



**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ**

А. Л. ЗИНОВЬЕВ, Л. И. ФИЛИППОВ

# **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ**

Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов  
радиотехнических специальностей  
высших учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»  
МОСКВА 1968

Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И.

**Введение в теорию сигналов и цепей.** Учебное пособие для радиотехн. специальностей вузов. М., «Выш. школа», 1968.  
280 с. с илл.

Первая часть книги посвящена методам аналитического описания регулярных и случайных колебаний. Во второй части рассматривается воздействие регулярных и случайных колебаний на линейные устройства с постоянными и переменными параметрами. В третьей части описывается воздействие регулярных и случайных колебаний на нелинейные элементы. В книге даны основные единые методы или важнейшие способы расчета для отдельных классов задач.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов вузов по радиотехническим специальностям. Она может быть также полезной инженерам и научным работникам.

3 4-2

99 — 68

#### Рецензенты:

Кафедра радиоприемных  
устройств Московского  
электротехнического  
института связи

Зав. кафедрой Москов-  
ского авиационного ин-  
ститута профессор  
Гоноровский И. С.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сущность теории сигналов и цепей состоит в изучении их основных свойств в процессе взаимодействия. Обычно авторы учебных пособий ставят перед собой следующие задачи: изложение основных методов исследования, рассмотрение ряда возможных частных случаев и описание свойств различных конкретных систем при воздействии на них различных конкретных колебаний. Но в пределах одной книги сделать это на должном уровне довольно сложно. Поэтому теоретические основы радиотехники должны представлять собой способ классификации проблем, давая знания общих закономерностей за счет сведения множества частных факторов к необходимому иллюстративному минимуму. Изучение свойств конкретных систем должно производиться в процессе практической работы, а также стать в основном задачей инженерных курсов. Это не только целесообразно, но, по-видимому, единственно возможно, если не становится на путь очень узкой специализации.

В настоящей книге рассмотрены основные единые методы или важнейшие способы расчета для отдельных классов задач. Почти каждое новое положение иллюстрируется примером, часто довольно простым, с тем, чтобы математические вычисления не заслонили сущность метода. Изложение ведется по возможности индуктивно.

Следует отметить три особенности в изложении данного пособия.

Во-первых, методы представления сигналов излагаются отдельно от описания систем.

Во-вторых, линейные цепи с постоянными параметрами и линейные цепи с переменными параметрами (параметрические цепи) рассматриваются параллельно. Это позволяет не повторять многое, что справедливо по отношению к обеим цепям. Кроме того, параллельное изложение показывает различия между этими двумя видами устройств.

В-третьих, вместо традиционного деления методов расчета линейных устройств на временные и частотные, проводится изложение методов расчета цепей и четырехполюсников. При этом рассматриваются методы, основанные на решении дифференциальных уравнений, и методы, основанные на представлении заданного воздей-



ствия в виде последовательности элементарных слагаемых: дельта-импульсов, скачков или гармонических составляющих.

Авторы выражают благодарность проф. И. С. Гоноревскому, проф. В. М. Сидорову, проф. Н. И. Чистякову, ассист. А. И. Богацкой и доц. С. М. Гольдину, сделавшим ряд важных замечаний по содержанию и методике изложения материала.

Авторы глубоко признательны за помощь при подготовке рукописи к изданию Ю. А. Зиновьевой и С. Д. Филипповой.

# Часть первая

## АНАЛИЗ РЕГУЛЯРНЫХ И СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Электрическое колебание (напряжения, тока, заряда или другой скалярной величины) — одно из первичных понятий радиотехники. Колебанием называют любой процесс  $x(t)$ , не удовлетворяющий условию  $x(t) = \text{const}$  при  $-\infty < t < \infty$ . В зависимости от рассматриваемой задачи колебания можно классифицировать по-разному. Наиболее общим является разделение колебаний на *регулярные* и *случайные* (нерегулярные).

Регулярными (или детерминированными) являются колебания, заданные аналитически или другим эквивалентным способом (например, графически).

Случайные (нерегулярные) колебания в отличие от регулярных принимают значения, которые определенно предсказать невозможно.

Колебания, вырабатываемые некоторым конкретным источником, могут быть детерминированными для одного наблюдателя (знающего закон их образования) и случайными для другого.

Колебания также делят на *сигналы* и *помехи*: сигналы несут информацию и создаются преднамеренно; помехи — это колебания, мешающие наблюдению сигналов. Ясно, что одни и те же колебания могут выступать и в качестве сигналов (например, колебания некоторой принимаемой радиостанции) и в качестве помех (колебания той же радиостанции, если необходимо принять колебания другой радиостанции). Сигналы чаще всего являются регулярными колебаниями, а помехи — случайными.

# Глава I

## РЕГУЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Регулярные колебания можно разделить на *непрерывные* и *импульсные*.

Непрерывными\* называют колебания, продолжающиеся от  $t=-\infty$  до  $t=\infty$ , т. е. практически достаточно долго.

Наиболее важным классом непрерывных колебаний являются периодические колебания, удовлетворяющие при  $-\infty < t < \infty$  условию

$$y(t) = y(t + mT),$$

где  $m$  — любое целое число;

$T$  — период колебания.

Простейшим из периодических колебаний при  $-\infty < t < \infty$  является гармоническое

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $A$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$  — постоянные величины.

Среди непрерывных колебаний особое значение имеют *модулированные* колебания. Они получаются путем изменения амплитуды, частоты или начальной фазы гармонического колебания по некоторому сравнительно с  $\cos \omega_0 t$  медленному закону. Колебания, управляющие изменением амплитуды, частоты или начальной фазы, называются *управляющими*. Исходно высокочастотное колебание называют *несущим*.

Импульсными называют колебания конечной энергии, отличные от нуля лишь в течение конечного (в определенном смысле небольшого) интервала времени. *Последовательностью импульсов* считают колебания, продолжающиеся очень долго (теоретически бесконечно), но состоящие из отдельных, разделенных по времени импульсов.

Существуют и другие способы классификации колебаний (например, по форме изображающего их графика).

В настоящее время в радиотехнике применяются колебания довольно сложных видов. При этом для расчета их прохождения через различные устройства часто приходится прибегать к разложению их на сравнительно простые составляющие.

### § 1.1. РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПО СИСТЕМАМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Заданное колебание  $s(t)$  можно представить в виде комбинации простых составляющих или путем подбора нескольких функций  $\varphi_i(t)$  и коэффициентов  $a_i$  так, чтобы

\* Определенную здесь непрерывность колебания не следует отождествлять с непрерывностью функции в математическом смысле.

$$s(t) = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(t),$$

или путем *разложения его по упорядоченной системе*, в частности по системе ортогональных функций.

Если совокупность функций

$$C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t) \quad (1.1)$$

удовлетворяет на некотором отрезке времени  $(t_1, t_2)$  условиям

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} C_i(t) C_k(t) dt = \overline{C_i(t) C_k(t)} = 0, \quad (1.2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  и  $i \neq k$ , то ее называют системой ортогональных на отрезке  $(t_1, t_2)$  функций. Если при этом также

$$\overline{C_i^2(t)} = \int_{t_1}^{t_2} C_i^2(t) dt = 1, \quad (1.3)$$

то систему называют ортонормированной (ортонормальной).

Если для заданной системы (1.1)  $\overline{C_i^2(t)} \neq 0$ , то ее, очевидно, можно нормировать, умножив  $C_i(t)$  на  $1/\sqrt{\overline{C_i^2(t)}}$ . Простейшим примером ортогональных колебаний являются

$$\sin i \frac{2\pi}{T} t \text{ и } \cos k \frac{2\pi}{T} t.$$

Заданное (аналитически или графически) колебание можно *разложить по системе ортогональных функций*, если можно записать

$$s(t) \cong \sum_i a_i C_i(t) \quad (1.4)$$

и при конечном числе членов в ряде разность между  $s(t)$  и  $\sum_i a_i C_i(t)$  будет достаточно мала. Одним из возможных критериев величины этой разности является интеграл от квадрата разности колебания и его разложения:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) - \sum_i a_i C_i(t)]^2 dt.$$

Если для непрерывной функции  $s(t)$  можно выбрать  $a_i$  так, что путем увеличения количества членов в ряде  $\Delta$  можно сделать сколь угодно малым, то совокупность ортогональных (ортонормальных)



Для разложения колебаний можно использовать элементарные функции, а также ряд специальных систем функций, обладающих свойством ортогональности на различных отрезках (тригонометрические функции кратных аргументов, полиномы Эрмита, Лежандра, Чебышева, функции Бесселя, Лагерра и ряд других). Обычно для теоретического анализа целесообразно выбирать систему функций, обеспечивающую наиболее быструю сходимость ряда (1.4) (т. е. требующую наименьшего числа членов ряда для заданной точности представления колебания). Однако в ряде случаев решающим при выборе  $C_i(t)$  является простота физического осуществления (генерирования) функций  $C_i(t)$ . Таким свойством обладает, в частности, система тригонометрических функций кратных аргументов. Соотношение (1.4) принято называть в этом случае рядом Фурье. В более широком смысле соотношение (1.4) называют рядом Фурье независимо от вида системы ортогональных функций.

### § 1.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Возьмем в качестве системы (1.1) совокупность тригонометрических функций кратных аргументов:

$$\begin{aligned}
 C_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}}, \\
 C_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} t, \\
 C_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T} t, \\
 C_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2 \frac{2\pi}{T} t, \\
 C_4(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2 \frac{2\pi}{T} t, \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Вычислением по формуле (1.2) легко проверить, что система (1.7) является ортонормальной на отрезке  $T$  (соотношение (1.3) выполняется благодаря давлению множителей  $\sqrt{\frac{2}{T}}$ ).

Множители  $\sqrt{\frac{2}{T}}$  обычно принято относить к коэффициентам и ряд (1.4) записывать в таком виде:

$$s(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( C_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + S_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (1.8)$$

или

$$s(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \left( k \frac{2\pi}{T} t + \varphi_k \right).$$

При такой записи коэффициенты ряда  $C_k$  и  $S_k$  (включая  $C_0$ ) вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos k\Omega t dt; \\ S_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin k\Omega t dt; \\ A_k &= \sqrt{C_k^2 + S_k^2}; \\ \varphi_k &= - \operatorname{arctg} \frac{S_k}{C_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Здесь и в дальнейшем  $\frac{2\pi}{T}$  обозначено через  $\Omega$ .

Ряд (1.8) представляет колебание  $s(t)$  в виде суммы постоянной составляющей  $C_0/2$  и косинусоидальных и синусоидальных колебаний с амплитудами  $C_k$  и  $S_k$ . Наименьшая частота колебаний равна  $\Omega$ . Эти колебания называют первой, второй и т. д. гармониками.

Практически удобнее применять ряд Фурье, записанный в комплексной форме. Объединим в сумме (1.8) лопарно члены с косинусами и синусами:

$$C_k \cos k\Omega t + S_k \sin k\Omega t = A_k \cos (k\Omega t + \varphi_k).$$

При этом колебание  $s(t)$  представляется в виде только косинусоидальных гармоник с амплитудами  $A_k$  и начальными фазами  $\varphi_k$ .

Раскрывая скобки в правой части этого выражения и приравнявая коэффициенты при синусах и косинусах, получаем, что

$$C_k = A_k \cos \varphi_k, \quad S_k = -A_k \sin \varphi_k$$

и, следовательно,

$$A_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2}, \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{S_k}{C_k}. \quad (1.10)$$

Воспользуемся далее формулой Эйлера

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}.$$

Положим  $\alpha = k\Omega t + \varphi_k$  и обозначим

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\varphi_k}. \quad (1.11)$$

Эту величину назовем комплексной амплитудой  $k$ -й гармоники. Она содержит данные и об амплитуде и о начальной фазе  $k$ -й гармоники. После этого ряд (1.8) можно записать в таком виде:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega t}, \quad (1.12)$$

где

$$\dot{A}_{-k} = A_k e^{-j\varphi_k} = \dot{A}_k^*,$$

т. е. комплексно сопряженная с  $\dot{A}_k$  величина.

Комплексную амплитуду  $\dot{A}_k$  можно вычислить непосредственно по заданному  $s(t)$ , минуя вычисления  $C_k$  и  $S_k$  и применение выражений (1.10). Действительно,

$$\dot{A}_k = A_k e^{j\varphi_k} = A_k (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k) = C_k - jS_k.$$

Подставляя сюда (1.9) и объединяя интегралы, получаем

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\Omega t} dt. \quad (1.13)$$

Формулы (1.12) и (1.13) можно называть парой преобразований Фурье. Вторая из них позволяет найти спектр, т. е. совокупность гармонических составляющих, образующих в сумме  $s(t)$ ; первая — вычислить  $s(t)$ , если заданы гармонические



составляющие (гармоники). Формулу (1.12) можно представить в другом виде:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega t}. \quad (1.12a)$$

Ее тождественность формуле (1.12) почти очевидна.

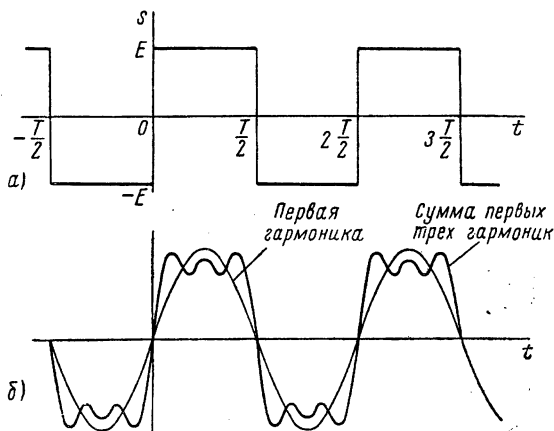


Рис. 1.1. К разложению периодической последовательности импульсов в ряд Фурье

Пример. Вычислить комплексные амплитуды гармонических составляющих и записать ряд Фурье для колебания (рис. 1.1, а), аналитическое выражение которого

$$s(t) = E \text{ при } 2m \frac{T}{2} < t < (2m + 1) \frac{T}{2};$$

$$s(t) = -E \text{ при } (2m + 1) \frac{T}{2} < t < 2(m + 1) \frac{T}{2}$$

( $m$  — целое число).

В соответствии с (1.13)

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-E) e^{-jk\Omega t} dt +$$

$$\begin{aligned}
 + \int_0^{\frac{T}{2}} E e^{-jk\Omega t} dt &= -\frac{2E}{T} \left. \frac{e^{-jk\Omega t}}{-jk\Omega} \right|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2E}{T} \left. \frac{e^{-jk\Omega t}}{-jk\Omega} \right|_0^{\frac{T}{2}} = \\
 &= \frac{2E}{jk\pi} (1 - \cos k\pi).
 \end{aligned}$$

Так как  $\cos k\pi$  при  $k = 0, 2, 4, 6, \dots$  равен  $+1$ , то нулевой составляющей и четных гармоник данное колебание не содержит.

При  $k = 1$

$$\dot{A}_1 = \frac{2E}{j\pi} (1 + 1) = \frac{4E}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}).$$

Аналогично при  $k = 3, 5, \dots$

$$\dot{A}_3 = \frac{2E}{j3\pi} (1 + 1) = \frac{4E}{3\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

$$\dot{A}_5 = \frac{2E}{j5\pi} (1 + 1) = \frac{4E}{5\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

.....

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям гармоник, получаем

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{4E}{\pi} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4E}{3\pi} \cos\left(3\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \\
 &\quad + \frac{4E}{5\pi} \cos\left(5\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots = \\
 &= \frac{4E}{\pi} \sin \Omega t + \frac{4E}{3\pi} \sin 3\Omega t + \frac{4E}{5\pi} \sin 5\Omega t + \dots
 \end{aligned}$$

Такой же результат получится, если найденные величины  $\dot{A}_k$  и  $\dot{A}_{-k}$  подставить в ряд (1.12) и использовать формулу Эйлера.

На рис. 1.1, б изображены первая гармоника (несколько периодов) и сумма трех гармоник. При добавлении последующих гармоник сумма будет все более приближаться к заданному колебанию.

### § 1.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ИМПУЛЬСОВ

Импульсное колебание  $u(t)$  также можно выразить рядом Фурье, мысленно представив его периодически повторяющимся с периодом  $T$ , больше или равным длительности импульса. Однако

это выражение будет верно лишь в интервале существования импульса  $u(t)$ . В остальные моменты времени, когда  $u(t) = 0$ , ряд будет, очевидно, периодически повторять  $u(t)$ . Если необходимо получить аналитическое выражение импульсного колебания, верное в любой момент времени, следует пользоваться интегральными преобразованиями Фурье.

Пусть задан импульс  $u(t)$  (рис. 1.2, а). Образум мысленно периодическую последовательность  $s(t)$  таких импульсов с большим периодом  $T$ . Тогда можно записать

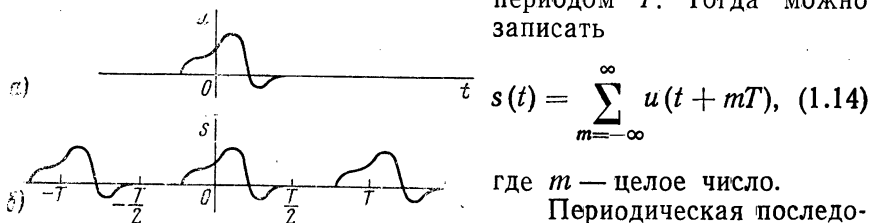


Рис. 1.2. Импульс  $u(t)$  и периодическая последовательность колебания  $s(t)$

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(t + mT), \quad (1.14)$$

где  $m$  — целое число.

Периодическая последовательность колебания  $s(t)$  показана на рис. 1.2, б. Так как колебание периодически, то его можно разложить в

ряд Фурье, и по формуле (1.13) вычислить комплексные амплитуды  $\dot{A}_k$ . Обозначив  $k\Omega = \omega_k$ , получаем

$$\dot{A}_k = \dot{A}(\omega_k) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j\omega_k t} dt.$$

Интегрирование производится здесь в пределах от  $-T/2$  до  $T/2$ . Но величина  $\dot{A}(\omega_k)$  не изменится, если вместо  $s(t)$  подставить  $u(t)$ , а интегрирование производить в бесконечных пределах:

$$\dot{A}(\omega_k) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega_k t} dt, \quad (1.15)$$

Величину

$$\dot{G}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.16)$$

назовем спектральной функцией или спектральной характеристикой, соответствующей импульсу  $u(t)$ .

Спектральная функция не зависит от времени (вследствие интегрирования по  $t$ ) и является комплексной функцией частоты, определенной и при положительных и при отрицательных значениях последней. Вид спектральной функции зависит только от формы (аналитического выражения) импульса  $u(t)$ .

Легко убедиться, что для импульсов, выражающихся четными функциями, спектральная функция будет действительной, а для импульсов, выражающихся нечетными функциями, — чисто мнимой. Так, в соответствии с формулой Эйлера, соотношение (1.16) примет вид

$$\dot{G}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cos \omega t - j \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \sin \omega t dt.$$

При четных  $u(t)$  равен нулю второй интеграл, при нечетных — первый. В общем случае  $\dot{G}_u(\omega)$  — комплексная функция частоты.

Из (1.15), (1.16) и (1.13) следует, что

$$\dot{A}_k = \dot{A}(k\Omega) = \frac{2}{T} \dot{G}_u(k\Omega), \quad (1.17)$$

т. е. для вычисления комплексной амплитуды любой гармоники *периодической последовательности импульсов* достаточно вычислить спектральную функцию  $\dot{G}_u(\omega)$  *исходного импульса*  $u(t)$ , взять ее значение на частоте искомой гармоники  $\omega_k = k\Omega$  и умножить на  $2/T$ .

Выразим импульс  $u(t)$  через его спектральную функцию. В соответствии с (1.14), (1.12), (1.17) получаем

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(t + mT) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \dot{G}_u(k\Omega) e^{jk\Omega t}. \quad (1.18)$$

Если период  $T$  созданной последовательности стремится к бесконечности, все импульсы, кроме исходного  $u(t)$ , «отодвинутся» в бесконечность, и при конечных значениях  $t$  останется импульс  $u(t)$ . Таким образом,

$$\lim [\text{левая часть (1.18)}] = u(t). \quad (1.19)$$

Рассмотрим далее правую часть (последнее выражение) (1.18). Учитывая, что  $2/T = \Omega/\pi$  и  $\Omega = \omega_{k+1} - \omega_k$  — расстояние между гармониками, получаем

$$[\text{правая часть (1.18)}] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{G}_u(\omega_k) e^{j\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k).$$

Если  $T \rightarrow \infty$ , то  $\omega_{k+1} - \omega_k = \Omega \rightarrow 0$ , а сумма в пределе превращается в интеграл:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{G}_u(\omega_k) e^{j\omega_k t} (\omega_{k+1} - \omega_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.20)$$

На основании (1.18), (1.19) и (1.20) получаем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.21)$$

Формулы (1.16) и (1.21) также называют парой преобразований Фурье.

Первая из них позволяет осуществить прямое преобразование и найти спектральную функцию, соответствующую импульсу  $u(t)$ . Символически это можно записать так:

$$F[u(t)] = \dot{G}_u(\omega).$$

Вторая позволяет осуществить обратное преобразование и вычислить значение импульса в любой момент времени, если задана спектральная функция. Символически это можно записать так:

$$F^{-1}[\dot{G}_u(\omega)] = u(t).$$

Пользуясь тем, что значения спектральной функции при положительных и отрицательных значениях аргумента  $\omega$  комплексно сопряжены, выражение (1.21) можно записать в другой форме (часто более удобной для вычислений):

$$u(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{G}_u(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где  $\operatorname{Re}$  — знак, означающий взятие действительной части.

Из рассмотренного ясно, что интеграл Фурье (1.21) определяет импульс в виде бесконечной суммы бесконечно малых гармонических составляющих, расположенных на всех частотах. На этом основании говорят о непрерывном (сплошном) спектре, которым обладают импульсы. Необходимо, однако, помнить, что  $\dot{G}_u(\omega)$  — не спектр, а спектральная характеристика импульса, ибо на каждой данной частоте энергия импульса равна нулю, так как равна нулю амплитуда соответствующей составляющей.

Введение понятия спектральной функции позволяет построить весьма наглядный метод анализа линейных цепей (метод спектральных функций, рассмотренный в гл. V, ч. II).

Пример. Вычислить спектральную функцию экспоненциального импульса (рис. 1.3, а):

$$u(t) = E e^{-at} \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$u(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Согласно формуле (1.16)

$$\dot{G}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{\alpha + j\omega}.$$

Это выражение можно представить в показательной форме. Так как

$$\alpha + j\omega = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} e^{j \arctg \omega / \alpha},$$

то

$$\dot{G}_u(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \omega / \alpha} = G_u(\omega) e^{j\beta(\omega)}.$$

Модуль и аргумент спектральной функции экспоненциального импульса изображены на рис. 1.3, в. Если из экспоненциальных импульсов составлена периодическая последовательность с периодом  $T_1$  (рис. 1.3, б), то комплексная амплитуда  $k$ -й гармоники этой последовательности в соответствии с (1.17)

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + (k\Omega_1)^2}} e^{-j \arctg \frac{k\Omega_1}{\alpha}},$$

где

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Спектр (совокупность гармонических составляющих) периодической последовательности импульсов наглядно можно представить в виде *спектральной диаграммы*. При этом каждую гармоническую составляющую изображают вертикальным отрезком, длина которого (в некотором масштабе) равна амплитуде составляющей, а местоположение на горизонтальной оси — частоте. Начальную фазу составляющей надписывают сверху отрезка.

Спектральная диаграмма указанной периодической последовательности приведена на рис. 1.3, г (начальные фазы составляющих не указаны). Расстояние между составляющими по частоте

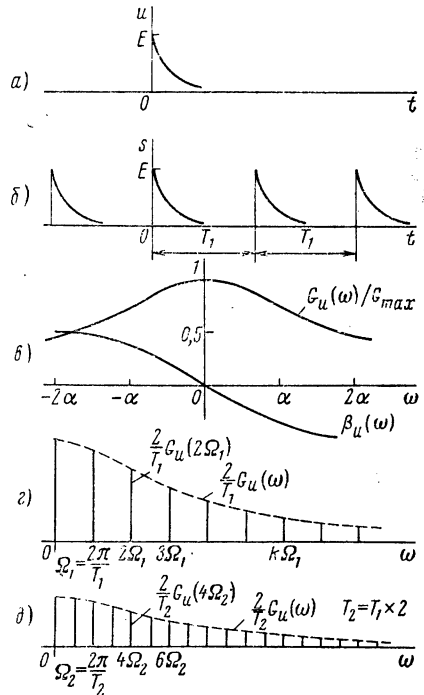


Рис. 1.3. Спектральная функция экспоненциального импульса и спектр периодической последовательности импульсов

$\Omega_1 = 2\pi/T_1$ . Спектральная функция  $G_u(\omega)$  играет роль огибающей амплитуд составляющих спектра. На рис. 1.3, *б* приведена спектральная диаграмма для случая  $T_2 = 2T_1$ . Из рисунка видно, что при увеличении периода составляющие спектра «сгущаются» по частоте и уменьшаются по амплитуде. В пределе спектр одного импульса становится сплошным.

#### § 1.4. ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Некоторые колебания не могут быть представлены интегралом (1.21), так как для них не существует или не определена спектральная функция. Рассмотрим, например, «скачок напряжения»

$$u(t) = E \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$u(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

В соответствии с уравнением (1.16)

$$\begin{aligned} \dot{G}_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = \\ &= E \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_0^{\infty} = \frac{E}{j\omega} (1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-j\omega t}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Однако  $e^{-j\omega t}$  при  $t \rightarrow \infty$  не стремится ни к какому пределу и, следовательно, спектральная функция  $\dot{G}_u(\omega)$  не определена\*. Это происходит потому, что колебание не удовлетворяет условию интегрируемости (см. (а), стр. 8). Для таких колебаний можно получить преобразования Лапласа, являющиеся обобщением преобразований Фурье.

Умножим некоторое заданное колебание  $u(t)$  на  $e^{-ct}$ , где  $c$  — положительная константа, выбранная так, чтобы колебание  $u(t)e^{-ct}$  удовлетворяло условию абсолютной интегрируемости. Этого можно достигнуть, выбрав  $c$  достаточно большим. Тогда спектральная функция выбранного колебания

$$\dot{G}(\omega, c) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(t) e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt. \quad (1.23)$$

Обеспечить существование этого интеграла можно, задавая все колебания  $u(t)$ , так, чтобы  $u(t) = 0$  при  $t < 0$ . (В противном случае

\* Далее будет показано, что  $\dot{G}_u(\omega)$  для скачка напряжения можно найти обходным путем.

при отрицательных  $t$  множитель  $e^{-ct}$  может привести к расхождению интеграла.) При этом нижний предел интегрирования всегда будет равен нулю и

$$\dot{G}(\omega, c) = \int_0^{\infty} [u(t) e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt. \quad (1.24)$$

Объединяя степенные множители, получаем

$$\dot{G}_u(\omega, c) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-(c+j\omega)t} dt = \dot{G}(c + j\omega). \quad (1.25)$$

Если произвести над  $\dot{G}(c + j\omega)$  обратное преобразование Фурье, то получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = u(t) e^{-ct}. \quad (1.26)$$

Умножим обе части (1.26) на  $e^{ct}$ , объединим степенные множители под интегралом и заменим переменную интегрирования  $\omega$  на  $c + j\omega$ . Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{G}(c + j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c + j\omega) = u(t). \quad (1.27)$$

Обозначим в выражениях (1.25) и (1.27) комплексное число  $c + j\omega$  через  $p$ :

$$p = c + j\omega.$$

Полученные после этого соотношения называют парой преобразований Лапласа:

$$\int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt = \dot{G}(p) = U(p); \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U(p) e^{pt} dp = u(t). \quad (1.29)$$

Спектральную функцию  $\dot{G}(p) = U(p)$ , полученную в результате проделанного обобщения, называют изображением оригинала  $u(t)$ . Символически преобразования Лапласа можно обозначить так:

$$L[u(t)] = U(p); \quad (1.28a)$$

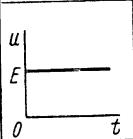
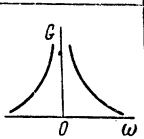
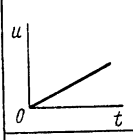
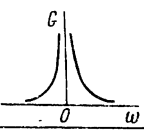
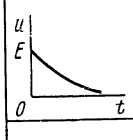
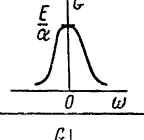
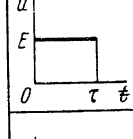
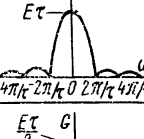
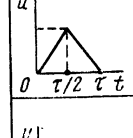
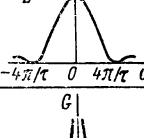
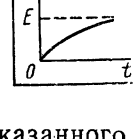
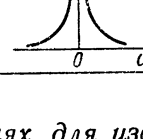
$$L^{-1}[U(p)] = u(t). \quad (1.28b)$$

Из (1.29) видно, что обратное преобразование осуществляется путем интегрирования в комплексной плоскости  $p$  вдоль вертикальной прямой  $c = \text{const}$ . (Методы выполнения этой операции указаны



далее.) Для большого количества колебаний преобразования Лапласа сведены в таблицы. В табл. 1.1 приведены некоторые колебания (графики и аналитические выражения) и их изображения.

Таблица 1.1

График колебания $u(t)$	Аналитическая запись колебания	Изображение по Лапласу	Спектральная функция, $G(\omega)$	Ориентировочный график модуля, $G(\omega)$
	$E \cdot 1(t)$	$\frac{E}{p}$	$\frac{E}{j\omega}$	
	$kt \cdot 1(t)$	$\frac{k}{p^2}$	$-\frac{k}{\omega^2}$	
	$E e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$	$\frac{E}{\alpha + p}$	$\frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \times e^{-j \arctg \frac{\omega}{\alpha}}$	
	$E[1(t) - 1(t - \tau)]$	$\frac{E}{p}(1 - e^{-p\tau})$	$E\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \times e^{-j \frac{\omega\tau}{2}}$	
	$\frac{2E}{\tau} t \cdot 1(t) - \frac{4E}{\tau} (t - \frac{\tau}{2}) 1(t - \frac{\tau}{2}) + \frac{2E}{\tau} (t - \tau) 1(t - \tau)$	$\frac{2E}{\tau} \times \frac{(1 - e^{-p\tau/2})^2}{p^2}$	$E\tau \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau}{4}}{\frac{\omega\tau}{4}} \right)^2 \times e^{-j \frac{\omega\tau}{2}}$	
	$E(1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t)$	$\frac{E\alpha}{p(p + \alpha)}$	$\frac{E\alpha}{\sqrt{\omega^2 + (\omega\alpha)^2}} \times e^{j \arctg \frac{\alpha}{\omega}}$	

Из сказанного ясно, что если в выражениях для изображений вместо  $p$  подставить  $j\omega$ , то будут получены спектральные функции. Они также приведены в табл. 1.1 (аналитические выражения после упрощения и графики модуля). При аналитической записи колебаний использован символ  $1(t)$ , который означает умножение на 1 при  $t \geq 0$  и умножение на нуль при  $t < 0$ , т. е.

$$1(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \geq 0;$$

$$1(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Из табл. 1.1 видно, что модули спектральных функций убывают с ростом частоты. Это — общая закономерность. Скорость этого убывания зависит от формы импульса. Так, для скачка напряжения модуль спектральной функции убывает пропорционально частоте. Для очень короткого импульса, независимо от его формы, спектральная функция практически постоянно вплоть до частот  $\omega < 1/\tau$ . Последнее, в частности, означает, что спектр периодической последовательности весьма коротких импульсов содержит гармонические составляющие при весьма высоких частотах. Поэтому короткие импульсы и создают помехи при более высоких частотах.

При осуществлении преобразований Лапласа целесообразно пользоваться теоремами, упрощающими вычисления. Приведем без доказательства важнейшие из них.

Так как преобразования Фурье являются частным случаем преобразований Лапласа, то *все теоремы остаются в силе, если вместо изображений писать спектральные функции, а  $p$  заменить на  $j\omega$ .*

Теорема о преобразовании суммы колебаний  
(теорема о линейности)

Если  $L[u_1(t)] = U_1(p)$  и  $L[u_2(t)] = U_2(p)$ , то

$$L[u_1(t) \pm u_2(t)] = U_1(p) \pm U_2(p). \quad (1.30)$$

Эта теорема справедлива и для суммы любого количества колебаний.

Теорема об умножении на константу

Если  $L[u(t)] = U(p)$  и  $a$  — константа, то

$$L[au(t)] = aU(p). \quad (1.31)$$

Теоремы о линейности и умножении на константу имеют место также для обратных преобразований. Так,

$$L^{-1}[a_1U_1(p) \pm a_2U_2(p)] = a_1u_1(t) \pm a_2u_2(t). \quad (1.32)$$

Теорема о запаздывании колебания  $u(t)$

Если  $L[u(t)] = U(p)$ , то

$$L[u(t - \tau)] = U(p)e^{-p\tau}, \quad (1.33)$$

т. е. изображение импульса, возникшего на  $\tau$  сек позже, можно найти, умножив изображение исходного импульса на  $e^{-p\tau}$ .

Пример. Найти изображение суммы линейно растущего напряжения и запаздывающего на  $a$  сек экспоненциального колебания.

Заданное колебание аналитически записывается так:

$$u(t) = kt \cdot 1(t) + Ee^{-\alpha(t-a)}1(t-a).$$

Применяя все три приведенные теоремы и пользуясь второй и третьей строкой табл. 1.1, получаем

$$U(p) = \frac{k}{p^2} + \frac{E}{\alpha \mp p} e^{-pa}.$$

Введение множителя  $e^{-pa}$  обусловлено запаздыванием экспоненциального колебания на  $a$ .

Теорема о преобразовании производной от колебания

Если  $L[u(t)] = U(p)$ , то

$$L\left[\frac{du(t)}{dt}\right] = pU(p) - u(0+), \quad (1.34)$$

где  $u(0+)$  — значение колебания при  $t = 0$  при приближении к нулю *справа* (это существенно при скачке функции  $u(t)$  в начале координат).

Повторно применяя формулу (1.34), можно распространить теорему на производные более высоких порядков. Для изображения производной  $n$ -го порядка имеет место формула

$$L\left[\frac{d^{(n)}u(t)}{dt^n}\right] = p^n U(p) - p^{n-1}u(0+) - p^{n-2}u^{(1)}(0+) - \dots - u^{(n-1)}(0+), \quad (1.35)$$

где  $u^{(n)}(0+)$  — значение  $n$ -й производной колебания.

Пример. Пользуясь теоремой, найти изображение и спектральную функцию скачка напряжения  $E \cdot 1(t)$ .

Колебание  $u_1(t) = E \cdot 1(t)$  представим как производную от линейно растущего колебания  $u_2(t) = kt \cdot 1(t)$ . Действительно,

$$u_1(t) = E \cdot 1(t) = \frac{d}{dt} u_2(t) \cdot 1(t) = k \cdot 1(t).$$

Но согласно второй строке табл. 1.1

$$L(kt) = \frac{k}{p^2}.$$

В соответствии с теоремой о преобразовании производной от колебания

$$L[u_1(t)] = pU_2(p) - u(0+) = p \frac{k}{p^2} = \frac{k}{p}.$$

Спектральную функцию получают при замене  $p$  на  $j\omega$ :

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \frac{k}{j\omega}.$$

При  $k = E$  это совпадает, естественно, с первой строкой таблицы.

## Теорема о преобразовании интеграла колебания

Если  $L[u(t)] = U(p)$ , то

$$L\left[\int_0^t u(t) dt\right] = \frac{U(p)}{p} + \frac{u^{-1}(0+)}{p}, \quad (1.36)$$

где  $u^{-1}(0+)$  — значение *интеграла* колебания  $u(t)$ , когда  $t = 0$ , при приближении к нулю справа.

Пример. Зная, что изображение колебания

$$u_1(t) = E \cos \omega_0 t \cdot 1(t) \text{ есть } \frac{Ep}{p^2 + \omega_0^2},$$

найти изображение колебания

$$u_2(t) = E \sin \omega_0 t \cdot 1(t).$$

Так как, очевидно,

$$u_2(t) = \omega_0 \int_0^t u_1(t) dt,$$

то, пользуясь теоремой умножения на константу и теоремой о преобразовании интеграла колебания, получаем

$$L[u_2(t)] = \frac{L[u_1(t)]}{p} + \frac{u_1^{-1}(0+)}{p} = \frac{\omega_0 Ep}{(p^2 + \omega_0^2)p} = E \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Величина  $u_1^{-1}(0+)$  в данном случае равна нулю.

## Теорема об изменении масштаба времени колебания

Если  $L[u(t)] = U(p)$ , а  $a = \text{const} > 0$ , то

$$L[u(t/a)] = aU(ap). \quad (1.37)$$

Пример. Колебание  $u(t) = Ee^{-\alpha t} \cdot 1(t)$  «сжимается» во времени в  $n$  раз. Определить, как изменится модуль спектральной функции колебания.

«Сжатое» колебание записывают как

$$u_1(t) = u(tn) = Ee^{-\alpha tn} = Ee^{-\frac{\alpha t}{1/n}}$$

(при этом  $u_1(t)$  достигнет заданного уровня относительно исходного  $E$  за время в  $n$  раз меньшее, т. е. импульс укоротится).

Полагая  $a = 1/n$ , в соответствии с теоремой об изменении масштаба времени колебания и третьей строкой табл. 1.1, получаем

$$L[u_1(t)] = L\left[u\left(\frac{t}{1/n}\right)\right] = \frac{1}{n} \frac{E}{\alpha + p/n}.$$

Заменяя  $p$  на  $j\omega$ , находим модуль спектральной функции:

$$G_{u_1}(\omega) = \frac{E}{n \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\omega}{n}\right)^2}}$$

Эта функция убывает с частотой *медленнее*, чем спектральная функция исходного импульса. *Сжатие импульса во времени приводит к расширению функции  $G(\omega)$* . Это также общая закономерность.

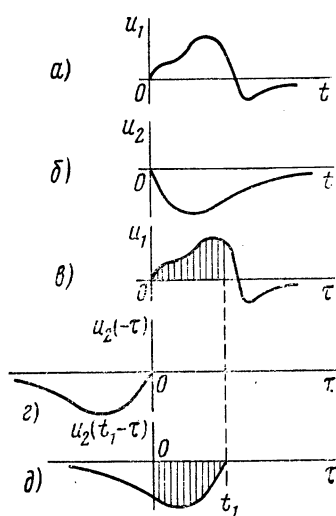
Теорема о преобразовании свертки функций

Если  $L[u_1(t)] = U_1(p)$  и  $L[u_2(t)] = U_2(p)$ , то

$$L\left[\int_0^t u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau\right] = U_1(p) U_2(p). \quad (1.38)$$

Операция образования величины

$$u(t) = \int_0^t u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau \quad (1.39)$$



часто встречается при расчете радиотехнических процессов и называется *сверткой функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$* .

В результате свертки функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  получается новая функция времени  $u(t)$ . Процесс ее преобразования наглядно изображен на рис. 1.4. На рис. 1.4, а, б показаны заданные функции; на рис. 1.4, в — функция  $u_1(\tau)$ ; на рис. 1.4, г и 1.4, д — функции  $u_2(-\tau)$  и  $u_2(t_1-\tau)$ . Для получения свертки в некоторый момент  $t = t_1$  нужно проинтегрировать произведение заштрихованных на рис. 1.4, в и 1.4, д участков кривых.

Осуществление свертки двух функций условно обозначается так:

$$\int_0^t u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau = u_1(t) * u_2(t).$$

Рис. 1.4. Пояснение процесса вычисления свертки

С помощью этой теоремы также можно упрощать осуществление обратного преобразования, заменяя ее интегрированием по  $\tau$ , если изображение может быть представлено в виде двух множителей, оригиналы которых легко находятся.

## Теорема об умножении колебания на показательную функцию

Если  $L[u(t)] = U(p)$  и  $a$  — действительное или комплексное число с положительной вещественной частью, то

$$L[u(t)e^{\pm at}] = U(p \mp a). \quad (1.40)$$

## Теорема о преобразовании колебания с переменной амплитудой

Если

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{при } t > 0 \quad (1.41)$$

и

$$L[U_m(t)] = U(p), \quad (1.42)$$

то

$$L[u(t)] = \frac{e^{j\varphi_0}}{2} U(p - j\omega_0) + \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} U(p + j\omega_0). \quad (1.43)$$

Вследствие широкого применения колебаний вида (1.41) эта теорема особенно важна. Рассмотрим ее подробнее применительно к преобразованиям Фурье. Пусть

$$u(t) = Ee^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$u(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Тогда согласно теореме

$$\dot{G}_u(\omega) = \frac{e^{j\varphi_0}}{2} \dot{G}_s(\omega - \omega_0) + \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} \dot{G}_s(\omega + \omega_0), \quad (1.44)$$

где  $\dot{G}_s(\omega)$  — спектральная функция экспоненциального импульса  $Ee^{-\alpha t}$ , вычисленная ранее в примере § 1.3:

$$\dot{G}_s(\omega) = \frac{E}{\alpha \mp j\omega} = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 \mp \omega^2}} e^{-j \arctg \omega/\alpha}. \quad (1.45)$$

Подставляя (1.45) в (1.44) получаем

$$\begin{aligned} \dot{G}_u(\omega) = & \frac{e^{j\varphi_0}}{2} \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 \mp (\omega - \omega_0)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}} + \\ & + \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 \mp (\omega \mp \omega_0)^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega + \omega_0}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

На рис. 1.5 приведены графики модуля спектральной функции амплитуды (1.45) и модулей обоих слагаемых (1.46). Для получения последних необходимо, как это следует из (1.44), сместить гра-

фики спектральной функции огибающей по оси частот на  $\omega_0$  и  $-\omega_0$  и уменьшить их ординаты в два раза.

Рассмотрим теперь способы осуществления обратного преобразования Лапласа. В курсе математического анализа доказывается, что интеграл функции  $\varphi(p)$  комплексного переменного по любому замкнутому контуру  $(c)$ , лежащему внутри односвязной области, равен  $2\pi j$ , умноженному на сумму вычетов в особых точках  $p_k$  подынтегральной функции:

$$\oint_c \varphi(p) dp = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p_k} \varphi(p). \quad (1.47)$$

В выражении (1.29) для обратного преобразования контур формально не замкнут и интегрирование производится вдоль прямой, идущей параллельно мнимой оси. Однако замкнутый контур можно образовать полуокружностью бесконечно большого радиуса. При этом величина интеграла не изменится, так как все реально встречающиеся функции стремятся к нулю на бесконечности. Таким образом, применяя (1.47) к формуле обратного преобразования (1.29), получаем

$$u(t) = L^{-1}[U(p)] = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p_k} U(p) e^{pt}. \quad (1.48)$$

Вычет функции в полюсе  $p_k$  кратности  $m$

$$\operatorname{Res}_{p_k} \varphi(p) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} [\varphi(p) (p - p_k)^m]. \quad (1.49)$$

В частности, в полюсе первого порядка

$$\operatorname{Res}_{p_k} \varphi(p) = \lim_{p \rightarrow p_k} \varphi(p) (p - p_k). \quad (1.50)$$

**Пример.** Найти импульс, изображение которого  $[U(p)] = \frac{E}{p}$ . Используем формулы (1.48) и (1.50), так как функция  $\varphi(p) = U(p) = E/p$  имеет один полюс  $p = 0$  первого порядка. Тогда

$$\operatorname{Res}_0 \frac{E}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E}{p} (p - 0) = E$$

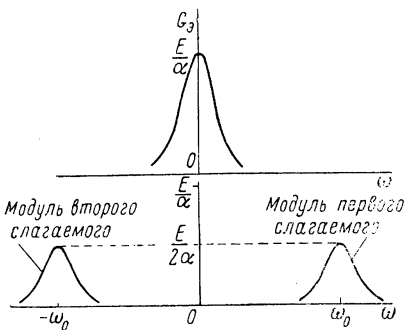


Рис. 1.5. К пояснению теоремы о преобразовании колебания с переменной амплитудой

и, следовательно,

$$u(t) = E \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$u(t) = 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Часто изображение  $U(p)$  можно представить в виде рациональной дроби:

$$U(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_n p^n \div a_{n-1} p^{n-1} \div \dots \div a_1 p \div a_0}{p^m \div b_{m-1} p^{m-1} \div \dots \div b_1 p \div b_0},$$

где степень  $n$  многочлена числителя меньше степени  $m$  многочлена знаменателя. Кроме того, коэффициент  $b_m = 1$ . Путем деления многочленов и выделения «целой части» всегда можно сделать так, чтобы  $n$  было меньше  $m$ . Если коэффициент  $b_m \neq 1$ , то на него всегда можно разделить числитель и знаменатель.

Пусть знаменатель  $B(p)$  имеет  $M$  корней (их можно найти из уравнения  $B(p) = 0$ ), причем корень  $p_k$  обладает кратностью  $m_k$ . Тогда, как можно доказать,

$$u(t) = L^{-1} \left[ \frac{A(p)}{B(p)} \right] = \sum_{k=1}^M \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[ \frac{A(p)}{B(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right]. \quad (1.51)$$

Уравнение (1.51) называют формулой разложения. В случае простых корней знаменателя [ $m_1 = m_2 = \dots = 1$ ] эта формула упрощается:

$$u(t) = \sum_{k=1}^M \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.52)$$

Формула разложения представляет искомый импульс в виде суммы  $M$  экспонент с различными начальными значениями  $A(p_k)/B'(p_k)$  и различными постоянными  $p_k$  (для реальных цепей всегда  $\text{Re } p_k < 0$ ).

Пример. Найти колебание, изображение которого

$$U(p) = \frac{E p}{2p^2 \div \omega_0^2}.$$

Прежде всего заданное изображение необходимо привести к такому виду, когда  $b_m$  (в данном случае  $b_2$ ) равно 1. Для этого числитель и знаменатель делим на 2:

$$U(p) = \frac{\frac{E}{2} p}{p^2 \div \frac{\omega_0^2}{2}}.$$



Степень числителя (первая) меньше степени знаменателя (вторая). Выделять целую часть не нужно. Полагаем

$$A(p) = \frac{E}{2} p, \quad B(p) = p^2 + \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Находим  $B'(p) = 2p$ , а из уравнения

$$B(p) = p^2 + \frac{\omega_0^2}{2}$$

определяем корни знаменателя:  $p_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ ,  $p_2 = -\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .

По формуле (1.52) находим

$$u(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{E}{2} \cos \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t$$

при  $t \geq 0$

и  $u(t) = 0$

при  $t < 0$ .

### § 1.5. НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОЛЕБАНИЯМИ И ИХ СПЕКТРАМИ

Представления колебаний рядом и интегралом Фурье находят на практике широкое применение. Рассмотрим некоторые важные соотношения, которые имеют место при этом.

Выражение энергии колебания через его спектральную функцию. Спектральная плотность энергии

Пусть  $\dot{G}_s(\omega)$  является спектральной функцией колебания *напряжения*  $s(t)$ . Тогда удельная энергия колебания (энергия, выделяемая на единичном сопротивлении)

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_s(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt,$$

Но внутренний интеграл есть спектральная функция колебания  $s(t)$ , взятая при аргументе  $-\omega$ , т. е. представляет собой комплексно сопряженную с  $\dot{G}_s(\omega)$  величину:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt = \dot{G}_s(-\omega) = \dot{G}_s^*(\omega).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_s(\omega) \dot{G}_s^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s^2(\omega) d\omega \quad (1.53)$$

(произведение двух сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля).

Так как квадрат модуля является четной функцией переменной интегрирования  $\omega$ , то, удвоив значение интеграла, можно вести интегрирование в пределах от 0 до  $\infty$ . Итак,

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_s^2(\omega) d\omega. \quad (1.54)$$

Соотношение (1.54) иногда называют теоремой Персеваля. Из него следует, что на бесконечно малый участок частот приходится энергия

$$d\mathcal{E} = \frac{G_s^2(\omega)}{\pi} d\omega.$$

Поэтому величину

$$N_s(\omega) = \frac{1}{\pi} G_s^2(\omega) \quad (1.55)$$

можно назвать *спектральной плотностью энергии* колебания  $s(t)$ . Она характеризует распределение энергии по частоте.

Пример. Найти удельную энергию колебания  $s(t) = Ee^{-\alpha t} \cdot 1(t)^*$  по определению и по теореме Персеваля.

По определению

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^{\infty} [Ee^{-\alpha t}]^2 dt = \frac{E^2}{2\alpha}.$$

\* Функция  $1(t)$  объяснена на стр. 20,

По формуле (1.54) с учетом выражения для модуля спектральной функции (табл. 1.1, строка 3)

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \right]^2 d\omega = \frac{E^2}{\pi\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \frac{E^2}{2\alpha}.$$

Как и утверждается теоремой,  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ .

### Энергия взаимодействия двух колебаний

Пусть сумма колебаний напряжения  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , имеющих спектральные функции  $\dot{G}_{s_1}(\omega)$  и  $\dot{G}_{s_2}(\omega)$ , действует на единичном сопротивлении. Найдем выделяющуюся при этом энергию.

На основании (1.53) и теоремы о линейности преобразований Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{G}_{s_1}(\omega) + \dot{G}_{s_2}(\omega)|^2 d\omega.$$

Учитывая, что

$$|\dot{G}_{s_1}(\omega) + \dot{G}_{s_2}(\omega)|^2 = [\dot{G}_{s_1}(\omega) + \dot{G}_{s_2}(\omega)] [\dot{G}_{s_1}^*(\omega) + \dot{G}_{s_2}^*(\omega)]$$

и раскрывая скобки в левой и правой частях уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{s_1} \dot{G}_{s_1}^* d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{s_2} \dot{G}_{s_2}^* d\omega + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{G}_{s_1} \dot{G}_{s_2}^* + \dot{G}_{s_2} \dot{G}_{s_1}^*) d\omega. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Но в соответствии с (1.53) первые и вторые члены в обеих частях этого уравнения попарно равны. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{G}_{s_1} \dot{G}_{s_2}^* + \dot{G}_{s_2} \dot{G}_{s_1}^*) d\omega. \quad (1.57)$$

Запишем спектральные функции в показательной форме:

$$\dot{G}_{s_1} = G_{s_1} e^{j\varphi_{s_1}}, \quad \dot{G}_{s_2} = G_{s_2} e^{j\varphi_{s_2}}.$$

Тогда из (1.57) после простых алгебраических преобразований и применения формулы Эйлера для косинуса получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{s_1} G_{s_2} \cos(\varphi_{s_1} - \varphi_{s_2}) d\omega. \quad (1.58)$$

Соотношения (1.57) или (1.58) иногда называют теоремой Релея. Формулы (1.53) или (1.54) являются их частными случаями при  $G_{s_1} = G_{s_2}$ .

Из (1.56) следует, что общая энергия, выделяемая суммой двух колебаний, может быть больше суммы энергий отдельных колебаний. Как видно из (1.58), вклад в эту дополнительную энергию вносят составляющие одинаковых частот, обладающие сдвигом фаз, меньшим  $\pi/2$ . При сдвиге фаз более  $\pi/2$  общая энергия может, наоборот, уменьшиться, так как при этом третий член в (1.56) будет отрицательным.

Два колебания  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , между которыми существует функциональная зависимость, называют когерентными.

Некогерентными называют колебания, значения которых не связаны. Энергия взаимодействия таких колебаний равна нулю. Некогерентные колебания всегда ортогональны, т. е. для них

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = 0.$$

Однако ортогональные колебания не обязательно некогерентны. Например,  $s_1(t) = C \cos \omega t$  и  $s_2(t) = S \sin \omega t$  ортогональны (это легко проверить), но они когерентны, так как

$$s_2(t) = S \sqrt{1 - \frac{s_1^2(t)}{C^2}}.$$

Иногда когерентными называют гармонические колебания одинаковой частоты с медленно изменяющимися амплитудами и начальными фазами, если *разность* начальных фаз сохраняется постоянной.

Соотношение между длительностью колебания и шириной модуля его спектральной функции.

Определения длительности колебания

При рассмотрении спектральной функции любого импульсного колебания можно установить, что чем сосредоточеннее, короче импульс во времени, тем протяженнее его спектральная функция по частоте, т. е. тем шире ее модуль. Это — общая закономерность,

непосредственно вытекающая из теоремы об изменении масштаба времени колебания § 1.4. Действительно, пусть

$$F[s(t)] = \dot{G}_s(\omega).$$

Тогда более растянутый во времени импульс той же площади можно записать так:

$$s_\lambda = \lambda s(\lambda t),$$

где  $\lambda$  — положительное число меньше 1.

Спектральная функция удлиненного импульса

$$\dot{G}_{s_\lambda}(\omega) = F[\lambda s(\lambda t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda s(\lambda t) e^{-j\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования  $t' = \lambda t$ , получаем

$$\dot{G}_{s_\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') e^{-j \frac{\omega}{\lambda} t'} dt' = \dot{G}_s\left(\frac{\omega}{\lambda}\right).$$

Функция  $\dot{G}_s\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$  при  $\lambda < 1$  более *сжата* по сравнению с  $\dot{G}_s(\omega)$ .

При сжатии импульса ( $\lambda > 1$ ) происходит обратное явление — расширение спектральной функции.

Понятие *длительности* (продолжительности) определено лишь для П-образного импульса и сходных с ним. Для других импульсов это понятие необходимо соответствующим образом ввести. Это же относится и к ширине модуля спектральной функции.

Для практических расчетов длительность колебания и ширину модуля его спектральной функции определяют как интервал времени и диапазон частот, внутри которых сосредоточена большая часть полной энергии импульса, например 90% (энергетический метод). Для импульсов, начинающихся при  $t=0$ , это условие можно записать так:

$$\int_0^{\Delta t} s^2(t) dt = 0,9 \int_0^{\infty} s^2(t) dt \quad (1.59)$$

и

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta \omega} |\dot{G}_s(\omega)|^2 d\omega = \frac{0,9}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{G}_s(\omega)|^2 d\omega,$$

где  $\Delta t$  — длительность колебания;

$\Delta \omega$  — ширина модуля его спектральной функции (второе равенство записано в соответствии с теоремой Персеваля).

При теоретических исследованиях часто применяют другое определение длительности, более удобное для математического анализа. Рассмотрим плоскую фигуру  $s^2(t)$ , которая образуется возведением в квадрат ординат заданного импульса  $s(t)$ . Тогда за меру длительности импульса  $s(t)$  принимается радиус инерции этой фигуры относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр тяжести, так как эти величины пропорциональны. Рассматривать фигуру  $s^2(t)$  вместо  $s(t)$  необходимо для того, чтобы мера имела смысл и при знакопеременных импульсах.

Сначала определяют центр тяжести фигуры  $s^2(t)$  как отношение момента площади  $M_s$  к площади  $S$ :

$$t_0 = \frac{M_s}{S} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t s^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}. \quad (1.60)$$

Моменты инерции относительно вертикальной оси координат и относительно оси, проходящей параллельно ей через центр тяжести  $t_0$ , по определению

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t) dt; \quad (1.61)$$

$$J_{ц} = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 s^2(t) dt = J - \frac{M_s^2}{S}.$$

Радиус инерции  $\Delta t$ , являющийся мерой длительности колебания, находят из соотношения, известного из теоретической механики:

$$J_{ц} = (\Delta t)^2 S.$$

Следовательно, длительность колебания

$$\Delta t = \sqrt{\frac{J_{ц}}{S}} = \sqrt{\frac{J}{S} - \frac{M_s^2}{S^2}}. \quad (1.62)$$

Аналогичным образом определяют протяженность квадрата модуля спектральной функции по частоте  $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ .

Такой метод оценки длительности колебания или ширины модуля его спектральной функции применим только для тех случаев, когда величины моментов инерции  $J$  и  $J_{ц}$  не обращаются в бесконечность. Это имеет место не всегда, особенно по отношению к спектральным функциям.

Пользуясь методами вариационного исчисления, можно найти минимальное значение, которое может иметь произведение  $\Delta t \Delta f$ . Так, если  $s(t)$  — четная функция времени, то  $\Delta t \Delta f \geq 0,046$ . Наи-

большее приближение к этой величине дает колоколообразный импульс  $s(t) = Ee^{-\alpha^2 t^2}$ , для которого  $\Delta t \Delta f = 0,048$ .

При энергетическом методе определения  $\Delta t$  и  $\Delta f$  для многих простых импульсов произведение  $\Delta t \Delta f$  имеет величину, близкую к единице (для колоколообразного импульса  $\Delta t \Delta f = 0,22$ ).

Таким образом, при грубых оценках, достаточных для практики, можно считать, что  $\Delta f \cong \frac{1}{\Delta t}$ .

Пример. Определить длительность треугольного импульса рис. 1.6: а) методом моментов и б) как интервал, в котором сосредоточено 90% энергии импульса (энергетическим методом).

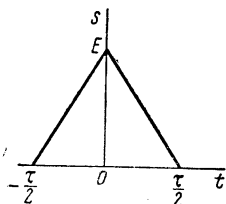


Рис. 1.6. Треугольный импульс

Аналитическое выражение импульса можно записать так:

$$s(t) = \frac{2E}{\tau} \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \text{ при } -\frac{\tau}{2} < t < 0;$$

$$s(t) = -\frac{2E}{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \text{ при } 0 < t < \frac{\tau}{2};$$

$$s(t) = 0 \text{ при других } t.$$

В соответствии с (1.62) необходимо вычислить три величины: момент инерции  $J$  фигуры  $s^2(t)$ , момент площади  $M_s$  и площадь  $S$ . Согласно (1.61) момент инерции

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t) dt = \int_{-\tau/2}^0 t^2 k^2 (t + \tau/2)^2 dt + \int_0^{\tau/2} t^2 k^2 (t - \tau/2)^2 dt,$$

где  $k = \frac{2E}{\tau}$ .

Вычисляя эти элементарные интегралы, получаем

$$J = \frac{k^2 \tau^5}{480}.$$

Центр тяжести фигуры  $s^2(t)$  в силу симметрии  $t_0 = 0$ . Поэтому согласно (1.60)  $M_s = 0$ .

Площадь фигуры  $s^2(t)$

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\tau/2}^0 k^2 (t + \tau/2)^2 dt + \int_0^{\tau/2} k^2 (t - \tau/2)^2 dt.$$

Вычисляя элементарные интегралы, получаем

$$S = \frac{k^2 \tau^3}{24}.$$

В соответствии с (1.62)

$$\Delta t = \sqrt{\frac{J}{S}} \cong 0,25\tau.$$

Найдем  $\Delta t$  с помощью второго метода. Так как импульс симметричен относительно вертикальной оси, то условие (1.59) следует записать так:

$$\frac{\frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} s^2(t) dt = 0,9 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s^2(t) dt.$$

В силу той же симметрии можно вычислить интегралы в пределах от  $-\frac{\Delta t}{2}$  до 0 или от 0 до  $\frac{\Delta t}{2}$ . Выберем первый из этих интервалов. Тогда

$$\frac{\int_{-\frac{\Delta t}{2}}^0 k^2(t + \tau/2)^2 dt}{\frac{\Delta t}{2}} = 0,9 \int_{-\tau/2}^0 k^2(t + \tau/2)^2 dt.$$

После вычисления интегралов и несложных упрощений получаем

$$\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^3 - 3\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^2 + 3\frac{\Delta t}{\tau} = 0,9.$$

Таким образом, для определения  $\Delta t$  необходимо решить кубическое уравнение. Однако зная, что  $\Delta t/\tau < 1$  и пренебрегая второй и третьей степенями  $\Delta t/\tau$ , приближенно получаем

$$3\frac{\Delta t}{\tau} \cong 0,9, \quad \Delta t \cong 0,3\tau.$$

Это практически совпадает с результатом, полученным первым методом.

**Пример.** Определить метод моментов  $\Delta t$  и  $\Delta f$  для экспоненциального импульса  $s(t) = Ee^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ .

В этом случае в соответствии с (1.61)

$$J_{s(t)} = \int_0^{\infty} t^2 (Ee^{-\alpha t})^2 dt = \frac{E^2}{4\alpha^3}.$$

Момент площади и площадь соответственно равны:

$$M_{s(t)} = \int_0^{\infty} t (Ee^{-\alpha t})^2 dt = \frac{E^2}{4\alpha^2},$$



$$S_{s(t)} = \int_0^{\infty} (Ee^{-\alpha t})^2 dt = \frac{E^2}{2\alpha}.$$

В соответствии с (1.62)

$$\Delta t = \frac{1}{2\alpha}.$$

Следует отметить, что при определении энергетическим методом величина  $\Delta t$  получается в 2,3 раза больше.

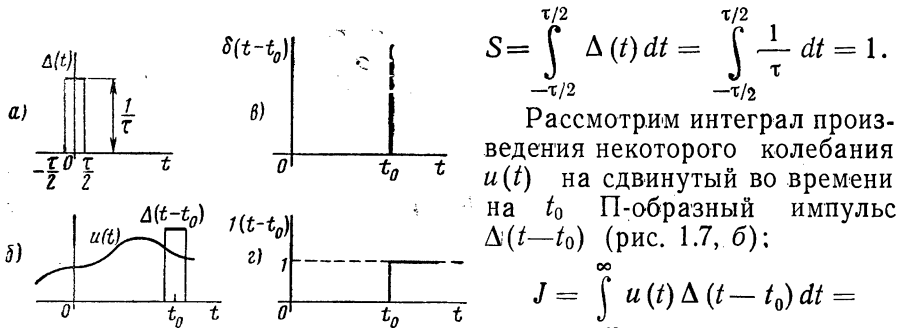
Момент инерции квадрата модуля спектральной функции определить не удастся:

$$J_{G(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G^2(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \frac{E^2}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega \rightarrow \infty,$$

Следовательно, метод моментов в этом случае не пригоден.

### § 1.6. «ИСПЫТАТЕЛЬНЫЕ» ИМПУЛЬСЫ: ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ЕДИНИЧНЫЙ СКАЧОК И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СООТНОШЕНИЯ

Пусть задан П-образный импульс  $\Delta(t)$  длительностью  $\tau$  и величиной  $1/\tau$ , расположенный симметрично относительно вертикальной оси (рис. 1.7, а). Площадь этого импульса



$$S = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Delta(t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{1}{\tau} dt = 1.$$

Рассмотрим интеграл произведения некоторого колебания  $u(t)$  на сдвинутый во времени на  $t_0$  П-образный импульс  $\Delta(t-t_0)$  (рис. 1.7, б):

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \Delta(t-t_0) dt = \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} u(t) \Delta(t-t_0) dt.$$

Рис. 1.7. К пояснению образования дельта-импульса

Для любого колебания  $u(t)$  с конечной скоростью изменения можно выбрать  $\tau$  достаточно малым, чтобы за это время  $u(t)$  практически не изменилось. Тогда

$$J = \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} u(t) \Delta(t-t_0) dt \cong u(t_0) \int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2} \Delta(t-t_0) dt = u(t_0).$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \Delta(t - t_0) dt \cong u(t_0). \quad (1.63)$$

Соотношение (1.63) справедливо для *любого* текущего момента  $t$ . Следовательно, заменяя  $t_0$  на  $t$  и обозначая переменную интегрирования  $t$  через  $x$ , заданное колебание можно записать так:

$$u(t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \Delta(x - t) dx. \quad (1.64)$$

При этом  $u(t)$  представлено в виде совокупности примыкающих импульсов.

Чтобы устранить некоторую неопределенность полученных выражений, связанную с произвольным выбором величины  $\tau$ , введем предельное значение  $\Delta(t)$  при  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta(t) = \delta(t).$$

Получающуюся при этом функцию называют единичной импульсной функцией или дельта-функцией ( $\delta$ -функцией). Она бесконечно велика при  $t = 0$  и равна нулю при всех отличных от 0 значениях аргумента:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Или в более общем случае для сдвинутого во времени импульса:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0. \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (1.65)$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (1.66)$$

Приближенные соотношения (1.63) и (1.64) при этом переходят в точные:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \delta(t - t_0) dt = u(t_0); \quad (1.67)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \delta(x - t) dx. \quad (1.68)$$

Из определения  $\delta$ -функции следует, что

$$\int_{-\infty}^0 \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = t_0; \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл  $\delta$ -функции от  $-\infty$  до  $t$  есть единичный скачок  $1(t)$ . Поэтому  $\delta$ -функцию можно рассматривать как производную единичного скачка:

$$\delta(t) = 1'(t); \quad (1.69)$$

$$\delta(t - t_0) = 1'(t - t_0).$$

Дельта-функция и единичный скачок, смещенные на  $t_0$ , приведены на рис. 1.7, в и 1.7, г. Дельта-функция может быть показана, конечно, весьма условно.

Определим спектральную функцию для  $\delta$ -импульса:

$$\dot{G}_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega t_0} \quad (1.70)$$

(это следует из свойства (1.67)  $\delta$ -функции).

При  $t_0 = 0$

$$G_\delta(\omega) = 1. \quad (1.71)$$

Таким образом,  $\delta$ -функция имеет равномерный спектр на всех частотах. Начальные фазы всех составляющих равны нулю. Это приводит к сложению их в бесконечно короткий импульс при  $t = 0$ .

На основании обратного преобразования Фурье  $\delta$ -импульс можно выразить так:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_\delta(\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.72)$$

Дельта-функция, как и скачок напряжения, являются абстрактными понятиями. При теоретических исследованиях часто применяют  $\delta$ -функции различных иных аргументов, например частоты.

Пример. Найти, пользуясь понятием  $\delta$ -функции, спектральную функцию гармонического колебания

$$u(t) = U_m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

По определению

$$\dot{G}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-j\omega t} dt.$$

Пользуясь формулой Эйлера для косинуса, получаем

$$\dot{G}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_m \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2} e^{-j\omega t} dt.$$

По аналогии с формулой (1.72) введем  $\delta$ -функцию от аргумента  $\omega$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} dx.$$

Тогда, произведя несложные преобразования предыдущего выражения и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega \pm \omega_0)x} dx = \delta(\omega \pm \omega_0),$$

получаем

$$\dot{G}_u(\omega) = \pi U_m [e^{j\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (1.72a)$$

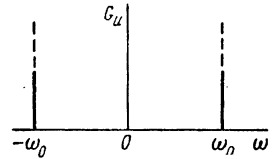


Рис. 1.8. Модуль спектральной функции гармонического колебания

Это — две спектральные линии на частотах  $\omega = \omega_0$  и  $\omega = -\omega_0$ . Модуль спектральной функции гармонического колебания условно изображен на рис. 1.8.

Пользуясь понятием  $\delta$ -функции, можно установить ряд соотношений между последовательностями импульсов и их спектрами. Так,

$$F \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(t + mT) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \dot{G}_u \left( k \frac{2\pi}{T} \right) \delta \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right), \quad (1.73)$$

т. е. периодическая последовательность импульсов  $u(t)$  с периодом  $T$  имеет дискретный спектр с составляющими, расположенными на частотах  $k \frac{2\pi}{T}$ . В частности,

$$F \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t + mT) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right). \quad (1.73a)$$

Другим важным соотношением является

$$F \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT) \delta(t + nT) \right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{G}_u \left( \omega + k \frac{2\pi}{T} \right). \quad (1.74)$$

С помощью этих соотношений часто упрощают анализ воздействия колебаний на различные цепи.

### § 1.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

Рассмотрим колебание  $s(t)$ , состоящее из суммы гармонических составляющих:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.75)$$

Его можно записать еще так:

$$s(t) = \sum_k (C_k \cos \omega_k t + S_k \sin \omega_k t), \quad (1.76)$$

где

$$C_k = A_k \cos \varphi_k, \quad S_k = -A_k \sin \varphi_k,$$

и, следовательно,

$$A_k = \sqrt{C_k^2 + S_k^2}, \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{S_k}{C_k}.$$

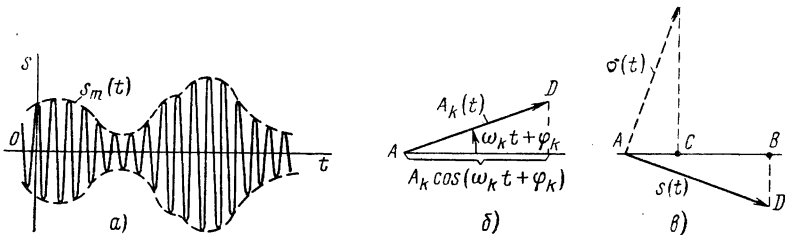


Рис. 1.9. Векторная диаграмма гармонического колебания

Каждое слагаемое ряда (1.75) можно рассматривать как проекцию на ось абсцисс вектора длиной  $A_k$ , находящегося под углом  $\omega_k t + \varphi_k$  к оси абсцисс (рис. 1.9, б). Проекция этого вектора на ось ординат будет равна

$$A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) = C_k \sin \omega_k t - S_k \cos \omega_k t.$$

Совокупность слагаемых в ряде (1.75) или (1.76) представляется результирующим вектором, проекция которого на ось *ординат* равна, очевидно, сумме проекций слагаемых:

$$\sigma(t) = \sum_k \{C_k \sin \omega_k t - S_k \cos \omega_k t\}. \quad (1.77)$$

Колебание  $s(t)$  при этом можно представить в виде

$$s(t) = S_m(t) \cos \Psi(t),$$

где

$$S_m(t) = \sqrt{s^2(t) + \sigma^2(t)} \quad (1.78)$$

есть длина результирующего вектора (см. рис. 1.9, а); ее называют огибающей колебания  $s(t)$ .

Величина

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sigma(t)}{s(t)} \quad (1.78a)$$

есть угол, образуемый вектором с осью абсцисс, который называют полной фазой колебания.

Колебание  $\sigma(t)$  называют сопряженным колебанию  $s(t)$ .

Рассмотрим основные свойства огибающей. Из определения (1.78) следует, что в те моменты, когда  $\sigma(t) = 0$ , колебание  $s(t)$  совпадает с огибающей:  $s(t) = S_m(t)$ . Беря далее производную от обеих частей (1.78), получаем

$$S_m(t) \frac{dS_m(t)}{dt} = s(t) \frac{ds(t)}{dt} + \sigma(t) \frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

Следовательно, в те моменты, когда  $s(t) = S_m(t)$  [и  $\sigma(t) = 0$ ] равны также производные:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{dS_m(t)}{dt}.$$

Кроме того, всегда  $S_m(t) \geq s(t)$ .

Таким образом, огибающая  $S_m(t)$  и колебание  $s(t)$  никогда не пересекаются и имеют общие касательные в точках, где сопряженное колебание  $\sigma(t) = 0$ . Все это оправдывает название «огибающая».

Если частоты слагаемых в ряде (1.75) расположены в полосе от  $\omega_n$  до  $\omega_b$ , узкой по сравнению со средней частотой  $\omega_{cp} = \frac{\omega_n + \omega_b}{2}$ , то колебание будет похоже на гармоническое колебание с медленно изменяющимся периодом и амплитудами (см. рис. 1.9, а). Если полную фазу представить в виде

$$\Psi(t) = \omega_{cp} t + \varphi_0(t),$$

то  $\varphi_0(t)$  будет также медленно изменяющейся функцией.

