

М. А. БОНЧ-БРУЕВИЧ

Э Л Е М Е Н Т Ы РАДИОТЕХНИКИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

МОСКВА

СВЯЗЬТЕХИЗДАТ

1938

Э Л Е М Е Н Т Ы РАДИОТЕХНИКИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ТЕХНИКУМОВ

О П Е Ч А Т К И

Стр.	Формула	Напечатано	Должно быть
21	(0.51)	$= [E_m \cos (\Delta t)] e^{j\omega t}$	$= [2E_m \cos (\Delta t)] e^{j\omega t}$
28	(0.61)	$Z_1 = z_1 e^{j\theta_1}$	$Z_1 = z_1 e^{j\theta_1}$

М. А. Бонч-Бруевич. „Элементы радиотехники“, ч. I.

Редактор СТИ *В. И. Шамшур.*

Техн. редактор *П. Я. Королев.*

Книга сдана в набор 11/VII 1937 г. Подписана к печати 14/IV—1938 г. Инд. Р-9. Тираж 4000 экз. Уполномоч. Главлита Б-42490. Заказ СТИ № 1699. Бумага $70 \times 108^{1/16}$. Печатн. листов 16,5. Знаков в 1 печ. листе 65000. Автор. листов 24,91.

Днепропетровск, 7-я Полиграфическая фабрика им. 25-летия ВКП(б). Зак. № 4829.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга написана в качестве учебного пособия по курсу радиотехники для техникумов связи.

В основном она представляет собою сокращенное и переработанное изложение материала, содержащегося в моей книге „Основы радиотехники“, часть 1. Исключение представляет глава о фильтрах, которая сильно расширена по сравнению с тем, что было изложено в „Основах радиотехники“. Теория фильтров изложена методом четырех-полюсника.

Можно еще отметить, что цепи с распределенными постоянными изложены раньше цепей с сосредоточенными постоянными. Это сделано с целью осветить явления в цепях с сосредоточенными постоянными с более общей точки зрения. Характер текста позволяет, однако, в процессе преподавания принять и обратную последовательность изложения, если преподаватель более склонен следовать установившейся традиции.

Я стремился придать изложению такой характер, при котором физическое содержание явлений выступало бы на первый план и не затемнялось бы формальной стороной математической символики. С этой же целью я подробно остановился во введении на вопросе о физических представлениях, способствующих обобщенному пониманию процессов в колебательных цепях, и на физическом смысле символического метода.

В конце книги даны некоторые приложения, которые могут быть полезны для вычислений.

При работе над книгой большую помощь оказала мне О. А. Зайцева, на которой лежали работы по составлению новых чертежей и корректуре.

Проф. С. Э. Хайкину я весьма признателен за ряд полезных замечаний, которые были им сделаны при чтении верстки книги и которыми я воспользовался.

М. Бонч-Бруевич

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ВВЕДЕНИЮ

C — емкость
 E, e — напряжение, разность потенциалов
 e — основание неперовых логарифмов
 I, i — сила тока
 j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$)
 K — различные коэффициенты
 L — коэффициент самоиндукции
 \ln — натуральный логарифм
 R — активное (ваттное) положительное сопротивление
 T — период
 t — время
 Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления
 z — кажущееся (полное) сопротивление (модуль)
 ω, Ω — круговая частота
 δ — коэффициент затухания

\equiv — знак тождества. Выражение $(a + b) \equiv c$ означает „обозначим $(a + b)$ через c “

Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m и т. д.

Постоянные и среднеквадратичные значения — теми же буквами без индекса, например, E, I, P и т. д.

Мгновенные значения, выраженные в тригонометрической форме, обозначены малыми буквами, например,

$$i = I_m \sin(\omega t).$$

Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например,

$$\dot{i} = a + jb; \dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Векторы обозначены прямым жирным шрифтом.

§ 1. Предмет радиотехники.

Радиотехника пользуется для передачи сигналов электромагнитными волнами, распространяющимися в пространстве, окружающем передающую станцию.

Электромагнитная волна, с которой мы в дальнейшем познакомимся подробно, представляет собой определенное сочетание магнитного и электрического полей, движущихся со скоростью света.

Такие волны отделяются (или „излучаются“) от всякого провода, в котором изменяется сила тока. Однако в большинстве случаев количество излученной энергии очень незначительно, и электромагнитные волны могут быть обнаружены только вблизи излучателя и притом только посредством очень чувствительных индикаторов. Так обстоит дело, например, в случае обыкновенного технического переменного тока.

Для того чтобы создать значительное излучение, применяют специальные устройства, так называемые „антенны“, и пользуются токами высокой частоты, так как чем выше частота, тем сильнее излучение.

Применение антенн, излучающих и принимающих электромагнитные волны, является отличительным признаком радиотехники. Немного лет назад таким же отличительным признаком радиотехнических устройств являлось применение высокой частоты. В настоящее время высокая частота широко применяется и в проволочной связи, и в этом смысле резкое различие между проволочкой и радио с каждым годом все более стирается.

Остается, однако, различие вот какого рода. В проволочных линиях те же электромагнитные волны, которыми пользуется радио, направляются посредством проводов. Провода образуют границы того канала, по которому движется электромагнитная энергия, и не дают ей расходиться во все стороны.

При радиопередаче же эти волны свободно расходятся вокруг антенны (или в пределах некоторого угла в случае направленных антенн).

Поэтому для того, чтобы достаточное количество энергии достигло приемника, в радиотехнике приходится часто применять огромные мощности, исчисляемые сотнями киловатт.

Применение таких мощностей в проволочных линиях затруднительно и не имеет смысла.

В каждой радиолинии можно различить три отдельные части. Это — передающая станция, приемная станция и разделяющая их местность.

Передающая станция должна иметь некоторый преобразователь (или „генератор“), который получаемый станцией технический ток (или иной вид исходной энергии) превращает в ток высокой частоты. Последний может быть излучен антенной. Далее передающая станция должна иметь устройство, посредством которого ток высокой частоты подвергается тем либо другим изменениям, в результате которых из него формируется сигнал. Это устройство называется „модулятором“. Например, в случае простой телеграфной передачи таким модулятором может явиться телеграфный ключ, прерывающий ток высокой частоты и образующий этим длинные и короткие посылки.

Если мощность высокой частоты непосредственно после формирования сигнала недостаточна, то на передающей станции производят усиление мощности, и только после этого токи высокой частоты поступают в антенну.

Волны, излученные передающей антенной, распространяются вдоль земной поверхности и в верхних слоях атмосферы, где они испытывают отражения и преломления.

Распространение волн зависит от состояния земной поверхности, ее рельефа и влажности и от состояния верхней атмосферы: степени ее ионизации и распределения этой ионизации по высоте. Поэтому волны, достигшие приемной станции, могут иметь весьма различную интенсивность в зависимости от времени года и суток, от метеорологической и от космической ситуации. Даже при самых благоприятных обстоятельствах количества энергии, достигающей приемной станции, бывает очень ничтожным. Однако, если интенсивность этих сигналов все же больше интенсивности различных помех, образуемых, главным образом, электрическими явлениями в природе, то сигналы могут быть обнаружены и воспроизведены. Это достигается благодаря необычайно чувствительным и точным приборам, которыми располагает современная техника.

Задачами приемной станции является: уловить волны, отделить желаемый сигнал от всех других бесчисленных сигналов и природных помех, усилить принятые колебания, воспроизвести первоначальный переданный сигнал и придать ему необходимую интенсивность.

Таким образом радиолиния представляет собой электрический механизм, в котором происходят чрезвычайно сложные и многообразные превращения электрической энергии и который состоит из множества сложных электрических и электромеханических приборов.

Современная радиотехника не ограничивается только передачей наиболее простых телеграфных сигналов. Односторонний и двусторонний (дуплексный) радиотелефон, передача неподвижных изображений, телевидение, шифрованный телефон, многократная передача и ряд других сложных сигналов, требующих величайшей точности воспроизведения, передаются по современным радиолиниям.

Передача этих сигналов в условиях коммерческой эксплуатации требует правильного расчета радиолинии и безупречной стабильности и точности работы всех ее приборов и механизмов.

Регулировка, управление и обслуживание всех этих сложных, тонких и разнообразных электрических инструментов требует наличия не только производственных навыков, но и ясного понимания тех физических процессов, которые в них происходят, и тех физических законов, на которых они основаны.

Как бы ни были сложны и многообразны радиотехнические устройства, как бы ни были, на первый взгляд, запутаны и сложны происходящие в них процессы, все приборы в конечном итоге являются комбинацией немногих

относительно простых элементов, а все явления управляются некоторыми общими физическими законами и принципами.

Изучение этих элементов и их простейших и типичных комбинаций, так же, как и изучение различных физических явлений и процессов, происходящих в радиотехнических устройствах, и составляет предмет настоящего курса.

На протяжении курса читатель встретится не только с новыми понятиями и явлениями, но также и с уже знакомыми ему из общего курса электротехники. Мы, однако, должны будем подойти к этим уже знакомым понятиям и явлениям с несколько другой меркой, чем в случае медленно изменяющегося тока.

