепи; г — передаточная функция замкнутой цепи.

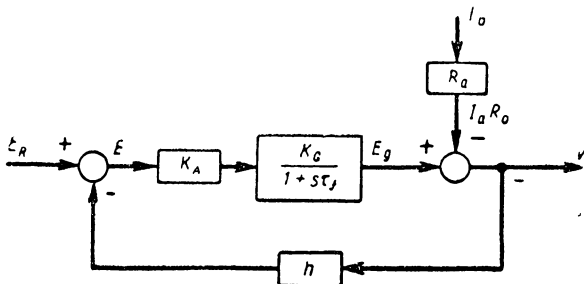
4. 3. ПРИМЕРЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМ

В настоящем разделе исследуются передаточные функции некоторых систем с целью показать применение методики структурных схем.

Элементарная система регулирования напряжения. Рассмотрим первоначально элементарную систему регулирования напряжения. Несмотря на простоту, этот пример позволяет иллюстрировать методику построения структурной схемы и легкость получения результатов. Структурная схема системы показана на фиг. 4. 9 с указанием всех величин. Таким образом, E_R и hV (напряжение обратной связи) подводится к суммирующей точке со знаками, определяющими напряжение ошибки E . Последнее после умножения на коэффи-

коэффициент усиления K_A усилителя дает напряжение, приложенное к обмотке возбуждения генератора. Передаточная функция между приложенным напряжением возбуждения и наведенной э. д. с. генератора имеет форму $\frac{K_G}{(1 + s\tau_f)}$, где K_G представляет постоянное число, $\tau_f = \frac{L_f}{R_f}$ — постоянная времени обмотки возбуждения. Эта передаточная функция показана во втором блоке прямой цепи передачи. Остальная часть схемы выражается уравнением, которое определяет напряжение V на зажимах через наведенную э. д. с. E_G генератора и его внутреннее падение напряжения $I_a R_a$, а именно:

$$V = E_G - I_a R_a. \quad (4.8)$$



Фиг. 4. 9. Структурная схема элементарного регулятора напряжения.

Цепь обратной связи замыкается в результате возвращения V к первой суммирующей точке с умножением на коэффициент h обратной связи. Преобразование схемы на фиг. 4. 9, как системы с несколькими входами, дает следующий результат для окончательного напряжения

$$V = \frac{E_R K_A K_G - I_a R_a (1 + s\tau_f)}{1 + K_A K_G h + s\tau_f}. \quad (4.9)$$

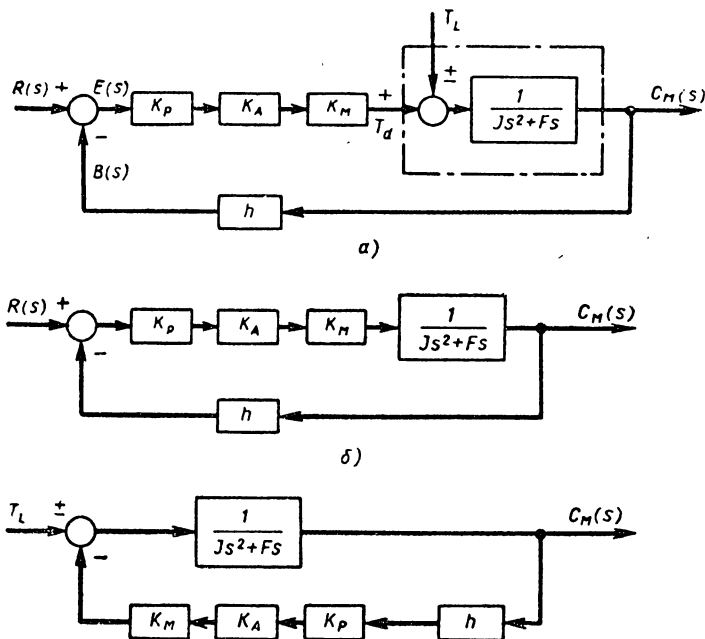
Это уравнение совпадает с результатами классического решения дифференциального уравнения, за исключением того, что здесь была учтена передаточная функция обмотки возбуждения. Теперь уравнение (4. 9) можно преобразовать во временную область для изучения его как дифференциального уравнения, или в частотную область для изучения частотных характеристик.

Элементарный сервомеханизм. Рассмотрим второй пример сервомеханизма, изображенного на фиг. 1. 1. Все обозначения были определены в разделе 1. 1. Структурная схема на фиг. 4. 10, *a* одинакова со схемой системы на фиг. 1. 1, за исключением двигателя и нагрузки. На фиг. 4. 10, *a* двигатель и нагрузка объединены в один блок с одной передаточной функцией, причем все величины отнесены к валу двигателя. Возмущающие влияния внешней нагрузки T_L были учтены посредством второй суммирующей точки. Входная величина T_L снабжена знаками \pm , что зависит от направления ее действия а именно: в одном или во встречном направлении момента T_d ,

развиваемого двигателем. На фиг. 4. 10, б, в показаны структурные схемы только с входами $R(s)$ и T_L . Уравнения для углового выходного перемещения двигателя при наличии обоих входных сигналов дается выражением

$$C_M(s) = \frac{K_P K_A K_M R(s) \pm T_L}{Js^2 + Fs + K_P K_A K_M h} \quad (4. 10)$$

(читатель можем сам придти к этому выводу, обратив особое внимание на знаки \pm у величины T_L).



Фиг. 4. 10. Структурная схема сервомеханизма: $C_M(s)$ — выходная функция:

а — первоначальная система; б — система только с одним входом $R(s)$;
в — система только с одним входом T_L .

Полученный результат может быть переписан в виде дифференциального уравнения

$$J \frac{d^2 \theta_M}{dt^2} + F \frac{d \theta_M}{dt} + h K_P K_A K_M \theta_M = K_P K_A K_M r \pm T_L. \quad (4. 11)$$

Уравнение, связывающее сигнал рассогласования с двумя входными величинами, может быть также получено путем преобразования структурной схемы. Для этой цели схема на фиг. 4. 10, а перечерчена на фиг. 4. 11. Когда единственным входом служит только $R(s)$, то $E(s)$ определяется уравнением

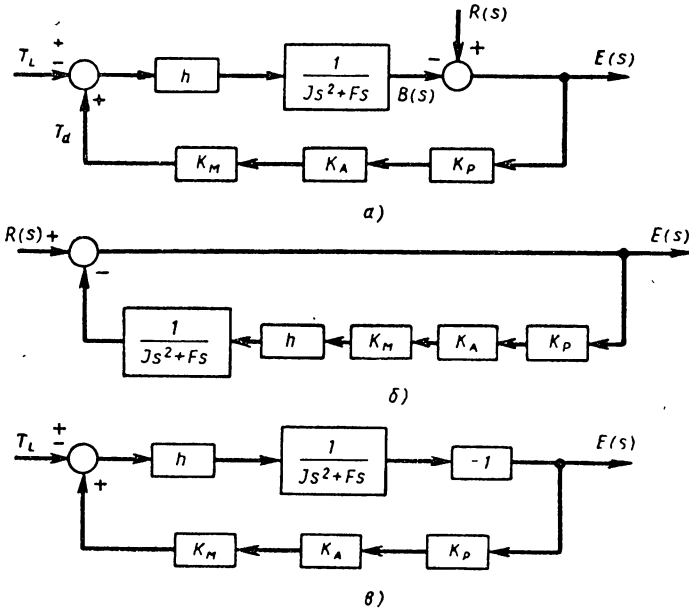
$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + \frac{K_A K_P K_M h}{(Js^2 + Fs)}}. \quad (4. 12a)$$

Когда единственным входом является T_L , то $E(s)$ определяется

$$E(s) = \frac{- \left[\frac{h}{(Js^2 + Fs)} \right] (\pm T_L)}{1 + \frac{K_A K_P K_M h}{(Js^2 + Fs)}}. \quad (4.126)$$

Наложение этих двух величин друг на друга и преобразование дробей приводит к следующему уравнению:

$$(Js^2 + Fs + K_P K_A K_M h) E(s) = (Js^2 + Fs) R(s) - (\pm T_L) h. \quad (4.13)$$



Фиг. 4.11. Структурная схема сервомеханизма:

$E(s)$ — выходная функция; а — первоначальная система; б — система только с одним входом $R(s)$; в — система только с одним входом T_L .

Выражение (4.13) может быть переписано в виде дифференциального уравнения

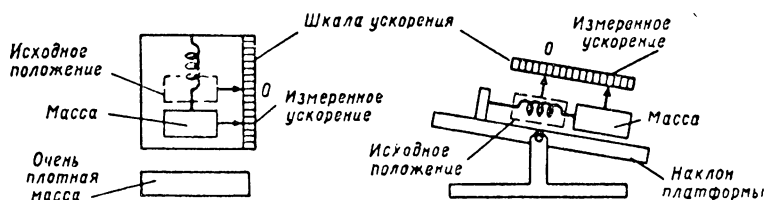
$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d\varepsilon}{dt} + K_P K_A K_M h \varepsilon = J \frac{d^2 r}{dt^2} + F \frac{dr}{dt} - h (\pm T_L). \quad (4.14a)$$

Для сравнения этого результата с уравнением (1.11) следует напомнить, что в главе 1 T_L был принят за противодействующий момент (противоположный T_d), так что в данном случае T_L имеет отрицательное значение в уравнении (4.14) и оно приобретает окончательную форму

$$J \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + F \frac{d\varepsilon}{dt} + K_P K_A K_M h \varepsilon = J \frac{d^2 r}{dt^2} + F \frac{dr}{dt} + h T_L. \quad (4.14б)$$

Инерциальная система навигации. Рассмотрим, наконец, пример инерциальной системы навигации. Этот случай представляет интерес с точки зрения применения многоконтурной системы и иллюстрирует возможность использования структурных схем для анализа сложной проблемы.

Инерциальная система является полностью автономной, для которой не требуется внешняя навигационная информация для определения местоположения. В инерциальной системе вычисление координат местоположения производится на основе измерения ускорения летательного аппарата относительно инерциального пространства. Любое перемещение относительно инерциального пространства измеряется акселерометрами, которые обнаруживают ускорение летательного аппарата. Выходные сигналы этих акселеро-



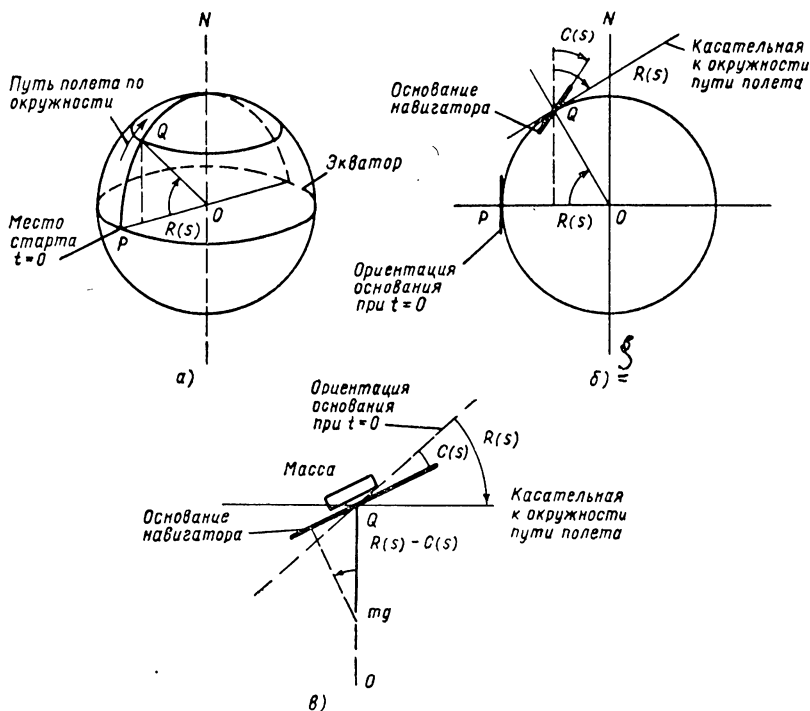
Фиг. 4. 12. Сила притяжения и ускорение.

метров дважды интегрируются с момента времени $t = 0$ для определения пройденного пути по направлению, в котором измерялось ускорение. Для самолетов и управляемых снарядов обычно требуется три акселерометра: один для определения ускорения север—юг, другой — для определения ускорения запад—восток и третий — для определения перемещения вверх и вниз. Для навигации по сферической поверхности требуются только два акселерометра. Северно-южный и западно-восточный акселерометры обычно спариваются в начале полета. Чтобы система работала надежно, необходимо сохранять ее ориентацию, несмотря на маневрирование летательного аппарата. Следовательно, акселерометры должны быть смонтированы на стабилизированной платформе, которая сохраняет свое положение относительно стран света. Другое затруднение возникает вследствие того, что акселерометры не могут различать между ускорениями летательного аппарата и земным ускорением (фиг. 4. 12). Поэтому во время движения летательного аппарата вокруг земной поверхности необходимо поддерживать плоскость стабилизированной платформы так, чтобы она всегда была касательной к земному шару, т. е. перпендикулярна к направлению силы тяжести. Любой наклон платформы вызывает увеличение выходного сигнала акселерометра, что ошибочно интерпретируется как ускорение летательного аппарата. Для построения структурной схемы инерциальной навигационной системы рассмотрим простой случай полета по окружности

большого круга вокруг неподвижного шара от экватора к северному полюсу вдоль линии постоянной долготы¹.

Согласно фиг. 4.13 определим следующие величины:

$R(s)$ — входной угол, радианы широты, под которым летательный аппарат летел, когда $t = 0$. $R(s)$ — входной сигнал системы;



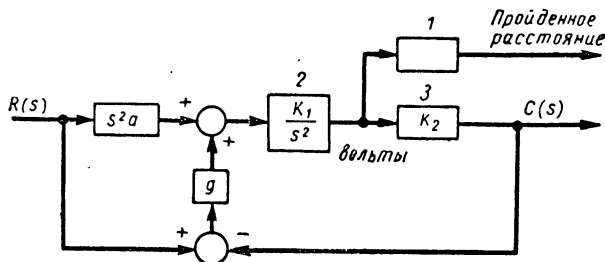
Фиг. 4.13. Поведение инерциальной системы навигации при полете по окружности большого круга неподвижного шара вдоль линии постоянной долготы (по меридиану) от экватора к северному полюсу:

a — путь полета; b — части пути полета; $в$ — соотношение условий на основании инерционного навигатора.

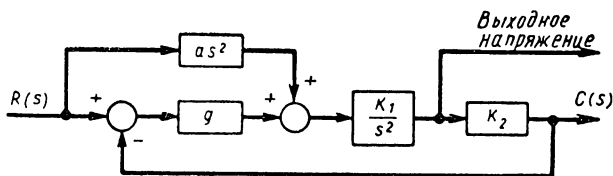
$C(s)$ — угол относительно оси запад—восток (в радианах), на который поворачивается стабилизированная платформа по время полета. $C(s)$ измеряется относительно первоначальной ориентации при $t = 0$, т. е. касательно к земному шару на экваторе. Если в любой момент $C(s) = R(s)$, то платформа остается касательной к сферической поверхности полета и акселерометры будут правильно измерять ускорения летательного аппарата;

¹ При этом способе можно пренебречь влиянием вращения земли, если рассматривать только северно-южный акселерометр. Результаты, полученные в этом разделе, имеют совершенно общее значение, несмотря на эти упрощения.

- a — радиус сферической поверхности полета. Обычно a принимается равным радиусу земного шара;
- K_1/s^2 — передаточная функция акселерометра северо-южного направления и интеграторов; K_1 измеряется в v/m , так что выходная величина интегратора с акселерометром получается в v , когда входное ускорение измеряется в $m/сек^2$;
- K_2 — передаточная функция остальной части системы, которая действует на вращение платформы вокруг оси восток — запад на угол K_2 радиан на каждый вольт входного напряжения, поступающего от северо-южного акселерометра с интегратором. Таким образом K_2 имеет размерность $рад/в$.



а)



б)

Фиг. 4. 14. Структурная схема инерциальной системы управления:

a — основная система; b — перестроенная блок-схема: 1 — масштабный фактор; 2 — интегратор; 3 — вычислительное устройство, гироскоп и двигатели.

Структурная схема этой системы показана на фиг. 4. 14. У группы из акселерометра и интегратора имеются два входа.

1. Истинное ускорение летательного аппарата, определяемое формулой $a [s^2 R(s)]$, где $s^2 R(s)$ — угловое ускорение летательного аппарата, обусловленное его полетом $R(s)$. Коэффициент a преобразует это угловое ускорение в линейное ускорение.

2. Ускорение, вызванное земным притяжением, определяется выражением $g [R(s) - C(s)]$. Угол $[R(s) - C(s)]$ определяет наклон платформы акселерометра относительно касательной плоскости к сферической поверхности полета (см. фиг. 4. 13, в). Вследствие этого наклона увеличивается компонент земного притяжения $mg \sin [R(s) - C(s)] \approx mg [R(s) - C(s)]$, который действует на массу m акселерометра и создает выходной сигнал. Этот компо-

нент выходного сигнала ошибочно воспринимается как сигнал линейного ускорения летательного аппарата с величиной, равной $g [R(s) - C(s)]$.

Два упомянутых выше входных сигнала действуют на группу из акселерометра и интегратора для создания выходного напряжения, как это показано на схеме. Остальная часть системы выражается передаточной функцией K_2 , где преобразуется выходная величина группы акселерометра с интегратором в поворот платформы $C(s)$ в рад. Блок K_2 физически содержит вычислительное устройство, гироскопы и двигатели стабилизированной платформы. Отсюда очевидно, что коэффициент K_2 представляет упрощенную передаточную функцию.

Передаточную функцию между $C(s)$ и $R(s)$ можно получить путем преобразования структурной схемы. На фиг. 4. 14, б показана видоизмененная схема, которая облегчает эту операцию преобразования. Преобразование схемы приводит к следующему результату:

$$C(s) = \frac{R(s)K_1K_2(as^2 + g)}{s^2 + gK_1K_2}. \quad (4. 15)$$

Для работы системы в качестве навигационного прибора необходимо соблюсти равенство $G(s) = R(s)$.

Изучение уравнения (4. 15) позволяет установить, что оно справедливо, когда $^1 K_1K_2a = 1$, т. е. тогда, когда K_1K_2 равно $\frac{1}{a}$, иначе говоря, обратному значению радиуса земли. При этих условиях характеристическое уравнение системы может быть написано в виде

$$s^2 + gK_1K_2 = s^2 + \frac{g}{a} = 0. \quad (4. 16)$$

Корни этого уравнения расположены при $s = \pm j\sqrt{\frac{g}{a}}$, причем уравнение (4. 17) определяет реакцию системы на возмущения начальными условиями

$$c(t) \Big|_{\text{(без источника)}} = A \sin \left(\sqrt{\frac{g}{a}} t + B \right), \quad (4. 17)$$

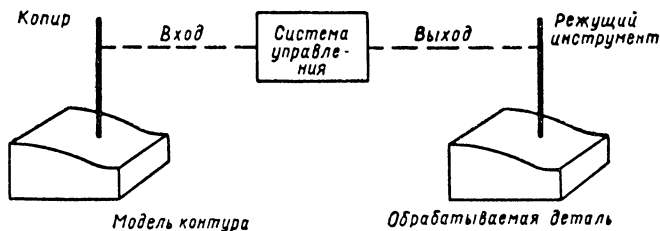
где A и B — постоянные, определяемые по начальным условиям. Эта реакция представляет незатухающие синусоидальные колебания с периодом $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ сек. Подстановка числовых значений для a , g дает период, равный 84,4 мин. Поэтому платформа имеет тенденцию колебаться, как 84,4-минутный недемпфированный маятник. Длина подобного маятника равна a , т. е. радиусу земли. Интересно отметить, что реакция платформы имеет действительно чисто синусоидальную форму с периодом 84 мин. В действительности существует только один способ демпфирования этой системы, состоящий во введении дополнительных навигационных данных из постороннего

¹ Условие невозмущаемости Ма Шулера. (Прим. ред.)

источника. Колебания инерциальной системы приводят к появлению навигационной ошибки, которая изменяется с периодом 84 мин. К счастью, эти ошибки ограничены по величине и практически их можно удержать на малом уровне.

4. 4. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОШИБОК

Все системы управления можно классифицировать в соответствии с их способностью следовать за входными командами, как-то: ступенчатыми, кусочно-линейными, параболическими и др. в установившемся режиме. Эта классификация приобретает значение предельного критерия, которое определяет характеристику конечного состояния системы. Каждый упомянутый входной сигнал представляет интеграл предыдущего сигнала и системе будет более трудно следить за ним. Рассмотрим, например, автоматически управляемый станок для обработки контура, когда движение режущего инструмента



Фиг. 4. 15. Схема устройства для обработки по копиру.

копирует движение входного копира, который описывает контур по шаблону (фиг. 4. 15). Минимальным требованием является способность режущего инструмента следовать с постоянной скоростью за движением входного копира при нулевой ошибке между положением режущего инструмента и положением копира. Однако характеристика системы ограничена ее способностью следовать за входными сигналами более высокого порядка при нулевой ошибке положения. В противоположность этому рассмотрим простую систему управления, используемую для воспроизведения постоянной установки входной шкалы при дистанционном управлении. Эта система должна только воспроизвести постоянное угловое положение входной шкалы при нулевой ошибке положения и к ней не предъявляется требование о какой-либо установившейся скорости.

Теорема о конечном значении преобразования Лапласа дает удобный способ изучения частотной характеристики любой системы при разных входных сигналах. Рассмотрим основную систему с обратной связью на фиг. 4. 1. Зависимость между входной командой и сигналом рассогласования определяется выражением

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + HG(s)}. \quad (4. 18)$$

Установившееся состояние определяется условием, когда $t \rightarrow \infty$. Следовательно, применив теорему о конечном значении, получим, что сигнал рассогласования в установившемся режиме будет определяться уравнением

$$\varepsilon(t) \Big|_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + HG(s)}. \quad (4.19)$$

Следующие виды входных функций представляют интерес:

1. Единичная (ступенчатая) функция $r(t) = r_0 u(t)$, следовательно, $R(s) = \frac{r_0}{s}$.

2. Кусочно-линейная функция $r(t) = r_1 t u(t)$, следовательно, $R(s) = \frac{r_1}{s^2}$.

3. Параболическая функция $r(t) = \frac{1}{2} r_2 t^2 u(t)$, следовательно, $R(s) = \frac{r_2}{s^3}$.

Передаточная функция разомкнутой цепи по предположению известна и имеет следующий вид:

$$HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a) \cdots [(s\tau_{nb})^2 + 2\zeta_b \tau_{nb} s + 1]}{s^N (1 + s\tau_1) \cdots [(s\tau_{n2})^2 + 2\zeta_2 \tau_{n2} s + 1]}. \quad (4.20)$$

В уравнении (4.20) K представляет постоянный коэффициент усиления, а члены в скобках представляют линейные и квадратные множители. Член s^N в знаменателе представляет полюс порядка N в начале координат, когда $s = 0$. Для классификации систем используется показатель степени N . Следовательно, система класса 0 имеет передаточную функцию разомкнутой цепи согласно уравнению (4.20) при $N = 0$. Система класса 1 имеет $N = 1$, система класса 2 — соответственно $N = 2$, система класса 3 аналогично $N = 3$ и т. д. Читатель должен обратить внимание на то, что классификация систем отличается от порядка системы. Последний относится к порядку дифференциального уравнения, описывающего работу системы. Классификация систем относится к порядку полюсов передаточной функции разомкнутой цепи при $r = 0$, т. е. он зависит от числа идеальных интегрирующих звеньев, которыми обладает система.

Рассмотрим сигнал рассогласования в установившемся режиме для каждого класса системы при трех входных функциях, а именно: единичная (ступенчатая), кусочно-линейная и параболическая. Начнем с единичной входной функции $R(s) = \frac{r_0}{s}$. Сигнал рассогласования в установившемся режиме обозначим ε_{ss} , который определяется следующим уравнением:

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{r_0}{s} \right) \frac{1}{1 + HG(s)} = \frac{r_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} HG(s)} = \frac{r_0}{1 + K_p}. \quad (4.21a)$$

Величина K_p известна как коэффициент ошибки по положению и определяется выражением

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} HG(s). \quad (4.21б)$$

Подстановка значения $HG(s)$ для разных классов систем в уравнение (4.21б) дает величину K_p для каждого случая. Следовательно, для системы класса 0

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{(1 + s\tau_1) \dots} = K. \quad (4.21в)$$

Для системы класса N , когда $N > 0$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{s^N(1 + s\tau_1) \dots} = \infty. \quad (4.21г)$$

Подстановка соответствующего значения K_p в уравнение (4.21а) дает следующие результаты для сигнала рассогласования в установившемся режиме при единичной входной функции, а именно: класс 0

$$\epsilon_{ss} = \frac{r_0}{1 + K}. \quad (4.21д)$$

Для системы класса N , когда $N > 0$

$$\epsilon_{ss} = 0. \quad (4.21е)$$

Теперь рассмотрим случай кусочно-линейной функции $R(s) = \frac{r_1}{s^2}$. Сигнал рассогласования в установившемся режиме обозначим также ϵ_{ss} , причем он определяется уравнением

$$\epsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{r_1}{s^2} \right)}{1 + HG(s)} = \frac{r_1}{\lim_{s \rightarrow 0} sHG(s)} = \frac{r_1}{K_v}. \quad (4.22а)$$

Величина K_v известна как коэффициент ошибки по скорости и определяется выражением

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sHG(s). \quad (4.22б)$$

Подстановка значения $HG(s)$ для разных классов систем в уравнение (4.22б) дает величину K_v для каждого случая. Следовательно, для системы класса 0

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{(1 + s\tau_1) \dots} = 0; \quad (4.22в)$$

для системы класса 1

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{s(1 + s\tau_1) \dots} = K; \quad (4.22г)$$

для системы класса N , когда $N > 1$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(1 + s\tau_a) \cdots}{s^N(1 + s\tau_1) \cdots} = \infty. \quad (4.22d)$$

Подстановка этих значений K_v в уравнение (4.22a) приводит к следующим результатам для сигнала рассогласования в установившемся режиме для случая кусочно-линейной входной функции: для системы класса 0

$$e_{ss} \rightarrow \infty; \quad (4.22e)$$

для системы класса 1

$$e_{ss} = \frac{r_1}{K}, \quad (4.22ж)$$

для системы класса N , когда $N > 1$

$$e_{ss} = 0. \quad (4.22и)$$

Из уравнения (4.22e) следует, что система класса 0 требует бесконечно большого сигнала рассогласования, чтобы следовать за входной кусочно-линейной функцией в установившемся режиме. Другими словами, система класса 0 не в состоянии реагировать на кусочно-линейную входную функцию в установившемся состоянии. С другой стороны, система класса 1 может реагировать на входную кусочно-линейную функцию при бесконечном значении сигнала рассогласования, а системы класса 2 и более высокого порядка могут реагировать на кусочно-линейную входную функцию при нулевом сигнале рассогласования. Физическое объяснение этого явления будет дано позднее.

Наконец, рассмотрим параболический входной сигнал $R(s) = \frac{r_2}{s^3}$. Сигнал рассогласования в установившемся режиме вновь обозначим e_{ss} , который определяется уравнением

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{r_2}{s^3} \right)}{1 + HG(s)} = \frac{r_2}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 HG(s)} = \frac{r_2}{K_a}. \quad (4.23a)$$

K_a известен как коэффициент ошибки по ускорению, который определяется выражением

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 HG(s). \quad (4.23б)$$

Подстановка значения $HG(s)$ для разных классов систем в уравнение (4.23б) дает величину K_a для каждого случая: для системы класса 0

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(1 + s\tau_a) \cdots}{(1 + s\tau_1) \cdots} = 0; \quad (4.23в)$$

для системы класса 1

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(1 + s\tau_a) \cdots}{s(1 + s\tau_1) \cdots} = 0; \quad (4.23г)$$

для системы класса 2

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(1 + s\tau_a) \cdots}{s^2(1 + s\tau_1) \cdots} = K; \quad (4.23д)$$

для системы класса N , когда $N > 2$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(1 + s\tau_a) \cdots}{s^N(1 + s\tau_1) \cdots} = \infty. \quad (4.23е)$$

Подстановка этих значений K_a в уравнение (4.23а) приводит к следующим результатам для сигнала рассогласования в установившемся режиме при параболической входной функции:
для систем класса 0 и 1

$$e_{ss} \rightarrow \infty; \quad (4.23ж)$$

для систем класса 2

$$e_{ss} = \frac{r_2}{K}. \quad (4.23и)$$

для систем класса N , когда $N > 2$

$$e_{ss} = 0. \quad (4.23к)$$

Из уравнения (4.23ж) вытекает, что обе системы класса 0 и 1 не в состоянии реагировать на параболическую входную функцию в установившемся режиме без статической ошибки. Система класса 2 может следить за параболической входной функцией при конечном значении сигнала рассогласования, в то время как системы класса 3 и выше требуют нулевого значения сигнала рассогласования.

В табл. 4.2 приведены для сравнения предыдущие результаты. Изучение этой таблицы позволяет установить общую картину, так что читатель может распространить эти результаты на другие системы при разных входных функциях. В каждом случае сигнал рассогласования в установившемся состоянии может быть равен нулю, конечному значению, обратно пропорционально постоянному коэффициенту усиления K или бесконечному значению при тех или иных входных функциях. Как упоминалось выше, бесконечно большой сигнал рассогласования невозможно создать, так что система не может реагировать на подобные входные функции в установившемся состоянии.

Важно подчеркнуть, что результаты, приведенные в табл. 4.2, являются общими и поэтому применимы к любому классу систем. Единичная, кусочно-линейная и параболическая входные функции соответствуют командам, которые вызывают соответствующие изменения регулируемой переменной величины, независимо от ее частной

Определение установившегося сигнала рассогласования ϵ_{ss} для систем разного класса при разных входных функциях

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} HG(s) \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sHG(s) \quad K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2HG(s)$$

Класс системы	Единичная входная функция	Кусочно-линейная входная функция	Параболическая входная функция
Класс 0 $N = 0$ $HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{(1 + s\tau_1) \dots}$	$r(t) = r_0 u(t); R(s) = \frac{r_0}{s}$	$r(t) = r_1 t u(t); R(s) = \frac{r_1}{s^2}$	$r(t) = \frac{1}{2} r_2 t^2 u(t); R(s) = \frac{r_2}{s^3}$
Класс 1 $N = 1$ $HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{s(1 + s\tau_1) \dots}$	Ступенчатая выходная функция при постоянном сигнале рассогласования $\epsilon_{ss} = \frac{r_0}{1 + K_p} = \frac{r_0}{1 + K}$	Сигнал рассогласования возрастает со временем	Сигнал рассогласования возрастает со временем
Класс 2 $N = 2$ $HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{s^2(1 + s\tau_1) \dots}$	Ступенчатая выходная функция при нулевом сигнале рассогласования	Кусочно-линейная выходная функция при постоянном сигнале рассогласования $\epsilon_{ss} = \frac{r_1}{K_v} = \frac{r_1}{K}$	Сигнал рассогласования возрастает со временем
Класс 3 $N = 3$ $HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a) \dots}{s^3(1 + s\tau_1) \dots}$	Ступенчатая выходная функция при нулевом сигнале рассогласования	Кусочно-линейная выходная функция при нулевом сигнале рассогласования	Параболическая выходная функция при постоянном сигнале рассогласования $\epsilon_{ss} = \frac{r_2}{K_a} = \frac{r_2}{K}$

формы. Например, если регулируемая переменная величина является механической (т. е. положение), то ступенчатая команда изменяет выходное положение. Однако, когда регулируемая переменная величина представляет скорость (см. задачу 4.6), тогда ступенчатая команда вызывает ступенчатые изменения скорости.

Аналогично, как и в первом случае, команды кусочно-линейной входной функции вызывают изменения регулируемой выходной величины в установившемся состоянии, которые имеют кусочно-линейный характер. В частности, кусочно-линейная функция положения представляет скорость. Во втором случае, когда регулируемой величиной является заданная скорость, то команда кусочно-линейного характера вызывает внезапные изменения скорости, представляющие собой ускорение. Эту отличительную особенность важно напомнить, когда регулируемая переменная величина не является механической. Приведем другой пример в виде системы регулирования давления. Кусочно-линейная команда обуславливает скачок регулируемой переменной величины, что представляет собой скорость изменения давления. В связи с этим следует указать, что наименование для коэффициентов ошибки является в действительности особым, потому что они дают правильное описание только в случае, когда системой управления с обратной связью является сервомеханизм. Конечно, коэффициенту ошибки по положению следовало бы дать более полное наименование, а именно — коэффициент ошибки при единичной (ступенчатой) функции. Аналогично коэффициент ошибки по скорости правильнее называть коэффициентом ошибки кусочно-линейной функции, а коэффициент ошибки по ускорению, соответственно коэффициентом ошибки по параболической входной функции.

Данные, приведенные в табл. 4.2, позволяют сделать несколько очень важных выводов, касающихся поведения системы в установившемся режиме, особенно тогда, когда коэффициент обратной связи имеет численно постоянное значение. Когда $H(s) = 1$, то сигнал рассогласования $E(s)$ является прямым мерилom рассогласования, т. е. ошибкой между входным и выходным сигналами. Когда $H(s) = h_0$ имеет постоянное значение, отличное от единицы, то система может быть сведена к эквивалентной схеме с единичной обратной связью, путем применения правила пункта 4 табл. 4.2.

Тогда следующие замечания можно сделать относительно ошибки между входной величиной, разделенной на h_0 , и выходной величиной.

Когда $H(s) = 1$, установившаяся ошибка при постоянной входной команде r_0 определяется $\frac{r_0}{(1 + K_p)}$. Для системы класса 0 K_p имеет конечное значение, в то время как для систем высшего порядка K_p бесконечно. Следовательно, если система реагирует на постоянную входную функцию с нулевой ошибкой, то она должна иметь по крайней мере класс 1 или выше.

Установившаяся ошибка при постоянной кусочно-линейной входной функции $r(t) = r_1 t$ определяется $\frac{r_1}{K_v}$, так что выходная величина $c_{ss}(t)$ в установившемся состоянии определяется формулой

$$c_{ss}(t) = r_1 t - \frac{r_1}{K_v}. \quad (4.24a)$$

Для системы класса 0 коэффициент K_v приближается к нулю, так что ошибка увеличивается со временем и выходная величина запаздывает все больше и больше относительно входной величины до тех пор, пока система не достигнет насыщения. Для системы класса 1 коэффициент K_v приближается к конечному значению, так что выходная величина запаздывает относительно входной на постоянное значение. Для этого частного случая уравнение (4.24a) будет

$$c_{ss}(t) = r_1 t - \frac{r_1}{K}. \quad (4.24b)$$

Следовательно, выходная величина в установившемся режиме будет иметь вид кусочно-линейной функции с одинаковым наклоном, как у входной функции, за исключением того, что она запаздывает в любой момент времени относительно входной кусочно-линейной функции на определенную величину, равную $\frac{r_1}{K}$. Для следящей системы класса 1 это означает, что система в установившемся режиме реагирует на постоянную входную скорость (кусочно-линейное изменение положения входа) с воспроизводством входной скорости на выходном валу, за исключением того, что угловое положение выходного вала запаздывает относительно входного вала на неизменный угол. Степень запаздывания по положению пропорциональна угловой скорости входного сигнала и обратно пропорциональна постоянному коэффициенту усиления K .

Для систем класса 2 и выше K_v имеет бесконечное значение, так что выходная величина в точности равна входной величине. Таким образом, следящие системы класса 2 и выше могут следовать за постоянной входной скоростью при нулевой ошибке по положению.

Когда входная команда имеет параболический характер $r(t) = \frac{1}{2} r_2 t^2$, то выходная величина в установившемся режиме определяется формулой

$$c_{ss}(t) = \frac{1}{2} r_2 t^2 - \frac{r_2}{K_a}. \quad (4.25)$$

Для систем класса 0 и 1 коэффициент K_a равняется нулю, так что выходная величина запаздывает все больше и больше относительно входной до тех пор, пока система не будет насыщена. С другой стороны, K_a приближается к конечному значению у систем класса 2, так что последняя может реагировать на параболическую входную функцию с постоянной ошибкой.

Для получения нулевой ошибки в установившемся режиме при параболической входной функции требуется система по крайней мере класса 3.

Из табл. 4. 2 следует, что станок для обработки по контуру должен иметь систему по крайней мере класса 2 для управления режущей головкой при постоянной скорости перемещения входного копира с нулевой ошибкой по положению. С другой стороны, для воспроизведения постоянной установки шкалы требуется система только класса 1 с целью иметь нулевую ошибку. Если постоянная ошибка может быть допущена, то система класса 0 приемлема при условии, что коэффициент усиления K достаточно большой, чтобы ошибка в установившемся режиме была незначительной. Конечно, слишком большое значение коэффициента усиления K может привести к трудностям в переходном процессе.

В качестве другого примера применения коэффициентов ошибки рассмотрим реакцию систем с единичной обратной связью классов 0, 1 и 2 в установившемся режиме на входную функцию в виде полинома

$$r(t) = r_0 + r_1 t + \frac{1}{2} r_2 t^2.$$

Путем наложения (суперпозиции) реакцию каждого члена можно рассматривать независимо и результаты складывать. Следовательно, используя данные табл. 4. 2, можно получить следующие результаты для ошибки в установившемся режиме.

Для системы класса 0

$$\varepsilon_{ss} = \frac{r_0}{1+K} + (\rightarrow \infty) + (\rightarrow \infty).$$

Первый член представляет ошибку установившегося состояния, обусловленную r_0 постоянной входной функцией, а два другие члена представляют ошибки установившегося состояния, обусловленные кусочно-линейной и параболической входными функциями. Следовательно, эта система будет запаздывать все больше и больше и при насыщении будет стремиться следовать за данной входной функцией.

Для системы класса 1

$$\varepsilon_{ss} = 0 + \frac{r_1}{K} + (\rightarrow \infty).$$

Первый член означает нулевую ошибку, обусловленную постоянной входной функцией r_0 . Второй член означает конечную ошибку, обусловленную кусочно-линейной входной функцией. Третий член представляет ошибку установившегося состояния, которая приближается к бесконечности вследствие параболической входной функции, так что система будет все больше и больше запаздывать, вплоть до наступления насыщения.

Для системы класса 2

$$\varepsilon_{ss} = 0 + 0 + \frac{r_2}{K}.$$

Первые два члена означают нулевую ошибку при постоянных и кусочно-линейных входных функциях. Последний член определяет конечную ошибку, обусловленную параболической входной функцией, ввиду того, что выходной сигнал равен входному минус ошибка, отсюда следует, что выходная величина в установившемся режиме определяется уравнением

$$c_{ss}(t) = r(t) - \varepsilon_{ss} = r_0 + r_1 t + \frac{1}{2} r_2 t^2 - \frac{r_2}{K}.$$

Таким образом система класса 2 будет реагировать на заданную входную функцию, за исключением того, что выходная величина будет запаздывать относительно входного сигнала на неизменную величину. Для следящих систем это означает, что здесь имеется неизменная ошибка по положению, обусловленная параболической входной функцией (постоянным ускорением).

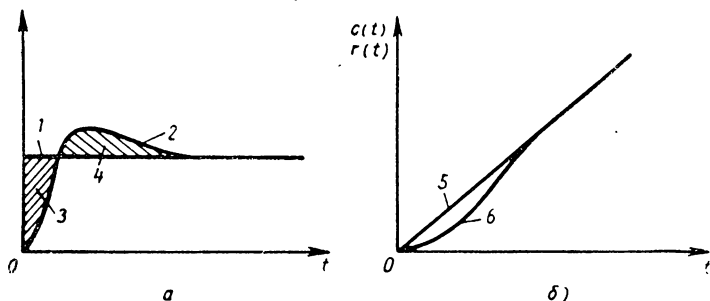
Совершенно ясно, что данные табл. 4. 2 можно использовать для определения реакции систем высшего порядка на входные функции полиноминого вида в установившемся режиме.

Результаты, приведенные в табл. 4. 2, позволяют интерпретировать физический смысл. Ввиду того, что коэффициент $\frac{1}{s}$ означает интегрирование, отсюда следует, что система класса 1 имеет однократное интегрирование в цепи, а система класса 2 осуществляет двойное интегрирование.

Изучение примеров в разделе 4. 3 позволяет заключить, что элементарный регулятор напряжения относится к системе класса 0. При постоянном выходном напряжении V всегда должен быть сигнал рассогласования и $V \neq E_R$. С другой стороны, следящая система может служить примером системы класса 1. Идеальное интегрирование имеет место вследствие передаточной функции серводвигателя и потому, что преобразователь обратной связи чувствителен к угловому положению вала двигателя. Под действием сигнала рассогласования двигатель вращается с пропорциональной угловой скорости, отсюда следует, что напряжение обратной связи пропорционально интегралу сигнала рассогласования. Если вместо этого преобразователь обратной связи чувствителен к угловой скорости двигателя, тогда передаточная функция не будет содержать идеального интегрирования и система будет относиться к классу 0. Таким образом, системы более высокого порядка получаются в результате добавления интеграторов в цепи передачи. Однако следует отметить, что каждое интегрирующее звено создает дополнительные проблемы стабилизации.

С физической точки зрения, интегратор представляет устройство, которое в состоянии создавать выходную величину при нулевом мгновенном входном сигнале. Это возникает из того, что интегратор «запоминает» и создает выходной сигнал, пропорциональный

интегралу по времени всех предыдущих входных функций. Следовательно, когда на входе системы класса 1 подана единичная функция, то она создает постоянную выходную величину установившегося состояния при нулевом сигнале рассогласования путем интегрирования сигнала ошибки, которая возникает в период переходного процесса до достижения установившегося состояния. Если единичный входной сигнал равен r_0 , то общая заштрихованная площадь ниже кривой на фиг. 4. 16 при изменении сигнала рассогласования в переходном процессе от $t = 0$ до $t = \infty$ будет равна $\frac{r_0}{K}$. Это можно проверить, написав в операционной форме дифференциальное



Фиг. 4. 16. Полная реакция системы первого класса на ступенчатый и кусочно-линейный входные сигналы при одинаковой обратной связи:

a — кривая реакции на единичную входную функцию (заштрихованная область соответствует $r_0/K = r_0/Kv$; $1 - c(t)$ — реакция на единичную входную функцию; 2 — единичная входная функция; *b* — кривая реакции на кусочно-линейную функцию; 1 — ошибка r_1/K запаздывания по положению.

уравнение для системы класса 1, связывающее $\frac{E(s)}{s}$ с $R(s)$. Из уравнения (4. 18) следует, что $E(s) [1 + HG(s)] = R(s)$. Подстановка значения $HG(s)$ из уравнения (4. 20) при $N = 1$ и приведение дробей к одному знаменателю дают следующие результаты:

$$\begin{aligned} & [(1 + s\tau_1) \cdots (s^2\tau_{n2}^2 + 2s_2\tau_{n2} + 1)] R(s) = \\ & = [s(1 + s\tau_1) \cdots (s^2\tau_{n2}^2 + 2s_2\tau_{n2} + 1)] + \\ & + [K(1 + s\tau_a) \cdots (s^2\tau_{nb}^2 + 2s_b\tau_{nb} + 1)] \frac{E(s)}{s}. \end{aligned} \quad (4. 26)$$

Переписав это уравнение для временной области при $t > 0$ и приняв $r(t) = r_0$, получим следующий результат:

$$r_0 = K \int_0^t e(t) dt + k_1 e(t) + k_2 \frac{de(t)}{dt} + \dots, \quad (4. 27)$$

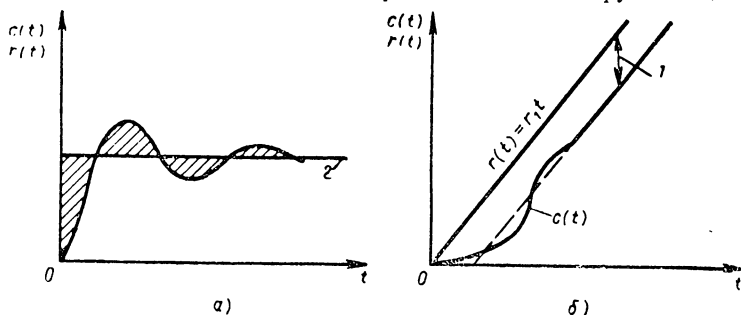
где k_1, k_2, \dots являются постоянными числовыми коэффициентами, полученными после умножения коэффициентов уравнения (4. 26).

В установившемся режиме, когда $t \rightarrow \infty$, функция $e(t)$ и все ее производные приближаются к нулю. Отсюда следует, что уравнение (4. 27) будет иметь вид

$$\int_0^{\infty} e(t) dt = \frac{r_0}{K}, \quad (4. 28)$$

когда $t \rightarrow \infty$.

Возможно также реакцию системы при одном виде входной функции связать с реакцией на другую входную функцию, применив следующее правило¹. Ввиду того, что кусочно-линейная входная функция представляет собой интеграл единичной функции, отсюда



Фиг. 4. 17. Кривая реакции системы второго класса на их единичную и кусочно-линейную входные функции при одинаковой обратной связи:

a — реакция на единичную функцию. Площадь 1 равна площади 2. *б* — реакция на кусочно-линейную функцию: 1 — единичная входная функция; 2 — реакция на единичную входную функцию; 3 — площадь 1; 4 — площадь 2; 5 — кусочно-линейная входная функция; 6 — реакция на кусочно-линейную функцию.

следует, что реакция системы на кусочно-линейную функцию соответствует интегралу реакции этой системы на единичную функцию. Предположим, что система первоначально находилась в покое. Обозначим $c_{стун}(t)$ — полную реакцию на единичную ступенчатую входную функцию $r(t) = u(t)$. Отсюда следует, что реакция системы на единичный кусочно-линейный входной сигнал $r(t) = tu(t)$ определяется выражением

$$c_{кус-лин}(t) = \int_0^t c_{стун}(t) dt. \quad (4. 29)$$

На основании этого можно сделать интересный вывод о системе класса 2. На фиг. 4. 17 показаны типичные характеристики этой системы при реакции на единичную и кусочно-линейную функции. Если реакция на кусочно-линейную функцию имеет нулевую ошибку установившегося состояния, то отсюда следует, что в случае $t \rightarrow \infty$ площадь под кривой реакции на единичную функцию должна быть равна площади под кривой единичной функции. Следовательно, заштрихованная площадь выше единичной входной функции

¹ Если реакция системы на входную функцию известна, то реакцию на производную или интеграл этой входной функции можно найти путем дифференцирования или интегрирования первоначальной (известной) реакции.

на фиг. 4. 17, *a* должна быть равна заштрихованной площади ниже ее. Иными словами, система класса 2 должна иметь по крайней мере одно перерегулирование в характеристике реакции на единичную функцию. Невозможно представить это перерегулирование без изменения класса системы. Здесь нет ничего неожиданного, если отметить, что характеристическое уравнение для системы класса 2 должно быть по крайней мере второй степени и реакция этой системы без источника энергии содержит больше одной постоянной времени.

4. 5. ОБОБЩЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ОШИБОК

Когда $H(s) = 1$, то возможно определить группу коэффициентов ошибок системы, которые имеют более общий характер, чем коэффициенты в предыдущем разделе. Напишем уравнение (4. 20) в общей форме без разложения на множители как отношение двух полиномов

$$HG(s) = \frac{K(1 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_ms^m)}{s^N(1 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_ns^n)}. \quad (4. 30)$$

Подстановка в уравнение (4. 18) при $H(s) = 1$ дает

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s^N(1 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_ns^n)}{s^N(1 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_ns^n) + K(1 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_ms^m)}. \quad (4. 31)$$

Если члены с одинаковым показателем степени s в числителе и знаменателе сгруппировать вместе, то уравнение (4. 31) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1s + \alpha_2s^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1s + \beta_2s^2 + \dots} = C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \dots \quad (4. 32)$$

Разложение в ряд получается путем деления полинома числителя на полином в знаменателе с определением ряда членов с возрастающей степенью s . Коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_3 назовем обобщенными коэффициентами ошибок. Они связаны с коэффициентами ошибок для систем любого класса, о которых сообщалось в предыдущем разделе. Например, рассмотрим систему класса 0, для которого уравнение (4. 31) приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1 + B_1s + B_2s^2 + \dots}{(1 + K) + (B_1 + KA_1)s + (B_2 + KA_2)s^2 + \dots} = \\ &= \frac{1}{1 + K} + \frac{1}{1 + K} \left(B_1 - \frac{B_1 + KA_1}{1 + K} \right) s + \dots \end{aligned} \quad (4. 33)$$

Сравнение уравнений (4. 33) и (4. 32) показывает, что $C_0 = \frac{1}{(1 + K)}$ и что значения других обобщенных коэффициентов ошибок C_1, C_2, \dots зависят от числовых коэффициентов уравне-

ния (4. 33). На основании уравнения (4. 21в) можно заметить, что для системы класса 0 $K = K_p$, так что можно написать

$$C_0 = \frac{1}{1 + K_p}. \quad (4. 34)$$

Уравнение (4. 34) связывает C_0 с коэффициентом ошибки по положению системы класса 0. Аналогично уравнение (4. 31) для системы класса 1 будет

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{s + B_1 s^2 + B_2 s^3 + \dots}{K + (1 + KA_1)s + (B_1 + KA_2)s^2 + \dots} = \\ &= \frac{1}{K} s + \frac{1}{K} \left(B_1 - \frac{1 + KA_1}{K} \right) s + \dots \end{aligned} \quad (4. 35)$$

Сравнение последнего выражения с уравнением (4. 32) приводит к выводу, что

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{1}{K}.$$

Сравнение с уравнением (4. 22г) позволяет заключить, что для системы класса 1 будем иметь

$$C_1 = \frac{1}{K_v}. \quad (4. 36)$$

Следовательно, C_1 для системы класса 1 равно обратному значению коэффициента K_v ошибки по скорости.

Если этот порядок распространить на системы высшего порядка, то можно будет увидеть, что система класса N будет иметь следующие обобщенные коэффициенты ошибок C_v (где $v = 0, 1, 2, 3 \dots$):

$$C_v = 0 \quad \text{при } v < N; \quad (4. 37a)$$

$$C_v = \frac{1}{\left[\lim_{s \rightarrow 0} s^N G(s) \right]} \quad \text{при } v = N. \quad (4. 37b)$$

При $v > N$ значения C_v зависят от результатов операции деления, как это показывает уравнение (4. 32). Преимущество обобщенных коэффициентов ошибок становится более очевидным, если уравнение (4. 32) переписать в следующем виде:

$$E(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + C_2 s^2 R(s). \quad (4. 38)$$

Преобразовав это выражение во временную область и пренебрегая всеми начальными условиями и импульсами при $t = 0$, получим

$$\varepsilon_{ss}(t) = C_0 r(t) + C_1 r'(t) + C_2 r''(t) + \dots \quad (4. 39)$$

Таким образом, обобщенные коэффициенты ошибок можно использовать для того, чтобы ошибку системы в установившемся режиме

связать с входной функцией и с ее последовательными производными. Важно также заметить, что обобщенные коэффициенты ошибок могут быть выражены конечными числами.

В качестве иллюстрации применения обобщенных коэффициентов ошибок рассмотрим простую систему с единичной обратной связью класса 2, для которой передаточная функция разомкнутой цепи определяется выражением

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s^2(1+5s)}.$$

Подстановка в уравнение (4.31) и умножение на $R(s)$ дают

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{R(s)}{1+G(s)} = \frac{s^2(1+5s)}{s^2(1+5s)+10(1+s)} \times R(s) = \\ &= \left(\frac{1}{10}s^2 + \frac{2}{5}s^3 + \dots \right) R(s). \end{aligned}$$

Во временной области при установившемся состоянии будем иметь

$$\varepsilon_{ss}(t) = \frac{1}{10}r''(s) + \frac{2}{5}r'''(t) + \dots,$$

так что обобщенные коэффициенты ошибок будут равными

$$C_0 = C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{1}{10}; \quad C_3 = \frac{2}{5} \dots$$

Если $r(t)$ представляет входную функцию в виде полинома $r(t) = r_0 + r_1t + \frac{1}{2}r_2t^2$, то отсюда следует, что $r'(t) = r_1 + r_2t$,

$$r''(t) = r_2, \quad r'''(t) = r''''(t) = \dots = 0.$$

Следовательно, ошибка установившегося состояния определяется

$$\varepsilon_{ss}(t) = \frac{r_2}{10}.$$

4.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТОЙ ЦЕПИ

В настоящем разделе рассмотрим общую проблему определения характеристик установившегося состояния и переходного процесса замкнутой системы при передаточной функции разомкнутой цепи. Часть этой задачи была уже отражена в данных табл. 4.2, где были перечислены реакции замкнутой цепи в установившемся режиме на единичную, кусочно-линейную и параболическую входные функции, которые были выражены через коэффициенты ошибок K_p , K_v и K_a . В настоящем разделе эти коэффициенты будут даны в графическом изображении частотных характеристик разомкнутой цепи $HG(j\omega)$.

Определение переходного процесса системы по частотной характеристике разомкнутой цепи представляет слишком трудную задачу. Точные математические методы решения этой задачи разработаны, но они требуют большого труда и обычные частотные характеристики замкнутой цепи должны быть заранее известны. Однако более важен тот факт, что эти методы не связывают непосредственно переходной процесс с параметрами системы и поэтому они имеют ограниченное значение при проектировании. Но возможно связать определенные характеристики переходного процесса с частотной характеристикой разомкнутой цепи и можно сделать очень полезные обобщения и вывести правила расчета. Для выяснения принципа проектирования рассмотрим частотную характеристику разомкнутой цепи для систем класса 0, 1 и 2.

Система класса 0. Первоначально рассмотрим передаточную функцию замкнутой цепи для системы класса 0. Исходя из уравнения (4. 20) $HG(j\omega)$ определяется выражением

$$HG(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_a) \cdots [1 - (\omega\tau_{nb})^2 + j2\zeta_b\tau_{nb}\omega]}{(1 + j\omega\tau_1) \cdots [1 - (\omega\tau_{n2})^2 + j2\zeta_2\tau_{n2}\omega]} \quad (4. 40)$$

Когда $\omega = 0$, тогда $HG(j\omega) = K$ и, таким образом, амплитудно-фазовая кривая всегда начинается в конечной точке $(K, 0)$. Сигнал рассогласования в установившемся режиме при единичной входной функции, как это было приведено в табл. 4. 2, может быть определен по этой начальной точке. На основании логарифмических амплитудно-частотных и фазо-частотных кривых не трудно показать, что при $\omega \rightarrow 0$ логарифмическая амплитудно-частотная характеристика приближается к постоянному значению $20 \lg K_{\partial n}$, а фазо-частотная характеристика приближается к 0° . Отсюда класс системы и значение коэффициента K могут быть определены по характеристикам. При промежуточных и высоких частотах передаточная функция соответствует определенным членам в передаточной функции разомкнутой цепи.

Это лучше всего иллюстрировать на простом примере.

Система второго порядка класса 0. Рассмотрим случай, когда $HG(j\omega)$ определяется выражением

$$HG(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} = \frac{K(1 - \omega^2\tau_1\tau_2) - j\omega(\tau_1 + \tau_2)K}{(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2 + \omega^2(\tau_1 + \tau_2)^2} \quad (4. 41)$$

На фиг. 4. 18 показана амплитудно-фазовая характеристика. С возрастанием частоты передаточная функция будет определяться

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{-\omega^2\tau_1\tau_2} = 0 \angle 180^\circ \quad (4. 42)$$

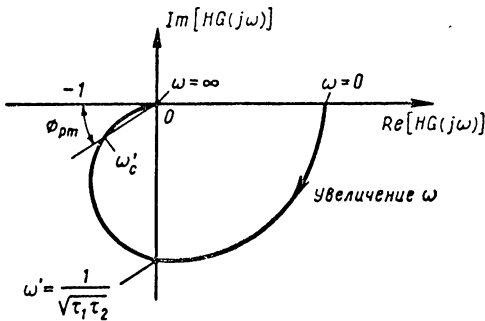
Следовательно, амплитудно-фазовая кривая приближается к началу координат вдоль отрицательной действительной оси.

Из уравнения (4.41) следует, что передаточная функция может иметь чисто мнимое значение при определенной частоте, т. е. сдвиг фазы — 90° имеет место при частоте $\omega = \omega'$, которая определяется формулой

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}. \quad (4.43)$$

Эта частота ω' показана на амплитудно-фазовой кривой фиг. 4.18. Для того чтобы связать реакцию замкнутой системы в переходном процессе с частотной характеристикой разомкнутой цепи, необходимо исследовать, насколько система приближается к неустойчивому состоянию. Неустойчивость системы является одним из важных вопро-

сов анализа и проектирования систем управления. Как правило, этот вопрос состоит не только в том, чтобы определить, является ли система абсолютно устойчивой или насколько система близка к неустойчивости. Для описания этого состояния системы применяется термин «относительная устойчивость» (относительная стабилизация). Относительная устойчивость имеет существенное значение, потому



Фиг. 4.18. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы класса 0.

что она позволяет нам связать реакцию замкнутой системы в переходном процессе с частотными характеристиками разомкнутой цепи. Конечно, нам следует подробно исследовать вопрос, как измеряется относительная устойчивость, а также изучить точную зависимость переходного процесса от относительной устойчивости. В общем можно ожидать, что чем система ближе к неустойчивости, тем больше максимум перерегулирования при переходном процессе и тем продолжительнее затухание реакции в переходном процессе. В этом смысле неустойчивой системой является такая, у которой переходный процесс никогда не исчезает. С другой стороны, когда система далека от неустойчивого состояния, то ее реакция в переходном процессе может быть затянутой. Известно, что условие абсолютной устойчивости состоит в том, что корни характеристического уравнения $1 + HG(s) = 0$ находятся в левой половине комплексной плоскости. Граничное условие между устойчивостью и неустойчивостью определяется тем, что корни лежат на мнимой оси. Следовательно, допустив, что $s = j\omega$, граничное условие будет существовать, когда частота ω будет удовлетворять уравнению $HG(j\omega) + 1 = 0$ или справедливо $HG(j\omega) = \frac{B}{E}(j\omega) = -1 = 1 \angle 180^\circ$. Таким образом, когда передаточная функция разомкнутой цепи $HG(j\omega)$ про-

ходит через точку $(-1, 0)$, то будет существовать условие незатухающих колебаний. Из этого рассмотрения можно сделать вывод, что чем ближе частотная характеристика разомкнутой цепи проходит около точки $(-1, 0)$ на фиг. 4. 18, тем ближе замкнутая система находится к неустойчивому состоянию. Близость к точке $(-1, 0)$ измеряется двумя величинами: сдвигом фазы и критическим коэффициентом усиления. Эти величины определяются, как видно на фиг. 4. 19, по амплитудно-частотной характеристике разомкнутой системы класса 1. Критический коэффициент усиления определяется как обратное значение передаточной функции разомкнутой цепи при частоте ω_c , при которой угол сдвига фаз равен -180° .

Отсюда

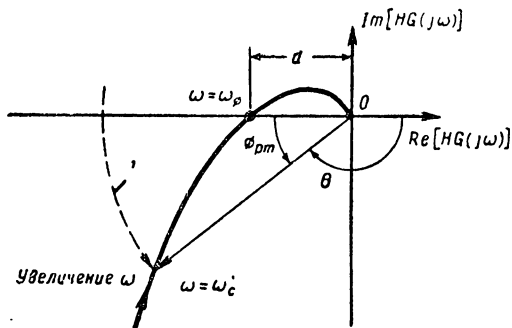
критический коэффициент

усиления равен $\frac{1}{d} =$

$$= [HG(j\omega_c)]^{-1}.$$

Критический коэффициент усиления представляет собой коэффициент, на который необходимо умножить коэффициент усиления системы, чтобы годограф передаточной функции разомкнутой цепи проходил через точку $(-1, 0)$, т. е. для системы, которая может находиться в состоянии незатухающих колебаний. Предельный сдвиг фаз φ_{pm} равен 180° плюс фазовый угол при единичном коэффициенте усиления. Он является критерием, насколько необходимо увеличить сдвиг фаз, чтобы систему сделать неустойчивой при неизменном коэффициенте усиления. Критический коэффициент усиления и предельный сдвиг фаз можно также определить по логарифмическим амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристикам для передаточной функции разомкнутой цепи, как это показано на фиг. 4. 20.

Предельный сдвиг фаз измеряется по фазо-частотной характеристике при частоте, когда амплитудно-частотная характеристика пересекает линию 0 дб, т. е. при значении амплитуды, равной единице. Практически эта частота точки сопряжения часто принимается за частоту, при которой асимптотическое приближение к прямой линии пересекает линию 0 дб раньше частоты точки сопряжения действительной логарифмической амплитудно-частотной кривой. Это экономит время на построение действительной характеристики



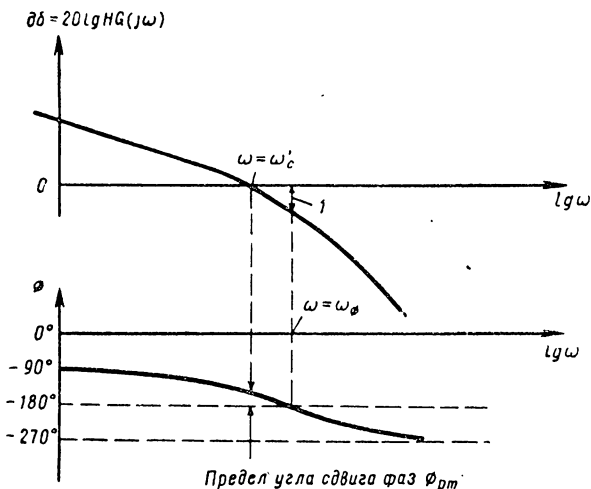
Фиг. 4. 19. Определение пределов коэффициентов усиления и угла сдвига фаз по амплитудно-фазовой характеристике:

l — окружность с радиусом, равным единице;
 φ_{pm} — предельный сдвиг фаз;

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{HG(j\omega_c)}$$

критический коэффициент усиления; θ — общий сдвиг фаз при частоте ω_c .

и обычно не создает чрезмерных расчетных ошибок, что будет показано в главе 6. Критический коэффициент усиления измеряется в децибелах по логарифмической амплитудно-частотной характеристике в точке, где фазо-частотная характеристика пересекает ось координат (-180°). Тот факт, что амплитудно-фазовая кривая передаточной функции разомкнутой цепи на фиг. 4.19 лежит справа от точки $(-1, 0)$, означает, что логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пересекает ось абсцисс 0 дб при более низкой частоте, чем частота точки пересечения фазо-частотной характеристики и оси координат -180° .



Фиг. 4.20. Пределы коэффициента усиления и угла сдвига фаз по логарифмическим характеристикам:

l — критический коэффициент усиления = $20 \lg d$ (децибелы).

Теперь вернемся к рассмотрению системы второго порядка класса 0 и ее амплитудно-фазовой кривой на фиг. 4.18, и определим связь критического коэффициента усиления и сдвига фаз с реакцией замкнутой цепи в переходном процессе. Критический коэффициент усиления для этой системы имеет бесконечно большую величину, так как амплитудно-фазовая кривая не пересекается с отрицательной действительной осью. Чтобы амплитудно-фазовая кривая проходила через точку $(-1, 0)$, требуется бесконечно большой коэффициент усиления. Следовательно, критический коэффициент усиления для рассматриваемого случая имеет малое значение.

Прежде чем определить влияние предельного сдвига фаз для этой системы, определим характеристическое уравнение замкнутой системы. Если $j\omega$ заменить на s в уравнении (4.41), то характеристическое уравнение будет иметь вид

$$1 + HG(s) = 1 + \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} = 0. \quad (4.44)$$

Приведение к общему знаменателю и умножение приводит к следующему результату

$$s^2 \tau_1 \tau_2 + s(\tau_1 + \tau_2) + 1 + K = s^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} s + \frac{1 + K}{\tau_1 \tau_2} = 0. \quad (4.45)$$

Эта система очевидно имеет второй порядок, так что уравнение (4.45) можно переписать в другом виде

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0, \quad (4.46)$$

где

$$\omega_n^2 = \frac{1 + K}{\tau_1 \tau_2} \approx \frac{K}{\tau_1 \tau_2} \text{ при } K \gg 1 \quad (4.47)$$

и

$$2\zeta \omega_n = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \approx \frac{1}{\tau_2} \quad (4.48)$$

при $\tau_1 \gg \tau_2$.

Корни характеристического уравнения расположены в точках

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2},$$

где ζ — относительный коэффициент демпфирования;

ω_n — недемпфированная резонансная частота.¹

Исходя из этих результатов, теперь определим предельный угол сдвига фаз для данной системы. Первоначально необходимо узнать частоту $\omega = \omega'_c$, когда $|HG(j\omega'_c)| = 1$. Из уравнения (4.41) следует, что ω'_c определяется выражением

$$\frac{K}{\sqrt{1 + (\omega'_c)^2 \tau_1^2} \sqrt{1 + (\omega'_c)^2 \tau_2^2}} = 1. \quad (4.49)$$

После некоторых алгебраических преобразований уравнение (4.44) можно написать в следующем виде:

$$(\omega'_c)^4 + (\omega'_c)^2 \left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} \right) - \frac{K^2 - 1}{\tau_1^2 \tau_2^2} = 0 \quad (4.50a)$$

или

$$(\omega'_c)^4 + 4\zeta^2 \omega_n^2 (\omega'_c)^2 - \omega_n^4 = 0 \quad (4.50б)$$

при $K \gg 1$ и $\tau_1 \gg \tau_2$.

¹ Ввиду того что $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{1+K}} \cdot \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$, отсюда следует, что система недемпфирована, когда

$$1 + K > \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{4\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1} + 2 \right).$$

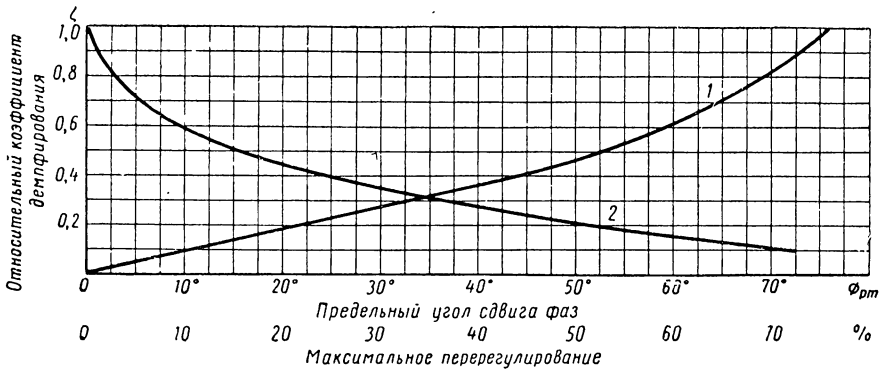
Напомним, что мы здесь рассматриваем только недемпфированное состояние.

Уравнение (4. 50а) является биквадратным, которое можно легко решить относительно ω'_c , особенно тогда, когда известны числовые значения K , τ_1 , τ_2 . Предельный угол сдвига фаз φ_{pm} определяется из уравнения (4. 41) и на основании фиг. 4. 18.

Следовательно, предельный угол сдвига фаз φ_{pm} будет

$$\varphi_{pm} = \arctg \left| \frac{I_m [HG(j\omega'_c)]}{Re [HG(j\omega'_c)]} \right| = \arctg \left| \frac{\omega'_c (\tau_1 + \tau_2)}{1 - (\omega'_c)^2 \tau_1 \tau_2} \right| \approx \approx \arctg \left| 2\zeta \left(\frac{\omega_n}{\omega_c} \right) \right|, \quad (4. 51)$$

когда $(\omega'_c)^2 \gg \frac{1}{\tau_1 \tau_2}$.



Фиг. 4. 21. Кривые относительного коэффициента демпфирования системы второго порядка:

1 — коэффициент демпфирования в зависимости от предельного сдвига фаз; 2 — относительный коэффициент демпфирования в зависимости от максимума перегуливания при реакции системы второго порядка на единичную входную функцию.

Неравенство справедливо при больших значениях K . Подстановка значения ω'_c из уравнения (4. 50б) в уравнение (4. 51) позволяет вычислить φ_{pm} через относительный коэффициент демпфирования ζ . Этот результат графически изображен на фиг. 4. 21. Исследуем еще логарифмические амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики для рассматриваемого примера. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика по уравнению (4. 41) определяется выражением

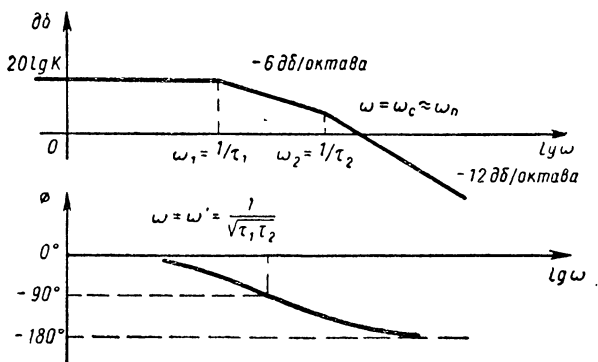
$$20 \lg |HG(j\omega)| = 20 \lg K - 20 \lg (1 + \omega^2 \tau_1^2)^{1/2} - 20 \lg (1 + \omega^2 \tau_2^2)^{1/2}. \quad (4. 52)$$

Асимптотическая характеристика показана на фиг. 4. 22 для случая, когда частота в точке пересечения с осью абсцисс равна $\frac{1}{\tau_2}$. Эта характеристика состоит из трех частей, а именно: постоянной части и двух отрезков с наклоном -6 дБ/октава с частотами точек

сопряжения $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ и $\omega = \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$, фазо-частотная характеристика вытекает непосредственно из кривых фазовых углов, в зависимости от логарифма амплитуды. Очевидно, что эти характеристики могут быть построены с значительно меньшими затратами, чем амплитудно-фазовые кривые.

Выражения для асимптоты с наклоном -12 дБ/октава определяется уравнением (4. 52) при $\omega \gg \frac{1}{\tau_2}$:

$$20 \lg |HG(j\omega)|_{\omega \gg \frac{1}{\tau_2}} = 20 \lg K - 20 \lg \omega \tau_1 - 20 \lg \omega \tau_2. \quad (4. 53)$$



Фиг. 4. 22. Логарифмические асимптотические характеристики системы нулевого класса.

Если приравнять это выражение нулю, то можно решить его при частоте $\omega = \omega_c$, при которой асимптота -12 дБ/октава пересекает ось абсцисс.

Таким образом

$$20 \lg K - 20 \lg \omega \tau_1 - 20 \lg \omega \tau_2 = 0.$$

Решение относительно ω_c приводит к

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{\tau_1 \tau_2}} \approx \omega_n, \quad (4. 54)$$

где приближенный результат получен из сравнения с уравнением (4. 47); следовательно, частота недемпфированной системы может быть определена по частоте, при которой асимптота -12 дБ/октава пересекает ось абсцисс при заданных условиях.

Система класса 1. Рассмотрим частотную характеристику разомкнутой цепи для системы класса 1. На основании уравнения (4. 20) $HG(j\omega)$ определяется выражением

$$HG(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_a) \cdots \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{nb}} \right)^2 + j2\zeta_b \left(\frac{\omega}{\omega_{nb}} \right) \right]}{j\omega(1 + j\omega\tau_1) \cdots \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n2}} \right)^2 + j2\zeta_2 \left(\frac{\omega}{\omega_{n2}} \right) \right]}. \quad (4. 55)$$

Когда относительная круговая частота приближается к нулю, то уравнение (4. 55) сводится к

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |HG(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{\omega} = \infty; \quad (4. 56)$$

$$\varphi = -90^\circ. \quad (4. 57)$$

Равенства (4. 56) и (4. 57) содержат недостаточное количество данных для определения амплитудно-фазовой характеристики передаточных функций разомкнутой цепи при $\omega \rightarrow 0$. Причина лежит в том, что равенства (4. 56) и (4. 57) определяют только линию, параллельную мнимой оси. Пересечение этой линии с отрицательной действительной осью неопределимо. Точный характер амплитудно-фазовой кривой при низких частотах можно определить на основе уравнения (4. 55) после преобразования его действительной и мнимой частей и изучения его для случая, когда относительная круговая частота стремится к нулю. Эту операцию мы произведем в конце настоящего раздела; она приводит к следующему результату:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} [HG(j\omega)] = K [(\tau_a + 2\xi_b \tau_{nb} + \dots) - (\tau_1 + 2\xi_2 \tau_{n2} + \dots)], \quad (4. 58)$$

где

$$\tau_{nb} = \frac{1}{\omega_{nb}}, \quad \tau_{n2} = \frac{1}{\omega_{n2}}.$$

Это выражение определяет пересечение низкочастотной асимптоты амплитудно-фазовой кривой с действительной осью. Логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики по уравнению (4. 55) при низких частотах определяются следующими выражениями:

$$20 \lg |HG(j\omega)| = 20 \lg \frac{K}{\omega} = 20 \lg K - 20 \lg \omega; \quad (4. 59)$$

$$\varphi |_{\omega \rightarrow 0} = -90^\circ. \quad (4. 60)$$

Следовательно, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет начальный наклон — 6 дБ/октава, ее продолжение пересекает ось абсцисс при $\omega = K$. Согласно табл. 4. 2 $K_v = K$, так что K_v можно непосредственно определить по логарифмической амплитудно-частотной характеристике путем продолжения ее начального наклона — 6 дБ/октава до оси абсцисс. Следует заметить, что величину K нет возможности просто определить по фазо-частотной кривой.

Точный характер передаточной функции разомкнутой цепи при других частотах, кроме низких, зависит от точного определения отдельных членов передаточной функции; для пояснения этого рассмотрим несколько специфических примеров.

Система второго порядка класса 1. В качестве примера системы класса 1 рассмотрим простую следящую систему второго порядка, описанную в главе 1. Передаточную функцию разомкнутой цепи можно определить по структурной схеме на фиг. 4. 10; она определяется выражением

$$HG(s) = \frac{K_p K_A K_M h}{Js^2 + Fs}. \quad (4.61)$$

Подстановка значений ζ и ω_n из главы 1, а именно

$$\zeta = \frac{F}{2\sqrt{K_p K_A K_M h J}}$$

и

$$\omega_n^2 = \frac{K_p K_A K_M h}{J}$$

позволяет переписать уравнение (4. 61) в другом виде

$$HG(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}. \quad (4.62)$$

Совершенно очевидно, что частотная характеристика разомкнутой цепи системы класса 1 будет

$$HG(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\zeta\omega_n)} = \frac{\frac{\omega_n}{2\zeta}}{j\omega\left(1 + \frac{j\omega}{2\zeta\omega_n}\right)}. \quad (4.63)$$

Передаточная функция разомкнутой цепи одинакова с передаточной функцией по уравнению (3. 52а), которая графически показана на фиг. 3. 9 и 3. 10. Для удобства эти графики даны на фиг. 4. 23.

Предел угла сдвига фаз определяется по методу, примененному к системе второго порядка класса 0 в предыдущем разделе. Из уравнения (4. 63) определяется частота ω'_c при $|HG(j\omega)| = 1$, в результате чего получаем выражение

$$(\omega'_c)^4 + 4\zeta^2\omega_n^2(\omega'_c)^2 - \omega_n^4 = 0. \quad (4.64)$$

Решение относительно частоты ω'_c дает

$$\frac{(\omega'_c)^2}{\omega_n^2} = \sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2. \quad (4.65)$$

Изучение уравнений (4. 63) и (4. 23а) позволяет установить, что предельный угол сдвига фаз φ_{pm} определяется равенством

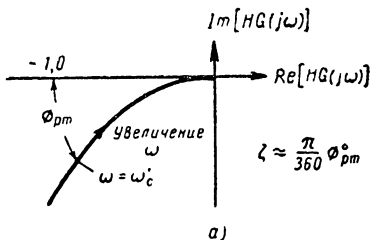
$$\varphi_{pm} = \arctg \left| \frac{\operatorname{Im} [HG(j\omega'_c)]}{\operatorname{Re} [HG(j\omega'_c)]} \right| = \arctg 2\zeta \frac{\omega_n}{\omega'_c} \quad (4.66)$$

В предположении, что система устойчива, так что относительный коэффициент демпфирования ζ соответствует положительному

предельному углу сдвига фаз. Подстановка значения относительной круговой частоты ω'_c из уравнения (4. 65) приводит к результату

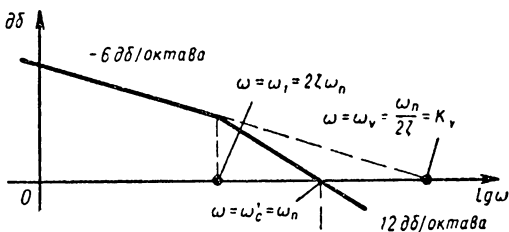
$$\varphi_{pm} = \text{arctg } 2\zeta \left[\frac{1}{(4\zeta^4 + 1)^{1/2} - 2\zeta^2} \right]^{1/2}. \quad (4. 67)$$

На фиг. 4. 21 показана зависимость предельного угла сдвига фаз от относительного коэффициента демпфирования. Ввиду того что



уравнения (4. 64) и (4. 65) одинаковы с уравнениями (4. 50 б) и (4. 51), отсюда следует, что кривая на фиг. 4. 21 сохраняет свое значение также для недодемпфированной системы второго порядка класса 0 при упомянутых условиях. Когда $0 < \varphi_{pm} < 40^\circ$, то кривая является линейной, так что относительный коэффициент демпфирования ζ в этом диапазоне связан с предельным углом сдвига фазы равенством

$$\zeta = \frac{\pi}{360} \varphi_{pm}^\circ, \quad (4. 68a)$$



причем угол φ_{pm} измеряется в градусах. Если угол φ_{pm} выразить в радианах, то получим другое выражение

$$\zeta = \frac{1}{2} \varphi_{pm}. \quad (4. 68б)$$

Фиг. 4. 23. Частотные характеристики сервомеханизма первого класса:

а — амплитудно-фазовая характеристика; б — логарифмическая амплитудно-фазовая характеристика; в — фазо-частотная характеристика.

Также полезна для систем высшего порядка, основываясь на предположении, что реакция в переходном процессе определяется обычно преобладающей парой комплексных сопряженных корней характеристического уравнения замкнутой системы. Затем эти корни можно приписать эквивалентной системе второго порядка, в особенности ее реакции в переходном режиме. Ограничение этой аппроксимации очевидно, но тем не менее, она полезна и имеет практическое значение.

Из логарифмической амплитудно-частотной характеристики можно получить некоторые другие зависимости для этой системы

$$20 \lg |HG(j\omega)| = 20 \lg \frac{\omega_n}{2\zeta} - 20 \lg \omega - 20 \lg \left(1 + \frac{\omega^2}{4\zeta^2 \omega_n^2} \right)^{1/2}. \quad (4.69)$$

Линия с начальным наклоном -6 *дб/октава* пересекает ось абсцисс при частоте

$$\omega = \omega_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}.$$

Отсюда следует, что K_v определяется по формуле

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta} = \omega_v. \quad (4.70)$$

Частота точки сопряжения для линейного члена уравнения соответствует

$$\omega = \omega_1 = 2\zeta \omega_n.$$

Среднегеометрическое значение между ω_v и ω_1 равно ω_n , т. е.

$$\omega_n = \sqrt{\omega_v \omega_1}.$$

При продолжении линии с наклоном -12 *дб/октава* она пересекает ось абсцисс при $\omega = \omega_c$, где ω_c определяется из уравнения

$$20 \lg \frac{\omega_n}{2\zeta} - 20 \lg \omega_c - 20 \lg \frac{\omega_c}{2\zeta \omega_n} = 0. \quad (4.71)$$

Решение этого уравнения дает $\omega_c = \omega_n$. Таким образом, частота недемпфированных колебаний системы второго порядка класса 0 может быть определена путем продления асимптоты с наклоном -12 *дб/октава* до ее пересечения с осью абсцисс.

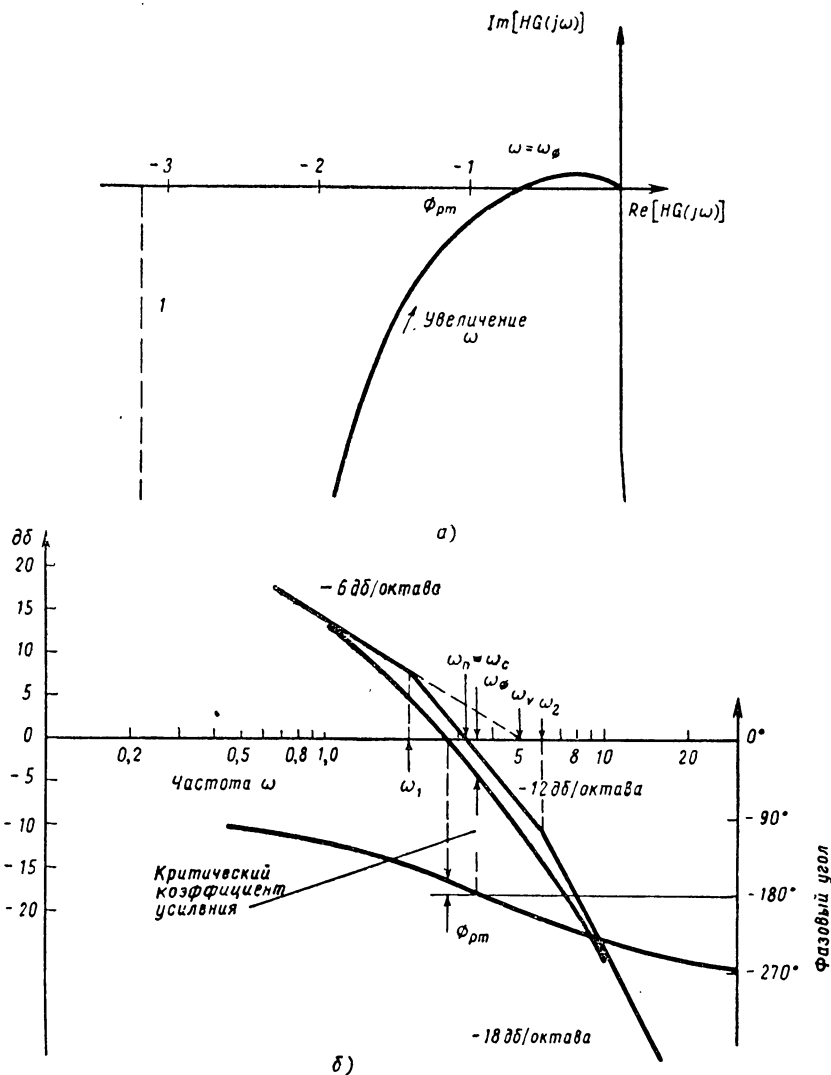
Числовой пример для системы третьего порядка класса 0. Передаточная функция системы третьего порядка класса 0 определяется

$$HG(s) = \frac{5}{s \left(1 + \frac{s}{2} \right) \left(1 + \frac{s}{6} \right)}. \quad (4.72)$$

Частотная характеристика разомкнутой цепи выражается

$$HG(j\omega) = \frac{5}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{2} \right) \left(1 + \frac{j\omega}{6} \right)}. \quad (4.73)$$

Амплитудно-фазовая кривая по этому выражению дана на фиг. 4. 24, а. Согласно уравнению (4. 55) $K = 5$, $\tau_1 = 0,5$ и $\tau_2 = 0,167$. Из уравнения (4. 58) следует, что низкочастотная асимптота расположена при $-5(0,5 + 0,167) = -3,33$ единицы,



Фиг. 4.24. Частотные характеристики системы третьего порядка класса 1: а — амплитудно-фазовая характеристика; б — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика; 1 — низкочастотная асимптота.

измеренных от мнимой оси. При высоких частотах передаточная функция разомкнутой цепи определяется следующим выражением:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{5}{0,5(0,167)(j\omega)^3} = 0 \angle -270^\circ. \quad (4.74)$$

Следовательно, амплитудно-фазовая кривая приближается к началу координат вдоль положительной мнимой оси. Амплитудно-фазовая кривая пересекает отрицательную действительную ось (угол сдвига фаз 180°) при частоте $\omega = \omega_\phi$, определяемой формулой

$$\arctg \frac{\omega_\phi}{2} + \arctg \frac{\omega_\phi}{6} = \arctg \frac{0,5\omega_\phi + 0,167\omega_\phi}{1 - 0,5\omega_\phi(0,167\omega_\phi)} = 90^\circ. \quad (4.75)$$

Отсюда, $0,5(0,167)\omega_\phi^2 = 1$ и $\omega_\phi = \sqrt{\frac{1}{[0,5(0,167)]}} = 3,46$.

При $\omega = \omega_\phi$ величина $HG(j\omega)$ равняется

$$|HG(j\omega)| = \frac{5}{3,46 \sqrt{1 + (1,73)^2} \sqrt{1 + (0,575)^2}} = 0,624. \quad (4.76)$$

Следовательно, критический коэффициент усиления равняется $\frac{1}{0,624} = 1,6$.

Асимптоты логарифмической амплитудно-частотной характеристики по уравнению (4.73) определяются выражением

$$\begin{aligned} \delta\delta = 20 \lg 5 - 20 \lg \omega - 20 \lg \left[1 + \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \\ - 20 \lg \left[1 + \left(\frac{s}{6} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Линия с начальным наклоном -6 *дб/октава* проходит через 0 *дб* при $\omega = \omega_c = 5$. Точки сопряжения имеют место при частотах $\omega = \omega_1 = \frac{1}{0,5} = 2$ и $\omega = \omega_2 = \frac{1}{0,167} = 6$. На фиг. 4.24, б показаны логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные кривые. Продолжение линии с наклоном -6 *дб/октава* до 0 *дб* определяет значение частоты $\omega_c = K_v = 5$. Среднегеометрическое значение между ω_v и ω_1 равняется $\omega_n = \sqrt{10} = 3,16$, что одинаково с частотой ω_c , при которой линия -12 *дб/октава* пересекает ось абсцисс.

Фазовый угол по уравнению (4.73) определяется следующим равенством:

$$\varphi = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{2} - \arctg \frac{\omega}{6}. \quad (4.78)$$

Предельный угол сдвига фаз φ_{pm} графически определяется по кривой на фиг. 4.24 и равен $\varphi_{pm} = 15^\circ$. Следовательно, относительный коэффициент демпфирования для упрощения эквивалентной системы второго порядка равен $\zeta = \frac{15\pi}{360} = 0,13$,

Поведение системы класса 1 при $\omega \rightarrow 0$. Асимптота для системы класса 1 при низких частотах, выражаемая уравнением (4. 58), может быть проверена следующим образом. Перепишем уравнение (4. 55) в виде полинома, заменив $j\omega$ на s и приняв $\tau_{nb} = \frac{1}{\omega_{nb}}$, $\tau_{n2} = \frac{1}{\omega_{n2}} \dots$. Отсюда

$$HG(s) = \frac{K(1 + \tau_a s) \dots [(1 + 2\tau_b \tau_{nb} s + \tau_{nb}^2 s^2)]}{s(1 + \tau_1 s) \dots [(1 + 2\tau_2 \tau_{n2} s + \tau_{n2}^2 s^2)]} =$$

$$= K \frac{1 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_m s^m}{s(1 + B_1 s + B_2 s^2 + \dots + B_n s^n)}; \quad (4. 79a)$$

$$HG(s) = K \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}, \quad (4. 79б)$$

где

$$m_1 \text{ — четные члены в числителе} \quad m_1 = 1 + A_2 s^2 + \dots;$$

$$n_1 \text{ — нечетные члены в числителе} \quad n_1 = A_1 s + A_3 s^3 + \dots;$$

$$m_2 \text{ — четные члены в знаменателе} \quad m_2 = B_1 s^2 + B_3 s^4 + \dots;$$

$$n_2 \text{ — нечетные члены в знаменателе} \quad n_2 = s + B_2 s^3 + \dots.$$

Если уравнение (4. 79б) умножить на $(m_2 - n_2)/(m_2 - n_2)$,

$$HG(s) = K \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \cdot \frac{m_2 - n_2}{m_2 - n_2} = K \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} + K \frac{m_2 n_1 - m_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}. \quad (4. 80)$$

Первый член уравнения (4. 80) содержит только четные степени s , а второй член содержит только нечетные степени s . Таким образом,

$$\operatorname{Re}[HG(j\omega)] = \left. \frac{K(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{m_2^2 - n_2^2} \right|_{s=j\omega} \quad (4. 81a)$$

и

$$\operatorname{Im}[HG(j\omega)] = \left. \frac{K(m_2 n_1 - m_1 n_2)}{m_2^2 - n_2^2} \right|_{s=j\omega}. \quad (4. 81б)$$

Из предыдущих двух выражений следует, что

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[HG(j\omega)] = \left. \frac{K(m_1 m_2 - n_1 n_2)}{m_2^2 - n_2^2} \right|_{s=0}; \quad (4. 82a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}[HG(j\omega)] = \left. \frac{K(m_2 n_1 - m_1 n_2)}{m_2^2 - n_2^2} \right|_{s=0}. \quad (4. 82б)$$

Если значения m_1 , m_2 , n_1 , n_2 из уравнения (4. 79 б) подставить в уравнение (4. 82 а и б), то получим следующий результат

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[HG(j\omega)] = K(A_1 - B_1); \quad (4. 83a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}[HG(j\omega)] = -\infty. \quad (4. 83б)$$

Если коэффициенты A_1 и B_1 определить через постоянные времени системы, то их выражения будут иметь вид

$$A_1 = \tau_a + 2\zeta_b\tau_{nb} + \dots; \quad B_1 = \tau_1 + 2\zeta_2\tau_{n2} + \dots \quad (4.84)$$

Следовательно, уравнение (4.83а) можно написать в другом виде $\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} [HG(j\omega)] = K [(\tau_a + 2\zeta_b\tau_{nb} + \dots) - (\tau_1 + 2\zeta_2\tau_{n2} + \dots)]$. (4.85)

Система класса 2. Передаточная функция разомкнутой цепи системы класса 2 определяется выражением

$$G(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_a) \dots \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{nb}} \right)^2 + j2\zeta_b \left(\frac{\omega}{\omega_{nb}} \right) \right]}{(j\omega)^2 (1 + j\omega\tau_1) \dots \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n2}} \right)^2 + j2\zeta_2 \left(\frac{\omega}{\omega_{n2}} \right) \right]}. \quad (4.86)$$

Когда относительная круговая частота приближается к нулю, то уравнение (4.86) дает

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{-\omega^2} = \infty \angle 180^\circ. \quad (4.87)$$

Таким образом, амплитудно-фазовая кривая всегда начинается в бесконечности на оси 180° . Логарифмические амплитудно-частотные и фазо-частотные кривые по уравнению (4.86) при низких частотах определяются по

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \lg KG(j\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^2} = 20 \lg K - 20 \lg \omega^2; \quad (4.88)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle KG(j\omega) = 180^\circ. \quad (4.89)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет начальный наклон -12 дБ/октава . При рассмотрении характеристики установившегося состояния представляет интерес кривая в децибелах при $\omega \rightarrow 0$, т. е. низкочастотная часть характеристики по уравнению (4.88). Продолжение этой линии пересекает ось абсцисс при частоте $\omega = \omega_n = \sqrt{K}$. Коэффициент K_a можно определить по этой точке пересечения, т. е. $K_a = K = \omega_n^2$.

Система второго порядка класса 2. Рассмотрим систему второго порядка класса 2 со следующей передаточной функцией разомкнутой цепи:

$$HG(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau)}{(j\omega)^2}. \quad (4.90)$$

После замены $j\omega$ на s в последнем выражении получим характеристическое уравнение

$$1 + HG(s) = 1 + \frac{K(1 + s\tau)}{s^2} = 0.$$

Освобождаясь от дробей, приходим к следующему результату:

$$s^2 + K\tau s + K = 0. \quad (4.91)$$

Последнее уравнение может быть дано в другом виде

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0;$$

$$\text{где} \quad \omega_n^2 = K \quad (4.92a)$$

$$\text{и} \quad 2\zeta\omega_n = K\tau. \quad (4.92b)$$

Предельный фазовый угол для этой системы определяется по первой частоте $\omega = \omega'_c$, когда $|HG(j\omega'_c)| = 1$. Из уравнения (4.90) следует, что частота ω'_c определяется выражением

$$\frac{K\sqrt{1 + (\omega'_c)^2\tau^2}}{(\omega'_c)^2} = 1.$$

Освобождение от дробей, возведение в квадрат и перегруппировка членов дают

$$(\omega'_c)^4 - K^2\tau^2(\omega'_c)^2 - K^2 = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения могут быть выражены через ζ и ω_n на основании равенства (4.92 а и б). Отсюда получаем

$$(\omega'_c)^4 - (2\zeta\omega_n)^2(\omega'_c)^2 - \omega_n^4 = 0.$$

Решение относительно ω'_c дает

$$\frac{(\omega'_c)^2}{\omega_n^2} = \sqrt{4\zeta^2 + 1} + 2\zeta^2. \quad (4.93a)$$

Теперь предельный фазовый угол может быть выражен следующим образом, используя уравнение (4.90):

$$\varphi_{pm} = \arctg \left[\frac{\operatorname{Im} [HG(j\omega'_c)]}{\operatorname{Re} [HG(j\omega'_c)]} \right] = \arctg 2\zeta \frac{\omega'_c}{\omega_n}. \quad (4.93b)$$

Подстановка выражения (4.93a) в (4.93б) приводит к

$$\varphi_{pm} = \arctg 2\zeta [(4\zeta^2 + 1)^{1/2} + 2\zeta^2]^{1/2}. \quad (4.94)$$

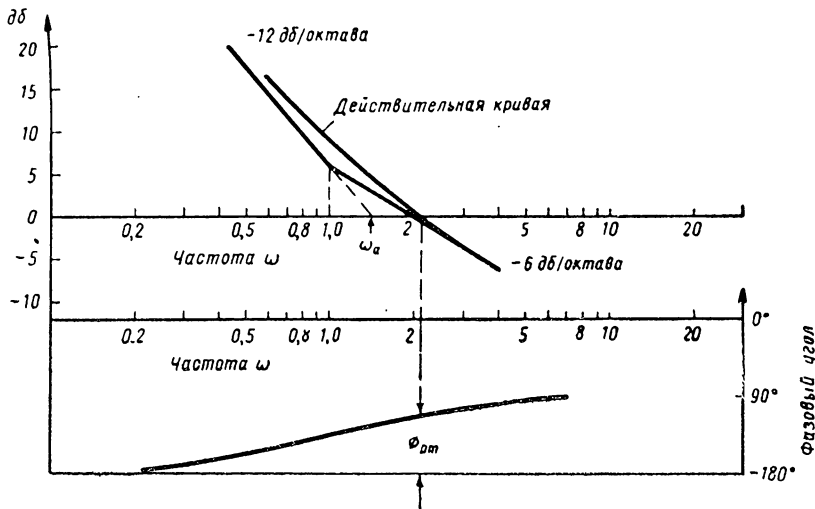
Кривая по уравнению (4.94) имеет общее практическое значение и идентична с кривой, построенной на фиг. 4.21. Этот результат получен на основании того, что выражение в скобках в уравнениях (4.94) и (4.67) имеет почти одинаковое числовое значение при $\zeta \leq 1$. Читатель может легко проверить правильность этого утверждения.

В качестве примера системы класса 2 рассмотрим передаточную функцию разомкнутой цепи

$$HG(s) = \frac{2(s+1)}{s^2}.$$

Частотная характеристика разомкнутой цепи определяется выражением

$$HG(j\omega) = \frac{2(1+j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{2(1+j\omega)}{-\omega^2}.$$



Фиг. 4. 25. Характеристики системы класса 2.

Амплитудно-фазовая, логарифмическая амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики для этой системы даны на фиг. 4. 25. Логарифмическая амплитудно-частотная и фазо-частотные характеристики определяются следующими выражениями:

$$\delta\delta = 20 \lg 2 - 20 \lg \omega^2 + 20 \lg (1 + \omega^2)^{1/2};$$

$$\varphi = -180^\circ + \text{arc tg } \omega.$$

Характер этой функции при высоких частотах определяется следующим образом:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{j2\omega}{(j\omega)^2} = 0 \angle -90^\circ,$$

а при низких частотах

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2}{(j\omega)^2} = \infty \angle -180^\circ,$$

По графикам на фиг. 4. 21 можно определить следующие величины: ω_a — пересечение линии —12 дБ/октава с осью абсцисс, равна 1,41;

$$K_a = \omega_a^2 = (1,41)^2 = 2 = \omega_n^2; \quad \varphi_{pm} = 65,5^\circ; \quad \zeta = 0,71.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$s^2 + 2s + 2 = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $\omega_n = \sqrt{2} = 1,414$ и $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{2} \approx 0,707$. Эти значения хорошо совпадают с результатами графического определения.

4. 7. ПОЛУЧЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАМКНУТОЙ ЦЕПИ ПО ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТОЙ ЦЕПИ

Нередко желательно определить частотную характеристику замкнутой цепи данной системы. Важнейшая причина состоит в том, что это позволяет получить хорошую общую картину о свойствах системы. В общем, частотная характеристика замкнутой цепи для системы управления аналогична характеристике фильтра нижних частот. Возможно связать ширину полосы частот системы с временем нарастания сигнала при реакции на единичную входную функцию. Рассмотрим идеальный фильтр нижних частот (фиг. 4. 26, а). На фиг. 4. 26, б показана кривая реакции на единичную входную функцию. Время нарастания сигнала τ_r и ширина полосы частот ω_c связаны отношением

$$\tau_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{\pi}{\omega_c}, \quad (4. 95)$$

где τ_r и ω_c определяются из фиг. 4. 26. Время нарастания сигнала¹ определяется по наклону частотной характеристики при прохождении через значение $\frac{1}{2}$.

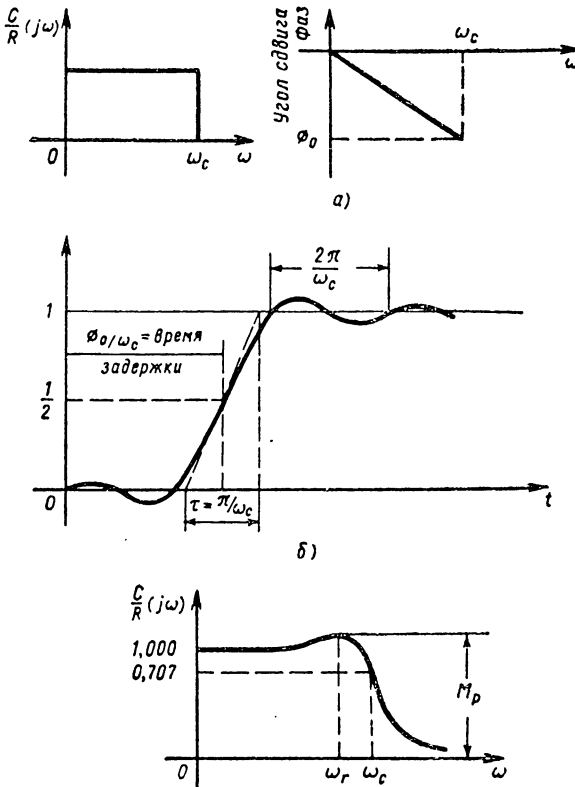
Нет необходимости проверять равенство (4. 95), но оно может быть выведено посредством применения интеграла Фурье.

Преимущество этого равенства состоит в том, что оно устанавливает связь между временной и частотной областями. Если система реагирует на единичную входную функцию с временем нарастания сигнала 0,1 сек, то она должна иметь ширину полосы частот минимум 5 гц. Конечно, эта связь является приблизительной и не может учитываться при рассмотрении максимального перерегулирования и времени регулирования. Ее основное преимущество состоит в том,

¹ Для вычисления времени нарастания сигнала имеются другие формулы, основанные на определении термина «время нарастания». Как правило, $\tau_r = K \frac{(2\pi)}{\omega_c}$, где K может быть задано в интервале между 0,3 и 0,6, в зависимости от примененного определения. Равенство (4. 95) легко запомнить, так как время нарастания сигнала равно половине периода при максимальной частоте пропускания фильтра.

что она представляет простое правило, которое может быть применено во многих случаях.

Если проектируемая система аппроксимируется простой недодмпированной системой второго порядка, то можно найти более приемлемое определение требуемой ширины полосы частот. На осно-



Фиг. 4.26. Кривые реакции идеального фильтра на ступенчатую входную функцию:

а — идеальный фильтр; б — кривая реакции на ступенчатую входную функцию; в — частотная характеристика замкнутой цепи слабодмпированной системы второго порядка.

вании результатов главы 1 известно, что постоянная времени переходного процесса для такой системы определяется равенством $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n}$. Следовательно, частота недодмпированных колебаний ω_n связана с постоянной времени τ и относительным коэффициентом демпфирования ξ равенством

$$\omega_n = \frac{1}{\xi\tau}. \quad (4.96)$$

Если максимальное перерегулирование выражено через относительный коэффициент демпфирования, а время регулирования выражено через постоянную времени, тогда равенство (4. 96) можно использовать для определения частоты ω_n . Ширина полосы частот проектируемой системы определяется затем из $\omega_c \approx \omega_n$. Например, предположим, что система достигнет установившегося состояния при единичной входной функции в течение 0,1 сек и что максимальное перерегулирование в переходном процессе не превышает 31 % конечного времени. При этих условиях $\tau = \frac{0,1}{3}$ (в предположении, что установившееся состояние достигается через трехкратное значение постоянной времени) и $\xi = 0,35$ (на основании фиг. 1. 8). Подстановка в уравнение (4. 96) дает $\omega_n = \frac{3}{\{0,1(0,35)\}} = 85,6 \text{ рад/сек}$. Отсюда, ширина полосы частот для этой системы равняется приблизительно $\frac{85,6}{2} \pi = 13,6 \text{ гц}$.

Возможно найти другие связи между временной и частотной областями, когда частотная характеристика замкнутой цепи имеет пик M_p , как видно на фиг. 4. 26, в. Полезно применить аппроксимацию, рассматривая пик частотной характеристики, как обусловленный эквивалентной системой второго порядка, так что формулы, выведенные в разделе 2. 1, могут быть с успехом применены для установления зависимости ξ и ω_n от пика M_p .

Наконец, возможно определить точную характеристику переходного процесса системы по частотным характеристикам замкнутой цепи.

Как упоминалось раньше, эти методы являются трудоемкими и бесполезными при проектировании.

Передаточная функция замкнутой цепи для системы с обратной связью определяется уравнением (4. 2а). Если функции $G(s)$ и $H(s)$ даны в алгебраической форме, то передаточную функцию замкнутой цепи можно получить прямой подстановкой в уравнение (4. 2а). Результат получается в виде полинома и его можно анализировать как дифференциальное уравнение или в частотной области. Если же даны амплитудно-фазовая характеристика или логарифмическая амплитудно-частотная и фазо-частотные кривые для функций $G(j\omega)$ и $HG(j\omega)$, то частотную характеристику замкнутой цепи можно определить графически. Как правило, этот метод является более сложным процессом, кроме частного случая, когда $H(s) = \text{const}$. Если эта константа отличается от единицы, то можно применить фиг. 4. 2, г для преобразования системы при условии единичной обратной связи.

На фиг. 4. 27 показана амплитудно-фазовая кривая для типичной передаточной функции разомкнутой цепи с единичной обратной связью

$$HG(j\omega) = G(j\omega).$$

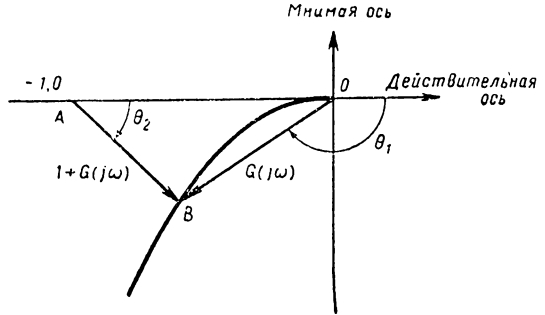
Передаточная функция замкнутой цепи для этой системы с обратной связью определяется непосредственно по ее схеме, используя следующее уравнение

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}. \quad (4.97)$$

Как было показано в главе 2, амплитудно-фазовая кривая для члена в знаменателе соответствует простой амплитудно-фазовой кривой для $G(j\omega)$ с началом координат, сдвинутым в точку $(-1,0)$. Отсюда следует, что при любой частоте

$$\begin{aligned} \left| \frac{C}{R}(j\omega) \right| &= \\ &= \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| = \frac{OB}{AB}; \end{aligned} \quad (4.98a)$$

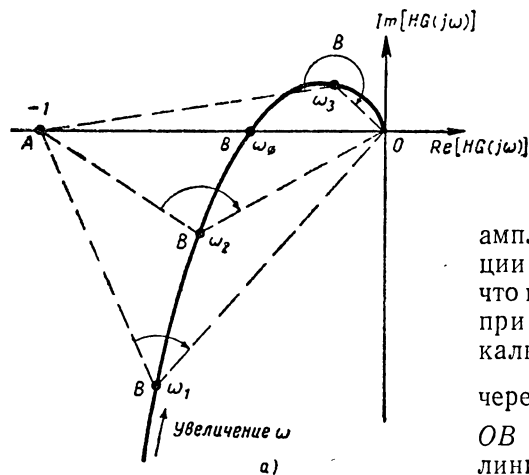
$$\begin{aligned} \varphi(j\omega) &= \sphericalangle G(j\omega) - \sphericalangle [1 + \\ &+ G(j\omega)] = -(\theta_1 - \theta_2) = \\ &= -\sphericalangle ABO. \end{aligned} \quad (4.98b)$$



Фиг. 4. 27. Определение передаточной функции замкнутой цепи для случая стопроцентной обратной связи.

Уравнения (4. 98) можно использовать при любой частоте передаточной функции разомкнутой цепи для вывода амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристики замкнутой цепи. Рассмотрим, например, передаточную функцию замкнутой цепи класса 1, изображенной на фиг. 4. 28, а. На фиг. 4. 28, б показаны частотные характеристики замкнутой системы. При $\omega = 0$ отношение $\frac{OB}{AB}$ приближается к единице (оба вектора очень большие). С увеличением частоты ω AB становится меньше, чем OB , так что отношение $\frac{OB}{AB} > 1$, достигая максимального значения при некоторой частоте $\omega = \omega_r$. При частоте $\omega = \omega_2$ имеем $AB = OB$. При $\omega > \omega_2$ AB больше, чем OB и отношение $\frac{OB}{AB} < 1$. Фазо-частотная характеристика может быть объяснена аналогичным образом. При $\omega = 0$ фазовый угол ABO равен нулю. С увеличением частоты угол ABO увеличивается до 180° при $\omega = \omega_p$, достигая максимального значения 270° , когда относительно круговой частота приближается к бесконечности. Следовательно, фазо-частотную характеристику замкнутой цепи можно построить в виде кривой, изображенной на фиг. 4. 28, б.

Линии постоянной амплитуды (окружности M). Прежде чем перейти к вычислению модуля передаточной функции замкнутой цепи при любой частоте возможно определить эту величину непосредственно по амплитудно-фазовой кривой. Для этого на миллиметровке



строится семейство кривых, представляющих геометрическое место всех точек, при которых отношение OB/AB постоянно и обозначено буквой M . Эти кривые представляют собой линии постоянной

амплитуды передаточной функции замкнутой цепи. Очевидно, что геометрическим местом точек при $M = 1$ является вертикальная линия, проходящая через точку $(-\frac{1}{2}, 0)$, так как $OB = AB$ для любой точки линии. Геометрические места для линий с постоянной M представляются семейством окружностей. Их уравнение можно вывести следующим образом. Примем, что x, y являются координатами точки искомого годографа (фиг. 4.29). Следовательно,

$$\frac{OB}{AB} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}} = M. \quad (4.99)$$

Это уравнение можно изменить следующим образом:

$$\text{при } M < 1 \quad \left(x - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2; \quad (4.100a)$$

$$\text{при } M > 1 \quad \left(x + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2. \quad (4.100б)$$

Фиг. 4.28. Построение частотных характеристик по передаточной функции цепи:

а — амплитудно-фазовая характеристика; б — частотная характеристика замкнутой системы.

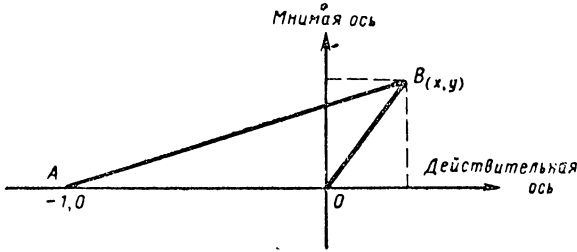
Таким образом линии постоянной амплитуды $\frac{C}{R}(j\omega)$ оказываются окружностями с радиусом $\left|\frac{M}{(M^2-1)}\right|$ и с центрами, расположен-

НЫМИ В ТОЧКАХ:

$$\text{при } M > 1 \quad y = 0; \quad x = -\frac{M^2}{M^2 - 1}; \quad (4.101a)$$

$$\text{при } M < 1 \quad y = 0; \quad x = \frac{M^2}{1 - M^2}. \quad (4.101b)$$

На фиг. 4. 30 показано семейство окружностей с постоянной M .
Дополнительные данные, касающиеся окружностей M , можно

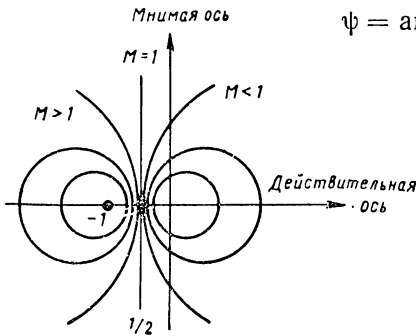


Фиг. 4. 29. Определение окружности M и N .

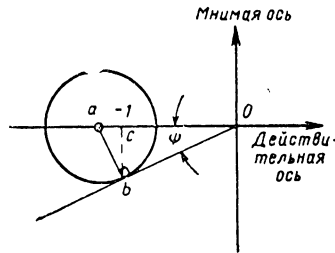
получить на основании фиг. 4. 31, где показана одна окружность M .
Из геометрических отношений на фигуре вытекают следующие зависимости:

$$OC = 1; \quad (4.102a)$$

$$\psi = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (4.102b)$$



Фиг. 4. 30. Окружности M постоянной амплитуды.



$$Oa = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

$$ab = \frac{M}{M^2 - 1}$$

$$|Oc| = 1$$

$$\psi = \sin^{-1} \frac{1}{M}$$

Фиг. 4. 31. Свойства окружности M .

Фиг. 4. 32 иллюстрирует применение окружностей M для определения частотной характеристики замкнутой цепи. Важно заметить, что максимальная амплитуда $\frac{C}{R}(j\omega)$, обозначаемая буквой M_p , имеет место тогда, когда одна из окружностей M касается амплитудно-фазовой кривой $G(j\omega)$. Это соответствует «резонансному пику» частотной характеристики замкнутой системы.

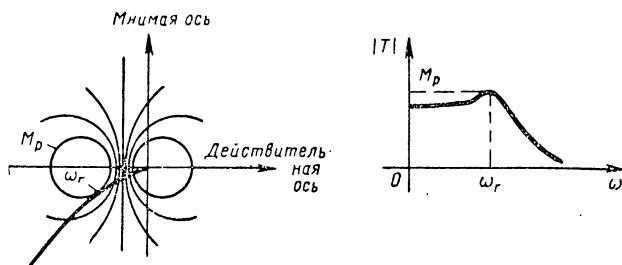
Линии постоянного фазового угла (окружности N). Применяя уравнение (4. 986), возможно также построить семейство кривых

постоянного фазового угла для передаточной функции замкнутой цепи. Они названы окружностями N , где N является константой, определяемой равенством

$$\angle \frac{C}{R}(j\omega) = \text{arc tg } N. \quad (4.103)$$

Примем, что x , y являются координатами точки искомого годографа. Из фиг. 4.29 следует, что

$$\begin{aligned} \angle T(j\omega) &= \text{arc tg } N = \text{arc tg } \frac{y}{x} - \text{arc tg } \frac{y}{1+x} = \\ &= \text{arc tg } \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{1+x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right) \left[\frac{y}{1+x}\right]}. \end{aligned} \quad (4.104)$$



Фиг. 4.32. Применение окружности M для определения передаточной функции замкнутой цепи.

После упрощения этого уравнения приходим к следующему результату:

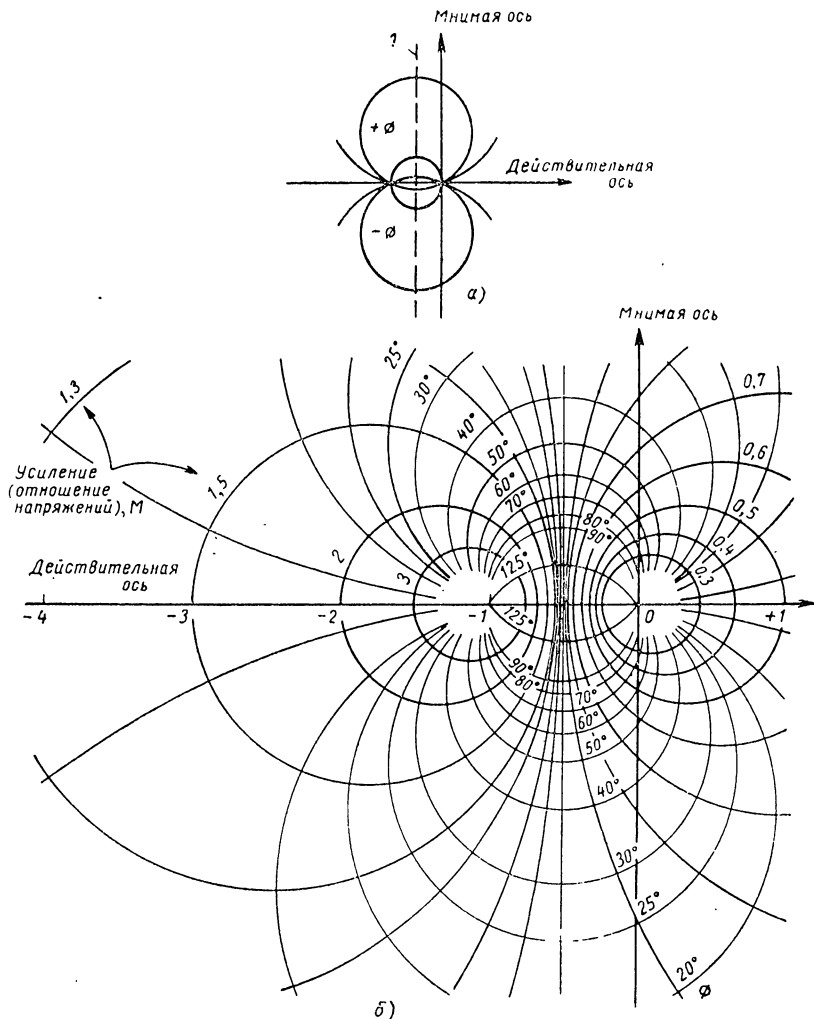
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{N^2 + 1}{N^2}. \quad (4.105)$$

Это уравнение дает семейство окружностей, которые показаны на фиг. 4.33. Использование окружности N для определения фазового угла передаточной функции замкнутой цепи идентично с применением окружностей M для определения амплитуды.

Пример применения окружностей M . Определение коэффициента усиления. В качестве примера использования окружностей M рассмотрим случай, когда требуется отрегулировать коэффициент усиления K системы с единичной обратной связью таким образом, чтобы система имела заданный резонансный пик $M = M_p$.

Влияние изменения коэффициента усиления на амплитудно-фазовую характеристику показано на фиг. 4.34, где изображена $G(j\omega)$ при двух значениях коэффициента K , когда K_2 больше K_1 . После построения окружности M , которая соответствует требуемому значению M_p , задача сводится только к определению значения K , требуемого для построения кривой $G(j\omega)$, касательной к окруж-

ности M_p . Вместо построения окружности M_p и последующей проверки расположения функции касательной $G(j\omega)$ можно значительно легче первоначально построить функцию разомкнутой цепи и затем



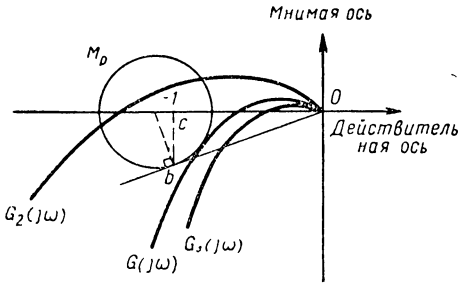
Фиг. 4.33.

а — линия окружностей N постоянных фазовых углов; б — линии постоянных амплитуд и фазовых углов на одной координатной сетке; l — геометрическое место центров минус 0,5.

определить положение касательной окружности M_p . Для осуществления этого рекомендуется применять следующий порядок (см. также фиг. 4.35).

1. Строится амплитудно-фазовая кривая для передаточной функции разомкнутой цепи при $K = 1$.

2. При данном значении M_p определяется угол ψ_p на основании уравнения (4.102б), а именно $\psi_p = \arcsin \frac{1}{M_p}$; это определяет



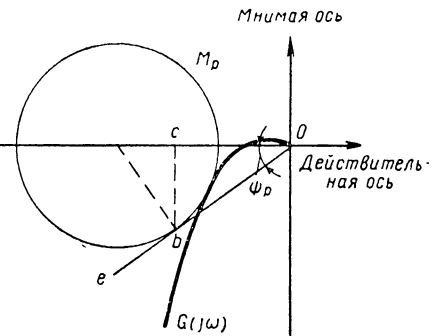
Фиг. 4.34. Амплитудно-фазовые характеристики при разных коэффициентах усиления $K_2 > K > K_1$.