В общей теории интеграла Фурье доказывается, что сопряженное колебание  $\sigma(t)$  может быть найдено по формуле

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (1.79)$$

При этом имеет место обратное соотношение

$$s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (1.80)$$

Соотношения (1.79) и (1.80) называют парой преобразований Гильберта. Так как при  $\tau = t$  подынтегральные выражения обращаются в бесконечность, то эти соотношения следует вычислять как предел:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{\tau-\alpha} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau + \int_{\tau+\alpha}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau \right].$$

Легко проверить, что преобразование (1.79)

для  $s_1(t) = \cos \omega t$  дает  $\sigma_1(t) = \sin \omega t$ ;

для  $s_2(t) = \sin \omega t$  дает  $\sigma_2(t) = -\cos \omega t$ .

Действительно, если  $s(t) = S \sin \omega t$ , то

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S \sin \omega \tau}{t-\tau} d\tau = -\frac{S}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega (t+x)}{x} dx,$$

где введена новая переменная интегрирования  $x = t - \tau$ .

Раскрывая синус суммы двух аргументов, получаем

$$\sigma(t) = \frac{S}{\pi} \left[ \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x} dx - \cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x} dx \right].$$

Первый из определенных интегралов равен нулю, второй  $\pi$ . Откуда получаем

$$\sigma(t) = -S \cos \omega t.$$

Аналогично осуществляется преобразование для косинуса.

Таким образом, чтобы получить преобразование Гильберта для гармонического колебания, нужно сместить его на полпериода в сторону запаздывания. Если колебание  $s(t)$  будет содержать сумму гармонических составляющих, то, очевидно, каждая гармоническая составляющая  $\sigma(t)$  будет смещена на  $\pi/2$  в сторону запаздывания относительно соответствующей составляющей  $s(t)$ . Если

$$s(t) = \sum_k C_k \cos \omega_k t + \sum_k S_k \sin \omega_k t,$$

то

$$\sigma(t) = \sum_k C_k \sin \omega_k t - \sum_k S_k \cos \omega_k t,$$

что совпадает с (1.77).

Введение сопряженного колебания позволяет представить в комплексной форме любое негармоническое колебание.

Комплексным колебанием  $\dot{\psi}(t)$ , соответствующим данному физическому колебанию, назовем комплексную функцию

$$\dot{\psi}(t) = s(t) + j\sigma(t), \quad (1.81)$$

действительная часть которой равна заданному колебанию, а мнимая сопряжена с ним. Тогда в соответствии с (1.78) огибающая есть модуль комплексного выражения сигнала, а полная фаза — его аргумент:

$$|\dot{\psi}(t)| = \sqrt{s^2(t) + \sigma^2(t)} = S_m(t),$$

$$\arg \dot{\psi}(t) = \operatorname{arctg} \frac{\sigma(t)}{s(t)} = \varphi(t).$$

Комплексное представление негармонических колебаний широко используется в исследованиях.

Вычислим теперь спектральную функцию сопряженного колебания. По определению

$$\dot{G}_\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau.$$

Введем вместо  $t$  новую переменную  $v = t - \tau$  ( $dt = dv$ ) и представим  $e^{j\omega v}$  по формуле Эйлера. Тогда

$$\dot{G}_\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega v - j \sin \omega v}{\pi v} dv.$$

Внутренний интеграл, что можно проверить непосредственным вычислением, равен  $j$  при  $\omega < 0$  и  $-j$  при  $\omega > 0$ . Внешний же интеграл есть спектральная функция заданного колебания  $s(t)$ . Следовательно,

$$\dot{G}_\sigma(\omega) = \begin{cases} j\dot{G}_s(\omega) = \dot{G}_s(\omega) e^{j\pi/2} & \text{при } \omega < 0; \\ -j\dot{G}_s(\omega) = \dot{G}_s(\omega) e^{-j\pi/2} & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \quad (1.82)$$

На основании теоремы о линейности преобразования Фурье спектральная функция  $\dot{\psi}(t)$  будет

$$\dot{G}_\psi(\omega) = \dot{G}_s(\omega) + j\dot{G}_\sigma(\omega) \quad (1.83)$$

или

$$\dot{G}_\psi(\omega) = \begin{cases} \dot{G}_s(\omega) + j[j\dot{G}_s(\omega)] = 0 & \text{при } \omega < 0; \\ \dot{G}_s(\omega) + j[-j\dot{G}_s(\omega)] = 2\dot{G}_s(\omega) & \text{при } \omega > 0. \end{cases} \quad (1.84)$$



Таким образом, для получения спектральной функции комплексного колебания следует удвоить значения спектральной функции заданного колебания при  $\omega > 0$  и полагать их равными нулю при  $\omega < 0$ .

Обратное преобразование Фурье, дающее искомое  $\dot{\psi}(\omega)$ , будет равно

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{\psi}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \dot{G}_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.85)$$

Эта формула позволяет найти комплексное представление сигнала сразу, минуя вычисление сопряженного колебания.

Комплексное представление гармонических колебаний, широко применяемое в радиотехнике, является частным случаем комплексного представления колебаний вообще. Гармоническое колебание можно записать так:

$$s(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos \varphi_0 \cos \omega_0 t - U_m \sin \varphi_0 \sin \omega_0 t.$$

Тогда сопряженное колебание

$$\sigma(t) = U_m \cos \varphi_0 \sin \omega_0 t + U_m \sin \varphi_0 \cos \omega_0 t = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Комплексное колебание

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) = s(t) + j\sigma(t) &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + jU_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_m e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Вводя комплексную амплитуду

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_0}, \quad (1.86)$$

получаем

$$\dot{\psi}(t) = \dot{U}_m e^{j\omega_0 t}. \quad (1.87)$$

Итак, комплексная амплитуда есть «домножитель» к  $e^{j\omega_0 t}$  в выражении для комплексного представления гармонического колебания.

Пример. Представить в комплексной форме колебание

$$u(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}.$$

В соответствии с (1.81) комплексное колебание

$$\dot{\psi}(t) = u(t) + ju_c(t),$$

где  $u_c(t)$  — сопряженное с  $u(t)$  колебание, вычисляемое в соответствии с (1.79).

Подставляя заданное колебание, взятое от аргумента  $\tau$ , получаем

$$u_c(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau (t - \tau)} d\tau = -\frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau^2 - t\tau} d\tau.$$

По таблице интегралов ([19], поз. 3.723.12)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau^2 - t\tau} d\tau = \pi \frac{\cos \omega_0 t - 1}{t}.$$

Следовательно,

$$u_c(t) = \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0 t} = -\frac{\sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{\omega_0 t}{2}},$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} - j \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{\omega_0 t}{2}}.$$

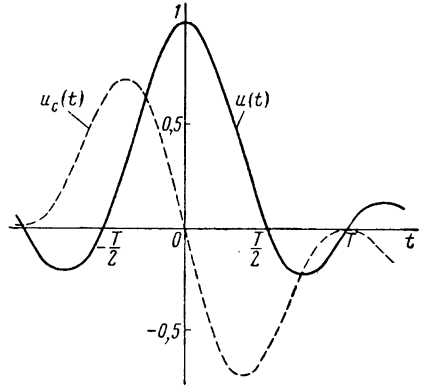


Рис. 1.10. Функция  $u(t)$  и сопряженная ей по Гильберту функция

Графики  $u(t)$  и  $u_c(t)$  приведены на рис. 1.10. В этом случае также можно вычислить модуль  $|\dot{\psi}(t)|$  и изобразить его графиком.

### § 1.8. РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В РЯДЫ КОТЕЛЬНИКОВА

Рядом Котельникова называют разложение колебания  $s(t)$ , заданного на интервале от  $-\infty$  до  $\infty$  в ряд (1.4) по системе функций вида  $\frac{\sin x_k}{x_k}$ . Это разложение справедливо для колебаний с *ограниченным спектром*, т. е. для колебаний, преобразование Фурье которых равно нулю вне некоторого ограниченного диапазона частот.

Рассмотрим колебание  $s(t)$  и представим его интегралом Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.88)$$

Пусть спектральная функция

$$\dot{G}_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

равна нулю при  $\omega < -\omega_b$  и  $\omega > \omega_b$ . В этом случае  $\dot{G}_s(\omega)$ , рассматриваемую как функцию аргумента  $\omega$ , можно *разложить в ряд Фурье*.

Периодом по аргументу  $\omega$  разлагаемой функции является величина  $2\omega_B$ .

В соответствии с (1.12), где аргумент  $t$  нужно заменить на  $\omega$ , получаем

$$\dot{G}_s(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk \frac{2\pi}{2\omega_B} \omega}. \quad (1.89)$$

Коэффициенты разложения  $\dot{A}_k$  в соответствии с (1.13) будут равны

$$\dot{A}_k = \frac{2}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \dot{G}_s(\omega) e^{-jk \frac{2\pi}{2\omega_B} \omega} d\omega = \frac{1}{\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \dot{G}_s(\omega) e^{-jk \frac{\pi}{\omega_B} \omega} d\omega. \quad (1.90)$$

При рассмотрении правых частей (1.90) и (1.88) видно, что

$$\dot{A}_k = \frac{2\pi}{\omega_B} s\left(-k \frac{\pi}{\omega_B}\right) = 2\Delta t s(-k\Delta t), \quad (1.91)$$

где обозначено

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_B}. \quad (1.92)$$

При этом спектральную функцию (1.89) можно представить так:

$$\dot{G}_s(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(-k\Delta t) e^{jk\Delta t\omega} = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) e^{-jk\Delta t\omega}. \quad (1.93)$$

Подставляя (1.93) и (1.88), меняя порядок действий интегрирования и суммирования и вычисляя интегралы, получаем

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \Delta t \sum_k s(k\Delta t) e^{-jk\Delta t\omega} e^{j\omega t} d\omega = \sum_k \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} s(k\Delta t) e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \\ &= \sum_k s(k\Delta t) \frac{\Delta t}{\pi} \frac{\sin \omega_B(t-k\Delta t)}{(t-k\Delta t)}. \end{aligned}$$

Окончательно находим

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t-k\Delta t)}{\omega_B(t-k\Delta t)}. \quad (1.94)$$

Полученную формулу (1.94) можно рассматривать как ряд (1.4) по функциям

$$C_k(t) = \frac{\sin x_k}{x_k} = \frac{\sin \omega_B(t-k\Delta t)}{\omega_B(t-k\Delta t)}.$$

Несколько этих функций приведены на рис. 1.11. Легко проверить непосредственным вычислением, что они ортогональны. Функция  $C_k(t)$  равна 1 при  $t = k \frac{2\pi}{\omega_B} = k \frac{1}{2\Delta f_B}$  и равна нулю в другие моменты,

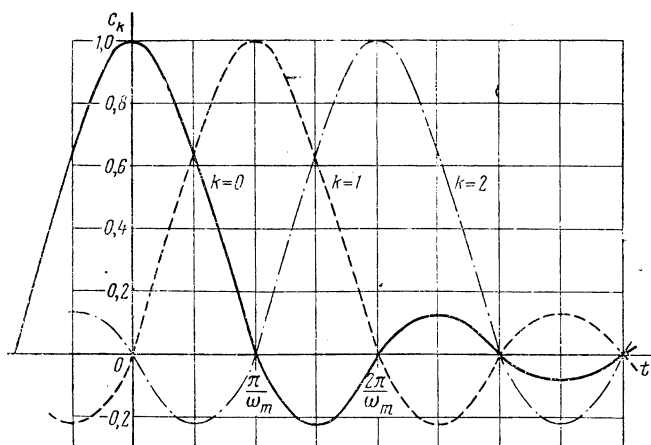


Рис. 1.11. Функции  $\frac{\sin x_k}{x_k}$

кратные  $\frac{1}{2f_B}$ . Поэтому в моменты  $t_k = k \frac{1}{2f_B}$  в сумме (1.94) остается один член, который равен мгновенному значению  $s(t)$  в рассматриваемый момент  $t_k$ . Однако, как следует из доказанного, ряд (1.94) представляет колебание в любой момент времени.

Таким образом, можно сказать, что колебание, не содержащее частот выше  $f_B$  гц, определяется своими мгновенными значениями, отсчитанными через интервалы времени

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_B} = \frac{1}{2f_B}. \quad (1.95)$$

Простота определения коэффициентов  $a_k$  является большим преимуществом ряда (1.94)\*.

Если колебание  $s(t)$  — импульсное (ограниченное во времени), то оно не может иметь ограниченную спектральную функцию. Однако если последняя убывает при  $\omega \rightarrow \pm\infty$  достаточно быстро, то, отбрасывая ее «хвосты», рядом (1.94) приближенно можно представить и импульсное колебание *заданной длительности T*. Так как при этом  $K = T/\Delta f$  отсчетов мгновенных значений, то можно сказать,

\* В математической теории интерполяции подобные ряды впервые применил Е. Т. Уиттакер в 1915 г. Представление колебаний их «выборками» впервые осуществлено В. А. Котельниковым.

что колебание с ограниченной спектральной функцией и длительностью определяется

$$K = \frac{T}{\Delta f} = 2f_B T$$

своих мгновенных значений. Эти мгновенные значения иногда называют числом степеней свободы колебания  $s(t)$ .

Представление колебания с ограниченным спектром мгновенными значениями, взятыми через интервалы  $\frac{1}{2f_B}$  физически понятно, так как ограниченность спектра (отсутствие очень быстро изменяющихся составляющих) означает, что за время между отсчетами колебание не может существенно измениться.

Рассмотрим узкополосное колебание  $u(t)$ , энергия которого сосредоточена в некоторой области частот от  $\omega_H$  до  $\omega_B$ , причем

$$\Delta\omega = \omega_B - \omega_H \ll \omega_0 = \frac{\omega_H + \omega_B}{2}.$$

В этом случае спектральная функция отлична от нуля лишь в областях частот от  $-\omega_B$  до  $-\omega_H$  и от  $\omega_H$  до  $\omega_B$ . Ее можно представить в виде двух слагаемых:

$$\dot{G}(\omega) = \dot{G}_1(\omega) + \dot{G}_2(\omega),$$

где

$$\dot{G}_1(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega < \omega_H \quad \text{и} \quad \omega > \omega_B;$$

$$\dot{G}_2(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega < -\omega_B \quad \text{и} \quad \omega > -\omega_H.$$

При любом значении частоты эти величины комплексно сопряжены, так что

$$\dot{G}_1^*(-\omega) = \dot{G}_2(\omega).$$

Функции  $\dot{G}_1(\omega)$  и  $\dot{G}_2(\omega)$  условно изображены на рис. 1.12, а. (Условность состоит в невозможности изобразить на плоском чертеже комплексные функции.) Сопряженность  $\dot{G}_2(\omega)$  изображена штрихом.

Построим периодическую функцию  $\dot{G}_\Pi(\omega)$ , которая будет совпадать с  $\dot{G}(\omega)$  в тех областях частот, где  $\dot{G}(\omega)$  не равно нулю (рис. 1.12, б). Для этого достаточно выбрать интервал, чтобы

$$\delta\omega = \frac{2\omega_0}{N},$$

где  $N$  — наибольшее нечетное целое число от деления  $2\omega_0$  на  $\Delta\omega$ .

Периодическую функцию  $\dot{G}_\Pi(\omega)$  разложим в ряд (по аргументу  $\omega$ ) с периодом  $2\delta\omega$ :

$$\dot{G}_\Pi(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk \frac{2\pi}{2\delta\omega} \omega}. \quad (1.96)$$

Колебание  $u(t)$  после этого можно представить следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{-\omega_H} \dot{G}_n(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_H}^{\omega_B} \dot{G}_n(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

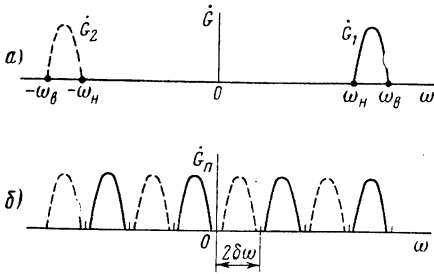


Рис. 1.12. К пояснению разложения колебания в ряд Котельникова

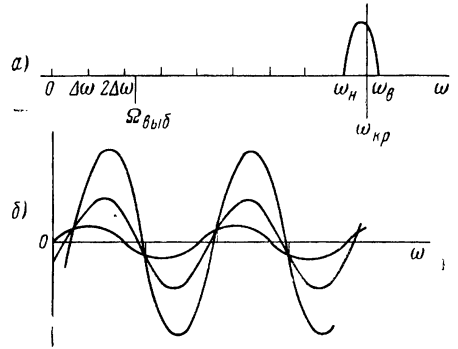


Рис. 1.13. К пояснению неоднозначности при разложении в ряд

Подставляя сюда (1.96), меняя порядок действий суммирования и интегрирования и выполняя интегрирование, получаем:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(k \frac{2\pi}{2\delta\omega}\right) \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} \left(t - k \frac{2\pi}{2\delta\omega}\right)}{\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - k \frac{2\pi}{2\delta\omega}\right)} \cos \omega_0 \left(t - k \frac{2\pi}{2\delta\omega}\right). \quad (1.97)$$

В выражении (1.97) все величины, кроме  $u\left(k \frac{2\pi}{2\delta\omega}\right)$ , известны. Поэтому можно сказать, что узкополосное колебание определяется своими мгновенными значениями, отсчитанными через интервалы времени

$$\Delta t = \frac{2\pi}{2\delta\omega}.$$

Если  $\Delta\omega = \omega_B - \omega_H$  находится в кратном соотношении со средней частотой полосы  $\omega_0$ , то  $\delta\omega = \Delta\omega$  и выборки необходимо брать через интервалы  $2\pi/2\Delta\omega = 1/2\Delta f$ , т. е. с той же частотой, что и при представлении колебания с полосой от 0 до  $\omega_B = \Delta\omega$ .

Неудобством подобного представления колебаний является необходимость взятия выборок (мгновенных значений) *точно* через интервал  $\Delta t$ , т. е. с частотой  $\Omega_{\text{выб}} = 2\Delta\omega$ . Действительно, если, например,  $\Omega_{\text{выб}} > 2\Delta\omega$ , то в полосе сигнала  $\omega_H \div \omega_B$  найдется составляющая частоты  $\omega_{кр}$ , кратная  $\Omega_{\text{выб}}$  (рис. 1.13, а). Составляющая этой частоты

не может быть восстановлена по ее выборкам. Они будут периодически повторяться и через них можно провести множество гармонических колебаний (рис. 1.13, б). Более того, можно убедиться, что целая область составляющих вблизи частоты  $\omega_{\text{кр}}$  не будет восстановлена по выборкам.

Рассмотрим другой способ представления узкополосного колебания, не имеющий этого недостатка. Воспользовавшись сопряженностью функции  $\dot{G}_1(\omega)$  и  $\dot{G}_2(\omega)$ , колебание  $u(t)$  можно записать так:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{в}}}^{-\omega_{\text{н}}} \dot{G}_1^*(-\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{\text{н}}}^{\omega_{\text{в}}} \dot{G}_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.98)$$

Функцию  $\dot{G}_1(\omega)$  можно разложить в ряд, аналогичный (1.96), с периодом  $\Delta\omega = \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}$ . Этот ряд будет совпадать с  $\dot{G}_1(\omega)$  в области частот, где  $\omega_{\text{н}} < \omega < \omega_{\text{в}}$ . Подставляя его в (1.98) и производя преобразования, можно получить:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u\left(k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} \left(t - k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)}{\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)} \cos \omega_0 \left(t - k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_c\left(k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right) \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} \left(t - k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)}{\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right)} \sin \omega_0 \left(t - k \frac{2\pi}{\Delta\omega}\right), \quad (1.99)$$

где  $u_c(t)$  — сопряженное с  $u(t)$  колебание.

Таким образом,  $u(t)$  в данном случае определяется своими мгновенными значениями, а также мгновенными значениями сопряженного колебания, взятыми через интервалы времени

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta f},$$

т. е. в два раза реже, чем в случае колебания со спектром от 0 до  $\omega_{\text{в}}$ . Однако если частота  $\omega_{\text{в}}$  и полоса  $\Delta\omega$  равны, то *общее* количество требуемых отсчетов в единицу времени в обоих случаях одинаково.

Из определения огибающей и полной фазы колебания можно установить, что знание выборок  $u(t)$  и  $u_c(t)$  эквивалентно значению огибающей и начальной фазы колебания.

Пр и м е р. Представить рядом Котельникова колебание

$$s(t) = \frac{S}{2} + S \sin\left(\Omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{S}{2} \sin\left(2\Omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

График заданного колебания показан на рис. 1.14. Там же отмечены мгновенные значения  $a_k = s(k\Delta t) = s\left(k \frac{\pi}{\omega_B}\right)$ . В силу периодичности колебания мгновенные значения будут повторяться. Так,

$$\begin{aligned} a_{-4} &= a_0 = a_4 = a_8 = \dots = 1,7S; \\ a_{-3} &= a_1 = a_5 = \dots = 0,7S; \\ a_{-2} &= a_2 = a_6 = \dots = 0,3S; \\ a_{-1} &= a_3 = a_7 = \dots = -0,66S. \end{aligned}$$

Общий член ряда (1.94) с учетом того, что  $\Delta t = \frac{T}{4}$  ( $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ), запишем следующим образом:

$$a_k C_k = a_k \frac{\sin \omega_B (t - k\Delta t)}{\omega_B (t - k\Delta t)} = a_k \frac{\sin \pi \left(4 \frac{t}{T} - k\right)}{\pi \left(4 \frac{t}{T} - k\right)}.$$

Если в ряде (1.92) учесть члены от  $k = -4$  до  $k = 4$ , то

$$s(t) = \sum_{k=-4}^4 a_k \frac{\sin \pi (4t/T - k)}{\pi (4t/T - k)},$$

где величины  $a_k$  выписаны ранее.

Значения  $C_k(t)$  для приближенных расчетов можно брать по кривым рис. 1.11. При рассмотрении кривых и записи ряда видно, что независимо от количества учитываемых членов ряд будет давать точные значения колебания в моменты взятия «выборок» ( $t=0, T/4, T/2$  и т. д.). При конечном числе членов ряда в другие моменты он будет давать приближенные значения  $s(t)$ . Вычислим, например,  $s(t)$  при  $t=T/8$ . Пользуясь кривыми рис. 1.11, получаем:

$$\begin{aligned} s(T/8) &= 1,7 \cdot 0,07S - 0,7 \cdot 0,09S + 0,3 \cdot 0,13S + \\ &+ 0,66 \cdot 0,22S + 1,7 \cdot 0,63S + 0,7 \cdot 0,63S - \\ &- 0,3 \cdot 0,22S - 0,66 \cdot 0,13S - 1,7 \cdot 0,09S \cong 1,5S, \end{aligned}$$

что равно истинному значению колебания в пределах точности графиков.

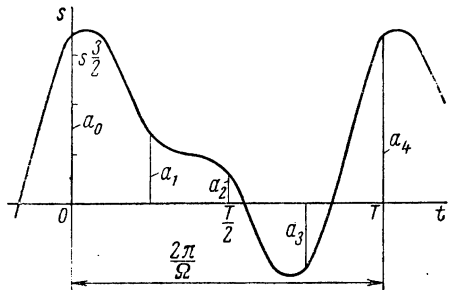


Рис. 1.14



## § 1.9. РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В РЯДЫ ПО НЕКОТОРЫМ СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Известные в настоящее время и рассматриваемые в курсе математики специальные функции могут быть ортогональными на всей бесконечной оси  $t$ , на интервале  $0, \infty$  и на конечном интервале  $-t_1, +t_2$ . Многие специальные функции хорошо табулированы, что позволяет производить точные вычисления, а при правильном подборе функции для заданного колебания можно ограничиться небольшим числом членов ряда.

### Разложение по полиномам Лежандра первого рода

Полиномы Лежандра первого рода получены при отыскании частного решения обыкновенного дифференциального уравнения для потенциала (уравнения Лапласа) и определяются так\*:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (1.100)$$

При целых  $n \geq 0$  они содержат конечное число членов. В частности, для полиномов Лежандра первых шести порядков получаем:

$$P_0(t) = 1,$$

$$P_1(t) = t,$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3),$$

$$P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t),$$

$$P_6(t) = \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5).$$

Полиномы четных порядков являются четными функциями, нечетных порядков — нечетными:

$$P_n(-t) = P_n(t) \quad \text{при } n \text{ четном,}$$

$$P_n(-t) = -P_n(t) \quad \text{при } n \text{ нечетном.}$$

---

\* Производя вычисления, следует иметь в виду, что у разных авторов определения специальных функций могут отличаться коэффициентами, не зависящими от аргумента.

Графики этих полиномов приведены на рис. 1.15. Полиномы ортогональны на отрезке  $-1, 1$ , так что

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = 0 \quad \text{при } n \neq m,$$

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \frac{2}{2n+1} \quad \text{при } n = m.$$

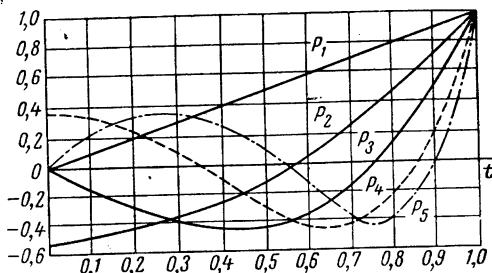


Рис. 1.15. Графики полиномов Лежандра

Следовательно, *ортонормальными* являются функции

$$p_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t)$$

и коэффициенты ряда (1.4) следует вычислять по формулам

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 s(t) P_k(t) dt. \quad (1.101)$$

Подробные таблицы полиномов можно найти в книге [4].

Разложение по функциям Бесселя первого рода с целочисленными порядками

Функции Бесселя первого рода являются частными решениями одного вида линейного дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Бесселя).

Функция Бесселя первого рода  $n$ -го целочисленного порядка определяется так:

$$J_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}}{m!(m+n)!}. \quad (1.102)$$

При этом имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} J_n(t) &= (-1)^n J_{-n}(t); \\ J_n(-t) &= (-1)^n J_n(t); \\ J_{n+1}(t) &= \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Последнее соотношение позволяет вычислить значения функции порядка  $n+1$  по значениям функций двух предыдущих порядков.

Графики функций Бесселя первого рода нескольких порядков приведены на рис. 1.16.

Функции Бесселя не ортогональны, но если  $\alpha_{nk}$  и  $\alpha_{nl}$  — различные корни функции  $n$ -го порядка, то выполняются следующие соотношения:

$$\int_0^1 t J_n(\alpha_{nk}t) J_n(\alpha_{nl}t) dt = 0 \text{ при } k \neq l; \quad (1.103)$$

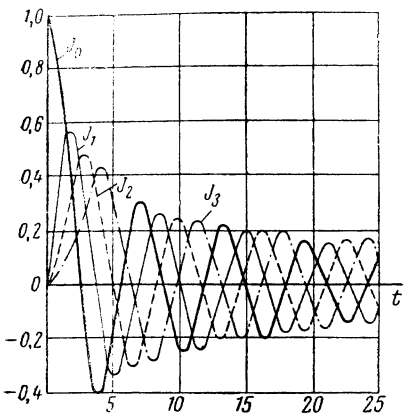


Рис. 1.16. Графики функции Бесселя

где  $J'_n(t)$  — производная функции  $n$ -го порядка, которую можно вычислить, как

$$J'_n(t) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)]. \quad (1.104)$$

Следовательно, если записать ряд

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_n(\alpha_{nk}t),$$

то, интегрируя его почленно после умножения на  $tJ_n(\alpha_{nl}t)$ , получаем на основании (1.103):

$$a_k = \frac{2}{[J'_n(\alpha_{nk})]^2} \int_0^1 ts(t) J_n(\alpha_{nk}t) dt. \quad (1.105)$$

Подробные таблицы функций Бесселя можно найти в книге [4].

### Разложение по функциям Хаара

Функции Хаара получены при решении задачи о нахождении сходящегося разложения для *любой* непрерывной функции. Они определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \chi_{n, \text{max}}^k &= \sqrt{2^n} \text{ при } \frac{2k-2}{2^{n+1}} < t < \frac{2k-1}{2^{n+1}}; \\ \chi_n^k &= -\sqrt{2^n} \text{ при } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < t < \frac{2k}{2^{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (1.106)$$

и равны 0 при всех остальных  $t$  на отрезке  $0,1$ . В этом случае  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $k=1, 2, 3, \dots, 2^n$ . Функции Хаара нескольких начальных порядков показаны на рис. 1.17. Их ортогональность очевидна, а ортонормальность на отрезке  $0,1$  легко проверяется.

Особенностью функций Хаара является сравнительная простота их получения (генерирования в радиоустройствах). Коэффициенты  $a_k$  ряда (1.4) можно вычислить по формуле (1.6).

### Разложение по полиномам Чебышева

Полиномы Чебышева получены при решении вопроса об отыскании среди всех полиномов степени  $n$  (с коэффициентом при старшей степени, равным 1) такого, модуль которого на отрезке  $-1,1$  будет наименьшим. Они определяются так:

$$T_n(t) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-t^2} \frac{d^{(n)}}{dt^n} (\sqrt{1-t^2})^{2n-1}. \quad (1.107)$$

При этом имеет место соотношение

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t). \quad (n > 0)$$

Для каждого целого  $n \geq 0$  полиномы содержат конечное число членов. В частности,

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, & T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ T_1(t) &= t, & T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1, \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, & T_5(t) &= 16t^5 - 20t^3 + 5t \text{ и т. д. } \end{aligned}$$

Графики некоторых из этих полиномов приведены на рис. 1.18.

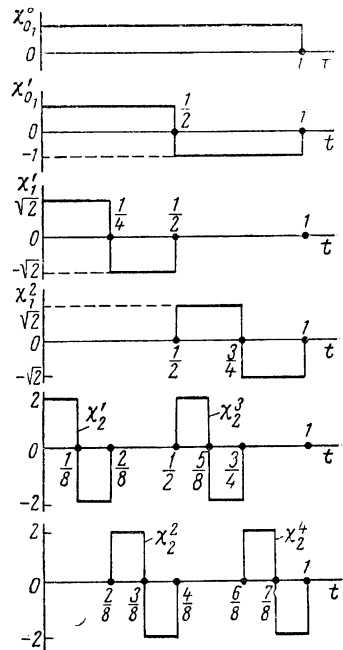


Рис. 1.17. Графики функции Хаара

Полиномы Чебышева не ортогональны, но

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) T_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \neq 0; \\ \pi & \text{при } m = n = 0. \end{cases} \quad (1.108)$$

Такие функции называют ортогональными с весом  $\rho(t)$  (в данном случае  $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ).

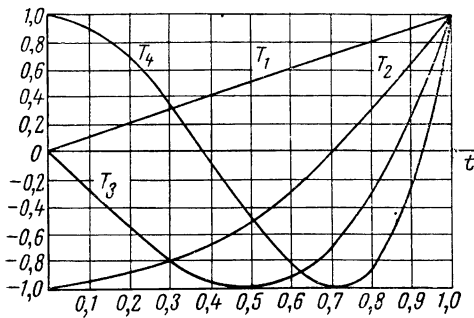


Рис. 1.18. Графики полиномов Чебышева

Следовательно, система функций

$$\theta_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_n(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}} \quad (1.109)$$

ортонормальна на отрезке  $-1,1$ , а если присоединить к ней функцию

$$\theta_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-t^2}}, \quad (1.110)$$

то система будет *полной*.

Разложение колебания  $s(t)$  по функциям  $\theta_n(t)$  имеет вид

$$s(t) = \frac{a_0}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{1-t^2}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_k(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}. \quad (1.111)$$

При этом

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{s(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}} dt; \quad (1.112)$$

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{s(t) T_k(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}} dt \quad \text{при } k = 1, 2, 3 \dots$$

Если ввести новые коэффициенты

$$b_0 = \frac{a_0}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{1-t^2}},$$

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a_k}{\sqrt[4]{1-t^2}} \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \dots,$$

то можно получить разложение по полиномам Чебышева:

$$s(t) = b_0 T_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k T_k(t). \quad (1.113)$$

При этом коэффициенты  $b_k$  вычисляются по формуле

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{s(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (1.114)$$

Разложение по полиномам Чебышева родственно разложению в ряд по косинусам кратных дуг. Если в разложении по  $T_k(t)$  сделать подстановку  $t = \cos x$ , то можно убедиться, что для любого колебания  $s(t)$  разложение будет почленно тождественно с разложением функции  $s(\cos x)$  в ряд по косинусам на отрезке  $-\pi, \pi$ . При этом

$$a_k^{\text{чеб}} = a_k^{\cos}. \quad (1.115)$$

Это свойство следует из того, что, как легко убедиться непосредственным вычислением,

$$T_k(t) = \cos(k \arccos t).$$

### Разложение по полиномам Лагерра

Полиномы Лагерра являются решением одного вида линейных дифференциальных уравнений второго порядка и определяются так:

$$L_n(t) = (-1)^n e^t \frac{d^{(n)}}{dt^n} (t^n e^{-t}). \quad (1.116)$$

При этом имеет место соотношение

$$L_{n+1}(t) = (t - 2n - 1) L_n(t) - n^2 L_{n-1}(t).$$

При целых  $n \geq 0$  полиномы содержат конечное число членов. В частности, для полиномов нескольких начальных порядков получаем:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, & L_3(t) &= t^3 - 9t^2 + 18t - 6, \\ L_1(t) &= t - 1, & L_4(t) &= t^4 - 16t^3 + 72t^2 - 96t + 24, \\ L_2(t) &= t^2 - 4t + 2, \end{aligned}$$

Графики этих полиномов приведены на рис. 1.19.

Полиномы Лагерра ортогональны с весом  $p(t) = e^{-t}$ , так что

$$\int_0^{\infty} L_n(t) L_m(t) e^{-t} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ (n!)^2 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Следовательно, ортонормированную систему на интервале  $0, \infty$  образуют функции

$$l_n(t) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{t}{2}} L_n(t). \quad (1.117)$$

Многочлены  $l_n(t)$  называют функциями Лагерра. Они образуют полную систему ортонормальных функций. Если  $c_i(t) = l_i(t)$ , то коэффициенты ряда (1.4) можно вычислить по формуле (1.6).

Иногда рассматривают обобщенные полиномы Лагерра, определяемые как

$$L_n^\alpha = (-1)^n e^{t-\alpha} \times \\ \times \frac{d^{(n)}}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t}).$$

Таблицы полиномов и функций Лагерра можно найти в книге [5].

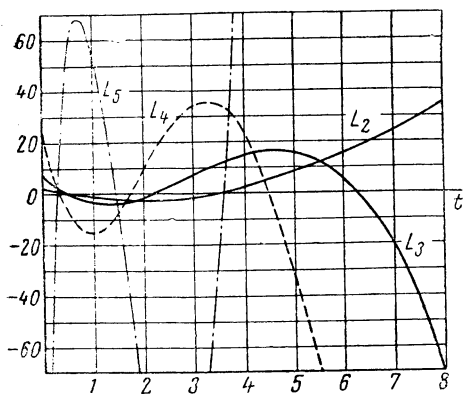


Рис. 1.19. Графики полиномов Лагерра

### Разложение по полиномам Эрмита

Полиномы Эрмита являются частными решениями одного линейного дифференциального уравнения и определяются так:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^{(n)}}{dt^n} (e^{-t^2}) \quad \text{при } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.118)$$

При этом имеет место соотношение

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2_n H_{n-1}(t).$$

Полиномы нескольких начальных порядков выражаются следующим образом:

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t, \\ H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12.$$

Графики функций нескольких порядков для небольших значений аргумента даны на рис. 1.20.

Полиномы Эрмита ортогональны с весом  $p(t) = e^{-t^2}$ , так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Следовательно, ортонормированную систему на всей бесконечной оси образуют функции

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t). \quad (1.119)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \psi_n(-t) \text{ при } n \text{ четном;} \\ \psi_n(t) &= -\psi_n(-t) \text{ при } n \text{ нечетном.} \end{aligned}$$

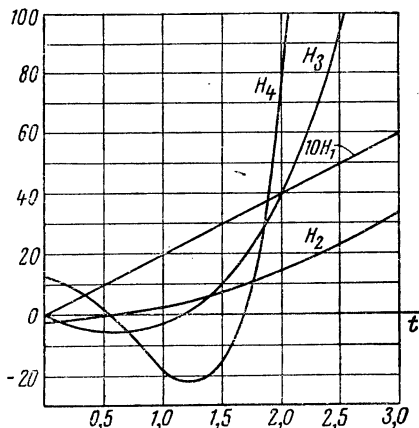


Рис. 1.20. Графики полиномов Эрмита

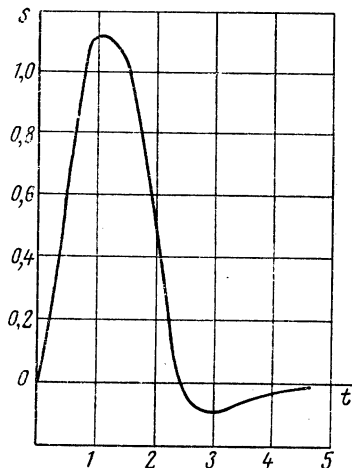


Рис. 1.21

При разложении по функциям (1.119) коэффициенты ряда (1.4) можно вычислять по формуле (1.6).

Функции Эрмита можно вычислять по формулам и таблицам, указанным в книге [4].

**Пример.** Приблизительно представить аналитически импульс, заданный осциллограммой рис. 1.21, путем разложения его по полиномам Эрмита.

Искомое разложение по ортонормальным функциям (1.119) имеет вид

$$s(t) = a_0 \psi_0(t) + a_1 \psi_1(t) + a_2 \psi_2(t) + \dots + a_k \psi_k(t) + \dots$$

Учитывая соотношение (1.119), получим

$$\begin{aligned} s(t) &= a_0 0,75 e^{-\frac{t^2}{2}} H_0(t) + a_1 0,532 e^{-\frac{t^2}{2}} H_1(t) + \\ &+ a_2 0,266 e^{-\frac{t^2}{2}} H_2(t) + a_3 0,108 e^{-\frac{t^2}{2}} H_3(t) + a_4 0,04 e^{-\frac{t^2}{2}} H_4(t) + \dots \end{aligned}$$



Коэффициенты  $a_k$  определяем по формуле (1.6):

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_k(t) dt.$$

Интегрирование производят графически, путем применения специальных приборов или более приближенно путем замены интеграла суммой. При этом

$$a_k \cong \sum_{i=0}^{T_n/\Delta t} s(i\Delta t) \psi_k(i\Delta t) \Delta t,$$

где  $\Delta t$  — малые интегралы времени, в течение которых  $s(t)$  и  $\psi_k(t)$  мало изменяются;

$T_n$  — длительность импульса, принятая равной 5 мксек.

Нижний предел суммирования взят равным нулю, так как при  $t < 0$   $s(t) = 0$ .

Производя приближенное интегрирование, беря значения  $s(i\Delta t)$  по осциллограмме и вычисляя  $\psi_k(i\Delta t)$  с помощью таблиц, получим:

$$a_0 \cong 1,13, \quad a_1 \cong 0, \quad a_2 \cong 1,1, \quad a_3 \cong 0, \quad a_4 \cong -0,55, \\ a_5 = a_6 = a_7 = \dots \cong 0.$$

Следовательно,

$$s(t) \cong [0,85H_0(t) + 0,29H_2(t) - 0,022H_4(t)] e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Вычислим, например, значение  $s(t)$  при  $t = 0,75$  мксек:

$$s(0,75) \cong [0,85 \cdot 1 + 0,29 \cdot 1 - 0,022(-9)] e^{-\frac{(0,75)^2}{2}} \cong 1,01.$$

Эта величина близка к значению осциллограммы.

Пример. Разложить по функциям Бесселя колебание

$$u(t) = \begin{cases} bt & \text{при } 0 < t < \tau; \\ 0 & \text{при других } t \end{cases}$$

(линейно растущее напряжение в течение времени  $\tau$ ).

Ряд по функциям Бесселя записывается в развернутом виде:

$$u(t) = a_1 J_n(\alpha_{n1}t) + a_2 J_n(\alpha_{n2}t) + \dots + a_k J_n(\alpha_{nk}t) + \dots,$$

где  $\alpha_{nk}$  —  $k$ -й корень функции  $J_n(t)$ , выбор которой пока произволен.

В соответствии с (1.105)

$$a_k = \frac{2}{[J'_n(\alpha_{nk})]^2} \int_0^1 tu(t) J_n(\alpha_{nk}t) dt.$$

Введем новую переменную  $x = t/\tau$  и будем рассматривать колебание  $u_1(t) = u(\tau x) = b\tau x$ , линейно растущее при  $0 < x < 1$ . Подставляя  $b\tau x$  в выражение для  $a_k$ , получаем

$$a_k = \frac{2}{[J'_n(\alpha_{nk})]^2} \int_0^1 xb\tau x J_n(\alpha_{nk}x) dx.$$

В соответствии с таблицами ([19], поз. 6.561.5)

$$\int_0^1 x^{n+1} J_n(ax) dx = a^{-1} J_{n+1}(a).$$

В нашем случае  $a = \alpha_{nk}$ ,  $n = 1$ . Следовательно,

$$a_k = \frac{2b\tau}{[J'_1(\alpha_{1k})]^2} (\alpha_{1k})^{-1} J_2(\alpha_{1k}).$$

Значения корней  $\alpha_{1k}$  функции  $J_1(x)$  можно найти в справочниках или приближенно из графиков рис. 1.16. Соответствующие значения производной  $J'_1(x)$  следует вычислять по формуле (1.104), а значения  $J_2(x)$  брать из таблиц или графиков\*.

Для окончательного выражения ряда необходимо перейти к переменной  $t$ , т. е. записывать ряд в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^N a_k J_1\left(\alpha_{1k} \frac{t}{\tau}\right),$$

где  $a_k$  — вычисленные коэффициенты;

$N$  — число членов ряда, достаточное для представления  $u(t)$  с нужной точностью.

## § 1.10. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

В пространстве трех измерений положение точки определяют тремя координатами  $x, y, z$ . При этом расстояние между двумя точками с координатами  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  находят как

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Трехмерное пространство, координаты точек и расстояния в нем можно рассматривать как обобщение соответствующих двумерных понятий. Продолжая это обобщение дальше, можно совокупность  $n$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  рассматривать, как координаты точки  $n$ -мерного

\* Например, Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций.

пространства, где расстояние между точками  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  определяется по формуле

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i - x_i)^2}. \quad (1.120)$$

Но в соответствии с (1.4) каждому колебанию  $s(t)$  при помощи выбранной системы ортонормальных функций  $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$  можно сопоставить совокупность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Соответствие колебаний  $s(t)$  и совокупности чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  взаимно однозначно. Поэтому каждому колебанию  $s(t)$  будет соответствовать вполне определенная точка или вектор в  $n$ -мерном пространстве, а числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  будут являться координатами точки или проекциями вектора. Назовем этот вектор вектором колебания  $s(t)$ . При этом получается ряд весьма наглядных представлений.

Если два колебания  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  отличаются только постоянным множителем, то этим же множителем будут, очевидно, отличаться их соответствующие координаты и поэтому векторы колебаний  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  будут *совпадать по направлению*.

Если два колебания

$$s_1(t) = \sum_{k=1}^n a_k C_k(t) \quad \text{и} \quad s_2(t) = \sum_{k=1}^n b_k C_k(t)$$

ортгональны на некотором интервале  $t_1, t_2$ , то

$$\int_{t_1}^{t_2} s_1(t) s_2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k a_k C_k(t) \sum_j b_j C_j(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k b_k. \quad (1.121)$$

Но по определению угол между двумя векторами

$$\cos \theta = \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{|s_1| |s_2|}. \quad (1.122)$$

Если  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , то  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$  и, следовательно, *ортгональным колебаниям соответствуют ортогональные векторы*.

Колебания  $s_1(t) = C_1(t), s_2(t) = C_2(t), \dots, s_n(t) = C_n(t)$  будут изображаться единичными векторами, направленными вдоль соответствующих осей  $n$ -мерного пространства.

Пусть колебание имеет длительность  $T$ , а основная энергия его составляющих сконцентрирована в пределах полосы частот до

$\omega_B = 2\pi f_B$ . Пользуясь приближенным разложением в ряд Котельникова, вычислим его удельную энергию:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \cong \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{2f_B T} s(k \Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - k \Delta t)}{\omega_B(t - k \Delta t)} \right]^2 dt.$$

Раскрывая выражение для квадрата суммы слагаемых и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x \mp k\pi)}{x \mp k\pi} dx = 0$$

при  $k \neq 0$ , выразим энергию через мгновенные значения в точках  $t = k \Delta t$ :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \cong \frac{1}{2f_B} \sum_{k=1}^{2f_B T} s^2(k \Delta t). \quad (1.123)$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{2f_B T} s^2(k \Delta t) = 2f_B \mathcal{E} = 2f_B TP_{cp}, \quad (1.124)$$

где  $P_{cp}$  — средняя мощность колебания.

Если в качестве координат колебания  $s(t)$  выбрать величины  $s(k \Delta t)$ , то длина вектора колебания (расстояние от начала координат) в соответствии с (1.120) и (1.124) будет равна

$$\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{2f_B T} s^2(k \Delta t)} = \sqrt{2f_B TP_{cp}}. \quad (1.125)$$

Отсюда следует, что чем больше произведение полосы колебания на его длительность, тем в пространстве большего числа измерений оно изображается и тем дальше находится конец вектора колебания от начала координат при той же средней мощности. Два колебания одинаковой средней мощности удалены друг от друга тем больше, чем больше у них произведение полосы на длительность.

Геометрическое представление колебаний облегчает понимание сложных процессов и способствует запоминанию результатов.

### § 1.11. НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Большое значение в радиотехнике имеют непрерывные колебания, которые можно представить в виде

$$u(t) = U_m(t) \cos \Psi(t) \quad \text{при} \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.126)$$

где  $U_m(t)$  — медленно изменяющаяся по сравнению с  $\cos \Psi(t)$  функция.

За интервал времени, в течение которого  $\Psi(t)$  изменится на  $2\pi$ , функцию  $U_m(t)$  можно считать постоянной. Функция  $U_m(t)$  есть огибающая, а  $\Psi(t)$  полная фаза колебания. В частности, если  $\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ , а  $U_m(t) = \text{const}$ , то (1.126) выражает обычное гармоническое колебание.

Колебание (1.126), следовательно, можно изобразить вращающимся вектором длиной  $U_m(t)$ , расположенным в каждый момент под углом  $\Psi(t)$  к оси проекций.

Определим частоту колебания (1.126) как количество полных оборотов вектора в единицу времени. Если полная фаза  $\Psi(t)$  будет изменяться не пропорционально времени, то количество оборотов в единицу времени (количество периодов) и, следовательно, частота колебания будут *переменными величинами*. При этом для определения *средней частоты* на некотором отрезке времени  $\Delta t$  следует взять отношение приращения количества оборотов вектора ко времени, затраченному для этого:

$$f_{\Delta t} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}, \quad (1.127)$$

так как  $\Delta \Psi = 2\pi \Delta n$ . В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем мгновенную частоту колебания

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}. \quad (1.128)$$

Мгновенная угловая частота колебания

$$\omega(t) = 2\pi f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (1.129)$$

Таким образом, *угловая частота колебания (1.126) есть производная по времени полной фазы*.

В частности, если полная фаза изменяется пропорционально времени

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi_0,$$

то в соответствии с (1.129)

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0,$$

т. е. совпадает с обычным определением постоянной частоты.

В гармоническом колебании можно изменять огибающую (амплитуду), начальную фазу и частоту. В соответствии с этим можно получить амплитудно-модулированные, фазо-модулированные и частотно-модулированные колебания.

Пример. Определить закон изменения мгновенной частоты колебания

$$u(t) = U_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{at^2}{2}\right).$$

В соответствии с (1.129)

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\omega_0 t + \frac{at^2}{2}\right) = \omega_0 + at.$$

Частота изменяется во времени линейно со скоростью  $a \frac{\text{рад}}{\text{сек}^2}$ .

### § 1.12. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (АМК)

Пусть в выражении (1.126) полная фаза  $\Psi(t) = \omega_0 t + \Phi_0$ , а амплитуда  $U_m(t)$  изменяется по закону  $s(t)$  относительно некоторого среднего уровня  $U_{\text{ср}}$ . Тогда

$$u(t) = [U_{\text{ср}} + as(t)] \cos(\omega_0 t + \Phi_0) = U_{\text{ср}} [1 + bs(t)] \cos(\omega_0 t + \Phi_0), \quad (1.130)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные во времени коэффициенты, выбранные так, чтобы амплитуда колебания всегда была положительной.

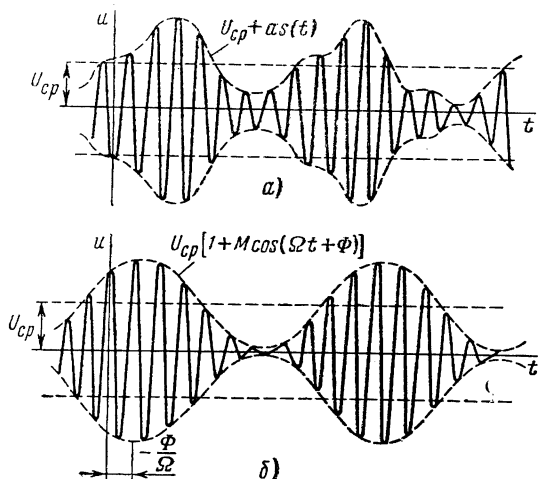


Рис. 1.22. Амплитудно-модулированные колебания

Уравнение (1.130) является аналитическим выражением АМК. Его график приведен на рис. 1.22, а.

В простейшем случае  $s(t)$  является гармоническим колебанием с частотой  $\Omega \ll \omega_0$  и начальной фазой  $\Phi$ :

$$s(t) = S \cos(\Omega t + \Phi). \quad (1.131)$$

При этом

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{\text{cp}} \left[ 1 + \frac{bS}{U_{\text{cp}}} \cos(\Omega t + \Phi) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_{\text{cp}} [1 + M \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.132)$$

Величину

$$M = \frac{bS}{U_{\text{cp}}} = \frac{\Delta U_{\text{cp max}}}{U_{\text{cp}}}$$

называют коэффициентом модуляции. Так как амплитуда — величина положительная, то всегда  $M \leq 1$ . При  $M=0$  (1.132) превращается в простое гармоническое колебание. Колебание (1.132) при  $M=1$  показано на рис. 1.22, б. При этом амплитуда изменяется от 0 до  $2U_{\text{cp}}$ .

Медленное колебание  $s(t)$  называют модулирующим. Высокочастотное колебание  $U_{\text{cp}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  (получающееся при  $M=0$ , т. е. при  $s(t) \equiv 0$ ) называют несущим.

Если модулирующее колебание  $s(t)$  содержит ряд гармонических составляющих и представляется рядом

$$s(t) = \sum_{k=1}^N S_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k), \quad (1.133)$$

то из (1.130) и (1.133) получают модулированное колебание

$$\begin{aligned} u(t) &= U_{\text{cp}} \left[ 1 + b \sum_{k=1}^N S_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_{\text{cp}} \left[ 1 + \sum_{k=1}^N M_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.134)$$

В равенстве (1.134) величины

$$M_k = \frac{bS_k}{U_{\text{cp}}} \quad (1.135)$$

называют парциальными (частичными) коэффициентами модуляции. Они характеризуют влияние составляющих модулирующего колебания с частотами  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  на общее изменение амплитуды модулированного колебания. Колебание (1.134), в отличие от (1.132), может быть названо сложно-модулированным. Колебание (1.132) является частным случаем (1.134) при  $N=1$ .

Амплитудно-модулированное колебание может быть представлено в виде суммы гармонических колебаний. Раскрывая скобки в (1.134) и учитывая, что

$$\cos(\Omega_k t + \Phi_k) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_k)t + \varphi_0 + \Phi_k] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_k)t + \varphi_0 - \Phi_k],$$

получаем

$$u(t) = U_{cp} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{k=1}^N \frac{M_k U_{cp}}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_k)t + \varphi_0 + \Phi_k] + \sum_{k=1}^N \frac{M_k U_{cp}}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_k)t + \varphi_0 - \Phi_k]. \quad (1.136)$$

Первое слагаемое является несущим колебанием. Среднюю (в уравнении) группу гармонических составляющих с частотами  $(\omega_0 + \Omega_k)$  называют верхней боковой полосой частот. Третью группу гармонических составляющих с частотами  $(\omega_0 - \Omega_k)$  называют нижней боковой полосой частот.

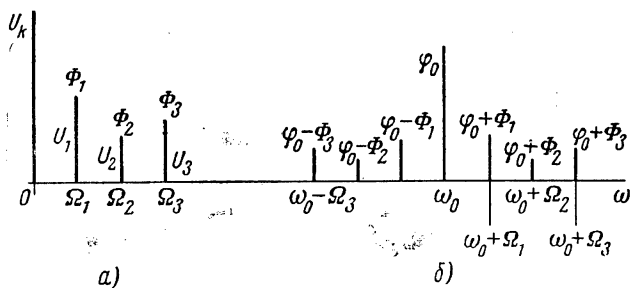


Рис. 1.23. Спектральные диаграммы модулирующего и модулированного колебаний

Всего в АМК имеется  $2N + 1$  гармонических составляющих. При  $M_1 = M_2 = \dots = M_N = 0$  (отсутствие модуляции) остается лишь несущее колебание. При простом гармоническом законе модуляции (1.131) в составе АМК имеются несущее колебание и два боковых с частотами  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ .

Совокупность гармонических колебаний, т. е. его спектр, на которые может быть разложено сложное, в частности, АМК, можно представить в виде спектральной диаграммы.

На рис. 1.23 показаны спектральные диаграммы: *a* — модулирующего колебания при  $N = 3$ ,  $\Omega_2 = 2\Omega_1$ ,  $\Omega_3 = 3\Omega_1$  и *б* — модулированного колебания. Парциальные коэффициенты модуляции и начальные фазы взяты произвольными. Из рис. 1.23 видно, что колебания боковых частот располагаются попарно-симметрично относительно частоты несущего колебания. Для получения общей кар-



тины спектра АМК необходимо спектр модулирующего колебания «сместить» на величину  $\omega_0$  и дополнительно «зеркально отразить» относительно прямой  $\omega = \omega_0$ .

При решении ряда задач бóльшую наглядность можно получить, используя *векторную диаграмму* АМК. При этом каждую гармоническую составляющую АМК изображают вектором и находят результирующий вектор.

На рис. 1.24, а показаны векторы несущего, верхнего и нижнего боковых колебаний в предположении, что ось проекций вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_0$  рад/сек. При этом несу-

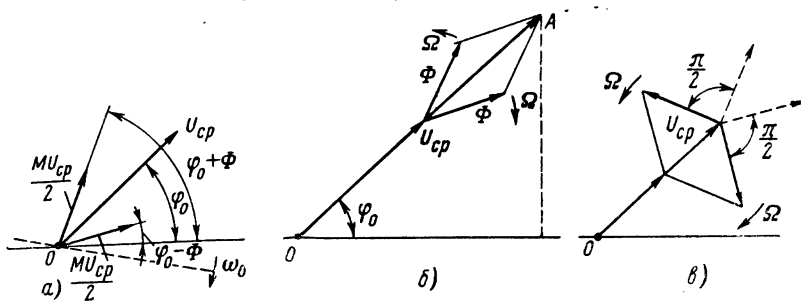


Рис. 1.24. Векторные диаграммы амплитудно-модулированного колебания

щее колебание изображается *неподвижным* вектором длиной  $U_{cp}$  под углом  $\varphi_0$  к начальному положению оси проекций. Его проекция на *вращающуюся* ось в любой момент времени равна  $U_{cp} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ , т. е. равна мгновенным значениям несущего колебания. Верхнее боковое колебание изображается вектором длиной  $\frac{MU_{cp}}{2}$  под углом  $\varphi_0 + \Phi$  к начальному положению оси (в момент  $t=0$ ). Этот вектор следует считать вращающимся с угловой скоростью  $\Omega$  *против* часовой стрелки. Причем его проекция на вращающуюся со скоростью  $\omega_0$  ось в любой момент времени

$$\begin{aligned} & \frac{MU_{cp}}{2} \cos[\varphi_0 + \Phi + \omega_0 t + \Omega t] = \\ & = \frac{MU_{cp}}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi]. \end{aligned}$$

Аналогично вектор нижнего бокового колебания в начальный момент расположен под углом  $\varphi_0 - \Phi$  и вращается по часовой стрелке.

На рис. 1.24, б приведен вектор, равный сумме трех указанных векторов и изображающий АМК в момент  $t=0$ .

На рис. 1.24, в показано АМК в момент  $T/4$ , где  $T$  — период модулирующего колебания. За время  $T/4$  векторы боковых колебаний повернулись на  $90^\circ$ . Аналогичным образом можно изобразить АМК

в любой момент времени. Длина результирующего вектора  $OA$  изменяется в соответствии с изменением амплитуды модулированного колебания.

В случае сложного АМК необходимо учитывать все боковые составляющие колебания, изображая их векторами, попарно вращающимися в противоположные стороны со скоростями  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \dots, \Omega_N$  рад/сек.

**Пример.** Вычислить амплитуды, частоты и начальные фазы гармонических составляющих АМК

$$u = 10 \left[ 1 + 0,5 \cos \left( 2\pi 10^3 t + \frac{\pi}{8} \right) \right] \cos \left[ 2\pi 10^6 t + \frac{\pi}{4} \right] \text{ в.}$$

При сравнении заданного колебания с (1.132) видно, что оно представляет собой простое АМК с коэффициентом модуляции  $M=0,5$ . В соответствии с (1.136) амплитуды, частоты и начальные фазы составляющих колебаний равны:

несущего

$$U_{\text{ср}} = 10 \text{ в, } \frac{\omega_0}{2\pi} = 10^6 \text{ гц, } \varphi_0 = \frac{\pi}{4};$$

верхнего бокового:

$$\frac{U_{\text{ср}} M}{2} = \frac{10 \cdot 0,5}{2} = 2,5 \text{ в, } \frac{\omega_0 + \Omega}{2\pi} = (10^6 + 10^3) \text{ гц} = 1001 \text{ кгц,}$$

$$\varphi_0 + \Phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8} \pi;$$

нижнего бокового:

$$\frac{U_{\text{ср}} M}{2} = \frac{10 \cdot 0,5}{2} = 2,5 \text{ в, } \frac{\omega_0 - \Omega}{2\pi} = (10^6 - 10^3) \text{ гц} = 999 \text{ кгц,}$$

$$\varphi_0 - \Phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8},$$

### § 1.13. ФАЗО-МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (ФМК) И ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ (ЧМК)

Фазо-модулированным называют колебание

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1.137)$$

у которого *сдвиг фазы* (по отношению к  $\cos \omega_0 t$ ) изменяется от начального значения  $\varphi_0$  пропорционально модулирующему колебанию  $s(t)$ :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + as(t). \quad (1.138)$$

Подставляя (1.138) в (1.137), получаем аналитическое выражение ФМК:

$$u(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + as(t)]. \quad (1.139)$$

В простейшем случае  $s(t)$  является гармоническим колебанием (1.131) с частотой  $\Omega$ . При этом

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + aS \cos(\Omega t) + \Phi] = \\ &= U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + m \cos(\Omega t + \Phi)]. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Величину

$$m = aS \quad (1.141)$$

называют индексом модуляции. Так как наибольшее значение  $\cos(\Omega t + \Phi)$  равно 1, то  $m$  численно равно максимальному отклонению начальной фазы колебания от среднего значения  $\varphi_0$ .

На рис. 1.25 приведена модель для получения ФМК вида (1.140). Если рамку вращать в магнитном поле со скоростью  $\omega_0$  рад/сек, а положение оси магнитов колебать по закону  $\cos(\Omega t + \Phi)$  с максимальным отклонением угла на  $m$  рад, то в рамке будет индуцироваться э. д. с. (1.140) с переменной начальной фазой (практически ФМК получают другими способами).

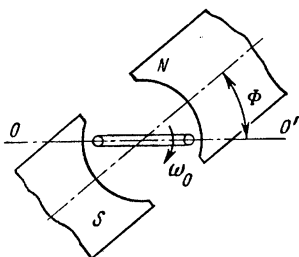


Рис. 1.25. Модель для получения фазо-модулированного колебания

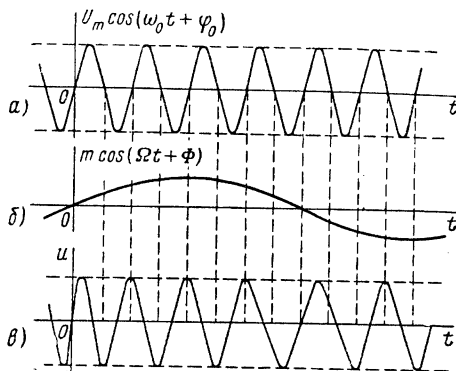


Рис. 1.26. К пояснению получения графика фазо-модулированного колебания

На рис. 1.26, а показано немодулированное (несущее) колебание; на рис. 1.26, б — низкочастотное модулирующее колебание (1.131), на рис. 1.26, в — график ФМК (1.140).

Для наглядности положено, что  $\varphi_0 = \pi/2$  и  $\Phi = \pi/2$ . При этом

$$u(t) = U_m \sin[\omega_0 t + m \sin \Omega t].$$

Для упрощения чертежа принято, что  $\omega_0 = 8\Omega$ . Из рисунка видно, как в результате изменения во времени  $m \sin \Omega t$  колебание  $\sin[\omega_0 t + m \sin \Omega t]$  проходит через нулевые значения не через одинаковые промежутки времени, т. е. в процессе модуляции изменяется период колебания, а следовательно, и его частота.

Если модулирующее колебание содержит ряд гармонических составляющих, как (1.133), то на основании (1.139) получаем

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U_m \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + a \sum_{k=1}^N S_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \right] = \\
 &= U_m \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + \sum_{k=1}^N m_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \right]. \quad (1.142)
 \end{aligned}$$

Величины

$$m_k = a S_k \quad (1.143)$$

называют *парциальными индексами модуляции*. Они характеризуют вклад составляющих модулирующего колебания с частотами  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  в общее изменение начальной фазы колебания. Колебание (1.142) в отличие от (1.140) может быть названо *сложно-модулированным ФМК*. Колебание (1.140) является частным случаем (1.142) при  $N=1$ .

Пусть теперь в соответствии с модулирующим колебанием  $s(t)$  изменяется *частота* некоторого колебания относительно среднего значения  $\omega_0$ , так что

$$\omega(t) = \omega_0 + as(t). \quad (1.144)$$

Колебание с переменной частотой на основании (1.126) и (1.129) может быть записано так:

$$u(t) = U \cos \int \omega(t) dt \quad (1.145)$$

(индекс  $m$  при амплитуде опущен).

На основании (1.145) и (1.144) получаем аналитическое выражение ЧМК:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= U \cos \int \omega(t) dt = U \cos \int [\omega_0 + as(t)] dt = \\
 &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + a \int_0^t s(t) dt \right]. \quad (1.146)
 \end{aligned}$$

При сравнении этого выражения с (1.139) видно, что ЧМК можно рассматривать как фазо-модулированное колебание, однако *сдвиг фазы* изменяется пропорционально не модулирующему колебанию, а *его интегралу*

$$\varphi(t) = a \int_0^t s(t) dt.$$

В простейшем случае  $s(t)$  является гармоническим колебанием (1.131). При этом

$$\begin{aligned} u(t) &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + a \int S \cos(\Omega t + \Phi) dt \right] = \\ &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + \frac{aS}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi) \right] = \\ &= U \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + m \sin(\Omega t + \Phi)]. \end{aligned} \quad (1.147)$$

В выражении (1.47)

$$m = \frac{aS}{\Omega} \quad (1.148)$$

является индексом модуляции.

При сравнении (1.147) с (1.140) родственность частотной и фазовой модуляций становится особенно очевидной. При частотной модуляции индекс  $m$  прямо пропорционален амплитуде модулирующего колебания и обратно пропорционален его частоте. (При фазовой модуляции  $m$  от  $\Omega$  не зависит, см. 1.141.)

Величина

$$\Delta\omega_{\max} = aS \quad (1.149)$$

является наибольшим мгновенным отклонением частоты от среднего значения  $\omega_0$ ; ее называют девиацией частоты.

Таким образом, при частотной модуляции

$$m = \frac{f \Delta\omega_{\max}}{\Omega}. \quad (1.150)$$

Если модулирующее колебание  $s(t)$  содержит ряд гармонических составляющих, как (1.133), то

$$\omega(t) = \omega_0 + as(t) = \omega_0 + a \sum_{k=1}^N S_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k); \quad (1.151)$$

аналитическое выражение ЧМК при этом на основании (1.145) и (1.151) будет:

$$\begin{aligned} u(t) &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + a \int \sum_k S_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) dt \right] = \\ &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + \sum_k \frac{aS_k}{\Omega_k} \sin(\Omega_k t + \Phi_k) \right] = \\ &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + \sum_{k=1}^N m_k \sin(\Omega_k t + \Phi_k) \right]. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Величины

$$m_k = \frac{aS_k}{\Omega_k} = \frac{\Delta\omega_{k\max}}{\Omega_k} \quad (1.153)$$

называют парциальными индексами модуляции.

Пользуясь определением (1.129), вычислим частоту фазо-модулированного колебания (1.139):

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega_0 t + \varphi_0 + as(t)] = \omega_0 + a \frac{ds(t)}{dt}. \quad (1.154)$$

Таким образом, ФМК можно рассматривать как колебание с переменной частотой, однако частота изменяется при этом пропорционально не модулирующему колебанию, а его производной по времени:

$$\omega(t) = \omega_0 + a \frac{ds(t)}{dt}. \quad (1.155)$$

В случае гармонического закона модуляции из (1.140) находим

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega_0 t + \varphi_0 + m \cos(\Omega t + \Phi)] = \\ &= \omega_0 - m\Omega \sin(\Omega t + \Phi). \end{aligned} \quad (1.156)$$

Так как наибольшее значение  $\sin(\Omega t + \Phi)$  равно 1, то величина

$$\Delta m_{\max} = m\Omega = aS\Omega \quad (1.157)$$

является максимальным отклонением частоты ФМК от среднего значения, т. е. девиацией частоты.

Таким образом, при фазовой модуляции девиация частоты пропорциональна  $m$  (или амплитуде модулирующего колебания) и частоте модуляции. При частотной модуляции девиация частоты от  $\Omega$  не зависит (см. 1.149).

В табл. 1.2 проведено сравнение некоторых свойств ФМК и ЧМК при гармоническом законе модуляции.

АМК, ФМК и ЧМК аналогичным образом могут быть представлены в виде суммы гармонических составляющих. Сравнительно просто это можно сделать лишь для случая гармонического закона модуляции. Оба колебания можно записать в виде

$$u(t) = U \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + m \cos(\Omega t + \Phi)]. \quad (1.158)$$

Если при законе модуляции (1.131)  $m = \frac{aS}{\Omega}$ , то (1.158) будет выражать ЧМК, если же  $m = aS$ , а  $\Phi$  отличается на  $\pi/2$  [так что  $\sin(\Omega t + \Phi + \pi/2) = \cos(\Omega t + \Phi)$ ], то (1.158) будет представлять ФМК.

	ФМК	ЧМК
Закон модуляции	$S \cos (\Omega t + \Phi)$	
Аналитическое выражение	$U \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + m \cos (\Omega t + \Phi)]$	$U \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + m \sin (\Omega t + \Phi)]$
Отклонение фазы	$m \cos (\Omega t + \Phi)$	$m \sin (\Omega t + \Phi)$
Индекс модуляции	$aS$	$\frac{aS}{\Omega}$
Отклонение частоты	$-\Delta\omega_{\max} \sin (\Omega t + \Phi)$	$\Delta\omega_{\max} \cos (\Omega t + \Phi)$
Девияция частоты	$aS\Omega$	$aS$

Преобразуем (1.158) по формуле косинуса суммы двух аргументов:

$$u(t) = U \cos (\omega_0 t + \varphi_0) \cos [m \sin (\Omega t + \Phi)] - \\ - U \sin (\omega_0 t + \varphi_0) \sin [m \sin (\Omega t + \Phi)]. \quad (1.159)$$

В курсах математики доказывается, что

$$\cos (y \sin x) = J_0(y) + 2J_2(y) \cos 2x + 2J_4(y) \cos 4x + \dots \\ \sin (y \sin x) = 2J_1(y) \sin x + 2J_3(y) \sin 3x + 2J_5(y) \sin 5x + \dots \quad (1.160)$$

Здесь через  $J_n(y)$  обозначена функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка аргумента  $y$ .

Применим эти соотношения к (1.159), положив  $x = \Omega t + \Phi$ ,  $y = m$ . После обычных алгебраических преобразований и раскрытия произведений тригонометрических функций получаем

$$u(t) = UJ_0(m) \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + U \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos [(\omega_0 + n\Omega)t + \\ + \varphi_0 + n\Phi] + (-1)^n U \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos [(\omega_0 - n\Omega)t + \varphi_0 - n\Phi]. \quad (1.161)$$

Это выражение представляет собой разложение ФМК и ЧМК на гармонические составляющие при гармоническом законе модуляции

с частотой  $\Omega$ . Первый член является *несущим колебанием*; средняя (в уравнении) группа составляющих с частотами  $(\omega_0 + n\Omega)$  — *верхняя боковая полоса частот*; третья группа составляющих с частотами  $(\omega_0 - n\Omega)$  — *нижняя боковая полоса частот*. Количество верхних и нижних боковых частот теоретически бесконечно велико. Боковые колебания расположены симметрично относительно  $\omega_0$  на расстоянии  $n\Omega$  по частоте. Практически при заданном  $m$  составляющие, начиная приблизительно с  $n = m + 1$ , можно не учитывать (амплитуды  $U_{m+1}(m)$  становятся весьма малыми). Поэтому можно считать, что ФМК и ЧМК занимают полосу частот

$$2\Delta\omega = 2\Omega(m + 1) \quad (1.162)$$

( $m + 1$  составляющие вправо и влево от составляющей с частотой  $\omega_0$ ).

Основное преимущество связи с помощью ЧМ и ФМ сигналов — большая помехоустойчивость — проявляется при  $m \gg 1$ . Следовательно, полоса частот, занимаемая при частотной и фазовой модуляции, значительно больше, чем при амплитудной ( $2\Omega$ ). Поэтому частотную и фазовую модуляции применяют лишь в относительно свободных диапазонах ультракоротких волн.

Если индекс модуляции  $m \ll 1$ , то в ряде (1.161) можно учитывать лишь по одной верхней и нижней боковой составляющей. При этом, считая, что при малых  $m$   $J_0(m) \cong 1$  и  $J_1(m) \cong \frac{m}{2}$ , получаем

$$u(t) \cong U \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] - \frac{U_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi]. \quad (1.163)$$

Выражение (1.163) можно получить непосредственно из (1.158), раскрывая косинус суммы двух аргументов  $\omega_0 t + \varphi_0$  и  $m \sin(\Omega t + \Phi)$  и учитывая, что косинус малого аргумента приблизительно равен 1, а синус малого аргумента приблизительно равен аргументу.

Выражение (1.163) отличается от выражения для амплитудно-модулированного колебания лишь знаком нижнего бокового колебания. Однако именно этот минус (или, что одно и то же, добавочная фаза  $\pi$ ) приводит к превращению АМК и ЧМК (или ФМК).