Это обусловлено тем, что многие свойства электрических цепей и многие явления, остающиеся незаметными или не играющие никакой роли в технике 50-герцового тока, получают важное значение при высоких частотах и при сложном характере изменения тока и напряжения во времени.

§ 2. Линейные и нелинейные системы и принцип суперпозиции.

Электрические цепи могут быть разделены на две группы. В цепях первой группы, называемых линейными цепями, между током и напряжением существует прямая пропорциональность. Говоря иначе, ток и напряжение связаны линейной зависимостью. Например, омическое сопротивление является линейной цепью, так как закон Ома

$$I = \frac{E}{R}$$

дает линейную зависимость.

Цепь, состоящая из сопротивления, емкости и самоиндукции, является линейной цепью, так как

$$I_m = \frac{E_m}{z},$$

где z (модуль сопротивления цепи) — постоянная, не зависящая от тока, величина.

Цепь, в которой сопротивление изменяется во времени, но не зависит от величины тока или напряжения, также является линейной. Такой является, например, цепь, состоящая из элемента E , электромагнита M и телеграфного ключа K (фиг. 0.1).

Размыкая и замыкая ключ мы меняем сопротивление цепи (например, от ∞ до R), но это изменение не зависит ни от тока, ни от напряжения. Цепь, свойства которой не изменяются во времени, называется цепью с постоянными параметрами, в отличие от цепи с переменными параметрами.

Напротив того, если зависимость между током и напряжением не имеет линейного характера, то цепь называется нелинейной. В этом случае параметры цепи, очевидно, зависят от величины тока или напряжения.

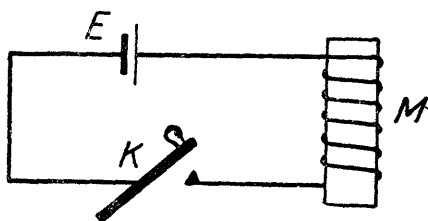
В простейшем случае нелинейная зависимость может быть выражена степенным рядом, например:

$$i = a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots \quad (0.1)$$

или

$$e = b_0 + b_1 i + b_2 i^2 + \dots, \quad (0.2)$$

где a_n и b_n — постоянные величины, или нули, или функции времени, не зависящие от i и e .



Фиг. 0.1.

Таким рядом может быть выражено, например, сопротивление детектора или кенотрона, которые являются примерами простейших нелинейных цепей.

Электрический звонок, схема которого по существу аналогична фиг. 1, но в котором ток, намагничивая магнит, заставляет якорь ударника разрывать цепь, является в отличие от цепи с ключом — нелинейной цепью. Изменение сопротивления при разрыве контакта производится самим током, и, следовательно, сопротивление цепи зависит (очень сложным образом) от силы тока.

Замечательным свойством линейных цепей является полная независимость действия каждой из эдс от присутствия или отсутствия других эдс.

Поэтому, если на какую-нибудь линейную цепь действовали порознь эдс e_1, e_2, e_3 и т. д. и каждая из них, действуя порознь, создавала (соответственно своему номеру) токи i_1, i_2, i_3 и т. д., то в случае действия всех этих эдс одновременно общий ток будет равняться сумме всех отдельных токов.

Принцип, согласно которому можно действие какого-нибудь физического деятеля рассматривать независимо от присутствия или отсутствия других деятелей этого же рода, называется принципом независимости действия или принципом суперпозиции.

Следовательно, к линейной цепи приложим принцип независимости действия и это является ее основным и характерным отличием от нелинейной цепи, к которой этот принцип ни в коем случае не приложим.

Сказанному можно придать следующую более общую формулировку.

Если свойства какой-нибудь физической системы не изменяются ни прямо, ни косвенно под влиянием какого-нибудь физического деятеля, то данная система является линейной по отношению к этому деятелю и к ней приложим принцип суперпозиции.

Возможность приложения принципа суперпозиции необычайно облегчает всякое физическое исследование. В последующем мы убедимся, насколько исследование линейных цепей оказывается проще и полнее благодаря возможности прилагать этот принцип.

Необходимо подчеркнуть, что, строго говоря, в природе не только не существует, но и принципиально не может существовать действительно вполне точных линейных соотношений. Всякое явление обязательно влияет на всю физическую обстановку, в которой оно происходит. Ток влияет на провод, электрическое поле изменяет свойства диэлектрика, скорость влияет на величину массы и т. д.

Поэтому, когда мы считаем какую-нибудь систему линейной, мы делаем ошибку, и в результате этой ошибки получаем некоторую неточность.

Если эта неточность столь мала, что не может быть обнаружена или не играет никакой роли для наших целей, то мы в праве не обращать на нее внимания. Все наши выкладки и рассуждения вполне оправдаются на практике.

Если эта неточность относительно мала, но уже играет некоторую роль — мы можем ввести в результат дополнительные поправки. Наконец, если нелинейность системы достаточно ясно выражена, мы должны вовсе отказаться от принципа суперпозиции и перейти к другим способам исследования.

В первой части этой книги мы будем рассматривать только такие системы, которые могут рассматриваться как линейные с постоянными параметрами и будем постоянно пользоваться принципом суперпозиции.

§ 3. Синусоидальная функция.

Изменение тока или напряжения во времени может быть дано в виде некоторой математической формулы

$$i = F_1(t)$$

или

$$e = F_2(t).$$

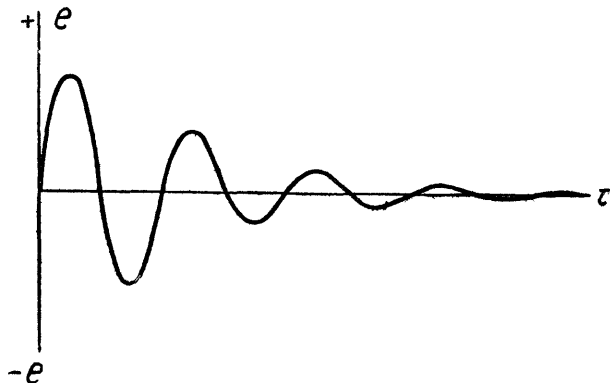
Оно может быть также дано в виде некоторой кривой, как например, кривая фиг. 0.2.

Чтобы изучить встречающееся в радиотехнике бесчисленное количество всевозможных видов $F(t)$ (или бесчисленное количество форм кривых, выражающих эти функции), все их можно свести к некоторому, относительно небольшому, числу типов, обладающих определенными признаками и свойствами. На протяжении курса мы будем неоднократно отмечать такие характерные типы кривых.

Этот способ представляется во многих случаях очень удобным и важным, так как дает возможность предвидеть характер явлений в электрических цепях, в которых действует данная эдс или данный ток, и оценивать эти явления с их качественной стороны.

Однако гораздо более общим (и притом дающим возможность количественной оценки) является такой способ представления, при котором данная сложная функция рассматривается как сумма или как произведение некоторых более простых функций, действие которых на данную цепь хорошо известно. В случае линейной системы действие данной сложной функции будет равно сумме действий элементарных функций, на которые она разложена.

Очевидно, что этот способ получит универсальное значение в том случае, если все возможные виды функций будут приводиться к сумме или к произведению одних и тех же элементарных функций, если эти последние окажутся удобными для математического анализа и, наконец, если действие их на электрические цепи может быть удобно изучено.



Фиг. 0.2.

В этом смысле практически наиболее удобными оказываются синусоидальные и экспоненциальные функции. Синусоидальные функции (соответствующие гармоническим колебаниям) позволяют выразить всякую функцию, имеющую интерес для радиотехники, в виде ряда или интеграла Фурье. Произведение синусоидальной функции на экспоненциальную дает возможность простейшим образом выразить гармоническое колебание, амплитуда которого постепенно уменьшается со временем вследствие расхода энергии в цепи.

Наконец, в более сложных случаях и, в частности, при изучении явлений в длинной проволочной линии, когда на величину эдс или тока влияет не только координата времени, но и координата пространства, удобно пользоваться гиперболическими функциями.

Все эти три вида функций, как это будет показано ниже, весьма родственны между собой и могут быть приведены к экспоненциальной функции с комплексным показателем, на которой ниже мы поэтому подробно остановимся.

§ 4. Символическое изображение синусоидальной функции комплексным числом.

Если синусоидальная функция записана в виде

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (0.3)$$

то математически это означает, что переменный ток i продолжается от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, т. е. всегда.

На самом деле всякий переменный ток, наблюдаемый на опыте, продолжается в течение некоторого ограниченного времени и должен быть записан так:

$$\left. \begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ при } \tau_1 > t < \tau_2 \\ i &= 0 \text{ при всех остальных значениях } t \end{aligned} \right\} \quad (0.4)$$

Кривая, изображающая ток, длящийся от $t = \tau_1$ до $t = \tau_2$, не есть уже синусоида в математическом смысле, и мы должны называть ее „отрезком синусоиды“.