тогда $Oc \neq 1$. Для определения необходимо увеличить линейные на множитель, равный $\frac{1}{Oc}$.

После выполнения этого условия любая точка амплитудно-фазовой кривой, которая первоначально имела координаты x, y , теперь будет иметь координаты $(\frac{x}{Oc}, \frac{y}{Oc})$. Следовательно, первоначальная кривая для $G(j\omega)$ преобразована в кривую функции $(\frac{1}{Oc})G(j\omega)$. Так как это преобразование кривой, касательной к окружности M_p , то мы нашли искомый коэффициент усиления. Следовательно, требуемое усиление при заданном значении M_p будет определяться $\frac{1}{Oc}$.

линию Oe .
3. При помощи циркуля строится окружность M_p , с центром на отрицательной действительной оси и касательная к линии Oe и к амплитудно-фазовой кривой для $G(j\omega)$. Это определяет точку c .

4. Если $K = 1$ может быть принято за правильное значение коэффициента усиления, то расстояние Oc будет равно единице [см. уравнение (4.102а)]. Так как это очень маловероятно, расстояния Oc , равного единице, шкалы миллиметровой бумаги



Фиг. 4.35. Определение коэффициента усиления для заданного значения M_p .

ЗАДАЧИ

4. 1. Проверить все формулы преобразования структурных схем в табл. 4. 1.

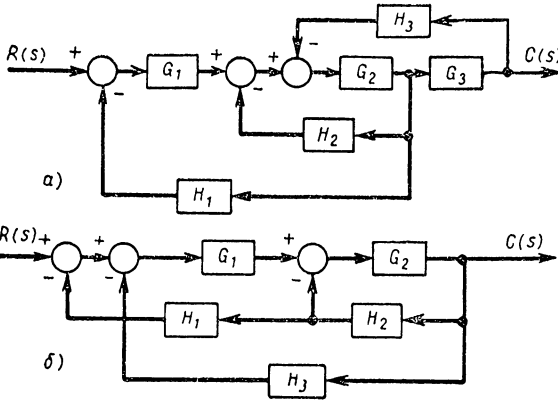
4. 2. Преобразовать структурные схемы на фиг. 4. 36, соответственно выделяя H_1, H_2, H_3 .

4. 3. Определить выходной сигнал системы при любых входных функциях, указанных на фиг. 4. 37.

4. 4. Система класса 1, примененная для регулирования статического положения, имеет передаточную функцию

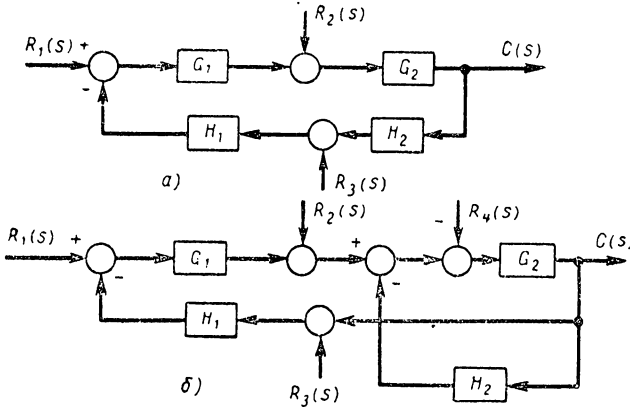
$$HG = \frac{10}{j\omega(1 + j0,07\omega)(1 + j0,03\omega)}$$

а) Построить асимптотическую логарифмическую кривую и определить критический коэффициент усиления и предельный фазовый угол.



Фиг. 4. 36. Преобразование структурной системы.

б) Определить реакцию замкнутой системы на единичную, кусочно-линейную и параболическую входные функции.



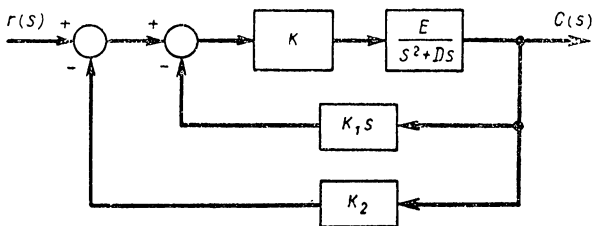
Фиг. 4. 37. Определение выхода системы.

4. 5. Структурная схема простой автоматической системы управления, примененная для управления самолетами, показана на фиг. 4. 38.

а) Найти передаточную функцию системы $\frac{C}{R}(s)$.

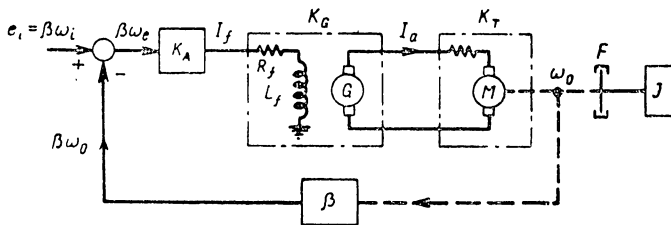
б) Если $E = 25$, $D = 0,8$ и $K_2 = 1$, определить K_1 и K так, чтобы частота собственных колебаний системы равнялась 6 рад/сек и относительный коэффициент демпфирования составлял $0,8$.

в) Более точный анализ показывает, что звено, отмеченное буквой K , в действительности должно иметь коэффициент усиления $\frac{K \cdot a}{s + a}$, где $a = 12$ и K имеет прежнее значение. Определить критический коэффициент усиления и предельный фазовый угол для этой системы.



Фиг. 4. 38. Структурная схема системы автоматического управления самолетом.

4. 6. Сервомеханизм регулирования скорости показан в виде структурной схемы на фиг. 4. 39. Обмотка возбуждения генератора имеет активное сопротивление R_f и индуктивное сопротивление L_f . Обозначим R — активное сопротивление цепи якоря для двигателя



Фиг. 4. 39. Схема сервомеханизма для управления скоростью.

и генератора. Предположим, что нагрузки нет. Кроме того, выходное напряжение генератора определяется выражением

$$K_G I_f = I_a R + K_1 \omega_0,$$

где K_G = напряжение/ток возбуждения.

Выходная скорость и момент, создаваемый двигателем, определяются

$$K_T I_a = \frac{J d\omega_0}{dt} + F \omega_0,$$

где K_T = момент/ток якоря.

а) Найти передаточную функцию разомкнутой цепи $\frac{\omega_0}{\omega_e}$.

б) Упростить результат таким образом, чтобы он имел форму, аналогичную общей передаточной функции и определить класс системы.

4. 7. Даны два позиционных сервомеханизма с передаточными функциями:

для первого сервомеханизма

$$KG(j\omega) = \frac{8}{j\omega(j\omega 0,125 + 1)};$$

для второго сервомеханизма

$$K'G'(j\omega) = \frac{16 + j\omega 0,414}{j\omega(j\omega 0,125 + 1)}.$$

Найти для каждого сервомеханизма:

- Построить структурную схему с определением всех звеньев.
- Определить относительный коэффициент демпфирования и частоты собственных демпфированных и недемпфированных колебаний.

в) Построить кривую ошибки в радианах в зависимости от времени в секундах для случая, когда каждый сервомеханизм подвергается перемещению в 1 рад.

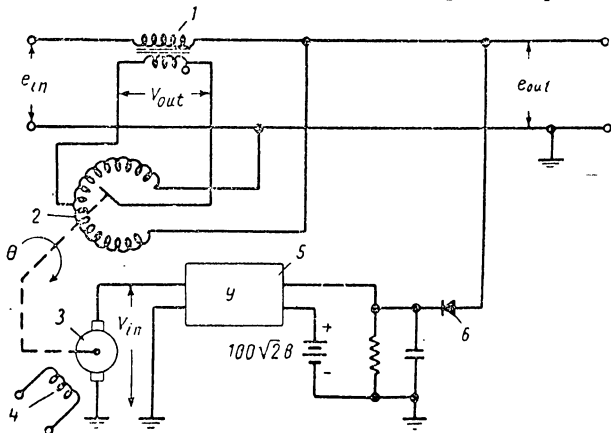
4. 8. Принципиальная схема системы регулирования напряжения дана на фиг. 4. 40

$$T = AV - B \frac{d\theta}{dt},$$

где $A = 10^{-4} \times \Pi_1^*$ кгм/в; $B = 10^{-5} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек. Моментом инерции двигателя и его нагрузкой можно пренебречь. Трение

Фиг. 4. 40. Схема системы регулирования напряжения: e_{in} — нерегулируемое входное напряжение; e_{out} — регулируемое выходное напряжение (среднеквадратичное значение переменного напряжения):

1 — понижающий трансформатор 100 : 1; e_{out} — регулируемое выходное напряжение; 2 — плавно регулируемый автотрансформатор; 3 — электродвигатель постоянного тока; 4 — обмотка постоянного возбуждения; 5 — усилитель с коэффициентом 100; 6 — выпрямитель пнк.



двигателя определяется равным $F = 10^{-5} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек. Выходная величина регулятора может быть принята равной $V_0 = (50/\pi) \theta$, где угол θ дан в радианах.

а) Построить структурную схему этой системы, определив передаточные функции для каждого блока.

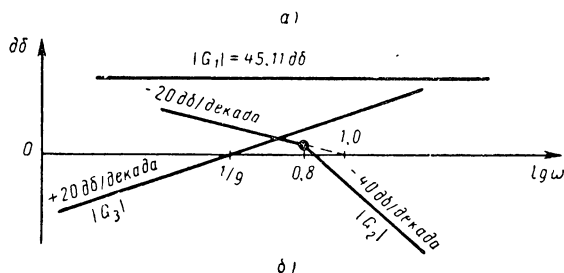
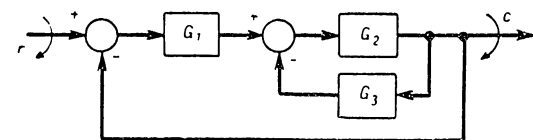
б) Написать дифференциальное уравнение системы, связывающее значения e_0 и e_i непосредственно по структурной схеме.

* См. конец гл. 1.

в) Определить регулируемое выходное напряжение в установившемся состоянии.

г) Определить постоянную времени этой системы.

4. 9. Структурная схема сервомеханизма изображена на фиг. 4. 41. Характеристики асимптотического затухания для G_1 , G_2 , G_3 даны на той же фигуре.

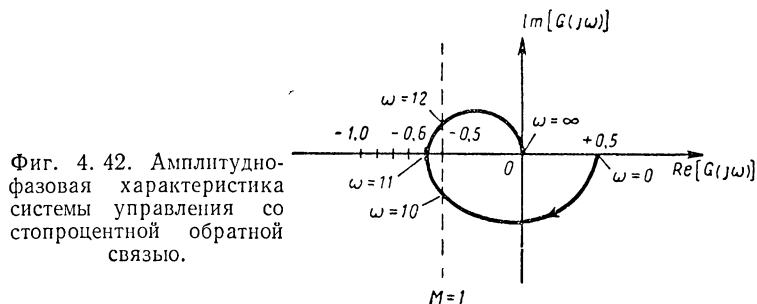


Фиг. 4. 41. Структурная схема сервомеханизма и его характеристики.

а) Определить относительный коэффициент демпфирования этой системы и частоту колебаний.

б) Если r является единичной входной функцией скорости 10 рад/сек, то как велика ошибка положения в установившемся режиме.

4. 10. На фиг. 4. 42 дана амплитудно-фазовая кривая $G(j\omega)$ для системы управления с единичной обратной связью.



Фиг. 4. 42. Амплитудно-фазовая характеристика системы управления со стопроцентной обратной связью.

а) Построить $\left| \frac{C}{R} (j\omega) \right|$ для замкнутой системы в зависимости от круговой частоты. Определить значения при $\omega = 0, 10, 11, 12$ и ∞ .

б) Определить класс системы.

в) Построить частотную зависимость фазового угла $\frac{C}{R} (j\omega)$.

ГЛАВА 5

УСТОЙЧИВОСТЬ

Настоящая глава посвящена исследованию устойчивости систем. Возможность неустойчивой работы существует для всех систем с обратной связью вследствие самого характера обратной связи. Если возникают определенные нежелательные условия, то замкнутая система становится неустойчивой и она не в состоянии выполнять задачи регулирования. В неустойчивой системе движение непрерывно нарастает или она совершает незатухающие колебания, которые часто могут привести к повреждению системы. Инженеры должны уметь ответить на два важных вопроса. Во-первых, при каких условиях система становится неустойчивой и, во-вторых, какие изменения конструкции можно осуществить для предотвращения неустойчивости и как эти изменения влияют на характеристику замкнутой системы. Второй вопрос входит в предмет рассмотрения следующей главы. В настоящей главе рассмотрен главным образом первый вопрос. К сожалению, ответ на этот вопрос непрост, особенно для многоконтурных систем. Необходимо этому вопросу посвятить целую главу, если даже основные исходные условия совершенно просты и были неоднократно ранее установлены, например, что система абсолютно устойчива тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения находятся в левой половине комплексной плоскости. При этом условии все члены в решении, характеризующем собственные движения системы, затухают экспоненциально со временем и система работает устойчиво. Это понятие является исходным моментом для всего рассмотрения устойчивости систем.

5. 1. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА

Анализ устойчивости, предложенный Раусом, состоит в разработке математического метода определения числа корней алгебраического уравнения, имеющих положительные действительные части. Применение этого метода к характеристическому уравнению системы управления позволяет просто проверить абсолютную устойчивость, потому что устойчивая система не может иметь ни одного корня характеристического уравнения с положительной действительной

частью. Критерий устойчивости Рауса дается здесь без доказательства. Читатель, который интересуется этим вопросом, может найти обстоятельный ответ в других работах на эту тему. Применение этого критерия можно иллюстрировать на следующем примере. Примем, что характеристическое уравнение системы определяется следующим выражением:

$$B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + B_{n-2} s^{n-2} + \dots + B_0 = 0. \quad (5.1)$$

Расположим коэффициенты характеристического уравнения в первые два ряда, как показано ниже:

Ряд 1	B_n	B_{n-2}	$B_{n-4} \dots$	
Ряд 2	B_{n-1}	B_{n-3}	$B_{n-5} \dots$	
	a_1	a_2	$a_3 \dots$	(5.2)
	b_1	b_2	$b_3 \dots$	
	c_1	c_2	$c_3 \dots$	

Другие члены $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2$ в любом ряду определяются путем перемножения членов двух предыдущих рядов в следующем порядке:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{B_{n-1} B_{n-2} - B_n B_{n-3}}{B_{n-1}}; & a_2 &= \frac{B_{n-1} B_{n-4} - B_n B_{n-5}}{B_{n-1}}; \\
 b_1 &= \frac{a_1 B_{n-1} - B_{n-1} a_2}{a_1}; & b_2 &= \frac{a_1 B_{n-5} - B_{n-1} a_3}{a_1}; \\
 c_1 &= \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{b_1}; & c_2 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}.
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если в первоначальном характеристическом уравнении отсутствуют некоторые коэффициенты, то они заменяются нулями.

Для полиномов конечной степени разложение в ряды [см. уравнение (5.2)] всегда заканчивается конечным числом членов; число членов в каждом ряду уменьшается при составлении матрицы. Все члены одного ряда могут быть умножены или разделены на положительное число без изменения результатов. Это часто упрощает процесс вычислений для нахождения коэффициентов последующего ряда.

После окончательного составления таблицы руководствуются следующим правилом. Число раз изменений знака у членов в первой колонке таблицы равняется числу корней с положительной действительной частью. Следовательно, в случае системы с абсолютной устойчивостью не может быть каких-либо изменений знака у членов в первой колонке.

Рассмотрим числовой пример системы со следующим характеристическим уравнением

$$s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0. \quad (5.4)$$

Таблица коэффициентов вычисляется следующим образом:

1	1	4	
2	3	5	
—1	3		после умножения на 2
9	5		
32			после умножения на 9
5			

Проверка первой колонки позволяет установить, что имеет место дважды изменение знака от +2 к —1 и от —1 к +9. Поэтому характеристическое уравнение имеет два корня с положительной действительной частью и система не будет устойчивой.

В некоторых случаях член первой колонки в ряду равен нулю, в то время как остальные члены ряда конечны. Если процесс составления таблицы продолжит, то следующий ряд становится бесконечным и таблица становится бесполезной. Во избежание этих затруднений нулевой член может быть заменен на малую величину e и операция может быть продолжена как обычно. Рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0. \quad (5.5)$$

Таблица Рауса (после подстановки e вместо нуля) будет выглядеть следующим образом:

1	1	1
2	2	
e	1	
$2 - \frac{2}{e}$		
1		

Когда e приближается к нулю, член $2 - \frac{2}{e}$ приближается к большому отрицательному значению, так что знак в первой колонке будет изменяться дважды, что означает наличие двух корней характеристического уравнения с положительной действительной частью. Отсюда следует, что система неустойчива. Описанный способ может быть использован для иллюстрации абсолютной неустойчивости системы, если нуль появляется в любом месте первой колонки таблицы Рауса. Аналогично метод Рауса может быть использован для иллюстрации абсолютной неустойчивости системы, когда какой-либо из членов характеристического уравнения отсутствует или эти члены не имеют одинаковых знаков.

Критерий Рауса можно применить к системе любого порядка для определения условий, которые должны существовать между коэффициентами характеристического уравнения для абсолютно устойчивой системы. Например, рассмотрим характеристическое уравнение системы третьего порядка, коэффициенты которого имеют положительные значения, отличающиеся от нуля,

$$B_3s^3 + B_2s^2 + B_1s + B_0 = 0. \quad (5.6)$$

Таблица коэффициентов дана ниже

$$\begin{array}{cc} B_3 & B_1 \\ B_2 & B_0 \\ \frac{B_2 B_1 - B_3 B_0}{B_2} & \\ B_0 & \end{array}$$

Необходимо и достаточно для абсолютной устойчивости системы, чтобы

$$B_2 B_1 > B_3 B_0. \quad (5.7)$$

Аналогично можно рассмотреть характеристическое уравнение системы четвертого порядка

$$B_4 s^4 + B_3 s^3 + B_2 s^2 + B_1 s + B_0 = 0. \quad (5.8)$$

Применение критерия устойчивости Рауса показывает, что эта система абсолютно устойчива при условии соблюдения следующего соотношения между коэффициентами:

$$B_1 (B_3 B_2 - B_4 B_1) - B_2^2 B_0 > 0. \quad (5.9)$$

Исследуем еще один пример абсолютной устойчивости работы системы управления с передаточным запаздыванием¹ в цепи прямой передачи (фиг. 5. 1).

Передаточную функцию, соответствующую передаточному запаздыванию, нетрудно составить. Предположим, что выходная величина звена с передаточным запаздыванием равна входной величине с запаздыванием на T сек. Математически это может быть выражено следующим образом:

$$c_o(t) = c_i(t - T). \quad (5.10)$$

Преобразование Лапласа обеих частей последнего выражения и использование уравнения

$$e^{-sT} F(s) = \int_0^{\infty} f(t - T) e^{-st} dt = f \mathcal{L}(t - T)$$

дают

$$\frac{C_o(s)}{C_i(s)} = e^{-sT}. \quad (5.11)$$

Следовательно, передаточная функция при передаточном запаздывании будет определяться e^{-sT} , как показано на фиг. 5. 1.

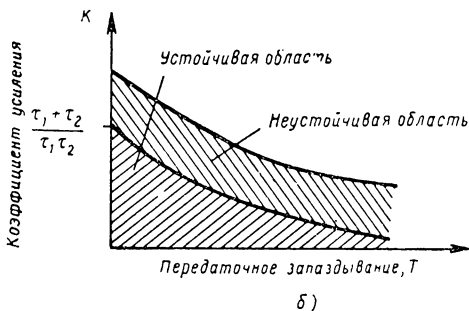
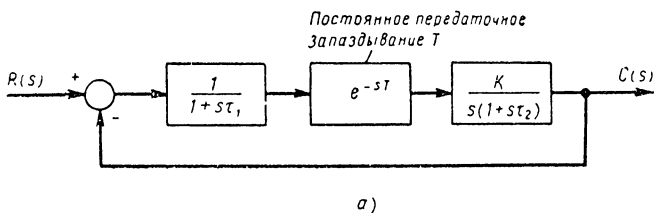
¹ Передаточное запаздывание (период задержки) может быть обусловлено многими причинами, например, периодом протекания жидкости через трубу в системах химического производства.

Теперь исследуем абсолютную устойчивость системы на фиг. 5. 1 через следующие величины: коэффициент усиления прямой цепи K , постоянные времени τ_1 и τ_2 и передаточное запаздывание T . Характеристическое уравнение этой системы определяется

$$1 + \frac{Ke^{-sT}}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} = 0. \quad (5.12)$$

Применение критерия Рауса к конечному полиному по s дает в первом приближении при малых значениях T и низкой частоте

$$e^{-sT} \approx 1 - Ts. \quad (5.13)$$



Фиг. 5. 1. Структурная схема и диаграмма устойчивости системы управления с передаточным запаздыванием.

Таким образом, характеристическое уравнение превращается

$$\tau_1\tau_2s^3 + (\tau_1 + \tau_2)s^2 + (1 - KT)s + K = 0. \quad (5.14)$$

Это уравнение третьей степени, так что условие абсолютной устойчивости, выраженное через коэффициенты, определяется уравнением (5. 7). Отсюда, система будет устойчива при соблюдении следующего неравенства:

$$(1 - KT)(\tau_1 + \tau_2) > K\tau_1\tau_2. \quad (5.15)$$

Перегруппировка членов в выражении (5. 15) приводит к условию устойчивости

$$K < \frac{1}{\frac{\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)} + T}. \quad (5.16)$$

Граница между устойчивостью и неустойчивостью имеет место тогда, когда

$$K = \left(\frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} + T \right)^{-1}. \quad (5.17)$$

Последнее выражение графически показано внизу фиг. 5. 1, где значения K нанесены в зависимости от T при постоянных значениях τ_1 и τ_2 . Система будет устойчива при любом заданном периоде задержки T , когда коэффициент усиления K находится ниже граничной кривой и система будет неустойчивой, когда этот коэффициент K лежит выше названной кривой. Чем ближе значение коэффициента K к кривой, тем более система имеет тенденцию к неустойчивости при любых неблагоприятных изменениях постоянных времени τ_1 и τ_2 , которые могут быть обусловлены температурными колебаниями или допусками звеньев. Следует подчеркнуть, что условия устойчивости по неравенству (5. 16) зависят от точности приближенного выражения (5. 13). Если в разложении экспоненциальной функции взять несколько членов ряда и затем применить критерий Рауса, то можно получить более точное выражение для условия устойчивости. Сравнение этого результата с предыдущим показывает, что первое приближение вполне достаточно для получения требуемых результатов.

5. 2. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

Применение критерия устойчивости Рауса имеет два основных недостатка. Во-первых, этот критерий позволяет определять только абсолютную устойчивость системы и очень мало дает для определения степени устойчивости. Во-вторых, применение критерия Рауса предполагает наличие характеристического уравнения в виде полинома. Однако это не всегда имеет место, особенно тогда, когда передаточная функция цепи дана в виде экспериментальных данных частотной характеристики. Для применения критерия Рауса в подобном случае необходимо аппроксимировать данные в виде алгебраического выражения так, чтобы характеристическое уравнение можно было перевести в полином.

Недостатки критерия Рауса устранены в критерии устойчивости Найквиста.

Анализ устойчивости по Найквисту основан на графическом методе, для чего могут быть использованы экспериментальные частотные характеристики или результаты вычислений. Следовательно, это позволяет определять устойчивость замкнутой системы по данным разомкнутой цепи, т. е. по данным, полученным до замыкания цепи. Если система стремится к неустойчивости при замыкании цепи, то это можно узнать заранее. В действительности устойчивость можно проверить с помощью карандаша и бумаги, даже до построения тех или иных звеньев. Кроме того, кривая Найквиста может дать сведения о степени устойчивости. В случае неустойчивых систем критерий Найквиста показывает, как можно стабилизировать систему

при помощи корректирующих контуров и достигнуть требуемой характеристики замкнутой системы.

Ввиду того что критерий Найквиста является очень полезным каждому инженеру, необходимо ознакомиться с математическим обоснованием его, чтобы этот критерий мог быть использован как средство расчета. Следующий раздел посвящается поэтому изучению математического обоснования критерия Найквиста.

Две теоремы построения кривой Найквиста. Как правило, передаточная функция разомкнутой цепи системы представляет функцию комплексного переменного s , где $s = \sigma + j\omega$. Графическое изображение подобной функции более трудно, чем построение графика функции действительного переменного. Рассмотрим функцию действительного переменного x , например, $F(x) = x^2$. Для графического построения кривой этой функции можно использовать один лист миллиметровой бумаги и нанести значения функции $F(x)$ по оси ординат в зависимости от значений x по оси абсцисс (фиг. 5. 2, а). Теперь рассмотрим ту же функцию комплексного переменного s , т. е.

$$F(s) = s^2 = (\sigma + j\omega)^2 = (\sigma^2 - \omega^2) + j2\sigma\omega.$$

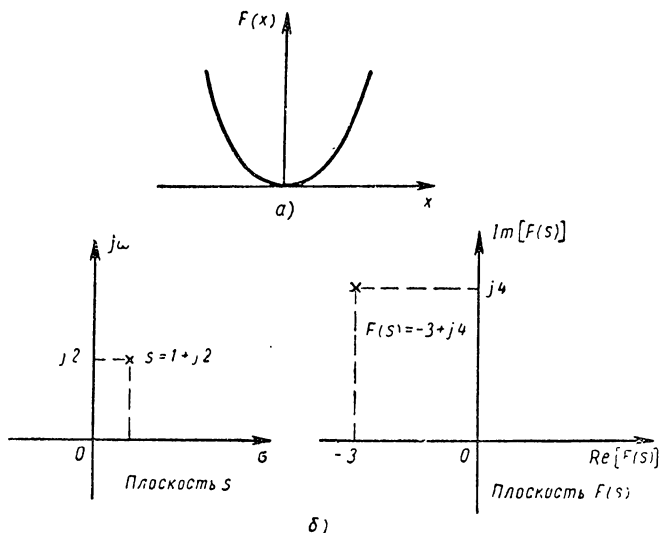
Эту функцию нельзя изобразить в простых прямоугольных координатах по двум причинам. Во-первых, комплексная переменная величина $s = \sigma + j\omega$ зависит от двух независимых величин σ и ω . Во-вторых, функция $F(s)$ при любом данном значении s является комплексным числом, так что она должна быть изображена точкой на комплексной плоскости. Для построения кривой этой функции необходимо два графика. Первый будет изображать плоскость $F(s)$ с действительной осью $\text{Re}[F(s)]$ и мнимой осью $\text{Im}[F(s)]$. Второй будет изображать плоскость s с осями σ и $j\omega$. Любой точке на плоскости s будет соответствовать точка на плоскости $F(s)$. Например, если $s = 1 + j2$, то

$$F(s) = s^2 = (1 + j2)^2 = -3 + 4j.$$

На фиг. 5. 2, б показано, что точка $s = 1 + j2$ в плоскости s соответствует точке $(-3 + j4)$ на плоскости $F(s)$. Из сказанного становится очевидно, что любому данному геометрическому месту точек на плоскости s соответствует геометрическое место точек на плоскости $F(s)$. Следовательно, графическое изображение функции комплексного переменного зависит от предполагаемого геометрического места точек на плоскости s . Ввиду того что на плоскости s существует бесконечное количество возможных контуров, то может показаться, что почти совершенно бесполезно пытаться графически изобразить функцию комплексного переменного с целью получить некоторые общие результаты. Однако это не совсем так, и некоторые очень полезные теоремы построения и обобщения могут быть выведены, когда функция $F(s)$ является аналитической. Изучение аналитических функций входит в математическую теорию функции

комплексного переменного и читатель может легко найти соответствующую книгу для подробного изучения этого вопроса ¹. Для анализа устойчивости системы достаточно подчеркнуть, что передаточные функции всех практически осуществляемых систем управления являются аналитическими, так что эта теория функций комплексного переменного может быть применена к ним.

Внимание следует обратить в первую очередь на простую теорему построения кривых, которая дана здесь без доказательства. Рассмо-



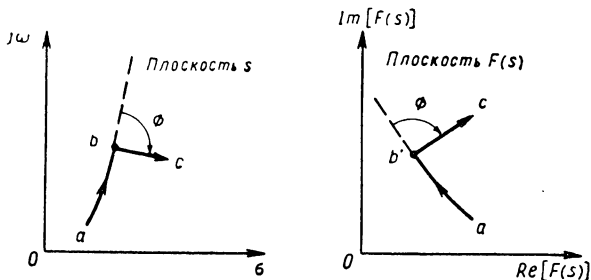
Фиг. 5. 2. Сравнение графиков функций действительного переменного с графиками функции комплексного переменного:

a — кривая функции действительного переменного $F(x) = x^2$;
б — построение функции комплексного переменного $F(s) = s^2$ для точки, где $s = 1 + j2$.

трим случай, когда предполагаемый контур в плоскости s состоит из ломаной линии abc , как показано на фиг. 5. 3, которая не проходит через особые точки функции $F(s)$, т. е. через точки на плоскости s , при которых $F(s) = \infty$. Соответствующий контур на плоскости $F(s)$ показан ломаной линией $a'b'c'$. Благодаря свойству конформного отображения угол φ сохраняет свое значение, как по величине, так и направлению в плоскости s и плоскости $F(s)$. Если угол φ в плоскости s изменяется против часовой стрелки, то угол в плоскости $F(s)$ будет иметь ту же величину при движении против часовой стрелки. Это свойство конформного отображения можно использовать как способ построения передаточных функций разомкнутой цепи.

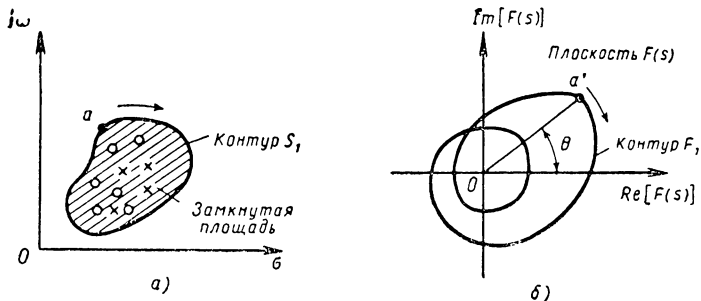
¹ Лаврентьев М. А., Шабот Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. Физматгиз, 1958. (Прим. перевод.)

Вторая теорема построения кривой образует основу критерия устойчивости Найквиста. Первоначально рассмотрим эту теорему, а затем дадим доказательства ее и изложим некоторые возможности ее применения. В общем она применима к любому предполагаемому замкнутому контуру на плоскости s и определяет расположение



Фиг. 5. 3. Сохранение углов при построении функции комплексного переменного.

и направление этого контура относительно нулей и полюсов функции $F(s)$ с соответствующей кривой на плоскости $F(s)$. Нули и полюса функции $F(s)$ представляют собой точки на плоскости s , когда значение функции $F(s)$ становится равным нулю или бесконечности. Предположим, что кривая на плоскости s соответствует замкнутому



Фиг. 5.4. Теорема построения диаграммы. Число оборотов вектора по часовой стрелке вокруг начала координат функции $F(s)$ равно $Z_r - P_r = 2$. Z_r — число охваченных нулей; P_r — число охваченных полюсов; a — плоскость s ; b — плоскость $F(s)$.

контур S_1 , как показано на фиг. 5.4. Переменная величина s начинается в некоторой произвольной точке a на контуре и приобретает последовательное значение кривой S_1 при обходе по часовой стрелке с возвращением к начальной точке. Если область справа от контура при обходе по часовой стрелке считать за «внутреннюю область», а область слева от контура принимать за «наружную область», тогда заштрихованная область будет «окружена» или охвачена контуром S_1 . Теорема преобразования связывает разницу между

числом нулей и полюсов функции $F(s)$, которые охвачены контуром S_1 , и числом оборотов вектора вокруг начала координат на плоскости $F(s)$. Геометрическое место точек функции $F(s)$, соответствующее предполагаемому контуру S_1 на плоскости s , начинается в точке a , которая соответствует значению $F(s)$ при $s = a$. Когда переменная величина s приобретает последовательные значения при обходе контура S_1 , комплексное значение функции $F(s)$ изменяется и на плоскости $F(s)$ получается геометрическое место точек F_1 . Геометрическое место точек F_1 будет замкнуто, когда контур S_1 замкнут, так как он возвращается к начальной точке a' , когда $s = a$. Число оборотов вектора вокруг начала координат по замкнутой кривой F_1 определяется по угловому вращению радиуса-вектора, проведенного из начала координат к кривой $F(s)$ при изменении величины s . Если $s = a$, то этот радиус-вектор определяется Oa' . Когда s приобретает последовательные значения при обходе контура S_1 по часовой стрелке, то конец радиуса-вектора на плоскости $F(s)$ перемещается вдоль кривой F_1 . Положительный поворот вокруг начала координат получается каждый раз, когда радиус-вектор повернется на 360° по направлению часовой стрелки; отрицательный поворот имеет место тогда, когда этот радиус-вектор поворачивается на 360° против часовой стрелки¹.

Следует заметить, что в случае замкнутого контура $F(s)$ радиус-вектор должен сделать целое число оборотов при полном обходе контура. На фиг. 5. 4, б показано, что начало координат было дважды охвачено контуром F_1 при обходе по часовой стрелке (т. е. два положительных поворота вектора вокруг начала координат). Теорема построения контуров определяет, что общее число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$ равно разнице между числом нулей и полюсов функции $F(s)$, охваченных контуром S_1 в плоскости s . Два оборота вектора вокруг начала координат при обходе контура F_1 на фиг. 5. 4, б вытекают из того факта, что контур S на фиг. 5. 4, а охватывает шесть нулей и четыре полюса. Если N означает число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, то отсюда следует, что

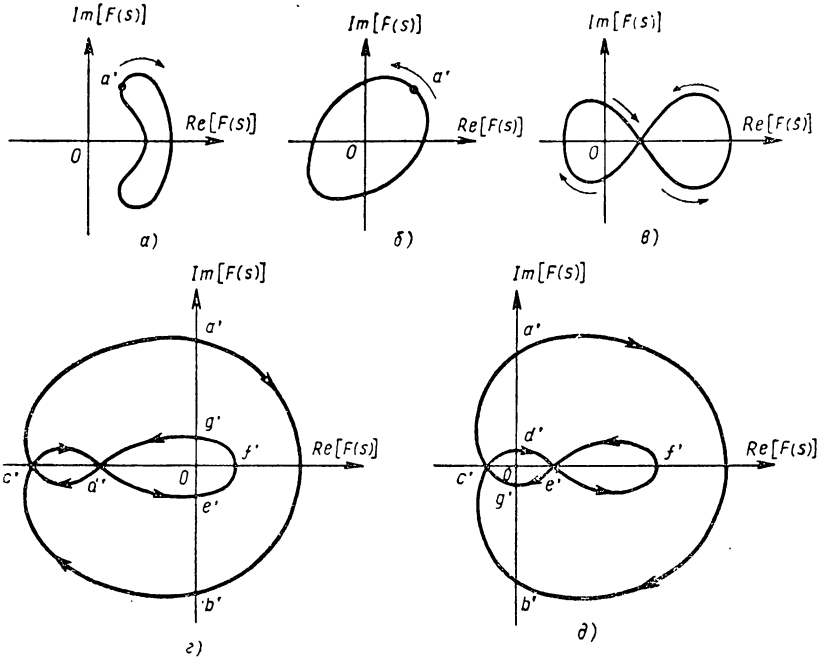
$$N = Z_r - P_r, \quad (5. 18)$$

где Z_r — общее число нулей $F(s)$, охваченных предполагаемым контуром на плоскости s , включая порядок кратности;
 P_r — общее число полюсов $F(s)$, охваченных предполагаемым контуром на плоскости s , включая порядок кратности.

Повторим, что охваченным нулем или полюсом в плоскости s является тот, который лежит в области справа от контура на этой

¹ В литературе о системах управления с обратной связью это вращение векторов определяется противоположно обычному математическому определению, когда вращение против часовой стрелки принимается за положительное. Это определение произвольно и не оказывает влияния на применение теоремы построения кривых, а также на их использование.

плоскости при обходе по часовой стрелке. Число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$ определяется подсчетом оборотов радиуса-вектора на 360° (по часовой стрелке — положительно и против часовой стрелки — отрицательно) вокруг начала координат, когда его конец перемещается по кривой на плоскости $F(s)$ и когда функция $F(s)$ приобретает последовательные значения s при обходе контура на плоскости s по часовой стрелке.



Фиг. 5.5. Примеры построения функции $F(s)$:

a — число оборотов вектора вокруг начала координат равняется $Z_r - P_r = 0 = N$; *б* — число оборотов вектора вокруг начала координат $Z_r - P_r = -1 = N$; *в* — число оборотов вектора вокруг начала координат $Z_r - P_r = 1 = N$; *г* — число оборотов вектора $Z_r - P_r = 0 = N$; *д* — число оборотов вектора $Z_r - P_r = 2 = N$.

Рассмотрим кривые на фиг. 5.4, как пример применения уравнения (5.18).

Контур F_1 на плоскости $F(s)$ дважды охватывает начало координат при обходе по часовой стрелке. Отсюда следует, что контур S_1 охватывает на два нуля больше количества полюсов $F(s)$, т. е. $Z_r - P_r = 2$. Ничего нельзя сказать относительно особых значений Z_r и P_r ; известна только их разница. Точные формы контуров S_1 и F_1 также не имеют существенного значения для полученного результата, потому что рассматриваются только числа оборотов вектора и охват полюсов и нулей. На фиг. 5.5 показаны некоторые другие примеры контуров в плоскости $F(s)$, построенных соответственно

контурам на плоскости s . Предполагается, что кривая $F(s)$ изменяет свои значения по направлению стрелки, когда величина s приобретает значение при обходе по контуру в плоскости s . В каждом случае вычисляется число оборотов вектора вокруг начала координат и это значение позволяет нам определить разницу между числом нулей и полюсов, охваченных контуром в плоскости s , если даже мы точно не знаем, как этот контур выглядит. Число оборотов вектора вокруг начала координат на фиг. 5. 5, a — b становится очевидно без дальнейшего обсуждения. Не вполне очевидно определяется число оборотов вектора на фиг. 5. 5, z , d . Рассмотрим более подробно фиг. 5. 5, z . Будем исходить из того, что контур в плоскости $F(s)$ отображается, начиная с точки a' , при перемещении по направлению стрелки $a'b'c'd'e'f'g'a'$. В нижеследующей таблице приведены общие значения углов (в градусах), когда радиус-вектор из начала координат к данной кривой поворачивается (положительно — по часовой стрелке, отрицательно — против часовой стрелки) при обходе отмеченной части кривой $F(s)$.

Следовательно, число оборотов вектора вокруг начала координат при обходе кривой $F(s)$ равняется нулю, т. е. $Z_r - P_r = 0$ для чисел нулей и полюсов, охваченных контуром в плоскости s :

$a'b'$: 180°
$a'b'c'$: 270°
$a'b'c'd'$: 270°
$a'b'c'd'e'$: 180°
$a'b'c'd'e'f'$: 90°
$a'b'c'd'e'f'g'$: 0°
$a'b'c'd'e'f'g'd'$: -90°
$a'b'c'd'e'f'g'd'c'$: -90°
$a'b'c'd'e'f'g'd'c'a'$: 0°

Аналогичная таблица составлена для кривой $G(s)$ на фиг. 5. 5, d . Эта кривая одинакова с предыдущей кривой, за исключением того, что начало координат смещено.

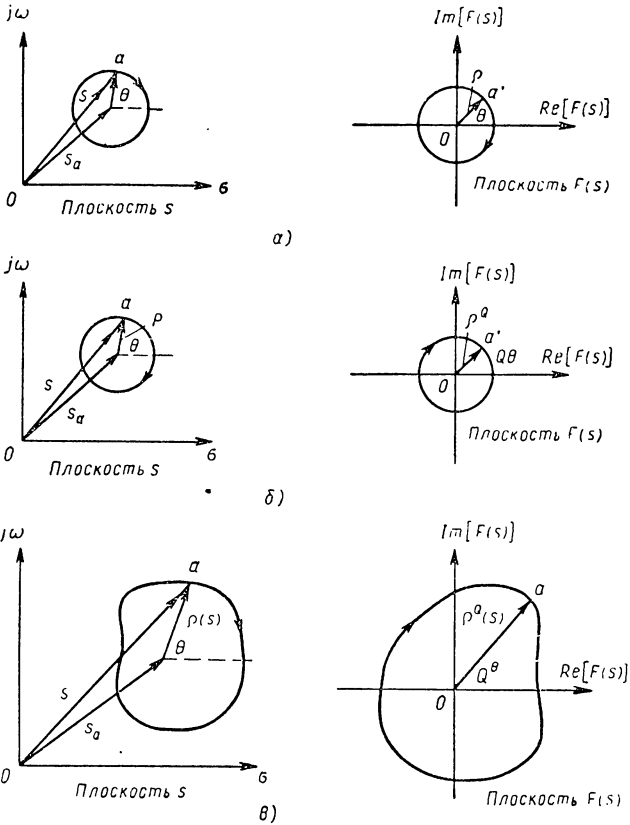
$a'b'$: 180°
$a'b'c'$: 270°
$a'b'c'd'$: 360°
$a'b'c'd'e'$: 450° = 360° + 90°
$a'b'c'd'e'f'$: 450°
$a'b'c'd'e'f'e'$: 450°
$a'b'c'd'e'f'e'g'$: 540° = 450° + 90°
$a'b'c'd'e'f'e'g'c'$: 630° = 540° + 90°
$a'b'c'd'e'f'e'g'c'a'$: 720° = 630° + 90°

Следовательно, в этом случае получается два оборота вектора по часовой стрелке, т. е. $720^\circ = 2 \times 360^\circ$. Отсюда, разница охваченных нулей и полюсов в плоскости s равняется $Z_r - P_r = 2$.

До изучения порядка применения теоремы построения контура как критерия устойчивости попытаемся дать доказательства этой

теоремы, что позволит дополнительно осветить возможности ее применения.

Доказательства теоремы построения контуров. Попробуем дать доказательства теоремы на основании некоторых простых примеров, а затем распространим полученные результаты на более общие случаи.



Фиг. 5. 6. Построение функции $F(s) = (s - s_a)^Q$:

a — построение функции $F(s) = s - s_a$, где $s = s_a + \rho e^{j\theta}$; $б$ — построение функции $F(s) = (s - s_a)^Q$, где $s = s_a + \rho e^{j\theta}$; $в$ — построение функции $F(s) = (s - s_a)^Q$, где $s = s_a + \rho(s) e^{j\theta}$.

Предположим, что функция $F(s)$ представляет собой полином с одним нулем в точке $s = s_a$, т. е. функция $F(s)$ дается выражением $F(s) = s - s_a$. Требуется построить кривую функции $F(s)$ для всех значений s при обходе по контуру окружности с радиусом ρ и центром в точке s_a (фиг. 5. 6, a). Переменная величина s определяется равенством $s = s_a + \rho e^{j\theta}$, где θ представляет угол, который изменяется на 2π рад при обходе по часовой стрелке контура, начиная с точки a .

Нуль функции $F(s)$ при $s = s_a$ очевидно будет охвачен контуром в плоскости s . Соответствующий контур на плоскости $F(s)$ определяется подстановкой $s = s_a + \rho e^{i\theta}$ в уравнение функции $F(s)$. Следовательно, контур $F(s)$ определяется выражением $F(s) = s - s_a = \rho e^{i\theta}$. Изучение этого выражения показывает, что оно представляет уравнение окружности с радиусом ρ вокруг начала координат в плоскости $F(s)$. Когда угол θ изменяется на 2π рад при обходе по часовой стрелке, то контур $F(s)$ будет охватывать начало координат 1 раз при обходе по часовой стрелке. Следовательно, равенство (5.18) подтверждается для этого простого примера. Заметим, что $\theta = 0^\circ$ определяется по вертикали.

Если предполагаемый полином для функции $F(s)$ имеет Q кратное значение нулей в точке s_a , то ее уравнение будет определяться выражением $F(s) = (s - s_a)^Q$. Для того же контура окружности в плоскости s соответствующий контур $F(s)$ будет определяться уравнением $F(s) = \rho^Q e^{iQ\theta}$. Очевидно, это уравнение окружности с радиусом ρ^Q , которая охватывает начало координат Q раз при обходе по часовой стрелке, когда угол θ изменяется на 2π рад по направлению часовой стрелки. Следовательно, теорема преобразования распространена на случай нескольких нулей путем простого рассмотрения нескольких нулей, как Q нулей, расположенных в одной точке.

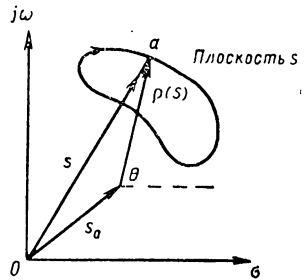
Теперь рассмотрим построение функции $F(s) = (s - s_a)^Q$ при любом замкнутом контуре, не совпадающем с окружностью, в плоскости s , который включает в себя точку s_a , как показано на фиг. 5.6, в. Величину s для этого контура можно выразить уравнением $s = s_a + \rho(s) e^{i\theta}$, где $\rho(s)$ равняется теперь переменному расстоянию от точки s_a до контура. Это расстояние $\rho(s)$ изменяется при обходе по контуру. Угол θ опять изменяется на 2π рад. Подстановка этого уравнения в выражение для функции $F(s)$ дает окончательный контур в плоскости $F(s)$, а именно $F(s) = \rho^Q(s) e^{iQ\theta}$. Изучение полученного результата показывает, что кривая $F(s)$ вновь охватывает начало координат Q раз при обходе по часовой стрелке, когда угол θ изменяется на 2π рад по часовой стрелке. Можно сделать следующий вывод для предыдущего примера. Если любой замкнутый контур в плоскости s охватывает точку $s = s_a$, то соответствующая кривая функции $F(s) = (s - s_a)^Q$ в плоскости $F(s)$ охватывает начало координат Q раз при обходе по направлению часовой стрелки. Поэтому все замкнутые контуры в плоскости s , которые охватывают нуль при $s = s_a$, дают одинаковый результат, как и простая окружность на фиг. 5.6, а.

Нетрудно обнаружить, что кривая функции $F(s) = (s - s_a)^Q$ не будет охватывать начало координат, если предположить, что замкнутый контур в плоскости s не охватывает нуль при $s = s_a$. Рассмотрим случай, показанный на фиг. 5.7. Здесь опять величину s можно выразить уравнением $s = s_a + \rho(s) e^{i\theta}$. Но на этот раз угол θ не изменяется на 2π рад при обходе контура. Следовательно, кривая в плоскости $F(s)$, определяемая уравнением $F(s) = \rho^Q(s) e^{iQ\theta}$, не будет охватывать начало координат, так как угол θ не изменяется на 2π рад.

Этот факт, что все замкнутые контуры на плоскости s , которые охватывают нуль при $s = s_a$, создают одинаковое число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, как и контур окружности, может быть проверен еще другим способом на основании результатов, описанных в предыдущем параграфе. На фиг. 5. 8, *a* показан контур на плоскости s , который состоит из нескольких частей: произвольный путь S_1 по часовой стрелке, отрезки прямой AB и CD и окружность против часовой стрелки S_2' . Если функцию $F(s) = (s - s_a)^Q$ построить для всего этого пути, то число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, должно равняться нулю, так как контур в плоскости s не охватывает нуль $F(s)$ (см. заштрихованную площадь). На фиг. 5. 8, *б* перечерчен контур фиг. 5. 8, *a* таким образом, что отрезки прямых AB и CD совпадают. При таком контуре в плоскости s число оборотов вектора вокруг начала координат для кривой плоскости $F(s)$ все еще равняется нулю. Иными словами это означает, что

$$N_{S_1} + N_{S_2'} = 0,$$

где N_{S_1} — число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, обусловленное контуром S_1 ;
 $N_{S_2'}$ — число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, обусловленное контуром S_2' .



Фиг. 5. 7. Построение контура в плоскости s , который не охватывает точку $s = s_a$.

Путь S_2' представляет окружность при прохождении против часовой стрелки. Подстановка значений этого геометрического места для S в выражении $F(s) = (s - s_a)^Q$ приводит к тому, что число оборотов вектора, обусловленное контуром S_2' , равно $-Q$, где знак «минус» означает вращение вектора вокруг начала координат против часовой стрелки. Подстановка этого значения в предыдущее уравнение приводит к следующему результату:

$$N_{S_1} + (-Q) = 0.$$

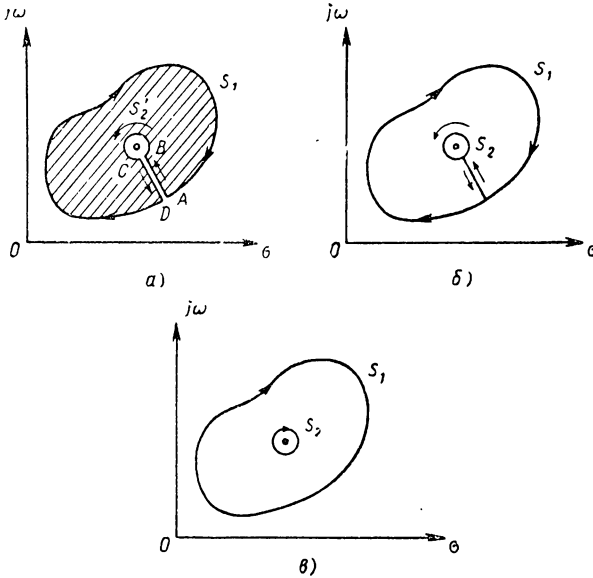
Из этого равенства нетрудно получить ранее выведенный результат для любого произвольного замкнутого контура S_1 , а именно $N_{S_1} = Q$.

Изложенный выше анализ может быть в равной степени применен к простому полиному, обладающему полюсом M -го порядка в точке $s = s_1$, т. е.

$$F(s) = (s - s_1)^{-M}.$$

Вследствие отрицательного знака у показателя степени можно заключить, что при любом замкнутом контуре, который охватывает полюс при $s = s_1$ (вращение по часовой стрелке), соответствующий

контур в плоскости $F(s)$ охватывает начало координат M раз при вращении против часовой стрелки, противоположном направлению вращения вектора вокруг нуля. Таким образом, теорема построения контура расширена с включением многих полюсов благодаря простому способу, когда кратные полюсы рассматриваются как M полюсов, расположенных в одной точке. Таким образом, можно видеть, что все замкнутые контуры в плоскости s , которые охватывают точку $s = s_1$, дают одинаковый результат, как и простая окружность.



Фиг. 5.8. Проверка возможности сведения любого замкнутого контура в плоскости s к эквивалентной окружности на основании теоремы построения:

$$\begin{aligned}
 a - N &= 0; \quad б - N_{S_1} + N_{S_2}' = 0; \quad в - N_{S_1} = N_{S_2}; \quad S_2 - \text{вращение по часовой стрелке}; \quad S_2' - \text{вращение против часовой стрелки}.
 \end{aligned}$$

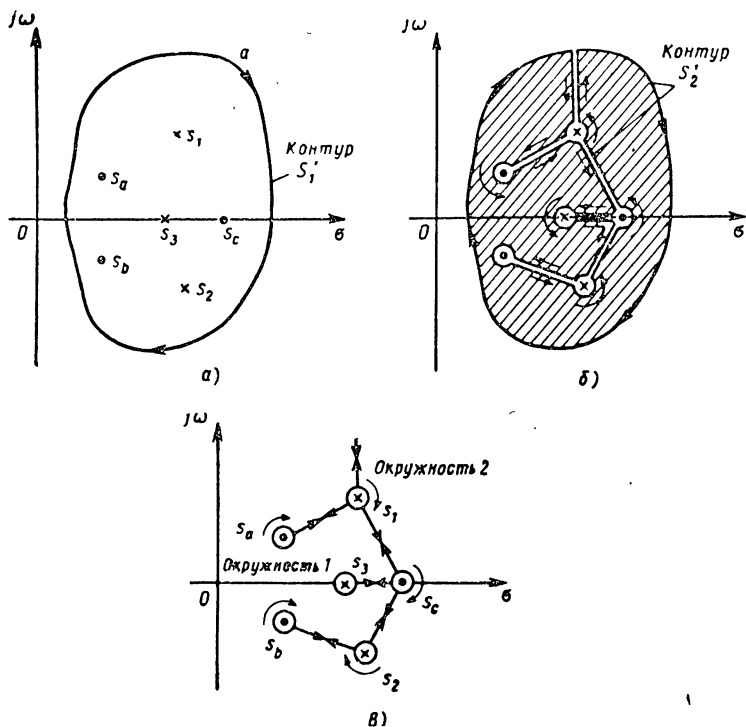
Теперь попытаемся обобщить предыдущие результаты при рассмотрении функции $F(s)$ с несколькими полюсами и нулями. Рассмотрим несколько полюсов и нулей, считая их как простые особенности, повторенные несколько раз, что равноценно их кратности. Отсюда можно предположить следующее выражение для функции:

$$F(s) = \frac{K(s - s_a)(s - s_b) \dots}{(s - s_1)(s - s_2) \dots} \quad (5.19)$$

Нули и полюса расположены в плоскости s , как показано на фиг. 5.9, а. Рассмотрим контур S_1' , который включает в себе несколько полюсов и нулей функции $F(s)$. На фиг. 5.9, в дан путь S_1'

в плоскости s , который состоит из контура S_1'' и нескольких отрезков прямых и окружностей, которые обходятся против часовой стрелки.

Контур S_2' не включает в себе каких-либо нулей и полюсов функции $F(s)$. Поэтому общее число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, соответствующее контуру S_2' , равно нулю. Отсюда следует, что число оборотов вектора вокруг начала



Фиг. 5.9. Графическое построение по теореме Найквиста:

a — первоначальный контур плоскости s ; b — контур $S_2' = S_1' +$ пути перемещения по окружностям навстречу часовой стрелки плюс соединительные линии; v — контур S_2' .

координат в плоскости $F(s)$, обусловленное контуром S_1' , равно числу оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, обусловленное контуром S_3' ; контур S_3' начерчен на фиг. 5.9, v . Рассмотрим более подробно контур S_3' . Он состоит из нескольких небольших окружностей (вращение против часовой стрелки), соединенных прямолинейными отрезками, которые проходятся дважды в противоположных направлениях. Небольшие окружности могут быть уменьшены, и их радиус может быть доведен до любого малого значения, так что с изменением величины s при прохождении любой из этих окружностей все множители, содержащиеся в функции $F(s)$

по уравнению (5. 19), сохраняют в основном постоянное значение, кроме одного множителя, который содержит нуль или полюс функции $F(s)$ в центре рассматриваемой окружности. Например, при изменениях s по окружности 1 функция $F(s)$ будет выражаться

$$F(s) = \text{const} (s - s_a). \quad (5. 20)$$

Аналогично при изменениях s по окружности 2 функция $F(s)$ определяется выражением

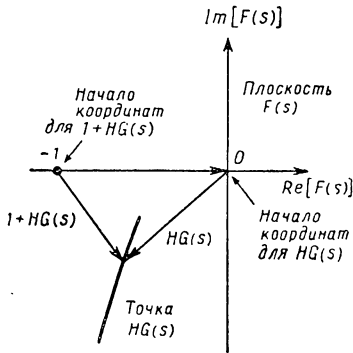
$$F(s) = \text{const} \frac{1}{s - s_1}. \quad (5. 21)$$

Следовательно, теорема конформного отображения, которая была рассмотрена для случая функции с одним нулем или полюсом, может быть применена независимо к любому из контуров в виде небольшой окружности. Число оборотов вектора вследствие прохождения контура S'_1 определяется суммой чисел оборотов векторов, вычисленных для каждой малой окружности в отдельности. Очевидно, окружность 1 обуславливает вращение по часовой стрелке вокруг начала координат в плоскости $F(s)$, в то время как окружность 2 связана с вращением против часовой стрелки. Распространяя эти результаты на окружности с охватом других полюсов и нулей функции $F(s)$, можно прийти к общему утверждению теоремы конформного отображения, что общее число оборотов вектора вокруг начала координат в плоскости $F(s)$ равно $N = Z_r - P_r$, где Z_r равно общему числу нулей, охваченных контуром S'_1 и P_r равно общему числу полюсов, охваченных тем же контуром S'_1 .

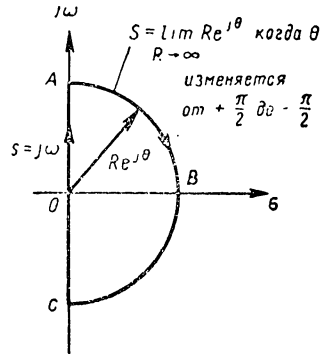
Применение теоремы конформного отображения к системам управления. Контур Найквиста. Исходя из предыдущей теоремы построения контуров, нетрудно применить ее в качестве критерия устойчивости. Для определения абсолютной устойчивости системы необходимо проверить наличие любых корней характеристического уравнения в правой полуплоскости s . В случае абсолютной устойчивости выражение $F(s) = 1 + HG(s)$ не должно иметь ни одного нуля в правой полуплоскости s ; нули должны иметь значения s , при которых $1 + HG(s) = 0$. Предположим, это функция $F(s) = 1 + HG(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости s . Рассмотрим влияние полюсов в правой полуплоскости, но временно предположим, что их нет. Следовательно, если рассматривать контур в плоскости s , который заключает в себе всю правую полуплоскость s , то отсюда следует, что $P_r = 0$ и общее число оборотов вектора вокруг начала координат для функции $F(s) = 1 + HG(s)$ равно числу нулей функции $[1 + HG(s)]$ в правой полуплоскости s . Для системы с абсолютной устойчивостью кривая функции $F(s) = 1 + HG(s)$ не может охватывать начало координат. Как показано на фиг. 5. 10, кривая функции $1 + HG(s)$ представляет собой попросту кривую функции $HG(s)$ с началом координат, смещенным в точку $(-1, 0)$.

Следовательно, проверка числа оборотов вектора вокруг начала координат для функции $1 + HG(s)$ равносильна проверке охвата точки $(-1, 0)$ для функции $HG(s)$. Иными словами, можно проверять устойчивость замкнутой цепи системы путем рассмотрения числа оборотов векторов вокруг точки $(-1, 0)$ для передаточной функции $HG(s)$ разомкнутой цепи. Если точка $(-1, 0)$ не была охвачена, то система устойчива.

На фиг. 5.11 показан контур в плоскости s , который содержит всю правую половину комплексной плоскости. Он состоит из всей мнимой оси $j\omega$ от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$ плюс полуокружность с бес-



Фиг. 5.10. Получение графика $1 + HG(s)$ по графику $HG(s)$.



Фиг. 5.11. Годограф вектора, охватывающий всю правую полуокружность s .

конечным радиусом. Этот контур назван контуром Найквиста. Построение функции $HG(s)$ для этого контура не составляет труда. Часть, соответствующая отрезку OA , получается в предположении $s = j\omega$. Таким образом, для этой части необходимо построить $HG(s)$ при ω от 0 до ∞ . Отсюда очевидна частотная характеристика для разомкнутой цепи. Часть характеристики, соответствующая бесконечной полуокружности, определяется в предположении $s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}$, когда угол θ изменяется от $+\pi/2$ до $-\pi/2$ рад.

Обычно эту часть контура в плоскости s строят в виде одной точки в начале координат на плоскости $F(s)$ так, что она не создает особой трудности. В следующем разделе будет дано несколько примеров. Часть характеристики, соответствующая отрезку CO , получается в предположении $s = -j\omega$, когда ω изменяется от бесконечности до нуля. Следует заметить, что $HG(-j\omega) = HG^*(j\omega)$, т. е. кривая $HG(-j\omega)$ является комплексно сопряженной кривой $HG(j\omega)$. При графическом изображении это означает, что кривая $HG(-j\omega)$ представляет зеркальное изображение относительно действительной оси кривой $HG(j\omega)$ и, таким образом, первая кривая становится известной, когда известна последняя.

Рассмотрим предварительно принятое предположение, что функция $1 + HG(s)$ не должна иметь каких-либо полюсов в правой поло-

вине комплексной плоскости. Если функция $1 + HG(s)$ имеет полюса в правой полуплоскости, то применение теоремы построения контура Найквиста позволяет получить сведения только о разнице между числами полюсов и нулей в правой полуплоскости s , т. е. величину $Z_r - P_r$, где индекс r означает правую полуплоскость. Если $Z_r = P_r$, то функция $HG(s)$ охватывает нуль в точке $(-1,0)$, если даже Z_r имеет конечное значение. Следовательно, можно прийти к ошибочному выводу, что эта система устойчива при замкнутой цепи. Критерий устойчивости по охвату нуля в точке $(-1,0)$ может быть применен непосредственно только тогда, когда предварительно проверено, что нет $P_r = 0$. Иными словами, необходимо проверить, что функция $1 + HG(s)$ имеет полюса в правой полуплоскости s , прежде чем применить теорему построения контуров для определения устойчивости. Следует заметить, что определение полюсов функции $1 + HG(s)$ в правой полуплоскости сравнительно нетрудно и в большинстве случаев $P_r = 0$. Попробуем физически интерпретировать отсутствие полюсов функции $1 + HG(s)$ в правой полуплоскости s . Напишем функцию $HG(s)$ как отношение двух полиномов $P(s)$ и $Q(s)$. Отсюда

$$F(s) = 1 + HG(s) = 1 + \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (5.22)$$

где

$$HG(s) = \frac{B}{E}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}. \quad (5.23)$$

Из уравнения (5.22) вытекает, что полюсы функции $F(s)$ встречаются при таких значениях s , при которых $Q(s) = 0$. В уравнении (5.23) функция $HG(s)$ выражена через сигнал рассогласования $E(s)$ и первичный сигнал обратной связи $B(s)$ для разомкнутой системы. Отсюда получаем для разомкнутой системы

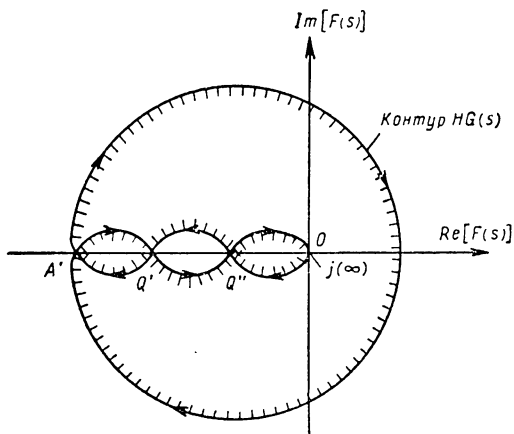
$$Q(s) B(s) = E(s) P(s). \quad (5.24)$$

Если сигнал рассогласования $E(s)$ сделать равным нулю, то уравнение (5.24) превращается в характеристическое уравнение разомкнутой системы, а именно $Q(s) = 0$. Когда разомкнутая система является абсолютно устойчивой, тогда ее характеристическое уравнение не будет иметь корней в правой комплексной полуплоскости, т. е. в правой полуплоскости s не будет точек, при которых $Q(s) = 0$. Если это справедливо, то отсюда следует, что функция $1 + HG(s) = 1 + P(s)/Q(s)$ не будет иметь полюсов в правой полуплоскости s .

Следовательно, мы пришли к выводу, что в случае устойчивости системы при разомкнутой цепи функция $1 + HG(s)$ для замкнутой системы не будет иметь полюсов в правой полуплоскости s . Критерий устойчивости Найквиста может быть применен в подобных случаях, зная, что $P_r = 0$. Конечно, если система неустойчива, когда

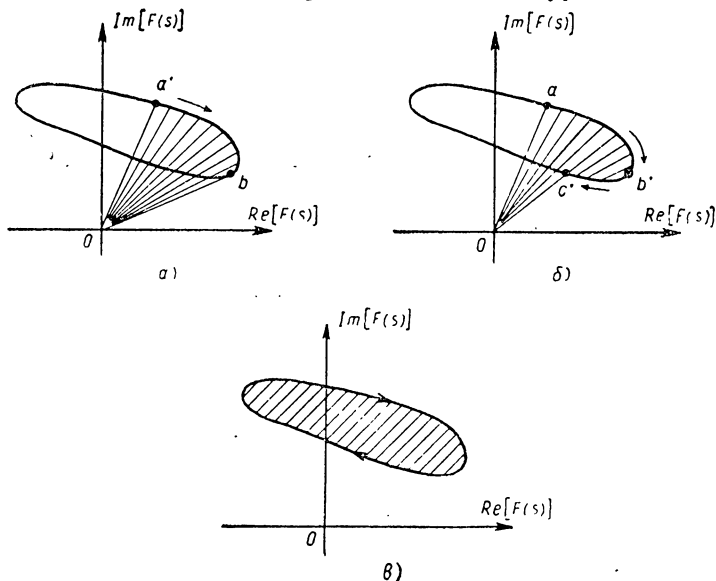
цепь разомкнута, то критерий Найквиста может быть еще применен, но необходимо принять во внимание значение P_r . Существует много случаев, когда система неустойчива в разомкнутом состоянии и становится устойчивой, когда первичная цепь обратной связи замкнута. Здесь необходима особая осторожность при применении критерия устойчивости Найквиста. Критерий Рауса может быть применен к полиному $Q(s)$ для определения числа корней в правой полуплоскости. В этом случае число изменений знака у членов первой колонки таблицы Рауса для функции $Q(s)$ равно значению P_r .

Определение числа оборотов вектора вокруг точки $(-1,0)$ при построении кривой $HG(s)$ становится затруднительным, так как кривая имеет сложную форму. Рассмотрим например, кривую $HG(s)$, построенную на фиг. 5.12. Попробуем определить, будет ли точка $(-1,0)$ охвачена, если она расположена между точками $A'Q'$, $Q'Q''$ и $Q''O$. Для подсчета числа оборотов радиуса-вектора, как было изложено раньше, возможно определить зоны, где точка $(-1,0)$ может быть охвачена по следующему способу, известному под названием «Правила заштрихованной площади». Начнем с любой точки контура $HG(s)$ и будем заштриховывать площадь справа от кривой при прохождении кривой по направлению стрелки, т. е. по направлению возрастания частоты. Это сделано на фиг. 5.12. Можно видеть, что части отрицательной действительной оси, которые лежат между точками $Q'Q''$, совпадают с заштрихованной площадью. Правило заштрихованной площади утверждает, что кривая не будет окружать точку $(-1,0)$, когда она лежит в незаштрихованной области (т. е. в интервале $Q'Q''$) и, следовательно, замкнутая система будет устойчива. Если точка $(-1,0)$ находится на заштрихованной площади, то она будет окружена кривой и система окажется неустойчивой. Объяснение правила заштрихованной площади показано на фиг. 5.13. Предположим, что радиус-вектор Oa' вращается по часовой стрелке и заштриховывает всю площадь, которую он описывает. Как видно на фиг. 5.13, а радиус-вектор Oa' был повернут по часовой стрелке из положения Oa' в положение Ob' . Когда радиус-вектор вращается против часовой стрелки, то предполагается, что он «стирает» штриховку площади, которую он описывает. Это иллюстрируется фиг. 5.13, б, где радиус-вектор был повернут в положение Oc' .



Фиг. 5.12. Метод определения областей, охваченных контуром $HG(s)$ на отрицательной действительной оси.

Когда конец радиуса-вектора описывает контур несколько раз, то можно будет видеть, что оставшаяся заштрихованная площадь будет определяться площадью, которая лежит вправо от контура при прохождении по направленной стрелке (см. фиг. 5. 13, *а*). Нетрудно обнаружить, что любая точка должна лежать внутри заштрихованной площади, если она окружена контуром, потому что радиус-вектор из этой точки к контуру сделает по крайней мере один полный оборот по часовой стрелке при описании контура.



Фиг. 5. 13. Диаграммы для иллюстрации правила построения заштрихованной площади при определении областей корней:
a — линию *Oa* поворачивают до положения *Ob'*; *б* — линию *Oa'* поворачивают до положения *Oc'*; *в* — заштрихованная площадь после окончательного определения всего контура.

В следующем разделе будет иллюстрирована полезность правила заштрихованной площади для определения зон устойчивости около точки $(-1, 0)$. Для инженера, разрабатывающего системы управления, правила заштрихованной площади сводятся к применению критерия устойчивости Найквиста при простом расчете систем класса 3 или более низкого класса; этот простой порядок расчета следующий: строят частотную характеристику разомкнутой цепи при возрастании частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Если точка $(-1, 0)$ лежит справа от контура при его прохождении, то система неустойчива; если точка $(-1, 0)$ лежит слева от контура, то система устойчива.

5. 3. ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА

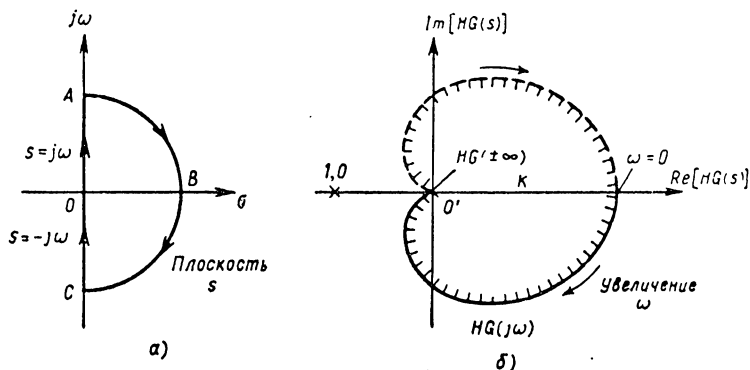
Рассмотрим теперь применение критерия устойчивости Найквиста к некоторым типичным передаточным функциям разомкнутой цепи. Эти примеры предназначены для иллюстрации некоторых общих

контуров Найквиста и для освещения процесса построения этих контуров.

Пример 5. 1. Система класса 0. Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой цепи, определяемую выражением

$$HG(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}. \quad (5. 25)$$

Полюса этой функции встречаются при $s = -1/\tau_1$ и $s = -1/\tau_2$, которые находятся в левой полуплоскости s . Контур в плоскости s построен на фиг. 5. 14, а. Соответствующая кривая для функ-



Фиг. 5. 14. Области устойчивости по критерию Найквиста для систем класса 0:

а — контур в плоскости s ; б — контур в плоскости $F(s)$ для

$$HG(s) = \frac{K}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}.$$

ции $HG(s)$ изображена на фиг. 5. 14, б. Рассмотрим эту кривую и соответственно разные участки контура в плоскости s .

Участок OA : $s = j\omega$ при $0 \leq \omega \leq \infty$.

Отсюда

$$HG(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (5. 26)$$

При особых значениях ω имеем:

1. $HG(j0) = K$.

2. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = 0 \angle 180^\circ$.

При промежуточных значениях ω кривая проходит через третий и четвертый квадранты, когда любой из линейных множителей в знаменателе уравнения (5. 23) создает отставание по фазе, но сдвиг по фазе никогда не превышает 90° при увеличении ω .

Участок $A\bar{L}C$:

$$s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{i\theta} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}.$$

Абсолютное значение $HG(s)$ определяется выражением

$$|HG(j\infty)| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{K}{(1 + R\tau_1 e^{j\theta})(1 + R\tau_2 e^{j\theta})} \right| = 0.$$

Следовательно, полуокружность ABC опять превращается в точку 0 в плоскости $F(s)$.

Участок CD : $s = -j\omega$ при $0 \leq \omega \leq \infty$.

Эта кривая представляет зеркальное изображение кривой для функции $HG(j\omega)$ и она показана пунктирной линией на фиг. 5. 14, б.

Изучение всего контура Найквиста позволяет обнаружить, что точка $(-1, 0)$ ни разу не будет охвачена, так что замкнутая система будет устойчивой. Увеличение коэффициента K никогда не может сделать систему неустойчивой, но это уменьшит предельный сдвиг фазы.

Пример 5. 2. Системы класса 1. Рассмотрим систему, для которой передаточная функция разомкнутой цепи дается выражением

$$HG(s) = \frac{K}{s(1 + s\tau_1)}. \quad (5. 27)$$

Полюса этой функции встречаются при $s = 0$ и $s = -\frac{1}{\tau_1}$.

Как легко можно видеть, трудности могут возникнуть тогда, когда контур в плоскости s на фиг. 5. 14, а использован в качестве критерия Найквиста. Эта трудность создается вследствие того, что полюс имеет место при $s = 0$. Если допустить, что s становится равным нулю, то функция $HG(s)$ становится бесконечно большой. Для устранения возможности, когда кривая функции $HG(s)$ проходит через эту особую точку, необходимо изменить контур в плоскости s так, как показано на фиг. 5. 15, а. Этот контур также заключает в себе всю правую полуплоскость s , но устраняет прохождение через полюс $HG(s)$ при $s = 0$ благодаря полуокружности EFA . Полуокружность EFA математически определяется уравнением $s = \lim_{R \rightarrow 0} Re^{j\theta}$,

когда угол θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Измененный контур¹ на плоскости s (фиг. 5. 15, а) не охватывает какого-либо полюса функции $HG(s)$, так что эта система устойчива при замкнутой цепи, когда охват нуля в точке $(-1, 0)$ имеет место в плоскости $F(s)$. Конечно, при определении контура Найквиста необходимо принять во внимание ограничение в виде полуокружности EFA . Рассмотрим более подробно контур Найквиста для выражения (5. 27), который изображен на фиг. 5. 15, б.

Участок AB : $s = j\omega$, где $0 < \omega \leq \infty$.

Следовательно,

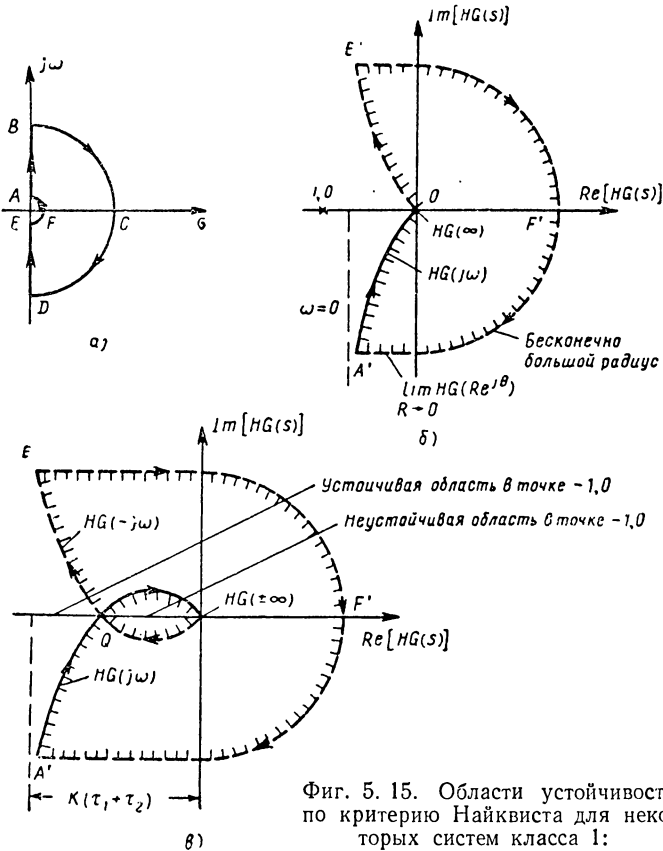
$$HG(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)}. \quad (5. 28)$$

¹ Другая возможность изменения контура в плоскости s состоит в том, что небольшая окружность поворачивается влево вместо прохождения вправо от точки E к точке A . В этом случае полюс в начале координат будет охвачен контуром в плоскости s и критерий Найквиста будет требовать соблюдения условия $P_r = 1$.

При особых значениях ω имеем:

1. $\lim_{\omega \rightarrow 0} HG(j\omega) = \infty \angle -90^\circ = -K\tau_1 - j\infty$.
2. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = 0 \angle 180^\circ$.

При промежуточных значениях ω фазовый угол изменяется от -90° (что обусловлено членом $j\omega$ в знаменателе) до -180° ($1 + j\omega\tau_1$ увеличивает максимально дополнительный сдвиг фазы на 90°), когда круговая частота ω увеличивается от нуля до бесконечности.



Фиг. 5.15. Области устойчивости по критерию Найквиста для некоторых систем класса I:

- a — контур в плоскости s с выделением полюса $HG(s)$ при $s = 0$; b — контур в плоскости $F(s)$ при $HG(s) = \frac{K}{s(1+s\tau_1)}$; θ — контур в плоскости s при $HG(s) = \frac{K}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$.

Полукружность BCD : $s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}$, где $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$.

Здесь опять подстановка в уравнение (5.27) позволяет обнаружить, что большая полукружность преобразуется в точку 0.

Участок DE : $s = -j\omega$ при $0 < \omega \leq \infty$.

Этот участок преобразуется в зеркальное изображение (см. пунктирную линию) участка AB .

Полукружность EFA : $s = \lim_{R \rightarrow 0} Re^{j\theta}$, где $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$.

Подстановка этого значения s в уравнение (5. 27) дает

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} HG(Re^{j\theta}) &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{K}{Re^{j\theta}(1 + R\tau_1 e^{j\theta})} = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{K}{Re^{j\theta}} = \infty e^{j\theta}, \quad \text{где } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (5. 29)$$

Уравнение (5. 29) представляет собой полукружность с бесконечно большим радиусом. В точке E на плоскости s угол $\theta = -\frac{\pi}{2}$, поэтому фазовый угол функции уравнения (5. 29) равняется $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, точка E превращается в точку E' . В точке F на плоскости s $\theta = 0$, так что соответствующий фазовый угол функции уравнения (5. 29) равен нулю, точка F превращается в точку F' . В точке A на плоскости s имеем $\theta = \frac{\pi}{2}$, откуда соответствующий фазовый угол функции уравнения (5. 29) равен $-\frac{\pi}{2}$ и точка A превращается в точку A' . Эта часть графика дана пунктиром на фиг. 5. 15, б.

Конформное отображение может быть использовано для получения контура $E'F'A'$. При прослеживании контура на плоскости s от D к E и далее к F в точке E направление изменяется на 90° по часовой стрелке. Этот угол должен быть сохранен при отображении на плоскости $F(s)$, чтобы при переходе от точки O' к E' и далее к F' направление в точке E' также изменялось на 90° по часовой стрелке. Это определяет направление замыкания полукружности $E'F'A'$, без необходимости определять значение $HG(s)$ в точке F , как это было сделано в предыдущем параграфе.

Как можно видеть, кривая Найквиста на фиг. 5. 16, б представляет замкнутый контур, который не заключает в себе точку $(-1, 0)$ ни при каких обстоятельствах, и поэтому можно быть уверенным, что замкнутая система является, безусловно, устойчивой.

Пример 5. 3. Рассмотрим теперь систему класса 1 со следующей передаточной функцией разомкнутой цепи

$$HG(s) = \frac{K}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}. \quad (5. 30)$$

$HG(s)$ опять имеет полюс при $s = 0$ и, следовательно, должен быть применен измененный контур в плоскости s на фиг. 5. 15, а. Для этого контура нет полюсов в правой полуплоскости s . Разделив

контур Найквиста на участки, в дальнейшем будем поступать следующим образом:

участок AB : $s = j\omega$, где $0 < \omega \leq \infty$;

$$HG(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (5.31)$$

При особых значениях ω имеем:

$$1. \lim_{\omega \rightarrow 0} HG(j\omega) = \infty \angle -90^\circ = -K(\tau_1 + \tau_2) - j\infty.$$

$$2. \lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{\tau_1\tau_2(j\omega)^3} = 0 \angle -270^\circ.$$

При промежуточных значениях ω фазовый угол изменяется от -90° (из-за наличия члена $j\omega$ в знаменателе) до -270° , так как каждый линейный множитель в знаменателе уравнения (5.31) создает максимально общий сдвиг фазы на -90° . Следовательно, характеристика будет пересекать отрицательную действительную ось, как показано на упомянутой фигуре.

Полукружность BCD : $s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}$, где $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$.

Подстановка в уравнение (5.30) вновь позволяет установить, что большая полукружность превращается в точку O' .

Участок DE : $s = -j\omega$ при $0 < \omega \leq \infty$.

Этот участок дает зеркальное изображение участка AB (см. пунктирную линию).

Полукружность EFA :

$$s = \lim_{R \rightarrow 0} Re^{j\theta} \text{ при } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Подстановка этого значения s дает:

$$\lim_{R \rightarrow 0} HG(Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{K}{Re^{j\theta}} = \infty e^{j\theta},$$

где

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Нетрудно видеть, что эта окружность бесконечного радиуса, которая заключает в себе контур от точки E до точки A , как показано пунктиром на фиг. 5.15, *в*. Эта полукружность должна замыкаться вправо, так как в точке E на плоскости s направление изменяется на 90° , что должно быть сохранено в точке E' на плоскости $F(s)$.

Изучение этого контура Найквиста показывает, что точка $(-1,0)$, когда она расположена справа от точки Q , будет охвачена контуром и система в замкнутом положении будет неустойчива. С другой стороны, когда точка $(-1,0)$ находится слева от точки Q , то она не будет охвачена контуром и замкнутая система будет устойчивой.

Начнем рассмотрение с устойчивой замкнутой системы и будем увеличивать коэффициент усиления K ; тогда контур Найквиста будет расширяться и точка Q перемещаться влево. Когда коэффициент усиления будет сделан достаточно большим, точка $(-1,0)$ будет находиться справа от точки Q и система станет неустойчивой. Когда точка Q совпадет с точкой $(-1,0)$, система будет находиться на границе устойчивости. Значение K связано с получением граничной устойчивости и может быть вычислено либо по диаграмме Найквиста, либо на основании критерия Рауса. Определение коэффициента K при граничной устойчивости предоставляется читателю.

Пример 5.4. Системы класса 2. Определим диаграмму устойчивости Найквиста для системы со следующей передаточной функцией разомкнутой цепи:

$$HG(s) = \frac{K}{s^2(1 + s\tau_1)}. \quad (5.32)$$

$HG(s)$ имеет полюс второго порядка при $s = 0$, так что для этой системы должен быть применен контур в плоскости s на фиг. 5.15, а. Когда $s = j\omega$ уравнение (5.32) становится

$$HG(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(1 + j\omega\tau_1)}. \quad (5.33)$$

При особых значениях ω имеем:

$$1. \lim_{\omega \rightarrow 0} HG(j\omega) = \infty \angle -180^\circ;$$

$$2. \lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K}{(j\omega)^3\tau_1} = 0 \angle -270^\circ.$$

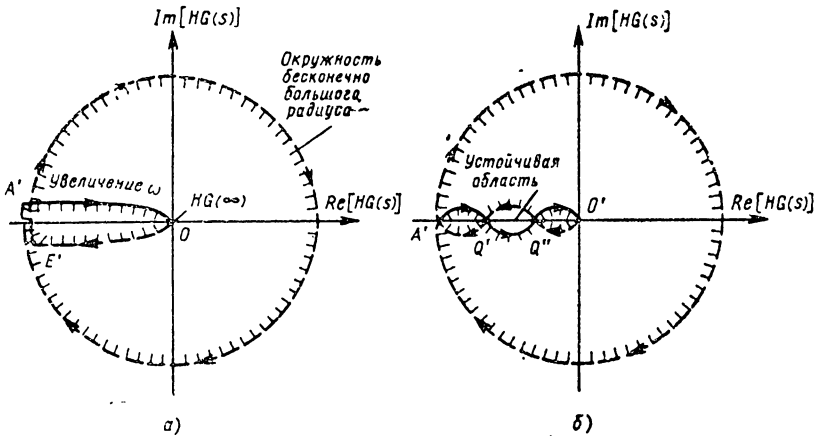
Эти точки отмечены буквами A' и O' на фиг. 5.16, а; при промежуточных значениях фазовый угол изменяется непрерывно от -180° до -270° из-за линейного члена $1 + j\omega\tau_1$ в знаменателе уравнения (5.33). При любых значениях s вдоль большой окружности (фиг. 5.15, а) кривая функции $HG(s)$ преобразуется в точку O' . При $s = -j\omega$ получается пунктирный участок $O'E'$ кривой на фиг. 5.16, а. Когда s приобретает значения вдоль окружности EFA , то уравнение (5.32) превращается в

$$\lim_{R \rightarrow 0} HG(Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{K}{(Re^{j\theta})^2} = \infty e^{-j2\theta}, \quad (5.34)$$

где θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Уравнение (5.34) представляет окружность бесконечного радиуса, которая замыкается по направлению часовой стрелки от точки E' к A' . Эта кривая показана пунктиром на фиг. 5.16, а. Тот факт, что эта окружность замыкается по направлению часовой стрелки, вытекает из свойства конформного отображения; изменение направления на 90° в точке E на плоско-

сти s сохраняется в точке E' . Общий поворот участка $E'F'A'$ по направлению часовой стрелки составляет $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. При изучении фиг. 5. 16, а нетрудно видеть, что точка $(-1,0)$ всегда окружена контуром и, таким образом, эта система при разомкнутой цепи будет всегда неустойчивой. Эту систему можно стабилизировать только одним способом, изменив форму функции $HG(s)$ путем добавления дополнительных множителей.

Такой пример будет рассмотрен ниже.



Фиг. 5. 16. Области устойчивости по критерию Найквиста для некоторых систем класса 2:

а — контур в плоскости $F(s)$ при

$$HG(s) = \frac{K}{s^2(1+s\tau_1)};$$

б — контур в плоскости $F(s)$ при

$$HG(s) = \frac{K(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)}{s^2(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}.$$

Пример 5. 5. Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой цепи из предыдущего примера с добавлением линейных множителей в числителе и знаменателе. Пусть функция $HG(s)$ определяется уравнением

$$HG(s) = \frac{K(1+s\tau_a)(1+s\tau_b)}{s^2(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}. \quad (5.35)$$

Из этого уравнения следует, что оно сводится к одинаковому результату как и в примере 5. 4 при крайне низких и высоких значениях s , т. е. когда $s = j\omega$ или s изменяется вдоль полуокружности. Однако вдоль оси $j\omega$ обе системы ведут себя совершенно различно (см. фиг. 5. 16). Изучение кривой на фиг. 5. 16, б показывает, что замкнутая система устойчива, когда точка $(-1,0)$ находится в интервале $Q'Q''$. В этом интервале ни одна точка в итоге не охватывается.

Если точка $(-1,0)$ находится вне интервала $Q'Q''$, то она будет охвачена кривой и система в замкнутом состоянии станет неустойчивой. Отсюда следует, что увеличение или уменьшение коэффициента усиления K относительно значения, при котором система в замкнутом состоянии устойчива, может вызвать неустойчивость системы. Тогда говорят, что система работает в состоянии условной устойчивости.

Пример 5. 6. Системы класса 3. Рассмотрим контур Найквиста для системы со следующей передаточной функцией разомкнутой цепи:

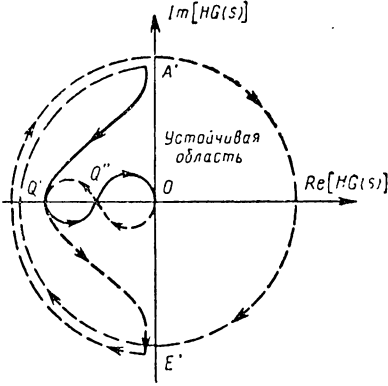
$$HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{s^3(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}. \quad (5.36)$$

Эта функция имеет полюс третьего порядка в начале координат, так что необходимо применить контур в плоскости s на фиг. 5. 15, а. Когда $s = j\omega$ уравнение (5.36) будет

$$HG(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}{(j\omega)^3(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (5.37)$$

При особых значениях ω имеем:

1. $\lim_{\omega \rightarrow 0} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{K}{(j\omega)^3} = \infty \angle -270^\circ$.
2. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} HG(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{K(j\omega)^2\tau_a\tau_b}{(j\omega)^5\tau_1\tau_2} = 0 \angle 90^\circ$.



Фиг. 5. 17. Области устойчивости по критерию Найквиста при

$$HG(s) = \frac{K(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)}{s^3(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}.$$

Эти особые точки обозначены A' и O' на фиг. 5. 17. При промежуточных значениях ω фазовый угол кривой изменяется, так как каждый линейный множитель в числителе создает максимальное опережение на 90° и каждый линейный множитель в знаменателе создает запаздывание максимально на 90° . Поэтому характеристика пересекает отрицательную действительную ось в двух точках Q' и Q'' .

Когда s приобретает значения вдоль большой полуокружности BCD , то функция $HG(s)$ сохраняет одно значение, соответствующее точке O' . При $s = -j\omega$ характеристика имеет вид пунктирной линии от точки O' до E' . Когда s приобретает значения вдоль малой полуокружности EFA , то контур $HG(s)$ будет определяться следующим выражением:

$$\lim_{R \rightarrow 0} HG(Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{K}{(Re^{j\theta})^3} = \infty e^{j3\theta}, \quad (5.38)$$

где θ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, т. е. на 180° . Следовательно, уравнение (5.38) представляет три полуокружности бесконечного

радиуса с поворотом на $3 (180^\circ) = 540^\circ$ по направлению часовой стрелки от точки E' и обратно к точке A' . Эта часть кривой показана пунктиром на фиг. 5. 17. Изучение всей кривой показывает, что система будет устойчива, когда точка $(-1,0)$ лежит между точками $Q'Q''$. Если коэффициент усиления K будет увеличен или уменьшен таким образом, что точка $(-1,0)$ будет находиться вне этой зоны, то система станет неустойчивой. Следовательно, мы имеем другой пример условно устойчивой системы.

Системы, неустойчивые при разомкнутой цепи. Рассмотрим теперь примеры систем, когда передаточная функция разомкнутой цепи имеет полюса в правой полуплоскости s . Предположим, что функция $HG(s)$ определяется следующим уравнением:

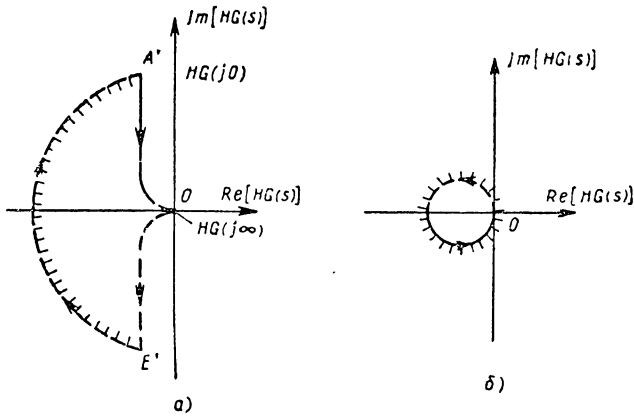
$$HG(s) = \frac{K}{s(-1 + s\tau_1)}. \quad (5.39)$$

Полюсы $HG(s)$ расположены в точках $s = 0$ и $s = \frac{1}{\tau_1}$; последний полюс означает, что разомкнутая система неустойчива. Контур Найквиста для этой системы, согласно контуру в плоскости s на фиг. 5. 15, *a* построен на фиг. 5. 18, *a*. Читатель может сам проверить детали построения этого контура. При изучении контура можно установить, что точка $(-1,0)$ окружена 1 раз. Следовательно, $N_s = 1 = Z_r - P_r$; P_r известно и равно единице ввиду того, что полюс в точке $s = \frac{1}{\tau_1}$ охвачен контуром в плоскости s на фиг. 5. 15, *a*. Отсюда следует, что $Z_2 = 2$, т. е. характеристическое уравнение замкнутой системы имеет два корня в правой полуплоскости s . Совершенно очевидно, что замкнутая система неустойчива. Эти результаты могут быть легко подтверждены путем нахождения корней характеристического уравнения или применения критерия Рауса. Интересно отметить, что правило заштрихованной площади также показывает, что замкнутая система неустойчива, потому что точка $(-1,0)$ находится в пределах заштрихованной площади. Этот случай служит примером применения правила заштрихованной площади для определения устойчивости замкнутой системы. Для пояснения сказанного рассмотрим другой пример передаточной функции разомкнутой цепи, определяемой уравнением

$$HG(s) = \frac{K}{-1 + s\tau_1}. \quad (5.40)$$

Система с разомкнутой цепью будет неустойчива с полюсом при $s = \frac{1}{\tau_1}$. Контур Найквиста для этой передаточной функции показан на фиг. 5. 18, *б*. Как видно, он представляет окружность, значения которой изменяются по направлению против часовой стрелки. Если точка $(-1,0)$ находится внутри окружности (т. е. $K > 1$), то она будет охвачена (-1) раз, так что $N = -1$. Применение формулы $N = Z_r - P_r$ показывает, что в случае $Z_r = 0$ система в замкнутом состоянии будет устойчива.

Если коэффициент усиления K больше единицы, то мы будем иметь случай неустойчивой разомкнутой системы, которая приобретает устойчивость при замыкании цепи. Если точка $(-1,0)$ лежит вне окружности (т. е. $K < 1$), то $N = 0$ и $Z_r = 1$, так что замкнутая



Фиг. 5. 18. Области устойчивости по критерию Найквиста для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии:

a — кривая устойчивости по Найквисту при

$$HG(s) = \frac{K}{s(-1 + s\tau_1)} ;$$

б — кривая устойчивости по Найквисту при

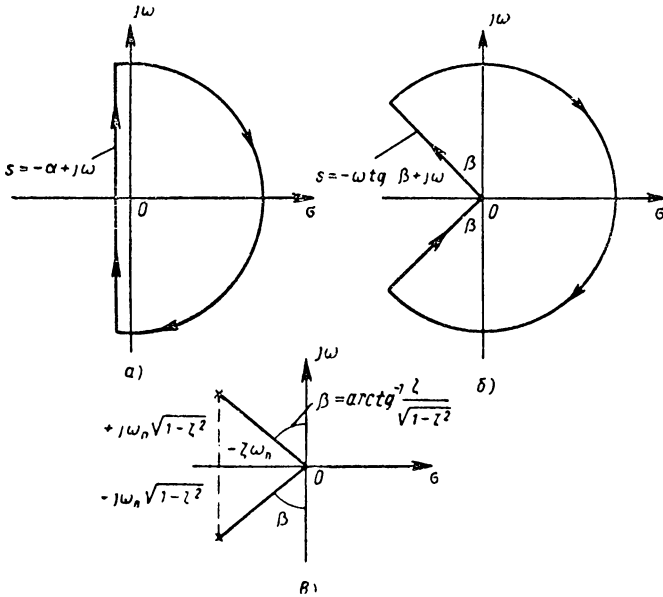
$$HG(s) = \frac{K}{s(-1 + s\tau_1)} .$$

система остается неустойчивой. При изучении фиг. 5. 18 по правилу заштрихованной площади подтверждается прежний вывод, что система устойчива в замкнутом состоянии, когда точка $(-1,0)$ находится на заштрихованной площади.

5. 4. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ В ПЛОСКОСТИ s

Теорема построения кривых Найквиста может быть использована для других видов кривых в плоскости s , кроме изображенных на фиг. 5. 11 и 5. 15, *a*. Две подобных кривых показаны на фиг. 5. 19. Первая из них состоит из прямой, параллельной мнимой оси, и окружности бесконечного радиуса, заключающей в себе всю правую полуплоскость (—) и часть левой полуплоскости между вертикальной линией и мнимой осью. Для прямолинейной части имеем $s = -\alpha + j\omega$, где α постоянна и ω изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Предположим, что функция $HG(s)$ построена для этой кривой и что результирующая кривая не охватывает точку $(-1,0)$. Если функция $HG(s)$ не имеет полюсов, которые были бы охвачены этой кривой в плоскости s , то отсюда следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы не будет иметь нулей, охваченных этой кривой. Следова-

тельно, все корни характеристического уравнения замкнутой системы будут находиться слева от вертикальной линии. Ввиду того что действительные части корней лежат в этом случае слева от вертикальной линии, все постоянные времени будут меньше $\frac{1}{\alpha}$, т. е. все составляющие собственного движения системы будут изменяться быстрее, чем $e^{-\alpha t}$. Следовательно, этот тип контура в плоскости s полезен для определения случая, когда система имеет время



Фиг. 5. 19. Формы кривых в комплексной плоскости s по критерию Найквиста:

a — контур с постоянной α ; b — контур с постоянным γ ; θ — расположение пар комплексных сопряженных корней на плоскости s .

регулирования меньше заданного значения. К сожалению, этот контур не позволяет получить какую-либо информацию об относительном коэффициенте демпфирования системы и возможно, что такая система может иметь очень большое перерегулирование переходного процесса, если даже время регулирования вполне удовлетворительно. На фиг. 5. 19, b показан контур в плоскости s , позволяющий оценить относительный коэффициент демпфирования. Радиусы-векторы определяются постоянным углом β . Вдоль радиуса-вектора s определяется следующей формулой:

$$s = -\omega \operatorname{tg} \beta \pm j\omega, \quad (5. 41)$$

где угол β имеет постоянное значение и ω изменяется от нуля до бесконечности. Если этот контур в плоскости s не включает в себе

поллюсов функции $HG(s)$ и если результирующий контур в плоскости $HG(s)$ не охватывает точки $(-1,0)$, то отсюда следует, что характеристическое уравнение замкнутой системы не будет иметь корней внутри заданного контура плоскости s . Значение этого результата становится очевидным после определения, что все корни характеристического уравнения с одинаковым относительным коэффициентом демпфирования расположены на радиусах-векторах. Рассмотрим пару комплексных сопряженных корней, расположенных в точке $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ (фиг. 5. 19, а). Угол β , который образует радиус-вектор из начала координат к значению данного корня с мнимой осью, определяется из равенства

$$\beta = \arctg \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5. 42)$$

При постоянном значении угла β будем иметь геометрическое место всех корней с одинаковым относительным коэффициентом демпфирования ζ . Когда угол β становится малым, то соответствующее значение ζ также уменьшается. При возвращении к годографу в плоскости s на фиг. 5. 19, б можно определить, что если этот контур в плоскости s не охватывает корней, то корни характеристического уравнения должны иметь относительный коэффициент демпфирования ζ больше значения, определяемого равенством (5. 42) при предполагаемом значении угла β у контура в плоскости s . К сожалению, этот контур не позволяет получить сведения о времени регулирования и поэтому не исключена возможность, что система будет иметь удовлетворительный коэффициент демпфирования и все же крайне большое время регулирования. Это имеет место в случае корней характеристического уравнения, расположенных вблизи начала координат, но вне контура на фиг. 5. 19, б. Таким образом, при использовании обоих вышеописанных контуров в плоскости s возможно исследовать максимальную постоянную времени и минимальный относительный коэффициент демпфирования для корней характеристического уравнения замкнутой системы на основании передаточной функции разомкнутой цепи.

ЗАДАЧИ

5. 1. Проверить следующие характеристические уравнения на наличие корней, расположенных в правой полуплоскости, на основании критерия Рауса:

а) $5s^3 + 2s^2 + 12s + 6 = 0$; б) $4s^3 + 3s^2 + 2s + 5 = 0$;

в) $s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$.

5. 2. Проверить условия устойчивости системы четвертого порядка на основании уравнения (5. 9).

5. 3. Построить контур Найквиста и частотные характеристики для нижеследующих передаточных функций и определить устой-

чивость систем:

а) $HG(j\omega) = \frac{200}{j\omega(j\omega + 5)}$; б) $HG(j\omega) = \frac{200}{j\omega(j\omega + 5)(j\omega + 10)}$;

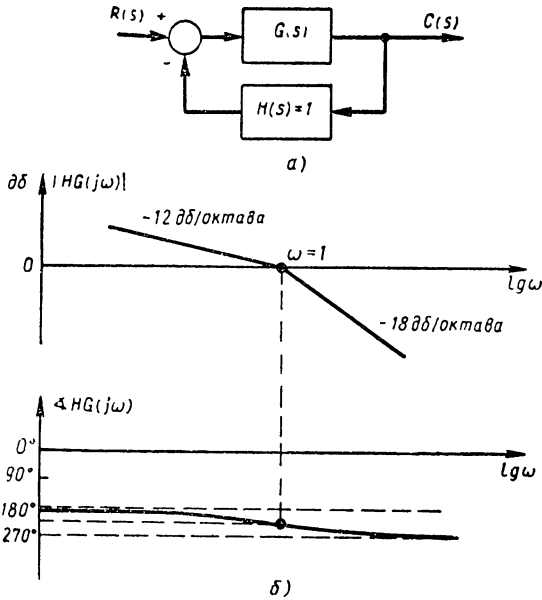
в) $HG(j\omega) = \frac{200}{(j\omega)^2(j\omega + 5)}$; г) $HG(j\omega) = \frac{10(j\omega + 1)}{(j\omega)^2}$.

5. 4. Передаточная функция разомкнутой цепи системы управления с обратной связью имеет вид

$$(1 + 4s)/s^2 (1 + s) (1 + 2s).$$

а) На основании критерия Найквиста определить устойчивость замкнутой системы.

б) Определить, пересекает ли амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы действительную ось. Определить частоту среза, если она имеет место. Если нет, то объяснить причины.



Фиг. 5. 20.

а — структурная схема системы управления; б — логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики.

5. 5. Передаточная функция разомкнутой цепи системы управления на фиг. 5. 20, а имеет асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики, показанные на фиг. 5. 20, б.

а) Определить годограф устойчивости Найквиста для этой системы.

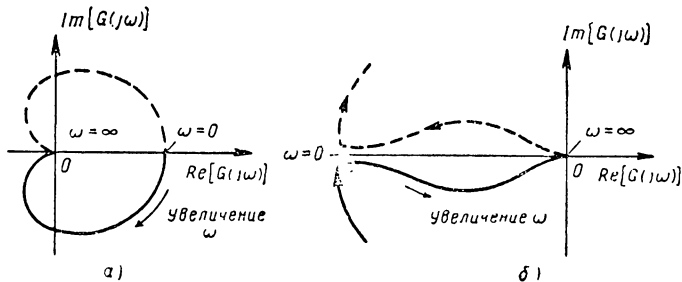
б) Определить, является ли эта система всегда устойчивой или всегда неустойчивой или условно устойчивой.

в) Написать характеристическое уравнение для замкнутой системы.

г) Повторить определение по предыдущим пунктам, когда $H(s) = 10$.

д) Повторить предыдущие пункты, когда $H(s) = 1 + 4s$.

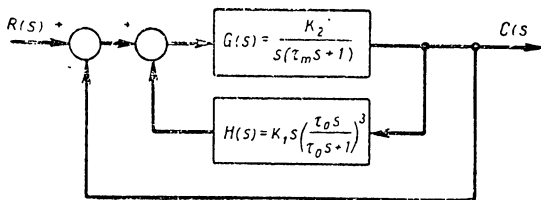
5. 6. Написать простейшую функцию $HG(s)$, которая может иметь контур Найквиста, построенный на фиг. 5. 21.



Фиг. 5. 21. Области устойчивости по Найквисту.

5. 7. Дана система управления со структурной схемой на фиг. 5. 22.

а) Исследовать устойчивость внутренней замкнутой цепи, показать, что при $\tau_0 > \tau_m$ контур Найквиста для внутренней цепи пересекает отрицательную действительную ось при частоте $\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\tau_0}$ и что внутренняя цепь неустойчива, когда $\frac{1}{8} K_1 K_2 > 1$.

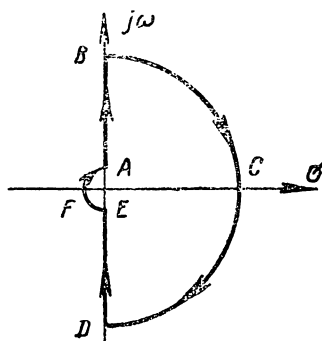


Фиг. 5. 22. Схема системы управления.

б) Построить контур Найквиста для всей замкнутой системы. Указать участок (s) на отрицательной действительной оси, где может лежать точка $(-1, 0)$, чтобы вся система была устойчивой, если даже внутренняя цепь системы неустойчива сама по себе.

5. 8. Исследовать устойчивость разомкнутой цепи с передаточными функциями, приведенными в примерах (5. 3)—(5. 5), предположив, что контур в плоскости s показан на фиг. 5. 23, причем ближайшее окружение около начала координат заключено контуром в плоскости s .

5. 9. Построить контуры Найквиста для следующих передаточных функций разомкнутой цепи, которые содержат задержку времени при прямой передаче, как это показано экспоненциальным



Фиг. 5. 23. Контур в плоскости s .

членом. Исследование следует начинать с устойчивости замкнутой цепи системы на основании правила заштрихованной площади.

$$\text{а) } HG(s) = \frac{e^{-2s}}{s+5}; \quad \text{б) } HG(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+5)}.$$

5. 10. Система имеет передаточную функцию разомкнутой цепи, описываемую $HG(s) = \frac{25}{(s^2+25)}$. Построить диаграмму Найквиста. Показать предполагаемый контур в плоскости s и обозначить участки контура в плоскости $HG(j\omega)$, соответствующие участкам на плоскости s .

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ

В процессе проектирования систем управления часто необходимо ввести в систему корректирующие контуры не только для получения абсолютной устойчивости, но, что еще более важно, для удовлетворения требований к установившемуся режиму и качеству переходного процесса. Обычно характеристики объектов регулирования выражаются через параметры, определяющие требуемую выходную величину, например, выходную скорость¹ и ускорение, если подобные условия заданы заранее. Часто проектировщик системы управления начинает с определенной схемы, передаточная функция которой ему мало или вовсе неизвестна. Например, при данных условиях необходимо обеспечить требуемый выходной крутящий момент, скорость и ускорение амплитудина с приводом от двигателя постоянного тока. Характеристика объекта управления в подобном случае дается в виде передаточной функции неизменных элементов, которая может иметь следующий вид:

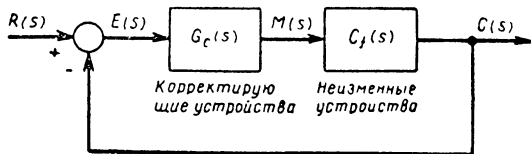
$$G_f(s) = \frac{K}{s(1 + s\tau_c)(1 + s\tau_q)(1 + s\tau_m)} \quad (6.1)$$

Когда подобная система будет замкнута через цепь обратной связи, то не исключается возможность, что не только не будут удовлетворены требования о реакции в установившемся и переходном процессе, но существует большая вероятность, что система будет неустойчивой. Отсюда ясна необходимость включения соответствующих корректирующих контуров, которые позволяют удовлетворить требованиям об абсолютной устойчивости системы.

На фиг. 6.1 показана структурная схема системы управления с одной цепью обратной связи с неизменными элементами, отделенными от корректирующих элементов. Главная задача настоящей главы состоит в изложении порядка расчета контуров, благодаря чему система приобретает заданные динамические свойства. Метод расчета осуществляется полностью в частотной области, причем

¹ В настоящей главе всюду под выходной скоростью понимается первая производная выходной регулируемой величины, как-то: перемещения, температуры, давления и др.

основное внимание обращено на электрические корректирующие контуры, в особенности на запаздывающие, опережающие и опережающе-запаздывающие, контуры, которые были рассмотрены в главе 3. Аналогичные корректирующие схемы могут быть разработаны для пневматических систем управления, причем методика расчета остается та же. Эти три стандартных корректирующих контура создают существенное преимущество, состоящее в возможности осуществления их на сопротивлениях и емкостях. Конечно, можно применить другие методы расчета, но часто для понимания окончательных передаточных функций для коррекции необходимо более широкое обоснование, чем предполагалось здесь.



Фиг. 6. 1. Система управления с обратной связью и последовательным корректирующим контуром.

6. 1. ОБЩИЙ ПОРЯДОК ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Нам уже известно существование связи между частотной характеристикой системы и ее соответствующей временной реакцией. Это более подробно рассмотрено в разделе 2.1 для системы второго порядка. Ввиду сложности математического описания эта связь была дана при помощи графиков, так что возможно определить только приближенную связь. Как подчеркивалось раньше, это ограничивает возможность применения частотного метода; он ухудшает точное описание характеристики во временной области за счет облегчения анализа и расчета. Конечно, при изучении проблем стабилизации и коррекции систем управления при помощи частотных методов, изменение поведения системы во временной области более удобно выражать через соответствующие параметры, например, предельный угол сдвига фазы и критический коэффициент усиления, которые, хотя и определяются в частотной области, могут быть использованы в качестве показателей характеристики во временной области. Зависимость между предельными параметрами во временной области для системы второго порядка (например, относительный коэффициент демпфирования, который является мерой максимального перерегулирования) и параметрами в частотной области, например, предельным сдвигом фаз, сравнительно проста и она показана на фиг. 4. 21. Однако эта зависимость более сложна для систем высшего порядка и обычно требуется разработать целый ряд расчетных таблиц, чтобы определить удовлетворительную связь для большинства систем. Для рассматриваемых задач изменение реакции переходного процесса систем управления достигается через предельный угол сдвига фаз на основании фиг. 4. 21, а также при помощи ширины полосы пропускания частот. Этот метод применим даже к системам более высокого порядка, чем второй, что оправдывается двумя обстоятельствами. Во-первых, большинство систем высшего порядка ведет себя, как система

второго порядка вследствие преобладания пары комплексных сопряженных корней в решении характеристического уравнения. Во-вторых, ввиду того, что практическая связь между частотной характеристикой и временной характеристикой является в лучшем случае приближенной, расчет должен быть вынужденно приближенным. Поэтому задача состоит в проектировании системы, которая после осуществления должна работать достаточно хорошо, несмотря на то, что заданные условия не были точно соблюдены. Этот последний аспект проблемы может быть также легко разрешен путем точной регулировки коэффициента усиления усилителя и параметров контуров, так что может быть получена приемлемая рабочая система. Это вполне целесообразное приближение, особенно учитывая тот факт, что даже в случае точной практической связи будет необходима окончательная настройка системы вследствие влияния нелинейностей, присущих системе.

В результате исследования в чисто частотной области порядок расчета, изложенный в настоящей главе по необходимости содержит анализ конструкции. В основном это связано с недостатком непосредственного изменения корней характеристического уравнения. Расчет коррекции путем анализа представляет косвенное приближение к решению задачи получения системы управления с удовлетворительным динамическим поведением. Этот способ является косвенным, потому что требуется определить корректирующую передаточную функцию, которая может создать требуемый предельный сдвиг фаз, а затем анализировать измененную систему для проверки достигнутых результатов. Когда результат не получился удовлетворительным, необходимо рассчитать измененную передаточную функцию и анализ повторить. Обычно требуется не более двух-трех попыток для получения корректирующей передаточной функции, которая дает заданный предельный сдвиг фаз; объем требуемых вычислений будет сравнительно небольшой при условии, что расчет производится по логарифмическим частотным характеристикам. В действительности подобные графики передаточных функций разомкнутых цепей и корректирующих контуров являются более наглядными, когда необходимо определить постоянные времени этих контуров с целью достигнуть необходимой коррекции.

Расчет путем анализа противоположен расчету путем синтеза. В первом случае проектировщик изменяет передаточную функцию разомкнутой цепи $G_c(s) G_f(s)$ до тех пор, пока наконец не будет достигнут момент, когда система ведет себя требуемым образом при замыкании цепи. Однако при расчете путем синтеза проектировщик определяет форму передаточной функции замкнутой цепи непосредственно по заданным условиям. Затем эта работа направлена на определение соответствующей передаточной функции разомкнутой цепи и, наконец, требуемого корректирующего контура.

Кроме преимуществ, состоящих в простоте и легкости анализа (потому что здесь применяются математические операции, известные большинству инженеров), частотные методы расчета обладают неко-

торами другими заслуживающими внимания свойствами. Один важный момент состоит в том, что предельные параметры, определяющие частотную характеристику, наносятся по этому методу непосредственно на частотные кривые. Следовательно, для системы класса 1 коэффициент скорости представляет попросту значение частоты, соответствующее точке пересечения начальной линии с наклоном — 6 дБ/октава с осью абсцисс (0 дБ; см. фиг. 4. 24, б). Аналогично можно определить коэффициент ускорения (см. фиг. 4. 25). Другая особенность частотного метода состоит в том, что он позволяет очень хорошо определять ширину полосы частот системы, которая часто содержится в спецификации и может быть только приближенно определена другими расчетными методами. Еще одна особенность частотного метода связана с тем, что влияние опережающих и запаздывающих контуров на ширину полосы частот системы становится совершенно очевидным. При простом обозначении коэффициентов K_v и K_a этот метод позволяет сравнительно просто рассчитать необходимый корректирующий контур.

6. 2. ПРИМЕНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРЕЖАЮЩИХ И ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОНТУРОВ

От выбора соответствующих постоянных времени контуров зависит, насколько тот или иной корректирующий контур в системе управления с обратной связью будет обеспечивать необходимый предельный угол сдвига фаз.

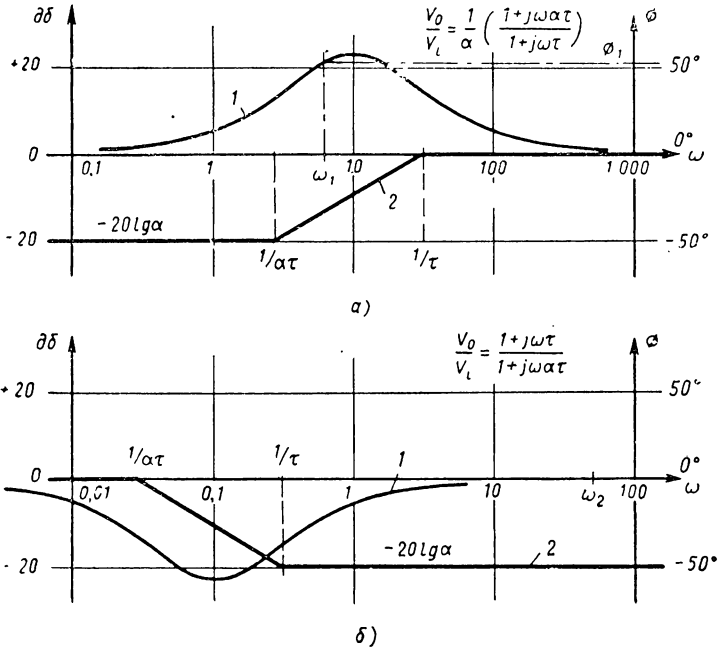
К сожалению, нет легкой дороги. Если постоянные времени были выбраны слишком большими или слишком малыми, то требуемый предельный сдвиг фаз не будет достигнут. Диапазон частот, в пределах которого запаздывающие и опережающие контуры эффективно влияют на создание относительной устойчивости, может быть задан лишь ограниченно. Это обстоятельство ясно вытекает из изучения логарифмических частотных характеристик запаздывающих и опережающих контуров (фиг. 6. 2, а, б).

Назначение опережающего контура состоит в первую очередь в создании достаточного угла опережения фазы, чтобы компенсировать запаздывание по фазе, связанное с определенными элементами системы. На фиг. 6. 2, а показано, что диапазон частот, где это возможно осуществить, ограничен областью, лежащей между двумя частотами точек сопряжения. Опережающий контур ведет себя ниже первой частоты точки сопряжения как простой демпфер с очень незначительным опережением по фазе. С другой стороны, за пределами второй частоты точки сопряжения этот контур не создает ни затухания, ни сдвига фаз, и, следовательно, оказывает пренебрежимо малое влияние.

Следует заметить, что область, в которой создается опережение по фазе, является также областью, где логарифмическая амплитудно-частотная характеристика изменяет свой наклон. В действительности, этот вывод не означает ничего большего, как подтверждение

двух важнейших теорем о частотных характеристиках для линейных систем. На фиг. 6. 2 б видно, что аналогичное положение существует для запаздывающего контура, кроме одного, конечно, что высокие и низкие частоты оказывают противоположное влияние.

Из сравнения этих характеристик опережающих и запаздывающих контуров вытекает, что методы получения требуемой коррекции не могут быть одинаковы в обоих случаях. Например, когда система



Фиг. 6. 2.

а — частотная характеристика для опережающего контура; б — частотная характеристика для запаздывающего контура; 1 — фазо-частотная характеристика; 2 — кривая асимптотического затухания.

управления имеет плохую динамическую характеристику вследствие чрезмерного запаздывания неизменных элементов, тогда применение запаздывающего контура в области, лежащей между двумя частотами точек сопряжения (как это имеет место в случае опережающего контура), определенно может только ухудшить дело, потому что это вводит еще большее запаздывание, как показано на фиг. 6. 2, б, и не будет достаточного затухания. Выше было показано, что эта область характеристики запаздывающего контура не является благоприятной; благоприятное влияние будет оказывать та часть характеристики, которая лежит значительно выше второй точки сопряжения и которая характеризуется затуханием и практически отсутствием запаздывания по фазе. Важно подчеркнуть, что это свойство затухания запаздывающего контура эффективно только в динамическом

состоянии, когда оно и требуется. В установившемся состоянии, когда $\omega \rightarrow 0$ (или $s \rightarrow 0$ см. теорему о предельных значениях) не будет затухания, создаваемого запаздывающим контуром, так что его параметры, т. е. коэффициент скорости или коэффициент ускорения исключается из рассмотрения. В заключение можно поэтому сказать, что опережающий контур создает требуемую коррекцию благодаря своей фазопережающей характеристике, в то время как запаздывающий контур осуществляет это вследствие своего демпфирующего свойства. Отсюда, конечно, следует, что в случае выбора параметров запаздывающего контура для исключения затухания в непосредственной близости около точки $(-1 + j0)$ амплитудно-фазовой кривой $G_f(s)$, возможность получения требуемой коррекции отпадает.