На векторных диаграммах рис. 1.27 показано, как изменение фазы нижнего бокового колебания на  $\pi$  приводит к тому, что ре-

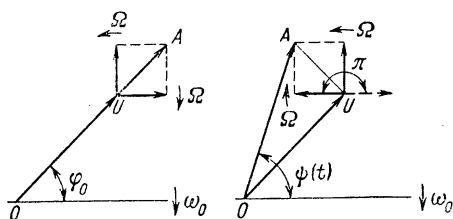


Рис. 1.27. Векторные диаграммы АМК и ФМК



зультурующий вектор  $OA$  имеет переменную начальную фазу. Изменение амплитуды вектора ЧМК есть результат пренебрежения боковыми составляющими более высокого порядка и приближенности выражения (1.163).

Из (1.161) видно, что знак минус присутствует при всех нечетных нижних боковых составляющих (при  $n=1, 3, 5, \dots$ ).

Спектральная диаграмма колебания (1.161) показана на рис. 1.28.

Следует отметить, что в отличие от АМК, при ЧМК и ФМК соотношение между составляющими может быть весьма произволь-

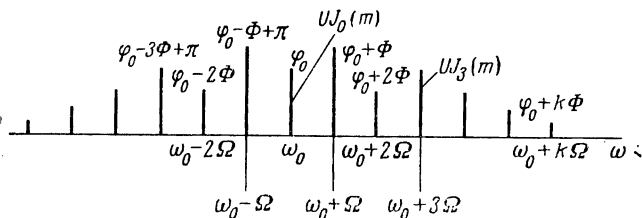


Рис. 1.28. Спектральная диаграмма ФМК и ЧМК

ным. В частности, при определенных  $m$  (определяемых из условия  $J_0(m) = 0$ ) несущее колебание отсутствует.

Особенностью спектра ЧМК в отличие от ФМК является практическая независимость его ширины (1.162) от частоты модуляции. При увеличении  $\Omega$  индекс модуляции (1.148) уменьшается пропорционально  $\Omega$ , а ширина спектра (1.162) практически остается постоянной. Причем спектральные составляющие на рис. 1.28 «раздвигаются», а учитываемое количество их  $2(m+1) = 2 \left( \frac{aS}{\Omega} + 1 \right)$

уменьшается. При ФМК индекс модуляции *не зависит* от  $\Omega$ . Поэтому с увеличением  $\Omega$  ширина спектра (1.162) увеличивается, а спектральные составляющие, не изменяясь по амплитудам и количеству (амплитуды равны  $UJ_n(m)$ , а  $m = \text{const}$ ), «раздвигаются» по частоте.

Если модулирующее колебание  $s(t)$  состоит из ряда составляющих, как (1.133), то спектр ЧМ или ФМ колебания можно найти методом, аналогичным примененному ранее, раскрывая выражение для косинуса нескольких аргументов. Спектр колебания оказывается весьма сложным. Помимо составляющих с частотами  $\omega_0 \pm n\Omega_n$ , он содержит также комбинационные частоты вида  $\omega_0 \pm p\Omega_1 \pm q\Omega_2 \pm \dots \pm r\Omega_3 \pm \dots$  ( $p, q, r$  принимают любые целые значения). Общая полоса частот, занимаемых колебанием, при этом приблизительно равна  $2(\Delta\omega_{\max} + \Omega_{\max})$ , где  $\Omega_{\max}$  — наибольшая из модулирующих частот.

Пример. Записать аналитическое выражение ФМК и ЧМК, если модулирующее колебание

$$s(t) = \begin{cases} bt & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

В соответствии с (1.139) при  $t > 0$

$$\begin{aligned} u_{\text{фаз}}(t) &= U \cos[\omega_0 t + as(t) + \varphi_0] = U \cos[\omega_0 t + abt + \varphi_0] = \\ &= U \cos[(\omega_0 + ab)t + \varphi_0]. \end{aligned}$$

Это — колебание с *постоянной* частотой  $\omega_0 + ab$ .

В соответствии с (1.146) при  $t > 0$

$$\begin{aligned} u_{\text{част}}(t) &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + a \int_0^t s(t) dt \right] = \\ &= U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + a \int_0^t btdt \right] = U \cos \left[ \omega_0 t + \varphi_0 + \frac{abt^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Это — колебание, сдвиг фазы которого (относительно  $\cos \omega_0 t$ ) изменяется по квадратичному закону.

#### § 1.14. АНСАМБЛИ КОЛЕБАНИЙ И ИХ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ. ПРОЦЕДУРА ГРАМ-ШМИДТА

В технике часто приходится рассматривать не отдельные колебания, а совокупность колебаний, используемых одновременно. Так, в системах передачи дискретной информации всегда используется ряд (не менее двух) различных сигналов  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$ , ...,  $s_M(t)$ , с помощью которых передаются отдельные сообщения, например буквы. Совокупность  $M$  колебаний, рассматриваемых одновременно, назовем ансамблем.

По отношению к ансамблю возникает важная задача определения набора  $N$  ортонормальных функций  $C_0(t)$ ,  $C_1(t)$ , ...,  $C_{N-1}(t)$ , по которым могут быть разложены все колебания ансамбля, так что

$$s_i(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} C_k(t) \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, M, \quad (1.164)$$

где

$$a_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) C_k(t) dt,$$

есть  $k$ -й коэффициент разложения  $i$ -го колебания.

Покажем, что это всегда можно сделать для колебаний с ограниченной энергией. Для этого найдем функции  $C_k(t)$  с помощью так называемой процедуры Г р а м-Ш м и д т а.

В качестве  $C_0(t)$  примем нормированное колебание:

$$C_0(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}, \quad (1.165)$$

где

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt \quad (1.166)$$

есть энергия первого колебания. Тогда

$$s_1(t) = \sqrt{\mathcal{E}_1} C_0(t) = a_{10} C_0(t), \quad (1.167)$$

т. е.

$$a_{10} = \sqrt{\mathcal{E}_1}, \quad a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1N-1} = 0.$$

Второе колебание можно представить так

$$s_2(t) = a_{20} C_0(t) + \varphi_2(t), \quad (1.168)$$

где

$$a_{20} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) C_0(t) dt, \quad (1.169)$$

$\varphi_2(t)$  — неизвестная пока оставшая часть разложения  $s_2(t)$ . Если  $\varphi_2(t) \neq 0$ , то в качестве  $C_1(t)$  примем функцию

$$C_1(t) = \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}} = \frac{s_2(t) - a_{20} C_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}}, \quad (1.170)$$

где  $\mathcal{E}_{\varphi_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^2(t) dt$  — энергия колебания  $\varphi_2(t)$ ,

Тогда из (1.168) и (1.170)

$$s_2(t) = a_{20} C_0(t) + \sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}} C_1(t) = a_{20} C_0(t) + a_{21} C_1(t), \quad (1.171)$$

где

$$a_{21} = \sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}, \quad a_{22} = a_{23} = \dots = a_{2N-1} = 0. \quad (1.172)$$

Если  $\varphi_2(t) \equiv 0$ , то переходим к рассмотрению  $s_3(t)$ .

Легко убедиться, что  $C_1(t)$  и  $C_0(t)$  ортогональны. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_0(t) C_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} C_0(t) \left[ \frac{s_2(t) - a_{20} C_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}} \right] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} C_0(t) s_2(t) dt - a_{20} \int_{-\infty}^{\infty} C_0^2(t) dt \right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}} (a_{20} - a_{20}) = 0.
\end{aligned}$$

Далее процедура повторяется аналогично до использования всех  $M$  колебаний  $s_i(t)$ .

Колебание  $s_i(t)$  представляем в виде

$$s_i(t) = a_{i0} C_0(t) + a_{i1} C_1(t) + \dots + a_{ij} C_j(t) + \varphi_i(t).$$

Тогда

$$\varphi_i(t) = s_i(t) - \sum_{j=0}^{j=l-2} a_{ij} C_j(t), \quad (1.173)$$

где

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) C_j(t) dt. \quad (1.174)$$

В качестве  $C_j(t)$  принимаем

$$C_j(t) = \frac{\varphi_l(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_l}}}. \quad (1.175)$$

Если  $\varphi_l(t) \equiv 0$ , то рассматриваем следующее колебание.

Из характера процедуры видно, что будет определено  $N \ll M$  ортонормальных функций  $C_0(t)$ ,  $C_1(t)$ ,  $\dots$ ,  $C_{N-1}(t)$ . Число их  $N$  будет равно  $M$ , если все колебания  $s_i(t)$  линейно независимы.

Пример. Разложить заданные три колебания (рис. 1.29, а) на ортогональные составляющие.

В соответствии с (1.165) принимаем

$$C_0(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}.$$

Определим энергию первого сигнала. Для упрощения вычислений заметим, что

$$\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} (U_m \sin \omega_0 t)^2 dt = \frac{U_m^2 \tau}{2}.$$

Тогда энергию колебания  $s_1(t)$  можно записать как

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \int_0^{\tau} (2 \sin \omega_0 t)^2 dt + \int_{\tau}^{2\tau} (-2 \sin \omega_0 t)^2 dt + \\
&+ \int_{2\tau}^{3\tau} (2 \sin \omega_0 t)^2 dt = 6\tau.
\end{aligned}$$

Для упрощения записи и графиков положим  $\tau = 1$ . Тогда

$$C_0(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{6}}.$$

График функций  $C_0(t)$  приведен на рис. 1.29, б. Колебание

$$s_1(t) = a_{10} C_0(t) = \sqrt{6} C_0(t),$$

$$a_{10} = \sqrt{6},$$

$$a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1N-1} = 0.$$

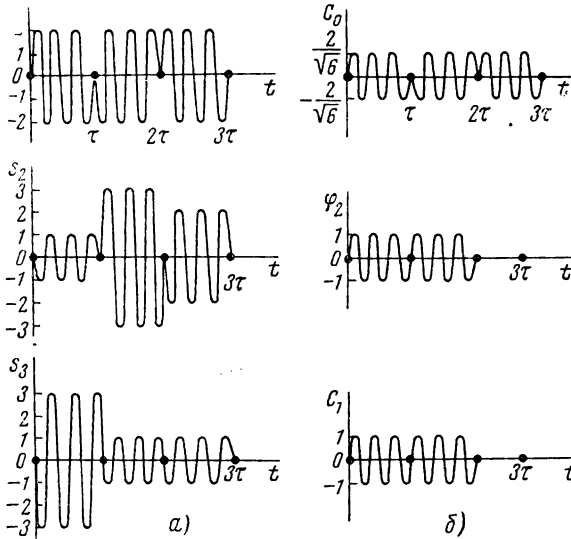


Рис. 1.29

Далее в соответствии с (1.169) определяем, пользуясь графиками для  $s_2(t)$  и  $C_0(t)$ , величину

$$a_{20} = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) C_0(t) dt = \frac{(-1)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2} \left( -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) + \frac{(-2)}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}.$$

В соответствии с (1.170) находим

$$\varphi_2(t) = s_2(t) - a_{20} C_0(t) = s_2(t) + \sqrt{6} C_0(t).$$

График функции  $\varphi_2(t)$  показан на рис. 1.29, б. Определяем, пользуясь графиком  $\varphi_2(t)$ , энергию  $\mathcal{E}_{\varphi_2}$ :

$$\mathcal{E}_{\varphi_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Принимаем

$$C_1(t) = \frac{\varphi_2(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_{\varphi_2}}} = s_2(t) + \sqrt{6} C_0(t).$$

График функции  $C_1(t)$  приведен на рис. 1.29, б. Колебание

$$s_2(t) = \sqrt{6} C_0(t) + C_1(t).$$

Теперь можно найти

$$a_{30} = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) C_0(t) dt = -\frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{6}} -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}};$$

$$a_{31} = \int_{-\infty}^{\infty} s_3(t) C_1(t) dt = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2.$$

Находим

$$\varphi_3(t) = s_3(t) + \frac{3}{\sqrt{6}} C_0(t) + 2 C_1(t) \equiv 0.$$

Следовательно,  $C_3(t) = 0$ . Колебание

$$s_3(t) = a_{30} C_0(t) + a_{31} C_1(t) = -\frac{3}{\sqrt{6}} C_0(t) - 2 C_1(t).$$

Таким образом, данный ансамбль трех заданных колебаний можно составить из двух ортогональных функций  $C_0(t)$  и  $C_1(t)$ :

$$s_1(t) = \sqrt{6} C_0(t),$$

$$s_2(t) = -\sqrt{6} C_0(t) + C_1(t),$$

$$s_3(t) = -\frac{3}{\sqrt{6}} C_0(t) - 2 C_1(t).$$

Принимая в соответствии с § 1.10 величины  $a_{ik}$  в качестве координат, колебания  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и  $s_3(t)$  можно представить геометрически в двумерном пространстве, как показано на рис. 1.30.

Нетрудно убедиться, что заданный ансамбль колебаний можно разложить и по другим ортогональным функциям, показанным, на-

пример, на рис. 1.31. Однако число требуемых ортогональных функций при этом возрастает. В данном случае оно равно трем. Колебание  $s_2(t)$  при разложении по системе  $C_0'(t)$ ,  $C_1'(t)$ ,  $C_2'(t)$  представляется в виде

$$s_2(t) = -C_0'(t) + 3C_1'(t) - 2C_2'(t).$$

Геометрически оно может быть представлено лишь в трехмерном пространстве.

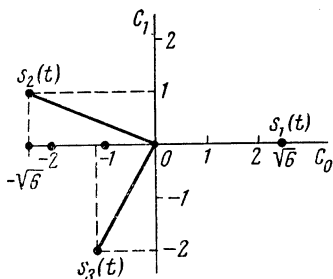


Рис. 1.30

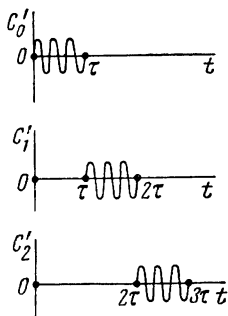


Рис. 1.31

## Глава II

### СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

#### § 2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Большинство колебаний, с которыми приходится встречаться в технике, носят в той или иной степени случайный характер. Строго говоря, ни один реальный процесс не может быть точно определен, т. е. задан аналитической функцией времени. Излучение несущего колебания передающей станцией, ход высокостабильных молекулярных часов (так называемых стандартов частоты) — это процессы, не обладающие абсолютно неизменными параметрами. Сдвиг фазы, частота, а также амплитуда таких колебаний с течением времени меняются. В приведенных примерах изменения параметров колебаний хотя и носят случайный характер, однако относительно малы. Поэтому процессы подобного рода могут с достаточно высокой точностью описываться детерминированными функциями времени.

Вместе с тем существуют колебания, не допускающие даже приближенного описания детерминированными функциями. К ним, прежде всего, относятся процессы, связанные с передачей сообщений и воздействием помех. В отличие от детерминированной функции, однозначно определяющей и, таким образом, достоверно предсказывающей значение описываемой величины в любой заданный момент времени, ход случайной функции предсказан быть не может. Самое большее, что можно знать заранее о поведении случайной функции, это — вероятность, с которой она в будущем может принять тот или иной вид из множества возможных.

В ряде практически важных задач случайный процесс наряду с вероятностным описанием можно описать совокупностью неслучайных числовых характеристик, постоянных или меняющихся во времени. Операции над числовыми характеристиками большей частью просты и ими широко пользуются. От этих характеристик требуется, чтобы в условиях конкретно поставленной задачи они отражали самое существенное случайного процесса.

Наиболее часто используются такие характеристики, как среднее значение случайной функции, среднее значение ее квадрата (средняя мощность), дисперсия (среднее значение квадрата отклонений функции от ее средней величины). Очень важной характеристикой случайного процесса является функция корреляции, выражающая статистическую связь между мгновенными значениями колебания, взятыми в два произвольных момента времени. По аналогии с характеристиками случайных величин, используемых в теории вероятностей и называемых моментами, в теории случайных процессов числовые характеристики называют моментными функциями.

## **§ 2.2. ОДНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

Случайный процесс обозначим случайной функцией  $X(t)$ , значения которой в любой заданный момент времени не могут быть точно предсказаны, т. е. являются случайными величинами. Определенный вид  $x(t)$ , принятый случайной функцией  $X(t)$  в результате опыта, называют реализацией случайной функции или процесса (рис. 2.1).

Под опытом или испытанием понимается, например, однократное включение источника случайного процесса на некоторое определенное время с соответствующей записью колебания. В результате многократного повторения опыта с данным источником можно получить множество реализаций процесса, внешне совершенно не похожих одна на другую. Для получения реализации процесса таким путем необходима повторяемость условий испытаний. В некоторых случаях повторяемость условий испытаний единственного



источника не может быть соблюдена. Так, например, когда с течением времени параметры источника необратимо изменяются (заметим, что пока источник не испытан, о постоянстве его параметров в принципе говорить нельзя). либо когда реальный источник случайного процесса предназначен для однократного использования. Очевидно также, что повторяемость условий испытаний не выполнима, если необходимо получить реализацию процесса неограниченной продолжительности. При таких наиболее общих

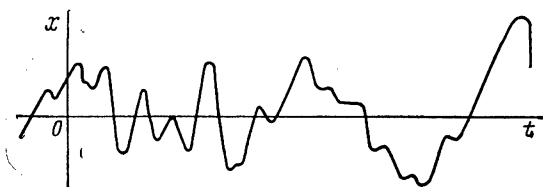


Рис. 2.1. Реализация  $x(t)$  случайного процесса  $X(t)$

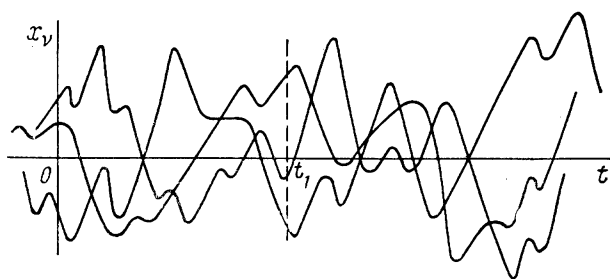


Рис. 2.2. Совокупность (ансамбль) реализаций

условиях следует оперировать понятием не единственного источника, а их множества. В результате опыта, предусматривающего параллельную работу источников, получается множество реализаций. При этом источники могут быть не идентичными. Их параметры могут иметь разброс, вызванный, например, технологическими причинами. Параметры каждого из источников могут по-разному меняться во времени или оставаться постоянными.

Случайный процесс полностью характеризуется бесконечным множеством реализаций, образующих ансамбль. Понятием ансамбля, состоящего из бесконечно большого или конечного, но достаточно большого числа реализаций (рис. 2.2), удобно пользоваться при установлении статистических закономерностей, свойственных случайным процессам. Совокупность мгновенных значений случайного процесса, заданного ансамблем, в произвольный момент времени называют сечением случайного процесса.

Если зафиксировать произвольный момент времени  $t_1$  (рис. 2.2), т. е. получить сечение случайного процесса, то для этого сечения может быть вычислено распределение вероятности  $P_x$  непрерывной случайной величины  $X(t_1)$ :

$$P(x, t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}, \quad (2.1)$$

где  $n$  — число значений величины  $X(t_1)$ , удовлетворяющих условию

$$X(t_1) \leq x, \quad (2.2)$$

$N$  — общее число реализаций  $x(t)$ .

Отношение  $\frac{n}{N}$  в теории вероятностей называют частотой наступления события. В данном случае под событием следует понимать выполнение условия (2.2). Приближенно при достаточно большом  $N$  можно считать

$$P(x, t_1) \approx \frac{n}{N}.$$

Плотность вероятности случайной величины  $X(t_1)$  по определению в теории вероятностей выражается как

$$p(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x < X(t_1) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (2.3)$$

и является производной по  $x$  функции (2.1). Выражения (2.1) или (2.3) статистически полностью характеризуют значения случайной функции  $X(t)$  в заданный момент времени  $t_1$  и выражают ее одномерный закон распределения. Если момент  $t_1$  выбирать произвольно, то в соответствии с (2.1) и (2.3) можно получить одномерный закон распределения в виде зависимости от времени  $P(x, t)$  или  $p(x, t)$ .

Если закон распределения *зависит* от рассматриваемого момента времени  $t$ , то говорят о нестационарности случайного процесса, о неоднородности его протекания во времени. Необходимым условием стационарности процесса является независимость одномерного закона распределения от времени, т. е. выполнение одного из равенств:

$$P(x, t) = P(x), \quad p(x, t) = p(x).$$

Однмерные законы распределения (2.1) или (2.3) удовлетворяют условию

$$P(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1,$$

отражающему достоверность того, что величина  $X(t_1)$  обязательно примет одно из значений, находящихся в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ .

В табл. 2.1 приведены некоторые наиболее распространенные одномерные законы распределения.

Таблица 2.1  
Некоторые одномерные законы распределения

Законы	$p(x)$	График $p(x)$	$P(x)$	График $P(x)$
Равномерный	$\frac{1}{2a}, -a \leq x \leq a$ $0$ , при прочих $x$		$0, x \leq -a$ $\frac{1}{2a}(x+a), -a \leq x \leq a$ $1, x \geq a$	
Экспоненциальный	$\frac{1}{a} \exp(-\frac{x}{a}), x \geq 0$ $0, x < 0$		$1 - \exp(-\frac{x}{a}), x \geq 0$ $0, x \leq 0$	
Нормальный (или гауссов)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})$		$1 - \Phi(\frac{x}{\sigma})^*$	
Релея	$\frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}), x \geq 0$ $0, x \leq 0$		$1 - \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}), x \geq 0$ $0, x \leq 0$	
Коши	$\frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + x^2}$		$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}$	

\*  $\Phi(\frac{x}{\sigma})$  - функция Лапласа (функция ошибок)

Наряду с вероятностными характеристиками  $P(x)$  и  $p(x)$  случайной величины  $X(t_1)$  могут рассматриваться ее числовые характеристики, или моменты случайной величины.

Среднее значение случайной величины, или момент первого порядка

$$\overline{X(t_1)} = M_1[X(t_1)],$$

называют математическим ожиданием случайной величины. Прямая черта над  $X(t_1)$  означает операцию усреднения случайной величины  $X(t_1)$  по ансамблю реализаций. По определению момент первого порядка выражается следующим образом:

$$M_1[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t_1) dx. \quad (2.4)$$

Среднее значение квадрата случайной величины, или момент второго порядка

$$\overline{X^2(t_1)} = M_2[X(t_1)],$$

представляет в широком смысле мощность колебания, которая выделяется на единичной нагрузке и характеризует его интенсивность. По определению момент второго порядка выражают формулой математического ожидания квадрата случайной величины

$$M_2[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, t_1) dx. \quad (2.5)$$

Вычитая из случайной величины  $X(t_1)$  ее среднее значение, получим новую, так называемую центрированную случайную величину

$$X^0(t_1) = X(t_1) - \overline{X(t_1)}.$$

Очевидно, что

$$M[X(t_1) - \overline{X(t_1)}] = 0.$$

Среднее значение квадрата центрированной случайной величины называют дисперсией:

$$M_2[X^0(t_1)] = \sigma^2[X(t_1)] = \sigma^2(t_1).$$

Она характеризует мощность отклонений случайной величины от ее среднего значения, выделяемую на единичной нагрузке. Нетрудно установить, что

$$\sigma^2(t_1) = M_2[X(t_1)] - [\overline{X(t_1)}]^2. \quad (2.6)$$

По аналогии с формулой (2.5) дисперсия случайной величины  $X(t_1)$ , численно равная моменту второго порядка центрированной случайной величины  $X^0(t_1)$ , может быть вычислена по формуле

$$\sigma^2(t_1) = M_2[X^0(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x^0, t_1) dx, \quad (2.7)$$

где  $p(x^0, t_1)$  — плотность вероятности случайной величины  $X^0(t_1)$ .

Заметим, что  $X(t_1)$  отличается от  $X^0(t_1)$  на неслучайную величину  $\overline{X(t_1)}$ . Поэтому законы распределения  $p(x, t_1)$  и  $p(x^0, t_1)$  отличаются лишь смещением по  $x$ :

$$p(x^0, t_1) = p[x - \overline{X(t_1)}, t_1].$$

Так как  $t_1$  — произвольный момент времени, то числовые характеристики можно понимать как функции времени:

$$M_1[X] = M_1(t); \quad M_2[X] = M_2(t); \quad M_2[X^0] = \sigma^2(t).$$

Для стационарного процесса величины  $M_1[X]$ ,  $M_2[X]$ ,  $\sigma^2$  от времени не зависят.

**Пример.** Найти среднее значение и дисперсию случайного колебания, мгновенное значение которого распределено по экспоненциальному закону

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

В соответствии с формулой (2.4) получим

$$\bar{X} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{a}} dx = a.$$

Формула (2.5) позволяет вычислить момент второго порядка:

$$\bar{X}^2 = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{a}} dx = 2a^2.$$

Дисперсия может быть найдена из соотношения (2.6):

$$\sigma^2 = 2a^2 - a^2 = a^2.$$

### § 2.3. МНОГОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В § 2.2 приведено математическое описание случайной величины  $X(t_1)$ , являющейся значением случайной функции  $X(t)$  в произвольном сечении. Такое описание процесса является неполным, поскольку оно не отражает статистической связи между мгновенными значениями случайной функции, взятыми в разные моменты времени. Более полно случайный процесс может быть описан системой случайных величин  $\{X_i\}$ :

$$X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_k = X(t_k), \quad (2.8)$$

отображающих случайную функцию в сечениях  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Описание случайной функции будет тем более полным, чем большее число сечений процесса будет учтено. При этом имеют дело с совместным распределением вероятности, плотность которой записывается в виде

$$p_k = p_k(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k), \quad (2.9)$$

где  $x_i$  — значения, принимаемые случайной величиной  $X_i$ .

Соотношение (2.9) выражает многомерный закон распределения системы случайных величин (2.8). Эта система при неограниченном увеличении  $k$  эквивалента случайной функции  $X(t)$ , а многомерный (в пределе бесконечномерный) закон распределения полностью характеризует ее статистические свойства. Зависимость (2.9) должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2, \dots, dx_k = 1.$$

Если рассматриваемые значения случайной функции  $X_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) являются статистически независимыми, то многомерное распределение вида (2.9) находится как произведение одномерных законов распределения

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = p(x_1) p(x_2), \dots, p(x_k). \quad (2.10)$$

Однако такое упрощение закона распределения обычно допустимо лишь в отдельных частных случаях, например, когда интервалы времени, разделяющие сечения случайной функции, настолько велики, что можно пренебречь статистическими связями между ее мгновенными значениями.

Многомерному закону распределения (2.9) соответствует совокупность смешанных моментов, или моментных функций, которая эквивалентно (2.9) характеризует случайную функцию.

Многомерный закон распределения вероятности (2.9) позволяет найти одномерный закон распределения вероятности  $p(x_i)$  случайной функции в любом сечении  $t_i$  интегрированием (2.9) по всем  $x$ , кроме  $x_i$ :

$$p(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_k(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \times \\ \times \dots \times dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k. \quad (2.11)$$

Многомерную плотность вероятности по одномерной найти невозможно, за исключением случая, когда применима формула (2.10).

**Пример 1.** Найти одномерный закон распределения мгновенных значений случайного колебания  $U(t)$  в сечении  $t_1$  по заданному двумерному закону

$$p_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2}{2(1-\rho^2)} \right],$$

статистически связывающему мгновенные значения в сечениях  $t_1$  и  $t_2$ .

Двумерное распределение указанного вида называют нормальным (его свойства рассмотрены в § 2.7). В соответствии с формулой (2.11) имеем

$$p(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(u_1, u_2) du_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2}{2(1-\rho^2)}\right] du_2.$$

Для вычисления интеграла удобно показатель экспоненты представить в виде

$$\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2}{2(1-\rho^2)} = \frac{(u_2 - \rho u_1)^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{u_1^2}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p(u_1) &= \frac{\exp\left[-\frac{u_1^2}{2}\right]}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{(u_2 - \rho u_1)^2}{2(1-\rho^2)}\right] \times \\ &\times du_2 = \frac{\exp\left[-\frac{u_1^2}{2}\right]}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-v^2) dv. \end{aligned}$$

Определенный интеграл полученного вида является табличным. Его значение равно  $\sqrt{\pi}$ . Поэтому окончательно получаем

$$p(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u_1^2}{2}\right].$$

В силу симметрии  $p(u_1) = p(-u_1)$  среднее значение рассматриваемого процесса равно 0.

При помощи формулы (2.9) может быть вычислена вероятность того, что случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_k$  примут значения, находящиеся в интервалах

$$x_1 \leq X_1 \leq x_1 + \Delta x_1, \quad x_2 \leq X_2 \leq x_2 + \Delta x_2, \quad \dots, \quad x_k \leq X_k \leq x_k + \Delta x_k.$$

Эта вероятность равна

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X_1 \leq x_1 + \Delta x_1, \dots, x_k \leq X_k \leq x_k + \Delta x_k) &\approx \\ &\approx p(x_1, x_2, \dots, x_k) \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Формула (2.12) тем более точна, чем меньше каждое  $\Delta x$ . Рис. 2.3 иллюстрирует выражение (2.12). При большом числе  $k$  значений случайной функции, которые называют выборочными, интервал  $x_i \leq X_i \leq x_i + \Delta x_i$  текущей случайной величины  $X_i$  образует полосу шириной  $\Delta x_i$  вблизи  $x_i$ . Таким образом, при боль-

шом  $k$  формула (2.12) отвечает на вопрос о том, с какой вероятностью случайная функция  $X(t)$  в результате опыта уложится в полосу, обозначенную на рисунке. Выражение (2.9) есть плотность вероятности такой реализации.

Исчерпывающее определение случайного процесса можно осуществить с помощью многомерного (в пределе бесконечномерного) закона распределения его мгновенных значений. Однако получение таких законов и использование их связано с большими трудностями. Кроме того, в большинстве практически важных задач прихо-

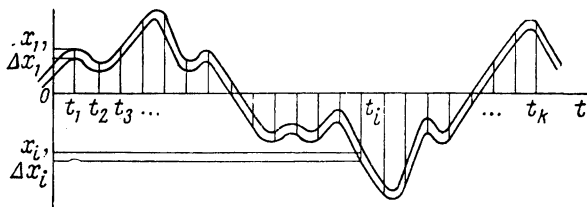


Рис. 2.3. К определению плотности вероятности реализации заранее заданной формы

дится иметь дело с так называемыми процессами без последействия. Этот класс процессов характерен тем, что статистическая закономерность поведения случайной функции на интервале времени (или вероятность того, что функция примет в конце интервала значение, близкое к заданному) целиком определяется значением функции в начале интервала и его продолжительностью. «Предыстория» процесса, т. е. поведение функции до начала интервала наблюдения, роли не играет.

Таким образом, для процесса без последействия характерна зависимость вероятности распределения случайной величины  $X_i = X(t_i)$  только от значения  $x_{i-1}$ , принятого случайной функцией в предшествующий заданный момент  $t_{i-1}$ . Такую вероятность принято называть условной и обозначать  $P(x_i/x_{i-1})$ . Значения  $x$  при  $t < t_{i-1}$  на условную вероятность  $P(x_i/x_{i-1})$  не влияют.

Величина интервала  $t_i - t_{i-1}$  определяет статистическую связь между мгновенными значениями в рассматриваемых сечениях, поэтому от нее также зависит условная вероятность. Учитывая, что при таком подходе вся последовательность мгновенных значений случайного процесса в заданных и произвольно расположенных на оси времени сечениях образует цепь событий, статистически попарно связанных, можно записать  $k$ -мерную плотность вероятности в следующем виде:

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = p_1(x_1) p_2(x_2/x_1) p_2(x_3/x_2) \dots p_2(x_k/x_{k-1}), \quad (2.13)$$

где

$$p_2(x_i/x_{i-1}) = p_2(x_i, t_i/x_{i-1}, t_{i-1}) -$$



плотность вероятности перехода случайной функции  $X(t)$  от значения  $x_{i-1}$  к значению  $x_i$ . Плотность условной вероятности  $p_2(x_i/x_{i-1})$  в общем случае является функцией времени. Если процесс стационарен,

$$p_2(x_i, t_i/x_{i-1}, t_{i-1}) = p_2(x_i/x_{i-1}, t_i - t_{i-1}).$$

Когда, кроме того, все интервалы между сечениями равны:

$$t_i - t_{i-1} = \Delta t = \text{const},$$

то

$$p_2(x_i/x_{i-1}, t_i - t_{i-1}) = p_2(x_i/x_{i-1}, \Delta t).$$

По определению плотность условной вероятности может быть представлена следующим соотношением:

$$p_2(x_i/x_{i-1}) = \frac{p_2(x_{i-1}, x_i)}{p_1(x_{i-1})}, \quad (2.14)$$

где  $p_2(x_{i-1}, x_i)$  — совместная (двумерная) плотность вероятности двух случайных величин  $X(t_{i-1})$  и  $X(t_i)$ ;

$p_1(x_{i-1})$  — безусловная (одномерная) плотность вероятности величины  $X(t_{i-1})$ .

Из формул (2.13) и (2.14) следует, что

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{p_2(x_1, x_2) p_2(x_2, x_3) \dots p_2(x_{k-1}, x_k)}{p_1(x_2) p_1(x_3) \dots p_1(x_{k-1})}. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) показывает, что для получения исчерпывающей характеристики случайного процесса без последействия, т. е. многомерного (в пределе бесконечномерного) закона распределения, достаточно задать её двумерный закон распределения  $p_2(x_{i-1}, x_i)$ , ибо в числителе выражения (2.15) стоит произведение таких сомножителей. Одномерные плотности вероятностей, образующие знаменатель, могут быть получены также из двумерных в соответствии с формулой (2.11).

**Пример 2.** Воспользовавшись двумерным законом распределения стационарного случайного процесса без последействия

$$p_2(u_i, u_{i+1}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho_{i,i+1}^2}} \exp \left[ -\frac{u_i^2 - 2\rho_{i,i+1}u_iu_{i+1} + u_{i+1}^2}{2(1 - \rho_{i,i+1}^2)} \right],$$

найти плотность вероятности того, что в результате опыта при четырех равностоящих значениях времени реализация примет одинаковые значения  $u_0$  (рис. 2.4).

Итак,

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_0; \quad t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t_4 - t_3 = \Delta t.$$

Последнее означает, что при выполнении условия стационарности процесса параметр двумерного распределения  $\rho_{i,i+1} = \rho$  является оди-

наковым для любых пар мгновенных значений, взятых в смежных сечениях. Поэтому

$$p_2(u_0, u_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{u_0^2}{1+\rho}\right],$$

а

$$p_1(u_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u_0^2}{2}\right]$$

находится так, как это было показано в примере на стр. 90. При подстановке  $p_1(u_0)$  и  $p_2(u_0, u_0)$  в формулу (2.15) получим

$$p_4(u_0, u_0, u_0, u_0) = \frac{[p_2(u_0, u_0)]^3}{[p_1(u_0)]^3} = \frac{1}{[2\pi(1-\rho^2)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{3}{2}u_0^2 \frac{1-\rho}{1+\rho}\right].$$

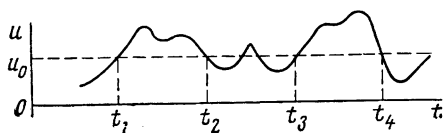


Рис. 2.4

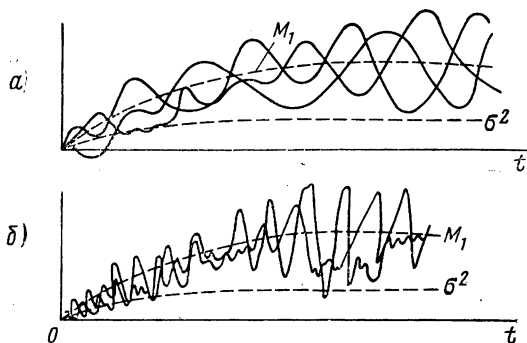


Рис. 2.5. Нестационарные случайные процессы с одинаковыми средним  $M_1(t)$  и дисперсией  $\sigma^2(t)$

Как уже говорилось, частичное описание свойств случайного процесса может быть дано при помощи неслучайных функций времени  $M_1(t)$  и  $\sigma^2(t)$ . Недостаточность только таких характеристик хорошо видна из сопоставления двух процессов, заданных ансамблями их реализаций и представленных на рис. 2.5. Из рис. 2.5, а и б видно, что процессы имеют приблизительно одинаковые средние значения  $M_1(t)$  и дисперсии  $\sigma^2(t)$ . Однако характеры протекания этих процессов во времени и их внутренние структуры существенно

различны. В первом преобладают медленные изменения во времени, во втором — более быстрые. Таким образом, среднее значение и дисперсия не отражают структуры случайного процесса, быстроты его протекания. Быстрота изменения случайной функции может характеризоваться степенью статистической связи мгновенных значений, взятых в различные моменты времени. Количественно эта связь устанавливается корреляционным моментом:

$$R(t_1, t_2) = M \{ [X(t_1) - \overline{X(t_1)}] [X(t_2) - \overline{X(t_2)}] \} \quad (2.16)$$

двух случайных величин  $X(t_1) = X_1$  и  $X(t_2) = X_2$ .

Подробнее символическая запись (2.16) может быть представлена в виде

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{X_1})(x_2 - \overline{X_2}) p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.17)$$

Выражения (2.16) и (2.17) показывают, что для оценки корреляционного момента необходимо располагать двумерным законом распределения. Эти выражения, в отличие от их числовых аналогов в теории вероятностей, являются

функциями двух переменных  $t_1$  и  $t_2$  и потому называются корреляционными или автокорреляционными функциями.

В теории вероятностей доказывается, что величина корреляционного момента двух случайных величин не зависит от последовательности, в которой эти величины рассматриваются. Вследствие этого корреляционная функция симметрична относительно  $t_1$  и  $t_2$ , т. е.

$$R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1).$$

Это же свойство вытекает из определения корреляционной функции по формуле (2.16).

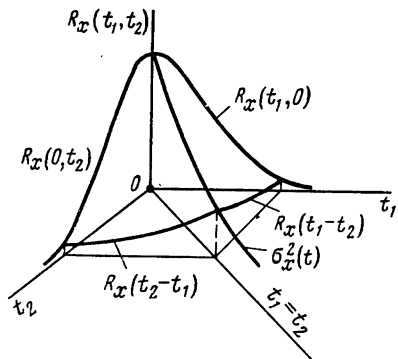


Рис. 2.6. Корреляционная функция  $R_x(t_1, t_2)$

На рис. 2.6 изображен один из возможных видов корреляционной функции  $R(t_1, t_2)$  для нестационарного процесса. Эта функция, зависящая от двух аргументов, представлена поверхностью. Поверхность симметрична относительно биссекторной плоскости  $t_1 = t_2$ .

Поскольку корреляционная функция отражает статистическую связь между значениями одной и той же случайной функции, взятыми в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , она убывает с ростом интервала  $t_2 - t_1$ .

Из формул (2.16) и (2.17) следует, что при  $t_1 = t_2 = t$  функция корреляции численно совпадает с дисперсией  $\sigma^2(t)$ . Это означает,

что корреляционная функция является более полной характеристикой случайного процесса, чем дисперсия, включающей ее как частный случай.

При анализе случайных процессов часто вводят понятие нормированной функции автокорреляции

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что при  $t_1 = t_2$

$$\rho(t_1, t_2) = 1.$$

Функция корреляции позволяет ввести понятие интервала корреляции. Под интервалом корреляции понимают такое значение  $\theta = t_2 - t_1$ , при котором

$$\rho(t_1, t_2) = \alpha,$$

где  $\alpha < 1$  — некоторая заданная величина. Величина  $\alpha$  может зависеть от конкретно поставленной задачи. Введение этого понятия позволяет приближенно считать мгновенные значения случайного процесса  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  при  $t_2 - t_1 > \theta$  некоррелированными.

Пример 3. Найти значение функции корреляции между мгновенными величинами  $U_1$  и  $U_2$  случайного процесса, имеющего двумерный закон распределения

$$p_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Для отыскания  $R(t_1, t_2)$  следует воспользоваться формулой (2.17). Среднее значение случайного процесса при заданном распределении в силу его симметрии равно нулю. Поэтому,

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 u_2 \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2}{2(1-\rho^2)}\right] du_1 du_2.$$

Двойной интеграл можно привести к виду

$$R(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} u_1 e^{-\frac{u_1^2}{2}} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_2 e^{-\frac{(u_2 - \rho u_1)^2}{2(1-\rho^2)}} du_2.$$

Внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_2 e^{-\frac{(u_2 - \rho u_1)^2}{2(1-\rho^2)}} du_2 = \rho \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} u_1$$

при подстановке в  $R(t_1, t_2)$  дает

$$R(t_1, t_2) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2 e^{-\frac{u_1^2}{2}} du_1 = \rho.$$

Таким образом, параметром  $\rho$  заданного распределения и является функция корреляции.

Корреляционную функцию, построенную для двух случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  и устанавливающую статистическую связь между ними, называют функцией взаимной корреляции.

Пусть заданы совокупностями своих реализаций две случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  (рис. 2.7). Для отдельно взятых  $X(t)$  и  $Y(t)$  могут быть построены их автокорреляционные функции  $R_x(t_1, t_2)$  и  $R_y(t_1, t_2)$ . Статистическая связь между процессами может быть оценена с помощью взаимных корреляционных функций:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \{ [X(t_1) - \bar{X}(t_1)] [Y(t_2) - \bar{Y}(t_2)] \};$$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \bar{X}_1)(y_2 - \bar{Y}_2) p_2(x_1, y_2) dx_1 dy_2 \quad (2.19)$$

и

$$R_{yx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y_1 - \bar{Y}_1)(x_2 - \bar{X}_2) p_2(y_1, x_2) dy_1 dx_2. \quad (2.20)$$

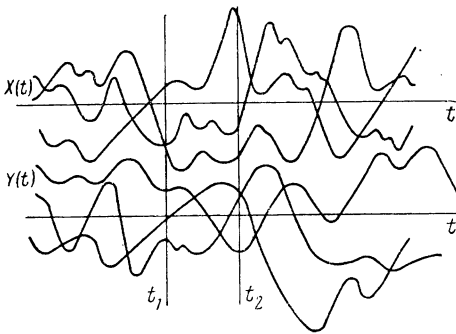


Рис. 2.7. К определению взаимной корреляционной функции для случайных процессов

При  $t_1 = t_2$  взаимные корреляционные функции принимают значение мощности взаимодействия отклонений случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  от их средних значений:

$$R_{xy}(t, t) = R_{yx}(t, t) = \sigma_{xy}^2(t).$$

Аналогично (2.18) может быть введено понятие нормированной функции взаимной корреляции:

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_y(t_2)}.$$

Два процесса называются некоррелированными, если

их функция взаимной корреляции равна нулю при любых значениях аргумента, т. е.  $\rho_{xy}^2 = 0$ . Это означает, что некоррелированные процессы энергетически не взаимодействуют.

Заметим, что если для функции взаимной корреляции допустить тождество

$$R_{xy}(t_1, t_2) \equiv 0,$$

то для автокорреляционной функции такое утверждение неверно. Автокорреляционная функция убывает с неограниченным ростом интервала  $t_2 - t_1$ . При  $t_1 = t_2 = t$  ее значение совпадает с дисперсией. Следовательно, автокорреляционная функция реального случайного процесса может быть сколь угодно близкой к нулю при любых значениях аргументов, исключая их равные значения.

Для нахождения  $R_{xy}$  и  $R_{yx}$ , а также  $R_x$  и  $R_y$  процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  должны быть заданы ансамблями своих реализаций или совместным распределением  $p_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$  для любых пар моментов времени. Таким образом, статистические связи случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ , как внутренние, так и взаимные, характеризуются четырьмя функциями:

$$R_x(t_1, t_2) \text{ и } R_y(t_1, t_2), R_{xy}(t_1, t_2) \text{ и } R_{yx}(t_1, t_2).$$

#### § 2.4. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ЭРГОДИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО

Случайные процессы могут быть разделены на два больших класса. Если случайный процесс протекает во времени однородно, т. е. многомерный закон распределения его мгновенных значений, взятых в различные моменты, не зависит от начала отсчета времени, а зависит только от интервалов между рассматриваемыми моментами

$$p_k(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_k, t_k) = p_k(x_1, t_1 + \Delta t; x_2, t_2 + \Delta t; \dots; x_k, t_k + \Delta t), \quad (2.21)$$

где  $\Delta t$  — произвольный сдвиг, то такой процесс стационарен. Если же это условие не выполняется, процесс является нестационарным. Условию (2.21) эквивалентна независимость от времени всех моментов системы случайных величин  $\{X(t_i)\}$ .

Располагая реализациями случайного процесса, можно в ряде случаев ориентировочно, на основании субъективных суждений решить, является процесс стационарным или нестационарным. На рис. 2.8 приведены семейства реализаций двух процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

О первом из них (рис. 2.8, а) можно сказать, что даже на ограниченном отрезке времени наблюдается его нестационарность. Эта нестационарность проявляется в изменении его среднего значения.

Наблюдение процесса  $Y(t)$  (рис. 2.8, б) показывает изменение амплитуд выбросов. С течением времени величина выбросов растет, т. е. растет дисперсия. Иногда качественный вывод о характере процесса, основанный на наблюдении за изменением среднего значения или дисперсии, может быть затруднен.

Следовательно, в общем случае требуется количественное исследование этих характеристик на основе экспериментально полученного семейства реализаций.

Непостоянство во времени любой из характеристик случайного процесса — его среднего значения или дисперсии — является достаточным, чтобы считать процесс нестационарным. Однако постоянство во времени только этих двух характеристик еще недостаточно

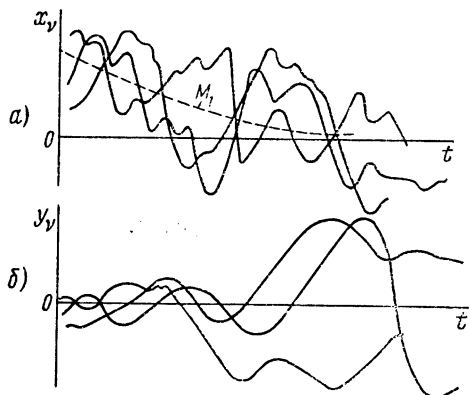


Рис. 2.8. Семейства реализаций двух случайных процессов

для отнесения случайного процесса к категории стационарных, так как случайный процесс в общем случае характеризуется не двумя, а большим числом моментных функций.

Для процесса без последействия, полное описание которого производится двумерным законом, стационарность означает, что

$$\hat{p}_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = p_2(x_1, t_1 + \Delta t; x_2, t_2 + \Delta t). \quad (2.22)$$

Формуле (2.22) эквивалентно символическое равенство

$$X(t) = X(t + \Delta t), \quad (2.23)$$

означающее, что стационарная случайная функция переходит в самую себя при ее произвольном смещении во времени.

Согласно формуле (2.22) для одномерного закона распределения стационарного процесса получаем соотношение

$$p_1(x_1, t_1) = p_1(x_1, t_1 + \Delta t), \quad (2.24)$$

из которого, если зафиксировать  $t_1$  и обозначить  $t_1 + \Delta t = t$ , следует выражение  $p(x, t) = p(x)$ . Из этого выражения ясно, что среднее значение и дисперсия стационарного процесса постоянны:

$$M_1[X] = \text{const}, \quad \sigma^2 = \text{const}. \quad (2.25)$$

Для характеристики стационарности *собственно* случайного процесса выполнение первого из условий (2.25) не обязательно, поскольку случайный процесс всегда может быть центрирован.

Автокорреляционная функция стационарного случайного процесса  $X(t)$  согласно формуле (2.23) удовлетворяет равенству

$$R_{X(t)} = R_{X(t+\Delta t)},$$

означающему, что

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t).$$

Это соотношение справедливо при любом сдвиге  $\Delta t$ , в том числе и при  $\Delta t = -t_1$ , что соответствует переносу начала отсчета времени в точку  $t_1$ . В этом случае можно записать

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(0, t_2 - t_1)$$

или

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1). \quad (2.26)$$

Равенство (2.26) существенно дополняет характеристику стационарного случайного процесса, выраженную моментными функциями (2.25). Это равенство отражает инвариантность автокорреляционной функции в отношении отдельно взятых  $t_1$  и  $t_2$ . При обозначении  $t_2 - t_1$  через  $\tau$  формула (2.26) принимает вид

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau). \quad (2.27)$$

Ранее упоминалось, что  $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$ . С учетом (2.26) и (2.27) это означает, что

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau). \quad (2.28)$$

Формула (2.28) указывает на *четность* автокорреляционной функции стационарного случайного процесса.

Отметим, что если выполняется наиболее общее условие стационарности (2.21), то случайный процесс принято считать стационарным в узком смысле. При выполнении условия (2.27) случайный процесс считается стационарным в широком смысле.

Если заданы два случайных процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$ , то при условии инвариантности закона совместного распределения совокупности случайных величин  $X(t_i)$  и  $Y(t_j)$  по отношению к сдвигу  $\Delta t$  такие случайные процессы называют совместно стационарными. Понятие совместной стационарности может быть распространено на произвольное число случайных процессов.

Условие совместной стационарности включает в себя стационарность каждого из процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ . Функции взаимной корреляции  $R_{xy}$  и  $R_{yx}$  стационарных процессов зависят только от интервала  $\tau$  между сечениями, в которых рассматриваются случай-



ные значения функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ . Условие симметрии типа (2.28) для функций взаимной корреляции не выполняется, но выполняется соотношение

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau).$$

В некоторых задачах приходится встречаться с процессами, возникающими вследствие суммирования двух или более случайных колебаний. В простейшем случае двух колебаний  $X(t)$  и  $Y(t)$ , стационарных и стационарно связанных, их сумма

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

также стационарна. Ее функция корреляции выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= M\{[X(t) + Y(t)][X(t + \tau) + Y(t + \tau)]\} = \\ &= R_x(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) + R_y(\tau). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для вычисления статистических характеристик случайного процесса — его среднего значения, дисперсии и функции корреляции — необходимо располагать совокупностью реализаций, полученной опытным путем. Поскольку эксперимент может дать ограниченное число реализаций (к тому же и ограниченной продолжительности), найденные статистические характеристики процесса будут носить приближенный, в определенной степени случайный характер. С увеличением числа реализаций результаты обработки экспериментальных данных будут со все большей точностью характеризовать случайный процесс. Поясним метод отыскания  $\bar{X}$ ,  $\sigma_x^2$  и  $R_x(\tau)$ .

Допустим, что получены осциллограммы от  $N$  идентичных стационарных источников. Каждая осциллограмма — это реализация  $x_v(t)$  случайного процесса.

Тогда, зафиксировав произвольный момент времени  $t_i$ , можно записать для него все значения  $x(t_i)$  и вычислить

$$\bar{X} \approx \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N x_v(t_i),$$

что является приближенным значением среднего или его оценкой. С увеличением количества данных опыта, т. е. числа  $N$ , результат их обработки (оценка) будет со все большей точностью совпадать с математическим ожиданием.

Для оценки дисперсии  $\sigma_x^2$  нужно образовать ряд значений центрированной случайной величины для момента времени  $t_i$ , а именно

$$x_1^0(t_i) = x_1(t_i) - \bar{X}, \quad x_2^0(t_i) = x_2(t_i) - \bar{X}, \quad \dots, \quad x_N^0(t_i) = x_N(t_i) - \bar{X}.$$

Затем, вычислив сумму, поделенную на

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N [x_v^0(t_i)]^2,$$

получим искомую оценку дисперсии.

Значение функции корреляции  $R_x$  зависит от интервала между рассматриваемыми сечениями  $\tau$ . Поэтому для вычисления ее требуется задаться рядом значений  $\tau$ . Для каждого из значений  $\tau$  образуются две последовательности величин, полученных в результате опыта:

$$x_1^0(t_i), x_2^0(t_i), \dots, x_N^0(t_i)$$

и

$$x_1^0(t_i - \tau), x_2^0(t_i - \tau), \dots, x_N^0(t_i - \tau).$$

Далее находим среднее значение их попарных произведений:

$$R_x \approx \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N x_v^0(t_i) x_v^0(t_i - \tau).$$

Полученное значение  $R_x$  является оценкой коэффициента корреляции двух случайных величин  $X(t_i)$  и  $X(t_i - \tau)$ . Меняя значение  $\tau$  и производя идентичные действия, можно получить оценку корреляционной функции  $R_x(\tau)$ . С увеличением числа  $N$  надежность результатов может быть получена сколь угодно высокой. Если поставлена задача определения  $R_x(\tau)$ , то в отдельном вычислении  $\sigma_x^2$  нет необходимости, так как

$$\sigma_x^2 = R_x(0).$$

Для того чтобы установить, является ли процесс стационарным, надо повторить приведенные вычисления для ряда значений  $t_i$ . В случае независимости результатов от выбора сечения можно утверждать, что случайный процесс *стационарен в широком смысле*.

Поскольку стационарный процесс протекает во времени однородно, естественно допустить, что требуемая для отыскания статистических характеристик процесса совокупность ограниченных во времени реализаций может быть получена на основании одной реализации достаточно большой продолжительности.

На рис. 2.9, б изображена совокупность реализаций  $\{x_v\}$  продолжительности  $T_p'$ , «нарезанных» из одной реализации (рис. 2.9, а) большей продолжительности  $T_p = NT_p'$  (для простоты взято  $N=3$ , при этом изменен масштаб времени). Увеличивая  $T_p$ , можно получить при неизменном  $T_p'$  все большее число реализаций  $N$ . Обработка полученной совокупности приводит к определению статисти-

ческих характеристик случайного процесса  $X(t)$ . Таким образом, свойства стационарного случайного процесса могут быть определены на основании единственной реализации однократного опыта достаточно большой продолжительности. Вычисленные по совокупности  $N$  реализаций среднее значение, дисперсия и функция корреляции

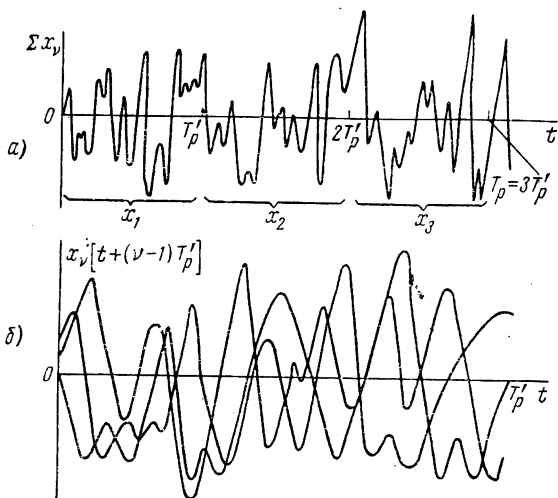


Рис. 2.9. Совокупность реализаций стационарного процесса, «нарезанных» из одной

ляции должны оставаться неизменными в течение всего времени протекания процесса, каким бы продолжительным он ни был. Это значит, что искомые характеристики могут находиться усреднением не по совокупности реализаций, а усреднением по времени *текущих* значений, полученных по одной реализации  $x(t)$ . Этот вывод имеет значение при выборе методики определения характеристик процесса.

Среднее значение можно выразить как

$$\overline{X(t)} = \widetilde{X(t)} = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt, \quad (2.30)$$

где прямая черта означает усреднение  $X(t)$  по совокупности реализаций, а волнистая черта — усреднение по времени в пределе за бесконечно большой промежуток, когда стационарный процесс представлен единственной реализацией  $x(t)$ .

Формулу (2.30) можно записать и в симметричной форме

$$\widetilde{X(t)} = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) dt.$$

Функцию корреляции стационарного процесса можно найти усреднением также по времени:

$$R_x(\tau) = \overline{[x(t) - \overline{X(t)}][x(t + \tau) - \overline{X(t)}]}. \quad (2.31)$$

Символическая запись (2.31) означает, что

$$R_x(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [x(t) - \overline{X(t)}][x(t + \tau) - \overline{X(t)}] dt. \quad (2.31a)$$

Формула (2.31a) может быть представлена и в симметричной форме

$$R_x(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} [x(t) - \overline{X(t)}][x(t + \tau) - \overline{X(t)}] dt. \quad (2.31b)$$

Как уже отмечалось, при  $\tau=0$  функция корреляции обращается в дисперсию. Поэтому формулы (2.30) и (2.31) позволяют определить все основные характеристики стационарного случайного процесса по одной реализации.

Практически находят не точно эти характеристики, а их приближенные оценки, поскольку продолжительность реализации  $T_p$  всегда ограничена:

$$\overline{X(t)} \approx x_{\text{ср}}^* = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt; \quad (2.32)$$

$$R_x(\tau) \approx R_x^*(\tau) = \frac{1}{T_p - \tau} \int_0^{T_p - \tau} [x(t) - x_{\text{ср}}^*][x(t + \tau) - x_{\text{ср}}^*] dt. \quad (2.33)$$

При ограниченной длительности реализации  $T_p$  усреднение произведения случайной функции (точнее, ее реализации) на самую себя, но смещенную во времени на  $\tau$ , может быть осуществлено лишь на интервале  $T_p - \tau$ . Таким образом, чтобы точность приближенного определения  $R_x^*(\tau)$  при больших  $\tau$  была удовлетворительной, необходимо соблюдать условие  $T_p \gg \tau$ . Признаком того, что продолжительность реализации  $T_p$  достаточна для нахождения  $x_{\text{ср}}^*$  и  $R_x^*(\tau)$ , является вид реализации: если на интервале  $T_p$  реализация носит колебательный характер, многократно пересекает свое среднее значение, то полученные в результате обработки характеристики могут быть приемлемы для их практического использования.

Пример 1. По реализации  $x(t)$  стационарного случайного процесса  $X(t)$  оценить числовые характеристики процесса  $\overline{X(t)} \approx x_{\text{ср}}^*$ ,  $R_x(\tau) \approx R_x^*(\tau)$  и  $\sigma^2 \approx \sigma^{*2}$ . Реализация представлена своими

выборочными значениями  $x_i = x(t_i)$ , взятыми в дискретные моменты времени  $t_i$  с интервалами  $\Delta t = 0,5$  мсек. Выборочные значения сведены в табл. 2.2.

Используя соотношение (2.32), можно найти приближенно значение среднего

$$x_{cp}^* = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x(t) dt$$

или

$$x_{cp}^* \approx \frac{1}{T_p} \sum_{i=1}^k x_i \Delta t = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i,$$

где  $k$  — число выборочных значений; в нашем примере  $k = 120$ .

Пользуясь этой формулой и производя арифметические действия, получим

$$\widetilde{X}(t) \approx x_{cp}^* \approx 22.$$

В соответствии с формулой (2.33) функция корреляции при дискретном задании реализации может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} R_x^*(\tau) &= \frac{1}{T_p - \tau} \int_0^{T_p - \tau} [x(t) - x_{cp}^*] [x(t + \tau) - x_{cp}^*] dt \approx \\ &\approx \frac{1}{T_p - \tau} \sum [x(t_i) - x_{cp}^*] [x(t_i + \tau) - x_{cp}^*] \Delta t. \end{aligned}$$

Важно отметить, что суммирование произведений смещенных выборочных значений по всем  $i$ , т. е. от 1 до  $k$ , может производиться лишь в частном случае при  $\tau = 0$ . С ростом  $\tau$  число суммируемых произведений сокращается и при  $\tau \rightarrow T_p$  стремится к нулю. Таким образом, с ростом  $\tau$  точность получаемого результата (значения  $R_x^*(\tau)$ ) уменьшается. Чтобы заметным образом не снижать точность, следует придерживаться условия  $\tau_{max} \ll T_p$ , где  $\tau_{max}$  — максимальная величина интервала  $\tau$ , для которого вычисляется функция корреляции. Очевидно, что при  $\tau = \tau_{max}$  число выборочных значений, образующих попарные произведения, будет минимальным

$$k_{min} = \frac{T_p - \tau_{max}}{\Delta t}.$$

При промежуточных значениях  $\tau$ , т. е. когда  $0 < \tau < \tau_{max}$ , число выборочных значений будет также промежуточным

$$k_\tau = \frac{T_p - \tau}{\Delta t}.$$

Таблица 2.2

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$x(t_i)$	32	38	34	32	35	41	38	30	23	20	19	25	28	24	22	17	17	25	30	28	25	23
$i$	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$x(t_i)$	20	17	18	25	30	31	29	25	22	19	12	11	10	8	8	8	9	9	11	15	19	17
$i$	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
$x(t_i)$	14	14	19	31	35	36	35	30	30	29	29	22	20	22	27	35	35	30	30	30	33	33
$i$	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
$x(t_i)$	30	28	29	28	25	31	36	35	30	15	11	9	10	14	15	15	13	10	13	15	18	15
$i$	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
$x(t_i)$	12	10	12	17	22	30	29	29	28	27	25	24	24	22	20	20	19	15	10	10	14	18
$i$	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120												
$x(t_i)$	20	22	25	27	29	33	31	26	22	20												

Практически вычисление  $R_x^*(\tau)$  удобно производить по формуле

$$R_x^*(t) \approx \frac{1}{k_\tau} \sum_{i=1}^{k_\tau} [x(t_i) - x_{cp}^*] [x(t_i + \tau) - x_{cp}^*].$$

При дискретном задании реализации  $R_x^*(\tau)$  получается также в дискретной форме. Вычисленные значения  $R_x^*(\tau)$  сведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

$\tau$ , мсек	0	15	3	4,5	6	7,5	
$R_x^*(\tau)$	70	32	15	-5	-6	-10	

Приближенный график  $\rho(\tau) = \frac{R_x^*(\tau)}{R_x^*(0)}$  приведен на рис. 2.10. При вычислениях принято

$$\tau_{\max} \approx 0,125 T_p = 7,5 \text{ мсек} \text{ и } \Delta\tau = 3\Delta t = 1,5 \text{ мсек}.$$

Находим дисперсию:

$$\sigma_x^{*2} = R_x^*(0) = 70.$$

Полученный по данным эксперимента график  $\rho(\tau)$  аналитически хорошо аппроксимируется функцией

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \Omega\tau$$

при  $\alpha = 244 \text{ 1/сек}$  и  $\Omega = 125\pi \text{ 1/сек}$ .

Рассмотрим вопрос, всегда ли справедливо представление стационарного процесса  $X(t)$  его единственной реализацией, пусть даже весьма большой продолжительности. Важно установить, является ли условие стационарности достаточным для замены операций усреднения по реализациям усреднением по времени.

Возьмем в качестве примера стационарный случайный процесс, представленный совокупностью своих реализаций, изображенных на рис. 2.11. Каждая из реализаций, как и вся их совокупность, однородны во времени, т. е. можно считать данный процесс стационарным. Однако статистические характеристики такого процесса, полученные усреднением по реализациям и по времени не совпадают. В частности, очевидно, что среднее значение, найденное в соответствии с формулами (2.29) или (2.32), будет зависеть от выбранной реализации. Значит, каждой из множества реализаций

будет соответствовать свое среднее значение. Его величина может меняться регулярным или случайным образом от реализации к реализации. Следовательно, отдельно взятая реализация не выражает свойства процесса в целом.

Возможен случай, когда значение дисперсии, вычисленное усреднением по времени, также будет зависеть от выбора реализации и не совпадет с дисперсией, полученной усреднением по реали-

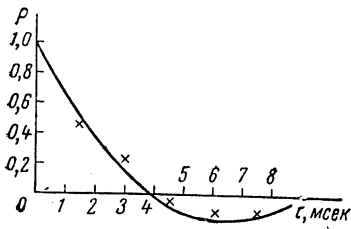


Рис. 2.10

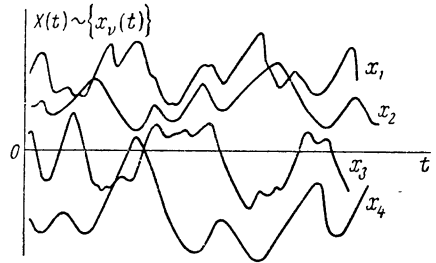


Рис. 2.11. К пояснению эргодического свойства

зациям. Примерный вид такого стационарного процесса в виде совокупности реализаций приведен на рис. 2.12.

Наконец, существует процесс, для которого от выбора реализации могут зависеть функция корреляции либо вместе взятые ранее рассмотренные характеристики процесса и характеристики, полученные усреднением по времени. С подобного рода процессами можно, например, встретиться при исследовании прохождения регулярных или стационарных случайных колебаний через цепи, параметры которых при снятии отдельных реализаций случайно меняются. Аналогичными свойствами может обладать совокупность реализаций, полученных от однотипных источников, обладающих разбросом параметров.

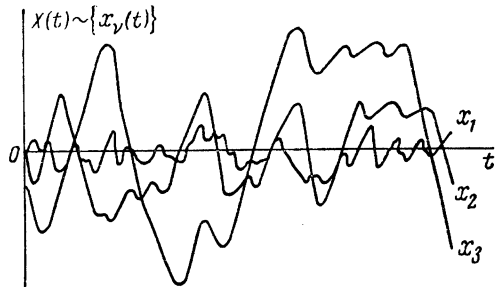


Рис. 2.12. Вторая иллюстрация к пояснению эргодического свойства

Таким образом, изучение свойств стационарного случайного процесса по единственной реализации оказывается возможным только тогда, когда реализации обладают так называемым эргодическим свойством. Это означает, что любая из реализаций, составляющих ансамбль, должна нести в себе все основные черты процесса, т. е. быть достаточно представительной. Вследствие сказанного, соотношения (2.29), (2.30) и (2.31) оказываются спра-



ведливими, если стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством.

**Пример 2.** На входе системы  $N$  однотипных безынерционных преобразователей действует измеряемое стационарное возмущение  $X(t)$  со средним значением, отличным от нуля. Коэффициенты передачи преобразователей  $K_v$  имеют разброс значений (дисперсия  $\sigma_k^2$ ) относительно среднего  $K_{cp}$ , определенного по большой партии. Произвести сравнительную оценку результатов измерения (среднего значения, дисперсии и функции корреляции), полученных по совокупности  $N$  реализаций случайного процесса на выходах преобразователей и по одной из них.

На выходе  $v$ -го преобразователя будем иметь

$$y_v(t) = K_v x(t),$$

где  $x(t)$  — мгновенное значение реализации  $X(t)$ .

Вся совокупность реализаций на выходах преобразователей условно может быть записана в виде

$$Y(t) = Kx(t),$$

где  $K$  — совокупность значений коэффициентов передачи преобразователей.

Среднее значение реализации на выходе  $v$ -го преобразователя

$$\widetilde{y}_v(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \int_0^{T_p} K_v x(t) dt = K_v \widetilde{X}(t).$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} \sigma_{y_v}^2 &= \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [y_v(t) - \widetilde{y}_v(t)]^2 dt = \\ &= \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [K_v x(t) - K_v \widetilde{X}(t)]^2 dt = K_v^2 \sigma_x^2. \end{aligned}$$

Функция корреляции

$$\begin{aligned} R_{y_v}(\tau) &= \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} [K_v x(t) - K_v \widetilde{X}(t)] [K_v x(t + \tau) - \\ &\quad - K_v \widetilde{X}(t)] dt = K_v^2 R_x(\tau). \end{aligned}$$

Полученные характеристики описывают  $v$ -ю реализацию, но не распространяются на все остальные. Для процесса  $Y(t)$ , представленного ансамблем реализаций, среднее значение

$$\overline{Y(t)} = \overline{KX(t)}.$$

Среднее значение произведения двух случайных величин  $K$  и  $X$  согласно теории вероятностей находят в соответствии со следующей формулой:

$$\overline{Y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} kxp_2(k, x) dkdx,$$

где  $p_2(k, x)$  — плотность вероятности совместного распределения  $K$  и  $X$ . Естественно допустить, что в рассматриваемом примере величины  $K$  и  $X$  статистически независимы. Тогда совместная плотность вероятности принимает вид

$$p_2(k, x) = p_1(k)p_1(x).$$

С учетом последнего получаем среднее значение по совокупности реализаций в виде

$$\overline{Y(t)} = \overline{K} \overline{X(t)}.$$

Проделав несложные преобразования, получим выражение для функции корреляции процесса на выходе совокупности преобразователей:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \overline{[Y(t) - \overline{Y(t)}][Y(t + \tau) - \overline{Y(t)}]} = \\ &= \overline{[KX(t) - \overline{Y}][KX(t + \tau) - \overline{Y}]} = \\ &= \overline{K^2 X(t) X(t + \tau)} - (\overline{Y})^2. \end{aligned}$$

Окончательно

$$R_y(\tau) = \overline{K^2 X(t) X(t + \tau)}.$$

В соответствии со сказанным ранее

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \overline{K^2 X^2} - (\overline{K} \overline{X})^2.$$

Результаты вычисления, полученные по совокупности реализаций и по одной из них, не совпадают. Это является следствием того, что, несмотря на стационарность процесса  $Y(t)$ , никакая из его реализаций не является представительной, т. е. этот процесс не обладает эргодическим свойством.

## § 2.5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРоятностей СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В ряде разделов статистической радиотехники применяют аппарат характеристических функций. Характеристическая функция образуется преобразованием Фурье плотности вероятности случай-

ных величин. В случае одномерного закона распределения характеристическая функция имеет вид

$$\gamma_x(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \exp(j\eta x) dx, \quad (2.34)$$

где  $\eta$  — действительное число.

Как видно из (2.34), это преобразование совпадает с математическим ожиданием функции случайного аргумента:

$$f(X) = \exp(j\eta X). \quad (2.35)$$

Следовательно,

$$\gamma_x(\eta) = \overline{\exp(j\eta X)}. \quad (2.36)$$

Таким образом, характеристическая функция является комплексной неслучайной функцией мнимого аргумента  $j\eta$ .

Так как плотность вероятности всегда неотрицательна, а модуль

$$|\exp(j\eta x)| = \exp(0) = 1,$$

для интеграла (2.34) справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \exp(j\eta x) dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |p_1(x) \exp(j\eta x)| dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) |\exp(j\eta x)| dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из (2.37) вытекает, что

$$|\gamma(\eta)| \leq \gamma(0) = 1. \quad (2.38)$$

Равенство (2.38) означает сходимость интеграла (2.34) независимо от закона распределения  $p_1(x)$ . Этим доказывается существование характеристической функции.

Поскольку характеристическая функция существует и связана с плотностью вероятности преобразованием Фурье, то обратный переход к плотности вероятности может быть осуществлен обратным преобразованием Фурье характеристической функции.

$$p_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\eta) \exp(-j\eta x) d\eta. \quad (2.39)$$

Пример 1. Сдвиг фазы  $\Phi(t)$  колебания

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + \Phi(t)]$$

является случайным и имеет равномерный закон распределения:

$$p_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi;$$

$$p_1(\varphi) = 0, \quad \varphi < -\pi, \varphi > \pi.$$

Данный закон графически представлен на рис. 2.13.

Найти характеристическую функцию случайной фазы  $\Phi$ . Согласно (2.34) имеем

$$\gamma_\varphi(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\varphi) \exp(j\eta\varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \exp(j\eta\varphi) d\varphi.$$

В результате интегрирования получаем

$$\gamma_\varphi(\eta) = \frac{1}{\pi\eta} \sin \pi\eta.$$

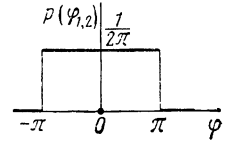


Рис. 2.13

В данном примере характеристическая функция является действительной функцией аргумента  $\eta$ .

Из (2.34) следует, что

$$\frac{d\gamma_x(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \exp(j\eta x) dx = j \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) \exp(j\eta x) dx.$$

При  $\eta = 0$

$$\left. \frac{d\gamma_x(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = j \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx = j \bar{X}.$$

Отсюда

$$\bar{X} = M_1[X] = -j \left. \frac{d\gamma_x(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \quad (2.40)$$

Следовательно, производная характеристической функции в точке  $\eta = 0$  с точностью до постоянного множителя есть математическое ожидание случайной функции  $X(t)$ .