Очевидно, что если бы существовал ток, выражаемый ур-нием (0.3), то для того, чтобы убедиться, что мы имеем дело с действительной синусоидой, а не с отрезком синусоиды, потребовалось бы бесконечное время. Так как время, имеющееся в нашем распоряжении, всегда ограничено, то нельзя путем физического опыта отличить действительную синусоиду от отрезка синусоиды, длящегося дольше, чем время опыта.

Из этого следует, что если отрезок синусоиды длится дольше того времени, в течение которого исследуется действие тока или напряжения

на наши приборы, и если за это время все явления приобретут установившийся характер, то математически мы с полным правом можем пользоваться выражением (0.3). В противном случае надо пользоваться выражением (0.4).

Для математических операций тригонометрическое выражение (0.4) не всегда оказывается удобным, так как действия с тригонометрическими функциями приводят к громоздким вычислениям. Часто гораздо удобнее пользоваться так называемым символическим методом, сущность которого мы вкратце напомним.

Возьмем в прямоугольной координатной системе (фиг. 0.3) отрезок A , который будем считать вектором, т. е. припишем ему, кроме длины A , еще и направление, указанное стрелкой.

Пусть это направление составляет угол θ с осью абсцисс.

Будем удерживать начало этого вектора в начале координат, а конец его заставим двигаться по окружности с равномерной угловой скоростью ω .

Тогда

$$\theta = \omega t + \varphi, \quad (0.5)$$

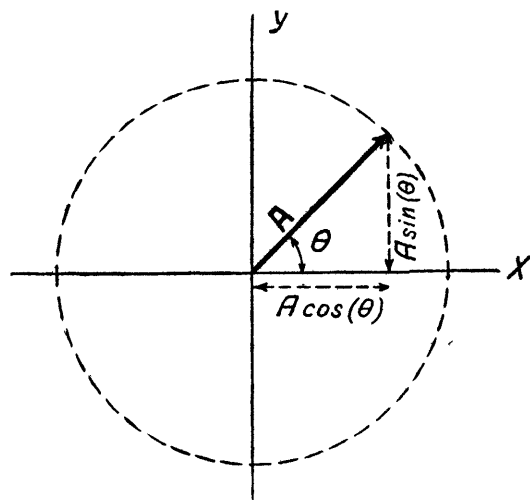
причем φ зависит от выбора момента начала отсчета времени t .

Положим, что длина вектора численно равна I_m . Тогда проекция вектора на ось абсцисс будет

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (0.6)$$

т. е. будет выражать собой гармоническую функцию.

Обратно: каждой гармонической функции соответствует, следовательно, некоторый вращающийся вектор. Длина этого вектора равна амплитуде, а угол с осью абсцисс — фазе гармонической функции. Следует обратить внимание на то, что гармоническая функция при этом вовсе не отождествляется с вращающимся вектором, а устанавливается лишь соответствие между ними. Это соответствие, однако, таково, что каждой гармонической функции соответствует только один вектор. Это позволяет заменить действия



Фиг. 0.3.

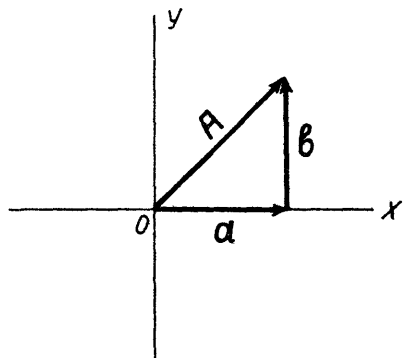
с тригонометрическими величинами действиями с соответствующими им векторами. Вместо того, чтобы складывать, вычитать, делить или перемножать тригонометрические функции, эти действия можно производить с соответствующими им векторами. Результирующий вектор будет соответствовать результирующей тригонометрической функции.

На первый взгляд может показаться, что подобная операция только усложняет дело, так как вводится некоторое новое понятие, которое требует освоения. В действительности это не так. Операции с векторами оказываются значительно проще, если для их изображения применить комплексные числа.

Очевидно, что вектор **A** (фиг. 0.4) может быть представлен как сумма вектора **a** и перпендикулярного ему вектора **b**.

Если условиться выражать расстояния от начала координат вдоль оси *X*-ов действительными числами, то вектор **a** вполне определится одним единственным числом, выражающим его длину. Направлению вправо от начала координат будет соответствовать знак „+“, а влево — знак „—“.

Второй составляющий вектор, изображаемый отрезком **b**, уже не может быть просто определен числом, так как он отличается от первого вектора еще и направлением.



Фиг. 0.4.

Это изменение направления можно было бы отметить каким-нибудь условным знаком, который позволил бы не спутать вектора одного направления с векторами другого.

В этом случае и второй вектор можно было бы также обозначать числом с указанным значком, причем число и знак опять-таки выражали бы длину вектора и направление его вверх либо вниз.

Можно поступить и иначе. Заметив, что умножение числа, выражающего длину вектора, на (-1) поворачивает направление вектора на 180° , посмотрим, нельзя ли найти такое число, умножение на которое поворачивает вектор на 90° . Обозначим это число буквой *j*. Так как двойной поворот вектора на 90° создает поворот на 180° , то очевидно, что двойное умножение числа на *j* должно дать (-1) .

Поэтому

$$j^2 = -1$$

или

$$j = \sqrt{-1}.$$

1) Совершенно так же, например, повороту на 45° будет соответствовать умножение числа, выражающего длину вектора, на число

$$\sqrt[4]{j} = \sqrt[4]{-1}.$$

Равным образом умножение, например, на число

$$\sqrt[9]{j} = (-1)^{\frac{1}{18}}$$

соответствует повороту на 10° .

Выражение

$$\dot{A} = A_m (-1)^{\frac{\theta}{\pi}} \equiv A_m j^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

соответствует вектору длиной A_m , повернутому относительно оси абсцисс на угол θ .

Выражение

$$\dot{A} = A_m (-1)^{\frac{\omega t}{\pi}} \equiv A_m j^{\frac{2\omega t}{\pi}}$$

оответствует вектору, вращающемуся с частотой ω .

В обоих последних случаях вектор выражен уже не комплексным числом, а степенной функцией.

С аналогичным изображением вектора, но в другой форме, мы встретимся дальше.

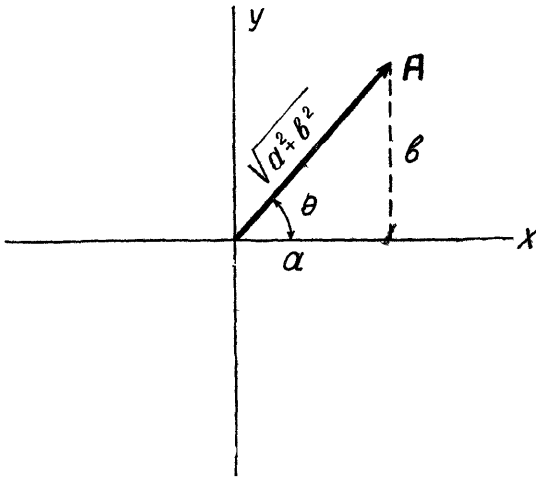
Таким образом комплексное число

$$a + jb$$

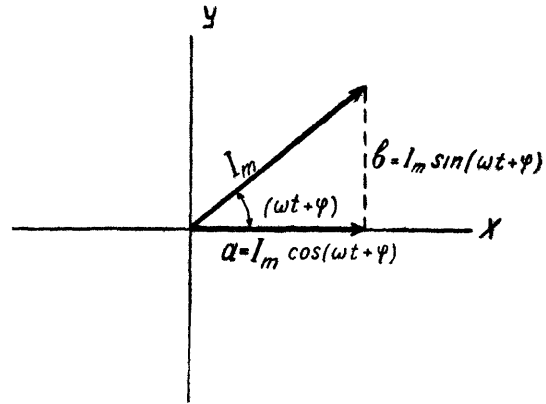
соответствует вектору **A** (фиг. 0.5), являющемуся суммой вектора **a** и перпендикулярного ему вектора **b**. Длина (или амплитуда) вектора равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, а угол θ определяется дугой, тангенс которой равен $\frac{b}{a}$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \arctg \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \quad (0.8)$$

Здесь опять следует обратить внимание, что вектор **A** отнюдь не отождествляется с комплексным числом, а между ними устанавливается определенное соответствие, в силу которого каждому вектору соответствует комплексное число, и наоборот.



Фиг. 0.5.



Фиг. 0.6.

Теперь взамен тока или напряжения, выраженных тригонометрической функцией, мы можем написать соответствующее комплексное число i , таким образом, заменить тригонометрические действия алгебраическими

Для перехода от тригонометрических обозначений к комплексным числам заметим следующее соотношение, которое очевидно из фиг. 0.6.

Если ток дан в виде

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

то комплексное его выражение будет

$$\dot{i} = a + jb,$$

причем (фиг. 0.6)

$$a = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

$$b = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Поэтому

$$\dot{i} = I_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (0.9)$$

§ 5. Символическое изображение синусоидальных функций при помощи мнимой степени.