Для лучшего понимания способа коррекции при помощи опережающих и запаздывающих контуров предположим, что они были применены в системе управления, у которой неизменные элементы обладают следующей передаточной функцией:

$$G_f(j\omega) = \frac{K_f}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}, \quad (6.2)$$

где K_f означает коэффициент усиления, связанный с неизменными элементами системы. Чтобы выяснить картину, как эта передаточная функция изменяется вследствие введения корректирующих контуров, возможно применить амплитудно-фазовую кривую для этой передаточной функции. Амплитудно-фазовая характеристика обладает тем преимуществом, что может охватывать весь частотный спектр, начиная от очень низких значений частоты, до бесконечно большой частоты, причем может быть использован лист бумаги стандартных размеров.

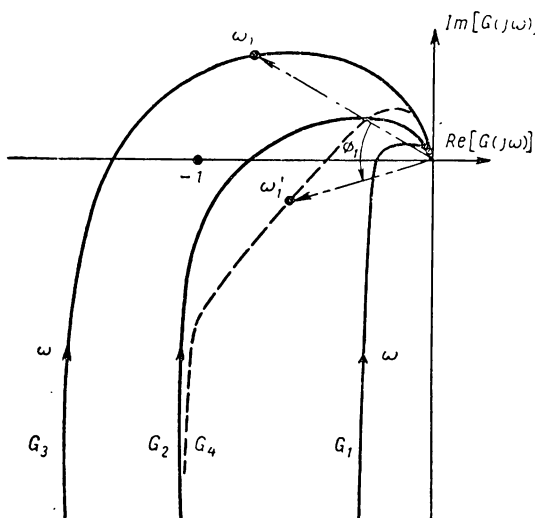
Логарифмические частотные характеристики позволяют охватить диапазон только от 4 до 5 декад на листе одинакового размера. Иными словами, амплитудно-фазовая характеристика дает общий обзор, позволяющий сделать обобщение. Конечно, в случае расчета, желательно иметь характеристику в большем масштабе и для этой цели применяются частотные характеристики, охватывающие три декады.

Коррекция при помощи опережающего контура. Система класса 1. Здесь стоит задача выбора опережающего контура таким образом, чтобы он обеспечивал заданную частотную характеристику и тем самым надлежащее динамическое поведение системы. Последняя определяется через соответствующий предельный сдвиг фаз и преобладающую постоянную времени. Предположим, что объект регулирования описывается уравнением (6.2) и что его амплитудно-фазовая характеристика обозначена G_1 на фиг. 6.3 и 6.4.

Кривая G_1 преднамеренно строится таким образом, чтобы она обладала двумя нежелательными свойствами. Во-первых, реакция на сигнал команды замедленна. Это вытекает из того факта, что здесь имеется очень большой предельный сдвиг фаз. Это можно также вывести из того обстоятельства, что максимальная окружность M , связанная с кривой G_1 , совершенно очевидно меньше единицы.

Во-вторых, коэффициент скорости мал. Этот вывод связан с тем фактом, что кривая при низких частотах расположена близко к мнимой оси.

Для удовлетворения заданных значений коэффициента скорости предположим, что необходимо усиление $K_A K_f$, где $K_A > 1$ на требуемую величину. Измененная передаточная функция разомкнутой цепи теперь будет равна $G_2(j\omega)$ (она показана на фиг. 6.3 и 6.4, б). Наиболее часто наблюдается, что коэффициент усиления, удовлетворяющий условиям установившегося режима, обычно не дает удовлетворительной характеристики переходного процесса.



Фиг. 6.3. Графики, иллюстрирующие влияние опережающего контура на передаточную функцию разомкнутой цепи с коррекцией по усилению.

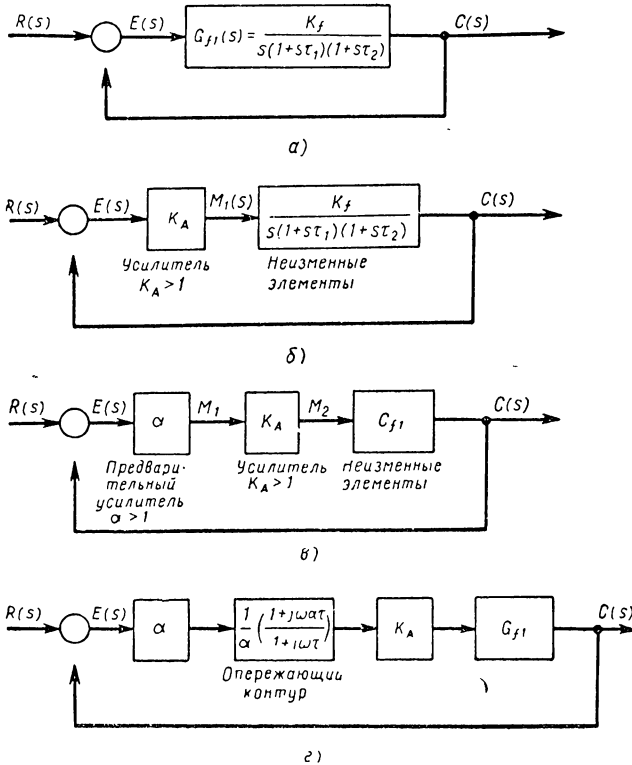
Заметим, что эта система абсолютно неустойчива вследствие охвата точки $(-1 + j0)$. Причина увеличения коэффициента усиления на дополнительный множитель α становится очевидна, когда опережающий контур включается в прямую цепь передачи системы $G_3(j\omega)$ для получения $G_4(j\omega)$, как это показано на фиг. 6.4, г.

При надлежащем выборе постоянной времени и коэффициента затухания $\frac{1}{\alpha}$ опережающего контура возможно тогда удовлетворить требования по заданным значениям коэффициента скорости и динамической характеристики. Рассмотрим выражение для $G_4(j\omega)$, чтобы показать как опережающий контур позволяет осуществить заданные условия. Итак,

$$G_4(j\omega) = K_A \alpha \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\omega\alpha\tau}{1 + j\omega\tau} \right) \frac{K_f}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6.3)$$

ворительной характеристики переходного процесса. Кривая G_2 на фиг. 6.3 отражает это положение в виде малого предельного сдвига фаз, благодаря чему возникают сильные колебания и чрезмерное переуправление. По соображениям, которые будут изложены ниже, предположим, что коэффициент усиления разомкнутой цепи дополнительно увеличен на множитель α (α больше единицы) выше значения, требуемого для удовлетворения заданного коэффициента скорости. На фиг. 6.4, в показана схема такой системы, причем соответствующая амплитудно-фазовая кривая обозначена G_3 (фиг. 6.3).

Форма амплитудно-фазовой характеристики G_4 легко определяется при помощи ранее рассмотренных кривых путем изучения сперва формы, которую имеет $G_4(j\omega)$ при условии, когда частота сигнала рассогласования ω очень высокая, а затем изучается участок низкой частотной кривой и, наконец, участок кривой при промежуточных частотах. Конечно, термины «очень высокая» и «очень низкая» частоты



Фиг. 6. 4. Корректирующий контур с опережением:

а — некорректированная система; б — скорректированная по усилению система для получения установившейся характеристики; в — неустойчивая система; г — окончательная скорректированная система с заданной характеристикой.

являются относительными и должны быть определены в зависимости от частот точек сопряжения характеристики выбранного опережающего контура.

Когда частота высокая, передаточная функция опережающего контура уменьшается до единицы, так что уравнение (6. 3) будет

$$G_4(j\omega) |_{\omega \text{ большая}} = K_A \alpha \frac{K_f}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6. 4)$$

Сравнение последнего выражения с уравнением для $G_3(j\omega)$ показывает, что они практически идентичны, так что амплитудно-фазовые

характеристики почти совпадают при высокой частоте. На нижнем конце частотного спектра функция по уравнению (6.3) сводится к

$$G_4(j\omega) |_{\omega \text{ малая}} = K_A \frac{K_f}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}. \quad (6.5)$$

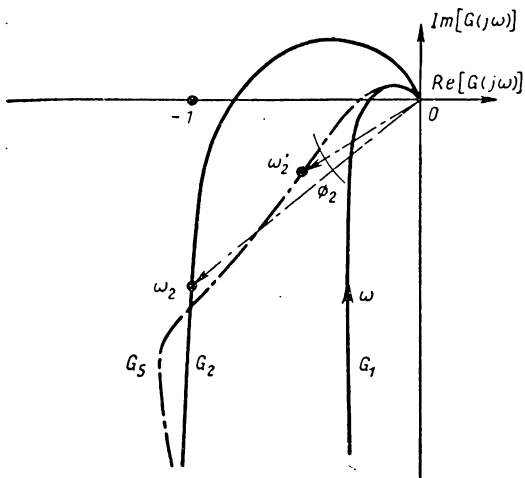
Нетрудно видеть, что последнее выражение равноценно $G_2(j\omega)$. Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика $G_4(j\omega)$ при низких частотах должна фактически совпадать с амплитудно-фазовой характеристикой $G_2(j\omega)$. Заметим, что опережающий контур ведет себя в этой части частотного спектра просто как демпфер с коэффициентом $1/\alpha$. Теперь становится ясна причина введения дополнительного коэффициента усиления α в функцию $G_3(j\omega)$. Это устраняет затухание, связанное с опережающим контуром. Если этого не сделать, то требуемый коэффициент скорости не может быть осуществлен.

Характеристику $G_4(j\omega)$ в промежуточной части частотного спектра лучше всего иллюстрировать путем изменения радиус-вектора до точек на кривой G_3 при наличии опережающего контура в системе функции G_4 . Предположим, что ω_1 представляет частоту, которая несколько снижается между двумя точками сопряжения, как показано на фиг. 6.2, а. Ввиду того, что опережающий контур включен последовательно с G_3 радиус-вектор $0\omega_1$ изменяется по величине и фазе. На фиг. 6, 2 а показано, что при частоте ω_1 опережающий контур создает опережение на угол φ_1 и некоторое затухание. Это оказывает общее влияние на перемещение радиус-вектора для разомкнутой цепи из положения $0\omega_1$ в более благоприятное положение $0\omega'_1$. Путем повторения этого способа для достаточного числа точек можно получить амплитудно-фазовую кривую, показанную на фиг. 6.3. Окончательный результат выражается повышением предельного сдвига фаз с изменением коэффициента усиления с целью получения требуемого коэффициента скорости. Следовательно, наличие опережающего контура позволяет удовлетворить оба заданных условия. Следует напомнить, что здесь имеет место большое сходство с методом улучшения частотной характеристики и переходного процесса путем использования демпфирования, пропорционального скорости рассогласования и выходной скорости, что было рассмотрено в главе 1. Действительно, эти способы являются одинаковыми. Разница состоит в том, что в главе 1 расчет осуществлялся путем рассмотрения временной области, в то время как здесь используется частотный метод. Это становится совершенно очевидным из того, что характеристика опережения по фазе в частотной области выводится из уравнения, содержащего производные по времени. Заметим, что оба способа приближения приводят к одинаковому результату, т. е. введение регулирования по скорости (опережающий контур) позволяет увеличить коэффициент усиления разомкнутой цепи, не оказывая вредного влияния на характеристику переходного процесса.

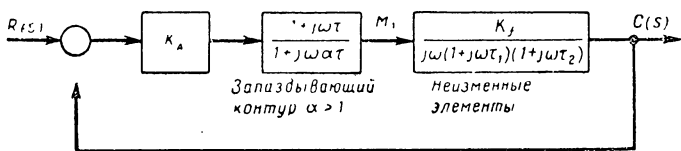
При некоторых условиях часто удается получить определенные элементы системы управления, которые непосредственно приводят к амплитудно-фазовой характеристике, подобной кривой G_3 на

фиг. 6.3. Введение опережающего контура в подобном случае иногда предназначается не только для коррекции, но также для стабилизации. Поэтому эти схемы иногда относят к стабилизирующим контурам.

Коррекция при помощи запаздывающего контура. Система класса 1. Чтобы иметь основу для сравнения, опять рассмотрим объект регулирования, описываемый уравнением (6.2). Для удобства амплитудно-фазовая характеристика повторена на фиг. 6.5 и обозначена G_1 . Как и в случае коррекции при помощи опережающего контура первый шаг состоит в регулировании усиления для получения заданной частотной характеристики, что в нашем примере означает обеспечение требуемого коэффициента скорости. Для этого увеличение на коэффициент K_A и таким образом получим измененную систему, которая имеет одинаковую функцию $G_2(j\omega)$, как на фиг. 6.4, б. Амплитудно-фазовая характеристика для этого случая также дана на фиг. 6.5. Введение запаздывающего контура изменяет схему на фиг. 6.4, б, преобразуя ее в схему



Фиг. 6.5. График для иллюстрации влияния коррекции по запаздыванию на передаточную функцию разомкнутой цепи.



Фиг. 6.6. Корректирующий запаздывающий контур.

на фиг. 6.6. Отсюда выражение для передаточной функции разомкнутой цепи этой скорректированной системы будет иметь вид

$$G_3(j\omega) = K_A \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau} \cdot \frac{K_f}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6.6)$$

Как раньше подчеркивалось, коррекция при помощи запаздывающего контура создается в результате способности контура демпфировать колебания в высокочастотной зоне спектра. Прохождение кривой G_2 на фиг. 6.5 вблизи точки $(-1 + j0)$ объясняет причину,

почему характеристика переходного процесса, оказывается неудовлетворительной. Если запаздывающий контур должен эффективно улучшать эти условия, необходимо так переместить эту часть амплитудно-фазовой характеристики, которая лежит вблизи точки $(-1 + j0)$, чтобы она была расположена далеко справа. Подобное изменение влияет на увеличение предельного сдвига фаз, что, в свою очередь, означает удовлетворительную динамическую характеристику. Нетрудно показать, что опережающий контур может легко выполнять эту функцию при условии, что характеристика затухания этого контура бесспорно преобладает в этой части частотного спектра, начиная с ω_2 (см. также фиг. 6. 2, б), и продолжается до очень больших значений.

Первоначально попытаемся определить характер амплитудно-фазовой кривой $G_5(j\omega)$ при очень низких и очень высоких частотах. При очень низких частотах изменения сигнала рассогласования уравнение (6. 6) примет вид

$$G_5(j\omega)|_{\omega \text{ малая}} = \frac{K_A K_f}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6. 7)$$

Здесь «очень низкая частота» интерпретируется через первую частоту точки сопряжения характеристики запаздывающего контура. Следовательно, когда ω мала по сравнению с $\frac{1}{\alpha\tau}$ в уравнении (6. 6), тогда передаточная функция запаздывающего контура будет равна единице во всех практических случаях, так что амплитудно-фазовая кривая G_5 в основном совпадает с кривой G_2 . Интересно заметить, что в противоположность условиям коррекции посредством опережающего контура здесь не требуется дополнительного увеличения коэффициента усиления, чтобы сохранить первоначальную настройку, потому что запаздывающий контур не обладает демпфирующим свойством в установившемся состоянии. При сравнительно больших частотах относительно верхней частоты точки сопряжения характеристики запаздывающего контура, т. е. при $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, уравнение (6. 6) сводится к виду

$$G_5(j\omega)|_{\omega \text{ больш}} = \frac{K_A}{\alpha} \cdot \frac{K_f}{j\omega(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6. 8)$$

Отсюда следует, что амплитудно-фазовая кривая G_5 совпадает с кривой G_1 при высоких частотах, когда K_A и α имеют одинаковый порядок величины. Наконец, в частотном спектре между его «нижним» и «верхним» концами амплитудно-фазовая кривая G_5 должна перейти из G_2 к G_1 . Как сделать этот переход, лучше всего иллюстрировать на типичной точке кривой G_2 , например, точке ω_2 . Запаздывающий контур работает на этом радиусе-векторе в двух направлениях, т. е. изменяет амплитуду и фазу. Для правильно рассчитанного запаздывающего контура частота ω_2 расположена выше верхней частоты точки сопряжения, как показано на фиг. 6. 2, б. Конечно, радиус-

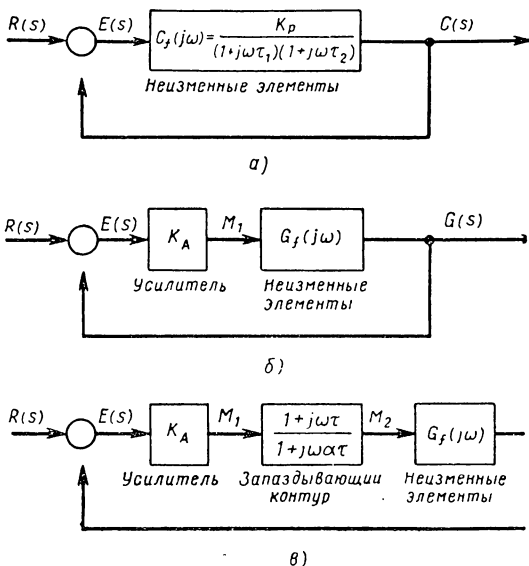
вектор $O\omega_2$ изменяется и становится значительно меньше, например, $O\omega'_2$ и одновременно будет иметь место несколько большее запаздывание, чем у радиуса-вектора $O\omega_2$, т. е. сдвиг на угол φ_2 . Запаздывание по фазе, создаваемое контуром, выражается только в низкочастотной части спектра, где оно обычно может оказывать вредное влияние на динамику систем. На фиг. 6.5 показана низкочастотная часть кривой G_5 , связанная с запаздыванием по фазе. Однако следует отметить, насколько удалена характеристика от точки $(-1 + j0)$.

Уменьшение установившейся ошибки при помощи запаздывающего контура. Система класса 0. Рассмотрим систему класса 0 с неизменными элементами, составная функция которой имеет вид

$$G_f(j\omega) = \frac{K_p}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} = G_1(j\omega). \quad (6.9)$$

Предположим, что характеристика переходного процесса при замкнутой цепи данной системы, как показано на фиг. 6.7 а, получается удовлетворительной, но установившаяся ошибка слишком большая. Приемлемая характеристика переходного процесса для этого случая

показана на фиг. 6.8, причем требуется заметить, что кривая $G_1(j\omega)$ является касательной к окружности $M = 1,4$. Задача конструктора состоит в том, чтобы уменьшить установившуюся ошибку путем увеличения позиционного коэффициента с сохранением в основном реакции в переходном режиме. Как обычно, первый шаг решения состоит в увеличении коэффициента усиления. Тогда система приобретает вид, показанный на фиг. 6.7, б и ее амплитудно-фазовая характеристика будет совпадать с кривой $G_2(j\omega)$ на фиг. 6.8. Следует опять заметить, что соблюдение заданных значений коэффициента усиления нарушает характеристику переходного процесса, как это выражается тем фактом, что кривая $G_2(j\omega)$ является касательной к окружности $M = 2$. Итак, система на фиг. 6.7 неудовлетворительна, потому что она обладает чрезмерным перерегулированием

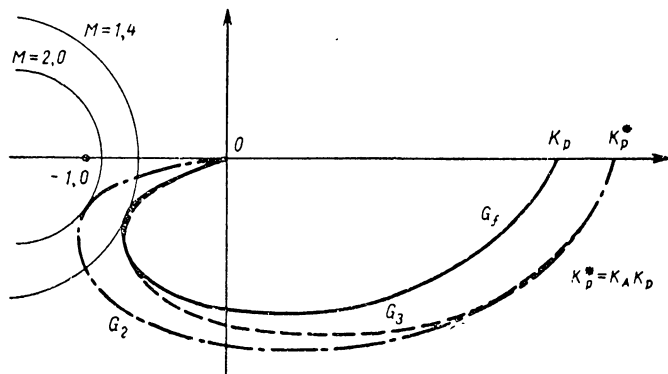


Фиг. 6.7. Применение корректирующего запаздывающего контура для уменьшения установившейся ошибки:

а — система, состоящая только из неизменных элементов; б — видоизмененная система для получения заданной характеристики в установившемся режиме; в — система, видоизмененная с целью получения заданной характеристики в установившемся и в переходном режимах.

во время переходного процесса. Отсюда вполне очевидно, что необходимо устройство, которое будет демпфировать колебания в высокочастотной части спектра (т. е. вблизи окружности M), не создавая затухания в низкочастотной части спектра. Таким устройством может быть запаздывающий контур. Он дает простейшее решение задачи коррекции. Окончательная схема системы, удовлетворяющая всем заданным условиям, показана на фиг. 6. 7, в, а соответствующая амплитудно-фазовая характеристика дана на фиг. 6. 8 и обозначена $G(j\omega)$.

В нескольких местах предыдущих глав подчеркивалось, что введение интегрирующего звена в прямую цепь передачи приводит к уменьшению ошибки в установившемся состоянии. Действительно



Фиг. 6. 8. Увеличение коэффициента положения в зависимости от коррекции запаздывания по фазе.

в случае, когда чисто интегрирующее звено создается посредством активного элемента, например серводвигателя, тогда установившаяся ошибка может быть даже полностью устранена. Применение запаздывающего контура, который является пассивным устройством, не позволяет достигнуть полного устранения установившейся ошибки, но его можно эффективно использовать для значительного снижения ошибки. Эта ограниченная возможность запаздывающего контура целиком связана с тем фактом, что он фактически является «неидеальным интегратором», что можно проверить при рассмотрении его передаточной функции.

Сравнение. В случаях применения систем класса 1 и класса 0 надлежащая коррекция для достижения требуемых параметров может быть осуществлена при помощи запаздывающего или опережающего контура. Ввиду того, что каждый из них дает в основном одинаковый результат, но несколько отличным способом, небесполезно обобщить эти различия.

1. Опережающий контур создает коррекцию благодаря опережающему сдвигу фаз, в то время как запаздывающий контур корректирует благодаря его демпфирующему свойству, которое преобладает в высокочастотной части спектра.

2. Для соблюдения жестких условий установившейся характеристики оба метода коррекции требуют увеличения коэффициента усиления. Но так как затухание создается опережающим контуром в установившемся режиме, это связано со значительно большим увеличением коэффициента усиления, чем в случае применения запаздывающего контура. Иногда это дополнительное усиление может быть создано предварительным усилителем, что означает увеличение количества звеньев в системе управления. Когда размеры и вес имеют первостепенное значение, что часто наблюдается в авиационных устройствах, подобный предварительный усилитель может стать определенным недостатком.

3. Ширина полосы частот для системы коррекции посредством опережающего контура всегда больше, чем для систем с коррекцией при помощи запаздывающего контура. Большая ширина полосы частот желательна для снижения времени регулирования. Однако это преимущество может быть сведено на нет из-за чувствительности к помехам. Чем больше ширина полосы частот, тем легче будет система реагировать на высокочастотные помехи. В действительности, когда система управления находится вблизи устройств с недопустимыми вибрациями с частотами, находящимися в полосе частот некорректированной системы управления, то не остается иного выбора, как применить коррекцию при помощи запаздывающего контура.

4. Применение коррекции при помощи запаздывающего контура в некоторых случаях может привести к слишком большому значению постоянных времени, даже практически неосуществимым. Этот неблагоприятный фактор применения запаздывающего контура происходит из-за необходимости вводить первую частоту точки сопряжения характеристики при достаточно низком значении, чтобы обеспечить эффективность затухания в требуемом частотном диапазоне. В подобных условиях необходимо применить коррекцию при помощи опережающего или запаздывающе-опережающего контура.

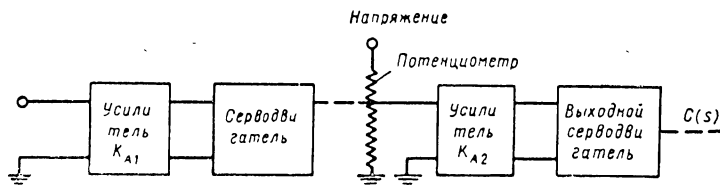
6. 3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМ КЛАССА 2

Сосредоточим свое внимание теперь на проектировании систем класса 2, начиная с формулировки задачи. Основанием для этого может служить весь материал, изложенный в книге. Нам необходимо не только выбрать основную конструкцию системы, но также рассчитать соответствующую коррекцию, если она будет необходима. Рассмотрим первоначально систему класса 2, потому что требуемый вид коррекции очевиден.

Постановка задачи. Требуется рассчитать систему управления с обратной связью для режущего инструмента, предназначенного для обработки по копиру (см. фиг. 4. 15), причем она должна быть в состоянии следить за сигналом команды постоянной скорости в установившемся режиме при отсутствии ошибки запаздывания. Кроме того, ошибка по положению в динамическом состоянии не должна выходить за приемлемые пределы и потому коэффициент ускорения должен равняться минимум 10.

Характеристика переходного процесса обусловлена предельным сдвигом фаз $45^\circ \pm 3^\circ$, что выбрано с целью удержать максимальное перерегулирование около 25%. Кроме того, преобладающая постоянная времени, характеризующая реакцию во временной области, должна быть меньше 1 сек. Теперь постановка задачи заключается только в перечислении заданных условий, которым окончательная схема системы должна удовлетворять, чтобы она соответствовала своему практическому назначению. Далее, как было объяснено выше, вследствие отсутствия простой и точной связи критериев между характеристиками во временной и частотной областях, заданные условия следует проверить на основании соответствующих предельных значений частотных характеристик.

Основные звенья системы. Изучение этой спецификации, где даны характеристики установившегося состояния, обычно позволяют



Фиг. 6. 9. Первая стадия разработки системы класса 2.

выяснить класс требуемой системы управления. В рассматриваемом случае система должна быть класса 2; это означает, что основная схема системы должна включать два идеальных интегрирующих звена. Ввиду того, что регулируемая переменная величина определяет положение, отсюда следует, что необходимо применить два последовательно соединенных серводвигателя вместе с их усилителями. Первый серводвигатель является приемником входного сигнала и усилителем мощности для второго серводвигателя. Часто это осуществляется путем перемещения ползунка потенциометра или плавного регулируемого автотрансформатора. Второй серводвигатель приводится в движение нагрузкой, в данном случае перемещает режущий инструмент. Блок-схема системы управления на первой стадии разработки показана на фиг. 6. 9.

Факторы, определяющие размер серводвигателя, зависят от условий применения. Выбор выходного серводвигателя определяется величиной нагрузочного момента, а также требуемой максимальной скоростью и ускорением. В подобных условиях нередко применяется гидропривод. Усилителем мощности тогда является электрогидравлический привод. Конечно, имеются и другие возможности применить сочетание амплитудина и двигателя постоянного тока, о чем говорится в главе. 3. Но когда требования относительно выходной мощности не являются чрезмерными, то достаточно использовать двухфазный серводвигатель, наряду с соответствующим электронным усилителем. В этом случае передаточную функцию звена системы,

состоящего из усилителя и выходного серводвигателя, можно просто написать

$$G_{M_2}(j\omega) = \frac{K_{A_2}K_{M_2}}{j\omega(1+j\omega\tau_2)}, \quad (6.10)$$

где K_{A_2} означает коэффициент усиления усилителя и K_{M_2} — коэффициент усиления двигателя.

Ввиду того, что эта передаточная функция имеет более простую форму, чем функция для амплитудина с двигателем, или для гидравлического усилителя с двигателем, то дальнейшее решение будем искать в предположении, что звено из электронного усилителя и двухфазного серводвигателя создаст требуемую выходную характеристику. Как и для первого серводвигателя необходимо выбирать его мощность достаточно большой, чтобы создать крутящий момент для перемещения ползунка потенциометра. Ввиду того, что здесь нет сомнений относительно нижнего уровня мощности, то звено определенно может быть составлено из электронного усилителя и двухфазного серводвигателя с передаточной функцией

$$G_{M_1}(j\omega) = \frac{K_{A_1}K_{M_1}}{j\omega(1+j\omega\tau_1)}, \quad (6.11)$$

где K_{A_1} — коэффициент усиления усилителя и K_{M_1} — коэффициент усиления двигателя.

Здесь следует заметить, что вследствие малых размеров первого серводвигателя и присоединенных к нему нагрузок постоянная времени τ_1 будет очень малой и практически ею можно полностью пренебречь по сравнению с постоянной времени τ_2 , которая во много раз больше из-за характера нагрузки. Поэтому уравнение (6.11) может быть упрощено, а именно

$$G_{M_1}(j\omega) = \frac{K_{A_1}K_{M_1}}{j\omega}. \quad (6.12)$$

Общая передаточная функция для системы на первой стадии разработки согласно фиг. 6.9 поэтому приобретает вид

$$G_{M_1}K_p G_{M_2} = \frac{K_{A_1}K_{M_1}K_p K_{A_2}K_{M_2}}{(j\omega)^2(1+j\omega\tau_2)}, \quad (6.13)$$

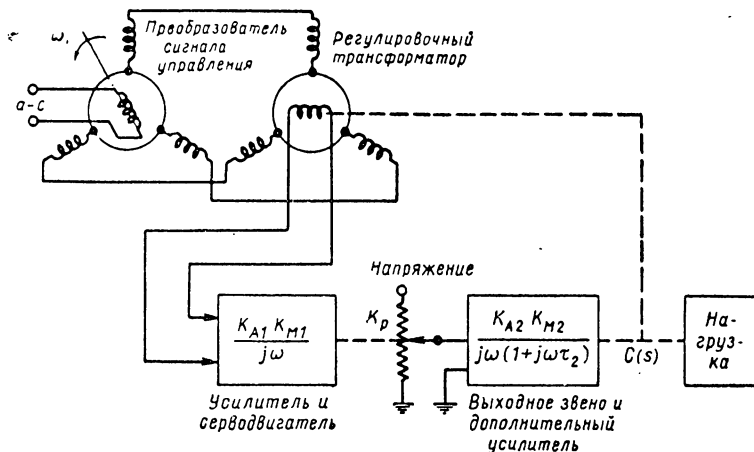
где K_p означает постоянную потенциометра, выраженную в $v/рад$.

Вторая стадия разработки системы управления состоит в выборе соответствующего детектора ошибки. Предполагается, что сравнительный (исходный) двигатель дает сигнал команды, который подается на скоростной вход. Форма команды механическая и эта механическая выходная величина может быть использована для привода потенциометра, который затем спарен с аналогичным потенциометром в цепи обратной связи, или для привода сельсина-датчика, который спарен с сельсином-трансформатором в цепи обратной связи.

В разделе 1. 2 подчеркивались соображения, согласно которым предпочитают применять сельсинные устройства для детектирования ошибки. Таким образом, система теперь имеет вид, изображенный на фиг. 6. 10 и она соответствует основной схеме системы управления с обратной связью. Обозначим постоянную преобразователя через K_s с размерностью $в/рад$; тогда передаточная функция разомкнутой некорректированной системы будет

$$G_f(j\omega) = \frac{K_s K_{A1} K_{M1} K_p K_{A2} K_{M2}}{(j\omega)^2 (1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6. 14a)$$

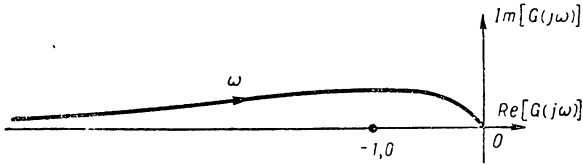
Необходимость коррекции. Основные звенья системы теперь определены и мы можем приступить ко второй части расчета. Следующая



Фиг. 6. 10. Наглядная схема для иллюстрации второй стадии проектирования системы класса 2.

стадия разработки состоит в определении необходимой степени коррекции. Для ответа на этот вопрос следует, во-первых, определить устойчивость системы, показанной на фиг. 6. 10 и, во-вторых, проверить, удовлетворяет ли она заданным условиям качества переходного процесса. Амплитудно-фазовая характеристика по уравнению (6. 14a) дает ответ на оба вопроса: система абсолютно неустойчива. На фиг. 6. 11 видно, что амплитудно-фазовая кривая в реальном частотном диапазоне расположена целиком во втором квадранте; это означает, что характеристическое уравнение содержит корни с положительной действительной частью. Это подтверждает тот факт, который уже неоднократно освещался, а именно, что чем выше класс системы, т. е. чем больше число интегрирующих звеньев, тем труднее поддерживать устойчивость системы. Следовательно, система на фиг. 6. 10 должна быть снабжена надлежащими корректирующими контурами. Изучение фиг. 6. 11 позволяет выяснить, что в данном случае возможно применить только один вид коррекции, а именно при помощи опережающего контура. Запаздывающий контур беспо-

лезен для этой системы, потому что никакая степень затухания не может сделать систему устойчивой. Конечно, опережающий контур будет эффективнее, так как благодаря опережающему сдвигу фаз часть амплитудно-фазовой характеристики вблизи точки $(-1 + j0)$ перемещается и изменяет свою форму таким образом, как показано на фиг. 6. 12. Ввиду того, что теперь точка $(-1 + j0)$ больше не охватывается, система становится устойчивой. В действительности, когда выбор опережающего контура позволяет изменить форму ампли-

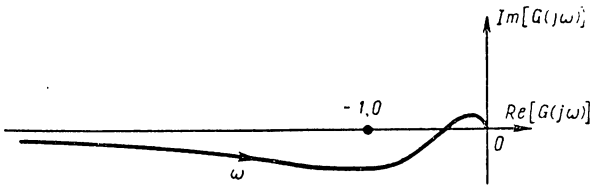


Фиг. 6. 11. Амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи системы, структурная схема которой показана на предыдущей фигуре.

тудно-фазовой кривой в достаточной степени, не только обеспечивается абсолютная устойчивость, но получается достаточный запас устойчивости.

Порядок расчета коррекции. Для иллюстрации порядка количественного расчета предположим, что уравнение (6. 14 а) имеет особую форму

$$G_f(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2 (1 + j0,2\omega)}, \quad (6. 14б)$$



Фиг. 6. 12. Амплитудно-фазовая характеристика в результате введения опережения корректирующего контура.

т. е. коэффициент усиления K_{A1} и K_{A2} отрегулированы до таких значений, которые дают заданный коэффициент ускорения; постоянная времени выходного серводвигателя и его эквивалентная инерция принята равной 0,2 сек.

Первая стадия расчета требует построения частотной характеристики по уравнению (6. 14 б) с использованием прямолинейной асимптоты, как об этом было изложено в главе 2. Коррекция рассчитывается на основании логарифмических кривых передаточной функции, так как эти графики позволяют одинаково определить характеристику для каждой декады частотного спектра.

Это обстоятельство не только упрощает порядок расчета, но также облегчает его по сравнению со случаем применения амплитудно-фазовых характеристик, где распределение частоты неоднородно и где алгебраические операции содержат больше умножения, чем сложения.

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики некорректированной системы выражаются следующим образом:

$$\delta b = 20 \lg G_f(j\omega) = 20 \lg 10 - 40 \lg |j\omega| - 20 \lg |1 + j0,2\omega|; \quad (6.15)$$

$$\varphi \approx G_f(j\omega) = -180^\circ - \arctg 0,2\omega = \varphi. \quad (6.16)$$

Для нашей задачи достаточно построить амплитудно-частотную характеристику. Выражение для фазового угла используем только для вычисления предельного значения сдвига фаз. Кривая по уравнению (6.15) обозначена 1 на фиг. 6.13. Заметим, что эта кривая пересекает ось абсцисс (0 дб) приблизительно в точке 3,2 рад/сек. Назовем эту частоту «частотой среза» и обозначим ее ω_c , затем вычислим предельное значение фазового угла. Для этого требуется только найти общий сдвиг фаз при частоте среза и прибавить 180° .

Итак, при $\omega_c = 3,2$

$$\varphi = -180^\circ - \arctg 0,2(3,2) = -180^\circ - 32,6^\circ.$$

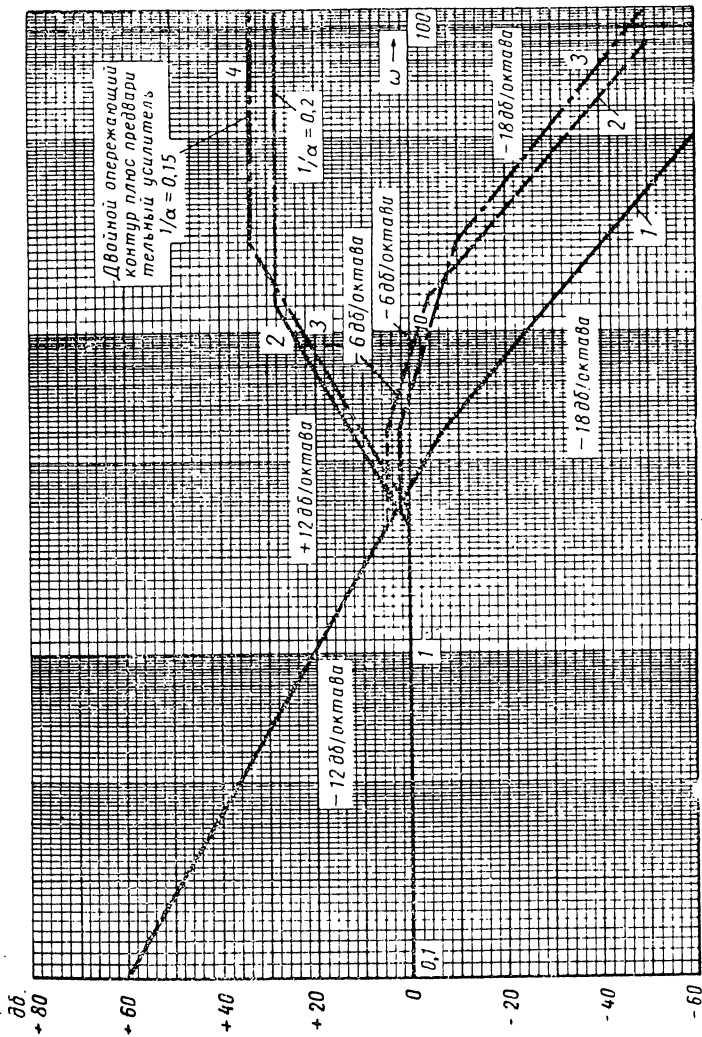
Отсюда, предельное значение фазового угла равняется

$$\varphi_{pm} = -180^\circ - 32,6^\circ + 180^\circ = -32,6^\circ.$$

Конечно, предельное значение отрицательного сдвига фаз подтверждает прежний вывод, сделанный на основании амплитудно-фазовой характеристики о том, что система, описываемая уравнением (6.14 б) является абсолютно неустойчивой. Абсолютная неустойчивость этой системы может быть также выведена на основании частотной характеристики, не прибегая к предыдущим вычислениям, если определить, при каком наклоне логарифмическая кривая пересекает ось абсцисс (0 дб). Если это пересечение имеет место при наклоне — 12 дб/октава или больше, то система абсолютно неустойчива.

Однако из этого правила имеются исключения. Например, возможен случай, когда логарифмическая кривая пересекает ось абсцисс с наклоном — 12 дб/октава, но система будет абсолютно устойчивой, когда наклон кривой снижается до —6 дб/октава при несколько более высоких частотах. Но при данных условиях, когда пересечение с осью абсцисс происходит при наклоне —12 дб/октава и наклон увеличивается с возрастанием частоты, всегда действует это правило.

Теперь возможно определить степень необходимой коррекции посредством опережающего контура. Вычисленное предельное значение сдвига фаз некорректированной системы равняется $-32,6^\circ$. Однако заданное значение составляет $45^\circ \pm 3^\circ$, что означает необходимость опережения фазы примерно на 78° . Из фиг. 2.28 следует, что



Фиг. 6. 13. Двойная опережающая коррекция системы управления класса 2:

1 — первоначальная система $G(j\omega) = 10/(j\omega)^2 (1 + j0.2\omega)$; 2 — скорректированная система $G(j\omega)$ при $\alpha = 5$; 3 — $G_c(j\omega)$ $G_f(j\omega) = \frac{1 + j0.35/\omega}{(j\omega)^2 (1 + j0.2\omega)}$ при $\alpha = 6.67$.

эта степень коррекции может быть создана двумя стандартными опережающими контурами, соединенными последовательно и имеющими коэффициент затухания $\frac{1}{\alpha} = 0,2$. Соответствующий максимальный угол опережающего сдвига фаз будет тогда равняться $2(41,8^\circ) = 83,6^\circ$, что несколько больше вычисленного ранее значения 78° . Действительно этот расчет не вполне удовлетворяет заданным условиям о предельном значении угла сдвига фаз, потому что превышение на $5,6^\circ$ опережающего фазового угла недостаточно для компенсации увеличенного запаздывания по фазе неизменяемых элементов системы, обусловленного повышенной частотой среза вследствие наличия опережающих контуров. Тем не менее, для лучшего понимания расчета продолжим его с применением опережающих контуров с коэффициентом затухания 0,2.

После того как коэффициент затухания опережающего контура был определен, исходя из требуемого опережающего фазового угла, следующая стадия расчета будет состоять в выборе первой частоты среза характеристики корректирующего контура таким образом, чтобы получить оптимальную характеристику опережения по фазе. Это представляет важнейшую часть расчета, потому что выбор этой точки слишком низко или слишком высоко означает расхождение с заданными условиями.

Необходимую помощь в том, что примененный опережающий контур будет использован оптимально, может оказать следующее правило: первую или нижнюю частоту точки сопряжения опережающего контура выбирают таким образом, чтобы скорректированная логарифмическая частотная характеристика пересекала ось абсцисс с наклоном -6 дб/октава . Это правило обладает дополнительным свойством, гарантирующим абсолютную устойчивость системы. Этот вывод следует непосредственно из теоремы построения частотных характеристик контуров, которая связывает сдвиг фаз с затуханием, и наоборот. Следовательно, для получения сдвига фаз на -180° требуется соответствующий наклон характеристики -12 дб/октава , т. е. -90° на каждые -6 дб/октава наклона. Отсюда следует: когда наклон по крайней мере -12 дб/октава не является преобладающим, то сдвиг фазы аналогично не может быть больше -180° . Как наглядный пример, это объясняет, почему система, характеристика которой пересекает ось абсцисс при наклоне -12 дб/октава и затем улучшается до наклона -6 дб/октава , является абсолютно устойчивой. Ответ связан с тем обстоятельством, что действительная логарифмическая кривая (а не ее асимптотическое приближение) имеет значение несколько менее отрицательное, чем -12 дб/октава и поэтому запаздывание по фазе менее отрицательно, чем -180° .

Благодаря применению предыдущего критерия можно легко установить, почему выбор нижней частоты точки сопряжения слишком малой или слишком высокой оказывается неэффективным. Таким образом, выбор первой частоты точки сопряжения любого значения больше $3,2 \text{ рад/сек}$ приводит к характеристике с наклоном

—12 *дб/октава* для асимптоты и несколько менее для действительной кривой вблизи оси абсцисс. Отсюда предельное значение сдвига фаз является либо отрицательным, либо очень малым положительным. С другой стороны, выбор слишком малой нижней частоты точки сопряжения, например, соответственно 1 *рад/сек*, совершенно отпадает, так как это создает измененную логарифмическую частотную характеристику, пересекающую ось абсцисс с наклоном —180 *дб/октава*; система становится явно неустойчивой, несмотря на включение опережающих контуров. Поэтому не забывая о необходимости получить наклон —6 *дб/октава* при пересечении характеристики с осью абсцисс, выбираем первую частоту точки сопряжения для нашего опережающего контура, соответствующей 2,5 *рад/сек*. Тогда частотная характеристика будет определяться кривой 2 на фиг. 6. 13. Заметим, что частотная характеристика опережающего контура построена в предположении, что в систему включен предварительный усилитель с целью устранить затухание из-за опережающих контуров. Кроме того, следует отметить, что двойной контур для опережения связан с увеличением наклона от +12 *дб/октава* до уровня 28 *дб/октава*.

Теперь можно вычислить новые предельные значения сдвига фаз. Опережающие контуры смещают частоту среза от значения 3,2 *рад/сек* до 7,6 *рад/сек*.

Опять отметим совпадение с одинаковым результатом по изучению амплитудно-фазовых характеристик, т. е. опережающий контур увеличивает ширину полосы частот системы.

Частота среза часто используется в качестве мерил ширины полосы частоты. Выражение для фазового угла скорректированной системы будет

$$\varphi = -180^\circ - \arctg 0,2\omega + 2\varphi_{cn},$$

где φ_{cn} означает угол опережения по фазе, созданный одним контуром и определяемый по безразмерным кривым на фиг. 2. 28. Для нахождения фазового угла φ_{cn} , соответствующего частоте 7,6 *рад/сек*, первоначально вычисляем отношение этой частоты к нижней частоте точки сопряжения, т. е. $7,6 : 2,5 = 3,04$; затем по кривой фазового угла определяем угол, соответствующий этой безразмерной частоте, а именно $\varphi_{cn} = 40,5^\circ$. Общий угол опережения по фазе будет равняться, следовательно, 81° . Близкое совпадение этого значения с $83,6^\circ$ показывает, что опережающие контуры были эффективно использованы. Отсюда следует, что нижняя частота точки сопряжения характеристики контура была выбрана правильно. Общий фазовый угол будет равняться

$$\begin{aligned} \varphi &= -180^\circ - \arctg 0,2(7,6) + 2(40,5) = -180^\circ - 56,6^\circ + 81^\circ = \\ &= -155,6^\circ, \end{aligned}$$

что дает предельное значение сдвига фаз $24,4^\circ$, удовлетворяющее заданным условиям.

Как подчеркивалось в начале настоящего расчета, если заранее не было определено увеличение частоты среза и ее влияние на запаздывание по фазе неизменяемых элементов, то это отражается на расхождении между расчетными данными и заданными условиями. Этот момент становится более ясным, если отметить, что при частоте $3,2 \text{ рад/сек}$ угол запаздывания по фазе, связанный с элементом с коэффициентом затухания $0,2 \text{ сек}$, равняется $-32,6^\circ$, а при частоте $7,6 \text{ рад/сек}$ соответственно равняется $-56,6^\circ$. Разница достигает 24° ; это, в свою очередь, характеризует степень совпадения расчета с заданием.

Решение очевидно лежит в выборе опережающего контура с большим затуханием при нижней частоте, что, в свою очередь, создает большое опережение по фазе. Исходя из этого, выбираем коэффициент затухания $\frac{1}{\alpha} = 0,15$, при котором максимальный угол опережения по фазе равняется $47,7^\circ$. В случае двойного контура это означает максимальный сдвиг по фазе $95,4^\circ$; отсюда нетрудно видеть, что первая частота точки сопряжения была выбрана теперь несколько выше прежнего значения. Это создает преимущество, состоящее в том, что кривая затухания будет пересекать ось абсцисс ближе к началу наклона -6 дб/октава , что, в свою очередь, будет отражаться на увеличении предельного значения угла сдвига фаз. Это вполне очевидно вытекает из новой скорректированной кривой β , показанной на фиг. 6. 13. Прежде всего, частота точки пересечения (частота среза) получается несколько меньше, что означает уменьшение запаздывания по фазе, создаваемого неизменяемыми элементами. Далее, характеристика опережения по фазе выбранного контура оптимально использована. Напомним, что в предыдущем расчете безразмерная частота $3,04$ смещала рабочую характеристику вправо от пикового значения фазового угла опережающего контура.

Асимптота кривой β на фиг. 6. 13 дает точку пересечения при частоте $6,2 \text{ рад/сек}$. Это значение не является надежным, потому что оно лежит слишком близко к точке сопряжения, где ошибка между действительной кривой и прямолинейной асимптотой достигает максимума. Это можно легко подтвердить проверкой амплитуды передаточной функции скорректированной разомкнутой цепи при этой частоте. Конечно, она должна равняться единице, т. е. 0 дб , но в действительности она оказывается менее единицы. Следовательно, частота среза действительной логарифмической кривой лежит ниже $6,2 \text{ рад/сек}$. Простой способ проверки состоит в определении одной или двух точек и сравнении их с единицей. До проверки следует написать выражение для передаточной функции скорректированной системы при повторном расчете. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= G_c(j\omega) G_f(j\omega) = \\
 &= \left(\frac{1 + j0,357\omega}{1 + j0,0534\omega} \right)^2 \frac{10}{(j\omega)^2 (1 + j0,2\omega)}. \quad (6. 17)
 \end{aligned}$$

Действительное значение $\omega_c = 5,2$ рад/сек. Тогда уравнение (6. 17) будет

$$G(j5,2) = \frac{4,2 \angle 123^\circ}{1,08 \angle 31^\circ} \cdot \frac{10}{27 \angle 180^\circ (1,45 \angle 44^\circ)} = \\ = \frac{42}{42,2} \angle -255^\circ + 123^\circ = 1,0 \angle -132^\circ.$$

Этот расчет определяет также предельное значение угла сдвига фаз 48° , что удовлетворяет заданию.

Наконец, необходимо произвести проверку, прежде чем закончить расчет корректирующего контура, определяемого уравнением (6. 17). Возникает вопрос, какова реакция по времени системы, описываемой этим уравнением, при доминирующей постоянной времени менее 1 сек. Мы не можем дать точный ответ на этот вопрос, но можно приблизительно определить его. Несмотря на то, что характеристическое уравнение пятого порядка, динамическое поведение системы очень сильно напоминает динамику системы второго порядка с парой комплексных сопряженных корней. Эта точка зрения подтверждается частотными методами, наличием предельного значения положительного угла сдвига фаз 48° . Совершенно грубое, но тем не менее полезное выражение для определения постоянной времени может быть выведено на основании того факта, что постоянная времени равняется $\frac{1}{\zeta \omega_n}$ для недемпфированной системы второго порядка. Если величину ω_n заменить теперь на частоту среза ω_c и относительный коэффициент демпфирования ζ на $\frac{1}{2} \varphi_{pm}$, где φ_{pm} — предельный фазовый угол, выраженный в радианах, то придем к следующему результату:

$$T = \frac{1}{\frac{1}{2} \varphi_{pm} \omega_c} \text{ — постоянная времени в сек.} \quad (6. 18a)$$

Если выразить предельный фазовый угол в градусах, то можно написать

$$T = \frac{1}{\left(\frac{\varphi_{pm}}{360}\right) \pi \omega_c}. \quad (6. 18b)$$

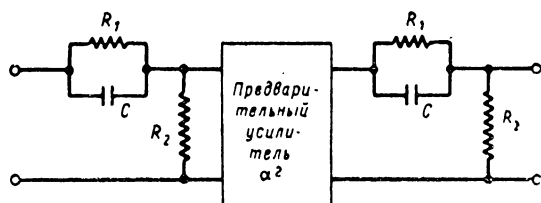
Введение значений, применяемых для нашего расчета, приводит

$$T = \frac{1}{\left(\frac{48}{360}\right) \pi (5,2)} = \frac{1}{2,18} = 0,46 \text{ сек.}$$

Для проверки того, что этот результат не выпадает полностью из заданных условий, были определены корни характеристического уравнения для этой системы и было найдено, что действительная часть доминирующей пары комплексных корней равняется — 2,2.

Это хорошо совпадает с вышеназванным значением $-2,18$. Конечно, это сравнение было сделано с целью показать, что формула (6.18б) может быть использована для определения порядка величины преобладающей постоянной времени. Если эта часть задания не была удовлетворена, то необходимо пересчитать опережающую коррекцию таким образом, чтобы обеспечить заданное предельное значение угла сдвига фаз при повышенной частоте среза. Такое решение будет, вероятно, найдено в виде двух опережающих неодинаковых контуров с целью создать большую гибкость требуемого регулирования.

На фиг. 6.14 показана схема опережающего контура, необходимого для коррекции системы на фиг. 6.10, чтобы последняя могла работать в соответствии с заданными условиями.



Фиг. 6.14. Окончательная схема опережающего корректирующего контура. $\alpha = (R_1 + R_2)/R_2 = (0,15)^{-1}$; $\tau = 0,0534 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = R_1 C (0,15)$.

определить значения C_1 , R_1 и R_2 . Эти элементы должны быть выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим соотношениям:

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = (0,15)^{-1} = 6,67 \quad (6.19)$$

и

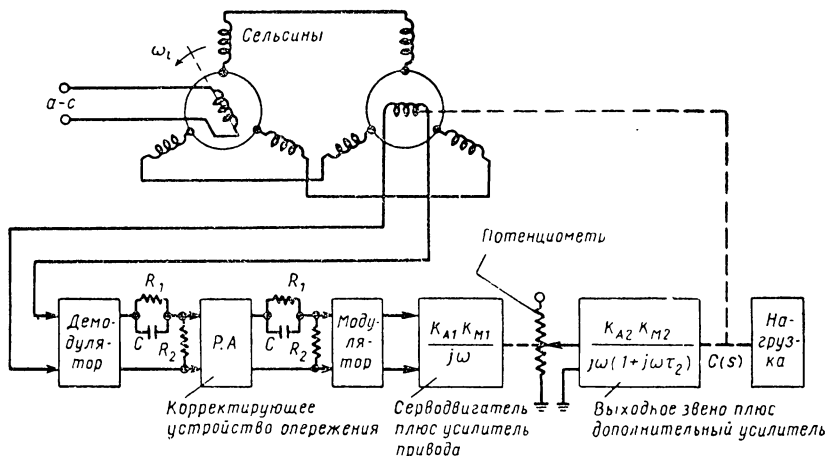
$$\tau = \frac{R_1 C}{\alpha} = 0,357 (0,15) = 0,0534. \quad (6.20)$$

Итак, любой один параметр может быть выбран произвольно. Значения остальных двух параметров определяются по формулам (6.19) и (6.20).

Предварительный усилитель, показанный на фиг. 6.14, имеет двойное назначение: во-первых, он устраняет затухание опережающих контуров в установившемся режиме; во-вторых, он служит для согласования нагрузок между первым и вторым корректирующими контурами. Произвольный параметр выбирается в зависимости от простоты получения элементов контура и упрощения задачи нагрузки на ступенях, которые предшествуют или следуют за контуром в прямой цепи передачи.

Сочетание опережающей коррекции с системой на фиг. 6.10 таким способом, как показано на фиг. 6.15, представляет окончательную стадию разработки системы управления. Изучение этой

системы позволяет обсудить некоторые ее общие свойства. Рассмотренные здесь корректирующие контуры были названы в главе 3 «Корректирующие контуры постоянного тока»; это означает, что они осуществляют коррекцию сигналов в низкочастотном диапазоне, т. е. в пределах ширины полосы частот данной системы. Сельсин для определения ошибки представляет устройство переменного тока, работающее на несущей частоте, равной 60 или 400 гц. Если выходной сигнал сельсина непосредственно подается в опережающие контуры, то коррекция будет неэффективна, так как эти контуры будут реагировать на несущую частоту, а не на частоту модуляции, которая содержит сигнал информации. Поэтому в случае применения сельсинов демо-



Фиг. 6. 15. Окончательная схема системы управления класса 2.

дулятор должен предшествовать корректирующей контуре на постоянном токе. Кроме того, при применении серводвигателей переменного тока за корректирующим контуром должен следовать модулятор для преобразования сигналов в виде модулированной несущей частоты, необходимой для серводвигателей.

Описание работы системы в установившемся режиме. Чтобы лучше понять работу системы, необходимо рассмотреть, как выходная величина в установившемся режиме может следовать за входной командой постоянной скорости без запаздывания по положению. Предположим, что система на фиг. 6. 15 первоначально находилась в покое. После подачи команды постоянной скорости на ротор сельсина-датчика на входных зажимах демодулятора появляется большой сигнал рассогласования, который поступает в первый серводвигатель. Крутящий момент, создаваемый этим серводвигателем, будет перемещать ползунок потенциометра, тем самым изменяя входное напряжение и выходной момент серводвигателя, благодаря чему, в свою очередь, начинается ускорение нагрузки. Когда скорость нагрузки увеличивается в переходном процессе, величина сигнала рассогласования

уменьшается. Это означает, что ползунок потенциометра, который питает усилитель мощности серводвигателя, будет перемещаться с уменьшением напряжения. Наконец, когда выходная скорость достигает требуемого значения, сигнал рассогласования, возникающий в сельсине-трансформаторе, становится равным нулю, что, в свою очередь, означает, что первый сигнал серводвигателя прекращает создавать выходной момент. Однако прежде чем этот момент будет уменьшен до нулевого значения, ползунок потенциометра будет перемещен в такое положение, когда величина выходного сигнала будет достаточна для создания требуемой выходной скорости. Если этого не будет в тот или иной момент, то сигнал рассогласования будет существовать в течение достаточного периода времени, чтобы первый серводвигатель мог генерировать момент, необходимый для перемещения ползунка потенциометра в необходимое положение. В этом состоит интегрирующее свойство, связанное с первым серводвигателем, который устраняет необходимость в ошибке запаздывания по положению. Это является прямой противоположностью системе класса 1, которая обладает одним интегрирующим звеном и таким образом требует конечного значения сигнала рассогласования для подачи входного сигнала на выход серводвигателя с целью получения выходной скорости.

Изменение задачи. Предположим, что первоначальные условия задачи были изменены таким образом, что коэффициент ускорения равняется единице, предельное значение угла сдвига фаз равняется $35^\circ \pm 3^\circ$ и преобладающая постоянная времени меньше 2 сек, что считается удовлетворительным. Рассчитаем коррекцию, необходимую для этого случая. Уменьшение коэффициента ускорения изменяет передаточную функцию разомкнутой цепи, а именно вместо уравнения (6. 146) получаем

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2(1 + j0,2\omega)}. \quad (6. 21)$$

Соответствующая характеристика затухания дана кривой 1 на фиг. 6. 16. Частота среза равна 1,0 рад/сек. Поэтому соответствующее запаздывание по фазе равняется

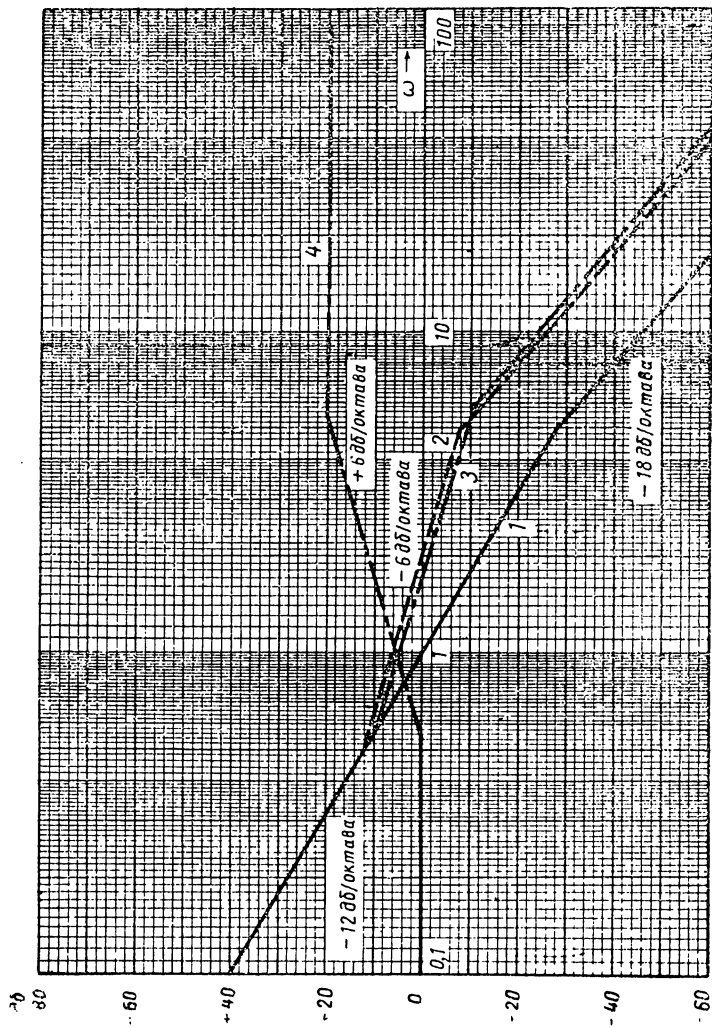
$$\varphi = -180^\circ - \arctg 0,2(1) = -180^\circ - 11,3^\circ = -191,3^\circ.$$

Отсюда предельное значение угла сдвига фаз

$$\varphi_{pm} = \varphi + 180^\circ = -191,3^\circ + 180^\circ = -11,3^\circ.$$

Как и предполагалось, даже при пониженном коэффициенте усиления, первоначальная система остается все еще абсолютно неустойчивой. Следовательно, опережающая коррекция необходима.

Выбор коэффициента ускорения для такого опережающего контура зависит от требуемого максимального угла опережения по фазе. Ввиду того что предельное значение фазового угла было выбрано 35° ;



Фиг. 6. 16. Опережающая коррекция системы класса 2.

1 — первоначальная система

$$G_f(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 (1 + j0.2\omega)}$$

2 — скорректированная система, первое приближение $G(j\omega)$;
3 — второе приближение

$$G_c(j\omega) G_f(j\omega) = \frac{1 + j1.78\omega}{(j\omega)^2 (1 + j0.2\omega) (1 + j0.178\omega)}$$

4 — опережающий контур с регулируемым усилением.

общая требуемая коррекция составляет $35^\circ + 11,3^\circ = 46,3^\circ$. Необходимо сделать допуск на увеличенное запаздывание, связанное с неизменными элементами системы при повышенной частоте среза вследствие введения опережающей коррекции. Отсюда понятно, почему непригоден выбор опережающего контура с коэффициентом затухания 0,15, что позволяет получать максимальный угол опережения по фазе $47,7^\circ$. Применение одного опережающего контура с затуханием 0,1 и с максимальным опережением по фазе $54,8^\circ$ является, однако, многообещающим и поэтому заслуживает исследования.

В качестве первой попытки выберем нижнюю частоту точки сопряжения характеристики опережающего контура, равную значению 0,5 рад/сек. Это вызовет изменение наклона логарифмической частотной характеристики некорректированной системы от -12 дб/октава до -6 дб/октава в частотном диапазоне от 0,5 рад/сек до 5 рад/сек; благодаря этому скорректированная характеристика затухания будет пересекать ось абсцисс с наклоном -6 дб/октава (см. кривую 2 на фиг. 6. 16). Одновременно это означает, что система теперь абсолютно устойчива, но остается еще проверить предельное значение угла сдвига фаз. Поскольку коэффициент затухания и нижняя частота точки сопряжения характеристики опережающего контура были выбраны, тем самым определена передаточная функция, т. е.

$$G_c(j\omega) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\omega\alpha\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\alpha\omega_b}\right)} = 0,1 \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{0,5}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \quad (6. 22a)$$

где ω_b — нижняя частота точки сопряжения;
 $\alpha\omega_b$ — верхняя частота точки сопряжения;
 $\frac{1}{\alpha}$ — коэффициент затухания.

Кроме того, учитывая увеличение коэффициента усиления вследствие изменения коэффициента затухания, последнее выражение приобретает вид

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{0,5}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{5}\right)}. \quad (6. 22b)$$

Для проверки предельного значения угла сдвига фаз необходимо первоначально вычислить угол опережения по фазе, вводимый уравнением (6. 22b). Следовательно, новое выражение для фазового угла будет

$$\varphi = -180 - \arctg 0,2\omega + \varphi_{cn},$$

где φ_{cn} означает угол сдвига фаз, создаваемый корректирующим контуром. Новая частота среза равняется 2 рад/сек, что видно из фиг. 6. 16. Для нахождения угла φ_{cn} первоначально вычислим

$\frac{\omega}{\omega_b} = \frac{2}{0,5} = 4$, а затем отсчитаем значение 54° по кривой фиг. 2. 28. Следовательно, общий сдвиг по фазе равняется

$$\begin{aligned}\varphi &= -180^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,2 (2) + 54^\circ = -180^\circ - 21,8^\circ + 54^\circ = \\ &= -147,8^\circ.\end{aligned}$$

Отсюда предельное значение угла сдвига фаз равняется $\varphi_{pm} = \varphi + 180 = +32,2$. Это значение хорошо совпадает с заданным условием. Небольшое улучшение может быть достигнуто, выбрав нижнюю частоту точки сопряжения ω_b немного выше. Теперь вторая проверка дает $\omega_b = 0,56 \text{ рад/сек}$. Результирующая кривая затухания также показана на фиг. 6. 16; она обозначена 3. Соответствующая частота среза равняется $1,7 \text{ рад/сек}$, что приводит к общему сдвигу фаз:

$$\begin{aligned}\varphi &= -180^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0,2 (1,7) + \varphi_{cn} = -180^\circ - 19,9^\circ + 55^\circ = \\ &= -144,9^\circ\end{aligned}$$

и предельное значение угла сдвига фаз будет равняться $35,1^\circ$, что вполне удовлетворительно.

Передаточная функция окончательной схемы опережающего контура будет

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{0,56}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{5,6}\right)} = \frac{1 + j1,78\omega}{1 + j0,178\omega}. \quad (6. 23)$$

Выражение для передаточной функции скорректированной разомкнутой цепи приобретает тогда следующий вид:

$$G(j\omega) = G_c(j\omega) G_f(j\omega) = \frac{1 + j1,78\omega}{(j\omega)^2 (1 + j0,2\omega) (1 + j0,178\omega)}. \quad (6. 24)$$

Применение формулы (6. 18 б) для приближенного определения преобладающей постоянной времени дает

$$T = \frac{1}{\frac{35}{360} \pi (1,7)} = \frac{1}{0,52} = 1,92 \text{ сек.}$$

Этот результат является вполне удовлетворительным.

6. 4. КОРРЕКЦИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КЛАССА 1

Выбор коррекции для системы управления класса 1 более сложный, чем для системы класса 2. Это связано с тем, что заданный предел сдвига фаз и коэффициент скорости могут быть осуществлены при помощи одного из трех стандартных контуров, т. е. запаздывающего, опережающего или опережающе-запаздывающего. Тот или иной

выбор зависит от многих факторов, освещение которых входит в задачу настоящего раздела.

Постановка задачи. Требуется рассчитать систему управления, которая в состоянии удовлетворять следующим условиям.

По характеристике установившегося состояния:

1. Система должна следить за сигналами команды постоянной скорости без ошибки по скорости.

2. При максимальной скорости команды π рад/сек соответствующая ошибка запаздывания по положению не должна превышать 1° .

По характеристике переходного процесса: 1) динамика переходного процесса должна соответствовать предельному значению сдвига фаз $45 \pm 3^\circ$; 2) кроме того, преобладающая постоянная времени реакции должна быть меньше 1 сек.

Следует подчеркнуть, что эти условия ограничивают динамику системы управления, которая представляет для нас особый интерес. В любом практическом применении заданные условия охватывают широкую область параметров, например температуры окружающих условий, вибрацию и др.

Основная структура системы. Изучение заданных условий, фиксирующих характеристику установившегося режима, позволяет выяснить правильность выбора системы класса I. Следовательно, в системе должно быть, по крайней мере, одно интегрирующее звено. Кроме того, усиление должно быть достаточно высоким, чтобы обеспечить требуемый коэффициент скорости. Из постановки задачи и на основании уравнения (4. 22a) его значение получается равным

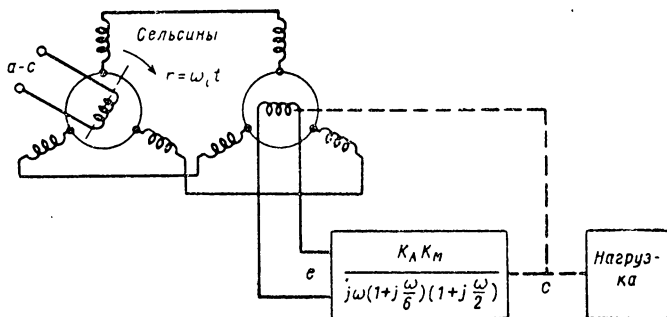
$$K_v = \frac{\omega_i}{\epsilon_{ss}} = \frac{\pi}{1^\circ / \left(\frac{180}{\pi} \right)} = 180 \text{ сек}^{-1}.$$

Здесь следует предположить, что выходная переменная является механической величиной, так что требуемое интегрирующее звено может быть создано серводвигателем, выбранным для привода нагрузки. Серводвигатель на выходе, в зависимости от частных условий, может быть двигателем постоянного или переменного тока, звеном из амплидина и двигателя, гидроприводом или даже пневматическим устройством. Для экономии места примем, что требуемый выходной серводвигатель вместе с усилителем имеет следующую передаточную функцию:

$$\begin{aligned} G_f(j\omega) &= \frac{K_A K_M}{j\omega (1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)} = \\ &= \frac{K_A K_M}{j\omega \left[1 + j\left(\frac{\omega}{6}\right) \right] \left[1 + j\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]}, \end{aligned} \quad (6. 25)$$

где τ_2 — означает постоянную времени, обусловленную выходным серводвигателем вместе с присоединенной к нему нагрузкой;

τ_1 — задержка времени из-за усилителя мощности. Таким образом, уравнение (6.25) описывает поведение неизменных элементов системы, без которых требуемая мощность и заданные параметры нагрузки не могут быть удовлетворены. Чтобы составить полную схему системы, необходимо только указать соответствующий тип детектора ошибки. Хотя при практическом выборе необходимо учесть многие условия, мы упростим задачу применением определенных сельсинов. На фиг. 6.17 показана основная схема системы для решения поставленной задачи. Однако напомним, что эта система будет в состоянии удовлетворять заданным условиям только по характеристике установившегося режима и условиям нагрузки. Конечно, необходимо еще установить, как система будет достигать установив-



Фиг. 6.17. Основные части системы класса 1.

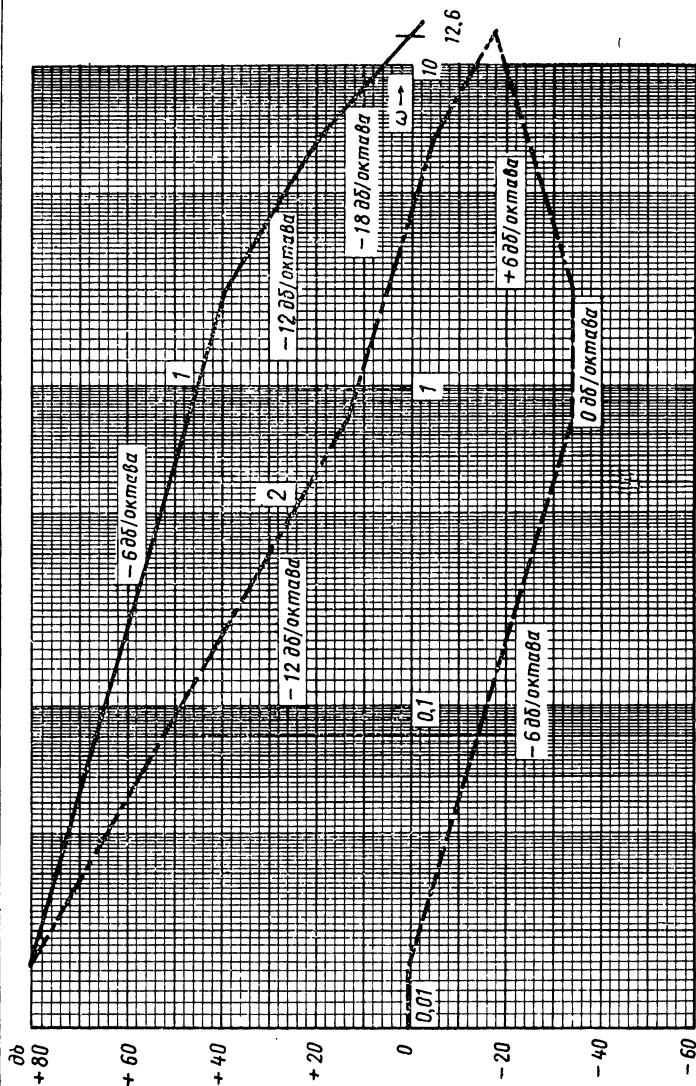
шегося состояния. Предварительно следует иметь полное выражение для передаточной функции некорректированной разомкнутой системы, которая состоит только из неизменных элементов. Следовательно,

$$G(j\omega) = K_s \frac{K_A K_M}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)} =$$

$$= \frac{180}{j\omega \left[1 + j \left(\frac{\omega}{6} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]}, \quad (6.26)$$

где K_s — постоянная сельсина-датчика.

Расчет коррекции. На фиг. 6.18 дана логарифмическая характеристика по уравнению (6.26) (см. кривую 1). Продолжение линии с начальным наклоном -6 дб/октава пересекает ось абсцисс (0 дб) при частоте 180 рад/сек, которая соответствует значению коэффициента скорости. Как видно, логарифмические частотные характеристики позволяют определить коэффициент скорости. Кривая затухания некорректированной системы пересекает ось абсцисс при частоте $12,6$ рад/сек и при наклоне -18 дб/октава. Из этого большого отрицательного наклона становится очевидно, что система, изображенная на фиг. 6.17, неустойчива; этот вывод может быть подтвержден



Фиг. 6. 18. Опережающе-запаздывающая коррекция системы класса I с высоким усилением:

1 — первоначальная система

$$G(j\omega) = \frac{180}{j\omega(1+j0,5\omega)(1+0,167\omega)}$$

2 — скорректированная система

$$G(j\omega) = \frac{1^{\circ 0}(1+j1,28\omega)}{j\omega(1+j0,167\omega)(1+j64\omega)(1+j0,01\omega)}$$

вычислением предельного значения угла сдвига фаз. Выражение для угла сдвига фаз некорректированной системы следует из уравнения (6. 26), т. е.

$$\varphi = -90^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{6} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}.$$

Введем $\omega = 12,6$, после чего получаем

$$\varphi = -90^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2,1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} 6,3 = 235,7^\circ,$$

что дает предельный сдвиг фаз

$$\varphi_{pm} = -235,7^\circ + 180^\circ = -55,7^\circ.$$

Следовательно, необходимость коррекции очевидна. Однако тип корректирующего контура пока неизвестен.

Рассмотрим сперва применение опережающей коррекции. Несомненно, применение этого способа коррекции будет связано со способностью опережающего контура не только стабилизировать систему, но и создавать требуемый предельный сдвиг фазы. Дальнейшие исследования покажут, насколько серьезные ограничения создает этот метод решения задачи. В первую очередь, ширина полосы частот становится чрезмерно большой. Это очевидно возникает из рассмотрения логарифмической частотной характеристики, которая показывает, что двойной опережающий контур должен быть применен с нижней частотой точки сопряжения ниже 10 рад/сек . Это, в свою очередь, сказывается на ширине полосы частот, которая расширяется до 25 рад/сек . Обычно широкая полоса частот является желательной характеристикой, поскольку уменьшается время регулирования. Необходимо обратить внимание, чтобы ширина полосы не была слишком велика, так как это может привести к другим трудностям. Например, если система будет рассчитана на ширину полосы 25 рад/сек , то как показывает уравнение (6. 18 б), преобладающая постоянная времени будет меньше $0,1 \text{ сек}$. Это значение может легко стать бесполезным, когда опережающие контуры будут генерировать такие выходные сигналы, что наступит насыщение серводвигателя. В результате регулируемая переменная величина в реальной системе не будет изменяться в соответствии с рассчитанными значениями команд, что приведет к ухудшению свойств системы. Иными словами, опережающая коррекция возможна при скоростях изменений, которые может воспроизводить выходной серводвигатель. Это очень важное соображение и конструктор должен учитывать его, особенно при расчете на основе линейного анализа. Применение опережающей коррекции в любой системе должно всегда сопровождаться проверкой того, что выходной серводвигатель в состоянии следить за выходными сигналами корректирующего контура. Теперь предположим, что серводвигатель в нашем примере обладает такой мощностью, что вполне оправдано считать систему рассчитанной с большим запасом.

В особенности это означает десятикратное увеличение времени реакции по сравнению с заданными условиями. Кроме всего, такая излишне большая ширина полосы частот делает систему значительно более чувствительной к помехам. При более узкой ширине полосы можно легко устранить или свести к минимуму подобные затруднения. Необходимо еще учесть, что применение опережающей коррекции связано с использованием дополнительных звеньев в виде предварительных усилителей, что требуется для преодоления затухания из-за опережающих контуров. Наконец, не исключена возможность, что данная коррекция превратит систему в условно устойчивую. Эта возможность обусловлена сдвигом фаз, создаваемым опережающими контурами, а также и другим соображением, например, вследствие сдвига рабочей точки в зону, где наклон характеристики составляет 18 дб/октава . Следовательно, резкий провал кривой фазового угла может возникнуть в зоне между 3 и 8 рад/сек . Если этот провал достаточно большой, чтобы вызвать общее запаздывание по фазе больше -180° , то это приведет к условной устойчивости (под условной устойчивостью понимается состояние системы, при котором увеличение или уменьшение коэффициента усиления вызовет незатухающие колебания). Поэтому, принимая во внимание эти обстоятельства, опережающая коррекция представляет неудачное решение данной задачи.

Рассмотрим теперь применение запаздывающей коррекции. Коррекция системы при предельном сдвиге фаз 45° может быть осуществлена по способу, показанному на фиг. 6. 5. Однако применение запаздывающего контура для создания необходимой коррекции систем с высоким режимом работы, подобных исследуемой системе, часто приводит к двум очень серьезным недостаткам, которые могут легко исключить подобное решение задачи. Один недостаток состоит в необходимости очень больших постоянных времени. В действительности, чем выше коэффициент скорости, тем требуется большая постоянная времени. Справедливость этого утверждения легко показать на основании кривой I на фиг. 6. 18. Запаздывающий контур эффективно корректирует эту систему, создавая затухание в амплитудно-частотной характеристике, так что часть кривой с наклоном -6 дб/октава будет пересекать ось абсцисс (0 дб). Совершенно ясно, что для этого требуется пересечение где-нибудь вблизи точки 1 рад/сек или меньше. Кроме того, необходимо выбрать достаточно малое значение нижней частоты точки сопряжения запаздывающего контура, чтобы предотвратить ухудшение характеристики запаздывания. На фиг. 6. 18 показано, что это может быть легко осуществлено вблизи значения $0,001 \text{ рад/сек}$. Это означает, что требуемая постоянная времени запаздывающего контура имеет порядок величины 1000 сек . Так как это нереальное значение, то от него необходимо отказаться, по крайней мере при расчете нашего примера. Однако допустим, что при некоторых условиях были получены реальные постоянные времени, тогда возникает второе затруднение. Оно связано с тем, что запаздывающий контур может существенно сузить ширину полосы

частот, вследствие чего результирующая реакция во времени может переместиться в точку, где не может быть удовлетворено заданное условие о преобладающей постоянной времени. Кроме того, скорректированная система будет обладать слишком замедленной реакцией. Грубая проверка примера системы на фиг. 6. 18 показывает, что постоянная времени превышает 2 сек.

Изложенные выше соображения показывают, что коррекция системы, опережающим или запаздывающим контурами дает неудовлетворительные результаты. Это, естественно, заставляет конструктора использовать возможность применения опережающе-запаздывающего контура для решения задачи. Применение этого контура в указанных условиях дает наиболее удовлетворительный результат, потому что опережающе-запаздывающий контур по своему характеру создает все преимущества как запаздывающего, так и опережающего контура и обладает лишь минимальными нежелательными явлениями, сопряженными с этими контурами.

Прежде чем перейти к расчету, не лишне привести передаточную функцию опережающе-запаздывающего контура, которая имеет следующий вид:

$$G_c(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}. \quad (6. 27)$$

Хотя в этом выражении имеются четыре постоянных времени, только три являются независимыми, как это подчеркивалось в разделе 3. 1. Уравнение (6. 27) можно переписать в другом виде, чтобы выявить эти постоянные времени

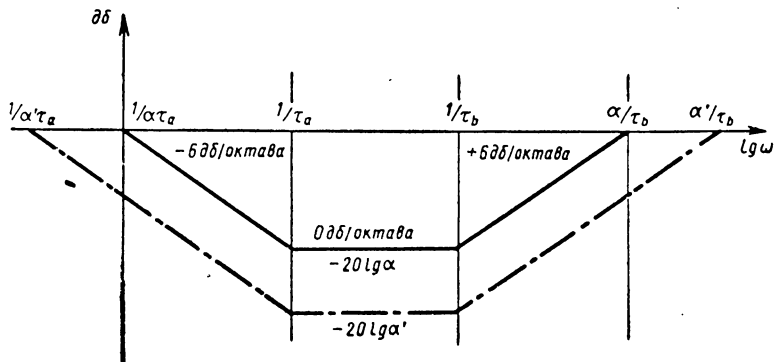
$$G_c(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\tau_a)(1 + j\omega\tau_b)}{(1 + j\omega\alpha\tau_a)(1 + j\omega\frac{\tau_b}{\alpha})} = \frac{\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)\right] \left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)\right]}{\left(1 + j\omega/\frac{\omega_a}{\alpha}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\alpha\omega_b}\right)}, \quad (6. 28)$$

где $\tau_1 = \alpha\tau_a$; $\tau_2 = \frac{\tau_b}{\alpha}$ и $\frac{1}{\alpha}$ — коэффициент затухания;

$$\omega_a = \frac{1}{\tau_a}; \quad \omega_b = \frac{1}{\tau_b}. \quad (6. 29)$$

Таким образом, уравнение (6. 28) теперь содержит только три независимые величины, т. е. τ_a , τ_b , α . Заметим, что при очень малых и очень больших значениях ω это отношение равно единице, как это и должно быть. Логарифмическая частотная характеристика дает частоты точек сопряжения, как это показано на фиг. 6. 19. Следует обратить внимание на два случая; в обоих случаях частоты средних точек сопряжения одинаковы $\frac{1}{\tau_a} = \omega_a$ и $\frac{1}{\tau_b} = \omega_b$, но постоянные затухания различны. Следует отметить, что чем ниже уровень наклона характеристики 0 *дб/октава* опережающе-запаздывающего

контура, тем больше затухание. Например, при уровне -20 дБ коэффициент затухания составляет $\frac{1}{\alpha} = 0,1$; это обстоятельство было уже нам известно. На кривой, кроме того, видно, что с уменьшением коэффициента затухания увеличивается разница между частотами первой и последней точки сопряжения. Этот вывод непосредственно следует из того обстоятельства, что амплитудно-частотная характеристика при линейных множителях, содержащихся в уравнении (6.28), может изменяться только на величину $+6$ дБ/октава, что было объяснено асимптотической аппроксимацией.



Фиг. 6.19. Частотная характеристика корректирующего опережающе-запаздывающего контура при двух значениях коэффициента затухания.

Расчет опережающе-запаздывающего корректирующего контура состоит в основном из трех стадий.

1. Выбирают τ_b или соответствующую ей частоту ω_b точки сопряжения. Исходя из того, что наклон характеристики опережающе-запаздывающего контура после точки сопряжения равняется $+6$ дБ/октава, конструктор может обычно использовать это преимущество тем, что работа системы будет перемещена в ту часть скорректированной логарифмической частотной кривой, где она имеет наклон -12 дБ/октава. В результате этого продолжение кривой будет иметь наклон -6 дБ/октава. Изучение фиг. 6.18 позволяет определить, что выбрав $\omega_b = 2$ рад/сек, наклон кривой 1, равный -12 дБ/октава, будет изменен до более благоприятного значения -6 дБ/октава.

2. Выбирают соответствующее значение для линии с наклоном 0 дБ/октава для опережающе-запаздывающего контура. Основной фактор, который влияет на этот выбор, состоит в том, что скорректированная логарифмическая частотная характеристика должна пересекать ось абсцисс (0 дБ) с наклоном -6 дБ/октава. Ввиду того, что влияние опережающе-опаздывающего контура эффективно выше 2 рад/сек, наклон -6 дБ/октава действительно будет гарантирован до 6 рад/сек, после чего начинает оказывать влияние постоянная

времени τ_b неизменных элементов системы. Следовательно, необходимо создать достаточное затухание с той целью, чтобы продление части характеристики с первоначальным наклоном -6 дб/октава пересекало ось абсцисс (0 дб) при частоте ниже 6 рад/сек . Коэффициент затухания зависит от данного значения частоты среза (точки пересечения), которую выбирает конструктор, причем он должен руководствоваться не только необходимостью удовлетворить заданные условия о предельном сдвиге фаз, но также получить требуемую постоянную времени. Конечно, чем ниже частота среза, тем больше время регулирования. Учитывая эти факторы, выберем частоту среза скорректированной системы, равную $3,5 \text{ рад/сек}$. Продление части кривой I с наклоном -6 дб/октава показывает, что усиление равняется $+34 \text{ дб}$ при $3,5 \text{ рад/сек}$. Следовательно, для коррекции опережающе-запаздывающий контур должен создавать затухание -34 дб . Таким образом, уровень линии наклона 0 дб/октава был определен для опережающе-запаздывающего контура. Значение -34 дб соответствует коэффициенту затухания $0,02$, т. е. $\alpha = 50$.

3. Решение уравнения (6. 28) относительно ω_a дает требуемый предельный сдвиг фаз. Эту величину можно непосредственно определить, потому что все другие данные известны. Например, верхняя частота точки сопряжения характеристики опережающе-запаздывающего контура была определена после окончания первой и второй стадий расчета. Ее значение соответствует $\alpha\omega_b = 100 \text{ рад/сек}$. Напишем после этого выражение для передаточной функции скорректированной разомкнутой системы, т. е.

$$G_c G_f(f\omega) = \frac{180}{\underbrace{j\omega \left[1 + j \left(\frac{\omega}{2} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{6} \right) \right]}_{\text{неизменные элементы}} \frac{\left[1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]}{\underbrace{\left[1 + j\alpha \left(\frac{\omega}{\omega_a} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{100} \right) \right]}_{\text{опережающе-запаздывающий контур}}} \quad (6. 30)$$

Общий фазовый угол будет тогда равен

$$\varphi = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{6} + \arctg \frac{\omega}{\omega_a} - \arctg \alpha \frac{\omega}{\omega_a} - \arctg \frac{\omega}{100},$$

так как частота среза известна и равна $3,5 \text{ рад/сек}$. Последнее выражение сводится к

$$\varphi = -122,4^\circ + \arctg \frac{\omega_c}{\omega_a} - \arctg \frac{\omega_c}{\omega_a}.$$

Ввиду того что $\alpha\omega_c = 50 (3,5) = 175$ является очень большой величиной, то замена $\arctg \left(\frac{\alpha\omega_c}{\omega_a} \right)$ на 90° внесет лишь очень малую погрешность. Таким образом $\varphi_{pm} = \varphi + 180^\circ$ и после объединения двух последних формул приводит к

$$\varphi_{pm} = -32,4^\circ + \arctg \left(\frac{\omega_c}{\omega_a} \right).$$

Поэтому $\text{arc tg} \left(\frac{\omega_c}{\omega_a} \right) = 45^\circ + 32,4^\circ = 77,4^\circ$. Отсюда следует, что $\omega_a = \frac{\omega_c}{4,48} = \frac{3,5}{4,48} = 0,78$. Частота самой нижней точки сопряжения будет равняться $\frac{\omega_a}{\alpha} = \frac{0,78}{50} = 0,0156 \text{ рад/сек}$.

Прежде чем закончить весь расчет, необходимо определить время регулирования. Согласно уравнению (6. 186) имеем

$$T = \frac{1}{\frac{45}{360} \pi 35} = \frac{1}{1,37} = 0,73 \text{ сек},$$

что удовлетворяет заданным значениям преобладающей постоянной времени. Этот результат не очень желательный, потому что частота среза обычно меньше ширины полосы частот или для данного случая меньше собственной частоты, обусловленной преобладающей парой комплексных сопряженных корней. Проверка действительных корней характеристического уравнения системы, снабженной указанной коррекцией, показывает, что постоянная времени, соответствующая преобладающим комплексным корням, равняется примерно половине вычисленного значения. Частота собственных колебаний была определена приблизительно в 2 раза больше частоты среза. Ниже суммируется окончательный расчет передаточной функции корректирующего опережающе-запаздывающего контура. Логарифмические частотные характеристики показаны на фиг. 6. 18.

$$\omega_a = 0,78 \text{ рад/сек}; \quad \tau_a = 1,28 \text{ сек};$$

$$\frac{\omega_a}{\alpha} = 0,0156 \text{ рад/сек}; \quad \alpha \tau_a = 64 \text{ сек};$$

$$\omega_b = 2,0 \text{ рад/сек}; \quad \tau_b = 0,5 \text{ сек};$$

$$\alpha \omega_b = 100 \text{ рад/сек}; \quad \frac{\tau_b}{\alpha} = 0,01 \text{ сек};$$

$$G_c G_f(j\omega) = \frac{(1 + j1,28\omega)(1 + j0,5\omega)}{(1 + j64\omega)(1 + j0,01\omega)}. \quad (6. 31)$$

Полное выражение для передаточной функции при коррекции будет

$$G_c G_f(j\omega) = \frac{180(1 + j1,28\omega)}{j\omega(1 + j0,167\omega)(1 + j64\omega)(1 + j0,01\omega)}. \quad (6. 32)$$

На фиг. 6. 18 дана кривая 2, которая представляет логарифмическую амплитудно-частотную характеристику этой функции. Следует отметить, каким образом опережающе-запаздывающий контур создает требуемую коррекцию. Фиг. 6. 18 показывает, что опережающе-запаздывающий контур при частоте $0,0156 \text{ рад/сек}$ становится прежде всего эффективным в том, что увеличивает наклон характеристики до -12 дб/октава , создав необходимое затухание -34 дб .

Для осуществления этого наклон должен быть изменен до -6 дб/октава и оставаться таким в достаточно широком диапазоне частот, чтобы обеспечить пересечение характеристики -6 дб/октава с осью абсцисс. Этой особенностью обладают обе части характеристики с наклоном 0 дб и $+6$ дб/октава у опережающе-запаздывающего контура. Сравнение с простой запаздывающей коррекцией или простой опережающей коррекцией показывает, что опережающе-запаздывающий контур действительно дает наиболее желательный результат в данном случае. Он позволяет удовлетворить заданным условиям без необходимости расширения ширины полосы частот или чрезмерного увеличения постоянной времени. Хотя наибольшее значение постоянной времени опережающе-запаздывающего контура равняется 64 сек, однако это осуществимо при применении температурно-чувствительных устройств. Нельзя сказать то же самое в случае, когда постоянная времени в 10 раз больше.

Можно применить альтернативный порядок расчета опережающе-запаздывающих контуров, который часто приводит к меньшему значению постоянных времени. Этот способ расчета изложен ниже.

1. С целью обеспечить требуемую преобладающую постоянную времени, а также предельное значение фазового угла, определяют соответствующее значение частоты среза при помощи уравнения (6. 18). Это приводит к значению $\omega_c = 3,5$ рад/сек.

2. Выбирают круговую частоту $\omega_b < \omega_c$. Затем строят линию с наклоном -6 дб/октава и доводят ее до точки пересечения с частотой $3,5$ рад/сек. Затем продолжают эту прямую до следующей более высокой частоты точки сопряжения некорректированной системы, что в данном случае составляет 6 рад/сек. Эта прямая представляет часть характеристики затухания корректированной системы. Продолжение характеристики затухания после точки 6 рад/сек представляет прямую линию с наклоном -12 дб/октава. Ввиду того что наклон характеристики некорректированной системы после 6 рад/сек равен -12 дб/октава, то отсюда следует, что кривые затухания корректированной и некорректированной систем пересекаются. После этой точки пересечения обе характеристики становятся одинаковыми, так как опережающе-запаздывающий контур больше не оказывает влияния. Иными словами, точка пересечения кривых затухания корректированной и некорректированной систем соответствует частоте $\alpha\omega_b$ опережающе-запаздывающего контура (фиг. 6. 18). Для нашего примера точка пересечения кривых затухания была определена равной 100 рад/сек, т. е. $\alpha\omega_b = 100$.

3. Затем вычисляют значения остальных параметров опережающе-запаздывающего контура, чтобы он создавал требуемый предельный сдвиг фаз. Корректирующий контур создает общий сдвиг фаз при частоте среза, определяемый

$$\varphi_{cn} = \arctg \frac{\omega_c}{\omega_a} + \arctg \frac{\omega_c}{\omega_b} - \arctg \frac{\omega}{\omega_a \alpha} - \arctg \frac{\omega_c}{\alpha \omega_b}.$$

Точное вычисление величины $\operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\alpha \omega_b}$ дает $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3,5}{100}$ или 2° .

Кроме того, величина $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_a/\alpha}$ имеет значение очень близкое к 90° , так что общий сдвиг фаз, создаваемый опережающе-запаздывающим контуром, может быть выражен

$$\varphi_{cn} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{\omega_a} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{\omega_b} - 92^\circ.$$

Для удобства выберем $\omega_a = \omega_b$, тогда выражение для общего угла сдвига фаз упрощается, а именно

$$\varphi_{cn} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3,5}{\omega_b} - 92^\circ.$$

Отсюда следует, что общий фазовый угол скорректированной системы при частоте ω_c , равной $3,5 \text{ рад/сек}$, выражается

$$\varphi = -90^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3,5}{6} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3,5}{2} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3,5}{\omega_b} - 92^\circ$$

или

$$\varphi = -272,5^\circ + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3,5}{\omega_b}.$$

При предельном значении сдвига фаз 45° угол φ должен иметь значение -135° ; введение этого значения в последнее выражение дает $\omega_b = \omega_a = 1,35 \text{ рад/сек}$.

Таким образом, получили два из трех параметров, необходимых для расчета опережающе-запаздывающего контура. Третий параметр, т. е. коэффициент затухания α определяется по формуле $\alpha = \frac{100}{\omega_b} = \frac{100}{1,35} = 74$.

Следует отметить, что наиболее низкая частота точки сопряжения характеристики опережающе-запаздывающего контура равняется $\frac{\omega_b}{\alpha}$ или $\frac{1}{55} \text{ рад/сек}$, что соответствует постоянной времени 55 сек . Это значение более благоприятно по сравнению с 64 сек , полученными в предыдущем расчете.

Выбор элементов для опережающе-запаздывающего контура. Выше излагался порядок расчета для определения передаточной функции коррекции опережающе-запаздывающего контура, который позволяет определить систему, удовлетворяющую заданным требованиям. Теперь обратим внимание на выбор элементов, которые позволяют получить требуемые значения τ_a , τ_b и α , полученные расчетом. Схема, соответствующая передаточной функции опережающе-запаздывающего контура показана на фиг. 3. 5 и повторена на фиг. 6. 20.

Постоянные времени τ_a и τ_b для этого контура, которые содержались в формуле (6. 28), определяются по формулам (3. 16а) и (3. 16б), а именно

$$\tau_a = R_1 C_1, \quad (6. 33)$$

$$\tau_b = R_2 C_2. \quad (6. 34)$$

Третья независимая величина была определена в главе 3, где она была обозначена τ_{ab} вместо α и вычислялась по формуле (3. 16 в), т. е.

$$\tau_{ab} = R_1 C_2. \quad (6. 35)$$

Функциональная зависимость между этими тремя постоянными времени и α вытекает из уравнения (3. 19 б), т. е.

$$\alpha \tau_a + \frac{\tau_b}{\alpha} = \tau_a + \tau_b + \tau_{ab} = \tau_a + \tau_b + R_1 C_2.$$

Преобразование последнего выражения приводит к

$$R_1 C_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} (\alpha \tau_a - \tau_b). \quad (6. 36)$$

Формулы (6. 33), (6. 34) и (6. 36) необходимы для полного определения элементов контура на фиг. 6. 20, после того, как конструктор рассчитал значения τ_a , τ_b и α . Дальнейший порядок расчета состоит в следующем.

1. Выбирают произвольно C_1 , исходя из целесообразных значений.

2. Вычисляют R_1 по формуле (6. 33), т. е. $R_1 = \frac{\tau_a}{C_1}$.

3. Зная R_1 , вычисляют C_2 по формуле (6. 36). Таким образом

$$C_2 = \frac{1}{R_1} \frac{\alpha - 1}{\alpha} (\alpha \tau_a - \tau_b).$$

Если приемлемое значение C_1 не дает правильного результата для C_2 , необходимо выбрать другое значение C_1 .

4. Затем вычисляют R_2 по формуле (6. 34), т. е.

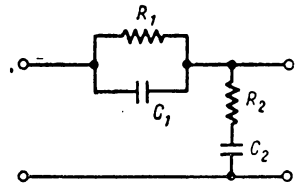
$$R_2 = \frac{\tau_b}{C_2}$$

Для иллюстрации примем этот порядок к расчету передаточной функции корректирующего опережающе-запаздывающего контура, выражаемой уравнением (6. 31). Этот расчет приводит к следующим значениям параметров: $\tau_a = 1,28$ сек; $\tau_b = 0,50$ сек; $\alpha = 50$ сек.

После этого:

1) выбирают $C_1 = 0,1$ мкф;

2) вычисляют $R_1 = \frac{1,28}{0,1}$ мкф = 12,8 мегом;



Фиг. 6. 20. Схема корректирующего опережающе-запаздывающего контура.

3) вычисляют $C_2 = \frac{1}{12,8} \left(\frac{49}{50} \right) 63,5 = 4,86 \text{ мкф}$;

4) вычисляют $R_2 = \frac{0,5}{4,86} = 0,103 \text{ мегом}$.

Значения R_1 и C_2 не лежат в особо желаемом диапазоне.

Емкость $4,86 \text{ мкф}$ сравнительно большая, чего желательно по возможности избегать, например в самолетных конструкциях, где размеры имеют первостепенное значение. Подобный результат расчета не может быть приемлем, когда требуемые высокие значения постоянных времени достигнуты у устройств очень малых размеров, которые работают в условиях температурных колебаний. Вычисленное значение C_2 было бы еще хуже, когда емкость C_1 была бы выбрана равной 1 мкф .

Когда значения элементов контура оказываются удовлетворительными, новые значения могут быть легко определены путем умножения всех величин R на соответствующую постоянную и разделения всех величин C на ту же постоянную. Этот процесс преобразования импеданса сохраняет прежнюю частотную характеристику, потому что постоянные времени не оказывают влияния.

6. 5. ПОРЯДОК РАСЧЕТА ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ КОРРЕКЦИИ

В предыдущих двух разделах были даны способы расчета простой опережающей коррекции и опережающе-запаздывающей коррекции. В этом разделе сосредоточим свое внимание на методике расчета простой запаздывающей коррекции. Как правило, запаздывающая коррекция предназначается для создания удовлетворительной характеристики при следующих превалирующих условиях:

1. Существует необходимость уменьшить ширину полосы частот, чтобы противодействовать помехам.

2. Исключительно быстрая реакция не требуется.

3. Существует необходимость повысить коэффициент усиления для улучшения статической точности.

Постановка задач. Соответственно заданным условиям выбираем систему класса 1 с коэффициентом скорости 5 сек^{-1} . Выберем предельный сдвиг фаз 45° с тем, чтобы исключить чрезмерное перерегулирование в переходном процессе. Кроме того, преобладающая постоянная времени реакции должна быть менее 4 сек . Далее, коррекция должна ограничиваться применением запаздывающего контура с целью уменьшить влияние частот вредных помех, которые существуют по предположению в частотном диапазоне ниже 2 гц .

Порядок расчета. Предположим, что передаточная функция разомкнутой цепи была определена на основании заданных условий установившегося режима и необходимости удовлетворить требованиям нагрузки на выходе, а именно

$$G_f(j\omega) = \frac{5}{j\omega \left[1 + j \left(\frac{\omega}{2} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{6} \right) \right]} \quad (6. 37)$$

Надлежащее изменение коэффициента усиления позволяет получить коэффициент скорости, равный 5, который уже был введен в этом выражении. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика по уравнению (6. 37) показана на фиг. 6. 21. Если может идти речь о системах класса 1 или 0, то первоначально могут помочь найти ответ предварительные исследования, насколько основная система далека от удовлетворения заданных условий в динамическом режиме. Для этого необходимо знать предельное значение угла сдвига фаз и приблизительное значение преобладающей постоянной времени. Предельное значение угла сдвига фаз вычисляется обычным способом. Из фиг. 6. 21 следует, что частота среза равняется 3,15 *рад/сек*. Если это значение ввести в выражение для запаздывания по фазе (см. уравнение 6. 34), то получим

$$\varphi = -90^\circ - \arctg 0,5 (3,15) - \arctg 0,167 (3,15) = -175,3^\circ.$$

Отсюда определяем предельный сдвиг фаз $\varphi_{pm} = \varphi + 180^\circ = +4,7^\circ$.

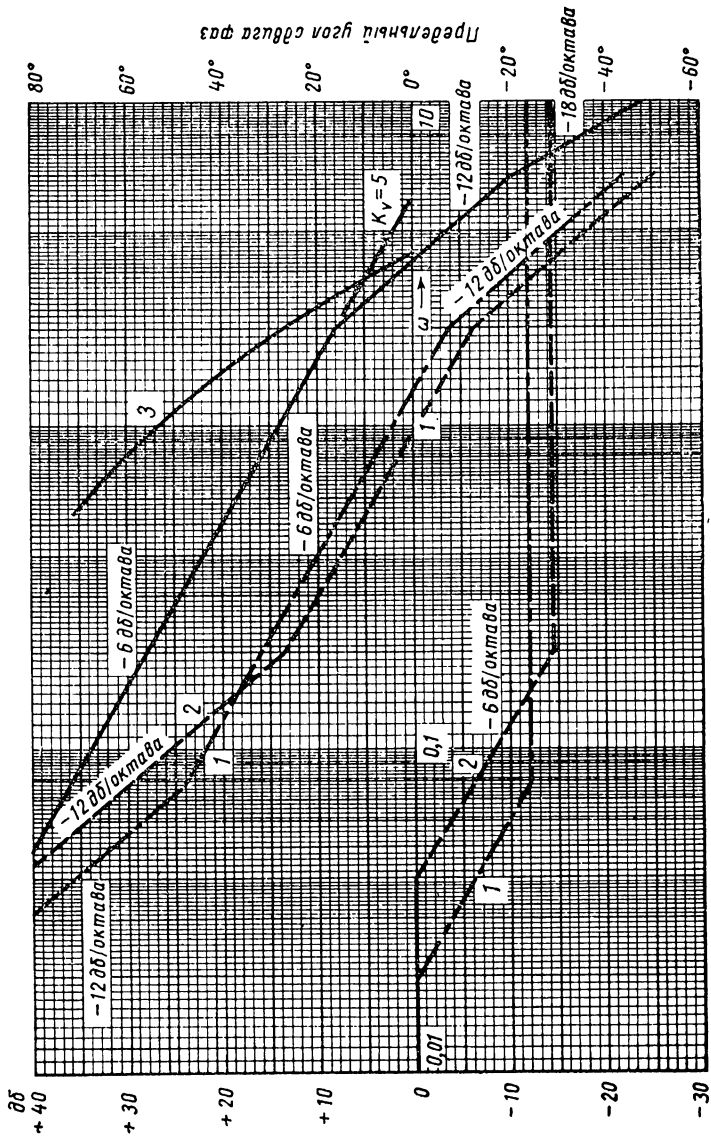
Это положительное значение предельного сдвига фаз показывает, что система абсолютно устойчива. Однако это одновременно означает относительную устойчивость, которая также важна, и ясно, что относительная устойчивость системы, описываемой уравнением (6. 37) неудовлетворительна. Напомним, что предельное значение угла сдвига фаз является особым показателем максимального перерегулирования реакции во времени и поэтому вполне резонно ожидать, что пиковое значение перерегулирования будет находиться вблизи 90% при подобном малом предельном значении сдвига фаз. Конечно, нулевое предельное значение сдвига фаз соответствует 100% перерегулирования, что представляет только другой способ описания условий возникновения колебаний.

Ввиду того что предельное значение угла сдвига фаз положительно, оно может быть использовано для приближенного определения преобладающей постоянной времени путем введения его в уравнение (6. 18 б). Следовательно,

$$T = \frac{1}{\frac{4,7}{360} \pi (5,15)} = 7,6 \text{ сек.}$$

Ввиду того что уравнение (6. 13 б) дает очень неблагоприятные результаты, особенно для систем класса 1 и класса 0, не следует приходить к выводу, что заданные значения времени регулирования не могут быть осуществлены.

В качестве примера приведем решение характеристического уравнения третьего порядка при $K_v = 5$, которое дает действительное значение преобладающей постоянной времени около 3,5 *сек*. Конечно, эти соображения приводят к выводу, что коррекция системы, описываемой уравнением (6. 37), должна в первую очередь предотвратить чрезмерное перерегулирование путем создания приемлемого предельного угла сдвига фаз.



Фиг. 6. 21. Расчет коррекции запаздывания для системы класса 1:

1 — кривая первой стадии расчета; 2 — кривая второй стадии расчета; 3 — фаза.

Для расчета требуемой коррекции при помощи запаздывающего контура разработано несколько методов, включая простой метод последовательного приближения, который часто используется конструкторами, предпочитающими рассчитывать по частотным методам. Однако сосредоточим свое внимание на двух прямых способах, которые дают непосредственные результаты. При этом требуется произвести несколько больше вычислений, чем по методу последовательного приближения, потому что необходимо вычислить и построить часть амплитудно-фазовой характеристики некорректированной системы. В действительности оба рассматриваемых ниже способа являются в сущности одинаковыми, кроме одного изменения, которое вводится с целью уменьшить значение постоянных времени.

Порядок расчета состоит в основном из четырех стадий, изложенных ниже.

1. Вычисляется фазовый угол первоначальной некорректированной системы. Для нашего примера выражение для запаздывания по фазе некорректированной системы составляет

$$\varphi = -90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{6} .$$

После введения надлежаще выбранных значений ω в эту формулу и добавления 180° к каждому вычисленному значению получим кривую, показанную на фиг. 6. 21.

2. Выбирают частоту среза скорректированной логарифмической частотной характеристики, соответствующей заданному предельному значению угла сдвига фаз, которое было определено по кривой, построенной на первой стадии расчета. Для системы, изображенной на фиг. 6. 21, эта частота равна $1,25 \text{ рад/сек}$. Она должна быть осуществлена, потому что значимость этой операции основана на предположении, что запаздывание по фазе, создаваемое запаздывающим контуром при этой частоте, пренебрежимо мало. Поэтому, чтобы обеспечить получение этой частоты среза, необходимо выбрать верхнюю частоту точки сопряжения характеристики запаздывающего контура ниже новой частоты среза.

3. Выбирают верхнюю частоту точки сопряжения характеристики запаздывающего контура на четыре октавы ниже новой частоты среза. Изучение нормализованных фазовых характеристик запаздывающих контуров позволяет установить, что запаздывание по фазе практически не имеет значения при частоте на четыре октавы выше верхней частоты точки сопряжения. После того как мы определили верхнюю частоту точки сопряжения, как показано на фиг. 6. 22, ее значение можно вычислить по формуле

$$\omega_2 = \frac{\omega_c^*}{2^4} = \frac{\omega_c^*}{16} , \quad (6. 38)$$

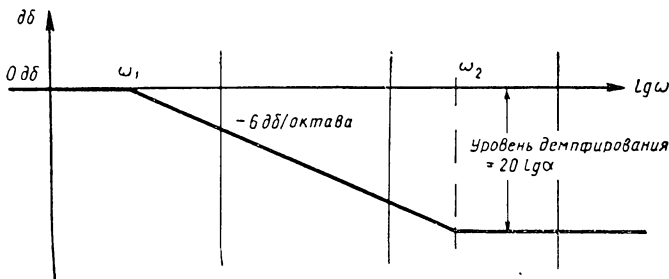
где ω_c^* означает частоту среза скорректированной характеристики. Величина (2)⁴ представляет математическое выражение для четырех

октав. По определению частота ω_2 на одну октаву выше, чем ω_1 , т. е. ω_2 в 2 раза больше ω_1 или $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2 = 1$ октава. Аналогично $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 4 = 2$ октавы и $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 8 = 3$ октавы, что имеет общее выражение

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2^n, \quad (6.39)$$

где n — число октав.

Следовательно, числовое значение этой частоты должно быть в 16 раз больше значения ω_1 , когда частота ω_2 должна быть на четыре октавы выше, чем ω_1 .



Фиг. 6. 22. Амплитудно-частотная характеристика корректирующего запаздывающего контура

Применение формулы (6.38) для нашего примера дает

$$\omega_2 = \frac{1,25}{16} = 0,078 \text{ рад/сек.}$$

Определение этой величины дает одно из двух независимых параметров, которые необходимы для расчета запаздывающего контура.

Другим параметром, конечно, является коэффициент затухания $\frac{1}{\alpha}$, который будет вычислен ниже. Постоянная времени, соответствующая частоте ω_2 , равняется $\tau = \frac{1}{\omega_2} = 12,80 \text{ сек.}$

4. Выбирают уровень затухания запаздывающего контура, соответствующий некорректированной логарифмической кривой, расположенной выше оси абсцисс при новой частоте среза ω_c^* . Необходимость этой стадии расчета очевидна; она гарантирует, что корректированная логарифмическая кривая пересечет ось абсцисс в точке, соответствующей частоте ω_c^* . Ввиду того что уровень затухания запаздывающего контура был специально выбран $20 \lg \alpha$, то вторая независимая величина становится известной и, таким образом, расчет закончен.

Для нашего примера фиг. 6. 21 показывает, что первоначальная амплитудная характеристика расположена на 12 дБ выше оси абсцисс при $\omega_c^* = 1,25 \text{ рад/сек}$. Поэтому $20 \lg \alpha = 12$, что дает $\alpha = 4$. Так как ω_2 и α вычислены, то частоту ω_1 легко определить, потому что она является зависимой величиной. Графически ее можно определить путем построения линии с наклоном -6 дБ/октава , начиная с частоты ω_2 , расположенной при надлежащих значениях децибел, причем эту линию продолжают до пересечения с осью ω . Точка пересечения определяет ω_1 . Это значение может быть вычислено непосредственно по формуле

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{\alpha} = 0,0195 \text{ рад/сек}.$$

Соответствующая постоянная времени равняется $\alpha\tau = 4 (12,8) = 51,2 \text{ сек}$. Следовательно, окончательное выражение для передаточной функции запаздывающего корректирующего контура будет

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau} = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)} = \frac{1 + j12,8\omega}{1 + j51,2\omega}. \quad (6. 40)$$

Изучение этого результата показывает, что постоянные времени имеют достаточно большое значение и поэтому нежелательны с точки зрения применения элементов контура приемлемых размеров.

Эти большие значения постоянных времени были получены в результате обычного приближения, принятого при предыдущем порядке расчета. Выбор верхней частоты точки сопряжения характеристики запаздывающего контура при значении ниже новой частоты среза приводит к большим постоянным времени. Этот результат расчета может быть значительно улучшен, если принять более высокое значение для верхней частоты точки сопряжения, а затем допустить сдвиг по фазе, создаваемый контуром при этой новой частоте среза. При этом методе следует подчеркнуть простоту расчета за счет большой постоянной времени. Однако изучение положения показывает, что степень простоты является тривиальной по сравнению с недостатками, связанными с большими постоянными времени. Вследствие этого ниже излагается измененный порядок расчета, позволяющий получить меньшие значения постоянных времени. Для иллюстрации используем прежнюю систему, описанную уравнением (6. 37). Измененный порядок расчета состоит из нижеописанных пяти стадий.

1. Вычисляют и строят характеристику предельного угла сдвига фаз некорректированной системы.

2. Выбирают новую частоту среза соответственно требуемому предельному сдвигу фаз плюс допуск с учетом запаздывания по фазе, создаваемого запаздывающим контуром. В качестве первого приближения примем этот допуск в 10° . Следовательно, для нашего примера

новая частота среза будет определена по кривой предельного сдвига фаз и равна:

$$\text{требуемый предельный сдвиг фаз плюс допуск} = 45^\circ + 10^\circ = 55^\circ, \text{ что дает } \omega_c^* = 0,94 \text{ рад/сек.}$$

3. Выбирают верхнюю частоту точки сопряжения запаздывающего контура на четыре октавы ниже частоты среза некорректированной системы. Этот способ выбора ω_2 вынужденно приводит к более завышенному значению, чем раньше, потому что первоначальная частота среза всегда превышает соответствующую частоту скорректированной системы в случае применения запаздывающего контура для коррекции. Отсюда $\omega_2 = \frac{\omega_c}{2^4} = 3,15/6 = 0,195$. Округляя это значение, получаем $\omega_2 = 0,2 \text{ рад/сек}$; соответствующая постоянная времени равняется $\tau = \frac{1}{\omega_2} = 5 \text{ сек}$, что дает значительное улучшение ранее полученного значения.

4. Выбирают уровень затухания запаздывающего контура, соответственно некорректированной логарифмической кривой, расположенной выше оси абсцисс при новой частоте среза ω_c^* . Как и раньше, на этой стадии расчета можно вычислить надлежащий коэффициент затухания. Следовательно, $20 \lg \alpha = 14,5$, что дает $\alpha = 5,31$. Для удобства выбираем $\alpha = 5,0$. После того, как были определены α и ω_2 , значение нижней частоты точки сопряжения характеристики запаздывающего устройства вычисляют по формуле

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{\alpha} = \frac{0,2}{5} = 0,04 \text{ рад/сек.}$$

Соответствующая постоянная времени будет тогда равняться $\alpha\tau = 5 \times 5 = 25 \text{ сек}$. Выражение для передаточной функции запаздывающего корректирующего устройства будет

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + i\omega\tau}{1 + j\omega\alpha\tau} = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)} = \frac{1 + j5\omega}{1 + j25\omega}. \quad (6.41)$$

5. Проверяют, что запаздывание по фазе для вычисленной передаточной функции коррекции при новой частоте ω_c^* среза соответствует допущенному значению, принятому выше в пределах допусков, равных заданным для предельного значения сдвига фаз. Эта стадия расчета необходима для окончательного утверждения проекта.

В частном случае расчета системы, описываемой уравнением (6.41), запаздывание по фазе, создаваемое запаздывающим устройством при частоте $0,94 \text{ рад/сек}$ равняется $\varphi_c = +\arctg(5 \times 0,94) = -\arctg(25 \times 0,94) = 78^\circ - 87,6^\circ = -9,6^\circ$.

Ввиду того что это значение более благоприятно по сравнению с предположенным значением -10° , результаты расчета можно считать приемлемыми и заданные требования по предельному значению сдвига фаз выполненными.

На фиг. 6. 21 даны логарифмические частотные характеристики для двух расчетов коррекции запаздывания, а также приведены соответствующие передаточные функции корректированной разомкнутой цепи. Кривая первоначальной системы обозначена 1, а измененной системы соответственно 2.

Проверка преобладающей постоянной времени по формуле (6. 18 б) дает значение 2,7 сек. Ввиду того что это значение ниже предполагаемого, конструктор может быть спокоен за то, что время регулирования будет иметь удовлетворительное значение. Решение характеристического уравнения по методам, изложенным в главе 7, дает преобладающую постоянную времени 1,4 сек.

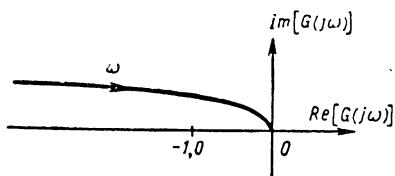
Ввиду того что расчет запаздывающего корректирующего контура приводит к удовлетворительной динамической характеристике, из сравнения уравнений (6. 40) и (6. 41) становится очевидно, что следует предпочесть измененный метод расчета по уравнению (6. 41). Причина этого лежит в том, что меньшие значения постоянных времени связаны с меньшими размерами и меньшей стоимостью применяемых элементов.

ЗАДАЧИ

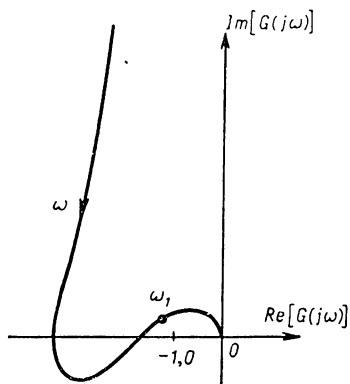
6. 1. На фиг. 6. 23 дана кривая функции $HG(j\omega)$; пояснить, можно ли эту систему сделать устойчивой путем применения только запаздывающего или только опережающего контура. Построить новую кривую функции $HG(j\omega)$, которая будет соответствовать включенному контуру.

6. 2. На фиг. 6. 24 дана кривая функции $HG(j\omega)$ для неустойчивой системы:

а) Объяснить, почему система неустойчива.



Фиг. 6. 23. Амплитудно-фазовая характеристика.



Фиг. 6. 24. Амплитудно-фазовая характеристика неустойчивой системы.

б) Для стабилизации системы введем опережающий контур. Построить новую кривую и показать положение точки ω_1 на новой кривой.

в) Можно ли эту систему стабилизировать путем изменения коэффициента усиления? Объяснить возможность этого случая.

г) Если ответ на вопрос предыдущего пункта является положительным, привести причины, почему этот метод стабилизации не следует предпочитать другим.

6. 3. Сервомеханизм имеет передаточную функцию разомкнутой цепи, определяемую выражением

$$HG(s) = \frac{200}{[s(1 + 0,1s)]},$$

что удовлетворяет требованиям характеристики в установившемся режиме. Рассчитать корректирующий контур, который будет создавать предельный угол сдвига фаз 45° .

6. 4. Передаточная функция разомкнутой цепи сервомеханизма дается выражением

$$HG(j\omega) = \frac{7}{j\omega(1 + j0,5\omega) \left[1 + j \left(\frac{\omega}{6} \right) \right]}.$$

Рассчитать запаздывающий контур, который будет создавать, как последовательно включенный корректор, предельный сдвиг фаз $40 \pm 2^\circ$. Необходимо обеспечить требуемые значения постоянной времени и коэффициента затухания контура. Коэффициент скорости должен оставаться неизменным и частота среза должна быть минимум 1 рад/сек .

6. 5. Система управления с обратной связью имеет следующую передаточную функцию разомкнутой цепи:

$$HG(j\omega) = \frac{200}{j\omega \left[1 + j \left(\frac{\omega}{20} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{100} \right) \right]}.$$

а) Определить предел сдвига фаз скорректированной системы.

б) Рассчитать корректирующий контур, который будет создавать предельный угол сдвига фаз $40-50^\circ$, причем коэффициент усиления разомкнутой цепи должен равняться 40.

6. 6. Сервомеханизм имеет передаточную функцию некорректированной разомкнутой цепи, определяемую выражением $HG(j\omega) = \frac{10}{[(j\omega^2)(1 + j0,5\omega)]}$. Требуется, чтобы система удовлетворяла следующим заданным условиям: сигнал рассогласования не превышал $0,1 \text{ рад}$ при максимальном входном ускорении 10 рад/сек^2 ; переходный процесс соответствовал бы режиму, когда предельный угол сдвига фаз равнялся приблизительно $50 \pm 3^\circ$.