Аналогично, вычисляя вторую производную, получим

$$\frac{d^2 \gamma_x(\eta)}{d\eta^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) \exp(j\eta x) dx,$$

откуда при  $\eta = 0$  будем иметь

$$\bar{X}^2 = M_2[X] = - \left. \frac{d^2 \gamma_x(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = (-j)^2 \left. \frac{d^2 \gamma_x(\eta)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0}. \quad (2.41)$$

Таким образом, второй момент случайной функции  $X(t)$  определяется второй производной характеристической функции в точке  $\eta = 0$ .

Воспользовавшись соотношением (2.6), можно на основании (2.40) и (2.41) записать

$$\sigma_x^2 = \left\{ \left[ \frac{d\gamma_x(\eta)}{d\eta} \right]^2 - \frac{d^2\gamma_x(\eta)}{d\eta^2} \right\} \Big|_{\eta=0}. \quad (2.42)$$

Пример 2. По характеристической функции

$$\gamma_\varphi(\eta) = \frac{1}{\pi\eta} \sin\pi\eta$$

найти среднее значение случайной функции  $\Phi(t)$  и ее дисперсию.

Легко убедиться, что среднее значение

$$\bar{\Phi} = -j \frac{d\gamma_\varphi(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0.$$

Это является следствием симметрии исходного закона распределения для  $\Phi$  относительно  $\varphi = 0$ . После двукратного дифференцирования и раскрытия неопределенности получаем

$$\sigma_\varphi^2 = - \frac{d^2\gamma_\varphi(\eta)}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Последовательным дифференцированием  $\gamma(\eta)$  в точке  $\eta = 0$  может быть определен момент произвольного порядка мгновенного значения случайной функции

$$M_n[X] = \bar{X}^n = (j)^n \frac{d^n\gamma_x(\eta)}{d\eta^n} \Big|_{\eta=0}. \quad (2.43)$$

Если характеристическую функцию разложить в ряд Тейлора, то коэффициентами разложения являются моменты распределения:

$$\gamma_x(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n\gamma_x(\eta)}{d\eta^n} \cdot \frac{\eta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{X}^n \frac{(j\eta)^n}{n!}. \quad (2.44)$$

Следовательно, при известных моментах распределения может быть построена характеристическая функция, а с помощью последней получен одномерный закон распределения.

Удовлетворительно полное описание случайного колебания может дать многомерное распределение. Многомерной случайной величине (совокупности  $\{X_i\}$  мгновенных значений случайного процесса) или многомерному закону распределения случайных величин может соответствовать многомерная характеристическая функция

$$\gamma_x(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) = \exp j \sum \eta_i \bar{X}_i \quad (2.45)$$

или

$$\begin{aligned} \gamma_x(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \times \dots \\ &\dots \times \int_{-\infty}^{\infty} p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \exp j \sum_{i=1}^k \eta_i x_i dx_k. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Многомерная характеристическая функция удовлетворяет условию

$$|\gamma_k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)| \leq \gamma(0, 0, \dots, 0) = 1. \quad (2.47)$$

Формула (2.47) позволяет найти характеристическую функцию любой произвольной системы  $l < k$  случайных величин. Для этого нужно положить равным нулю все  $k-l$  переменных  $\eta$  с индексами, соответствующими исключаемым случайным величинам.

Обратное преобразование многомерной характеристической функции (2.46) с помощью кратных интегралов Фурье показывает способ определения многомерного закона распределения:

$$\begin{aligned} p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_x(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) \times \\ &\times \exp\left(-j \sum_{i=1}^k \eta_i x_i\right) d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_k. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Многомерная характеристическая функция системы случайных величин позволяет найти смешанный момент этих величин произвольного порядка

$$\overline{X_1^{v_1} X_2^{v_2} \dots X_k^{v_k}} = (-j)^{\sum_{i=1}^k v_i} \frac{\partial^{v_1+v_2+\dots+v_k} \gamma_x(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)}{\partial \eta_1^{v_1} \partial \eta_2^{v_2} \dots \partial \eta_k^{v_k}} \Big|_{\eta_1=\eta_2=\dots=\eta_k=0} \quad (2.49)$$

Если задана система независимых случайных величин, то

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_k(x_k).$$

Тогда согласно (2.46)

$$\gamma_x(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) = \gamma_1(\eta_1) \gamma_2(\eta_2) \dots \gamma_k(\eta_k), \quad (2.50)$$

где  $p_i(x_i)$  — плотность вероятности случайной величины  $X_i$ ;

$\gamma_i(\eta_i)$  — одномерная характеристическая функция этой случайной величины.

Следовательно, характеристическая функция системы независимых случайных величин есть произведение отдельных характеристических функций.

Пример 3. Пользуясь характеристической функцией, найти одномерный закон распределения мгновенного значения разности случайных фаз  $\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_2(t)$  двух колебаний

$$u_1 = U_m \cos [\omega_0 t + \Phi_1(t)]$$

и

$$u_2 = U_m \cos [\omega_0 t + \Phi_2(t)],$$

если известно, что  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  статистически независимы и имеют равномерный закон распределения (рис. 2.13).

Характеристическую функцию разности фаз можно выразить следующим образом:

$$\gamma_\Phi = \overline{\exp(j\eta\Phi)} = \overline{\exp(j\eta\Phi_1) \exp(-j\eta\Phi_2)}.$$

С учетом независимости  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi(\eta) &= \overline{\exp(j\eta\Phi_1)} \overline{\exp(-j\eta\Phi_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\varphi_1) \exp(j\eta\varphi_1) \times \\ &\quad \times d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\varphi_2) \exp(-j\eta\varphi_2) d\varphi_2. \end{aligned}$$

Подставляя под интегралы

$$p_1(\varphi_{1,2}) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{при} \quad -\pi \leq \varphi_{1,2} \leq \pi$$

и

$$p_1(\varphi_{1,2}) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi_{1,2} < -\pi \quad \text{и} \quad \varphi_{1,2} > \pi$$

имеем

$$\gamma_\Phi(\eta) = \left( \frac{\sin \pi\eta}{\pi\eta} \right)^2.$$

Осуществляя обратное преобразование Фурье над функцией  $\gamma_\Phi(\eta)$ , получим искомую плотность вероятности  $p_1(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} p_1(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\Phi(\eta) \exp(-j\eta\varphi) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \pi\eta}{\pi\eta} \right)^2 \exp(-j\eta\varphi) d\eta. \end{aligned}$$

Введя новую переменную интегрирования  $x = \pi\eta$ , можно записать

$$\rho_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \exp\left(-j \frac{\varphi}{\pi} x\right) dx.$$

При симметричных значениях  $x$  подынтегральная функция

$$\left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 e^{-j \frac{\varphi}{\pi} x} = \left\{ \left[ \frac{\sin(-x)}{-x} \right]^2 \exp\left[-j \frac{\varphi}{\pi} (-x)\right] \right\}_{\text{сопряж.}}$$

Поэтому можно показать, что интеграл в пределах  $-\infty, \infty$  может быть заменен интегралом

$$\rho_1(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos \frac{\varphi}{\pi} x dx.$$

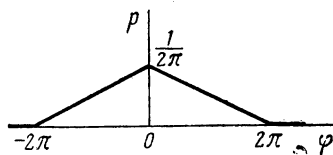


Рис. 2.14

Значение данного интеграла вычислено в [17] и представлено позицией 858, 713. Используя это, получим

$$\rho_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \quad \text{при} \quad 2\pi \geq \varphi \geq 0;$$

$$\rho_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \right) \quad \text{при} \quad -2\pi \leq \varphi \leq 0;$$

$$\rho_1(\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi < -2\pi, \varphi > 2\pi.$$

График полученной плотности вероятности представлен на рис. 2.14.

Рассмотренный пример дан с целью иллюстрации использования характеристической функции при нахождении закона распределения. Задача нахождения распределения суммы или разности двух случайных величин может быть решена и другим способом — путем свертки их законов распределения.

## § 2.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Во многих задачах радиотехники исследуемые процессы находятся в дифференциальных соотношениях (например, фаза и частота колебания). Поэтому важно располагать зависимостями, связывающими статистические характеристики таких процессов. Производная случайного процесса является также случайной функцией времени. В силу этого дифференцируемость обусловлена существованием случайной функции  $X'(t) = \frac{d}{dt} X(t)$ , называемой произ-



водной случайного процесса и удовлетворяющей соотношению

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \left\{ \left| \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - X'(t) \right| > 0 \right\} = 0. \quad (2.51)$$

Соотношение (2.51) для реальных процессов всегда выполняется. Это объясняется, во-первых, тем, что реальные процессы текут непрерывно, ибо любой источник колебаний в каждый момент может выдать не более, чем единственное значение мгновенной величины колебания, во-вторых, случайные процессы неизбежно проходят сглаживающие элементы цепей. Поэтому реализации случайных процессов удовлетворяют условию дифференцируемости в любые моменты времени.

Формула (2.51) показывает, что для исследования статистических свойств производной нужно рассматривать разность мгновенных значений  $X(t)$ , разделенных интервалом  $\Delta t$ . Пара мгновенных значений определяется функцией корреляции. Следовательно, последняя, в оценке производной играет первостепенную роль.

Рассмотрим вначале функцию корреляции отношения  $Y(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} R_y(\tau, \Delta t) &= M \left\{ \left[ \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \right] \left[ \frac{X(t + \Delta t + \tau) - X(t + \tau)}{\Delta t} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} M [X(t + \Delta t) X(t + \Delta t + \tau)] - \\ &- \frac{1}{(\Delta t)^2} M [X(t) X(t + \Delta t + \tau)] - \frac{1}{(\Delta t)^2} M [X(t + \Delta t) X(t + \tau)] + \\ &+ \frac{1}{(\Delta t)^2} M [X(t) X(t + \tau)]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Для стационарного процесса

$$\begin{aligned} M [X(t + \Delta t) X(t + \Delta t + \tau)] &= M [X(t) X(t + \tau)] = R_x(\tau) \\ M [X(t) X(t + \Delta t + \tau)] &= R_x(\tau + \Delta t) \\ M [X(t + \Delta t) X(t + \tau)] &= R_x(\tau - \Delta t). \end{aligned}$$

Поэтому (2.52) приводится к виду

$$R_y(\tau, \Delta t) = \frac{1}{(\Delta t)^2} [2R_x(\tau) - R_x(\tau + \Delta t) - R_x(\tau - \Delta t)].$$

Тогда корреляционная функция производной

$$R_x'(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R_y(\tau, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2R_x(\tau) - R_x(\tau + \Delta t) - R_x(\tau - \Delta t)}{(\Delta t)^2}. \quad (2.53)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  числитель и знаменатель (2.53) стремятся к нулю. Для раскрытия неопределенности следует дважды продифференцировать числитель и знаменатель по  $\Delta t$ , после чего сделать предельный переход. В результате получим

$$R_{x'}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R_y(\tau, \Delta t) = -R_x''(\tau). \quad (2.54)$$

Поскольку  $\tau$  и  $\Delta t$  входят в  $R_x(\tau + \Delta t)$  равноправно, двойное дифференцирование в (2.54) может рассматриваться как дифференцирование по  $\tau$ . Следовательно, корреляционная функция производной случайного процесса равна взятой с обратным знаком второй производной его корреляционной функции.

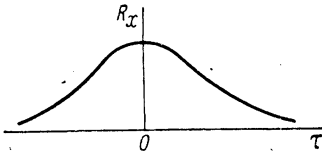


Рис. 2.15. Автокорреляционная функция дифференцируемого случайного процесса

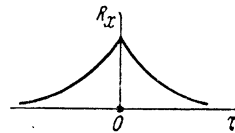


Рис. 2.16. Автокорреляционная функция случайного процесса, не имеющего производной

Таким образом, для дифференцируемости случайного процесса необходимо существование второй производной его корреляционной функции.

Поскольку

$$R_{x'}(0) = -R_x''(0) = \sigma_{x'}^2, \quad (2.55)$$

то дифференцируемость процесса связана с существованием дисперсии  $\sigma_{x'}^2$ .

Так как  $R_x(\tau)$  обладает симметрией относительно  $\tau=0$  и убывает с ростом  $\tau$ , для дифференцируемости случайного процесса его автокорреляционная функция должна иметь максимум типа экстремума в точке  $\tau=0$  (рис. 2.15). Этому условию не удовлетворяет корреляционная функция, изображенная на рис. 2.16. Характер поведения корреляционной функции дифференцируемого процесса вблизи  $\tau=0$  говорит о необходимости для дифференцирования довольно значительной статистической связи между мгновенными значениями процесса в близких сечениях. Для процесса, изображенного корреляционной функцией рис. 2.16, эта связь выражена слабее, поэтому процесс оказался недифференцируемым.

Случайный процесс может подвергаться  $n$ -кратному дифференцированию. Корреляционная функция такого процесса

$$R_{x^{(n)}}(\tau) = (-1)^n R_x^{(2n)}(\tau). \quad (2.56)$$

Для существования  $n$ -й производной случайного процесса необходимо, чтобы корреляционная функция последнего допускала  $2n$ -кратное дифференцирование.

**Пример 1.** Найти функцию корреляции и дисперсию производной стационарного процесса  $X(t)$ , имеющего функцию корреляции

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-(\alpha\tau)^2}.$$

График  $R_x(\tau)$  подобен графику, изображенному на рис. 2.15. В соответствии с формулой (2.54) имеем

$$R_{x'}(\tau) = -R_x'(\tau) = 2\sigma_x^2 \alpha^2 [1 - 2(\alpha\tau)^2] e^{-(\alpha\tau)^2}.$$

График  $R_{x'}(\tau)$  приведен на рис. 2.17.

Применяя формулу (2.55), получаем значение дисперсии производной

$$\sigma_{x'}^2 = R_{x'}(0) = 2\sigma_x^2 \alpha^2.$$

При необходимости можно найти и закон распределения мгновенных значений производной случайного процесса. Для этого,

используя двумерную плотность вероятности  $p_2(x, x + \Delta t)$  мгновенных значений  $X(t)$  и  $X(t + \Delta t)$ , на основании соотношения

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\alpha, \alpha + y) d\alpha \quad (2.57)$$

для плотности вероятности разности двух случайных величин, известного из теории вероятностей, можно записать выражение для плотности вероятности разности

$$Y(t) = X(t + \Delta t) - X(t).$$

Тогда

$$p_y(y, \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(\alpha, \alpha + y, \Delta t) d\alpha. \quad (2.58)$$

Для вычисления плотности вероятности производной нужно от разности  $Y(t)$  перейти к новой случайной величине  $\frac{Y(t)}{\Delta t}$ , найти плотность ее вероятности и сделать предельный переход. Умножение случайной величины на неслучайную (в данном случае на  $1/\Delta t$ ) преобразует закон распределения следующим образом:

$$p_{y/\Delta t}(y, \Delta t) = \Delta t p_y(\Delta t y, \Delta t). \quad (2.59)$$

Из (2.59) получаем плотность вероятности для производной:

$$\rho_{x'}(y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t p_y(\Delta t y, \Delta t). \quad (2.60)$$

Так как производная связана с образованием разности мгновенных значений в близких сечениях, закон распределения производной в общем случае не будет совпадать с законом распределения исходного процесса.

При решении ряда задач важную роль играет статистическая связь между мгновенными значениями случайного процесса и его производной. Вычислим функцию их корреляции:

$$\begin{aligned} R_{xx'}(\tau) &= \overline{X(t) X'(t + \tau)} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M \left\{ \frac{X(t) [X(t + \Delta t + \tau) - X(t + \tau)]}{\Delta t} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R_x(\tau + \Delta t) - R_x(\tau)}{\Delta t} = R'_x(\tau). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция случайного процесса и его производной может быть получена дифференцированием автокорреляционной функции исходного процесса. Следует заметить, что в совпадающие моменты времени, т. е. при  $\tau=0$ ,

$$R_{xx'}(0) = R'_x(0) = 0. \quad (2.62)$$

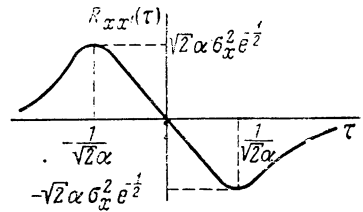


Рис. 2.18

Пример 2. Найти функцию взаимной корреляции  $R_{xx'}(\tau)$  стационарного случайного процесса  $X(t)$ , заданного своей автокорреляционной функцией

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-(\alpha\tau)^2}$$

и его производной  $X'(t)$ .

В соответствии с (2.61) имеем

$$R_{xx'}(\tau) = R'_x(\tau) = -2\alpha^2 \sigma_x^2 \tau e^{-(\alpha\tau)^2}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 2.18. Рассмотрим интеграл от случайной функции

$$Y(t) = \int_0^t X(\theta) d\theta,$$

где  $X(t) = M[X(t)] + X^0(t)$  — в общем случае нестационарный процесс, имеющий функцию корреляции  $R_x(t_1, t_2)$ .

Ограничиваясь исследованием  $M[Y(t)]$  и  $R_y(t_1, t_2)$ , можно сравнительно просто установить, что

$$M[Y(t)] = \int_0^t M[X(\theta)] d\theta,$$

т. е. среднее значение интеграла от случайной функции равно интегралу от ее среднего значения. Это соотношение почти очевидно, так как трудно представить среднее значение интеграла от централизованной составляющей  $X^0(t)$  отличным от нуля.

Функция корреляции интегрально преобразованного процесса находится следующим образом:

$$R_y(t_1, t_2) = M[Y^0(t_1)Y^0(t_2)] = M \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} X^0(\theta_1) X^0(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

Окончательно

$$R_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M[X^0(\theta_1)X^0(\theta_2)] d\theta_1 d\theta_2 = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

В частном случае стационарного процесса, когда

$$M[X(t)] = M_x = \text{const}; \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1),$$

имеем

$$M[Y(t)] = M_x t; \quad R_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\theta_2 - \theta_1) d\theta_1 d\theta_2.$$

Последние два соотношения показывают, что интегрально преобразованный *стационарный* процесс является *нестационарным*.

## § 2.7. ПРОЦЕСС С НОРМАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Среди реальных случайных процессов наиболее распространенным является нормальный процесс.

Свойства этого процесса исчерпывающе описывает двумерный закон распределения его мгновенных значений. В ряде задач может быть необходим и многомерный закон, однако он является следствием двумерного закона распределения.

Нормальным, или гауссовым, называют случайный процесс, если его мгновенные задачи имеют нормальный закон распределения. Напомним, что случайную величину  $X$  называют распределенной нормально (или нормальной, гауссовой случайной величиной), когда ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.63)$$

где  $\sigma$  — дисперсия случайной величины;

$\bar{X}$  — ее среднее значение.

По формуле (2.63) можно вычислить вероятность  $P(X \leq x)$ :

$$P(X \leq x) = P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (2.64)$$

Графики формул (2.63) и (2.64) представлены на рис. 2.19. Они построены для частного случая, когда  $\bar{X}=3$  и  $\sigma^2=1$ . Для нормальной случайной величины характерно, что закон ее распределения полностью определяется средним значением  $\bar{X}$  и дисперсией  $\sigma^2$  и не зависит от других моментов. Если под величиной  $X$  понимается значение случайной функции  $X(t)$  в произвольный момент, то формулы (2.63) и (2.64) выражают соответственно в дифференциальной и интегральной формах одномерный закон распределения нормального случайного процесса.

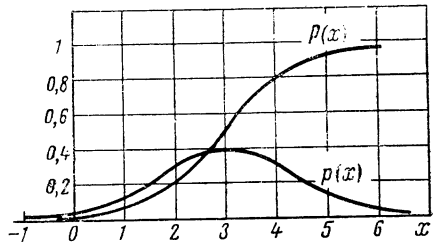


Рис. 2.19. График нормального одномерного закона распределения случайного процесса при  $\sigma^2=1$  и  $\bar{X}=3$

Для нормально распределенных случайных величин  $X(t_i)$  с нулевыми средними значениями и одинаковой дисперсией плотность вероятностей совместного распределения мгновенных значений в  $k$ -сечениях можно записать в виде

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} |\rho| \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k |\rho_{il}| x_i x_l\right]}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k |\rho|^{1/2}}, \quad (2.65)$$

где  $|\rho_{il}|$  — алгебраическое дополнение элемента  $\rho_{il}$  определителя  $|\rho|$  корреляционной матрицы;

$$(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \dots & \rho_{kk} \end{pmatrix},$$

в которой общий член  $\rho_{il} = \frac{\overline{X_i X_l}}{\sigma^2}$  является нормированным коэффициентом корреляции случайных величин  $X_i$  и  $X_l$ .

В силу свойств коэффициентов корреляции диагональные члены матрицы

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \dots = \rho_{kk} = 1,$$

а прочие члены симметричны относительно диагонали. Поскольку случайным величинам придается смысл выборочных значений случайной функции, то корреляционная матрица образуется из элементов, которые могут быть вычислены с помощью нормированной функции корреляции  $\rho(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}$ . Таким образом, функция корреляции однозначно определяет свойства нормального случайного процесса. Она позволяет построить многомерное распределение вероятностей (2.65).

В частном случае, когда значения случайной функции берутся через интервалы времени, большие интервала корреляции, можно полагать, что при  $i \neq l$  коэффициент корреляции  $\rho_{il} \ll 1$ . При этом формула (2.65) принимает приближенный вид

$$\rho_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \approx \prod_{i=1}^k \rho_1(x_i) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2]^{k/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k x_i^2\right]. \quad (2.66)$$

Так как функция корреляции полностью определяет многомерное распределение нормального процесса и, как это следует из ее определения, может быть получена с помощью двумерного закона, то двумерный закон распределения нормального случайного процесса полностью определяет его свойства. Из формулы (2.65) получаем выражение для двумерной плотности вероятности значений стационарного нормального процесса  $X_1$  и  $X_2$ , разделенных интервалом  $\tau$ :

$$\rho_2(x_1, x_2) = \frac{1!}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right]. \quad (2.67)$$

В этой формуле  $\rho = \rho(\tau)$ . Для упрощения записи среднее значение процесса принято равным нулю.

Формула (2.67) совместно с (2.63), взятой при  $\bar{X} = 0$ , позволяет записать выражение для условной плотности вероятности того, что случайный процесс будет иметь мгновенное значение  $x_2$ , если за время  $\tau$  до этого его значение было равно  $x_1$ . Подставляя в (2.14) выражения (2.67) и (2.63), получим

$$\rho_2(x_2/x_1) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left[-\frac{(x_1\rho - x_2)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right].$$

Ранее отмечалась распространенность нормально распределенных колебаний. Это обусловлено тем, что случайные процессы часто являются результатом суперпозиции большого числа элементарных колебаний, каждое из которых вносит приблизительно оди-

наковый со всеми остальными вклад в результирующую сумму. В этом случае применима так называемая центральная предельная теорема, согласно которой сумма независимых случайных величин с ростом их числа и независимо от закона распределения каждого из слагаемых становится распределенной нормально. На слагаемые накладывается лишь ограничение на вклад, который они вносят в результирующую сумму. Отдельные слагаемые не должны оказывать заметного влияния на сумму в целом. Если под случайными слагаемыми суммы понимать мгновенные значения элементарных случайных возмущений, формирующих результирующий случайный процесс, то можно сделать вывод о нормальном характере этого процесса. К такому процессу, например, относится шум в цепях приемника, вызванный дискретной природой носителей электричества и непостоянством параметров их движения в электрических цепях. Можно указать и на другие примеры. Так, независимо от статистических свойств процесса, действующего на входе цепи, обладающей способностью интегрировать, на ее выходе случайный процесс по своим статистическим характеристикам будет приближаться к нормальному.

Процессы с нормальным законом распределения обладают рядом особенностей. Линейная комбинация произвольного числа нормальных колебаний также нормальна независимо от параметров законов слагаемых. Следовательно, если нормальный процесс воздействует на линейное устройство, случайное колебание на его выходе сохранит нормальный закон, но с другими параметрами. Сказанное характеризует устойчивость нормального закона.

Для нормального закона, как это следует из (2.67), *некоррелированность*  $\rho(\tau) = 0$  означает *статистическую независимость*:

$$p_2(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_1(x_2).$$

При произвольном законе распределения подобное утверждение невозможно.

Заметим также, что применительно к нормальным случайным процессам понятия стационарности в узком и широком смысле совпадают.

Отыскание распределения производной по существу эквивалентно отысканию распределения разности двух нормальных случайных величин, расположенных в смежных, весьма близких сечениях. Поэтому производная нормального случайного процесса  $Y(t) = X'(t)$  также имеет нормальный закон распределения. Для его записи достаточно иметь функцию корреляции производной, вычисление которой было показано ранее, и по аналогии с формулой (2.67) записать:

$$p_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_y^2 \sqrt{1 - \rho_y^2}} \exp \left[ -\frac{y_1^2 - 2\rho_y y_1 y_2 + y_2^2}{2\sigma_y^2 (1 - \rho_y^2)} \right], \quad (2.68)$$



где  $\sigma_y^2 = \sigma_{x'}^2 = R_{x'}(0) = -R_x''(0)$  — дисперсия производной;

$$\rho_y = \rho_{x'} = \frac{R_{x'}(\tau)}{\sigma_{x'}^2} \text{ — ее нормированная функция корреляции.}$$

Функция корреляции  $R_{x'}(\tau)$  вычисляется в соответствии с формулой (2.54).

**Пример 1.** Найти характеристическую функцию одномерного нормального закона распределения случайного колебания с нулевым средним значением.

Воспользуемся плотностью вероятности (2.63), положив в этой формуле  $\bar{X}=0$ . Тогда, применяя преобразование (2.34), будем иметь

$$\gamma_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{j\eta x} dx = \frac{\exp\left[-\frac{\sigma^2\eta^2}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-j\sigma^2\eta)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Вычисление определенного интеграла удобно провести, введя новую переменную интегрирования  $s = x - j\sigma^2\eta$  и заменив в соответствии с этим пределы интегрирования:

$$\gamma_1(\eta) = \frac{\exp\left[-\frac{\sigma^2\eta^2}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty-j\sigma^2\eta}^{\infty-j\sigma^2\eta} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds.$$

Поскольку подынтегральная функция не имеет особенностей в полосе шириной 0,  $-j\sigma^2\eta$ , контур интегрирования может проходить не вдоль линии  $s = -j\sigma^2\eta$ , а вдоль действительной оси. Значение интеграла при этом останется таким же. В соответствии с этим выражение для характеристической функции принимает следующий вид:

$$\gamma_1(\eta) = \frac{\exp\left[-\frac{\sigma^2\eta^2}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}} ds.$$

Определенный интеграл полученного вида имеется в таблицах. Его значение равно  $\sqrt{2\pi}\sigma$ . Поэтому окончательно имеем

$$\gamma_1(\eta) = \exp\left[-\frac{\sigma^2\eta^2}{2}\right].$$

**Пример 2.** Найти характеристическую функцию двумерного нормального закона распределения мгновенных значений колебания, разделенных интервалом  $\tau$ :

$$\rho_2(x, x_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho x x_\tau + x_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right].$$

Это выражение записано в соответствии с формулой (2.67) для значений случайных величин  $x = X(t)$  и  $x_\tau = X(t + \tau)$ .

Согласно формуле для многомерной характеристической функции (2.46) при  $k = 2$  будем иметь

$$\gamma_2(\eta, \eta_\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho x x_\tau + x_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}} e^{j(\eta x + \eta_\tau x_\tau)} dx_\tau.$$

После преобразования переменных интегрирования это выражение можно привести к виду

$$\gamma_2(\eta, \eta_\tau) = \frac{\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(\eta^2 + 2\rho\eta\eta_\tau + \eta_\tau^2)\right]}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2 + v^2}{2\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}}} dudv,$$

в котором значение определенного интеграла равно  $2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}$ . Поэтому окончательное выражение для двумерной характеристической функции нормального распределения будет следующим:

$$\gamma_2(\eta, \eta_\tau) = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(\eta^2 + 2\rho\eta\eta_\tau + \eta_\tau^2)\right].$$

## § 2.8. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Аналогично описанию энергетического спектра  $N(\omega)$  детерминированного колебания  $s(t)$  (§ 1.6) можно осуществить спектральное описание случайного процесса.

Преобразование Фурье нельзя применить непосредственно к случайной функции, поскольку она не детерминирована. Однако для любой из ее реализаций  $x_\nu(t)$  конечной длительности  $T_p$  можно найти преобразование Фурье  $\hat{G}_{x\nu}(\omega)$ . Тогда в соответствии с (1.54) получим

$$\int_0^{T_p} x_\nu^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{x\nu}^2(\omega) d\omega, \quad (2.69)$$

где  $G_{x\nu}(\omega)$  — модуль спектральной функции  $\nu$ -й реализации.

Средняя мощность реализации  $x_\nu(t)$

$$\frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_\nu^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{x\nu}^2(\omega)}{2\pi T_p} d\omega, \quad (2.70)$$

где  $\frac{G_{x\nu}^2(\omega)}{2\pi T_p}$  — спектральная плотность мощности  $\nu$ -й реализации.

Если продолжительность реализации неограниченно растет, то соотношение (2.70) принимает вид

$$\lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_v^2(t) dt = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{xv}^2(\omega)}{2\pi T_p} d\omega$$

или

$$\lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} x_v^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{G_{xv}^2(\omega)}{2\pi T_p} \right] d\omega. \quad (2.71)$$

Заметим, что соотношение (2.69) для энергии при неограниченно возрастающем  $T_p$  может иметь смысл, когда энергия любой из реализаций ограничена. Поскольку стационарные процессы на неограниченном интервале обладают неограниченной энергией, при анализе последних целесообразно пользоваться спектральной *плотностью мощности*, а не энергии. Спектральную плотность мощности случайного процесса называют его энергетическим спектром  $N(\omega)$  (понимается спектр мощности).

Спектральной плотностью мощности случайного процесса является среднее значение спектральных плотностей отдельных реализаций:

$$N(\omega) = \overline{\frac{G_{xv}^2(\omega)}{2\pi T_p}}. \quad (2.72)$$

Энергетический спектр, естественно, не несет в себе сведений о фазовых соотношениях. Восстановить реализации процесса как функции времени по энергетическому спектру в принципе нельзя.

Практически вычисление спектральной плотности мощности случайного процесса в соответствии с формулой (2.72) может встретить затруднения, так как она выражает операцию обработки множества спектральных функций, полученных из совокупности реализаций. Для эргодических процессов единственная, в пределе неограниченная реализация является достаточной для полной характеристики случайного процесса. Поэтому для стационарного эргодического процесса формула (2.72) может быть записана в следующем виде:

$$N(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{G_x^2(\omega)}{2\pi T_p}. \quad (2.73)$$

Квадрат модуля спектральной функции может быть представлен в виде

$$G_x^2(\omega) = \dot{G}_x(\omega) \dot{G}_x^*(\omega),$$

где

$$\dot{G}_x(\omega) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

и

$$\dot{G}_x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{j\omega\theta} d\theta,$$

так как  $x(t)$  и  $x(\theta)$  — функции, описывающие реализацию на интервале  $[-T_p/2, T_p/2]$ . Вне этого интервала они равны нулю. Тогда формулу (2.73) можно преобразовать:

$$N(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{j\omega\theta} d\theta.$$

Если ввести обозначение  $t = \theta + \tau$ , то получим

$$N(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta + \tau) x(\theta) d\theta.$$

Операции интегрирования по  $\tau$  и взятия предела допустимо поменять местами. В результате будем иметь

$$N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \left[ \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) x(t) dt \right].$$

В прямых скобках находится выражение для функции автокорреляции  $R(\tau)$ . С учетом этого получаем

$$N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2.74)$$

Таким образом, для эргодического стационарного процесса спектральная плотность мощности флуктуаций может быть найдена прямым преобразованием Фурье функции корреляции случайного процесса, заданной или вычисленной по одной реализации.

В соответствии с общими соотношениями для преобразований Фурье обратное преобразование спектральной плотности дает функцию корреляции

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.75)$$

Так как функция корреляции является четной, преобразуя (2.74) и (2.75), можно получить

$$\left. \begin{aligned} N(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \\ R(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} N(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Следовательно, располагая функцией корреляции случайного процесса, можно вычислить такую важную его характеристику, как энергетический спектр. По известному энергетическому спектру можно получить корреляционную функцию случайного процесса.

Однозначно связанные между собой корреляционная функция и энергетический спектр характеризуют случайный процесс в двух аспектах — статистической связью мгновенных значений, разделенных интервалом  $\tau$ , и спектрально. Здесь имеется аналогия с временным и спектральным представлениями детерминированных процессов. Однако при детерминированных процессах связь между мгновенными значениями «жесткая», т. е. функциональная, в то время как при случайных процессах эта связь статистическая. Поэтому и спектр случайного процесса может быть задан только *энергетически*, в отличие от случая детерминированного процесса, когда спектр может быть задан зависимостями от частоты *амплитуд* и *фаз*.

Отметим, что энергетический спектр позволяет вычислить дисперсию процесса. Поскольку

$$R(0) = \sigma^2,$$

то из второго соотношения (2.76) следует, что

$$\sigma^2 = 2 \int_0^{\infty} N(\omega) d\omega. \quad (2.77)$$

Это почти тривиально, поскольку энергетический спектр показывает частотное распределение мощности  $\sigma^2$  процесса.

В литературе можно встретить соотношения, связывающие функцию корреляции и энергетический спектр в несколько иных формах, например:

$$\left. \begin{aligned} N(\omega) &= 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} N(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \end{aligned} \right\}$$

Однако всегда в основе соотношений находятся интегральные преобразования Фурье. Различие состоит в коэффициентах при прямом и обратном преобразованиях.

Если случайный процесс  $Z(t)$  образуется суммой двух (в общем случае и большим числом) случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ , стационарных и стационарно связанных —

$$Z(t) = X(t) + Y(t),$$

то энергетический спектр находят преобразованием (2.74) функции корреляции  $R_z(\tau)$ , которая выражается формулой (2.29). В результате спектральная плотность процесса может быть получена в виде

$$N_z(\omega) = N_x(\omega) + N_{xy}(\omega) + N_{yx}(\omega) + N_y(\omega), \quad (2.78)$$

где  $N_x(\omega)$  и  $N_y(\omega)$  — спектральные плотности процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ ;  $N_{xy}(\omega)$  и  $N_{yx}(\omega)$  — взаимные спектральные плотности, получаемые преобразованием Фурье функций взаимной корреляции.

В частном случае, когда процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  некоррелированы, т. е.  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$ , формула (2.78) упрощается:

$$N_z(\omega) = N_x(\omega) + N_y(\omega). \quad (2.79)$$

**Пример 1.** Функция корреляции, полученная в результате обработки реализации (см. пример 1 на стр. 106), аппроксимирована зависимостью

$$R(\tau) = R(0) e^{-\alpha\tau} \cos \Omega\tau.$$

Найти энергетический спектр случайного процесса. Согласно первой из формул (2.76) имеем

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} R(0) \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \Omega\tau \cos \omega\tau d\tau.$$

Вычисляя этот элементарный интеграл, получаем

$$N(\omega) = \frac{R(0)\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2 + \Omega^2 - \frac{(2\omega\Omega)^2}{\omega^2 + \alpha^2 + \Omega^2}}.$$

График данной зависимости представлен на рис. 2.20. Как и следовало ожидать, энергетический спектр носит убывающий характер, поскольку реальные процессы не могут содержать в себе колебания сколь угодно высоких частот. На частоте

$$\omega = \sqrt{-\alpha^2 - \Omega^2 + 2\Omega\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}}$$

спектральная плотность энергии имеет максимум. При  $\Omega < \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$

экстремум исчезает, а спектральная функция становится монотонной.

Пример 2. Энергетический спектр случайного процесса на выходе фильтра нижних частот аппроксимирован функцией (рис. 2.21, а)

$$N(\omega) = N_0 e^{-(\alpha\omega)^2}.$$

Вычислить функцию корреляции процесса.

В соответствии со второй формулой (2.76) имеем

$$R(\tau) = 2N_0 \int_0^{\infty} e^{-(\alpha\omega)^2} \cos \omega\tau d\omega = N_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\left(\frac{\tau}{2\alpha}\right)^2} = R(0) e^{-(\gamma\tau)^2},$$

где

$$R(0) = N_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}; \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha}.$$

График  $R(\tau)$  приведен на рис. 2.21, б.

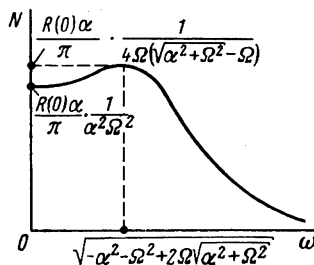
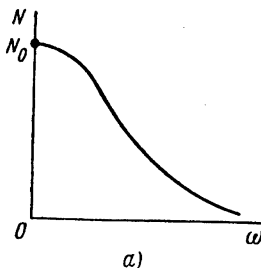
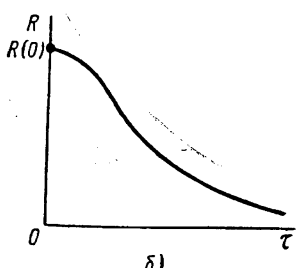


Рис. 2.20



а)



б)

Рис. 2.21

Функции  $N(\omega)$  и  $R(\tau)$  оказались сходными. Это явилось следствием задания  $N(\omega)$  колоколоподобной зависимостью. Как известно, преобразование Фурье такой функции вновь приводит к колоколоподобной зависимости.

Пример 3. Вычислить энергетический спектр производной случайного процесса  $X(t)$ .

Пусть корреляционная функция исходного процесса есть

$$R_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} N_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega,$$

где  $N_x(\omega)$  — энергетический спектр  $X(t)$ .

Функция корреляции производной

$$R_{x'}(\tau) = -R_x'(\tau) = 2 \int_0^{\infty} \omega^2 N_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega,$$

откуда следует, что

$$N_{x'}(\omega) = \omega^2 N_x(\omega).$$

В этом примере получен важный результат, состоящий в том, что энергетический спектр производной случайного процесса образуется умножением исходного спектра на  $\omega^2$ .

Формула (2.77) устанавливает связь между дисперсией и энергетическим спектром процесса. При конечном значении  $\sigma_x^2$  дисперсия производной  $\sigma_{x'}^2$  может и не существовать.

Для того чтобы  $\sigma_{x'}^2$  существовала, необходимо, чтобы сходиллся интеграл

$$\sigma_{x'}^2 = 2 \int_0^{\infty} \omega^2 N_{x'}(\omega) d\omega,$$

т. е. функция  $N(\omega)$  убывала достаточно быстро с частотой.

**Пример 4.** Вычислить энергетический спектр  $N_x(\omega)$  интегрально преобразованного случайного процесса с нулевым средним значением и энергетическим спектром  $N_y(\omega)$ .

Если

$$X(t) = \int_0^t Y(t) dt,$$

то

$$Y(t) = X'(t).$$

Но из предыдущего примера следует, что

$$N_x(\omega) = \frac{1}{\omega^2} N_y(\omega).$$

### § 2.9. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРЕВЫШЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ. СРЕДНЕЕ КОЛИЧЕСТВО ВЫБРОСОВ И ИХ СРЕДНЯЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ

В теории обнаружения, при кодировании сообщений и т. д., возникает необходимость определения таких статистических характеристик случайного процесса, как вероятность превышения мгновенным значением случайного процесса  $X(t)$  заданного уровня  $x_0$  (рис. 2.22), среднего количества выбросов над этим уровнем в единицу времени, а также их средней продолжительности. Будучи рассмотрены во времени, эти события образуют случайные процессы. Для получения искомых характеристик таких процессов удобно ввести пороговую функцию  $1(x-x_0)$ , связанную с  $x$  следующим условием:

$$1(x-x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_0; \\ 1, & \text{если } x > x_0. \end{cases} \quad (2.80)$$

Функция (2.80) имеет вид, показанный на рис. 2.23.



На рис. 2.24 изображена реализация  $x(t)$  процесса  $X(t)$  и соответствующая ей и заданному уровню  $x_0$  функция  $1(t)$ . Если, как условились ранее, полагать процесс стационарным и обладающим свойством эргодичности, то  $1(t)$  будет также стационарной, удовлетворяющей условию эргодичности случайной функции времени.

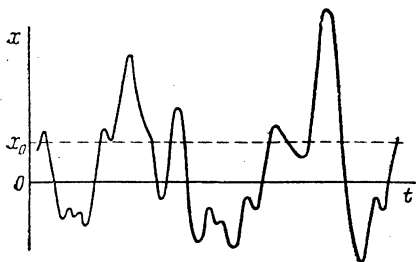


Рис. 2.22. Выбросы случайного процесса над уровнем  $x_0$

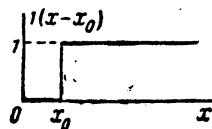


Рис. 2.23. Пороговая функция

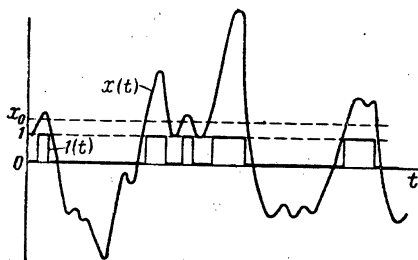


Рис. 2.24. Реализация  $x(t)$  и соответствующая ей и уровню  $x_0$  функция  $1(t)$

Вычислим среднее значение случайной величины  $1(X)$ . В соответствии с правилами теории вероятностей будем иметь

$$\overline{1(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} 1(x - x_0) p_1(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} p_1(x) dx = P(X > x_0). \quad (2.81)$$

Среднее значение  $1(X)$  численно равно вероятности  $P(X > x_0)$ . Рассмотрим далее определенный интеграл, взятый от  $1(t)$  на произвольном отрезке времени наблюдения  $T$ ,

$$T_1 = \int_0^T 1(t) dt. \quad (2.82)$$

Этот интеграл, имеющий размерность времени, равен согласно соотношению (2.80) той части времени наблюдения  $T$ , в течение которой  $1(t) = 1$ , т. е.  $X(t) > x_0$ . Соотношение

$$T_{\text{отн}} = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T 1(t) dt \quad (2.83)$$

представляет собой относительное время пребывания процесса  $X(t)$  в состоянии  $X > x_0$  на интервале  $T$ .

Ввиду ограниченности времени наблюдения  $T$  результат (2.83) является случайным, зависящим от вида реализации на интервале  $T$ . Неслучайное значение относительного времени  $\widetilde{T}_{\text{отн}}$  может быть получено предельным переходом:

$$\widetilde{T}_{\text{отн}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T 1(t) dt = \overline{1(t)}. \quad (2.84)$$

В силу эргодического свойства справедливо

$$\widetilde{1(t)} = \overline{1(t)}.$$

Тогда согласно выражениям (2.81) и (2.84) получаем

$$\widetilde{T}_{\text{отн}} = P(X > x_0). \quad (2.85)$$

Таким образом, относительное время, в течение которого мгновенное значение стационарного случайного процесса  $X(t)$  превышает заданный уровень, равно вероятности превышения случайной величиной  $X$  того же уровня. Для эргодических процессов

$$\widetilde{T}_{\text{отн}} = \overline{T_{\text{отн}}} = \frac{\overline{T_1}}{T}. \quad (2.86)$$

Из формул (2.85) и (2.86) получаем следующий результат:

$$\overline{T_1} = TP(X > x_0). \quad (2.87)$$

Для определения  $\overline{T_1}$  достаточно располагать одномерным законом распределения вероятностей.

Величина  $\overline{T_1}$  дает представление об интегральном времени превышения заданного уровня. Вывод средней продолжительности  $\overline{T_0}$  импульсов превышения заданного уровня, а также их среднего числа  $\bar{n}$  на отрезке  $\overline{T}$  на основании полученного ранее  $\overline{T_1}$  сделать нельзя. Очевидно, что  $\overline{T_0}$ ,  $\overline{T_1}$  и  $\bar{n}$  связаны соотношением

$$\overline{T_0} = \frac{\overline{T_1}}{\bar{n}}. \quad (2.88)$$

Формула (2.86) позволяет перейти к другому выражению для средней длительности

$$\overline{T_0} = \frac{T}{\bar{n}} P(X > x_0). \quad (2.89)$$

Следовательно, при известном  $T$  и одномерном законе распределения вероятностей мгновенных значений  $X(t)$  величины  $\overline{T_0}$  и  $\bar{n}$  связаны однозначно.

Для нахождения  $\bar{n}$  важно знать структуру процесса, быстроту его протекания. Появление одного импульса случайной последовательности  $1(t)$  (рис. 2.24) совпадает с пересечением случайной функцией  $X(t)$  уровня  $x_0$  «снизу вверх». Это событие является сложным. Оно состоит в том, что в некоторый момент времени случайная величина  $X$  должна оказаться в непосредственной близости от уровня  $x_0$  (под ним на расстоянии  $\Delta x$ ). Одновременно с этим первая производная случайной функции  $X(t)$  должна быть положительной. Таким образом, должно выполняться

$$\left. \begin{aligned} x_0 - \Delta x < X(t) < x_0, \\ X'(t) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Из условия (2.90) следует, что двумерная плотность вероятности  $p_2(x, y)$  мгновенных значений случайных функций  $X(t)$  и ее производной  $X'(t) = \dot{Y}(t)$  определяет вероятность появления элементарного импульса. Эту вероятность можно выразить следующим образом:

$$P \{x_0 - \Delta x \leq X(t) < x_0, X'(t) > 0\} = \int_0^{\infty} dy \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} p_2(x, y) dx. \quad (2.91)$$

Для стационарного процесса формула (2.91) инвариантна в отношении текущего момента времени  $t$ . При достаточно малом интервале времени  $\Delta t$ , соответствующем изменению  $X(t)$  на малую величину  $\Delta x \approx y\Delta t$ , можно сделать замену:

$$\int_{x_0 - \Delta x}^{x_0} p_2(x, y) dx \approx p_2(x_0, y) y \Delta t.$$

Тогда

$$P [x_0 - \Delta x < X(t) < x_0, X'(t)_{>0}] \approx \Delta t \int_0^{\infty} y p_2(x_0, y) dy.$$

Среднее число пересечений уровня  $x_0$  («снизу вверх») за время наблюдения  $T$  можно определить как

$$\bar{n} = \int_T dt \int_0^{\infty} y p_2(x_0, y) dy = T \int_0^{\infty} y p_2(x_0, y) dy. \quad (2.92)$$

Из равенства (2.92) ясно, что  $\bar{n}$  пропорционально времени наблюдения  $T$ . Среднее число выбросов в единицу времени

$$\bar{n}_0 = \frac{\bar{n}}{T} = \int_0^{\infty} y p_2(x_0, y) dy. \quad (2.93)$$

Подставляя (2.93) и (2.89), получим формулу для средней длительности выбросов

$$\bar{T}_0 = \frac{P(X > x_0)}{\int_0^{\infty} y p_2(x_0, y) dy}. \quad (2.94)$$

Как было показано, случайная функция и ее производная в совпадающие моменты времени некоррелированы, а для нормального процесса статистически независимы, т. е. для нормального процесса

$$p_2(x_0, y) = p_1(x_0) p_1(y).$$

Тогда интеграл (2.93) может быть представлен в виде

$$\bar{n}_0 = p_1(x_0) \int_0^{\infty} y p_1(y) dy = p_1(x_0) \bar{Y}_{>0}, \quad (2.95)$$

где  $\bar{Y}_{>0}$  — среднее значение положительной производной случайного процесса. Поскольку  $\bar{Y}_{>0}$  не зависит от выбранного уровня  $x_0$ , то согласно формуле (2.95)

среднее число выбросов пропорционально одномерной плотности вероятности, взятой при пороговом значении  $x = x_0$ . Коэффициент пропорциональности  $\bar{Y}_{>0}$  вычисляется с помощью двумерной плотности вероятности заданного случайного колебания.

**Пример.** Вычислить относительное время превышения нормальным случайным процессом  $U(t)$ , заданным автокорреляционной функцией,

$$R_u(\tau) = 100 \exp[-(1000\tau)^2],$$

уровня  $u_0 = 10$ , а также среднюю частоту импульсов превышения и их среднюю длительность.

Используя формулу (2.85), найдем

$$\bar{T}_{\text{отн}} = P(U_{>10}).$$

Так как по условию  $\sigma_u^2 = R_u(0) = 100$ , то одномерный закон в соответствии с формулой (2.63) при  $\bar{U} = 0$  будет иметь вид

$$p_1(u) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{200}\right).$$

Тогда

$$\bar{T}_{\text{отн}} = P(U_{>10}) = 1 - \int_{-\infty}^{10} p_1(u) du = 1 - \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{10} \exp\left(-\frac{u^2}{200}\right) du = 0,16.$$

Далее в соответствии с формулой (2.55) определим  $\sigma_u'^2 = -R_u''(0)$ .

По заданной функции корреляции находим

$$-R_u''(\tau) = 2 \cdot 10^8 [1 - 2(1000\tau)^2] e^{-(1000\tau)^2},$$

откуда

$$\sigma_u'^2 = 2 \cdot 10^8.$$

Поскольку производная  $V(t) = U'(t)$  также распределена нормально, то ее одномерный закон можно представить в следующем виде:

$$p_1(v) = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{4 \cdot 10^8}\right).$$

Среднее положительных значений  $\bar{V}_{>0}$  производной может быть найдено в соответствии с формулой (2.4):

$$\bar{V}_{>0} = \int_0^{\infty} v p_1(v) dv = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v \exp\left(-\frac{v^2}{4 \cdot 10^8}\right) dv = \frac{10^4}{\sqrt{\pi}}.$$

Среднее число превышений заданного порога находится по формуле (2.95)

$$\bar{n}_0 = \rho(v_0) \bar{V}_{>0} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{100}{200}\right) \frac{10^4}{\sqrt{\pi}} \approx 0,024 \frac{10^4}{\sqrt{\pi}} = 135 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Средняя длительность выбросов

$$\bar{T}_0 = \frac{\bar{T}_{\text{отн}}}{\bar{n}_0} = \frac{0,16}{135} = 1,2 \text{ мсек.}$$

## § 2.10. СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС КАК ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДОЙ И ФАЗОЙ

Случайное колебание можно представить в виде

$$u(t) = U(t) \cos \Psi(t), \quad (2.96)$$

где  $U(t)$  и  $\Psi(t)$  — некоторые случайные функции времени.

Формула (2.96) в отношении  $U(t)$  и  $\Psi(t)$  неоднозначна.

Однозначность соотношения появляется, если на  $U(t)$  и  $\Psi(t)$  наложить дополнительные условия. Можно, например, потребовать, чтобы выражение (2.96) являлось следствием комплексного представления случайного процесса по Гильберту, аналогично тому, как это делается применительно к детерминированным процессам (см. § 1.8). Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$U(t) = \sqrt{u^2(t) + w^2(t)}$$

и

$$\Psi = \operatorname{arctg} \frac{w(t)}{u(t)},$$

где  $w(t)$  — случайный процесс, связанный с исходным преобразованием Гильберта:

$$w(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-T}^T \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau \right\}. \quad (2.97)$$

Формула (2.96) представляет случайное колебание  $u(t)$  как проекцию на вещественную ось вектора  $U(t)$  случайной длины (огibaющей), имеющего случайную фазу  $\Psi(t)$ .  $w(t)$  — проекция того же вектора на ортогональную ось. Данное представление случайного колебания можно использовать при решении задач статистической радиотехники, если известно, что спектр исходного колебания узкополосный и концентрируется вблизи довольно высокой частоты. Подобные колебания достаточно часто встречаются на практике, например шум на выходе узкополосной избирательной системы усилителя промежуточной частоты локационного приемника. На рис. 2.25 показано такое колебание. Колебание представляет собой нормальный процесс, внешне близкий к модулированному гармоническому. Закон амплитудной модуляции является медленно меняющейся случайной функцией времени. Фаза колебания также медленно и случайно меняется во времени. В этом случае колебание может быть представлено как

$$u(t) = U(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]. \quad (2.98)$$

Здесь  $U(t)$  имеет смысл огibaющей колебания со средней частотой  $\omega_0$  и случайным сдвигом фазы  $\Phi(t)$ .

Энергетический спектр рассматриваемого узкополосного процесса изображен на рис. 2.26. Его ширина определяется спектром флуктуаций амплитуды и фазы. Практически наиболее важным является установление законов распределения амплитуды и фазы этого колебания.

Полагая, что мгновенные значения стационарного колебания (2.98) подчинены нормальному закону распределения, определим плотность вероятности огибающей и сдвига фазы. Для этого представим (2.98) в виде

$$u(t) = U(t) \cos \Phi(t) \cos \omega_0 t + U(t) \sin \Phi(t) \sin \omega_0(t). \quad (2.99)$$

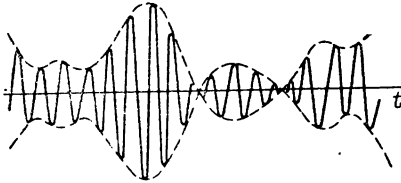


Рис. 2.25. Узкополосный случайный процесс, как квазигармоническое колебание со случайными амплитудой и сдвигом фазы

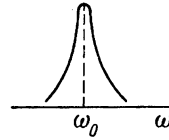


Рис. 2.26. Энергетический спектр узкополосного процесса

В силу стационарности закон распределения сохраняется неизменным и нормальным в любые моменты времени, в том числе и в те моменты  $t_i$ , когда  $\cos \omega_0 t_i$  обращается в нуль. Для сечений  $t_i$  мгновенное значение случайного колебания можно представить в виде

$$u(t_i) = U(t_i) \cos \Phi(t_i).$$

Следовательно, эта величина является нормальной.

Поскольку запись стационарного процесса инвариантна в отношении выбора начала отсчета времени, моментам можно приписывать произвольное, в том числе и текущее, значение времени  $t$ , и произведение  $U(t) \cos \Phi(t)$  имеет нормальный закон распределения. Аналогично можно доказать, что и произведение  $U(t) \sin \Phi(t)$  также распределено нормально. Следовательно, исходный узкополосный нормальный случайный процесс представлен суммой двух ортогональных колебаний с частотой  $\omega_0$  и случайными амплитудами, имеющими нормальный закон распределения:

$$u = U_1 \cos \omega_0 t + U_2 \sin \omega_0 t, \quad (2.100)$$

где

$$U_1 = U_1(t) = U(t) \cos \Phi(t);$$

$$U_2 = U_2(t) = U(t) \sin \Phi(t).$$

Можно доказать, что функции корреляции случайных амплитуд соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} R_{u_1}(\tau) = R_{u_2}(\tau) &= \int_0^{\infty} N_u(\omega) \cos(\omega - \omega_0)\tau d\omega; \\ R_{u_1 u_2}(\tau) = -R_{u_2 u_1}(\tau) &= \int_0^{\infty} N_u(\omega) \sin(\omega - \omega_0)\tau d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

где  $N_u(\omega)$  — энергетический спектр узкополосного процесса  $u(t)$ .

Если  $N_u(\omega)$  является узкополосным и симметричным относительно  $\omega_0$ , то формулы (2.101) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{u_1}(\tau) = R_{u_2}(\tau) &= 2 \int_0^{\infty} N_u(\omega_0 - \omega) \cos \omega \tau d\omega; \\ R_{u_1 u_2}(\tau) = -R_{u_2 u_1}(\tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

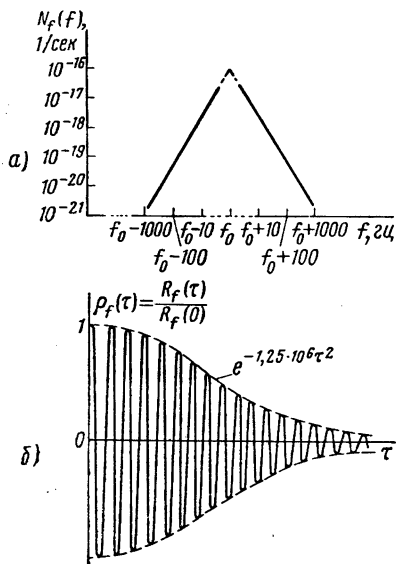


Рис. 2.27

Итак, в общем случае *несимметричной* формы спектра взаимная корреляционная функция  $R_{u_1 u_2}$  при  $\tau=0$  обращается в нуль. Это означает, что в совпадающие моменты времени случайные процессы  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  некоррелированы и, поскольку имеют нормальный закон распределения, статистически независимы. В частном случае *симметричного* энергетического спектра амплитуды ортогональных составляющих  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  статистически независимы при любом значении  $\tau$ . Можно убедиться также, что

$$\begin{aligned} R_u(\tau) = \widetilde{u(t)u(t+\tau)} &= R_{u_1}(\tau) \cos \omega_0 \tau = \\ &= R_{u_2}(\tau) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (2.103)$$

**Пример.** С помощью частотомера, напряжение на выходе которого пропорционально отклонениям частоты подаваемых на его вход колебаний, и анализатора спектра, подключенного к его выходу, построен энергетический спектр  $N_f(f)$  флуктуаций частоты  $f$  лампового генератора. График экспериментальной зависимости, для удобства выполненный в логарифмическом масштабе, приведен на рис. 2.27,а. Вычислить функцию корреляции  $R_f(\tau)$  мгновенных значений частоты генератора.

Экспериментальная зависимость может быть аппроксимирована выражением

$$N_f(f) = 3 \cdot 10^{-10} \exp[-0,8 \cdot 10^{-5} (f - f_0)^2]$$

или

$$N_f(\omega) = 3 \cdot 10^{-10} \exp[-2 \cdot 10^{-7} (\omega - \omega_0)^2].$$

Заданный спектр является узкополосным и симметричным с центральной частотой  $\omega_0 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^6$  1/сек. Для вычисления функции корреляции можно воспользоваться формулами (2.102) и (2.103). В соответствии с ними можно записать

$$R_f(\tau) = 2 \cos \omega_0 \tau \int_0^{\infty} N_f(\omega_0 - \omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Функцию  $N_f(\omega_0 - \omega)$ , стоящую под знаком интеграла, находят, заменяя аргумент  $\omega$  функции  $N_f(\omega)$ , аппроксимирующей заданный спектр, на  $\omega_0 - \omega$ :

$$N_f(\omega_0 - \omega) = 3 \cdot 10^{-10} \exp[-2 \cdot 10^{-7} \omega^2].$$

Тогда

$$R_f(\tau) = 6 \cdot 10^{-10} \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^6 \tau) \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \exp[-2 \cdot 10^{-7} \omega^2] d\omega.$$

Определенный интеграл полученного вида был использован ранее в примере 2 на стр. 130. Окончательное выражение для  $R_f(\tau)$  получаем в следующем виде:

$$R_f(\tau) \approx 11,9 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-1,25 \cdot 10^6 \tau^2} \cdot \cos 18,9 \cdot 10^6 \tau \text{ 1/сек}^2.$$

Отсюда находим значение дисперсии частоты колебаний:

$$\sigma_f^2 = R_f(0) \approx 11,9 \cdot 10^{-7} \text{ 1/сек}^2.$$

Приближенный график корреляционной функции, пронормированный по  $R_f(0)$ , приведен на рис. 2.27, б.

Одномерные законы распределения нормальных случайных величин  $U_1$  и  $U_2$  выражают следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(v_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{v_1^2}{2\sigma^2}\right); \\ \rho_1(v_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

Здесь  $\sigma^2 = \overline{U_1^2(t)} = \overline{U_2^2(t)} = \overline{u^2(t)}$ ,  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  ортогональны. Их векторная сумма равна  $U(t)$  (рис. 2.28). При этом выполняется соотношение

$$U^2(t) = U_1^2(t) + U_2^2(t). \quad (2.105)$$



Найдем двумерный закон распределения амплитуды  $U(t)$  и сдвига фазы  $\Phi(t)$ . Вероятность того, что случайная амплитуда  $U(t)$  примет значение, близкое к  $v$  с точностью до  $\Delta v$  при сдвиге случайной фазы  $\varphi \leq \Phi(t) < \varphi + \Delta\varphi$ , численно равна вероятности совпадения двух событий: амплитуда при  $\cos \omega_0 t$  должна принять значение, близкое к  $v_1$ , а амплитуда при  $\sin \omega_0 t$  — соответственно близкое к  $v_2$  (рис. 2.29):

$$p_2(v, \varphi) \Delta v \Delta \varphi = p_2(v_1, v_2) \Delta v_1 \Delta v_2. \quad (2.106)$$

Но в силу независимости  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  правая часть (2.106) может быть представлена, с учетом формул (2.104), в виде

$$p_2(v_1, v_2) \Delta v_1 \Delta v_2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{v_1^2 + v_2^2}{2\sigma^2}\right) \Delta v_1 \Delta v_2. \quad (2.107)$$

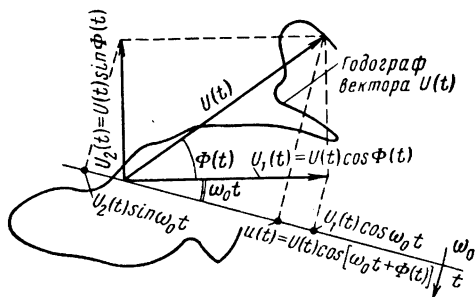


Рис. 2.28. Векторное изображение случайного колебания

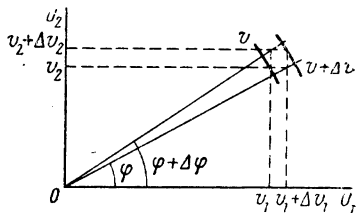


Рис. 2.29. К определению законов распределения амплитуды и сдвига фазы узкополосного случайного процесса

Для записи двумерного закона распределения  $U(t)$  и  $\Phi(t)$  учтем формулу (2.105), а также приближенное равенство

$$\Delta v_1 \Delta v_2 \approx v \Delta \varphi \Delta v.$$

Тогда из (2.107) получим

$$p_2(v, \varphi) dv d\varphi = \frac{v}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) dv d\varphi.$$

Из последнего соотношения вытекает искомое выражение

$$p_2(v, \varphi) = \frac{v}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.108)$$

Формула (2.108) позволяет получить одномерные законы распределения  $U(t)$  и  $\Phi(t)$  в отдельности. Так, одномерный закон распределения огибающей получим в виде

$$p_1(v) = \int_0^{2\pi} p_2(v, \varphi) d\varphi = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.109)$$

Формула (2.109) известна как закон распределения Релея. График зависимости  $p_1(v)$  с точностью до множителя  $\frac{1}{\sigma}$  приведен на рис. 2.30. Поскольку речь идет об огибающей, формула (2.109) имеет смысл при  $v \geq 0$ , для  $v < 0$  следует считать  $p_1(v) = 0$ . Максимум кривой, изображенной на рис. 2.30, численно близкий к 0,6, имеет место при  $\frac{v}{\sigma} = 1$ . Это говорит о том, что значения огибающей, близкие к эффективному значению процесса, наиболее вероятны.

Далее, получим одномерный закон распределения сдвига фазы:

$$p_1(\varphi) = \int_0^{\infty} p_2(v, \varphi) dv.$$

Подстановка (2.108) дает

$$p_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (2.110)$$

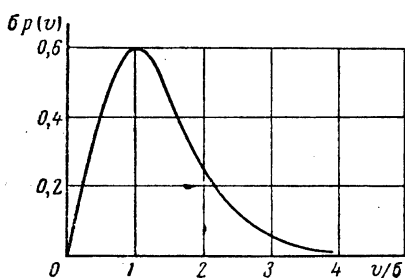


Рис. 2.30. Плотность вероятности огибающей нормального процесса (распределение Релея)

Формула (2.110) устанавливает равномерный закон распределения сдвига фазы, изображенный на рис. 2.31. Как

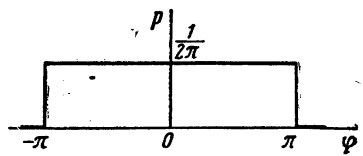


Рис. 2.31. Плотность вероятности сдвига фазы нормального процесса

следует из структуры формулы (2.108), взятые в один и тот же момент времени  $U(t)$  и  $\Phi(t)$  статистически независимы.

Полученные законы распределения плотностей вероятности амплитуды и фазы нормального случайного процесса являются простейшими зависимостями, характеризующими процесс лишь в одном, хотя и произвольном сечении. Полностью нормальное случайное колебание описывается двумерным законом распределения, что эквивалентно заданию корреляционной функции. Кроме того, интерпретация узкополосного нормального процесса как почти гармонического колебания со случайными амплитудой и фазой тождественна заданию (2.100) двух нормальных случайных процессов  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ . Совместное же распределение мгновенных значений двух нормальных случайных процессов  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$  пол-

ностью характеризуется уже *четырёхмерным* законом распределения случайных величин  $U_1(t)$ ,  $U_1(t+\tau)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_2(t+\tau)$ .

Равноценно *четырёхмерному* закону можно задать корреляционную матрицу, элементы которой получают с помощью формул (2.101) или, в частном случае симметрии спектра, с помощью (2.102):

$$(R) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & R(\tau) & R_{12}(\tau) \\ 0 & \sigma^2 & -R_{12}(\tau) & R(\tau) \\ R(\tau) & -R_{12}(\tau) & \sigma^2 & 0 \\ R_{12}(\tau) & R(\tau) & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (2.111)$$

где  $R(\tau) = R_{u_1}(\tau) = R_{u_2}(\tau)$

$$R_{12}(\tau) = R_{u_1 u_2}(\tau).$$

Элементы матрицы позволяют записать *четырёхмерный* закон распределения случайных величин  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_1(t+\tau)$ ,  $U_2(t+\tau)$ . Можно осуществить переход к переменным в полярных координатах  $v$ ,  $\varphi$ , получив таким образом плотность вероятностей совместного распределения случайных величин  $U(t)$ ,  $U(t+\tau)$ ,  $\Phi(t)$ ,  $\Phi(t+\tau)$ :

$$\begin{aligned} \rho_4[v(t), v(t+\tau), \varphi(t), \varphi(t+\tau)] &= \rho_4(v, v_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \\ &= \frac{vv_\tau}{4\pi^2\sigma^4\lambda^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2\lambda^2} [v^2 + v_\tau^2 - 2vv_\tau \sqrt{1-\lambda^2} \cos(\varphi_\tau - \varphi - \gamma)]\right\}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 1 - \left[\frac{R(\tau)}{\sigma^2}\right]^2 - \left[\frac{R_{12}(\tau)}{\sigma^2}\right]^2; \\ \gamma &= \arctg \frac{R_{12}(\tau)}{R(\tau)}. \end{aligned}$$

Формула (2.112) позволяет получить *двумерные* законы распределения для величин  $U(t)$  и  $U(t+\tau)$ , а также для  $\Phi(t)$  и  $\Phi(t+\tau)$ . *Двумерную* плотность распределения огибающей получают из (2.112) двойным интегрированием по  $\varphi$  и  $\varphi_\tau$ :

$$\begin{aligned} \rho_2(v, v_\tau) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \rho_4(v, v_\tau, \varphi, \varphi_\tau) d\varphi_\tau = \\ &= \frac{vv_\tau}{\sigma^4\lambda^4} I_0 \left[ \frac{vv_\tau \sqrt{1-\lambda^2}}{\sigma^2\lambda^2} \right] \exp\left(-\frac{v^2 + v_\tau^2}{2\sigma^2\lambda^2}\right), \end{aligned} \quad (2.113)$$

где  $I_0[\ ]$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента (модифицированная функция Бесселя).

При больших  $\tau$  следует ожидать независимости мгновенных зна-

чений огибающей  $U(t)$  и  $U(t + \tau)$ . Проверка по формуле (2.113) подтверждает это. Действительно,  $R(\tau) \rightarrow 0$  и  $R_{12}(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Это значит, что  $\lambda \rightarrow 1$ . С учетом того, что  $I_0(0) = 1$ , получим

$$\rho_2(v, v_{\tau \rightarrow \infty}) = \frac{v}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v}{2\sigma^2}\right) \frac{v_{\tau}}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v_{\tau}^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.114)$$

что эквивалентно формуле

$$\rho_2(v, v_{\tau \rightarrow \infty}) = \rho_1(v) \rho_1(v_{\tau \rightarrow \infty}),$$

выражающей статистическую независимость  $U(t)$  и  $U(t + \tau)$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Двумерную плотность распределения фазы получают из (2.112) двойным интегрированием по  $v$  и  $v_{\tau}$ :

$$\rho_2(\varphi, \varphi_{\tau}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho_4(v, v_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau}) dv dv_{\tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{1 - \nu^2} + \nu \frac{\pi/2 + \arcsin \nu}{(1 - \nu^2)^{3/2}} \right], \quad (2.115)$$

где

$$\nu = \sqrt{1 - \lambda^2} \cos(\varphi_{\tau} - \varphi - \gamma).$$

Формулы (2.113) и (2.115) позволяют записать выражения для условных плотностей вероятностей. Используя выражения (2.14), (2.109) и (2.113), получим

$$\rho_2(v_{\tau}/v) = \frac{v_{\tau}}{\sigma^2 \lambda^2} I_0 \left[ \frac{v v_{\tau} \sqrt{1 - \lambda^2}}{\sigma^2 \lambda^2} \right] \exp \left[ -\frac{(1 - \lambda^2) v^2 + v_{\tau}^2}{2 \lambda^2 \sigma^2} \right]. \quad (2.116)$$

Аналогичным образом, воспользовавшись формулами (2.110) и (2.115), получим

$$\rho_2(\varphi_{\tau}/\varphi) = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[ \frac{1}{1 - \nu^2} + \nu \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin \nu}{(1 - \nu^2)^{3/2}} \right]. \quad (2.117)$$

Двумерные законы распределения значений огибающей и сдвига фазы полностью не определяют статистических свойств колебаний  $U(t)$  и  $\Phi(t)$ , ибо ни то, ни другое не является нормальным. Однако двумерного закона достаточно для получения такой характеристики процесса, как функция корреляции. По функции корреляции можно найти энергетический спектр. Так как  $\overline{U(t)} \neq 0$ , то

$$R_{\text{огнб}}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v v_{\tau} \rho_2(v, v_{\tau}) dv dv_{\tau} - \left[ \int_0^{\infty} v \rho_1(v) dv \right]^2. \quad (2.118)$$

Если произвести интегрирование, то можно получить

$$R_{\text{огнб}}(\tau) = \sigma^2 \left[ 2E - q^2 K - \frac{\pi}{2} \right], \quad (2.119)$$

где

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \theta}}$$

— соответственно полные эллиптические интегралы второго и первого рода;

$$q^2 = 1 - \lambda^2 = \left[ \frac{R(\tau)}{\sigma^2} \right]^2 + \left[ \frac{R_{12}(\tau)}{\sigma^2} \right]^2.$$

Формула (2.119) может быть представлена в виде ряда путем разложения эллиптических интегралов по степеням  $q$ :

$$R_{\text{огнб}}(\tau) = \sigma^2 [0,921q^2 + 0,0576q^4 + 0,0144q^6 + \dots].$$

Асимптотическое представление  $R_{\text{огнб}}(\tau)$  быстро сходится по  $q$ . Поэтому приводимая ниже приближенная формула является практически достаточно точной для вычисления функции корреляции огибающей:

$$R_{\text{огнб}}(\tau) \approx \sigma^2 [0,921q^2 + 0,0576q^4].$$

В частном случае симметричного спектра, когда  $R_{12}(\tau) \equiv 0$ , а  $q^2 = \left[ \frac{R(\tau)}{\sigma^2} \right]^2$ , имеем

$$R_{\text{огнб}}(\tau) \approx 0,921 \frac{R^2(\tau)}{\sigma^2} + 0,0576 \frac{R^4(\tau)}{\sigma^6}. \quad (2.120)$$

Вычисление корреляционной функции  $R_{\varphi}(\tau)$  приводит к сложным выражениям. Более простая формула получается для косинуса случайной фазы:

$$R_{\cos \varphi}(\tau) = \frac{R(\tau)}{2(1 - \lambda^2)\sigma^2} [E - \lambda^2 K]. \quad (2.121)$$

### § 2.11. СУММА ФЛУКТУАЦИОННОГО И ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЙ. ОГИБАЮЩАЯ И ФАЗА РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В § 2.10 случайный процесс был интерпретирован как почти гармоническое колебание со случайными амплитудой и сдвигом фазы. Практически, кроме рассмотренного, часто имеет место случай, когда помеха действует не отдельно от сигнала, а вместе с ним. В простейшем случае в качестве сигнала может действовать немодулированное гармоническое колебание. При этом также важно установить статистические свойства суммарного колебания.