Как известно,

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \text{ } ^1). \quad (0.10)$$

Поэтому взамен выражения

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (0.14)$$

мы можем символически писать

$$\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (0.15)$$

Выражения (0.14) и (0.15) отнюдь не тождественны, но второе выражение соответствует первому, поскольку косинусоиде соответствует вращающийся вектор, а вращающемуся вектору соответствует комплексное число.

Опираясь с символическим выражением типа (0.15), мы сильно упрощаем все математические операции. В любой момент мы можем вновь вернуться к выражению типа (0.14), но при известной привычке к символическому выражению в этом может и не встретиться надобности, так как результаты зачастую могут быть непосредственно поняты из символического выражения в форме мнимой степени или в форме комплексного числа.

Так как

$$\dot{A} = A_m e^{j\theta} \quad (0.16)$$

соответствует, как уже сказано, вектору A , имеющему амплитуду A_m и составляющему с осью абсцисс угол θ , то при

$$A_m = 1$$

и

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

выражение, полученное после подстановки этих величин в уравнение (0.16), т. е.

$$\dot{A} = e^{j\frac{\pi}{2}},$$

соответствует вектору единичной длины, повернутому на угол 90° .

Поэтому

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j.$$

Также легко сообразить, что

$$e^{j\pi} = -1,$$

$$e^{j2\pi} = 1.$$

¹⁾ Синус и косинус могут быть выражены рядами:

$$\sin \theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (0.11)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (0.12)$$

Также e^x может быть выражено рядом

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (0.13)$$

Если положить

$$x = j\theta$$

и подставить это в ряд, выражающий значение e^x , то из уравнений (0.11), (0.12) и (0.13) получим тождество

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}.$$

§ 6. Экспоненциальные функции.

Выражение

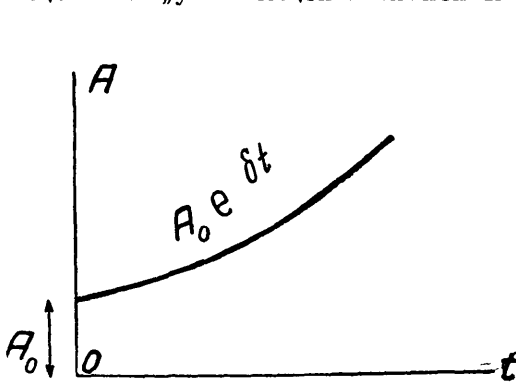
$$A = A_0 e^{\delta t} \quad (0.17)$$

показывает, что величина A непрерывно возрастает от некоторого начального значения A_0 , которое получается при $t=0$ (так как $e^0 = 1$). Кривая, соответствующая ур-нию (0.17), показана на фиг. 0.7 и носит название „возрастающей экспоненты“.

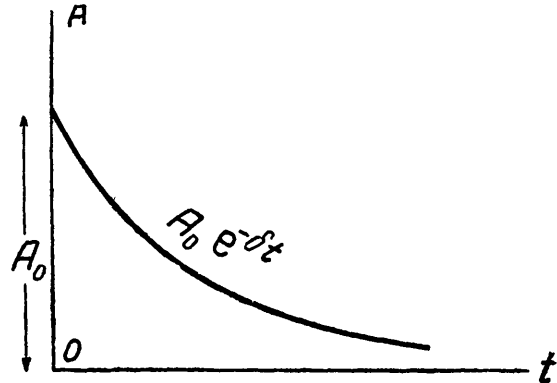
Если A задано в виде функции

$$A = \frac{A_0}{e^{\delta t}} \equiv A_0 e^{-\delta t}, \quad (0.18)$$

то кривая получает вид, показанный на фиг. 0.8, и носит название „падающей“ или „убывающей экспоненты“.



Фиг. 0.7.



Фиг. 0.8.

В обоих случаях закон изменения величины A называется „экспоненциальным законом“.

Прологарифмировав ур-ние (0.17) или (0.18), получим

$$\ln A = \ln A_0 \pm \delta t, \quad (0.19)$$

что можно представить в виде

$$\ln \frac{A}{A_0} = \pm \delta t. \quad (0.20)$$

Ур-ние (0.20) показывает, что экспоненциальный закон отличается тем свойством, что логарифм отношения величины A в момент времени t к ее начальному значению пропорционален промежутку времени t .

Коэффициент δ носит название „коэффициента возрастания“ или „коэффициента затухания“ (в зависимости от того, стоит ли перед произведением δt знак плюс или знак минус).

Экспоненциальный закон соответствует убыванию амплитуды при свободных колебаниях линейных систем. Например, амплитуда колебаний свободного маятника, которые постепенно затухают вследствие трения, убывает по экспоненциальному закону.

По этому же закону затухают и электрические колебания в линейных цепях.

Ток (или напряжение) в этом случае выражается следующим образом

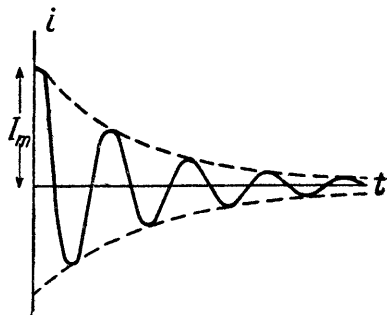
$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) e^{-\delta t} \quad (0.21)$$

или символически

$$\dot{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} \cdot e^{-\delta t} \equiv I_m e^{j(\omega t + \varphi) - \delta t}. \quad (0.22)$$

В ур-нии (0.22) показатель представляет собой комплексное число. Действительная часть соответствует аperiodическому затухающему процессу. Все выражение в целом соответствует вектору, который вращается с частотой ω , причем амплитуда его все время убывает по экспоненциальному закону.

Кривая, которая соответствует изменению тока, символически выраженному ур-нием (0.22), показана на фиг. 0.9 и называется „кривой экспоненциально затухающего колебания“.



Фиг. 0.9.

§ 7. Комплексное сопротивление.

Синусоидальному напряжению в линейных системах соответствует синусоидальный же ток той же самой частоты. Коэффициент, который позволяет перейти от напряжения к току, носит название „сопротивления цепи“

$$Z = \frac{\dot{E}}{i}. \quad (0.23)$$

Если напряжение и ток изображаются комплексными числами, то очевидно, что и частное от деления их будет также комплексным числом.

Так например, пусть

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)},$$

$$i = I_m e^{j(\omega t + \psi)};$$

тогда

$$Z = \frac{\dot{E}}{i} = \frac{E_m}{I_m} e^{j(\varphi - \psi)} \equiv \frac{E_m}{I_m} e^{j\theta}. \quad (0.24)$$

Выражение (0.24) соответствует сопротивлению цепи. Его модуль (или амплитуда) равен

$$z = \frac{E_m}{I_m}. \quad (0.25)$$

Его фаза равна

$$\varphi - \psi = \theta. \quad (0.26)$$

Если его изобразить комплексным числом в обычной форме, получим

$$\frac{E_m}{I_m} e^{j\theta} = \frac{E_m}{I_m} (\cos \theta + j \sin \theta). \quad (0.27)$$

Вектор, изображаемый ур-нием (0.24), или комплексное число, изображаемое ур-нием (0.27), символически изображают сопротивление цепи.

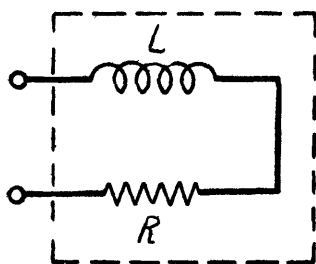
Здесь снова можно повторить, что это символическое изображение отнюдь не обозначает тождественности явлений. Сопротивление вовсе не является вектором, но ему символически соответствует вектор или соответствующее вектору комплексное число.

Привычка к изображению сопротивления посредством комплексного числа в настоящее время настолько утвердилась, что первоначальное символическое происхождение этого понятия в значительной степени утратило интерес. Поэтому в теории переменного тока принято называть это сопротивление „комплексным“, что мы и будем делать в дальнейшем, не прибегая более ни к каким оговоркам.

Из курса переменного тока читателю известно, что в выражении комплексного сопротивления в форме

$$Z = a + jb \quad (0.28)$$

действительное число a соответствует омическому или активному сопротивлению, а мнимое число jb соответствует реактивному (индуктивному или емкостному) сопротивлению.



Фиг. 0.10.

Пользуясь этим, мы хотим показать здесь на примере, что выбор действительного или мнимого числа для обозначения той либо другой физической величины зависит не от содержания самого физического процесса, а лишь от нашего выбора той либо другой точки зрения на природу этой величины.

Рассмотрим цепь, показанную на фиг. 0.10, состоящую из сопротивления R и самоиндукции L .

Если к цепи приложена эдс \dot{E} , то ток \dot{i} будет

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{R + j\omega L}. \quad (0.29)$$

Будем рассматривать нашу цепь как сопротивление; тогда это сопротивление будет

$$Z = R + j\omega L. \quad (0.30)$$

Изменим теперь нашу точку зрения и будем рассматривать нашу цепь как самоиндукцию, которую обозначим буквой L' .