Изменить данную систему таким образом, чтобы она удовлетворяла заданным условиям. Убедиться, что примененный тип коррекции позволяет получить рекомендуемые значения всех постоянных времени, коэффициентов затухания и коэффициентов усиления предварительного усилителя. Чтобы избежать плохого отношения сигнала к помехам, рекомендуется выбрать коэффициенты затухания корректирующих контуров минимум $0,05$.

Благодаря этому размеры не будут чрезмерными. Определить время регулирования этой системы.

6. 7. Сервомеханизм с единичной обратной связью имеет передаточную функцию разомкнутой цепи вида

$$HG(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+0,1s)^2}.$$

а) Построить характеристику затухания этой системы, применив асимптотическое приближение.

б) Определить предельный сдвиг фаз. Является ли эта система абсолютно устойчивой?

в) Предположим, что эта система была использована для регулирования скорости. Требуется, чтобы ошибка запаздывания положения не превышала $0,02 \text{ рад}$ при входной скорости 1 рад/сек . Кроме того, переходный процесс должен соответствовать предельному сдвигу фаз 25° . Рассчитать коррекцию, благодаря которой система будет удовлетворять заданным условиям. Преобладающая постоянная времени не должна превышать 3 сек .

6. 8. Некорректированный сервомеханизм имеет передаточную функцию прямой цепи следующего вида:

$$G(j\omega) = \frac{126}{j\omega \left[1 + j \left(\frac{\omega}{10} \right) \right] \left[1 + j \left(\frac{\omega}{60} \right) \right]}.$$

а) Построить амплитудную характеристику (в дб) в зависимости от логарифма частоты ω .

б) Рассчитать последовательный корректор, чтобы были удовлетворены следующие условия:

1) ошибка запаздывания установившегося состояния должна быть не больше $1/126 \text{ рад}$ при входной скорости 1 рад/сек ;

2) не допускается изменение коэффициента усиления усилителя; предельный сдвиг фаз скорректированной системы должен удовлетворять условию $\varphi_{pm} = 30 \pm 2^\circ$.

Определить передаточную функцию в числовых значениях для корректирующего контура и установить элементы контура, построив структурную схему контура.

в) Построить амплитудно-фазовую характеристику некорректированной разомкнутой цепи системы и скорректированной системы, ясно указав способ, каким образом корректирующий контур изменяет первоначальную систему для достижения надлежащей стабилизации.

г) Определить время регулирования для корректирующей системы.

6. 9. Система класса 0 имеет передаточную функцию следующего вида:

$$HG(s) = \frac{K}{(1+0,1s)^2(1+0,01s)}.$$

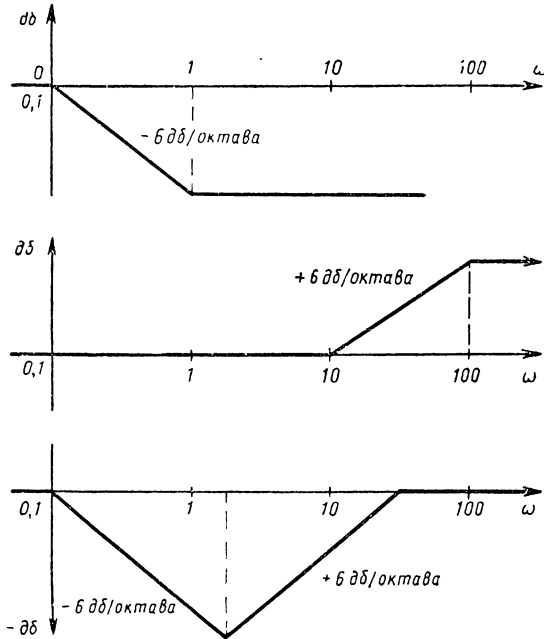
а) Построить асимптотическую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику, а также фазо-частотную характеристику.

б) Определить коэффициент усиления, требуемый для получения предельного угла сдвига фаз 40° .

6. 10. На фиг. 6. 25 даны характеристики коррекции, которые рекомендуются для стабилизации системы, имеющей передаточную функцию разомкнутой цепи вида

$$HG(s) = \frac{400}{[s^2(1 + 0,01s)]}$$

а) Определить, в каком случае система будет абсолютно устойчивой.



Фиг. 6. 25. Характеристика коррекции.

б) Если по спецификации требуется, чтобы корректированная система обладала преимущественной постоянной времени меньше, чем $0,1 \text{ сек}$, то какую схему коррекции следует применить?

в) Если максимальное перерегулирование не должно превышать приблизительно 25% , то какую коррекцию следует рекомендовать?

г) Какую коррекцию надлежит выбрать, если необходимо, чтобы система фильтровала синусоидальные помехи ниже 12 гц , даже за счет увеличения времени регулирования и повышенного максимального перерегулирования.

д) Вычислить приближенное значение максимального перерегулирования и преобладающей постоянной времени для корректированной системы предыдущего пункта.

**ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.
КОРНЕВЫЕ МЕТОДЫ**

В разделе 1. 7 подчеркивалось, что анализ и расчет систем третьего и более высокого порядка по методу решения дифференциальных уравнений представляет трудоемкий процесс последовательного приближения, потому что влияние каждого параметра системы в отдельности не может быть непосредственно изучено. Исследование характеристического уравнения показывает, что параметры системы появляются в нескольких коэффициентах, вследствие чего прямое изучение на основании решения дифференциальных уравнений становится невозможным. Эта трудность в значительной степени устраняется в частотных методах исследования, как об этом говорилось в предыдущих главах. Влияние любого параметра в отдельности или нескольких параметров системы могут быть изучены на основании частотных характеристик. Изменение того или иного параметра может быть изучено благодаря исследованию влияния его на общее затухание и фазо-частотные характеристики разомкнутой цепи, а также при помощи таких характерных параметров, как предельный сдвиг фаз и критический коэффициент усиления. Чтобы иллюстрировать эту основную разницу двух методов, вернемся к изучению системы, описанной в разделе 1. 7. Анализ по методу дифференциального уравнения приводит к характеристическому уравнению вида (1. 107). При рассмотрении этого уравнения становится ясно, что прямое изучение влияния изменений параметров τ_m или τ_f на реакцию системы не может быть осуществлено. Однако анализ на основании частотного метода приводит к передаточной функции разомкнутой цепи в виде

$$\frac{C}{E}(s) = \frac{K_p K_A K_f}{RF} \frac{1}{s(1 + s\tau_f)(1 + s\tau_m)} = \frac{K}{s(1 + s\tau_f)(1 + s\tau_m)}. \quad (7. 1)$$

Это уравнение состоит из коэффициентов и множителей и отсюда ясно, что можно легко изучить влияние изменения параметров τ_f и τ_m при помощи частотных кривых. Например, удвоение величины τ_f означает только уменьшение вдвое частоты точки сопряжения характеристики затухания для этого множителя в уравнении (7. 1). Затем

без труда можно определить последующее влияние на предельные значения сдвига фаз и коэффициента усиления. Конечно, существенное ограничение этого метода состоит в том, что нельзя получить точного решения во временной области. Однако корневой метод, разработанный Вальтером Эвансом, не только устраняет этот недостаток, но позволяет надежно произвести анализ и синтез систем управления.

7. 1. ПЕРЕХОД ОТ ЧАСТОТНОЙ К КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Полное понимание значения корневого метода может быть получено при исследовании случая, когда значения, приписываемые величине s в выражении для передаточной функции разомкнутой цепи, наносятся в зависимости от значений мнимой оси в комплексно частотной плоскости. Чтобы иллюстрировать этот переход продолжим рассмотрение примера системы третьего порядка, описанной в разделе 1. 7. Общая форма передаточной функции замкнутой системы будет

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1 + HG(s)}. \quad (7. 2)$$

Для схемы, показанной на фиг. 1. 25, передаточная функция разомкнутой цепи имеет вид

$$HG(s) = \frac{K}{s(1 + s\tau_f)(1 + s\tau_m)}. \quad (7. 3)$$

Если входной сигнал в уравнении (7. 2) приравнять нулю, то характеристическое уравнение может быть выражено простой суммой

$$1 + HG(s) = 0. \quad (7. 4)$$

Отсюда ясно, что характеристическое уравнение определяется через передаточную функцию разомкнутой цепи. (Следует вновь отметить исключительно важную роль, которую играет передаточная функция разомкнутой цепи в анализе системы управления). Уравнение (7. 4) может быть выражено иначе

$$HG(s) = -1 = 1 \angle 180^\circ (2k + 1) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7. 5)$$

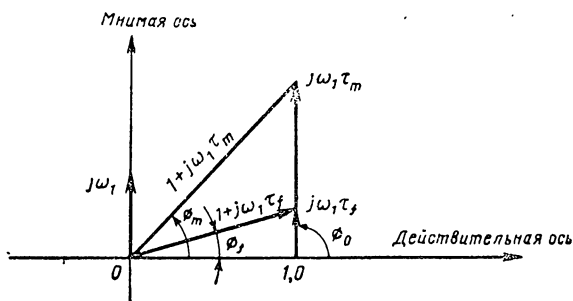
Для частотного анализа (т. е. для случая, когда значения величины s ограничены мнимой осью) передаточная функция разомкнутой цепи приобретает вид

$$HG(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\tau_m)(1 + j\omega\tau_f)}. \quad (7. 6)$$

Если теперь при данной частоте ω_1 общий сдвиг фаз составляет -180° , то система может быть сделана неустойчивой при соответ-

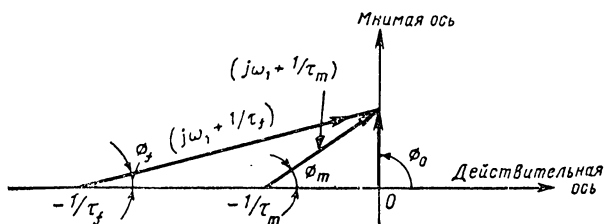
ствующем выборе коэффициента усиления разомкнутой цепи; другими словами, система будет подвергаться незатухающим колебаниям с частотой ω_1 . Из уравнения (7. 6) нетрудно получить выражение для общего сдвига фаз при данной частоте

$$\varphi = -90^\circ - \operatorname{arctg} \omega_1 \tau_m - \operatorname{arctg} \omega_1 \tau_f = -180^\circ.$$



Фиг. 7. 1. Векторная диаграмма уравнения (7. 6).

На фиг. 7. 1 показаны углы, связанные с членами передаточной функции разомкнутой цепи. Заметим, что для графического изображения линейных множителей необходимо образовать произведение $j\omega\tau$ и затем векторно сложить с единицей. Для определения углов



Фиг. 7. 2. Другая форма векторной диаграммы уравнения (7. 6).

в комплексной плоскости можно применить более удобный способ, для чего уравнение (7. 6) следует переписать в другом виде

$$HG(j\omega) = \frac{K}{\tau_m \tau_f} \frac{1}{j\omega \left(j\omega + \frac{1}{\tau_m} \right) \left(j\omega + \frac{1}{\tau_f} \right)}.$$

Это изменение создает преимущество определения каждого вектора в одной точке мнимой оси.

Конечно, для этого требуется также определить критические частоты функции $HG(s)$, как показано на фиг. 7. 2 (под критическими частотами здесь понимается выражение, используемое для определения полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой цепи).

Для удобства допустим

$$j\omega_1 + \frac{1}{\tau_m} = r_m \angle \varphi_m;$$

$$j\omega_1 + \frac{1}{\tau_f} = r_f \angle \varphi_f;$$

$$j\omega_1 = r_0 \angle \varphi_0,$$

где r означает величину каждого вектора и φ — соответствующий фазовый угол. Тогда коэффициент усиления, необходимый для создания незатухающих колебаний, при частоте, при которой угол сдвига фаз равняется -180° , легко находится путем соблюдения условия

$$\frac{K_1}{\tau_m \tau_f} \frac{1}{r_0 r_m r_f} = 1,$$

где K_1 означает требуемый коэффициент усиления. Отсюда,

$$K_1 = r_0 r_m r_f \tau_m \tau_f.$$

Выражение для характеристического уравнения, получаемого из уравнений (7. 3) и (7. 4), имеет вид

$$s^3 + \frac{\tau_m + \tau_f}{\tau_m \tau_f} s^2 + \frac{1}{\tau_m \tau_f} s + \frac{K}{\tau_m \tau_f} = 0. \quad (7. 7)$$

Из изложенного выше следует, что при $K = K_1$ оба корня уравнения (7. 7) являются чисто мнимыми и определяются равенством

$$s_{1,2} = \pm j\omega_1,$$

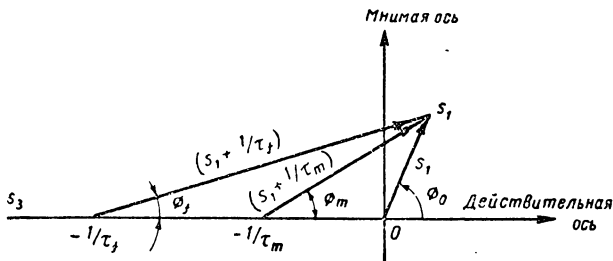
где ω_1 равняется частоте, при которой общий сдвиг фаз составляет -180° . Здесь можно задать вопрос: что произойдет с корнями этого характеристического уравнения, когда усиление разомкнутой цепи изменяться в сторону уменьшения или увеличения по сравнению со значением K_1 ?

Согласно законам алгебры корни полинома, подобного уравнению (7. 7) представляют непрерывную функцию постоянного члена K . Следовательно, если применен только больший коэффициент усиления, то три остальных различных корня могут быть найдены и можно ожидать, что два чисто мнимых корня теперь будут комплексными сопряженными корнями. Кроме того, эти новые корни удовлетворяют уравнению (7. 7) и поэтому они должны также удовлетворять уравнению (7. 5). В действительности, когда эти корни найдены любым доступным методом и полученная пара комплексных корней нанесена на плоскости s (как показано на фиг. 7. 3) и углы каждого вектора передаточной функции разомкнутой цепи измерены и суммированы, тогда результирующий фазовый угол может быть найден путем сложения с углом -180° . Этого следовало ожидать,

принимая во внимание то обстоятельство, что любое решение уравнения (7.7) является также решением уравнения (7.5). Значение коэффициента усиления K , когда величина передаточной функции разомкнутой цепи становится равной единице, может быть найдено аналогичным способом, как и раньше, т. е.

$$K_2 = r_0 r_m r_f \tau_m \tau_f.$$

Переход от мнимой оси ко всей комплексной плоскости действительно является очень важным. При сосредоточении внимания только на мнимой оси, как это осуществляется при частотном анализе,



Фиг. 7.3. Расположение векторов системы при комплексной частоте s_1 .

можно получить представление о влиянии таких параметров, как коэффициентов скорости и ускорения, абсолютной и относительной устойчивости, а также ширины полосы пропускания частот, но нет возможности регулировать соответствующую реакцию во временной области. Последнее должно быть осуществлено через соответствующие предельные параметры. Однако использование всей комплексной плоскости позволяет конструктору системы управления исследовать непосредственно влияние названных параметров в частотной и временной областях.

Путем целесообразного распределения полюсов и нулей передаточных функций корректирующих устройств конструктор может определить почти с первого взгляда, каким способом можно повлиять на переходный процесс и частотную характеристику замкнутой системы.

7.2. КРИТЕРИИ КОРНЕВОГО МЕТОДА

Сущность корневого метода состоит в нахождении геометрического места точек в комплексной плоскости, которые представляют решения характеристического уравнения при разных значениях коэффициента усиления разомкнутой цепи, изменяющихся от нуля до бесконечности. Это означает удовлетворение следующего условия:

$$HG(s) = -1 = 1 \angle 180^\circ (2k + 1) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Точную информацию о реакции замкнутой цепи во временной области можно получить, исследуя эти точки в плоскости s , когда

передаточная функция разомкнутой цепи удовлетворяет предыдущему условию.

Числитель и знаменатель передаточной функции разомкнутой цепи для всех практических систем управления разлагаются на простейшие множители. Порядок полинома знаменателя больше или по крайней мере равен порядку полинома числителя. Форма полинома в виде множителей имеет место потому, что передаточная функция разомкнутой цепи формируется как произведение передаточных функций отдельных звеньев, из которых составлена система. После введения заданных значений комплексного переменного в функцию $HG(s)$ получаем, как правило, комплексное число с модулем R и общим углом сдвига фаз φ . Отсюда

$$HG(s) = R \angle \varphi.$$

Теперь, когда значение s представляет корень характеристического уравнения, тогда $R = 1$ и $\varphi = (2k + 1)\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, что еще раз подтверждает соблюдение уравнения (7.5).

Эти выводы можно выразить в более общей форме, для чего следует рассмотреть приведенное ниже выражение для передаточной функции разомкнутой цепи

$$HG(s) = \frac{K(1 + \tau_a s)(1 + \tau_b s) \dots \left[\left(\frac{s}{\omega_{na}} \right)^2 + \frac{2\zeta_a}{\omega_{na}} s + 1 \right]}{s^N (1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots \left[\left(\frac{s}{\omega_{n1}} \right)^2 + \frac{2\zeta_1}{\omega_{n1}} s + 1 \right] \left[\left(\frac{s}{\omega_{n2}} \right)^2 + \frac{2\zeta_2}{\omega_{n2}} s + 1 \right]}. \quad (7.8)$$

Эта форма передаточной функции наиболее удобна для частотного анализа подобной системы, так как непосредственно приводит к определению частоты точки сопряжения и двух прямолинейных асимптот, которые почти точно приближаются к частотным характеристикам, соответствующим каждому множителю. Однако подобная форма неудобна для изучения на основании корневых методов, потому что члены корней не все заканчиваются в определенной точке на выбранной плоскости s . Вследствие этого порядок измерения угла сдвига фаз, обусловленного каждым членом функции $HG(s)$, становится более сложным. Этот недостаток, однако, можно устранить, если переписать передаточную функцию разомкнутой цепи в следующей измененной форме:

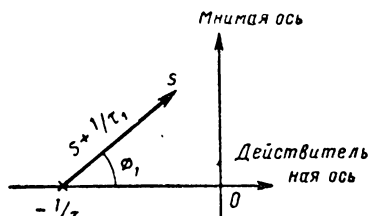
$$HG(s) = \frac{K\tau_a\tau_b\tau_c \dots \omega_{n1}^2\omega_{n2}^2}{\tau_1\tau_2\tau_3 \dots \omega_{na}^2} \times \left[\frac{\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_b}\right) \dots (s^2 + 2\zeta_a\omega_{na}s + \omega_{na}^2)}{s^N \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_3}\right) \dots (s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2}s + \omega_{n2}^2)} \right]. \quad (7.9)$$

Нетрудно обнаружить, что линейный множитель, например, $s + \frac{1}{\tau_a}$ может быть расположен в плоскости s . Критическая частота $s = -\frac{1}{\tau_1}$ может быть расположена слева от начала координат, как показано на фиг. 7. 4. Следует отметить, что для определенной точки в плоскости s вектор $s + \frac{1}{\tau_1}$ определяется простым построением прямой линии от точки критической частоты к рассматриваемой точке. Подобное графическое построение, показанное на фиг. 7. 4, имеет существенное значение, потому что оно дает правильное расположение полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой цепи [см. уравнение (7. 9)].

Кроме того, векторы, связанные с любой из этих критических частот, заканчиваются в одной точке на плоскости s . Для упрощения выражения (7. 9) произведем следующую подстановку:

$$z_1 = \frac{1}{\tau_a}; z_2 = \frac{2}{\tau_b}; \dots$$

$$p_1 = \frac{1}{\tau_1}; p_2 = \frac{1}{\tau_2} \dots \quad (7. 10)$$



Фиг. 7. 4. Линейный фактор $s + 1/\tau_1$.

и

$$K' = \frac{K\tau_a\tau_b\tau_c \dots \omega_{n1}^2\omega_{n2}^2}{\tau_1\tau_2\tau_3 \dots \omega_{n2}^2} \quad (7. 11)$$

Величина K' представляет коэффициент усиления, применяемый при исследовании системы корневым методом. Отсюда нетрудно показать, что постоянный член часто может быть выражен в нормализованной форме характеристического уравнения, соответствующего данной передаточной функции разомкнутой цепи. Следует напомнить, что коэффициент K' не совпадает с коэффициентом усиления K разомкнутой системы. Различие этих коэффициентов ясно вытекает из выражения (7. 11). При любых данных условиях равенство (7. 11) может содержать или не содержать члены с ω^2 , в зависимости от наличия квадратных множителей в числителе и знаменателе передаточной функции разомкнутой цепи.

Каждый множитель уравнения (7. 9) имеет определенную величину и фазовый угол при том или ином значении s . В полярных координатах можно написать:

$$\begin{aligned} s + z_1 &= r_{z1} \angle \varphi_{z1}; \\ s + z_2 &= r_{z2} \angle \varphi_{z2}; \\ &\vdots \\ s^N &= r_{p0}^N \angle N\varphi_{p0}; \\ s + p_1 &= r_{p1} \angle \varphi_{p1}; \\ s + p_2 &= r_{p2} \angle \varphi_{p2}; \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7. 12)$$

Этот же способ может быть применен к двум комплексным корням, связанным с недодемпфированными звеньями, описываемыми квадратными членами (если эти звенья не являются недодемпфированными, то они будут выражены в виде двух линейных членов).

Выражения (7. 12) определяют каждый вектор через его абсолютную величину r_{z1} и фазовый угол φ_{z1} . Обозначения r и p применены для нулей и полюсов передаточной функции разомкнутой цепи. Введение равенств (7. 12) в уравнение (7. 9) и в предположении, что порядок полинома в числителе равен Z и полинома в знаменателе равен P , приводит к следующему результату:

$$HG(s) = \frac{K' r_{z1} r_{z2} \dots r_{zZ}}{r_{p0}^N r_{p1} \dots r_{p(P-N)}} \frac{\angle (\varphi_{z1} + \varphi_{z2} + \dots + \varphi_{zZ}) - (N\varphi_0 + \varphi_{p1} + \dots + \varphi_{p(P-N)})}{\dots} \quad (7. 13)$$

или

$$HG(s) = K' \frac{\prod_{i=1}^Z r_{zi}}{r_{p0}^N \prod_{i=1}^{P-N} r_{pi}} \frac{\angle \sum_{i=1}^Z \varphi_{zi} - \left(N\varphi_0 + \sum_{i=1}^{P-N} \varphi_{pi} \right)}{\dots} \quad (7. 14)$$

Здесь Π означает произведение абсолютных значений всех указанных векторов.

Теперь из уравнения (7. 14) можно вывести обобщенный критерий для нахождения годографа характеристического уравнения системы управления. Как уже было показано, точка на плоскости s представляет решение характеристического уравнения, когда она удовлетворяет фазовому критерию. Ввиду того что функция $HG(s)$ должна быть равна -1 , отсюда следует, что возможны два фазовых критерия в зависимости от знака передаточной функции разомкнутой цепи. Следовательно, когда K' имеет положительный знак, тогда передаточная функция согласно уравнению (7. 14) должна быть равна -1 и результирующий фазовый угол должен быть равен 180° . Если K' имеет отрицательный знак, то результирующий фазовый угол должен быть равен 0° . Отрицательный коэффициент K' означает, что выходная величина преобразователя обратной связи будет отрицательной, когда к системе подан положительный сигнал рассогласования при разомкнутой цепи обратной связи. Отсюда очевидно, что в подобных случаях нельзя применять обычную отрицательную обратную связь между выходной величиной преобразователя обратной связи с входным преобразователем; иначе получится положительная обратная связь. Мы обращаем внимание на это обстоятельство потому, что оно является обычным для систем управления самолетом. Когда условие по фазовому углу удовлетворено, тогда значение коэффициента усиления, необходимое для соблюдения условия об единичной амплитуде нетрудно определить из уравнения (7. 14). Обобщение этих критериев дает:

фазовый критерий

$$\sum_{i=1}^Z \varphi_{zi} - \left(N\varphi_0 + \sum_{i=1}^{P-N} \varphi_{pi} \right) = 180^\circ \pm \text{кратное значение } 360^\circ = (2k + 1)\pi$$

$k = 0, \pm 1, \dots$ при положительном K' ,

$$\sum_{i=1}^Z \varphi_{zi} - \left(N\varphi_0 + \sum_{i=1}^{P-N} \varphi_{pi} \right) = 0^\circ \pm \text{кратное значение } 360^\circ = 2k\pi$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при отрицательном K' ;

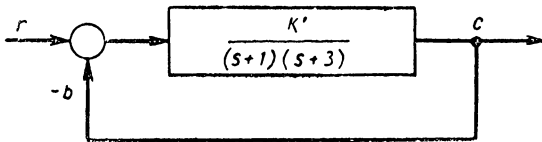
амплитудный критерий

$$K' \frac{\prod_{i=1}^Z r_{zi}}{r_{p0}^N \prod_{i=1}^{P-N} r_{pi}} = 1. \quad (7.16)$$

Фазовый критерий представляет просто подтверждение того факта, что сумма углов векторов, построенных от нуля функции к любой точке в плоскости s , которая представляет корень характеристического уравнения, минус сумма углов векторов, построенных из полюсов той же функции к тем же точкам s на плоскости s , должна быть равна результирующему углу 180° или 0° , в зависимости от знака передаточной функции разомкнутой цепи.

7.3. ПРИМЕНЕНИЕ КОРНЕВОГО МЕТОДА К СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Преимущества корневого метода для анализа и расчета системы управления можно просто и эффективно показать на примере



Фиг. 7. 5. Структурная схема системы второго порядка.

системы второго порядка, схема которой изображена на фиг. 7. 5. Передаточная функция разомкнутой цепи имеет вид

$$HG(s) = \frac{K'}{(s+1)(s+3)}. \quad (7.17)$$

При $h = 1$ передаточная функция замкнутой цепи выражается следующим образом:

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{\frac{K'}{(s+1)(s+3)}}{1 + \frac{K'}{(s+1)(s+3)}} = \frac{K'}{(s+1)(s+3) + K'}. \quad (7.18)$$

Характеристическое уравнение системы будет

$$s^2 + 4s + (3 + K') = 0. \quad (7. 19)$$

Уравнение (7. 19) может быть решено при помощи обычного алгебраического метода или непосредственным применением критерия Эванса, описываемого выражениями (7. 15) и (7. 16). Чтобы подчеркнуть, что каждый метод приводит к одному результату, корни этого уравнения сперва определим алгебраически при разных значениях K' , что приведет к соответствующему годографу. Затем можно показать, что эти годографы удовлетворяют выражениям (7. 15) и (7. 16). Уравнение (7. 19) имеет второй порядок и поэтому корни могут быть непосредственно определены

$$s_{1, 2} = -2 \pm \sqrt{4 - (3 + K')} = -2 \pm \sqrt{1 - K'}. \quad (7. 20)$$

Отсюда были получены приведенные ниже результаты при заданных значениях коэффициента K'

$$K' = 0 \quad s_{1, 2} = -1, -3;$$

$$K' = \frac{3}{4} \quad s_{1, 2} = -1,5, -2,5;$$

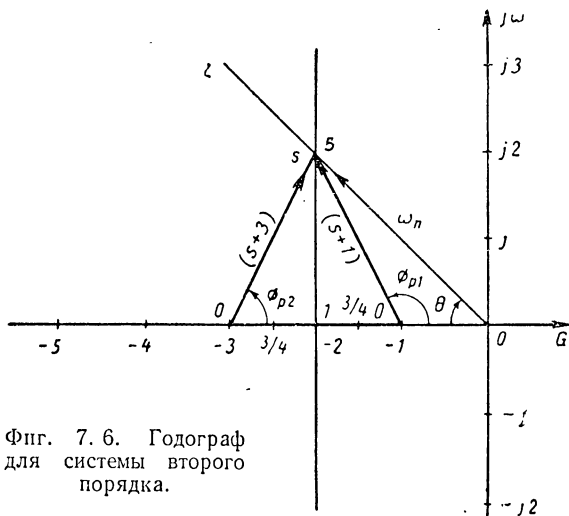
$$K' = 1 \quad s_{1, 2} = -2, -2 \text{ (двойной корень);}$$

$$K' = 5 \quad s_{1, 2} = -2 \pm j2;$$

$$K' = 10 \quad s_{1, 2} = -2 \pm j2.$$

Комплексные сопряженные корни существуют при любом значении K' больше единицы, как это вытекает из равенства (7. 20). Эти корни даны на фиг. 7. 6, причем значения K' указаны около точек. Некоторые точки заслуживают особого внимания. Во-первых, корни характеристического уравнения при $K' = 0$ соответствуют полюсам передаточной функции разомкнутой цепи. Этот вывод применим не только к системам второго порядка, но справедлив для общего случая. Во-вторых, корни передаточной функции замкнутой цепи удаляются от полюсов передаточной функции разомкнутой цепи с увеличением коэффициента усиления. Кроме того, это перемещение связано условием, что сумма корней остается равной -4 . Этот результат опять является общеприменимым к любой передаточной функции разомкнутой цепи, у которой порядок величины s в знаменателе по крайней мере на 2 больше порядка той же величины в числителе. При подобных условиях сумма корней равняется отрицательному значению коэффициента при члене s^{p-1} в нормализованной форме характеристического уравнения, независимо от значения коэффициента K' . В-третьих, когда коэффициент K' увеличивается от 0 до 1, корни перемещаются от полюсов в противоположных направлениях, чтобы сумма их сохранялась неизменной. Однако при $K' = 1$ оба корня совпадают и любое дальнейшее увеличение коэффициента K' сопряжено с удалением корней от действительной оси

координат, следовательно, они становятся комплексными. Таким образом, значение коэффициента $K' = 1$ представляет случай критического демпфирования; когда K' превышает единицу, то это приводит к недодемпфированию. Характер переходного процесса можно легко определить при наличии диаграммы, показанной на фиг. 7. 6. При положительных значениях коэффициента K' геометрическое место корней характеристического уравнения ограничивается частью отрицательной действительной оси между значениями абсциссы -1 и -3 (где реакция сверхдемпфирована) и всей осью ординат, проходящей через значение абсциссы -2 (где реакция недодемпфирована).



Фиг. 7. 6. Годограф для системы второго порядка.

В следующем разделе будет рассмотрен порядок построения геометрических мест корней характеристического уравнения, хотя годографы на фиг. 7. 6. можно очень просто построить, используя непосредственно выражение (7. 15). Сосредоточим свое внимание на том, чтобы показать, как любая точка годографа на фиг. 7. 6 удовлетворяет фазовому критерию. Для этой цели на фигуре указаны также вычисленные значения коэффициента K' .

Передаточная функция разомкнутой цепи не содержит явных нулей, так что общий фазовый угол 180° необходимо определять от векторов, связанных с полюсами передаточной функции разомкнутой цепи. Когда контрольная точка берется где-либо между значениями -1 и -3 , то ясно, что вектор $s+1$ имеет фазовый угол 180° , потому что вектор $s+3$ обязательно имеет нулевое значение фазового угла. Поэтому результирующий угол равняется 180° , что удовлетворяет фазовому критерию. С другой стороны, отметим, что в случае, когда контрольная точка взята между значениями 0 и -1 , то оба вектора должны иметь нулевые углы. Контрольная точка, выбранная слева от значения -3 , определяет оба вектора, проведенных от полюсов с углом 180° или с нулевым результирующим фазовым углом,

так что эта часть действительной оси не может быть частью годографа. Рассмотрим следующую контрольную точку s , расположенную вдоль перпендикуляра, проходящего через точку абсциссы -2 . Вектор из полюса со значением -1 образует угол φ_{p1} , а вектор из полюса при -3 образует угол φ_{p2} . Но так как в любой точке вдоль ординаты получается равнобедренный треугольник, то отсюда следует, что

$$\varphi_{p1} + \varphi_{p2} = \pm 180^\circ \quad (+ \text{ для точек выше действительной оси и} \\ - \text{ для точек ниже действительной оси}).$$

Когда точка, например, $s = -2 + j2$ была определена на основании фазового критерия, тогда требуемое значение коэффициента K' выводится из амплитудного критерия выражения (7.16). В рассматриваемом случае имеем

$$r_{p1} = |s + 1| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5};$$

$$r_{p2} = |s + 3| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

и

$$K' = r_{p1}r_{p2} = 1.$$

Поэтому $K' = 5$, что совпадает с расчетным значением.

Важно понять, что корни, лежащие на годографе, являются решениями характеристического уравнения замкнутой системы. Благодаря этому конструктор системы управления может непосредственно контролировать характеристику во временной области. Например, если конструктор системы, показанной на фиг. 7.5, хочет вычислить величину коэффициента усиления, необходимого для получения относительного коэффициента демпфирования 0,707, он может непосредственно определить его путем построения на фиг. 7.6 линий от начала координат под углом $\pm 45^\circ$ относительно отрицательной действительной оси. Точки пересечения с годографом определяют корни, характеризующие переходной процесс, причем коэффициент усиления вычисляется по изложенному выше способу. Подобный порядок может быть применен к любой паре комплексных сопряженных корней к системе второго порядка и выше. Нетрудно проверить это построение; следует лишь напомнить, что любая пара комплексных сопряженных корней может быть выражена следующим образом:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Ввиду того, что каждый корень представляет комплексное число, то его абсолютное значение и фазовый угол могут быть выражены в общем виде

$$s_{1,2} = \omega_n \angle \theta,$$

где

$$\theta = \arctg \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}.$$

Поэтому

$$\cos \theta = \frac{\xi \omega_n}{\omega_n} = \xi. \quad (7. 21)$$

7. 4. ОБЩИЙ ПОРЯДОК ПОСТРОЕНИЯ ГОДОГРАФОВ

Непосредственное применение критерия Эванса [выражения (7. 15) и (7. 16)] позволяют определить корни характеристического уравнения системы; однако может показаться, что определение подобного годографа не очень просто. В действительности это не так, потому что исследование этих точек в комплексной плоскости, которые удовлетворяют уравнению (7. 5), не является бессмысленным. Например, применяя несколько правил, можно определить общую форму годографа даже после предварительного изучения передаточной функции разомкнутой цепи. Кроме того, это справедливо даже для систем высшего порядка, когда передаточная функция содержит несколько нулей и полюсов. Корневой метод обладает практически в подобных случаях преимуществом по сравнению с ранее рассмотренными методами анализа и расчета. Общий порядок построения годографов состоит в следующем.

1. Определяют полюса и нули передаточной функции $HG(s)$ в комплексной плоскости. Большое значение имеет применение одинакового масштаба для оси абсцисс и ординат; иначе кривые годографа теряют свой смысл.

2. Отмечают те участки действительной оси, которые лежат слева от нечетного значения критической частоты, когда у коэффициента K' в равенстве (7. 9) появляется положительный знак. Когда коэффициент K' отрицательный, тогда годограф лежит слева от четного значения критической частоты.

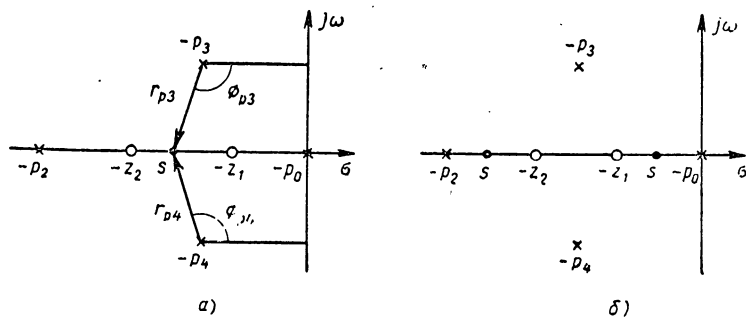
Значимость этого утверждения легко продемонстрировать при рассмотрении передаточной функции разомкнутой цепи следующего вида:

$$HG(s) = K' \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_2)(s^2 + 2\zeta_3 \omega_{n3}s + \omega_{n3}^2)}. \quad (7. 22)$$

Типичное расположение полюсов и нулей этой передаточной функции показано на фиг. 7. 7, а. Рассмотрим точку s , расположенную слева от четного значения критической частоты (фиг. 7. 7, а).

Первоначально обратим внимание на угол сдвига фаз, связанный с векторами, которые исходят из комплексных сопряженных полюсов; очевидно, что общий сдвиг фаз равен нулю. Этот вывод справедлив, когда точка s расположена где-либо вдоль действительной оси. Поэтому фазовый угол функции $HG(s)$ должен определяться в подобном случае по расположению векторов действительных полюсов и нулей. Дальнейшее изучение показывает, что все критические частоты лежат слева от точки s , когда векторы имеют нулевой фазовый угол; в то же время все критические частоты справа от s имеют векторы с углами 180° . Отсюда следует, что только векторы, расположенные справа от s ,

могут иметь значение для фазового критерия. Если четное число этих векторов находится справа от s , то общий фазовый угол будет равен 0° . Таким образом, подобный участок не может быть частью годографа системы, описываемой уравнением (7.9). Если теперь точку s расположить таким образом, что она будет слева от нечетного числа полюсов или нулей, как показано на фиг. 7.7, б, то общий фазовый угол будет равен 180° . Следовательно, эта точка определяет участок действительной оси, который представляет часть годографа. На фиг. 7.7 эти участки, образующие часть годографа, лежат между значениями $-p_2$ и $-z_2$, а также между значениями $-z_1$ и $-p_0$. На основании изложенного выше соображения становится ясно, что



Фиг. 7.7. Применение корневого метода:

а — график для определения того факта, что комплексные полюса не оказывают влияния на угол сдвига фаз для точек вдоль действительной оси; б — определение участков на действительной оси, которые представляют часть годографа.

участки действительной оси, которые представляют часть годографа, охватывают диапазон от одной критической частоты до следующей критической частоты.

3. Рассматривается ряд отдельных годографов, количество которых равно числу полюсов передаточной функции $HG(s)$. Из уравнений (7.4) и (7.9) следует, что характеристическое уравнение равняется полиному величины s , имеющей одинаковый порядок, как и знаменатель передаточной функции $HG(s)$.

Согласно основной теореме алгебры число корней равняется степени полинома. Если порядок полинома равен предположительно P , то для каждого значения K' , использованного в характеристическом уравнении, будем иметь P разных корней. Если далее предположить, что эти корни были определены аналитически для нескольких значений коэффициента K' и затем построены кривые, то очевидно будет получено P различных годографов¹.

¹ У некоторых систем могут существовать двойные корни при определенном значении коэффициента усиления, вследствие чего годографы не будут отличаться. Эти годографы начинаются различно, но совпадают в точке двойного корня и затем вновь расходятся.

4. Построение годографов начнем с полюсов передаточной функции разомкнутой цепи, когда $K' \rightarrow 0$. Эти полюса будут начальными точками годографа. Значение этой стадии построения годографа можно показать на примере системы второго порядка, рассмотренной в разделе 7. 3, где было показано, что корни характеристического уравнения при $K' = 0$ идентичны с полюсами передаточной функции $HG(s)$. Передаточную функцию разомкнутой цепи можно написать в другом виде

$$HG(s) = K' \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (7. 23)$$

где $N(s)$ — полином числителя в уравнении (7. 9), а $D(s)$ означает полином знаменателя того же уравнения. Исходя из уравнения (7. 4), можно написать характеристическое уравнение в общем виде

$$D(s) + K'N(s) = 0. \quad (7. 24)$$

Отсюда становится совершенно очевидно, что корни характеристического уравнения при $K' = 0$ являются полюсами передаточной функции $HG(s)$.

5. *Окончательное построение годографа в точках нулей передаточной функции разомкнутой цепи, соответствующих $K' \rightarrow \infty$.* Порядок $D(s)$ для практических систем управления не превышает порядка $N(s)$, так что не все нули явно выражены. Пример системы второго порядка, рассмотренный в разделе 7. 3, иллюстрирует условия, когда нет явно выраженных нулей. С другой стороны, передаточная функция по уравнению (7. 22) представляет случай, когда имеются два явно выраженных нуля, т. е. — z_1 и — z_2 . Интересно заметить, что в тех случаях, когда явно выраженные нули расположены на действительной оси, пункты 2 и 5 определяют один или несколько годографов. Таким образом, на фиг. 7. 7 было определено два из четырех годографов, когда значения коэффициента K' увеличивались от нуля до бесконечности. Этот вывод вытекает из следующего: один корень характеристического уравнения расположен на годографе, который охватывает значения от $-p_0$ до $-z_1$, а второй корень — на годографе, охватывающем значения от $-p_2$ до $-z_2$.

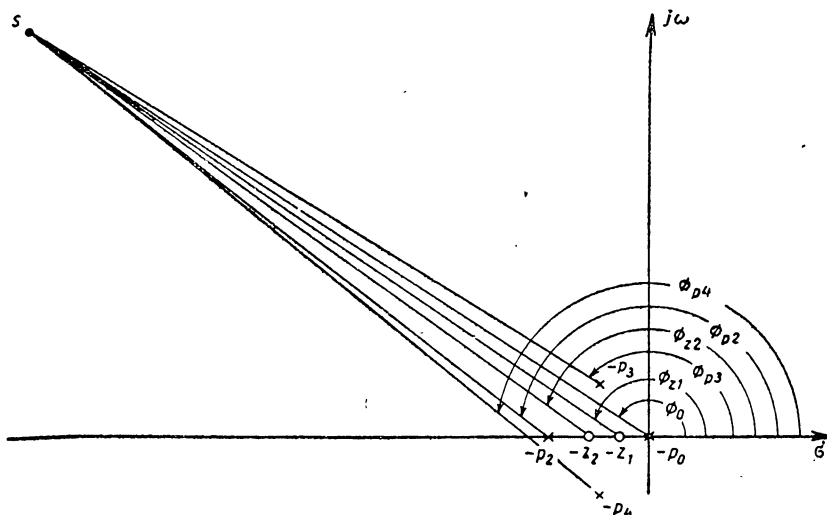
Существование явно выраженных нулей выводится из уравнения (7. 24) после введения значений коэффициента K' , приближающихся к бесконечности. Благодаря этому величина $D(s)$ становится пренебрежимо малой по сравнению с $K'N(s)$, что, конечно, ограничивается условием конечного значения s (явно выраженные нули расположены в конечной части плоскости s). Следовательно,

$$K'N(s) = 0 \text{ при } K' \rightarrow \infty. \quad (7. 25)$$

Таким образом, уравнение (7. 25) удовлетворено после введения нулей функции $N(s)$, которые также представляют теперь корни характеристического уравнения, когда коэффициент K' приближается

к бесконечности. Явно выраженные нули подтверждают необходимость одного или нескольких годографов, как это уже подчеркивалось выше. Однако, когда порядок функции $D(s)$ равен P и порядок функции $N(s)$ равен Z , тогда необходимо определить еще $P - Z$ годографов. Иными словами, количество неявно выраженных нулей составляет $P - Z$.

Эти неявно выраженные нули не могут быть выведены из уравнения (7.25), так как для этого необходимо, чтобы величина s была очень большой, т. е. приближалась к бесконечности. При этих условиях значение функции $D(s)$ не будет больше пренебрежимо малым,



Фиг. 7. 8. Графическое построение неявно выраженных нулей функции $HG(s)$.

особенно учитывая тот факт, что она имеет более высокий порядок, чем функция $N(s)$. Отсюда понятно, что необходимо получить из другого источника сведения о неявно выраженных нулях, для чего следует учесть наличие обеих функций $N(s)$ и $D(s)$. Для этого может быть использовано уравнение (7.23). Введение надлежащего условия относительно величины s изменяет уравнение (7.23), а именно

$$\lim_{s \rightarrow \infty} HG(s) = \frac{K'}{s^{P-Z}}. \quad (7.26)$$

Графическое изображение этого уравнения дано на фиг. 7. 8, где произведено построение неявно выраженных нулей передаточной функции по уравнению (7.22). Когда точка s достаточно удалена от начала координат, тогда полюсы и явно выраженные нули сосредоточены в одном месте таким образом, что явно выраженные нули нейтрализуются соответствующим количеством полюсов функции $HG(s)$, у которой остается полюс кратности $P - Z$. Единственный вопрос, на который необходимо еще ответить, состоит в том, при

каких условиях уравнение (7. 26) приводит к результату $1 \angle 180^\circ$, благодаря чему гарантируется, что все точки являются решениями характеристического уравнения системы. Ответ можно получить прямым применением фазового критерия Эванса, который можно написать в следующем виде для точек на большом расстоянии от начала координат:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{P-Z} \varphi_{pi} &= (2k + 1) \pi \text{ при положительном } K', \\ \sum_{i=1}^{P-Z} \varphi_{pi} &= 2k\pi \text{ при отрицательном } K'. \end{aligned} \quad (7. 27)$$

Форма этого уравнения учитывает упразднение явно выраженных нулей за счет полюсов, допуская, что величина i приобретает значение только в диапазоне от 1 до $P - Z$, причем последняя величина означает число избыточных полюсов функции $HG(s)$ сравнительно с явно выраженными нулями. Кроме того, изучение фиг. 7. 8 позволяет ясно определить, что все углы векторов из избыточных полюсов (не перекрытых нулями) равны и обозначены $\varphi_{асимпт}$, так что уравнение (7. 27) может быть написано в более простом виде

$$\begin{aligned} (P - Z) \varphi_{асимпт} &= (2k + 1) \pi \text{ при положительном } K'; \\ (P - Z) \varphi_{асимпт} &= 2k\pi \text{ при отрицательном } K' \end{aligned}$$

или еще более проще

$$\begin{aligned} \varphi_{асимпт} &= \frac{(2k + 1) \pi}{P - Z} \text{ при положительном } K' \text{ и } k = 0, \pm 1 \dots \\ \varphi_{асимпт} &= \frac{2k\pi}{P - Z} \text{ при отрицательном } K' \text{ и } k = 0, \pm 1 \dots \end{aligned} \quad (7. 28)$$

При разных значениях k будут получены различные решения. Нетрудно обнаружить, что число различных решений равно $P - Z$.

Непосредственное применение амплитудного критерия Эванса определяет значение коэффициента K' , соответствующее точке s , достаточно удаленной от начала координат в плоскости s . Отсюда

$$\frac{K'}{r^{P-Z}} = 1. \quad (7. 29)$$

Ввиду того что r^{P-Z} очень большая величина, то коэффициент K' должен быть очень большим, чтобы отношение было равно единице.

Применим результаты, полученные на основании уравнения (7. 28) к системе, описываемой уравнением (7. 22). Раньше было установлено, что на отрицательной действительной оси находятся два годографа, связанные с явно выраженными нулями. Так как имеется четыре полюса передаточной функции разомкнутой цепи, то отсюда следует, что два неявно выраженных нуля будут расположены при

приближении величины s к бесконечности вдоль направления, определяемого уравнением (7. 28), которое в данном случае будет иметь вид:

$$\varphi_{асимпт} = \frac{2k+1}{2} \pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } k = 0;$$

$$\varphi_{асимпт} = \frac{3}{2} \pi \quad \text{при } k = +1.$$

Число различных асимптот всегда равняется $P - Z$; в данном случае 2. В заключение можно поэтому сказать, что стадия 5 расчета позволяет конструктору получить сведения о конечных точках годографа, когда коэффициент K' увеличивается до очень больших значений.

6. Определяют точку пересечения асимптот по формуле

$$\sigma_c = \frac{\sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}}{P - Z}. \quad (7. 30)$$

Выражение (7. 28) позволяет получить сведения относительно углов, которые годографы образуют с положительной действительной осью при больших значениях s . Чтобы эти сведения были полезны, необходимо их сочетать с параметрами начальных точек асимптот в конечной части плоскости s . Для наблюдателя, удаленного от начала координат, форма расположения полюсов и нулей кажется сосредоточенной в точке вдоль действительной оси, которую мы назовем «центроидом» по аналогии, с центром тяжести массы системы. Действительно, параметры этого центроида определяются тем же способом, как и центр тяжести распределенной массы. Прежде всего необходимо произвольно приписать $(a + 1)$ каждому полюсу и $(a - 1)$ каждому конечному нулю для обозначения эквивалентной массы. Эти моменты, создаваемые относительно начала координат, будут затем пропорциональны параметрам этих критических частот. Момент, создаваемый относительно оси абсцисс вследствие массы, приписанной комплексным сопряженным нулям и полюсам, равен нулю, потому что влияние этих масс, обусловленных каждым сопряженным нулем или полюсом, равно и противоположно. Следовательно, только действительные части комплексного значения критических частот влияют на расположение центроида. Так как каждый полюс имеет эквивалентную массу $+1$ и каждый нуль — эквивалентную массу -1 , то отсюда следует, что суммарный момент относительно начала координат равняется простой сумме параметров полюсов минус сумма параметров нулей.

Следовательно, (общий момент конфигурации полюсов-нулей) = $= \sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}$.

Последнее выражение представляет подтверждение условий, которые кажутся наблюдателю в конечной плоскости s . Когда наблюдатель достаточно удален от начала координат, то специфические «микроскопические» детали отдельных полюсов и нулей теряются.

Все это можно рассматривать как полюс с кратностью $P - Z$, расположенный в какой-то точке, удаленной от начала σ_c . Однако общий момент этого «кажущегося» многократного полюса должен быть равен моменту действительной конфигурации расположения полюсов и нулей. Следовательно, имеем

$$\sigma_c (P - Z) = \sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}.$$

Поэтому асимптоты будут начинаться для удаленного наблюдателя в точке

$$\sigma_c = \frac{\sum \text{полюсов} - \sum \text{нулей}}{P - Z}.$$

Применив последнее выражение к системе второго порядка, рассмотренной в разделе 7. 3, получим

$$\sigma_c = \frac{-1 - 3 + 0}{2} = -2,$$

что проверяется результатом, показанным на фиг. 7. 6. Сочетание результатов, полученных по уравнениям (7. 28) и (7. 30), дает возможность определить не только форму годографа при больших значениях s , но может служить также руководством для определения формы кривой, которую приобретает годограф в зоне около начала координат. Последний момент поясняется на следующих примерах.

7. Когда форма функции $HG(s)$ такова, что $P - Z = 2$, тогда некоторые ветви годографа будут смещаться влево с увеличением значения коэффициента K' , а другие ветви годографа должны перемещаться вправо. Этот вывод непосредственно следует из теории алгебры, которая утверждает, что в случае нормализованной формы характеристического уравнения, т. е. $s^P + bs^{P-1} + \dots + K' = 0$, отрицательная сумма корней будет постоянна при условии, что $P - Z \geq 2$. В частном случае эта сумма равняется коэффициенту при члене s^{P-1} , т. е. b , который не зависит от величины K' . Эта стадия расчета особенно полезна для определения направлений годографов, которые начинаются в комплексных полюсах функции $HG(s)$. Следовательно, это позволяет правильно определять область, где оба годографа имеют тенденцию совпадать и расходиться.

8. *Применение «спиралей» (спирального лекала) для окончательного построения годографа.* Предыдущие семь стадий расчета предназначены в первую очередь для определения тех участков действительной оси, которые представляют часть полного годографа, и получение общей информации и данных для проектирования, касающихся характера остальной части годографа. Как правило, наиболее важная часть годографа лежит не на действительной оси или асимптотах, но чаще всего в конечной области плоскости s около начала координат. Поэтому нахождение этой части годографа имеет наибольшее значение для конструктора. Применение спирального лекала значительно облегчает нахождение этой части годографа. Применение лекала позволяет построить общий фазовый угол векторов из полюсов и нулей для любой точки s . В действительности, применяя

описанные выше стадии расчета, можно в течение короткого времени определить полный годограф системы. Но прежде чем иллюстрировать этот порядок расчета примерами, рассмотрим применение упомянутого лекала.

Однако следует первоначально оговориться, что изучение корневого метода возможно без применения лекала. Но это связано с ухудшением точности метода. Нетрудно изучить применение этого спирального лекала и потребуются сравнительно немного времени для приобретения практического навыка.

После приобретения соответствующего навыка определение критических точек годографа, например, места, где годограф отходит от действительности оси, или точки пересечения с осью координат в плоскости s , или зоны около комплексных полюсов, может быть легко осуществлено, произведя несколько контрольных проверок фазового угла. Кроме того, этот порядок не усложняется для систем более высокого порядка. Этого нельзя сказать об аналитических методах, применяемых для определения тех же самых точек. Этот вопрос будет более подробно обсужден в последующих разделах, где дополнительно излагаются правила построения годографов.

7. 5. ЛЕКАЛО И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Спираль представляет собой лекало, состоящее из диска, планки и двух колец, изображенных на фиг. 7. 9. Диск имеет диаметр около 75 мм и снабжен шкалой с градусными делениями через каждые 5°. Планка имеет размер до 190 мм до места шарнира и снабжена линейной шкалой на своей кромке и, кроме того, логарифмической спиралью на поверхности, как показано на фиг. 7. 9, а. Стандартное кольцевое крепление служит для соединения планки и диска вместе. Шарнир представляет особое кольцо, смонтированное внутри стандартного кольцевого крепления, в котором он свободно вращается. Если на шарнир нажать большим пальцем и перемещать планку, то диск и планка будут поворачиваться. Если же, кроме нажатия пальцем на шарнир, прижать еще диск при помощи указательного пальца, тогда будет поворачиваться только планка. Применение этого спирального лекала для построения годографа лучше всего пояснить на особом примере. Это создает также возможность применить стадии расчета, изложенные в предыдущем разделе.

Пример 7. 1. Передаточная функция разомкнутой цепи системы управления с обратной связью определяется выражением

$$HG(s) = \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)}.$$

а) Находим геометрическое место точек этой функции при изменении величины K от очень малых до очень больших значений.

б) Вычисляем значение коэффициента усиления разомкнутой цепи, требуемого для создания реакции во временной области на еди-

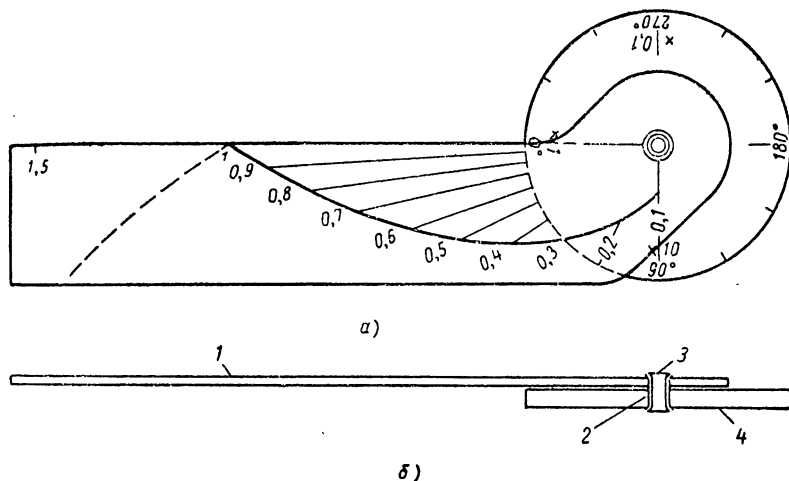
ничную возмущающую функцию, соответствующую относительному коэффициенту демпфирования 0,5 при комплексных корнях.

а) Вычисляем значение коэффициента усиления разомкнутой цепи, при котором система становится абсолютно неустойчивой, т. е. $\xi = 0$.

Решения изложены ниже:

а) До применения общего порядка расчета передаточную функцию необходимо преобразовать в форму, соответствующую уравнению (7.9). Следовательно,

$$HG(s) = 2(6)K \frac{1}{s(s+2)(s+6)} = \frac{K'}{s(s+2)(s+6)}.$$



Фиг. 7.9. Спиральное лекало (спираль):

а — вид сверху; б — вид сбоку; 1 — рычаг; 2 — шарнир; 3 — диск; 4 — стандартное кольцевое крепление.

Соотношение между коэффициентом усиления K разомкнутой цепи и коэффициентом K' будет поэтому равно

$$12K = K'.$$

1. Передаточная функция не имеет конечных нулей. Полюсы расположены в точках 0, -2 , -6 , как показано на фиг. 7.10. Заметим, кроме того, что деления по оси абсцисс соответствуют делениям по оси ординат.

2. Участки действительной оси между точками 0 и -2 и между -6 и $-\infty$ представляют часть годографа.

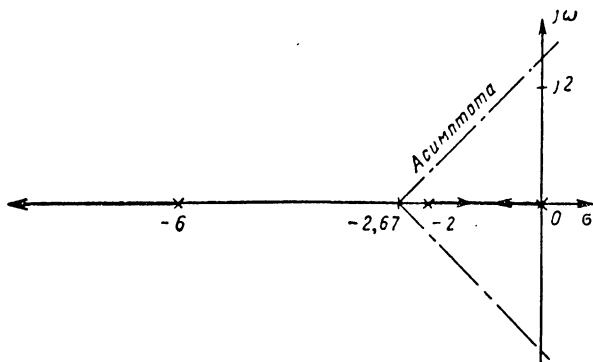
3. Имеется три годографа. Один из них представляет участок вдоль действительной оси от -6 до $-\infty$.

4. Из двух остальных годографов один начинается от полюса в точке -2 , другой — от полюса в начале координат.

Таким образом, когда коэффициент K' увеличивается, тогда корни характеристического уравнения должны перемещаться вправо от полюса в точке -2 и влево от полюса в начале координат.

5. Передаточная функция имеет три полюса и не имеет конечных нулей. Следовательно, должны существовать три неявно выраженных нуля в бесконечности; это означает, что годографы, начинающиеся в полюсах разомкнутой цепи, должны заканчиваться в бесконечности и они должны совпадать с предписанными асимптотами, чтобы обеспечить совпадение точек в плоскости s с решениями характеристического уравнения, когда величина s приближается к бесконечности. Из уравнения (7. 28) следует, что углы асимптот равны

$$\varphi_{\text{асимпт}} = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, -180^\circ.$$



Фиг. 7. 10. Графическое построение данных расчета по пунктам 1—6:

1 — асимптота.

Ввиду того, что $P-Z = 3$, существуют три асимптоты.

6. Начальная точка асимптот определяется уравнением (7. 30). Следовательно,

$$\sigma_c = \frac{(0-2-6)-0}{3} = -2,67.$$

Эти асимптоты показаны на фиг. 7. 10. Хотя эти асимптоты представляют часть годографа только при больших значениях s (за исключением, конечно, годографов, расположенных на действительной оси) и, следовательно, вне диапазона значений, показанных на фиг. 7. 10, их следует рассматривать как хороший способ определения характера годографа в зоне около начала координат.

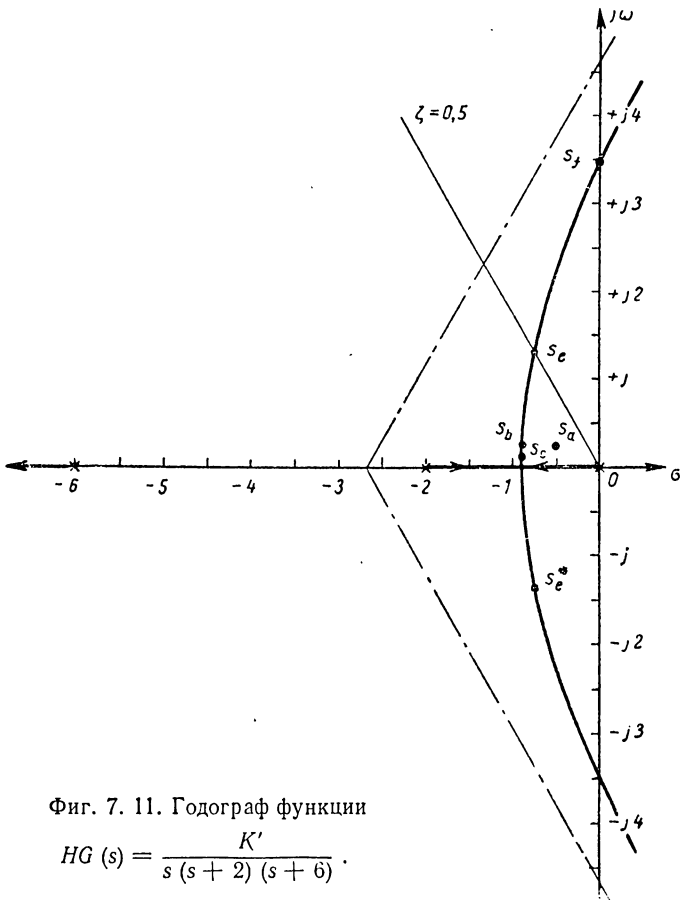
7. Эта стадия расчета применяется обычно одновременно со стадией 8, так как она позволяет определить точки при помощи спирального лекала, которые являются решениями характеристического уравнения. Например, когда K' увеличивается, то перемещение значений корней от полюса в точке -6 происходит влево. Перемещение от полюса в начале координат должно быть также направлено влево.

Ввиду того, что сумма корней должна быть неизменной, отсюда следует, что скорость перемещения корней вправо от полюса в точке -2 больше скорости перемещения влево от полюса в начале координат. Это обстоятельство может быть использовано с успехом для нахождения (при помощи спирального лекала или иным способом) точки, где эти два годографа отходят от начала координат и перемещаются в сторону двух других асимптот.

8. *Применение спирального лекала для окончательного построения годографа.* Теперь можно дать пояснение, как применить спиральное лекало, сосредоточив свое внимание на расположении точки пересечения, которая в данном случае представляет точку, где ветвь годографа от начала координат и ветвь годографа от полюса в точке -2 отходят от оси абсцисс. Она представляет одну из важнейших точек, которые необходимо определить. На основании данных, полученных в пункте 7 расчета, можно предположительно найти точку пересечения где-нибудь вправо от точки $(-1,0)$. В качестве первой попытки проверим сумму углов векторов, начинающихся в полюсах разомкнутой цепи до контрольной точки s_a (фиг. 7. 11); эта сумма должна быть равна 180° . Суммирование углов производится при помощи спирального лекала, как описано ниже.

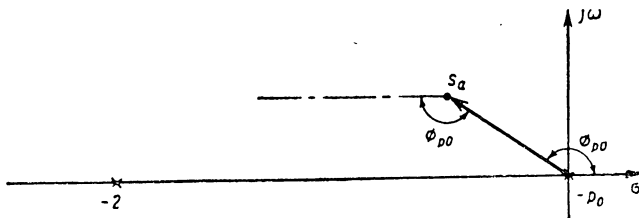
8. А. *Определение точек на действительной оси, которые удовлетворяют фазовому критерию.* Кромку планки спирального лекала располагают таким образом, чтобы она совпадала с нулевой отметкой на диске лекала. Точку шарнира устанавливают в контрольной точке; в данном случае эта точка отмечена буквой s_a на фиг. 7. 11. Планку лекала располагают таким образом, чтобы линия проходила через полюс, наиболее удаленный с правой стороны. Придерживая диск, поворачивают планку так, чтобы она была расположена горизонтально влево.

При этом положении планки отсчет по шкале диска дает 206° или -154° . На фиг. 7. 12 показано, что угол вектора от полюса в начале координат до контрольной точки s_a составляет $\varphi_{po} = 154^\circ$; согласно критерию фазового угла этот угол необходимо прибавить, но с отрицательным знаком. При измерении угла φ_{po} путем размещения шарнира в точке s_a , а не в полюсе, не только позволяет учитывать отрицательный знак, но одновременно можно учесть влияние других критических частот, так как векторы, проведенные из этих точек, заканчиваются в контрольной точке. Таким образом, для учета влияния, обусловленного вектором из полюса в точке -2 , начинают измерение при горизонтальном положении планки, прижимают большим пальцем место шарнира, причем диск освобождают от давления, и вращают планку против часовой стрелки до совпадения с полюсом в точке -2 . Затем закрепляют диск и вращают планку по часовой стрелке до горизонтального положения, что дает отсчет по шкале диска 198° (или -162°). Влияние вектора из полюса в точке -6 определяется после освобождения диска, вращения планки до совпадения с полюсом в точке -6 , закрепления диска и, наконец, поворота планки опять по часовой стрелке до горизонтального



Фиг. 7. 11. Годограф функции

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s+6)}$$

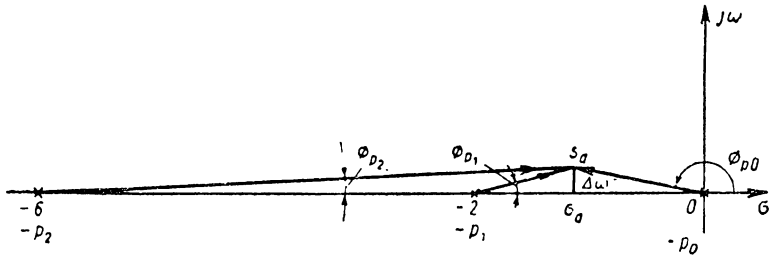


Фиг. 7. 12. Угловое перемещение вектора, проведенного из полюса в начале координат к точке s_a на плоскости s .

положения. Суммарный фазовый угол будет равен конечному отсчету по шкале диска, что для точки s_a равняется 195° (или -165°). Ввиду того, что это значение отличается от $\pm 180^\circ$, контрольная точка s_a не находится на годографе.

Нетрудно видеть, что точка s_a была выбрана слишком далеко вправо. Поэтому следует выбрать другую контрольную точку, расположенную в s_b , чтобы создать большее запаздывание по фазе. Тогда повторение порядка измерения угла даст новое значение суммарного фазового угла, равного 180° . Это будет означать, что точка s_b находится на годографе.

Ввиду того, что s_b является комплексным корнем, должен быть комплексный сопряженный корень, расположенный ниже. Отсюда



Фиг. 7. 13. Метод повторной проверки для нахождения точки сопряжения.

вытекает другой вывод о годографах, состоящий в том, что они расположены симметрично относительно оси абсцисс.

8. Б. *Определение точек пересечения.* Проверка результирующего фазового угла для точки, например, s_c , расположенной непосредственно ниже s_b , позволяет также определить часть годографа. Отсюда можно сделать вывод, что годографы отходят от действительной оси в точке, которая в рассматриваемом случае соответствует $\sigma_b = -0,9$. Эту точку пересечения или отхода от действительной оси можно также найти без применения спирального лекала, но все же необходимо исходить из метода последовательного приближения. Для иллюстрации рассмотрим контрольную точку s_d на фиг. 7. 13, которая имеет очень малую мнимую часть, т. е. $\Delta\omega$. На этой фигуре показаны также три вектора; соответствующие фазовые углы будут равны

$$\begin{aligned} \varphi_{p0} &= \pi - \arctg \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_0} \right|; & \varphi_{p1} &= \arctg \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_1} \right|; \\ \varphi_{p2} &= \arctg \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_2 + \rho_2} \right|. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Для удовлетворения фазового критерия Эванса требуется, чтобы

$$\pi - \arctg \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_0} \right| + \arctg \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_1} \right| + \arctg \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_2} \right| = \pi. \quad (7.32)$$

Так как $\Delta\omega$ очень малая величина, уравнение (7. 32) можно переписать в виде

$$\left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_1} \right| + \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_2} \right| = \left| \frac{\Delta\omega}{\sigma_d + \rho_0} \right|,$$

которое упрощается после сокращения

$$\frac{1}{|\sigma_d + \rho_1|} + \frac{1}{|\sigma_d + \rho_2|} = \frac{1}{|\sigma_d + \rho_0|}. \quad (7. 33)$$

Если выбрать σ_d так, чтобы было удовлетворено уравнение (7. 33), то можно определить точку пересечения σ_b . Как и в случае применения спирального лекала, обычно необходимо несколько проверок контрольных точек. После введения значения $\sigma_b = -0,9$ находим следующий результат:

$$\frac{1}{|-0,9 + 6|} + \frac{1}{|-0,9 + 2|} = \frac{1}{|-0,9 + 0|} = 1,106 \approx 1,11,$$

что достаточно точно совпадает.

Общее правило определения точки пересечения оси абсцисс можно вывести из уравнения (7. 33). Напишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{|\sigma_b + \rho_{li}|} + \sum \frac{1}{|\sigma_b + z_{ri}|} = \\ = \sum \frac{1}{|\sigma_b + z_{li}|} + \sum \frac{1}{|\sigma_b + \rho_{ri}|}, \end{aligned} \quad (7. 34)$$

где ρ_{li} — i -тый полюс, расположенный слева от контрольной точки;
 ρ_{ri} — i -тый полюс, расположенный справа от контрольной точки;
 z_{li} — i -тый ноль, расположенный слева от контрольной точки;
 z_{ri} — i -тый ноль, расположенный справа от контрольной точки.

Наличие комплексных полюсов и нулей не изменяет ценности уравнения (7. 34), потому что это не влияет на результирующий фазовый угол в точке на действительной оси. Кроме того, уравнение (7. 34) ограничено условиями, когда только два годографа совпадают вместе и отходят от действительной оси. В действительности общее правило устанавливает, что в случае совпадения двух годографов они проходят вдоль линии 180° и отклоняются вдоль новых линий, которые образуют угол 90° относительно предыдущего направления. В случае, когда три годографа совпадают, начальные участки расположены под углом 120° друг к другу и дальнейшее отклонение от этого направления составляет 60° . При совпадении четырех годографов, изменение угла наклона составляет 90° относительно начального направления с дальнейшим отклонением в 45° от первоначальных участков. После того как были определены точки, отмеченные буквами s_b и s_c на фиг. 7. 11, нетрудно найти остальную часть годографа путем проверки контрольных точек, целесообразно выбранных выше и справа от каждой предыдущей точки, найденной на части

годографа. Подобный порядок построения был применен для определения полного годографа, показанного на фиг. 7. 11.

б) Спиральное лекало снабжают шкалой с относительным коэффициентом демпфирования и при его помощи проверяют какую-либо пару комплексных сопряженных корней. Эту шкалу, конечно, определяют по уравнению (7. 21). Для построения линии $\xi = 0,5$ на фиг. 7. 11 планку спирального лекала располагают таким образом, чтобы она совпадала с делением 180° на шкале диска; место шарнира размещают в начале координат фиг. 7. 11, причем планка должна быть направлена влево. После этого диск лекала закрепляют и планку поворачивают по часовой стрелке до совпадения с делением $0,5$ на шкале относительных коэффициентов демпфирования. Вдоль планки строят линию, пересекающую годограф в точке s_e . Ввиду того что этот корень комплексный, он имеет комплексный сопряженный корень, расположенный в точке s_e^* .

8. В. *Вычисление коэффициента усиления по годографу.* Значение коэффициента усиления, необходимого для получения корней s_e и s_e^* характеристического уравнения, можно найти одним из двух способов применения спирального лекала. Один способ состоит в использовании амплитудного критерия по уравнению (7. 16). Для нашего примера имеем

$$\frac{K'}{r_{p0}r_{p1}r_{p2}} = 1 \quad \text{или} \quad K' = r_{p0}r_{p1}r_{p2}.$$

Так как планка спирального лекала снабжена линейной шкалой, величину r_{p0} можно определить, если поместить точку шарнира в s_e и отсчитать по шкале расстояние до полюса в начале координат. Для z_{p0} отсчет по шкале ¹ дает 0,3. Здесь необходимо ввести масштабный коэффициент, чтобы получить правильное значение r_{p0} , потому что одно деление на шкале планки спирального лекала соответствует пяти делениям для кривой на фиг. 7. 11. Таким образом, правильное значение r_{p0} составляет $0,3 \times 5 = 1,5$. Аналогичный порядок применяется для определения r_{p1} , что означает длину между s_e и полюсом в точке -2 . В рассматриваемом случае это значение было найдено равным 1,8. Действительное значение r_{p2} было найдено равным 5,4. Отсюда амплитудный критерий дает значение коэффициента K' , которое равно

$$K' = 1,5 \times 1,8 \times 5,4 = 14,6,$$

так что требуемый коэффициент усиления разомкнутой цепи равен

$$K = \frac{14,6}{12} = 1,22.$$

¹ Этот отсчет был произведен по кривой, построенной на листе бумаги размером $8,5 \times 11$ дюймов (около 216×280 мм). Для проверки этих значений читателю рекомендуется перечертить фиг. 7. 11 в этом масштабе.

Более быстрый и прямой способ вычисления коэффициента усиления основан на применении логарифмической спирали, нанесенной на передней поверхности планки спирального лекала. Эта логарифмическая спираль позволяет в основном производить умножение и деление вектором путем простого сложения или вычитания углов. Линейные и угловые шкалы спирального лекала выбираются таким образом, чтобы поворот планки лекала на 90° означал умножение или деление на 10. По этой причине шкала диска спирального лекала имеет отметку $X1$ на нулевой радиальной линии, $X10$ — на делении 90° и $X0,1$ — на делении -90° .

Для вычисления коэффициента усиления необходимо произвести соответствующий отсчет по логарифмической спиральной шкале, одновременно с отсчетом соответствующего масштаба шкалы (т. е. $X11$, $X10$ или $X0,1$) и регулирования масштабного фактора. Для надлежащего отсчета по спиральной кривой поступают следующим образом: устанавливают планку спирального лекала по отметке $X1$ и размещают ось шарнира в рассматриваемой точке, например s_2 . Располагают кромку планки спирального лекала по полюсу в начале координат. Затем диск закрепляют, планку поворачивают до тех пор, пока полюс не окажется на спиральной кривой. После этого диск освобождают и планку устанавливают по полюсу в точке -2 . Опять диск закрепляют и планку поворачивают так, чтобы этот полюс лежал на спиральной кривой. Затем диск освобождают и планку устанавливают по полюсу в точке -6 . Следует заметить, что истинная спиральная кривая должна лежать выше радиальной кромки планки после деления 1,0 на шкале. Для удобства наносят зеркальное изображение истинной кривой и вращение пленки должно производиться по направлению, определяемому по истинной кривой. Чтобы обеспечить это в случае полюса в точке -6 , необходимо спиральную кривую (а не кромку планки спирального лекала) совместить с полюсом в точке -6 . Затем диск закрепляют и планку поворачивают до момента, когда полюс совпадает с радиальной кромкой. Для определения точки пересечения со спиральной кривой наблюдают за одной из четырех радиальных линий на диске. Полученный отсчет умножают на масштабный коэффициент радиальной линии. В рассматриваемом примере отсчет по спиральной кривой дает 0,12 при соответствующей радиальной линии с отметкой $X1$. Ввиду того что масштабный фактор был уже определен равным 5 : 1, отсюда следует, что

$$K' = 0,12 (5)^3 = 15,$$

что хорошо совпадает со значением 14,6.

В общей формулировке коэффициент усиления, вычисляемый при помощи спирального лекала, определяется следующим образом: $K' = [\text{отсчет по спиральной кривой}] \times [\text{коэффициент умножения по квадранту}] \times [\text{масштабный фактор}]^{P-2}$, (7. 35),

где масштабный фактор означает число делений на кривой годографа, которое соответствует одному делению шкалы по спираль-

ной кривой. Спиральное лекало сконструировано таким образом, что деления нанесены на длине 5 дюймов (т. е. 127 мм). Возведение масштабного фактора в степень ($P-Z$) объясняется амплитудным критерием.

8. Г. *Определение коэффициента усиления при незатухающих колебаниях (относительный коэффициент демпфирования равен 0).*

в) После построения годографа значение коэффициента усиления разомкнутой цепи, при котором относительный коэффициент демпфирования становится равным нулю, определяется на основании вышеизложенного порядка до момента определения точки пересечения годографа с мнимой осью, т. е. точки s_f на фиг. 7. 11. Это дает отсчет по спиральной кривой 0,775 и, таким образом, коэффициент усиления разомкнутой цепи будет равняться

$$K = \frac{K'}{12} = \frac{0,775 (1) (5)^3}{12} = \frac{97}{12} = 8,1.$$

Конечно, частоту незатухающих колебаний при этом коэффициенте усиления можно определить по оси ординат соответственно точке пересечения. На фиг. 7. 11 показано, что эта частота равна 3,5 рад/сек.

Для определения тех же данных можно применить аналитический метод, причем потребуются меньше работы, при условии что характеристическое уравнение не будет выше третьего или четвертого порядка.

Упомянутые точки пересечения находятся при помощи критерия Рауса, зная, что подобные точки являются не только корнями характеристического уравнения, но имеют чисто мнимое значение, являются также корнями дополнительного уравнения. Дополнительное уравнение определяется тем, что оно связано с рядом, который предшествует первому сходящемуся ряду в таблице Рауса. Для его нахождения поступают следующим образом: во-первых, составляют полную таблицу Рауса применительно к характеристическому уравнению; во-вторых, выбирают коэффициент K' таким образом, чтобы создать сходимость всех элементов ряда. В действительности этот коэффициент является единственной причиной незатухающих колебаний, в-третьих, на основании этого коэффициента K' составляют дополнительное уравнение и решают его для точек пересечения с мнимой осью. Применение этого способа для рассматриваемого примера дает следующую таблицу Рауса, составленную по характеристическому уравнению.

Характеристическое уравнение

$$s^3 + 8s^2 + 12s + K' = 0.$$

Таблица Рауса

s^3	1	12
s^2	8	K'
s	$\frac{96 - K'}{8}$	

Совершенно ясно, что для исчезновения третьего ряда можно выбрать

$$\frac{96 - K'}{8} = 0 \quad \text{или} \quad K' = 96.$$

Заметим, что это значение удовлетворительно совпадает со значением 97, найденным путем применения спирального лекала. Наконец, на основании второго ряда таблицы Рауса составляется дополнительное уравнение

$$8s^2 + K' = 0.$$

Но

$$K' = 96.$$

Отсюда

$$s^2 + 12 = 0,$$

следовательно,

$$s_{1,2} = \pm 3,46 \text{ рад/сек.}$$

Это значение хорошо совпадает с графическим определением, когда была найдена величина 3,5 рад/сек.

7. 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

После изучения основных понятий, касающихся построения годографов, можно рассмотреть несколько более сложные примеры для получения дополнительной информации об этих кривых.

Пример 7. 2. Рассмотрим систему, описываемую передаточной функцией разомкнутой цепи

$$HG(s) = \frac{K'(s+3)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

Наличие конечного нуля и двух комплексных сопряженных полюсов характеризует степень сложности этого случая от ранее рассмотренного. Прежде всего, для определения точек в плоскости s , которые удовлетворяют фазовому критерию, необходимо учесть угол опережения по фазе, обусловленный вектором из точки конечного нуля. Кроме того, наличие полюсов передаточной функции разомкнутой цепи, расположенных вне действительной оси, требует определения соответствующих углов отклонения от этих полюсов, чтобы облегчить построение годографов. Начнем построение годографов соответственно изложенному ниже порядку.

1. Один конечный ноль размещен в точке $s = -3$; 4 полюса размещены в точках $s = 0, -2, -1, +1$. Они находятся в плоскости, как показано на фиг. 7. 14.

2. Участки действительной оси между точками 0 и -2 и между -3 и $-\infty$ представляют часть годографа.

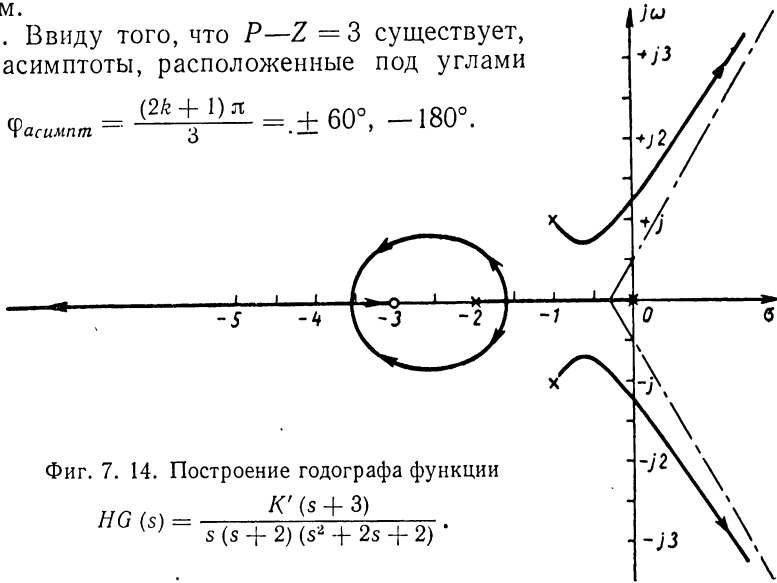
3. Имеется четыре годографа. В этом случае участок действительной оси от -3 до $-\infty$ не образует одного годографа. Скорее всего он представляет часть двух годографов, потому что оба конца этого

годографа являются нулями, один из них заканчивается в точке -3 , а другой — в отрицательной бесконечности.

4. Имеется четыре отдельных годографа, которые начинаются в четырех полюсах передаточной функции разомкнутой цепи. Два из этих годографов обязательно должны совпадать с годографом, расположенным между точкой -3 и отрицательной бесконечностью, и, следовательно, проходить через соответствующие нули передаточной функции, когда коэффициент K' увеличивается бесконечно. Остальные два годографа приближаются к соответствующим асимптотам.

5. Ввиду того, что $P-Z=3$ существует, три асимптоты, расположенные под углами

$$\varphi_{\text{асимпт}} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, -180^\circ.$$



Фиг. 7. 14. Построение годографа функции

$$HG(s) = \frac{K'(s+3)}{s(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

6. Начальная точка этих асимптот соответствует

$$\sigma_c = \frac{-4+3}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Результаты расчета по пунктам 5 и 6 приведены также на фиг. 7. 14.

7. Не вполне очевидно, каким образом годографы, начинающиеся в комплексных полюсах, поворачиваются с увеличением коэффициента усиления. Конечно, эту информацию можно легко получить, проверив несколько контрольных точек вокруг комплексного полюса и проверив угол сдвига фаз 180° . Однако более быстрый способ состоит в нахождении угла отклонения, что осуществляется по следующему вспомогательному способу.

7. А. *Вычисление угла отклонения годографа для комплексных полюсов.* Этот способ требует только определения угла сдвига фаз под влиянием векторов, начинающихся в точках, соответствующих критическим частотам (кроме критической частоты, рассматриваемой в данном примере) для контрольной точки, расположенной очень

близко с комплексным полюсом. Тогда угол отклонения будет равен разнице между суммарным фазовым углом и 180° . Для иллюстрации рассмотрим случай, когда требуется найти угол отклонения φ_d для комплексного полюса, расположенного в точке $(-1 + j1)$. Для контрольной точки, расположенной недалеко от комплексного полюса, измеряют углы, связанные с каждым вектором и приравнивают их к 180° . Уравнение углов приобретает следующую форму:

$$\underline{-\angle s - \angle s + 2 - \angle s + 1 + j1 + \angle s + 3 - \varphi_d = 180^\circ}, \quad (7.36)$$

Определено по спиральному лекалу

где φ_d означает угол вектора, начинающегося в комплексном полюсе до рассматриваемой контрольной точки. Угловое перемещение для члена, отмеченного скобкой в предыдущем уравнении, находится при помощи спирального лекала. Принимая во внимание наличие нуля, здесь вновь дается описание порядка расчета для случая, который раньше не встречался. Следовательно:

1. Планку спирального лекала устанавливают так, чтобы она совпадала с нулевой отметкой на диске, а ось шарнира устанавливают в точке $(-1 + j1)$ или очень близко к этой точке.

2. Планку перемещают так, чтобы она проходила через полюс в начале координат. Затем диск закрепляют и поворачивают планку до горизонтального положения.

3. Планку спирального лекала устанавливают таким образом, чтобы она совпадала с полюсом в точке $(-1 - j1)$. Затем диск закрепляют и вновь планку поворачивают в горизонтальное положение.

4. Планку устанавливают по полюсу в точке -2 , диск закрепляют и планку поворачивают в горизонтальное положение.

5. Операция производится в обратном порядке при сложении угла опережения, связанного с нулем. Следовательно, измерение начинают с установления планки в горизонтальном положении по предыдущей стадии, закрепляют диск и затем поворачивают планку против часовой стрелки до нуля в точке -3 . Это дает отсчет по шкале диска около 116° или -244° .

Этот результат вводится в уравнение (7.36), что дает $-244^\circ - \varphi_d = 180^\circ$, откуда следует, что $\varphi_d = -64^\circ$. Таким образом, годограф, начинающийся в полюсе в точке $(-1 + j1)$, отклоняется вправо по направлению вниз. Получив эту информацию, затем исследуют другие точки, которые удовлетворяют фазовому критерию.

8. *Окончательное построение годографа при помощи спирального лекала.* Когда угол отклонения известен и были найдены некоторые последующие точки, нетрудно определить, что два годографа, начинающиеся в комплексных полюсах, перемещаются в сторону асимптот, расположенных под углом $\pm 60^\circ$, как показано на фиг. 7.14. Поэтому необходимо проследить соответственно пункту 7, что остальные годографы, начало которых лежит в точках действительных полюсов, должны отходить от действительной оси, перемещаться влево в комплексную плоскость и вновь встречаться несколько позади

точки —3. Все это легко определяется при помощи спирального лекала; результаты измерения приведены на фиг. 7. 14.

Проверка кривой показывает, что существует значение коэффициента K' , за пределами которого система становится абсолютно неустойчивой. Применение изложенного выше порядка расчета позволяет определить это значение коэффициента $K' = 0,19 (0,1) (5)^3 = 2,4$.

Пример 7. 3. Рассмотрим другую систему с передаточной функцией разомкнутой цепи

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s^2+2s+5)},$$

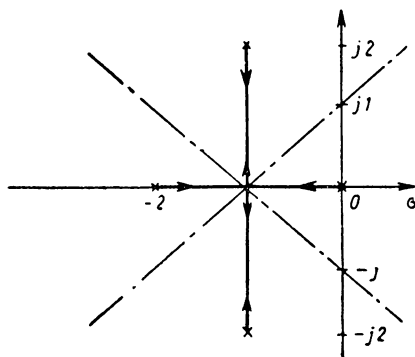
которая по форме сходна с передаточной функцией примера 7. 2, за исключением того, что здесь нет конечных нулей. Следовательно, единственный участок действительной оси, совпадающий с годографом, лежит между точками 0 и —2. Ввиду того, что $P - Z = 4$ теперь будем иметь четыре асимптоты с направлениями, определяемыми

$$\begin{aligned} \varphi_{асимпт} &= \frac{2k+1}{4} \pi = \\ &= \pm 45^\circ, \pm 135^\circ. \end{aligned}$$

Асимптоты пересекаются в точке $\sigma_c = \frac{-4}{4} = -1$. Кроме того,

комплексные полюса расположены симметрично относительно действительных полюсов, вследствие чего вертикальная линия между двумя комплексными полюсами (фиг. 7. 15). Совершенно очевидно, что любая точка этой линии удовлетворяет фазовому критерию. Если комплексные корни находились немного вправо или влево от геометрического места точек, показанных на фиг. 7. 15, то не было бы вертикальной прямой годографа.

Для окончательного построения годографа системы необходимо найти ответ на один важный вопрос. Где годографы, начинающиеся в четырех полюсах, отходят от части годографа, показанной на фиг. 7. 15? Нетрудно показать, что вполне обоснованно предположить о расхождении друг от друга годографов из полюсов в начале координат и точке —6 и что они совпадают в точке —1, а затем расходятся вдоль вертикальной части годографа. Кроме того, можно аналогично ожидать, что годографы, которые начинаются в комплексных полюсах, первоначально проходят вдоль того же самого вертикального годографа. Итак, положение годографов определяется тем, что два годографа сближаются друг с другом в верхней части вертикальной прямой годографа на фиг. 7. 15, а также в ее нижней части. Отсюда следует, что два годографа совпадают в какой-то точке каждой

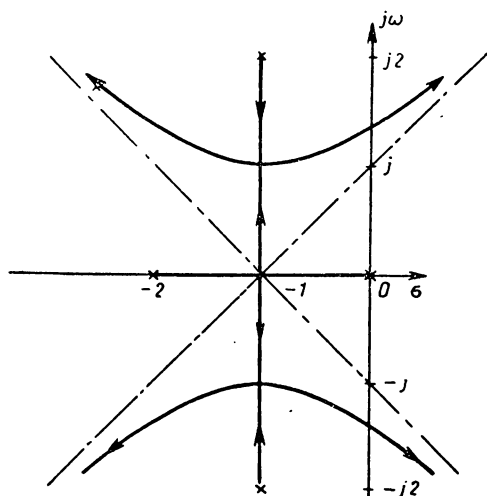


Фиг. 7. 15. Асимптоты и прямолинейная часть годографа функции

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s^2+2s+5)}.$$

половины вертикального годографа и затем расходятся и смещаются в сторону соответствующих асимптот при дальнейшем увеличении коэффициента усиления. Хотя для нахождения этой точки пересечения существуют аналитические методы, порядок определения не является простым. Эту точку можно более быстро найти путем проверки фазового угла по способу последовательного приближения при помощи спирального лекала.

Эта проверка была выполнена для рассматриваемого примера и окончательные результаты нанесены на фиг. 7. 16.



Фиг. 7. 16. Построение полного годографа функции

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s^2+2s+5)}$$

Пример 7. 4. Заслуживает внимания изучение измененного годографа фиг. 7. 16, что приводит к смещению комплексных полюсов передаточной функции, приведенной в примере 7. 3, таким образом, что каждый полюс разомкнутой цепи расположен на одинаковом расстоянии от точки пересечения асимптот. Для удовлетворения этого условия комплексные полюса необходимо переместить в места, где они находились в случае примера 7. 2. Тогда передаточная функция разомкнутой цепи приобретает вид

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

На фиг. 7. 17 показан соответствующий годограф. Заметим, что все четыре годографа, начинающиеся в полюсах передаточной функции разомкнутой цепи, сближаются к точке пересечения вдоль направлений, расположенных под углом 90° , причем они отклоняются вдоль новых направлений под углом 45° относительно первоначального направления. В точке $s = -1$ встречается корень с кратностью 4. Порядок кратности соответствует порядку характеристического уравнения. В подобных случаях годограф состоит только из прямых линий. В дальнейшем будет более подробно рассмотрен общий критерий определения углов кривой нарастания и отклонения при кратных корнях.

Углы отклонения и нарастания годографа вблизи кратного корня характеристического уравнения. Для простоты сосредоточим свое внимание первоначально на случае, когда два годографа сходятся в какой-то точке на действительной оси и затем расходятся при

дальнейшем увеличении коэффициента усиления разомкнутой цепи. Для экономии иллюстрации вернемся к примеру, изображенному на фиг. 7. 11, где показано, что корни характеристического уравнения мигрируют из полюсов передаточной функции разомкнутой цепи, расположенных в начале координат и в точке -2 , и затем расходятся в точке $\sigma_b = -0,9$. Кривая показывает, что эта точка расхождения находится вдоль линий отклонения, которые перпендикулярны с направлением кривой нарастания. Проверку этого результата легко осуществить, если передаточную функцию разомкнутой цепи написать в таком виде, чтобы было очевидно значение коэффициента усиления, которое обуславливает наличие двойного корня в точке $(-0,9)$. Обозначая этот коэффициент усиления K_0 , можно написать следующее выражение для передаточной функции разомкнутой цепи:

$$HG(s) = \frac{K_0 + \Delta K}{s(s+2)(s+6)}. \quad (7.37)$$

Соответствующее выражение для характеристического уравнения будет

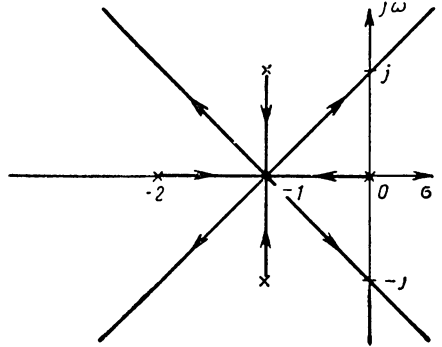
$$[s(s+2)(s+6) + K_0 + \Delta K] = 0. \quad (7.38)$$

Преимущество подобных выражений совершенно очевидно. Подставив $\Delta K = 0$, получаем решение характеристического уравнения с двойным корнем, расположенным в точке $(-0,9)$. Информацию об отклонении годографа от двойного корня можно получить при положительном приращении значения коэффициента K_0 ; при отрицательном приращении этого коэффициента можно получить аналогичную информацию относительно возрастающей ветви кривой. В этой связи можно даже передаточную функцию разомкнутой цепи выразить в еще более удобной форме, если часть уравнения (7. 63), заключенную в скобках, заменить на полином, образованный произведением трех корней, соответствующих значениям коэффициента усиления K_0 . Два из этих трех корней будут, конечно, расположены в точке пересечения, а третий корень — на годографе слева от точки (-6) ; как показано на фиг. 7. 11. Обозначим этот корень через r_3 и двойной корень через r_0 , тогда уравнение (7. 38) можно написать в другом виде

$$(s + r_0)^2 (s + r_3) + \Delta K = 0. \quad (7.39)$$

Перегруппировка членов дает

$$\frac{\Delta K}{(s + r_0)^2 (s + r_3)} = -1. \quad (7.40)$$

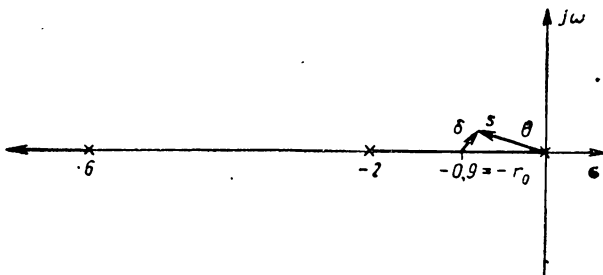


Фиг. 7. 17. Построение годографа функции

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+2)(s^2+2s+2)},$$

Уравнение (7.40) можно теперь рассматривать, как измененную передаточную функцию разомкнутой цепи с полюсами, которые являются корнями характеристического уравнения при $\Delta K = 0$. Следует заметить, что когда ΔK приобретает положительное значение, тогда годографы удаляются от двойного корня, а при отрицательных значениях годографы приближаются к этой точке.

Ввиду того, что в настоящем примере не возникает сомнений относительно направления кривой возрастания около двойного корня, сосредоточим свое внимание только на положительном приращении коэффициента усиления. На фиг. 7.18 показано предполагаемое произвольное направление годографа, когда он удаляется



Фиг. 7.18. Определение угла отклонения от двойного корня.

от двойного корня соответственно возрастанию коэффициента усиления ΔK . Соответствующее значение величины s определяется из выражения

$$s = -r_0 + \bar{\delta}, \quad (7.41)$$

где $\bar{\delta} = \delta/\theta$ представляет приращение величины s , обусловленное приращением коэффициента усиления. Представляет интерес рассмотреть угол θ . Совершенно очевидно, он должен иметь такое значение, чтобы годографы при расхождении с действительной осью при ΔK больше нуля занимали такое положение, которое удовлетворяло бы фазовому критерию. Проверка уравнения (7.40) показывает, какое значение угла θ необходимо с целью выполнить требование по фазе при данных условиях. Подстановка уравнения (7.41) в уравнение (7.40) приводит

$$\frac{\Delta K}{[(-r_0 + \bar{\delta} + r_3)(-r_0 + \bar{\delta} + r_0)^2]} = -1.$$

Так как $\bar{\delta}$ ограничено бесконечно малыми значениями около точки $-r_0$, то отсюда следует, что ни амплитуда, ни фаза выражения в левой части последнего уравнения не изменяется под влиянием множителя $-r_0 + \bar{\delta} + r_3$. Следовательно, мы можем написать

$$\frac{\Delta K}{|r_3 - r_0| \bar{\delta}^2} = \frac{\Delta K}{|r_3 - r_0| \delta^2 / 2\theta} = -1$$

или

$$\frac{\Delta K}{|r_2 - r_0| \delta^2 / 2\theta} = 1 \underline{\swarrow -\pi - 2k\pi}, \quad (7.42)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Проверка уравнения (7.42) показывает, что для удовлетворения фазового критерия при $\Delta K > 0$ необходимо

$$-2\theta = -\pi - 2k\pi \text{ или } \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (7.43)$$

где опять $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Для рассматриваемого примера углы отклонения будут равны $\theta = \frac{\pi}{2}$ при $k = 0$ и $\theta = -\frac{\pi}{2}$ при $k = -1$.

Необходимо подчеркнуть, что эти результаты справедливы только для точек, расположенных в непосредственной близости двукратного корня. Уравнение (7.43) перестает быть справедливым, когда точки в плоскости s далеко удалены от двукратного корня в силу простой причины: угловое перемещение под влиянием третьего множителя корня, т. е. $s + r_3$ не будет больше пренебрежимо малым. В действительности, этим объясняется, почему годографы перемещаются вправо, когда точки удаляются от двукратного корня при все больших и больших значениях $\bar{\delta}$.

Для подтверждения результатов, изображенных на фиг. 7.17, можно применить тот же способ. Вследствие симметрии становится очевидно, что полюс кратности 4 встречается в точке $-1; 0$. Обозначив кратный корень $-r_0$ и поступая в дальнейшем, как изложено выше, получаем измененное выражение передаточной функции разомкнутой цепи

$$\frac{\Delta K}{(s + r_0)^4} = 1 \underline{\swarrow \begin{matrix} \pm (2k + 1)\pi & \text{при } \Delta K > 0 \\ \pm 2k\pi & \text{при } \Delta K < 0 \end{matrix}}, \quad (7.44)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ Если вновь предположить, что отклонение от кратного полюса происходит вдоль пути, описанного выражением $s = -r_0 + \bar{\delta}$ при ΔK больше нуля, то придем к следующему результату:

$$\frac{\Delta K}{\delta^4 / 4\theta} = 1 \underline{\swarrow - (2k + 1)\pi}$$

при ΔK больше нуля.
Отсюда

$$-4\theta = -(\pi + 2k\pi).$$

Поэтому

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ при } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В рассматриваемом случае будем иметь $\theta = \frac{\pi}{4}$ при $k = 0$; $\theta = \frac{3}{4}\pi$ при $k = 1$; $\theta = -\frac{1}{4}\pi$ при $k = -1$; $\theta = \frac{5}{4}\pi$ при $k = +2$.

Дальнейшие значения k не требуются, так как они не дают дополнительной информации. Для определения правильности значения углов кривой нарастания, которые показаны на фиг. 7. 17 (они были определены в данном примере на основании других соображений), необходимо просто ΔK придать отрицательное значение. Отсюда

$$\frac{-\Delta K}{(s+r_0)^4} = -1 = \underline{1/-2k\pi}.$$

Соответственно отрицательному значению коэффициента усиления фазовый критерий будет $-4\theta = -2k\pi$ или $\theta = k\frac{\pi}{2}$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следовательно, $\theta = 0$ при $k = 0$; $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ при $k = -1$; $\theta = +\frac{1}{2}\pi$ при $k = +1$ и $\theta = \pi$ при $k = 2$.

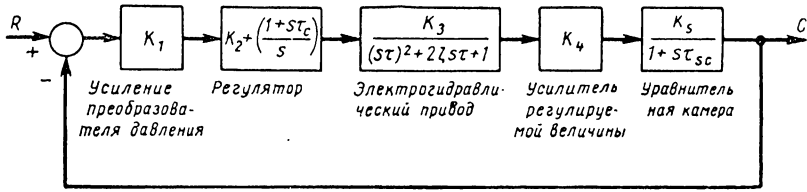
Интересно отметить, что в данном примере уравнения для двух углов кривой нарастания и отклонения справедливы также для точек в плоскости s , которые достаточно удалены от места расположения кратного полюса. Причина лежит в том, что в выражении передаточной функции нет других множителей [см. уравнение (7. 44)], которые могут обычно влиять на сдвиг фаз при значениях s , удаленных от точки кратного значения. Это делает даже более очевидным, почему годографы в подобном случае состоят только из прямых линий.

7. 7. ХАРАКТЕРИСТИКА СИСТЕМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Одно из важных свойств корневого метода при анализе динамики систем управления состоит в том, что характеристика во временной области определяется только на основании заданных параметров системы. В действительности характер реакции системы может быть точно установлен даже без вычисления выражения для полного решения во времени. Необходимо знать только расположение корней характеристического уравнения на плоскости s , что можно точно определить прежде всего по корневому методу. Это прямо противоположно частотному методу, когда динамическая характеристика во временной области обычно аппроксимируется через предельные значения, например, предельный угол сдвига фаз и критический коэффициент усиления. Хотя корневой метод дает более точное описание переходного процесса, следует заметить, что это делается не за счет уменьшения информации о частотной характеристике. Наоборот, можно получить большую информацию о частотной характеристике. Например, данные, касающиеся ширины полосы частот замкнутой системы, могут быть получены непосредственно на основании известных корней характеристического уравнения, которые определяются по годографу системы. Однако первоначально рассмотрим способ

нахождения решения во временной области, зная годограф системы. Обратим внимание на два случая: на систему управления с единичной обратной связью и на системы, у которых в цепи обратной связи включены фильтры.

Системы с единичной обратной связью $H(s) = 1$. Рассматриваемая система представляет высокоскоростную аэродинамическую трубу. Правильный расчет регулятора подобной системы часто зависит от анализа, описание которого дано ниже. Упрощенная структурная схема для системы регулирования давления показана на фиг. 7. 19. Управляющее вычислительное устройство предназначено для создания пропорционального плюс интегрального выходного сигнала. Конечно, пропорциональный сигнал должен поддер-



Фиг. 7. 19. Структурная схема системы регулирования давления в сверхзвуковой аэродинамической трубе:

K — коэффициент усиления; τ — постоянная времени в сек.

живать требуемый уровень выходной величины, в данном случае давление, в то время как интегрирующее звено способствует поддержанию этого уровня на требуемом значении во времени.

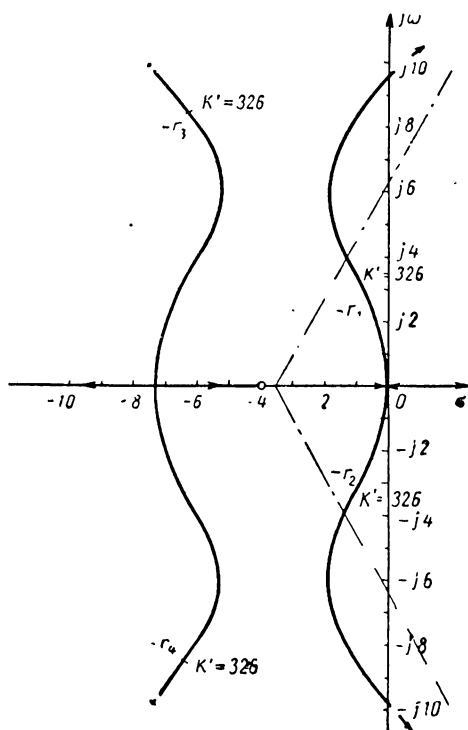
Предположим, что передаточная функция разомкнутой цепи системы, изображенной на фиг. 7. 19, после введения параметров системы будет иметь вид

$$HG(s) = \frac{K'(s + 4)}{s(s + 0,16)(s^2 + 14,6s + 149)} \tag{7. 45}$$

Применив корневой метод, найдем полную характеристику во времени для камеры давления s при реакции на нормализованную ступенчатую входную команду, когда K' равняется 326. Метод решения состоит в нахождении годографа по уравнению (7.45), затем в определении места расположения четырех корней на этих годографах соответственно заданным значениям коэффициента усиления разомкнутой цепи и, наконец, в разложении в ряд дробей передаточной функции замкнутой цепи с целью осуществления обратного преобразования, т. е. получения характеристики во времени.

Ввиду того, что уравнение (7. 45) идентично по форме с передаточной функцией разомкнутой цепи, приведенной в примере 7. 2, пропустим описание порядка нахождения годографов, которые изображены на фиг. 7. 20. Для определения значительной части годографа, которая отклоняется от комплексных полюсов, полезно

использовать угол отклонения. Было найдено, что этот угол равен -53° . Определение этой части годографа позволяет установить, что годограф мигрирует к действительной оси или по направлению к асимптотам. Вследствие этого облегчается определение остальной части годографа. С целью найти четыре особых корня, расположенных на четырех годографах, которые являются решениями характеристического уравнения при $K' = 326$, необходимо выбрать контрольные



Фиг. 7. 20. Построение годографа для системы, схема которой показана на предыдущей фигуре.

точки на годографах и вычислить соответствующие значения коэффициента усиления. Для этого необходимо повторить несколько раз приближение при заданном значении K' . В этом лежит недостаток корневого метода; он не позволяет ясно определить коэффициент усиления разомкнутой цепи, что возможно по логарифмическим частотным характеристикам. Однако по сравнению с исключительными свойствами корневого метода это можно рассматривать как несущественный фактор. На фиг. 7. 20 особо показаны эти четыре точки на каждом годографе соответственно заданному коэффициенту усиления. Напомним, что для нахождения точки на годографе при заданном коэффициенте K' необходимо построить столько годографов, сколько имеется корней характеристического уравнения, потому что каждый годограф дает один корень. В нашем примере имеется четыре годографа,

но исследование производится только на двух годографах, так как корни, представляющие интерес для определения коэффициента усиления, являются комплексными сопряженными корнями. Задержимся немного на этом случае и рассмотрим значение результатов, показанных на фиг. 7. 20. Эти годографы были получены очень просто на основании передаточной функции разомкнутой цепи при соблюдении фазового критерия Эванса. Последующее применение амплитудного критерия позволяет определить для любой точки годографа значение коэффициента усиления разомкнутой цепи, где эта точка становится корнем результирующего характеристического уравнения. Но характеристическое уравнение

всегда связано с замкнутой цепью и на самом деле корни этого уравнения точно описывают реакцию системы¹.

Следовательно, корневой метод на основании передаточной функции разомкнутой цепи позволяет получить точную информацию о переходном процессе замкнутой системы (во временной области). Для изучаемого случая характеристическое уравнение имеет четвертый порядок. Следовательно, имеется четыре годографа, причем каждый из них дает корень характеристического уравнения при данном значении K' . На фиг. 7. 20 указано четыре корня, которые являются решением характеристического уравнения при $K' = 326$; эти корни равны

$$s_{1,2} = -r_{1,2} = -1 \pm j3,25, \text{ при котором } \zeta = 0,29$$

$$\text{и } s_{3,4} = -r_{3,4} = -6,4 \pm j 8,5, \text{ при котором } \zeta = 0,60. \quad (7. 46)$$

Другое обозначение корней через $-r$ было применено для того, чтобы избежать совпадения с обозначениями, применяемыми в передаточной функции замкнутой цепи. Корни уравнения (7. 46) соответствуют полиному четвертой степени. Несомненно следует отметить простоту получения этих корней.

Следовательно, первая стадия вычисления реакции во временной области системы закончена. После этого необходимо определить передаточную функцию замкнутой цепи в виде разложения в ряд дробей. Ввиду того, что функция $HG(s)$ равна единице, передаточная функция замкнутой системы, изображенная на фиг. 7. 19, будет иметь выражение

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K'(s+4)}{s(s+0,16)(s^2+14,6s+149)}}{1 + \frac{K'(s+4)}{s(s+0,16)(s^2+14,6s+149)}}.$$

Упрощение этого выражения дает

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{K'(s+4)}{s(s+0,16)(s^2+14,6s+149) + K'(s+4)}. \quad (7. 47)$$

Полином в знаменателе уравнения (7. 47) представляет характеристическое уравнение системы, корни которого даны на фиг. 7. 20. При любом данном значении K' полином знаменателя может быть заменен произведением множителей корней; если эти корни обозначить $-r_1, -r_2, -r_3, -r_4$, то уравнение (7. 47) можно переписать в другом виде

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{K'(s+4)}{(s+r_1)(s+r_2)(s+r_3)(s+r_4)}. \quad (7. 48)$$

¹ При нулевых начальных условиях.

В случае, когда K' приобретает значение 326, корни будут определяться уравнением (7. 46). Первая пара этих комплексных сопряженных корней соответствует квадратному выражению

$$(s + 1)^2 + (3,25)^2 = s^2 + 2s + 11,6,$$

а вторая пара приводит к

$$(s + 6,4)^2 + (8,5)^2 = s^2 + 12,8s + 113,2.$$

Следовательно, уравнение (7. 48) приобретает вид

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{326(s + 4)}{(s^2 + 2s + 11,6)(s^2 + 12,8s + 113,2)}. \quad (7. 49)$$

Форма этого последнего уравнения позволяет легко превратить его в ряд дробей. В предположении, что входная команда ступенчато изменяется с амплитудой r_0 , нормализованная реакция в области s будет определяться

$$\begin{aligned} \frac{C}{r_0}(s) &= \frac{326(s + 4)}{s(s^2 + 2s + 11,6)(s^2 + 12,8s + 113,2)} = \\ &= \frac{K_0}{s_0} + \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \frac{K_3}{s - s_3} + \frac{K_4}{s - s_4}. \end{aligned} \quad (7. 50)$$

После определения коэффициентов дробей этого ряда можно осуществить обратное преобразование и найти полное решение во временной области. Применение спирального лекала позволяет графически вычислить коэффициенты дробного ряда, что еще раз иллюстрирует полезность этого способа. Окончательное решение во временной области было получено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{c}{r_0}(t) &= 1 - 1,38e^{-t} \cos(3,25t - 9,2^\circ) + \\ &+ 0,328e^{-6,4t} \cos 8,5t. \end{aligned} \quad (7. 51)$$

Кривая по уравнению (7. 51) дана на фиг. 7. 21. При соответствующем изменении уравнения (7. 48) передаточной функции замкнутой цепи может быть придана более удобная форма, которая позволяет исследовать частотную характеристику. Перегруппировка членов приводит к

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{4K'(1 + 0,25s)}{r_1 r_2 r_3 r_4 \left(1 + \frac{s}{r_1}\right) \left(1 + \frac{s}{r_2}\right) \left(1 + \frac{s}{r_3}\right) \left(1 + \frac{s}{r_4}\right)}.$$

В этом случае удобно перегруппировать члены уравнения (7. 49), так как все корни являются комплексными. Следовательно,

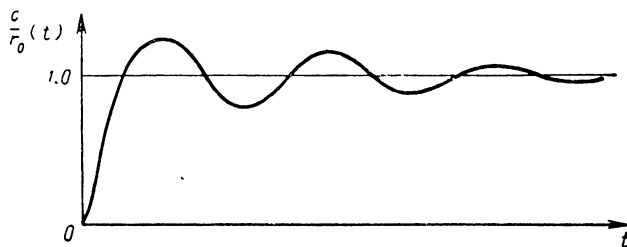
$$\frac{C}{R}(s) = \frac{4K'(1 + 0,25s)}{11,6 \cdot 113,2 \left[\left(\frac{s}{3,4}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0,29}{3,4} s + 1 \right] \cdot \left[\left(\frac{s}{10,6}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0,6}{10,6} s + 1 \right]}.$$

Нетрудно обнаружить, что величина 11,6 (113,2) действительно представляет произведение четырех корней характеристического уравнения при $K' = 326$. Отсюда на основании известной теоремы алгебры, что произведение корней полинома равно его свободному члену, который здесь равняется $4K'$, передаточная функция замкнутой цепи сводится к виду

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{1 + 0,25s}{\left[\left(\frac{s}{3,4}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0,29}{3,4}s + 1\right] \left[\left(\frac{s}{10,6}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0,6}{10,6}s + 1\right]}, \quad (7.52)$$

что может быть легко графически изображено в виде амплитудно-частотной характеристики в логарифмической координатной системе.

Влияние второй пары комплексных сопряженных корней в знаменателе уравнения (7.52) на решение во временной области



Фиг. 7.21. Кривая по уравнению (7.51).

настолько мало, что уравнение (7.52) может быть упрощено для всех практических случаев, а именно

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{1 + 0,25s}{\left(\frac{s}{3,4}\right)^2 + \left[\frac{2 \cdot 0,29}{3,4}\right]s + 1}. \quad (7.53)$$

Вид этого уравнения позволяет определить наличие нуля, так что возникает очень важный вопрос — оказывает ли наличие нуля вредное влияние на динамику системы. Если этого нет, то отсюда становится очевидно, что переходной процесс надлежащим образом описывается через относительный коэффициент демпфирования $\zeta = 0,25$ (которому соответствует максимальное перерегулирование 39%) и через $\omega_n = 3,4$ рад/сек (на основании чего можно определить соответствующее время регулирования). Если это влияние обнаружено, то важно знать степень этого влияния. Для более подробного освещения характера задачи рассмотрим способ определения, как система второго порядка, передаточная функция которой имеет или не имеет нуля, реагирует на единичную входную функцию с амплитудой r_0 . Нормализованное решение относительно регулируемой переменной величины при отсутствии нуля имеет вид

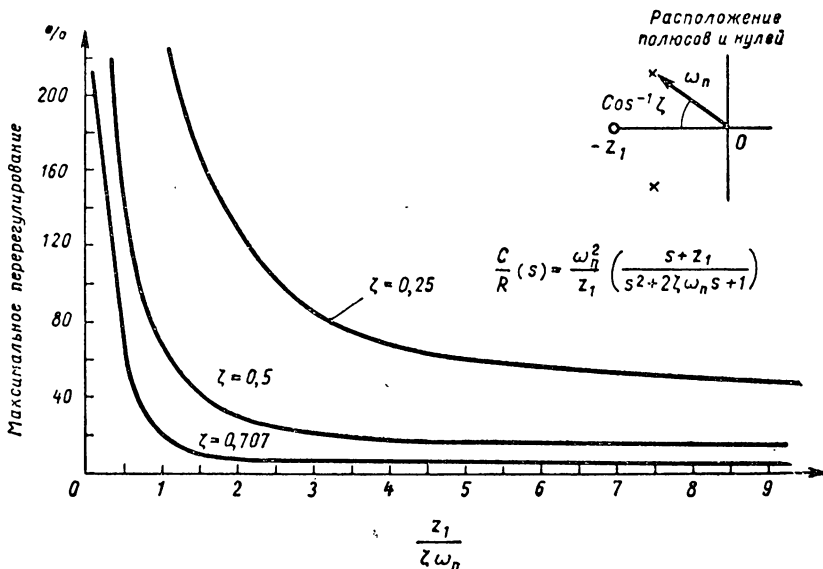
$$\frac{C}{r_0}(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (7.54)$$

Максимальное перерегулирование для подобного случая было точно описано на фиг. 1. 8. При наличии нуля в передаточной функции решение будет

$$\begin{aligned} \frac{C}{r_0}(s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + \frac{s}{z_1}}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)s + 1} = \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{s + z_1}{z_1}. \end{aligned} \quad (7. 55)$$

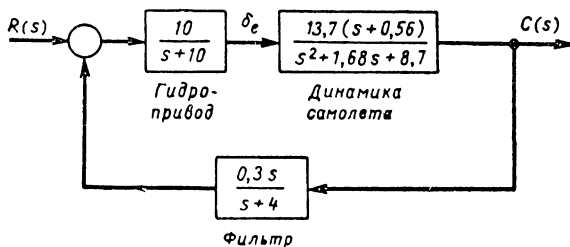
Сравнение уравнений (7. 54) и (7. 55) позволяет выяснить, что наличие нуля в передаточной функции не может изменить относительного коэффициента демпфирования и собственной частоты системы, соответствующей комплексным корням характеристического уравнения. Однако амплитуды колебаний переходного процесса могут влиять или могут не оказывать влияния в зависимости от относительного значения z_1 . Таким образом, изучение последнего уравнения вскрывает, что в случае большого значения z_1 сравнительно со значениями s , которые преобладают в выражении для временного решения (т. е. в части частотного спектра до ω_n преобладающих комплексных корней) влияние будет очень мало, потому что $\frac{(s + z_1)}{z_1}$ мало отличается от единицы. С другой стороны, при условии, когда амплитуда z_1 мала сравнительно с ω_n преобладающих комплексных корней, влияние может быть очень значительным, в зависимости от значения относительного коэффициента демпфирования. На фиг. 7. 22 точно показано, как наличие нуля влияет на максимальное перерегулирование при трех значениях относительного коэффициента демпфирования. Отметим, что по абсциссе нанесены значения $\frac{z_1}{\zeta\omega_n}$, так как обе величины ω_n и ζ содержатся в выражении, определяющем влияние нуля. Кроме того, следует заметить, что максимальное перерегулирование точно описано фиг. 1. 8 для случая, когда $\frac{z_1}{\zeta\omega_n} \geq 10$. Для других случаев необходимо использовать результаты, приведенные на фиг. 7. 22. Следует понять, конечно, что описанные выше влияния автоматически учитываются, когда решение во временной области было найдено в результате применения разложения в ряд дробей $\frac{C}{R}(s)$ с последующим обратным преобразованием Лапласа. Основной вывод из вышеизложенных рассуждений состоит в том, что конфигурация $\frac{C}{R}(s)$ с двумя полюсами и одним нулем может привести к таким результатам, которые будут сильно отличаться от конфигурации с двумя полюсами. Следовательно, результаты, показанные на фиг. 1. 8, необходимо применять с большой осторожностью.

Системы с неединичной обратной связью $H(s) \neq 1$. В качестве примера подобной системы рассмотрим схему, изображенную



Фиг. 7. 22. Изменения максимального перерегуливания при нулевом значении $\frac{C}{R}(s)$.

на фиг. 7. 23. Входной командой является отклонение руля высоты самолета, которая дается пилотом; выходная величина C означает



Фиг. 7. 23. Система управления самолета с фильтром в цепи обратной связи.

скорость подъема, которая подается обратно через опережающий контур с целью уменьшить тенденцию колебаний.