Если говорить о мгновенных значениях результирующего колебания как случайного, то добавление к флуктуационному колебанию детерминированного, каким является сигнал, в сущности не меняет его статистических свойств. Изменяется лишь среднее значение, определяемое мгновенным значением сигнала. Закон распределения мгновенных значений суммы остается таким же, каким был при отсутствии сигнала, но в нем появляется смещение, равное мгновенному значению сигнала.

Пусть имеется сумма

$$u(t) = u_{\text{ш}}(t) + u_c(t), \quad (2.122)$$

где  $u_{\text{ш}}(t)$  — нормальный случайный процесс, подчиненный закону распределения

$$p_1(v_{\text{ш}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{ш}}} \exp \left[ -\frac{v_{\text{ш}}^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right];$$

$u_c = U_c \cos \omega_0 t$  — гармоническое колебание.

Тогда закон распределения суммы может быть записан в виде

$$p_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{ш}}} \exp \left\{ -\frac{[v - u_c(t)]^2}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right\}. \quad (2.123)$$

Наличие в правой части (2.123) члена, зависящего от времени, указывает на нестационарность процесса. Однако в данном случае нестационарность является простейшей, связанной лишь с изменением во времени только среднего значения случайного процесса.

Практически статистический анализ таких колебаний обычно осуществляется не на высокой частоте, а после их детектирования и фильтрации. Поэтому особенно важными становятся статистические характеристики не мгновенных значений суммы высокочастотного сигнала и шума, а ее огибающей и фазы.

По аналогии с выражением (2.98) колебание, заданное суммой (2.122), можно представить формулой

$$u(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (2.124)$$

содержащей случайные амплитуду  $U(t)$  и сдвиг фазы  $\Phi(t)$ . Геометрическое представление  $U(t)$  и  $\Phi(t)$  следует из векторной диаграммы рис. 2.32. Обозначенные на этом рисунке амплитуды и сдвиги фаз находятся в следующих соотношениях:

$$\begin{aligned} U_{\text{ш}}(t) &= \sqrt{U_{1\text{ш}}^2 + U_{2\text{ш}}^2}; \\ U_{1\text{ш}}(t) &= U_{\text{ш}}(t) \cos \Phi_{\text{ш}}(t); \\ U_{2\text{ш}}(t) &= U_{\text{ш}}(t) \sin \Phi_{\text{ш}}(t); \\ U(t) &= \sqrt{(U_c + U_{1\text{ш}})^2 + U_{2\text{ш}}^2}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

В § 2.10 указывалось, что при нормальном характере случайного процесса  $U_{\text{ш}}(t)$  амплитуды его ортогональных компонент  $U_{1\text{ш}}$  и  $U_{2\text{ш}}$  также распределены нормально.

Следовательно, ортогональные компоненты амплитуды результирующего колебания также имеют нормальные законы распределения:

$$\left. \begin{aligned} p_1(v_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{ш}}} \exp \left[ -\frac{(v_1 - U_c)^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right]; \\ p_1(v_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{ш}}} \exp \left[ -\frac{v_2^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — значения, которые могут принять в результате опыта соответствующие случайные амплитуды  $U_1 = U_c + U_{1\text{ш}}$  и  $U_2 = U_{2\text{ш}}$ ;  $U_1$  и  $U_2$  статистически независимы. Это позволяет, пользуясь формулами (2.126), в простой форме выразить совместную вероятность того, что будет выполняться

$$v_1 \leq U_1 < v_1 + \Delta v_1$$

и

$$v_2 \leq U_2 < v_2 + \Delta v_2.$$

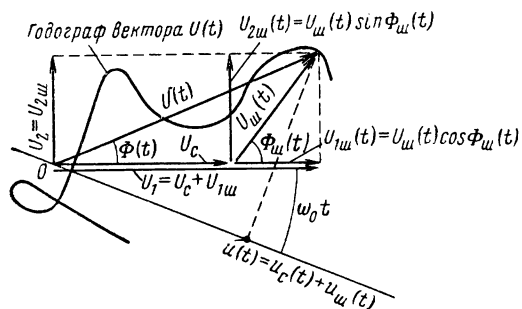


Рис. 2.32. Векторная иллюстрация суммы гармонического и случайного колебаний

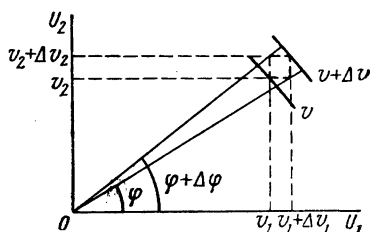


Рис. 2.33. К определению законов распределения амплитуды и сдвига фазы суммы гармонического и узкополосного случайного колебаний

Из рис. 2.33 ясно, что эта вероятность совпадает с вероятностью того, что конец вектора будет лежать в пределах элемента площади  $\Delta S = \Delta v_1 \Delta v_2$  вблизи точки с координатами  $v_1, v_2$ :

$$p_1(v_1) \Delta v_1 p_1(v_2) \Delta v_2 = p_1(v) \Delta S. \quad (2.127)$$

Из выражений (2.126) и (2.127) следует, что

$$p_1(v) dS = \frac{1}{2\pi\sigma_{\text{ш}}^2} \exp \left[ -\frac{(v_1 - U_c)^2 + v_2^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right] dv_1 dv_2. \quad (2.128)$$

Применяя преобразование прямоугольных координат в полярные, формулу (2.128) можно привести к виду

$$p_2(v, \varphi) = \frac{v}{2\pi\sigma_{\text{ш}}^2} \exp \left[ -\frac{v^2 + U_c^2 - 2vU_c \cos \varphi}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right]. \quad (2.129)$$

Последнее выражение близко к формуле (2.108). В данном случае в зависимость входит в качестве параметра амплитуда сигнала  $U_c$ . В отличие от формулы (2.108) имеется зависимость плотности вероятности сдвига фазы от его ожидаемого значения. Из этого следует, что закон распределения плотности вероятности сдвига фазы уже не является равномерным.

Интегрируя (2.129) по всем возможным значениям  $\varphi$ , можно получить одномерный закон распределения вероятности огибающей:

$$p_1(v) = \frac{v}{\sigma_{\text{ш}}^2} I_0 \left( \frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right) \exp \left[ -\frac{v^2 + U_c^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2} \right]. \quad (2.130)$$

Данная формула имеет смысл при  $v \geq 0$ . При прочих  $v$  следует считать  $p_1(v) = 0$ . В этой формуле модифицированная функция Бесселя нулевого порядка  $I_0 \left( \frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right)$  получена, как результат интегрирования функции  $\exp \left[ \frac{vU_c \cos \varphi}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right]$  по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ .

Распределение вида (2.130) называют обобщенным (на случай присутствия регулярного синусоидального сигнала) законом Релея. Часто его называют также законом Райса. При  $U_c = 0$  формула (2.130) обращается в уже знакомую формулу распределения по Релею (2.109).

На рис. 2.34 показаны кривые, построенные по формуле (2.130) при различных значениях параметра  $U_c/\sigma_{\text{ш}}$ . В качестве независимой переменной взята относительная величина  $v/\sigma_{\text{ш}}$ . Из рисунка и анализа формулы (2.130) видно, что с ростом  $U/\sigma_{\text{ш}}$  кривые становятся все более симметричными и сходными с кривыми нормального закона. Так, при  $\frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} > 1$  функция Бесселя может быть представлена рядом

$$I_0 \left( \frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right) = \frac{\sigma_{\text{ш}}}{\sqrt{2\pi v U_c}} \exp \left( \frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right) \left[ 1 + \frac{1}{8} \frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} + \frac{9}{128} \left( \frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} \right)^2 + \dots \right],$$



который при  $\frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} > 2$  может дать приближение вида

$$I_0\left(\frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2}\right) \approx \frac{\sigma_{\text{ш}}}{\sqrt{2\pi vU_c}} \exp\left(\frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2}\right). \quad (2.131)$$

Подстановка формулы (2.131) в (2.130) приводит к приближенному выражению плотности вероятности огибающей при  $\frac{vU_c}{\sigma_{\text{ш}}^2} > 2$

$$p_1(v) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{U_c}{v} \sigma_{\text{ш}}}} \exp\left[-\frac{(v-U_c)^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right]. \quad (2.132)$$

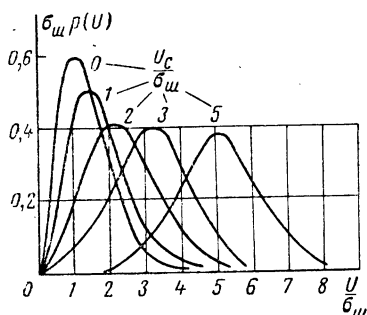


Рис. 2.34. Плотность вероятности огибающей суммы случайного и гармонического колебаний (обобщенное распределение Релея, или распределение Райса)

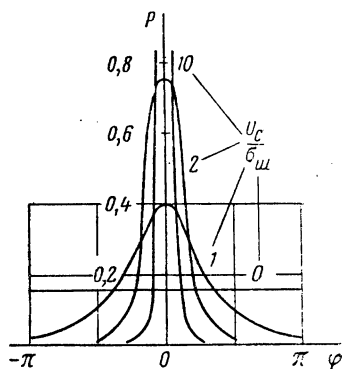


Рис. 2.35. Плотность вероятности сдвига фазы суммы случайного и гармонического колебаний

Таким образом, если  $v \approx U_c$  (это приблизительно соответствует области максимума плотности вероятности), то при соблюдении  $U_c/\sigma_{\text{ш}} \gg 1$  формула (2.132) может быть приведена к виду

$$p_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\text{ш}}} \exp\left[-\frac{(v-U_c)^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right],$$

выражающему нормальный закон распределения со средним значением  $U_c$  и дисперсией  $\sigma_{\text{ш}}^2$ .

Плотность распределения сдвига фазы  $\Phi(t)$  находится интегрированием (2.129) по  $v$ . В результате интегрирования получаются зависимости, графический ход которых изображен на рис. 2.35. Кривые показывают, что с ростом отношения сигнал/шум закон

распределения плотности вероятности сдвига фазы меняется от равномерного (случай рассмотрен в § 2.10) до распределения типа  $\delta$ -функции. Эта эволюция хорошо объясняется тем, что с ростом амплитуды сигнала неопределенность фазы результирующего квазигармонического колебания становится все меньше, дисперсия фазы стремится к нулю. Фаза результирующего колебания во все большей степени определяется фазой сигнала. В пределе при  $U_c/\sigma_{ш} \rightarrow \infty$  сдвиг фазы  $\Phi(t)$  из неопределенного становится достоверным, определяемым сдвигом фазы сигнала (в данном случае равным нулю).

## Часть вторая

# ВОЗДЕЙСТВИЕ РЕГУЛЯРНЫХ И СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ЛИНЕЙНЫЕ УСТРОЙСТВА С ПОСТОЯННЫМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

## Глава III

### РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

#### § 3.1. КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Радиотехнические устройства с точки зрения теории можно подразделить на *системы с сосредоточенными параметрами* и *системы с распределенными параметрами*.

Системы с сосредоточенными параметрами или электрические цепи представляют собой соединение конечного числа *элементов цепи*, например, конденсаторов, катушек, сопротивлений. Электрическими цепями являются, например, колебательный контур, усилитель звуковых колебаний, радиовещательный приемник.

Системы с распределенными параметрами представляют собой соединение бесконечного множества элементов, каждый из которых обладает бесконечно малым параметром. Примерами таких систем являются двухпроводная линия, волновод, антенна.

В настоящей книге рассматриваются только системы с сосредоточенными параметрами (электрические цепи) и воздействие на них регулярных и случайных колебаний, аналитическое описание которых дано в первой части.

Процессы в электрических системах в наиболее общем виде описываются дифференциальными уравнениями. В теоретической радиотехнике элементы и системы принято классифицировать в зависимости от вида описывающего их дифференциального уравнения.

Элементы *электрической цепи* можно разделить на линейные с постоянными параметрами, линейные с переменными во времени параметрами (параметрические) и нелинейные. Цепи, состоящие из этих элементов, описываются соответственно линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, с коэффициентами, зависящими от времени, и нелинейными дифференциальными уравнениями.

У нелинейных элементов параметры изменяются во времени, как и у параметрических. Причиной изменения параметров нелинейных элементов являются протекающие через них токи или приложенные к ним напряжения. Причиной же изменения параметров параметрических элементов является внешнее воздействие, например внешняя сила, изменяющая емкость конденсатора путем изменения расстояния между его пластинами.

В настоящее время существует общая теория только линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и соответственно общие методы расчета, пригодные в принципе для *всех* линейных цепей с постоянными параметрами. Параметрические и нелинейные дифференциальные уравнения могут пока быть точно решены лишь в отдельных частных случаях. Поэтому единых методов расчета для *всех* параметрических и нелинейных цепей не существует.

Системы с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Даже линейные системы с распределенными параметрами, постоянными во времени, например двухпроводные линии, лишь в некоторых случаях удобно анализировать методами теории цепей. Целесообразнее их рассматривать специальными методами *теории полей и волн*.

### § 3.2. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ, ИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Основными элементами линейной цепи являются *источники* (*генераторы*), *потребители* и *накопители энергии*.

Источники энергии представляют собой устройства, которые в теории с целью упрощения расчетов делят на источники неизменного напряжения и источники неизменного тока. *Источником неизменного напряжения* (или *источником напряжения*) называют генератор, *напряжение* которого не зависит от присоединенных к нему потребителей и накопителей. *Источником неизменного тока* (или *источником тока*) называют генератор, ток через который не зависит от потребителей и накопителей. Слово *неизменность* не следует смешивать со словом *постоянство во времени*: оба вида источников в общем случае имеют напряжение и ток, изменяющиеся во времени.

Идеальных источников напряжения и тока практически нет, так как реальное существование их означало бы возможность получить от них сколь угодно большую мощность, чего быть не может.

Потребители энергии в электрической цепи учитываются *сопротивлениями*. Выберем условное положительное направление для тока  $i_r(t)$  и обозначим через  $u_r(t)$  падение напряжения (потенциала) в направлении, принятом за положительное для тока (рис. 3.1, а). Тогда

$$u_r(t) = r(t) i_r(t). \quad (3.1)$$

Энергия, потребляемая в сопротивлении, переходит в тепло.

Накопители энергии учитываются в цепи *конденсаторами* (накопители электрической энергии) и *катушками индуктивности* (накопители магнитной энергии). Выберем условные положительные направления для тока через конденсатор  $i_C(t)$  и через катушку индуктивности  $i_L(t)$  и обозначим через  $u_C(t)$  и  $u_L(t)$  падения напряжений (потенциалов) на конденсаторе и катушке (рис. 3.1, б, в). Тогда, как известно из курса теории электричества,

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} [C(t) u_C(t)] = C(t) \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \frac{dC(t)}{dt}, \quad (3.2)$$

$$u_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [L(t) i_L(t)] = L(t) \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \frac{dL(t)}{dt}, \quad (3.3)$$

где  $q$  — заряд конденсатора;

$\Phi$  — магнитное потокоцепление.

Если параметры элементов  $C$  и  $L$  *постоянны* во времени, то  $\frac{dC}{dt} = \frac{dL}{dt} = 0$  и соотношения (3.2) и (3.3) упрощаются:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad (3.4)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (3.5)$$

Их можно записать иначе:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_C(0), \quad (3.4a)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0), \quad (3.5a)$$

где  $u_C(0)$  и  $i_L(0)$  — напряжение на конденсаторе и ток в катушке индуктивности, имевшие место в момент, принятый за начало действия переменных источников.

Конденсатор и катушка индуктивности накапливают электрическую и магнитную энергию в течение определенных интервалов времени, отдавая ее в другие интервалы.

Важной разновидностью катушек индуктивности являются катушки *взаимной индуктивности* (рис. 3.1, з).

Выберем условные положительные напряжения для токов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  и обозначим падения напряжений\*  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Тогда (в случае постоянных параметров)

$$u_2(t) = \pm M \frac{di_1(t)}{dt}; \quad (3.6)$$

$$u_1(t) = \pm M \frac{di_2(t)}{dt}.$$

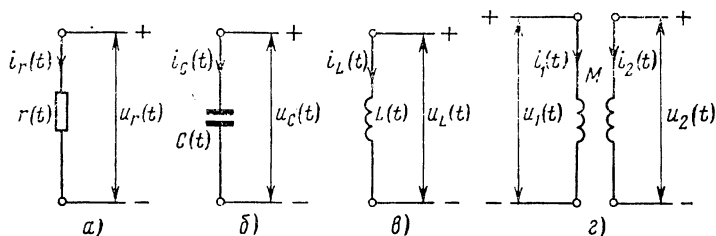


Рис. 3.1. Основные элементы цепей

Знаки «+» или «-» зависят от взаимного направления витков в катушках индуктивности и от принятого положительного направления токов.

Приведенные здесь соотношения являются математическим описанием соответствующих элементов цепи, доказательства которых даются в курсах теории электричества.

На основании соотношений (3.1) — (3.6) можно сделать важнейшее заключение о свойстве линейных элементов: *реакция* (ток или напряжение) *элемента на сумму внешних воздействий* (напряжений или токов) *равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности*. Это называют принципом суперпозиции (наложения).

Так, если к конденсатору с емкостью  $C(t)$  приложена сумма напряжений  $u_C(t) = u_1(t) + u_2(t)$ , то в соответствии с (3.2)

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C(t) \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \frac{dC(t)}{dt} = C(t) \left[ \frac{du_1(t)}{dt} + \frac{du_2(t)}{dt} \right] + \\ &+ [u_1(t) + u_2(t)] \frac{dC(t)}{dt} = \left\{ C \frac{du_1}{dt} + u_1 \frac{dC}{dt} \right\} + \\ &+ \left\{ C \frac{du_2}{dt} + u_2 \frac{dC}{dt} \right\} = i_1(t) + i_2(t), \end{aligned}$$

\* Физически являющиеся э.д.с. взаимнойиндукции.

где  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  — токи под действием  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . Принцип суперпозиции распространяется, очевидно, на сумму любого количества воздействий.

Из соотношений (3.1) — (3.6) следует, что в цепях с постоянными параметрами гармоническое воздействие вызывает обязательно гармоническую реакцию. Измениться может начальная фаза и амплитуда колебания. В цепях с переменными параметрами приложенное гармоническое воздействие вызывает реакцию, вид которой зависит от закона изменения параметров во времени.

Пример. Гармоническое колебание  $u = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  действует на конденсаторы с емкостью  $C_1 = \text{const}$  и  $C_2 = C_0 + \Delta C \cos \Omega t$ . Определить токи через конденсаторы.

Для конденсатора с постоянной емкостью в соответствии с (3.4)

$$\begin{aligned} i_C(t) = i_1(t) &= C_1 \frac{du}{dt} = C_1 \frac{d}{dt} [U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] = \\ &= -C_1 U_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = C_1 U_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Колебание тока является гармоническим, но опережающим по фазе на  $90^\circ$  колебание напряжения.

Для конденсатора с переменной во времени емкостью в соответствии с (3.2)

$$\begin{aligned} i_C(t) = i_2(t) &= C_2(t) \frac{du_1(t)}{dt} + u_1(t) \frac{dC_2(t)}{dt} = -[C_0 + \Delta C \cos \Omega t] \times \\ &\times U_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - U_m \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \Delta C \Omega \sin \Omega t. \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \omega_0 C_0 U_m \left[ 1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos \Omega t \right] \times \\ &\times \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) - \omega_0 \Delta C U_m \sin \Omega t \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Первое слагаемое есть простое АМК. Второе слагаемое дает колебания боковых частот. В целом  $i_2(t)$  представляет собой колебание, модулированное по амплитуде и фазе.

### § 3.3. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕПИ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Основные элементы линейной цепи — источники, сопротивления, конденсаторы и катушки индуктивности — могут соединяться между собой любым способом. Введем следующие определения: *узел* — точка соединения двух или более элементов (на рис. 3.2 узлы пронумерованы арабскими цифрами).

*Ветвь* — несколько последовательно соединенных элементов.

*Контур* — замкнутый путь, объединяющий несколько последовательно соединенных элементов или ветвей.

На рис. 3.2 контуры *I*, *II* и *III* указаны штриховыми линиями. Обычно в заданной цепи можно образовать ряд контуров, имеющих общие ветви. *Количество независимых контуров* есть минимальное число разрывов, которое можно произвести в цепи, чтобы в ней не осталось замкнутых контуров. Так, на рис. 3.2 контуров три, но независимых — только два.

*Самостоятельная часть цепи* — часть, связанная с остальными лишь взаимной индуктивностью.

*Исходный узел* — любой узел цепи, принятый за «начальный». Остальные узлы образуют с исходным пары. Если на рис. 3.2 узел 1 принять за исходный, то узлы 2, 3, 4 и 5 образуют с ним четыре пары.

Введем обозначения:  $\mathcal{E}$  — количество элементов (генераторов, потребителей и накопителей),  $\mathcal{U}$  — количество узлов,  $\mathcal{P}$  — количество пар узлов,  $\mathcal{C}$  — количество самостоятельных частей,  $\mathcal{K}$  — количество независимых контуров. Для *любой* цепи всегда выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{E} - \mathcal{U} + \mathcal{C}, \\ \mathcal{P} &= \mathcal{U} - \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

*Пример.* Проверить соотношения (3.7) для цепи рис. 3.2. В данном случае  $\mathcal{E} = 6$  (2 генератора и 4 потребителя),  $\mathcal{U} = 5$ ,  $\mathcal{C} = 1$  (нет других частей, связанных взаимной индуктивностью). Поэтому

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} - \mathcal{U} + \mathcal{C} = 6 - 5 + 1 = 2$$

и

$$\mathcal{P} = \mathcal{U} - \mathcal{C} = 5 - 1 = 4.$$

Часто при воздействии напряжения на заданную цепь необходимо найти падения напряжения (или токи) не на всех элементах цепи, а лишь на одном, узлы которого называют при этом *выходом цепи*. Цепь, в которой выделено два узла для подключения источника энергии, и два для подключения потребителей или накопителей, называют *четыреполюсником*. В простейших случаях понятия цепь и четырехполюсник совпадают.

Цепи и четырехполюсники целесообразно анализировать различными, хотя и взаимосвязанными способами.

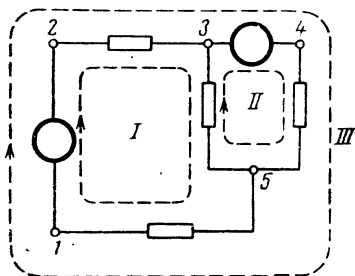


Рис. 3.2. К пояснению соотношения элементов, контуров и узлов в цепи



**МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**§ 4.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЦЕПИ И ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЦЕПИ**

В электрической цепи всегда выполняются два *основных закона*, называемых первым и вторым законами Кирхгофа.

1. В ветвях, сходящихся в одном узле, алгебраическая сумма мгновенных значений токов равна нулю:

$$\sum_{k=1}^N i_k(t) = 0. \quad (4.1)$$

В зависимости от направления (к узлу или от узла) току приписываются разные знаки. Невыполнение закона (4.1) означало бы накопление заряда в узле, чего не происходит.

2. В любом контуре алгебраическая сумма мгновенных значений падений напряжений на элементах  $r$ ,  $C$ ,  $L$  равна алгебраической сумме мгновенных значений напряжений генераторов (э.д.с.):

$$\sum_{k=1}^N u_k(t) = \sum_{i=1}^M e_i(t). \quad (4.2)$$

Этот закон следует из того, что при обходе любого контура алгебраическая сумма напряжений на всех элементах должна быть равна нулю.

Направление обхода контура значения не имеет. Необходимо лишь записывать напряжения генераторов со знаком «+», если обход его происходит от «—» к «+», а падения напряжений на  $r$ ,  $C$  и  $L$  записывать со знаком «+», если обход соответствующего элемента происходит от «+» к «—».

**Пример 1.** При обходе заданного контура, по которому течет один ток  $i(t)$  при указанных на рис. 4.1 условных положительных направлениях напряжений генераторов (э.д.с.) и падений напряжений, по часовой стрелке имеем

$$e_1(t) - e_2(t) = u_C(t) + u_r(t) - u_L(t);$$

против часовой стрелки

$$-e_1(t) + e_2(t) = -u_C(t) - u_r(t) + u_L(t).$$

Оба уравнения равноценны, так как получаются одно из другого путем умножения на  $-1$  обеих частей уравнения.

Для расчета воздействия заданных источников на цепь необходимо найти напряжения на всех элементах и токи во всех ветвях. Однако при прямом решении этой задачи получилось бы очень большое число уравнений и переменных. Поэтому используют один из двух основных методов составления уравнений цепи, упрощающих решение задачи.

При методе контурных токов задаются фиктивными токами, которые будто бы протекают в контурах. Причем в тех элементах, которые входят в два контура одновременно, ток находят как алгебраическую сумму двух контурных токов.

При методе узловых потенциалов задаются потенциалами в узлах относительно исходного. Причем напряжение на элементе, соединяющем два смежных узла, находят, как разность узловых потенциалов.

Чтобы выбрать метод составления уравнения, следует определить, каких неизвестных — контурных токов или узловых потенциалов будет меньше. Для этого необходимо использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{КНКТ} &= \text{К} - \text{КЗИТ}, \\ \text{КНУП} &= \text{П} - \text{КЗИН}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\text{КНКТ}$  и  $\text{КНУП}$  — количество неизвестных контурных токов и узловых потенциалов, а  $\text{КЗИТ}$  и  $\text{КЗИН}$  — количество заданных источников тока и источников напряжения. Эти соотношения очевидны, так как в контуре, в котором задан источник (неизменно-

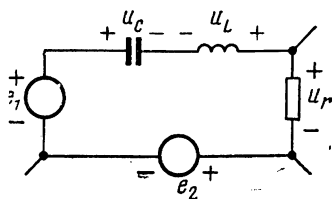


Рис. 4.1

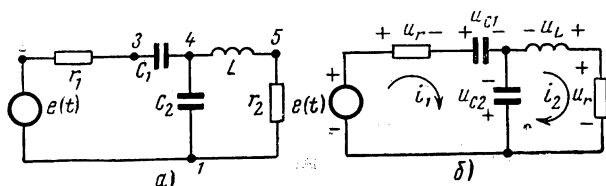


Рис. 4.2

го) тока, ток известен (по определению он равен току источника), а между узлами, где включен источник (неизменного) напряжения, известно напряжение и его искать не придется.

**Пример 2.** Составить уравнение заданной цепи (рис. 4.2, а) с постоянными параметрами.

В заданной цепи:  $\mathcal{E}=6$ ,  $\mathcal{Y}=5$  (они пронумерованы),  $C=1$ .

В соответствии с (3.7) количества независимых контуров и пар узлов

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{U} + C = 6 - 5 + 1 = 2,$$

$$P = \mathcal{U} - C = 5 - 1 = 4.$$

Так как в цепи задан один источник напряжения и нет источников тока, то в соответствии с (4.3)

$$KNKT = K - KЗИТ = 2 - 0 = 2,$$

$$KNУП = P - KЗИН = 4 - 1 = 3.$$

Следовательно, целесообразно в качестве искоемых переменных ввести два контурных тока и составить для выбранных контуров вторые уравнения Кирхгофа.

Условимся о положительных направлениях контурных токов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  и выберем произвольно направления отсчета напряжений (рис. 4.2, б). При обходе контуров по часовой стрелке

$$e = u_{r1} + u_{c1} - u_{c2};$$

$$0 = -u_{L1} + u_{r2} + u_{c2}.$$

Выразим падения напряжений через токи, протекающие по соответствующим элементам, пользуясь правилами § 3.2:

$$e = i_1 r_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - \left\{ \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt \right\},$$

$$0 = - \left\{ -L \frac{di_2}{dt} \right\} + i_2 r_2 + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt.$$

После упрощения, взяв производные от обеих частей уравнений (чтобы освободиться от интегралов), получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$r_1 \frac{di_1}{dt} + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i_1 - \frac{1}{C_2} i_2 = e;$$

$$L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + r_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 - \frac{1}{C_2} i_1 = 0.$$

(4.4)

## § 4.2. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЦЕПИ

В результате составления уравнений цепи на основании первого или второго закона Кирхгофа получают систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными или переменными (зависящими от времени) коэффициентами.

В случае цепи с постоянными параметрами получается система  $n$  линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая сводится к одному линейному уравнению  $n$ -го порядка. Число  $n$  всегда равно количеству независимых накопите-

лей энергии (конденсаторов и катушек индуктивности). При этом конденсаторы, находящиеся под одним напряжением, и катушки, обтекаемые одним током, должны считаться одним накопителем.

Пример 1. В примере 2 §4.1 было получено два дифференциальных уравнения. Из второго уравнения определяем:

$$i_1 = LC_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + r_2 C_2 \frac{di_2}{dt} + i_2;$$

$$\frac{di_1}{dt} = LC_2 \frac{d^3 i_2}{dt^3} + r_2 C_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{di_2}{dt}.$$

Подставляя  $i_1$  и  $\frac{di_1}{dt}$  в первое уравнение, находим

$$r_1 LC_2 \frac{d^3 i_2}{dt^3} + \left( r_1 r_2 C_2 + \frac{C_1 C_2^2 L_2}{C_1 + C_2} \right) \frac{d^2 i_2}{dt^2} +$$

$$+ \left( r_1 + \frac{C_1 C_2^2 r_2}{C_1 + C_2} \right) \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 = e.$$

Сокращенно это можно записать так:

$$a_3 \frac{d^3 i_2}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + a_1 \frac{di_2}{dt} + a_0 i_2 = b_0 e(t),$$

где  $a_3, a_2, a_1, a_0$  и  $b_0$  — коэффициенты, выражающиеся через параметры цепи.

Итак, для тока  $i_2(t)$  получено линейное уравнение с постоянными коэффициентами 3-го порядка, так как в цепи три независимых накопителя энергии ( $C_1, C_2$  и  $L$ ).

Методика решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами довольно хорошо разработана. Уравнение  $n$ -го порядка для некоторого тока  $i$  в общем случае имеет вид

$$a_n \frac{d^{(n)}i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i =$$

$$= b_m \frac{d^{(m)}e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)}e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e. \quad (4.5)$$

(В примере  $a_n = a_3$ , а все  $b_m$ , кроме  $b_0$ , равны нулю.) Его решение состоит из двух частей

$$i = i_{\text{общ}} + i_{\text{частн}}, \quad (4.6)$$

где  $i_{\text{общ}}$  — общее решение заданного уравнения в предположении, что правая часть равна нулю (однородного уравнения);

$i_{\text{частн}}$  — какое-либо частное решение заданного уравнения.

Общее решение всегда можно записать в виде

$$i_{\text{общ}} = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + A_n e^{\gamma_n t}, \quad (4.7)$$

где  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  — корни характеристического уравнения

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma + a_0 = 0; \quad (4.8)$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  — постоянные, определяемые по заданным начальным значениям токов в катушках индуктивности и напряжений на конденсаторах. Начальные условия в цепи отражают также два физических закона, выполняющиеся в конденсаторах и в катушках. Заряд конденсатора и магнитный поток катушки не могут делать скачков. Действительно, так как

$$i_C = \frac{dq}{dt}, \quad u_L = \frac{d\Phi}{dt},$$

то скачки  $q$  и  $\Phi$  означали бы появление бесконечно больших токов и напряжений, что физически невозможно. Если  $q$  и  $\Phi$  создаются соответственно одним напряжением и одним током, то указанные законы означают невозможность скачка напряжения на конденсаторе и тока в катушке.

Для любой цепи, составленной из элементов  $r, C, L$ , действительные части корней  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  всегда отрицательны. Следовательно, с течением времени составяющая  $i_{\text{общ}} \rightarrow 0$ . Спустя некоторое время, можно полагать, что  $i = i_{\text{частн}}$ . Поэтому  $i_{\text{частн}}$  называют решением (в данном случае током) в *установившемся режиме*,  $i_{\text{общ}}$  — *свободными колебаниями* цепи (так как они происходят в предположении отсутствия внешнего воздействия,  $e(t) = 0$ ). Период времени, в течение которого  $i_{\text{частн}} \neq 0$  (с определенной, конечно, точностью), называют *периодом установления* колебаний.

Для определения  $i_{\text{частн}}$  в курсах математики имеется ряд способов. В радиотехнике эту составляющую часто находят из физических соображений или одним из методов нахождения установившихся колебаний в цепи.

В случае цепи с *переменными параметрами* отыскание решений существенно усложняется вследствие отсутствия регулярных (универсальных) методов решения уравнений. Каждое полученное уравнение приходится рассматривать отдельно, стремясь по возможности свести его к одному из видов уравнений с переменными параметрами, решения которых известны. Так, уравнение 1-го порядка вида

$$\frac{di}{dt} + a(t)i = f(t) \quad (4.9)$$

имеет общее решение

$$i = e^{-\int a(t)dt} \int f(t) e^{\int a(t)dt} dt + A e^{-\int a(t)dt}, \quad (4.10)$$

где  $A$  — постоянная, определяемая из начальных условий.

Общее линейное уравнение  $n$ -го порядка с переменными параметрами имеет вид, аналогичный (4.5), однако коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  (все или некоторые) являются функциями времени. Общее решение уравнения так же, как и (4.6), состоит из двух частей: общего решения уравнения в предположении, что правая часть равна 0 (однородного уравнения), и частного решения заданного уравнения. Общее решение  $i_{\text{общ}}$  однородного уравнения можно найти путем последовательного понижения порядка уравнения на единицу при помощи подстановки

$$i = i_1 \int u dt,$$

где  $i_1$  — какое-либо частное решение однородного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$t \frac{d^2 i}{dt^2} - t \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Для этого уравнения возможно одно из частных решений  $i_1 = t$ . Поэтому производим подстановку:

$$i = i_1 \int u dt = t \int u dt.$$

Вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= tu + \int u dt; \\ \frac{d^2 i}{dt^2} &= t \frac{du}{dt} + u + u = t \frac{du}{dt} + 2u. \end{aligned}$$

Подставляя в заданное уравнение, получаем уравнение относительно  $u$  с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{u} = \frac{t-2}{t} dt,$$

откуда

$$u = A_1 \frac{e^t}{t}.$$

Следовательно,

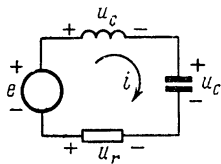
$$i = t \int u dt = t \int_0^t A_1 \frac{e^t}{t^2} dt + A_2.$$

Постоянные  $A_1$  и  $A_2$  находят из начальных условий.

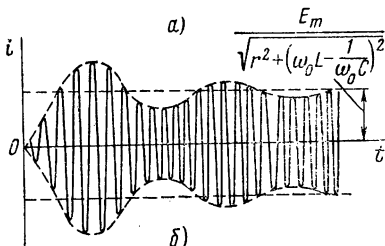
Частное решение заданного линейного уравнения (при правой части  $\neq 0$ ) часто можно найти методом вариации постоянных интегрирования ( $A_1$  и  $A_2$  в примере 2).

Рассмотрим решения уравнений линейных цепей с постоянными и переменными параметрами.

Пример 3. В колебательный контур с постоянными параметрами  $r$ ,  $C$  и  $L$  включается гармоническое колебание  $e(t) = E_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Определить ток в контуре и напряжения на элементах (рис. 4.3, а).



а)



б)

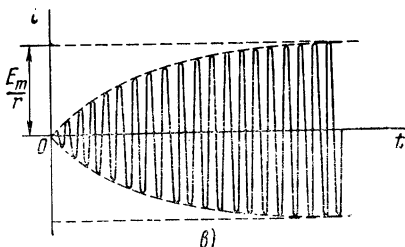


Рис. 4.3

В данном случае необходимо составить одно контурное уравнение, пользуясь вторым законом Кирхгофа. В соответствии с показанными на рис. 4.3, а произвольно принятыми положительными направлениями тока, напряжения источника и падений напряжений

$$e(t) = u_L(t) + u_C(t) - u_r(t).$$

Согласно правилам § 3.2

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt;$$

$$u_r = -ir.$$

Подставляя эти величины в предыдущее уравнение и беря производную от обеих частей (чтобы освободиться от интеграла), получаем

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{LC} e.$$

Из этого уравнения найдем  $i$ . После чего определим

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_r = -ri; \quad u_C = e - u_L + u_r.$$

Уравнение имеет второй порядок (так как в цепи имеется два накопителя энергии:  $C$  и  $L$ ). Запишем общее решение уравнения:

$$i = i_{\text{общ}} + i_{\text{частн}} = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} + i_{\text{частн}}.$$

Величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются корнями характеристического уравнения

$$\gamma^2 + \frac{r}{L} \gamma + \frac{1}{LC} = 0.$$

Откуда

$$\gamma_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от соотношений  $\left(\frac{r}{2L}\right)^2$  и  $\frac{1}{LC}$  корни  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  могут быть действительными или комплексными. Далее рассмотрен случай, когда  $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ , или  $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , когда корни  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будут комплексными. Частное решение  $i_{\text{частн}}$  характеризует ток в установившемся режиме и может быть найдено комплексным методом:

$$i_{\text{частн}} = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \beta),$$

где

$$\beta = \text{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$

После этого

$$i = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} + \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \beta);$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_r = -ri; \quad u_C = e - u_L - u_r.$$

В данной цепи начальными условиями являются  $i(0) = 0$ ,  $u_C(0) = 0$ , так как невозможны скачок тока в катушке индуктивности (а следовательно, и в контуре) и скачок напряжения на конденсаторе. Составляя выражение для  $u_C(t)$  и полагая в полученных уравнениях  $i(t) = 0$ ,  $u_C(t) = 0$  при  $t = 0$ , находим систему двух алгебраических уравнений для определения постоянных  $A_1$  и  $A_2$ . Можно поступить проще. Так как  $i(0) = 0$ , то и  $u_r(0) = 0$ . Кроме того,  $u_C(0) = 0$ . Поэтому ясно, что при  $t = 0$   $u_L(t) = e(t)$ . В качестве второго уравнения для определения  $A_1$  и  $A_2$  можно использовать уравнение  $u_L = L \frac{di}{dt} = e$ . Таким образом,

$$A_1 + A_2 + \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\varphi_0 - \beta) = 0;$$

$$\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 - \frac{\omega_0 E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\varphi_0 - \beta) = \frac{E_m}{L} \cos \varphi_0.$$



Чтобы определить отсюда  $A_1$  и  $A_2$ , подставим их в уравнение для тока и, обозначив

$$\gamma_1 = -\frac{r}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = -\alpha + j\omega_c,$$

$$\gamma_2 = -\frac{r}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = -\alpha - j\omega_c,$$

получим

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \beta) -$$

$$- \frac{E_m \frac{\omega_p}{\omega_c}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\varphi_0 - \beta) \sin(\omega_c t + \varphi_c) +$$

$$+ \frac{E_m}{\omega_0 L} \left[ \cos \varphi_0 - \frac{\omega_c L}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\varphi - \beta) \right] e^{-\alpha t} \sin \omega_c t,$$

где  $\varphi_c = \arctg \frac{\omega_c}{\alpha},$

$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — резонансная частота контура.

Если  $\alpha = \frac{r}{2L} \ll \omega_0$ , то  $\varphi_c \cong \frac{\pi}{2}$  и  $\omega_c \cong \omega_p$ .

В этом случае выражение для тока можно упростить. Приняв  $\varphi_0 = 0$ , получаем

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_p t - \beta) -$$

$$- \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega_0 t - \beta).$$

При  $\omega_0 = \omega_p$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \text{ и } \beta = 0.$$

Тогда

$$i \cong \frac{E_m}{r} (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_p t.$$

Кривые, соответствующие последним двум случаям, приведены на рис. 4.3, б и в. В первом случае в начальный период складываются два колебания с частотами  $\omega_p$  и  $\omega_0$ , т. е. возникают биения. По истечении некоторого времени, зависящего от  $\alpha$ , свободные колебания затухают и остаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой. Во втором случае частоты собственных и вынужденных колебаний совпадают, в результате чего амплитуда тока стремится к установившемуся значению по экспоненте. Установившееся значение тока в этом случае больше, чем в первом.

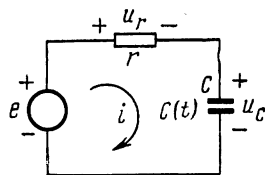


Рис. 4.4

**Пример 4.** В цепь, состоящую из постоянного сопротивления и конденсатора с емкостью  $C(t) = C_0(1 + bt)$ , включается в момент  $t=0$  линейно нарастающая э.д.с.  $e(t) = Bt$ . Определить закон изменения напряжения на конденсаторе.

В соответствии с принятыми на рис. 4.4 положительными направлениями э.д.с., тока и падений напряжений

$$e(t) = u_c(t) + u_r(t) = u_c(t) + ir.$$

Согласно правилам §3.2

$$i_c = i = C(t) \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) \frac{dC(t)}{dt}.$$

Подставляя  $i$  в уравнение цепи, находим линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами относительно  $u_c(t)$ :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1 \mp r \frac{dC}{dt}}{rC} u_c = \frac{1}{rC} e.$$

Так как

$$C = C_0(1 + bt), \quad e = Bt,$$

то

$$\frac{dC}{dt} = bC_0$$

и, следовательно,

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1 \mp rbC_0}{rC_0(1 \mp bt)} u_c = \frac{Bt}{rC_0(1 \mp bt)}.$$

Это уравнение типа (4.9). Его решение имеет вид (4.10). В данном случае

$$a(t) = \frac{1 \mp rbC_0}{rC_0(1 \mp bt)};$$

отсюда

$$f(t) = \frac{Bt}{rC_0(1 \mp bt)}.$$

Вычисляем необходимые для решения интегралы:

$$\int a(t) dt = \int \frac{1 \mp rbC_0}{rC_0(1 \mp bt)} dt = \frac{1 \mp rbC_0}{rbC_0} \ln(1 + bt);$$

$$\int f(t) e^{\int a(t) dt} = \int \frac{Bt}{rC_0(1 \mp bt)} e^{\frac{1 \mp rbC_0}{rbC_0} \ln(1 + bt)} dt = \frac{B}{1 \mp rbC_0} e^{\frac{1 \mp rbC_0}{rbC_0} \ln(1 + bt)};$$

подставляя их в формулу (4.10), получаем ответ.

### § 4.3. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЦЕПЕЙ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Рассмотрим некоторый контур сложной радиопеи (рис. 4.5) и составим для него уравнение. Начальные условия цепи характеризуются наличием напряжения  $U_{C0}$  на конденсаторе и тока  $I_{L0}$  в катушке индуктивности. При принятых на рисунке положительных направлениях отсчета э.д.с., напряжений и токов второй закон Кирхгофа для контура имеет вид

$$e_1 - e_2 = (i_1 - i_2)r + L \frac{d}{dt} (i_1 - i_3) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1 dt - U_{C0}.$$

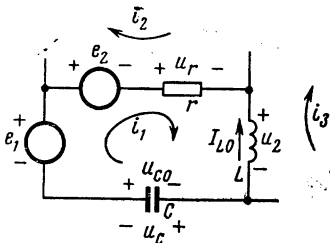


Рис. 4.5. Типовой контур цепи

Применим к левой и правой частям этого уравнения преобразование Лапласа, определенное в § 1.4, обозначив

$$L[e_1(t)] = E_1(p),$$

$$L[e_2(t)] = E_2(p).$$

Функции  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$  не известны, однако предположим, что они имеют преобразования Лапласа, соответственно равные  $I_1(p)$ ,  $I_2(p)$  и  $I_3(p)$ . Используя теоремы об изображении интеграла и производной (см. § 1.4), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \left( r + pL + \frac{1}{pC} \right) I_1(p) - rI_2(p) - pLI_3(p) = \\ = E_1(p) - E_2(p) + \frac{U_{L0}}{p} - I_{L0}L. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В (4.11) к неизвестным относятся изображения токов, относительно которых уравнение является линейным алгебраическим. Для каждой цепи таких уравнений можно составить столько, сколько в

ней имеется независимых контуров. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которых можно определить изображения контурных токов. Применяв к ним обратное преобразование Лапласа, можно найти токи. Так

$$[i_1(t) = L^{-1} [I_1(p)].$$

При рассмотрении типичного операторного уравнения контура (4.11) ясно, что левая его часть составлена аналогично уравнению для комплексных амплитуд при расчете цепей комплексным методом (при действии гармонических э.д.с.). При этом вместо комплексных сопротивлений  $j\omega L$  и  $\frac{1}{j\omega C}$  использованы операторные сопротивления, полученные из комплексных, путем замены  $j\omega$  на  $p$ .

В правой части записывается сумма изображений действующих э.д.с., начальных напряжений на конденсаторах, деленных на  $p$ , и начальных токов в катушках, умноженных на их индуктивности. Величина  $U_{C0}/p$  имеет знак плюс, если при обходе контура по положительному направлению контурного тока имеет место переход от «—» к «+». Величина  $LI_{L0}$  имеет знак плюс, если начальный ток совпадает с положительным направлением контурного тока.

Согласно изложенному операторные уравнения контуров можно составлять непосредственно, минуя запись дифференциальных уравнений. При этом сразу учитываются начальные условия в цепи.

**Пример.** В последовательный колебательный контур включается очень короткий импульс э.д.с.  $e(t)$ . Определить ток в контуре (см. рис. 4.3, а).

В соответствии с изложенным ранее правилом можно записать операторное уравнение

$$I(p) \left[ r + pL + \frac{1}{pC} \right] = E(p)$$

(начальные напряжения и ток в контуре равны нулю).  
Определяем  $I(p)$ :

$$I(p) = \frac{E(p)}{r + pL + \frac{1}{pC}}.$$

В соответствии с табл. 1.1. гл. 1 изображение короткого импульса равно его площади:  $E(p) = S^*$ . Упрощая уравнение, находим

---

\* Строго говоря, это справедливо для частот ниже некоторой границы, зависящей от длительности импульса.

$$I(p) = \frac{\frac{S}{L} p}{p^2 \mp p \frac{r}{L} \mp \frac{1}{LC}}.$$

Обратное преобразование целесообразно осуществить с помощью теоремы разложения (§1.5). В данном случае  $A(p) = \frac{S}{L} p$ ,  $B(p) = p^2 + p \frac{r}{L} + \frac{1}{LC}$ . Корни знаменателя

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm j \sqrt{\frac{r}{2L} - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_c.$$

Производя подстановку в формулу (1.52) и упрощая выражение с помощью формул Эйлера для косинуса и синуса, получаем

$$i(t) = \sum_{k=1}^2 \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} \cong \frac{S}{L} e^{-\alpha t} \cos \omega_c t.$$

#### § 4.4 НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЦЕПЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

Непосредственное применение преобразований Лапласа при решении дифференциальных уравнений цепей с переменными параметрами (т. е. уравнений с переменными коэффициентами) не приводит к алгебраическим уравнениям относительно изображений искомых величин, как это имеет место в случае цепей с постоянными параметрами. Однако если коэффициенты дифференциального уравнения изменяются *медленно*, то для приближенного решения уравнения иногда можно применить преобразования Лапласа в форме метода последовательных приближений, известного в нескольких вариантах ([10], [11]).

Идея метода состоит в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение общего вида:

$$\begin{aligned} & a_n(t) \frac{d^{(n)} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{(n-1)} u_{\text{ВЫХ}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) u_{\text{ВЫХ}} = \\ & = b_m(t) \frac{d^{(m)} u_{\text{ВХ}}}{dt^m} + b_{m-1}(t) \frac{d^{(m-1)} u_{\text{ВХ}}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0(t) u_{\text{ВХ}} = u_0(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $u_{\text{ВЫХ}}$  — искомая величина,  $u_{\text{ВХ}}$  — заданное воздействие, а через  $u_0$  для сокращения записи обозначена правая часть уравнения.

Если коэффициенты  $a_i(t)$  изменяются медленно, то их можно представить в виде суммы постоянной части  $\bar{a}_i$  и малых приращений  $\tilde{a}_i(t)$ :

$$a_i(t) = \bar{a}_i(t) + \tilde{a}_i(t). \quad (4.13)$$

Подставляя эти выражения для  $a_i(t)$  в уравнение (4.12) и группируя члены, получаем

$$\bar{a}_n \frac{d^{(n)}}{dt^n} u_{\text{ВЫХ}} + \bar{a}_{n-1} \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} u_{\text{ВЫХ}} + \dots + \bar{a}_0 u_{\text{ВЫХ}} = u_0(t) - \Delta u(t), \quad (4.14)$$

где обозначено

$$\Delta u(t) = \tilde{a}_n \frac{d^{(n)}}{dt^n} u_{\text{ВЫХ}} + \tilde{a}_{n-1} \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} u_{\text{ВЫХ}} + \dots + \tilde{a}_0 u_{\text{ВЫХ}}. \quad (4.15)$$

Найдем преобразования Лапласа от левой и правой частей уравнения (4.14), обозначив

$$L[u_{\text{ВЫХ}}(t)] = U_{\text{ВЫХ}}(p);$$

$$L[u_0(t)] = U_0(p);$$

$$L[\Delta u(t)] = U_{\Delta u}(p).$$

Осуществив операции преобразования обеих частей (4.14) по правилам § 1.5, получаем

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = \frac{U_0(p) - U_{\Delta u}(p)}{\bar{a}_n p^n \diamond \bar{a}_{n-1} p^{n-1} \diamond \dots \diamond \bar{a}_0} = U_0(p) \Phi(p) - U_{\Delta u}(p) \Phi(p), \quad (4.16)$$

где обозначено

$$\Phi(p) = \frac{1}{\bar{a}_n p^n \diamond \bar{a}_{n-1} p^{n-1} \diamond \dots \diamond \bar{a}_0}. \quad (4.17)$$

В уравнении (4.16) функции  $U_0(p)$  и  $\Phi(p)$  известны, так как они определяются видом заданного дифференциального уравнения. *Неизвестными* являются изображение  $U_{\text{ВЫХ}}(p)$  искомой величины  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$  и изображение  $U_{\Delta u}(p)$  функции  $\Delta u(t)$ , так как она зависит от  $u_{\text{ВЫХ}}(t)$  (см. равенство 4.15). Сущность метода последовательных приближений состоит в том, что, учитывая медленность изменения параметров и, как следствие, малость слагаемого  $\Delta u(t)$  в (4.14), его сначала предполагают равным нулю. При этом  $U_{\Delta u}(p)$  также равно нулю, и тогда из (4.16) определяют *нулевое приближение* для изображения  $U_{\text{ВЫХ}}(p)$ :

$$U_{\text{ВЫХ},0}(p) = U_0(p) \Phi(p). \quad (4.18)$$

Совершая обратное преобразование Лапласа (функции  $U_0(p)$  и  $\Phi(p)$  известны), определяем нулевое приближение для  $u_{\text{вых}}(t)$ :

$$u_{\text{вых},0}(t) = L^{-1} [U_0(p) \Phi(p)]. \quad (4.19)$$

Найденное нулевое приближение (4.18) можно использовать для уточнения или приближения к истинному значению  $U(p)$ . Детальный анализ показывает, что

$$U_{\text{вых}}(p) = U_{\text{вых},0}(p) - U_{\text{вых},1}(p) + U_{\text{вых},2}(p) - \dots, \quad (4.20)$$

где нулевое приближение  $U_{\text{вых},0}$  определяем по формуле (4.18), а общая формула для нахождения поправки  $k$ -го порядка имеет вид

$$U_{\text{вых},k}(p) = L [\tilde{a}_n(t) u_{\text{вых},k-1}^{(n)} + \tilde{a}_{k-1}(t) u_{\text{вых},k-1}^{(n-1)} + \dots + \tilde{a}_0(t) u_{\text{вых},k-1}] \Phi(p) \quad (\text{при } k = 1, 2, 3 \dots), \quad (4.21)$$

где  $u_{\text{вых},k-1}(t)$  — поправка к решению, найденная ранее.

Таким образом, общее решение находят в виде ряда

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вых},0}(t) - u_{\text{вых},1}(t) + u_{\text{вых},2}(t) - \dots \quad (4.22)$$

Практически во многих случаях этот ряд быстро сходится, так что достаточно вычислить небольшое число членов.

**Пример.** Найти методом последовательных приближений решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + (k_1^2 + k_2^2) u_{\text{вых}} = E.$$

В заданном уравнении  $n = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_0 = k_1^2 + k_2^2$ . Следовательно, в соответствии с (4.13)

$$a_2 = \bar{a}_2 + \tilde{a}_2 = 1 + 0;$$

$$a_1 = 0;$$

$$a_0 = \bar{a}_0 + \tilde{a}_0 = k_1^2 + k_2^2.$$

Все  $\tilde{a}_k = 0$ , кроме  $\tilde{a}_0 = k_2^2 t$ . В соответствии с (4.17) находим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2 + k_1^2}.$$

По (4.18) определяем изображение для нулевого приближения

$$U_{\text{вых},0}(p) = \Phi(p) L[E] = \frac{E}{p(p^2 + k_1^2)}.$$

Совершая обратное преобразование, находим нулевое приближение  $U_{\text{вых},0}(t)$ . Пользуясь таблицами [3], определяем

$$U_{\text{вых},0}(t) = L^{-1} \left[ \frac{E}{p(p^2 + k_1^2)} \right] = \frac{E}{k_1^2} (1 - \cos k_1 t).$$

Далее по формуле (4.21), полагая  $k = 1$ , находим изображение первой поправки:

$$U_{\text{вых.1}}(p) = \frac{1}{p^2 \mp k_1^2} L[\tilde{a}_0(t) u_{\text{вых.0}}(t)] = \\ = \frac{1}{p^2 \mp k_1^2} L \left[ k_2^2 t \frac{E}{k_1^2} (1 - \cos k_1 t) \right].$$

Пользуясь таблицами, определяем

$$U_{\text{вых.1}}(p) = \frac{1}{p^2 \mp k_1^2} \left[ \frac{k_2^2 E}{k_1^2 p} - \frac{k_2^2 E (p^2 - k_1^2)}{k_1^2 (p^2 \mp k_1^2)} \right] = \\ = \frac{a}{p^2 (p^2 \mp k_1^2)} - \frac{a (p^2 - k_1^2)}{(p^2 - k_1^2)^3},$$

где обозначено

$$a = \frac{k_2^2 E}{k_1^2}.$$

Обратное преобразование первого слагаемого находится непосредственно по таблицам [3]. Преобразование для второго слагаемого можно найти, пользуясь теоремой разложения. Приближенно

$$u_{\text{вых.1}}(t) \cong \frac{k_2^2 E}{k_1^2} \left[ \frac{t}{k_1^2} - \frac{\sin k_1 t}{k_1^3} \right].$$

Повторно применяя формулу (4.21), можно найти поправки следующих порядков.

## Глава V

### МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

#### § 5.1. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ЕГО ОСНОВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Четырехполюсником называют электрическую цепь, состоящую из любого количества элементов, в которой выделено две пары узлов: одна (входная) для подключения источника, другая (выходная) для подключения потребителей или накопителей. При рассмотрении цепи как четырехполюсника не интересуются законами



изменения напряжений и токов во всех элементах, а отыскивают зависимость между выходным напряжением  $u_2(t)$  и входным  $u_1(t)$  (рис. 5.1, а). Очевидно, что реакция четырехполюсника на входное возмущение зависит от подключенных к выходной паре клемм потребителей и накопителей. Поэтому они должны быть учтены при анализе четырехполюсника.

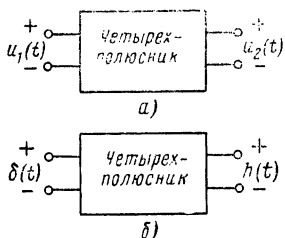
В § 1.6 введен  $\delta$ -импульс  $\delta(t)$  и определены его основные свойства. В соответствии с (1.68)

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \delta(\tau - t) d\tau.$$

В силу четности  $\delta$ -функции [ $\delta(t) = \delta(-t)$ ] это соотношение можно переписать так:

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (5.1)$$

Из соотношения (5.1) видно, что заданное колебание  $u_1(t)$  можно рассматривать как бесконечную последовательность смещенных  $\delta$ -импульсов  $\delta(t - \tau)$ , умноженных на значения заданного колебания в моменты, соответствующие смещениям.



Так как к линейной системе применим принцип наложения, то, определив реакцию четырехполюсника на воздействие  $\delta$ -импульса, можно установить его реакцию на любое воздействие  $u_1(t)$ .

Поэтому будем характеризовать четырехполюсник его реакцией  $h(t) = u_2(t)$  на воздействие в виде  $u_1(t) = \delta(t)$  (рис. 5.1, б). Функцию  $h(t)$  называют импульсной переходной характеристикой. Если параметры четырехполюсника постоянны, то форма  $h(t)$ , очевидно, не зависит от того, в какой момент времени воздействовал импульс. Если, например,  $\delta$ -импульс «запаздывает» и действует в момент  $t = \tau$ , т. е.  $u_1(t) = \delta(t - \tau)$ , то  $u_2(t) = h(t - \tau)$ . Любому реальному четырехполюснику свойственно равенство нулю импульсной переходной характеристики до момента воздействия  $\delta$ -импульса:

$$h(t - \tau) \equiv 0 \quad \text{при } t - \tau < 0.$$

Невыполнение этого означало бы, что напряжение на выходе появилось раньше, чем воздействовал импульс на входных клеммах.

Рассмотрим сначала линейные четырехполюсники с постоянными параметрами.

**Пример.** Определить импульсную переходную характеристику четырехполюсника в виде  $rC$ -цепи рис. 4.4.

Для установления зависимости  $u_C(t)$  от  $e(t)$  в примере к § 4.2 было получено дифференциальное уравнение, которое при  $C(t) = C = \text{const}$  имеет вид

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{rC} u_C = \frac{1}{rC} e.$$

По определению  $h(t) = u_C(t)$  при  $e(t) = \delta(t)$ ; следовательно,

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{rC} h(t) = \frac{1}{rC} \delta(t).$$

Это уравнение легко решить, применяя преобразования Лапласа. Пусть  $L[h(t)] = U_h(p)$ . Кроме того, используя теорему о преобразовании производной и учитывая, что  $L[\delta(t)] = 1$ , получаем

$$pU_h(p) + \frac{1}{rC} U_h(p) = \frac{1}{rC},$$

или

$$U_h(p) = \frac{\frac{1}{rC}}{p + \frac{1}{rC}}.$$

В соответствии с таблицами совершаем обратное преобразование и находим, что

$$h(t) = \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}} \quad (\text{при } t \geq 0).$$

Согласно сказанному ранее,  $h(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

В табл. 5.1 приведены импульсные переходные характеристики некоторых часто встречающихся четырехполюсников. Особенностью ряда характеристик является наличие в  $h(t)$  слагаемого в виде  $\delta$ -функции. Физические процессы, обуславливающие их, можно пояснить на примере четырехполюсника во второй строке так. Входной  $\delta$ -импульс мгновенно заряжает конденсатор, при этом через сопротивление  $r$  течет  $\delta$ -импульс тока и на сопротивлении соз-

дается выходное слагаемое в виде  $\delta$ -импульса \*. Затем конденсатор разряжается, вызывая ток в противоположном направлении, который создает слагаемое  $-\frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rc}}$ .

Таблица 5.1

Схема четырех- полюсника	Аналитическое выражение $h(t)$	Ориентировочный график $h(t)$
	$\frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rc}}$	
	$\delta(t) - \frac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rc}}$	
	$\frac{r_1}{(r_1+r_2)^2 C} \times$ $\times e^{-\frac{1}{(r_1+r_2)C} t}$	
	$\frac{r}{L} e^{-\frac{r}{L} t}$	
	$\delta(t) - \omega_p \sin \omega_p t$ $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	
	$\omega_p \sin \omega_p t$ $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	
	$\omega_p e^{-\frac{r}{2L} t} \sin \omega_p t$ $(\frac{r}{2L} \ll 1)$	

## § 5.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫХОДНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В соответствии с принципом суперпозиции реакция на выходе линейного четырехполюсника равна сумме реакций от каждого входного воздействия в отдельности. Так как входное воздействие

\* При использовании  $\delta$ -функций допускается появление скачка напряжения на конденсаторе.

$u_1(t)$  может быть представлено в виде суммы (точнее, интеграла)  $\delta$ -импульсов (5.1), а реакция на каждый из них равна по определению  $h(t)$ , то реакция на  $u_1(t)$  представится в виде интеграла

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (5.2)$$

Если сделать подстановку  $t-\tau=\tau'$ , а затем отбросить штрих у  $\tau$  (так как значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования), то можно получить эквивалентное выражение

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t-\tau) h(\tau) d\tau. \quad (5.3)$$

На рис. 5.2 показан характер операций, которые необходимо проделать для получения  $u_2(t)$  в некоторый момент  $t_1$  в соответствии с (5.2).

На рис. 5.2, а и б приведены графики заданного колебания  $u_1(t)$  и переходной характеристики некоторой цепи  $h(t)$ , вычерченных в функции аргумента  $\tau$ , как это необходимо для вычисления интеграла (5.2). На рис. 5.2, в приведен график  $h(-\tau)$ , а на рис. 5.2, г график  $h(t_1-\tau)$ . Для получения  $u_2$  в любой момент  $t=t_1$  необходимо проинтегрировать произведение кривых  $u_1(\tau)$  и  $h(t_1-\tau)$ . Операция (5.2) (а также 5.3) есть *свертка функций*  $u_1(t)$  и  $h(t)$ , определенная в § 1.4. Из графиков рис. 5.2 видно, что интегрирование реально производится от  $\tau=-\infty$  (если импульс начался бесконечно давно) до  $\tau$ , равного текущему моменту времени  $t$ :

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^t u_1(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (5.2a)$$

Если же входное воздействие началось при  $t=0$ , то нижний предел будет равен нулю.

Аналогичным способом можно убедиться, что при вычислении по формуле (5.3) реальное интегрирование производится от 0 до  $\infty$ :

$$u_2(t) = \int_0^{\infty} u_1(t-\tau) h(\tau) d\tau. \quad (5.3a)$$

Если же воздействие  $u_1(t)$  началось при  $t=0$ , то верхний предел будет равен текущему моменту  $t$ .

На основании соотношения (5.2) импульсной переходной характеристике можно придать другой смысл:  $h(\tau)$  есть «весовая функция», на которую должна быть умножена ордината  $u_1(t)$  с «возрастом»  $\tau$  [ $u_1(t-\tau)$ ] для того, чтобы определить ее вклад в значение выходного колебания  $u_2(t)$  в рассматриваемый момент (это показано на рис. 5.2).

Пример. Определить напряжение на конденсаторе последовательного колебательного контура при воздействии э.д.с. в виде скачка напряжения  $e(t) = E \cdot 1(t)$ .

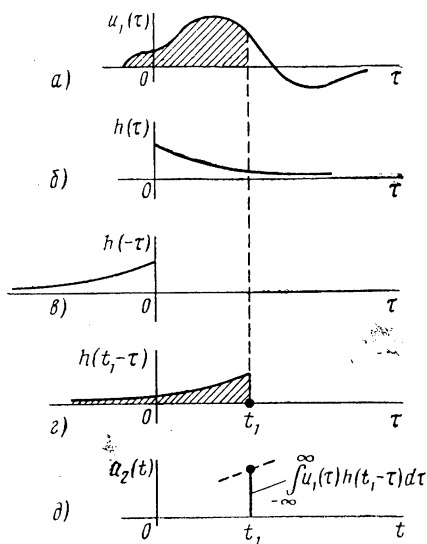


Рис. 5.2. К пояснению нахождения напряжения на выходе четырехполюсника

Если рассматривать последовательный колебательный контур как четырехполюсник с выходным напряжением  $u_2(t) = u_C(t)$ , то его переходная характеристика (при высоком качестве контура) имеет вид, приведенный в 7-й строке табл. 5.1.

Подставляя в (5.2а)  $u_1(\tau) = E$  и  $h(t-\tau) = \omega_p e^{-\frac{r}{2L}(t-\tau)} \times \sin \omega_p(t-\tau)$ , получаем

$$\begin{aligned}
 u_2(t) = u_C(t) &= \int_0^t E \omega_p e^{-\frac{r}{2L}(t-\tau)} \sin \omega_p(t-\tau) d\tau = \\
 &= E \omega_p e^{-\frac{r}{2L}t} \sin \omega_p t \int_0^t e^{\frac{r}{2L}\tau} \cos \omega_p \tau d\tau - \\
 &\quad - E e^{-\frac{r}{2L}t} \cos \omega_p t \int_0^t e^{\frac{r}{2L}\tau} \sin \omega_p \tau d\tau = \\
 &= \frac{E \omega_p^2}{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 \leftrightarrow \omega_p^2} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{2L}t} \left( \frac{r}{2\omega_p^2 L} \sin \omega_p t - \cos \omega_p t \right) \right].
 \end{aligned}$$

§ 5.3. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА  
С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. МЕТОД СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В § 1.3 была определена спектральная функция как прямое преобразование Фурье данного колебания. Пусть  $\dot{G}_{u_1}(\omega)$  есть спектральная функция входного воздействия четырехполюсника. Тогда в соответствии с (1.16)

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

и, следовательно,

$$u_1(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) e^{j\omega(t - \tau)} d\omega. \quad (5.4)$$

Подставим это выражение в формулу (5.3) для выходного напряжения и перегруппируем члены:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) e^{j\omega(t - \tau)} d\omega \right] h(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Рассмотрим внутренний интеграл, обозначив его через

$$\dot{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5.6)$$

Выражение (5.6) является прямым преобразованием Фурье для импульсной переходной функции четырехполюсника (переменная интегрирования обозначена через  $\tau$  вместо  $t$ ).

Прямое преобразование Фурье для импульсной переходной характеристики назовем коэффициентом передачи четырехполюсника. Коэффициент передачи является в общем случае комплексной функцией частоты. Далее убедимся, что он может быть определен так же, как отношение комплексных амплитуд при гармоническом воздействии на четырехполюсник.

Подставляя (5.6) в (5.5), получим

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.7)$$

Обозначим

$$\dot{G}_{u_2}(\omega) = \dot{G}_{u_1}(\omega) \dot{K}(\omega). \quad (5.8)$$

Тогда

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_2}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.9)$$

Выражение (5.9) является обратным преобразованием Фурье для  $\dot{G}_{u_2}(\omega)$ . Следовательно, величина  $\dot{G}_{u_2}(\omega)$ , вычисляемая по формуле (5.8), есть спектральная функция выходного воздействия.

Таким образом, получен метод расчета четырехполюсника, основанный на вычислении спектральных функций и коэффициента передачи, называемый методом спектральных функций.

Отыскание реакции по заданному воздействию осуществляется в четыре этапа:

1) по формуле (1.16) или по таблицам определяется спектральная функция заданного входного воздействия;

2) по формуле (5.6) или другим способом определяется коэффициент передачи четырехполюсника;

3) по формуле (5.8) определяется спектральная функция  $\dot{G}_{u_2}(\omega)$  реакции  $u_2(t)$ ;

4) по формуле (5.8) вычисляется реакция  $u_2(t)$ .

Заметим, что основное соотношение метода спектральных функций, выражаемое формулой (5.8), непосредственно следует из выражения (5.2) на основании правила получения преобразования Лапласа (или Фурье) для свертки двух функций (см. теорему о преобразовании свертки функций в § 1.4).

Преимуществом рассмотренного метода расчета является использование спектральных функций, дающих наглядное представление колебаний в виде спектров — совокупности гармонических колебаний.

Вместо преобразований Фурье можно также использовать преобразования Лапласа (см. гл. I). В этом случае выходное напряжение можно вычислять по формуле

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} u_2(p) e^{pt} dp, \quad (5.7a)$$

где

$$U_2(p) = U_1(p) K(p); \quad (5.8a)$$

$$K(p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-pt} dt. \quad (5.8b)$$

Пример. Определить напряжение  $u_2(t)$  на выходе  $rC$ -цепи (2-я строчка табл. 5.1) при воздействии на входе колебания

$$u_1(t) = U_1 \cos \omega_0 t \cdot 1(t).$$

1. По таблицам или непосредственно по формуле (1.16) определяем спектральную функцию воздействия

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = U_1 \frac{j\omega}{\omega_0 \nabla (j\omega)^2}.$$

2. Пользуясь второй строкой табл. 5.1, определяем коэффициент передачи по формуле (5.6):

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} \left[ \delta(\tau) - \frac{1}{rC} e^{-\frac{\tau}{rC}} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= 1 + \frac{1}{rC} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{rC} + j\omega\right)\tau}}{\frac{1}{rC} \nabla j\omega} \Bigg|_0^{\infty} = \frac{j\omega}{\frac{1}{rC} \nabla j\omega} \end{aligned}$$

(при взятии интеграла с  $\delta$ -функцией использовано ее «фильтрующее свойство», см. равенство 1.67). Далее убедимся, что коэффициент передачи можно было бы определить проще, пользуясь комплексным методом.

3. По формуле (5.8) определяем спектральную функцию реакции:

$$\begin{aligned} \dot{G}_{u_2}(\omega) &= \dot{G}_{u_1}(\omega) \dot{K}(\omega) = U_1 \frac{j\omega}{[\omega_0^2 \nabla (j\omega)^2]} \cdot \frac{j\omega}{[\alpha \nabla j\omega]} = \\ &= U_1 \frac{(j\omega)^2}{[(j\omega)^2 \nabla \omega_0^2] [j\omega \nabla \alpha]}, \end{aligned}$$

где обозначено  $\alpha = \frac{1}{rC}$ .

Вместо спектральной функции  $\dot{G}_{u_1}(\omega)$  можно взять изображение  $U_1(p)$  воздействия и операторный коэффициент передачи  $K(p)$ . Это позволяет найти изображение реакции

$$U_2(p) = U_1 \frac{p^2}{(p^2 \nabla \omega_0^2) (p \nabla \alpha)}.$$

4. Обратное преобразование осуществляем, пользуясь теоремой разложения. В данном случае  $A(p) = p^2$ ;  $B(p) = (p^2 + \omega_0^2) (p + \alpha)$ . Корни знаменателя  $p_1 = -\alpha$ ,  $p_2 = j\omega_0$ ,  $p_3 = -j\omega_0$ . Произведя подстановку в формулу (5.7а) и преобразования, получаем

$$u_2(t) = U_1 \left[ \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \nabla \omega_0^2} e^{-\alpha t} + \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha^2 \nabla \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t + \varphi) \right],$$



где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\tau \omega_0}{\alpha}.$$

По истечении достаточно большого интервала времени первое слагаемое становится пренебрежимо мало и в цепи устанавливается гармоническое колебание.