Тогда, очевидно, должно быть

$$\dot{E} = j\omega L' \dot{i}. \quad (0.31)$$

Подставив значение \dot{i} из ур-ния (0.29), найдем

$$L' = L - j \frac{R}{\omega}. \quad (0.32)$$

Ур-ние (0.32) показывает, что если рассматривать нашу цепь как самоиндукцию, то эта самоиндукция окажется комплексной, причем действительная ее часть определится действительной самоиндукцией цепи, а мнимая часть — омическим сопротивлением и частотой. С тем же правом можно положить, что наша цепь есть емкость C' .

Тогда получили бы для определения C'

$$\frac{1}{C'} = -\omega L + j\omega R. \quad (0.33)$$

§ 8. Комплексное изображение других физических величин.

Как мы только что видели, изображение физических величин при помощи комплексных чисел расширяет наши понятия и приводит к обобщению физических величин, которые первоначально представлялись как совершенно разнородные. Этим путем может быть установлен также ряд новых понятий.

Мы остановимся здесь на двух таких понятиях, а именно: на комплексной амплитуде и комплексной частоте.

Положим, что в выражении

$$\dot{A} = A_m e^{j\theta} \quad (0.34)$$

величина A_m представляет собой комплексное число. В этом случае мы скажем, что амплитуда величины \dot{A} комплексна.

Посмотрим, что это означает физически.

Пусть

$$A_m = a + jb, \quad (0.35)$$

где a и b — действительные числа.

Тогда можно написать

$$A_m = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \operatorname{arctg} \frac{b}{a}}. \quad (0.36)$$

Подставив это в ур-ние (0.34), получим

$$\dot{A} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j(\theta + \operatorname{arctg} \frac{b}{a})}. \quad (0.37)$$

Теперь амплитуда является действительным числом, но зато появился сдвиг фазы на угол $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, который раньше был скрыт в комплексной амплитуде.

Таким образом физический смысл комплексной амплитуды заключается в том, что в ней скрыто не только числовое значение амплитуды, но и некоторая фаза.

Пользуясь тем, что умножение на j означает поворот фазы на угол $\frac{\pi}{2}$, можно преобразовать ур-ние (0.34) и другим путем, а именно:

$$\dot{A} = ae^{j\theta} + jbe^{j\theta} = ae^{j\theta} + be^{j\theta - \frac{\pi}{2}}. \quad (0.38)$$

На основании сказанного можно сделать и обратную операцию, т. е. скрыть сдвиг фазы в комплексной амплитуде.

Например, выражение

$$\dot{A} = A_m e^{j(\Omega t + \varphi)} \quad (0.39)$$

где A_m — действительное число), можно переписать так

$$\dot{A} = A_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\Omega t} = A_m (\cos \varphi + j \sin \varphi) e^{j\Omega t}. \quad (0.40)$$

Обратимся теперь к частоте.

Предположим, что частота Ω представляет собой комплексную величину

$$\Omega = \omega + j\delta. \quad (0.41)$$

Тогда ур-ние (0.40) переписывается так

$$\dot{A} = A_m (\cos \varphi + j \sin \varphi) e^{j\omega t - \delta t}. \quad (0.42)$$

Из этого выражения очевидно, в чем заключается физический смысл понятия комплексной частоты. Действительная часть ω является подлинной „частотой“, т. е. определяет угловую скорость периодического процесса. Мнимая же часть (или мнимая частота) определяет затухание колебаний.

Таким образом мы получаем еще одно любопытное обобщение двух величин, которые, как представлялось первоначально, не имеют между собой ничего общего.

§ 9. Связь между экспоненциальными, круговыми и гиперболическими функциями.

Мы видели, что

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta. \quad (0.43)$$

Изменив знак у θ на минус, получим

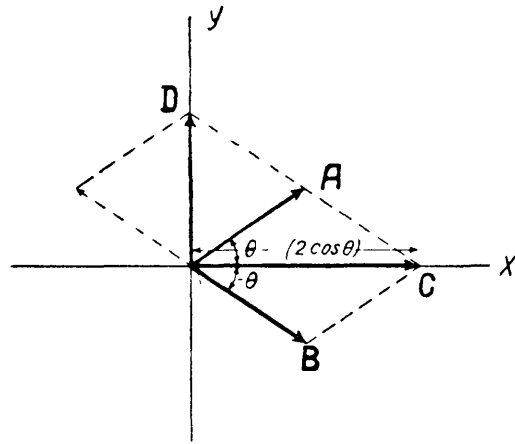
$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta. \quad (0.44)$$

Из этих двух уравнений легко получить

$$j \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}, \quad (0.45)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}. \quad (0.46)$$

Соотношения (0.45) и (0.46) представляют собой тождества, позволяющие выразить круговые функции через непериодическое число с мнимым показателем.



Фиг. 0.11.

Полезно заметить, следующее графическое использование уравнений (0.45) и (0.46). Выражение $e^{j\theta}$ соответствует вектору **A** (фиг. 0.11), имеющему единичную длину и составляющему угол θ с осью абсцисс. Выражение $e^{-j\theta}$ соответствует такому же вектору **B**, составляющему угол $-\theta$ с осью абсцисс.

Геометрическая сумма этих векторов даст вектор **C**, лежащий вдоль оси абсцисс и соответствующий действительному числу $2\cos \theta$.

Этот результат и дает уравнение (0.46). Выполним геометрическое вычитание векторов **A** и **B**, получим вектор **D**, который определяется чисто мнимым числом $j2 \sin \theta$.

Уравнения (0.45) и (0.46) остаются справедливыми, будет ли дуга θ действительным, мнимым или комплексным числом.

Положим

$$\theta = j\varphi,$$

где φ —действительное число. Тогда уравнения (0.45) и (0.46) переписутся так:

$$-j \sin(j\varphi) = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad (0.47)$$

$$\cos(j\varphi) = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}. \quad (0.48)$$

Уравнения (0.47) и (0.48) показывают, что круговые функции от мнимого аргумента представляют собой уже не периодические функции. Они называются „гиперболическими“ функциями и обозначаются так:

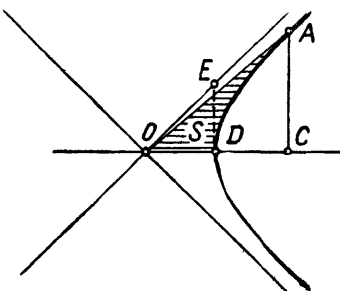
$$\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \equiv \text{sh } \varphi \quad (\text{гиперболический синус}),$$

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \equiv \text{ch } \varphi \quad (\text{гиперболический косинус}).$$

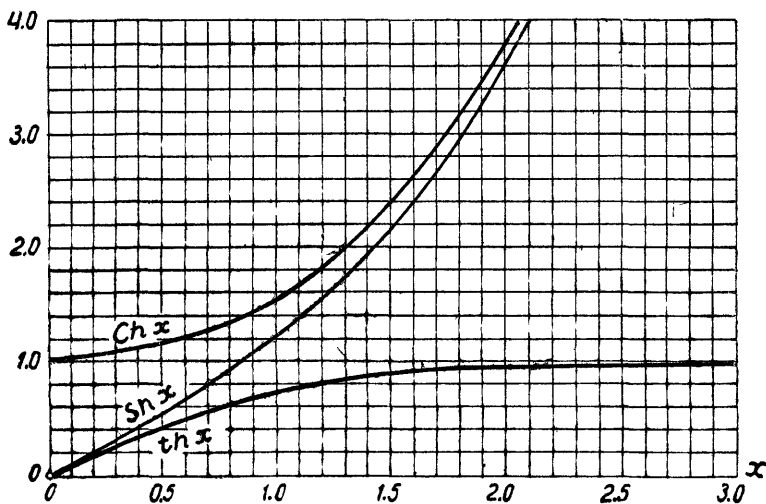
В графическом изображении гиперболический синус численно равен ординате **CA** (фиг. 0.12) точки **A**, взятой на равнобокой гиперболе с осями

$OD = DE = 1$. Гиперболический косинус численно равен абсциссе OC . Аргументом является удвоенная площадь S (заштрихованная на фиг. 0.12), заключающаяся между ветвью гиперболы, осью абсцисс и линией, соединяющей начало координат с точкой A .

Гиперболические функции* аналогичны



Фиг. 0.12.

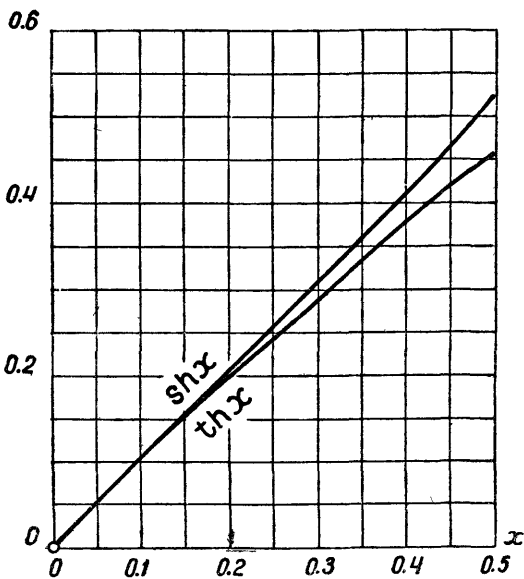


Фиг. 0.13.