Передаточная функция прямой цепи системы будет иметь вид

$$G(s) = \frac{137(s+0,56)}{(s+10)(s^2+1,68s+8,7)}, \quad (7.56)$$

а передаточная функция цепи обратной связи

$$H(s) = \frac{0,3s}{s+4}. \quad (7.57)$$

Объединяя эти два выражения, получим передаточную функцию разомкнутой цепи системы, т. е.

$$HG(s) = \frac{41,1s(s+0,56)}{(s+4)(s+10)(s^2+1,68s+8,7)}. \quad (7.58)$$

На фиг. 7.24 показан соответствующий годограф. Четыре корня, соответствующие значению $K' = 41$, равны

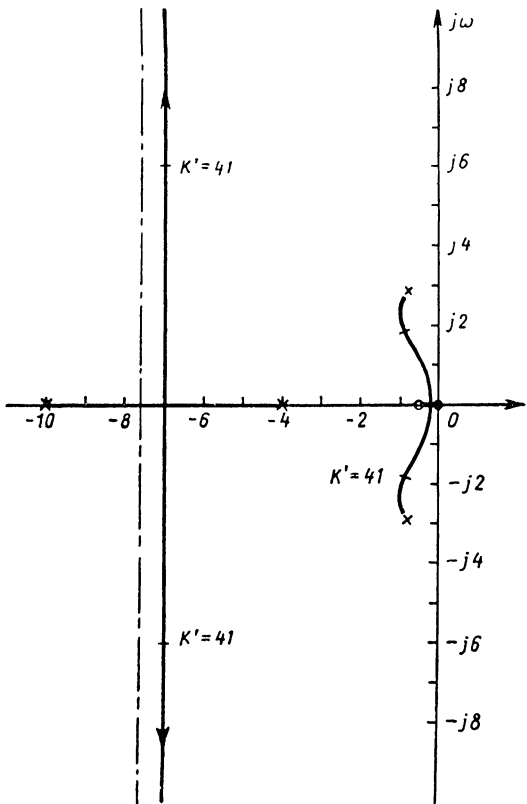
$$s_{1,2} = -r_{1,2} = -0,9 \pm j1,85, \text{ при котором } \zeta = 0,46$$

$$s_{3,4} = -r_{3,4} = -7,0 \pm j6,0, \text{ при котором } \zeta = 0,78.$$

Квадратные множители, связанные с каждой парой комплексных сопряженных корней, будут соответственно равны

$$(s+0,9)^2 + (1,85)^2 = s^2 + 1,8s + 4,23$$

$$(s+7)^2 + (6)^2 = s^2 + 14s + 85.$$



Фиг. 7.24. Построение годографа по уравнению (7.58), характеризующему систему фиг. 7.23.

Когда функция обратной связи отличается от единицы, тогда передаточная функция замкнутой цепи будет иметь выражение

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{G(s)}{1+HG(s)}. \quad (7.59)$$

Введение уравнений (7.56) и (7.57) в последнее уравнение и последующее упрощение приводит к выражению

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{137(s+0,56)(s+4)}{(s+4)(s+10)(s^2+1,68s+8,7)+41,1s(s+0,56)}.$$

Отметим наличие дополнительного нуля в числителе передаточной функции замкнутой цепи, которая увеличивается вследствие разницы значений $G(s)$ и $HG(s)$. Обычно окончательный полином в знаменателе представляет характеристическое уравнение и, следовательно, корни легко находятся при коэффициенте усиления $K' = 41$. Поэтому знаменатель можно заменить на квадратные множители, которые были высчитаны выше. Отсюда получаем

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{137(s + 0,56)(s + 4)}{(s^2 + 1,8s + 4,23)(s^2 + 14s + 85)}. \quad (7.60)$$

Теперь можно произвести разложение на дроби и осуществить обратное преобразование Лапласа, которое приводит к характеристике во временной области.

Если уравнению (7.60) придать другую форму, которая более легко поддается частотному анализу, то получим

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{306}{358} \cdot \frac{(1 + 0,25s)(1 + 1,77s)}{\left[\left(\frac{s}{2,06}\right)^2 + \frac{2(0,46)}{2,06}s + 1\right] \cdot \left[\left(\frac{s}{9,21}\right)^2 + \frac{2(0,78)}{9,21}s + 1\right]}. \quad (7.61)$$

Интересно отметить, что теперь произведение корней не равняется больше постоянному множителю, появляющемуся в числителе, как это было в случае системы с единичной обратной связью.

ЗАДАЧИ

7. 1. Система управления характеризуется передаточной функцией разомкнутой цепи со следующим расположением нуля и полюса: нуль в точке -2 , полюсы в точках 0 , -5 .

а) Написать выражение для передаточной функции разомкнутой цепи.

б) Определить те участки действительной оси, которые образуют часть годографа.

7. 2. Система имеет следующую передаточную функцию разомкнутой цепи:

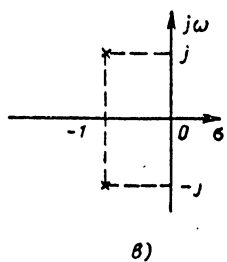
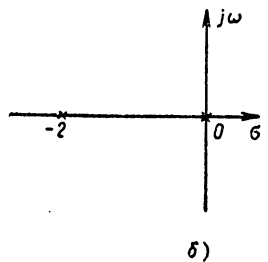
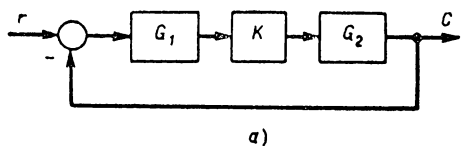
$$HG(s) = \frac{K(1 + 0,4s)}{(1 + s)(1 + 0,25s)(1 + 0,1s)}.$$

а) Построить полный годограф при помощи спирального лекала.

б) Найти значение коэффициента усиления, при котором относительный коэффициент демпфирования, соответствующий комплексным корням, равен $0,5$.

в) Вычислить полное решение во временной области для выходной величины в предположении, что на вход действует единичная входная функция.

7.3. Дана система управления, изображенная на фиг. 7.25. Полюсы и нули функции $G_1(s)$ и $G_2(s)$ расположены так, как показано на фиг. 7.25, б, в.



а) Построить годограф для этой системы, указав все важнейшие данные.

б) При каком значении K эта система становится неустойчивой?

в) При $K = 1$ определить r в зависимости от времени в установившемся режиме, когда $c(t) = 10 \sin 2t$.

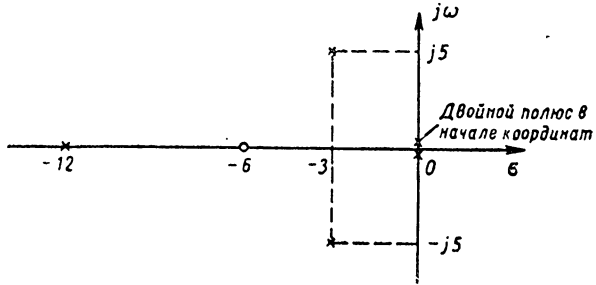
7.4. Система управления имеет передаточную функцию разомкнутой цепи с полюсами и нулями, расположенными так, как указано на фиг. 7.26.

Фиг. 7.25. Структурная схема системы управления и расположение полюсов и нулей.

а) Написать уравнение для передаточной функции разомкнутой системы.

б) Построить общую форму годографа.

в) Пояснить, существует ли какое-либо значение коэффициента усиления, при котором эта система будет абсолютно устойчивой.



Фиг. 7.26. Расположение полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой цепи системы управления с обратной связью.

г) Изменить эту систему путем дополнения компенсации по производной, вследствие чего создается двойной нуль в точке $s = -2$. Построить годограф видоизмененной системы.

д) Пояснить, имеется ли какое-либо значение коэффициента усиления, при котором видоизмененная система будет абсолютно устойчивой.

РАСЧЕТ ПО МЕТОДУ ПОЛЮСОВ И НУЛЕЙ

В основном принципы расчета коррекции одинаковы при осуществлении в частотной области и плоскости s . В любом случае задача состоит в изменении разомкнутой системы с целью достигнуть удовлетворительных характеристик замкнутой системы. Как сообщалось в главе 6, результат коррекции зависит полностью от правильного выбора частот в точках сопряжения асимптотических характеристик затухания. Аналогично в настоящей главе будет показано, что расчет эффективной коррекции в плоскости s также зависит от надлежащего расположения полюсов и нулей. Выбор полюсов передаточной функции разомкнутой цепи должен быть таким, чтобы благоприятно влиять на форму годографа скорректированной системы; этим путем можно изменять в требуемом направлении преобладающие корни характеристического уравнения системы.

Метод расчета в плоскости s создает ряд преимуществ, потому что конструктор имеет дело непосредственно с корнями характеристического уравнения. Он может отказаться от применения предельных параметров для определения динамики системы, что может дать только приближенную информацию. Однако, чтобы не потерять преимуществ метода расчета в плоскости s , важно конструктору твердо усвоить теорию преобразования Лапласа. Например, конструктор должен уметь полностью оценить влияния полюсов и нулей передаточной функции на переходный процесс замкнутой системы. Следовательно, необходимо избегать тенденции идентифицировать динамическую характеристику только по корням характеристического уравнения. Если передаточная функция замкнутой цепи содержит нули, они должны быть учтены в расчете, так как эти нули могут существенно ухудшить динамическую характеристику системы. В связи с этим рекомендуется вспомнить о результатах, изложенных в конце предыдущей главы.

8. 1. ВЛИЯНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ КОРРЕКЦИИ НА ГОДОГРАФ

Часто при разработке системы, когда требуется коррекция из-за элементов, которые были заранее выбраны на основании заданных значений установившегося режима и для создания требуемой мощности выходного сигнала, невозможно получить удовлетворительные

динамические характеристики. Переходный процесс будет либо слишком медленным, либо очень колебательным. Для исправления этих условий может быть применена корректирующая передаточная функция в различных формах, в зависимости от типа разрабатываемой системы и ее порядка. Здесь будут рассмотрены некоторые из этих форм с целью подчеркнуть значение надлежащего расположения критических частот (следовательно, полюсов и нулей) корректирующей передаточной функции для получения удовлетворительных динамических характеристик. В основном это аналогично выбору соответствующих частот точек сопряжения для корректирующих передаточных функций, когда расчет производится полностью в частотной области. Следует напомнить, что успех расчета этих корректирующих контуров зависит от целесообразного выбора частот точек сопряжения, которые ограничены четко определенным диапазоном частотного спектра. Недостаточно тщательный выбор частот точек сопряжения приводит к неудовлетворительному переходному процессу. Подобные же условия имеют место при применении методов расчета в плоскости s . Ниже будет показано, что при неудачном расположении нулей и полюсов корректирующей передаточной функции невозможно осуществить систему с заданными динамическими характеристиками.

В настоящем разделе внимание будет сосредоточено только на выявлении общих взаимосвязей. Рассмотрим главным образом способы изменения годографа по своей форме и направлениям в результате введения полюсов и нулей в передаточные функции корректирующих устройств. Специфические влияния, например, ширины полосы пропускания частот окончательной системы, максимального перерегулирования, времени регулирования и др., соответствующие заданным значениям коэффициента усиления разомкнутой цепи, будут рассмотрены в последующих разделах. Большая часть этого исследования касается систем класса 1 второго и третьего порядков. Кроме того, будут рассмотрены передаточные функции с полюсами и нулями для систем, которые были рассмотрены в главах 2, 3 и 6.

Влияние нуля передаточной функции системы класса 1 второго порядка. На фиг. 8.1, *a* показан годограф некорректированной системы второго порядка, передаточная функция которой имеет вид

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s+p)}. \quad (8.1)$$

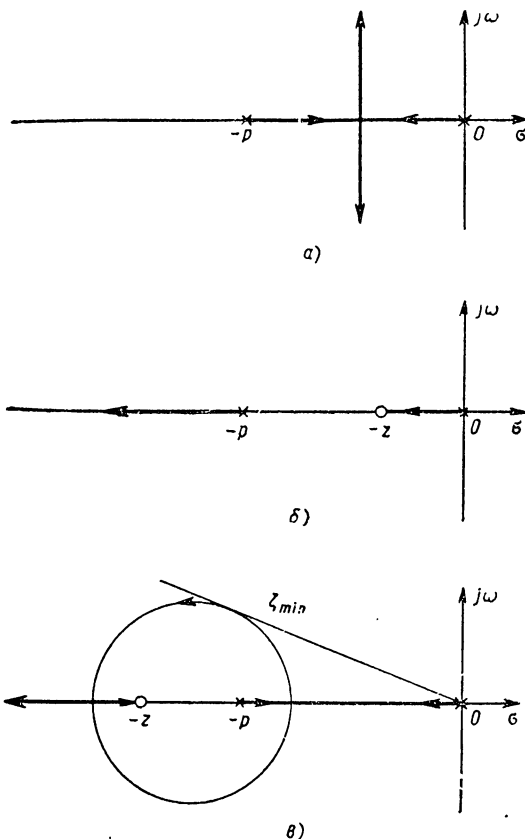
Из данного годографа следует, что нет конечного значения коэффициента усиления, при котором система может стать абсолютно неустойчивой. Однако система может быть относительно неустойчивой, если допустить, что относительный коэффициент демпфирования будет меньше некоторого заданного минимального значения. Хотя существует несколько способов предотвращения подобного положения даже при наличии большого коэффициента усиления, здесь внимание будет сосредоточено на методе демпфирования, пропорционального скорости рассогласования, который был изложен в главе 1 при

анализе во временной области. Теперь мы можем исследовать влияние этого пропорционального регулирования плюс регулирования по производной также в комплексно-частотной области. Напомним, что наличие пропорционального регулирования одновременно с регулированием по производной изменяет передаточную функцию разомкнутой цепи уравнения (8. 1), а именно

$$HG(s) = \frac{K'(s+z)}{s(s+p)}.$$

Возможность изменения в частном случае годографа первоначальной системы зависит от расположения нуля функции системы, в которой осуществляется регулирование, пропорциональное регулируемой величине и ее производной. На фиг. 8. 1, б показано, что в случае $z < p$, т. е. когда ноль находится между координат и точкой $-p$, тогда решение характеристического уравнения второго порядка содержит два отрицательных действительных корня при любом коэффициенте усиления разомкнутой цепи. Практически это означает, что демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования, настолько сильное, что это исключает возможность демпфированных колебаний, независимо от величины коэффициента усиления. На самом деле, когда корень расположен слева от точки $-p$ и достаточно удален от начала координат, тогда система ведет себя так, как будто имеет одну постоянную времени, т. е. она связана с корнем, расположенным на годографе между началом координат и точкой $-z$.

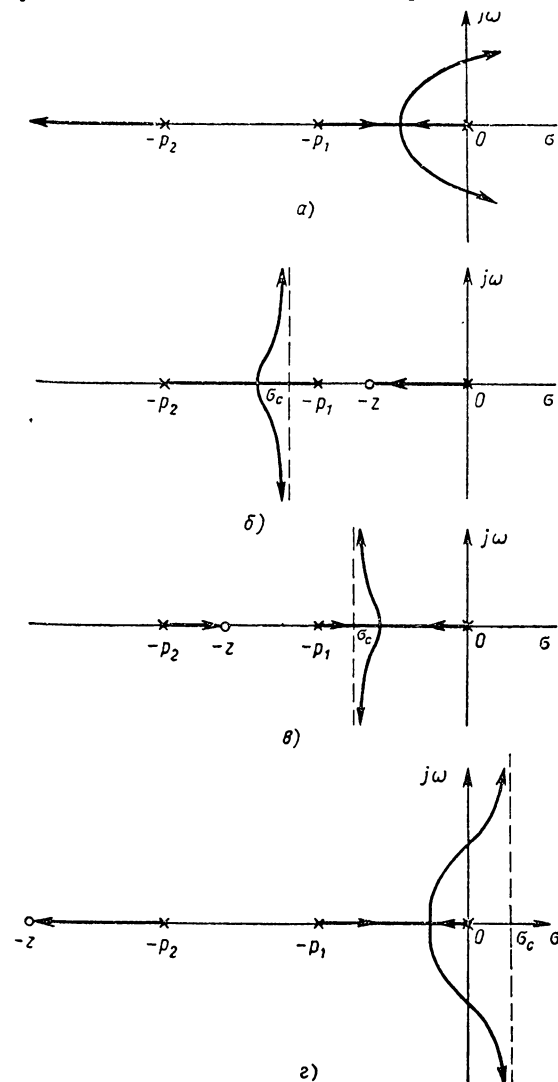
В результате расположения нуля слева от точки p (что означает уменьшение члена, определяющего демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования) годограф приобретает иную форму, как



Фиг. 8. 1. Построение годографа:

а — функции $HG(s) = K'/s(s+p)$; б — функции $HG(s) = K'(s+z)/s(s+p)$, где $z < p$; в — функции $HG(s) = K'(s+z)/s(s+p)$, где $z > p$ (показано не в масштабе).

показано на фиг. 8. 1, в. Заметим, что при этих условиях возможно существование комплексных корней, но теперь минимальное значение



Фиг. 8. 2. Построение годографа:

а — функции $HG(s) = K'/s(s + p_1)(s + p_2)$; б — функции $HG(s) = K'(s + z)/s(s + p_1)(s + p_2)$, где $z < p_1$; в — функции $HG(s) = K'(s + z)/s(s + p_1)(s + p_2)$, где $z > p_1$; г — функции $HG(s) = K'(s + z)/s(s + p_1) \times (s + p_2)$, где $z > p_1 + p_2$ (дано не в масштабе).

относительного коэффициента демпфирования явно ограничено числом больше нуля. Вследствие размещения нуля вблизи или дальше от полюсов в точке $-p$ минимально допустимый относительный коэффициент демпфирования увеличивается или уменьшается. Для конструктора систем управления это имеет большое значение, так как позволяет непосредственно изменять и контролировать допустимое максимальное перерегулирование.

Влияние нуля корректирующей функции системы класса 1 третьего порядка. Для более полной иллюстрации возможности стабилизации и коррекции при помощи регулирования, пропорционального регулируемой величине и ее производной, рассмотрим систему третьего порядка со следующей передаточной функцией разомкнутой цепи:

$$HG(s) = \frac{K'}{s(s + p_1)(s + p_2)} \quad (8.2)$$

На фиг. 8. 2, а показан годограф, соответствующий уравнению

(8. 2). Из рассмотрения годографа следует, что система становится неустойчивой, когда коэффициент усиления увеличивается выше значения, при котором решение характеристического уравнения

дает два чисто мнимых корня. Способ нахождения этого значения коэффициента усиления был описан в предыдущей главе. Вновь рассмотрим частный случай изменения годографа первоначальной системы в зависимости от расположения нулей на примере регулирования, пропорционального регулируемой величине и ее производной. На фиг. 8. 2, б показан новый годограф при измененной передаточной функции

$$HG(s) = \frac{K'(s+z)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

при $z < p_1$; на фиг. 8. 2, в изображен годограф для случая, когда $z > p_1$. Необходимо заметить, что в любом случае наличие нуля так изменяет систему, что она становится абсолютно устойчивой при любых значениях коэффициента усиления разомкнутой цепи. Это означает существенное улучшение системы, у которой коэффициент усиления разомкнутой цепи был определенно ограничен.

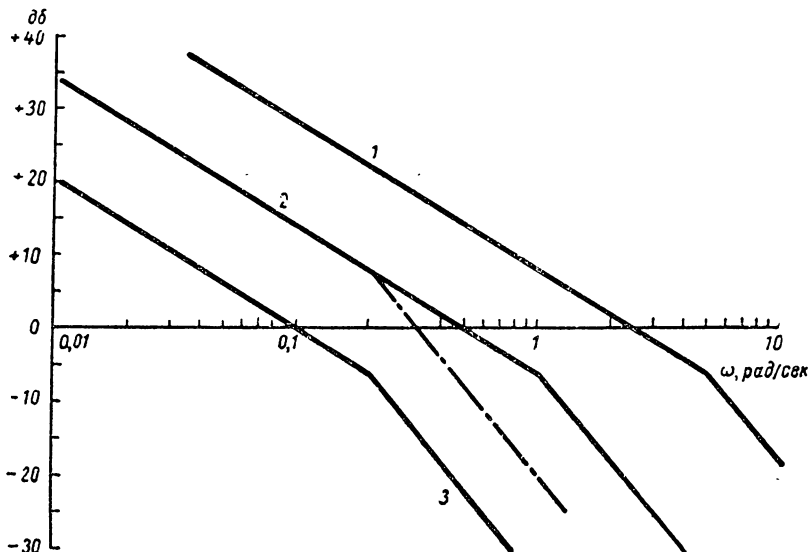
Так как величина нуля у годографа на фиг. 8. 2, в приблизительно в 2 раза больше соответствующей величины нуля скорректированной системы на фиг. 8. 2, б, то следует ожидать, что динамическая характеристика будет несколько отличаться при одинаковом значении коэффициента усиления разомкнутой цепи. Исследование показывает, что для коэффициента усиления, при котором появляются комплексные корни система с годографом на фиг. 8. 2, б будет обладать более высоким относительным коэффициентом демпфирования, чем система с годографом на фиг. 8. 2, в. Этот вывод также вытекает из того факта, что с удалением нуля от начала координат становится меньше член, определяющий демпфирование, пропорциональное скорости рассогласования и, следовательно, переходная функция становится более колебательной при данном коэффициенте усиления. Отсюда не следует заключать, что любое положение нуля будет так изменять годограф, что система станет абсолютно устойчивой при любом усилении. Это справедливо только при условии $z < (p_1 + p_2)$. Когда z превышает сумму $(p_1 + p_2)$, тогда асимптоты $\pm 90^\circ$ годографа будут расположены в правой полуплоскости. Следовательно, система становится неустойчивой при достаточно высоком коэффициенте усиления разомкнутой цепи; фиг. 8. 2, г иллюстрирует это положение.

8. 2. АНАЛИЗ КОРРЕКЦИИ В ПЛОСКОСТИ s ПУТЕМ ОПЕРЕЖАЮЩИХ ИЛИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ КОНТУРОВ

Задача настоящего раздела состоит в том, чтобы показать, как можно рассчитать стандартный опережающий или запаздывающий контур для простой системы второго порядка, исходя из условия, что относительный коэффициент демпфирования остается неизменным. Существенно рассмотреть процедуру коррекции. Рассматриваемый случай системы второго порядка имеет то преимущество, что легко показать влияние характеристики на коэффициент усиления разомкнутой цепи, частоту собственных колебаний системы и время регулирования. Это влияние было изучено в предыдущей главе в частотной

области, теперь же используем эти результаты для того, чтобы установить связь с данными, полученными при анализе по корневому методу. Рассмотрим передаточную функцию разомкнутой цепи первоначальной системы управления с единичной обратной связью

$$G_f(s) = \frac{K'}{s(s + \omega_1)} = \frac{0,5}{s(1 + s)}. \quad (8.3)$$



Фиг. 8. 3. Характеристики демпфирования системы второго порядка класса 1 с коррекцией по опережению и запаздыванию:

1 — система с коррекцией по опережению с одинаковым относительным коэффициентом демпфирования, как у первоначальной системы $G_f G_c(s) = \frac{0,5}{s(s + 2,5)}$; 2 — первоначальная система с функцией

$$G_f = \frac{K'}{s(s + a_1)} = \frac{0,5}{s(s + 1)};$$

3 — система с коррекцией по запаздыванию и с одинаковым относительным коэффициентом демпфирования, как у системы 1; функция

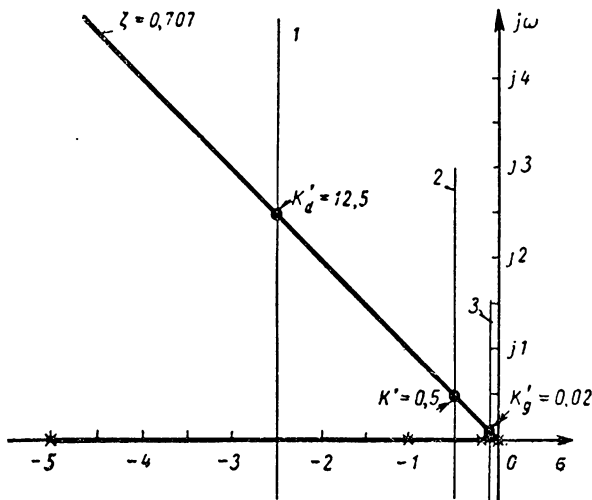
$$G_f G_g(s) = \frac{0,02}{s(s + 0,2)}.$$

Логарифмическая частотная характеристика, соответствующая уравнению (8. 3), показана в виде кривой 2 на фиг. 8. 3. Предельный сдвиг фаз был определен равным $65,5^\circ$, чему соответствует относительный коэффициент демпфирования 0,707, который был получен по данным фиг. 4. 21. На фиг. 8. 4 дана кривая 2, которая представляет годограф по уравнению (8. 3). Точки вдоль годографа, соответствующего коэффициенту усиления $K' = 5$, расположены в точках пересечения ординаты, проходящей через $-0,5$, и радиальных линий, проведенных под углом $\pm 135^\circ$. Из этого годографа следует, что относительный коэффициент демпфирования равен 0,707. Теперь,

когда первоначальная система задана в частотной и комплексной областях, мы можем перейти к расчету коррекции, и сделать сравнительные выводы.

Коррекция при помощи последовательного опережающего контура. Передаточная функция опережающего контура может быть выражена следующим образом:

$$G_c'(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{1 + s\alpha\tau}{1 + s\tau} = \frac{s + \frac{1}{\alpha\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}. \quad (8.4)$$



Фиг. 8. 4. Построение годографа для системы второго порядка класса 1 с коррекцией по опережению и запаздыванию:

1 — система с опережающей коррекцией 1; 2 — первоначальная система $G_f(s) = K'/s(s + 1)$; 3 — система с запаздывающей коррекцией $G_g G_f(s) = K_g'/s(s + 0,2)$.

После введения коэффициента усиления предварительного усилителя, что необходимо для сдвига частотной характеристики при нулевой частоте, уравнение (8. 14) приобретает вид

$$G_c(s) = \alpha \frac{s + \frac{1}{\alpha\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}. \quad (8.5)$$

Отсюда, передаточная функция разомкнутой цепи корректированной системы при помощи опережающего контура будет

$$G_f G_c(s) = \frac{K'\alpha}{s(s + \omega_1)} \cdot \frac{s + \frac{1}{\alpha\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}. \quad (8.6)$$

Для расчета опережающего контура необходимо знать τ и α , которые содержатся в последнем уравнении. Как объяснялось в начале, расчет опережающего контура производится при условии, что величина ζ остается той же, т. е. 0,707; кроме того, порядок системы не меняется (т. е. она имеет второй порядок). Последнее условие можно удовлетворить выбором нуля передаточной функции опережающего контура, равного полюсу неизменной части схемы. Следовательно, выбираем

$$\frac{1}{\alpha\tau} = \omega_1 \quad (8.7)$$

или

$$\frac{1}{\tau} = \alpha\omega_1. \quad (8.8)$$

Введение последнего равенства в уравнение (8.6) приводит к передаточной функции скорректированной разомкнутой цепи второго порядка. Отсюда,

$$G_f G_c(s) = \frac{K'_d}{s(s + \alpha\omega_1)}, \quad (8.9)$$

где K'_d представляет коэффициент усиления, требуемый для получения относительного коэффициента демпфирования, равного заданному значению. Если продолжить расчет при частоте $\omega_1 = 1$ рад/сек и выбрать $\alpha = 5$, то выражение (8.9) приобретет вид

$$G_f G_c(s) = \frac{K'_d}{s(s + 5)}. \quad (8.10)$$

Годограф согласно последнему выражению имеет вид кривой 1 на фиг. 8.4. Значение коэффициента K'_d , которое удовлетворяет требуемому условию относительного коэффициента демпфирования, может быть определено при помощи спирального лекала или же в данном простом случае на основании того, что коэффициент усиления равен произведению расстояния от полюсов в начале координат и в точке -5 до точки пересечения ординаты, проходящей через $-2,5$, и радиальной линии из начала координат под углом $+135^\circ$. Следовательно,

$$K'_d = \sqrt{2} \times 2,5 \times \sqrt{2} \times 2,5 = 12,5.$$

Полное выражение передаточной функции разомкнутой цепи, которое удовлетворяет заданным условиям, будет

$$G_f G_c(s) = \frac{12,5}{s(s + 5)} = \frac{2,5}{s(1 + 0,2s)}. \quad (8.11)$$

Сравнение этого выражения с уравнением (8.3) показывает, что система опережающей коррекции позволяет применять коэффициент усиления в 25 раз выше, хотя обе системы — первоначальная и скорректированная — имеют в точности одинаковый относительный

коэффициент демпфирования. Это означает уменьшение установившейся ошибки, а также возможность увеличения собственной частоты системы, следовательно, уменьшения времени регулирования. Следует обратить внимание на то, что все эти сравнительные свойства непосредственно вытекают из годографа. Например, более быстрое время регулирования становится очевидным из сравнения действительных частей комплексных корней. Для первоначальной системы оно имеет значение — 0,5, а для скорректированной системы соответственно — 2,5. При сравнении значений постоянных времени первоначальная система обладает затуханием переходного процесса в соответствии с постоянной времени 2 сек; скорректированная система характеризуется затуханием, определяемым постоянной времени 0,4 сек. Кроме того, более высокая собственная частота также определяется по годографу, потому что она соответствует расстоянию от начала координат до данного корня характеристического уравнения. Для случая опережающей коррекции собственная частота системы равна

$$\omega_n|_d = \sqrt{2}(2,5) = 3,54 \text{ рад/сек},$$

в то время, как для первоначальной системы она равна

$$\omega_n|_{\text{первонач}} = \sqrt{2}(0,5) = 0,707 \text{ рад/сек}.$$

Отношение собственных частот, как видно, равняется 5 : 1.

Для полноты на фиг. 8. 3 дана кривая 1, которая представляет частотную характеристику по уравнению (8. 11). Следует заметить, что относительный коэффициент демпфирования будет увеличиваться, когда постоянная времени первоначальной системы уменьшена на коэффициент 5 (соответствует α) и коэффициент усиления K' разомкнутой цепи увеличен во столько же раз. Дополнительное увеличение коэффициента усиления K' требует сохранения первоначального значения относительного коэффициента демпфирования.

Коррекция при помощи последовательного запаздывающего контура. Теперь проведем расчет запаздывающего контура, примененного для той же коррекции, что и выше. Передаточную функцию стандартного запаздывающего контура можно выразить следующим образом:

$$G_c(s) = \frac{1 + s\tau}{1 + sa\tau} = \frac{1}{a} \cdot \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{a\tau}}. \quad (8. 12)$$

Тогда передаточная функция разомкнутой цепи скорректированной системы будет иметь вид

$$G_f G_c(s) = \frac{K'}{s(s + \omega_1)} \cdot \frac{s + \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{a\tau}}. \quad (8. 13)$$

Применяя рассматриваемую коррекцию при условии, что система не меняет своего порядка, приходим к следующему выбору постоянной времени запаздывающего контура

$$\frac{1}{\tau} = \omega_1. \quad (8.14)$$

Сравнение этого равенства с равенством (8. 8) показывает, что выбранная постоянная времени для запаздывающего контура больше значения постоянной времени опережающего контура при данной частоте. Этот результат совпадает с выводами, сделанными в главе 6, при обсуждении расчета запаздывающего контура в частотной области. Введение равенства (8. 14) в уравнение (8. 13) позволяет упростить передаточную функцию разомкнутой цепи системы второго порядка

$$G_f G_c(s) = \frac{\frac{K'}{\alpha}}{s \left(s + \frac{\omega_1}{\alpha} \right)}. \quad (8.15)$$

Полагая в последнем уравнении $K' = 0,5$, $\alpha = 5$ и $\omega_1 = 1$, получим

$$G_f G_c(s) = \frac{0,1}{s(s+0,2)} = \frac{0,5}{s(1+5s)}. \quad (8.16)$$

Вновь следует заметить, что первоначальный коэффициент демпфирования не может быть сохранен, когда коэффициент усиления был изменен в результате коррекции по запаздыванию. В действительности, частотная характеристика, соответствующая уравнению (8. 16), показывает, что асимптотическая частотная характеристика пересекает ось абсцисс (0 дБ) с наклоном — 12 дБ/октава; отсюда следует, что относительный коэффициент демпфирования меньше требуемого значения 0,707 и тем самым необходимо дальнейшее уменьшение коэффициента усиления. Конечно, непосредственное определение по годографу представляет наиболее простой способ нахождения коэффициента усиления, требуемого для получения относительного коэффициента демпфирования, равного 0,707. Годограф по уравнению (8. 15) дан в виде кривой 3 на фиг. 8. 4. Коэффициент усиления, соответствующий значению $\xi = 0,707$, равен $K'_g = \sqrt{2}(0,1) \times \times [\sqrt{2}(0,1)] = 0,02$. Тогда требуемая передаточная функция скорректированной разомкнутой цепи с запаздывающим контуром будет

$$G_f G_c(s) = \frac{0,02}{s(s+0,2)} = \frac{0,1}{s(1+0,5s)}. \quad (8.17)$$

Соответствующая характеристика затухания по этому уравнению имеет вид кривой 3 на фиг. 8. 3. Определение предельного сдвига фаз этой кривой дает значение 64,8°, чему соответствует относительный коэффициент демпфирования, равный 0,707.

Хотя максимальное перерегулирование при единичной входной функции будет одинаково, как в случае опережающей коррекции, годограф скорректированной системы по запаздыванию позволяет установить, что время регулирования будет значительно больше из-за постоянной времени, которая равна в данном случае 10 сек. Этот вывод связан также с тем, что собственная частота скорректированной системы с запаздывающим контуром значительно меньше; из годографа следует, что она равна $\omega_n|_g = \sqrt{2}(0,1) = 0,14 \text{ рад/сек}$. Это значительно меньше 3,54 рад/сек, полученного для случая коррекции при помощи опережающего контура.

На основании результатов сравнения становится ясно, что корневой метод анализа позволяет очень глубоко выявить влияние корректирующих контуров на динамику систем. В действительности, этот метод обладает не только преимуществом более быстрого определения, но также более полного описания, чем частотные методы.

Обычно применение запаздывающего контура допускает увеличение коэффициента скорости, но в то же время предотвращает возможность возникновения сильно колебательной характеристики. Этот вывод не вытекает непосредственно из вышеизложенных обсуждений, потому что не был применен порядок расчета стандартного запаздывающего контура (см. разделы 6.5 и 8.3). Наша задача состояла здесь только в том, чтобы показать общее влияние запаздывающего корректирующего контура на уменьшение ширины полосы пропускания частот с вытекающим отсюда увеличением времени регулирования.

8.3. РАСЧЕТ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО КОНТУРА В ПЛОСКОСТИ s

Запаздывающий корректирующий контур часто применяется в тех случаях, когда желательно улучшить характеристику установившегося режима путем увеличения коэффициента усиления при одновременном сохранении удовлетворительной динамической реакции. Порядок расчета подобного контура на основании частотных методов был подробно освещен в главе 6. Теперь поставим себе задачу, как можно получить те же результаты при применении корневого метода. Как и раньше, мы можем опять сочетать результаты, полученные двумя методами. Принимая во внимание, что прямая коррекция по запаздыванию находит наиболее широкое применение для системы класса 0 и 1, сосредоточим свое внимание на системе класса 1. Напомним, что способность запаздывающего контура создавать требуемую коррекцию связана с его частотной характеристикой в той части частотного диапазона, где кривая коэффициента усиления скорректированной системы пересекает ось абсцисс (0 дб). Чтобы избежать значительного сдвига по фазе при этой ширине полосы частот, частоты точек сопряжения были выбраны сравнительно малыми относительно других ненулевых критических частот для данной системы. При корневом методе следует исходить из тех же

самых соображений при расчете запаздывающего корректирующего контура. Для иллюстрации этих принципов на основании выводов, сделанных при изучении корневого метода, рассмотрим систему третьего порядка класса I, неизменная часть схемы которой описывается передаточной функцией разомкнутой цепи

$$G_f(s) = \frac{K_v}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} = \frac{K'}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)s}, \quad (8.18)$$

где

$$K' = \frac{K_v}{\tau_1\tau_2}. \quad (8.19)$$

Далее предположим, что значения τ_1 , τ_2 и K_v одинаковы как и в случае соответствующего переходного процесса. Однако трудность состоит в том, что коэффициент скорости слишком мал, так что желательно его увеличить. Совершенно ясно, что нельзя увеличить коэффициент усиления до такого значения, при котором получается требуемый коэффициент скорости, так как это вредно влияет на динамику системы. Применение запаздывающего корректирующего контура обусловлено необходимостью найти компромисс между этими двумя противоположными факторами. Использование выражения для передаточной функции запаздывающего корректирующего контура согласно уравнениям (8.12) — (8.18) позволяет определить передаточную функцию разомкнутой цепи скорректированной системы с запаздывающим контуром. Отсюда имеем

$$G_f G_c(s) = \frac{K'_c}{s(s + \rho_1)(s + \rho_2)} \cdot \frac{s + z_c}{s + \rho_c}, \quad (8.20)$$

где

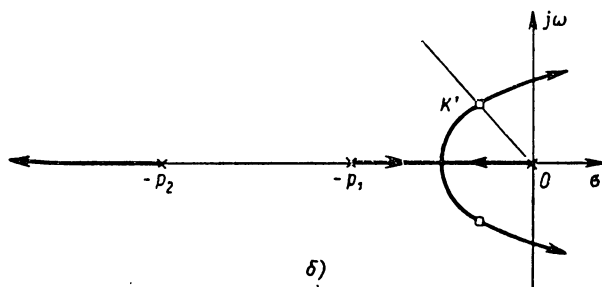
$$K'_c = \frac{K_v}{\tau_1\tau_2} \cdot \frac{1}{\alpha} \quad (8.21)$$

и

$$\rho_1 = \frac{1}{\tau_1}; \quad \rho_2 = \frac{1}{\tau_2}; \quad \rho_c = \frac{1}{\alpha\tau}; \quad z_c = \frac{1}{\tau}; \quad \alpha = \frac{z_c}{\rho_c}.$$

Прежде чем начать описывать, как можно осуществить увеличение коэффициента усиления при помощи корневого метода, кратко рассмотрим, как этого можно достигнуть на основании частотного метода. Заметим, что логарифмическая амплитудно-частотная кривая (фиг. 8.5) возрастает с увеличением коэффициента усиления, но, несмотря на это, свойство затухания запаздывающего корректирующего контура при частоте выше $\alpha\omega_g$ восстанавливает эту часть характеристики затухания скорректированной системы в ее первоначальное положение в той части частотного спектра, которая следует после частоты $\alpha\omega_g$. Конечно, существенное влияние состоит в том,

что положение участка характеристики при очень низкой частоте с наклоном — 6 дБ/октава смещается вверх и, следовательно, приводит к увеличению коэффициента скорости. Чтобы понять, как это увеличение создается при использовании плоскости s , рассмотрим фиг. 8. 5, б, где построен годограф первоначальной системы. Квадратиками на годографе обозначены значения K' , которые дают требуемую динамическую реакцию. Изучение



Фиг. 8. 5.

a — частотные характеристики системы с корректирующим запаздывающим контуром;
б — построение годографа для функции

$$G_f = \frac{K'}{s(s + p_1)(s + p_2)}.$$

Значение K' ограничивает требуемую динамическую реакцию: *1* — характеристика демпфирования первоначальной системы; *2* — характеристика демпфирования при увеличенном усилении; *3* — скорректированная по запаздыванию система с увеличенным усилением; *4* — характеристика демпфирования с коррекцией по запаздыванию.

уравнений (8. 19) и (8. 20) показывает, что в случае расположения полюса и нуля передаточной функции корректирующего контура таким образом, что соблюдается условие

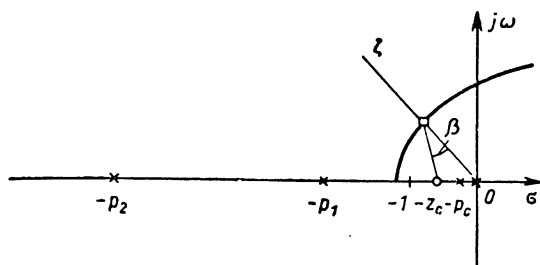
$$\frac{s + z_c}{s + p_c} \approx 1 \angle 0^\circ, \quad (8. 22)$$

тогда s будет иметь значение, определяемое прямой, проведенной из начала координат к точке, отмеченной квадратиком на фиг. 8. 5, б, при сохранении одинаковых значений K' и K'_c . Из уравнения (8. 21) следует тогда, что коэффициент скорости скорректированной системы будет увеличен на коэффициент α . Теперь задача будет состоять в определении мест расположения полюса и нуля таким образом, чтобы уравнение (8. 22) было приблизительно удовлетворено. Однако выражение (8. 22) является не единственным необходимым условием; одновременно должно быть соблюдено другое условие

$$\frac{z_c}{p_c} = \alpha > 1. \quad (8. 23)$$

Нетрудно убедиться, что оба условия могут быть удовлетворены только в случае, когда полюс и ноль передаточной функции корректирующего контура будут расположены очень близко к началу координат. Следовательно, мы пришли к тому же правилу выбора z_c и p_c , которое было найдено при применении частотных методов. Это правило состоит в том, что расстояния полюса и нуля передаточной функции корректирующего запаздывающего контура от начала координат в плоскости s должны быть выбраны малыми в сравнении с расстояниями других ненулевых критических частот.

Фиг. 8. 6. Включение интегрирующего звена в систему, характеризуемую предыдущей фигурой.



расположены очень близко к началу координат. Следовательно, мы пришли к тому же правилу выбора z_c и p_c , которое было найдено при применении частотных методов. Это правило состоит в том, что расстояния полюса и нуля передаточной функции корректирующего запаздывающего контура от

начала координат в плоскости s должны быть выбраны малыми в сравнении с расстояниями других ненулевых критических частот.

Следует заметить, что благодаря расположению полюса и нуля запаздывающего контура очень близко к началу координат возможно не только получить большие значения коэффициента α , но, что еще более важно, это достигается благодаря введению незначительного запаздывания по фазе. Часто расположение точек p_c и z_c в непосредственной близости к началу координат трактуется как наличие интегрирующего звена. Максимальный сдвиг по фазе, создаваемый запаздывающим контуром, можно регулировать путем расположения точки z_c . Угол β (фиг. 8. 6) часто ограничен значением 5—10°. Важно не допустить слишком большой сдвиг по фазе, так как нельзя будет сохранить неизменным расположение корней, отмеченное квадратиком на фигуре.

Пример 8. 1. Для полного представления о порядке расчета применим описанный выше метод к одному примеру. Выберем для этого пример, рассмотренный в разделе 6. 5, так что можно будет сравнить результаты, полученные двумя методами. Задачу можно сформулировать следующим образом.

Передаточная функция разомкнутой цепи регулируемой системы, удовлетворяющая заданным значениям выходной величины и имею-

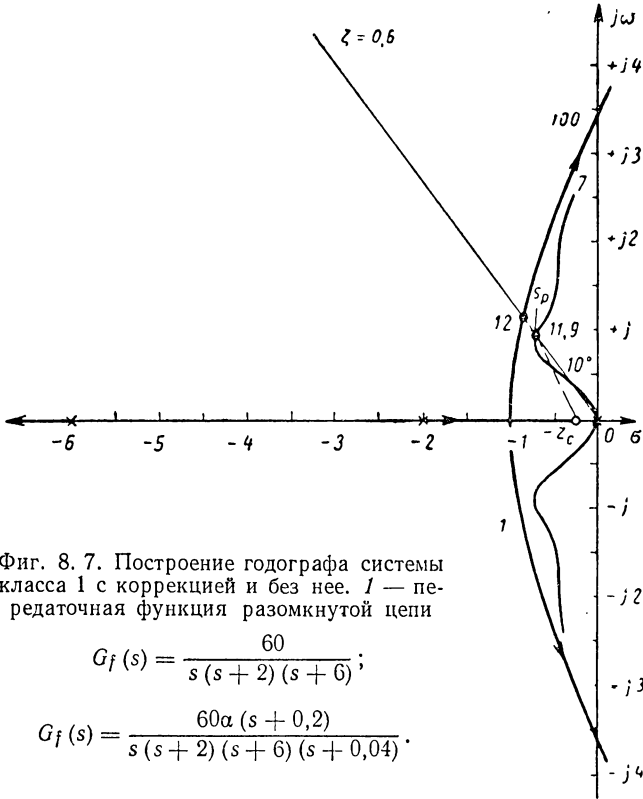
щая определенную характеристику в установившемся режиме, выражается

$$G_f(s) = \frac{5}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)}, \quad (8.24)$$

при этом

$$K_v = 5.$$

Заданные параметры переходного процесса: $\zeta = 0,6$; преобладающая постоянная времени меньше 2 сек.



Фиг. 8. 7. Построение годографа системы класса 1 с коррекцией и без нее. 1 — передаточная функция разомкнутой цепи

$$G_f(s) = \frac{60}{s(s+2)(s+6)};$$

$$G_f(s) = \frac{60\alpha(s+0,2)}{s(s+2)(s+6)(s+0,04)}.$$

Годограф первоначальной системы показан на фиг. 8. 7. Прежде чем перейти к расчету, полезно установить, как первоначальная система отклоняется от заданных условий, когда коэффициент усиления изменяется до значения, соответствующего требуемому коэффициенту скорости. Из выражения (8. 24) получаем

$$G_f(s) = \frac{60}{s(s+2)(s+6)}.$$

Преобладающая пара комплексных сопряженных корней будет равна при соответствующем значении $K' = 60$ на годографе

$$-r_{1,2} = -0,3 \pm j2,8.$$

Относительный коэффициент демпфирования при этом равен около 0,1. Хотя коэффициент K_v удовлетворяет заданному значению, однако этого нельзя сказать об относительном коэффициенте демпфирования и преобладающей постоянной времени, вследствие чего необходимо применить запаздывающий корректирующий контур.

Порядок расчета. Несмотря на то, что здесь будет рассмотрен специальный пример, описанный порядок дается в обобщенной форме, чтобы его можно было применить при других условиях.

1. Определяют зависимость между коэффициентами K и K' . Для рассматриваемого случая имеем

$$G_f G_c(s) = \frac{12K_v}{\alpha} \cdot \frac{s + z_c}{s(s+2)(s+6)(s+p_c)}.$$

Следовательно,

$$K' = 12 \frac{K_v}{\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{z_c}{p_c} = \frac{12K_v}{K'}. \quad (8.25)$$

2. Выбирают точку s_p , которая удовлетворяет требованиям относительно значений ξ и преобладающей постоянной времени.

3. Выбирают точку z_c достаточно близко к началу координат таким образом, чтобы $\frac{(s+z_c)}{(s+p_c)}$ создавало пренебрежимо малое влияние в зоне расположения s_p . Для определения точки z_c можно использовать следующий способ: проводят прямую из точки s_p под углом 10° (или меньше) относительно линии требуемого относительного коэффициента демпфирования, что позволяет удовлетворить заданные значения без необходимости чрезмерного увеличения постоянной времени. Тогда пересечение этой прямой с действительной осью даст точку — z_c . Применение этого способа к рассматриваемому примеру дает $z_c = -0,2$.

4. Вычисляют значение коэффициента K' , связанное с точкой s_p . При этом вычисления считают, что полюс p_c расположен в начале координат, что справедливо для всех практических случаев. Отсюда, получаем $K' = 11,9$.

5. Из равенства (8.25) определяют требуемое значение α и p_c . Следовательно,

$$\alpha = \frac{z_c}{p_c} = \frac{12 \cdot 5}{11,9} = 5$$

и

$$p_c = \frac{z_c}{\alpha} = \frac{0,2}{5} = 0,04.$$

6. Вычисленные значения нуля и полюса наносят на плоскость s и проверяют совпадение с рассматриваемой точкой, т. е. совпадение точки s_p с годографом. Если эта точка не удовлетворяет фазовому критерию, то рассматривают другую точку вблизи значения s_p на линии требуемого относительного коэффициента демпфирования. В рассматриваемом примере s_p удовлетворяет фазовому критерию 180° . Здесь следует заметить, что предыдущий порядок расчета не требует построения всего годографа скорректированной системы. Однако на фиг. 8. 7 для удобства показан весь годограф.

После этого остается рассмотреть еще один вопрос, связанный с введением нуля благодаря корректирующему контуру в выражении для $\frac{C}{R}(s)$. В связи с этим возникает вопрос о влиянии этого нуля на величину отклонений переходных процессов (см. конец предыдущей главы для обоснования этого вопроса). До возможности полного выяснения этого вопроса необходимо найти корень на части годографа между точками -2 и $-0, 2$, которые соответствуют значению $K' = 12$ и приводят к требуемому коэффициенту скорости. Обычно значение этого корня лежит очень близко к нулю корректирующей передаточной функции. Проверка нескольких контрольных точек показывает, что этот корень расположен в точке $-0, 25$. Следовательно, четыре корня при $K' = 12$ будут иметь значения $s_{1,2} = -r_{1,2} = -0,7 \pm j1$; $s_3 = -r_3 = -0,25$; $s_4 = -r_4 = -(> 6)$. Передаточную функцию замкнутой цепи можно выразить следующим образом:

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{\frac{K'(s+z_c)}{s(s+2)(s+6)(s+p_c)}}{1 + \frac{K'(s+z_c)}{s(s+2)(s+6)(s+p_c)}} = \frac{K'(s+0,2)}{(s+r_1)(s+r_2)(s+r_3)(s+r_4)}.$$

Введение значений приведенных выше корней дает

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{K'(s+0,2)}{(s^2+1,4s+1,49)(s+0,25)(s+r_4)} \approx \frac{\frac{K'}{r_4}}{s^2+1,4s+2,49}.$$

Из проверки этого последнего выражения становится очевидно, что ноль передаточной функции практически компенсируется полюсом $-r_3$, так что динамика системы будет определяться новыми найденными комплексными сопряженными корнями¹.

Сравнение результатов расчета запаздывающего корректирующего контура двумя методами (в плоскости s и в частотной области) показывает, что они идентичны в рассматриваемом примере.

¹ При этом пренебрегается большой полюс r_4 , не влияющий на время регулирования.

8. 4. РАСЧЕТ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО КОРРЕКТИРУЮЩЕГО КОНТУРА В ПЛОСКОСТИ s

В главе 6 подчеркивалось, что опережающий контур в состоянии создать надлежащую коррекцию системы благодаря его свойству вызывать опережение по фазе. Метод расчета, основанный на определении полюсов и нулей передаточной функции этих опережающих контуров, исходит из совершенно одинаковой характеристики, которая будет показана ниже. После приобретения опыта определения влияний, вызываемых добавлением полюсов и нулей на годографе, будет нетрудно убедиться в том, что расчет коррекции может быть осуществлен очень быстро по методу последовательного приближения. Однако мы вынуждены отказаться от изложения метода последовательного приближения, так как этот раздел представляет вводную часть для рассматриваемого вопроса. Вместо этого рассмотрим простой пример прямого теоретического расчета. Затем сделаем сравнение с результатами, получаемыми в частотной области, чтобы лучше показать дополнительные преимущества метода расчета в плоскости s . Многообещающая особенность рассматриваемого метода расчета связана с возможностью выбирать желательные места расположения преобладающих комплексных корней характеристического уравнения замкнутой системы и затем непосредственно переходить к полюсам и нулям передаточной функции опережающего корректирующего контура, причем выбранные корни должны совпадать с годографом скорректированной системы.

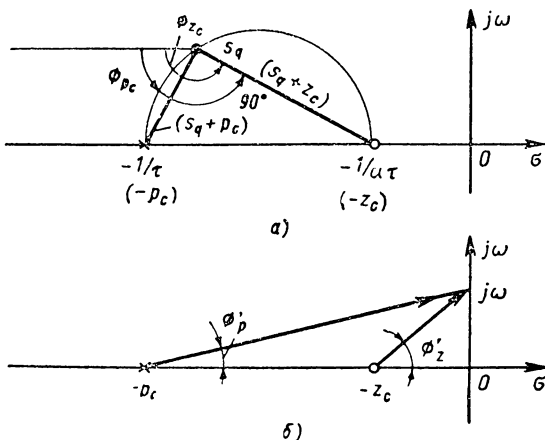
Векторная диаграмма постоянного опережения по фазе в плоскости s . Предварительной стадией разработки общего порядка расчета опережающего контура стандартного типа может служить исследование характеристики опережения по фазе данного контура при помощи конфигурации полюсов и нулей его передаточной функции в плоскости s . Из уравнения (8. 4) известно, что передаточная функция опережающего контура имеет вид

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{\alpha\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{s + z_c}{s + p_c}.$$

Проверка последнего выражения позволяет обнаружить, что ноль всегда расположен ближе к началу координат, чем полюс, как это показано на фиг. 8. 8, *a*. Это расположение является обратным случаем, который преимущественно наблюдается у запаздывающего контура. Кроме того, имеется еще другое существенное различие. У запаздывающего контура полюс и ноль расположены близко к началу координат и рядом друг с другом; у опережающего контура они обычно удалены от начала координат и друг от друга. Близкое расположение полюса и нуля у запаздывающего контура сопряжено с очень малым сдвигом по фазе для общей характеристики скорректированной системы. Однако для опережающего контура удаление

друг от друга точек p_c и z_c вызывает значительное опережение по фазе, создаваемое контуром.

При данной конфигурации расположения полюсов и нулей опережение по фазе, создаваемое контуром в выбранной точке s_q на плоскости s , может быть легко определено по способу, иллюстрированному фиг. 8. 8, а. Опережение по фазе, создаваемое коэффициентом у корня, связанного с нулем, равно φ_{z_c} , тогда как запаздывание по фазе, связанное с полюсом, равно φ_{p_c} . Результирующее опережение по фазе определяется разницей этих углов $\varphi_{z_c} - \varphi_{p_c}$. На фиг. 8. 8, а точка s_q выбрана таким образом, чтобы общее опережение по фазе составляло 90° . Здесь необходимо оговориться, что это опережение по фазе не следует смешивать с рассмотренным сдвигом фаз опережающих контуров, что обсуждалось в связи с анализом в частотной области. Например, суммарные углы опережения по фазе, показанные на фиг. 2. 28, были определены при ограничении переменной частоты значениями на мнимой оси. При любых заданных значениях α и τ фазовые углы, изображенные на фиг. 2. 28, в функции частоты могут быть определены по способу, иллюстрированному на фиг. 8. 8, б. Следовательно, результирующий угол опережения по фазе, соответствующий частоте $j\omega'$, равен $\varphi'_z - \varphi'_p$. Следует отметить, что результирующий угол опережения по фазе не может превышать 90° , когда величина s ограничена значениями вдоль мнимой оси; этот результат совпадает с ранее сделанным выводом.



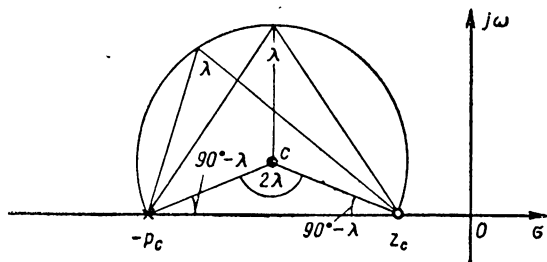
Фиг. 8. 8. Векторная диаграмма постоянного опережения по фазе на 90° :

а — изображение в плоскости s ; б — способ получения частотной характеристики для корректирующего опережающего контура.

После определения полюса и нуля передаточной функции опережающего контура (как показано на фиг. 8. 8, а) возможно найти эти точки в плоскости s , при которых суммарный угол опережения по фазе равняется 90° . Совершенно ясно, что в результате получается годограф в виде полуокружности с центром на отрицательной действительной оси. В случаях, когда общий угол опережения фазы должен отличаться от 90° , очевидно центр окружности с постоянной фазой должен сместиться с действительной оси. Порядок построения подобной окружности прост и не представляет труда.

Предположим, что требуется построить ту часть окружности годографа, на которой лежат точки, связанные с постоянной фазой

опережения λ , и соответствующие заданному расположению полюса и нуля. Предположим далее, что заданные значения полюса и нуля расположены так, как показано на фиг. 8. 9. Для определения расположения центра искомой окружности построим прямые под углом $90^\circ - \lambda$ относительно действительной оси и проходящие через точки $-p_c$ и z_c как показано на фиг. 8. 9. Точка пересечения этих прямых определит центр искомой окружности c . После этого нетрудно построить окружность с центром в точке c и с радиусом, равным $(c \cdot p_c)$. Следовательно, любая точка, расположенная на дуге окружности выше действительной оси, будет создавать общее опережение по фазе, обусловленное полюсом и нулем и равное углу λ . Нетрудно обнаружить, что в тех случаях, когда требуется угол опережения меньше 90° , центр окружности будет всегда находиться выше дей-



Фиг. 8. 9. Порядок построения векторных диаграмм с постоянной фазой в плоскости s .

ствительной оси, а при λ больше 90° центр окружности будет ниже действительной оси. Из проверки описанного построения становится очевидно, что достаточно только знать две известные теоремы из геометрии, а именно: центральный угол равен двойному вписанному углу и вписанные углы, опирающиеся на одну дугу окружности, равны между собой.

Общий порядок расчета. Дальнейшая задача состоит в разработке метода, который позволяет выбрать места расположения полюса и нуля передаточной функции опережающего контура, причем таким образом, чтобы требуемая пара точек в плоскости s была корнями характеристического уравнения скорректированной системы. Предположим, что годограф первоначальной системы известен. Далее, предположим, что точки в плоскости s , обозначенные буквами $-r_1$ и $-r_2$ на фиг. 8. 10, представляют корни характеристического уравнения замкнутой системы и в основном определяют ее динамику. Эти точки были выбраны на основании требуемых значений относительного коэффициента демпфирования и времени регулирования. Последнее было определено по величине действительной части корней $-r_{1,2}$. Совершенно понятно, конечно, что точки $-r_{1,2}$ не совпадают с годографом первоначальной системы, для которой безусловно, необходима коррекция. Зная требуемое расположение корней $-r_{1,2}$, а также полюса и нуля передаточной функции

первоначальной системы, нетрудно будет определить общее запаздывание по фазе в точке $-r_1$. Следовательно, необходимо рассчитать корректирующий контур для опережения по фазе, который удовлетворяет следующему равенству:

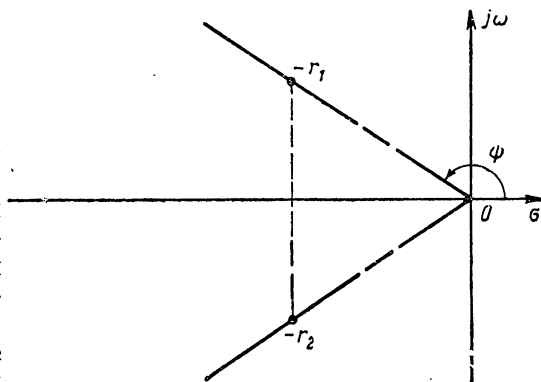
$$\varphi + \lambda = -180^\circ. \quad (8.26)$$

Здесь угол φ имеет отрицательное значение и представляет запаздывание по фазе в точке $-r_1$ вследствие данной конфигурации расположения полюса и нуля первоначальной системы; угол λ является положительным и представляет опережение по фазе, создаваемое опережающим контуром. Отсюда требуемый угол опережения по фазе для коррекции системы равен

$$\lambda = -\varphi - 180^\circ. \quad (8.27)$$

Равенство (8.27) позволяет получить одно из двух условий, необходимых для определения места расположения полюса и нуля передаточной функции корректирующего контура. Второе требуемое условие касается угла ψ , который определяет расположение линии относительного коэффициента демпфирования (фиг. 8.10). Для освещения метода нахождения значения p_c и z_c на основании этих данных используем фиг. 8.11. Окружность постоянной фазы построена касательной к линии ζ , при требуемом значении корня $-r_1$. Эта окружность пересекает действительную ось в точках p_c и $-z_c$, что одновременно позволяет определить общий угол опережения по фазе λ в точке $s = r_1$; благодаря этому обеспечивается, что данная точка лежит на годографе скорректированной системы. Конечно, предполагается, что угол λ был получен из равенства (8.27) описанным выше способом. Так как λ и ψ являются известными величинами в любых данных условиях, изучение фиг. 8.11 позволяет установить, что эти углы не определяют непосредственно расположение точек p_c и z_c . Необходимо первоначально определить угол γ , так как он может быть использован для нахождения точки z_c . После этого угол λ может быть использован для определения точки p_c . Таким образом, необходимо знать соотношение между углами γ , λ и ψ .

Требуемое выражение можно получить на основании геометрических соотношений. Проведем через точку $-z_c$ касательную к окружности, которая пересечет линию ζ в точке a .



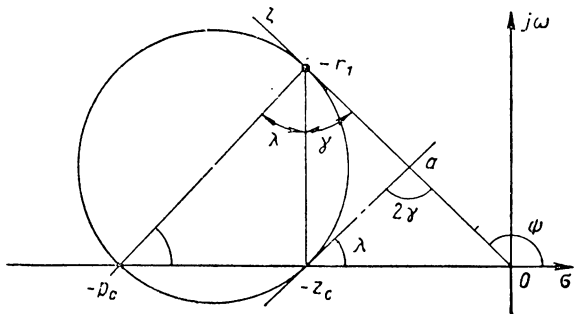
Фиг. 8.10. Расположение корней с ограничением требуемого коэффициента затухания и времени регулирования.

Тогда нетрудно вывести, что $\psi = \lambda + 2\gamma$ и, следовательно,

$$\gamma = \frac{1}{2}(\psi - \lambda). \quad (8.28)$$

Теперь можно обобщить следующим образом порядок определения расположения полюса и нуля передаточной функции опережающего корректирующего контура, благодаря чему пара выбранных точек в плоскости s становится корнями характеристического уравнения скорректированной системы.

1. Измеряют угол ψ , соответствующий требуемому расположению преобладающей пары комплексных корней (места расположе-



Фиг. 8. 11. Порядок построения для определения полюса и нуля функции системы с коррекцией.

ния выбираются на основании требуемых значений относительного коэффициента демпфирования, ширины полосы частот и частоты демпфированных колебаний и др.).

2. Определяют действительное запаздывание по фазе первоначальной системы в требуемой точке расположения корня.

3. Вычисляют требуемый угол запаздывания по фазе из равенства

$$\lambda = -\varphi - 180^\circ.$$

4. Определяют место расположения нуля передаточной функции корректирующего устройства из равенства

$$\gamma = \frac{1}{2}(\psi - \lambda)$$

и строят прямую под углом γ , расположенную ниже линии ζ и проходящую через точку $-r_1$. Пересечение этой прямой с отрицательной действительной осью определяет значение точки z_c , которое равно $\frac{1}{\sigma\tau}$. Чтобы получить минимальный сдвиг по фазе для контура, угол γ должен быть положительным по направлению, указанному на фиг. 8. 11, т. е. угол γ должен быть образован прямой, проведенной ниже линии ζ .

Конечные результаты расчета: $\tau_c = \frac{1}{p_c} = 1/8 \text{ сек}$; $\alpha = \frac{p_c}{z_c} = 4$.

Коэффициент усиления, соответствующий точке q_1 , равен $K' = 200$. Для определения коэффициента скорости на основании полученных данных требуется написать полное выражение передаточной функции разомкнутой цепи скорректированной системы. Следовательно,

$$\begin{aligned} G_c G_f(s) &= \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + s\alpha\tau}{1 + s\tau} = \\ &= 20K_f \frac{1}{s(s+2)(s+10)} \cdot \frac{s + z_c}{s + p_c}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $K' = 20K_f$ или $K_f = 10$. Из первой формы передаточной функции $G_c G_f(s)$ следует, что коэффициент скорости равняется $K_v = \frac{K_f}{\alpha} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ сек}^{-1}$.

Пример 8.3. Рассмотрим теперь случай, когда заданы условия не только о характере динамической реакции, как было в примере 8.2, но также о величине коэффициента скорости. С введением этого дополнительного ограничения необходимо несколько изменить вышеизложенный порядок расчета, в особенности, когда требуется рассчитать опережающий контур обычного типа. Теперь метод расчета должен быть основан на последовательном приближении, так как коэффициент усиления может быть определен по корневому методу только после нахождения точки на годографе скорректированной системы. Несмотря на это, однако, данный метод позволяет быстро найти решение, как это будет показано ниже.

Допустим, что необходимо рассчитать опережающий контур таким образом, чтобы система примера 8.2 удовлетворяла следующим заданным условиям: относительный коэффициент демпфирования $\zeta = 0,6$; преобладающая постоянная времени меньше $1/3 \text{ сек}$; ширина полосы частот меньше 2 гц ; коэффициент скорости $= 5 \text{ сек}^{-1}$.

Решение задачи коррекции по запаздыванию, приведенное в примере 8.1, позволяет установить, что расчет запаздывающего контура удовлетворяет приведенным выше условиям, кроме одного, а именно: условие преобладающей постоянной времени. В действительности при расчете опережающего контура руководствовались необходимостью уменьшения времени регулирования. Конечно, следует предположить, что система обладает способностью быстрой реакции, если она предназначена для этого. Следовательно, такое влияние, как ограничение по скорости, рассматривается пренебрежимо малым.

Прежде чем приступить к расчету, опять полезно установить как будет вести себя система с передаточной функцией $G_f(s)$, когда коэффициент усиления выбран соответственно заданному относительному коэффициенту демпфирования. Вернемся к фиг. 8.12. Здесь s_1 представляет точку на требуемой линии ζ , которая одновременно лежит на годографе первоначальной системы. Для этой точки находим значение коэффициента $K' = 12$, так что соответствующе-

шее значение коэффициента скорости равно $K_v = \frac{K'}{20} = 12/20 = 0,6$. Теперь нетрудно видеть, что найденная точка s_1 удовлетворяет только двум из четырех заданных условий; не соблюдено требование о коэффициенте скорости и преобладающей постоянной времени.

Отсюда становится ясно, что расчет опережающего контура, приведенный в примере 8. 2, не пригоден для решения поставленной задачи, потому что это не дает требуемого коэффициента скорости. Поэтому рассмотрим вторую точку q_2 , как вторую попытку, которая удовлетворяет первым трем заданным условиям. Однако необходимо проверить значение коэффициента скорости. Для этого требуется сперва рассчитать соответствующий корректирующий контур. Измерение дает $\psi = 127^\circ$; после чего находим $\varphi = 92^\circ = -268^\circ$; $\lambda = 268 - 180 = 88^\circ$; $\gamma = 19,5^\circ$; поэтому $z_c = 2$ и $p_c = 18$. Конечные результаты расчета: $\tau = \frac{1}{18}$ и $\alpha = 9$.

При данной конфигурации расположения полюса и нуля, примененной для этой коррекции, коэффициент усиления в точке q_2 годографа оказывается равным $K' = 664$, при котором $K_v = 3,68 \text{ сек}^{-1}$. Еще одна проверка необходима. Для этого выбираем точку s'_1 . Тогда $\psi = 127^\circ$; $\varphi = 82 = -278$; $\lambda = 98^\circ$; $\gamma = 14,5^\circ$; следовательно, $z_c = 2,0$ и $p_c = 30$.

Конечные результаты расчета: $\tau = \frac{1}{30}$ и $\alpha = 15$.

Коэффициент усиления в этом случае расположения полюса и нуля скорректированной системы будет равен $K' = 1440$, чему соответствует коэффициент скорости $K_v = 1440/20 \cdot 14,5 = 4,8 = 5$.

Следовательно, когда система работает в точке s'_1 , все заданные условия будут выполнены. Следует заметить, что преобладающая постоянная времени составляет $1/4 \text{ сек}$, что несколько ниже заданного значения и было получено в результате необходимости увеличения коэффициента усиления с целью удовлетворить требования о заданном коэффициенте скорости.

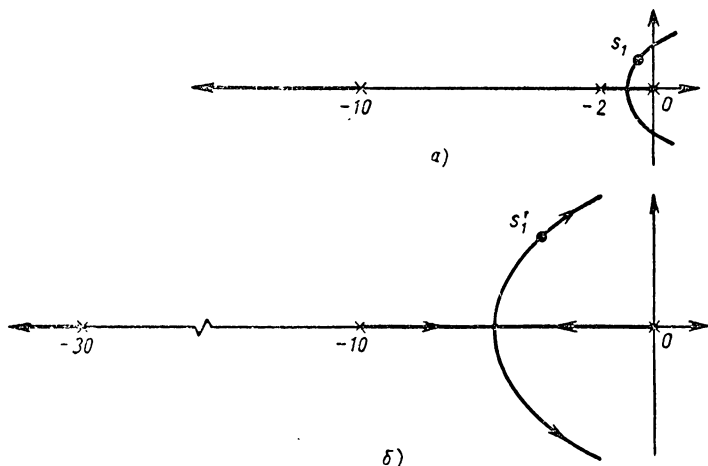
В заключение корректирующую передаточную фракцию можно написать в виде

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{30}\right)}.$$

Используя это выражение совместно с передаточной функцией исходной системы, получим передаточную функцию разомкнутой цепи скорректированной системы

$$G_c G_f(s) = \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + \frac{s}{30}} \cdot \frac{5}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)} = \frac{5}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{30}\right)}.$$

Изучение этого последнего выражения показывает, что данный расчет опережающего контура позволяет устранить неудовлетворительное значение постоянной времени $1/2 \text{ сек}$ и заменить его на значительно меньшее значение $1/30 \text{ сек}$. Однако важно понять, что этот порядок расчета допустим только тогда, когда влияние ограничений (насыщения) пренебрежимо мало. На фиг. 8. 13 более ясно показан способ изменения годографа в результате опережающей коррекции для того, чтобы система удовлетворяла всем заданным условиям.



Фиг. 8. 13. Графическое построение видоизмененного годографа первоначальной системы в результате коррекции по опережению: *а* — годограф первоначальной системы; *б* — годограф скорректированной системы.

Целесообразно на этой стадии рассчитать опережающий корректирующий контур на основании частотных методов, изложенных в главе 6 (см. задачу 8. 4). Когда эта попытка будет сделана, станет ясно, что соблюдение заданных значений значительно более трудно. Разница лежит в основном в том, что при частотном методе используются предельные значения для приближенного описания реакции во времени, в то время как расчет в плоскости s совершенно не требует этих значений, так как здесь мы имеем дело непосредственно с корнями характеристического уравнения.

8. 5. РАСЧЕТ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕ-ОПЕРЕЖАЮЩЕГО КОНТУРА В ПЛОСКОСТИ s

Для расчета запаздывающе-опережающей коррекции существует несколько методов. Здесь внимание будет сосредоточено главным образом на методе компенсации нулей и полюсов не только потому, что он является наиболее простым, но также из-за очень большого сходства с методом расчета, применяемым в частотной области. Иногда задача усложняется, так как точная компенсация подобного рода трудно осуществима в системах практического назначения.

Однако, когда передаточные функции¹ являются минимально фазовыми, тогда наличие неточной компенсации оказывает сравнительно слабое влияние на динамику системы. Теория расчета опережающе-запаздывающей коррекции в плоскости s представляет собой просто сочетание методов, описанных в разделах 8.3 и 8.4. Сперва требуется выбрать значения полюса и нуля передаточной функции опережающего контура с целью обеспечить выбранное расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы, удовлетворяющих фазовому критерию Эванса. Затем необходимо рассчитать соответствующее интегрирующее звено для удовлетворения заданного значения коэффициента усиления разомкнутой цепи. Сочетание двух контуров создаст тогда требуемую опережающе-запаздывающую коррекцию. Этот порядок расчета поясняется на следующем примере.

Пример 8.4. Требуется рассчитать опережающе-запаздывающую коррекцию таким образом, чтобы система с передаточной функцией

$$G_f(s) = \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)}$$

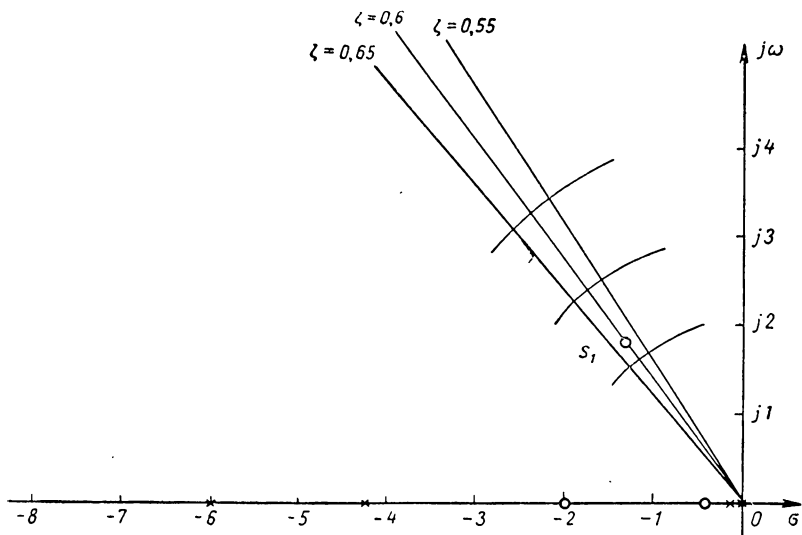
удовлетворяла следующим условиям: относительный коэффициент демпфирования $\zeta = 0,6$; преобладающая постоянная времени меньше $3/4$ сек; ширина полосы пропускания частот меньше 3 рад/сек; коэффициент скорости $= 5$ сек⁻¹.

На плоскости s следует выбрать точку, которая удовлетворяет первым трем условиям; подобная точка обозначена буквой s_1 на фиг. 8.14. Метод расчета опережающей части коррекции системы состоит в замене полюса функции $G_f(s)$, расположенного в точке -2 , на другой полюс, когда точка s_1 удовлетворяет условию о фазовом угле -180° . Следовательно ноль должен находиться в точке -2 , т. е. $z_d = 2$ (так как мы имеем здесь дело с запаздывающим и опережающим контуром, то полюсы и нули передаточной функции каждого из этих контуров различаются индексом d для опережающего контура и индексом g для запаздывающего контура). После этого полюс, который заменяет первоначальный полюс, находится следующим образом: шарнир спирального лекала следует установить в точке s_1 и определить запаздывание по фазе, обусловленное полюсами функции $G_f(s)$, расположенными в точках 0 и -6 . Затем планку и диск спирального лекала поворачивают до тех пор, пока отметка 180° не будет направлена горизонтально влево, как показано на фиг. 8.15. Пересечение планки спирального лекала с отрицательной действительной осью определит место расположения полюса, которое создаст запаздывание по фазе в точке s_1 , равное -180° . Как показано на фиг. 8.15, этот полюс имеет значение $p_d = 4,25$, откуда $\alpha_d = \frac{p_d}{z_d} = 2,125$. На этой стадии полезно написать выражение

¹ Имеются в виду передаточные функции, у которых полюса и нули расположены в левой полуплоскости.

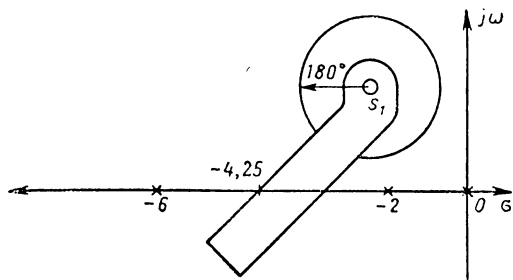
передаточной функции для частично скорректированной системы. Учитывая только опережающую коррекцию в данный момент, получим

$$G_f G_d(s) = \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha_d} \cdot \frac{1 + \frac{s}{z_d}}{1 + \frac{s}{p_d}} \quad (8.29)$$



Фиг. 8. 14. Расположение полюсов и нулей при решении примера 4 главы 8.

Теперь следует ввести коэффициент усиления K_c корректирующего контура, который служит не только для определения затухания опережающего контура, но также дополнительного усиления,



Фиг. 8. 15. Способ нахождения полюса передаточной функции опережающего контура для компенсации полюса нулем.

предназначенного для соблюдения требования о коэффициенте усиления разомкнутой цепи.

Таким образом, уравнение (8.29) приобретает вид

$$G_f G_d(s) = \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)} \cdot \frac{K_c}{\alpha_d} \cdot \frac{1 + \frac{s}{z_d}}{1 + \frac{s}{p_d}} \quad (8.30)$$

из которого следует, что выражение для коэффициента скорости системы будет

$$K_v = \frac{K_f K_c}{\alpha_d}. \quad (8.31)$$

После введения уравнения (8.30) в выражение для анализа годографа, получим

$$G_f G_d(s) = \frac{12K_v}{s(s+2)(s+6)} \cdot \frac{p_d}{z_d} \cdot \frac{s+z_d}{s+p_d}. \quad (8.32)$$

Подстановка значений z_d и p_d дает

$$G_f G_d(s) = \frac{25,5K_v}{s(s+4,25)(s+6)}. \quad (8.33)$$

Последнее выражение представляет передаточную функцию системы, скорректированной опережающим контуром. Конечно, если коэффициент усиления в точке s_1 имеет такое значение, что приводит к требуемому коэффициенту K_v , то дальнейший расчет отпадает. Однако проверка этого коэффициента усиления показывает, что требование о коэффициенте скорости не удовлетворено, т. е. находим, что $K' = 37,5$, так что $K_v = 37,5/25,5 = 1,47$. Это значение сильно отличается от заданной величины 5.

Как сообщалось в разделе 8.3, применение запаздывающей коррекции позволяет повысить коэффициент усиления разомкнутой цепи без какого-либо существенного изменения сдвига фаз в точке s_1 . Поэтому запаздывающая коррекция была введена, чтобы получить необходимое увеличение коэффициента скорости. Напомним, что передаточная функция запаздывающего контура определяется

$$G_g(s) = \frac{p_g}{z_g} \cdot \frac{s+z_g}{s+p_g}.$$

Откуда выражение передаточной функции полностью скорректированной разомкнутой цепи будет

$$G_f G_d G_g(s) = \frac{25,5K_v}{s(s+4,25)(s+6)} \cdot \frac{p_g}{z_g} \cdot \frac{s+z_g}{s+p_g}. \quad (8.34)$$

Из последнего выражения следует, что коэффициент усиления K' в точке s_1 для скорректированной системы с опережающе-запаздывающим контуром равняется

$$K' = 25,5K_v \frac{p_g}{z_g} = 25,5 \frac{K_v}{\alpha_g}, \quad (8.35)$$

где $\alpha_g = z_g/p_g > 1$. Решение относительно коэффициента скорости дает

$$K_v = \frac{K'}{25,5} \alpha_g. \quad (8.36)$$

По уравнению (8.36) нетрудно определить, как коэффициент скорости увеличивается из-за запаздывания по фазе. После выбора z_g , затем определяется точка p_g , учитывая, что коэффициент α_g должен иметь значение, необходимое для достижения требуемого коэффициента K_v .

Для определения точки z_g следует провести прямую через точку s_1 на фиг. 8.14 под углом около 10° относительно линии ζ . Пересечение этой прямой с действительной осью дает значение нуля передаточной функции запаздывающего контура, т. е. $z_g = 0,45$. Необходимо всегда помнить, что определение точки z_g посредством прямой линии под углом 10° более целесообразно, чем при помощи прямых под меньшим углом, так как величина постоянной времени может быть выдержана в приемлемых пределах. Конечно, для большей точности описания динамики системы желательно немного сместить точку s_1 , чтобы устранить запаздывание, вносимое интегрирующим звеном.

Полос p_g передаточной функции запаздывающего контура находится из условия усиления, выражаемого равенством (8.36). Но предварительно необходимо знать величину коэффициента K' , который может быть определен в предположении, что полюс p_g практически расположен в начале координат; это дает значение $K' = 41$. Введение этого значения, а также $K_v = 5$ в равенство (8.36) дает

$$\alpha = \frac{25,5 \cdot 5}{41} = 3,2.$$

Отсюда

$$p_g = \frac{z_g}{\alpha_g} = \frac{0,45}{3,2} = 0,14.$$

Подстановка вычисленных значений для точек p_g и z_g в выражение (8.34) приводит к передаточной функции скорректированной разомкнутой цепи с опережающе-запаздывающим корректирующим контуром

$$G_f G_d G_g(s) = \frac{41}{s(s+4,25)(s+6)} \cdot \frac{s+0,45}{s+0,14}. \quad (8.37)$$

Для определения значения коэффициента скорости последнее выражение можно перегруппировать следующим образом:

$$G_f G_d G_g(s) = \frac{5,16(1+2,22s)}{s \left(1 + \frac{s}{4,25}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right) (1+7,14s)}. \quad (8.38)$$

Таким образом, передаточная функция требуемого опережающе-запаздывающего корректирующего контура приобретает вид¹

$$G_d G_g(s) = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{1 + \frac{s}{2}}{1 + \frac{s}{4,25}} \cdot \frac{1 + \frac{s}{0,45}}{1 + \frac{s}{0,14}}. \quad (8.39)$$

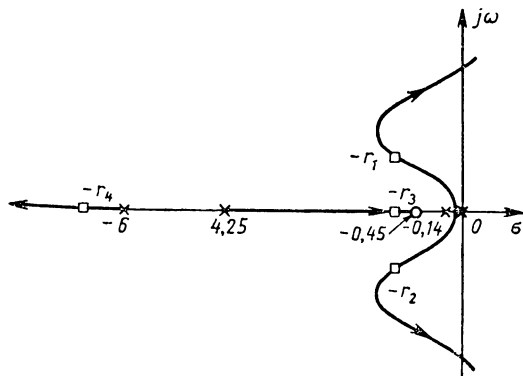
¹ О порядке синтеза систем с подобными передаточными функциями см. следующую главу, раздел 9.5 и задачу 9.8.

Наконец, значение коэффициента K_c для изменения усиления системы с целью получения требуемого коэффициента скорости и для создания падения характеристики в зоне коррекции по опережению определяется из равенства (8. 51)

$$K_c = \frac{\alpha_d K_v}{K_f} = \frac{10,375}{K_f},$$

где K_f представляет предполагаемый постоянный коэффициент усиления неизменной части системы. Интересно отметить, что коэффициент α_d запаздывающего корректирующего контура не входит в эту расчетную формулу, потому что запаздывающий контур не создает падения характеристики в установившемся режиме.

Проверка запаздывания по фазе в точке s_1 на основании полной конфигурации расположения полюсов и нулей по уравнению (8. 38) показывает, что фазовый угол не равняется больше -180° , как было выяснено раньше. Точка, которая теперь удовлетворяет фазовому критерию, расположена немного правее точки s_1 . Это



Фиг. 8. 16. Расположение корней уравнения (8. 40), соответствующего $K' = 41$.

означает, что относительный коэффициент демпфирования, а также преобладающая постоянная времени будут меньше требуемых значений. Мы не будем здесь заниматься подгонкой этих значений. Однако отсюда следует сделать вывод, что при первоначальном выборе точки s_1 необходимо заранее предвидеть необходимость подобной подгонки. Следовательно, в рассматриваемом примере более правильный выбор точки s_1 должен был бы быть сделан таким образом, чтобы эта точка лежала несколько вправо от положения, показанного на фиг. 8. 14. Это не было сделано в начале расчета нашего примера с целью подчеркнуть последствия.

Из выражения (8. 38) ясно вытекает, что передаточная функция замкнутой цепи имеет нуль. Учитывая вредное влияние неудачного расположения нуля на динамику системы (см. конец предыдущей главы), необходимо проверить расположение нуля. Система с единичной обратной связью имеет передаточную функцию замкнутой цепи следующего вида:

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{41(s + 0,45)}{(s + r_1)(s + r_2)(s + r_3)(s + r_4)}, \quad (8. 40)$$

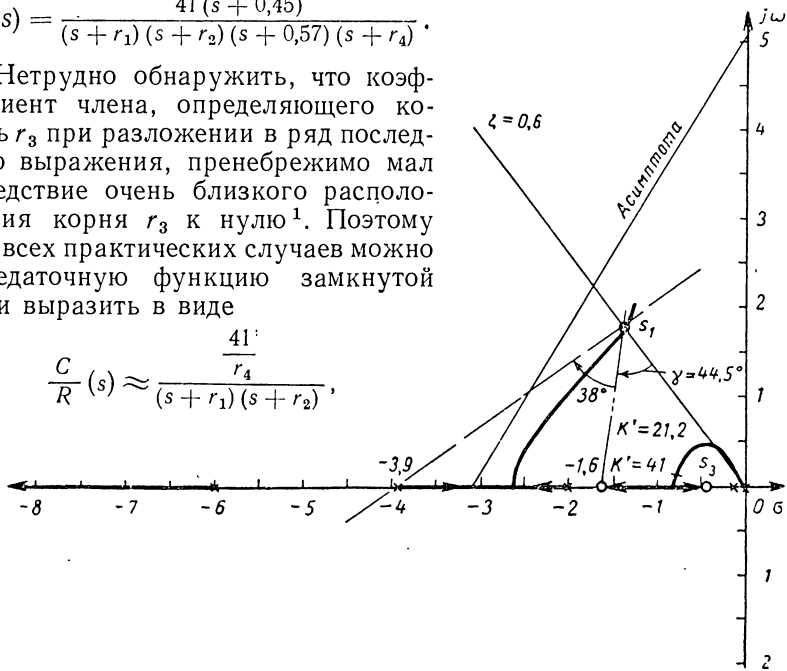
где r_1, r_2, r_3, r_4 обозначает места расположения корней характеристического уравнения, соответствующие коэффициенту $K' = 41$, как показано на фиг. 8. 16. Корень r_1 соответствует, конечно, выбранной

точке s_1 в плоскости s , т. е. $s_1 = r_1$. Корень r_2 представляет просто комплексный сопряженный корень r_1 . Третий корень r_3 , найденный ранее, равен 0,57. Значение четвертого корня r_4 не было вычислено, так как он лежит слишком далеко в плоскости s и не может оказывать вредного влияния на переходные процессы. Следовательно, уравнение (8.40) может быть написано в следующем виде:

$$\frac{C}{R}(s) = \frac{41(s + 0,45)}{(s + r_1)(s + r_2)(s + 0,57)(s + r_4)}$$

Нетрудно обнаружить, что коэффициент члена, определяющего корень r_3 при разложении в ряд последнего выражения, пренебрежимо мал вследствие очень близкого расположения корня r_3 к нулю¹. Поэтому для всех практических случаев можно передаточную функцию замкнутой цепи выразить в виде

$$\frac{C}{R}(s) \approx \frac{\frac{41}{r_4}}{(s + r_1)(s + r_2)}$$



Фиг. 8. 17. Расчет коррекции по опережению и запаздыванию без применения компенсации полюсов нулями:

I — асимптота;

$$G_f(s) = \frac{K_f}{s(1 + s/2)(1 + s/6)} ; \quad G_d G_g(s) = \frac{1,6(1 + s/1,6)(1 + s/0,45)}{3,9(1 + s/3,9)(1 + s/0,14)}$$

так что динамика системы будет в основном определяться корнями, расположенными в точках $s_{1,2} = -r_{1,2}$.

В случае применения другого метода расчета, основанного на компенсации полюсов нулями, необходимо принять меры, чтобы избежать положения, когда выбранные места расположения комплексных сопряженных корней характеристического уравнения приобретают второстепенную роль. Например, когда коррекция при помощи опере-

¹ Здесь автор хочет выразить ту мысль, что близость полюса $s = -0,57$ передаточной функции к ее нулю $-0,45$ позволяет осуществить приблизительную компенсацию полюса нулем, т. е. сократить множители $\frac{s + 0,45}{s + 0,57} = 1$ (Прим. ред.).

жающе-запаздывающего контура рассчитывается путем непосредственного применения методов, изложенных в разделе 8.3 и 8.4, без использования компенсации полюсов нулями, тогда решение, показанное на фиг. 8.17, очень сходно с этим результатом. В этом случае ноль и полюс передаточной функции опережающего корректирующего контура будут расположены соответственно в точках $(-1, 6)$ и $(-3, 9)$, в то время как интегрирующее звено будет находиться в том же месте, как и в примере 8.4. Из результирующего годографа можно определить, что дополнительные ветви годографа удаляются от оси и находятся вблизи координат. Теперь исследование показывает, что эти корни не будут больше превалировать в подобном расчете, хотя точка s_1 продолжает оставаться точкой годографа, определяющей необходимый коэффициент скорости. Это объясняется тем, что вблизи точки s_3 на фиг. 8.17, соответствующей тому же коэффициенту усиления разомкнутой цепи, возникает другая пара комплексных сопряженных корней.

8.6. РАСЧЕТ ДВОЙНОГО ОПЕРЕЖАЮЩЕГО КОНТУРА В ПЛОСКОСТИ s

Расчет двойного опережающего контура производится совершенно аналогичным образом, как и простого опережающего контура. Необходимое изменение зависит от значения вычисленного угла λ опережения по фазе. Когда этот угол очень большой, то лучше продолжить расчет, исходя из двойного опережающего контура. Тогда каждая часть двойного опережающего контура будет создавать свое опережение по фазе, определяемое выражением

$$\lambda^* = \frac{1}{2} \lambda. \quad (8.41)$$

Совершенно ясно, что в случае, когда может быть применен тройной опережающий контур, тогда следует использовать коэффициент $1/3$. Ввиду того, что расчет опережающего контура связан с введением двойного нуля в общей конфигурации расположения полюсов и нулей передаточной функции скорректированной системы, необходимо принять меры, чтобы избежать положения, когда выбранные корни будут играть второстепенную роль, а не превалирующую в определении динамики системы. Для иллюстрации порядка расчета и выводов используем следующий пример.

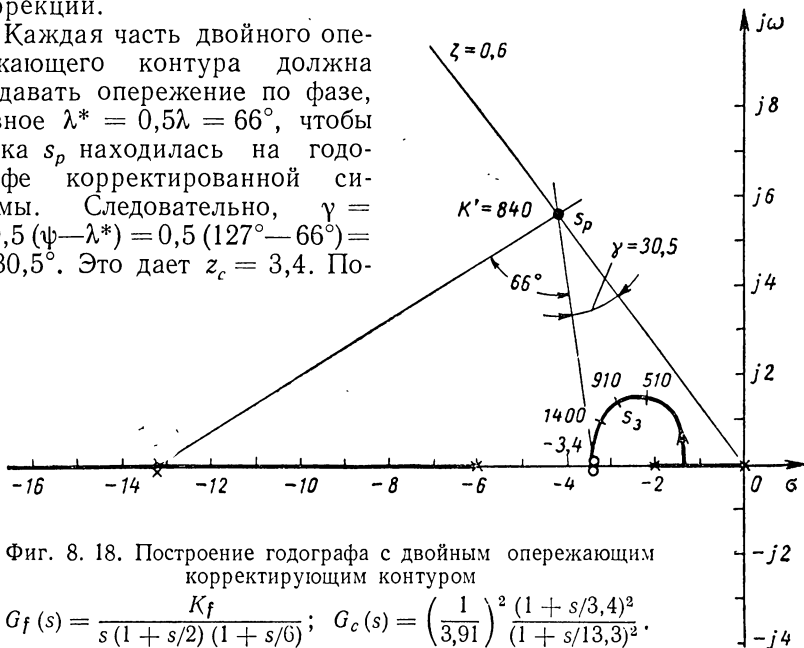
Пример 8.5. Следует рассчитать коррекцию системы с передаточной функцией

$$G_f(s) = \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)},$$

чтобы она удовлетворяла следующим заданным условиям: относительный коэффициент демпфирования $\zeta = 0,6$; преобладающая постоянная времени меньше $1/3$ сек; ширина полосы пропускания частот меньше 8 рад/сек; коэффициент скорости $= 4,5$ сек $^{-1}$. В плоскости s выберем точку s_p (фиг. 8.18), которая удовлетворяет первым трем требованиям. Измерение угла ψ дает 127° . Запаздывание по

фазе в точке s_p находится на основании конфигурации расположения полюсов и нулей функции $G_f(s)$. Отсюда имеем $\varphi = 48^\circ = -312^\circ$; следовательно, $\lambda = 312^\circ - 180^\circ = 132^\circ$. Полученное большое значение является показателем того, что двойной опережающий контур необходим для коррекции системы. Кроме того, применение этой величины вместе со значением угла ψ в равенстве (8. 28) дает отрицательное значение для угла γ , что, конечно, бессмысленно. Это может служить ясным показателем невозможности простой опережающей коррекции.

Каждая часть двойного опережающего контура должна создавать опережение по фазе, равное $\lambda^* = 0,5\lambda = 66^\circ$, чтобы точка s_p находилась на годографе скорректированной системы. Следовательно, $\gamma = = 0,5(\psi - \lambda^*) = 0,5(127^\circ - 66^\circ) = = 30,5^\circ$. Это дает $z_c = 3,4$. По-



Фиг. 8. 18. Построение годографа с двойным опережающим корректирующим контуром

$$G_f(s) = \frac{K_f}{s(1+s/2)(1+s/6)}; \quad G_c(s) = \left(\frac{1}{3,91}\right)^2 \frac{(1+s/3,4)^2}{(1+s/13,3)^2}$$

строение прямой, расположенной под углом $(66^\circ + 30,5^\circ)$ к линии относительного коэффициента демпфирования; позволяет определить точку $p_c = 13,3$.

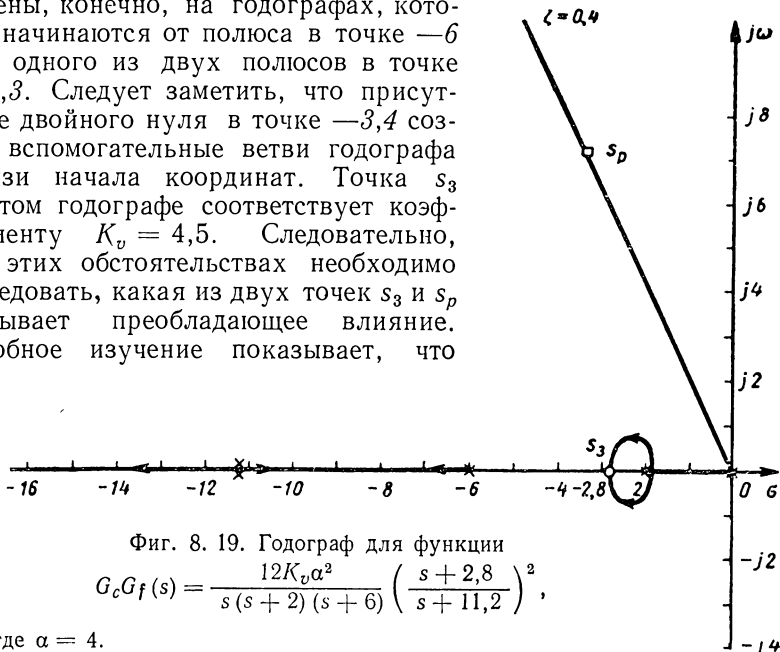
Окончательные результаты расчета: $\tau = 1/p_c = 1/13,3 \text{ сек}$; $\alpha = = 13,3/3,4 = 3,91$. Для коррекции необходимо два подобных контура.

Проверка значения коэффициента скорости необходима для определения, требуется ли перемещение точки s_p по линии ζ при соблюдении условия о ширине полосы пропускания частот. Передаточную функцию скорректированной системы можно выразить следующим образом:

$$G_f G_c(s) = \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1+s\alpha\tau}{1+s\tau}\right)^2 = \frac{12K_v\alpha^2}{s(s+2)(s+6)} \left(\frac{s+z_c}{s+z_p}\right)^2 \quad (8. 42)$$

Из этого выражения следует $K' = 12K_v\alpha^2$ и $K_v = \frac{K_f}{\alpha^2}$. Изменение коэффициента усиления в точке s_p при помощи спирального лекала дает $K' = 840$. Следовательно, коэффициент скорости равняется $K_v = K'/12\alpha^2 = 840/12 \cdot (3,91)^2 = 4,6$, что вполне удовлетворительно.

На фиг. 8. 18 показан неполный годограф скорректированной системы. Точка s_p и ее комплексная сопряженная величина расположены, конечно, на годографах, которые начинаются от полюса в точке $-b$ и от одного из двух полюсов в точке $-13,3$. Следует заметить, что присутствие двойного нуля в точке $-3,4$ создает вспомогательные ветви годографа вблизи начала координат. Точка s_3 на этом годографе соответствует коэффициенту $K_v = 4,5$. Следовательно, при этих обстоятельствах необходимо исследовать, какая из двух точек s_3 и s_p оказывает преобладающее влияние. Подобное изучение показывает, что



Фиг. 8. 19. Годограф для функции

$$G_c G_f(s) = \frac{12K_v \alpha^2}{s(s+2)(s+6)} \left(\frac{s+2,8}{s+11,2} \right)^2,$$

где $\alpha = 4$.

корень в точке s_p является преобладающим. Оценка этого результата может быть сделана на основании уравнения (8.42), учитывая, что корень в точке s_3 пропорционален $(s_3 + 3,4)^2$. Так как эта величина меньше единицы, причем возведена в квадрат, окончательное значение очень мало. Заметим, что чем меньше дуга этого вспомогательного годографа, тем меньшую роль играет корень s_3 .

Двойной опережающий контур был рассчитан по методам, описанным в главе 6, чтобы иметь возможность сопоставить результаты расчета в плоскости s и в частотной области. Одним из расчетных критериев был использован предельный сдвиг фаз 45° . Первоначально попытались применить один опережающий контур. Потребовалось несколько повторных контрольных расчетов, прежде чем стала очевидна необходимость коррекции при помощи двойного опережающего контура. Как уже подчеркивалось раньше, этот вывод становится непосредственно очевидным при применении корневого метода. Наконец, было найдено, что передаточная функция корректирующего

контура для системы, которая будет удовлетворять заданным условиям, имеет вид

$$G_c(s) = \left(\frac{1 + \frac{s}{2,8}}{1 + \frac{s}{11,2}} \right)^2.$$

Принимая во внимание, что в расчете был применен предельный сдвиг фаз 45° , точка s_p , которая удовлетворяет фазовому критерию -180° при расчете по корневому методу, была найдена на линии относительного коэффициента демпфирования при значении последнего $\xi = 0,4$ (фиг. 8. 19). Проверка коэффициента скорости для этой точки дает $K' = 960$, откуда $K_v = \frac{K'}{12} \alpha^2 = \frac{960}{12 \cdot (4)^2} = 5$. Вспомогательный годограф в этом случае приводит к остатку в точке s_3 , который практически пренебрежимо мал. Следовательно, корень в точке s_3 (и его комплексно-сопряженное значение) полностью определяет характер переходного процесса.

8. 7. РАСЧЕТ КОРРЕКЦИИ В ПЛОСКОСТИ s ДЛЯ СЛУЧАЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОЛЮСОВ

Коррекция системы, характеристическое уравнение которой имеет пару комплексных корней и слабое демпфирование, представляет значительную трудность. Попытаемся рассмотреть несколько методов решения задачи, чтобы подчеркнуть некоторые ограничения, связанные с этой задачей. Для иллюстрации опять используем один пример.

Пример 8. 6. Неизменная часть системы управления с обратной связью характеризуется в разомкнутом состоянии передаточной функцией

$$G_f(s) = \frac{K_f}{s \left[\left(\frac{s}{1,68} \right)^2 + 0,7s + 1 \right]} = \frac{2,82K_f}{s(s^2 + 2s + 2,82)}. \quad (8. 43)$$

Таким образом, первоначальная система имеет передаточную функцию разомкнутой цепи с полюсами, расположенными в точках $(-1 \pm j 1,35)$, причем относительный коэффициент демпфирования равен 0,6. В основном задача расчета коррекции состоит в том, чтобы относительный коэффициент демпфирования замкнутой системы не превышал значения этого коэффициента в полюсах передаточной функции разомкнутой цепи. Кроме того, заданное значение коэффициента скорости должно быть также соблюдено.

Более подробные заданные условия не приводятся, потому что цель, поставленная здесь, состоит только в рассмотрении методов решения.

Метод компенсации: порядок расчета по этому методу состоит в замене трудно определяемых полюсов передаточной функции

разомкнутой цепи на более удобно расположенные действительные полюса. Отсюда следует, что корректирующая передаточная функция может быть выражена в виде

$$G_c(s) = \frac{s^2 + 2s + 2,82}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad (8.44)$$

где p_1 и p_2 означают действительные полюса, которые должны быть выбраны таким образом, чтобы создать возможность получения желательной характеристики.

Объединение уравнений (8.43) и (8.44) приводит к передаточной функции скорректированной разомкнутой цепи

$$G_f G_c(s) = \frac{2,82 K_f}{s(s^2 + 2s + 2,82)} \cdot \frac{s^2 + 2s + 2,82}{(s + p_1)(s + p_2)}.$$

Перегруппировка членов последнего выражения дает

$$\begin{aligned} G_f G_c(s) &= \frac{K_f}{s \left[\left(\frac{s}{1,68} \right)^2 + 0,7s + 1 \right]} \cdot \frac{2,82}{p_1 p_2} \cdot \frac{\left(\frac{s}{1,68} \right)^2 + 0,7s + 1}{\left(1 + \frac{s}{p_1} \right) \left(1 + \frac{s}{p_2} \right)} = \\ &= \frac{K_v}{s \left(1 + \frac{s}{p_1} \right) \left(1 + \frac{s}{p_2} \right)}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

где

$$K_v = 2,82 \frac{K_f K_c}{p_1 p_2} \quad (8.46)$$

Коэффициент усиления K_c введен в выражение для того, чтобы иметь возможность варьировать параметры для получения необходимого коэффициента скорости. После введения выражения (8.45) в уравнение годографа получаем

$$G_f G_c(s) = \frac{p_1 p_2 K_v}{s(s + p_1)(s + p_2)} = \frac{K'}{s(s + p_1)(s + p_2)}, \quad (8.47)$$

где

$$K' = p_1 p_2 K_v. \quad (8.48)$$

Из зависимости $1 + G_f G_c(s) = 0$ следует, что характеристическое уравнение скорректированной замкнутой системы будет иметь вид

$$s^3 + (p_1 + p_2)s^2 + p_1 p_2 s + p_1 p_2 K_v = 0. \quad (8.49)$$

Таким образом, после выбора желательного расположения корней, исходя из условий получения требуемой динамической и статической характеристик, нетрудно будет определить частные значения p_1 и p_2 . Это необходимо потому, что характеристическое уравнение может быть выражено тогда через выбранные корни, а именно

$$(s + r_1)(s + r_2)(s + r_3) = 0, \quad (8.50)$$

где r_1, r_2, r_3 представляют выбранные места расположения корней замкнутой системы. Раскрытие выражения (8.50) приводит к

$$s^3 + (r_1 + r_2 + r_3) s^2 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) s + r_1 r_2 r_3 = 0. \quad (8.51)$$

Ввиду того, что уравнение (8.49) содержит только два неизвестных p_1 и p_2 и так как все коэффициенты уравнения (8.51) известны, необходимо только приравнять две пары любых коэффициентов для определения новых полюсов разомкнутой цепи. Следовательно,

$$r_1 r_2 r_3 = p_1 p_2 K_v \quad (8.52a)$$

и

$$r_1 + r_2 + r_3 = p_1 + p_2. \quad (8.52b)$$

Обычно r_1 и r_2 выбираются комплексными сопряженными значениями, чтобы обеспечить желательную динамическую характеристику, а корень r_3 затем выбирается произвольно в 6—10 раз больше действительной части выражения для корня r_1 .

Этот метод расчета далее не рассматривается, в первую очередь, потому, что синтез корректирующего контура, передаточная функция которого содержит квадратичный член, не может быть осуществлен при помощи простого последовательного соединения емкости и сопротивления; контурами на RC мы ограничиваемся в нашем расчете.

Расчет стандартного опережающего контура. Ниже повторяется порядок расчета, изложенный в разделе 8.4. Для иллюстрации предположим, что относительный коэффициент демпфирования скорректированной системы должен быть равен 0,8 и коэффициент K_v не должен быть меньше 10 сек^{-1} . В качестве первой попытки выберем точку s_1 , расположенную на линии $\zeta = 0,8$, как показано на фиг. 8.20. Измерения дают $\psi = 143^\circ$ и $\varphi = -422^\circ$, отсюда $\lambda = 242^\circ$; это большое значение угла λ свидетельствует о необходимости применения тройного опережающего контура. Следовательно, $\lambda^* = 81^\circ$, $\gamma = 31^\circ$, $z_c = 1,9$ и $p_c = 6,0$ при $\alpha = 3,16$. Проверка значения коэффициента K' для точки s_1 дает $K' = 160$, откуда $K_v = K'/2,82 \cdot (3,16)^3 = 1,35$.

Ввиду того, что коэффициент скорости слишком мал, выберем точку s_2 несколько выше на линии $\zeta = 0,8$. Для этого случая $\varphi = -424^\circ$, $\lambda^* = 81^\circ$, $\gamma = 31^\circ$, $z_c = 3,3$ и $p_c = 10,5$ при $\alpha = 3,18$. Следовательно, в точке s_2 $K' = 850$, так что $K_v = 9,4$, что можно считать вполне удовлетворительным. Однако дальнейшие исследования показывают, что точка s_2 не является больше преобладающим корнем, хотя она и удовлетворяет заданным условиям. В действительности при более полном построении годографа для этой скорректированной системы становится более очевидно, что точка s_3 на годографе, начинающемся из полюса в $(-1 \pm j 1,35)$ (при котором усиление почти одинаково, как и в точке s_2) несомненно имеет неменьшее значение для определения динамического поведения, чем точка s_2 . Поэтому отсюда необходимо сделать вывод, что этот метод расчета не приводит к оптимальному решению расположения полюсов и нулей передаточной функции скорректированной системы.

Применение частотных характеристик для нахождения решения в плоскости s . Основное назначение частотных характеристик первоначальной системы состоит в том, чтобы быстро определить наиболее оптимальные места расположения нулей и полюсов передаточной функции опережающего контура.

На фиг. 8. 21 построена характеристика затухания первоначальной системы, которая соответствует коэффициенту $K_v = 10$. Заметим, что на положение прямолинейных асимптот влияет еще квадратич-

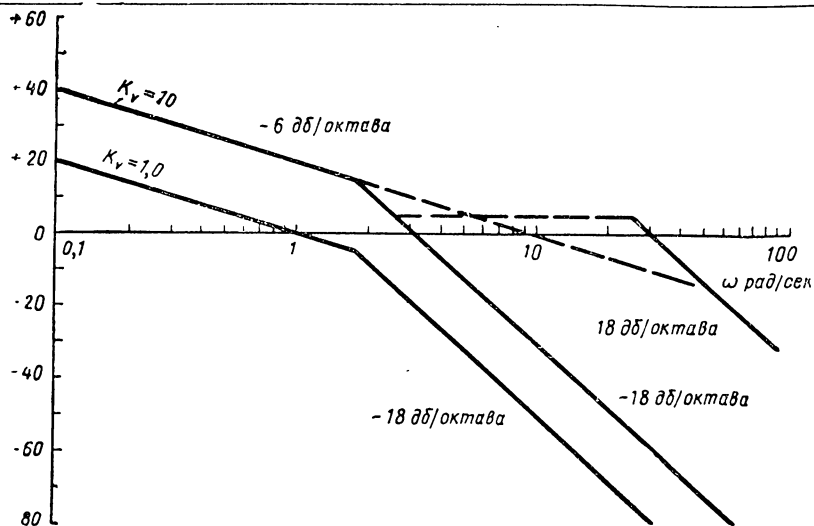


Фиг. 8. 20. Тройная опережающая коррекция неизменной части системы, имеющей комплексные полюсы:

1 — асимптота.

ный член, хотя относительный коэффициент демпфирования равен 0,4. Это было сделано только для того, чтобы порядок расчета в плоскости s был наглядным. Изучение фиг. 8. 21 на основании частотных методов вскрывает необходимость применения тройного опережающего контура, характеризуемого следующими точками $z_c = 2,5$ и $p_c = 25$ при $\alpha = 10$.

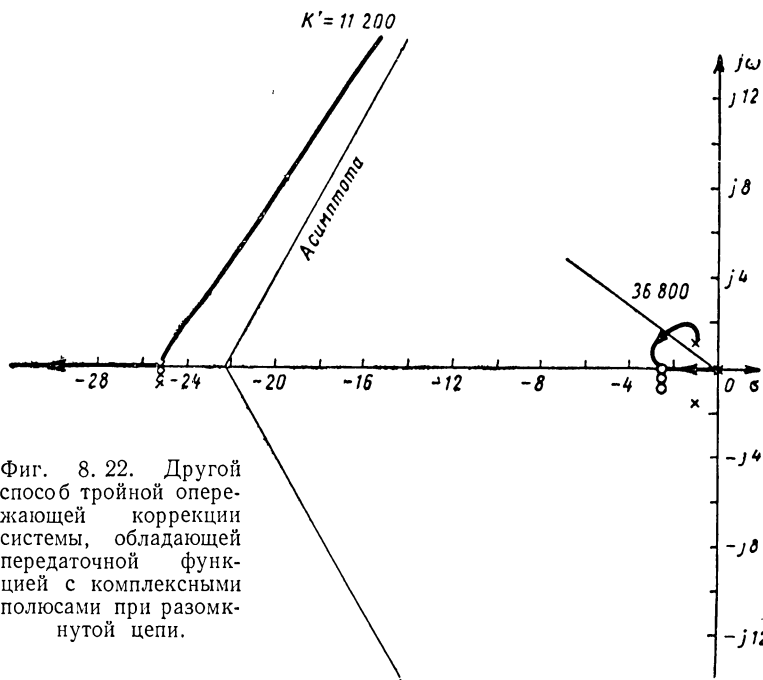
Применение этого расположения полюса и нуля для коррекции приводит к годографу, показанному на фиг. 8. 22. Необходимо заметить, что в результате удаления друг от друга полюса и нуля передаточной функции тройного опережающего контура форма годографа очень существенно изменилась. Ветви годографа, начинающиеся в комплексных полюсах передаточной функции разомкнутой цепи, теперь отклоняются влево и вниз к отрицательной действительной оси с увеличением коэффициента усиления. Теперь можно



Фиг. 8. 21. Характеристика демпфирования для функции

$$G_f(s) = \frac{10}{s [(s/1,68)^2 + 0,7s + 1]}$$

Горизонтальная пунктирная кривая отражает влияние тройного корректирующего опережающего контура.

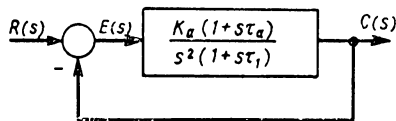


Фиг. 8. 22. Другой способ тройной опережающей коррекции системы, обладающей передаточной функцией с комплексными полюсами при разомкнутой цепи.

сделать вывод о возможности выбора надлежащих значений относительного коэффициента демпфирования замкнутой цепи. В действительности при $\zeta = 0,8$ находим, что коэффициент скорости немного превышает требуемое значение 10. Конечно, введение тройного опережающего контура в систему повышает ее порядок. Безусловно, кроме желательной формы характеристики, существуют еще другие формы, например, можно выбрать другую пару комплексных корней при более слабом демпфировании, с высокой частотой демпфированных колебаний и очень малой амплитудой. Однако не таким малым по величине будет корень, расположенный на годографе между 0 и $-2,5$, как показано на фиг. 8. 22. С этим корнем сопряжено увеличение времени регулирования.

8. 8. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ В ПЛОСКОСТИ s

Переменный параметр при построении годографа часто является постоянным членом характеристического уравнения замкнутой системы. Иногда этот постоянный член непосредственно содержит коэффициент усиления разомкнутой цепи так, что диаграмма годографа дает представление, каким образом изменения коэффициента усиления разомкнутой цепи влияют на динамические свойства системы. Однако при некоторых условиях может быть желательно изучить, каким образом увеличение постоянной времени системы зависит от корней характеристического уравнения. Мы уже знакомы со способом исследования этого вопроса в частотной области. Для этого необходимо только изменить положение частоты точки сопряжения и определить, как сдвиг частоты, в свою очередь, изменяет пределы



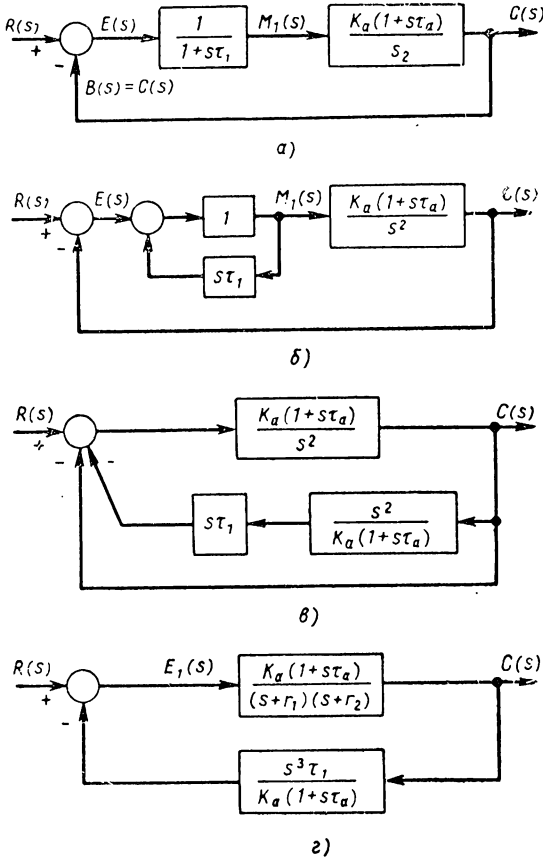
Фиг. 8. 23. Структурная схема системы класса 2.

коэффициента усиления и фазового угла. Для осуществления аналогичного исследования в плоскости s необходимо изучить структурную схему системы и преобразовать ее таким образом, чтобы отделить влияние постоянной времени. Конечно, не следует забывать, что это преобразование оставляет неизменным характеристическое уравнение. Характеристическое уравнение изменяется только по форме, чтобы выделить необходимую постоянную времени в надлежащем месте. Для иллюстрации порядка расчета исследуем влияние изменения постоянной времени τ_1 на систему, изображенную на фиг. 8. 23, применив для этого корневой метод. На первой стадии расчета необходимо выделить член, содержащий величину τ_1 , как показано на фиг. 8. 24, а. Затем отделяют в виде отдельного блока с передаточной функцией $s\tau_1$, как изображено на фиг. 8. 24, б. Применение соответствующей теоремы преобразования структурной схемы (см. табл. 4. 1, п. 7) приводит к схеме, показанной на фиг. 8. 24, в. После этого можно прямую цепь передачи соединить

с единичной обратной связью, в результате чего получим передаточную функцию измененной прямой цепи

$$\frac{C}{E_1}(s) = \frac{K_a(1 + s\tau_a)}{s^2 + \left[\frac{K_a(1 + s\tau_a)}{s^2} \right]} = \frac{K_a(1 + s\tau_a)}{s^2 + s\tau_a K_a + K_a}. \quad (8.53)$$

Примем, что члены K_a и τ_a в уравнении (8.53) остаются неизменными, так как мы намереваемся изучить влияние изменений постоян-



Фиг. 8.24. Структурные схемы для иллюстрации стадий выделения постоянной времени с целью изучения годографа:

a — отделение передаточной функции, содержащей τ_1 ; *б* — отделение $s\tau_1$ от $1/(1 + s\tau_1)$; *в* — дальнейшее преобразование структурной схемы; *г* — окончательно преобразованная структурная схема.

ной времени τ_1 . После этого корни квадратного выражения знаменателя могут быть найдены. Для удобства обозначим эти корни $s_{1,2} = -r_{1,2}$. Затем уравнение (8.53) можно переписать в следующем виде:

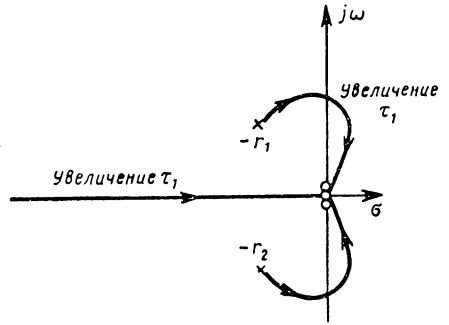
$$\frac{C}{E_1}(s) = \frac{K_a(1 + s\tau_a)}{(s + r_1)(s + r_2)}. \quad (8.54)$$

Теперь структурная схема фиг. 8.24, *в* приобретает форму, показанную на фиг. 8.24, *г*.

Изучение фиг. 8. 24, *г* показывает, что поставленная нами цель достигнута. Постоянная времени τ_1 выделена и выражена как коэффициент усиления в передаточной функции эквивалентной разомкнутой цепи данной замкнутой системы. Она выражается следующим образом:

$$[HG(s)]_{\text{экр}} = \frac{\tau_1 s^3}{(s + r_1)(s + r_2)}. \quad (8. 55)$$

Здесь необходимо пояснить несколько необычную форму уравнения (8. 55). Необходимо ясно понять, что это выражение представляет передаточную функцию эквивалентной разомкнутой цепи только постольку, поскольку она в состоянии описывать поведение замкнутой цепи. Нельзя терять из виду того обстоятельства, что уравнение (8. 55) получено в результате преобразования структурной схемы, для которой было поставлено ограничивающее условие, что отношение $C(s)/R(s)$ при замкнутой цепи никоим образом не изменяется. Следовательно, уравнение (8. 55) является просто другим выражением для передаточной функции разомкнутой цепи, которое приводит к совершенно одинаковой передаточной функции замкнутой цепи, как это было



Фиг. 8. 25. Построение годографа для функции.

показано на фиг. 8, 24, *а*. Неправильно применять уравнение (8. 55) для какой-либо другой цели, кроме получения информации о коэффициенте усиления в характеристическом уравнении замкнутой системы. Поэтому бессмысленно использовать уравнение (8. 55) для классификации системы или даже для определения предельного фазового угла. В силу этого уравнение (8. 55) не представляет передаточную функцию эквивалентной разомкнутой цепи разомкнутой системы фиг. 8. 24, *а*. Для определения последней необходимо преобразовать структурную схему при граничных условиях, благодаря чему может быть достигнута эквивалентность между $E(s)$ и $B(s)$ для разомкнутой цепи в точке, где применена функция $E(s)$.