#### § 5.4. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

По определению коэффициент передачи четырехполюсника есть прямое преобразование Фурье для импульсной переходной характеристики четырехполюсника. Однако практически его часто удобнее вычислять, пользуясь другими способами, приводящими к тем же результатам.

На основании (5.8) коэффициент передачи равен также отношению спектральных функций реакции входного воздействия четырехполюсника:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{G}_{u_2}(\omega)}{\dot{G}_{u_1}(\omega)}. \quad (5.10)$$

В соответствии с (1.17) комплексная амплитуда любой гармонической составляющей периодической последовательности импульсов выражается через спектральную функцию одного импульса:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{2k} &= \frac{2}{T} \dot{G}_{u_2} \left( k \frac{2\pi}{T} \right), \\ \dot{U}_{1k}^* &= \frac{2}{T} \dot{G}_{u_1} \left( k \frac{2\pi}{T} \right). \end{aligned}$$

Подставляя  $\dot{G}_{u_2}$  и  $\dot{G}_{u_1}$  из этих соотношений в формулу (5.10) и отбрасывая индекс  $k$ , получаем

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}. \quad (5.11)$$

Следовательно, коэффициент передачи равен и отношению комплексных амплитуд на выходе и входе четырехполюсника (при гармоническом воздействии).

Соотношение (5.11) можно получить в более общем виде. Пусть  $u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Представим входное воздействие в комплексной форме. В соответствии с § 1.7

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= u(t) + j\dot{u}(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ jU_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = U_1 e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} = \dot{U}_1 e^{j\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Определим спектральную функцию  $\dot{u}_1(t)$ :

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_1 e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt.$$

Так как согласно (1.72)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt = \delta(\omega),$$

то

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = 2\pi \dot{U}_1 \delta(\omega - \omega_0).$$

Теперь на основании (5.7)

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \dot{U}_1 \delta(\omega - \omega_0) \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \dot{U}_1 \dot{K}(\omega_0) e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \quad (5.13)$$

(здесь использовано «фильтрующее действие»  $\delta$ -функции).

Разделив (5.13) на (5.12), получаем

$$\dot{K}(\omega_0) = \left. \frac{\dot{u}_2(t)}{\dot{u}_1(t)} \right|_{\dot{u}_1 = \dot{U}_1 e^{j\omega_0 t}}. \quad (5.14)$$

Таким образом, коэффициент передачи равен отношению реакции к входному гармоническому воздействию, представленным в комплексной форме.

Формула (5.14) эквивалентна (5.11). Действительно, учитывая, что  $\dot{u}_2(t) = \dot{U}_2 e^{j\omega_0 t}$ ,  $\dot{u}_1(t) = \dot{U}_1 e^{j\omega_0 t}$  и проведенный расчет справедлив для любой частоты  $\omega_0$ , получим

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{U_2 e^{j\varphi_2}}{U_1 e^{j\varphi_1}} = K(\omega) e^{j\beta(\omega)}.$$

Коэффициент передачи есть комплексная функция частоты, зависящая от устройства четырехполюсника. Модуль коэффициента передачи

$$K(\omega) = \frac{U_2}{U_1}$$

называют амплитудно-частотной характеристикой четырехполюсника. Аргумент коэффициента передачи  $\beta = \varphi_2 - \varphi_1$ , равный

сдвигу начальных фаз выходного и входного гармонических колебаний, называют фазо-частотной характеристикой четырех-полюсника.

Так как  $\dot{K}(\omega)$  есть прямое преобразование Фурье для импульсной переходной характеристики, то имеет место и обратное соотношение

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

или в случае применения преобразований Лапласа

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} K(p) e^{pt} dp.$$

В § 5.10 имеется еще один способ определения коэффициента передачи по заданному дифференциальному уравнению четырех-полюсника (формула 5.36а).

В связи с тем, что  $h(t)$  есть действительная функция времени, из предпоследней формулы следует, что значения  $\dot{K}(\omega)$  при положительных и отрицательных величинах каждой частоты  $\omega$  комплексно сопряжены, т. е.

$$\dot{K}(-\omega) = \dot{K}^*(\omega).$$

**Пример.** Определить коэффициент передачи  $rC$ -цепочки по формуле (5.14) и как отношение комплексных амплитуд при гармоническом воздействии.

В соответствии с формулой (5.14) задаемся

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ т. е. } \dot{u}_1(t) = \dot{U}_1 e^{j\omega_0 t}.$$

Для простоты расчетов полагаем  $\dot{U}_1 = 1$ . Зная импульсную переходную характеристику цепи, определяем  $u_2(t)$  по формуле (5.2):

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{\cos \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0 r C} \sin \omega_0 t}{1 \mp \left( \frac{1}{\omega_0 r C} \right)^2}.$$

Обозначив  $\frac{1}{\omega_0 r C} = \operatorname{tg} \alpha$ , после некоторых преобразований получим

$$u_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp \left( \frac{1}{\omega_0 r C} \right)^2}} \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Комплексное представление этого колебания

$$\dot{i}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_0 r C}\right)^2}} e^{j\alpha} e^{j\omega_0 t}.$$

Следовательно, в соответствии с (5.14)

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{i}_2(t)}{\dot{i}_1(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_0 r C}\right)^2}} e^{j\alpha}.$$

Определим теперь  $\dot{K}(\omega)$ , пользуясь комплексным методом расчета. Непосредственно из схемы

$$\dot{K}(\omega) = \frac{r}{r + \frac{1}{j\omega_0 C}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_0 r C}\right)^2}} e^{j\alpha}.$$

Как видим, при обоих методах результаты совпадают.

#### § 5.5. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ЕДИНИЧНОМ СКАЧКЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ЕЕ СВЯЗЬ С ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Входное воздействие  $u_1(t)$  четырехполюсника можно представить не только в виде бесконечной последовательности  $\delta$ -импульсов, как это имеет место в формуле (5.1), но и в виде бесконечной последовательности скачков напряжения разной величины, возникающих в различные моменты времени. На рис. 5.3 показано входное воздействие  $u_1(t)$ , приблизительно аппроксимированное суммой скачков напряжения, возникающих в моменты  $\tau_k = k\Delta\tau$ . Величина  $k$ -го скачка, возникшего в момент  $\tau_k = k\Delta\tau$ ,

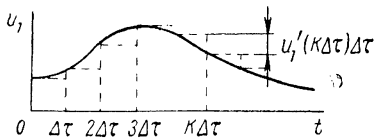
$$\Delta u_k \cong \frac{du_1(t)}{dt} \Delta\tau \Big|_{t=\tau_k} = u'_1(k\Delta\tau) \Delta\tau.$$

Суммируя все скачки напряжения, получаем

$$\begin{aligned} u_1(t) &\cong u_1(0) 1(t) + u'_1(\Delta\tau) \Delta\tau 1(t - \Delta\tau) + \\ &+ u'_1(2\Delta\tau) \Delta\tau 1(t - 2\Delta\tau) + \dots + u'_1(k\Delta\tau) \Delta\tau 1(t - k\Delta\tau) = \\ &= u_1(0) 1(t) + \sum_{k=1}^{k=\frac{t}{\Delta\tau}} u'_1(k\Delta\tau) 1(t - k\Delta\tau) \Delta\tau, \end{aligned}$$

где  $u_1(0)$  — скачок колебания  $u_1'(t)$  в начальный момент.

Если при устремлении  $\Delta\tau$  к нулю, увеличивать одновременно число скачков  $k$  так, чтобы  $\tau_k = k\Delta\tau = \text{const}$ , то в пределе получим точное представление  $u_1(t)$  в любой момент времени. Но предел суммы при  $\Delta\tau \rightarrow 0$  есть интеграл. Следовательно,



$$u_1(t) = u_1(0) 1(t) + \int_0^t u'_1(\tau) 1(t - \tau) d\tau. \quad (5.15)$$

Делая замену переменных по соотношению

$$t - \tau = \tau'$$

и отбрасывая затем штрих при  $\tau$ , можно получить эквивалентное соотношение

$$u_1(t) = u_1(0) 1(t) + \int_0^t u'_1(t - \tau) 1(\tau) d\tau. \quad (5.15a)$$

Рис. 5.3. Аппроксимация входного воздействия скачками на напряжения

Определим теперь *переходную функцию четырехполюсника*  $k(t)$  как *реакцию четырехполюсника на единичный скачок напряжения*. По определению

$$k(t) = u_2(t), \text{ если } u_1(t) = 1(t).$$

Так как выражение (5.15) представляет  $u_1(t)$  в виде суммы скачков напряжения величиной  $u'_1(\tau) d\tau$ , возникающих в моменты  $\tau$  ( $0 < \tau < t$ ), то в соответствии с принципом суперпозиции

$$u_2(t) = u_1(0) k(t) + \int_0^t u'_1(\tau) k(t - \tau) d\tau. \quad (5.16)$$

Производя под интегралом замену переменных по формуле  $t - \tau = \tau'$  и отбрасывая затем штрих у  $\tau$ , получим эквивалентное соотношение

$$u_2(t) = u_1(0) k(t) + \int_0^t u'_1(t - \tau) k(\tau) d\tau. \quad (5.16a)$$

Путем интегрирования по частям выражение для  $u_2(t)$  можно записать еще в двух формах:

$$u_2(t) = u_1(0)k(t) + \int_0^t u_1(\tau)k'(t-\tau)d\tau, \quad (5.16б)$$

$$u_2(t) = u_1(0)k(t) + \int_0^t u_1(t-\tau)k'(\tau)d\tau. \quad (5.16в)$$

Так как импульсная переходная характеристика  $h(t)$  и переходная характеристика  $k(t)$  описывают одни и те же физические процессы, то между ними существует однозначная связь. Из сопоставления формул (5.2а) и (5.3а) с формулами (5.16б) и (5.16в) можно установить, что

$$h(t) = \frac{d}{dt}k(t) + k(0)\delta(t) \quad (5.17)$$

[для проверки достаточно подставить это соотношение в (5.3а) и получить (5.16в)].

Таким образом, импульсная переходная характеристика есть производная переходной характеристики при скачке с точностью до слагаемого  $k(0)\delta(t)$ .

Преимуществом расчетов с помощью переходной характеристики  $k(t)$  является большая физическая наглядность, обусловленная большей наглядностью скачка напряжения по сравнению с  $\delta$ -импульсом. В теоретических исследованиях использование импульсной переходной характеристики обычно приводит к более простым вычислениям.

**Пример.** Найти напряжение на выходе  $RC$ -цепи (строка 2 табл. 5.1) под действием линейно-растущего напряжения  $at \cdot 1(t)$  по заданной переходной характеристике  $k(t)$ .

Воспользуемся соотношением (5.16), так как в него входит производная  $u_1(t)$ , которая в данном примере является константой  $a$  [ $u_1'(t) = (at)' = a$ ]. Переходную характеристику  $k(t)$  определим из (5.17), взяв импульсную переходную характеристику  $h(t)$  из табл. 5.1.

Из (5.17)

$$k(t) = \int_{-\infty}^t h(t) dt - \int_{-\infty}^t k(0)\delta(t) dt = \int_{-\infty}^t h(t) dt - k(0).$$

Подставляя  $h(t)$  из табл. 5.1, получаем

$$k(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt - \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t}{RC}} dt - k(0) = 1 - k(0) + e^{-\frac{t}{RC}}.$$

(здесь учтено, что площадь под  $\delta$ -функцией равна 1). Полагая  $t = 0$ , находим, что  $k(0) = 1$ , и, следовательно,  $k(t) = e^{-\frac{t}{RC}}$ .

Далее, учитывая, что  $u_1(0) = 0$ , по (5.16) определяем

$$u_2(t) = \int_0^t a e^{-\frac{t-\tau}{rC}} d\tau = a e^{-\frac{t}{rC}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{rC}} d\tau = arC(1 - e^{-\frac{t}{rC}}).$$

Это — колебание, экспоненциально стремящееся к постоянному уровню  $arC$ .

## § 5.6. ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

При теоретическом определении импульсной переходной характеристики  $h(t)$  или коэффициента передачи  $\dot{K}(\omega)$  часто возникает вопрос о возможности практического осуществления устройств с найденными характеристиками (о возможности их физической реализации)\*. Четырехполосник с заданными характеристиками ( $h(t)$  или  $\dot{K}(\omega)$ ) называют физически реализуемым (осуществимым), если его можно построить из конечного количества сопротивлений, катушек индуктивности и конденсаторов, а также, если необходимо, линейных усилителей\*\*.

Требование физической реализуемости, которое можно не учитывать лишь *иногда при промежуточных* теоретических исследованиях, налагает на  $h(t)$  и  $\dot{K}(\omega)$  определенные ограничения. Они наиболее очевидны по отношению к  $h(t)$ . Ясно, что  $h(t) = 0$  при  $t < 0$ , потому что четырехполосник не может реагировать на  $\delta$ -импульс до его подачи. Кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0,$$

так как в любой реальной линейной системе колебания (импульсы) не могут продолжаться бесконечно. Время, в течение которого  $h(t) \neq 0$  (практически всегда с определенной степенью выполнения неравенства), называют памятью четырехполосника. При выполнении указанных двух условий можно построить четырехполосник с импульсной характеристикой, сколь угодно приближающейся к  $h(t)$ , хотя для этого может потребоваться недопустимо много элементов или потребуются такие их параметры, которые пока еще не могут быть получены (в этом случае говорят о практической нереализуемости).

По отношению к  $\dot{K}(\omega)$  требования физической реализуемости менее очевидны, но их можно установить, пользуясь связью  $h(t)$

\* Вопросы осуществления четырехполосников изучаются в теории *синтеза цепей* в противоположность теории *анализа*, рассматриваемой в данной книге.

\*\* Это определение применимо только к цепям, но не к системам с распределенными параметрами.

и  $\dot{K}(\omega)$ . При этом удобнее рассматривать операторный коэффициент передачи  $K(p)$ , т. е. определять  $h(t)$  как преобразование Лапласа для  $K(p)$ :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p) e^{pt} dp. \quad (5.18)$$

Согласно теории интегрирования в комплексной плоскости можно установить, что для физически реализуемого четырехполюсника функция  $K(p)$  не должна иметь полюсов в правой полуплоскости комплексного переменного  $p$  и на мнимой оси  $j\omega$ . Иными словами, требуется, чтобы  $K(p)$  был аналитической функцией комплексного переменного  $p$  в области  $\operatorname{Re} p > 0$  и на мнимой оси.

Иногда требования физической реализуемости  $\dot{K}(\omega)$  формулируют несколько иначе, рассматривая  $\dot{K}$  как функцию комплексного переменного  $\dot{z} = \omega + ja$ . В этом случае  $\dot{K}(\dot{z})$  не может иметь особых точек в полуплоскости  $\operatorname{Im} \dot{z} < 0$  и на действительной оси. Чтобы убедиться в этом, достаточно выразить модуль  $\dot{K}(\dot{z})$  через  $h(t)$ :

$$\begin{aligned} |\dot{K}(\dot{z})| &= |\dot{K}(\omega + ja)| = \left| \int_0^{\infty} h(t) e^{-j(\omega + ja)t} dt \right| \ll \\ &\ll \int_0^{\infty} |h(t) e^{-j(\omega + ja)t}| dt = \int_0^{\infty} |h(t)| e^{\alpha t} dt < \\ &< \max |h(t)| \int_0^{\infty} e^{\alpha t} dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если  $\alpha = \operatorname{Im} \dot{z} < 0$ , то

$$|\dot{K}(\dot{z})| < \max |h(t)| \frac{1}{|\alpha|}.$$

Ввиду того, что  $h(t)$  — ограниченная функция, при любом  $|\alpha| > 0$ , т. е. в полуплоскости  $\operatorname{Im} \dot{z} < 0$ ,  $|\dot{K}(\dot{z})|$  будет ограниченным, что и означает отсутствие особых точек.

Можно использовать другой критерий (Пэли—Винера), согласно которому для физически реализуемого четырехполюсника

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log K^2(\omega) d\omega}{1 + \omega^2} < \infty. \quad (5.19)$$

**Пример 1.** Определить, реализуем ли четырехполюсник с коэффициентом передачи

$$\dot{K}(\omega) = \frac{j\omega B}{1 + j\omega B}.$$



Операторный коэффициент передачи

$$K(p) = \frac{pB}{1 \mp pB}$$

имеет единственную особую точку  $p = -\frac{1}{B}$ , которая лежит при  $B > 0$  в левой полуплоскости. Следовательно, четырехполюсник реализуем.

Аналогичные результаты дает применение критерия Пэли—Винера. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \left[ \frac{\omega B}{1 \mp (\omega B)^2} \right]^2}{1 \mp \omega^2} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log (\omega B)^2}{1 \mp \omega^2} d\omega - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log [1 \mp (\omega B)^2]}{1 \mp \omega^2} d\omega.$$

Эти интегралы конечны.

Пример 2. Найти импульсную переходную характеристику и проверить осуществимость фильтра с коэффициентом передачи  $K_0 = \text{const}$  в диапазоне частот от 0 до  $\omega = W$ .

Для данного фильтра

$$\dot{K}(\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } -W < \omega < W, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

Следовательно,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W K_0 e^{j\omega t} dt = \frac{K_0 W}{\pi} \frac{\sin Wt}{Wt}.$$

Так как  $h(t) \neq 0$  при  $t < 0$ , то фильтр не реализуем. Однако при теоретических исследованиях он часто используется в силу простоты аналитического представления и возможности создать реальные фильтры, приближающиеся по некоторым свойствам к рассмотренному.

### § 5.7. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И ЕГО ОСНОВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА. СВЯЗЬ ВЫХОДНОГО И ВХОДНОГО НАПРЯЖЕНИЙ

Если четырехполюсник содержит хотя бы один или несколько элементов (сопротивлений, катушек индуктивности, конденсаторов), параметры которых изменяются во времени под действием внешних причин, то его называют четырехполюсником с переменными параметрами или параметрическим четырехполюсником. Приложенное к его входным клеммам напряжение  $u_1(t)$  может

быть представлено в виде суммы «взвешенных» смещенных  $\delta$ -импульсов в соответствии с (5.1):

$$u_1(t) = \int_{-\infty}^t u_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Выходное напряжение  $u_2(t)$  можно по-прежнему определять как сумму (точнее интеграл) реакций четырехполюсника на каждый  $\delta$ -импульс в отдельности, а четырехполюсник характеризовать импульсной переходной характеристикой.

Однако так как параметры элементов четырехполюсника со временем изменяются, то импульсная переходная характеристика четырехполюсника зависит не только от  $t$ , но и от момента воздействия  $\delta$ -импульса  $\tau$ . По мере течения времени  $t$  и «прихода» очередных  $\delta$ -импульсов, составляющих  $u_1(t)$ , импульсная переходная характеристика не просто смещается, не изменяя своей формы, как это было в системах с постоянными параметрами, но *изменяет свой вид*. Поэтому для выходного напряжения  $u_2(t)$  вместо соотношения (5.2) необходимо записать

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_{-\infty}^t u_1(\tau) h_{\tau}(t - \tau, \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^t u_1(\tau) h_{\tau}(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $h_{\tau}(t, \tau) = h_{\tau}(t - \tau, \tau)$  — импульсная переходная характеристика четырехполюсника, зависящая не только от времени  $t$ , но и от момента воздействия  $\delta$ -импульса  $\tau$ .

Так как импульсная переходная характеристика есть функция двух аргументов, то она наглядно может быть или изображена в пространстве, или представлена своими «сечениями». На рис. 5.4, *a* она представлена в виде поверхности в области  $t > \tau$ . В области  $t < \tau$  она совпадает с координатной плоскостью  $t, \tau$ . В данном случае по-прежнему выполняются два условия

$$\begin{aligned} h_{\tau}(t, \tau) &= 0 \text{ при } t < \tau, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} h_{\tau}(t, \tau) &= 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

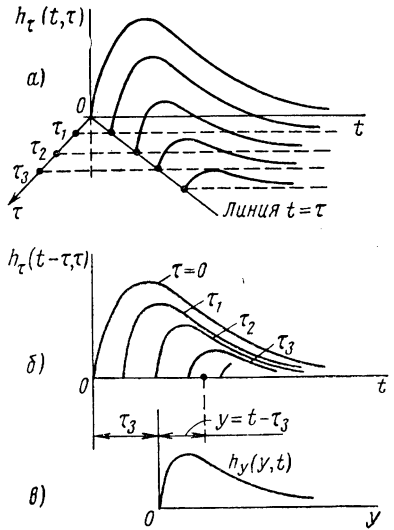


Рис. 5.4. Импульсные переходные характеристики четырехполюсника с переменными параметрами

Производя сечение этой поверхности плоскостями, нормальными оси  $\tau$ , получим ряд импульсных переходных характеристик, соответствующих подаче  $\delta$ -импульсов в различные моменты времени (рис. 5.4, б). Близкие кривые можно получить экспериментально при подаче на вход четырехполюсника очень коротких импульсов единичной площади.

Для практического использования часто удобнее рассматривать импульсную переходную функцию как функцию не текущего времени  $t$  и момента воздействия  $\delta$ -импульса  $\tau$ , а как *функцию интервала времени*  $y$ , протекшего с момента воздействия  $\delta$ -импульса. При этом, очевидно,  $y = t - \tau$  (рис. 5.4, в). Обозначим при этом импульсную переходную функцию  $h_y(y, t - y) = h_y(y, t)$ . Для получения выходного напряжения необходимо проинтегрировать по  $y$  реакции четырехполюсника на  $\delta$ -импульсы, возникающие в моменты  $t - y$  (рис. 5.5):

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^t u_1(t - y) h_y(y, t - y) dy = \int_{-\infty}^t u_1(t - y) h_y(y, t) dy. \quad (5.22)$$

Импульсная переходная характеристика  $h_y(y, t)$  удовлетворяет очевидным условиям:

$$\begin{aligned} h_y(y, t) &= 0 \text{ при } y < 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} h_y(y, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Между двумя импульсными переходными характеристиками существуют почти очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} h_y(y, t) &= h_\tau(t, t - y), \\ h_\tau(t, \tau) &= h_y(t - \tau, t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Иногда удобно рассматривать импульсную переходную характеристику как функцию интервала времени  $z = t - \tau$ , протекшего с момента воздействия  $\delta$ -импульса  $\tau$ , и момента воздействия  $\delta$ -импульса  $\tau$ , т. е.  $h_z(z, \tau)$ . Из определений очевидно, что

$$\begin{aligned} h_z(z, \tau) &= h_y(z, z + \tau); \\ h_y(y, t) &= h_z(y, t - y). \end{aligned}$$

Все три рассмотренные характеристики можно выразить одна через другую. Будем описывать в основном четырехполюсники функцией  $h_y(y, t)$ , которая дает наиболее простые соотношения. При этом будем опускать индекс  $y$ .

**Пример.** Определить импульсную переходную характеристику для двух схем, состоящих из четырехполюсника с постоянными параметрами и умножителя на функцию  $f(t)$  (рис. 5.6, а и б).

Пусть  $h_{\Pi}(t)$  — импульсная переходная функция четырехполюсника с постоянными параметрами.

Рассмотрим схему (рис. 5.6, а). По определению  $h(y, t)$  есть реакция на  $\delta$ -импульс, возникший в момент  $t=\tau$  (см. рис. 5.5). Реакция  $h_{\Pi}(t)$  будет равна  $h_{\Pi}(t-\tau)=h_{\Pi}(y)$ . Эта реакция умножается на  $f(t)$ . Следовательно, реакция всей схемы на  $\delta$ -импульс, возникший в момент  $t=\tau$ ,

$$h(y, t) = h_{\Pi}(y) f(t).$$

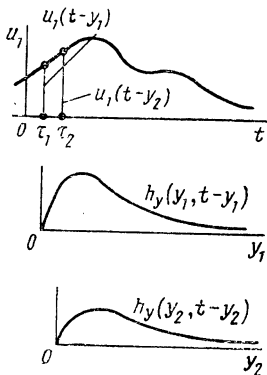


Рис. 5.5. К пояснению вычисления выходного напряжения четырехполюсника с переменными параметрами

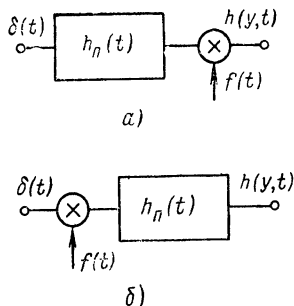


Рис. 5.6

Рассмотрим схему рис. 5.6, б. Возникший в момент  $t=\tau$   $\delta$ -импульс сначала умножается на  $f(t)$ , т. е. на  $f(\tau)$ . Затем он проходит через четырехполюсник с постоянными параметрами и с переходной характеристикой  $h_{\Pi}(y)$ . Таким образом,

$$h(y, t) = f(\tau) h_{\Pi}(y) = f(t-y) f_{\Pi}(y),$$

так как

$$\tau = t - y.$$

## § 5.8. О МЕТОДАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Из сказанного ранее ясно, что общего аналитического метода отыскания импульсных переходных характеристик четырехполюсников с переменными параметрами, пригодного для всех случаев, не существует, так как эта задача сводится к нахождению решений дифференциальных уравнений с переменными параметрами. Однако известен ряд частных методов, пригодных в отдельных случаях [10, 11].

Так, если четырехполюсник описывается дифференциальным уравнением (4.12)

$$\begin{aligned}
 a_n(t) \frac{d^{(n)}}{dt^n} u_{\text{ВЫХ}} \diamond a_{n-1}(t) \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} u_{\text{ВЫХ}} \diamond \dots \diamond a_0(t) u_{\text{ВЫХ}} = \\
 = b_m(t) \frac{d^{(m)}}{dt^m} u_{\text{ВХ}} \diamond b_{m-1}(t) \frac{d^{(m-1)}}{dt^{m-1}} u_{\text{ВХ}} \diamond \dots \diamond b_0(t) u_{\text{ВХ}}
 \end{aligned}$$

и если известны  $n$  линейно-независимых частных решений  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  однородного уравнения (с правой частью, равной нулю), то

$$h_{\tau}(t, \tau) = (-1)^m \frac{d^{(m)}}{dt^m} [g(t, \tau) b_m(\tau)] \diamond \dots \diamond g(t, \tau) b_0(\tau). \quad (5.25)$$

Здесь

$$g(t, \tau) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n(\tau) \Delta(\tau)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t), \varphi_2(t), & \dots, \varphi_n(t) \\ \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), & \dots, \varphi_n(\tau) \\ \varphi_1'(\tau), \varphi_2'(\tau), & \dots, \varphi_n'(\tau) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\tau), \varphi_2^{(n-2)}(\tau), & \dots, \varphi_n^{(n-2)}(\tau) \end{vmatrix}$$

где

$$\Delta(\tau) = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \dots, & \varphi_n \\ \varphi_1', & \varphi_2', & \dots, & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}, & \varphi_2^{(n-1)}, & \dots, & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

так называемый определитель Вронского заданного уравнения. Неуниверсальность данного способа объясняется тем, что далеко не всегда известно, как найти систему частных решений полученного неоднородного уравнения.

Задача отыскания импульсных переходных функций упрощается для систем, параметры которых изменяются *медленно*. В общем случае это означает, что коэффициенты дифференциального уравнения не успевают существенно измениться за интервал времени, в течение которого импульсная переходная функция существенно отлична от нуля (этот интервал часто называют памятью четырехполюсника). В случае таких «квазистационарных» систем применимы методы последовательного приближения, один из вариантов которого описан в § 4.4. Для этого, по определению импульсной переходной функции  $h_{\tau}(t, \tau)$ , необходимо в формулах § 4.4 положить  $u_0(t) = \delta(t - \tau)$  и найти приближенное значение выходного напряжения  $g(t, \tau)$ , после чего функцию  $h_{\tau}(t, \tau)$  находят по формуле (5.25).

Далее будет показано, что отыскание импульсной переходной характеристики можно заменить отысканием коэффициента передачи четырехполюсника. Последний же может быть приближенно определен методом последовательных приближений.

**§ 5.9. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА  
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. МЕТОД СПЕКТРАЛЬНЫХ  
ФУНКЦИЙ**

При описании четырехполосника с переменными параметрами с помощью импульсной переходной функции  $h_y(y, t)$  выходное напряжение в соответствии с (5.22)

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t-y) h_y(y, t-y) dy.$$

Пусть  $\dot{G}_{u_1}(\omega)$  есть спектральная функция входного напряжения. Тогда

$$u_1(t-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) e^{j\omega(t-y)} d\omega. \quad (5.26)$$

Подставим (5.26) в выражение для  $u_2(t)$  и изменим последовательность интегрирования по  $\omega$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) e^{j\omega(t-y)} d\omega \right] h_y(y, t) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_y(y, t) e^{-j\omega y} dy \right] e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Обозначим внутренний интеграл через  $\dot{K}(\omega, t)$ :

$$\dot{K}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_y(y, t) e^{-j\omega y} dy. \quad (5.28)$$

Тогда на основании (5.27) и (5.28)

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_1}(\omega) \dot{K}(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.29)$$

Обозначим

$$\dot{G}_{u_2}(\omega, t) = \dot{G}_{u_1}(\omega) \dot{K}(\omega, t). \quad (5.30)$$

Тогда

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{u_2}(\omega, t) e^{j\omega t} dt. \quad (5.31)$$

Выражение (5.28) — прямое преобразование Фурье по переменной  $y$  для импульсной переходной характеристики параметрического четырехполосника — есть коэффициент передачи.

Таким образом, коэффициент передачи параметрического четырехполюсника есть функция не только частоты, но и времени. Выражение (5.28) является обобщением выражения (5.6) для коэффициента передачи четырехполюсника с постоянными параметрами.

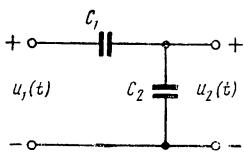
Так как в более явном виде  $h_y(y, t) = h_y(y, t-y)$ , а  $t-y = \tau$  (момент воздействия  $\delta$ -импульса), то

$$h_y(y, t) = h_y(y, \tau).$$

В случае линейной цепи с постоянными параметрами импульсная переходная характеристика не зависит от  $\tau$  и получаем  $h_y(y, \tau) = h_y(y) = h(t-\tau)$ , где  $y$  — время, протекшее с момента воздействия  $\delta$ -импульса.

Выражение (5.31) является прямым преобразованием для  $\hat{G}_{u_2}(\omega, t)$ . Однако  $\hat{G}_{u_2}(\omega, t)$  нельзя рассматривать как спектральную функцию выходного напряжения  $u_2(t)$ , так как она зависит не только от частоты, но и от времени. Таким образом, отыскание реакции на заданное воздействие для четырехполюсника с переменными параметрами состоит из следующих этапов:

Рис. 5.7



а) по формуле (1.16) определяется спектральная функция заданного входного воздействия  $u_1(t)$ ;

б) по формуле (5.28) определяется коэффициент передачи четырехполюсника;

в) по формуле (5.29) вычисляется реакция  $u_2(t)$ . Так же, как и в случае линейных систем с постоянными параметрами, вместо преобразований Фурье можно использовать преобразования Лапласа. При этом выходное напряжение

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p, t) U_1(p) e^{pt} dp. \quad (5.32)$$

Формула (5.32) есть обобщение формулы (5.7а), причем изображение коэффициента передачи является прямым преобразованием Лапласа для импульсной переходной характеристики:

$$K(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y, t) e^{-py} dy. \quad (5.33)$$

**Пример.** На четырехполюсник с изменяющимся во времени конденсатором  $C_2(t)$  (рис. 5.7) воздействует гармоническое колебание  $u_1(t) = U_1 \cos \omega_0 t$ . Определить выходное напряжение  $u_2(t)$ . Определим сначала импульсную переходную характеристику, составив уравнение Кирхгофа для контура:

Но

$$u_1(t) = \frac{1}{C_1} \int i(t) dt + u_2(t).$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} [C_2(t) u_2(t)].$$

Следовательно,

$$u_1(t) = \frac{C_2(t)}{C_1} u_2(t) + u_2(t).$$

Если  $u_1(t) = \delta(t - \tau)$ , то

$$u_2(t) = h_\tau(t, \tau) = \delta(t - \tau) \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)}.$$

Но  $t - \tau = y$ . Поэтому

$$h_\tau(t, t - y) = \delta(y) \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)}.$$

В соответствии с первой формулой (5.24)  $h_\tau(t, t - y) = h_y(y, t)$ .  
Значит,

$$h_y(y, t) = \delta(y) \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)}.$$

Коэффициент передачи четырехполюсника в соответствии с (5.28) есть преобразование Фурье для  $h_y(y)$ :

$$\dot{K}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_y(y, t) e^{-j\omega y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)} e^{-j\omega y} dy.$$

В соответствии с «фильтрующим» свойством  $\delta$ -функции

$$\dot{K}(\omega, t) = \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)} e^{-j\omega 0} = \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)}.$$

Определяем спектральную функцию входного воздействия. Согласно (1.72 а)

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \pi U_1 \delta(\omega - \omega_0) + \pi U_1 \delta(\omega + \omega_0).$$

Поэтому на основании (5.29)

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi U_1 \delta(\omega - \omega_0) + \pi U_1 \delta(\omega + \omega_0)] \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Используя «фильтрующее» действие  $\delta$ -функции, получаем

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)} \pi U_1 [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] = U_1 \frac{C_1}{C_1 \diamond C_2(t)} \cos \omega_0 t$$



При постоянном  $C_2$  имелся бы обычный делитель напряжения, уменьшающий амплитуду, но не изменяющий форму колебания. При переменном  $C_2$  выходное напряжение изменяется по сложному закону, вид которого зависит от вида функции  $C_2(t)$ .

В случае четырехполюсников с переменными параметрами коэффициент передачи целесообразно находить не как преобразование Фурье или Лапласа для импульсной переходной характеристики (которую сначала необходимо найти), а непосредственно из дифференциальных уравнений, составленных для определения импульсной переходной характеристики (см. § 5.10). После нахождения коэффициента передачи, обратное преобразование Фурье (5.31) или Лапласа (5.32) можно осуществить с помощью известных методов, считая время  $t$  постоянным параметром. Кроме того, применительно к параметрическим устройствам разработаны некоторые специальные методы [11].

**Пример.** Изображение коэффициента передачи четырехполюсника с переменными параметрами задано формулой

$$K(p, t) = \frac{p}{at + bt^2 + p}.$$

Определить выходное напряжение четырехполюсника при подаче на его вход напряжения  $u_1(t) = E \cdot 1(t)$ .

В соответствии с (5.32) находим  $K(p, t)U(p)$ . Так как  $U_1(p) = \frac{E}{p}$  (табл. 1.1, строка 1), то

$$K(p, t)U_1(p) = \frac{E}{at + bt^2 + p}.$$

Обратное преобразование совершаем, полагая  $at + bt^2 = \alpha$  и пользуясь третьей строкой табл. 1.1:

$$u_2(t) = Ee^{-(at+bt^2)t}.$$

### § 5.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Так как импульсная переходная характеристика четырехполюсника  $h_\tau(t, \tau)$  — это реакция на  $\delta$ -функцию, воздействующую в момент  $t - \tau$ , то она соответствует решению дифференциального уравнения (5.25) при  $u_1 = \delta(t - \tau)$ .

Следовательно,

$$a_n(t) \frac{d^{(n)}}{dt^n} h_\tau + a_{n-1}(t) \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} h_\tau + \dots + a_0(t) h_\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= b_m(t) \frac{d^{(m)}}{dt^m} \delta(t-\tau) + b_{m-1}(t) \frac{d^{(m-1)}}{dt^{m-1}} \delta(t-\tau) + \dots \\
 &\dots + b_0(t) \delta(t-\tau).
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Умножим обе части этого уравнения на  $e^{p\tau}$  и проинтегрируем по  $\tau$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Согласно определению (5.28) и связи  $h_y(y, t)$  с  $h_\tau(t, \tau)$  в соответствии с (5.24) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(t, \tau) e^{p\tau} d\tau = K(p, t) e^{pt}.$$

Кроме того, учтем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} b_m(t) \frac{d^{(m)}}{dt^m} \delta(t-\tau) e^{p\tau} d\tau = b_m(t) p^m e^{pt}.$$

Последнее обусловлено правилом вычисления преобразования Лапласа производной от функции (в данном случае  $\delta$ -функции), а также тем, что  $L[\delta(y)] = 1$ . После несложных алгебраических преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 &a_n(t) \frac{d^{(n)}}{dt^n} [K(p, t) e^{pt}] + a_{n-1}(t) \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} \times \\
 &\times [K(p, t) e^{pt}] + \dots + a_0(t) [K(p, t) e^{pt}] = \\
 &= [b_m(t) p^m + b_{m-1}(t) p^{m-1} + \dots + b_0(t)] e^{pt}.
 \end{aligned}$$

Взяв производные в левой части, сократив обе части уравнения на  $e^{pt}$  и обозначив

$$\begin{aligned}
 A(p, t) &= a_n(t) p^n + a_{n-1}(t) p^{n-1} + \dots + a_0(t), \\
 B(p, t) &= b_m(t) p^m + b_{m-1}(t) p^{m-1} + \dots + b_0(t),
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

получим дифференциальное уравнение относительно  $K(p, t)$  с комплексными переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{(n)}}{dt^n} K(p, t) \frac{d^{(n)}}{dt^n} A(p, t) + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} \times \\
 &\times K(p, t) \frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}} A(p, t) + \dots + \frac{dK(p, t)}{dt} \times \\
 &\times \frac{dA(p, t)}{dp} + K(p, t) A(p, t) = B(p, t).
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

В случае системы с *постоянными* параметрами все производные от  $K$  по  $t$  равны нулю,  $K(p, t)$ ,  $A(p, t)$  и  $B(p, t)$  не зависят от  $t$  и получаем соотношение

$$K(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (5.36a)$$

где  $A(p)$  и  $B(p)$  определяются по формулам (5.35) путем замены производных дифференциального уравнения соответствующими степенями  $p$ .

Точное решение уравнения (5.36) в общем случае не известно. Однако разработан ряд методов *приближенного решения*. Рассмотрим один из них — метод последовательных приближений. Уравнение (5.36) можно записать так:

$$K(p, t) A(p, t) = B(p, t) + \Delta(p, t), \quad (5.37)$$

где

$$\Delta(p, t) = - \left[ \frac{1}{n!} \frac{d^{(n)} A}{dp^n} \frac{d^{(n)} K}{dt^n} + \dots + \frac{dA}{dp} \frac{dK}{dt} \right]. \quad (5.38)$$

Будем искать решение в виде ряда слагаемых:

$$K(p, t) = K_0(p, t) + K_1(p, t) + K_2(p, t) + \dots, \quad (5.39)$$

в котором  $K_0(p, t)$  дает грубое («нулевое») приближение к  $K(p, t)$ , а последующие слагаемые все более его уточняют.

Если параметры системы изменяются достаточно медленно, так что производные  $\frac{d^{(n)}}{dt^n} K$  малы и добавочный член  $\Delta(p, t)$  близок к нулю, то из уравнения (5.37) получаем

$$K_0(p, t) A(p, t) = B(p, t),$$

и, следовательно,

$$K_0(p, t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)}. \quad (5.40)$$

Величины  $B$  и  $A$  заданы, если известно дифференциальное уравнение (см. равенства 5.34, 5.35).

Теперь можно найти уточняющее слагаемое  $K_1(p, t)$ , подставляя найденное  $K_0(p, t)$  в уравнение

$$K_1(p, t) A(p, t) = \Delta[K_0(p, t)], \quad (5.41)$$

где  $\Delta[K_0(p, t)]$  находится по формуле (5.38). Из этого уравнения легко определить  $K_1(p, t)$ . Далее эта операция повторяется. Для произвольного  $l$ -го члена ряда (5.39) получаем соотношение

$$K_l(p, t) A(p, t) = \Delta[K_{l-1}(p, t)]. \quad (5.42)$$

Чем медленнее изменяются параметры системы, тем быстрее сходится ряд и тем меньшее количество членов (5.39) необходимо вычислить для получения  $K(p, t)$  с желаемой точностью.

**Пример.** Определить коэффициент передачи интегрирующей  $rC$ -цепочки с переменной емкостью, изменяющейся по закону  $C(t) = at$ .

Дифференциальное уравнение такого четырехполюсника было получено в примере 2 § 4.2:

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{1 + r \frac{dC}{dt}}{rC(t)} u_2 = \frac{1}{rC(t)} u_1(t).$$

Из сопоставления этого уравнения с уравнением общего вида (5.34) и формулами (5.35) следует, что в данном случае

$$A(p, t) = p + \frac{1 + r \frac{dC(t)}{dt}}{rC(t)} = p + \frac{1 + ra}{rat},$$

$$B(p, t) = \frac{1}{rC(t)} = \frac{1}{rat}.$$

На основании (5.40) первое приближение для коэффициента передачи

$$K_0(t) = \frac{B(p, t)}{A(p, t)} = \frac{1}{ratp + ra + 1}.$$

Из сравнения заданного уравнения с уравнением общего вида (5.34) и формулой (5.38) ясно, что

$$\Delta(p, t) = - \frac{dA}{dp} \frac{dK}{dt}.$$

Но

$$\frac{dA}{dp} = 1,$$

$$\frac{dK}{dt} = - \frac{rap}{(ratp + ra + 1)^2}.$$

Следовательно, в соответствии с (5.41)

$$K_1(p, t) = \frac{\Delta[K_0(p, t)]}{A(p, t)} = \frac{r^2 a^2 t p}{(ratp + ra + 1)^3}.$$

Аналогичным образом можно найти последующие члены ряда (5.39).

Из выражений для  $K_0(p, t)$  и  $K_1(p, t)$  видно, что при  $t \rightarrow \infty$  коэффициент передачи стремится к нулю вследствие бесконечного возрастания емкости с ростом времени.

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

### § 6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Если на вход линейного четырехполюсника с постоянными или переменными параметрами подано случайное колебание, то колебание на выходе четырехполюсника также будет случайным. Но при этом статистические свойства выходного колебания в общем случае иные, чем свойства входного колебания.

В гл. II было показано, что основной характеристикой случайного процесса является  $n$ -мерная плотность вероятности. Зная, например, одномерную и двумерную плотности, можно вычислить среднее значение колебания, дисперсию, а также автокорреляционную функцию или энергетический спектр. Таким образом, если бы удалось найти  $n$ -мерный закон распределения выходного колебания по заданному  $n$ -мерному закону распределения входного колебания и свойствам четырехполюсника, то задача была бы полностью решена.

Однако на этом пути встречаются большие математические трудности. Поэтому расчет прохождения случайных колебаний через линейные четырехполюсники чаще всего сводится к определению автокорреляционной функции и энергетического спектра выходного колебания. Обычно можно сравнительно просто определить одномерный закон распределения и, следовательно, среднее значение колебания и дисперсию.

В дальнейшем будем рассматривать только стационарные процессы, обладающие эргодическим свойством.

### § 6.2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР И ДИСПЕРСИЯ (СРЕДНЯЯ МОЩНОСТЬ) СЛУЧАЙНОГО КОЛЕБАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть на вход линейного четырехполюсника с постоянными параметрами воздействует некоторая конкретная реализация  $x_k(t)$  случайного процесса. Тогда в соответствии с (5.2) реализация на выходе

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x_k(t - \tau) d\tau, \quad (6.1)$$

где  $h(t)$  — импульсная переходная функция четырехполюсника.

Если спектральные функции реализаций  $x_k(t)$  и  $y_k(t)$  есть соответственно  $\dot{G}_{x_k}(\omega)$  и  $\dot{G}_{y_k}(\omega)$ , то в соответствии с (5.8)

$$\dot{G}_{y_k}(\omega) = \dot{K}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega), \quad (6.2)$$

где  $\dot{K}(\omega)$  — коэффициент передачи четырехполюсника.

По определению (см. равенство 2.73) энергетический спектр выходного колебания

$$N_y(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_p} G_{y_k}^2(\omega), \quad (6.3)$$

где  $T_p$  — длительность реализации. Подставляя (6.2) в (6.3), получаем

$$N_y(\omega) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_p} [K(\omega) G_{x_k}(\omega)]^2 = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_p} G_{x_k}^2 K^2(\omega).$$

Но  $K(\omega)$  не зависит от  $T_p$  и может быть вынесен за знак предела. Предел же после этого по определению есть энергетический спектр входного процесса. Следовательно,

$$N_y(\omega) = K^2(\omega) N_x(\omega). \quad (6.4)$$

Из соотношения (6.4) следует, что энергетический спектр колебания на выходе четырехполюсника определяется квадратом модуля коэффициента передачи и не зависит от фазо-частотной характеристики.

Средняя мощность колебания на выходе четырехполюсника

$$P_{\text{ср.вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} N_y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) N_x(\omega) d\omega. \quad (6.5)$$

Если колебание на входе имеет [энергетический спектр, не зависящий от частоты, так, что  $N_x(\omega) = N_0$  (так называемый белый шум), то

$$P_{\text{ср.вых}} = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega.$$

Модуль коэффициента передачи является всегда четной функцией частоты, так что  $K(\omega) = K(-\omega)$ . Поэтому

$$P_{\text{ср.вых}} = 2N_0 \int_0^{\infty} K^2(\omega) d\omega. \quad (6.6)$$

Если коэффициент передачи имеет максимальное значение  $K_0$  на некоторой частоте  $\omega_0$ , то область частот  $(2\Delta\omega)_{\text{эфф}}$  в окрестности  $\omega_0$ , определяемую из соотношения

$$(2\Delta\omega)_{\text{эфф}} = \int_0^{\infty} \left[ \frac{K(\omega)}{K_0} \right]^2 d\omega,$$

называют эффективной полосой пропускания четырехполосника. Она равна основанию прямоугольника, площадь которого равна площади под кривой  $K^2(\omega)$  в области  $\omega > 0$ , а высота —  $K_0^2$  (рис. 6.1). Поэтому (6.6) можно записать так:

$$P_{\text{ср.вых}} = 2N_0 K_0^2 (2\Delta\omega)_{\text{эфф}}. \quad (6.7)$$

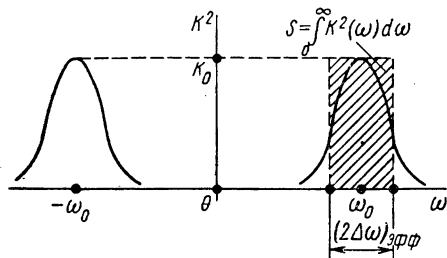


Рис. 6.1. Определение эффективной полосы пропускания

Иногда вместо двустороннего энергетического спектра, определенного и при положительных и при отрицательных частотах, при расчетах используют односторонний спектр  $N_{0 \text{ одн}}$ , равный нулю при  $\omega < 0$ . Для сохранения реальной средней мощности колебания необходимо полагать, что

$$N_{0 \text{ одн}} = 2N_0.$$

**Пример.** Определить среднюю мощность колебания на выходе идеального фильтра с модулем коэффициента передачи

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0, & \omega_{\text{н}} \leq \omega \leq \omega_{\text{в}}, \quad -\omega_{\text{в}} < \omega < -\omega_{\text{н}}; \\ 0 & \text{при других } \omega \end{cases}$$

под действием «белого шума» со спектральной плотностью (энергетическим спектром)  $N_0$ .

В данном случае  $N_x(\omega) = N_0$ . В соответствии с (6.5)

$$\begin{aligned} P_{\text{ср.вых}} &= \int_{-\omega_{\text{в}}}^{-\omega_{\text{н}}} K_0^2 N_0 d\omega + \int_{\omega_{\text{н}}}^{\omega_{\text{в}}} K_0^2 N_0 d\omega = 2K_0^2 N_0 (\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}) = \\ &= 2K_0^2 N_0 (2\Delta\omega)_{\text{эфф}}. \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с формулой (6.7), так как в данном случае разность  $\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}}$  равна эффективной полосе пропускания четырехполосника.

**§ 6.3. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО  
КОЛЕБАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА  
С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Зная энергетический спектр, автокорреляционную функцию можно определить по соотношению (2.75):

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} N_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) N_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.8)$$

Эту формулу можно получить и непосредственно, исходя из определения автокорреляционной функции

$$R_y(\tau) = \overline{y_k(t) y_k(t + \tau)}. \quad (6.9)$$

На основании метода спектральных функций

$$y_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.10)$$

По теореме о запаздывании колебания (см. равенство 1.33)

$$y_k(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega) e^{j\omega t} e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.10a)$$

Обозначая переменную интегрирования в (6.10a) через  $\omega'$  и подставляя (6.10) и (6.10a) в (6.9), получаем

$$R_y(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega) \dot{K}(\omega') \overline{\dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega')} \times \\ \times e^{j\omega t} e^{j\omega'(t+\tau)} d\omega d\omega'. \quad (6.11)$$

Усреднение в правой части должно производиться по реализациям  $x_k$ , т. е. по случайным спектральным функциям  $\dot{G}_{x_k}(\omega)$ . Найдём результат этого усреднения. По определению

$$\dot{G}_{x_k}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$\dot{G}_{x_k}(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega' t} dt.$$

Следовательно,

$$\overline{\dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega')} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{-j\omega' t} dt}.$$



Заменим произведение интегралов двукратным интегралом:

$$\overline{\dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega')} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_k(t) x_k(t')} e^{-j\omega t} e^{-j\omega' t'} dt dt'.$$

Произведем замену переменной  $t'$  по формуле  $t' = t - \tau$ .

Тогда

$$\dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_k(t) x_k(t - \tau)} e^{-j(\omega + \omega')t} e^{j\omega' \tau} dt d\tau.$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\overline{\dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega')} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega + \omega')t} dt \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{j\omega' \tau} d\tau.$$

Но интеграл по  $\tau$  в соответствии с (2.74) есть  $2\pi N_x(\omega')$ . Интеграл же по  $t$  есть по (1.72)  $2\pi \delta(\omega + \omega')$ . Следовательно,

$$\overline{\dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega')} = 4\pi^2 N_x(\omega') \delta(\omega + \omega'), \quad (6.12)$$

где  $N_x(\omega)$  — энергетический спектр входного процесса.

Подставляя (6.12) в (6.11) и упрощая, находим

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega') e^{j\omega'(t+\tau)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} 4\pi^2 N_x(\omega) \delta(\omega + \omega') d\omega \right\} d\omega'.$$

Однако на основании «фильтрующего» свойства  $\delta$ -функции внутренний интеграл равен  $\dot{K}(-\omega') e^{j\omega' t} N_x(-\omega')$ . Следовательно,

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega') \dot{K}(-\omega) N_x(-\omega') e^{-j\omega' \tau} d\omega'. \quad (6.12a)$$

Заменив переменную  $\omega'$  на  $-\omega$  и учитывая, что  $\dot{K}(\omega) \dot{K}(-\omega) = K^2(\omega)$ , получаем

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) N_x(\omega) e^{j\omega \tau} d\omega. \quad (6.13)$$

Это выражение совпадает с равенством (6.8).

Так как  $R_y(0)$  есть средняя мощность (дисперсия) случайного процесса, то

$$R_y(0) = P_{\text{ср.вых}} = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) N_x(\omega) d\omega, \quad (6.14)$$

что совпадает с (6.5)

Пример. Определить автокорреляционную функцию и среднюю мощность выходного колебания, полученного в примере § 6.2.

В соответствии с (6.13)

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) N_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\omega_B}^{-\omega_H} K_0^2 N_0 e^{j\omega\tau} d\omega + \\ &+ \int_{\omega_H}^{\omega_B} K_0^2 N_0 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{2K_0^2 N_0}{\tau} (\sin \omega_B \tau - \sin \omega_H \tau) = \\ &= 2K_0^2 N_0 (\omega_B - \omega_H) \frac{\sin \frac{(\omega_B - \omega_H)\tau}{2}}{\frac{(\omega_B - \omega_H)\tau}{2}} \cos \omega_{\text{ср}} \tau. \end{aligned}$$

При  $\tau = 0$  получаем среднюю мощность колебания на выходе

$$R_y(0) = P_{\text{ср.вых}} = 2(\omega_B - \omega_H) K_0^2 N_0.$$

Это совпадает с результатом вычисления непосредственно через энергетический спектр.

#### § 6.4. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО КОЛЕБАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Четырехполюсник с переменными параметрами описывается коэффициентом передачи  $K(\omega, t)$ , зависящим от времени. В соответствии с (5.29) реализация случайного процесса на выходе

$$y_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{xk}(\omega) \dot{K}(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.15)$$

Колебание на выходе в момент  $t + \tau$

$$y_k(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{xk}(\omega) \dot{K}(\omega, t + \tau) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega. \quad (6.16)$$

В соответствии с главой II, процесс на выходе будет не стационарным и автокорреляционная функция выходного колебания будет зависеть не только от сдвига  $\tau$ , но и от выбранного момента времени  $t$ :

$$\overline{y_k(t) y_k(t + \tau)} = R_y(\tau, t).$$

Обозначая переменную интегрирования в (6.16) через  $\omega'$ , подставляя (6.15) и (6.16) в выражение для  $R_y(\tau, t)$ , получим, как и в § 6.3

$$R_y(\tau, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{x_k}(\omega) \dot{G}_{x_k}(\omega') \dot{K}(\omega, t) \dot{K}(\omega', t) e^{i\omega t} e^{i\omega'(t+\tau)} d\omega d\omega'. \quad (6.17)$$

Предположим далее, что коэффициент передачи также является случайным, т. е. введем представление об ансамбле четырехполюсников. В этом случае в выражении (6.17) усреднение нужно производить не только по спектральным функциям (различным для различных реализаций), но и по коэффициентам передачи, которые также будут различными для различных реализаций.

Усреднение по спектральным функциям производим так же, как и в случае четырехполюсника с постоянными параметрами. После этого усреднения получаем выражение, аналогичное (6.12 а):

$$R_y(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega, t) \dot{K}(-\omega, t + \tau) N_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.18)$$

Однако необходимо еще произвести усреднение по коэффициентам передачи. Введем обозначение

$$r_{\dot{K}}(\tau, \omega) = \overline{\dot{K}(\omega, t) \dot{K}(-\omega, t + \tau)}. \quad (6.19)$$

Величину (6.19) называют функцией корреляции четырехполюсника, так как она есть усредненное значение произведения *изменяющегося* коэффициента передачи в два разных момента времени, смещенных на  $\tau$ . Если четырехполюсник не изменяет параметры во времени, то

$$r_{\dot{K}}(\tau, \omega) = \dot{K}(\omega) \dot{K}(-\omega) = K^2(\omega), \quad (6.19a)$$

т. е. представляет собой квадрат модуля коэффициента передачи и не зависит от времени.

Выражение для  $R_y(\tau)$  можно теперь записать так:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\dot{K}}(\tau, \omega) N_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (6.20)$$

и рассматривать его как обратное преобразование Фурье для величины  $2\pi r_{\dot{K}}(\tau, \omega) N_x(\omega)$ :

$$R_y(\tau) = F^{-1} [2\pi r_{\dot{K}}(\tau, \omega) N_x(\omega)] \quad (6.21)$$

(множитель  $2\pi$  необходимо добавлять для полного соответствия формуле 1.21).

Энергетический спектр выходного процесса определяется как прямое преобразование Фурье для автокорреляционной функции:

$$N_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.22)$$

Если коэффициент передачи не зависит от времени, на основании (6.19) и (6.20)

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) N_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

что совпадает с (6.13). Отсюда на основании (6.8)

$$N_y(\omega) = K^2(\omega) N_x(\omega),$$

т. е. тоже, что было получено ранее для четырехполюсника с постоянными параметрами.

Пример. На усилитель с переменным коэффициентом передачи  $\dot{K}(\omega, t) = K_0(1 + M \cos \omega_0 t) = K(t)$  воздействует случайное колебание с автокорреляционной функцией  $R_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ . Определить автокорреляционную функцию и энергетический спектр выходного колебания.

В данном случае коэффициент передачи, а следовательно, и  $r_{\dot{K}}(\omega, \tau)$  не зависят от частоты. Из соотношения (6.21)

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= F^{-1} [2\pi r_{\dot{K}}(\tau, \omega) N_x(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\dot{K}}(\tau) N_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= r_{\dot{K}}(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} N_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = r_{\dot{K}}(\tau) R_x(\tau), \end{aligned}$$

так как интеграл в последнем выражении есть автокорреляционная функция входного процесса. Таким образом, для четырехполюсника, коэффициент передачи которого не зависит от частоты (по крайней мере в диапазоне частот входного воздействия), автокорреляционная функция выходного колебания равна произведению автокорреляционных функций входного воздействия и корреляционной функции четырехполюсника. В данном случае

$$r_{\dot{K}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \dot{K}(t) \dot{K}(t + \tau) dt = K_0^2 \left( 1 + \frac{M^2}{2} \cos \omega_0 \tau \right).$$

Следовательно,

$$R_y(\tau) = K_0^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( 1 + \frac{M^2}{2} \cos \omega_0 \tau \right).$$

Энергетический спектр находим в соответствии с формулой (6.22):

$$\begin{aligned} N_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{K_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ e^{-\alpha|\tau|} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2}{2} e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{K_0^2}{2\pi} \left[ \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{M^2}{2} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

### § 6.5. О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОГО КОЛЕБАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Рассмотрим возможность определения одномерного закона распределения выходного колебания  $y(t)$  под воздействием входного случайного колебания  $x(t)$ . В соответствии с ранее изложенным

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.23)$$

Будем рассматривать интеграл как предел суммы. Тогда

$$y(t) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau) h(t - k\Delta\tau) \Delta\tau, \quad (6.23a)$$

где  $\Delta\tau$  — малый интервал времени, в течение которого подынтегральное выражение почти не изменяется.

Пусть входное колебание имеет нормальный закон распределения. Тогда равенство (6.23a) характеризует выходное колебание как линейную комбинацию совокупности нормально-распределенных случайных величин  $x(k\Delta\tau)$ , домноженных на неслучайные величины  $h(t - k\Delta\tau)$ . В теории вероятностей доказывается, что такая

сумма имеет также нормальное распределение со средним значением и дисперсией, которые можно определить. Действительно,

$$E[y(t)] = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right\}.$$

Меняя порядок операций (в курсах математики доказывается, что это возможно), получим

$$E[y(t)] = E[x(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) d\tau = E[x(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau.$$

Таким образом, среднее значение процесса после прохождения через четырехполосник изменится пропорционально площади импульсной переходной характеристики.

Дисперсия выходного колебания определяется по автокорреляционной функции, взятой при аргументе нуль. Знание автокорреляционной функции выходного нормального процесса позволяет, как было показано ранее (см. § 2.7), записать также  $n$ -мерный закон распределения выходного процесса.

Если входное колебание имеет отличный от нормального закон распределения, то в общем случае определить закон распределения выходного колебания, даже одномерный, нельзя (кроме некоторых частных случаев, когда законы распределения входного колебания являются функционалами нормального распределения). В общем случае можно лишь определить моменты различных порядков, которые определяют наиболее часто встречающиеся на практике распределения.

Если эффективная длительность импульсной переходной характеристики четырехполосника значительно больше ширины автокорреляционной функции входного колебания, то, как видно из (6.23а), выходной процесс будет представлять собой сумму большого количества случайных величин  $x(k\Delta\tau)h(t-k\Delta\tau)$ .

В соответствии с центральной предельной теоремой закон распределения выходного процесса, как суммы большого числа соизмеримых слагаемых, будет стремиться к нормальному. Это явление *нормализации* выходного процесса происходит в узкополосных (по сравнению с шириной энергетического спектра входного процесса) четырехполосниках.

## ВОЗДЕЙСТВИЕ РЕГУЛЯРНЫХ И СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЦЕПЕЙ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Элементы радиотехнических устройств, выходной эффект которых связан с величиной воздействия нелинейной зависимостью, называют нелинейными. Как и линейные, нелинейные элементы могут быть активными\* (безынерционными), реактивными (инерционными), а также комплексными.

Активными нелинейными элементами являются, например, электровакуумные приборы, работающие в области очень высоких частот. Их вольтамперные характеристики являются нелинейными зависимостями. Аналогичные свойства присущи также полупроводниковым приборам — диодам и триодам. Отнесение указанных элементов к активным является идеализацией, которую часто допускают. (При определенных режимах работы и достаточно больших скоростях изменения воздействий эти элементы можно отнести к реактивным или комплексным.)

Если под входным, или *управляющим*, воздействием понимать в общем случае некоторую физическую величину  $x$ , а под *выходным эффектом* —  $y$ , то зависимость  $y=f(x)$ , т. е. *характеристика* активного нелинейного элемента, будет полностью определять его свойства. Величины  $x$  и  $y$  могут выражать значения токов и напряжений.

Реактивными нелинейными элементами являются, например, катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником и запертый полупроводниковый диод, обладающий емкостью. Нелинейность индуктивности проявляется в зависимости ее величины от протекающего тока, а нелинейность емкости — в ее зависимости от приложенного напряжения. Дифференциальные соотношения, связывающие токи и напряжения таких реактивных элемен-

---

\* Используемый здесь термин «активный» не следует смешивать с понятием активного элемента, содержащего источники энергии.

тов, нелинейны. Так, для индуктивности справедливо следующее соотношение:

$$\Psi = L(i) i,$$

где  $\Psi$  — магнитное потокосцепление;

$L(i)$  — индуктивность, зависящая от протекающего тока  $i$ .

Напряжение на катушке индуктивности при изменении протекающего тока

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L(i) \left[ 1 + i \frac{1}{L(i)} \cdot \frac{dL(i)}{di} \right] \frac{di}{dt}.$$

Структура этого соотношения отражает нелинейность связи мгновенных значений напряжения и тока.

Аналогичная связь возникает между током и напряжением на конденсаторе емкостью  $C(u)$ :

$$i = \frac{dq}{dt} = C(u) \left[ 1 + u \frac{1}{C(u)} \cdot \frac{dC(u)}{du} \right] \cdot \frac{du}{dt}.$$

При заданных управляющих колебаниях и характеристике нелинейного элемента найти функцию, описывающую выходной эффект, сравнительно просто. В том же случае, когда нелинейные элементы входят в цепь, которая кроме них содержит линейные активные и реактивные элементы, дифференциальные уравнения оказываются нелинейными, не имеющими регулярных способов решения. В большинстве случаев решения осуществляют в приближенной аналитической форме либо проводят численное интегрирование уравнений.

В данной книге рассматриваются способы анализа *активных нелинейных элементов*, находящихся под воздействием регулярных или случайных колебаний. Исследуется преобразование колебаний при их прохождении через такие элементы.

Исходную зависимость  $y=f(x)$  обычно снимают экспериментально. Затем ее аппроксимируют (приблизленно выражают аналитически) одним из известных методов [2]. Обычно нелинейность зависимости  $y=f(x)$  сказывается тем сильнее, чем больше диапазон изменения входного воздействия  $x$ . В пределах достаточно малого интервала изменений  $x$  любая реальная нелинейная характеристика  $y=f(x)$  становится приблизительно линейной. Таким образом, при малой величине изменения входного воздействия задача о нелинейном преобразовании колебаний превращается в линейную.



## Глава VII

### ВОЗДЕЙСТВИЕ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

#### § 7.1. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЯ

Как было показано в гл. I, регулярное колебание обычно представляют в аналитическом виде, т. е. записывают мгновенные значения как функцию времени. Располагая такой зависимостью, можно получить спектральную функцию или спектр колебания, его комплексное представление и др.

Рассмотрим изменение аналитической функции времени, характеризующей колебание, при его прохождении через нелинейный элемент.

Будем считать, что на входе нелинейного элемента, описываемого характеристикой  $y=f(x)$ , действует колебание  $x=x(t)$ . (Под входным, или управляющим, воздействием, равно как и под выходным эффектом, можно понимать как напряжение, так и ток, в зависимости от конкретной задачи.) Тогда выходной эффект можно представить функцией

$$y(t) = f[x(t)]. \quad (7.1)$$

Зависимость  $y=f(x)$ , приближенно описывающую реальную характеристику нелинейного элемента, называют ее аппроксимацией. Существует несколько способов аппроксимации нелинейных зависимостей\*. Наиболее распространенными являются *полигональная* аппроксимация, т. е. аппроксимация отрезками прямых, аппроксимация *степенным рядом* и аппроксимация *показательной функцией*. При расчетах применяют такую аппроксимацию, которая обеспечивает лучшее приближение к заданной характеристике и наиболее удобные математические преобразования.

Рассмотрим полигональную аппроксимацию нелинейной характеристики. Пусть задана экспериментально полученная характеристика электронного прибора  $i=f(u)$ , изображенная на рис. 7.1 толстой линией. Диапазон возможных изменений  $u$  ограничен значениями  $U'$  и  $U''$ . Тогда в пределах указанных значений исходная характеристика может быть приближенно заменена отрезками прямых, изображенных на том же рисунке тонкими линиями. Отклонение аппроксимирующей зависимости от реальной *вне* интервала  $[U', U'']$  существенного значения не имеет. Существенным может оказаться отклонение *внутри* заданного интервала. В таком случае

---

\* Подробно этот вопрос можно изучить, например по [21].

следует прибегать к аппроксимации большим числом прямолинейных отрезков или выбирать другую аппроксимирующую функцию. При выбранных трех отрезках прямых аналитическое выражение аппроксимирующей функции будет следующим:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq U_1; \\ S(u - U_1) & \text{при } U_1 \leq u \leq U_2; \\ I_m & \text{при } u \geq U_2. \end{cases} \quad (7.2)$$

Здесь коэффициент  $S$  — крутизна наклонного участка характеристики, связан с параметрами аппроксимирующей функции  $U_1$ ,  $U_2$  и  $I_m$  простым соотношением

$$S = \frac{I_m}{U_2 - U_1}.$$

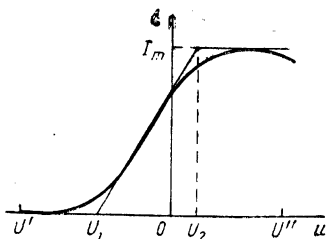


Рис. 7.1. Полигональная аппроксимация характеристики нелинейного элемента

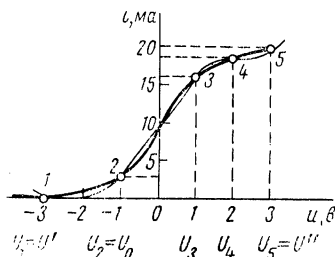


Рис. 7.2. К аппроксимации характеристики нелинейного элемента полиномом

Рассмотрим аппроксимацию степенным рядом. Допустим вначале, что некоторое аналитическое выражение аппроксимирующей функции  $i = f(u)$  известно. Тогда эта функция может быть представлена рядом Тейлора

$$i = f(U_0) + \frac{f'(U_0)}{1!} (u - U_0) + \frac{f''(U_0)}{2!} (u - U_0)^2 + \frac{f'''(U_0)}{3!} (u - U_0)^3 + \dots, \quad (7.3)$$

где  $U_0$  — значение напряжения  $u$ , относительно которого ведется разложение в ряд и которое называют рабочей точкой. В отдельных случаях может быть принято  $U_0 = 0$ .

Исходная характеристика  $f(u)$  бывает задана графически (рис. 7.2). Аппроксимацию осуществляют укороченным степенным рядом (полиномом), ограничивая его обычно второй-пятой степенью. Для отыскания неизвестных коэффициентов ряда необходи-

мо задать диапазон  $(U', U'')$  возможных значений  $u$  и положение рабочей точки  $U_0$  в этом диапазоне. Неизвестными параметрами полинома степени  $n$  являются  $n$  коэффициентов при степенях  $u - U_0$  и  $f(U_0)$ , т. е.  $n + 1$  величина. Для их отыскания на заданной характеристике намечается  $n + 1$  точка со своими координатами (рис. 7.2). Обычно одна из них для удобства расчетов выбирается совпадающей с рабочей точкой, имеющей координаты  $U_0, f(U_0)$ , еще две точки выбираются при  $u = U'$  и  $u = U''$ . Остальные располагают произвольно, однако с учетом того, какой участок характеристики важно аппроксимировать наиболее точно. Далее составляются  $n + 1$  уравнение со стольким же количеством неизвестных коэффициентов. На рис. 7.2 намечено 5 точек, что позволяет определить полином 4-й степени. Система уравнений, построенная по (7.3), принимает вид:

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= a_0 + a_1(U_1 - U_0) + a_2(U_1 - U_0)^2 + \\
 &\quad + a_3(U_1 - U_0)^3 + a_4(U_1 - U_0)^4; \\
 I_2 &= a_0 + a_1(U_2 - U_0) + a_2(U_2 - U_0)^2 + \\
 &\quad + a_3(U_2 - U_0)^3 + a_4(U_2 - U_0)^4; \\
 I_3 &= a_0 + a_1(U_3 - U_0) + a_2(U_3 - U_0)^2 + \\
 &\quad + a_3(U_3 - U_0)^3 + a_4(U_3 - U_0)^4; \\
 I_4 &= a_0 + a_1(U_4 - U_0) + a_2(U_4 - U_0)^2 + \\
 &\quad + a_3(U_4 - U_0)^3 + a_4(U_4 - U_0)^4; \\
 I_5 &= a_0 + a_1(U_5 - U_0) + a_2(U_5 - U_0)^2 + \\
 &\quad + a_3(U_5 - U_0)^3 + a_4(U_5 - U_0)^4.
 \end{aligned} \right\} (7.4)$$

В системе (7.4) введены обозначения  $a_0 = f(U_0)$  и  $a_k = \frac{f^{(k)}(U_0)}{k!}$ , выражающие искомые параметры аппроксимации. Решением этой системы они могут быть найдены, после чего аппроксимирующая функция примет следующий вид:

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3 + a_4(u - U_0)^4.$$

На рис. 7.2 тонкой линией показан возможный ход аппроксимирующей функции. Число членов аппроксимирующего многочлена, т. е. его высшая степень при заданном диапазоне управляющего колебания, зависит от требуемой точности аппроксимации. Чем выше требуемая точность и шире диапазон, тем большее число членов полинома должно быть учтено при аппроксимации. С уменьшением диапазона значение высших степеней полинома убывает.

В пределе, при очень малых входных колебаниях, аппроксимация нелинейного элемента становится линейной:

$$i = f(U_0) + \frac{f'(U_0)}{1!} (u - U_0) = a_0 + a_1(u - U_0). \quad (7.5)$$

Если же по существу задачи требуется учитывать нелинейность характеристики даже при малых управляющих воздействиях, то эта нелинейность с достаточной точностью может характеризоваться первым нелинейным членом, например,

$$\Delta i = \frac{f''(U_0)}{2!} (u - U_0)^2 = a_2(u - U_0)^2.$$

Критерием удовлетворительности аппроксимации нелинейного элемента является совпадение (с заданной точностью) результатов теоретических расчетов с экспериментом. В новых задачах приемлемая аппроксимация обычно может быть найдена лишь путем последовательных приближений.

Пользуясь той или иной принятой аппроксимацией реальной характеристики нелинейного элемента, можно при заданном входном воздействии найти аналитическое выражение, описывающее выходной эффект. Рассмотрим вначале в качестве входного воздействия импульсное колебание  $x_1(t)$ , действующее совместно с некоторой постоянной составляющей  $X_0$ , определяющей положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента:

$$x(t) = x_1(t) + X_0.$$

Тогда  $y = f[x_1(t) + X_0]$  является колебанием, полученным в результате преобразования входного колебания нелинейным элементом.

Пример 1. Характеристика электронной лампы  $i = f(u)$  задана кусочно-ломаной (полигональной) аппроксимацией:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq U_n; \\ S(u - U_n) & \text{при } u \geq U_n, \end{cases}$$

где управляющее колебание  $u = u(t) = u_1(t) + U_0$ .