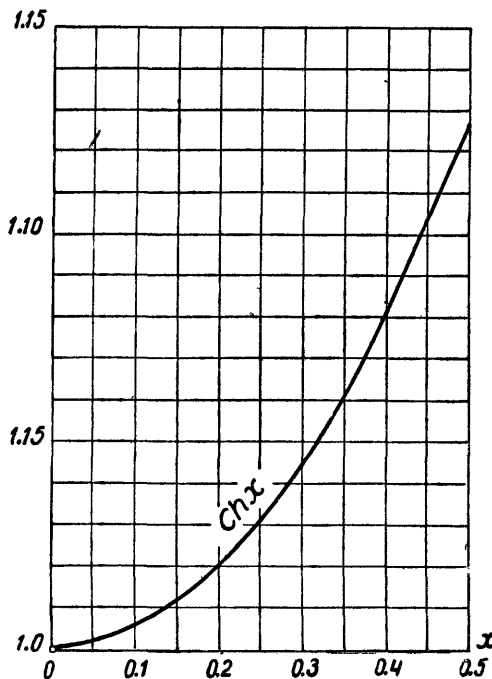
круговым, если за аргумент последних принять не дугу, стягивающую угол, а числом равную ей удвоенную площадь сектора, ограниченного этой дугой.

Функция $\frac{\text{sh}(\varphi)}{\text{ch}(\varphi)} = \text{th}(\varphi)$ называется гиперболическим тангенсом, а обратная функция $\frac{\text{ch}(\varphi)}{\text{sh}(\varphi)} = \text{cth}(\varphi)$ — гиперболическим котангенсом.

При изменении аргумента от нуля до бесконечности гиперболические функции изменяются следующим образом: $\text{ch}(\varphi)$ от единицы до бесконечности;



Фиг. 0.14.



Фиг. 0.15.

$\text{th}(\varphi)$ от нуля до единицы; $\text{sh}(\varphi)$ от нуля до бесконечности и $\text{cth}(\varphi)$ от единицы до бесконечности.

Значения гиперболических функций для некоторого интервала аргумента даны на фиг. 0.13, 0.14 и 0.15.

Между гиперболическими функциями существуют соотношения, аналогичные тем, которые имеют место в круговых, и которые приведены в приложении I.

Таким образом между гиперболическими, круговыми, экспоненциальными и логарифмическими функциями существует прямое математическое родство.

При описании физических процессов переход от круговых функций к гиперболическим или (что одно и то же) переход от мнимых степеней к действительным соответствует переходу периодического процесса в аperiодический.

Так например, пусть какая-нибудь физическая величина выражается функцией вида

$$\dot{E} = e^{\pm \sqrt{A-B}t}$$

Если $A > B$, то изменение \dot{E} со временем носит аperiодический экспоненциальный характер. Если же $B > A$, то \dot{E} является периодической функцией времени.

Положив частоту мнимой $\omega = -j\delta$, получим взамен периодических функций соответствующие экспоненциальные функции. Например,

$$Ame^{\delta} \text{ и } Ame^{-\delta}$$

§ 10 Понятие о линейчатых спектрах эдс и тока

Сложные формы кривых эдс или тока, встречающиеся в радиотехнике, могут быть представлены в виде некоторой совокупности синусоидальных функций. Применение этого представления играет весьма важную роль в теории радиотехники и поэтому с ним следует хорошо освоиться.

Более простым случаем является такой, когда функция, которую хотят представить посредством синусоид и косинусоид, является периодической, т. е. описываемое ею событие в точности и без конца повторяется через равные интервалы времени. К такой функции применяют разложение в ряд Фурье, после чего она представляется в виде суммы синусоид и косинусоид.

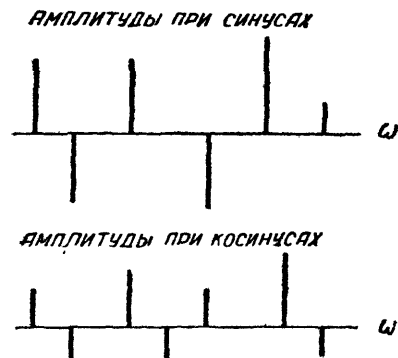
Эти суммы в зависимости от вида функции могут иметь конечное или бесконечное число слагаемых. Но и в последнем случае всегда бывает возможным ограничиться конечным числом членов, дающим достаточное практическое приближение вследствие малости амплитуд остальных отброшенных членов ряда.

Совокупность всех членов ряда называется спектром данной функции, а каждый член ряда называется линией данного спектра. Такой спектр удобно изобразить графическим способом, показанным на фиг. 0.16. Для этого вдоль оси абсцисс наносится шкала частот. В точках, соответствующих частоте, имеющейся в данном спектре, восстанавливается перпендикуляр, длина которого в выбранном масштабе дает амплитуду эдс или тока (или другой физической величины), соответствующую данной частоте.

Перпендикуляры, направленные вверх, строятся для синусоиды или косинусоиды, имеющей фазу, принятую за положительную.

Перпендикуляры, направленные вниз, соответствуют колебаниям в противоположной, т. е. отрицательной фазе.

Два таких графика, из которых один относится к синусоидам, а другой к косинусоидам, исчерпывающим образом характеризуют данную функцию.



Фиг. 0.16.

Каждой периодической функции соответствует свой единственный график и каждому графику — своя единственная периодическая функция.

Всякое изменение вида функции тотчас же отразится на изменении ее спектра, и наоборот.

Поэтому, какие бы сложные превращения форм эдс и тока ни производились в радиотехнических цепях, все они в конечном итоге могут быть сведены к тем либо другим видоизменениям (или, как говорят, „трансформациям“) спектров.

Поэтому спектр является весьма важной характеристикой физических величин, изменяющихся во времени. Как мы увидим далее, очень часто истинный вид функции может и не представлять для нас интереса, и все необходимые выводы можно сделать исключительно на основании характера спектра.

Представление о периодической функции необходимо уточнить так же, как было раньше уточнено представление о синусоидальной функции. Если функция периодична в математическом смысле слова, то она продолжается от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, т. е. всегда.

В действительности мы не можем наблюдать физических явлений, соответствующих этому условию.

Физическое явление может иметь периодический характер только в течение некоторого времени. Следовательно, на опыте мы имеем дело с явлениями периодическими в пределах некоторого интервала времени.

Однако, если этот интервал длится более того времени, в течение которого производится или мыслится исследование, то для этого исследования совершенно безразлично, повторяется ли данное явление периодически до бесконечности или кончается вслед за тем, как закончено наше исследование. Это дает нам право представлять явление посредством периодической функции. Спектр этой периодической функции мы в праве представлять в указанной выше форме, т. е. в виде суммы подлинных синусоид и косинусоид, длящихся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Рассмотренный здесь вид спектра носит название „линейчатого спектра“.

Линейчатый спектр, следовательно, применим только для случаев, когда физическое явление может быть описано периодической функцией. Способы спектрального представления явлений в других случаях укажем ниже, а пока рассмотрим несколько примеров линейчатых спектров.

§ 11. Примеры линейчатых спектров.

а) Спектр кривой, образованной суммой двух косинусоид равной амплитуды и фазы, но различной частоты (ω_1 и ω_2), может быть изображен уравнением

$$e = E_m [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \quad (0.49)$$

или, наконец, символическим уравнением

$$\dot{E} = E_m (e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}). \quad (0.50)$$

Последнее уравнение особенно удобно использовать, чтобы проанализировать получающуюся кривую с точки зрения ее формы.