Из годографа по уравнению (8. 55) можно получить сведения о корнях характеристического уравнения системы, изображенной на фиг. 8. 24, *а*. Конечно, уравнение имеет такую форму, что эти сведения определяются в функции постоянной времени τ_1 . Для иллюстрации общей формы окончательных годографов предположим, что постоянные K_a и τ_a в уравнении (8. 53) имеют такие значения, что корни $-r_{1,2}$ являются комплексными сопряженными. Тогда типичный годограф будет иметь вид, показанный на фиг. 8. 25. Расположение годографа ясно показывает, что с увеличением постоянной времени τ_1 наступает такая точка характеристики, где система

становится абсолютно неустойчивой. Система на фиг. 8. 23 имеет следующее характеристическое уравнение:

$$1 + \frac{K_a(1 + s\tau_a)}{s^2(1 + s\tau_1)} = 0, \quad (8. 56)$$

что приводит к

$$s^2\tau_1 + s^2 + K_a\tau_a s + K_a = 0. \quad (8. 57)$$

Характеристическое уравнение, которое описывает систему на фиг. 8. 24, *з*, имеет вид

$$1 + \frac{s^3\tau_1}{(s + r_1)(s + r_2)} = 0; \quad (8. 58)$$

или
$$(s + r_1)(s + r_2) + s^3\tau_1 = 0. \quad (8. 59)$$

Но также
$$(s + r_1)(s + r_2) = s^3 + K_a\tau_a s + K_a. \quad (8. 60)$$

Следовательно, уравнение (8. 59) приобретает вид

$$s^3\tau_1 + s^2 + K_a\tau_a s + K_a = 0. \quad (8. 61)$$

Нетрудно убедиться, что последнее выражение совпадает с уравнением (8. 57). Конечно, аналогичный порядок расчета показывает, что передаточные функции замкнутой цепи будут также одинаковы для обеих систем.

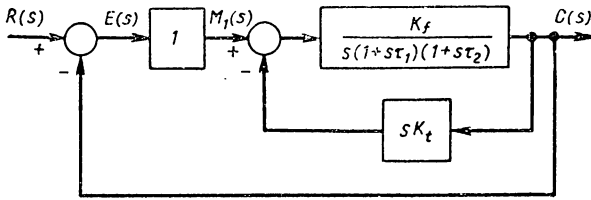
8. 9. ВЛИЯНИЕ ТАХОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. АНАЛИЗ СИСТЕМ В ПЛОСКОСТИ *s*

В предыдущих главах было исследовано как во временной области, так и в частотной области влияние тахометрической обратной связи (или демпфирования, пропорционального выходной скорости) на увеличение устойчивости системы. Для полноты изучим теперь влияние тахометрической обратной связи в плоскости *s*. Как можно ожидать, анализ в плоскости *s* дает более ясный и всесторонний метод определения влияния демпфирования, пропорционального выходной скорости, на изменение корней характеристического уравнения системы. На фиг. 8. 26, *а* показана типичная схема, где может быть с успехом применена тахометрическая обратная связь. Путем преобразования получена другая структурная схема, изображенная на фиг. 8. 26, *з*. Затем в результате объединения прямой цепи передачи с единичной обратной связью получаем выражение

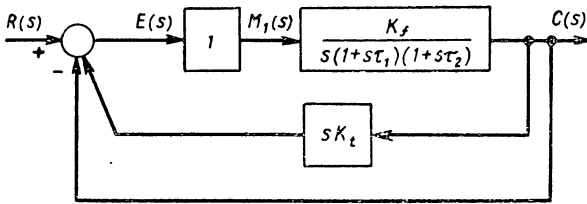
$$\frac{C}{E_1}(s) = \frac{K_f}{s^3\tau_1\tau_2 + s^2(\tau_1 + \tau_2) + s + K_f}, \quad (8. 62)$$

что позволяет составить новую структурную схему, показанную на фиг. 8. 26, *в*. Теперь стабилизирующее влияние демпфирования,

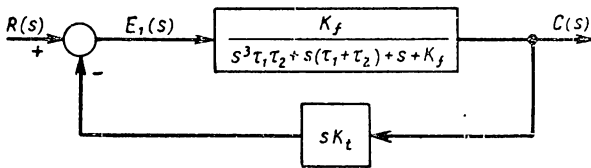
пропорционального выходной скорости, лучше всего иллюстрируется в предположении, что коэффициент усиления в уравнении (8.62) подобран таким образом, что система работает почти на границе абсолютной неустойчивости, т. е. коэффициенту K_f придается такое значение, при котором оба корня знаменателя уравнения (8.62)



а)



б)



в)

Фиг. 8.26. Преобразование структурной схемы системы с применением демпфирования, пропорционального выходной скорости:

а — система третьего порядка с тахометрической обратной связью, б — модифицированная форма структурной схемы; в — одноцепочечный вариант а.

оказываются на мнимой оси. Обозначив этот коэффициент усиления K_{f0} , можно показать¹, что требуемое значение определяется по формуле

$$K_{f0} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}. \quad (8.63)$$

Далее, оба корня, расположенные на мнимой оси, определяются выражением

$$s_{1,2} = \pm j \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}. \quad (8.64)$$

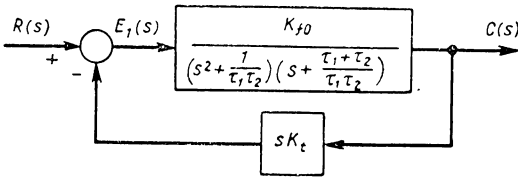
¹ Это следует из критерия устойчивости Гурвица $\tau_1 \tau_2 K_f - (\tau_1 + \tau_2) > 0$. Если неравенство обратить в равенство, то получим (8.63) (Прим. ред.).

Третий корень расположен в точке

$$s_3 = -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}. \quad (8.65)$$

Если K_f сделать равным коэффициенту K_{f0} , то уравнение (8.62) может быть выражено в виде

$$\frac{C}{E_1}(s) = \frac{K_{f0}}{\left(s^2 + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}\right) \left[s + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}\right]}. \quad (8.66)$$

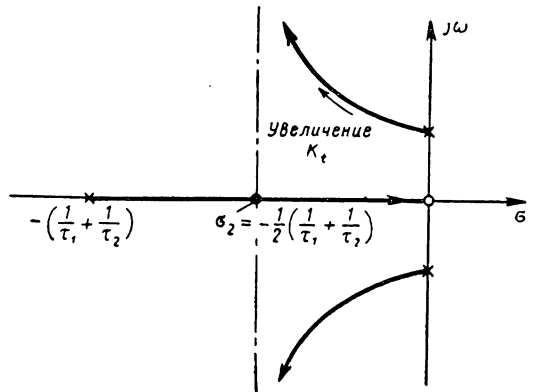


Фиг. 8.27. Модификация структурной схемы *в* на фиг. 8.26; передаточная функция прямой цепи имеет полюса на мнимой оси.

Соответствующее изменение структурной схемы фиг. 8.26, *в* дано на фиг. 8.27. Отсюда передаточную функцию разомкнутой цепи системы на фиг. 8.27 можно написать в следующем виде:

$$HG(s) = \frac{sK_t K_{f0}}{\left(s^2 + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}\right) \left[s + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}\right]}. \quad (8.67)$$

На фиг. 8.28 показан годограф этой системы. Изучение ветвей годографа позволяет ясно определить, каким образом тахометрическая обратная связь влияет на динамическую характеристику замкнутой системы. В случае, когда демпфирование, пропорциональное выходной скорости, не применяется (т. е. $K_t = 0$), то система имеет два корня на мнимой оси. Это означает, что реакция системы на входную команду и возмущение всегда приводят к незатухающим колебаниям.



Фиг. 8.28. Построение годографа неустойчивой системы третьего порядка с тахометрической обратной связью.

С введением тахометрической обратной связи корни характеристического уравнения перемещаются дальше в левую полуплоскость, благодаря чему система становится хорошо демпфированной. В действительности значение коэффициента K_t , необходимое для получения заданного относительно коэффициента демпфирования, легко определяется по масштабной диаграмме годографа.

ЗАДАЧИ

8. 1. Система управления с обратной связью имеет заданную схему, которая описывается передаточной функцией следующего вида:

$$HG(s) = \frac{K}{s^2(s + p_1)}.$$

а) Построить годограф для заданной структурной схемы системы.
б) Определить влияние на этот годограф нуля передаточной функции, выбранного таким образом, что $z < p_1$. Дать соответствующие пояснения о характере результирующей динамической характеристики при увеличении коэффициента усиления.

в) Повторить пункт «б» для случая, когда $z > p_1$.

г) Повторить пункт «б» для случая двойного нуля.

д) Повторить пункт «в» для случая двойного нуля.

8. 2. Систему задачи 8. 1 необходимо скорректировать при помощи двойного опережающего контура. Построить результирующий годограф для следующих условий:

а) Величина полюса передаточной функции двойного опережающего контура меньше p_1 .

б) Величина полюса передаточной функции двойного опережающего контура больше p_1 и величина нуля меньше p_1 .

в) Величина нуля для двойного опережающего контура больше p_1 .

г) Значение нуля для двойного опережающего контура равно p_1 .

Каждый случай необходимо снабдить соответствующими комментариями о характере полученного динамического поведения системы с повышением коэффициента усиления.

8. 3. Проверить справедливость уравнения (8. 28) на основании соответствующих теорем геометрии и фиг. 8. 11.

8. 4. Рассчитать опережающий контур стандартного типа при условиях, заданных в примере 8. 3, при помощи частотных методов, описанных в главе 6. Сравнить и обсудить этот результат с данными, полученными в примере 8. 3.

8. 5. Неизменная схема системы управления с единичной обратной связью имеет передаточную функцию

$$G_f(s) = \frac{K_v}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)}.$$

При помощи годографа рассчитать корректирующие контуры таким образом, чтобы скорректированная система удовлетворяла следующим условиям: относительный коэффициент демпфирования $\xi = 0,4$, $K_v = 20$, ширина полосы частот не должна превышать 0,5 гц, постоянная времени запаздывающего контура не должна превышать 20 сек. Определить время регулирования скорректированной системы.

8. 6. Применив расчет по методу полюсов и нулей в плоскости s , рассчитать опережающий и запаздывающий корректирующий

контур таким образом, чтобы система, описываемая передаточной функцией

$$G_f(s) = \frac{180}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)},$$

удовлетворяла следующим заданным условиям: $\zeta = 0,4$, преобладающая постоянная времени меньше 1 сек, ширина полосы пропускания частот меньше 4 рад/сек, коэффициент скорости равен 180.

8. 7. Проверить и пояснить влияние неточной компенсации полюса нулем для скорректированной системы примера 8. 4. Рассмотреть два случая:

- а) ноль функции лежит немного правее полюса в точке -2 ;
- б) ноль функции лежит немного левее полюса в точке -2 .

8. 8. Система имеет неизменную схему, определяемую функцией $G_f(s) = K_f / \left[s^2 \left(1 + \frac{s}{5}\right) \right]$ Рассчитать коррекцию этой системы так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям: относительный коэффициент демпфирования $\zeta = 0,4$; преобладающая постоянная времени меньше 0,5 сек; коэффициент ускорения равен 10.

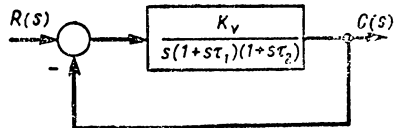
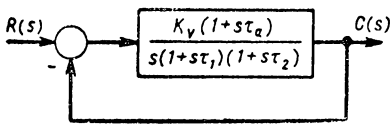
8. 9. Система управления с единичной обратной связью имеет передаточную функцию нескорректированной разомкнутой цепи следующего вида:

$$G_f(s) = \frac{K_f}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(1 + \frac{s}{6}\right)}.$$

Применив методы компенсации полюсов нулями, описанные в разделе 8. 7, рассчитать коррекцию, чтобы получить систему, удовлетворяющую следующим заданным условиям: относительный коэффициент демпфирования больше 0,5; ширина полосы пропускания частот меньше 10 рад/сек; преобладающая постоянная времени меньше $1/3$ сек; $K_v = 4,0 \text{ сек}^{-1}$.

8. 10. Найти решение примера 8. 4, применив методы компенсации полюсов нулями согласно описанию в разделе 8. 7. Критически рассмотреть полученные результаты.

8. 11. На фиг. 8. 29 дана структурная схема системы. Построить годограф для этой системы и показать, как изменения постоянной времени влияют на эту систему.



Фиг. 8. 29. Структурная схема системы. Фиг. 8. 30. Структурная схема системы.

8. 12. Применив годограф, показать влияние изменений постоянной времени τ_a на систему, показанную на фиг. 8. 29.

8. 13. На фиг. 8. 30 показана структурная схема системы; построив для нее годограф, следует показать, как изменения постоянной времени τ_1 оказывают влияние на эту систему.

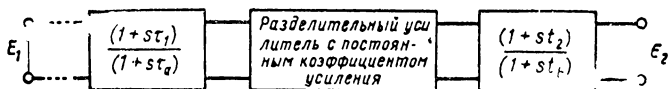
СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ КОНТУРОВ

Настоящая глава посвящается методам синтеза контуров RC . Необходимость синтеза непосредственно следует из корневого метода. В предыдущей главе было показано как нули и полюса, расположенные в плоскости s , изменяют форму годографа и тем самым изменяют характеристики замкнутой системы. Когда желательно выбрать положение нулей и полюсов, необходимых для получения требуемой коррекции системы, возникает вопрос, как осуществить на практике это расположение нулей и полюсов, особенно при помощи электрических контуров, включаемых в прямую цепь передачи. До сих пор мы занимались тремя основными типами корректирующих схем, а именно запаздывающими, опережающими и опережающе-запаздывающими контурами. В случае-этих простых контуров не возникает проблемы выбора параметров звеньев, когда передаточная функция была определена. Если два подобных корректирующих контура требуется ввести в систему (например, двойной опережающий контур), то между ними может быть включен разделительный усилитель, как показано на примере фиг. 6. 14, так что общая корректирующая передаточная функция выражается произведением передаточных функций отдельных звеньев. Рассмотрим обобщенную передаточную функцию следующего вида:

$$T(s) = \frac{E_2}{E_1}(s) = K \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\tau_3) \dots}{(1 + s\tau_a)(1 + s\tau_b)(1 + s\tau_c) \dots} \quad (9.1)$$

Эту функцию всегда возможно осуществить сочетанием множителей в числителе и знаменателе в виде дробей $(1 + s\tau_1)/(1 + s\tau_a)$, причем каждый член будет соответствовать основному запаздывающему или опережающему контуру. Контур, представляющие каждый из этих членов, могут быть затем соединены последовательно через разделительные усилители, как показано на фиг. 9. 1, чтобы получить требуемую общую передаточную функцию с постоянными числовыми значениями коэффициента усиления. Этот метод применения разделительных усилителей при синтезе является вынужденно ограниченным по двум причинам: во-первых, передаточная функция по уравнению (9. 1) ограничена тем, что нули и полюсы расположены

на отрицательной оси; во-вторых, применение разделительных усилителей для предотвращения влияния нагрузки между последовательно соединенными участками контура не желательно. При некоторых условиях, например в случае механических или пневматических систем, разделительные усилители не могут быть использованы для образования необратимой корректирующей передаточной функции. На основании теории синтеза контуров можно избежать этих ограничений в рассматриваемом порядке расчета, что позволит расширить наши значения в этой важной области. Во-первых, можно проверить любую конфигурацию расположения нулей и полюсов, полученную по корневому методу, с целью определить соответствие передаточной функции и упомянутой конфигурации и возможность осуществления передаточной функции при помощи линейных пассивных контуров. Во-вторых, можно определить условия, связанные с расположением нулей и полюсов этого контура, чтобы обеспечить возможность



Фиг. 9. 1. Синтез системы с помощью основных опережающих и запаздывающих корректирующих контуров с разделительным усилителем.

осуществления схемы только из сопротивлений и конденсаторов. Наконец, для известной конфигурации расположения нулей и полюсов возможно применить прямые способы расчета, чтобы прийти к заданному контуру, который обладает требуемой передаточной функцией.

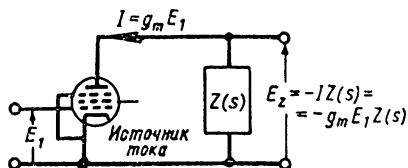
До подробного описания метода синтеза контуров следует рассмотреть несколько других существенных факторов. Первоначально следует признать, что задача синтеза контуров подробно рассмотрена в литературе. Поэтому все, что мы можем дать в настоящей книге, представляет несколько основных понятий по этому вопросу, причем особое внимание обращается на те специфические стороны, которые связаны с проектированием систем управления. В частности, рассмотрение ограничивается главным образом синтезом контуров на RC . Этот выбор был сделан по очень практическим соображениям. Как подчеркивалось в предыдущих главах, системы управления в основном состоят из фильтров нижних частот, причем частоты среза лежат ниже $0,01$ $гц$ для систем управления процессов и около 100 $гц$ для широкополосных систем. Следовательно, если электрический корректирующий контур практически работает в этом частотном диапазоне, то он может быть составлен только из сопротивлений и конденсаторов. Любое индуктивное сопротивление было бы слишком большим и дорогим для практического применения.

Другое обстоятельство, которое необходимо понять при синтезе контуров, состоит в том, что никогда нельзя дать один правильный ответ. Описываемые методы представляют собой порядок расчета,

который, если следовать шаг за шагом, позволяет определить ту или иную схему контура, имеющего предписанную передаточную функцию. Однако это не гарантирует получения оптимального контура с точки зрения количества звеньев или практического осуществления монтажной схемы. Другие методы расчета, которые приводят к различным схемам контура, также возможны. В разные моменты любого синтеза контуров возможно изменить методику таким образом, что будет получена совершенно другая схема контура. Это многообразие может показаться на первый взгляд большим недостатком, но не является неожиданным, если представить себе, что синтез в основном является конструктивной задачей и что часто существует столько различных способов расчета, сколько имеется конструкторов.

В действительности, это большое разнообразие методов расчета создает возможность для конструктора найти наилучший возможный ответ для своей частной задачи.

Наконец, следует подчеркнуть, что несмотря на первоочередной интерес к передаточным функциям, первые несколько разделов главы посвящены рассмотрению свойств импедансных функций у точки питания и их синтезу. Причина этого лежит в том, что проблема синтеза передаточной функции обычно сводится к синтезу импеданса. В этой связи интересно отметить, что любая импедансная функция $Z(s)$ у точки входа может быть преобразована в передаточную функцию в виде отношения двух напряжений $\frac{E_2}{E_1}(s) = \text{const.} Z(s)$, если импеданс $Z(s)$ включить последовательно с постоянным источником тока, например, импеданс пентода, как показано на фиг. 9. 2. Этот вид синтеза передаточной функции не рассматривается в настоящей главе, он упоминается только в связи с возможностью использования его преимущества на практике.



Фиг. 9. 2. Контур с использованием пентода, как источника постоянного тока для преобразования импедансной функции в передаточную функцию.

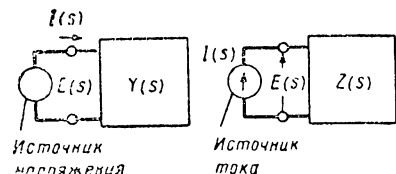
9. 1. СВОЙСТВА ИМПЕДАНСНЫХ ФУНКЦИЙ RC

Импедансная функция контура RC характеризуется некоторыми основными свойствами, которые всегда возможно определить и которые могут служить основой для синтеза. Мы не будем здесь подробно останавливаться на вопросе, почему импедансные функции контуров RC обладают этими свойствами, но просто приведем результаты без доказательства. Рекомендуется читателю обратиться к одной из многих книг по вопросу теории линейных цепей, чтобы получить полное представление об условиях осуществимости этих контуров. Прежде чем перечислять свойства импедансной функции RC , важно подчеркнуть, что эти характеристики применимы только к импедансам

у точки питания. Под термином «импеданс у точки питания» подразумевается функция $Z(s)$, которая определяет отношение между напряжением $E(s)$, приложенным к входным зажимам контура (называются зажимами в точке питания), и результирующим током $I(s)$, который протекает через эти зажимы (фиг.9. 3). Согласно определению, проводимость в точке питания выражается $Y(s) = [Z(s)]^{-1}$. Как правило, $Z(s)$ выражается отношением двух полиномов из членов с действительными коэффициентами, например,

$$Z(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_p s^p}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + \dots + B_q s^q}. \quad (9.2)$$

Одно из основных свойств импедансной функции контура RC состоит в том, что показатели с наивысшей и наименьшей степенью s



Фиг. 9. 3. Определение функции импеданса и проводимости $Z(s) = 1/Y(s)$ у точки питания.

в полиноме числителя должны быть равны или на единицу меньше наибольшего и наименьшего показателя степени s в полиноме знаменателя. Например, если наибольшая степень в полиноме числителя равняется s^3 , то наибольшая степень в полиноме знаменателя должна быть равна s^3 или s^4 . Аналогичные условия сохраняются при низкочастотном диапазоне, т. е. при наименьших степенях s . Это

ограничение объясняется тем, что любая физически возможная импедансная функция RC должна при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ быть либо постоянной величиной (что представляет чистое сопротивление), либо равняться s^{-1} (что представляет чистую емкость). Таким образом, мы описали первое общее свойство импедансной функции контуров RC .

1. Наибольшая и наименьшая степень s в полиноме знаменателя функции $Z(s)$ должна быть равна, или по крайней мере на единицу больше, чем соответствующая наибольшая или наименьшая степень в полиноме числителя.

Следующие условия должны быть также соблюдены:

2. Все нули (корни уравнения $A(s) = 0$) и полюса (корни уравнения $B(s) = 0$) функции $Z(s)$ должны быть простыми и лежать на отрицательной действительной оси.

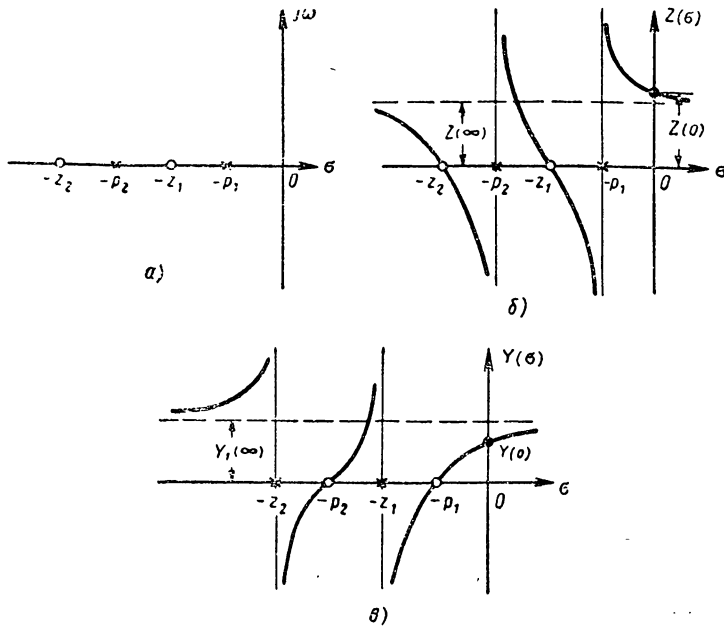
3. Нули и полюса функции $Z(s)$ должны изменяться вдоль отрицательной действительной оси; при наименьшей критической частоте (вблизи начала координат) должен находиться полюс; при наибольшей критической частоте (наиболее удаленной от начала координат) должен находиться ноль.

На фиг. 9. 4, а показано типичное расположение нулей и полюсов импедансной функции контура RC , а именно

$$Z(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)} = K \frac{s^2 + (z_1 + z_2)s + z_1z_2}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1p_2}. \quad (9.3)$$

Если переменная s ограничена значениями действительной оси, т. е. при $s = \sigma$, то возможно построить кривую функции $Z(\sigma)$ в зависимости от σ . На фиг. 9. 4, б показана такая кривая по уравнению (9. 3). Можно видеть, что наклон результирующей кривой $\partial Z(\sigma)/\partial \sigma$ всегда отрицательный, что фактически равноценно утверждению, что нули и полюса функции $Z(s)$ должны изменяться вдоль отрицательной действительной оси.

Обе функции $Z(0)$ и $Z(\infty)$ конечны в случае, показанном на фиг. 9. 4. Однако возможно получить импедансную функцию RC ,



Фиг. 9. 4. Характеристические кривые импедансной функции:

а — расположение полюсов и нулей в плоскости s для импедансной функции RC ; б — кривая функции $Z(\sigma)$ в зависимости от σ показывает, что $\partial Z(\sigma)/\partial \sigma$ всегда отрицательная; в — кривая функции $Y(\sigma)$ в зависимости от σ показывает, что $\partial Y(\sigma)/\partial \sigma$ всегда положительная.

когда наименьшая частота, а именно связанная с полюсом p_1 совпадает с началом координат. Рассмотрим, например, функцию

$$Z(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s(s + p_2)}$$

В этом случае $Z(0) = \infty$ и эквивалентный контур вынужденно должен иметь последовательную емкость на входе. Аналогично, возможны случаи, когда ноль z_2 при наибольшей частоте перемещается в бесконечность, так что $Z(\infty) = 0$. Например, рассмотрим функцию

$$Z(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Эквивалентный контур для этого случая должен иметь емкость, присоединенную параллельно к входу.

Расположение нулей и полюсов функции проводимости контура RC у точки питания, которая имеет вид

$$Y(s) = [Z(s)]^{-1},$$

должно быть обязательно таким, чтобы нули и полюса взаимно заменялись нулями и полюсами импедансной функции. Следовательно, нули и полюса функции $Y(s)$ опять изменяются вдоль отрицательной действительной оси, но ноль должен быть при наименьшей критической частоте и полюс — при наивысшей критической частоте. Отсюда также следует, что кривая функции $Y(\sigma)$ в зависимости от σ всегда имеет положительный наклон (см. фиг. 9. 4, σ^1).

9. 2. СИНТЕЗ ИМПЕДАНСНОЙ ФУНКЦИИ RC В КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вследствие описанных выше свойств импедансной функции RC всегда возможно синтезировать их в определенных основных или канонических формах. Канонические формы содержат минимальное число элементов, требуемых для осуществления импедансной функции. Две из этих форм вытекают из разложения в ряд функций $Z(s)$ или $Y(s)$ и известны под названием формы Фостера. Две другие формы получаются на основании дальнейшего разложения в ряд функций $Z(s)$ или $Y(s)$ и названы формами Кауэра.

Первая форма Фостера. Разложение в ряд функции $Z(s)$ около ее полюсов. Этот метод синтеза состоит в разложении функции в виде суммы рядов частичных дробей, причем каждый член дроби соответ-

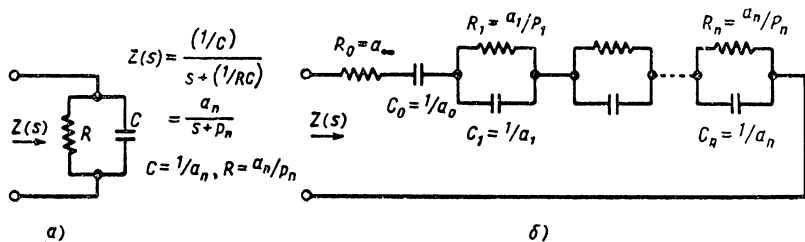
¹ Для тех, кто знаком с теоремой реактанса Фостера, кривые на фиг. 9. 4 покажутся очень сходными с кривыми, полученными для импедансной функции у точки питания чисто реактивных контуров (состоящих только из емкостей и индуктивности). Однако в случае чисто реактивных контуров нули и полюса являются одинарными (простыми) и изменяются вдоль мнимой оси. Для полноты картины следует напомнить, что распределение нулей и полюсов импедансной функции у точки питания контура на RL также связаны с тем, что нули и полюса изменяются вдоль отрицательной действительной оси, как и в случае контура RC , за исключением того, что ноль должен быть при наименьшей критической частоте, а полюс соответственно при наибольшей критической частоте. Для случая контура из сопротивления и индуктивности будем иметь, что функция $\frac{\partial Z}{\partial \sigma}$ всегда положительна.

Как правило, любая импедансная функция RLC должна иметь свои нули и полюса, расположенные только на левой стороне комплексной плоскости s . Однако это необходимое, но недостаточное условие для физической осуществимости контура, так как расположение нулей и полюсов импедансной функции только в левой полуплоскости не обязательно означает, что эта функция может быть осуществлена пассивным линейным контуром RC . Условия 1, 2, 3 являются необходимыми и достаточными для физической осуществимости функции в виде контура из сопротивления и емкости.

ствует одному из полюсов функции $Z(s)$. Функцию $Z(s)$ можно, как правило, разложить в следующий ряд:

$$Z(s) = a_\infty + \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s + p_1} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}. \quad (9.4)$$

Каждый член последнего выражения может представлять простую импедансную функцию. Импеданс последовательного соединения этих простых импедансов будет тогда характеризоваться общей импедансной функцией по уравнению (9.3). Каждый член общей формы, т. е. $\frac{a_n}{s + p_n}$ может быть синтезирован посредством параллельного контура RC , как показано на фиг. 9.5, а. Следовательно, общий импеданс по уравнению (9.4) может быть изображен схемой, пока-



Фиг. 9.5. Применение первой формы Фостера для синтеза импедансной функции $Z(s)$:

а — параллельное соединение сопротивления и емкости для изображения простых полюсов функции; б — контур, представляющий разложение в ряд функции около ее полюсов.

занной на фиг. 9.5, б. Последовательно соединенные конденсатор C_0 и сопротивление R_0 определяют поведение контура соответственно при $s = 0$ и $s = \infty$; их наличие или отсутствие можно легко установить путем изучения характера первоначальной импедансной функции при этих частотах. Практически способ определения контура можно показать на нескольких числовых примерах.

Пример 9.1. Следует определить первый контур Фостера для следующей импедансной функции:

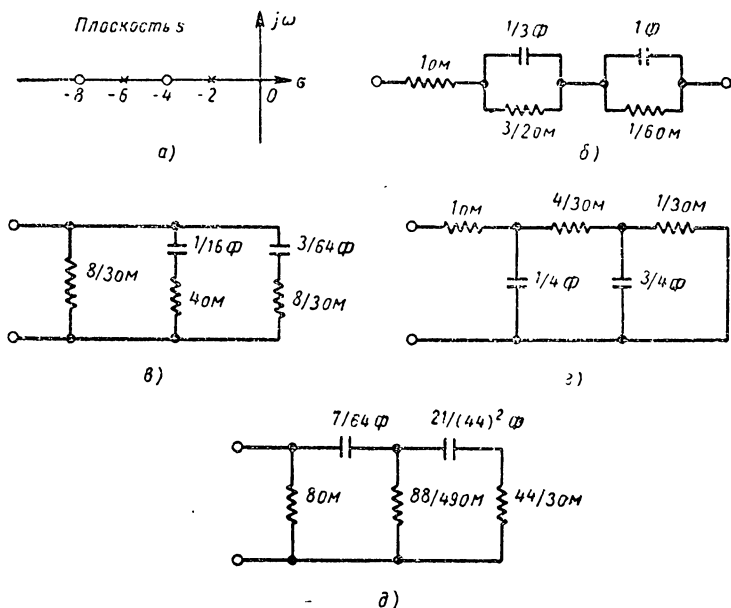
$$Z(s) = \frac{(s + 4)(s + 8)}{(s + 2)(s + 6)} = \frac{s^2 + 12s + 32}{s^2 + 8s + 12}.$$

Эта импедансная функция принадлежит контуру RC и имеет полюса, расположенные в точках $s = -2$, $s = -6$ и нули в точках $s = -4$, $s = -8$ (см. фиг. 9.6, а). Для получения первой формы Фостера необходимо разложить в ряд функцию $Z(s)$ на дробные члены около ее полюсов. Функцию $Z(s)$ невозможно непосредственно разложить в ряд, так как полином числителя имеет одинаковую степень, как и полином знаменателя и первоначально необходимо произвести подготовительную операцию обычного деления. После операции деления получаем

$$Z(s) = 1 + \frac{4s + 20}{s^2 + 8s + 12} = 1 + \frac{4s + 20}{(s + 2)(s + 6)}.$$

Если бы функция $Z(s)$ имела надлежащую дробь (дробный член) для начала синтеза, то предварительное деление не является обязательным. Разложение второго члена функции $Z(s)$ на частичные дроби позволяет написать

$$Z(s) = 1 + \frac{a_1}{s+2} + \frac{a_2}{s+6}.$$



Фиг. 9. 6. Канонические формы функции

$$Z(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{(s+2)(s+6)};$$

a — полюсы и нули функции $Z(s)$; b — первая форма Фостера; c — вторая форма Фостера z — первая форма Кауэра; d — вторая форма Кауэра.

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются следующим образом:

$$a_1 = (s+2) Z(s) \Big|_{s=-2} = \frac{(s+4)(s+8)}{s+6} \Big|_{s=-2} = \frac{(2)(6)}{4} = 3;$$

$$a_2 = (s+6) Z(s) \Big|_{s=-6} = \frac{(s+4)(s+8)}{s+2} \Big|_{s=-6} = \frac{(-2)(2)}{-4} = 1.$$

Таким образом, функция $Z(s)$ определяется выражением

$$Z(s) = 1 + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+6}.$$

Первая форма Фостера для функции $Z(s)$ дана на фиг. 9. 6, б. Следует заметить, что функцию $Z(s)$ можно легко вычислить по контуру при крайних значениях частоты. При $s = 0$ конденсаторы можно рассматривать как разомкнутые цепи. При $s = \infty$ конденсаторы можно рассматривать, как замкнутые цепи. Исходя из фиг. 9. 6, б, можно непосредственно написать $Z(0) = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$ ом и $Z(\infty) = 1$ ом. Эти значения совпадают с первоначальным алгебраическим выражением функции $Z(s)$, вычисленным при $s = 0$ и $s = \infty$. Числовые значения элементов контура данного примера непрактичны, потому что сопротивления получились слишком малыми, а конденсаторы слишком большими. Как будет рассмотрено позднее в настоящей главе, возможно изменить эти числовые значения так, чтобы получить приемлемые элементы цепи, причем контур сохраняет одинаковую частотную характеристику и реакцию во времени. Подробности по этому вопросу можно найти в разделе 9. 6; читателю не следует беспокоиться из-за кажущейся непрактичности полученных результатов.

Вторая форма Фостера. Разложение функции $Y(s)$ относительно ее полюсов. Для получения второй формы Фостера функцию $Z(s)$ следует преобразовать, чтобы получить функцию $Y(s)$ и последнюю разложить в виде суммы ряда частичных дробей. Разложение функции $Y(s)$ принимает вид

$$Y(s) = b_{\infty}s + b_0 + \frac{b_1s}{s+z_1} + \dots + \frac{b_ns}{s+z_n}. \quad (9.5)$$

Это разложение аналогично уравнению (9. 4), кроме члена $b_{\infty}s$. Этот член необходим для обобщенного разложения функции $Y(s)$ на дробные члены; это возможно, потому что наивысшая степень s в числителе функции $Y(s)$ на единицу больше наивысшей степени s в знаменателе. Иными словами, функция $Y(s)$ может иметь полюс в бесконечности и первый член разложения в ряд уравнения (9. 5) допускает эту возможность. Все члены уравнения (9. 5) могут быть выражены простыми функциями проводимости, как показано на фиг. 9. 7, а; общая проводимость $Y(s)$ получается в результате параллельного соединения этих простых цепей, как показано на фиг. 9. 7, б. Шунтовое сопротивление R_0 и шунтовой конденсатор C_0 определяют поведение контура при нулевой и бесконечно большой частоте и их присутствие или отсутствие может быть легко проверено при изучении характера функции проводимости при этих частотах.

Изучение уравнения (9. 5) показывает, что для определения неизвестных коэффициентов легче разложить функцию $\frac{Y(s)}{s}$, чем функцию $Y(s)$, как было сделано выше. Таким образом, функцию $\frac{Y(s)}{s}$ можно переписать в виде

$$\frac{Y(s)}{s} = b_{\infty} + \frac{b_0}{s} + \frac{b_1}{s+z_1} + \dots + \frac{b_n}{s+z_n}. \quad (9.6)$$

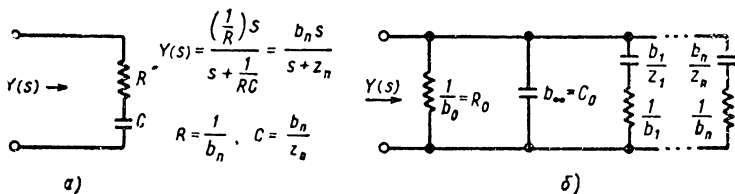
После определения коэффициентов членов ряда разложения уравнения (9. 6) функцию $Y(s)$ находят путем умножения на s . Практический способ определения лучше всего показать на числовом примере.

Пример 9. 2. Следует определить вторую форму Фостера для импедансной функции, приведенной в примере 9. 1. Преобразование выражения для функции $Z(s)$ дает

$$Y(s) = \frac{(s+2)(s+6)}{(s+4)(s+8)}.$$

Функция $\frac{Y(s)}{s}$ определяется

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{(s+2)(s+6)}{s(s+4)(s+8)}.$$



Фиг. 9. 7. Функция $Y(s)$ для второй формы Фостера. Разложение в ряд около полюсов функции $Y(s)$:

a — последовательное соединение сопротивления и емкости, представляющее простой полюс функции $Y(s)$ или ноль функции $Z(s)$; *б* — контур, представляющий частичную дробь функции $Y(s)$ около ее полюсов.

Функция $\frac{Y(s)}{s}$ может быть разложена в ряд на частичные дроби непосредственно, так как она представляет действительно дробную величину. Следовательно можно написать

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{b_0}{s} + \frac{b_1}{s+4} + \frac{b_2}{s+8}.$$

Коэффициенты b_0, b_1, b_2 определяются следующим образом:

$$b_0 = s \frac{Y(s)}{s} \Big|_{s=0} = Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{2 \cdot 6}{4 \cdot 8} = \frac{3}{8};$$

$$b_1 = (s+4) \frac{Y(s)}{s} \Big|_{s=-4} = \frac{(s+2)(s+6)}{s(s+8)} \Big|_{s=-4} = \frac{-2 \cdot 2}{-4 \cdot 4} = \frac{1}{4};$$

$$b_2 = (s+8) \frac{Y(s)}{s} \Big|_{s=-8} = \frac{(s+2)(s+6)}{s(s+4)} \Big|_{s=-8} = \frac{(-6) \cdot (-2)}{(-8) \cdot (-4)} = \frac{3}{8}.$$

Отсюда вычисление функции дает

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{3}{8s} + \frac{1}{s+4} + \frac{3}{s+8}.$$

Следовательно, функция $Y(s)$ определяется выражением

$$Y(s) = \frac{3}{8} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)s}{s+4} + \frac{\left(\frac{3}{8}\right)s}{s+8}.$$

Идентификация членов последнего выражения с контуром на фиг. 9.7 приводит ко второй форме Фостера, показанной на фиг. 9.6, в. Этот контур можно опять проверить путем вычисления функции $Z(s)$ при крайних значениях частоты. Следовательно, $Z(0) = \frac{8}{3}$ ом и $Z(\infty) = \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}} = 1$ ом.

Эти значения также совпадают с результатами вычисления первоначального выражения функции $Z(s)$ при $s = 0$ и $s = \infty$.

Первая форма Кауэра. Устранение полюсов в точке $s = \infty$. В общем, метод синтеза Кауэра состоит в разложении функции $Z(s)$ на непрерывную дробь и приводит к контуру лестничного типа. Математически первая форма Кауэра получается последовательным устранением констант и полюсов в точке $s = \infty$. Этот способ можно лучше всего объяснить при рассмотрении функции $Z(s)$ в неразложенном на множители виде уравнения (9.2)

$$Z(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A_0 + A_1(s) + A_2s^2 + \dots + A_p s^p}{B_0 + B_1(s) + B_2s^2 + \dots + B_q s^q}. \quad (9.7)$$

Как объяснялось раньше, функция $Z(s)$ будет равна нулю или конечному значению при $s = \infty$. В общем рассмотрим случай, когда степени равны ($p = q = n$), так что $Z(\infty) = \frac{A_p}{B_q} = \frac{A_n}{B_n}$. Для тех случаев, когда $Z(\infty) = 0$, можно принять $A_p = 0$. Если теперь в выражении для функции $Z(s)$ перегруппировать члены так, чтобы полиномы в числителе и знаменателе были расположены по убывающей степени s , то значение функции $Z(\infty)$ может быть получено разделением полинома числителя на полином знаменателя. Необходимость перегруппировки членов полиномов до деления объясняется тем, что нас интересует характер функции $Z(s)$ при больших значениях s , а именно $s = \infty$ и поэтому члены с наибольшей степенью s более всего важны. После первой операции деления уравнение (9.7) (при $p = q = n$) можно написать в виде $\frac{A_n}{B_n}$ плюс остаток; отсюда

$$Z(s) = \frac{A_n}{B_n} + \frac{C_{n-1}s^{n-1} + C_{n-2}s^{n-2} + \dots + C_1s + C_0}{B_n s^n + B_{n-1}s^{n-1} + \dots + B_1s + B_0}. \quad (9.8)$$

Постоянные коэффициенты C содержатся в остатке после первой операции деления. Остаточный член уравнения (9.8), по-видимому, имеет нулевое значение при $s = \infty$. Это непосредственно следует

из процесса деления. Если теперь вновь преобразовать остаточный член, то он будет иметь полюс в точке $s = \infty$. Полюс преобразованного остаточного члена можно опять устранить путем деления. Таким образом, преобразованный остаток уравнения (9. 8) можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_1 s + B_0}{C_{n-1} s^{n-1} + C_{n-2} s^{n-2} + \dots + C_1 s + C_0} = \\ & = \frac{B_n}{C_{n-1}} s + \frac{D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_1 s + D_0}{C_{n-1} s^{n-1} + \dots + C_1 s + C_0}. \end{aligned} \quad (9. 9)$$

Постоянные D представляют коэффициенты нового остаточного члена. Функцию $Z(s)$ можно написать в следующем виде после объединения уравнений (9. 8) и (9. 9)

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{A_n}{B_n} + \frac{1}{\frac{B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \dots + B_1 s + B_0}{C_{n-1} s^{n-1} + C_{n-2} s^{n-2} + \dots + C_1 s + C_0}} = \\ &= \frac{A_n}{B_n} + \frac{1}{\frac{B_n}{C_{n-1}} s + \frac{D_{n-1} s^{n-1} + \dots + D_1 s + D_0}{C_{n-1} s^{n-1} + \dots + C_1 s + C_0}}. \end{aligned} \quad (9. 10)$$

Последний член уравнения (9. 10) можно преобразовать и вновь разложить путем деления. Этот процесс непрерывно продолжается до тех пор, пока не исчезнет конечный остаточный член; это приводит к непрерывному ряду дробей при разложении функции $Z(s)$ в следующем виде:

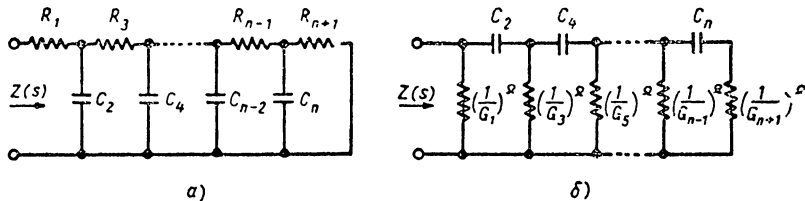
$$\begin{aligned} Z(s) &= R_1 + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{C_4 s + \dots}}}} \\ & \dots \\ & \frac{1}{R_{n-1} + \frac{1}{C_n s + \frac{1}{R_{n+1}}}}, \end{aligned} \quad (9. 11)$$

где R и C являются постоянными числами. Уравнение (9. 11) может быть представлено контуром лестничного типа, как показано на фиг. 9. 8. После каждого деления остаточный член преобразуется для получения полюса в бесконечности. Затем этот полюс устраняется

путем деления и образуется новый остаточный член. Процесс разложения продолжается до получения нулевого остатка. Приведем числовой пример, который позволит легче понять и иллюстрировать практический способ непрерывного разложения на дроби путем деления, преобразования, деления и т. д.

Пример 9.3. Следует разложить функцию $Z(s)$, приведенную в примере 9.1, для получения первой формы Кауэра. Сперва напомним функцию $Z(s)$ без разложения на множители, начиная с наибольшей степени s , т. е.

$$Z(s) = \frac{s^2 + 12s + 32}{s^2 + 8s + 12}$$



Фиг. 9. 8. Представление функции непрерывной дробью:

a — первая форма Кауэра; *б* — вторая форма Кауэра.

Процесс непрерывного разложения на дроби осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & s^2 + 8s + 12 \overline{) \frac{1 \text{ импеданс}}{s^2 + 12s + 32}} \\
 & \underline{s^2 + 8s + 12} \quad \frac{1}{4} s \text{ проводимость} \\
 & \quad 4s + 20 \overline{) \frac{4}{3} \text{ импеданс}} \\
 & \quad \underline{s^2 + 5s} \quad \frac{4}{3} \text{ импеданс} \\
 & \quad \quad 3s + 12 \overline{) \frac{4}{3} \text{ импеданс}} \\
 & \quad \quad \underline{4s + 16} \quad \frac{3}{4} s \text{ проводимость} \\
 & \quad \quad \quad 4) \underline{3s + 12} \\
 & \quad \quad \quad \quad 3s \overline{) \frac{1}{3} \text{ импеданс}} \\
 & \quad \quad \quad \quad \underline{12} \quad \frac{4}{4} \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \frac{4}{0) \underline{12}} \quad \infty \text{ проводимость}
 \end{aligned}$$

Ввиду того, что процесс деления начинается с функции $Z(s)$, частное от деления представляет функцию импеданса. Следовательно, после первого деления можно написать

$$Z(s) = \frac{s^2 + 12s + 32}{s^2 + 8s + 12} = 1 + \frac{4s + 20}{s^2 + 8s + 12} = 1 + \frac{1}{\frac{s^2 + 8s + 12}{4s + 20}}$$

Остаточный член $\frac{4s + 20}{s^2 + 8s + 12}$ соответствует импедансной функции и поэтому преобразованный остаточный член $\frac{s^2 + 8s + 2}{4s + 20}$ представляет функцию проводимости. Частное после следующего деления является функцией проводимости, а новый преобразованный остаток является импедансной функцией. Таким образом, последовательные операции преобразования и деления дают попеременно члены импеданса и проводимости, как указано выше. Прежде чем переписать результаты этого процесса в виде непрерывной дроби, элементы соответствующего контура лестничного типа могут быть непосредственно определены по членам частного от деления и можно составить контур, как показано на фиг. 9. 6, г. Конечный результат может быть проверен путем вычисления функции $Z(s)$ при крайних значениях частоты. Следовательно, $Z(0) = 1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$ ом и $Z(\infty) = 1$ ом. Эти результаты одинаковы с теми, которые были получены для предыдущих форм Фостера.

Вторая форма Кауэра. Устранение полюсов в точке $s = 0$. Вторую форму Кауэра можно получить путем разложения функции $Y(s)$ в виде непрерывной дроби. Математически это равноценно устранению постоянных коэффициентов и полюсов в точке $s = 0$. С целью разложения в виде непрерывной дроби необходимо полиномы числителя и знаменателя функции $Y(s)$ расположить по возрастающей степени s . Первая операция деления дает постоянное значение (которое соответствует значению функции $Y(s)$ при $s = 0$) + дробный остаток, который имеет ноль при $s = 0$. При этом разложении постоянное значение при $s = 0$ представляет функцию проводимости. Преобразование остатка дает импедансную функцию, которая имеет полюс при $s = 0$. Деление опять дает член, содержащий произведение постоянного коэффициента на s^{-1} плюс второй остаток. Продолжение процесса преобразования и деления позволяет разложить функцию $Y(s)$ в виде следующей непрерывной дроби:

$$Y(s) = G_1 + \frac{1}{\frac{1}{C_2s} + \frac{1}{G_3 + \frac{1}{C_4s} + \dots}} \quad (9.12)$$

$$\frac{1}{G_{n-1} + \frac{1}{C_ns + \frac{1}{G_{n+1}}}}$$

G и C являются постоянными числами, полученными в процессе деления. Уравнение (9.12), разложенное в непрерывную дробь, может быть представлено контуром лестничной схемы как показано на фиг. 9. 8, б. Практический способ получения второй формы Кауэра является простым и его можно опять наглядно показать на следующем примере.

Пример 9.4. Следует определить вторую форму Кауэра для функции $Z(s)$, приведенной в примере 9.1. Функцию $Z(s)$ следует преобразовать и написать по возрастающей степени s в следующем виде:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{12 + 8s + s^2}{32 + 12s + s^2}.$$

Процесс разложения на непрерывную дробь показан ниже, где указано попеременное образование членов проводимости и импеданса

$$\begin{array}{l}
 \frac{3}{8} \text{ проводимость} \\
 \hline
 32 + 12s + s^2 \left) \frac{12 + 8s + s^2}{12 + \frac{9}{2}s + \frac{3}{8}s^2} \right) \frac{64}{7} \frac{1}{s} \text{ импеданс} \\
 \hline
 \frac{7}{5}s + \frac{5}{8}s^2 \left) \frac{32 + \frac{40}{7}s + \frac{49}{88} \text{ проводимость}}{\frac{44}{7}s + s^2} \right) \frac{7}{2}s + \frac{5}{8}s^2 \\
 \hline
 \frac{7}{2}s + \frac{49}{88}s^2 \left) \frac{44^2}{21} \frac{1}{s} \text{ импеданс} \\
 \hline
 \frac{3}{44}s^2 \left) \frac{44}{7}s + s^2 \\
 \hline
 \frac{44}{7}s \left) \frac{3}{44} \text{ проводимость} \\
 \hline
 s^2 \left) \frac{3}{44}s^2 \\
 \hline
 \frac{3}{44}s^2 \\
 \hline
 \frac{3}{44}s^2 \\
 \hline
 \frac{3}{44}s^2 \left) \frac{\infty}{0) \frac{1}{s^2} \text{ импеданс}
 \end{array}$$

Прежде чем переписать результаты процесса преобразования и деления в виде непрерывной дроби элементы контура лестничного типа могут быть определены по членам частного от деления, как показано на фиг. 9.6.

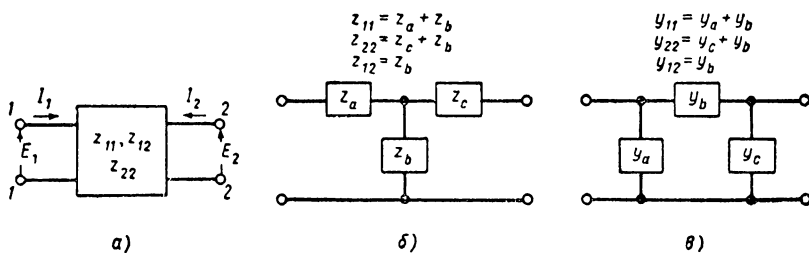
Этот результат вновь можно проверить путем вычисления функции $Z(s)$ при крайних значениях частоты по данным контура. Следовательно, $Z(0) = \frac{8}{3} \text{ ом}$, $Z(\infty) = \frac{1}{\frac{3}{8} + \frac{49}{88} + \frac{5}{44}} = 1 \text{ ом}$.

Эти значения также совпадают с предыдущими результатами. В заключение по вопросу о синтезе форм Кауэра следует заметить, что в общем имеется четыре возможных случая деления полиномов числителя и знаменателя: при расположении членов по возрастанию или убыванию степени s , после преобразования или без преобразования. Из них только в двух случаях контуры будут иметь

положительные действительные значения. Два других случая дают неосуществимые формы с отрицательными компонентами. Конструктору нетрудно в начале разложения в непрерывную дробь предупредить ошибочные операции деления и преобразования.

9. 3. СВОЙСТВА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

С целью осветить свойства передаточных функций контуров RC , отличающихся от функций импеданса у точки питания, необходимо предварительно рассмотреть свойства четырехполюсника, изображенного на фиг. 9. 9, *а*. Обычно эти четырехполюсники характеризуются тремя параметрами z , которые обозначены z_{11} , z_{12} , z_{22} , они определяются следующим образом (см. также фиг. 9. 9, *а*).



Фиг. 9. 9. Схемы четырехполюсников:

а — общая схема четырехполюсников; *б* Т — образная схема; *в* — П-образная схема.

Рассмотрим два источника тока I_1 и I_2 , причем каждый из них соединен с парой зажимов 1—1 и 2—2. Напряжение на этих зажимах равно:

$$E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2; \quad (9. 13а)$$

$$E_2 = z_{12}I_1 + z_{22}I_2. \quad (9. 13б)$$

При $I_2 = 0$ (зажимы 2—2 разомкнуты) равенства (9. 13а) и (9. 13б) будут тогда иметь вид

$$z_{11} = \left. \frac{E_1}{I_1} \right|_{I_2=0}; \quad (9. 13в)$$

$$z_{12} = \left. \frac{E_2}{I_1} \right|_{I_2=0}. \quad (9. 13г)$$

Из равенства (9. 13в) следует, что z_{11} равняется импедансу на зажимах 1—1 при разомкнутых зажимах 2—2. Равенство (9. 13г) показывает, что z_{12} определяется напряжением на зажимах 2—2, когда они разомкнуты, и источником единичного тока, соединенного с зажимами 1—1 (т. е. током $I_1 = 1$). Аналогично равенство (9. 13б) может быть использовано для определения импеданса z_{22}

на зажимах 2—2 при разомкнутых зажимах 1—1; величина z_{12} также определяется напряжением на разомкнутых зажимах 1—1 при единичном токе на зажимах 2—2. Читатель может сам вывести из изложенного выше, что параметры z для T-образного контура фиг. 9. 9, б определяются следующим образом:

$$z_{11} = z_a + z_b; \quad (9. 14a)$$

$$z_{22} = z_c + z_b; \quad (9. 14б)$$

$$z_{12} = z_b. \quad (9. 14в)$$

Четырехполюсник фиг. 9. 9, а можно охарактеризовать другим способом через параметры y (проводимости), которые определяют токи в случае подачи напряжения на зажимы. Следовательно, можно написать:

$$I_1 = y_{11}E_1 + y_{12}E_2; \quad (9. 15a)$$

$$I_2 = y_{12}E_1 + y_{22}E_2. \quad (9. 15б)$$

Равенство (9. 15а) и (9. 15б) можно вывести из равенств (9. 13а) и (9. 13б), учитывая следующие зависимости между параметрами y и z :

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z}; \quad (9. 16a)$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z}; \quad (9. 16б)$$

$$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z}, \quad (9. 16в)$$

где

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}^2. \quad (9. 16г)$$

В свою очередь, параметры z могут быть выражены через параметры y :

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta_y}; \quad (9. 16д)$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta_y}; \quad (9. 16е)$$

$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta_y}, \quad (9. 16ж)$$

где

$$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}^2. \quad (9. 16з)$$

Из равенств (9. 15а) и (9. 15б) можно видеть, что y_{11} представляет проводимость контура со стороны зажимов 1—1 при закороченных зажимах 2—2 ($E_2 = 0$). Аналогично, y_{22} представляет проводимость

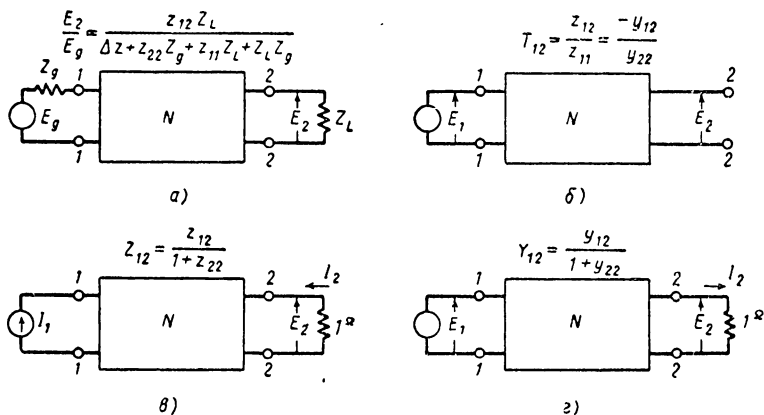
контура со стороны зажимов 2—2 при закороченных зажимах 1—1 ($E_1 = 0$); y_{12} определяется током короткого замыкания, проходящим через зажимы 2—2 ($E_2 = 0$), когда к зажимам 1—1 подано единичное напряжение ($E_1 = 1$), или определяется током короткого замыкания, проходящим через зажимы 1—1 ($E_1 = 0$) при единичном напряжении на зажимах 2—2 ($E_2 = 1$).

Параметры y для П-образного контура на фиг. 9. 9в определяются следующим образом:

$$y_{11} = y_a + y_b; \tag{9. 17a}$$

$$y_{22} = y_c + y_b; \tag{9. 17б}$$

$$y_{12} = y_b. \tag{9. 17в}$$



Фиг. 9. 10. Применение четырехполосника для образования передаточной функции:

a — общая форма; *б* — $E_2 = T_{12}E_1$; *в* — $E_2 = Z_{12}I_1$; *г* — $I_2 = Y_{12}E_1$ *N* представляет контур.

Четырехполосники могут быть использованы несколькими способами для осуществления передаточной функции. Наиболее общая схема показана на фиг. 9. 10 а, где подобный контур применен для соединения источника напряжения E_g , обладающего внутренним импедансом Z_g на зажимах 1—1, с нагрузочным импедансом Z_L на зажимах 2—2. Прежде чем рассматривать общий случай на фиг. 9. 10, а, задачу синтеза передаточной функции можно значительно облегчить, если три основные передаточные функции будут определены, как показано на фиг. 9. 10, б—г. Каждый из этих трех случаев представляет другой способ получения передаточной функции; тот или иной выбор зависит от конструктора. Следует подчеркнуть, что внутренний импеданс источника энергии в практических случаях может быть часто принят в расчет, при этом его рассматривают как часть одного из импедансов контура. Этот станет более очевидным в последующем изложении. Рассмотрим каждую передаточную функцию на фиг. 9. 10 отдельно.

Передаточная функция напряжения T_{12} . Фиг. 9. 10, б иллюстрирует случай, когда напряжение источника приложено к зажимам 1—1, а выходные зажимы 2—2 разомкнуты ($I_2 = 0$). Это очень распространенный случай, когда передаточная функция $T_{12} = E_2/E_1$ безразмерна. Из изучения равенств (9. 13а), (9. 13б) и (9. 15б) при $I_2 = 0$ становится очевидно, что

$$T_{12} = \frac{z_{12}}{z_{11}} = \frac{-y_{12}}{y_{22}}. \quad (9. 18)$$

Важнейший вывод, который можно сделать на основании соотношения (9. 18), состоит в том, что при заданных значениях T_{12} можно определить величины z_{11} и z_{12} или y_{12} и y_{22} , т. е. два из трех параметров z или y контура. Третий параметр (z_{22} или y_{11}) не задан и зависит от примененного порядка синтеза. Следовательно, при заданном значении функции $T_{12}(s)$ задача сводится к определению четырехполюсника, который обладает предписанными значениями параметров z_{11} , z_{12} (или y_{11} , y_{22}).

Передаточная функция импеданса \tilde{Z}_{12} между источником тока и напряжением. Фиг. 9. 10, в иллюстрирует случай, когда функция в точке питания связана с источником тока, соединенным с зажимами 1—1, а к выходным зажимам приложено напряжение при номинальном нагрузочном сопротивлении 1 ом на зажимах 2—2. Передаточная функция обычно задается в виде $\tilde{Z}_{12} = \frac{E_2}{I_1}$ с размерностью в ом. Отношение I_2/I_1 (которое безразмерно) одинаково с этим выражением, так как оконечная нагрузка равна 1 ом, т. е. $E_2 = (1 \text{ ом}) (I_2)$.

Выражение для функции \tilde{Z}_{12} через параметры z контура можно без труда вывести на основании теоремы Тевенина, примененной к фиг. 9. 10 со стороны зажимов 2—2. Напряжение разомкнутой цепи на зажимах 2—2 будет определяться $z_{12}I_1$. Импеданс со стороны зажимов 2—2 при разомкнутых зажимах 1—1 равняется z_{22} . Следовательно, четырехполюсник можно заменить, поскольку это касается нагрузочного сопротивления, источником напряжения $z_{12}I_1$ (вольт), последовательно соединенным с импедансом z_{22} (ом). Выходное напряжение E_2 будет определяться выражением по закону распределения напряжения

$$E_2 = z_{12}I_1 \frac{1}{1 + z_{22}}.$$

Отсюда следует, что функция \tilde{Z}_{12} будет равна

$$Z_{12} = \frac{z_{12}}{1 + z_{22}}. \quad (9. 19)$$

Уравнение (9. 19) опять может быть полезным, потому что оно показывает, как передаточная функция \tilde{Z}_{12} связана с параметрами z_{12} и z_{22} четырехполюсника. Порядок синтеза передаточной функции \tilde{Z}_{12} в виде схемы на фиг. 9. 10, в вновь сводится к определению четырехполюсника с надлежащими параметрами z . Небезынтересно

отметить, что здесь опять функция Z_{12} связана только с двумя из трех параметров z четырехполюсника.

Передаточная функция проводимости Y_{12} между источником напряжения и током. Фиг. 9. 10, z иллюстрирует случай, когда функция в точке питания связана с источником напряжения, соединенного с зажимами 1—1, а выходной величиной является ток, проходящий через номинальное нагрузочное сопротивление 1 ом на зажимах 2—2. Передаточная функция обычно определяется в виде проводимости $Y_{12} = \frac{I_2}{E_1}$, хотя это выражение идентично с безразмерным отношением $\frac{E_2}{E_1}$, так как $I_2 = E_2/(1 \text{ ом})$. Как и раньше функцию Y_{12} можно связать с двумя параметрами, определяющими свойства четырехполюсника.

В итоге приходим к следующему результату для данного случая:

$$Y_{12} = \frac{y_{12}}{1 + y_{22}}. \quad (9.20)$$

Этот результат можно также вывести, применив теорему Тевенина к фиг. 9. 10, z , что предоставляется читателю сделать самому. Изучение соотношения (9. 20) вновь показывает, что по заданному значению функции Y_{12} возможно определить два из трех параметров у четырехполюсника. Следовательно, синтез передаточной функции вновь сводится к определению четырехполюсника надлежащими значениями параметров z, y .

9. 4. СВОЙСТВА ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

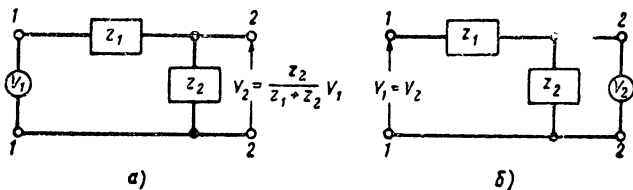
Любую передаточную функцию, связанную с линейным пассивным контуром, можно, как правило, ограничить определенными условиями, в результате расположения ее нулей и полюсов в комплексной плоскости s . Эти условия совершенно отличаются от ограничений для нулей и полюсов передаточной функции импеданса или проводимости у точки питания. Первое ограничение является совершенно общим и вытекает из того обстоятельства, что реакция пассивного контура должна затухать в случае отсутствия источника питания или по крайней мере оставаться постоянной во времени. Рассмотрим общую передаточную функцию $T(s)$ в виде отношения двух полиномов

$$T(s) = \frac{\text{выходная величина}}{\text{входная величина}} = \frac{A(s)}{B(s)}. \quad (9.21)$$

Если входная функция представляет единичный импульс $\delta(t)$, то реакция в переходном процессе во временной области будет определяться $\mathcal{Q}^{-1}[A(s)/B(s)]$, так как преобразование Лапласа единичного импульса дает единицу. Отсюда следует, что в случае затухания реакции со временем все корни уравнения $B(s) = 0$ должны лежать в левой половине комплексной плоскости s . Это

приводит к следующему выводу: все полюсы любой передаточной функции линейного пассивного контура, независимо от формы контура, должны лежать в левой половине комплексной плоскости s .

Аналогичное ограничение не распространяется на нули передаточной функции, т. е. на корни уравнения $A(s) = 0$. Тот факт, что нули передаточной функции не ограничены левой половиной комплексной плоскости s , представляет один из основных моментов, отличающих передаточные функции четырехполюсников от импедансных функций у точки питания. Нули физического осуществимого импеданса у точки питания ограничены левой полуплоскостью s . Причина в основном лежит в том, что обратная импедансная функция у точки питания, т. е. входная функция проводимости имеет физичес-



Фиг. 9. 11. Схемы, показывающие, что взаимная замена входа и выхода не приводит к одинаковой обратной передаточной функции:

а — V_1 — источник напряжения; б — V_2 — источник напряжения.

кое значение при вычислении реакции контура. Она определяет ток, протекающий через контур, когда приложено единичное импульсное напряжение [$i(t) = \mathcal{Z}^{-1} Y(s)$]. Следовательно, полюсы функции $Y(s)$, которые являются нулями функции $\bar{Z}(s)$, должны лежать в левой полуплоскости s при пассивном импедансе. Аналогичная физическая интерпретация не возможна для обратной передаточной функции. В этом можно убедиться при рассмотрении передаточной функции напряжение — напряжение для контура на фиг. 9. 11, а. Когда V_1 равняется напряжению источника, тогда V_2 определяется равенством

$$V_2 = \frac{V_1 z_2}{z_1 + z_2}$$

и передаточная функция равна

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$

Обратное значение этой передаточной функции будет равно

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1} = 1 + \frac{z_2}{z_1}.$$

Это выражение нельзя использовать для определения V_1 , когда V_2 представляет напряжение источника питания. В последнем случае,

как это можно проверить по схеме контура, $V_1 = V_2$ и передаточная функция в действительности будет равна $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Следовательно, нет основных ограничений о расположении нулей передаточной функции. Как правило, эти нули могут быть расположены в любом месте комплексной плоскости s . Контур, у которых нули передаточной функции ограничены левой половиной комплексной плоскости s , известны под названием контуры с минимально фазовым сдвигом. В первую очередь, рассмотрим передаточные функции этого типа.

Другое основное различие между передаточными и импедансными функциями у точки питания состоит в том, что наибольшие и наименьшие степени s в полиномах числителя и знаменателя передаточной функции могут отличаться больше чем на единицу при одном ограничении, что наибольшая степень s полинома числителя никогда не превышает наибольшую степень s полинома знаменателя. Если наибольшая степень s числителя превышает наибольшую степень s знаменателя, то выходная функция реакции контура на единичную импульсную входную функцию будет содержать производные импульса, что не может встречаться в физических системах.

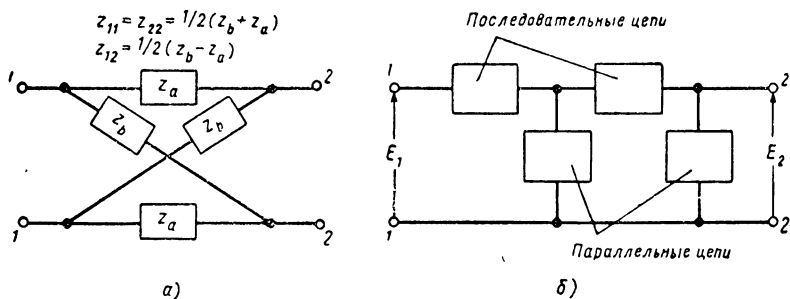
Изложенные выше положения применимы к передаточным функциям контуров. В случае контуров RC больше не накладывается ограничений на расположение полюсов передаточной функции. Этот вывод следует из того факта, что контур не содержит индуктивных сопротивлений, так что импульсная реакция не может содержать обмена энергии между электрическими и магнитными полями. Поэтому эта реакция должна содержать только простые экспоненциальные функции затухания, т. е. члены вида $e^{-\sigma t}$, где σ — действительное положительное число. Поэтому для корней уравнения $B(s) = 0$ соблюдается следующее ограничение [что относится также к полюсам функции $T(s)$]. Полюсы передаточной функции любого контура RC ограничены значениями отрицательной действительной оси.

Изложенное выше ограничение имеет важное значение при расчете. Ограничение полюсов передаточной функции корректирующего контура значениями отрицательной действительной оси является обязательным, когда хотят осуществить этот контур только из сопротивлений и конденсаторов.

Важно также заметить, что нули передаточной функции не ограничиваются каким-либо условием и они, как правило, могут быть расположены в любом месте комплексной плоскости s . Однако по практическим соображениям рекомендуется ограничить нули левой полуплоскостью s , т. е. заранее выбрать минимально фазовые контуры. Причина этого лежит в том, что контур с неминимально фазовым сдвигом должен быть выполнен в виде скрещенного четырехполюсника или мостовой схемы, как показано на фиг. 9. 12, а. Обычно нежелательно применять скрещенный четырехполюсник, потому что между одним из входных зажимов и одним из выходных зажимов нет обычного соединения, так что либо вход, либо выход

должен быть свободным от заземления. Тем не менее, скрещенные четырехполосники или мостовая схема представляют наиболее широко распространенную схему контура и любая осуществимая передаточная функция может быть синтезирована в виде мостовой схемы.

С практической точки зрения, однако, наиболее желательно применять схему контура, например, в виде Т или П на фиг. 9. 9. Ограничим наше рассуждение главным образом синтезом лестничных схем. Лестничные схемы являются минимально фазовыми, а контуры RC лестничного типа дополнительно ограничиваются тем, что нули передаточной функции должны лежать на отрицательной действительной оси.



Фиг. 9. 12. Основные типы четырехполосников:

а — симметричная решетка или мостовая схема, которая в состоянии создать минимально фазовую передаточную функцию; б — лестничная схема.

Любая передаточная функция контура RC лестничного типа должна иметь нули и полюса, ограниченные значениями отрицательной действительной оси. Следует заметить, что в этом утверждении ничего не сказано о положении нулей и полюсов, изменяющихся вдоль отрицательной действительной оси, как в случае импедансной функции RC . Упомянутые свойства контуров RC лестничного типа можно просто подтвердить при рассмотрении схемы на фиг. 9. 12. б. Нетрудно видеть, что нулевая передача напряжения между входными и выходными зажимами может иметь место при таких комплексных частотах, когда импеданс любой из последовательно соединенных ветвей имеет бесконечно большое значение, или когда импеданс любой параллельной ветви равняется нулю. Математически это означает, что передаточная функция равна нулю при таких значениях s , когда импеданс последовательно соединенной ветви имеет полюс (бесконечно большой импеданс), или при таких значениях s , когда импеданс параллельной ветви имеет нуль (нулевое значение импеданса). Так как каждая ветвь цепи состоит из простого контура RC , то нули и полюса импедансной функции каждой ветви должны лежать на отрицательной действительной оси в плоскости s . Следовательно, передаточные нули рассматриваемой передаточной функции также ограничены значениями отрицательной действительной

оси в плоскости s . Идентичность нулей передаточной функции (т. е. значений s , при которых $T(s) = 0$) с нулями импедансной функции параллельной ветви и с полюсами импедансной функции последовательных ветвей имеет существенное значение для синтеза передаточной функции.

В заключение этого раздела следует обобщить некоторые выводы. Если передаточную функцию необходимо осуществить при помощи контура RC лестничного типа, то нули и полюса передаточной функции должны находиться на отрицательной действительной оси (начало координат также приемлемо). Если нули передаточной функции отличаются от значений отрицательной действительной оси, но еще ограничены левой половиной комплексной плоскости s , то контур будет еще характеризоваться минимально фазовым сдвигом и может быть осуществлен в виде нелестничной схемы (как-то: параллельно-цепной или расщепленно- T -образной схемы, которые будут рассмотрены в разделе 9. 8.). Если допускается расположение нулей в правой половине комплексной плоскости s , то необходимо осуществить мостовую схему (с неминимально фазовым сдвигом). В любом из упомянутых случаев полюсы передаточной функции должны быть ограничены значениями отрицательной действительной оси, если должны быть использованы только сопротивления и конденсаторы для осуществления контуров.

9. 5. СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕСТНИЧНЫХ СХЕМ

Передаточная функция напряжения T_{12} ; синтез при помощи параметров z . Рассмотрим передаточную функцию, заданную в виде отношения двух полиномов, у которой нули и полюса лежат на отрицательной действительной оси, чтобы создать возможность осуществления контура RC лестничного типа. Далее, предположим, что желательно получить эту передаточную функцию в виде отношения напряжений, как показано на фиг. 9. 10, г. Следовательно, передаточную функцию можно написать следующим образом:

$$T_{12} = K \frac{A(s)}{B(s)} = K \frac{z_{12}(s)}{z_{11}(s)}. \quad (9. 22)$$

Значение постоянного коэффициента K известно, как коэффициента усиления, причем его точное значение зависит от того или иного контура, который будет получен в результате синтеза. Как будет видно позднее, значение коэффициента K будет определено после того, как контур будет синтезирован. Чем больше коэффициент, тем меньше затухание, создаваемое контуром. Ввиду того, что этот порядок синтеза создает возможность получения нескольких контуров, значение коэффициента усиления играет основную роль при выборе того или иного контура. Так как z_{11} равняется импедансу цепи со стороны зажимов $1-1$ при разомкнутых зажимах $2-2$, то отсюда следует, что z_{11} является импедансной функцией со свойствами, присущими подобным функциям (которые были рассмотрены

раньше в этой главе) и что она определяется отношением двух полиномов от s . Поэтому можно написать следующее выражение для функции $z_{11}(s)$, где $q(s)$ может быть принято за любой произвольный полином:

$$z_{11}(s) = \frac{B(s)}{q(s)}. \quad (9.23)$$

Из уравнения (9.22) следует, что функция $z_{12}(s)$ [в предположении, что $z_{11}(s)$ определяется из уравнения (9.23)], может быть выражена следующим образом:

$$z_{12}(s) = K \frac{A(s)}{q(s)}. \quad (9.24)$$

Необходимо заметить, что конечные передаточные нули функций T_{12} имеют место тогда, когда $A(s) = 0$, так что конечные нули передаточной функции T_{12} обычно являются также нулями z_{12} . Это обстоятельство мы позднее используем. До сих пор предполагалось, что функция $q(s)$ может быть любым полиномом относительно s . Однако, если z_{11} должна быть импедансной функцией цепи со стороны контура RC , то нули и полюса этой функции должны изменяться вдоль отрицательной действительной оси в плоскости s и наиболее низкая критическая частота должна быть связана с полюсом, а наиболее высокая критическая частота — с нулем. Следовательно, когда z_{11} представляет импедансную функцию RC , то полином $q(s)$ должен быть таким, чтобы его корни были надлежащим образом расположены относительно корней полинома $B(s)$. В действительности, существует неограниченное число полиномов $q(s)$, которые могут быть выбраны для образования импедансной функции $z_{11}(s)$; этот выбор представляется сделать при расчете контура. После выбора функции $q(s)$ задача синтеза сводится к нахождению контура с соответствующими функциями z_{11} и z_{12} . Прежде чем рассмотреть эту часть задачи, исследуем некоторые факторы, связанные с выбором функции $q(s)$. К сожалению, нет стандартных путей для выбора оптимального полинома для функции $q(s)$, хотя сложность окончательного контура, разброс значений элементов и уровень коэффициента усиления K зависит от выбора функции $q(s)$. Как правило, чем кучнее расположены нули и полюса функции z_{11} , тем больше разброс значений элементов. Таким образом, наиболее простой контур часто получается тогда, когда функция z_{11} выбрана с полюсом в точке $s = 0$ или $s = \infty$, что свидетельствует о последовательном или параллельном соединении конденсатора в окончательном контуре. Произвольность выбора полинома для функции $q(s)$ не представляет серьезного препятствия для конструктора, так как порядок синтеза является очень простым и можно проверить несколько различных полиномов для функции $q(s)$, чтобы найти оптимальный результат. Для иллюстрации способа выбора полинома для

функций $q(s)$ предположим, что желательно синтезировать передаточную функцию контура RC следующего вида:

$$T_{12}(s) = K \frac{s+6}{(s+2)(s+4)} = K \frac{A(s)}{B(s)}. \quad (9.25)$$

На фиг. 9. 13, *a* показано расположение нулей и полюсов функций T_{12} . Корни уравнения $B(s) = 0$ расположены в точках $s = -2$ и $s = 4$. Очевидно, что функция $q(s)$ должна иметь корень в диапазоне $0 \geq s > -2$ и в диапазоне $-2 > s > -4$, если z_{11} должна быть импедансной функцией контура RC . Выберем произвольно корни $s = -1$, $s = -3$ для функции $q(s)$. Тогда функцию z_{11} можно написать в следующем виде:

$$z_{11} = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}. \quad (9.26)$$

На фиг. 9. 13, *б* показано расположение нулей и полюсов для функции z_{11} . Из уравнения (9. 24) следует, что функция z_{12} определяется следующим отношением полиномов:

$$z_{12} = K \frac{A(s)}{q(s)} = K \frac{s+6}{(s+1)(s+3)}. \quad (9.27)$$

Следует заметить, что функция z_{12} имеет нули в точках $s = -6$ и $s = \infty$, совпадающие с частотами, в которых функция T_{12} имеет нули.

Фиг. 9. 13. Определение нулей и полюсов для функции $z_{11}(s)$:

a — расположение нулей и полюсов для функции

$$T_{12}(s) = K \frac{s+6}{(s+2)(s+4)} = K \frac{A(s)}{B(s)};$$

б — расположение нулей и полюсов для функции

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{B(s)}{q(s)}.$$

$z_{11}(s)$, т. е. такого контура, чтобы требуемые нули для функции $z_{12}(s)$ соответствовали бы передаточным нулям функции T_{12} . Как подчеркивалось в предыдущем разделе, передаточные нули лестничной схемы получаются благодаря полюсу импедансной функции последовательной ветви или благодаря нулю импедансной функции параллельной ветви. Простейший контур RC , у которого полюс импедансной функции лежит на отрицательной действительной оси, состоит из параллельного соединения сопротивления и емкости, как показано на фиг. 9. 5, *a*. Аналогично простейший контур с нулем импедансной функции на отрицательной действительной оси состоит из последовательного соединения емкости и сопротивления, как показано на фиг. 9. 7, *a*. Следовательно, передаточные нули лестничной схемы могут быть созданы посредством параллельного соединения

емкости и сопротивления в последовательных ветвях или путем последовательного соединения емкости и сопротивления в параллельных ветвях схемы. Практический порядок расчета состоит в подборе контуров для синтеза импедансной функции z_{11} так, чтобы образовать либо полюсы функции последовательной ветви или нули функции параллельной ветви при частотах, когда функция z_{12} имеет нули. Эти полюсы или нули затем устраняются из функции z_{11} соответственно параллельным соединением емкости и сопротивления в последовательных ветвях или последовательным соединением емкости и сопротивления в параллельных ветвях. Детали этого порядка синтеза лучше всего можно иллюстрировать на примере, так как возможны многие варианты. Продолжим рассмотрение предыдущего примера, когда функции z_{11} и z_{12} даются уравнениями (9. 26) и (9. 27).

На первой стадии расчета построим функцию $z_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ , как показано на фиг. 9. 14, а. Заметим, что функция $z_{11}(\sigma)$ приобретает следующие значения при крайних частотах:

$$z_{11}(0) = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{8}{3} = 2,67 \text{ и } z_{11}(\infty) = 1.$$

Так как функция z_{12} , а также функция T_{12} должна иметь нуль в точке $s = -6$, желательно использовать функцию $z_{11}(s)$ таким образом, чтобы образовать нуль в точке $s = -6$. Затем этот нуль можно удалить из функции z_{11} , например, последовательным соединением емкости и сопротивления в параллельной ветви лестничной схемы, благодаря чему создается один из требуемых передаточных нулей. При $s = -6$ функция $z_{11}(s)$ имеет следующее значение:

$$z_{11}(-6) = \frac{(-6+2)(-6+4)}{(-6+1)(-6+3)} = \frac{-4(-2)}{-5(-3)} = \frac{8}{15}.$$

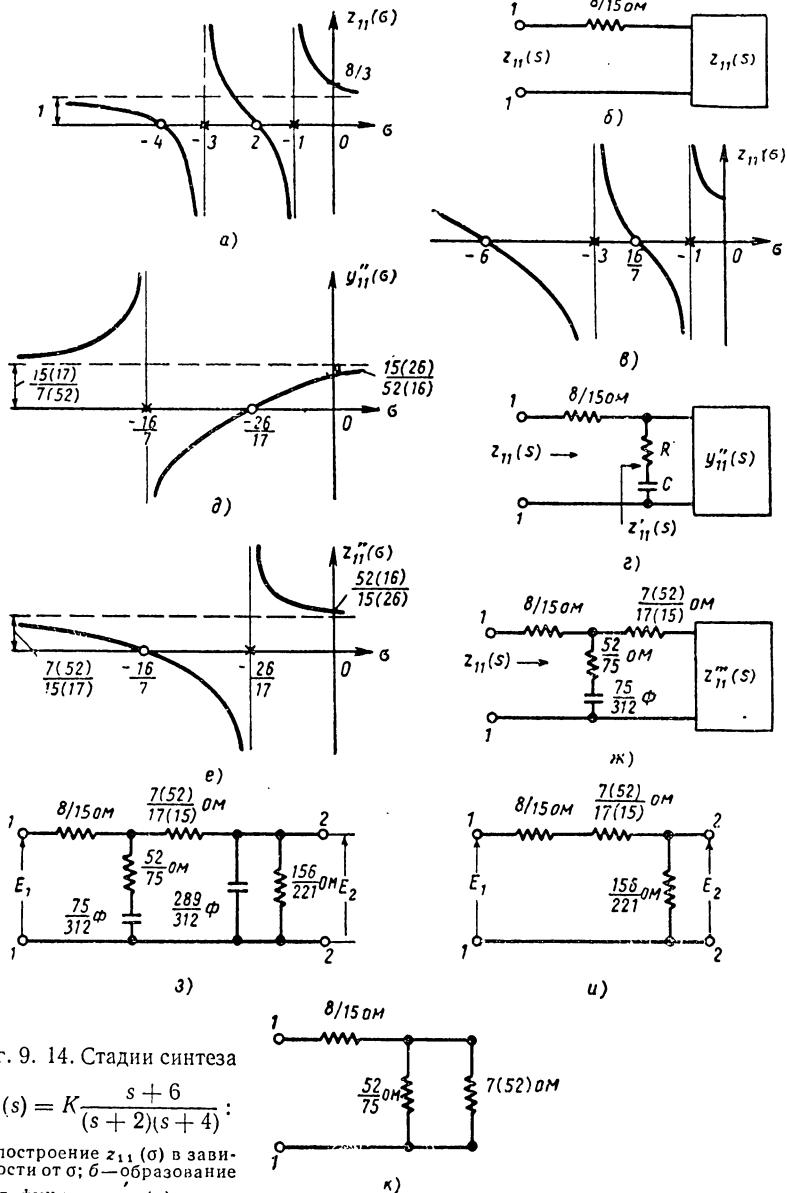
На фиг. 9. 14, а очевидно, что если $\frac{8}{15}$ ом вычесть из функции $z_{11}(\sigma)$, то остаточная функция будет иметь нуль в точке $s = -6$ и все еще сохранит свойства импедансной функции RC. Следовательно, функцию $z_{11}(s)$ можно написать в виде

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} = \frac{8}{15} + z'_{11}(s), \quad (9. 28)$$

где $z'_{11}(s)$ определяется выражением

$$z'_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)} - \frac{8}{15} = \frac{(7s+16)(s+6)}{15(s+1)(s+3)}. \quad (9. 29)$$

Теперь совершенно очевидно, что функция $z'_{11}(s)$ имеет нуль в точке $s = -6$. Учитывая уравнение (9. 28), функцию $z_{11}(s)$ можно изобразить схемой, показанной на фиг. 9. 14, б. Кривая функции $z'_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ дана на фиг. 9. 14, в. Следует заметить, что в случае, когда из функции $z_{11}(s)$ было вычтено последовательное сопротивление (см. фиг. 9. 14, а) больше 1 ом, то результирующее



Фиг. 9. 14. Стадии синтеза

$$T_{12}(s) = K \frac{s + 6}{(s + 2)(s + 4)};$$

а — построение $z_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ ; б — образование нуля функции $z'_{11}(\sigma)$ путем удаления последовательного сопротивления; в — построение функции $z''_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ ; г — устранение нуля в функции $z_{11}(s)$ при $s = -6$; д — построение функции $y''_{11}(s)$ в зависимости от s ; е — построение функции $z''_{11}(s)$ в зависимости от s ; ж — образование нуля в функции $z_{11}(s)$ при $s = \infty$; з — окончательный контур; и — определение постоянной K_1 по контуру при $s = 0$; к — схема контура при $s = \infty$.

выражение для функции $z'_{11}(s)$ нельзя представить осуществимым контуром RC , так как кривая функции $z'_{11}(\sigma)$ будет иметь отрицательное значение при $\sigma = \infty$, что физически невозможно, потому что это означает отрицательное сопротивление при высокой частоте.

Требуемый передаточный нуль при этой частоте может быть получен (так как функция $z'_{11}(s)$ имеет нуль в точке $s = -6$) путем устранения последовательного соединения емкости и сопротивления в параллельной ветви лестничной схемы, как показано на фиг. 9, 14, *з*. Таким образом, после преобразования функции $z'_{11}(s)$ можно написать ее в следующем виде:

$$\frac{1}{z'_{11}(s)} = y'_{11}(s) = \frac{15(s+1)(s+3)}{(7s+16)(s+6)} = \frac{ks}{s+6} + y''_{11}(s). \quad (9.30)$$

Значение коэффициента k вычисляется следующим образом:

$$k = \frac{15(s+1)(s+3)}{s(7s+16)} \Big|_{s=-6} = \frac{15(-5)(-3)}{-6(-26)} = \frac{15(5)}{52} = \frac{75}{52}.$$

Следовательно, значения емкости и сопротивления в последовательной цепи будут равняться

$$R = \frac{1}{k} 52/75 \text{ ом}; \quad C = k/6 = 75/6 \cdot 52 = 75/312 \text{ ф.}$$

Теперь остается определить и синтезировать остаточную функцию $y''_{11}(s)$. Проводимость $y''_{11}(s)$ определяется путем вычитания. Из равенства (9.30) следует

$$y''_{11}(s) = \frac{15(s+1)(s+3)}{(7s+16)(s+6)} - \left(\frac{75}{52}\right) \left(\frac{s}{s+6}\right) = \frac{15(17s+26)}{52(7s+16)}. \quad (9.31)$$

Функция $y''_{11}(s)$ не имеет больше полюса в точке $s = -6$. На фиг. 9, 14, *д* показана кривая функции $y''_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ . На фиг. 9, 14, *е* дана кривая функции $z''_{11}(\sigma)$ в зависимости от той же переменной σ . До сих пор мы учитывали передаточный нуль в точке $s = -6$. Из уравнения (9.27) следует, что функции $z_{12}(s)$ и T_{12} также имеют нуль в точке $s = \infty$. Этот передаточный нуль должен быть получен посредством параллельного конденсатора в лестничной схеме при синтезе функции $z_{11}(s)$. Так как функция $z''_{11}(s)$ конечна при $s = \infty$, то требуемый нуль можно образовать в функции $z''_{11}(s)$ путем вычитания функции $z''_{11}(\infty)$ из функции $z''_{11}(s)$. Но так как значение функции $z''_{11}(\infty) = \frac{52 \cdot 7}{15 \cdot 17}$, то функцию $z''_{11}(s)$ можно написать в следующем виде:

$$z''_{11}(s) = \frac{52(7s+16)}{15(17s+26)} = \frac{52 \cdot 7}{15 \cdot 17} + z'''_{11}(s), \quad (9.32)$$

где $z''_{11}(s)$ определяется из выражения

$$z''_{11}(s) = \frac{52(7s+16)}{15(17s+26)} - \frac{7 \cdot 52}{15 \cdot 17} = \frac{52 \cdot 6}{17(17s+26)}. \quad (9.33)$$

Из выражения (9.32) следует, что функцию $z_{11}(s)$ можно изобразить схемой, показанной на фиг. 9.14, ж. Как можно определить по уравнению (9.33), функция $z''_{11}(s)$ имеет теперь нуль в точке $s = \infty$, что и требовалось. Этот нуль может быть устранен, как параллельная емкость, путем преобразования функции $z''_{11}(s)$ в функцию вида $y''_{11}(s)$ и последующего деления. Следовательно,

$$y''_{11}(s) = \frac{17(17s+26)}{52 \cdot 6} = \frac{289}{312}s + \frac{221}{156}. \quad (9.34)$$

Операция синтеза заканчивается после получения уравнения (9.34), причем $y''_{11}(s)$ эквивалентна емкости $\frac{289}{312} \phi$, параллельно соединенной с проводимостью, равной $\frac{221}{156} \sigma$. Окончательный контур показан на фиг. 9.14, з.

Теперь остается вычислить постоянный коэффициент K в уравнении (9.25). Из этого уравнения следует, что $T_{12}(0) = \frac{6}{8}K = \frac{3}{4}K$. При постоянном токе ($s = 0$) контур на фиг. 9.14, з сводится к схеме на фиг. 9.14, и. Следовательно, можно прямо написать на основании схемы контура

$$T_{12}(0) = \frac{E_2}{E_1}(0) = \frac{\frac{156}{221}}{\frac{8}{15} + \frac{7 \cdot 52}{17 \cdot 15} + \frac{156}{221}} = 0,265 = \frac{3}{4}K.$$

$$z_{11}(\infty) = \frac{8}{15} + \frac{\frac{52}{75} \left[\frac{7 \cdot (52)}{17 \cdot (15)} \right]}{\frac{52}{75} + \left[\frac{7 \cdot (52)}{17 \cdot (15)} \right]} = \frac{8}{15} + \frac{7}{15} = 1.$$

Из этого равенства следует, что для найденного контура $K = 0,353$. Контур на фиг. 9.14, з можно проверить, исходя из значения функции $z_{11}(s)$ при $s = 0$ и $s = \infty$. На фиг. 9.14, к показана схема контура при $s = \infty$, когда все конденсаторы закорочены. Отсюда можно непосредственно определить на основании схем фиг. 9.14, и, к

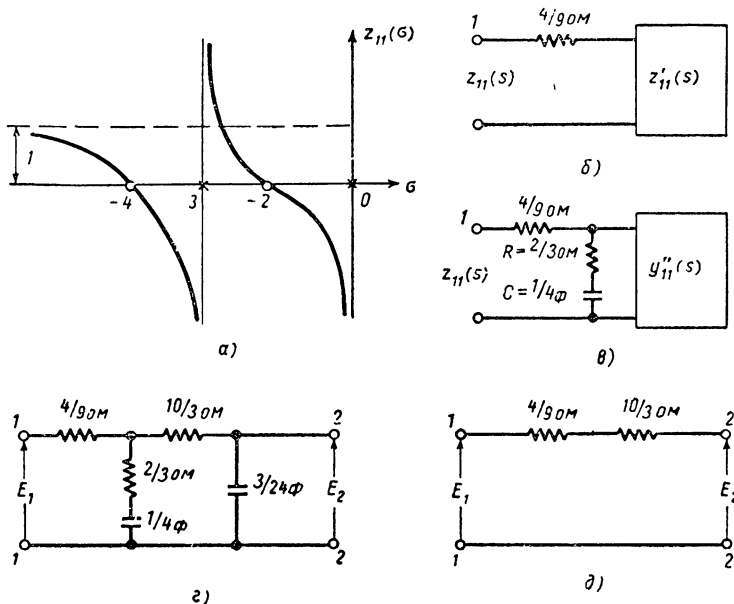
$$z_{11}(0) = \frac{8}{15} + \frac{7 \cdot (52)}{17 \cdot (15)} + \frac{156}{221} = \frac{8}{15} + \frac{32}{15} = \frac{8}{3}.$$

Эти результаты совпадают со значениями, полученными по уравнению (9.26). В описанном примере полином $q(s)$ был выбран с целью иллюстрировать порядок синтеза, а не для упрощения окончательного контура. Чтобы показать, как можно упростить результаты, исследуем синтез той же передаточной функции, но с более удачным выбором полинома функции $q(s)$. На этот раз мы выберем этот поли

ном таким образом, чтобы функция $q(s)$ имела полюс в точке $s = 0$. Возможный вариант для полинома функции $q(s)$ имеет вид $q(s) = s(s+3)$ и тогда функции z_{11} и z_{12} будут определяться выражениями

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)}; \quad (9.35)$$

$$z_{12}(s) = \frac{K(s+6)}{s(s+3)}. \quad (9.36)$$



Фиг. 9.15. Стадии синтеза

$$T_{12}(s) = \frac{s+6}{(s+2)(s+4)};$$

a — построение функции $z_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ ; $б$ — создание нуля при $s = -6$; $в$ — устранение передаточного нуля при $s = -6$; $г$ — окончательный контур; $д$ — контур при $s = 0$.

Кривая функции $z_{11}(\sigma)$ построена на фиг. 9.15, a ; эта функция имеет нуль в точке $s = -4$, в то время как функция $z_{12}(s)$ имеет нуль в точке $s = -6$. Так как $z_{11}(-6) < z_{11}(\infty)$, то возможно вычесть значение функции z_{11} при $s = -6$ из функции $z_{11}(s)$ для создания нуля в функции $z_{11}'(s)$ при $s = -6$, причем остаточная функция может быть еще осуществлена как импедансная функция RC . Отсюда

$$z_{11}(-6) = \frac{-4 \cdot (-2)}{-6 \cdot (-3)} = \frac{4}{9}.$$

Как показано на фиг. 9. 15, б, в схему последовательно включено теперь сопротивление $\frac{4}{9}$ ом, причем $z'_{11}(s)$ определяется из формулы

$$z'_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)} - \frac{4}{9} = \frac{(5s+12)(s+6)}{9s(s+3)}. \quad (9.37)$$

Как предполагалось, функция $z'_{11}(s)$ имеет нуль при $s = -6$. Этот нуль можно устранить посредством последовательного соединения емкости и сопротивления в параллельной ветви лестничной схемы, как это показано на фиг. 9. 15, в. После преобразования функции $z'_{11}(s)$: с целью получить полюс в точке $s = -6$, получаем

$$y'_{11}(s) = \frac{1}{z'_{11}(s)} = \frac{9s(s+3)}{(5s+12)(s+6)} = \frac{ks}{s+6} + y'_{11}(s). \quad (9.38)$$

Постоянный коэффициент k вычисляется по формуле

$$k = \frac{9s(s+3)}{s(5s+12)} \Big|_{s=-6} = \frac{3}{2}.$$

Отсюда емкость и сопротивление будут равны $C = \frac{k}{6} = \frac{1}{4}$ ф и $R = \frac{1}{k} = \frac{2}{3}$ ом.

Проводимость $y''_{11}(s)$ определяется из выражения (9. 38) путем вычитания, следовательно,

$$y''_{11}(s) = \frac{9s(s+3)}{(5s+12)(s+6)} - \frac{3s}{2(s+6)} = \frac{3s}{2(5s+12)}. \quad (9.39)$$

До этого момента мы учитывали требуемый передаточный ноль в точке $s = -6$. Необходимо также учесть передаточный ноль в точке $s = \infty$. Этот нуль можно создать просто путем преобразования функции $y''_{11}(s)$ в функцию вида $z''_{11}(s)$. Следовательно,

$$z''_{11}(s) = \frac{2(5s+12)}{3s} = \frac{10}{3} + \frac{24}{3s}. \quad (9.40)$$

Выражение (9. 40) показывает, что функция $z''_{11}(s)$ может быть синтезирована последовательным соединением сопротивления и конденсатора. Если сопротивление включено последовательно в лестничную схему, а конденсатор соединен параллельно, то функция $z''_{11}(s)$ будет иметь требуемый передаточный нуль в точке $s = \infty$. На фиг. 9. 15, г показан окончательный контур. Как видно, этот контур содержит одним элементом меньше, чем предыдущая схема на фиг. 9. 14, з, хотя оба контура представляют одинаковую передаточную функцию. Значение коэффициента усиления K для данного контура можно найти из функции T_{12} при $s = 0$. Этот контур может быть сведен к схеме на фиг. 9. 15, д при $s = 0$, так что $\frac{E_2}{E_1} = 1$ и K определяется после этого следующим образом $T_{12}(0) \frac{3}{4} K = 1$

и $K = \frac{4}{3} = 1,333$. Совершенно очевидно, что коэффициент усиления выше значения, полученного раньше.

Передаточная функция напряжения T_{12} . Синтез при помощи параметров y . Другой порядок синтеза функции T_{12} может быть осуществлен с применением параметра y для выражения функции $T_{12}(s)$, как это было сделано в уравнении (9. 18). Следовательно, функцию $T_{12}(s)$ можно написать в виде

$$T_{12}(s) = \frac{K(s+6)}{(s+2)(s+4)} = -\frac{y_{12}}{y_{22}} = \frac{A(s)}{B(s)}. \quad (9. 41)$$

Порядок синтеза и в этом случае очень сходен с предыдущими примерами, за исключением того, что теперь необходимо определить функции $y_{12}(s)$ и $y_{22}(s)$. Если полином функции $q(s)$ был выбран таким образом, что $y_{22}(s)$ равнялось входной проводимости контура RC , то можно написать

$$y_{22}(s) = \frac{B(s)}{q(s)}; \quad (9. 42)$$

$$-y_{12}(s) = K \frac{A(s)}{q(s)}. \quad (9. 43)$$

Нули функции $T_{12}(s)$ опять являются нулями функции $y_{12}(s)$. Порядок синтеза состоит в манипулировании над функцией $y_{22}(s)$ таким образом, чтобы создать требуемые передаточные нули, когда функция $y_{12}(s)$ имеет нули. Так как мы имеем теперь дело с функцией $y_{22}(s)$, то синтез начинается от выходных зажимов 2—2 к закороченным входным зажимам 1—1. Это закорачивание входных зажимов необходимо по определению функции y_{22} и устраняется после того, как контур станет известным. Для иллюстрации этого метода рассмотрим пример уравнения (9. 41). Для полинома функции $q(s)$ можно выбрать простейшую форму $q(s) = s + 3$, после чего функции $y_{22}(s)$ и $y_{12}(s)$ можно написать в следующем виде:

$$y_{22}(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s+3}; \quad (9. 44)$$

$$-y_{12}(s) = \frac{K(s+6)}{s+3}. \quad (9. 45)$$

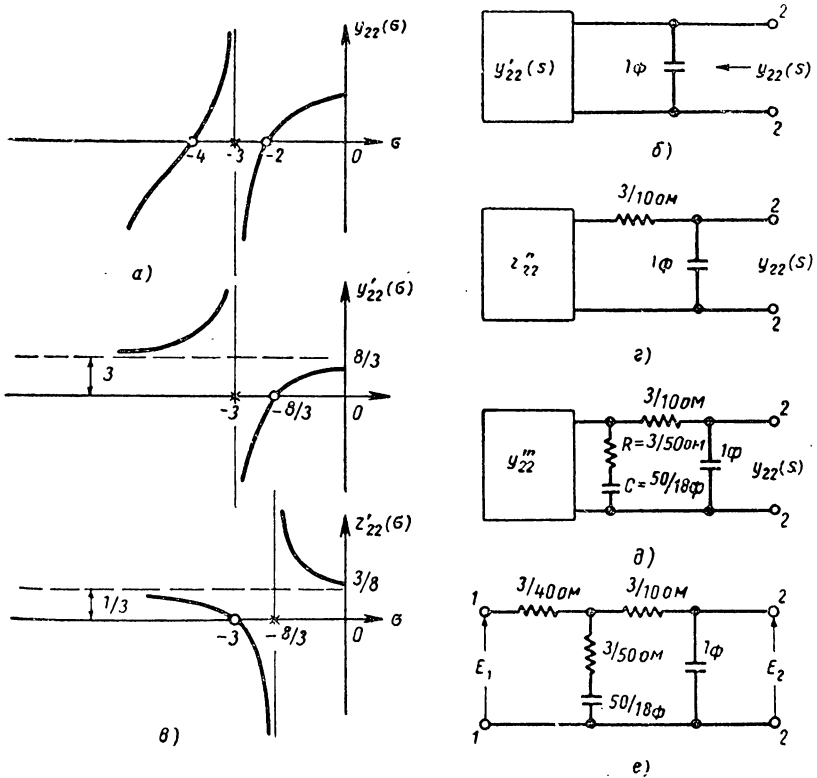
На фиг. 9. 16, *a* построена функция $y_{22}(\sigma)$, и, как видно, она соответствует случаю осуществимой функции проводимости RC . Функция $y_{22}(s)$ имеет полюс в точке $s = \infty$. Если этот полюс устранен, как параллельная емкость, то это обеспечивает также требуемый передаточный нуль в бесконечности. Таким образом, после разделения числителя уравнения (9. 44) на знаменатель с убывающей степенью s , получим следующее выражение:

$$y_{22}(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s + 3} = s + \frac{3s + 8}{s + 3} = s + y'_{22}(s), \quad (9. 46)$$

где $y'_{22}(s)$ определяется из соотношения

$$y'_{22}(s) = \frac{3s + 8}{s + 3}. \quad (9. 47)$$

Результат синтеза до этого момента изображен на фиг. 9. 16, б. На фиг. 9. 16, в даны кривые функции $y'_{22}(\sigma)$ и $z'_{22}(\sigma)$ в зависимости от σ . Так как необходимо обеспечить еще передаточный нуль в точке



Фиг. 9. 16. Стадии синтеза функции.

$$T_{12}(s) = K \frac{s + 6}{(s + 2)(s + 4)}$$

с параметром y :

a — построение функции $y_{22}(\sigma)$ в зависимости от σ ; b — устранение полюса в функции $y_{22}(s)$ при $s = \infty$; v — построение функций $y'_{22}(\sigma)$ и $z'_{22}(\sigma)$ в зависимости от σ ; z — образование нуля при $s = -6$; d — устранение передаточного нуля при $s = -6$; e — окончательная схема контура.

$s = -6$, то согласно этим кривым становится очевидно, что нуль может быть создан путем вычитания из функции $z'_{22}(s)$ значения функции $z''_{22}(s)$ при $s = -6$. Вычисление функции $z'_{22}(-6)$ дает

$$z'_{22}(-6) = \frac{-6 + 3}{3 \cdot (-6) + 8} = \frac{3}{10}.$$

Теперь контур может быть построен по схеме, показанной на фиг. 9. 16, *з*, где функция $z''_{22}(s)$ была получена путем вычитания

$$z''_{22}(s) = z'_{22}(s) - z'_{22}(-6) = \frac{s+3}{3s+8} - \frac{3}{10} = \frac{s+6}{10(3s+8)}. \quad (9.48)$$

Как и требовалось, функция $z''_{22}(s)$ имеет теперь нуль в точке $s = -6$. Этот передаточный нуль может быть выполнен непосредственно путем преобразования уравнения (9.48) и его разложения, как показано ниже

$$y''_{22}(s) = \frac{10(3s+8)}{s+6} = \frac{ks}{s+6} + y''_{22}(s). \quad (9.49)$$

Первый член этого выражения, как видно, соответствует последовательному соединению емкости и сопротивления в параллельной ветви лестничной схемы и создает требуемый передаточный нуль при $s = -6$. Значение коэффициента k определяется обычным способом, т. е.

$$k = \frac{10(3s+8)}{s} \Big|_{s=-6} = \frac{50}{3}.$$

Отсюда вычисление сопротивления и емкости приводит к следующим результатам: $R = \frac{3}{50}$ ом и $C = \frac{k}{6} = \frac{50}{3} \cdot 6 = \frac{50}{18}$ ф. Полученный таким образом контур показан на фиг. 9. 16, *д*. Выражение для $y''_{22}(s)$ получается из уравнения (9.49) путем вычитания. Следовательно,

$$y''_{22}(s) = \frac{10(3s+8)}{s+6} - \frac{50}{3(s+6)} = \frac{40}{3}.$$

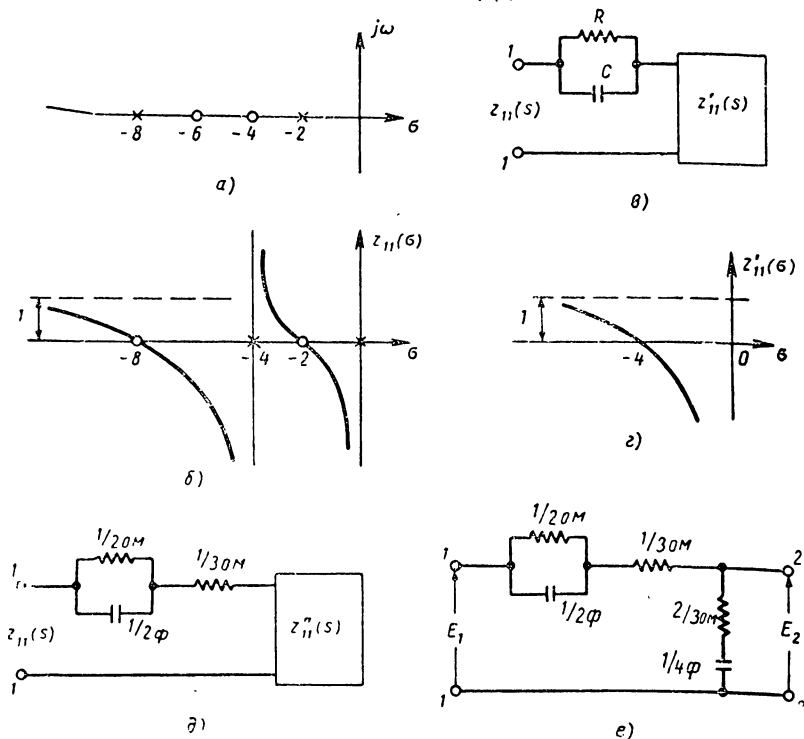
Очевидно y''_{22} представляет проводимость $\frac{40}{3}$ в. В этом частном случае мы синтезировали функцию $y_{22}(s)$ и процесс осуществляется, начиная от выходного конца (зажимы 2—2) к входному закороченному концу (зажимы 1—1). Окончательный контур при разомкнутых зажимах 1—1 изображается схемой, показанной на фиг. 9. 16, *е*. Как видно, схема этого контура аналогична схеме в предыдущем примере, за исключением того, что числовые значения различаются. В данном случае значение коэффициента K опять оказалось равным $\frac{4}{3}$.

В качестве другого примера синтеза передаточной функции в виде отношения напряжений рассмотрим случай опережающе-запаздывающей передаточной функции, при которой расположение нулей и полюсов отличается от ранее рассмотренного примера.

Пример 9. 5. Необходимо синтезировать передаточную функцию опережающе-запаздывающего контура с нулями в точках -4 ,

—6 и с полюсами в точках —2 и —8. На фиг. 9. 17, а показано расположение нулей и полюсов. Передаточная функция имеет вид

$$T_{12} = K \frac{(s+4)(s+6)}{(s+2)(s+8)} = \frac{K \left[\frac{(s+4)(s+6)}{q(s)} \right]}{\frac{(s+2)(s+8)}{q(s)}} = \frac{z_{12}(s)}{z_{11}(s)}. \quad (9.50)$$



Фиг. 9. 17. Стадии синтеза функции

$$T_{12}(s) = \frac{(s+4)(s+6)}{(s+2)(s+8)};$$

а — расположение нулей и полюсов функции

$$T_{12}(s) = K \frac{(s+4)(s+6)}{(s+2)(s+8)};$$

б — построение функции $z_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ ; в — устранение полюса при $s = -4$;

г — построение функции $z_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ ; д — образование нуля при $s = -6$;

е — окончательная схема контура.

Отсюда функция $z_{11}(s)$ определяется выражением

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{q(s)}. \quad (9.51)$$

Необходимо выбрать полином для функции $q(s)$. Очевидно функция $q(s)$ должна иметь один корень в диапазоне $-2 < s < 0$ и дру-

гой корень в диапазоне $-8 < s < -2$, когда z_{11} должна быть импедансной функцией. Контур получается простым, если выбрать функцию $q(s)$ с корнем при $s = 0$ и с другим корнем при $s = -4$; последний корень имеет место точно при той частоте, при которой функция $z_{12}(s)$ будет иметь нуль. В результате целесообразного выбора можно обеспечить, что функция $z_{11}(s)$ первоначально имеет полюс при $s = -4$, который можно затем устранить как последовательную ветвь с параллельным соединением емкости и сопротивления, благодаря чему автоматически образуется один из требуемых нулей функции $z_{12}(s)$ и $T_{12}(s)$. После этого функцию $z_{11}(s)$ можно написать в виде

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s(s+4)}. \quad (9.52)$$

Построение функции $z_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ показано на фиг. 9. 17, б. После выбора функции $q(s)$ можно следующим образом выразить функцию $z_{12}(s)$:

$$z_{12}(s) = \frac{K(s+6)(s+4)}{s(s+4)} = \frac{K(s+6)}{s}. \quad (9.53)$$

Заметим, что множитель $(s+4)$ встречается в числителе и знаменателе функции $z_{12}(s)$. Чтобы не упустить из виду этот требуемый передаточный нуль, можно устранить соответствующий полюс в функции $z_{11}(s)$, как параллельный контур RC . Таким образом, функцию $z_{11}(s)$ можно выразить в виде дроби; на фиг. 9. 17, в показан контур, изображающий эту функцию

$$z_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s(s+4)} = \frac{k}{s+4} + z'_{11}(s). \quad (9.54)$$

Коэффициент k определяется следующим образом:

$$k = \frac{(s+2)(s+8)}{s} \Big|_{s=-4} = \frac{-2(4)}{-4} = 2.$$

Отсюда можно определить значения параллельно соединенных емкости и сопротивления, а именно $C = 0,5 \text{ ф}$, $R = 0,5 \text{ ом}$. Функция $z'_{11}(s)$ определяется путем вычитания, т. е.

$$z'_{11}(s) = \frac{(s+2)(s+8)}{s(s+4)} - \frac{2}{s+4} = \frac{s+4}{s}. \quad (9.55)$$

На фиг. 9. 17, г показана кривая функции $z'_{11}(\sigma)$ в зависимости от σ . До настоящего времени мы учитывали требуемый передаточный нуль $s = -4$. Остается еще учесть требуемый передаточный нуль при $s = -6$. Это можно осуществить путем перемещения нуля в функции $z'_{11}(s)$ из точки $s = -4$ в точку $s = -6$ путем вычитания значения функции $z'_{11}(-6)$ из функции $z'_{11}(s)$. Фиг. 9. 17, г позволяет заключить, что эта операция выполняется без нарушения

возможности осуществления остаточной функции при помощи контура, состоящего из емкости и сопротивления. Следовательно, имеем $z'_{11}(-6) = \frac{(-6+4)}{(-6)} = \frac{1}{3}$. Таким образом, функцию $z'_{11}(s)$ можно написать в следующем виде:

$$z'_{11}(s) = \frac{s+4}{s} = \frac{1}{3} + z'_{11}(s). \quad (9.56)$$

Соответственно последнему выражению можно построить схему, показанную на фиг. 9.17, ∂ , которая иллюстрирует синтез функции z_{11} . Функция $z''_{11}(s)$ определяется путем вычитания, а именно

$$z''_{11}(s) = \frac{s+4}{s} - \frac{1}{3} = \frac{2s+12}{3s}. \quad (9.57)$$

Как и следовало ожидать, функция $z''_{11}(s)$ имеет нуль при $s = -6$. Чтобы этот нуль стал передаточным нулем функции $z_{12}(s)$, необходимо его устранить в виде последовательного соединения емкости и сопротивления в параллельной ветви лестничной схемы. Преобразование функции $z''_{11}(s)$ для получения ее в виде проводимости дает

$$y''_{11}(s) = \frac{3s}{2s+12} = \frac{\frac{3}{2}s}{s+6}. \quad (9.58)$$

Это уравнение представляет точное выражение проводимости последовательного соединения емкости и сопротивления и теперь окончательный контур приобретает схему, построенную на фиг. 9.17, e , где значения всех элементов были вычислены. Значение коэффициента усиления K может быть получено на основании функции T_{12} при $s = 0$, что можно определить по схеме контура и по выражению (9.50). Следовательно, можно написать

$$T_{12}(\infty) = K = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} = 0,667.$$

Форма передаточной проводимости Y_{12} . Предположим, что необходимо синтезировать передаточную функцию в виде передаточной проводимости, как показано на фиг. 9.10, z . В этом случае функцию Y_{12} можно написать в следующем виде:

$$Y_{12} = K \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{y_{12}}{1+y_{22}}. \quad (9.59)$$

Здесь необходимо определить полиномы для параметров y_{12} и y_{22} искомого четырехполюсника. После их определения процесс синтеза будет идентичен предыдущим примерам. Для определения полиномов параметров y_{12} и y_{22} необходимо выразить функцию $B(s)$

в виде суммы двух полиномов, т. е. $B(s) = B_1(s) + B_2(s)$. Подстановка этого выражения в уравнение (9. 59) и деление на $B_2(s)$ дает

$$y_{12} = K \frac{A(s)}{B(s)} = K \frac{\frac{A(s)}{B_2(s)}}{1 + \frac{B_1(s)}{B_2(s)}}. \quad (9. 60)$$

Отсюда нетрудно определить y_{22} и y_{12} .

$$y_{22} = \frac{B_1(s)}{B_2(s)}; \quad y_{12} = K \frac{A(s)}{B_2(s)}. \quad (9. 61)$$

Если $y_{22}(s)$ должна быть функцией проводимости RC , то необходимо выбрать функции $B_1(s)$ и $B_2(s)$ таким образом, чтобы их нули и полюса изменялись вдоль отрицательной действительной оси, причем один нуль должен быть расположен вблизи начала координат. Всегда возможно разложить функцию $B(s)$ на сумму двух полиномов, причем существует в действительности много возможностей подобного разложения. Чтобы избежать необходимости применения метода повторного приближения, можно использовать следующий порядок определения.

1. Функцию $B(s)$ разлагают на множители, причем B_n является постоянным коэффициентом

$$B(s) = B_n (s + p_1) (s + p_2) \dots (s + p_n). \quad (9. 62)$$

2. Полином $B_2(s)$ образуют следующим образом:

$$B_2(s) = A (s + p'_1) (s + p'_2) \dots (s + p'_n), \quad (9. 63)$$

где

$$p_1 < p'_1 < p_2 < p'_2 < \dots < p_n < p'_n \quad (9. 64)$$

и постоянный коэффициент A может иметь любое значение, отличающееся от нуля, и выбирается так, чтобы

$$A p'_1 p'_2 p'_3 \dots p'_n \leq B_n p_1 p_2 p_3 \dots p_n. \quad (9. 65)$$

3. Составляют выражение

$$B_1(s) = B(s) - B_2(s). \quad (9. 66)$$

Благодаря предыдущим операциям функции $B_1(s)$ и $B_2(s)$ будут такими, что $y_{22}(s)$, определяемое уравнением (9. 61), будет равно входной проводимости контура RC . Рассмотрим в качестве примера следующую передаточную функцию:

$$Y_{12}(s) = \frac{Ks(s+2)}{(s+4)(s+6)} = \frac{Ks(s+2)}{s^2+10s+24} = \frac{y_{12}}{1+y_{22}}. \quad (9. 67)$$

Следуя изложенному выше порядку определения, можно найти полином $B_1(s)$ и $B_2(s)$.

1. $B(s) = (s+4)(s+6)$. Отсюда $R_n = 1$ и $p_1 = 4$, $p_2 = 6$.

2. Так как функция $B(s)$ имеет квадратичное выражение, то или $B_1(s)$ или $B_2(s)$ должна быть квадратной функцией, в то время как другая должна быть линейной. Выберем $p'_1 = \frac{24}{5} = 4,8$. Это значение удовлетворяет уравнению (9. 64) и превращает функцию $B_2(s)$ в линейную (причина выбора этого частного значения будет скоро очевидна). Следовательно, $B_2(s) = A(s + 24/5)$. Значение для A было выбрано в результате подстановки числовых значений в уравнение (9. 65). Так как $A \left(\frac{24}{5} \right) < 4,6$, то A может быть выбрана равной 5 и тогда $B_2(s)$ будет определяться из равенства $B_2(s) = 5s + 24$.