Мгновенное значение тока через элемент с такой характеристикой выразится следующим образом:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } u_1(t) + U_0 \leq U_n \text{ или } u_1(t) \leq U_n - U_0; \\ S[u_1(t) + U_0 - U_n] & \text{при } u_1(t) \geq U_n - U_0. \end{cases}$$

На рис. 7.3 показаны зависимости  $i(t)$ , полученные в результате нелинейного преобразования импульсов экспоненциальной формы

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_1 e^{-\alpha t} & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

для двух частных случаев: а)  $u_1(t) > U_H - U_0$  во все моменты времени (рис. 7.3, а) и б)  $u_1(t)$  принимает с течением времени значения как большие, так и меньшие  $U_H - U_0$  (рис. 7.3, б). Эти случаи различаются при заданной форме импульса и аппроксимации характеристики положением рабочей точки  $U_0$ .

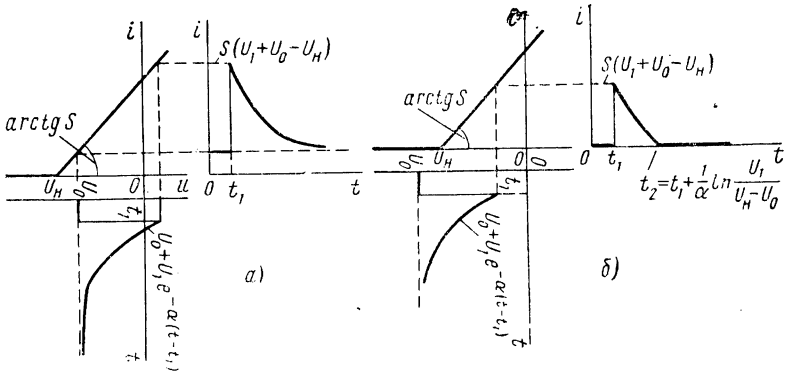


Рис. 7.3

В первом случае имеет место пропорциональная зависимость, ибо все изменения входного напряжения укладываются на линейном участке характеристики, т. е.

$$i(t) = S [U_1 e^{-\alpha t} + U_0 - U_H] \text{ при любых } t.$$

В этом случае в целом нелинейный элемент ведет себя, как линейный.

Во втором случае пропорциональность имеется лишь при  $u_1(t) \gg U_H - U_0$ , т. е.

$$i(t) = \begin{cases} S [U_1 e^{-\alpha(t-t_1)} + U_0 - U_H] & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 = t_1 + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{U_1}{U_H - U_0}; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Пример 2. Аппроксимация характеристики задана полиномом третьей степени:

$$i = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + a_3(u - U_0)^3.$$

На входе нелинейного элемента действует напряжение

$$u = u_1(t) + U_0,$$

переменная составляющая которого  $u_1(t)$  является импульсом треугольной формы:

$$u_1(t) = \begin{cases} bt & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Под действием такого напряжения потечет ток:

$$i(t) = a_0 + a_1bt + a_2(bt)^2 + a_3(bt)^3 \text{ при } 0 \leq t \leq T;$$

$$i(t) = a_0 \text{ при других } t.$$

При заданной аппроксимации характеристики, наряду с составляющей  $a_1bt$ , пропорциональной входному воздействию, в составе тока появляются два слагаемых, являющихся продуктом нелинейности характеристики. Вид характеристики, воздействующее напряжение и ток через нелинейное сопротивление изображены на рис. 7.4.

В заключение заметим, что величина постоянной составляющей  $U_0$ , определяющей положение рабочей точки, может и не совпадать со значением напряжения, относительно которого ведется разложение характеристики в степенной ряд. На практике, однако, удобнее пользоваться характеристикой, представленной разложением относительно рабочей точки, как это сделано в данном примере.

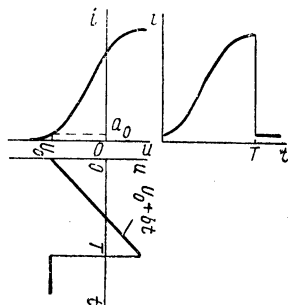


Рис. 7.4

## § 7.2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ

Нелинейный элемент преобразует форму колебания, в результате чего выходной эффект обладает иными спектральными свойствами. В соответствии с формулой (1.16) спектральная функция входного воздействия имеет вид

$$\dot{G}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7.6)$$

Спектральная функция выходного эффекта

$$\dot{G}_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f[x(t)] e^{-j\omega t} dt, \quad (7.7)$$

т. е. определяется аналитическим выражением функции, аппроксимирующей характеристику нелинейного элемента.

Соотношения (7.6) и (7.7) отражают нелинейное преобразование спектральной функции колебания при его прохождении через нелинейный элемент. Рассмотрим примеры преобразования спектральной функции.

Пример 1. Сравнить спектральные функции управляющего напряжения  $u_1(t)$  и тока, протекающего через нелинейный элемент,

временные зависимости которых приведены в примере на стр. 215. По определению

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \int_{t_1}^{\infty} U_1 e^{-\alpha(t-t_1)} e^{-j\omega t} dt.$$

Спектральная функция экспоненциального импульса с учетом запаздывания на  $t_1$  будет иметь вид

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = U_1 \frac{e^{-j\omega t_1}}{\alpha + j\omega}.$$

Спектральная функция выходного колебания (тока)

$$\dot{G}_i(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} S [U_1 e^{-\alpha(t-t_1)} + U_0 - U_H] e^{-j\omega t} dt,$$

или

$$\dot{G}_i(\omega) = e^{-j\omega t_1} \int_0^T S [U_1 e^{-\alpha t} + U_0 - U_H] e^{-j\omega t} dt,$$

где

$$T = t_2 - t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{U_1}{U_H - U_0}.$$

В результате интегрирования и несложных преобразований получим

$$\dot{G}_i(\omega) = \frac{S U_1 e^{-j\omega t_1}}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{ae^{-(\alpha+j\omega)T} - (\alpha + j\omega) e^{-\alpha T} + j\omega}{j\omega}.$$

Спектральные функции  $\dot{G}_i(\omega)$  с  $\dot{G}_{u_1}(\omega)$  отличаются зависящим от частоты множителем

$$\frac{ae^{-(\alpha+j\omega)T} - (\alpha + j\omega) e^{-\alpha T} + j\omega}{j\omega}.$$

Новая спектральная функция, как и следовало ожидать, не связана простой пропорциональностью с исходной, а является результатом ее нелинейного преобразования.

**Пример 2.** Провести сравнение спектральных функций управляющего и выходного колебаний, рассмотренных в примере 2 на стр. 216.

Спектральная функция управляющего колебания

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T b t e^{-j\omega t} dt.$$

Функцию  $bt$ , заданную на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , удобно представить суммой (рис. 7.5):

$$u_1(t) = bt \cdot 1(t) - b(t-T) \cdot 1(t-T) - bT \cdot 1(t-T).$$

Тогда, пользуясь табл. 1.1 спектральных функций, можно записать

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \frac{b}{(j\omega)^2} (1 - e^{-j\omega T}) - \frac{bT}{j\omega} e^{-j\omega T}.$$

Далее найдем спектральную функцию тока:

$$i(t) = a_0 + a_1 bt + a_2 (bt)^2 + a_3 (bt)^3 \text{ при } 0 \leq t \leq T.$$

При вычислении  $G_i(\omega)$  постоянную составляющую не учитываем. Тогда

$$\dot{G}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^T [a_1 bt + a_2 (bt)^2 + a_3 (bt)^3] e^{-j\omega t} dt.$$

Так как выходное колебание  $i(t)$  является суммой составляющих, то и спектральную функцию получим в виде суммы:

$$\dot{G}_i(\omega) = \dot{G}_1(\omega) + \dot{G}_2(\omega) + \dot{G}_3(\omega),$$

где

$$\dot{G}_1(\omega) = \int_0^T a_1 b t e^{-j\omega t} dt;$$

$$\dot{G}_2(\omega) = \int_0^T a_2 (bt)^2 e^{-j\omega t} dt;$$

$$\dot{G}_3(\omega) = \int_0^T a_3 (bt)^3 e^{-j\omega t} dt.$$

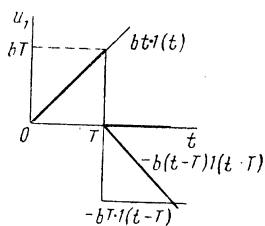


Рис. 7.5

Первое слагаемое можно найти аналогично  $\dot{G}_{u_1}(\omega)$ . Второе и третье получают несложным путем взятия определенных интегралов. В результате окончательно получим

$$\begin{aligned} \dot{G}_i(\omega) = & \frac{a_1 b}{(j\omega)^2} (1 - e^{-j\omega T}) - \frac{bT}{j\omega} e^{-j\omega T} + \\ & + \left\{ T^2 e^{-j\omega T} + \frac{2}{j\omega} \left[ T e^{-j\omega T} + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T} - \frac{1}{j\omega} \right] \right\} \times \\ & \times \left( \frac{3a_2 b^2}{\omega^2} - \frac{a_2 b^2}{j\omega} T^2 e^{-j\omega T} \right) - \frac{a_3 b^3 T^3 e^{-j\omega T}}{j\omega}. \end{aligned}$$

Спектральная функция тока отличается от спектральной функции приложенного на входе колебания на величину слагаемого, определяемого квадратичным и кубическим членами аппроксимации характеристики.



Следует подчеркнуть одну особенность нелинейных преобразований импульсов и их спектральных функций. Как это следует из геометрических представлений, чем ближе форма воздействующего импульса к прямоугольной, тем меньше изменения она претерпевает при нелинейном преобразовании. В пределе импульс строго прямоугольной формы (предельный случай, являющийся математической абстракцией), проходя через нелинейную цепь, не изменяет своей формы. Следовательно, не меняется и вид его спектральной функции. То же самое можно сказать и об импульсах в виде скачков постоянного возмущения. Таким образом, спектральная функция вида  $\frac{e^{-j\omega T}}{j\omega}$  является устойчивой при нелинейных преобразованиях.

### § 7.3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Рассмотрим воздействие периодического колебания  $x(t)$  с периодом  $T$  на нелинейный элемент с характеристикой  $y=f(x)$ . Колебание на выходе

$$y(t) = f[x(t)]$$

будет также периодическим с тем же периодом  $T$ .

Огибающими спектров входного и выходного колебаний являются соответственно спектральные функции  $\dot{G}_x(\omega)$  и  $\dot{G}_y(\omega)$ , которые находят по правилам, приведенным на стр. 217. Как было установлено, спектральная функция при нелинейном преобразовании колебания претерпевает качественные изменения. Следовательно, огибающая спектра выходного колебания не будет совпадать с огибающей спектра входного колебания. Дискретные спектральные линии выходного колебания, вписанные в огибающую, будут следовать с тем же интервалом по частоте  $\frac{2\pi}{T}$ , что и на входе. Если колебание  $x(t)$  имеет бесконечно протяженный спектр, то новых спектральных компонент в составе  $y(t)$  не возникает, изменяется только соотношение между компонентами, обусловленное преобразованием их огибающей. (Случай, когда управляющее воздействие имеет ограниченный спектр, рассмотрен в § 7.5.)

В соответствии с формулой (1.12а) можно осуществить спектральные разложения входного и выходного колебаний:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{X_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{X}_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} ; \\ y(t) &= \frac{Y_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Y}_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} , \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

где

$$\dot{X}_k = \frac{2}{T} \dot{G}_x \left( k \frac{2\pi}{T} \right);$$

$$\dot{Y}_k = \frac{2}{T} \dot{G}_y \left( k \frac{2\pi}{T} \right);$$

$$\dot{G}_x(\omega) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt$$

(спектральная функция управляющего колебания);

$$\dot{G}_y(\omega) = \int_{-T}^T y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T f[x(t)] e^{-j\omega t} dt$$

(спектральная функция выходного колебания);

Пример. На входе нелинейного элемента, характеристика которого  $u_2 = f(u_1)$  аппроксимирована отрезками прямых, действует периодическая последовательность треугольных импульсов с параметрами, указанными на рис. 7.6. Выразить входное и выходное колебания в виде спектров.

Вначале, воспользовавшись табл. 1.1, запишем спектральные функции входного и выходного колебаний:

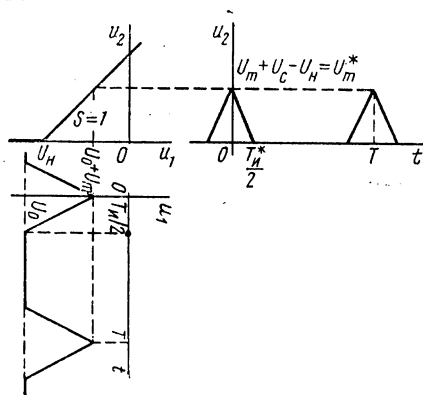


Рис. 7.6

$$\dot{G}_{u_1}(\omega) = \frac{8U_m}{T_{\text{н}}} \left( \frac{\sin \frac{\omega T_{\text{н}}}{4}}{\omega} \right)^2;$$

$$\dot{G}_{u_2}(\omega) = \frac{8U_m^*}{T_{\text{н}}^*} \left( \frac{\sin \frac{\omega T_{\text{н}}^*}{4}}{\omega} \right)^2.$$

С учетом того, что

$$U_m^* = U_m + U_0 - U_{\text{н}}$$

и

$$T_{\text{н}}^* = T_{\text{н}} \frac{U_m + U_0 - U_{\text{н}}}{U_m},$$

для выходного колебания окончательно получим

$$\dot{G}_{u_2}(\omega) = \frac{8U_m}{T_{\text{н}}} \left( \frac{\sin \frac{\omega T_{\text{н}}^*}{4}}{\omega} \right)^2.$$

Приближенный вид спектральных функций показан на рис. 7.7. Здесь принято  $T_{\text{н}}^* = \frac{1}{2} T_{\text{н}}$ . Построенные зависимости отражают нелинейность преобразования спектральной функции,

Спектральные функции с масштабными множителями  $\frac{2}{T}$  являются огибающими спектров периодических последовательностей треугольных импульсов на входе и на выходе линейного элемента:

$$u_1(t) = \frac{U_m T_H}{2T} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16U_m}{TT_H} \left( \frac{\sin \frac{k\Omega T_H}{4}}{k\Omega} \right)^2;$$

$$u_2(t) = \frac{U_m T_H}{8T} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16U_m}{TT_H} \left( \frac{\sin \frac{k\Omega T_H}{8}}{k\Omega} \right)^2,$$

где

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Полученные формулы иллюстрированы спектральными диаграммами рис. 7.8, построенными для частного случая  $T = 4 T_H$ .

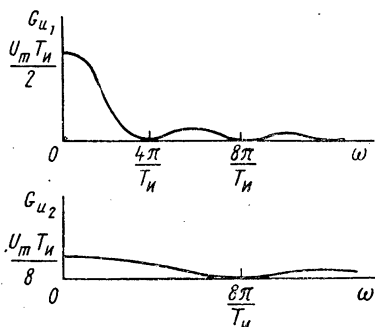


Рис. 7.7

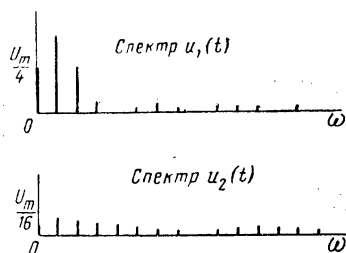


Рис. 7.8

#### § 7.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Наиболее важным случаем периодического колебания является простое гармоническое колебание

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.9)$$

Если характеристика нелинейного элемента аппроксимирована произвольным образом (7.1), то выходной эффект выразится как

$$y(t) = f_1[X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)]. \quad (7.10)$$

Это колебание так же, как и исходное  $x(t)$ , является периодическим с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Однако в отличие от первого  $y(t)$  не

простое (гармоническое), а сложное периодическое колебание. Нелинейная функция (7.1) искажает форму периодического колебания. Поэтому монохроматическому воздействию на входе будет соответствовать ряд гармонических колебаний на выходе:

$$y_j(t) = \frac{Y_0}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Y}_k e^{jk\omega_0 t}, \quad (7.11)$$

где

$$\dot{Y}_k = \frac{2}{T} \int_0^T f_1[X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] e^{-jk\omega_0 t} dt. \quad (7.12)$$

Полученный ряд состоит из гармоник

$$y_k(t) = Y_k \cos(k\omega_0 t + k\varphi_0) \quad (7.13)$$

с частотами  $k\omega_0$  и сдвигами фаз  $k\varphi_0$ , кратными частоте и сдвигу фазы входного колебания. Характер зависимости амплитуд  $Y_k$  от номера гармоники, т. е. протяженности ряда, обусловлена конкретной формой аппроксимации  $f(x)$ . Чем больше нелинейность функции  $y=f(x)$ , тем протяженнее гармонический ряд, тем медленнее убывают с ростом  $k$  амплитуды гармоник.

На рис. 7.9 показана нелинейная характеристика «релейного» типа. При воздействии гармонического колебания на нелинейный элемент с характеристикой, показанной на рис. 7.9, выходное колебание представляет собой периодическую (с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ) последовательность прямоугольных импульсов с длительностью  $T_n = \frac{T}{\pi} \arccos \frac{U_0}{U_m}$ . Спектральная функция таких импульсов, определяющая закон убывания амплитуд, приведена в табл. 1.1. Для данного случая она имеет следующий вид:

$$\dot{G}_{u_n}(\omega) = \frac{2U_{\text{орп}}}{\omega} \sin \frac{\omega T_n}{2} \quad (7.14)$$

Убывание амплитуд гармоник определяется множителем  $\frac{1}{\omega}$ , принимающим при периодических процессах дискретные значения  $\frac{1}{k\omega_0}$ . Очевидно, что нелинейность данного вида является максимально возможной для любых характеристик вообще. Характеристики реальных нелинейных элементов, естественно, не могут иметь разрывов, однако могут сколь угодно приближаться к характеристикам разрывного типа. Таким образом, соотношение (7.14) отражает предельный закон наиболее медленного убывания спектральных составляющих с ростом номера гармоники. Реальные процессы,

полученные преобразованием периодических, в том числе и гармонических, воздействий нелинейными элементами с характеристиками без разрывов, протекают непрерывно. Следовательно, амплитуды составляющих спектра реальных периодических колебаний убывают быстрее, чем  $\frac{1}{k\omega_0}$ .

Проследим законы образования спектров при воздействии на нелинейный элемент гармонического колебания на примерах двух конкретных аппроксимаций.

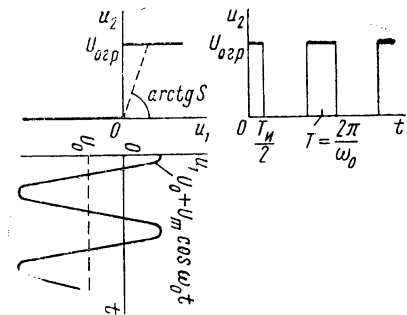


Рис. 7.9. Преобразование гармонического колебания идеальным двусторонним ограничителем

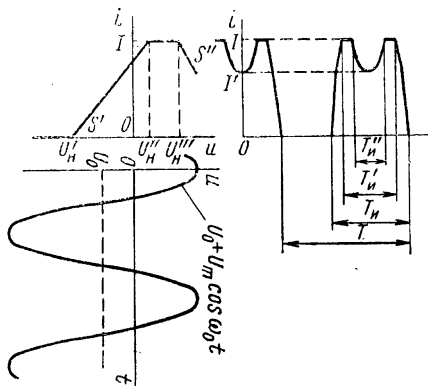


Рис. 7.10

**Пример 1.** Характеристика нелинейного элемента  $i=f(u)$  имеет полигональную аппроксимацию (рис. 7.10). Определить спектр преобразованного колебания.

Согласно общему методу вначале находим спектральную функцию импульса, образующего периодический процесс  $i(t)$ :

$$\dot{G}_i(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Импульс  $i(t)$ , как видно из рис. 7.10, является кусочно-аналитической функцией. Поэтому интеграл по периоду представим суммой интегралов по частям периода:

$$\dot{G}_i(\omega) = \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} S' [U_0 - U'_n + U_m \cos \omega_0 t] e^{-j\omega t} dt + \int_{\frac{T_n}{2}}^{T_n} I_m \times$$

$$\begin{aligned} & \times e^{-j\omega t} dt + \frac{T_{\text{н}}''}{2} \int S [U_0 - U_{\text{н}}''' + U_m \cos \omega_0 t] e^{-j\omega t} dt + \\ & - \frac{T_{\text{н}}''}{2} \\ & + \frac{T_{\text{н}}'}{2} \int I_m e^{-j\omega t} dt + \frac{T_{\text{н}}}{2} \int S' [U_0 - U_{\text{н}} + U_m \cos \omega_0 t] e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Здесь пределы интегрирования определяются из соотношений:

$$U_0 + U_m \cos \frac{\omega_0 T_{\text{н}}}{2} = U_{\text{н}}';$$

$$U_0 + U_m \cos \frac{\omega_0 T_{\text{н}}'}{2} = U_{\text{н}}'';$$

$$U_0 + U_m \cos \frac{\omega_0 T_{\text{н}}''}{2} = U_{\text{н}}''',$$

которые в результате дают:

$$\frac{T_{\text{н}}}{2} = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{U_{\text{н}}' - U_0}{U_m};$$

$$\frac{T_{\text{н}}'}{2} = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{U_{\text{н}}'' - U_0}{U_m};$$

$$\frac{T_{\text{н}}''}{2} = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{U_{\text{н}}''' - U_0}{U_m}.$$

Интегралы, определяющие  $\hat{G}_i(\omega)$ , можно вычислить легко. Однако заметим, что метод вычисления спектральной функции импульса  $i(t)$  может быть видоизменен. С этой целью удобно полигональную характеристику представить суммой неограниченных линейно-ломаных характеристик:

$$i = f(u) = f_1(u) + f_2(u) + f_3(u),$$

каждая из которых состоит всего лишь из двух отрезков прямых — совпадающего с осью абсцисс и наклонного (рис. 7.11). Такое представление эквивалентно тому, что нелинейный элемент (в данном случае описываемый проводимостью) заменяется комбинацией па-

раллельно включенных элементов (рис. 7.12). Тогда искомая спектральная функция

$$\begin{aligned} \dot{G}_i(\omega) &= \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} \{f_1[u(t)] + f_2[u(t)] + f_3[u(t)]\} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \dot{G}_1(\omega) + \dot{G}_2(\omega) + \dot{G}_3(\omega). \end{aligned}$$

Каждая из функций  $f_{1,2,3}(u)$ , входящих под интеграл, преобразует гармоническое колебание в периодическую последовательность импульсов косинусоидальной формы с одинаковым периодом  $T$ . Параметры импульсов (длительность и высота) определяются параметрами характеристик  $f_{1,2,3}(u)$ . Поэтому достаточно один раз при произвольных параметрах линейно-ломаной аппроксимации  $S, U_H$  и значениях параметров  $U_0, U_m$  и  $\omega_0$  воздействующего колебания найти спектральную функцию импульса косинусоидальной формы и амплитуды гармоник, образующих тригонометрический ряд.

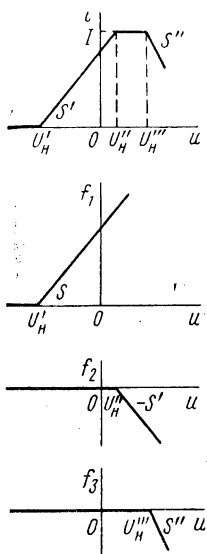


Рис. 7.11. Составляющие линейно-ломаной аппроксимации

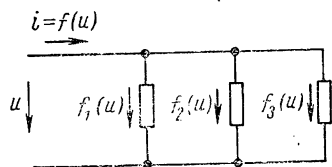


Рис. 7.12. Представление нелинейного элемента параллельным включением более простых

Приведем окончательные формулы для амплитуд гармоник периодической последовательности косинусоидальных импульсов:

$$\frac{1}{2} I_0(U_0, U_m) = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta); \quad (7.15)$$

$$I_1(U_0, U_m) = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta);$$

$$I_k(U_0, U_m) = \frac{2SU_m}{\pi} \cdot \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{k(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \quad (7.16)$$

при  $k \geq 1$ .

В этих формулах обозначено:

$U_m$  — амплитуда управляющего гармонического колебания;

$S$  — крутизна наклонной части характеристики;

$\theta$  — угол отсечки, определяющий в радианах половину части периода ( $2\pi$ ), в течение которой  $i(t) > 0$ . Его находят из соотношения

$$U_0 + U_m \cos \theta - U_H = 0,$$

откуда

$$\theta = \arccos \frac{U_H - U_0}{U_m}. \quad (7.17)$$

Угол отсечки является функцией  $U_H$ ,  $U_0$  и  $U_m$ .

В некоторых случаях амплитуды гармоник бывает удобнее выразить через высоту  $I_m$  импульса. Для этого учтем, что

$$I_m = S(U_0 + U_m - U_H) = SU_m(1 - \cos \theta).$$

Подставляя в формулы (7.15) и (7.16) значение

$$SU_m = \frac{I_m}{1 - \cos \theta},$$

получим

$$\frac{1}{2} I_0 = \frac{I_m}{\pi} \cdot \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta}; \quad (7.18)$$

$$I_1 = \frac{I_m}{\pi} \cdot \frac{(\theta - \sin \theta \cos \theta)}{1 - \cos \theta};$$

$$I_k = \frac{2I_m}{\pi} \cdot \frac{\sin k\theta \cos \theta - k \cos k\theta \sin \theta}{k(k^2 - 1)(1 - \cos \theta)} \quad (7.19)$$

при  $k \geq 1$ .

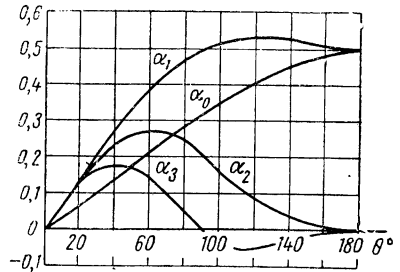


Рис. 7.13. Графики коэффициентов разложения периодической последовательности импульсов косинусоидальной формы на гармонические составляющие

Приведенные формулы показывают, что амплитуды гармоник, так же как и нулевая составляющая, зависят только от высоты импульса  $I_m$  и угла отсечки  $\theta$ . Это очевидно, поскольку именно этими параметрами определяется импульс, если его форма является косинусоидальной. Неявно в выражения (7.18) и (7.19) в качестве аргументов входят  $S$ ,  $U_H$ ,  $U_0$  и  $U_m$ , т. е. то, что и определяет  $I_m$  и  $\theta$ . Коэффициенты, стоящие в (7.18) и (7.19) при  $I_m$  и зависящие от угла отсечки

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \frac{I_0}{I_m}, \quad \alpha_k = \frac{I_k}{I_m},$$



называют функциями А. И. Берга. Их графики для значений  $k = 1, 2, 3$  приведены на рис. 7.13.

Пример 2. Характеристика нелинейного элемента аппроксимирована полиномом

$$i = f(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots + a_l(u - U_0)^l. \quad (7.20)$$

Вычислить спектр тока при воздействии гармонического напряжения, приложенного в рабочей точке  $U_0$

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.21)$$

Подстановкой (7.21) в (7.20) найдем ток:

$$i(t) = a_0 + a_1 U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + a_2 U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \dots \\ \dots + a_l U_m^l \cos^l(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.22)$$

Ток является периодической функцией с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , поэтому может быть разложен в гармонический ряд. Однако использование общих правил при аппроксимации полиномом не целесообразно. Достаточно представить степени гармонических функций, входящих в  $i(t)$ , суммой гармонических функций с кратными частотами и сдвигами фаз, т. е. учесть, что

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\cos^3(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{3}{4} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{4} \cos 3(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\cos^4(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{8} \cos 4(\omega_0 t + \varphi_0)$$

и т. д.

Разложение произвольной степени  $\cos^k(\omega_0 t + \varphi_0)$  может дать все гармоники частот от 0 до  $k$ , только четные или только нечетные в соответствии с четностью или нечетностью рассматриваемого показателя степени  $k$ .

Группируя гармонические слагаемые с одинаковыми частотами, можно получить ряд

$$i(t) = \frac{1}{2} I_0(U_0, U_m) + I_1(U_0, U_m) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ + I_2(U_0, U_m) \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) + \dots + I_k(U_0, U_m) \cos k(\omega_0 t + \varphi_0) + \dots \\ \dots + I_l(U_0, U_m) \cos l(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (7.23)$$

в котором

$$\frac{1}{2} I_0(U_0, U_m) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots + \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu} (\nu!)^2} a_{2\nu} U_m^{2\nu} + \dots$$

$$\dots + \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}!\right)^2} a_l U_m^l \text{ при } l \text{ четном;} \quad (7.24)$$

$$\dots + \frac{(l-1)!}{2^{l-1} \left(\frac{l-1}{2}!\right)^2} a_{l-1} U_m^{l-1} \text{ при } l \text{ нечетном;} \quad (7.25)$$

$$I_1(U_0, U_m) = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots$$

$$\dots + \frac{(2\nu \mp 1)!}{2^{2\nu} \nu! (\nu \mp 1)!} a_{2\nu+1} U_m^{2\nu+1} + \dots$$

$$\dots + \frac{(l-1)!}{2^{l-2} \left(\frac{l-2}{2}!\right) \left(\frac{l}{2}!\right)} a_{l-1} U_m^{l-1} \text{ при } l \text{ четном;} \quad (7.26)$$

$$\dots + \frac{l!}{2^{l-1} \left(\frac{l-1}{2}!\right) \left(\frac{l+1}{2}!\right)} a_l U_m^l \text{ при } l \text{ нечетном;} \quad (7.27)$$

$$I_2(U_0, U_m) = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \frac{15}{32} a_6 U_m^6 + \dots$$

$$\dots + \frac{(2\nu \mp 2)!}{2^{2\nu+1} \nu! (\nu \mp 2)!} a_{2\nu+2} U_m^{2\nu+2} + \dots$$

$$\dots + \frac{l!}{2^{l-1} \left(\frac{l-2}{2}!\right) \left(\frac{l \mp 2}{2}!\right)} a_l U_m^l \text{ при } l \text{ четном;} \quad (7.28)$$

$$\dots + \frac{(l-1)!}{2^{l-2} \left(\frac{l-3}{2}!\right) \left(\frac{l \mp 1}{2}!\right)} a_{l-1} U_m^{l-1} \text{ при } l \text{ нечетном.} \quad (7.29)$$

Амплитуду общего члена разложения (7.23) находим по формуле

$$I_k(U_0, U_m) = \sum_{\nu=0}^{\frac{l-k}{2}} \frac{(2\nu \mp k)!}{2^{2\nu+k-1} \nu! (\nu \mp k)!} a_{2\nu+k} U_m^{2\nu+k}. \quad (7.30)$$

Коэффициенты  $a_{2\nu+k}$  определяются полиномиальной аппроксимацией характеристики.

Таким образом можно сделать вывод, что максимальная частота в спектре колебания, прошедшего нелинейное устройство с характеристикой в виде полинома степени  $l$ , равна  $l\omega_0$ ; четные гармоники образуются от четных членов полинома, нечетные от нечетных;  $k$ -я гармоника образуется членами степени  $k$  и выше.

Следовательно, если считать, что высшая степень аппроксимации характеризует меру нелинейности характеристики элемента, то именно этой мерой определяется протяженность спектра преобразованного колебания, его наивысшая частота. Чем более нелинейна характеристика, тем протяженнее спектр. Для линейноломаной аппроксимации эквивалентом может быть степенной ряд неограниченно высокой степени. Поэтому преобразованное колебание в том случае имело неограниченный спектр.

Если характеристика *четна*, т. е.  $i=f(u)=f(-u)$ , то нечетные  $a_k$  равны нулю. Преобразованное колебание будет содержать только *четные* гармоники. При нечетной характеристике четные гармоники обращаются в нуль.

### § 7.5. ВОЗДЕЙСТВИЕ СУММЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Одновременное воздействие нескольких гармонических колебаний весьма распространено, поскольку многие реальные процессы могут быть приближенно представлены набором дискретных гармонических составляющих:

$$x = \sum_{k=1}^n X_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^n X_k \cos \alpha_k, \quad (7.31)$$

где

$$\alpha_k = \omega_k t + \varphi_k.$$

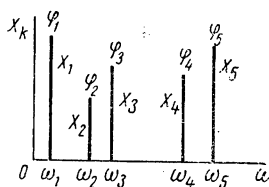


Рис. 7.14. Спектральный состав управляющего колебания при  $n=5$

Эта сумма, в частности, может представлять собой часть бесконечного тригонометрического ряда, являющегося разложением в ряд Фурье некоторого периодического колебания. Тогда амплитуды, частоты и сдвиги фаз будут находиться в соотношениях, вытекающих из формул преобразований Фурье для периодических колебаний. В наиболее общем случае амплитуды, частоты и сдвиги фаз отдельных компонент спектра

могут находиться в произвольных соотношениях. Примерный вид спектральной диаграммы такой суммы при  $n=5$  показан на рис. 7.14.

Пусть характеристика нелинейного элемента аппроксимирована функцией  $y=f(x)$ . Тогда выходной эффект будет сложной функцией времени:

$$y = f \left[ \sum_{k=1}^n X_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right] = f \left[ \sum_{k=1}^n X_k \cos \alpha_k \right]. \quad (7.32)$$

Так как аргументом функции (7.32) является сумма периодических колебаний, то имеется принципиальная возможность произвести  $n$ -кратное разложение  $y$  по тригонометрическим функциям аргументов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Для этого введем обозначение

$$x = X_1 \cos \alpha_1 + \Delta_1 x, \quad (7.33)$$

где

$$\Delta_1 x = \sum_{k=2}^n X_k \cos \alpha_k.$$

Тогда

$$y = f[X_1 \cos \alpha_1 + \Delta_1 x] \quad (7.34)$$

будет периодической функцией аргумента  $\alpha_1$ .  $\Delta_1 x$  в выражении (7.34) играет роль параметра. Пользуясь известными приемами (формулы 1.12 и 1.13), функцию (7.34) можно разложить в ряд Фурье по аргументу  $\alpha_1$ :

$$y = \frac{1}{2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} Y_{|k_1|}(X_1, \Delta_1 x) \cos k_1 \alpha_1, \quad (7.35)$$

где

$$Y_{|k_1|}(X_1, \Delta_1 x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[X_1 \cos \alpha_1 + \Delta_1 x] \cos k_1 \alpha_1 d\alpha_1.$$

Поскольку  $\Delta_1 x$  зависит от  $\alpha_2, \alpha_3$  и т. д., амплитуды гармоник  $Y_{|k_1|}(X_1, \Delta_1 x)$  являются сложными периодическими функциями этих аргументов. В силу периодичности каждую из  $Y_{|k_1|}$  допустимо разложить в тригонометрический ряд:

$$Y_{|k_1|}(X_1, X_2, \Delta_2 x) = \frac{1}{2} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} Y_{|k_1| |k_2|}(X_1, X_2, \Delta_2 x) \cos k_2 \alpha_2, \quad (7.36)$$

где

$$Y_{|k_1| |k_2|}(X_1, X_2, \Delta_2 x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_{|k_1|}(X_1, X_2 \cos \alpha_2 + \Delta_2 x) \cos k_2 \alpha_2 d\alpha_2,$$

$$\Delta_2 x = \sum_{k=3}^n X_k \cos \alpha_k.$$

Повторяя идентичные операции  $n$  раз (в соответствии с числом гармонических составляющих, входящих в  $x$ ), можно получить следующее выражение для колебания на выходе нелинейного элемента

$$y_1 = \frac{1}{2^n} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} Y_{|k_1| |k_2| \dots |k_n|} (X_1, X_2, \dots, X_n) \times \\ \times \cos(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n), \quad (7.37)$$

в котором

$$Y_{|k_1| |k_2| \dots |k_n|} (X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{\pi^n} \underbrace{\int \int \dots \int}_{-\pi}^{\pi} \times \\ \times f \left[ \sum_{k=1}^n X_k \cos \alpha_k \right] \cos k_1 \alpha_1 \cos k_2 \alpha_2 \dots \cos k_n \alpha_n d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n. \quad (7.38)$$

Колебание (7.37) получилось в виде суммы простых гармонических составляющих. Общий член этого разложения, имеющий фазу

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = (k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n) t + \\ + k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \dots + k_n \varphi_n, \quad (7.39)$$

называют комбинационным колебанием порядка

$$N = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|. \quad (7.40)$$

Амплитуда комбинационного колебания порядка  $N$  с точностью до множителя  $\frac{1}{2^n}$  вычисляется по формуле (7.36), а мгновенная частота—дифференцированием выражения (7.39)

$$\omega_{|k_1| |k_2| \dots |k_n|} = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_n \omega_n + k_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \\ + k_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + \dots + k_n \frac{d\varphi_n}{dt}. \quad (7.41)$$

Поскольку  $k_1, k_2, \dots, k_n$  могут принимать в общем случае произвольные целочисленные значения (как положительные, так и отрицательные), в составе разложения (7.37) будут комбинационные колебания произвольных порядков. В частном случае, когда  $n=1$ , данная задача сводится к уже рассмотренной в § 7.4. Гармоники (7.13), входящие в состав правой части выражения (7.11), также можно считать комбинационными колебаниями. Однако, в случае монохроматического управляющего колебания (7.9), комбинационные составляющие образуются и вычисляются более просто (соотношения 7.12 и 7.13).

Разложение на комбинационные колебания (7.37) в принципе не является сложным. Трудности может вызывать кратное интегрирование (7.38). Эти трудности тем значительнее, чем больше  $n$ . Они

также зависят от конкретного вида аппроксимации (7.1). Так, если (7.1) является линейно-ломаной функцией, то при  $n=2$  кратный интеграл (7.38) уже не выражается через элементарные функции.

При применении аппроксимации характеристики полиномом задача существенно упрощается. Комбинационные колебания при этом имеют порядки  $N$ , не большие показателя степени полинома  $l$ . Это значит, что возможны только такие целочисленные комбинации частот и сдвигов фаз управляющих колебаний, при которых выполняется соотношение

$$|k_1| + |k_2| + \dots + |k_n| = N \leq l. \quad (7.42)$$

Такое ограничение весьма существенно и облегчает решение задачи, ибо на первом этапе часто достаточно оценка значений комбинационных частот, возникающих при нелинейном преобразовании спектра управляющего колебания (рис. 7.14). Затем производится вычисление амплитуд всех или наиболее существенных комбинационных колебаний. Нетрудно убедиться, что члены полинома с четными ( $2i$ ) степенями образуют комбинационные колебания всех четных порядков  $0 \leq N \leq 2i$ . Члены полинома нечетной степени ( $2i+1$ ) образуют комбинационные колебания всех нечетных порядков ( $1 \leq N \leq 2i+1$ ). Поэтому высший четный и высший нечетный показатели степени полинома полностью определяют набор комбинационных частот и сдвигов фаз. Члены с более низкими степенями образуют комбинационные колебания, максимальный порядок которых не превосходит показателя степени. При этом амплитуды одноименных комбинационных колебаний векторно складываются.

Пример. Характеристика нелинейного элемента задана полиномом

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Спектральная диаграмма управляющего колебания изображена на рис. 7.15, а. Найти значения частот и сдвигов фаз, составляющих преобразованного колебания.

В составе полинома только два члена, зависящих от управляющего напряжения  $u$ . Спектр тока получаем суперпозицией спектров, образуемых линейным и квадратичным членами полинома. Линейный член пропорционально изменяет входное воздействие, оставляя неизменными частоты и сдвиги фаз. Квадратичный член может образовать комбинационные колебания четных порядков. Таких порядков может быть два:  $N_1=0$  и  $N_2=2$ .

При  $N_1=0$

$$|k_1| + |k_2| + |k_3| + |k_4| = 0.$$

Это равенство выполнимо, если

$$|k_1| = |k_2| = |k_3| = |k_4| = 0.$$

Следовательно, комбинационное колебание нулевого порядка представляет собой нулевую составляющую спектра выходного колебания. Эта составляющая, значение которой, естественно, зависит от всех четырех амплитуд  $U_{1,2,3,4}$ , складывается с величиной тока в рабочей точке  $a_0$ .

При  $N_2 = 2$

$$|k_1| + |k_2| + |k_3| + |k_4| = 2.$$

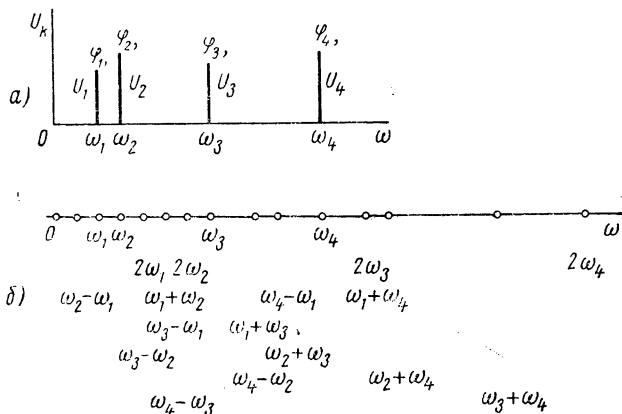


Рис. 7.15. Спектральная диаграмма управляющего колебания

Это равенство может выполняться, если: 1) любое  $k=2$  при остальных  $k$ , равных нулю; 2) величины  $k$  из любой пары принимают значения  $\pm 1$  при остальных нулевых.

Частоты комбинационных колебаний, возникающих от соответствующих членов полинома, сведены в табл. 7.1. Аналогично обра-

Таблица 7.1

Слагаемые полинома	Частоты комбинационных колебаний
$a_0$	0
$a_1 u$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
$a_2 u^2$	$0; 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3, 2\omega_4; \omega_1 \pm \omega_2, \omega_1 \pm \omega_3, \omega_1 \pm \omega_4, \omega_2 \pm \omega_3, \omega_2 \pm \omega_4, \omega_3 \pm \omega_4$

зуются комбинационные сдвиги фаз. Значения частот преобразованного спектра нанесены на ось частот (рис. 7.15, б). Как и следовало ожидать, спектр преобразованного колебания намного богаче гармониками, чем спектр исходного, хотя рассмотрен случай простейшей нелинейности характеристики, обусловленной квадратичным членом. С учетом членов полинома более высоких степеней картина преобразованного спектра значительно усложняется.

В рассматриваемом примере частоты входного воздействия находятся в дробно-кратном соотношении. Поэтому некоторые из комбинационных частот оказались совпадающими.

Если аппроксимация задана полиномом, то, наряду с частотами и сдвигами фаз преобразованного спектра, можно найти и амплитуды всех составляющих. Пользоваться для этого формулой (7.38) нет необходимости. Достаточно подставить сумму управляющих гармонических колебаний в качестве аргумента полинома и произвести необходимые упрощения. Однако общее выражение для амплитуды комбинационного колебания произвольного порядка получается сложным.

В табл. 7.2 [2] входят амплитуды комбинационных колебаний при аппроксимации характеристики полиномом третьей степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

и воздействии управляющего колебания в виде суммы трех гармонических составляющих

$$x = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + X_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Таблица 7.2

$a_0$	$\frac{1}{8} Y_{000} = a_0$
$a_1 x$	$\frac{1}{8} Y_{100} = \frac{1}{2} a_1 X_1; \frac{1}{8} Y_{010} = \frac{1}{2} a_1 X_2; \frac{1}{8} Y_{001} = \frac{1}{2} a_1 X_3$
$a_2 x^2$	$\frac{1}{8} Y_{000} = \frac{1}{2} a_2 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$ $\frac{1}{8} Y_{200} = \frac{1}{4} a_2 X_1^2; \frac{1}{8} Y_{020} = \frac{1}{4} a_2 X_2^2; \frac{1}{8} Y_{002} = \frac{1}{4} a_2 X_3^2$ $\frac{1}{8} Y_{110} = \frac{1}{2} a_2 X_1 X_2; \frac{1}{8} Y_{101} = \frac{1}{2} a_2 X_1 X_3; \frac{1}{8} Y_{011} = \frac{1}{2} a_2 X_2 X_3$
$a_3 x^3$	$\frac{1}{8} Y_{100} = \frac{3}{8} a_3 X_1 (X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2)$ $\frac{1}{8} Y_{010} = \frac{3}{8} a_3 X_2 (X_2^2 + 2X_3^2 + 2X_1^2)$ $\frac{1}{8} Y_{001} = \frac{3}{8} a_3 X_3 (X_3^2 + 2X_1^2 + 2X_2^2)$ $\frac{1}{8} Y_{210} = \frac{3}{8} a_3 X_1^2 X_2; \frac{1}{8} Y_{201} = \frac{3}{8} a_3 X_1^2 X_3; \frac{1}{8} Y_{021} = \frac{3}{8} a_3 X_2^2 X_3$ $\frac{1}{8} Y_{120} = \frac{3}{8} a_3 X_1 X_2^2; \frac{1}{8} Y_{102} = \frac{3}{8} a_3 X_1 X_3^2; \frac{1}{8} Y_{012} = \frac{3}{8} a_3 X_2 X_3^2$ $\frac{1}{8} Y_{111} = \frac{3}{4} a_3 X_1 X_2 X_3$ $\frac{1}{8} Y_{300} = \frac{1}{8} a_3 X_1^3; \frac{1}{8} Y_{030} = \frac{1}{8} a_3 X_2^3; \frac{1}{8} Y_{003} = \frac{1}{8} a_3 X_3^3$

## § 7.6. СОВМЕСТНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ БОЛЬШОГО И МАЛОГО КОЛЕБАНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Выясним характер преобразованного колебания при одновременном воздействии большого  $x_6(t)$  и малого  $\Delta x(t)$  колебаний, так что

$$x(t) = x_6(t) + \Delta x(t), \quad (7.43)$$



на нелинейный элемент с характеристикой (7.1)

$$y = f(x).$$

Условимся называть величину воздействия  $\Delta x(t)$  *малой*, если в отношении такого воздействия характеристика (7.1) с заданной степенью приближения может считаться линейной. С учетом этого

$$y = f(x) \approx f(x_0) + f'_x(x_0) \Delta x = y_0 + \Delta y, \quad (7.44)$$

где

$$f'_x(x_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}, \quad y_0 = f(x_0),$$

$$\Delta y = f'_x(x_0) \Delta x,$$

или

$$y(t) \approx y_0(t) + \Delta y(t) = f[x_0(t)] + f'_x[x_0(t)] \Delta x(t). \quad (7.45)$$

Из формулы (7.44) следует, что малым приращениям управляющего колебания  $\Delta x$  соответствуют малые приращения выходного колебания  $\Delta y$ . Это очевидно, поскольку реальная характеристика  $y=f(x)$  является непрерывной функцией (к тому же еще и гладкой, т. е. допускающей дифференцирование).

В соответствии с выражением (7.45) выходной эффект состоит из двух составляющих:

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= f[x_0(t)]; \\ \Delta y(t) &= f'_x[x_0(t)] \Delta x(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Составляющая  $y_0(t)$  является результатом действия основного (большого) колебания  $x_0(t)$  и не зависит от его малой части  $\Delta x(t)$ . Составляющая  $\Delta y(t)$  возникает в результате взаимодействия основного колебания и малого. При сделанном допущении малости  $\Delta x(t)$  величина  $\Delta y(t)$  связана с  $\Delta x(t)$  пропорциональной зависимостью. Следовательно, в отношении малых приращений входных колебаний, даже в присутствии большой составляющей, нелинейный элемент функционирует, как линейный. Коэффициент пропорциональности, связывающий  $\Delta x(t)$  и  $\Delta y(t)$ , зависит от основной составляющей входного колебания. Так как основное колебание является функцией времени, то коэффициент пропорциональности также является переменной величиной. Таким образом, нелинейный элемент, находящийся под воздействием большого и малого колебаний, ведет себя в отношении малого, как *линейный с переменным параметром* (крутизной, коэффициентом передачи, сопротивлением). К таким элементам в отношении малых колебаний применим принцип наложения.

Пример. На усилитель колебаний, имеющий зависимость выходного напряжения от входного в форме квадратичного полинома

$$u_2 = f(u_1) = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2,$$

действует большое периодическое пилообразное колебание, состоящее из импульсов  $u_{16}(t) = b(t - \tau)$ , ( $0 \leq t \leq T$ ), следующих с периодом  $T$ , и периодическая последовательность  $\Delta u_1(t)$  малых прямоугольных импульсов. Найти напряжение на выходе усилителя. Характеристика усилителя и эпюры напряжений  $u_{16}(t)$  и  $\Delta u_1(t)$  изображены на рис. 7.16, а, б.

В соответствии с формулой (7.45) получаем

$$u_2(t) \approx u_{26}(t) + \Delta u_2(t) = f[u_{16}(t)] + f'_{u_1}[u_{16}(t)] \Delta u_1(t) = \\ = a_0 + a_1 u_{16}(t) + a_2 u_{16}^2(t) + [a_1 + 2a_2 u_{16}(t)] \Delta u_1(t).$$

Первое слагаемое не зависит от управляющего колебания и определяется рабочей точкой. Второе и третье слагаемые являются результатом преобразования основного колебания. (Такая задача рассматривалась ранее, см. стр. 216, рис. 7.4.) Четвертая составляющая выходного напряжения пропорциональна малому управляющему напряжению. Коэффициент пропорциональности, стоящий в прямых скобках, зависит от времени и определяется большим управляющим колебанием. Компоненты результирующего колебания изображены на рис. 7.16, в. Составляющая  $\Delta u_2$  представляет собой в этом примере последовательность импульсов, амплитуда которых меняется в соответствии с пилообразным законом. *Нелинейный элемент при квадратичной аппроксимации перемножает малое колебание на большое.*

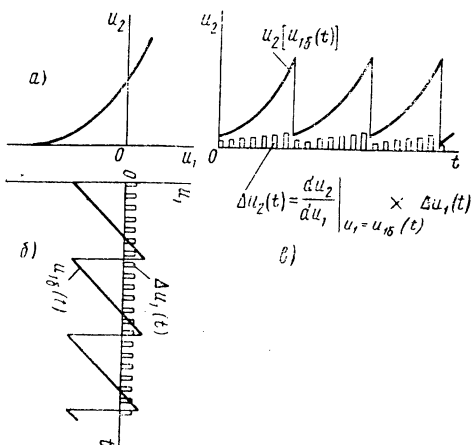


Рис. 7.16

Из сказанного ясно, что при одновременном воздействии большого и малого колебаний результирующий эффект получается в виде суммы двух составляющих. Первая зависит только от большого колебания, вторая является результатом взаимодействия большого и малого колебаний. Эта составляющая связана линейной зависимостью с малым колебанием и также является малой. Рассмотрим дополнительно коэффициент пропорциональности  $f'_x [x_6(t)]$  (7.44).

$y^* = f'_x(x)$  является в общем случае нелинейной функцией, преобразующей  $x_6(t)$  в некоторую новую функцию  $y^*(t) = f'_x[x_6(t)]$ . Если  $x_6(t)$  является периодической функцией, то  $y^*$  будет также периоди-

ческой. В некоторых задачах удобно разложить эту функцию в ряд Фурье:

$$y^*(t) = \frac{Y_0^*}{2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Y}_k^* e^{jk \frac{2\pi}{T} t}. \quad (7.47)$$

Здесь  $\dot{Y}_k^* = \frac{2}{T} \dot{G}_{y^*} \left( k \frac{2\pi}{T} \right)$  комплексная амплитуда (включая и нулевую составляющую)  $k$ -й гармоники периодического колебания  $y^*(t)$ ;

$$\dot{G}_{y^*}(\omega) = \int_{\overline{T}} y^*[x_{\sigma}(t)] e^{-j\omega t} dt -$$

спектральная функция колебания  $y^*(t)$ .

Тогда колебание на выходе можно представить следующим образом:

$$y(t) \approx y_{\sigma}(t) + \Delta y(t) = f[x_{\sigma}(t)] + \left\{ \frac{Y_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Y}_k^* e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \Delta x(t). \quad (7.48)$$

Наиболее важным для практики является случай, когда большое  $x_{\sigma}(t)$  и малое  $\Delta x(t)$  колебания гармонические:

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma}(t) &= X_{\sigma} \cos(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma}); \\ \Delta x(t) &= X_{\Delta} \cos(\omega_{\Delta} t + \varphi_{\Delta}). \end{aligned} \right\} \quad (7.49)$$

В соответствии с формулой (7.48) эффект на выходе при этом может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} y(t) &\approx y_{\sigma}(t) + \Delta y(t) = f[X_{\sigma} \cos(\omega_{\sigma} t + \varphi_{\sigma})] + \\ &+ \left\{ \frac{Y_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{Y}_k^* \cos(k\omega_{\sigma} t + k\varphi_{\sigma}) \right\} X_{\Delta} \cos(\omega_{\Delta} t + \varphi_{\Delta}). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Выражение (7.50) определяет спектральный состав колебания. За счет большой составляющей  $x_{\sigma}(t)$  возникают колебания с частотами  $k\omega_{\sigma}$ . Малое колебание, взаимодействуя с большим, дает составляющие с частотами  $k\omega_{\sigma} \pm \omega_{\Delta}$ . По такому же принципу образуются и фазовые сдвиги.

Если малое колебание представлено не одним, а суммой гармонических составляющих

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n X_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

то происходит наложение аналогичных колебаний от каждой гармонической составляющей:

$$\begin{aligned}
 y(t) &\approx y_0(t) + \Delta y(t) = f[X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] + \\
 &+ \left\{ \frac{Y_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos(k\omega_0 t + k\varphi_0) \right\} \sum_{i=1}^n X_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \\
 &= f[X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{Y_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^* \cos(k\omega_0 t + k\varphi_0) \right\} \times \\
 &\quad \times X_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).
 \end{aligned}$$

Рассмотренное спектральное преобразование иллюстрировано рис. 7.17, где для наглядности частоты малых колебаний  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  приняты существенно меньше  $\omega_0$ .

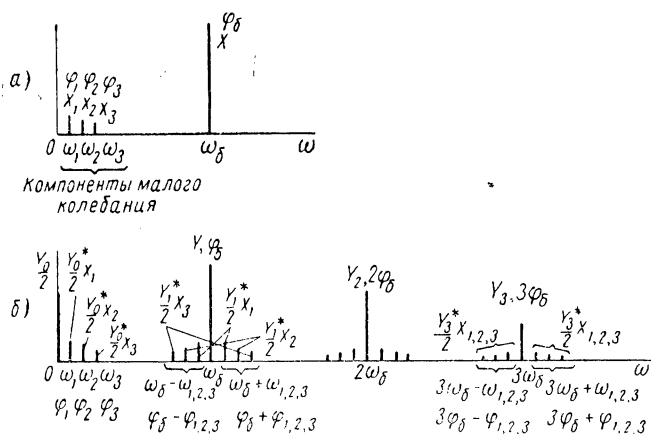


Рис. 7.17. Совместное воздействие на нелинейный элемент суммы большого и нескольких малых гармонических колебаний: а — спектр управляющего воздействия; б — спектр выходного колебания

**Пример.** Вычислить спектр тока через нелинейное сопротивление, вольт-амперная характеристика которого представлена полиномом третьей степени

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$

при воздействии суммы большого и малого гармонических колебаний

$$u = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + U_\Delta \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta).$$

Задано, что  $\omega_0 = 5\omega_\Delta$  (рис. 7.18, а). По формулам (7.24) — (7.30) или путем подстановки большого управляющего колебания в выра-

жение, аппроксимирующее характеристику, можно найти спектральный состав большой составляющей тока:

$$i_{\delta}(t) = \frac{1}{2} I_0 + I_1 \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta}) + I_2 \cos(2\omega_{\delta} t + 2\varphi_{\delta}) + I_3 \cos(3\omega_{\delta} t + 3\varphi_{\delta}).$$

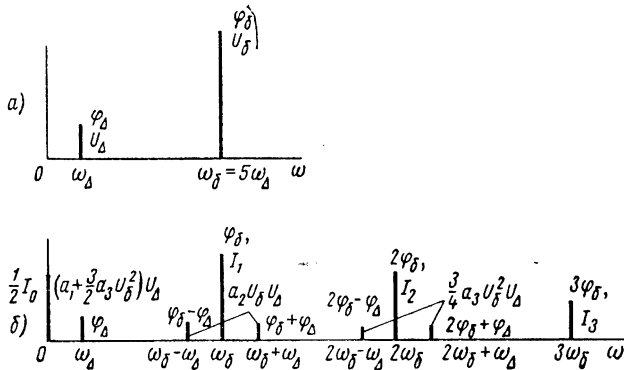


Рис. 7.18

При заданной аппроксимации согласно правилам, сформулированным в § 7.5 и в примере на стр. 233, гармоник более высокого порядка, чем третий, не возникает. Легко убедиться, что

$$\frac{1}{2} I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_{\delta}^2;$$

$$I_1 = a_1 U_{\delta} + \frac{3}{4} a_3 U_{\delta}^3;$$

$$I_2 = \frac{1}{2} a_2 U_{\delta}^2;$$

$$I_3 = \frac{1}{3} a_3 U_{\delta}^3.$$

Производная аппроксимирующей функции, т. е. ее крутизна,

$$i'_u(u) = a_1 + 2a_2 u + 3a_3 u^2.$$

Под действием  $u_{\delta}(t)$  крутизна  $i'_u$  периодически меняется. Представим ее в виде простых составляющих:

$$\begin{aligned} i'_u(t) &= a_1 + 2a_2 U_{\delta} \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta}) + 3a_3 U_{\delta}^2 \cos^2(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta}) = \\ &= a_1 + \frac{3}{2} a_3 U_{\delta}^2 + 2a_2 U_{\delta} \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta}) + \frac{3}{2} a_3 U_{\delta}^2 \cos(2\omega_{\delta} t + 2\varphi_{\delta}). \end{aligned}$$

Результат взаимодействия большого и малого колебаний находим как произведение переменной во времени крутизны  $i'_u(t)$  на мгновенное значение малого колебания:

$$\begin{aligned} \Delta i(t) &= \left[ a_1 + \frac{3}{2} a_3 U_0^3 + 2a_2 U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} a_3 U_0^2 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0) \right] U_\Delta \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta) = \\ &= \left( a_1 + \frac{3}{2} a_3 U_0^2 \right) U_\Delta \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta) + \\ &+ \underbrace{a_2 U_0 U_\Delta \cos[(\omega_0 \pm \omega_\Delta)t + \varphi_0 \pm \varphi_\Delta]}_{\text{два члена}} + \\ &+ \underbrace{\frac{3}{4} a_3 U_0^2 U_\Delta \cos[(2\omega_0 \pm \omega_\Delta)t + 2\varphi_0 \pm \varphi_\Delta]}_{\text{два члена}} \end{aligned}$$

Спектр тока  $i(t) \approx i_0(t) + \Delta i(t)$  изображен на рис. 7.18, б.

### § 7.7. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННОГО КОЛЕБАНИЯ. ОСНОВНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Выход нелинейного элемента почти всегда соединен с инерционной нагрузкой, состоящей из линейных реактивных и активных элементов. Вследствие инерционности нагрузки нелинейно преобразованное колебание фильтруется. В некоторых случаях колебание на инерционной нагрузке может оказывать обратное воздействие на нелинейный элемент. Задачи, возникающие при расчете таких устройств, единого метода решений не имеют ввиду нелинейности дифференциальных уравнений. Обычно с учетом структуры конкретного устройства, свойств нелинейного элемента и инерционной нагрузки, а также формы управляющего колебания и требуемой точности подбирается подходящий приближенный метод.

Примером обратного воздействия является диодный детектор колебаний. Если же колебание на инерционной части цепи не влияет на нелинейный элемент, то возможны *обычные* методы анализа. Примером этого случая может быть анодный детектор, использующий лампу с малой проницаемостью. Здесь ограничиваемся изложением методов, имеющих достаточно общий характер применительно к цепям без обратного воздействия.

На рис. 7.19 показана структурная схема нелинейного устройства без обратного воздействия, содержащая нелинейный элемент 1 в комбинации с инерционным звеном 3. Отсутствие обратного воз-

действия подчеркивается наличием «развязывающего» элемента 2. Таким элементом может быть линейный усилитель, называемый иногда буферным каскадом. Коэффициент передачи каскада 2 принят равным единице, поскольку принципиального значения это не имеет. В реальной схеме элемент 2 в явном виде может присутствовать не всегда. Если, например, нелинейным элементом 1 является лампа с малой проницаемостью, то элемент 1 одновременно выполняет функции и развязывающего элемента 2.

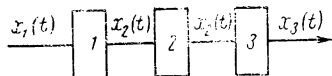


Рис. 7.19. Структурная схема нелинейного устройства без обратного воздействия

Для схемы рис. 7.19 справедливо соотношение

$$x_2(t) = f[x_1(t)].$$

Колебание  $x_3(t)$  на выходе линейной части цепи может быть найдено обычными методами, рассмотренными в гл. V. Особенность рассматриваемой задачи состоит в изменении нелинейным элементом формы воздействующего возмущения.

Если управляющее воздействие  $x_1(t)$  является импульсным, то в соответствии с теорией линейных цепей искомый результат можно представить одним из следующих способов:

$$x_3(t) = \int_0^t k(t - \tau) x_2'(\tau) d\tau; \quad (7.51)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{x_2}(\omega) \dot{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (7.52)$$

$$x_3(t) = L^{-1}[X_2(p)K(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_2(p)K(p) e^{pt} dp. \quad (7.53)$$

В формулах (7.51), (7.52) и (7.53) введены следующие обозначения:

$\dot{G}_{x_2}(\omega)$  — спектральная функция нелинейно преобразованного колебания, которую находят в соответствии с формулой (7.7);

$X_2(p) = \int_0^{\infty} f[x_1(t)] e^{-pt} dt$  — изображение нелинейно преобразованного колебания;

$k(t)$  — переходная характеристика цепи.

Если управляющее колебание  $x_1(t)$  является периодической функцией времени с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ , то, используя формулы (7.8), искомого колебание  $x_3(t)$  можно получить в следующем виде:

$$x_3(t) = \frac{X_{20}}{2} K(0) + \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{X}_{2i} \dot{K}(i\Omega) e^{i\Omega t}. \quad (7.54)$$

Представить сумму (7.54) в виде компактной аналитической функции часто невозможно. Поэтому из чисто практических соображений ее приходится ограничивать конечным числом наиболее существенных слагаемых:

$$x_3(t) \approx \frac{X_{20}}{2} K(0) + \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \dot{X}_{2i} \dot{K}(i\Omega) e^{i\Omega t}. \quad (7.55)$$

Значение  $n$  зависит от требуемой точности решения задачи, а при заданной точности от быстроты убывания значений  $X_{2i}$  и  $K(i\Omega)$  с ростом  $i$ .

Многие радиотехнические процессы сводятся к нелинейным преобразованиям импульсных или периодических колебаний с их последующей линейной фильтрацией. Рассмотрим несколько характерных примеров.

**Пример 1.** На вход электрической цепи, изображенной на рис. 7.20, действует импульс напряжения треугольной формы

$$\begin{aligned} u_1 &= bt \text{ при } 0 \leq t \leq T_n; \\ u_1 &= 0 \text{ при других } t. \end{aligned}$$

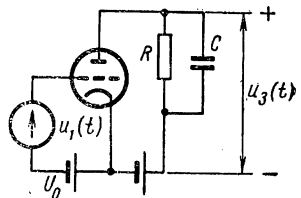


Рис. 7.20

Характеристика лампы в пределах изменения напряжения аппроксимирована полиномом второй степени. Найти напряжение  $u_3(t)$  на выходе. Реакцией этого напряжения на ток лампы пренебречь.

Так как ток через лампу по условию не зависит от  $u_3$ , то схема рис. 7.20 может быть видоизменена так, как указано на рис. 7.21. Включенный в схему замещения источник тока имеет характеристику

$$i_a = a_1 u_1 + a_2 u_1^2$$

(составляющую  $a_0$  опускаем, так как нас интересует реакция на импульс).

Для нахождения  $u_3(t)$  в принципе может быть использована любая из формул (7.51), (7.52) или (7.53). Воспользуемся первой



из них. Реакция параллельной  $RC$ -цепи на единичный скачок тока в неразветвленной части цепи выражается следующим образом:

$$k(t) = R(1 - e^{-\alpha t}),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{RC}.$$

Далее

$$i_a = \begin{cases} a_1 b t + a_2 b^2 t^2 & \text{при } 0 \leq t \leq T_n; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Выходное напряжение

$$u_3(t) = \int_0^t k(t-\tau) i_a'(\tau) d\tau.$$

Поскольку воздействующий импульс является кусочно-аналитической функцией, то и решение получается в кусочно-аналитическом виде:

а) для интервала  $0 \leq t \leq T_n$

$$u_3^*(t) = \int_0^t R(1 - e^{-\alpha(t-\tau)}) (a_1 b + 2a_2 b \tau) d\tau;$$

осуществляя элементарные операции, окончательно получим

$$u_3^*(t) = R a_1 b \left\{ t - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{a_2}{a_1} \left[ \left( t - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha t}) \right] \right\};$$

б) для  $t \geq T_n$

$$u_3^{**}(t) = u_3^*(t - T_n) e^{-\alpha(t-T_n)},$$

что после преобразования дает

$$u_3^{**}(t) = R a_1 b \left\{ T_n - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T_n}) + \frac{a_2}{a_1} \left[ \left( T_n - \frac{1}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha T_n}) \right] \right\} e^{-\alpha(t-T_n)}.$$

Пример 2. На сетке лампы, имеющей в качестве анодной нагрузки параллельный колебательный контур (рис. 7.22), действует гармоническое колебание совместно с постоянной составляющей

$$u_1(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + U_0.$$

Характеристика лампы аппроксимирована ломаной прямой, как указано на рис. 7.23. Пренебрегая проницаемостью лампы и считая, что резонансный контур имеет весьма высокую добротность, найти напряжение  $u_3(t)$  для двух случаев:

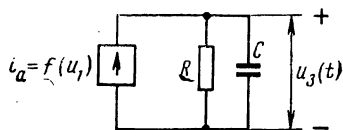


Рис. 7.21

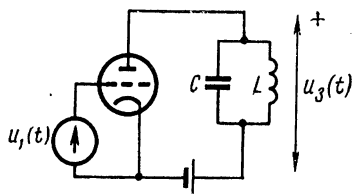


Рис. 7.22

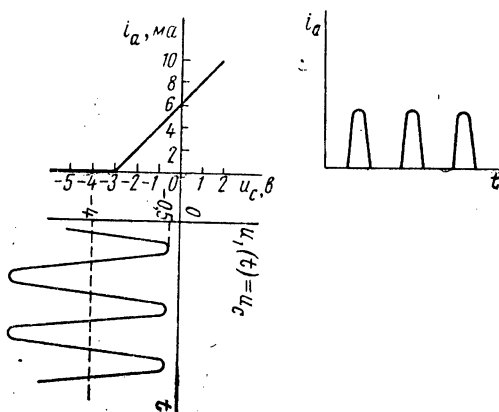


Рис. 7.23

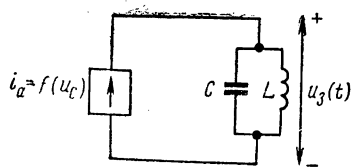


Рис. 7.24

а) контур настроен на частоту  $\omega_0$ , б) контур настроен на частоту  $3\omega_0$ .

Схема замещения устройства представлена на рис. 7.24. Источник посылает ток

$$i_a = \frac{1}{2} I_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} I_{ak} \cos(k\omega_0 t + k\varphi_0).$$

$\frac{1}{2} I_{a0}$  и  $I_{ak}$  находят в соответствии с равенствами (7.15) и (7.16) или по формулам

$$\frac{1}{2} I_{a0} = I_m \alpha_0; \quad I_k = I_m \alpha_k,$$

где  $\alpha_0$  и  $\alpha_k$  — коэффициенты, графики которых приведены на рис. 7.13.

С учетом конкретных значений действующих напряжений и заданной аппроксимации можно определить высоту импульса тока  $I_m = 5$  ма. Коэффициенты  $\alpha_0$ ,  $\alpha_k$  являются функциями угла отсечки

$$\theta = \arccos \frac{U_H - U_0}{U_m} = \arccos \frac{-3 \div 4}{3,5} \approx 65^\circ.$$

Из графиков рис. 7.13 находим

$$\alpha_0 \approx 0,3; \quad \alpha_1 \approx 0,42; \quad \alpha_2 \approx 0,27; \quad \alpha_3 \approx 0,12.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} I_{a0} \approx 1,5 \text{ ма}; \quad I_{a1} \approx 2,2 \text{ ма};$$

$$I_{a2} \approx 1,35 \text{ ма}; \quad I_{a3} \approx 0,6 \text{ ма}.$$

Аналогичным образом можно найти амплитуды гармоник и более высокого порядка. Ограничимся приближенным представлением тока суммой нулевой составляющей и первых трех гармоник:

$$i_a(t) \approx [1,5 + 2,2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + 1,35 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0) + \\ + 0,6 \cos(3\omega_0 t + 3\varphi_0)] \text{ ма}.$$

а) Если контур настроен на частоту  $\omega_0$  и имеет резонансное сопротивление  $R_{oe}(\omega_0)$  ом, то из всех составляющих тока, протекающего через контур, напряжение на нем будет создавать лишь составляющая  $2,2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  ма. Остальные в силу высокой добротности контура заметного напряжения не создадут. Таким образом, искомое напряжение будет следующим:

$$u_s(t) \approx R_{oe}(\omega_0) 2,2 \cdot 10^{-3} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ в}.$$

Нелинейный элемент в комбинации с резонансным контуром в этом случае является усилительным устройством. Такого рода устройства называют резонансными усилителями больших колебаний.

При использовании избирательной нагрузки, какой является резонансный контур, вся цепь в целом ведет себя, как квазилинейная. Квазилинейность проявляется в том, что на выходе, несмотря на нелинейные преобразования, присутствует колебание единственной частоты, равной частоте управляющего колебания. Вместе с тем в силу нелинейного преобразования амплитуда выходного колебания может и не быть линейно связанной с амплитудой управляющего колебания. Эта зависимость в общем случае определяется формулой

$$U_{3m} = R_{oe}(\omega_0) \alpha_1(\theta) I_m(U_m) = R_{oe}(\omega_0) I_{a1}(U_m).$$

б) Если контур настроен на частоту  $3\omega_0$  и имеет резонансное сопротивление  $R_{oe}(3\omega_0)$  ом, то аналогично случаю а, напряжение на контуре точно определяется третьей гармоникой протекающего тока:

$$u_3(t) \approx R_{oe}(3\omega_0) 0,6 \cdot 10^{-3} \cos(3\omega_0 t + 3\varphi_0) \text{ в.}$$

Здесь случай так называемого умножения частоты. В данном примере происходит умножение в три раза. Настроивая контур на другие кратные  $\omega_0$  частоты, можно получить колебание с частотой, умноженной в другое целое число раз. При этом всегда необходимо обеспечивать такую добротность контура, т. е. такую

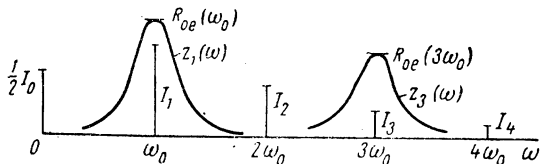


Рис. 7.25

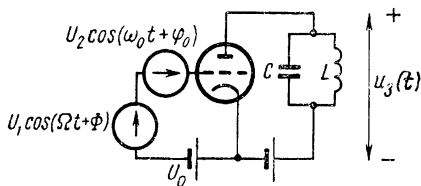


Рис. 7.26

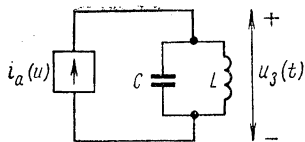


Рис. 7.27

полосу пропускания, при которой падение напряжения от соседних гармоник тока было бы пренебрежимо малым.