Положив

$$\omega_1 = \omega + \Delta,$$

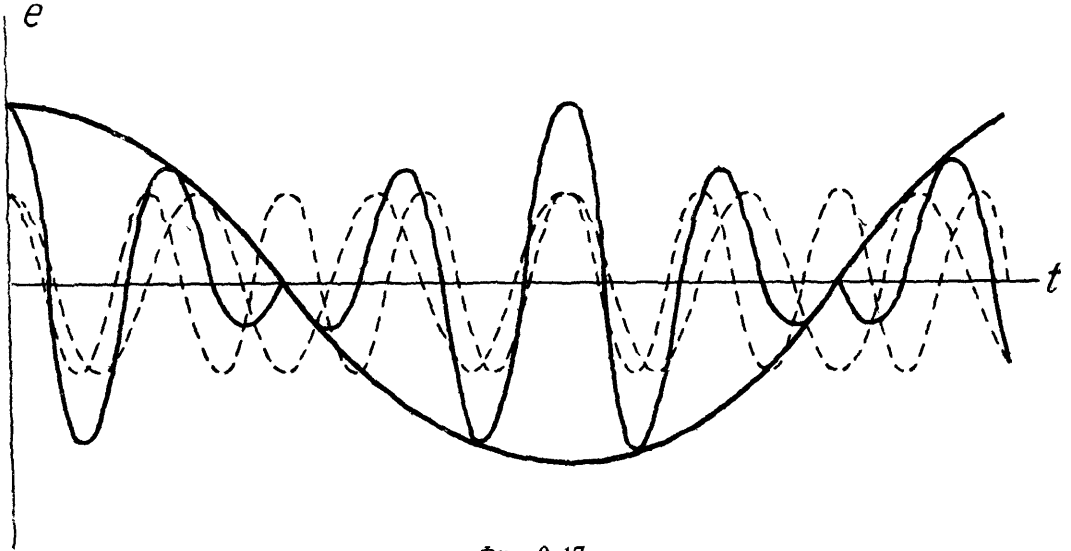
$$\omega_2 = \omega - \Delta,$$

перепишем это уравнение так

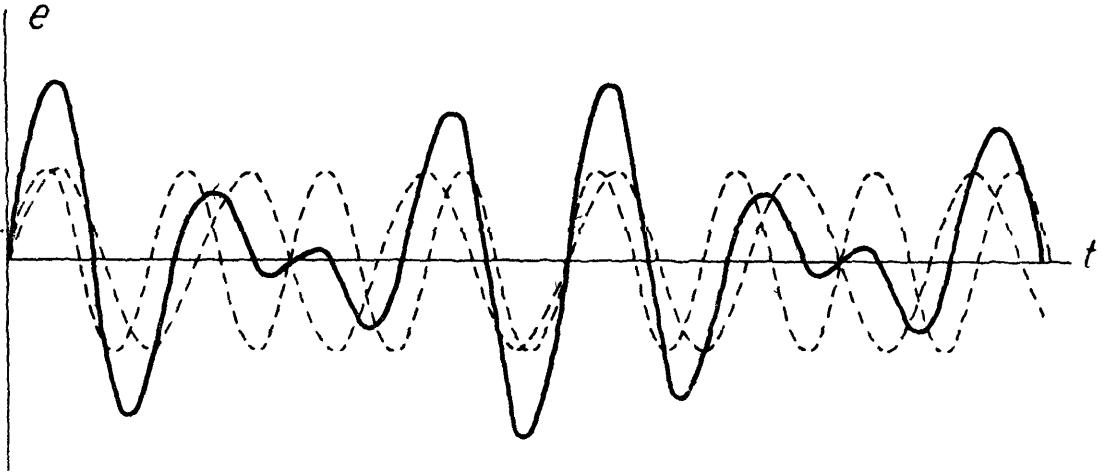
$$\begin{aligned} \dot{E} &= E_m [e^{j(\omega+\Delta)t} + e^{j(\omega-\Delta)t}] = E_m (e^{j\Delta t} + e^{-j\Delta t}) e^{j\omega t} = \\ &= [E_m \cos(\Delta t)] e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (0.51)$$

Выражение, стоящее в прямых скобках, можно рассматривать как амплитуду, которая во времени изменяется синусоидально с частотой Δ .

Когда $\cos(\Delta t) = 1$, амплитуда достигает значения $2E_m$. Когда $\cos(\Delta t) = 0$ — амплитуда равна нулю. Так как в этот момент косинус меняет знак, то, следовательно, фаза колебания поворачивается на 180° .



Фиг. 0.17.



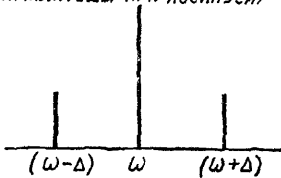
Фиг. 0.18.

Частота колебания определяется величиной

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (0.52)$$

Такая кривая изображена на фиг. 0.17. Жирная огибающая линия является косинусоидой. На фиг. 0.18 показано сложение двух синусоид.

АМПЛИТУДЫ ПРИ КОСИНУСАХ



Фиг. 0.19.

б) Спектр кривой, образованной тремя косинусоидами,

$$e = E_m \cos(\omega t) + \frac{E_m}{2} \cos(\omega + \Delta)t + \frac{E_m}{2} \cos(\omega - \Delta)t, \quad (0.53)$$

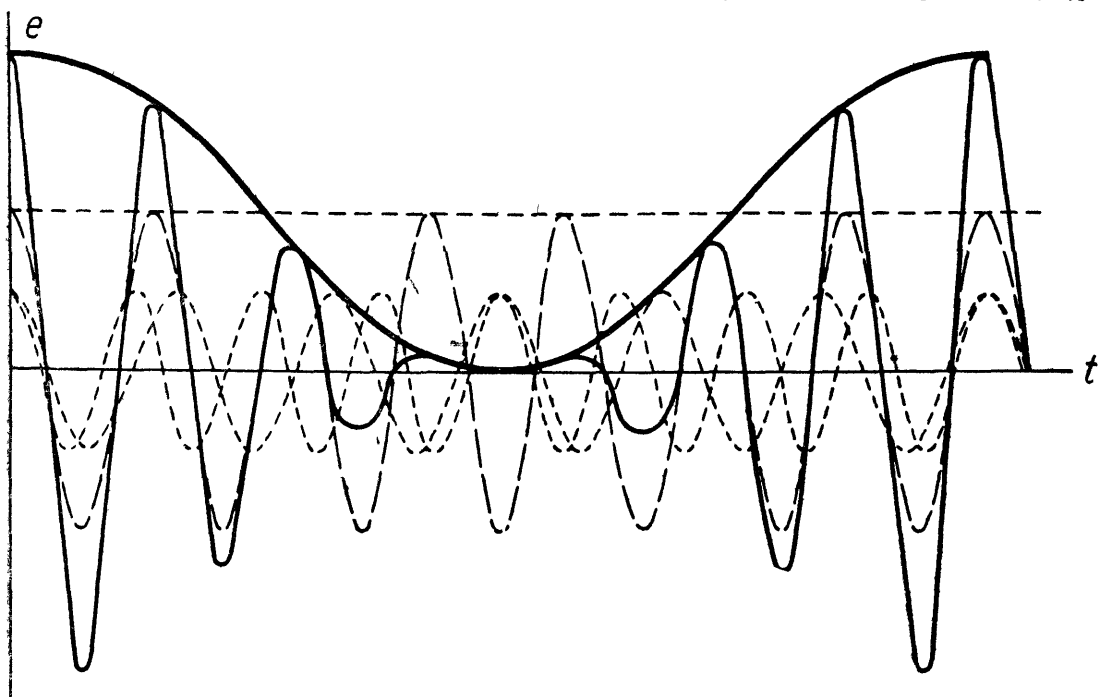
графически изобразится фиг. 0.19. В символической форме получим

$$\dot{E} = E_m e^{j\omega t} + \frac{E_m}{2} [e^{j(\omega+\Delta)t} + e^{j(\omega-\Delta)t}]. \quad (0.54)$$

Это можно преобразовать так

$$\dot{E} = \{E_m [1 + \cos(\Delta t)]\} e^{j\omega t}. \quad (0.55)$$

Рассматриваем выражение, стоящее в прямых скобках, как амплитуду, изменяющуюся во времени уже не по закону $\cos(\Delta t)$, а по закону $[1 + \cos(\Delta t)]$



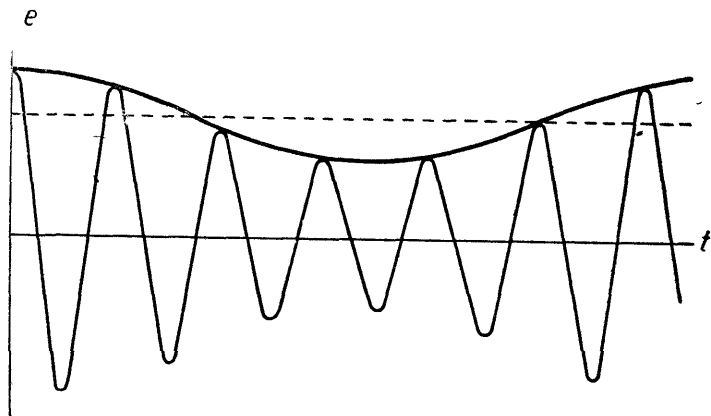
Фиг. 0.20.

Следовательно, амплитуда изменяется от нуля до двойной величины по сравнению с E_m , но не меняет знака. Кривая имеет вид, показанный сплошной линией на фиг. 0.20.

Жирная огибающая кривая является косинусоидой. Кривая, соответствующая спектру фиг. 0.21, в которой амплитуды, соответствующие частоте



Фиг. 0.21.