3. Вычитание $B_2(s)$ из $B(s)$ дает $B_1(s) = s^2 + 5s = s(s + 5)$. Следовательно, функцию Y_{12} можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y_{12} &= \frac{Ks(s+2)}{(s+4)(s+6)} = \frac{Ks(s+2)}{(5s+24)+s(s+5)} = \\ &= \frac{Ks(s+2)}{1+s \frac{(s+5)}{(5s+24)}} \end{aligned} \quad (9. 68)$$

Теперь y_{12} и y_{22} можно определить из выражений:

$$y_{12} = K \frac{s(s+2)}{5s+24}; \quad y_{22} = \frac{s(s+5)}{5s+24}. \quad (9. 69)$$

Синтез функции y_{22} обеспечивает требуемые нули функции y_{12} , которые осуществляются так же, как и раньше. Порядок определения был освещен кратко, чтобы иметь возможность привести другой пример синтеза. В этом примере для создания требуемых передаточных нулей был получен контур из параллельного соединения емкости и сопротивления в последовательной ветви лестничной схемы. На фиг. 9. 18, *a* графически построена функция $y_{22}(\sigma)$, нетрудно видеть, что эта функция имеет нули при $s = 0$ и $s = -5$ и конечный полюс при $s = -\frac{24}{5} = -4,8$. На основании выражения для y_{12} можно установить, что передаточные нули имеют место в точках $s = 0$ и $s = -2$. Ноль функции y_{22} при $s = 0$ может быть устранен, как последовательно включенный конденсатор, который также создаст требуемый передаточный нуль при $s = 0$. Преобразование функции y_{22} и последующее деление позволяет написать

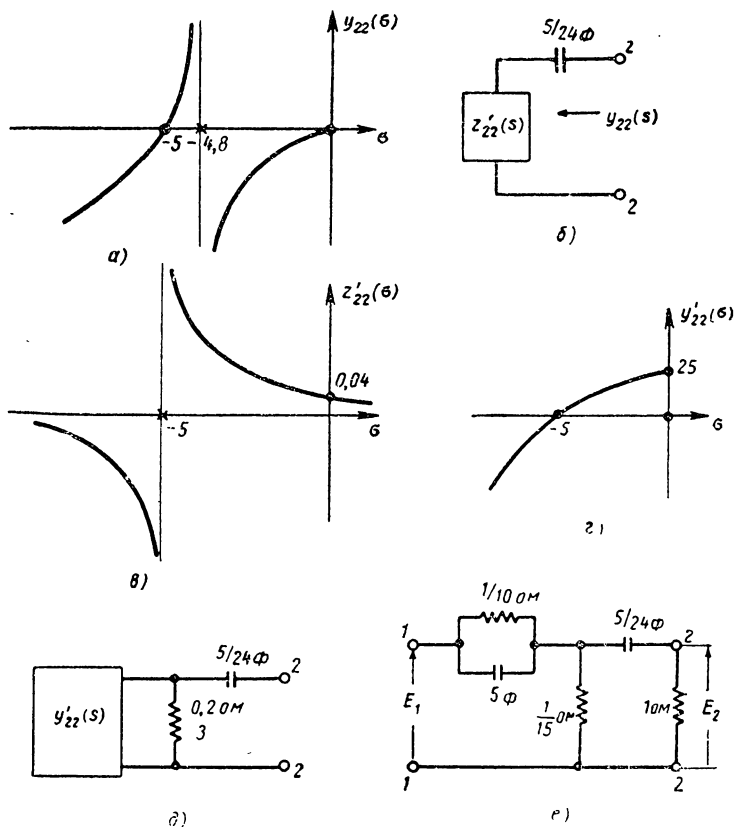
$$z_{22} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{5} s}{s(s+5)} = \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{s} + z'_{22}(s),$$

$$\text{где } z'_{22}(s) = \frac{0,2}{s+5}.$$

На фиг. 9. 18, *б* показан полученный таким образом контур. На фиг. 9. 18, *в* дано графическое изображение функции $z'_{22}(\sigma)$. Передаточный нуль при $s = 0$ был уже принят во внимание, так что теперь остается только учесть передаточный нуль при $s = -2$. Это

может быть сделано путем создания полюса в функции $z_{22}(s)$ при $s = -2$. При этом необходимо изучить функцию $y'_{22}(s)$. Итак,

$$y'_{22}(s) = \frac{s+5}{0,2}$$



Фиг. 9. 18. Синтез функции $Y_{12}(s)$:

$$Y_{12}(s) = K \frac{s(s+2)}{(s+4)(s+6)} = \frac{K u_{12}}{1 + y_{12}}$$

a — построение функции $y'_{22}(\sigma)$ в зависимости от σ ; b — образование передаточного нуля при $s = 0$; b — построение функции $z'_{12}(\sigma)$ в зависимости от σ ; c — построение функции $y'_{22}(\sigma)$ в зависимости от σ ; d — образование передаточного нуля при $s = -2$; e — окончательная схема контура.

Последняя функция графически изображена на фиг. 9. 18, c . При $s = -2$ функция $y'_{22}(s)$ имеет значение

$$y'_{22}(-2) = \frac{-2+5}{0,2} = \frac{3}{0,2} = 15.$$

Если постоянную проводимость $\frac{3}{0,2} \text{ } \Omega$ вычесть из $y'_{22}(s)$, то остаточная функция проводимости будет иметь нуль при $s = 2$. Тогда контур можно представить в виде схемы на фиг. 9. 18, *д*, где $y''_{22}(s)$ будет определяться следующим выражением:

$$z''_{22}(s) = y'_{22}(s) - \frac{3}{0,2} = \frac{s+5}{0,2} - \frac{3}{0,2} = \frac{s+2}{0,2}.$$

$y''_{22}(s)$ имеет нуль при $s = -2$, так что функция $z''_{22}(s)$ имеет полюс при $s = -2$. Преобразование функции $y''_{22}(s)$ дает функцию $z''_{22}(s)$, откуда

$$y''_{22}(s) = \frac{0,2}{s+2}.$$

$z''_{22}(s)$ имеет требуемый полюс при $s = -2$ и эту функцию можно непосредственно выразить в виде параллельного соединения емкости и сопротивления, как показано на фиг. 9. 18, *е*. Оконечное сопротивление $1 \text{ } \text{ом}$, как это требуется согласно фиг. 9. 10, *з*, было также добавлено в этой схеме. Значение коэффициента K определяется из характеристики контура при $s = \infty$ и равно $K = 1$.

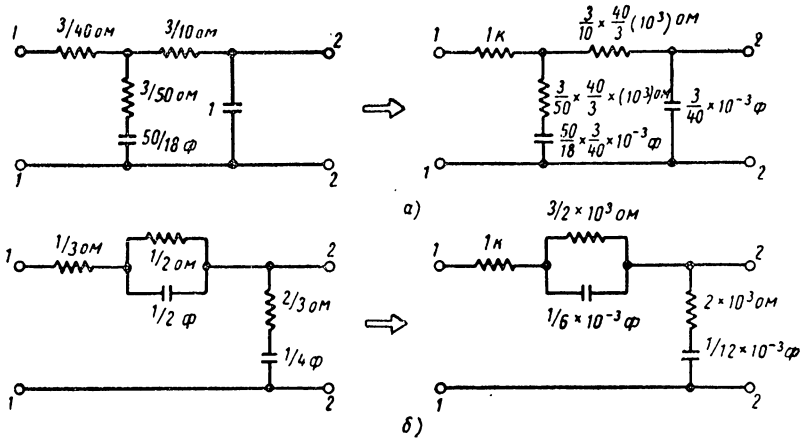
9. 6. ВЕЛИЧИНА ИМПЕДАНСА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ

В предыдущих разделах читатель мог ознакомиться с простыми примерами, когда простые значения были выбраны для определения места расположения нулей и полюсов передаточной функции. Очевидно, это позволяет упростить арифметические действия, но приводит к несколько непрактичным параметрам звеньев системы. С целью изменения этих значений для практического применения возможно применить два преобразования контура после окончания синтеза. Первое преобразование состоит в изменении величины импеданса, что позволяет увеличить или уменьшить импеданс контура, не изменяя существенно передаточную функцию. Второе преобразование состоит в сдвиге частоты, что позволяет расширить или сузить расположение нулей и полюсов в плоскости s таким образом, что нули и полюсы будут смещены в сторону более практических значений. Ниже рассматриваются эти способы преобразований.

Преобразование величины импеданса. При этом преобразовании величина импеданса смещается на постоянный коэффициент k путем умножения значений всех сопротивлений на коэффициент k и деления значений всех емкостей на тот же коэффициент k . Нетрудно видеть, что все постоянные времени, а также расположение всех нулей и полюсов сохраняются. Однако все импедансные функции были умножены на постоянный коэффициент k и все функции проводимости были разделены на тот же коэффициент k . Безразмерная передаточная функция, например T_{12} , остается неизменной, в то время как передаточная функции Z_{12} и Y_{12} были соответственно умножены

или разделены на коэффициент k . На фиг. 9. 19 показано несколько контуров, описанных в предыдущих разделах, причем импеданс генератора (сопротивление последовательной ветви) в каждом случае был увеличен до 1000 ом.

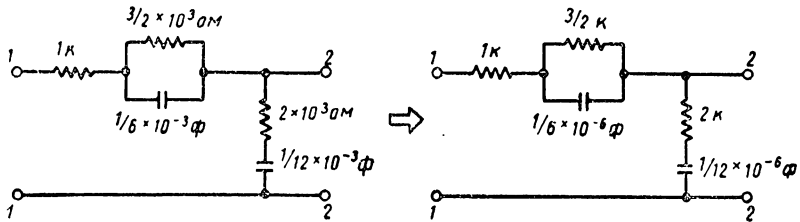
Преобразование частоты. При этом преобразовании значения сопротивлений остаются неизменными, но все емкости делятся



Фиг. 9. 19. Преобразование импеданса:

a — контур фиг. 9. 16, *б* — корректирующий контур по запаздыванию и опережению фиг. 12. 17, *e*.

на коэффициент k . В результате этого все постоянные времени умножаются на постоянный коэффициент k , так что положение нулей и полюсов смещается. Например, если значения емкостей конденсаторов на фиг. 9. 19, *б* были разделены на 1000, то получаемый таким



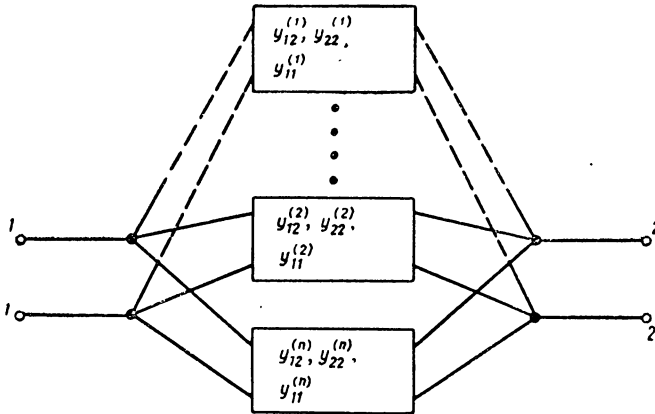
Фиг. 9. 20. Смещение частоты на величину 10^3 .

образом контур будет иметь одинаковую передаточную функцию согласно уравнению (9. 50), за исключением того, что теперь нули и полюсы будут расположены в точках $s = 4 \times 10^{+3}$, $s = -6 \times 10^{+3}$, $s = -2 \times 10^{+3}$, $s = -8 \times 10^{+3}$.

Как правило, преобразования импеданса и частоты могут быть осуществлены на одном и том же контуре. На фиг. 9. 20 показана первоначальная схема контура фиг. 9. 19, *б* с измененным масштабом частоты и с преобразованной величиной импеданса.

9. 7. СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛЕСТНИЧНЫХ СХЕМ RC

В предыдущих разделах были освещены методы синтеза для случая контуров лестничного типа на сопротивлении и емкости, когда нули и полюсы передаточной функции были ограничены значениями отрицательной действительной оси. Однако, возможно также синтезировать минимально фазовые контуры RC (т. е. немостового типа), когда нули передаточной функции могут находиться вне отрицательной действительной оси, при условии, что они представляют комплексные сопряженные пары и ограничены левой полуплоскостью s . В этом случае простой контур лестничного типа невозможен и тре-



Фиг. 9. 21. Параллельное соединение четырехполюсников.

буются более сложные контуры. Один простой метод разработан Гиллемином, который позволяет получить окончательную схему, состоящую из параллельного соединения четырехполюсников. Параллельное соединение четырехполюсников показано на фиг. 9. 21. На этой фигуре можно видеть, что общий параметр y для этого соединения определяется суммой параметров y отдельных контуров: следовательно,

$$y_{11} = y_{11}^{(1)} + y_{11}^{(2)} + \dots + y_{11}^{(n)}; \quad (9. 70a)$$

$$y_{22} = y_{22}^{(1)} + y_{22}^{(2)} + \dots + y_{22}^{(n)}; \quad (9. 70б)$$

$$y_{12} = y_{12}^{(1)} + y_{12}^{(2)} + \dots + y_{12}^{(n)}, \quad (9. 70в)$$

где y_{11} , y_{12} , y_{22} представляют параметры y параллельного соединения, причем индексы в скобках наверху означают параметры отдельных контуров. С целью лучше понять метод Гиллемина рассмотрим следующую передаточную функцию $Y_{12}(s)$:

$$Y_{12}(s) = K \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{y_{12}}{1 + y_{22}}. \quad (9. 71)$$

Здесь опять $A(s)$ и $B(s)$ представляют полиномы; кроме того, функция $B(s)$ имеет корни, расположенные только на отрицательной действительной оси, в то время как корни функции $A(s)$ ограничены левой полуплоскостью, включая мнимую ось.

Разложение функции $B(s)$ на полиномы $B_1(s)$ и $B_2(s)$, как и в предыдущем разделе, позволяет написать

$$Y_{12}(s) = \frac{A(s)}{1 + \frac{B_1(s)}{B_2(s)}}. \quad (9.72)$$

Корни функции $A(s)$ расположены в левой полуплоскости s . Поэтому ее можно написать в виде суммы отдельных членов, так что функция $A(s)$ приобретает следующую форму полинома:

$$A(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n. \quad (9.73)$$

Исходя из уравнения (9.73) можно уравнение (9.71) переписать в другом виде

$$\begin{aligned} Y_{12}(s) &= \frac{K \left[\frac{a_0}{B_2(s)} + \frac{a_1s}{B_2(s)} + \dots + \frac{a_ns^n}{B_2(s)} \right]}{1 + \frac{B_1(s)}{B_2(s)}} = \\ &= \frac{K (y_{12}^{(1)} + y_{12}^{(2)} + \dots + y_{12}^{(n)})}{1 + y_{22}}, \end{aligned} \quad (9.74)$$

где $y_{12}^{(n)} = a_ns^n/B_2(s)$.

После проверки уравнения (9.74) становится очевидно, что функцию Y_{12} можно изобразить в виде параллельного соединения четырехполосников, причем каждый имеет одинаковую функцию $y_{22}(s) = B_1(s)/B_2(s)$, но с соответствующими значениями $y_{12}^{(1)}$, $y_{12}^{(2)}$... $y_{12}^{(n)}$, если временно пренебречь постоянными множителями. После синтезирования каждый из четырехполосников будет иметь лестничную схему и свой собственный коэффициент усиления в виде постоянного множителя. Если обозначить эти коэффициенты K_1 , K_2 , ... K_n , то y_{12} параллельного соединения этих контуров будет определяться выражением

$$y_{12} = K_1y_{12}^{(1)} + K_2y_{12}^{(2)} + \dots + K_ny_{12}^{(n)}. \quad (9.75)$$

После умножения проводимости каждого контура на коэффициент $\frac{K}{K_n}$ получим общую функцию y_{12} :

$$y_{12} = K (y_{12}^{(1)} + y_{12}^{(2)} + \dots + y_{12}^{(n)}), \quad (9.76)$$

где K представляет в данный момент постоянный коэффициент, значение которого будет определено позднее. Общая функция y_{22}

выражается суммой отдельных функций y_{22} , причем каждая умножается на свой коэффициент уровня проводимости. Следовательно,

$$y_{22} = K \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n} \right) \frac{B_1(s)}{B_2(s)}. \quad (9. 77)$$

Так как y_{22} по уравнению (9. 77) должно быть эквивалентно y_{22} по уравнению (9. 74), то очевидно, что коэффициент K должен быть выбран так, чтобы

$$K \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n} \right) = 1$$

или

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \dots + \frac{1}{K_n}. \quad (9. 78)$$

Рассмотрим простой пример для иллюстрации деталей синтеза по методу Гиллемина. Предположим, что требуется синтезировать следующую передаточную функцию:

$$Y_{12} = \frac{K(s^2 + 1)}{2s^2 + 20s + 44} = \frac{KA(s)}{B(s)}. \quad (9. 79)$$

Нули этой функции расположены в точке $s = \pm j$ и полюсы в точках $s = -3,27; -6,73$. Как и в предыдущем разделе, функцию $B(s)$ можно разложить на сумму двух полиномов, а именно

$$B(s) = B_1(s) + B_2(s) = (s + 2)(s + 6) + (s + 4)(s + 8).$$

После определения функций $B_1(s)$ и $B_2(s)$ возможно написать в другом виде функцию Y_{12} [см. уравнение (9. 80)], причем

$$B_1(s) = (s + 2)(s + 6) \text{ и } B_2(s) = (s + 4)(s + 8).$$

$$Y_{12} = \frac{K(s^2 + 1)}{\frac{[(s + 4)(s + 8)]}{1 + [(s + 2)(s + 6)]} [(s + 4)(s + 8)]}. \quad (9. 80)$$

Из уравнения (9. 80) следует, что функцию Y_{12} можно синтезировать в виде параллельного соединения двух лестничных контуров со следующими параметрами y :

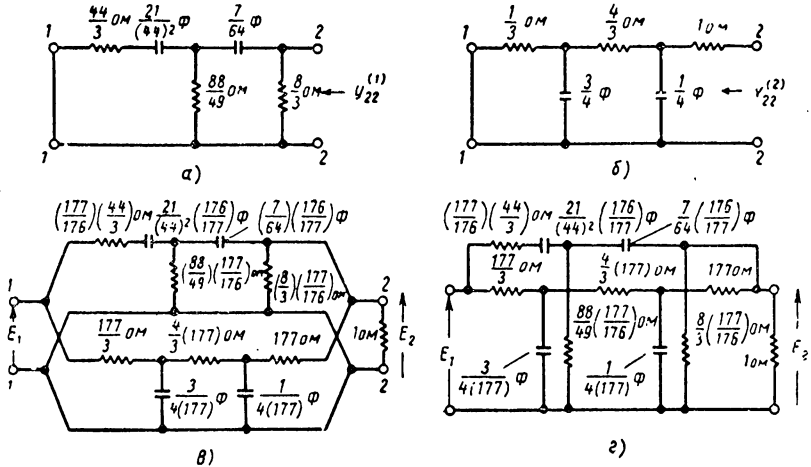
контур 1

$$y_{12}^{(1)} = \frac{K_1 s^2}{(s + 4)(s + 8)}; \quad y_{22}^{(1)} = \frac{(s + 2)(s + 6)}{(s + 4)(s + 8)}; \quad (9. 81)$$

контур 2

$$y_{12}^{(2)} = \frac{K_2}{(s + 4)(s + 8)}; \quad y_{22}^{(2)} = \frac{(s + 2)(s + 6)}{(s + 4)(s + 8)}. \quad (9. 82)$$

Начнем с контура 1; заметим, что при $s = 0$ имеется два передаточных нуля. При синтезе функции y_{22} эти нули могут быть получены путем разложения функции y_{22} в виде непрерывной дроби с членами, представляющими звенья лестничной схемы с параллельным соединением сопротивлений и последовательным соединением емкостей. Этот частный случай разложения функций был осуществлен в разделе 9. 2 и полученный контур показан на фиг. 9. 22, а. Необходимо заметить, что разложение функции $y_{22}^{(1)}$ приводит к контуру с короткозамкнутыми зажимами 1—1.



Фиг. 9. 22. Синтез функции

$$Y_{12} = \frac{K(s^2 + 1)}{s^2 + 20s + 44} :$$

а — контур 1; б — контур 2; в — окончательный контур, параллельное соединение; г — перегруппировка звеньев предыдущего контура.

Контур 2 имеет такую же функцию y_{22} , как и контур 1, за исключением того, что два передаточных нуля функции y_{12} находятся в бесконечности. Это означает, что функция $y_{22}^{(2)}$ может быть разложена в лестничную форму с емкостями в параллельных ветвях и с сопротивлениями в последовательных ветвях. Это разложение функции было также осуществлено в разделе 9. 2; полученный контур с короткозамкнутыми зажимами 1—1 показан на фиг. 9. 22, б.

Необходимо отрегулировать уровни проводимости контуров прежде чем их соединить параллельно. Коэффициент усиления для контура 1 может быть получен на основании функции y_{12} при $s = \infty$. K_1 определяется по току короткого замыкания на зажимах 1—1, когда к зажимам 2—2 приложено единичное напряжение, причем все конденсаторы закорочены. Отсюда получаем $K_1 = \frac{3}{44}$. Аналогично K_2 можно определить путем вычисления функции y_{12}^2 при

$\dot{s} = 0$. Применение уравнения (9. 82) и контура на фиг. 9. 22, б приводит к следующему результату: $\frac{K_2}{32} = \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\right)}$; от-

куда $K_2 = 12$. Исходя из уравнения (9. 78) можно вычислить коэффициент K , а именно: $\frac{1}{K} = \frac{1}{12} + \frac{44}{3} = \frac{177}{12}$.

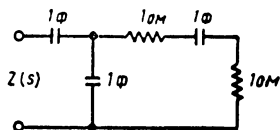
Уровень проводимости контура 1 следует умножить на коэффициент $\frac{K}{K_1} = \frac{12}{177} \times \frac{44}{3} = \frac{176}{177}$. Аналогично уровень проводимости контура 2 необходимо умножить на коэффициент $\frac{K}{K_2} = \frac{12}{177} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{177}$. Затем контуры могут быть соединены параллельно, короткое замыкание на зажимах 1—1 устранено и параллельное соединение замкнуто на сопротивление 1 ом для окончания синтеза требуемой передаточной функции. Полученный контур показан на фиг. 9. 22, б и г. Очевидно, уровень импеданса и частоты окончательного параллельного контура могут быть преобразованы по желанию.

Описанный здесь синтез по методу Гиллемина представляет один из многих доступных методов синтеза передаточных функций контуров RC . Эта тема здесь не может быть исчерпана. Один из очень полезных методов был разработан Дашером, который приводит к каскадному соединению четырехполюсников. Читателю следует обратиться к рекомендованной литературе для более полного изучения синтеза контуров.

ЗАДАЧИ

9. 1. Найти четыре канонические формы для следующих импедансных функций:

а) $Z(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}$; б) $Z(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)}$;



Фиг. 9. 23. Определение канонических контуров, эквивалентных изображенной схеме.

в) $Z(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$.

9. 2. Найти четыре канонических контура, эквивалентных схеме, показанной на фиг. 9. 23.

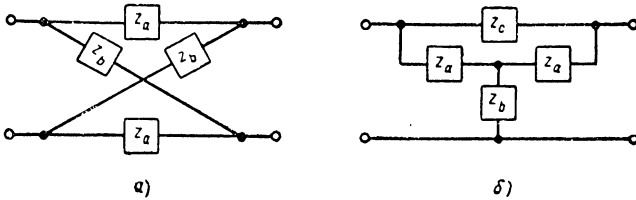
9. 3. Определить параметры z и y для контуров, показанных на фиг. 9. 24.

9. 4. Синтезировать следующие передаточные функции с элементами RC , как передаточную функцию отношения напряжений по схеме, приведенной на фиг. 9. 10, б. Вычислить коэффициент усиления K для каждого полученного контура. Проверить полученные результаты путем пересчета передаточной функции по схеме контура.

9. 5. Дан контур, показанный на фиг. 9. 25.

а) Определить передаточную функцию $\frac{V_c}{V_i}$ (s).

б) Преобразовать величину импеданса таким образом, чтобы входной импеданс для постоянного тока был равен 1 Мом .

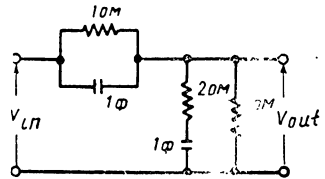


Фиг. 9. 24. Определение параметров y и z для изображенных контуров.

в) Определить выходное напряжение V_0 , когда на вход подана единичная возмущающая функция вида $V_i = u(t)$.

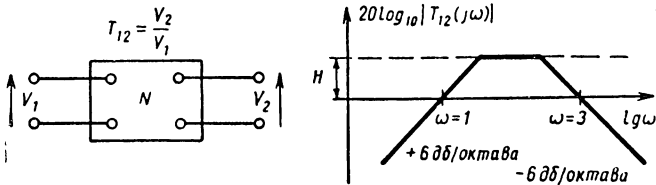
г) Преобразовать величину частоты таким образом, чтобы преобладающая постоянная времени реакции на единичную функцию равнялась 1 сек .

д) Построить логарифмическую амплитудную характеристику передаточной функции до и после преобразования согласно пунктам «б» и «г». Насколько эти характеристики отличаются от логарифмических амплитудных характеристик первоначального контура.



Фиг. 9. 25.

9. 6. Передаточная функция контура с минимальным сдвигом фаз на RC имеет логарифмическую амплитудную характеристику, показанную на фиг. 9. 26. Определить контур и вычислить значение H в децибелах для найденного контура.



Фиг. 9. 26.

9. 7. На фиг. 9. 27 показан заданный контур.

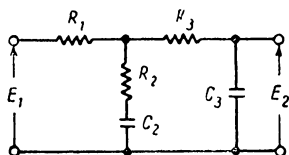
а) Вычислить передаточную функцию $\frac{E_2}{E_1}$ (s).

б) Показать, что контуры на фиг. 9. 15, г и 9. 16, е имеют одинаковые передаточные функции $\frac{E_2}{E_1}$ (s).

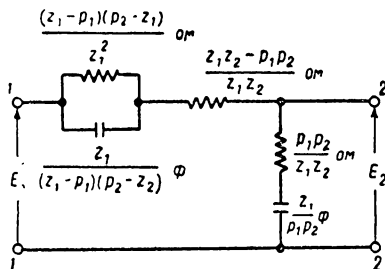
9. 8. Дана обобщенная передаточная функция для опережающе-запаздывающего контура

$$T_{12} = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)},$$

где $p_2 > z_2 > z_1 > p_1$. Показать, что эта передаточная функция может быть синтезирована как отношение напря-



Фиг. 9. 27.



Фиг. 9. 28.

жений в виде контура, изображенного на фиг. 9. 28. Определить значение коэффициента K для данного контура.

МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Линейные системы, которым были посвящены предыдущие главы, образуют фундамент для всех последующих исследований. Теперь можно сосредоточить внимание на анализе и расчете систем, которым присущи нелинейности такого рода, как насыщение, кулоново трение, «мертвый ход» и др. Для решения таких задач можно применить в основном два метода. Один метод решения требует, чтобы конструктор изучил доступные способы исследования нелинейных систем, например метод описывающих функций¹ или метод фазовой плоскости. Второй метод подразумевает применение моделирующих устройств (вычислительных машин непрерывного действия) как научный инструмент анализа и расчета. Машинные методы позволяют моделировать как линейные, так и нелинейные элементы системы и затем находить решения. Применение моделирующих устройств является многообещающим методом по ряду причин. Одна из причин лежит в возможности для конструктора получить значительно более исчерпывающий анализ при существенно меньших затратах времени и труда. После того, как осуществлено моделирование задачи посредством вычислительных устройств непрерывного действия, можно легко и быстро найти решение для регулируемой величины в соответствии с различными видами входных команд и при разных сочетаниях параметров системы и объекта регулирования. Кроме того, полученные результаты можно легко интерпретировать в виде осциллограмм, представляющих решения задачи, которые обычно дают выходные звенья вычислительной машины. Это создает возможность оптимизировать значения параметров нелинейных систем управления. Для получения тех же результатов аналитическим методом требуется затратить много труда для сравнения разных вариантов решения и выбора оптимального варианта.

Вторая причина связана с тем, что расчет многих систем автоматического управления зависит от поведения подобных систем при

¹ В русской литературе метод описывающих функций называется методом гармонического анализа. (Прим. ред.)

наличии случайных помех, которые возникают в виде непредвиденного явления, либо в виде статистического характера входного возмущения. Электронное моделирующее устройство, снабженное надлежащим генератором случайных помех может быть использовано для изучения проблем этого рода. Подобный метод особенно ценен при изучении нелинейных систем, так как не известен общий аналитический метод для анализа таких систем. По этим причинам (а также по другим, о которых будет упомянуто ниже) настоящая глава посвящена описанию методов электронного моделирования и их применению в проектировании систем управления. Однако не следует думать, что этот выбор каким-либо образом снижает значение приобретения знаний основ аналитических методов исследования нелинейных систем. Последние всегда будут полезны, в особенности для правильного и целесообразного применения вычислительных машин непрерывного действия. Читателю, интересующемуся широко этим вопросом, рекомендуется обратиться к соответствующей литературе.

10. 1. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Моделирование задачи можно определить как подобие дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы и модели. Следовательно, когда дифференциальное уравнение, описывающее поведение механической системы, содержащей массу M , пружины с постоянной K и вязкое трение с коэффициентом F , имеет вид

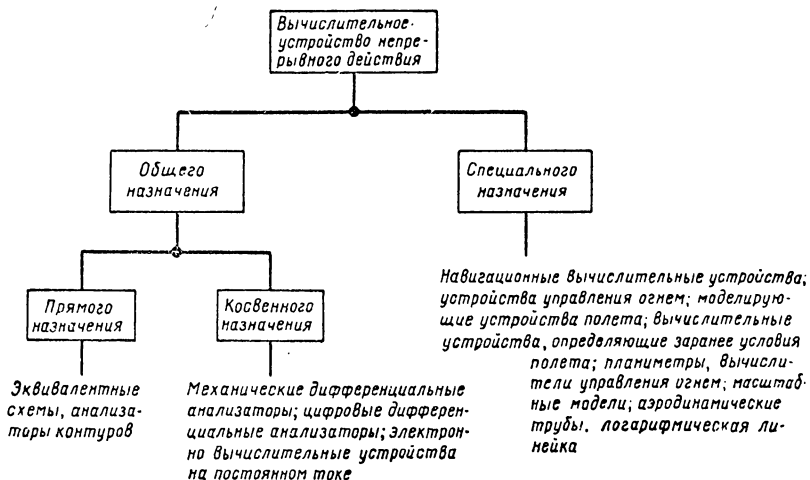
$$M \frac{d^2x}{dt^2} + F \frac{dx}{dt} + Kx = f \text{ (сила)} \quad (10. 1)$$

и когда дифференциальное уравнение, описывающее электрическое состояние контура RLC , выражается

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E \text{ (напряжение)}, \quad (10. 2)$$

тогда возможно создать электрическую модель механической системы, так как оба уравнения имеют одинаковую форму. Чтобы модель была правильной, требуется соблюдения следующее условие: электрические параметры и переменные величины должны выполнять точно одинаковую роль, которую играют моделированные величины изучаемой системы. Для осуществления этого необходимо, чтобы самоиндукция выполняла ту же роль, как и масса M , сопротивление R было аналогично коэффициенту вязкого трения F и $\frac{1}{C}$ — аналогично K . Кроме того, зависимая переменная x первоначальной задачи моделируется зарядом q . Таким образом, приложенная сила к механической системе будет соответствовать напряжению в электрической модели. Эти выводы очевидны при сравнении уравнений (10. 1) и (10. 2). Моделирующее устройство, сконструированное на этом принципе, называется моделирующим устройством общего назначения прямого типа.

Второй метод может быть применен для определения перемещения, величин механической системы, описываемой уравнением (10. 1). Изучение этого уравнения показывает, что решение может быть найдено путем взаимного соединения надлежащего оборудования, способного осуществлять математические операции, содержащиеся в уравнении (10. 1). Если два вычислительных устройства в состоянии производить интегрирование по времени, а также операции суммирования, то можно найти решение уравнения (10. 1). Моделирующее устройство, создаваемое на этом принципе, называется вычислительными устройствами общего назначения косвенного типа.



Фиг. 10. 1 Классификация вычислительных устройств непрерывного действия.

В настоящей главе рассмотрим последний тип вычислительных устройств. Здесь все переменные величины выражены электрическими напряжениями.

На фиг. 10. 1 дана классификация всех типов вычислительных устройств непрерывного действия. Вычислительные устройства специального назначения основаны на тех же принципах, как и вычислительные устройства общего назначения. Различие состоит только в том, что они предназначены для решения уравнений специального вида, соответствующих специальным видам входных функций. Следовательно, они могут быть использованы для решения только специальных задач. Механический дифференциальный анализатор был первым вычислительным устройством общего назначения косвенного типа. Он был создан В. Бушем в Массачузетском технологическом институте, причем использованы механические интеграторы с шариком и диском. Хотя это счетное устройство обладало достаточной степенью точности, но позднее перестали создавать подобные устройства, потому что, с одной стороны, они не так точны, как цифровые вычислительные машины и, с другой стороны, их нельзя сравнивать

по простоте и скорости операций с электронными вычислительными машинами непрерывного действия. В связи с этим заслуживает внимания построенная в 1958 г. одна из наиболее крупных вычислительных машин непрерывного действия общего назначения, габаритные размеры которой составляли $8,7 > 13,8 > 27,3$ м; она была использована для решения сложных расчетных задач, связанных с проектированием высокоскоростных самолетов для большой высоты.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только электронных вычислительных устройств непрерывного действия на постоянном токе, в связи с чем следует упомянуть о некоторых дополнительных особенностях этих устройств. Вследствие примененного метода интегрирования обычно время является независимой переменной. В этом отношении электронные вычислительные машины непрерывного действия отличаются от цифровых вычислительных устройств, как и от механического дифференциального анализатора, так как они не имеют этого ограничения. По этой причине становится очевидным, что решение дифференциальных уравнений в частных производных трудно получить при помощи электронных вычислительных машин непрерывного действия.

Точность решения, достигаемая электронными вычислительными машинами непрерывного действия, обычно доходит до второго, третьего или даже четвертого знака. В основном это ограничение обусловлено характером моделирующих звеньев, из которых составлена вычислительная машина. Например, интегрирующие конденсаторы обладают оптимальной точностью 0,1 до 0,01% и таким образом точность решения не может быть получена выше точности этих звеньев. Кроме того, дополнительно к ограничениям, создаваемым звеньями, в процесс интегрирования (который подвержен дрейфу и др.), процесс суммирования и др. вводятся ошибки.

Как подчеркивалось в начале главы, наиболее широкая область применения электронных моделирующих устройств связана с анализом и расчетом нелинейных систем управления, подверженных воздействию случайных помех на входе. Вторую и одинаково важную область образует анализ таких сложных проблем, которые встречаются при изучении тепловых потоков, управления процессами и управления самолетом как системой с шестью степенями свободы. Электронные вычислительные машины создают значительное преимущество в тех областях, где требуется изучить динамические характеристики систем. Кроме того, эти устройства часто дают экономию средств и времени. Например, при расчете автопилота для современного самолета возможно моделировать уравнение полета при разных высотах и различных значениях числа Маха при помощи электронных вычислительных машин непрерывного действия и затем подавать надлежащие выходные величины полета в кабину пилота, установленную рядом с вычислительной машиной в лаборатории. Этим путем, когда пилот находится в кабине, можно расчет оптимизировать без необходимости больших затрат, связанных с действительными летными испытаниями,

Авиапромышленность является одним из больших потребителей электронных моделирующих устройств. Это преимущественное применение электронных устройств сравнительно с цифровыми вычислительными устройствами объясняется, например, тем, что точность аэродинамических параметров, применяемых в уравнениях движения, часто не превышает 5—10%. Отсюда ограниченная точность электронных моделирующих устройств не создает недостатка, но практически более удобна из-за простоты и легкости операций. Конечно, когда требуется высокая точность, например, при расчете траектории управляемого снаряда с большим радиусом действия, необходимо предпочесть применение цифровых вычислительных устройств.

Другую особенность электронных моделирующих устройств можно иллюстрировать следующим примером. В некоторых научно-исследовательских отчетах были изложены теоретические аспекты применения расчетов вариантов для оптимизации условий полета самолетов. Однако выводы не были сделаны вследствие сложности уравнений. После этого были использованы электронные вычислительные машины непрерывного действия и не только были получены практические ответы, но благодаря применению вычислительных машин были подтверждены предложенные изменения теории.

10. 2. ОСНОВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Электронные вычислительные устройства непрерывного действия состоят из конструктивных блоков, способных осуществлять те или иные математические операции.

В настоящем разделе будут описаны способы осуществления операций умножения, сложения, интегрирования и дифференцирования.

Умножение на постоянный коэффициент. При моделировании очень часто необходимо умножить переменный параметр машины на постоянный коэффициент. Когда постоянный множитель равен числу меньше единицы, тогда умножение осуществляется при помощи потенциометра, как показано на фиг. 10. 2. Если предположить, что выходная ветвь потенциометра не нагружена (т. е. $R_L \rightarrow \infty$), тогда выходная величина будет связана с входной следующим отношением:

$$e_0 = ae_1, \quad (10. 3)$$

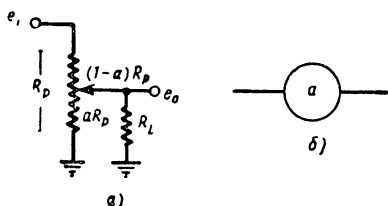
где a определяет положение ползунка потенциометра. В большинстве случаев для вычислительных машин применяют потенциометры, рассчитанные на десять полных оборотов, причем они могут быть установлены в трех местах в диапазоне $0,000 \leq a \leq 1,000$. Общее сопротивление потенциометра варьируется от 10 000 до 100 000 ом ; наиболее распространенные потенциометры имеют сопротивление 30 000 ом . При нормальном применении этих потенциометров сопротивление внешней нагрузки R_L обычно колеблется в диапазоне

от 0,1 до 1,0 *Мом*, так что влияние нагрузки не всегда пренебрежимо мало. Более точный анализ отношения выходной величины к входной показывает, что действительное отношение будет

$$\frac{e_0}{e_i} = \frac{a}{1 + a(1 - a)} \left(\frac{R_p}{R_L} \right), \quad (10. 4)$$

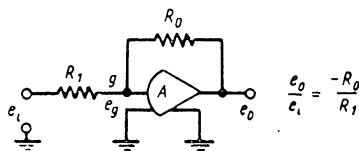
где *a* соответствует идеальному значению этого отношения.

Ясно, что ошибка отношения выходной величины к входной может быть сделана малой, если выбрать малое отношение сопротивлений $\frac{R_p}{R_L}$. Сопротивление потенциометра R_p не может быть сделано слишком малым. Иначе он будет потреблять слишком большой ток, превышающий мощность усилителя, который создает переменную входную величину, т. е. входное напряжение.



Фиг. 10. 2. Потенциометр установки коэффициентов:

a — принципиальная схема; *b* — символическое обозначение.



Фиг. 10. 3. Схема для умножения на постоянную величину больше единицы.

Когда переменный параметр машины необходимо умножить на число больше единицы, тогда применяют операционный усилитель. Операционный усилитель снабжен непосредственно присоединенной обратной связью, причем коэффициент усиления разомкнутой цепи часто превышает 10^8 . Операционный усилитель служит основным конструктивным блоком, применяемым в большинстве вычислительных звеньев электронных моделирующих устройств. Чтобы понять, как можно осуществить умножение на постоянный коэффициент больше единицы, рассмотрим схему на фиг. 10. 3. Операционный усилитель с коэффициентом усиления *A* изображен на ней символическим знаком. Применяя закон Кирхгофа к точке цепи *g* и предполагая, что сеточный ток равен нулю, получим

$$\frac{e_i - e_g}{R_1} + \frac{e_0 - e_g}{R_0} = 0, \quad (10. 5)$$

причем

$$e_0 = A e_g. \quad (10. 6)$$

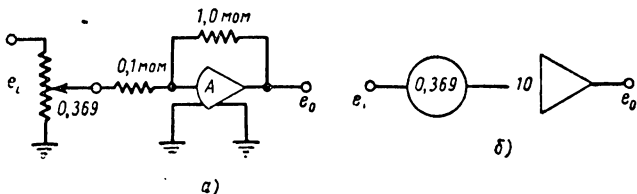
Подстановка равенства (10. 6) в уравнение (10. 5) дает

$$\frac{e_0}{e_i} = \frac{A R_0}{R_1 \left[\left(\frac{R_0}{R_1} \right) + (1 - A) \right]}, \quad (10. 7)$$

Но так как в большинстве случаев $A = -10^8$ и даже больше, то уравнение (10. 7) можно написать в другом виде

$$\frac{e_0}{e_1} = -\frac{R_0}{R_1}. \quad (10. 8)$$

Искомый результат будет, следовательно, получен при выборе $R_0 > R_1$. При $R_0 = 1 \text{ Мом}$ и $R_1 = 0,1 \text{ Мом}$ выходное напряжение будет в 10 раз больше входного. Это умножение производится с точностью, которая определяется только сопротивлениями на входе и обратной связи. Если в схеме на фиг. 10. 3 применены сопротивления 0,1%, то умножение будет давать результат такой же точности. Форма уравнения (10. 5) позволяет заключить, что результат умножения согласно равенству (10. 8) может быть непосредственно полу-



Фиг. 10. 4. Схема для умножения на нецелое число:

а — принципиальная схема; б — символическое обозначение.

чен, если принять напряжение на сетке, равное потенциалу земли. Применение обратной связи, замыкающей цепь с очень высоким коэффициентом усиления, позволяет создать эти условия. К тому же результату можно прийти, если выходное напряжение ограничить для линейных операций 100 в. Отсюда следует, что при коэффициенте усиления $A = -10^8$ напряжение сетки должно быть только на 1 мкв выше потенциала земли для генерирования выходного напряжения 100 в. Следовательно, сетка действительно находится под потенциалом земли, что и будет учитываться при дальнейшем анализе. Когда переменный параметр машины следует умножить на нецелое число, например, для получения $e_0 = 3,69e_1$, то можно применить схему на фиг. 10. 4, а. Искомый результат будет получен после установки потенциометра на деление 0,369 и последующего умножения на десять (в предположении, что потенциометр не имеет нагрузки). Эта математическая операция показана на фиг. 10. 4, б в виде символической диаграммы. Следует заметить, что треугольник изображает усилитель с высоким коэффициентом усиления вместе с сопротивлениями на входе и обратной связи, причем особо указан коэффициент умножения.

Сложение нескольких переменных величин. Сложение n переменных величин может быть осуществлено при помощи схемы, изображенной на фиг. 10. 5, а и б. Применение закона Кирхгофа к узлам

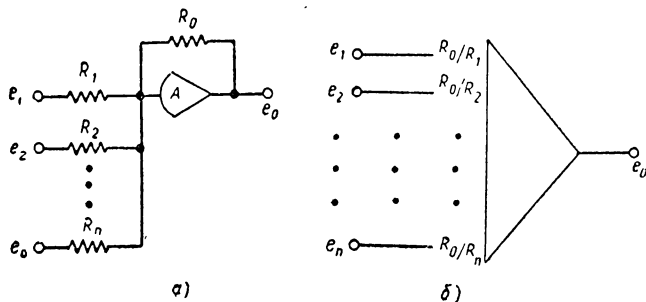
цепи, а именно в точке сетки усилителя, и предположение, что сеточное напряжение равно нулю, дает

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \dots + \frac{e_n}{R_n} = -\frac{e_0}{R_0}. \quad (10. 9)$$

Следовательно,

$$e_0 = -\left(\frac{R_0}{R_1} e_1 + \frac{R_0}{R_2} e_2 + \dots + \frac{R_0}{R_n} e_n\right). \quad (10. 10)$$

Последнее выражение показывает, что выходное напряжение не только соответствует сумме нескольких переменных величин, но каждая переменная величина может быть умножена, если необ-



Фиг. 10. 5. Схема сложения n переменных:

a — принципиальная схема; *б* — символическое обозначение.

ходимо, на соответствующий масштабный фактор. На фиг. 10. 6 показана часто применяемая схема электронных вычислительных машин непрерывного действия с применением суммирующих усилителей. Заметим, что эта схема имеет семь входных зажимов, два из которых предназначены для умножения на 10, два — для умножения на 4 и три — для умножения на 1. Умножение можно осуществить на любое целое число от 1 до 31 при помощи этой схемы и параллельного соединения входных зажимов. В электронных вычислительных машинах применяются также другие схемы.

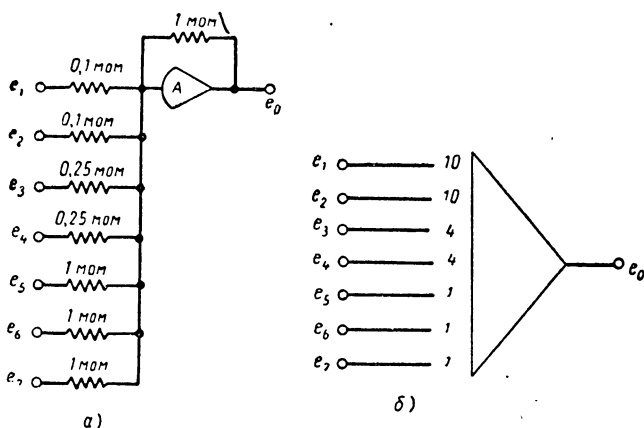
Интегрирование. На фиг. 10. 7 показана схема, иллюстрирующая метод интегрирования по времени при помощи электронного вычислительного устройства непрерывного действия. Напишем на основании закона Кирхгофа уравнение для точки сетки усилителя:

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_0}{\frac{1}{sC}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{e_0}{e_1} = -\frac{1}{sRC}. \quad (10. 11)$$

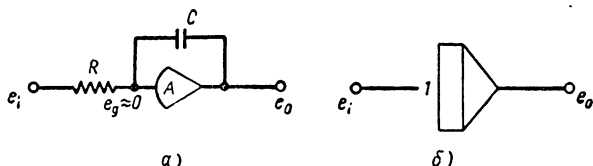
Из этого выражения непосредственно вытекает, что передаточная функция соответствует функции чистого интегратора. Если выражение (10.11) интерпретировать во временной области, то нетрудно прийти к заключению, что выходная величина контура, показанного на фиг. 10.7, будет равна интегралу входной величины. Кроме того,



Фиг. 10.6. Схема с использованием обычного суммирующего усилителя в электронном вычислительном устройстве непрерывного действия:

а — принципиальная схема; б — символическое обозначение.

выходная величина может быть также изменена на масштабный фактор $\frac{1}{RC}$. В вычислительных устройствах часто выбирают конденсатор обратной связи с емкостью, равной 1 мкф ; масштабный фактор выбирается по сопротивлению R .



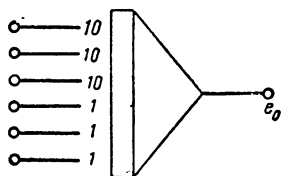
Фиг. 10.7. Схема интегрирующего контура:

а — принципиальная схема; б — символическое обозначение.

На фиг. 10.8 показан стандартный электронный интегратор. Следовательно, умножение на 1 или 10 может быть осуществлено без применения входных потенциометров.

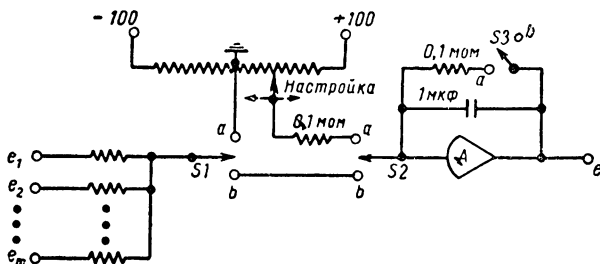
Если для моделирования требуются интеграторы, то это означает, что соответствующая физическая проблема содержит элементы накопления энергии. Следовательно, для правильного моделирования необходимо начинать с установления на выходе каждого интегратора такого значения напряжения, которое правильно отражает

начальные условия задачи. Для этого используется схема, подобная фиг. 10. 9. Когда ручка управления моделирующего устройства установлена в положение, называемое «Восстановление», то выключатели $S1, S2, S3$ будут находиться в положении a . Выключатель $S1$



Фиг. 10. 8. Обычная схема электронного интегратора.

закземляет входные зажимы, благодаря чему моделирование не производится. Выключатели $S2$ и $S3$ создают цепь, благодаря чему на зажимах конденсатора появляется напряжение, соответствующее начальному условию. Это напряжение на зажимах конденсатора создается в соответствии с постоянной времени $0,1 \text{ сек}$. Когда ручка управления установлена в положение «Вычисление», то выключатели $S1, S2$ и $S3$ переходят в положение «в» на фиг. 10. 9. Первоначальное моделирование воспроизводится, причем сопротивление $0,1 \text{ Мом}$ отсоединяется от конденсатора, так что он не может погасить напряжение, соответствующее начальному условию.



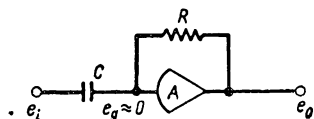
Фиг. 10. 9. Схема, иллюстрирующая введение начальных условий в интегратор.

Дифференцирование. Метод осуществления операций дифференцирования при помощи электронно-вычислительной машины непрерывного действия иллюстрируется фиг. 10. 10. Напишем уравнение для точки сетки усилителя согласно закону Кирхгофа

$$\frac{e_1}{\frac{1}{sC}} + \frac{e_0}{R} = 0,$$

отсюда

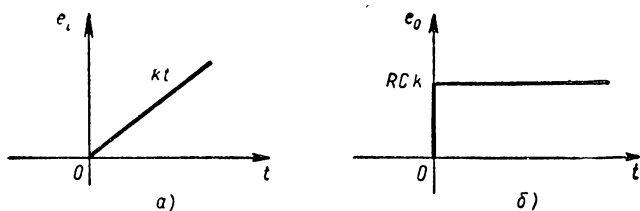
$$\frac{e_0}{e_i} = -sRC. \quad (10. 12)$$



Фиг. 10. 10. Схема дифференцирующего контура.

Исходя из этого равенства, нетрудно убедиться, что эта передаточная функция соответствует чистому дифференциатору во временной области с умножением на коэффициенте RC . Если входной сигнал e_1 представляет кусочно-линейную функцию, то выходной сигнал e_0 , как это требуется выражением (10. 12), теоретически

должен быть единичной функцией (фиг. 10. 11). Уровень выходного единичного сигнала зависит от наклона входной кусочно-линейной функции. Важно заметить, что компоненты помех, когда входной сигнал у дифференциатора содержит высокочастотные помехи (т. е. в рассматриваемом примере, входная функция не является чисто кусочнолинейной), усиливаются в большей степени, чем компонент сигнала вследствие большего наклона сигналов помех. Следовательно, выходной сигнал дифференциатора имеет значительно худшее отношение сигнала к помехам. Совершенно ясно, кроме того, что большое усиление помех связано с перегрузкой усилителя. Это свойство дифференциатора находится в прямой противоположности с особенностями интегратора и его влияния на компоненты помех. Ввиду того, что помехи обычно связаны с высокими частотами,



Фиг. 10. 11. Графики входного и выходного сигналов дифференциатора:

a — входной сигнал; *b* — выходной сигнал.

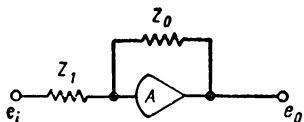
из уравнения (10. 11) вытекает, что интегратор будет создавать тем большее затухание сигнала, чем выше частотные компоненты в помехах. Этот вывод сделан на основании частотного метода. При рассмотрении этого вопроса во временной области становится очевидно, что интегратор будет оказывать сглаживающее влияние на входной сигнал, так как интегрирование представляет процесс усреднения и поэтому создает выходной сигнал с улучшенным отношением сигнала к помехам. Главным образом в силу этих соображений электронные вычислительные машины непрерывного действия применяются для решения задач чаще всего путем выполнения последовательных операций интегрирования и реже операций дифференцирования.

«Нечистое» интегрирование и «нечистое» дифференцирование. При изучении физических проблем при помощи вычислительных устройств, в особенности при разработке систем управления, необходимо моделировать часто следующие операции, имеющие важное значение: операции пропорционального регулирования плюс интегральные операции, операции пропорционального регулирования плюс регулирование по производной, регулирование с простым запаздыванием по времени, операции с передаточными функциями колебательного звена и др. Способ осуществления этих операций очень простой; необходимо только определить соотношение между

выходной и входной величинами схемы, изображенной на фиг. 10. 12, при помощи соотношения

$$\frac{e_0}{e_i} = - \frac{Z_0}{Z_1} \quad (10. 13)$$

где Z_0 и Z_1 соответственно обозначают функции входного импеданса и обратной связи, которые не обязательно должны быть ограничены сопротивлениями или конденсаторами, но могут варьироваться в виде различных комбинаций емкостей и сопротивлений. Рассмотрим например схему, состоящую из параллельного соединения сопротивления и конденсатора. Тогда импеданс параллельного соединения будет равен



$$Z_0 = \frac{R_0}{1 + sR_0C_0} \quad (10. 14)$$

Фиг. 10. 12. Операционный усилитель с общим входным сопротивлением и обратной связью.

Если входной импеданс также составлен из параллельного соединения сопротивления R_1 и емкости C_1 , то отсюда следует

$$Z_1 = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} \quad (10. 15)$$

Введение последних двух выражений в уравнение (10. 13) дает

$$\frac{e_0}{e_i}(s) = - \frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{1 + sR_1C_1}{1 + sR_0C_0} \quad (10. 16)$$

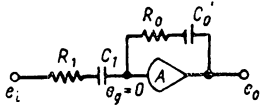
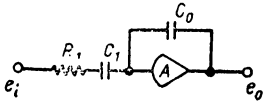
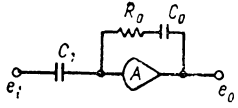
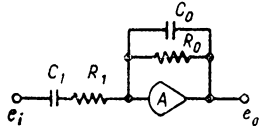
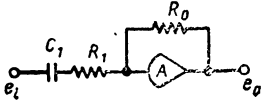
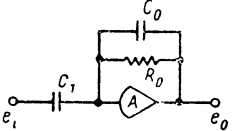
Из изучения этого результата становится очевидно, что моделирование стандартных опережающих и запаздывающих контуров, рассмотренных в главах 2 и 6, может быть легко осуществлено при помощи этой схемы. В табл. 10. 1 приведены некоторые из наиболее распространенных схем моделирования. Заметим, что моделирование операции пропорционального регулирования плюс регулирование по производной для случая I может быть осуществлено в результате устранения конденсатора C_0 из цепи обратной связи. С другой стороны, выключение входного конденсатора C_1 создает возможность моделирования простого запаздывания по времени.

10. 3. ПОРЯДОК МОДЕЛИРОВАНИЯ. МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. МАСШТАБНЫЕ ФАКТОРЫ

Каким образом можно решать задачи путем сочетания основных конструктивных блоков математической машины, описанных в предыдущем разделе? Ответ на этот вопрос иллюстрируется примерами применения необходимых способов для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. В процессе разработки моделирующей схемы становится необходимо рассмотреть очень важные вопросы о величине масштабного фактора и о масштабе времени. Хотя рассмотрение этих вопросов производится в связи с

Моделирование сложных функций

Математическое выражение сложных функций	Схема моделирования
<p>Случай 1</p> $Z_0 = \frac{R_0}{1 + sR_0C_0};$ $Z_1 = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1}.$ <p>Следовательно,</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{Z_0}{Z_1} = -\frac{R_0}{R_1} \cdot \frac{1 + sR_1C_1}{1 + sR_0C_0}.$ <p>Случай 1а — емкость C_0 устранена, отсюда получаем</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{R_0}{R_1} (1 + sR_1C_1).$ <p>Случай 1б — емкость C_1 устранена, после чего получаем</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{R_0}{R_1} \frac{1}{1 + sR_0C_0}$	
<p>Случай 2</p> $Z_0 = R_0 + \frac{1}{sC_0} = \frac{1 + sR_0C_0}{sC_0},$ $Z_1 = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1}.$ <p>Следовательно,</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{Z_0}{Z_1} = -\frac{(1 + sR_1C_1)(1 + sR_0C_0)}{sR_1C_0}.$ <p>Случай 2а — сопротивление R_0 устранено</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{1 + sR_1C_1}{sR_1C_0}.$ <p>Случай 2б — емкость C_1 устранена</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{1 + sR_0C_0}{sR_1C_0}$	

Математическое выражение сложных функций	Схема моделирования
<p>Случай 3</p> $Z_0 = R_0 + \frac{1}{sC_0} = \frac{1 + sR_0C_0}{sC_0};$ $Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sR_1C_1}{sC_1}.$ <p>Поэтому</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{Z_0}{Z_1} = -\frac{C_1}{C_0} \frac{1 + sR_0C_0}{1 + sR_1C_1}.$ <p>Случай 3а — сопротивление R_0 устранено, поэтому</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{C_1}{C_0} \frac{1}{1 + sR_1C_1}.$ <p>Случай 3б — сопротивление R_1 устранено</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{C_1}{C_0} (1 + sR_0C_0)$	  
<p>Случай 4</p> $Z_0 = \frac{R_0}{1 + sR_0C_0};$ $Z_1 = \frac{1 + sR_1C_1}{sC_1}.$ <p>Поэтому</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{Z_0}{Z_1} = -\frac{sR_0C_1}{(1 + sR_0C_0)(1 + sR_1C_1)}.$ <p>Случай 4а — емкость C_0 устранена</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{sR_0C_1}{1 + sR_1C_1}.$ <p>Случай 4б — сопротивление R_1 устранено</p> $\frac{e_0}{e_i} = -\frac{sR_0C_1}{1 + sR_0C_0}$	  

линейными системами, описанные методы применимы в общем случае. Предположим, что система управления описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 100y = f, \quad (10.17)$$

где f — возмущающая функция и
 y — регулируемая переменная величина.

Далее предположим, что необходимо изучить динамику системы при помощи электронного моделирующего устройства. Моделирование должно быть таким, чтобы оно допускало возможность изучения всей динамики во времени изменения регулируемой величины, а также ее скорости и ускорения при реакции системы на вынуждающую функцию различного вида.

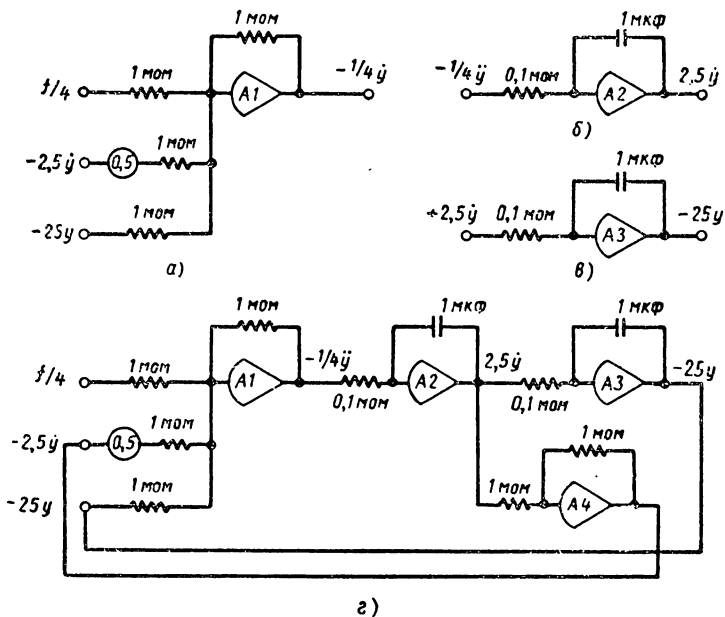
Далее предположим для большей наглядности, что максимальное значение возмущающей функции равняется 200 единиц и что все начальные условия равны нулю. Первая стадия моделирования уравнения (10.17) состоит в переносе члена с наибольшей производной в левую часть уравнения, т. е.

$$\ddot{y} = f - 5\dot{y} - 100y. \quad (10.18)$$

Это необходимо для того, чтобы применить только интеграторы для нахождения решения по изложенным выше соображениям. Таким образом, решение относительно зависимой переменной будет получено путем суммирования и затем осуществления двух последовательных операций интегрирования уравнения (9.18). На один момент допустим, что масштабными факторами можно пренебречь и перейти непосредственно к моделированию последнего уравнения. Если сосредоточить внимание только на операциях, необходимых для решения уравнения (10.18), то станет ясно, что для получения второй производной величины y необходимо суммировать f , $-5\dot{y}$ и $-100y$; эту операцию можно осуществить при помощи суммирующего усилителя, когда известны \dot{y} и y . В действительности последние величины могут быть получены благодаря включению обратной связи, так как они образуются при моделировании. Конечно, возмущающая функция f представляет известную входную величину. Результат суммирования этих величин дает $-\ddot{y}$, как показано на фиг. 10.13, а. Отрицательный знак обусловлен изменением фазы операционного усилителя. Интегрирование $-\ddot{y}$ дает \dot{y} (фиг. 10.13, б). Второе интегрирование дает искомую переменную величину $-y$ (фиг. 10.13, в). Сочетание этих операций вместе, как показано на фиг. 10.13, г, дает полную схему моделирования для решения уравнения (10.17). Заметим, что выходную величину усилителя (A2) необходимо снабдить обратным знаком до ее подачи на вход усилителя (A1).

Эта операция осуществляется реверсивным усилителем A4. Хотя схема на фиг. 10.13, г дает правильное математическое моделирование уравнения (10.17), отсюда, однако, не следует, что это моделирование может дать корректное решение. Некорректное решение

возникает тогда, когда в задаче был применен неправильный масштабный фактор. Для иллюстрации этого предположим, что полезный рабочий диапазон усилителей постоянного тока составляет ± 100 в, что типично для большинства технически применяемых электронных моделирующих устройств. Отсюда ясно, что при максимальном значении возмущающей функции 200 единиц эту величину можно лучше всего представить 100 в. Таким образом, масштабный фактор



Фиг. 10. 13. Порядок моделирования линейной системы второго порядка:

a — суммирование для получения величины ускорения; *б* — интегрирование ускорения для получения скорости; *в* — интегрирование скорости для получения регулируемой величины; *г* — полная моделирующая схема.

при этом моделировании будет равняться 0,5 в на единицу возмущающей функции. После того, как была применена схема на фиг. 10. 13, *г* без каких-либо изменений для преобразования возмущающей функции f в напряжение, тогда все остальные переменные величины \ddot{y} , \dot{y} и y должны быть выражены в соответствии с этим масштабным фактором. Следовательно, выражая выходную величину усилителя *A3* в вольтах, соответствующее значение физической переменной можно найти путем деления измеренного выходного напряжения усилителя *A3* на масштабный коэффициент 0,5 в/единица y . В этом лежит трудность моделирования при помощи схемы на фиг. 10. 13, *г*. Когда возмущающая функция f имеет максимальное значение 200 единиц (в предположении единичной входной возмущающей функции),

тогда из уравнения (10. 17) будет вытекать, что установившееся значение регулируемой переменной величины будет

$$y_{\max} = \frac{f_{\max}}{100} = \frac{200}{100} = 2.$$

Ввиду того, что масштабный фактор для схемы моделирования был выбран 0,5 в на единицу переменной величины, отсюда следует, что максимальный уровень установившегося напряжения на усилителе АЗ будет равен 1 в.

Допустим, что полный диапазон изменения напряжения усилителя равен 100 в. Это в действительности имеет место в случае плохого выбора масштабного фактора, что очень часто приводит к серьезным ошибкам измерения величины y . В действительности, когда возмущающая функция f имеет немаксимальное значение, тогда выходное напряжение усилителя АЗ будет меньше 1 в, что практически приводит к отсчету показаний в диапазоне помех усилителя и тем самым обуславливает очень низкую точность.

Эти рассуждения подтверждает скороспелость рекомендации применить в качестве масштабного фактора схемы моделирования такое значение, при котором усилитель АЗ мог бы работать при максимальном уровне 100 в. Дальнейшее применение этого способа приводит к другим серьезным трудностям. Хотя условия на выходе усилителя АЗ были, по-видимому, улучшены, это не распространяется на остальные усилители схемы моделирования. Моделирование при масштабном факторе 50 в на единицу переменной величины, который был выбран для полного использования диапазона выходного напряжения усилителя АЗ, сопряжено с чрезмерно высоким напряжением усилителя А1, когда следует осуществить максимальное ускорение в 200 единиц. Из уравнения (10. 17) нетрудно вывести, что при максимальном значении возмущающей функции 200 единиц, максимальное ускорение будет также равно 200 единицам. Однако для правильного соотношения между этой физической величиной и выходным напряжением усилителя А1 при масштабном факторе 50 в на единицу переменной величины необходимо, чтобы выходное напряжение достигало следующего уровня:

$$\frac{e_{A1} \text{ (в в)}}{50 \text{ (в в на единицу ускорения)}} = 200 \text{ единиц ускорения}$$

или

$$e_{A1} = 10\,000 \text{ в.}$$

Совершенно ясно, что этот результат нереальный. Уровень выходного напряжения в 100 раз больше максимального значения выходного напряжения усилителя. Следует заметить, что степень увеличения соответствует коэффициенту y в уравнении (10. 17).

На основании изложенных выше соображений нетрудно придти к выводу, что необходимы некоторые изменения в схеме фиг. 10. 13, з, чтобы получить приемлемую схему моделирования. Чтобы лучше

подчеркнуть характер этих изменений, надлежит тщательно исследовать источник затруднений. Как уже сообщалось, максимальное установившееся значение y равно двум единицам. Какое максимальное значение имеет тогда \dot{y} и \ddot{y} ? Ответ на этот вопрос связан с коэффициентами дифференциального уравнения изучаемой системы. Нетрудно видеть, что описанное выше затруднение не будет встречаться, когда все коэффициенты равны единице, потому что масштабный фактор будет иметь одинаковое значение, независимо от того, как он был получен. Однако, когда эти коэффициенты отличаются друг от друга больше чем в $100 : 1$, как это имело место в уравнении (10. 17), тогда максимальные значения y , \dot{y} и \ddot{y} могут существенно отличаться друг от друга. Следовательно, если схема моделирования не будет надлежащим образом изменена, чтобы учесть это обстоятельство, то моделирование не будет достаточно полезным. Максимальное значение y можно определить на основании разницы значений y , \dot{y} и \ddot{y} , когда система, описываемая уравнением (10. 17), реагирует на входную команду. Эти сведения можно получить из решения характеристического уравнения. Обозначив через s производные величины, из уравнения (10. 7) получим характеристическое уравнение

$$s^2 + 5s + 100 = 0. \quad (10. 19)$$

Так как общая форма характеристического уравнения линейной системы второго порядка имеет вид

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0, \quad (10. 20)$$

то очевидно, что для рассматриваемого случая $\omega_n = 10 \text{ рад/сек}$. Далее, полное решение дается выражением

$$y_c = ke^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi). \quad (10. 21)$$

Из выражения (10. 21) следует, что в худшем случае (когда $\zeta = 0$) первая производная величины y_c может иметь максимальное значение, которое в ω_n раз больше переменной величины y_c . Аналогично, вторая производная \ddot{y}_c может иметь максимальное значение в ω_n^2 раз больше переменной величины y_c . Конечно, при $\omega_n = 1 \text{ рад/сек}$ максимальные значения всех трех величин одинаковы и не возникает затруднений из-за масштабного фактора. Но если, $\omega_n = 10 \text{ рад/сек}$, то возникает неопределенная проблема, так как вторая производная этой величины имеет максимальное значение в 100 раз больше регулируемой переменной величины. Если одинаковое исходное напряжение будет представлять максимальное значение каждой переменной, то масштабные факторы не могут быть выбраны одинаковыми. Прежде чем выбирать масштабные факторы, необходимо учесть эту разницу. Удобный способ осуществления этого состоит во введении измененных машинных перемещенных величин, которые совпадают с разницей масштабных факторов. Следовательно,

когда известно или было определено, что максимальное установившееся значение y равно двум единицам, то измененная машинная переменная величина для y становится равной

$$\frac{u}{y_{\max}} 50 \text{ (в } \vartheta) = y \left(\frac{50 \vartheta}{\text{две единицы } y} \right) = 25 y \text{ (в } \vartheta). \quad (10. 22)$$

Заметим, что вместо максимально возможного значения 100 ϑ было выбрано 50 ϑ . Это объясняется необходимостью создать достаточный предел таким образом, что если даже y подвергается 100%-ному перерегулированию при переходном процессе, то операционные усилители не будут выходить за предел 100 ϑ .

Кроме того, следует учесть, что измененная машинная переменная величина 25 y содержит число, которое в действительности представляет масштабный фактор для физической переменной y . Дальнейшее применение этого способа приводит к следующим значениям измененных машинных переменных скорости и ускорения (т. е. первой и второй производных)

$$\begin{aligned} \dot{y} \text{ (в единицах скорости)} \frac{50}{y_{\max}} \left(\frac{\vartheta}{\text{единицы скорости}} \right) &= \\ = \dot{y} \frac{50}{10 \cdot 2} &= 2,5 \dot{y} \text{ (в } \vartheta); \end{aligned} \quad (10. 23a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} \text{ (единицы ускорения)} \frac{50}{y_{\max}} \left(\frac{\vartheta}{\text{единицы ускорения}} \right) &= \\ = \ddot{y} \frac{50}{100 \cdot 2} &= \frac{1}{4} \ddot{y} \text{ (в } \vartheta). \end{aligned} \quad (10. 23б)$$

Для моделирования физической задачи [описываемой уравнением (10. 17)] при помощи измененных переменных величин можно применить следующий порядок: первоначально изменяют уравнение (10. 17) таким образом, чтобы выявить измененную машинную переменную $\frac{1}{4} \ddot{y}$. Совершенно ясно, что для этого требуется умножить каждый член на $\frac{1}{4}$. После этого получаем

$$\frac{1}{4} \ddot{y} + \frac{5}{4} \dot{y} + 25y = \frac{f}{4}. \quad (10. 24)$$

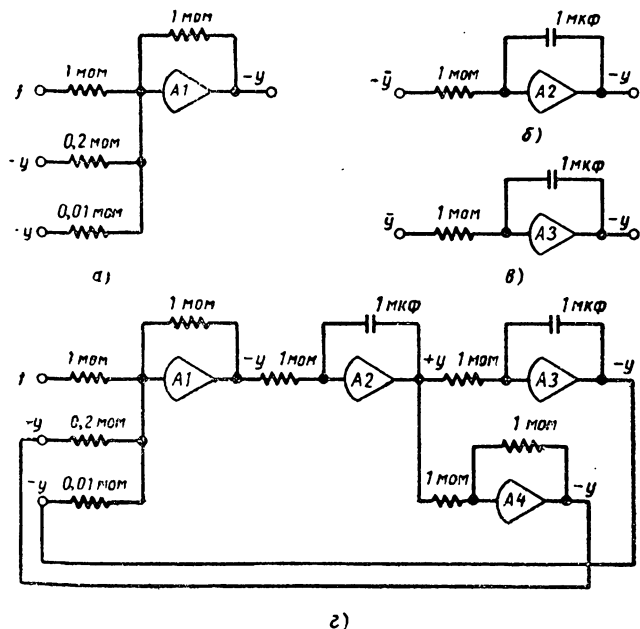
Желательно, кроме того, изменить коэффициенты других переменных величин так, чтобы выявилась измененная форма переменной. Таким образом, уравнение (10. 24) приобретает вид

$$\frac{1}{4} \ddot{y} + \frac{1}{2} (2,5 \dot{y}) + 25y = \frac{f}{4}. \quad (10. 25)$$

Моделирование операций суммирования, необходимого для решения этого уравнения, приводит к ускорению; эту операцию можно

осуществить при помощи схемы фиг. 10. 14, а. Заметим, что измененная машинная переменная, представляющая скорость, умножена на $\frac{1}{2}$, как показано в уравнении (10. 25). Когда возмущающая функция имеет максимальное значение 200 единиц, то она будет представлена при моделировании напряжением 50 в.

Интегрирование измененной формы машинной переменной (выходное напряжение усилителя А1, которое представляет ускорение)



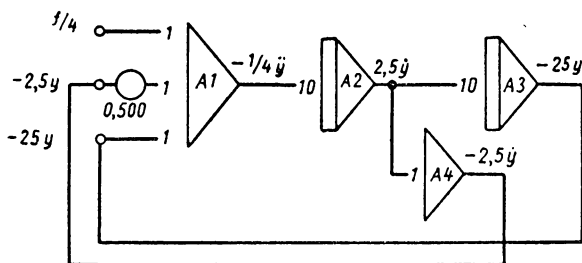
Фиг. 10. 14. Порядок моделирования линейной системы второго порядка с использованием надлежащих масштабных коэффициентов:

а — суммирование для получения величины ускорения; б — интегрирование напряжения ускорения с настройкой на масштабный коэффициент для определения скорости; в — интегрирование напряжения скорости с настройкой масштабного коэффициента для определения регулируемой величины; г — полная моделирующая схема.

должно быть осуществлено таким образом, чтобы была получена измененная форма скорости. Совершенно ясно, что для этого требуется, чтобы интегратор также вводил изменения масштабного фактора 10 : 1, как показано на фиг. 10. 14, б. Значение этой операции состоит, конечно, в том, что оба усилителя А1 и А2 в состоянии работать в полном динамическом диапазоне от -100 до $+100$ в при нахождении решения относительно искомой переменной. Аналогичный порядок распространяют на случай определения y , что иллюстрируется фиг. 10. 14, в. Полная схема моделирования дана на фиг. 10. 14, г. Путем выбора надлежащих масштабных факторов можно разработать схему моделирования, которая позволит не только моделировать данные физические уравнения, но допускает возмож-

ность работы каждого усилителя в полном динамическом диапазоне. Схема моделирования на фиг. 10. 14, *з* полезна еще потому, что усилители не подвергаются перегрузке или слишком низким напряжениям. Символическое обозначение этой схемы дано на фиг. 10. 15.

Наличие масштабных факторов на схеме моделирования используется также для интерпретирования значений выходных напряже-



Фиг. 10. 15. Символические обозначения схемы фиг. 10. 14, *з*.

ний отдельных усилителей. Если в тот или иной момент времени выходное напряжение усилителя *A2* оказалось равным 37,5 в, то соответствующее значение физической величины нетрудно определить, учитывая, что $2,5y = 37,5$ в; отсюда следует, что физическая величина, например скорость, имеет значение $y = \frac{37,5}{2,5} = 15$ единиц скорости.

10. 4. МАСШТАБ ВРЕМЕНИ

Поведение динамической системы, содержащей элементы накопления энергии, определяется корнями характеристического уравнения. Чрезмерно большие значения скорости и ускорения зависят от величины комплексных сопряженных корней. Когда собственная частота, соответствующая этим корням, очень большая, то необходимо ввести масштабный фактор. С другой стороны, если собственная частота преобладающих комплексных сопряженных корней системы равна 1 рад/сек (или около этого), то исчезает необходимость применять масштабный фактор, так как масштабный фактор для регулируемой переменной величины одинаков с масштабными факторами ее первой и высших производных. В случаях, когда известна возможность существования больших собственных частот, целесообразно задать вопрос о возможности ввести надлежащие изменения масштаба времени так, чтобы система вела себя, как если бы ее собственная частота равнялась 1 рад/сек. Вернемся опять к уравнению (1. 17), которое для удобства повторено ниже

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} = 100y = f. \quad (10. 26)$$

Скорость изменения, обозначенная $\frac{d}{dt}$, относится к скорости, с которой изменение физической задачи протекает во времени. Однако при моделировании этой задачи нет причин, почему время, требуемое для реакции регулируемой переменной величины на команды и возмущения, не могло быть замедлено или ускорено, поскольку будет удовлетворена функциональная зависимость, определяемая уравнением (10. 26). Следовательно, существует возможность выбрать 10 *сек* машинного времени для осуществления процесса, который протекает 1 *сек* в физических условиях. Это можно выразить математически следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \alpha_t \frac{d}{d\tau}, \quad (10. 27)$$

где α_t представляет необходимое изменение масштаба времени и $d\tau$ означает скорость изменений относительно машинного времени в противоположность скорости изменения относительно времени физической задачи $\frac{d}{dt}$. Если выбрать $\alpha_t = 10$, то скорость изменений в моделирующем устройстве должна составлять одну десятую скорости, наблюдаемой в физических условиях; следовательно, задача вычисляется на основе замедления процесса. Введение равенства (10. 27) в уравнение (10. 26) дает

$$\alpha_t^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 5\alpha_t \frac{dy}{d\tau} + 100y = f = 200$$

или

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \frac{5}{\alpha_t} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{100}{\alpha_t^2} y = \frac{200}{\alpha_t^2}. \quad (10. 28)$$

Судя по уравнению (10. 28), нетрудно заключить, что выбор величины α_t , равный 10, приводит к тому, что решение моделирующего устройства будет характеризоваться собственной частотой 1 рад/*сек*. Таким образом, масштабные факторы для регулируемой переменной величины и ее первой и второй производных могут быть одинаковы. Если обозначить заглавными буквами регулируемую переменную величину и сокращенное обозначение для производных относительно машинного времени τ , чтобы подчеркнуть соответствующее изменение масштаба времени, тогда уравнение (10. 28) можно переписать в следующем виде:

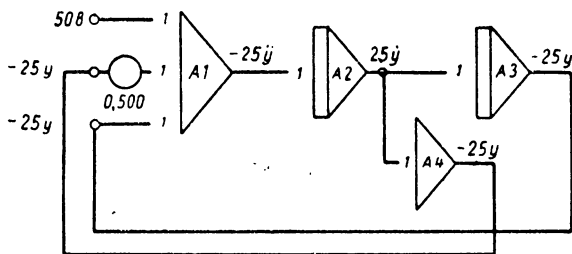
$$\ddot{Y} + 0,5\dot{Y} + Y = 2. \quad (10. 29)$$

Ввиду того, что изменение масштаба времени не влияет на максимальное значение Y , то масштабный фактор для моделирования уравнения (10. 29) следует выбрать соответственно регулируемой переменной величине. Как следует из уравнения (10. 22) этот мас-

штабный фактор имеет значение 25ν на единицу переменной величины. Перед моделированием уравнения (10. 29) желательно преобразовать его в уравнение для вычисления на машине (т. е. выразить в ν) путем умножения каждого члена на общий масштабный фактор 25ν /переменная величина; после чего уравнение (10. 29) будет иметь вид

$$25\ddot{Y} + 0,5(25\dot{Y}) + 25Y = 50\nu. \quad (10. 30)$$

Моделирование этого уравнения с символическим обозначением показано на фиг. 10. 16. Из сравнения фиг. 10. 13, z , 10. 14, z и 10. 16 следует сделать интересный вывод. Из фиг. 10. 13, z видно, что коэффициент усиления цепи $y = 100$, а коэффициент усиления цепи y



Фиг. 10. 16. Схема моделирования для решения уравнения (10. 26). Решение моделирующего устройства в 10 раз медленнее решения физической задачи.

равно 5. Эти результаты совпадают со значениями коэффициентов y и y , которые содержатся в уравнении (10. 17). Схема на фиг. 10. 14, z позволяет заключить, что применение надлежащих масштабных факторов никоим образом не изменяет общего значения коэффициента усиления этих цепей. Единственно, что могло произойти, состоит в том, что общий коэффициент усиления не создается больше одним усилителем, а распределен между соответствующими цепями, чтобы полностью использовать диапазон напряжений усилителей. Однако положение резко отличается от случая на фиг. 10. 16. Здесь коэффициент усиления цепи для регулируемой переменной цепи равен теперь 1 по сравнению со 100-кратным усилением, примененным в схемах на фиг. 10. 13, z и 10. 14, z . Аналогично коэффициент усиления цепи для первой производной равен 0,5 по сравнению с прежним значением 5. Отсюда очевидно, что введение масштаба времени изменяет усиление цепи. Это ясно вытекает из уравнения (10. 29), которое содержит коэффициенты Y и \dot{Y} , равные соответственно 1 и 0,5. Важно запомнить, кроме того, что уравнение (10. 29) представляет еще физическую задачу, где пропорциональное усиление (или константа пружины) было уменьшено в 100 раз. Применение соответствующего масштабного фактора в этом уравнении приведет к машинному варианту этого уравнения, выраженного в ν . Конечно, решения,

полученные при помощи электронных вычислительных машин, будут решениями уравнения (10. 29). Чтобы эти уравнения были применимы к первоначальной задаче, необходимо только ввести соответствующие изменения по оси времени. Следовательно, в случае, когда решение было замедлено на коэффициент 10, записанное машиной решение, которое дает \dot{Y} , равное 25 мм/сек машинного времени, в действительности соответствует $\dot{y} = \alpha_i \dot{Y} = 10 \cdot 25$ мм/сек физического времени.

Другой интересный вывод можно сделать из сравнения схем на фиг. 10. 14, *г* и 10. 16, который заключается в том, что изменение масштаба времени, содержащееся в схеме фиг. 9. 16, эффективно осуществляется путем увеличения постоянных времени обоих интеграторов в схеме фиг. 10. 14, *г* на коэффициент α_i масштаба времени. Таким образом, можно изложить следующее правило: для изменения масштаба времени данного моделирования необходимо только изменить все постоянные времени интеграторов на одинаковый коэффициент. Если коэффициент α_i выбрать больше единицы, то машинное решение будет медленнее физического времени. Наоборот, если α_i выбран меньше единицы, то моделирующее устройство потребует меньше времени для получения решения, чем это требуется физической задачей.

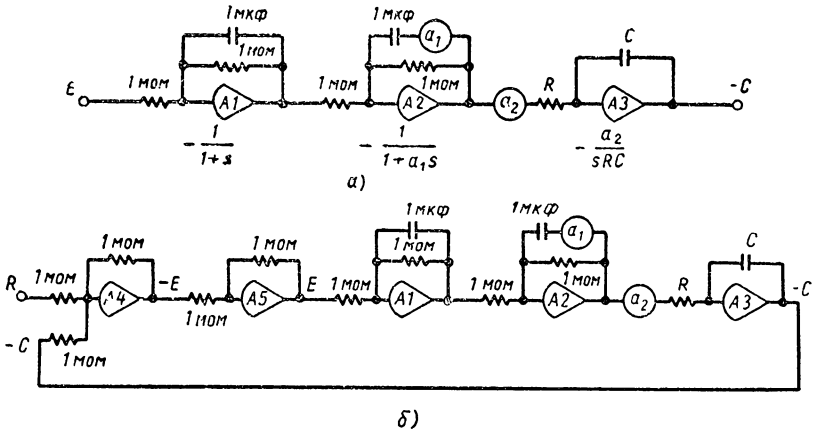
Хотя один из наиболее важных факторов применения масштаба времени состоит в необходимости избежать высоких коэффициентов усиления, однако существуют еще другие причины. Одна из них касается ограниченной ширины полосы самопишущего осциллографа типа гальванометра, который часто используется для измерения значений переменных задачи. Большинство этих приборов имеет ширину полосы частот 100 *гц*, лишь некоторые из них обладают шириной полосы частот 300 *гц*. В случае, когда возникает необходимость измерять частоты выше 300 *гц*, становится необходимостью применить масштаб времени для сохранения точности. Самопишущие приборы с собственным приводом и применение сервоусилителей при моделировании создают аналогичные ограничения. Другой фактор, который влияет на необходимость применения масштаба времени, связан с пределом максимально допустимой скорости записи. Если решение задачи происходит при скорости, значительно превышающей максимальную скорость записи, то масштаб времени будет так уменьшен, что станет невозможно отсчитывать показания осциллографа при любой приемлемой точности.

10. 5. ПОРЯДОК МОДЕЛИРОВАНИЯ. МЕТОД ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Часто математическое описание физической задачи дается в виде передаточных функций звеньев системы, а не в виде группы дифференциальных уравнений. Это часто наблюдается в области проектирования систем управления. Иногда зависимость между выходной и входной величинами не может быть выражена соответствующим дифференциальным уравнением. Вместо этого на основании изме-

ренных частотных характеристик и фазочастотных кривых необходимо написать эквивалентную передаточную функцию. Хотя справедливо, что соответствующее дифференциальное уравнение можно написать, зная передаточную функцию, обычно этого можно избежать, так как схему моделирования можно составить непосредственно по передаточной функции. Для иллюстрации этого метода предположим, что передаточная функция разомкнутой цепи системы управления с обратной связью определяется выражением

$$\frac{C}{E}(s) = G(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+s\tau_1)} \quad (10.31)$$



Фиг. 10. 17. Моделирующая схема замкнутой системы, начиная с передаточной функции разомкнутой цепи:

а — моделирование передаточной функции разомкнутой цепи по уравнению (10. 31);
б — моделирование замкнутой системы.

и что желательно исследовать¹ при помощи моделирующего устройства влияние, оказываемое на динамическую характеристику изменений коэффициента усиления K и постоянной времени τ_1 . Ввиду того, что передаточная функция дана в разложенной на множители форме, моделирование легко осуществляется в результате применения схем, рассмотренных в разделе 10. 1 для выполнения операций решения уравнения (10. 31). Заметим, что необходимо применить конструктивные блоки схемы, которые могут выполнять чистое интегрирование и два простых запаздывания во времени. Схема моделирования уравнения (10. 31) дана на фиг. 10. 17, а. Усилитель А1 создает требуемую постоянную времени, равную 1 сек. Контур, связанный с усилителем А2, позволяет изменять постоянную времени.

¹ Следует опять подчеркнуть, что электронное вычислительное устройство непрерывного действия в действительности не является необходимым для этой цели, потому что доступны равноценные аналитические методы решения задач. Однако, если система обладает нелинейностью, например, мертвым ходом в цепи обратной связи, то моделирующее устройство будет давать преимущество.

Подразумевается, что контур снабжен устройством, позволяющим изменять постоянную времени τ_1 в диапазоне от 0 до 1 сек. Если необходимо применить большие значения τ_1 , то сопротивление обратной связи должно быть увеличено. Контур, связанный с усилителем АЗ, осуществляет интегрирование и обладает свойством переменного усиления, необходимого для этой цели.

Ввиду того, что назначение этого исследования на модели заключается в получении информации о поведении динамической замкнутой системы, необходимо предусмотреть в схеме фиг. 10. 17, а обратную связь. Окончательная схема показана на фиг. 10. 17, б.

Следует заметить, что выходной сигнал усилителя АЗ, который равен $-C$, суммируется с сигналом команды в усилителе А4, чтобы создать отрицательный сигнал рассогласования. Но ввиду того, что выходное напряжение усилителя А1 обозначено $+E$, в схему необходимо ввести дополнительный усилитель для реверсирования сигнала; он обозначен на фиг. 10. 17, б, как усилитель А5.

После разработки схемы моделирования передаточной функции описанным выше способом важно еще понять, что все начальные условия предполагались равными нулю и что значения масштабных факторов для регулируемой переменной величины и ее производных по предположению одинаковы. Конечно, этот порядок составления схемы моделирования может привести к перегрузке усилителей в зависимости от собственной частоты, связанной с преобладающими комплексными корнями характеристического уравнения. Если это имеет место, то нетрудно применить одно средство, а именно изменить все постоянные времени в соответствующем масштабе времени. Начальные условия здесь не имеют значения, когда исследования касаются главным образом изучения динамики системы.

Моделирование передаточной функции, когда ее выражение разложено на множители, нетрудно осуществить, так как обычно требуется каскадное соединение нормальных конструктивных блоков. Вышеописанный порядок необходимо изменить, однако, если передаточная функция дана без разложения на множители. Чтобы иллюстрировать это, рассмотрим моделирование передаточной функции следующего вида:

$$\frac{e_0}{e_i} = \frac{As^2 + Bs + C}{s^3 + Ds^2 + Es + F}. \quad (10. 32)$$

При наличии передаточной функции этого вида нельзя решить уравнения относительно производной высшего порядка и затем составлять схему моделирования обычным способом.

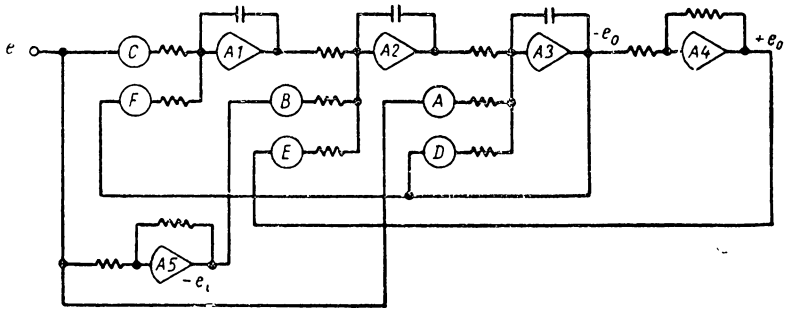
Чтобы подчеркнуть, почему этот порядок необходимо избегать, решим уравнение (10. 32) относительно высшей производной, после чего получим

$$s^3 e_0 = As^2 e_i + Bse_i + Ce_i - Ds^2 e_0 - Ese_0 - Fe_0. \quad (10. 33)$$

Форма последнего выражения объясняет, почему не следует применять этот способ: здесь требуется дважды дифференцировать вход-

ную величину. Необходимость этого дифференцирования можно устранить, разделив обе части уравнения (10.33) на s^2 . Следовательно,

$$se_0 = (Ae_i - De_0) + \frac{1}{s}(Be_i - Ee_0) + \frac{1}{s^2}(Ce_i - Fe_0). \quad (10.34)$$



Фиг. 10.18. Моделирующая схема для передаточной функции следующего вида:

$$\frac{e_0}{e_i} = \frac{As^2 + Bs + C}{s^3 + Ds^2 + Es + F}.$$

Перегруппировка членов этого выражения позволяет устранить перегрузку усилителей, которая иначе наблюдается у усилителей, генерирующих первый и второй интегралы входного сигнала. Окончательная схема моделирования уравнения (10.34) дана на фиг. 10.18.

10.6. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Электронные вычислительные устройства непрерывного действия создают значительное преимущество при решении нелинейных задач, а также и линейных задач с коэффициентами, изменяющимися во времени. Этой способностью обладает фактически электронное оборудование, которое может производить умножение и деление переменных величин с большой точностью. Электронные вычислительные машины непрерывного действия обладают этой способностью, потому что они содержат звенья, которые могут моделировать нелинейности различного вида. Последний вопрос будет рассматриваться в следующем разделе. Настоящий раздел посвящен краткому рассмотрению операций умножения и деления переменных величин.

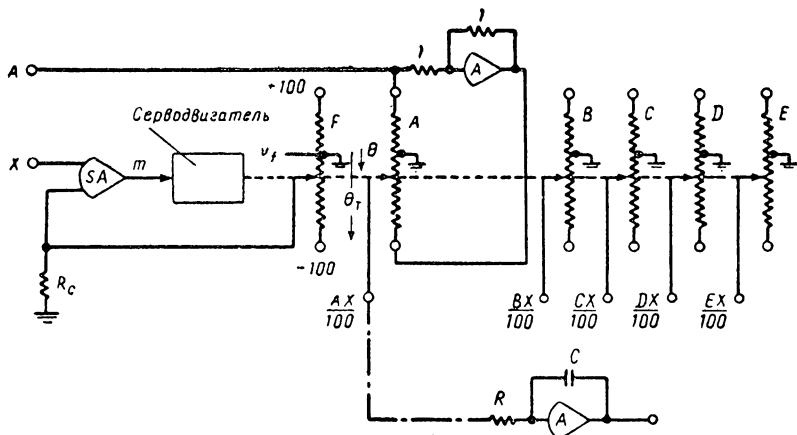
Для образования произведения двух переменных наиболее часто используется сервоумножитель; схема его показана на фиг. 10.19. Обычно он снабжен шестью потенциометрами. Пять из них, например, $A - E$ используются для умножения; шестой — служит как потенциометр обратной связи. Чтобы понять работу этого контура, рассмотрим две переменные величины A и X , которые поданы в сервоумножитель, как показано на фиг. 10.19. Сигнал обратной связи создается соответственно заданному значению X и в сервоумножителе (SA) суммируются X и V_f , где последняя величина означает

напряжение, снятое с потенциометра обратной связи F . Выходной сигнал сервомножителя может быть выражен следующим образом:

$$(X - V_f) \mu = m. \quad (10.35)$$

Здесь μ представляет коэффициент усиления сервомножителя, причем отрицательный знак означает отрицательную обратную связь. Так как коэффициент усиления μ очень большой, отсюда следует, что

$$X = V_f. \quad (10.36)$$



Фиг. 10.19. Общая схема серво-умножителя:

I — серводвигатель.

Значение V_f для линейного потенциометра обратной связи можно, кроме того, выразить в следующем виде:

$$V_f = 100 \frac{\theta}{\theta_T}, \quad (10.37)$$

где θ соответствует перемещению ползунка потенциометра, на котором появляется напряжение обратной связи;

θ_T — суммарное перемещение от центрального ответвления потенциометра до другого конца. Сравнительное напряжение, приложенное к потенциометру обратной связи, равняется -100 в на одном конце и $+100$ в на другом конце. Перегруппировка членов уравнения (10.37) и введение уравнения (10.36) приводят к

$$\frac{\theta}{\theta_T} = \frac{V_f}{100} = \frac{X}{100}. \quad (10.38)$$

Далее, при данном перемещении θ потенциометра обратной связи потенциометры для умножения подвергаются одинаковому перемещению, так как они приводятся в движение от общего вала серводви-

гателя. Следовательно, напряжение на ползунке первого множительного потенциометра будет

$$e_{oA} = \frac{\theta}{\theta_T} A. \quad (10.39)$$

Подстановка выражения (10.38) в последнее уравнение дает искомый результат

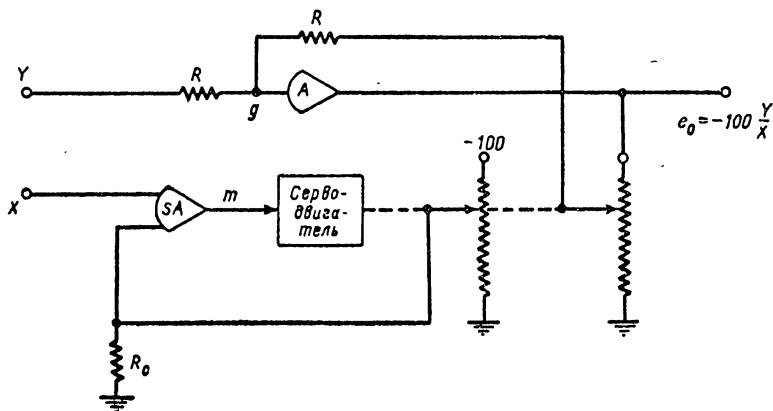
$$e_{oA} = \frac{AX}{100}. \quad (10.40)$$

Форма последнего выражения показывает, что любые трудности, связанные с перегрузкой усилителей, устранены. Следовательно, если переменные величины A и X поданы в сервоусилитель в надлежащем масштабе, т. е. $A_{\max} = 100$ в и $X_{\max} = 100$ в, то совершенно ясно, что выходное напряжение не будет превышать 100 в, если даже обе переменные могут иметь максимальное значение в одно и то же время. Уравнение для выходного напряжения всех остальных множительных потенциометров, конечно, имеет одинаковый вид с выражением (10.40), с одним изменением, что переменная величина A заменяется соответственно на другие величины B , C , D или E , присущие тем или иным потенциометрам. Тогда очевидно, что благодаря моделирующей схеме на фиг. 10.19, возможно получить сигналы напряжения, которые будут представлять произведения одной переменной величины X на любую другую из пяти переменных, т. е. A , B , C , D , E .

Необходимо сделать несколько замечаний о двух дополнительных звеньях в схеме на фиг. 10.19. В первую очередь коснемся применения операционного усилителя, расположенного между концами первого множительного потенциометра A . Он включен с целью создать возможность умножения в четырех квадрантах. Следовательно, выражение (10.40) правильно описывает выходную величину, независимо от сочетания знаков у величины A и X . Другое замечание относится к сопротивлению R_c , включенному между заземляющим зажимом и ползунком потенциометра обратной связи. Это сделано с целью сохранить равенство распределения потенциалов между потенциометрами обратной связи и множительными потенциометрами при условии, когда ползунок последнего питается на следующей ступени через входное сопротивление R , как изображено на фиг. 10.19. Погрешность вычисления может быть устранена, если выбрать $R_c = R$.

Срвомножительное устройство широко применяется благодаря своей простоте, относительной экономичности и способности осуществлять операцию умножения с хорошей точностью величин с любыми знаками. Однако в некоторых случаях оно создает серьезный недостаток, в основном из-за электромеханического устройства, которому присуща значительная инерция; оно имеет ограниченную частотную характеристику, которая колеблется от 5 до 50 гц. Следовательно, когда для машинного решения физической задачи требуется применение умножителя и когда известно, что имеет место колебательный

режим с частотами выше 50 гц, тогда, безусловно, нельзя применять подобный сервоумножитель. Однако его можно применить, если изменить масштаб времени машинного решения. В действительности это может служить хорошим подтверждением возможности введения масштаба времени при моделировании физической задачи. В тех случаях, когда по каким-либо другим соображениям не допускается изменение масштаба времени, необходимо использовать полностью электронную схему для получения произведения переменных величин. Один метод состоит в применении время — импульсного умножителя. Второй метод основан на применении квадратичного преоб-



Фиг. 10. 20. Схема контура для деления двух переменных:

1 — серводвигатель.

разования. Оба метода позволяют производить быстро и точно умножение переменных величин. Информацию об этих методах можно найти в специальной литературе.

Деление двух переменных может быть осуществлено при помощи сервоумножителя и суммирующего усилителя, соединенных по схеме, показанной на фиг. 10. 20. Способность осуществлять операции деления можно показать на следующем примере.

Согласно закону Кирхгофа можно написать следующее соотношение о токах в точке соединения сетки операционного усилителя:

$$\frac{Y}{R} = \frac{ae_0}{R} = 0, \quad (10. 41)$$

где a определяет положение ползунка потенциометра, соответствующее частному значению переменной величины X . Решение относительно e_0 дает

$$e_0 = -\frac{V}{a}. \quad (10. 42)$$

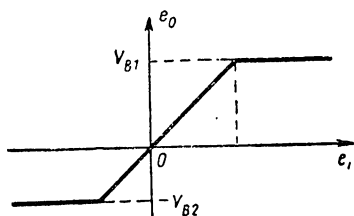
Но так как величина a определяется из равенства $a = X/100$, то последнее выражение можно написать следующим образом:

$$e_0 = -\frac{Y}{X} (100). \quad (10.43)$$

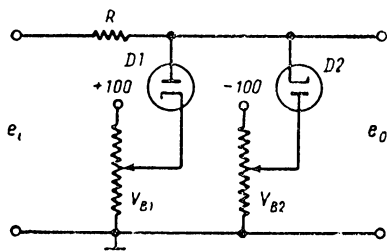
Следовательно, переменная величина Y разделена на переменную величину X , как это обусловлено соотношением (10.43). Из проверки этого результата становится очевидно, что в случае, когда выходная величина не превышает 100 в, тогда необходимо, чтобы в любое время $X = Y$. Это ограничение является, конечно, дополнительным к тому условию, которое ограничивает ширину полосы частот.

10.7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЩИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Действительные системы всегда содержат нелинейности в большей или меньшей степени. Очень часто эти нелинейности происходят от недостатков звеньев, из которых составлена система. Наиболее распространенные нелинейности этого рода связаны с ограничением работы системы (или ее насыщение), с мертвой зоной, зазорами и кулоновым трением. Попытаемся определить различные способы моделирования этих нелинейностей при помощи электронных вычислительных машин непрерывного действия.



Фиг. 10.21. Иллюстрация нелинейного типа ограничений.

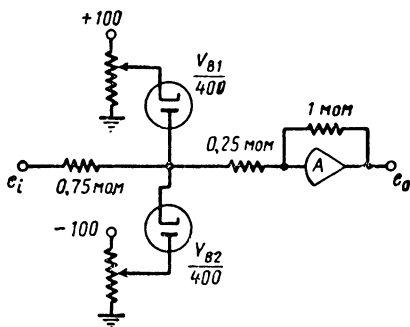


Фиг. 10.22. Контур для моделирования ограничений.

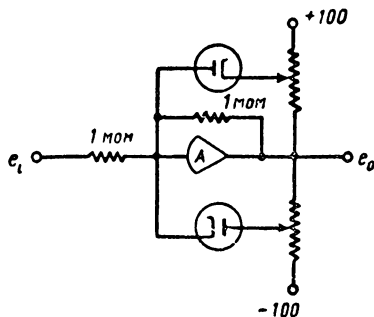
Ограничение работы системы. Характер этой нелинейности показан на фиг. 10.21. Она может проявляться в различном виде, например, в виде насыщения электронных и магнитных усилителей, достижение пределов скорости и ускорения выходных серводвигателей или удары упора контрольной поверхности. На фиг. 10.22 показана схема, иллюстрирующая принцип применения электронного моделирующего устройства для генерирования подобной характеристики. Когда входной сигнал увеличивается от нуля в положительном направлении, тогда выходное напряжение возрастает прямо пропорционально до тех пор, пока оно не достигнет значения V_{B1} . Напряжение V_{B1} представляет положительный потенциал, при котором катод диода $D1$ задерживает. Когда e_i стремится увеличиваться

¹ Зоной нечувствительности.

выше этого значения, диод D_1 проводит, благодаря чему задерживающий потенциал на выходе приводит к V_{B1} . Конечно, благодаря конечному сопротивлению потенциометра и сопротивлению диода срезание напряжения не будет резким. Практически вариант этого ограничительного контура, примененного в электронной вычислительной машине «РЕАС», изображен на фиг. 10. 23. Изучение этой схемы позволяет обнаружить, что потенциал в точке 1 до проводимости любого диода равняется $e_1 = \left[\frac{0,25}{0,75 + 0,25} \right] e_i = \frac{e_i}{4}$. Следовательно, до возникновения проводимости диодов входной и выходной величиной будет соотношение один к одному. После возникновения проводимости появляется напряжение $V_B/400$, как



Фиг. 10. 23. Практический вариант контура, изображенного на предыдущей фигуре.



Фиг. 10. 24. Создание характеристики с ограничением путем применения выходного ограничительного параллельного сопротивления.

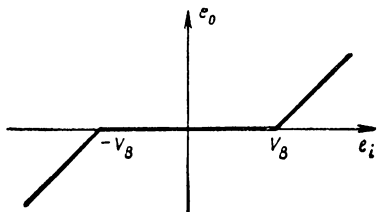
входной сигнал, который, в свою очередь, умножается на 4 при помощи операционного усилителя. Если выходное напряжение операционного усилителя не будет превышать максимума ± 100 в, то нетрудно убедиться, что максимальное положение потенциометра должно соответствовать максимальному напряжению на его ползунке ± 25 в. Когда ограничение осуществлено этим способом, то оно называется входным шунтирующим ограничением.

Выходное шунтирующее ограничение может быть также применено для создания характеристики с ограничением, что иллюстрируется фиг. 10. 24. Выходное напряжение усилителя подается к одному концу потенциометра, другой конец которого питается исходным напряжением 100 в. Если выходное напряжение усилителя положительно, то верхний диод не может проводить. Однако, когда выходное напряжение становится отрицательным, соответственно положительному входному сигналу e_i , с увеличением значения этого сигнала будет достигнута точка, когда диод станет проводящим. Точное значение выходного напряжения усилителя, когда диод становится проводящим, зависит от положения ползунка потенциометра. Зависимость между этим положением a ползунка потенцио-

метра, исходным напряжением 100 в и напряжением насыщения V_B (или ограничения) будет

$$a = \frac{\frac{V_B}{100}}{1 + \frac{V_B}{100}}.$$

Когда e_i превышает V_B по абсолютному значению, выходное напряжение усилителя сохраняет значение напряжения смещения V_B , так что оно не изменяется в дальнейшем при увеличении входного напряжения. Выходное шунтирующее ограничение имеет преимущество по сравнению с входным шунтирующим ограничением благодаря более острому срезу.



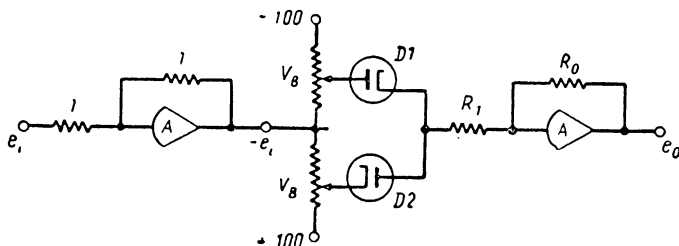
Фиг. 10. 25. Возникновение зоны нечувствительности.

Зона нечувствительности (мертвая зона). Этот термин применен для обозначения нелинейных функций вида, показанного на фиг. 10. 25. Они могут быть математически выражены следующим образом:

$$e_0 = 0 \text{ при } -V_B < e_i < V_B; \quad e_0 = e_i - V_B \text{ при } e_i > V_B;$$

$$e_0 = e_i + V_B \text{ при } e_i < -V_B.$$

Подобные нелинейные функции встречаются в механических и электромеханических преобразователях, например в манометри-

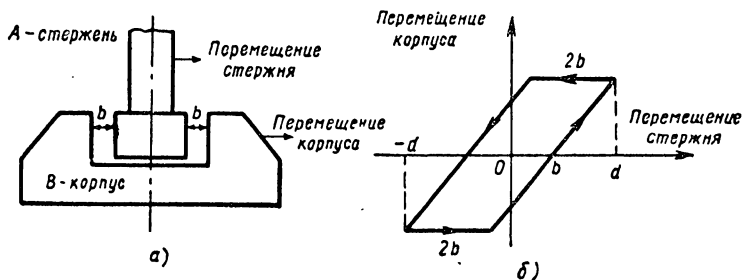


Фиг. 10. 26. Практический контур для образования зоны нечувствительности.

ческих приборах, гироскопах, акселерометрах и др. Генерирование функций такого вида связано с нечувствительностью системы к входному сигналу. Для воспроизведения этой характеристики используется практическая схема, показанная на фиг. 10. 26.

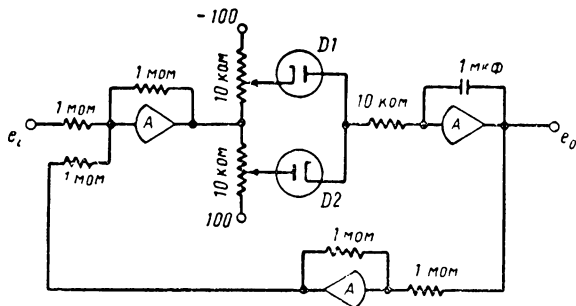
Запор (мертвый ход). Здесь мы имеем дело с разновидностью гистерезиса, который часто связывают с механическими системами и, в частности, с соединительными механизмами, например, редукторами, зубчатыми передачами, зубчатыми рейками и др. Для иллюстрации характера зависимости между выходной и входной величинами, рассмотрим схему на фиг. 10. 27, а, где показан стержень А,

использованный для передачи движения телу B (как в случае редуктора). Когда этот стержень центрирован, то с обеих сторон имеется одинаковый зазор, равный b . При смещении стержня в одну сторону тело B не будет перемещаться до тех пор, пока он не будет перемещен на величину b . После достижения этого момента между перемещениями стержня и тела будет соотношение один к одному. После сум-



Фиг. 10. 27. Возникновение мертвого хода (зазора).

марного положительного перемещения, равного d , направление движения стержня реверсируется; тогда тело не будет перемещаться до тех пор, пока стержень не пройдет расстояние, равное $2b$. В этот момент движение тела вновь возобновляется. Совершенно очевидно,



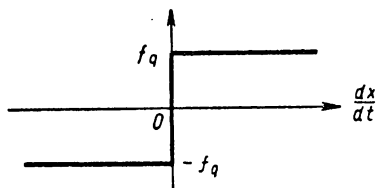
Фиг. 10. 28. Моделирующая схема мертвого хода замкнутого типа.

что если стержень циклически перемещается между пределами $\pm d$, то кривая перемещения выхода и входа будет иметь вид, показанный на фиг. 10. 27, б.

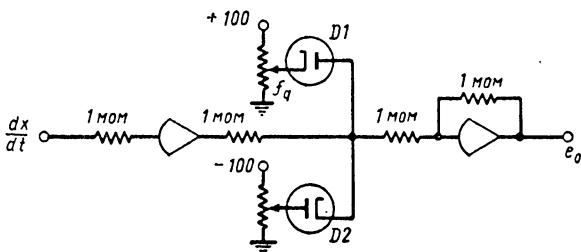
Входные и выходные перемещения в электронной вычислительной машине непрерывного действия обычно выражаются напряжениями. На фиг. 10. 28 показана практическая схема моделирования мертвого хода. Каждый диод настроен на величину, равную половине суммарного мертвого хода.

Кулоново трение. Термин «кулоново трение» применяется для обозначения сил трения, которые существуют между двумя телами

при перемещении относительно друг друга. Значение сил трения равно произведению коэффициента трения на нормальную силу. Оно не зависит от скорости и всегда направлено против движения. Графическое изображение этой зависимости дано на фиг. 10. 29. Кулоново трение часто свойственно выходным серводвигателям, как-то: гидравлическим двигателем электродвигателям, а также преобразователям, например, потенциометрам. На фиг. 10. 30 показана схема моделирования такой характеристики. Когда скорость регулируемой переменной величины dx/dt является слабоположительной, то выходное напряжение усилителя с большим коэффициентом усиления (без обратной связи) становится сильно отрицательным, вследствие чего диод $D2$ почти мгновенно становится проводящим, благодаря чему



Фиг. 10. 29. Характеристика кулонова трения.



Фиг. 10. 30. Схема моделирования кулонова трения.

сила кулонова трения будет приложена ко второму усилителю. Когда dx/dt становится слабо отрицательным, диод $D1$ станет тотчас же проводить и тем самым изменится знак выходной величины. В табл. 10. 2 приведены другие нелинейные схемы специального назначения.

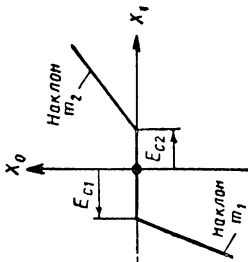
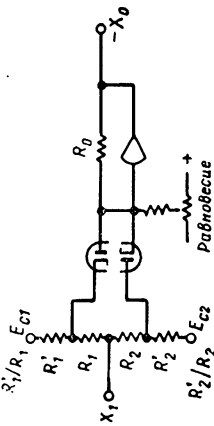
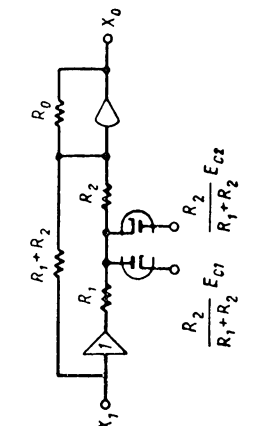
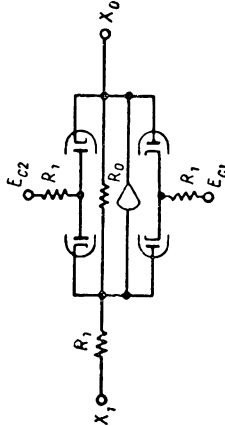
10. 8. ПРИМЕРЫ И ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

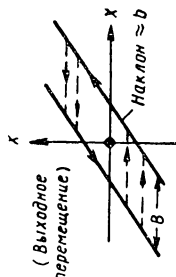
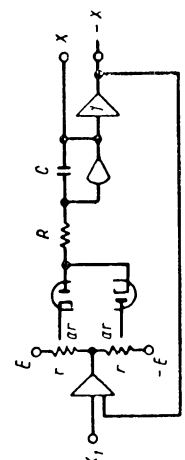
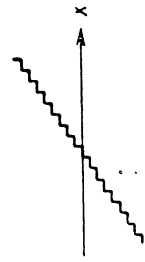
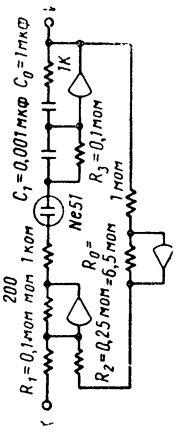
С целью иллюстрации порядка моделирования нелинейных дифференциальных уравнений, для чего требуется сервоумножитель и неравные масштабные факторы, рассмотрим физическую систему, описываемую уравнением

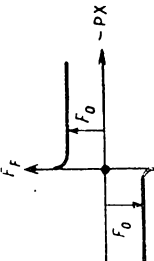
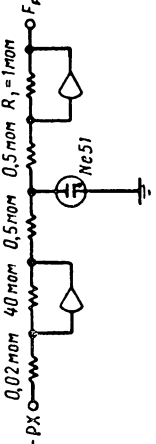
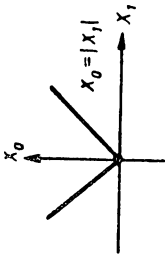
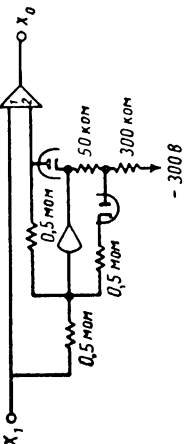
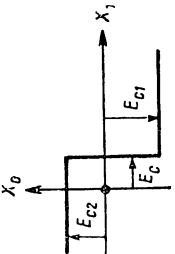
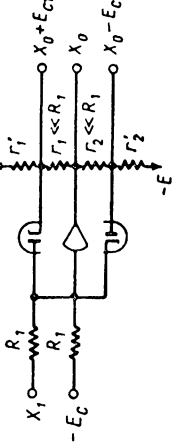
$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 100y = f = 200u(t). \quad (10. 44)$$

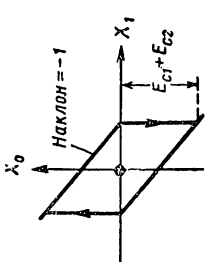
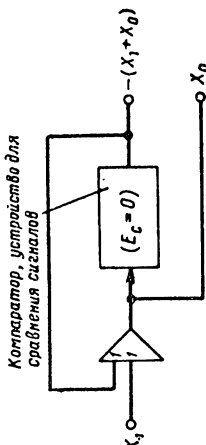
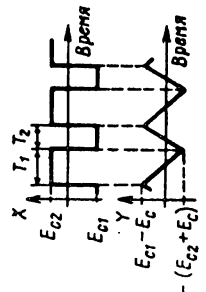
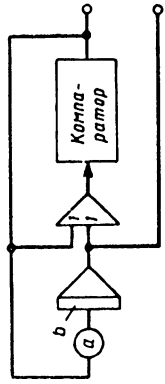
Это уравнение — нелинейное и поэтому желательно изучить его решение при помощи электронной вычислительной машины непрерывного действия. Как и обычно, до начала составления моделирующей схемы необходимо определить максимальные значения y , \dot{y} , \ddot{y} .

Нелинейные контуры специального назначения

Передаточная характеристика или генерируемая функция	Контур или блок-схема	Применение	Замечания
		Изображение мертвой зоны (зона нечувствительности) в пружинах, характеристиках, характеристиках стик управления и др. При больших значениях эти схемы могут быть использованы для моделирования пары упоров	$m_1 = \frac{R_0}{R_1}$ $m_2 = \frac{R_0}{R_2}$ $m_1 = m_2 = \frac{R_0}{R_1 + R_2}$ <p>Применение в статических вычислительных устройствах с незначительными установившимися шунтовыми ограничениями. Требуется точный подбор сопротивлений</p>
			
			$m_1 = m_2 = \frac{R_0}{R_1}$ <p>Легко поддается настройке</p>

Передаточная характеристика или генерируемая функция	Контур или блок-схема	Применение	Замечания
 <p>(Выходное переключение)</p>		<p>Приближенное изображение мертвого хода (зазоров) редукторов, рычажных систем, детекторов ошибок регулирования и др. (в предположении неупругих упоров)</p>	$B \approx \frac{2aE}{b(1-a)}$ <p>при $(ar + R) C \ll 1$ Типичные значения $r = R = 50 \text{ ком}$ $C = 1 \text{ мкф}$ $b = 1$ $E = 200 \text{ в.}$</p>
	 <p> $R_1 = 0,1 \text{ мом}$ $R_2 = 0,25 \text{ мом}$ $R_3 = 0,1 \text{ мом}$ $R_g = 1 \text{ мом}$ $C_1 = 0,001 \text{ мкф}$ $C_g = 1 \text{ мкф}$ Ne5T </p>	<p>Приближенное изображение неровности (напрямер, неровности потенциометра)</p>	<p>Средний наклон $= \frac{R_2}{R_0 R_1}$. Высота импульса $\sim \frac{R_2}{20}$. $R_3 C_0$ регулирует время возрастания импульса и, следовательно, допустимой скорости возрастания. Для более точного моделирования неоновую лампу можно заменить парой тириستоров или диодов</p>

Передаточная характеристика или генерируемая функция	Контур или блок-схема	Применение	Замечания
		<p>Приближенное изображение трогания и кулонова трения</p>	<p>$F_0 \sim 130 R_0$ (вольт)</p>
		<p>Точное устройство для получения абсолютных значений (линейный двухполувыходный выпрямитель)</p>	<p>Получение— X_1 путем реверсирования диодов и направления смещения</p>
		<p>Схемы компараторов (а также используется для моделирования кулонова трения)</p>	<p>Используется во многих коммутационных схемах, для релейных переключателей. Для стабилизации можно включить небольшой конденсатор обратной связи</p>

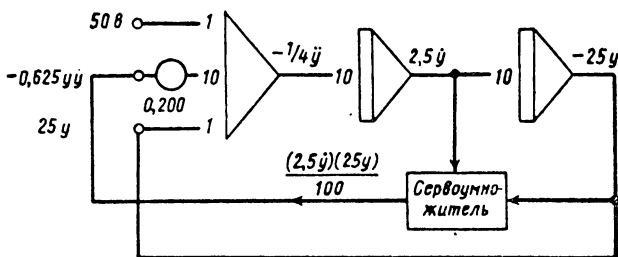
Передаточная характеристика или генерируемая функция	Контур или блок-схема	Применение	Замечания
 <p>Наклон = -1</p>	 <p>Компаратор, устройство для сравнения сигналов</p>	Мультивибратор	
		Свободно вращающийся мультивибратор	$T_1 = \frac{1}{ab} \left(1 + \frac{E_{C1}}{E_{C2}} \right)$ $T_2 = \frac{1}{ab} \left(1 + \frac{E_{C2}}{R C_1} \right)$

Здесь достаточно использовать одинаковые максимальные значения, примененные для линейного варианта этого уравнения. Соответствующие масштабные факторы определяются выражениями (10. 22), (10. 23, а) и (10. 23, б).

На первой стадии моделирования необходимо уравнение (10. 44) умножить на $\frac{1}{4}$ и затем решить его относительно наивысшей производной, а именно

$$\frac{1}{4} \ddot{y} = 50 - \frac{1}{2} (2,5\dot{y}) y - 25y \text{ (вольты)}. \quad (10. 45)$$

Тотчас же возникает вопрос, касающийся способа получения произведения $y\dot{y}$. Так как сервоумножитель необходимо применить для



Фиг. 10. 31. Схема моделирования нелинейного уравнения $\ddot{y} + 5y\dot{y} + 100y = 200$,

получения этого произведения и так как входные напряжения для этого умножителя должны быть получены в результате умножения физических величин y и \dot{y} на масштабные факторы, то отсюда следует, что выходное напряжение умножителя при этих обстоятельствах должно обязательно равняться

$$\frac{2,5\dot{y} (25y)}{100} = 0,625\dot{y} y \text{ (в вольтах)}. \quad (10. 46)$$

Сравнение с соответствующим членом уравнения (10. 45) показывает, что для корректности моделирования выходной сигнал сервоумножителя должен быть умножен на коэффициент 2 до суммирования с другими членами в правой части уравнения (10. 45), чтобы создать правильное масштабное ускорение. Остальная часть порядка моделирования одинакова с линейным случаем. Окончательная моделирующая схема дана на фиг. 10. 31. Важно подчеркнуть, что эта моделирующая схема не является более сложной, чем схема моделирования линейного дифференциального уравнения. Однако моделирование нелинейных систем позволяет инженеру изучить влияния, оказываемые на регулируемую переменную величину и ее производ-

ные при применении различных видов возмущающих функций, включая даже помехи. Положительным фактором является также очень малая затрата времени, необходимая для получения требуемых результатов. Решение получается простым, прямым и полным.