Пример 2 (пп. а и б) иллюстрирован на рис. 7.25.

Пример 3. Рассмотрим процесс *амплитудной модуляции*. (Понятие амплитудно-модулированного колебания дано в § 1.12.)

Пусть к сетке лампы, характеристика которой описывается полиномом второй степени

$$i_a = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2,$$

приложено напряжение в виде постоянной составляющей и двух гармонических колебаний:

$$u = U_0 + U_1 \cos(\Omega t + \Phi) + U_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0);$$

причем  $\Omega \ll \omega_0$ . Лампа работает на резонансный высокочастотный контур, настроенный на частоту  $\omega_0$  и имеющий полосу пропускания  $2\Delta\omega > 2\Omega$ . Найти напряжение  $u_3(t)$  (рис. 7.26).

Будем полагать, как и ранее, что проницаемость лампы мала. Тогда можно представить схему замещения в виде рис. 7.27. На этом, рисунке

$$\begin{aligned}
 i_a = & a_0 + a_1 [U_1 \cos(\Omega t + \Phi) + U_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] + \\
 & + a_2 [U_1 \cos(\Omega t + \Phi) + U_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)]^2 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 \times \\
 & \times (U_1^2 + U_2^2) + a_1 U_1 \cos(\Omega t + \Phi) + a_1 U_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\
 & + \frac{1}{2} a_2 U_1 U_2 \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi] + \frac{1}{2} a_2 U_1 U_2 \times \\
 & \times \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] + \frac{1}{2} U_1^2 a_2 \cos(2\Omega t + 2\Phi) + \\
 & + \frac{1}{2} U_2^2 a_2 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0).
 \end{aligned}$$

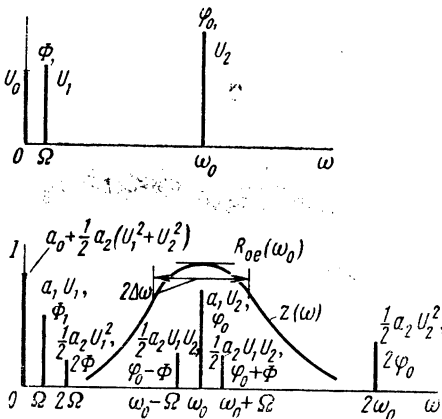


Рис. 7.28

Спектральные диаграммы входного напряжения и тока, а также резонансная характеристика  $z(\omega)$  контура показаны на рис. 7.28. Так как контур обладает избирательным по частоте свойством, на нем образуется напряжение от трех компонент тока с близкими частотами  $\omega_0 - \Omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$ . Остальные составляющие тока не создают заметного напряжения. Для указанных трех компонент тока сопротивление контура приблизительно одинаково и близко к  $R_{oe}(\omega_0) = R_{oe}$ . Следовательно, напряжение на контуре

$$\begin{aligned}
 u_3(t) \approx & R_{oe} \left\{ a_1 U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} a_2 U_1 U_2 \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \right. \\
 & \left. + \varphi_0 - \Phi] + \frac{1}{2} a_2 U_1 U_2 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] \right\}.
 \end{aligned}$$

Эту сумму легко привести к виду

$$u_3(t) = R_{oe} a_1 U_1 [1 + M \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $M = \frac{a_2}{a_1} U_2$ .

Полученное выражение по своей структуре совпадает с выражением амплитудно-модулированного колебания. Закон модуляции определяется низкочастотной составляющей входного колебания. Глубина модуляции  $M$  пропорциональна его амплитуде.

Пример 4. Процессом, обратным амплитудной модуляции, является амплитудное детектирование, в результате которого выделяется колебание, пропорциональное огибающей высокочастотного модулированного колебания.

Рассмотрим воздействие простейшего амплитудно-модулированного колебания

$$u_1(t) = U_1 [1 + M_1 \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

на цепь (рис. 7.29), состоящую из лампы с характеристикой

$$i_a = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

работающей на нагрузку в виде фильтра нижних частот.

Заданное амплитудно-модулированное колебание удобно представить в виде суммы трех простых гармонических составляющих:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + U_1 \frac{M_1}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi] + U_1 \frac{M_1}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi].$$

В соответствии с аппроксимацией анодного тока в его составе могут быть комбинационные колебания порядка не выше второго. Пользуясь табл. 7.2, составим сумму элементарных комбинационных составляющих анодного тока:

$$\begin{aligned} i_a = & a_0 + a_1 U_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + a_1 U_1 \frac{M_1}{2} \cos[(\omega_0 \pm \Omega)t + \\ & + \varphi_0 \pm \Phi] + \frac{1}{2} a_2 \left[ U_1^2 + 2 \left( U_1 \frac{M_1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} a_2 U_1^2 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0) + \\ & + \frac{1}{2} a_2 \left( U_1 \frac{M_1}{2} \right)^2 \cos[2(\omega_0 \pm \Omega)t + 2(\varphi_0 \pm \Phi)] + \\ & + 2a_2 U_1 U_1 \frac{M_1}{2} \cos(\Omega t + \Phi) + a_2 U_1 \frac{M_1}{2} U_1 \frac{M_1}{2} \cos(2\Omega t + 2\Phi) + \\ & + a_2 U_1 U_1 \frac{M_1}{2} \cos[(2\omega_0 \pm \Omega)t + 2\varphi_0 \pm \Phi] + \\ & + a_2 U_1 \frac{M_1}{2} U_1 \frac{M_1}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0). \end{aligned}$$

Это выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} i_a = & a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_1^2 \left( 1 + \frac{M_1^2}{2} \right) + a_2 U_1^2 M_1 \cos(\Omega t + \Phi) + \\ & + a_2 U_1^2 \frac{M_1^2}{4} \cos(2\Omega t + 2\Phi) + a_1 U_1 [1 + M_1 \cos(\Omega t + \Phi)] \times \end{aligned}$$

$$\times \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} a_2 U_1^2 \left(1 + \frac{M_1^2}{2}\right) \left[1 + \frac{M_1}{1 + \frac{M_1^2}{2}} \cos(\Omega t + \Phi) + \frac{M_1^2}{4 \left(1 + \frac{M_1^2}{2}\right)} \cos(2\Omega t + 2\Phi)\right] \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0).$$

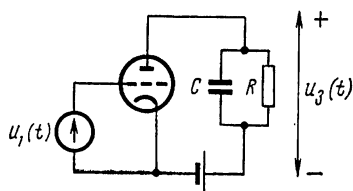


Рис. 7.29

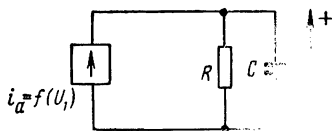


Рис. 7.30

Такой ток посылает источник в эквивалентной схеме рис. 7.30. В состав  $i_a$  входят три группы колебаний:

$$i_a = i_0 + i_{\text{нч}} + i_{\text{вч}},$$

где

$$i_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_1 \left(1 + \frac{M_1^2}{2}\right) -$$

нулевая составляющая;

$$i_{\text{нч}} = a_2 U_1^2 M_1 \cos(\Omega t + \Phi) + a_2 U_1^2 \frac{M_1^2}{4} \cos(2\Omega t + 2\Phi) -$$

низкочастотная составляющая;

$$i_{\text{вч}} = a_1 U_1 [1 + M_1 \cos(\Omega t + \Phi)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} a_2 U_1 \times \\ \times \left[1 + \frac{M_1}{1 + \frac{M_1^2}{2}} \cos(\Omega t + \Phi) + \frac{M_1^2}{4 \left(1 + \frac{M_1^2}{2}\right)} \cos(2\Omega t + 2\Phi)\right] \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0) -$$

высокочастотная составляющая.

Спектральный состав управляющего колебания и тока изображен на рис. 7.31, а, б. На рис. 7.31, б изображена также частотная зависимость модуля сопротивления нагрузки  $z(\omega)$ , на которой образуется напряжение  $u_3(t)$ . Как видно из рис. 7.31, б, на сопротивлении  $z(\omega)$  будет выделяться лишь низкочастотная составляющая напряжения и напряжение, вызванное нулевой составляющей тока.

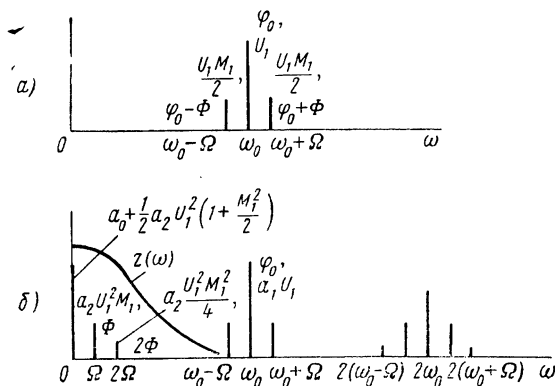


Рис. 7.31

Низкочастотная составляющая тока, в свою очередь, состоит из двух компонент. Первая из них совпадает по частоте и сдвигу фазы с огибающей модулированного колебания, а по амплитуде пропорциональна глубине модуляции. Следовательно, это — *полезная составляющая детектирования*. Компонента низкочастотного тока с удвоенной частотой модуляции является *вредной*, искажающей точное воспроизведение закона огибающей. Надлежащим выбором характеристики нелинейного элемента при детектировании стремятся уменьшить амплитуду этой вредной составляющей.

**Пример 5.** Рассмотрим процесс так называемого преобразования частоты. Преобразование частоты сводится к изменению несущей частоты усиливаемого колебания, чаще всего к ее понижению. Закон модуляции колебания, в котором заложено сообщение, при этом сохраняется неизменным.

Пусть к нелинейному элементу, характеристика которого аппроксимирована ломаной прямой (рис. 7.32), приложено гармоническое колебание

$$u_{16}(t) = U_6 \cos(\omega_6 t + \varphi_6)$$

с большой амплитудой и малое амплитудно-модулированное колебание

$$\Delta u_1(t) = U_\Delta(t) \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta),$$



где

$$U_{\Delta}(t) = U_{\Delta} \left[ 1 + \sum_k M_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \right].$$

Для определенности будем считать, что частоты  $\omega_{\delta}$  и  $\omega_{\Delta}$  находятся в соотношениях

$$\omega_{\delta} > \omega_{\Delta}$$

и

$$\omega_{\delta} - \omega_{\Delta} \gg \Omega_B,$$

где  $\Omega_B$  — высшая частота колебаний, сумма которых определяет закон модуляции.

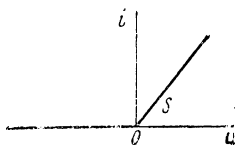


Рис. 7.32

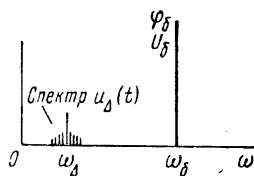


Рис. 7.33

Спектральный состав управляющего колебания отображен диаграммой рис. 7.33. В соответствии с формулой (7.44) получим выражение для тока в следующем виде:

$$i \approx i_{\delta} + \Delta i = f[U_{\delta} \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta})] + f'_{\omega} [U_{\delta} \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta})] U_{\Delta}(t) \cos(\omega_{\Delta} t + \varphi_{\Delta}).$$

В этом выражении

$$i_{\delta} = f[U_{\delta} \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta})] = \frac{1}{2} I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos(k\omega_{\delta} t + k\varphi_{\delta}).$$

Нулевую составляющую и амплитуды гармоник тока  $i_{\delta}$  находят совершенно так же, как в примере 2:

$$\frac{1}{2} I_0 = I_m \alpha_0; \quad I_1 = I_m \alpha_1; \quad I_2 = I_m \alpha_2; \quad I_3 = I_m \alpha_3.$$

В данном примере  $U_0 = U_n = 0$ , т. е. угол отсечки  $\theta = 90^\circ$ . Следовательно (рис. 7.13),  $\alpha_0 \approx 0,32$ ;  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $\alpha_2 \approx 0,22$ ;  $\alpha_3 = 0$ . Высота импульса тока  $I_m = S U_{\delta}$ .

Для определения спектрального состава колебания

$$\Delta i = f'_{\omega} [U_{\delta} \cos(\omega_{\delta} t + \varphi_{\delta})] U_{\Delta}(t) \cos(\omega_{\Delta} t + \varphi_{\Delta})$$

следует разложить  $f'_u [U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)]$  на гармонические составляющие. На рис. 7.34 изображена зависимость  $f'_u(u)$  и закон изменения этой производной во времени  $f'_u(t)$  под действием бóльшей составляющей приложенного напряжения.

Периодическую последовательность прямоугольных импульсов производной можно представить рядом

$$f'_u [U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} Y_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^* \cos(k\omega_0 t + k\varphi_0),$$

где

$$\frac{1}{2} Y_0^* = \frac{S}{2},$$

$$Y_k^* = \frac{2}{T} \dot{G}_{f'_u(u)}(k\omega_0) = \frac{\omega_0}{\pi} \dot{G}_{f'_u(u)}(k\omega_0).$$

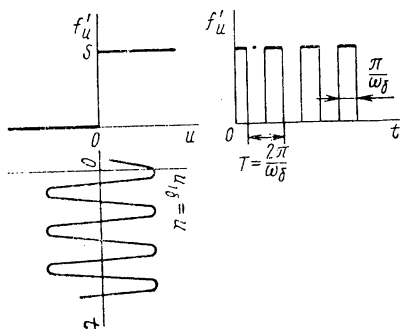


Рис. 7.34

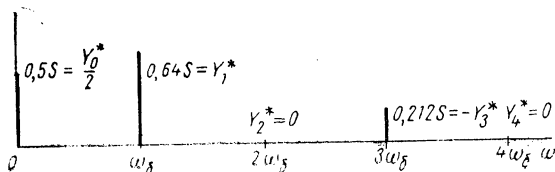


Рис. 7.35

Нетрудно вычислить, что

$$Y_k^* = \frac{2S}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

При четных значениях  $k$  амплитуды гармоник равны нулю. Спектральный состав производной  $f'_u(t)$  изображен на рис. 7.35. Окончательно:

$$\begin{aligned}
 i &\approx i_\delta + \Delta i = \alpha_0 I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k I_m \cos(k\omega_\delta t + k\varphi_\delta) + \\
 &+ \left[ \frac{S}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \cos(k\omega_\delta t + k\varphi_\delta) \right] U_\Delta(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_\Delta) = \\
 &= \alpha_0 I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k I_m \cos(k\omega_\delta t + k\varphi_\delta) + \frac{S}{2} U_\Delta(t) \cos(\omega_\Delta t + \varphi_\Delta) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} U_\Delta(t) \frac{S}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \cos[(k\omega_\delta \pm \omega_\Delta)t + k\varphi_\delta \pm \varphi_\Delta].
 \end{aligned}$$

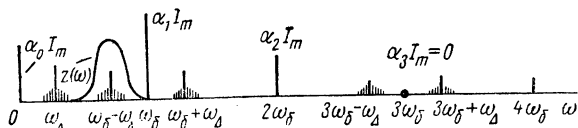


Рис. 7.36

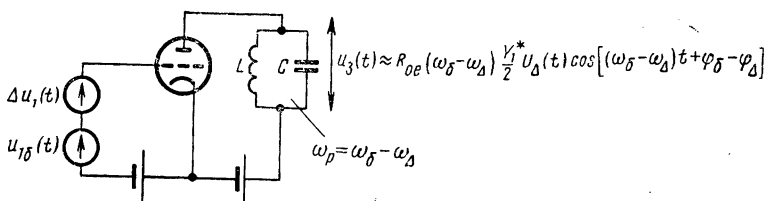


Рис. 7.37

Спектральный состав тока до  $k=3$  изображен на рис. 7.36. Используя избирательную нагрузку, можно выделить колебание с преобразованной несущей частотой (например,  $\omega_\delta - \omega_\Delta$ ,  $\omega_\delta + \omega_\Delta$  и т. д.). Выделенное колебание имеет закон модуляции, совпадающий с законом модуляции малого управляющего колебания. На рис. 7.36 указана частотная зависимость модуля сопротивления избирательной нагрузки  $Z(\omega)$ . Простейшая схема преобразователя частоты изображена на рис. 7.37. Нагрузкой анодной цепи является резонансный контур с частотой настройки  $\omega_p = \omega_\delta - \omega_\Delta$  и полосой пропускания, достаточной для воспроизведения закона модуляции колебания тока преобразованной частоты.

ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ  
НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

## § 8.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Как и ранее, в данной главе нелинейные элементы безынерционны и имеют характеристику  $y=f(x)$ , однозначно связывающую выходной эффект с входным воздействием. Входное воздействие является случайным процессом.

Определение многомерного закона распределения процесса на выходе нелинейного элемента явилось бы полным решением задачи. Однако определение многомерного закона во многих случаях оказывается сложной практически неразрешимой задачей. Даже при нормальном законе распределения входного процесса задача решается далеко не всегда, так как при нелинейном преобразовании результирующий процесс перестает быть нормальным, и для его описания требуется уже более чем двумерное распределение. Но во многих задачах многомерное распределение не требуется, потому что при оценках качества многих устройств, например усилителей и преобразователей колебаний, важную роль играют энергетические характеристики колебаний на их входе и выходе, т. е. дисперсия, функция корреляции, энергетический спектр. В результате этого в большом числе задач с нелинейными элементами достаточно исследование преобразований первых и вторых моментных функций или одномерных и двумерных законов распределения.

Известны три основных метода решения задач на преобразование случайных колебаний нелинейными безынерционными устройствами: а) *прямой метод*, б) *метод огибающих*, в) *метод характеристических функций* (или контурных интегралов).

Выбор метода зависит от вида нелинейной зависимости, характеризующей нелинейный элемент, от закона распределения входного процесса, а также от допущений, которые могут быть сделаны в рамках конкретно поставленной задачи.

## § 8.2. ПРЯМОЙ МЕТОД

Прямой метод состоит в отыскании закона распределения преобразованного процесса по известному закону распределения входного процесса и заданной характеристике нелинейного элемента либо в определении минимально необходимого (по роду задачи) числа моментных функций.

В наиболее простом случае, когда достаточен одномерный закон, входное воздействие  $X(t)$  и выходной эффект  $Y(t)$  в соответ-

ствии с правилами преобразования случайных величин имеют следующее соотношение вероятностей:

$$P(Y \leq y) = P(y) = P[x \in A(y)], \quad (8.1)$$

где  $x \in A(y)$  символизирует множество значений  $x$  на входе, соответствующих заданному значению  $y$  на выходе нелинейного элемента. Вид множества  $A(y)$  определяется конкретной аппроксимацией  $y = f(x)$  нелинейного элемента. При аппроксимации, обеспечивающей взаимно однозначное соответствие  $x$  и  $y$ , соотношение (8.1) принимает вид

$$P(y) = P[x = F(y)],$$

где  $F(y)$  — функция, определяемая решением  $y = f(x)$  относительно  $x$ .

Плотность вероятности мгновенных значений на выходе нелинейного элемента с произвольной характеристикой имеет вид

$$p_y(y) = \frac{d}{dy} P(y) = \frac{d}{dy} P[x \in A(y)]. \quad (8.2)$$

При взаимно однозначном соответствии  $x$  и  $y$  соотношение (8.2) принимает вид

$$p_y(y) = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{x=F(y)} p_x(x) dx = p_x[x = F(y)] \frac{dF(y)}{dy}. \quad (8.3)$$

В соотношении (8.3) производная  $\frac{dF(y)}{dy}$  берется по модулю, ибо плотность вероятности не может быть отрицательной. Соотношения (8.1) и (8.2) являются основными при вычислении одномерного закона распределения выходного эффекта.

Пример 1. Вольтамперная характеристика имеет следующую аппроксимацию:

$$i(u) = \begin{cases} i_0 - 2 \frac{i_0}{U_n} u + \frac{i_0}{U_n^2} u^2 & \text{при } u \geq U_n; \\ 0 & \text{при } u < \bar{U}_n. \end{cases}$$

График этой зависимости приведен на рис. 8.1, а. Входное напряжение имеет нормальное распределение мгновенных значений с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_u^2$ :

$$p_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right).$$

Мощность колебания невелика, так что выполняется соотношение

$$|U_n| > 3\sigma_u.$$

Найти закон распределения тока.

Поскольку дисперсия  $\sigma_u^2$  мала, выбросы мгновенных значений за уровень  $u = U_H$  маловероятны, в результате чего заданная аппроксимация связывает ток с управляющим напряжением *взаимно* однозначно. В связи с этим для аппроксимации достаточна ее первая строчка.

С учетом сделанных замечаний, воспользовавшись соотношением (8.3), получаем

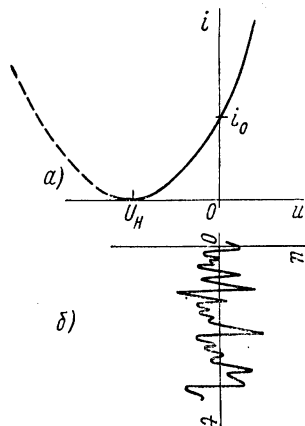


Рис. 8.1

$$p_i(i) = p_u[u(i)] \frac{du(i)}{di},$$

где

$$u(i) = U_H \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{i}{i_0}} \right]$$

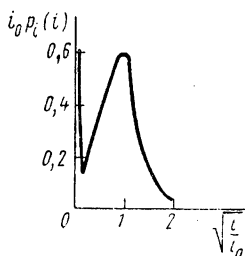


Рис. 8.2

получается решением относительно  $u$  уравнения, аппроксимирующего характеристику. Для того чтобы выдержать взаимную однозначность, следует отбросить знак «+» перед корнем, исключив таким образом левую ветвь, показанную на рис. 8.1 пунктиром. Тогда

$$u(i) = U_H \left[ 1 - \sqrt{\frac{i}{i_0}} \right]$$

и

$$\frac{du(i)}{di} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{U_H}{\sqrt{i i_0}}.$$

В результате окончательно получим

$$p_i(i) = \frac{|U_H|}{2\sqrt{2\pi} \sigma_u i_0 \sqrt{\frac{i}{i_0}}} \exp \left[ -\frac{U_H^2 \left( \sqrt{\frac{i}{i_0}} - 1 \right)^2}{2\sigma_u^2} \right].$$

Ориентировочный график полученной плотности как функции  $\sqrt{\frac{i}{i_0}}$  при  $\frac{|U_H|}{\sigma_u} = 3$  показан на рис. 8.2.

Если не накладывать ограничения на  $\sigma_u$ , т. е. решать задачу строго, то для определения  $p_i(i)$  следует пользоваться методом согласно соотношений (8.1) и (8.2). В соответствии с ними можно выразить вероятность значений  $i$  случайного тока  $I$  следующим образом:

$$P[I_j \leq i] = \begin{cases} 0 & \text{при } i < 0; \\ P[U < U_H] + P\left[U_H \leq U < U_H \left(1 - \sqrt{\frac{i}{i_0}}\right)\right] & \text{при } i \geq 0 \end{cases}$$

или

$$P[I \leq i] = \begin{cases} 0 & \text{при } i < 0; \\ P[U < U_H] + \int_{U_H}^{U_H \left(1 - \sqrt{\frac{i}{i_0}}\right)} p_u(u) du & \text{при } i \geq 0. \end{cases}$$

Дифференцируя вероятность по  $i$ , получаем искомую плотность вероятности

$$p_i(i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i < 0; \\ P(U < U_H) \delta(i) + \frac{|U_H|}{2\sqrt{2\pi} \sigma_u i_0 \sqrt{\frac{i}{i_0}}} \exp\left[-\frac{U_H^2 \left(\sqrt{\frac{i}{i_0}} - 1\right)^2}{2\sigma_u^2}\right] & \text{при } i \geq 0 \end{cases}$$

или

$$p_i(i) = P(U < U_H) \delta(i) + \left\{ \frac{|U_H|}{2\sqrt{2\pi} \sigma_u i_0 \sqrt{\frac{i}{i_0}}} \exp\left[-\frac{U_H^2 \left(\sqrt{\frac{i}{i_0}} - 1\right)^2}{2\sigma_u^2}\right] \right\} 1(i),$$

где  $\delta(i)$  — дельта-функция;

$1(i)$  — единичный скачок.

Сравнивая последнее выражение для  $p_i(i)$  с приближенным, можно установить различие в величине слагаемого  $P(U < U_H) \delta(i)$ . Эта величина тем меньше, чем больше  $\frac{|U_H|}{\sigma_u}$ .

Преобразованный одномерный закон (8.2) позволяет найти требуемые моменты распределения мгновенного значения.

Среднее значение может быть вычислено двумя эквивалентными способами:

$$\bar{Y} = M_1(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy \quad (8.4)$$

или

$$\bar{Y} = M_1(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_x dx. \quad (8.5)$$

Очевидно, нелинейное преобразование закона распределения нелинейно преобразует и его среднее. В частности, если процесс  $X(t)$  центрирован, то  $Y(t)$  может содержать среднее, отличное от нуля.

Пример 2. На нелинейный элемент с характеристикой

$$i(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0; \\ Su & \text{при } u \geq 0 \end{cases}$$

действует нормальное случайное напряжение с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma_u^2$ . Найти среднее значение тока.

В соответствии с соотношением (8.5) получим

$$\begin{aligned} \bar{I} = M_1(I) &= \int_{-\infty}^{\infty} i(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right) du = \\ &= \frac{S}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{u}{\sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right) du. \end{aligned}$$

Откуда окончательно следует

$$\bar{I} = \frac{S\sigma_u}{\sqrt{2\pi}}.$$

Аналогичным образом можно вычислить моменты более высоких порядков одномерного распределения. В рамках энергетических характеристик процесса наибольшее значение имеет вторая моментная функция, выражающая мощность колебания, выделяемую на единичной нагрузке:

$$\bar{Y}^2 = M_2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_y(y) dy \quad (8.6)$$

или эквивалентно этому

$$\bar{Y}^2 = M_2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) p_x(x) dx. \quad (8.7)$$

Следует иметь в виду, что при нелинейном преобразовании колебания его закон распределения на выходе и соответствующие ему моментные функции зависят не только от свойств собственно случайного управляющего колебания и аппроксимации характеристики, но и от средней составляющей управляющего колебания,



являющейся величиной неслучайной. Поэтому как закон распределения, так и его моментные функции находятся с учетом  $\bar{X}$  (если последнее по условию задачи отлично от нуля). Иными словами, в расчет должен приниматься закон распределения колебания, включающий среднее значение.

Дисперсию преобразованного колебания можно найти в соответствии с формулой (2.6):

$$\sigma_y^2 = M_2(Y) - [M_1(Y)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_y(y) dy - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy \right]^2 \quad (8.8)$$

или

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) p_x(x) dx - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_x(x) dx \right]^2. \quad (8.9)$$

При необходимости могут быть вычислены моменты распределения и более высоких порядков:

$$\bar{Y}^n = M_n(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^n p_y(y) dy \quad (8.10)$$

или

$$\bar{Y}^n = M_n(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x) P_x(x) dx. \quad (8.11)$$

Пример 3. По условиям примера 2 (стр. 259) найти дисперсию  $\sigma_i^2$  тока через нелинейный элемент. Вначале по соотношению (8.7) найдем вторую моментную функцию распределения тока:

$$\begin{aligned} \bar{I}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} [i(u)]^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right) du = \\ &= \frac{S^2}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \int_0^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right) du. \end{aligned}$$

Определенный интеграл равен  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_u^3$ . Поэтому искомая моментная функция

$$\bar{I}^2 = \frac{S^2 \sigma_u^2}{2}.$$

Соотношение (8.8) позволяет далее найти дисперсию  $\sigma_i^2$ :

$$\sigma_i^2 = \bar{I}^2 - (\bar{I})^2.$$

Значение  $\bar{I} = \frac{S\sigma_u}{\sqrt{2\pi}}$  берем из примера 2. Тогда

$$\sigma_i^2 = \frac{S^2\sigma_u^2}{2} - \frac{S^2\sigma_u^2}{2\pi} = S^2\sigma_u^2 \frac{\pi-1}{2\pi}.$$

Смешанная моментная функция второго порядка и связанная с нею корреляционная функция (§ 2.3) характеризуют статистическую связь мгновенных значений в двух произвольных сечениях. Для их определения необходимо располагать *двумерным* законом распределения на входе, так как

$$\overline{Y_{t_1}Y_{t_2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_{t_1}y_{t_2}p_y(y_{t_1}, y_{t_2}) dy_{t_1}dy_{t_2} \quad (8.12)$$

или

$$\overline{Y_{t_1}Y_{t_2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{t_1})f(x_{t_2})P_x(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1}dx_{t_2}. \quad (8.13)$$

В случае стационарного процесса

$$\overline{YY_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x_\tau)p_x(x, x_\tau) dx dx_\tau. \quad (8.14)$$

По смешанному моменту второго порядка (8.14) и значению среднего (8.4, 8.5) может быть найдена и корреляционная функция. Согласно теории вероятностей

$$\overline{YY_\tau} = R_y(\tau) + (\bar{Y})^2.$$

Поэтому функция корреляции выразится следующим образом:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x_\tau)p_x(x, x_\tau) dx dx_\tau - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_x(x) dx \right]^2. \quad (8.15)$$

По (8.15) может быть получена нормированная функция корреляции преобразованного колебания

$$\rho_y^r(\tau) = \frac{R_y(\tau)}{\sigma_y^2}. \quad (8.16)$$

**Пример 4.** Найти функцию корреляции  $R_i(\tau)$  тока через нелинейный элемент с характеристикой

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < 0; \\ Su, & u \geq 0 \end{cases}$$

при действии на входе стационарного нормального колебания с нулевым средним значением, дисперсией  $\sigma^2$  и нормированной автокорреляционной функцией  $\rho = \rho(\tau)$ .

В соответствии с (8.14) имеем

$$\overline{\Pi_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i(u) i(u_\tau) \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[ -\frac{u^2 - 2\rho uu_\tau + u_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] dud u_\tau$$

или

$$\overline{\Pi_\tau} = \frac{S^2}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty \int_0^\infty uu_\tau \exp \left[ -\frac{u^2 - 2\rho uu_\tau + u_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] dud u_\tau.$$

Это выражение можно привести к виду

$$\begin{aligned} \overline{\Pi_\tau} &= \frac{S^2}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^\infty u_\tau \exp \left( -\frac{u_\tau^2}{2\sigma^2} \right) du_\tau \times \\ &\times \int_0^\infty u \exp \left[ -\frac{(u-\rho u_\tau)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] du, \end{aligned}$$

в котором внутренний интеграл видоизменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u \exp \left[ -\frac{(u-\rho u_\tau)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] du &= \int_{-\rho u_\tau}^\infty (x + \rho u_\tau) \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] dx = \\ &= \sigma^2(1-\rho^2) \exp \left[ -\frac{\rho^2 u_\tau^2}{2(1-\rho^2)\sigma^2} \right] + \\ &+ \sigma \rho u_\tau \sqrt{1-\rho^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \Phi \left( \frac{\rho u_\tau}{\sqrt{2(1-\rho^2)}\sigma} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx.$$

После этого промежуточное выражение для смешанного момента второго порядка принимает следующий вид:

$$\overline{\Pi_\tau} = \frac{S^2}{2\pi} \left\{ \frac{\rho \sqrt{\pi}}{\sigma \sqrt{2}} \int_0^\infty u_\tau^2 \exp \left( -\frac{u_\tau^2}{2\sigma^2} \right) du_\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^\infty u_\tau \exp \left[ -\frac{u_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] du_\tau + \\
& + \frac{\rho \sqrt{\pi}}{\sigma \sqrt{2}} \int_0^\infty u_\tau^2 \exp \left( -\frac{u_\tau^2}{2\sigma^2} \right) \Phi \left( \frac{\rho u_\tau}{\sqrt{2(1-\rho^2)} \sigma} \right) du_\tau \}.
\end{aligned}$$

Первый интеграл этого выражения уже встречался в примере на стр. 260. Его значение равно  $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma^3$ . Второй интеграл вычисляется элементарно. Третий интеграл может быть приведен к виду

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty u_\tau^2 \exp \left( -\frac{u_\tau^2}{2\sigma^2} \right) \Phi \left( \frac{\rho u_\tau}{\sqrt{2(1-\rho^2)} \sigma} \right) du_\tau = \\
& = \frac{2\sqrt{2} \sigma^3 (1-\rho^2)^{3/2}}{\rho^3} \int_0^\infty x^2 \exp(-\mu^2 x^2) \Phi(x) dx,
\end{aligned}$$

где  $\mu = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}$ , после чего вычислен с помощью табличного (см., например [20], позиция 6.292). Его окончательное значение следующее:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sigma^3 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} + \frac{\sqrt{2(1-\rho^2)}\rho}{\sqrt{\pi}} \sigma^3.$$

После подстановок и преобразований получим выражение для  $\overline{\Pi}_\tau$ :

$$\overline{\Pi}_\tau = \frac{S^2 \sigma^2}{2\pi} \left[ \rho \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \rho \right) + \sqrt{1-\rho^2} \right].$$

Далее, пользуясь соотношением (8.15) и полученным в примере на стр. 260 значением среднего, можно выразить функцию корреляции

$$R_i(\tau) = \frac{S^2 \sigma^2}{2\pi} \left[ \rho \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \rho \right) + \sqrt{1-\rho^2} - 1 \right]$$

и нормированную функцию корреляции

$$\rho_i(\tau) = \frac{R_i(\tau)}{R_i(0)} = \frac{1}{\pi-1} \left[ \rho \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \rho \right) + \sqrt{1-\rho^2} - 1 \right].$$

**Пример 5.** Найти функцию корреляции  $R_i(\tau)$  тока через лампу, характеристика которой аппроксимирована полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

при действии на входе нормального колебания  $U(t)$  с нулевым средним. Для смешанного момента второго порядка имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Pi_\tau} &= \overline{(a_0 + a_1 U + a_2 U^2)(a_0 + a_1 U_\tau + a_2 U_\tau^2)} = \overline{a_0^2} + \overline{a_0 a_1 U} + \\ &+ \overline{a_0 a_2 U^2} + \overline{a_0 a_1 U_\tau} + \overline{a_1 U U_\tau} + \overline{a_1 a_2 U^2 U_\tau} + \overline{a_0 a_2 U_\tau^2} + \\ &+ \overline{a_1 a_2 U U_\tau^2} + \overline{a_2^2 U^2 U_\tau^2} = a_0^2 + 2a_0 a_2 \sigma_u^2 + a_1^2 R_u(\tau) + \\ &+ \overline{a_1 a_2 U^2 U_\tau} + \overline{a_1 a_2 U U_\tau^2} + \overline{a_2^2 U^2 U_\tau^2}. \end{aligned}$$

В полученное выражение, наряду с постоянным слагаемым, не зависящим от  $\tau$ , и слагаемым, пропорциональным функции корреляции управляющего колебания  $R_u(\tau)$ , входят пара смешанных моментных функций третьего и смешанная моментная функция четвертого порядков. Их можно найти, пользуясь формулой (2.49), связывающей моментные функции произвольного порядка с характеристической. Выражение для характеристической функции двумерного нормального распределения было получено в примере на стр. 125:

$$\chi(\eta, \eta_\tau) = \exp \left[ -\frac{\sigma_u^2}{2} (\eta^2 + 2\rho_u \eta \eta_\tau + \eta_\tau^2) \right].$$

Пользуясь этим соотношением, получим

$$\overline{U U_\tau^2} = (-j)^3 \frac{d^3}{d\eta d\eta_\tau^2} \exp \left[ -\frac{\sigma_u^2}{2} (\eta^2 + 2\rho_u \eta \eta_\tau + \eta_\tau^2) \right] \Big|_{\eta=\eta_\tau=0}.$$

Произведя дифференцирование, легко убедиться, что  $\overline{U U_\tau^2} = 0$  и  $U^2 U_\tau = 0$ .

Далее найдем смешанную моментную функцию четвертого порядка:

$$\overline{U^2 U_\tau^2} = (-j)^4 \frac{d^4}{d\eta^2 d\eta_\tau^2} \exp \left[ -\frac{\sigma_u^2}{2} (\eta^2 + 2\rho_u \eta \eta_\tau + \eta_\tau^2) \right] \Big|_{\eta=\eta_\tau=0}$$

Ее вычисление дает

$$\overline{U^2 U_\tau^2} = \sigma^4 (1 + 2\rho_u^2).$$

Окончательно будем иметь

$$\overline{\Pi_\tau} = a_0^2 + 2a_0 a_2 \sigma_u^2 + a_2^2 \sigma_u^4 + a_1^2 \sigma_u^2 \rho_u(\tau) + 2a_2^2 \sigma_u^4 \rho_u^2(\tau).$$

Функция корреляции  $R_i(\tau)$  может быть найдена, как обычно:

$$R_i(\tau) = \overline{\Pi_\tau} - (\overline{I})^2.$$

Так как

$$\bar{I} = \overline{a_0 + a_1 U + a_2 U^2} = a_0 + a_2 \sigma_u^2,$$

то

$$R_I(\tau) = a_1^2 \sigma_u^2 \rho_u(\tau) + 2a_2^2 \sigma_u^4 \rho_u^2(\tau).$$

В случае, когда задача о нелинейном преобразовании колебания ограничена вычислением смешанного момента второго порядка или корреляционной функции, прямой метод часто называют методом корреляций. Метод корреляций применяется весьма широко, потому что, как отмечалось ранее, полное решение задачи отыскания многомерного закона распределения оказывается невозможным и редко необходимым. Корреляционная функция и связанный с нею энергетический спектр оказываются при этом наиболее полными характеристиками выходного эффекта. В соответствии с формулами (2.74) и (2.76) энергетический спектр выходного колебания записывается в следующем виде:

$$N_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (8.17)$$

### § 8.3. МЕТОД ОГИБАЮЩИХ

В § 2.10 было дано представление случайного колебания как квазигармонического со случайными амплитудой и сдвигом фазы. Как отмечалось, такое представление является весьма наглядным, а в методическом отношении удобным, если колебание (в данном случае — входное) является узкополосным.

Пусть входное колебание (см. формулу 2.96)

$$x(t) = X(t) \cos \Psi(t) = X \cos \Psi.$$

Тогда выходной эффект может быть представлен в следующем виде:

$$Y = f[X \cos \Psi]. \quad (8.18)$$

$Y$  является периодической четной функцией аргумента  $\Psi$  и согласно методам, изложенным в § 1.2, 7.3 и 7.4, может быть представлен тригонометрическим рядом:

$$Y = \frac{1}{2} Y_0 + Y_1 \cos \Psi + Y_2 \cos 2\Psi + \dots, \quad (8.19)$$

где

$$\frac{1}{2} Y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[X \cos \Psi] d\Psi;$$
$$Y_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[X \cos \Psi] \cos k\Psi d\Psi \quad \text{при } k \geq 1.$$

Аргументы тригонометрических функций, образующих ряд, являются случайными функциями времени. Нулевая составляющая и амплитуды всех гармоник также являются случайными функциями, поскольку они определяются через  $X(t)$ .

Представим случайную фазу в виде

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \Phi(t),$$

где  $\omega_0$  — средняя частота узкополосного спектра;

$\Phi(t)$  — случайный медленно меняющийся сдвиг фазы.

Тогда выражению для выходного колебания (8.19) можно придать следующий вид:

$$Y = \frac{1}{2} Y_0 [X(t)] + Y_1 [X(t)] \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] + Y_2 [X(t)] \cos [2\omega_0 t + 2\Phi(t)] + \dots \quad (8.20)$$

Этот ряд является суммой узкополосных колебаний с медленно меняющимися амплитудами и сдвигами фаз. Узкополосные спектры составляющих концентрируются вблизи частот, кратных  $\omega_0$ . Нулевая составляющая является колебанием со спектром вблизи нулевой частоты.

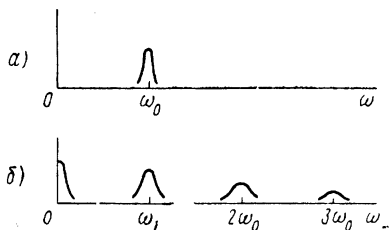


Рис. 8.3. Графики спектров узкополосного процесса:

а — спектр управляющего колебания;  
б — спектр выходного колебания

На рис. 8.3 приведены графики спектров входного и выходного колебаний. Если управляющее колебание не является узкополосным, то преобразование спектра будет менее наглядным.

Включением линейного фильтра на выходе нелинейного элемента можно вырезать любой участок преобразованного спектра. При этом задача может считаться решенной, если найдена функция корреляции выходного колебания в целом, либо той его части, которая фильтруется.

Найдем вначале среднее значение выходного колебания:

$$\bar{Y} = \bar{Y} = \frac{1}{2} Y_0 [X(t)] + \bar{Y}_1 [X(t)] \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] + \bar{Y}_2 [X(t)] \cos [2\omega_0 t + 2\Phi(t)] + \dots \quad (8.21)$$

В выражении (8.21) все слагаемые, кроме первого, равны нулю, так как  $\cos$  является быстрой функцией времени. Следовательно,

$$\bar{Y} = \frac{1}{2} Y_0 [X(t)]. \quad (8.22)$$

В соответствии с формулой (8.5)

$$\bar{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} Y_0(v) p_v(v) dv, \quad (8.23)$$

где  $v$  — значения, принимаемые случайной амплитудой  $X(t)$ ;  
 $p_v(v)$  — плотность вероятности амплитуды  $X(t)$ , равная нулю при отрицательных  $v$ .

При нормальном законе входного колебания его амплитуда распределена по закону Релея (формула 2.109). При этом формула (8.23) принимает следующий вид:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} Y_0(v) v \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_x^2}\right) dv. \quad (8.24)$$

Функция  $\frac{1}{2} Y_0(v)$  определяется конкретным видом аппроксимации характеристики.

Пример 1. Пользуясь методом огибающих, найти среднее значение тока через лампу, характеристика которой представлена полиномом второй степени

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Управляющее напряжение имеет нормальный закон распределения с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma_u^2$ .

Нулевая составляющая тока при заданной аппроксимации

$$\frac{1}{2} I_0(U_m) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2.$$

Следовательно, среднее значение тока

$$\bar{I} = a_0 + \frac{1}{2} a_2 \overline{U_m^2}.$$

Пользуясь соотношением (8.24), получим

$$\bar{I} = a_0 + \frac{a_2}{2\sigma_u^2} \int_0^{\infty} v^3 \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_u^2}\right) dv.$$

Определенный интеграл легко находится и имеет значение  $2\sigma_u^4$ . В результате имеем

$$\bar{I} = a_0 + a_2 \sigma_u^2.$$



Используя метод огибающих, получим выражение для дисперсии преобразованного колебания. Для этого, как обычно, найдем вначале момент второго порядка:

$$\overline{Y^2} = \widetilde{Y^2} = \left\{ \frac{1}{2} Y_0 [X(t)] + Y_1 [X(t)] \cos [\omega_0 t + \Phi(t)] + Y_2 [X(t)] \cos [2\omega_0 t + 2\Phi(t)] + \dots \right\}^2. \quad (8.25)$$

После возведения в квадрат бесконечной суммы и почленного усреднения получим следующий результат:

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} Y_0^2 [X(t)] + \widetilde{Y_1^2} [X(t)] + \widetilde{Y_2^2} [X(t)] + \dots \right\}. \quad (8.26)$$

В выражении (8.26)  $Y_0, Y_1, Y_2$  и т. д. являются детерминированными функциями случайного аргумента — огибающей управляющего колебания  $X(t)$ . Общий член этой суммы может быть вычислен следующим способом:

$$\widetilde{Y_k^2} [X(t)] = \overline{Y_k^2} = \int_0^\infty Y_k^2(v) p_v(v) dv. \quad (8.27)$$

При нормальном законе распределения управляющего колебания

$$\overline{Y_k^2} [X(t)] = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_0^\infty Y_k^2(v) v \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_x^2}\right) dv. \quad (8.28)$$

Дисперсия  $\sigma_y^2$  находится, как обычно:

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2.$$

Здесь  $\overline{Y}$  — среднее значение, найденное, например, в соответствии с (8.23).

Пример 2. Используя данные примера на стр. 263, найти дисперсию тока  $\sigma_i^2$ .

Вначале найдем момент второго порядка:

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= \overline{(a_0 + a_1 U + a_2 U^3)^2} = \widetilde{(a_0 + a_1 U + a_2 U^3)^2} = \\ &= \widetilde{a_0^2} + \widetilde{a_1^2 U^2} + \widetilde{a_2^2 U^4} + \widetilde{2a_0 a_1 U} + \widetilde{2a_0 a_2 U^2} + \widetilde{2a_1 a_2 U^3} \end{aligned}$$

После подстановки  $u = U_m(t) \cos [\omega_0 t + \Phi(t)]$  получим

$$\overline{I^2} = a_0^2 + \left( \frac{1}{2} a_1^2 + a_0 a_2 \right) \widetilde{U_m^2(t)} + \frac{3}{8} a_2^2 \widetilde{U_m^4(t)}.$$

Значение  $\widetilde{U_m^2(t)}$ , вычисленное в примере 1, равно  $2\sigma_u^2$ . Усреднение четвертой степени амплитуды производится аналогично:

$$\widetilde{U_m^4(t)} = \int_0^{\infty} v^4 \frac{v}{\sigma_u^2} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_u^2}\right) dv.$$

Определенный интеграл берется элементарно, после чего имеем

$$\widetilde{U_m^4(t)} = 8\sigma_u^4$$

и

$$\bar{I}^2 = a_0^2 + 2\left(\frac{1}{2}a_1^2 + a_0a_2\right)\sigma_u^2 + 3a_2^2\sigma_u^4.$$

Дисперсия тока

$$\sigma_i^2 = \bar{I}^2 - (\bar{I})^2,$$

где  $\bar{I}$  — среднее значение тока, полученное в примере 1 и равное  $a_0 + a_2\sigma_u^2$ .

Окончательно получаем следующее выражение для дисперсии:

$$\sigma_i^2 = a_1^2\sigma_u^2 + 2a_2^2\sigma_u^4.$$

Пользуясь методом огибающих, вычислим функцию корреляции преобразованного колебания. В соответствии с формулой (8.20) можно записать выражение для смешанного момента второго порядка:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y(t)Y(t+\tau)} = & \left\{ \frac{1}{2} Y_0[X(t)] + Y_1[X(t)] \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] + \right. \\ & \left. + Y_2[X(t)] \cos[2\omega_0 t + 2\Phi(t)] + \dots \right\} \left\{ \frac{1}{2} Y_0[X(t+\tau)] + \right. \\ & \left. + Y_1[X(t+\tau)] \cos[\omega_0(t+\tau) + \Phi(t+\tau)] + Y_2[X(t+\tau)] \times \right. \\ & \left. \times \cos[2\omega_0(t+\tau) + 2\Phi(t+\tau)] + \dots \right\} \quad (8.29) \end{aligned}$$

Если раскрыть скобки и произвести почленное усреднение по времени, то произведения членов с несовпадающими индексами при усреднении обратятся в нуль. Отличные от нуля составляющие получаются при усреднении произведений сомножителей с одинаковыми индексами:

$$\begin{aligned} \widetilde{Y(t)Y(t+\tau)} = & \frac{1}{2} Y_0[X(t)] \frac{1}{2} Y_0[X(t+\tau)] + \\ & + \widetilde{Y_1[X(t)] \cos[\omega_0 t + \Phi(t)] Y_1[X(t+\tau)] \cos[\omega_0(t+\tau)]} + \end{aligned}$$

$$+ \overbrace{\Phi(t + \tau)} + \overbrace{Y_2[X(t)] \cos[2\omega_0 t + 2\Phi(t)] Y_2[X(t + \tau)] \cos[2\omega_0(t + \tau) + 2\Phi(t + \tau)]} + \dots \quad (8.30)$$

Таким образом, смешанный момент второго порядка преобразованного колебания равен сумме *парциальных* смешанных моментов. Каждый из парциальных моментов образуется на базе гармоник узкополосного процесса.

В соответствии с определением функции корреляции можно записать

$$R_y(\tau) = \overbrace{Y(t) Y(t + \tau)} - \overbrace{[Y(t)]^2}, \quad (8.31)$$

где

$$\overbrace{Y(t)} = \frac{1}{2} \overbrace{Y_0[X(t)]}.$$

Так как средние значения гармоник случайного колебания равны нулю, смешанные парциальные моменты совпадают с корреляционными функциями гармоник. Поэтому

$$R_y(\tau) = R_0(\tau) + R_1(\tau) + R_2(\tau) + \dots, \quad (8.32)$$

где

$$R_0(\tau) = \overbrace{\frac{1}{2} Y_0[X(t)] \frac{1}{2} Y_0[X(t + \tau)]} - \left\{ \overbrace{\frac{1}{2} Y_0[X(t)]} \right\}^2; \quad (8.33)$$

$$R_k(\tau) = \overbrace{Y_k[X(t)] Y_k[X(t + \tau)] \cos[k\omega_0 t + k\Phi(t)]} \times \\ \times \overbrace{\cos[k\omega_0(t + \tau) + k\Phi(t + \tau)]}. \quad (8.34)$$

Рассмотрим в отдельности  $R_k(\tau)$ :

$$R_k(\tau) = \overbrace{\frac{1}{2} Y_k[X(t)] Y_k[X(t + \tau)] \cos[2k\omega_0 t + k\omega_0 \tau + k\Phi(t) + k\Phi(t + \tau)]} + \\ + \overbrace{\frac{1}{2} Y_k[X(t)] Y_k[X(t + \tau)] \cos[k\omega_0 \tau + k\Phi(t + \tau) - k\Phi(t)]}.$$

Первое слагаемое в  $R_k(\tau)$  при усреднении по времени обращается в нуль. Следовательно,

$$R_k(\tau) = \overbrace{\frac{1}{2} Y_k(X) Y_k(X_\tau) \cos k[\omega_0 \tau + \Phi_\tau - \Phi]}. \quad (8.35)$$

В силу эргодического свойства усреднение по времени и по реализациям эквивалентны. Поэтому

$$R_k(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dv \int_0^{\infty} dv_{\tau} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} Y_k(v) Y_k(v_{\tau}) \times \\ \times \cos k(\omega_0\tau + \varphi_{\tau} - \varphi) p_4(v, v_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau}) d\varphi_{\tau}, \quad (8.36)$$

где  $p_4(v, v_{\tau}, \varphi, \varphi_{\tau})$  — четырехмерный закон совместного распределения амплитуд  $X(t) = X$  и  $X(t + \tau) = X_{\tau}$  и сдвигов фаз  $\Phi(t) = \Phi$  и  $\Phi(t + \tau) = \Phi_{\tau}$ .

В случае нормального колебания  $x(t)$  на входе указанный закон имеет вид (2.112). Если использовать это распределение, то можно получить

$$R_k(\tau) = \frac{\cos k(\omega_0\tau - \gamma)}{2\lambda^2\sigma_x^4} \int_0^{\infty} v Y_k(v) dv \int_0^{\infty} v_{\tau} Y_k(v_{\tau}) \times \\ \times \exp\left(-\frac{v^2 + v_{\tau}^2}{2\lambda^2\sigma_x^2}\right) I_k\left(\frac{vv_{\tau}\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda^2\sigma_x^2}\right) dv_{\tau}, \quad (8.37)$$

где  $I_k$  — модифицированная функция Бесселя  $k$ -го порядка. Величина  $\gamma$  отражает асимметрию спектра  $x(t)$ . В случае, когда спектр симметричен относительно центральной частоты  $\omega_0$ , то, как это отмечено в § 2.10,  $\gamma \equiv 0$ .

#### § 8.4. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (ИЛИ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ)

Метод характеристических функций в некоторых случаях оказывающийся более простым, чем предыдущие, позволяет вычислить автокорреляционную функцию (и следующие из нее величины) выходного процесса, если нелинейное устройство  $y=f(x)$  таково, что для функции  $y=f(x)$  можно найти преобразование Лапласа

$$F(p) = L[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx. \quad (8.38)$$

При этом  $y=f(x)$  представляется, очевидно, обратным преобразованием:

$$f(x) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_c F(p) e^{px} dp. \quad (8.39)$$

Если в (8.39) сделать подстановку  $p = j\eta$ , то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_c F(j\eta) e^{j\eta x} d\eta. \quad (8.39a)$$

В этом выражении контур интегрирования замыкается в бесконечности, охватывая все особые точки подынтегральной функции.

Если теперь вычислять второй смешанный момент выходного процесса, используя представление (8.39a), то он оказывается выраженным через двумерную характеристическую функцию входного процесса. Действительно,

$$\begin{aligned} M_2(Y) = \overline{f[X(t)]f[X(t+\tau)]} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(x_\tau) p(x, x_\tau) \times \\ &\times dx dx_\tau = \frac{1}{4\pi^2} \int_c F(j\eta) \int_c F(j\eta_\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, x_\tau) \times \\ &\times e^{(j\eta x + j\eta_\tau x_\tau)} dx dx_\tau d\eta d\eta_\tau, \end{aligned} \quad (8.40)$$

где  $p$  — двумерная плотность вероятности.

Но двойной интеграл по  $x$  и  $x_\tau$  есть по определению двумерная характеристическая функция входного процесса  $\gamma(\eta, \eta_\tau)$  (см. § 2.5). Поэтому

$$M_2(Y) = \overline{Y(t)Y(t+\tau)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_c \int_c F(j\eta) F(j\eta_\tau) \gamma(\eta, \eta_\tau) d\eta d\eta_\tau. \quad (8.41)$$

Если можно найти двумерную характеристическую функцию входного процесса, а затем удастся взять двойной интеграл, то задача решена. Наиболее просто это получается, если входной процесс нормальный.

По величине  $M_2(Y)$  может быть найдена известными способами автокорреляционная функция выходного процесса. Так как

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{Y(t)Y(t+\tau)} = (\bar{Y})^2,$$

то

$$R_y(\tau) = M_2(Y) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \overline{Y(t)Y(t+\tau)}.$$

При необходимости по  $R_y(\tau)$  может быть найден энергетический спектр выходного процесса.

Полезной разновидностью метода характеристических функций применительно к заведомо нормальным процессам является соотношение, доказанное Прайсом. Соответствующая теорема формулируется следующим образом.

Если  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$  — нормальные процессы с нулевым средним и коэффициентом взаимной корреляции  $\rho_{12}$ , а  $Y_1 = f_1(X_1)$  и  $Y_2 = f_2(X_2)$  выходные процессы, причем  $R_y = \overline{f_1(X_1)f_2(X_2)}$  есть их взаимокорреляционная функция, то

$$\frac{\partial^k R_y}{\partial \rho_{12}^k} = \overline{f_1^{(k)}(X_1) f_2^{(k)}(X_2)}, \quad (8.42)$$

где производные  $k$ -го порядка в правой части берутся соответственно по аргументам  $x_1$  и  $x_2$ .

Если в качестве процесса  $X_2(t)$  взять процесс  $X_1(t + \tau)$  и произвести нормирование так, чтобы  $X_1^2(t) = 1$  и  $\overline{X_1(t)X_1(t + \tau)} = R_x(\tau) = -\rho_x(\tau)$ , то из (8.42) можно получить соотношение

$$\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial \rho_x^k(\tau)} = \overline{f_1^{(k)}[X(t)] f_2^{(k)}[X(t + \tau)]}. \quad (8.43)$$

Используя выражение для двумерной плотности нормального процесса, получаем окончательное выражение:

$$\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial \rho_x^k(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1^{(k)}(x) f_2^{(k)}(x_\tau)}{2\pi \sqrt{1 - \rho_x^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2\rho_x x x_\tau + x_\tau^2}{2(1 - \rho_x^2)} \right\} dx dx_\tau. \quad (8.43a)$$

Выражение (8.43a) дает  $k$ -ую производную  $R_y(\tau)$ . Саму функцию можно найти, решая полученное дифференциальное уравнение. Несмотря на кажущуюся сложность соотношений, вычисления в ряде случаев оказываются простыми.

**Пример 1.** На нелинейный элемент с характеристикой

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ Sx & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

воздействует колебание с нормальным законом распределения и функцией автокорреляции  $R(\tau)$ . Определить автокорреляционную функцию на выходе методом характеристических функций.

Определяем величины, необходимые для использования формулы (8.41) метода контурных интегралов. В соответствии с (8.38) определяем

$$F(p) = \int_0^{\infty} y(x) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} Sx e^{-px} dx = \frac{S}{p^2}.$$

Следовательно,

$$F(j\eta) = -\frac{S}{\eta^2}, \quad F(j\eta\tau) = -\frac{S}{\eta_\tau^2}.$$

Двумерная характеристическая функция нормального процесса была получена в примере на стр. 125. Тогда, используя (8.41), получаем

$$M_2(Y) = \frac{S^2}{4\pi^2} \int_c^c \int_c^c \frac{1}{\eta^2 \eta_\tau^2} \exp \left[ -\frac{R_0 \eta^2 + 2R(\tau) \eta \eta_\tau + R_0 \eta_\tau^2}{2} \right] d\eta d\eta_\tau,$$

где  $R_0 = R(0) = \sigma^2$ .

Вычисление интегралов основано на представлении  $e^{2R(\tau)\eta\eta_\tau}$  степенным рядом. После всех вычислений получаем

$$M_2(Y) = \frac{S^2 \sigma^2}{2\pi} [ \sqrt{1 - \rho^2(\tau)} + \rho(\tau) \arccos \rho(\tau) ],$$

где  $\rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma^2}$ .

Далее

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} M_2(Y) = \frac{S^2 \sigma^2}{2\pi}.$$

Следовательно,

$$R_y(\tau) = M_2(Y) - \lim_{\tau \rightarrow \infty} M_2(Y) = \frac{S^2 \sigma^2}{2\pi} \left\{ \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \rho(\tau) \right] \rho(\tau) + \sqrt{1 - \rho^2(\tau)} - 1 \right\}.$$

**Пример 2.** На нелинейный элемент с характеристикой

$$y(x) = \begin{cases} -a, & x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$$

воздействует колебание с нормальным законом распределения и автокорреляционной функцией  $R_x(\tau)$ ; причем  $R_x(0) = 1$ . Определить автокорреляционную функцию выходного процесса с помощью теоремы Прайса.

В нашем случае  $f_1(x) = f_2(x) = y(x)$ . Рассматривая заданный нелинейный элемент, можно убедиться, что

$$y'(x) = 2a\delta(x),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция аргумента  $x$ .

Двойной интеграл легко взять (при этом проявляется «фильтрующее свойство» дельта-функций):

$$\frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} = \frac{4a^2}{2\pi \sqrt{1 - R_x^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_\tau) e^{-\frac{x_\tau^2}{2(1 - R_x^2)}} dx_\tau \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(1-R_x^2)}} e^{\frac{2Rx_x\tau}{2(1-R_x^2)}} \delta(x) dx = \frac{2a^2}{\pi \sqrt{1-R_x^2}}.$$

Это дифференциальное уравнение легко решается:

$$R_y(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \int \frac{dR_x}{\sqrt{1-R_x^2}} + A = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin R_x + A.$$

Так как при  $\tau \rightarrow \infty$   $R_x \rightarrow 0$  и  $R_y \rightarrow 0$ , то константа интегрирования  $A = 0$ . Следовательно,

$$R_y(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin R_x(\tau).$$

\*       \*       \*  
\*  
\*

## ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ

В настоящей книге изложены основные методы расчета линейных, параметрических и нелинейных устройств при действии регулярных и случайных колебаний. Все цепи и колебания, встречающиеся на практике, относятся к одной из указанных разновидностей. Однако это не значит, что был изложен весь круг современных знаний в области сигналов и цепей. Нами были рассмотрены лишь методы, но не огромное разнообразие существующих колебаний и цепей.

Изучение возможных комбинаций реальных цепей и сигналов представляет интересную и важную задачу.

Приведенные в книге методы направлены на решение задач анализа, когда цепь и входное колебание считаются заданными. Практически часто возникает обратная задача: дано входное воздействие и требуемый результат его преобразования. Цепь же необходимо найти. Методы решения подобных задач синтеза составляют обширную область, в книге почти не затронутую. Задача синтеза состоит из двух частей: отыскание коэффициента передачи требуемого четырехполюсника (или двухполюсника) и его реализации в виде определенной комбинации элементов. Если входное и выходное колебания заданы и, следовательно, можно найти их спектральные функции, то первая часть задачи в принципе решается просто. Действительно, так как

$$\dot{G}_{u_2}(\omega) = \dot{K}(\omega) \dot{G}_{u_1}(\omega),$$



то

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{G}_{u_2}(\omega)}{\dot{G}_{u_1}(\omega)}.$$

Вторая часть задачи — составление цепи, соответствующей найденному  $\dot{K}(\omega)$  — точно и просто решается лишь в отдельных случаях.

Практически сигналы воздействуют на цепи при наличии неизбежных колебаний помех. Часто помехи не уступают по величине сигналам, а то и превосходят их. В этом случае возникает более сложная задача проектирования четырехполюсника-фильтра, который обеспечил бы такое преобразование суммы колебаний, при котором на выходе колебание сигнала по возможности превышало бы в определенном смысле колебание помехи. Подобные четырехполюсники называют оптимальными. В зависимости от вида сигналов и априорных данных о них здесь различают три класса задач: а) распознавания (или обнаружения) сигналов, б) измерения параметров, в) фильтрации.

В первом случае заведомо известно, что на задаваемых отрезках времени присутствует один из известного набора сигналов (в сумме с помехой) и необходимо лишь решить, какой именно. Во втором случае известна форма сигнала с точностью до величины некоторых его параметров, принимающих случайные значения и подлежащих измерению. (Например, известно, что сигнал есть П-образная посылка, но не известна ее амплитуда, которую и необходимо определить). В третьем случае сигналы на входе являются случайным процессом и его требуется возможно лучше отфильтровать от помехи, также являющейся случайным процессом.

Указанные три основные задачи допускают четкую математическую формулировку и рассматриваются в теории оптимальных методов радиоприема, в которой ставится задача о синтезе оптимального приемника в целом.

Синтез оптимальных приемников, особенно для каналов с переменными параметрами, является интенсивно развивающейся областью теории.

В книге были рассмотрены методы аналитического представления заданных сигналов. Однако часто возникает обратная задача. Заданы подлежащая передаче информация, а также свойства линии связи и помех. Требуется определить наиболее выгодную форму сигналов, при которой ошибки будут минимальными. Теория синтеза сигналов является новой областью радиотехники. Так возникает задача проектирования системы в целом, включающая оптимальное построение передатчика (кодирование и выбор сигналов) и приемника (выбор метода, обеспечивающего минимум ошибок). Методы решения этой полной задачи радиотехники в настоящее время известны лишь для отдельных простых случаев,

## ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, 1958.
2. Котельников В. А., Николаев А. М. Основы радиотехники. Госэнергоиздат, ч. I, 1950; ч. II, 1954.
3. Гарднер М. Ф., Бэрнс Д. Л. Переходные процессы в линейных системах. Физматгиз, 1961.
4. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функции. Физматгиз, 1948.
5. Айзенштадт В. С., Крылов В. И., Метельский А. С. Таблицы многочленов и функций Лагерра, 1963.
6. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Изд-во «Сов. радио», 1966.
7. Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости при флюктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1956.
8. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Гостехиздат, 1963.
9. Голдман С. Теория информации. Изд-во «Мир», 1957.
10. Заде Л. Определение импульсной переходной характеристики цепей с переменными параметрами. Журн. прикл. физики, т. 21, 1950.
11. Гуткин Л. С. Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах. Госэнергоиздат, 1961.
12. Солодов Л. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, 1962.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1, Гостехиздат, 1951.
14. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1962.
15. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд-во «Сов. радио», 1960.
16. Бунимович В. И. Флюктуационные процессы в радиотехнических устройствах. Изд-во «Сов. радио», 1951.
17. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Изд-во «Наука», 1964.
18. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Изд-во «Сов. радио», 1965.
19. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. ИИЛ, 1960.
20. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.
21. Бруевич А. Н., Евтянов С. И. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. Изд-во «Сов. радио», 1965.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Часть первая</b>	
<b>Анализ регулярных и случайных колебаний</b>	
Классификация электрических колебаний . . . . .	5
<b>Глава I. Регулярные колебания и их аналитическое описание . . . . .</b>	<b>6</b>
§ 1.1. Разложение колебаний по системам ортогональных функций . . . . .	6
§ 1.2. Разложение периодических колебаний в ряды Фурье по системе тригонометрических функций . . . . .	9
§ 1.3. Преобразования Фурье для импульсов . . . . .	13
§ 1.4. Обобщение преобразований Фурье. Преобразования Лапласа . . . . .	18
§ 1.5. Некоторые соотношения между колебаниями и их спектрами . . . . .	28
§ 1.6. «Испытательные» импульсы: дельта-функция и единичный скачок и связанные с ними соотношения . . . . .	36
§ 1.7. Представление колебаний в комплексной форме. Преобразования Гильберта . . . . .	40
§ 1.8. Разложение колебаний в ряды Котельникова . . . . .	45
§ 1.9. Разложение колебаний в ряды по некоторым специальным функциям . . . . .	52
§ 1.10. Геометрическое представление колебаний . . . . .	61
§ 1.11. Непрерывные модулированные колебания . . . . .	63
§ 1.12. Амплитудно-модулированные колебания (АМК) . . . . .	65
§ 1.13. Фазо-модулированные колебания (ФМК) и частотно-модулированные колебания (ЧМК) . . . . .	69
§ 1.14. Ансамбли колебаний и их ортогональные разложения. Процедура Грам-Шмидта . . . . .	77
<b>Глава II. Случайные колебания и их аналитическое описание . . . . .</b>	<b>82</b>
§ 2.1. Общие сведения . . . . .	82
§ 2.2. Одномерный закон распределения мгновенных значений случайной функции и связанные с ним основные характеристики . . . . .	83
§ 2.3. Многомерный закон распределения мгновенных значений случайной функции и связанные с ним основные характеристики . . . . .	88
§ 2.4. Стационарные случайные процессы. Эргодическое свойство . . . . .	97
§ 2.5. Характеристические функции распределения вероятностей случайного процесса . . . . .	109
§ 2.6. Дифференцирование и интегрирование случайного процесса . . . . .	115
§ 2.7. Процесс с нормальным законом распределения. Центральная предельная теорема . . . . .	120
§ 2.8. Энергетический спектр случайного процесса . . . . .	125
§ 2.9. Вероятность превышения заданного уровня. Среднее количество выбросов и их средняя продолжительность . . . . .	131
§ 2.10. Случайный процесс как гармоническое колебание со случайными амплитудой и фазой . . . . .	136
§ 2.11. Сумма флукуационного и гармонического колебаний. Огибающая и фаза результирующего случайного процесса . . . . .	144

## Часть вторая

### Воздействие регулярных и случайных колебаний на линейные устройства с постоянными и переменными параметрами

Глава III. Радиотехнические цепи и четырехполосники и их основные свойства	150
§ 3.1. Классификация радиотехнических устройств	150
§ 3.2. Основные элементы линейной электрической цепи, их аналитическое описание и основные свойства	151
§ 3.3. Основные определения элементов цепей и четырехполосков	154
Глава IV. Методы анализа линейных и параметрических цепей при воздействии регулярных колебаний	156
§ 4.1. Основные законы цепи и основные методы составления уравнений цепи	156
§ 4.2. Нахождение решений уравнений цепи	158
§ 4.3. Нахождение решений дифференциальных уравнений цепей с постоянными параметрами с помощью преобразований Лапласа	166
§ 4.4. Нахождение решений дифференциальных уравнений цепей с переменными параметрами с помощью преобразований Лапласа	168
Глава V. Методы анализа линейных и параметрических четырехполосников при воздействии регулярных колебаний	171
§ 5.1. Четырехполосник с постоянными параметрами и его основная характеристика	171
§ 5.2. Вычисление выходного напряжения четырехполосника с постоянными параметрами	174
§ 5.3. Коэффициент передачи четырехполосника с постоянными параметрами. Метод спектральных функций	177
§ 5.4. Различные способы вычисления коэффициента передачи четырехполосника с постоянными параметрами	180
§ 5.5. Переходная характеристика четырехполосника с постоянными параметрами при единичном скачке напряжения и ее связь с импульсной переходной характеристикой	183
§ 5.6. Физическая реализация четырехполосников	186
§ 5.7. Четырехполосник с переменными параметрами и его основная характеристика. Связь выходного и входного напряжений	188
§ 5.8. О методах определения импульсных переходных характеристик четырехполосников с переменными параметрами	191
§ 5.9. Коэффициент передачи четырехполосника с переменными параметрами. Метод спектральных функций	193
§ 5.10. Определение коэффициента передачи четырехполосника с медленно меняющимися параметрами	196
Глава VI. Методы анализа линейных и параметрических четырехполосников при воздействии случайных колебаний	200
§ 6.1. Общие сведения	200
§ 6.2. Энергетический спектр и дисперсия (средняя мощность) случайного колебания на выходе четырехполосника с постоянными параметрами	200
	279

§ 6.3. Автокорреляционная функция случайного колебания на выходе четырехполосника с постоянными параметрами	203
§ 6.4. Автокорреляционная функция случайного колебания на выходе четырехполосника с переменными параметрами	205
§ 6.5. О законах распределения случайного колебания на выходе линейного четырехполосника	208

### Часть третья

#### Воздействие регулярных и случайных колебаний на нелинейные элементы цепей и четырехполосников

Общие сведения	210
<b>Глава VII. Воздействие регулярных колебаний на нелинейные элементы</b>	<b>212</b>
§ 7.1. Аппроксимация характеристик нелинейных элементов. Нелинейные преобразования формы колебания	212
§ 7.2. Спектральное представление нелинейно преобразованного колебания	217
§ 7.3. Периодическое воздействие на нелинейный элемент	220
§ 7.4. Воздействие гармонического колебания на нелинейный элемент	222
§ 7.5. Воздействие суммы гармонических колебаний на нелинейный элемент	230
§ 7.6. Совместное воздействие на нелинейный элемент большого и малого колебаний произвольной формы	235
§ 7.7. Линейная фильтрация нелинейно преобразованного колебания. Основные нелинейные радиотехнические процессы	241
<b>Глава VIII. Воздействие случайных колебаний на нелинейные элементы</b>	<b>255</b>
§ 8.1. Общие сведения	255
§ 8.2. Прямой метод	255
§ 8.3. Метод огибающих	265
§ 8.4. Метод характеристических функций (или контурных интегралов)	271
Пути дальнейшего изучения теории	275
Литература	277

*Андрей Леонидович Зиновьев,  
Леонид Иванович Филиппов*

### ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИГНАЛОВ И ЦЕПЕЙ

Редактор Л. А. Романова  
Худ. редактор Т. М. Скворцова  
Переплет художника А. К. Зефирова  
Техн. редактор С. П. Передерий  
Корректор С. К. Марченко

Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

Т-15324

Сдано в набор 29/III 1968 г.

Поп. к печати 24/X 1968 г.

Формат 60×90<sup>1/16</sup>

Объем 17,5 печ. л.

Уч.-изд. л. 13,28

Изд. № ЭР-47

Тираж 30000 экз.

Зак. 65

Цена 66 коп.

Тематический план издательства «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1968 год.  
Позиция № 99.

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,  
Издательство «Высшая школа»