Основное назначение настоящей главы — дать введение в изучение электронных моделирующих устройств. Поэтому описание касалось методов вычисления, наиболее широко применяемых в анализе линейных и нелинейных систем. Кроме того, тщательная обработка масштабных факторов и масштаба времени была иллюстрирована на ряде примеров, потому что удовлетворительные расчетные результаты было бы трудно получить, не понимая значения масштабных факторов и масштаба времени. Конечно, желательно было бы более подробно осветить этот вопрос. Поэтому читателю рекомендуется обратиться за дополнительной информацией к специальной литературе. Однако следует напомнить, что даже при ограниченном обосновании вопроса, изложенного в настоящей главе, конструктор систем управления может определить широкие возможности, создаваемые электронными моделирующими устройствами, как исследовательским инструментом для анализа и расчета систем управления. Когда встречаются сложные расчеты систем управления, то инженер может начинать с простого анализа на бумаге для выбора основного направления, затем использовать электронную вычислительную машину для более точного расчета, а затем вернуться к анализу для получения полной картины на основании вычисленных результатов и, в конце концов, изменить вычисленные результаты соответственно с последними данными аналитического исследования.

Несомненно, наилучший путь оценить пределы подобного приближения состоит в проверке решения поставленной задачи.

ЗАДАЧИ

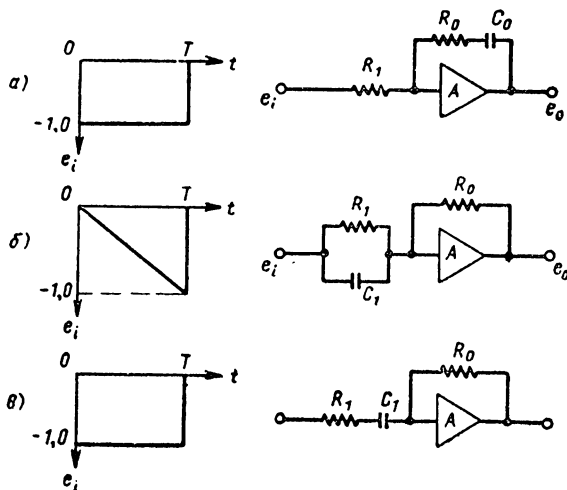
10. 1. Вывести уравнение (10. 4).

10. 2. Построить кривые калибровки потенциометра по уравнению (10. 4) в зависимости от уравнения (10. 3) при следующих отношениях сопротивлений $\frac{R_p}{R_L} = 0,3; 0,15$ и $0,03$.

10. 3. При заданных формах волны входной функции и при схеме, показанной на фиг. 10. 32, построить кривые выходных функций.

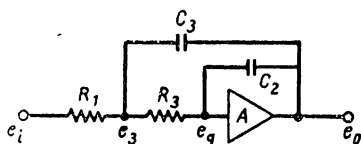
10. 4. Вывести выражение в процентах ошибки, обусловленной сопротивлением утечки конденсатора при единичной входной функции. Выразить результат через машинное время вычисления t , ошибку e и постоянную времени, представляющую сопротивление утечки $T_l = R_l C$. Предположим, что $e_g = 0$ (см. также фиг. 10. 33). При значении $R_l = 10^{14}$ ом вычислить допустимое машинное время вычисления с ошибкой, обусловленной этим источником в пределах 0,1% или меньше. Емкость конденсатора $C = 1$ мкф.

10. 5. Вывести передаточную функцию $\frac{e_0}{e_i}$ для вычислительного контура, показанного на фиг. 10. 34 в предположении, что коэффициент усиления бесконечно большой, т. е. $e_g = 0$.

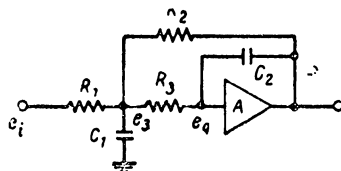


Фиг. 10. 32.

10. 6. Определить передаточную функцию, которую можно моделировать при помощи схемы на фиг. 10. 35. Подчеркнуть основную разницу вычисляемых функций схемами на фиг. 10. 34 и 10. 35.



Фиг. 10. 33.



Фиг. 10. 34.

10. 7. Составить моделирующую схему для решения уравнения (10. 17) с ограничением, что только три операционных усилителя могут быть применены. Предположение состоит в том, что ускорение не должно быть записано. Применить соответствующие масштабные факторы.

10. 8. Составить моделирующую схему для решения уравнения

$$4\ddot{x} + \dot{x} + 4x = f.$$

10. 9. Составить моделирующую схему для решения уравнения

$$\ddot{y} + 29\dot{y} + 520y + 2000y = f.$$

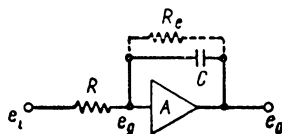
10. 10. Повторить решение задачи 10. 9, введя масштаб времени, который допускает, что масштабные факторы для всех переменных величин будут одинаковы.

10. 11. Дифференциальное уравнение сервомеханизма имеет вид

$$\frac{d^2c}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc}{dt} + \omega_n^2 c = \omega_n^2 r.$$

Моделировать это уравнение после изменения масштаба времени $\frac{\omega_n}{I}$. Решение дол-

жно быть таким, чтобы значение относительного коэффициента демпфирования, изменяемого одним потенциометром, могло находиться между 0,000 и 1,000.



Фиг. 10. 35.

САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Самонастраивающиеся системы управления проектируются с таким расчетом, чтобы они были в состоянии сохранять требуемые характеристики при изменении окружающих условий. Следует напомнить, что расчет корректирующих устройств и коэффициента усиления линейных систем почти всегда связан с предположением, что передаточная функция объекта регулирования неизменна. В ряде случаев параметры объекта регулирования подвергаются некоторым, достаточно малым изменениям, поэтому предположение об их постоянстве практически справедливо. Однако в тех случаях, когда параметры объекта регулирования изменяются в широких пределах, постоянный коэффициент усиления разомкнутой цепи или неизменный корректирующий контур могут легко привести к серьезному ухудшению характеристик и даже к неустойчивости системы. Полеты самолетов на сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростях относятся к подобным случаям. Ввиду того, что самолет летает в различных внешних условиях: плотная атмосфера на низкой высоте и разреженная — на большой высоте, аэродинамические параметры изменяются в широких пределах. При этих условиях невозможно достигнуть удовлетворительного управления при наличии постоянного коэффициента усиления и неизменных постоянных времени корректирующих устройств. Коэффициенты усиления элементов системы управления необходимо изменять в соответствии с изменениями окружающих условий.

На основании изменений параметров можно регулировать коэффициенты усиления по заранее заданному закону с целью получения одинакового режима системы. Этот метод, однако, не практичен по ряду причин. Во-первых, этот метод требует более точных данных об объекте регулирования и воздействиях на него окружающих условий (т. е. характеристики самолета на любых режимах и сего полета). Во-вторых, необходимо измерять параметры воздуха для всех условий полета. К сожалению, это не всегда легко выполнить. В действительности, при полетах на больших высотах, при больших числах M и больших углах атаки почти невозможно измерять параметры воздушного потока на борту самолета. В-третьих, выбор требуемого режима регулирования коэффициента усиления представляет дли-

тельный процесс и часто необходимо его подтвердить летными испытаниями. Наконец, любые изменения в конструкциях самолета часто требуют дополнительных испытаний и настройки. Главным образом эти основные причины привели к необходимости разработать самонастраивающиеся системы управления. Большое преимущество самонастраивающихся систем состоит в том, что отпадает необходимость в точной информации об объекте регулирования; подобная система настраивает регулируемые параметры на основе измеренной разницы между действительной и заданной выходной величиной вместо определения вспомогательных величин, например, параметров воздуха, которые трудно поддаются измерению.

Регулирование технологических процессов представляет другую область применения самонастраивающихся систем. Например, в литературе сообщалось о случае использования самонастраивающихся систем в химической промышленности, где системы управления функционировали по заданной программе, изменяя предельные условия и настраивая коэффициенты. Различные системы управления реагировали на колебания нагрузки, обусловленные понижением давления и температуры.

Благодаря самонастраивающимся системам управления допускались большие отклонения рабочего режима от заданных условий и в то же время можно было избежать неустойчивого состояния.

С развитием самонастраивающихся систем все большее признание приобретает принцип обратной связи, но более сложной формы. Несомненно, что любую систему с обратной связью, рассчитанную на создание выходной величины и которая следует за командой на входе с минимальной установившейся ошибкой, можно рассматривать, как самонастраивающуюся. Отрицательная обратная связь позволяет выполнить это условие работы. Подобное согласование между входной и выходной величинами правильнее назвать способностью статической настройки. Этот термин позволит в дальнейшем провести грань между статической и динамической настройкой. Система с обратной связью, которая сохраняет в основном одинаковую динамическую реакцию при переменном влиянии изменяющихся параметров системы, обладает способностью динамической настройки и называется самонастраивающейся системой управления. Другими словами, ту или иную систему управления с обратной связью можно назвать самонастраивающейся в зависимости от того, обладает ли она способностью динамической настройки.

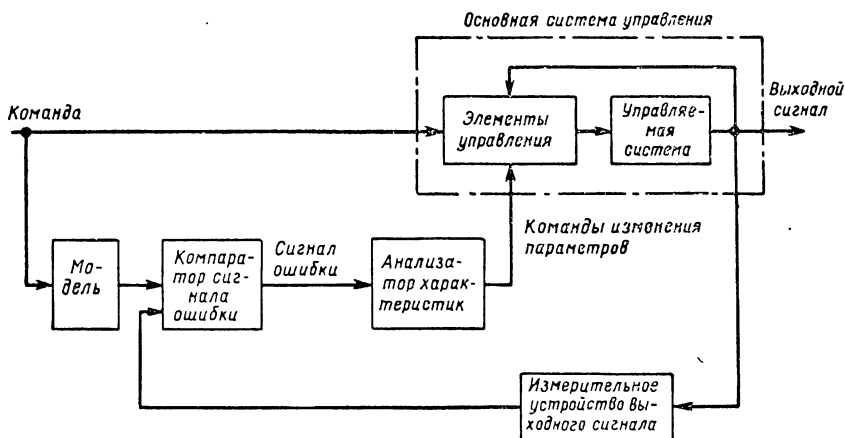
Другое различие, о чем следует упомянуть, существует между настраиваемыми и самонастраивающимися системами. Система управления с обратной связью, которая изменяет свои параметры в соответствии с заранее заданной программой, дает возможность системе настраиваться в зависимости от окружающих условий, однако не независимым образом. Здесь заранее предполагается, что общие характеристики объекта регулирования хорошо известны, а также известны зависимости этих характеристик от изменений окружающих условий. С другой стороны, самонастраивающаяся система управления

не требует такого рода информации, так как она включает в себя устройства для определения характеристик объекта регулирования, наряду со средствами для оценки необходимости регулирования параметров системы управления при наличии изменяющихся параметров объекта регулирования.

В настоящей главе дается описание некоторых принципов, на которых основаны наиболее распространенные самонастраивающиеся системы управления. По-видимому, еще рано классифицировать эти системы, тем более, что они принципиально не отличаются от систем управления с обратной связью, кроме способности динамически настраиваться.

11. 1. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭТАЛОНА-МОДЕЛИ

Блок-схема самонастраивающейся системы с эталоном-моделью показана на фиг. 11. 1. Обычная часть системы управления выделена пунктиром. Другие части схемы представляют дополнительные элементы, необходимые для создания свойств самонастраивающейся системы. На схеме видно, что входной сигнал подается одновременно



Фиг. 11. 1. Самонастраивающаяся система с моделирующим устройством.

на вход модели и основного контура управления. Выход системы затем сравнивается с выходом модели. Если между этими сигналами существует разница, то генерируется сигнал ошибки, который затем используется по заранее заданной программе для оптимальных изменений параметров системы управления. Последние, в свою очередь, служат для регулирования входной величины объекта регулирования таким образом, чтобы выход системы соответствовал выходу модели. Изучение блок-схемы ясно показывает, что изменение параметров объекта регулирования воздействует на уровень сигнала ошибки, так как параметры модели остаются неизменными. Этот

сигнал ошибки используется для регулирования параметров системы управления, с целью получения требуемых характеристик системы. Таким образом, система становится самонастраивающейся.

Данные о желательных динамических свойствах системы заключены в модели в аналоговой форме. Модель снабжает систему оптимальными критериями, которые используются как сравнительная величина или эталон для самонастраивающегося контура управления. Конечно, моделирующее устройство должно соответствовать реальным характеристикам систем управления, или, другими словами, его параметры должны быть такими, при которых возможна практическая осуществимость системы. Когда система управления должна работать при разных частных условиях, тогда моделирующее устройство можно легко настроить на работу соответственно этим условиям. Для управления самолетом нередко используются моделирующие устройства, которые представляют собой простую систему второго порядка с собственной частотой $0,5 \text{ гц}$ и относительным коэффициентом демпфирования $0,7$.

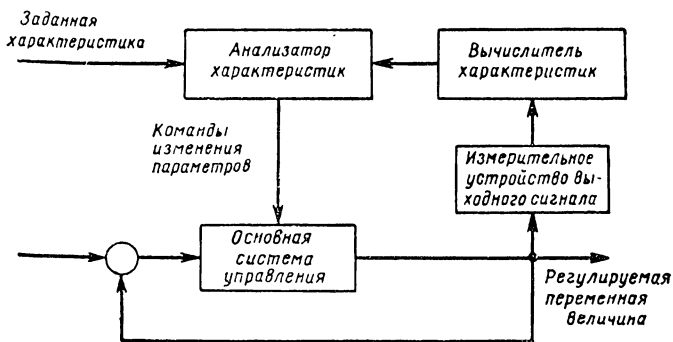
При проектировании систем управления с обратной связью надлежит правильно выбирать характерный критический параметр и это, безусловно, распространяется на самонастраивающиеся системы управления. Схема, показанная на фиг. 11. 1, была разработана приборной лабораторией Массачузетского технологического института и успешно применена на военном самолете. В этом случае характерные критерии представляли заранее заданные оптимальные значения ошибок, которые должны быть сведены к минимуму или равны нулю.

Сигналы ошибок сравниваются и это сравнение начиналось с подачи нормального входного сигнала. Сравнение заканчивается в момент времени, который определяется уровнем выходной величины моделирующего устройства, в зависимости от входного сигнала. Таким образом, период сравнения может быть связан с такими важными величинами, как время нарастания и время регулирования моделирующего устройства.

Для управления динамической реакцией используются три параметра. Первый параметр, как известно, влияет на момент, приложенный к самолету в соответствии с входной командой и таким образом эффективно изменяет начальную часть реакции (т. е. время нарастания). По этой причине критерий ошибки, выбранный для измерения этого параметра управления, состоит в том, чтобы интеграл сигналов ошибок, накопленных за время нарастания характеристики моделирующего устройства, был минимальным. Второй параметр оказывает наибольшее влияние на устойчивость системы. Критерий ошибки, используемый для регулирования этого параметра, состоит в том, чтобы интеграл ошибок, измеренных за период времени регулирования модели, был равен нулю. Здесь применяется подавление сигнала (нулевая величина), а не минимизация (сведение к минимуму) с целью уменьшить время регулирования. Третий параметр регулируется в соответствии с критерием ошибок,

когда интеграл абсолютных значений ошибок должен быть минимальным. Этот критерий минимума абсолютной величины необходим потому, что в случае, когда два первых критерия ошибок будут соблюдены, могут возникнуть колебания из-за слабого демпфирования. Основное назначение первых двух критериев ошибок заключается в уменьшении времени регулирования.

Следует отметить некоторые преимущества системы на фиг. 11. 1, кроме самонастраиваемости. Во-первых, контур самонастройки работает независимо от основной цепи управления. Следовательно, если контур самонастройки вышел из строя, то система может еще работать. Система имеет такую конструкцию, что сигнал ошибки тотчас же непрерывно генерируется. Здесь нет необходимости вводить



Фиг. 11. 2. Самонастраивающаяся система с вычислителем характеристики.

запаздывания в вычислительное устройство (как в случае самонастраивающихся систем, управляемых вычислительным устройством) или поисковые сигналы. Кроме того, следует заметить, что самонастраивающийся контур может быть легко добавлен к существующим системам без кардинального изменения основной цепи управления. Далее, возможно использовать несколько моделирующих устройств при наличии многих цепей управления, как в случае управления самолетом. Так, например, модель внутреннего контура ¹ может быть использована, чтобы создать требуемое демпфирование, в то время как модель внешнего контура может быть использована для обеспечения необходимой реакции на входную команду. Ввиду того, что помехи, содержащиеся во входном сигнале, одинаково влияют в основном на реакцию моделирующего устройства и самой системы, это мало отражается или даже совсем не отражается на процессе оптимизации самонастраивающейся системы управления.

На фиг. 11. 2 показан другой принцип действия, который может быть использован для создания самонастраивающихся свойств

¹ Внутренний контур управления замыкается через угловую скорость и служит для демпфирования колебаний самолета. Внешний контур замыкается через угловые координаты. (Прим. ред.)

у основной системы управления фиг. 11. 1. Сравнения показывают, что модель заменена вычислителем характеристик. В данном случае назначением вычислительного устройства является определение изменений характеристической функции элементов системы, определение новых свойств характеристической функции, приобретенных в изменившихся условиях и использование этой информации для изменения управляющих параметров так, чтобы характеристика системы на выходе соответствовала желаемым параметрам характеристической функции.

Параметры характеристической функции управляемой системы могут измеряться или непрерывно или в дискретные интервалы времени. Очевидно, что использование аналоговой модели дает довольно значительное преимущество в простоте.

11. 2. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Система, которая обладает способностью получать информацию об импульсной характеристике управляемой системы, представляет одно из существенных свойств, необходимых в системах, которые должны осуществлять динамическую приспособляемость. При этом следует напомнить, что реакция управляемой системы на импульс описывается в комплексной области s передаточной функцией самой управляемой системы.

Так как любые изменения параметров управляемой системы отразятся непосредственно на форме импульсной характеристики, то отсюда следует, что периодическое измерение этой импульсной характеристики позволит обнаружить изменение условий, а величина этих изменений может быть использована для регулирования параметров управления.

По существу, имеется три пути для измерения импульсной характеристики, и каждый из них может играть важную роль при конструировании самонастраивающихся систем. До рассмотрения этих методов полезно напомнить, что измерение импульсной характеристики не должно отделяться от способа использования информации. Поэтому, если необходимо достаточно полное описание импульсной характеристики, то конструктору потребуется большое количество оборудования.

Однако, если целью измерения импульсной характеристики является просто сообщение об отклонениях системы, то требования к оборудованию могут быть значительно уменьшены.

Первым способом для определения импульсной характеристики является возбуждение системы посредством импульса и измерение выхода, как показано на фиг. 11. 3. Конечно, определенная форма импульсной характеристики зависит от структуры управляемой системы $G(s)$. Из этого следует, что

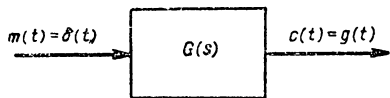
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}G(s). \quad (11. 1)$$

Если управляемая система, например, является системой второго порядка, имеющей передаточную функцию

$$G(s) = \frac{C(s)}{M(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (11.2)$$

то соответствующее решение во временной области для импульсной характеристики дается в виде

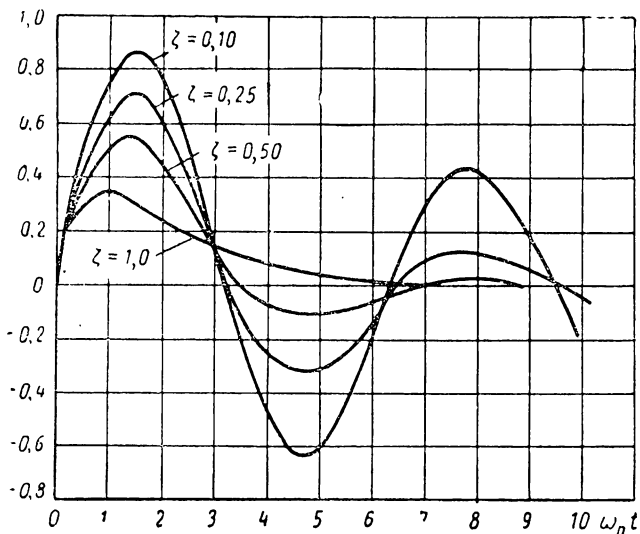
$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t \sqrt{1-\zeta^2})$$



Фиг. 11.3. Реакция системы на импульсную функцию.

для недодемпфированного случая.

Кривые, построенные по этому уравнению для различных значений относительного коэффициента демпфирования, указаны на фиг. 11.4.



Фиг. 11.4. Импульсная характеристика линейной системы второго порядка.

Эти кривые приемлемы не только для систем второго порядка, но довольно часто также для систем более высоких порядков, поведение которых, по существу, определяется парой преобладающих сопряженных комплексных корней. Имеются различные способы использования этих характеристических кривых. Например, в одном из способов построения самонастраивающейся системы было использовано отношение положительных площадей к отрицательным площадям импульсной характеристики, как показатель относительного коэф-

фициента демпфирования. Это позволило оценивать характеристики системы.

Другой способ основан на измерении амплитуд последовательных пиков импульсной характеристики.

В третьем способе импульсную характеристику получают в виде ряда фиксированных по амплитуде импульсов. Затем эти импульсы используются для определения числа изменений знака функции $g(t)$, которые, в свою очередь, могут быть использованы в качестве мерила относительного коэффициента демпфирования.

Второй способ определения импульсной характеристики управляемой системы включает использование интеграла свертки. Так, если управляемая система возбуждается произвольной, но известной функцией $m(t)$, и измеряется выход $c(t)$, то импульсная характеристика может быть найдена из интегрального уравнения

$$c(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) m(t - \tau) d\tau. \quad (11.4)$$

В тех случаях, когда первоначально запасенная энергия системы равна нулю, уравнение (11.4) упрощается до

$$c(t) = \int_0^t g(\tau) m(t - \tau) d\tau. \quad (11.5)$$

Один из методов решения этого уравнения относительно $g(t)$ состоит в разложении в ряды $c(t)$ и $m(t)$, последующем интегрировании по отдельным интервалам и, наконец, в решении относительно $g(t)$ также в виде ряда. Более полное описание этого способа дано в разделе 11.3.

Находит применение метод экспериментального определения импульсной характеристики, основанный на использовании принципов статистической динамики. Так, если управляемая система возбуждается белым шумом, т. е. шумом, который имеет одинаковый спектр энергетической плотности в диапазоне частот, значительно превышающем диапазон частот управляемой системы, тогда взаимная корреляционная функция между входом и выходом является импульсной характеристикой.

Использование принципов статистической динамики для построения самонастраивающихся систем позволяет создать системы, обладающие хорошими характеристиками.

Самонастройка, осуществленная в таких системах, основывается на следующих трех принципах:

1. Должно осуществляться непрерывное измерение динамических характеристик системы. Более того, это измерение должно выполняться с минимальными погрешностями, чтобы система была оптимизирована. Измерительные устройства динамических характеристик должны быть невосприимчивы к сигналам искажающего шума.

2. Оценка характеристики должна основываться на соответствующих критериях качества. Более того, критерий качества должен

быть чувствителен к знаку так, чтобы он показывал положительную или отрицательную величину, в зависимости от направления отклонения от номинальной величины.

3. Следует осуществить непрерывное изменение параметров корректирующего устройства системы управления на основе оценки характеристики. Это обеспечивается тем, что поисковый сигнал шума, энергия которого распределена на широкой полосе частот, имеет малую интенсивность.

Блок-схема самонастраивающейся системы, построенной по этим принципам, показана на фиг. 11. 5. Заметим, что команды и поисковые сигналы подаются одновременно к основной системе управления. Основная система управления реагирует на команду в соответствии с динамикой замкнутого контура. Однако, в то же самое время, основная система управления реагирует и на широкополосный поисковый сигнал шума, но таким образом, чтобы вызвать минимальную реакцию системы.

Блок-схема на фиг. 11. 5, которая может быть названа «измеряющим элементом», содержит механизм взаимного коррелятора, который служит для очень важной цели — непрерывного и точного измерения импульсной характеристики. Фиг. 11. 6 показывает более подробно вид взаимного коррелятора.

Так как здесь не ставится цель изложения теории корреляционных функций, мы просто кратко опишем, как получается импульсная характеристика, начиная с взаимной корреляционной функции. Взаимная корреляционная функция между шумом на входе и выходным сигналом определяется так

$$\varphi_{i_0}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n_i(t - \tau) [c(\tau) + n_0(\tau)] d\tau \quad (11. 6)$$

или

$$\varphi_{i_0}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T n_i(t - \tau) n_0(\tau) d\tau + \int_{-T}^T n_i(t - \tau) c(\tau) d\tau \right], \quad (11. 7)$$

где n_i — шум на входе основной системы управления;

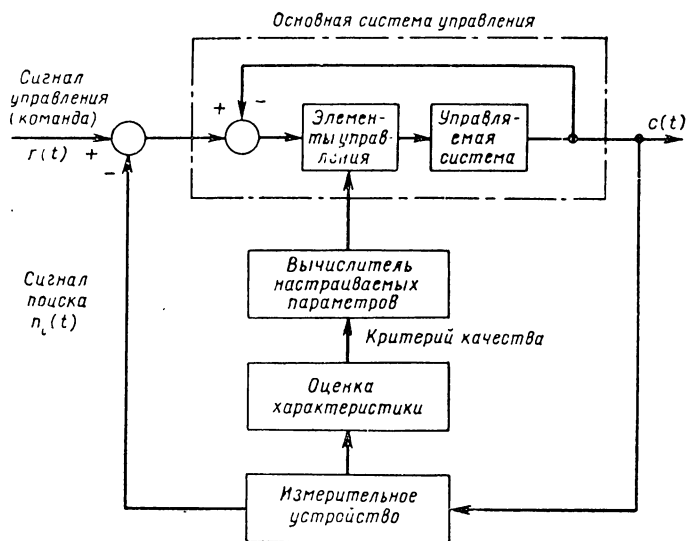
$n_0(t)$ — шум на выходе основной системы управления.

Второй член уравнения (11. 7) равен нулю, так как шум на входе и выход $c(t)$, обусловленный командой, происходят от разных источников и не коррелированы. Поэтому

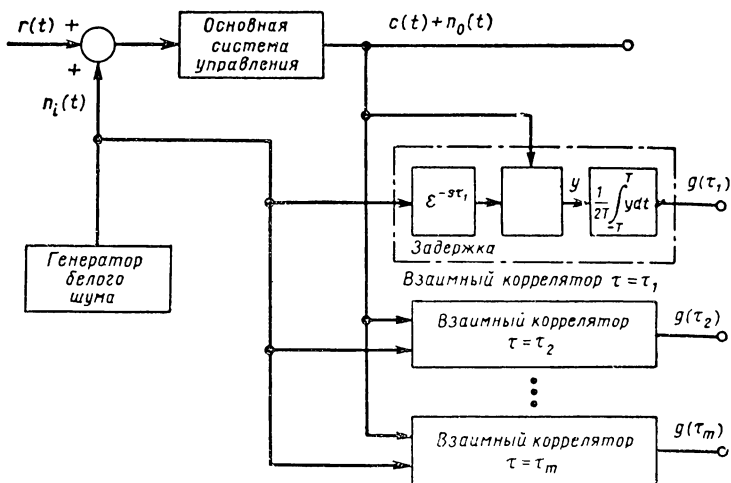
$$\varphi_{i_0}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n_0(\tau) n_i(t - \tau) d\tau. \quad (11. 8)$$

Более того, шум на выходе связан с шумом на входе посредством интеграла свертки следующим образом:

$$n_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') n_i(t - t') dt'. \quad (11. 9)$$



Фиг. 11. 5. Импульсная самонастраивающаяся система управления.



Фиг. 11. 6. Схема многоканального взаимного коррелятора для определения импульсной реакции основной системы управления.

Подставляя это уравнение в уравнение (11. 8) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\varphi_{i0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T n_0(t - \tau) n_i(t - t') dt \right] dt'. \quad (11. 10a)$$

Величина в скобках есть автокорреляционная функция входного шума $\varphi_{ii}(\tau - t')$. Соответственно, уравнение (11. 10 a) упрощается до

$$\varphi_{i0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \varphi_{ii}(\tau - t') dt'. \quad (11. 10б)$$

Важным моментом здесь является характер автокорреляционной функции. Можно показать, что если автокорреляция входа слабая (и это достигается всякий раз, когда шум является белым), тогда автокорреляционная функция становится, по существу, импульсной функцией $\delta(\tau - t')$. Для этих условий взаимная корреляционная функция будет

$$\varphi_{i0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \delta(\tau - t') dt' = g(\tau). \quad (11. 11)$$

Из уравнения (11. 11) ясно, что выход взаимного коррелятора обеспечивает точку (значение) на импульсной характеристике. Конечно, желательно иметь много точек на импульсной характеристике, они могут быть получены введением дополнительных каналов взаимного коррелятора, оборудованных соответствующим запаздыванием. Интересно отметить, что взаимный коррелятор фиг. 11. 6 есть ничто иное, как механизация решения уравнения (11. 6).

Оценка характеристики осуществляется на основе соответственно выбранного критерия качества, которым в данном случае является относительный коэффициент демпфирования. Как уже отмечалось, информация о коэффициенте демпфирования может быть выведена из отношения положительной площади к отрицательной площади временной зависимости импульсной характеристики. Можно показать, что для системы второго порядка это отношение площадей дается как

$$k = \left| \frac{A_+}{A_-} \right| = e^{\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (11. 12)$$

где A_+ — представляет общую положительную площадь импульсной характеристики;

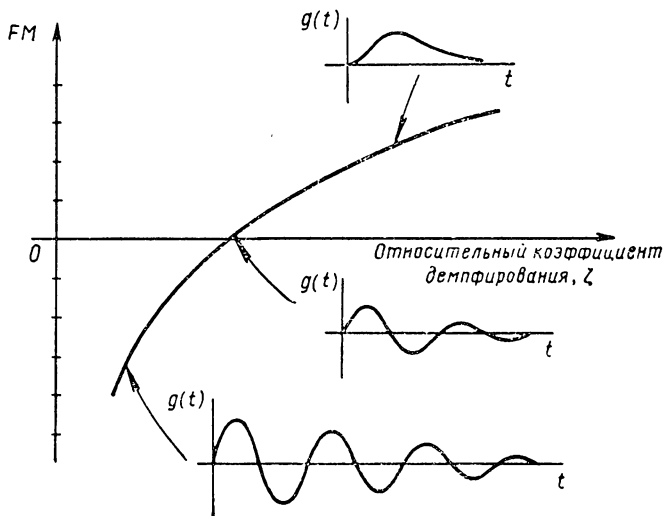
A_- — представляет общую отрицательную площадь импульсной характеристики.

Соответственно, критерий качества можно выразить как

$$FM = A_+ - kA_- = \frac{1 - ke^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}}{1 - e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (11. 13)$$

Характеристика уравнения (11.13) в функции коэффициента демпфирования приведена на фиг. 11.7. Соответствующим выбором коэффициента k при желаемом относительном коэффициенте демпфирования можно изменить знак функции. Чувствительность критерия качества к знаку, конечно, можно использовать в качестве сигнала ошибки.

Так как вся импульсная характеристика получается в виде дискретного ряда конечных величин, то следует аппроксимировать соответствующие площади, необходимые для оценки уравнения (11.13), перемножением вычисленных ординат $q(\tau_1)$, $q(\tau_2)$...



Фиг. 11.7. Кривые изменения критериев качества в функции относительного коэффициента демпфирования в связи с реакцией системы на импульсную входную функцию.

и т. д., на промежутки между последовательными ординатами, и последующего сложения площадей. При использовании этого метода критерий качества может быть более удобно выражен, как

$$FM = \sum_{m=1}^M A_m g(\tau_m), \quad (11.14)$$

где M — число используемых взаимных корреляторов и

$$A_m = a_m \text{ при } g(\tau_m) > 0; \quad A_m = ka_m \text{ при } g(\tau_m) < 0 \quad (11.15)$$

и

$$a_m = \frac{1}{2} (\tau_{m+1} - \tau_{m-1}). \quad (11.16)$$

Когда вычисленный критерий качества отклоняется от желаемой величины, сигнал воспринимается вычислителем настраиваемых параметров, показанным на фиг. 11.5; последний тогда обеспечивает

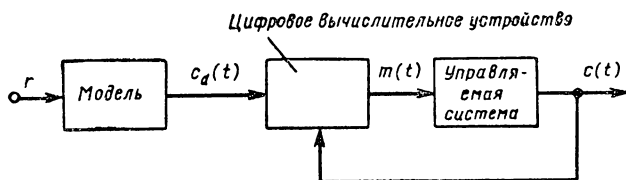
соответствующее изменение параметров, чтобы уменьшить ошибку до нуля. При применении этой самонастраивающейся системы к системе второго порядка как коэффициент усиления, так и постоянная времени регулируются.

Какие имеются ограничения у самонастраивающейся системы, основанной на приведенном принципе? Одна трудность может возникать в тех случаях, когда время отклонения настраиваемых параметров слишком мало по сравнению с временем, необходимым для подсчета взаимной корреляции. Другое затруднение состоит в том, что система должна быть искусственно возбуждена и, хотя использование широкополосного шума уменьшает эффект на выходе, однако это вызывает некоторые отклонения и тем самым содействует износу элементов системы.

Наконец, при применении к системам высшего порядка возникает необходимость модификации способа оценки характеристик, а также изменения вычислителя настраиваемых параметров.

11. 3. САМОНАСТРАИВАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА, УПРАВЛЯЕМАЯ ЦИФРОВЫМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ УСТРОЙСТВОМ

Применение цифрового вычислительного устройства в системе управления с обратной связью придает некоторые важные свойства. Его возможно, например, использовать с двойной целью. С одной стороны, цифровое вычислительное устройство может вычислять функцию управляющего воздействия, что необходимо для согласования выходной величины с входной или получения требуемой реак-



Фиг. 11. 8. Упрощенная структурная схема системы, управляемой цифровым вычислительным устройством.

ции, а также вычислить последнюю информацию о динамической реакции системы. Последнее свойство, благодаря чему система становится самонастраивающейся, образуется вследствие способа генерирования функции управляющего воздействия, вводимой в управляемую систему. Это станет очевидно позднее после дальнейшего рассмотрения данного типа системы управления.

Упрощенная блок-схема системы с управляющим цифровым вычислительным устройством показана на фиг. 11. 8. Для преобразования сигнала команды в требуемый сигнал реакции в схему включена модель. Модель, по желанию, может быть исключена. Допустим, что на вход этой системы подается сигнал команды $r(t)$ и что в отдельной точке ее временной характеристики действительное значение

регулируемой переменной равно $c_1(t)$, соответственно которой в управляемую систему вводится вынуждающая функция $m_1(t)$. Тогда в соответствии с интегралом свертки эти две величины будут связаны следующим образом:

$$c_1(t) = \int_{-\infty}^{t_1} m_1(\tau) q(t - \tau) d\tau, \quad (11.17)$$

где $q(t)$ — импульсная характеристика управляемой системы.

Если теперь регулируемую переменную принять за требуемое значение $c_d(t)$, то настраиваемый параметр следует предположить равным значению $m_d(t)$ и тогда

$$c_d(t) = \int_{-\infty}^t m_d(\tau) q(t - \tau) d\tau. \quad (11.18)$$

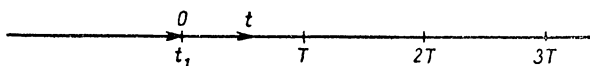
Как правило, требуемый настраиваемый параметр может быть выражен в виде

$$m_d(t) = m_1(t) + \Delta m(t), \quad (11.19)$$

где $\Delta m(t)$ — приращение настраиваемого параметра, необходимое для получения равенства $c(t) = c_d(t)$. Цифровое вычислительное устройство предназначено для вычисления необходимых приращений через каждые T сек. В действительности цифровое вычислительное устройство непрерывно следит за состоянием системы, сравнивая действительную реакцию с требуемой реакцией и генерируя затем управляющие сигналы, подаваемые в регулируемую систему, о приращении вынуждающей функции с целью получения равенства $c(t) = c_d(t)$. Если вычислительное устройство рассчитано на то, чтобы производить вычисления $\Delta m(t)$ через каждые T сек и если t представляет изменение времени в интервале управления, то из уравнения (11.19) нетрудно определить

$$\Delta m(t) = 0 \text{ при } t < 0; \Delta m(t) \neq 0 \text{ при } t > 0. \quad (11.20)$$

На фиг. 11.9 дано обозначение изменения времени в интервале управления. Здесь t_1 имеет то же значение, как и верхний предел



Фиг. 11.9. Распределение во времени интервалов управления (вычислений).

интеграла в уравнении (11.17), а t представляет изменение времени от нуля в начале интервала управления. Введение уравнения (11.19) в интеграл свертки дает

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t_1} m_1(\tau) g(t - \tau) d\tau + \int_0^t \Delta m(\tau) g(t - \tau) d\tau = c_1(t) + c_2(t). \quad (11.21)$$

Первая часть этого уравнения одинакова с уравнением (11. 17). Второй член, который обозначим теперь следующим образом:

$$c_2(t) = \int_0^t \Delta m(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (11. 22)$$

представляет приращение выходной величины, создаваемое в результате возрастающей вынуждающей функции $\Delta m(t)$. Уравнение (11. 22) является одним из двух ключевых уравнений, на которых основаны принципы построения самонастраивающейся системы, управляемой цифровым вычислительным устройством.

Ошибка, существующая в системе непосредственно перед началом интервала управления, равняется

$$e(t) = c_d(t) - c_1(t). \quad (11. 23)$$

Подстановка в последнее выражение уравнений (11. 17) и (11. 18) дает

$$e(t) = \int_0^t \Delta m(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (11. 24)$$

Уравнение (11. 24) является вторым из двух ключевых уравнений. Значение этого уравнения связано со следующим обстоятельством: оно определяет, что если информация относительно ошибки известна в начале интервала управления, как и последняя информация о импульсной характеристике, то требуемое значение приращения $\Delta m(t)$ может быть вычислено.

Порядок вычисления приращения $\Delta m(t)$ по уравнению (11. 24) состоит в разложении в ряд Маклорена величин $e(t)$ и $g(t)$ в интервале $0 < t < T$, как это было предложено Брауном. Следовательно импульсную характеристику можно написать в следующем виде:

$$g(t) = G_0 + G_1 t + G \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (11. 25)$$

Соответствующее выражение преобразования Лапласа будет

$$G(s) = G_0 s^{-1} + G_1 s^{-2} + G_2 s^{-3} + \dots \quad (11. 26)$$

Аналогично функция ошибки может быть написана в виде

$$e(t) = \int_0^t \Delta m(\tau) g(t - \tau) d\tau = E_0 + E_1 t + E_2 \frac{t^2}{2!} = \dots, \quad (11. 27)$$

где

$$E_n = \left. \frac{d^n e(t)}{dt^n} \right|_{t=0} \quad \text{и} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11. 28)$$

Нетрудно обнаружить, что эти коэффициенты ошибок определяются из разностей, возникающих между действительными и тре-

буемыми характеристиками и их производными в начале интервала управления. Отсюда

$$\begin{aligned} E_0 &= c_d(0^-) - c(0^-); \\ E_1 &= \dot{c}_d(0^-) - \dot{c}(0^-); \\ E_2 &= \ddot{c}_d(0^-) - \ddot{c}(0^-); \\ E_p &= c_d^p(0^-) - c^p(0^-), \end{aligned} \quad (11.29)$$

где одна точка сверху означает первую производную, две точки — вторую производную и т. д. Преобразование Лапласа, примененное к уравнению (11.27), дает

$$E(s) = \Delta M(s) G(s) = E_0 s^{-1} + E_1 s^{-2} + E_2 s^{-3} + \dots \quad (11.30)$$

Из уравнения (11.30) видно, что выражение для требуемой возрастающей вынуждающей функции в области s имеет вид

$$\Delta M(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{E_0 s^{-1} + E_1 s^{-2} + E_2 s^{-3} + \dots}{G_0 s^{-1} + G_1 s^{-2} + G_2 s^{-3} + \dots} \quad (11.31)$$

Преобразование этого уравнения путем обычного деления приводит к выражению $\Delta M(s)$, которое имеет форму разложения в ряд; следовательно,

$$\Delta M(s) = \Delta M_{-1} + \Delta M_0 s^{-1} + \Delta M_1 s^{-2} + \dots, \quad (11.32)$$

где

$$\Delta M_{-1} = \frac{E_0}{G_0}; \quad (11.33)$$

$$\Delta M_0 = \frac{E_1 - \Delta M_{-1} G_1}{G_0}; \quad (11.34)$$

$$\Delta M_1 = \frac{E_2 - (\Delta M_{-1} G_2 + \Delta M_0 G_1)}{G_0}. \quad (11.35)$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

Соответствующее выражение во временной области будет

$$\Delta m(t) = \Delta M_{-1} \delta(t) + \Delta M_0 + \Delta M_1 t + \dots \quad (11.36)$$

Из уравнения (11.36) вытекают некоторые интересные факты. Это уравнение устанавливает, что при условии, когда импульсная характеристика точно представлена уравнением (11.26), т. е. $G_0 \neq 0$; изменение вынуждающей функции, необходимое для согласования выходной характеристики с требуемой характеристикой, состоит

из нескольких вынуждающих функций обычного вида. Один компонент является импульсной функцией, значение которой определяется уравнением (11. 33). Нетрудно показать, что назначение этого импульса состоит в создании амплитуды регулируемой переменной величины в точном соответствии с требуемым значением переменной. Второй компонент представляет ступенчатую функцию, определяемую уравнением (11. 34). Изучение этого уравнения позволяет обнаружить, что назначение данного члена приращения $\Delta m(t)$ состоит в образовании первой производной регулируемой величины, равной первой производной требуемой выходной характеристики. Аналогично назначение кусочно-линейного компонента $\Delta m(t)$ состоит в том, чтобы обеспечить соответствие между вторыми производными действительной и требуемой характеристик.

Необходимо ясно понять, что основной характер функции $\Delta m(t)$ зависит от формы функции $G(s)$, как это показывает проверка уравнения (11. 31). В этом лежит одно из серьезных ограничений системы управления данного типа. Об этом много сообщается за последнее время.

Характеристика самонастройки системы, управляемой цифровым вычислительным устройством, выражается уравнением (11. 22). Чтобы обладать приспособляемостью, цифровое вычислительное устройство должно быть в состоянии изменять настраиваемый параметр не только в соответствии с величиной коэффициентов ошибки (как об этом сообщалось выше), но также отражать влияние изменяющейся динамики системы при вычислении коэффициентов возрастающей вынуждающей функции. Иными словами, система должна быть в состоянии вычислять новые значения G_0 , G_1 , G_2 и др. и использовать их для вычислений согласно уравнениям (11. 33) — (11. 35). Уравнение (11. 22) показывает, что в случае, когда информация относительно $c_2(t)$ известна в начале интервала управления, как и информация о $\Delta m(t)$, то текущая информация об импульсной характеристике $g(t)$ может быть найдена. Однако совершенно очевидно, что $\Delta m(t)$ в этом выражении не может быть использована как функция управляющего воздействия в данном интервале управления, потому что для вычисления этой величины требуется информация о коэффициентах $g(t)$. Это затруднение устраняется путем использования значения $\Delta m(t)$, которое вычисляется и применяется в предшествующем интервале управления. Отсюда ясно, что некоторая ошибка будет при этом введена, так как несколько «устаревшая» информация была бы использована для вычисления коэффициентов членов разложения в ряд импульсной характеристики. Однако уровень этой ошибки может быть ограничен, выбрав достаточно малые интервалы управления.

Кроме того, дополнительное преимущество достигается тем, что интервал управления очень мал сравнительно с временем, необходимым для изменения параметров управляемой системы.

Следуя этому порядку и используя разложение в ряд выражения, представляющего изменение регулируемой величины, обусловлен-

ного воздействием $\Delta m(t)$, можно уравнение (11.22) написать в следующем виде:

$$c_2(t) = \int_0^t \Delta m^*(\tau) g(t-\tau) d\tau = C_{20} + C_{21}t + C_{22} \frac{t^2}{2!} + \dots, \quad (11.37)$$

где

$$C_{2n} = \left. \frac{d^n c(t)}{dt^n} \right|_{t=0^+} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.38)$$

а t означает время, изменяющееся от нуля в начале интервала управления; $\Delta m^*(t)$ представляет функцию управляющего воздействия в предыдущем интервале управления. После преобразования Лапласа уравнение (11.37) приобретает вид

$$C_2(s) = \Delta M^*(s) G(s) = C_{20}s^{-1} + C_{21}s^{-2} + C_{22}s^{-3} + \dots, \quad (11.39)$$

из которого следует, что информация о динамике системы получается из

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{\Delta M^*(s)} = \frac{C_{20}s^{-1} + C_{21}s^{-2} + C_{22}s^{-3} + \dots}{\Delta M_{-1}^* + \Delta M_0^* + \Delta M_1^*s^{-2} + \dots}. \quad (11.40)$$

Обычное деление этого выражения приводит к

$$G(s) = G_0s^{-1} + G_1s^{-2} + G_2s^{-3} + \dots, \quad (11.41)$$

где

$$G_0 = \frac{C_{20}}{\Delta M_{-1}^*}; \quad (11.42)$$

$$G_1 = \frac{C_{21} - \Delta M_0^* G_0}{\Delta M_{-1}^*}; \quad (11.43)$$

$$G_2 = \frac{C_{22} - (\Delta M_0^* G_1 + \Delta M_1^* G_0)}{\Delta M_{-1}^*}; \quad (11.44)$$

При помощи выражений, представленных последними тремя уравнениями, можно придать системе свойства самонастройки. Как показывают эти уравнения, для оценки разложения в ряд импульсной характеристики $g(t)$ необходимо измерить регулируемую величину и ее производные непосредственно после и непосредственно до управляющего воздействия $\Delta m(t)$. Для пояснения этого напомним, что согласно уравнению (11.21)

$$c_2(t) = c(t) - c_1(t)$$

и тогда из уравнения (11.38) при $n = 0$ и $t = 0^+$ получим

$$C_{20} = c_2(0^+) = c(0^+) - c_1(0^+).$$

Но так как $c_1(t)$ является регулируемой величиной без влияния управляющего воздействия, то отсюда следует, что $c_1(0^+) = c(0^+)$. Введение последнего равенства в данное уравнение дает

$$C_{20} = c_2(0^+) = c(0^+) - c(0^-). \quad (11.45)$$

Следовательно, информация относительно C_{20} получена путем измерения выходной величины непосредственно до и непосредственно после начала интервала управления. Аналогичным образом можно показать, что

$$C_{21} = \dot{c}_2(0^+) = \dot{c}(0^+) - \dot{c}(0^-); \quad (11.46)$$

$$C_{22} = \ddot{c}_2(0^+) = \ddot{c}(0^+) - \ddot{c}(0^-); \quad (11.47)$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Следует заметить, что в этой самонастраивающейся системе информация о динамике управляемой системы выводится на основании ранее приложенного корректирующего сигнала $\Delta m^*(t)$, а не на основании преднамеренно введенного источника шума, как это имело место в случае системы, описанной в предыдущем разделе.

С целью дать более ясную картину о порядке вычислений, осуществляемых цифровым вычислительным устройством, в табл. 11.1 приведена упрощенная схема порядка вычислений. Необходимо отметить, что порядок вычислений начинается с подачи малого импульса с целью сократить объем вычислений и накопления информации относительно импульсной характеристики, чтобы использовать ее тотчас же после подачи команды.

Конечно, если первоначально известна только приближенная информация об импульсной характеристике, то ее можно непосредственно ввести в запоминающее устройство и тем самым избежать необходимости начального импульсного возбуждения.

Непосредственно после подачи входной команды r управляющее цифровое вычислительное устройство определяет коэффициенты ошибки, а затем коэффициенты функции управляющего воздействия. Затем производится суммирование для получения $\Delta m_1(t)$. Непосредственно до приложения $\Delta m_1(t)$ вычисляются значения регулируемой величины и некоторые из ее производных, необходимые для процесса вычисления. Те же самые величины вычисляются непосредственно после введения $\Delta m_1(t)$. Этим путем получается информация для подсчета коэффициентов уравнения (11.41), которые затем могут быть связаны с ранее вычисленными значениями коэффициентов $\Delta m_1(t)$ для получения более точной информации о динамике системы. В некоторый, заранее выбранный, момент времени T_1 вычислитель настраиваемых параметров сравнивает затем действительное состояние выходной величины с требуемым ее значением. Если было найдено, что коэффициенты ошибки равняются нулю (или мало отличаются от нуля), то отпадает необходимость в дальнейшей коррекции и таким образом не генерируется дополнительное управляющее воз-

действие, т.е. не определяется дополнительное приращение вынуждающей функции. С другой стороны, когда какой-либо один коэффициент ошибки не равен нулю, тогда надлежащее приращение вынуждающей функции будет генерироваться и соответственно воздействовать с целью уменьшения до минимума этих ошибок. Время, протекающее между последовательными моментами возникновения управляющего воздействия, указанными в табл. 11.1, равняется T .

После этого момента повторяется предыдущая последовательность операций, если только не будет достигнуто состояние, когда регулируемая величина будет совпадать с требуемым выходным значением в допустимых пределах.

В случаях, когда параметры управляемой системы изменяются медленно сравнительно с интервалом управления T , вычислитель настраиваемых параметров должен получать инструкции, чтобы избежать вычисления коэффициентов G , если нет значительных изменений импульсной характеристики управляемой системы.

Изложенное описание порядка вычислений подчеркивает, что текущая информация об импульсной характеристике системы может быть получена, когда система находится в динамическом состоянии. Иногда могут возникнуть условия, при которых выход следует за входной функцией при наличии изменяющихся внешних воздействий; тогда лучше возбудить систему малым импульсом с целью сохранить на данном уровне значения коэффициентов G . Величина импульса должна быть достаточно большой только для того, чтобы различать его при наличии шума. Конечно, в условиях, когда входная команда непрерывно изменяется, необходимость искусственного возбуждения устраняется.

Следующий простой пример позволяет лучше пояснить описанный метод. Предположим, что управляемой системой является чистый интегратор, как показано на фиг. 11.10. Заметим, что цифровое вычислительное устройство обеспечивает, как предполагается, создание вынуждающей функции (управляющего воздействия), состоящей из трех компонентов, а именно импульсной, ступенчатой и кусочно-линейной функции. Принято, что модель является запаздывающим контуром первого порядка с постоянной времени, характеристика которого показана на фиг. 11.11.

Для удобства примем, что на вход модели подается единичная входная функция и что цифровое вычислительное устройство не будет работать до тех пор, пока не пройдет интервал времени t_1 . При $t = t_1$ цифровое вычислительное устройство определяет следующие ошибки между действительной и требуемой характеристиками относительно значения переменной величины, а также ее первой и второй производных:

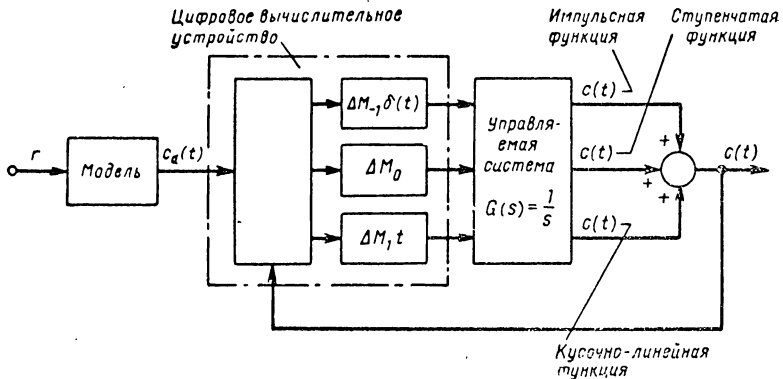
$$\left. \begin{aligned} E_0 &= c_d(t_1^-) - c(t_1^-) = c_{d1} = 1 - e^{-t_1}; \\ E_1 &= \dot{c}_d(t_1^-) - \dot{c}(t_1^-) = e^{-t_1}; \\ E_2 &= \ddot{c}_d(t_1^-) - \ddot{c}(t_1^-) = -e^{-t_1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.48)$$

Следовательно, цифровое вычислительное устройство путем измерения и вычисления определяет коэффициент ошибки. Для данного примера будем, следовательно, иметь

$$g(t) = 1; \quad G(s) = \frac{1}{s};$$

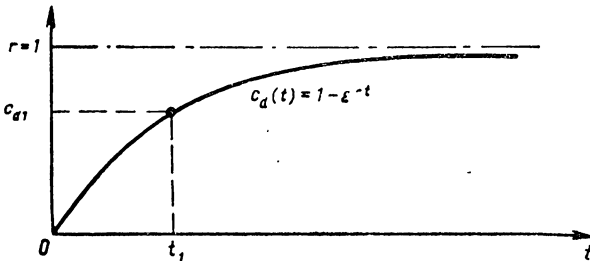
так что

$$G_0 = 1; \quad G_1 = G_2 = G_3 = \dots = 0. \quad (11.49)$$



Фиг. 11. 10. Управляемая система с цифровым вычислительным устройством.

Вынуждающая функция (т. е. управляющее воздействие), необходимая для сведения коэффициентов ошибки к нулю, определяется из уравнений (11.48) и (11.49). Для нахождения выходной величины,



Фиг. 11. 11. Кривая выходной характеристики модели при ступенчатой входной функции.

соответствующей этой вынуждающей функции, требуется только определить влияние каждого компонента вынуждающей функции и затем суммировать. Таким образом, влияние на выходную величину в течение первого интервала управления, обусловленного импульсным компонентом, будет определяться из следующего:

$$\Delta M_{-1} = \frac{E_0}{G_0} = E_0 = c_{d1} \text{ — величина импульса;}$$

$$C(s)_{\text{импульс}} = G(s) (\Delta M_{-1}) = \frac{E_0}{s} = \frac{c_{d1}}{s}.$$

Поэтому

$$c(t)_{\text{импульс}} = \mathcal{Q}^{-1}C(s)_{\text{импульс}} = c_{d_1}. \quad (11.50)$$

Значение ступенчатого компонента

$$\Delta M_0 = \frac{E_1}{G_0} = E_1 = e^{-t_1} \text{ — значение ступенчатой функции;}$$

$$C(s)_{\text{ступ}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\Delta M_0}{s} = \frac{\Delta M_0}{s^2}.$$

Поэтому

$$c(t)_{\text{ступ}} = \mathcal{Q}^{-1}C(s)_{\text{ступ}} = E_1(t). \quad (11.51)$$

Значение кусочно-линейного компонента

$$\Delta M_1 = \frac{\dot{E}_2}{G_0} = E_2 = -e^{-t_1} \text{ — значение кусочно-линейной функции}$$

$$C(s)_{\text{кус.-лин}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\Delta M_1}{s^2} = \frac{E_2}{s^3}.$$

Поэтому

$$c(t)_{\text{кус.-лин}} = \mathcal{Q}^{-1}C(s)_{\text{кус.-лин}} = \frac{1}{2} E_2 t^2. \quad (11.52)$$

Следовательно, общие выражения для выходной величины и ее производных в интервале $0 < t < T$ будут $c(t) = c(t)_{\text{импульс}} + c(t)_{\text{ступ}} + c(t)_{\text{кус.-лин}}$.

$$c(t) = c_{d_1} + E_1 t + \frac{1}{2} E_2 t^2; \quad (11.53)$$

$$\dot{c}(t) = E_1 + E_2 t; \quad (11.54)$$

$$\ddot{c}(t) = E_2. \quad (11.55)$$

Метод суперпозиции сохраняет свою справедливость, потому что было сделано предположение о том, что изменения параметров управляемой системы всегда происходят с такой скоростью, которая очень мала сравнительно с постоянными времени системы управления.

В начале интервала управления, т. е. при $t = 0^+$, регулируемая величина и ее первые две производные имеют значения:

$$c(0^+) = c_{d_1} = E_0; \quad \dot{c}(0^+) = E_1; \quad \ddot{c}(0^+) = E_2. \quad (11.56)$$

Конечно, это и должно быть так, потому что значение управляющего воздействия было вычислено с целью обеспечить эти условия. Иными словами, соответствие между действительной и требуемой характеристиками при данном типе системы управления устанавливается в начале интервала управления. Однако, как следует из уравнений (11.53) и (11.54), это соответствие не существует по мере увеличения времени в пределах интервала управления. Следова-

тельно, от момента времени t_1 до момента $t_1 + T$ требуемая характеристика описывается $c_d = 1 - e^{-t}$, а выходная величина определяется уравнением (11.53). Аналогично первая производная $c_d(t)$ равна e^{-t} , в то время как первая производная регулируемой величины дается уравнением (11.54). Очевидно, что с уменьшением интервала управления между действительной и требуемой характеристиками будет более точное соответствие. С целью исследовать влияние изменяющейся динамики системы на вычисление управляющего воздействия рассмотрим коэффициенты ошибок в последующем интервале управления, обозначив их через E_0, E_1, E_2 . Далее предположим, что динамика системы изменяется таким образом, что передаточная функция управляемой системы изменяется от

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

до

$$G^*(s) = \frac{K + \Delta K}{s}.$$

При этом условии величину импульса можно найти, используя новое значение коэффициента G , т. е. G_0^* . Тогда

$$\Delta M_{-1}^* = \frac{E_0^*}{G_0^*} = \frac{E_0^*}{K + \Delta K}$$

и

$$G(s)_{\text{импульс}} = \frac{K + \Delta K}{s} \cdot \frac{E_0^*}{K + \Delta K}.$$

Отсюда,

$$c(t)_{\text{импульс}} = E_0^*.$$

Это показывает, что импульсная функция имеет еще такое влияние, что в состоянии отрегулировать выходную величину до требуемого значения, несмотря на изменение динамики системы. Аналогичный аргумент сохраняется для других компонентов вынуждающей функции.

Какие ограничения имеет самонастраивающаяся система управления описанного выше типа? Несколько серьезных ограничений обладает этот тип системы, но одно возможно является наиболее существенным. Эта система ведет себя описанным выше образом при условии, что передаточная функция управляемой системы имеет избыточное число полюсов относительно нулей, равное единице и не больше, когда нет компонента вынуждающей функции более сложного характера, чем импульсная функция.

Следовательно, когда число полюсов передаточной функции превышает число нулей на 2, то для создания соответствия между выходной величиной и требуемым значением необходимо будет ввести интегрирующее звено. В подобном случае компонент импульсной

функции окажет влияние только на создание соответствия между членами первых производных, компонент ступенчатой функции — между членами вторых производных и т. д. Конечно, не исключается возможность введения нуля в передаточную функцию управляемой системы для устранения этого затруднения. Возможно, что наилучшим решением будет такой расчет регулятора, который бы создавал соответствие между выходной величиной и требуемым значением в конце интервала управления, а не в его начале.

Другой существенный фактор, влияющий на эффективность системы управления данного типа, связан с необходимостью получать надежные результаты измерения регулируемой величины и ее производных непосредственно до и непосредственно после подачи корректирующего сигнала, являющегося управляющим воздействием. Кроме того, с увеличением числа используемых членов разложения в ряд функции $e(t)$ возрастают трудности расчета не только при решении задачи измерения высших производных выходной величины, но также вследствие удлинения времени, необходимого для обработки этой информации в цифровом вычислительном устройстве. Отсюда проистекает увеличение интервала времени, что означает увеличение ошибки.

11. 4. ДРУГИЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В связи с ограничениями для системы, описанной в разделе 11. 3, может оказаться желательным определить схему управления, которая бы устраняла необходимость применения импульсного компонента вынуждающей функции, а также схему, которая бы уменьшила требование, обусловленное точностью соответствия между действительной и требуемой характеристиками в начале интервала управления. Как правило, желательно устранить необходимость в импульсе в силу практических трудностей его генерирования. Хаддад и Мишкин предложили один способ устранения импульса, который ограничивает изменение настраиваемого параметра только ступенчатыми изменениями, как изображено на фиг. 11. 12. По понятным причинам подобную функцию называют многоступенчатой. Второе ограничение устраняется путем генерирования величины вынуждающей функции таким образом, чтобы требуемое значение выходной величины было получено в конце интервала управления, а не в его начале.

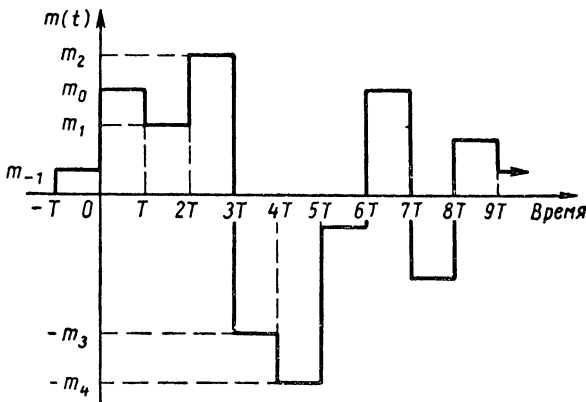
Теория этого метода в основном та же самая; однако необходимы некоторые изменения. Вследствие многоступенчатой формы вынуждающей функции целесообразно характеризовать динамику управляемой системы через ее реакцию на единичную входную функцию, а не через ее импульсную характеристику. Тогда регулируемая выходная величина и настраиваемый параметр могут быть еще связаны интегралом свертки, но в несколько измененной форме, а именно

$$c(t) = \int_{-\infty}^t m'(\tau) u(t - \tau) d\tau, \quad (11. 57)$$

где $m'(t)$ — производная настраиваемого параметра и $u(t)$ — реакция управляемой системы на ступенчатую функцию. Для устранения влияния первоначально накопленной энергии в уравнении (11.57) непосредственно до подачи корректирующего сигнала в начале нового интервала управления, можно последнее уравнение написать в виде

$$c(t) = \int_{-\infty}^0 m'(\tau) u(t - \tau) d\tau + \int_0^t m'(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (11.58)$$

В действительности можно показать, что влияние накопленной энергии к моменту времени, когда новый корректирующий сигнал



Фиг. 11. 12. Прямоугольно-ступенчатое изменение регулируемой переменной величины.

должен быть подан в управляемую систему, определяется первым членом уравнения (11.58), который, в свою очередь, может быть разложен в ряд Маклорена следующим образом:

$$c_1(t) = \int_{-\infty}^{0^-} m'(\tau) u(t - \tau) d\tau = c(0^-) + \dot{c}(0^-) t + \ddot{c}(0^-) \frac{t^2}{2!} + \dots \quad (11.59)$$

Вторая часть уравнения (11.58) представляет изменение функции $c(t)$, обусловленное изменением вынуждающей функции в начале интервала управления. Следовательно,

$$c_2(t) = \int_0^t m'(\tau) u(t - \tau) d\tau. \quad (11.60)$$

Ввиду того, что вынуждающая функция ограничена изменениями, графически показанными на фиг. 11.12, общее выражение может быть написано в следующем виде:

$$m(t) = m_0 u(t) + m_1 u(t - T) + m_2 u(t - 2T) + \dots$$

После введения этого выражения в уравнение (11. 60) и вычисления результата при $t = T^-$, т. е, в конце интервала управления, получаем

$$c_2(T^-) = (m_0 - m_{-1}) u(T^-)_1. \quad (11. 62)$$

Здесь $m_0 - m_{-1}$ представляет изменение настраиваемого параметра в течение «первого» интервала управления после предыдущего интервала (см. фиг. 11. 12). Причина использования нижнего предела 0^- в уравнении (11. 60) должна быть теперь очевидна. Величина $u(T^-)_1$ означает реакцию управляемой системы на единичную функцию в конце первого интервала управления. Вычисление уравнения (11. 59) также при значении $t = T^-$ и введение полученного результата вместе с уравнением (11. 61) в уравнение (11. 58) дают

$$c(T^-) = \left[c(0^-) + T\dot{c}(0^-) + \frac{T^2}{2}\ddot{c}(0^-) + \dots \right] + (m_0 - m_{-1})u(T^-)_1;$$

$$c(T^-) = \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^{(n)}(0^-)}{n!} + (m_0 - m_{-1}) u(T^-)_1. \quad (11.62)$$

Отсюда реакция на единичную функцию может быть выражена

$$u(T^-)_1 = \frac{c(T^-) - \sum_{n=p}^m \frac{T^n c^{(n)}(0^-)}{n!}}{m_0 - m_{-1}}. \quad (11. 63)$$

Как правило, в конце k -того интервала управления

$$u(T^-)_k = \frac{c(kT^-) - \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^{(n)}[(k-1)T^-]}{n!}}{m_{k-1} - m_{k-2}}. \quad (11. 64)$$

В результате применения этого уравнения можно рассчитать самонастраивающиеся свойства данной системы. Уравнение (11. 64) устанавливает, что реакцию управляемой системы на единичную функцию можно вычислить путем измерения действительного значения регулируемой величины непосредственно перед концом k -того интервала управления, вычитания этого значения регулируемой величины и ее производных, обусловленных накоплением энергии в конце предыдущего интервала управления и, наконец, путем деления на величину изменения вынуждающей функции, возникающего в начале данного интервала управления. Эти вычисления могут быть осуществлены при помощи дискретных или непрерывных методов. Однако, существенный момент состоит в том, что в случае, когда эта вычисленная реакция на единичную функцию отличается от некоторого требуемого значения, тогда сигнал ошибки может быть создан

для настройки этих параметров системы, чтобы создать соответствие между двумя характеристиками. Следовательно, динамическая настраиваемость будет осуществлена.

При анализе до сих пор предполагалось, что значения вынуждающей функции были известны. В действительности, конечно, они должны быть генерированы. Поэтому необходимо направить теперь внимание на способ осуществления подобной вынуждающей функции.

Как раньше упоминалось, принцип управления состоит в том, чтобы входную величину сделать равной требуемому значению в конце интервала управления. Математически это выражается уравнением (11. 65)

$$c(kT^-) = c_d [(k - 1) T^-]. \quad (11. 65)$$

Для удовлетворения этого условия достаточно использовать сигнал команды, характеризуемый графиком на фиг. 11. 12. Рассмотрим случай, когда требуется вычислить значение, обозначенное m_1 на упомянутой фигуре. Предположим, что m_0 уже известно. Для определения величины m_1 необходимо написать выражение для выходной величины в конце второго интервала управления, т. е. при $t = 2T^-$. Введение $k = 2$ в уравнение (11. 64) дает

$$c(2T^-) = \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^n(T^-)}{n!} + (m_1 - m_0) u(T^-)_2. \quad (11. 66)$$

В соответствии с уравнением (11. 65) получаем $c(2T^-) = c_d(T^-)$. Следовательно, уравнение (11. 66) приобретает вид

$$c_d(T^-) = \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^n(T^-)}{n!} + (m_1 - m_0) u(T^-)_2. \quad (11. 67)$$

Как видно, это уравнение содержит два неизвестных, т. е. m_1 и $u(T^-)_2$. Однако во всех практических случаях остается в действительности только одна неизвестная величина, а именно m_1 . Хотя $u(T^-)_2$ не может быть известна при $t = T^-$ вполне целесообразно предположить, что

$$u(T^-)_2 = u(T^-)_1. \quad (11. 68)$$

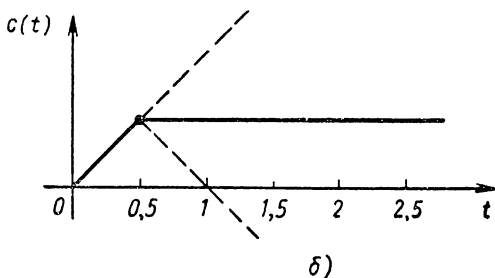
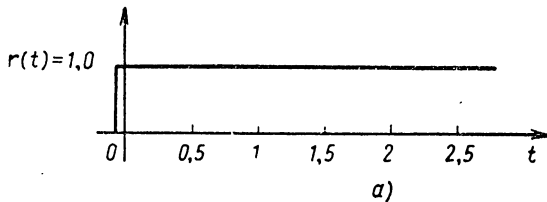
Справедливость этого предположения основана на том факте, что интервал управления T очень мал сравнительно с временем, необходимым для изменения параметров управляемой системы. Поэтому значение корректирующей вынуждающей функции, создаваемое при $t = 2T$, будет

$$m_1 = \frac{c_d(T^-) - \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^n(T^-)}{n!}}{u(T^-)_1} + m_0. \quad (11. 69)$$

Обобщенный вариант уравнения (11. 69) имеет следующую форму:

$$m_k = \frac{c_d (kT^-) - \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^n (kT^-)}{n!}}{c (kT^-) - \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^n [(k-1) T^-]}{n!}} (m_{k-1} - m_{k-2}) + m_{k-1}. \quad (11. 70)$$

Теперь совершенно ясно, что в результате применения уравнений (11. 64) и (11. 70) выходная величина может быть сделана равной



Фиг. 11. 13. Кривые требуемой по действительной реакции, полученные по методу регулирования, описываемого уравнением (11. 69):

— входной сигнал управления; б — регулируемая величина в интервале управления $T = 0,5$ сек.

$t = 0^-$ для того, чтобы уравнение (11. 70) имело значение, отличающееся от нуля и тем самым корректирующее воздействие будет генерироваться, чтобы достигнуть требуемого результата. Кроме того, для удобства будем считать инвариантным параметр системы. Из этого предположения следует, что реакция системы на единичную функцию остается также инвариантной и может быть просто описана выражением

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = t. \quad (11. 71)$$

Наконец, реакция на единичную функцию в конце первого интервала управления при $T = \frac{1}{2}$ сек.

$$u(T^-) = \frac{1}{2}.$$

требуемому значению в концах интервалов управления таким способом, который учитывает влияние изменяющихся параметров системы.

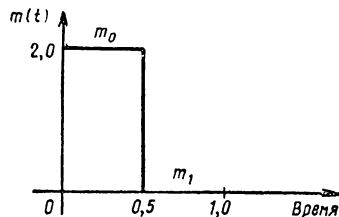
Для иллюстрации понятий, описанных выше, рассмотрим простой пример. Предположим, что управляемая система представляет чистый интегратор, так что $G(s) = 1/s$. Далее предположим, что требуемая характеристика идентична команде, которая представляет единичную функцию, как показано на фиг. 11. 13. Сигнал команды подан согласно предположению в момент времени

Уравнение (11.70) может быть упрощено, если нет изменений параметров управляемой системы,

$$m_k = \frac{c_d(kT^-) - \sum_{n=0}^m \frac{T^n c^n(kT^-)}{n!}}{u(T^-)} + m_{k-1}. \quad (11.72)$$

Из уравнения (11.72) определяется при $k = 0$ значение ступенчатой вынуждающей функции $G(s) = \frac{1}{s}$, вводимой в управляемую систему в начале первого интервала управления. Таким образом,

$$m_0 = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} + 0 = 2. \quad (11.73)$$



Когда в управляемую систему вводится это значение ступенчатой вынуждающей функции, тогда кусочно-линейная выходная функция, генерируемая системой, будет определяться

$$c(t) = 2tu(t). \quad (11.74)$$

Фиг. 11.14. Изменение вынуждающей функции с целью образования выходного сигнала согласно фиг. 11.13, б.

Заметим, что в конце интервала управления, т. е. при $t = T = 1/2$ сек выходная величина точно равна требуемому значению. Изменение во времени функции в течение первого интервала управления показано на фиг. 11.13. Для исследования поведения системы в течение второго интервала управления необходимо вычислить новое значение вынуждающей функции при начальных условиях в конце первого интервала управления. Следовательно, при $t = T^-$

$$c_d(T^-) = 1,0; c(T^-) = 1,0; \dot{c}(T^-) = 2,0.$$

Отсюда

$$m_1 = \frac{c_d(T^-) - [c(T^-) + T\dot{c}(T^-)]}{u(T^-)} = \frac{1 - \left[1 + \frac{1}{2}(2)\right]}{\frac{1}{2}} + 2 = -2 + 2 = 0. \quad (11.75)$$

На фиг. 11.14 показано изменение функции $m(t)$ в течение первых двух интервалов управления. Совершенно очевидно, что в начале второго интервала управления требуется отрицательное значение величины m_0 для получения необходимого значения m_1 . Тогда ясно, что выходная величина, генерируемая при этом отрицательном значении ступенчатой вынуждающей функции $-2(t-T)u(t-T)$, так что полное выражение для регулируемой величины в течение первых двух интервалов времени

$$c(t) = 2tu(t) - 2(t-T)u(t-T). \quad (11.76)$$

Дальнейшие исследования показывают, что это выражение справедливо для всех последующих интервалов управления.

Какими ограничениями обладает система управления этого типа? Применение изложенного выше способа к более сложным системам (например, $G(s) = \frac{1}{s^2}$), показывает, что, несмотря на обеспечение соответствия выходной величины с требуемым значением в конце интервалов управления, т. е. при $t = T, 2T, 3T$ и др., возможно, что реакция будет отличаться в течение этих интервалов управления. Улучшение системы при подобных условиях может быть обычно достигнуто в результате применения измененного принципа управления. Например, дополнительное ограничение может быть сопряжено с тем, что вынуждающая функция будет генерироваться для сравнения крутизны выходной величины с крутизной требуемой функции, а также сравнения действительных и требуемых значений выходной функции. Математическое выражение этих условий будет

$$c(kT^-) = c_d[(k-1)T^-]; \dot{c}(kT^-) = \dot{c}_d[(k-1)T^-]. \quad (11.77)$$

Установлено, что для удовлетворения обоих условий требуется, чтобы вынуждающая функция содержала как кусочно-линейный компонент, так и ступенчатый. Конечно, это означает повышение требований к регулятору. Кроме того, в некоторых условиях может оказаться необходимым значительное расширение условий по уравнению (11.77) с целью обеспечить устойчивость системы.

Надежность результатов измерения величин уравнений (11.64) и (11.70) необходима как в случае расчета системы на основании этих уравнений так и для системы, изображенной на фиг. 11.10. Это утверждение справедливо также относительно выбора продолжительности интервала управления T . Хотя возможны случаи, когда неустойчивость возникает вследствие применения упрощенного принципа управления, основное назначение рассматриваемого метода изучения данного вопроса состоит в описании понятий, так как они сами по себе представляют значительный интерес.

11.5. НЕЛИНЕЙНЫЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ

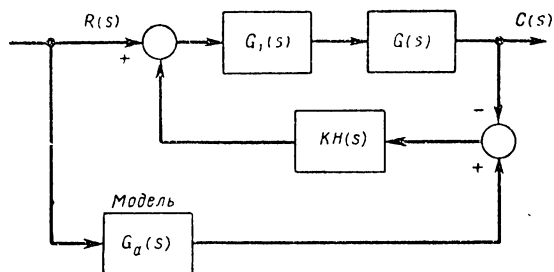
В настоящем разделе внимание обращается на другой метод создания самонастраивающихся систем, основанный на использовании больших коэффициентов усиления цепи и введения нелинейностей. Рассмотрим, например, систему управления, схема которой показана на фиг. 11.15. Эквивалентная структурная схема изображена на фиг. 11.16. Передаточная функция замкнутой системы будет

$$\frac{C}{R}(s) = \left[\frac{1}{K} + HG_d(s) \right] \frac{KG_1G(s)}{1 + KKG_1G(s)}. \quad (11.78)$$

При очень большом коэффициенте усиления цепи, т. е. $K \gg 1$, последнее выражение приобретает вид

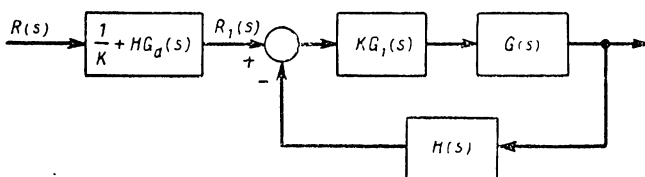
$$\frac{C}{R}(s) = G_d(s), \quad (11.79)$$

так что реакция управляемой системы становится одинаковой с реакцией модели. Интересно отметить, что этот результат получается, несмотря на изменения, которые могут возникнуть в управляемой



Фиг. 11. 15. Система управления с большим коэффициентом усиления в цепи обратной связи.

системе $G(s)$ при условии, что $KHC_1 G(s) \gg 1$. Таким образом, регулируемая величина оказывается нечувствительной к изменениям параметра управляемой системы. Конечно, это свойство присуще обратной связи. Когда система управления обеспечивает подобного рода нечувствительность к изменениям параметра системы, то, по-видимому, более оправдано назвать ее инвариантной, чем самонастраивающейся.

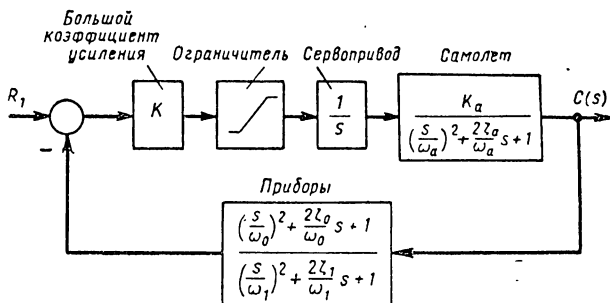


Фиг. 11. 16. Эквивалентная структурная схема.

вающейся. Самонастраивающиеся системы обычно выполняют операции измерения, вычисления и настройки.

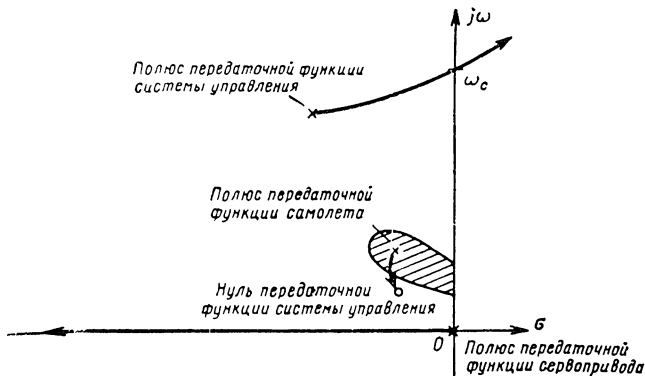
Необходимость очень больших коэффициентов усиления цепи исключает применение линейной системы вследствие неустойчивости, которая почти всегда при этом возникает. Нелинейный элемент требуется в виде ограничителя или двухпозиционного переключателя, причем ограничитель должен иметь постоянный конечный коэффициент усиления заданного значения до наступления насыщения. Включение нелинейного элемента в цепь управления позволяет получать переменное усиление в системе, которое необходимо для того, чтобы сохранить устойчивость и высокие коэффициенты усиления

цепи. Однако нелинейный элемент создает также высокочастотные колебания, амплитуда которых определяется частотной характеристикой линейных элементов, следующих после нелинейного устройства. Принятие соответствующих мер предосторожности позволяет свести эту амплитуду до приемлемых небольших значений.



Фиг. 11. 17. Структурная схема нелинейной системы управления с большим коэффициентом усиления.

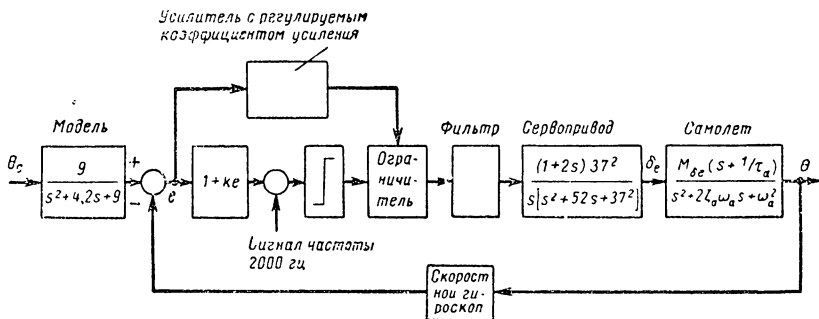
На фиг. 11. 17 показана структурная схема системы управления самолетом. В этом случае нелинейным элементом является ограничитель. Практически его можно рассматривать как ограничитель скорости сервопривода, в данном случае идеального интегратора. Дина-



Фиг. 11. 18. Кривая годографа линейной части системы предыдущей фигуры.

микой сервопривода пренебрегают. Передаточная функция цепи обратной связи выбрана таким образом, чтобы создать желательную реакцию, характеризуемую годографом системы, без учета нелинейности. На фиг. 11. 18 предполагается, что полюса передаточной функции самолета перемещаются где-то в пределах заштрихованной площади в зависимости от условий полета. С целью создания характеристики, нечувствительной к этим изменениям, желательно, конечно, применить инвариантную систему управления. Очевидно, что применение

большого коэффициента усиления сопряжено с тем, что корни характеристического уравнения практически будут совпадать с нулем передаточной функции системы управления, так что положение соответствующего полюса передаточной функции самолета становится почти неприемлемым. Однако изучение годографа, начинающегося в полюсе передаточной функции системы управления позволяет обнаружить, что подобный большой коэффициент усиления связан с корнем, расположенным в правой полуплоскости, что приводит к неустойчивости системы. Наличие нелинейного элемента предотвращает переход к неустойчивости системы в результате ограничения влияния высокого усиления на высокочастотные низкоамплитудные незатухающие колебания. К этому выводу можно прийти, если рассматри-



Фиг. 11. 19. Самонастраивающаяся система управления с нелинейной характеристикой.

вать ограничитель как устройство с переменным коэффициентом усиления, зависящим от входного сигнала. Следовательно, эффективное усиление цепи при малых ошибках будет большим, а при больших ошибках усиление будет слабым. Путем тщательного проектирования возможно создать систему, которая будет работать с таким усилением, что преобладающие корни замкнутой системы будут расположены очень близко с нулем передаточной функции системы управления, а колебания, обусловленные годографом, начинающимся в полюсе передаточной функции системы управления, будут иметь приемлемую малую амплитуду.

На фиг. 11. 19 показана структурная схема инвариантной системы управления, которая была с успехом проверена при летных испытаниях на самолете типа F-84 С. Этот окончательный вариант системы управления был получен после неоднократных исследований при помощи электронных моделирующих устройств. Например, эти исследования показали, что система управления может быть сделана инвариантной в широком диапазоне условий режима полета путем введения ограничителя с переменным коэффициентом усиления, когда сигнал рассогласования превышает определенный уровень. Применение сигнала с частотой 2000 гц для реле преследует цель линеаризации выходной функции при малых входных сигналах.

Конечно, это реле электронного типа, так как был применен сигнал высокой частоты.

Самонастраивающиеся системы управления, рассчитанные на принципе высокого линейного усиления в сочетании с нелинейным элементом, обладают тремя важными свойствами: во-первых, они обладают очень высоким качеством переходного процесса, во-вторых состоят из простых элементов и, в-третьих, обладают надежностью, что является особенно важным свойством. Но, с другой стороны, им присущи недостатки, связанные с необходимостью допускать незатухающие колебания во время работы. Кроме незначительных искажений амплитуды выходной величины, вводимое ограничение вызывает повышенной износ некоторых частей оборудования.

ЗАДАЧИ

11. 1 Система управления с обратной связью спроектирована в соответствии со схемой, показанной на фиг. 11. 20. Когда входной сигнал имеет отрицательное значение, переключатель переводится в положение *a*; при положительном сигнале он остается в положении *b*.

а) Описать поведение этой системы, когда сигнал команды изменяется так, как показано на фиг. 11. 20, *б*. Предполагается, что все параметры системы остаются инвариантными.

б) Определить приемлемый критерий качества, примененный для этой системы.

в) Предполагается, что эта система следует за входным сигналом в установившемся режиме. Управляемая система подвергается изменению по коэффициенту скорости K_v . Описать поведение измененной системы. Пояснить, является ли эта система самонастраивающейся.

11. 2. Показать, что уравнение (11. 12) справедливо.

11. 3 Проверить справедливость уравнения (11. 59).

11. 4. Применить принципы самонастраивающегося управления, изложенные в разделе 11. 3, к управляемой системе с передаточной функцией $G(s) = \frac{1}{s^2}$. Предположить, что в начале первого интер-

вала управления измерены ошибки регулируемой величины и ее первых двух производных, равные соответственно E_0 , E_1 и E_2 . Составить уравнение, которое описывает функцию управляющего воздействия, необходимую для уменьшения этих ошибок до нуля непосредственно после начала интервала управления. Найти также полное выражение для выходной величины, ее первой и второй производных.

Каким серьезным практическим недостатком обладает конструкция регулятора, необходимого для этой системы? Что можно рекомендовать для некоторого упрощения конструкции регулятора?

11. 5. Повторить решение предыдущей задачи, когда управляемая система имеет передаточную функцию $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$.

11. 6. Показать справедливость уравнения (11. 70).

11. 7. Применить принципы самонастройки, описанные в разделе 11. 4, к управляемой системе с передаточной функцией $G(s) = \frac{1}{s^2}$. Применить уравнение (11. 65) в качестве критерия, на основании которого выводится вынуждающая функция. Предполагается, что сигнал команды представляет единичную входную функцию, а изменение выходной величины следует построить в функции времени. Будет ли эта система реагировать устойчивым образом на ступенчатую команду?

11. 8. Повторить решение задачи 11. 7, используя уравнение (11. 77) в качестве критерия для вычисления вынуждающей функции, применяемой для управляемой системы.

11. 9. Исходя из обозначений на структурной схеме, показать, как схему на фиг. 11. 16 можно вывести из схемы на фиг. 11. 15.

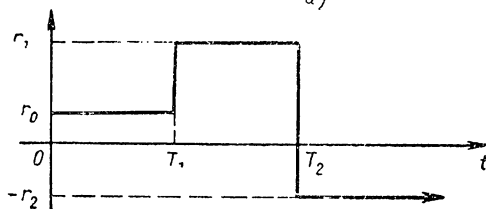
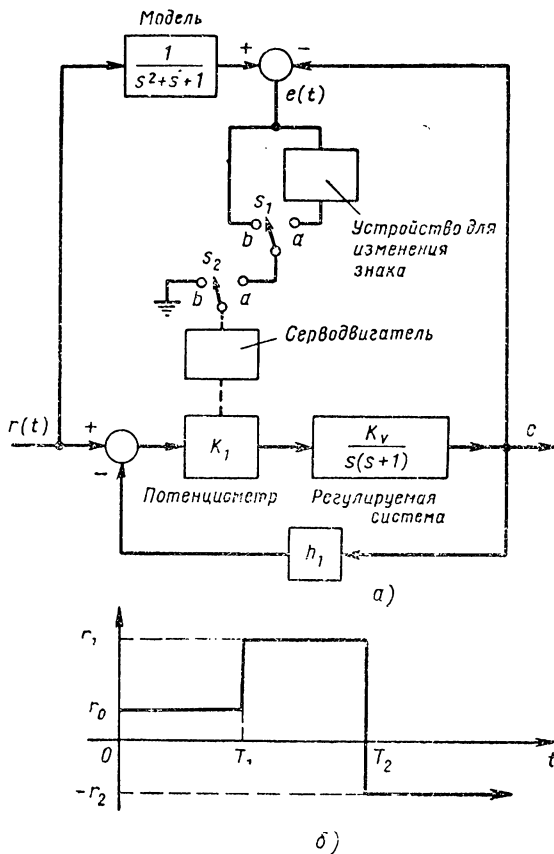
11. 10. Система управления самолетом состоит из сервопривода, автопилота и самолета. Передаточные функции самолета и автопилота имеют соответственно следующие выражения:

$$G_a = \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}{\left[\left(\frac{s}{\omega_a}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta_a}{\omega_a}\right)s + 1\right] \left[\frac{s^2}{\omega_b^2} + \left(\frac{2\zeta_b}{\omega_b}\right)s + 1\right]}$$

и передаточная функция автопилота

$$G_1 = K(1 + s\tau_r).$$

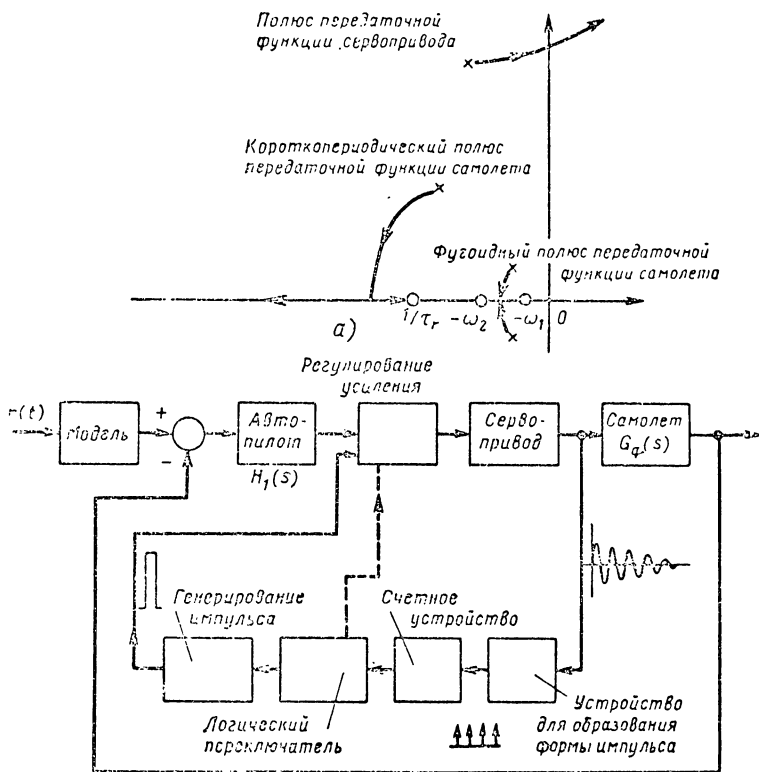
Если пренебречь динамикой серводвигателя, то не возникает основной проблемы устойчивости, кроме построения годографа для передаточной функции разомкнутой системы. Однако, когда вводится



Фиг. 11. 20. Структурная схема системы с обратной связью.

действительная динамика серводвигателя, то проблема определения устойчивости усложняется. Предположим, что передаточная функция серводвигателя выражается.

$$G_s = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_s^2} + \left(\frac{2\zeta_r}{\omega_s}\right)s + 1},$$



Фиг. 11. 21. Структурная схема системы управления самолетом:
а — кривые годографов; б — структурная схема.

а соответствующий годограф показан на фиг. 11. 21, а. Кривая показывает, что неустойчивость может возникнуть при больших коэффициентах усиления.

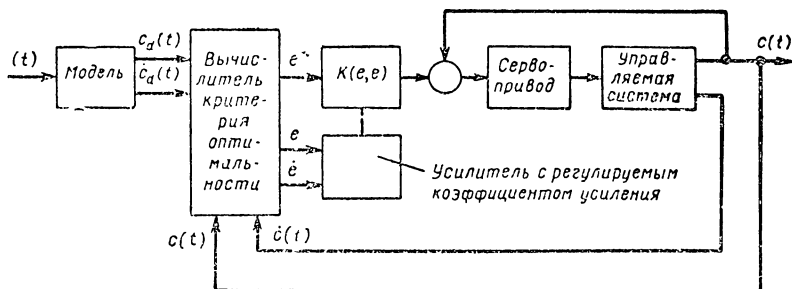
Для устранения этой трудности предложена система управления со схемой, показанной на фиг. 11. 21, б.

а) Определить принцип, по которому работает эта система управления. Указать и ясно подчеркнуть назначение каждого звена.

б) Объяснить, может ли эта система управления быть использована в условиях, когда недостаточна или совсем не известна информация об управляемой системе (например, в случае самолета).

11. 11. Система управления с обратной связью имеет блок-схему, показанную на фиг. 11. 22. Известно, что $e = c_d(t) - c(t)$;

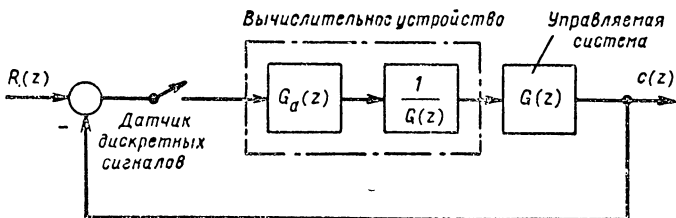
$$\dot{e} = \dot{c}_d(t) - \dot{c}(t); e^* = k_1 e + k_2 \dot{e} + k_3 \frac{e}{e^2} + k_4 \frac{\dot{e}}{e^2}.$$



Фиг. 11. 22. Структурная схема системы управления с обратной связью.

Коэффициент переменного усиления был настроен в соответствии со значениями e и \dot{e} и имеет определенные нижний и верхний пределы.
а) описать работу этой системы.

11. 12. На фиг. 11. 23 показана схема самонастраивающейся системы управления. Величина $G_d(z)$ означает z -преобразование



Фиг. 11. 23. Структурная схема самонастраивающейся системы.

передаточной функции действительной управляемой системы, в то время как $G(z)$ представляет z -преобразование передаточной функции действительной управляемой системы.

а) Обсудить относительные качества и недостатки подобной системы управления.

б) Выяснить влияние корня, расположенного в правой полуплоскости для $G(z)$, оказываемое на конструкцию вычислителя и устойчивость системы.

ОТВЕТЫ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ

1. 1. $\theta(t) = (5t - 1 + e^{-5t}) u(t)$; $\omega(t) = 5(1 - e^{-5t}) u(t)$.

1. 2. а) $\omega_n = 10$ рад/сек; $\zeta = 0,8$; $\omega_d =$ рад/сек;
б) 1; в) 4.

1. 3. б) $\omega_e(t) = \omega_i \left(\frac{1}{1+K} + \frac{K}{1+K} e^{-\frac{1+K}{I/F} t} \right) u(t)$, где $K = \frac{n_2 K_A K_G K_M}{F}$.

в) теоретически нет

1. 5. а) $\zeta = 0,6$; б) $0,179$ рад; в) нет; г) $1,880 \times 10^4$.

1. 6. а) $0,14$ рад; б) $\zeta = 0,7$;

в) $1,4 \times 10^{-5} \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;

г) 16×10^{-4} ;

д) при демпфировании, пропорциональном скорости рассогласования, $t_s = 0,286$ сек; при демпфировании, пропорциональном выходной скорости $t_s = 0,143$ сек;

е) только в случае демпфирования, пропорционального скорости рассогласования.

1. 7. $0,77$ сек.

1. 8. а) $s^2 + \frac{F + Q_\varepsilon + Q_t}{J} s + \frac{K}{J}$, где $Q_\varepsilon = n_2 A K_s K_M$, $Q_t = n_t K_t K_A K_M$

и $K = n_2 K_A K_s K_M$; б) $0,694$;

в) $0,52$ рад; г) изменение коэффициента Q_t путем варьирования p или K_t или n_t .

1. 13. а, б) $\omega_n = 13,32\pi$ при $\zeta = 0,8$, $\omega_n = 10\pi$ при $\zeta = 0,6$;

в) $F = 0,377 \times \Pi_1^*$ кгм/рад/сек;

г) $0,00562$ и $0,01 \times \Pi_2^*$ кг·см².

1. 14. а) $\frac{n_1^2 J d^2 \theta_M}{dt^2} + (n_1^2 F + D + n_1 K_p AB) \frac{d\theta_M}{dt} + n_1 K_p K_B \theta_M =$

$= K_p K_B \theta_1 + K_p AB \frac{d\theta_1}{dt}$; б) $K = 1610$, $A = 1,39$.

1. 15. а) $87,2$ в/с; б) $\omega_n = 100$ рад/сек; $\omega_d = 96,7$ рад/сек; в) $0,01$ рад; г) ноль, предполагая идеальные звенья.

1. 19. а) $0,13$ рад/сек; б) $\zeta = 0,6$; в) 265×10^{-8} ; г) $30,4$ рад/сек.

1. 20. а) 645×10^{-4} ; б) 964×10^{-6} ; в) применение тахометрической связи для демпфирования приводит к уменьшению времени регулирования вследствие увеличения собственной частоты.

1. 22. а) 612 об/мин; б) $-2,36$ об/мин; в) $0,024$ в.

1. 23. 10 рад/сек.

* $\Pi_1 = 0,1382$; $\Pi_2 = 1,3569 \cdot 10^4$.

2. 1. Асимптоты логарифмической амплитудно-частотной характеристики состоят из следующих участков:

а) прямая с начальным наклоном — 12 дБ/октава, вслед за ней прямая с наклоном — 6 дБ/октава, точка сопряжения при $u = 1$ и 20 дБ;

б) прямая с начальным наклоном 0 дБ/октава, после нее наклон — 6 дБ/октава, точка сопряжения при $u = \frac{3}{2}$ и —9,54 дБ.

$$2. 4. \bar{T}_4 = \frac{18,1(1 + ju)}{(ju)(1 + j1,025u)}.$$

$$3. 3. \frac{E_0}{E_i} = \frac{\tau_1 \tau_2 s^2}{1 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12})s + \tau_1 \tau_2 s^2}; \quad \tau_1 = R_1 C_1; \quad \tau_2 = R_2 C_2; \quad \tau_{12} = R_1 R_2.$$

$$3. 4. б) \frac{E_0}{E_i} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}; \quad \alpha = \frac{C_1 + C_2}{C_1}; \quad \tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

$$3. 5. а) \frac{X_0}{X_i} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}; \quad \tau = \frac{1}{k_1 F}; \quad \alpha = 1 + \frac{k_2}{k_1}.$$

$$3. 7. 100 \frac{d_2 \theta_0}{dt^2} + 250 \frac{d\theta_0}{dt} = e_i.$$

$$3. 8. \frac{X}{b}(s) = \frac{K \left(\frac{a}{b} \right)}{FLs^2 + \left[FR + Lk + K^2 \left(\frac{a^2}{b^2} \right) \right] s + kR}.$$

$$3. 10. \frac{E_2}{E_1}(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 1)^2}.$$

$$3. 11. \frac{X}{P}(s) = \frac{A}{M \left(\frac{a}{b} \right) s^2 + \left(\frac{b}{a} \right) Fs + \left(\frac{a}{b} \right) K_b + \left(\frac{b}{a} \right) K_s}.$$

4. 2. а) Преобразованная структурная схема при отделении H_1 состоит из передаточной функции прямой цепи, определяемой

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + H_2 G_2 + H_3 G_2 G_3},$$

и передаточной функции обратной связи $\frac{H_1}{G_3}$; при отделении H_2 передаточная функция прямой цепи будет

$$\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + H_1 G_1 G_2 + H_3 G_2 G_3}$$

и передаточная функция обратной связи $\frac{H_2}{G_1 G_3}$.

б) Преобразованная структурная схема при отделении H_2 содержит передаточную функцию прямой цепи

$$\frac{G_1 G_2}{1 + H_3 G_1 G_2}$$

и передаточную функцию обратной связи

$$H_2 \left(\frac{1}{G_1} + H_1 \right).$$

$$4.3. б) C(s) = \frac{-G_1 G_2 R_1 + G_2 R_2 + G_1 G_2 H_1 R_3 - G_2 R_4}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1}$$

4.4. а) по действительной кривой предельный сдвиг фазы $\varphi_{pm} = 45,6^\circ$, предельный коэффициент усиления 4,76;

б) при кусочно-линейной входной функции

$$c(t) = t - 0,1 + 0,00259e^{-38,4t} + 0,108e^{-4,6t} \cos(10,1t + 24,6^\circ).$$

$$4.6. \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{\alpha K_A K_G K_T}{R_f (FR + K_1 K_T)} \cdot \frac{1}{(1 + s\tau_f)} \cdot \frac{1}{(1 + s\tau_m)}, \text{ где } \tau_f = \frac{L_f}{R_f} \text{ и}$$

$$\tau_m = \frac{IR}{FR + K_1 K_T}.$$

4.7. Первый сервомеханизм: б) $\xi = 0,5$, $\omega_d = 6,94$; в) $e(t) = 1,154e^{-4t} \cos \times (6,94t + 30^\circ)$;

второй сервомеханизм:

$$б) \xi = 0,5; \omega_d = 9,8; \text{ в) } e(t) = 1,02e^{-5,65t} \cos(9,8t - 13,5^\circ).$$

$$4.8. б) \frac{de_n}{dt} + \frac{250}{\pi} e_0 = \frac{de_i}{dt} + \frac{25000}{\pi}; \text{ в) } e_0 = 100 \text{ в; г) } \tau = \frac{\pi}{250} \text{ сек.}$$

$$4.9. а) \omega_n = 12 \text{ рад/сек; } \xi = 0,333; б) K_v = 18, \varepsilon_{ss} = 0,556 \text{ рад.}$$

5.1. а) неустойчивая; б) неустойчивая.

5.4. а) неустойчивая; б) пересекает при $\omega = 0,35 \text{ рад/сек.}$

5.5. б) всегда неустойчивая; в) $s^3 + s^2 + 1 = 0$; г) всегда неустойчивая, $s^3 + s^2 + 10 = 0$; д) устойчивая, $s^3 + s^2 + 4s + 1 = 0$.

$$5.6. а) HG = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}; б) HG = \frac{K(1 + s\tau_1)}{s^2(1 + s\tau_d)}, \text{ при } \tau_1 > \tau_d.$$

6.1. Только опережающий корректирующий контур.

6.4. Имеется только одна возможность

$$G_c(j\omega) = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{0,22}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{0,035}\right)}.$$

6.5. а) $-0,1^\circ$; б) опережающий корректирующий контур, имеющий

$$G_c(j\omega) = 0,2 \left(\frac{1 + 0,05s}{1 + 0,01s} \right).$$

6.6. Двойной опережающий контур, имеющий $\alpha = 13,8$ и первую частоту точки сопряжения около 2 рад/сек.

6.7. б) -12° (соответственно частоте среза при использовании асимптотической характеристики затухания);

в) одна возможность состоит в функции

$$G(j\omega) = \frac{\left[1 + j\left(\frac{\omega}{0,88}\right)\right]^2}{1 + j\left(\frac{\omega}{0,05}\right) \left[1 + j\left(\frac{\omega}{15,5}\right)\right]}.$$

$$6.8. б) G(s) = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{1,53}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{0,12}\right)};$$

в) приблизительно $1,25 \text{ сек.}$

6. 10. а) 2d, 3d; б) 2d; в) 3d; г) 20%, 0,24 сек.

7. 1. а) $HG = \frac{K(s+2)}{s(s+5)}$.

7. 2. б) $K = 8,25$; в) $c(t) = 0,88 - 0,04e^{-2,4t} + 0,97e^{-6,3t} \cos(10,8t - 210^\circ)$.

7. 3. б) $K = 1,25$; в) $r(t) = 60 \sin(2t + 260,5^\circ)$.

7. 4. а) $HG = \frac{K'(s+6)}{s^2(s+12)(s^2+6s+34)}$;

в) нет, неустойчивая при всех значениях $K' > 0$;

г) $HG = \frac{K'(s+6)(s+2)^2}{s^2(s+12)(s^2+6s+34)}$;

д) устойчивая при всех значениях $K' > 0$.

8. 5. $G_c(s) = \frac{(s+2)(s+0,4)}{(s+4)(s+0,05)}$.

8. 8. Одна возможность соответствует функции $G_c(s) = \left(\frac{1+0,357s}{1+0,074s} \right)^2$.

8. 9. а) Одно решение равняется

$$G_c(s) = \frac{(s+2)(s+6)}{(s+13,4)(s+22,6)}$$

9. 1. Последовательное соединение $R = 1$ ом, $R = \frac{3}{2}$ ом с параллельной емкостью $C = \frac{2}{3}$ ф, $R = \frac{1}{6}$ ом с параллельной емкостью $C = 2$ ф; параллельное соединение $R = \frac{8}{3}$ ом, $R = 4$ ом с последовательной емкостью $C = \frac{1}{8}$ ф, $R = \frac{8}{3}$ ом с последовательной емкостью $C = \frac{3}{32}$ ф; лестничная схема состоит: последовательное сопротивление $R = 1$ ом, параллельная емкость $C = \frac{1}{2}$ ф, последовательное сопротивление $R = \frac{4}{3}$ ом, параллельная емкость $C = \frac{3}{8}$ ф, последовательное сопротивление $R = \frac{1}{3}$ ом, шунтирующее короткое замыкание; следующая лестничная схема: параллельное сопротивление $R = \frac{8}{3}$ ом, последовательная емкость $C = \frac{2}{32}$ ф, параллельное сопротивление $R = \frac{88}{49}$ ом, последовательная емкость $C = \frac{42}{(22)(88)}$ ф, параллельное сопротивление $R = \frac{88}{6}$ ом.

9. 3. б) $z_{11} = z_{22} = z_b + \frac{z_a(z_a + z_c)}{z_c + 2z_a}$; $z_{12} = z_b + \frac{z_a^2}{z_c + 2z_a}$.

9. 4. б) Начинают с зажимов 1—1; контур содержит последовательную емкость $C = \frac{1}{3}$ ф, параллельное сопротивление $R = \frac{5}{4}$ ом; последовательную емкость $C = \frac{1}{25}$ ф, параллельное сопротивление $R = 5$ ом; выход берется на зажимах сопротивления 5 ом; $K = 1$. в) Начинают с зажимов 1—1; схема состоит из последовательной ветви $\frac{8}{15}$ ом с последовательным сопротивлением $\frac{3}{8}$ ом, шунтирован-

ным емкостью $\frac{8}{9} \phi$; выход берется с зажимов параллельной ветви, состоящей из сопротивления $\frac{7}{15}$ ом и последовательной емкости $\frac{9}{21} \phi$, $K = \frac{7}{18}$.

$$9.5. \text{ а) } \frac{V_0}{V_i} = \frac{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}}{s^2 + 3s + 1}; \quad \text{в) } V_0 = \frac{1}{2} - 0,068e^{-0,38t} + 0,468e^{-2,62t}.$$

$$9.6. H = 3,52 \text{ дб.}$$

$$9.7. \frac{E_2}{E_1} = \frac{1 + \tau_2 s}{s^2(\tau_{12}\tau_3 + \tau_{13}\tau_2 + \tau_2\tau_3) + s(\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_2\tau_3) + 1};$$

$$\tau_2 = R_2 C_2; \quad \tau_{12} = R_1 C_2; \quad \tau_3 = R_3 C_3; \quad \tau_{13} = R_1 C_3.$$

$$10.4. e = 50 \frac{t}{T}; \quad t = \frac{10^7}{50} \text{ сек.}$$

$$10.5. \frac{e_0}{e_i} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{s^2 R_2 R_3 + s \left(\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) + 1}.$$

$$10.6. \frac{e_0}{e_i} = -\frac{1}{s^2(\dot{s}R_1 R_3 C_2 G_3 + R_3 C_2 + R_1 C_2 + R_1 C_3)}.$$

11.1. б) Применить $\int e(t) dt$ к положению выходного вала тахометра.

11.4. Вынуждающая функция в области s будет

$$\Delta M(s) = \frac{E_0}{G_1} s + \frac{E_1}{G_1} + \frac{E_2}{G_1} s^{-1} + \dots;$$

соответствующее выражение во временной области

$$\Delta m(t) = \frac{E_0}{G_2} \delta(t) + \frac{E_1}{G_1} \delta(t) + \frac{E_2}{G_1};$$

выходные величины

$$\dot{c}(t) = E_0 + E_1 t + \frac{1}{2} E_2 t^2; \quad \dot{c}(t) = E_1 + E_2 t; \quad \ddot{c}(t) = E_2.$$

$$11.5. c(t) = c(t)_{\text{умнож.}} + c(t)_{\text{стун.}} + c(t)_{\text{кус.-лин.}} = (E_0 + E_0 t) +$$

$$+ \left[(E_1 - E_0) t + \frac{1}{2} (E_1 - E_0) t^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (E_2 - E_1 + E_0) t^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!} (E_2 - E_1 + E_0) t^3 \right];$$

$$\dot{c}(t) = E_1 + (E_1 - E_0) t + (E_2 - E_1 + E_0) t + \frac{1}{2} (E_2 - E_1 + E_0) t^2;$$

$$\ddot{c}(t) = E_2 + (E_2 - E_1 + E_0) t.$$

11.7. В течение первого интервала управления, а именно $0 < t < T$

$$c(t) = 4t^2, \text{ при } T = 0,5 \text{ сек};$$

в течение второго интервала управления $T < t < 2T$

$$c(t) = 4t^2 \text{ и } (t - 12(t - T)^2) \text{ и } (t);$$

в течение третьего интервала управления $2T < t < 3T$

$$c(t) = 4t^2 \text{ и } (t - 12(t - T)^2) \text{ и } (t - T) + 16(t - 2T)^2 \text{ и } (t - 2T).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ahrendt W. R. Servomechanism practice. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, 1954.
2. Anderson G. W., Buland R. N., and Cooper G. R. The Aeronutronic selfoptimizing automatic control system. Aeronutronic systems, Inc., Glendale, Calif., published in Wright air development center. Proceedings of the selfadaptive flight control systems symposium, march, 1959.
3. Aseltine J. A., Mancini, A. R., and Sature C. W. A survey of adaptive control systems. Transactions IRE, PRAC-6, december, 1958.
4. Bode H. W. Network analysis and feedback amplifier design. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1947.
5. Bowers J. L., and Schultheiss, P. M. Introduction to the design of servomechanisms. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952.
6. Braun L., Jr. On adaptive control systems. Doctoral dissertation Polytechnic institute of Brooklyn, New York, 1959.
7. Brenner E., and Javid, M. Analysis of electric circuits. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959.
8. Brown G. S., and Campbell, D. P. Principles of servomechanisms. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1948.
9. Bruns R. A., and Saunders R. M. Analysis of feedback control systems. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
10. Chestnut H., and Mayer, R. «Servomechanisms and Regulating System Design 2. 2d ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
11. Evans W. R. Control-system dynamics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
12. Gibson J. E., and Tuteur F. B. Control system components. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.
13. Guillemin E. A. Synthesis of passive networks. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1957.
14. Haddad R. A., and Mishkin E. On the identification and command problems in computer-controlled adaptive systems. Proceedings Wescon., 1959.
15. James, H. M., Nichols N. B. and Phillips R. S. Theory of servomechanisms Massachusetts Institute of Technology Radiation. Laboratories Series, vol. 25, chap. 2, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1947.
16. Johnson C. L. Analog computer techniques. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
17. Karplus W. J., and Soroka W. W. Analog methods, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1959.
18. Korn G. A., and Korn T. M. Electronic analog computers, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
19. Lauer H. R., Lesnick and Matson L. E. Servomechanism Fundamentals, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.
20. Murphy G. J. Basic Automatic Control Theory. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1957.
21. Newton G. C., Jr., Gould L. A. and Kaiser J. F. Analytic design of linear feedback controls. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957.

22. Savant C. J., Jr. Basic feedback control system design. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1958.
 23. Storer J. E. «Passive network synthesis», Mcgraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
 24. Thaler, G. J. Elements of Servomechanism Theory. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
 25. Thaler G. J., and Brown R. G. Servomechanism Analysis, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.
 26. Truxal J. G. Automatic Feedback Control System Synthesis. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
 27. Truxal, J. F. Control Engineer's Handbook. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.
 28. Whitaker H. P., Yamron J., and Kezer A. Design of a model-reference adaptive control system for aircraft. MIT Instrumentation Laboratories, Report R-164, september, 1958.
 29. Wright Air Development Center.: Proceedings of the Flight Control System Symposium. P. C., Gragory (ed.) WADC Technical Report 59—49, March, 1959.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

<i>Глава 1. Динамика систем. Метод дифференциальных уравнений</i>	7
1. 1. Анализ систем второго порядка. Входная единичная функция положения	8
1. 2. Анализ систем второго порядка. Входная единичная функция скорости	25
1. 3. Требования к характеристикам систем	35
1. 4. Система второго порядка с демпфированием, пропорциональным скорости рассогласования. Входная функция скорости	37
1. 5. Рассмотрение поведения системы с применением демпфирования, пропорционального сигналу обратной связи	48
1. 6. Система второго порядка с интегральной компенсацией ошибки. Входная функция скорости	56
1. 7. Трудности решения дифференциальных уравнений.	58
Задачи	62
<i>Глава 2. Частотный анализ</i>	74
2. 1. Частотные характеристики. Связь с временной областью	75
2. 2. Графические изображения частотных характеристик	87
2. 3. Частотные характеристики основных операционных функций	91
2. 4. Повторное применение основных операционных форм	98
2. 5. Частотная характеристика колебательного звена	103
2. 6. Характеристика с запаздыванием по фазе	107
2. 7. Характеристика с опережением по фазе	110
2. 8. Обобщенная передаточная функция	115
Задачи	120
<i>Глава 3. Передаточные функции звеньев систем управления</i>	123
3. 1. Элементы управления. Электрические цепи	123
3. 2. Элементы управления. Усилитель	130
3. 3. Элементы управления. Серводвигатели	136
3. 4. Объекты регулирования	150
3. 5. Элементы обратной связи	153
Задачи	166
<i>Глава 4. Передаточные функции систем и их свойства</i>	170
4. 1. Основная структурная схема	170
4. 2. Преобразование структурной схемы	173
4. 3. Примеры передаточных функций систем	180
4. 4. Классификация систем. Коэффициенты ошибок	188
4. 5. Обобщенные коэффициенты ошибок	200
4. 6. Определение характеристик системы по передаточной функции разомкнутой цепи	202
4. 7. Получение частотной характеристики замкнутой цепи по передаточной функции разомкнутой цепи	220
Задачи	228
	557

Глава 5. Устойчивость	233
5. 1. Критерий устойчивости Рауса	233
5. 2. Критерий устойчивости Найквиста	238
5. 3. Применение критерия устойчивости Найквиста	254
5. 4. Характеристические кривые в плоскости s	264
Задачи	266
Глава 6. Проектирование системы. Частотные методы	270
6. 1. Общий порядок проектирования	271
6. 2. Применение нормальных опережающих и запаздывающих корректирующих контуров	273
6. 3. Проектирование системы класса 2	283
6. 4. Коррекция систем управления класса 1	299
6. 5. Порядок расчета запаздывающей коррекции	312
Задачи	319
Глава 7. Поведение динамических систем. Корневые методы	323
7. 1. Переход от частотной к комплексной области	324
7. 2. Критерии корневого метода	327
7. 3. Применение корневого метода к системе второго порядка	331
7. 4. Общий порядок построения годографов	335
7. 5. Лекало и его применение	342
7. 6. Дополнительные примеры	352
7. 7. Характеристика систем во временной области	360
Задачи	369
Глава 8. Расчет по методу полюсов и нулей	371
8. 1. Влияние критических частот коррекции на годограф	371
8. 2. Анализ коррекции в плоскости s путем опережающих или запаздывающих контуров	375
8. 3. Расчет запаздывающего корректирующего контура в плоскости s	381
8. 4. Расчет опережающего корректирующего контура в плоскости s	388
8. 5. Расчет запаздывающе-опережающего контура в плоскости s	396
8. 6. Расчет двойного опережающего контура в плоскости s	403
8. 7. Расчет коррекции в плоскости s для случая комплексных полюсов	406
8. 8. Влияние изменений постоянной времени. Анализ систем в плоскости s	411
8. 9. Влияние тахометрической обратной связи. Анализ систем в плоскости s	414
Задачи	417
Глава 9. Синтез корректирующих передаточных функций контуров	419
9. 1. Свойства импедансных функций RC	421
9. 2. Синтез импедансной функции RC в канонической форме	424
9. 3. Свойства четырехполюсников и их использование для получения передаточных функций	434
9. 4. Свойства передаточных функций	438
9. 5. Синтез передаточных функций лестничных схем	442
9. 6. Величина импеданса и преобразование частоты	460
9. 7. Синтез передаточных функций нелестничных схем RC	462
Задачи	466
Глава 10. Методы применения электронного моделирования	469
10. 1. Классификация моделирующих устройств	470
10. 2. Основные вычисления на электронных вычислительных устройствах	473
10. 3. Порядок моделирования. Метод дифференциального уравнения. Масштабные факторы	480
10. 4. Масштаб времени	489

10. 5. Порядок моделирования. Метод передаточной функции	492
10. 6. Умножение и деление переменных величин	495
10. 7. Моделирование общих нелинейных функций	499
10. 8. Примеры и общие замечания	503
Задачи	509
Глава 11. Самонастраивающиеся системы управления	512
11. 1. Самонастраивающиеся системы управления с использованием эталона-модели	514
11. 2. Импульсная характеристика самонастраивающейся системы	517
11. 3. Самонастраивающаяся система, управляемая цифровым вычислительным устройством	524
11. 4. Другие случаи применения управляемых дискретных систем	536
11. 5. Нелинейные самонастраивающиеся системы	542
Задачи	546
Ответы к некоторым задачам	550
Литература	555



Винцент Дель Торо и Сидней Р.
Паркер

ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ

Редактор издательства *М. С. Елисеев*
Переплет художника *А. Я. Михайлова*
Технический редактор *Б. И. Мосель*
Корректор *Л. А. Надждина*

Сдано в производство 16.VII 1962 г.

Подписано к печати 14/1 1963 г.

Тираж 10 000 экз. Печ. л. 35. Уч.-изд. л. 33,5

Бум. л. 14,5. Формат 60 × 90^{1/16}. Зак. 1083

Цена 2 р. 55 к.

Тип. № 6 УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, ул. Моисеенко, д. 10

20.05



Wiley, 605 Third Avenue, New York, N.Y. 10016, U.S.A.