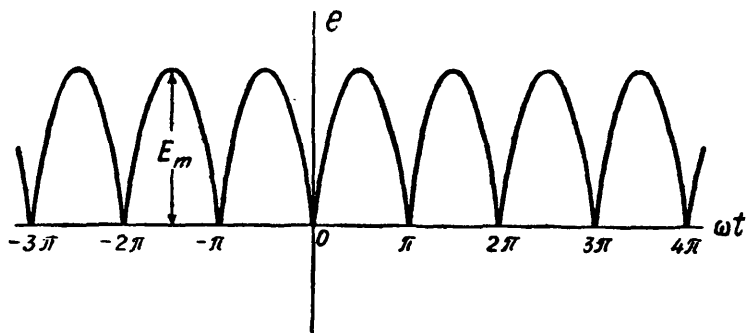
Фиг. 0.22.

там $(\omega + \Delta)$ и $(\omega - \Delta)$, меньше половины амплитуды при частоте ω , показана на фиг. 0.22. Огибающая ее также косинусоида, но амплитуда этой косинусоиды меньше E_m .

в) На фиг. 0.23 показана кривая, состоящая из периодически повторяющихся отрезков синусоиды в интервале от 0 до π .

Спектр ее выражается следующим рядом

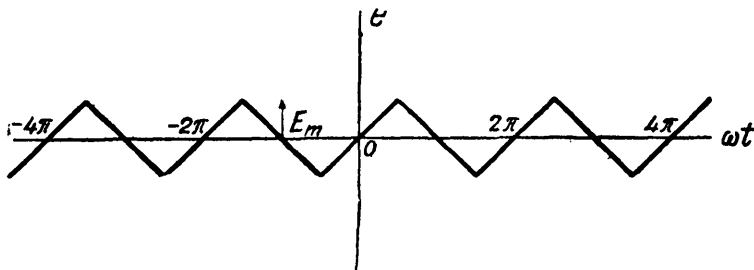
$$e = E_m \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega t)}{1 \cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3 \cdot 5} - \frac{\cos(6\omega t)}{5 \cdot 7} - \dots \right]. \quad (0.56)$$



Фиг. 0.23.

Спектр ломаной линии, изображенной на фиг. 0.24, выражается рядом

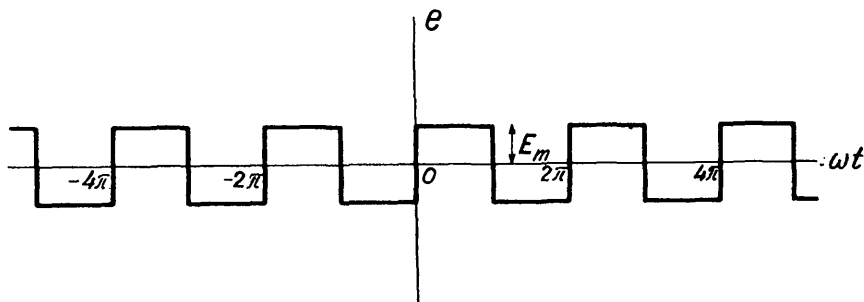
$$e_i = E_m \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{\sin(\omega t)}{1^2} - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \dots \right]. \quad (0.57)$$



Фиг. 0.24.

Спектр ломаной линии, изображенной на фиг. 0.25, выражается рядом

$$e = E_m \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(\omega t)}{1} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]. \quad (0.58)$$



Фиг. 0.25.

В трех последних случаях спектр выражается бесконечным рядом, однако, амплитуды вообще быстро убывают с увеличением номера члена, что позволяет ограничиться некоторым конечным числом членов в зависимости от требуемой точности.

Все формулы и графики относятся к периодическим функциям, длящимся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Если данная функция или соответствующая ей

кривая делятся от t_1 до t_2 , то в этом интервале они могут быть также представлены указанными спектрами. Однако теперь эти спектры будут состоять не из синусоид и косинусоид, а из отрезков синусоид и косинусоид, уместяющихся в интервале от t_1 до t_2 .

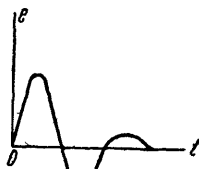
§ 12. Изображение непериодических явлений при помощи линейчатого спектра.

Если явление не имеет периодического характера в интервале времени, необходимом для целей данного исследования, то оно не может быть в точности представлено линейчатым спектром. Это ясно из того, что соответствующая ему функция не может быть выражена рядом Фурье.

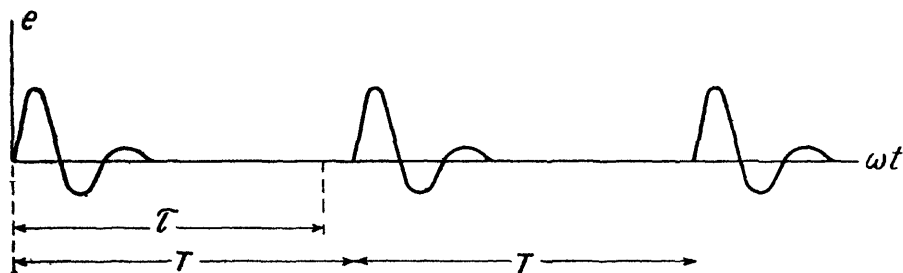
Однако, как было уже дважды отмечено, наблюдаемое физическое явление не бывает периодичным в строгом смысле этого слова и тем не менее мы можем пользоваться для его изображения периодической функцией, поскольку оно периодически в течение времени исследования. На этом основании всегда возможно любое и в том числе непериодическое явление представить как периодическое вообразив, что за пределами интервала времени, необходимого для исследования, явление снова повторяется бесчисленное количество раз.

Так например, положим, что кривая фиг. 0.26 соответствует какому-нибудь физическому явлению. Допустим, что все интересующие нас последствия от этого явления вполне установились или исчезли по прошествии промежутка времени τ . (Если кривая фиг. 0.26 изображает эдс в какой-нибудь цепи, то это значит, что ток либо достиг своей стационарной величины и больше не изменяется, либо затух и стал равен нулю).

Тогда ничто не мешает нам допустить, что через промежуток времени $T > \tau$ явление снова повторится (фиг. 0.27) и будет повторяться через этот же промежуток времени бесчисленное количество раз. Это дает возможность представить данное явление при помощи линейчатого спектра. Так как промежуток времени T между воображаемыми повторениями явления не должен быть меньше τ , но может быть сколько угодно больше τ , то



Фиг. 0.26.



Фиг. 0.27.

очевидно, что можно построить бесчисленное количество различных спектров, выбирая различные интервалы между воображаемыми повторениями явления.

Эти спектры будут соответствовать различным явлениям, но в пределах времени τ все эти явления вызовут одинаковые последствия в нашей системе.

Этот способ построения спектра обладает тем недостатком, что он требует предварительного знания минимального промежутка времени, необходимого для того, чтобы в рассматриваемой системе установился режим.

Поэтому им редко пользуются практически. Мы привели его потому, что он может служить мостом для перехода к более сложному представлению о так называемых „сплошных спектрах“.

§ 13. Понятие о сплошных спектрах.

Положим, что, действуя по способу, изложенному в § 12, мы выбрали промежуток времени T и представили нашу, непериодическую функцию в виде линейчатого спектра, состоящего из бесконечного ряда частот. Часть этого спектра, допустим, изображается графиком фиг. 0.28. По закону образования членов ряда Фурье расстояние между двумя спектральными линиями определится следующим образом. Если T есть промежуток времени между повторением явления, то этот промежуток времени является вместе с тем основным периодом разложения в ряд Фурье.

Соответствующая ему частота будет

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

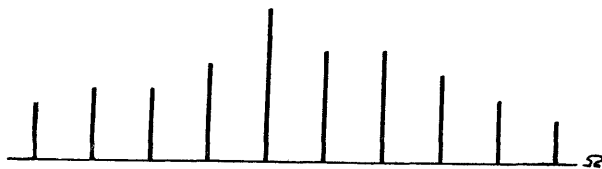
Следующие частоты будут

$$\omega_2 = 2 \frac{2\pi}{T}, \omega_3 = 3 \frac{2\pi}{T} \dots \text{и т. д.}$$

Теперь с целью уточнить наше разложение увеличим интервал времени между воображаемыми событиями вдвое.

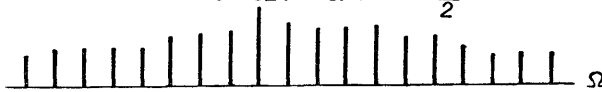
Очевидно прежде всего, что интервал между соседними частотами уменьшится вдвое, т. е. спектральные линии станут чаще. Во-вторых, амплитуда каждой составляющей частоты уменьшится, так как энергия, приходившаяся раньше на какую-нибудь группу из n линий, распределится теперь между числом линий, равным $2n$, в том же интервале частот.

Амплитуды при \sin (или \cos) на участке спектра при периоде разложения T



Фиг. 0.28.

Амплитуды при \sin (или \cos) на участке спектра при периоде разложения $\frac{T}{2}$



Фиг. 0.29.

Участок спектра, соответствующий фиг. 0.28, примет теперь вид фиг. 0.29.

Если снова и снова удваивать интервал времени между воображаемыми повторениями явления, то спектр будет все более и более точно выражать явления. Спектральные линии будут все более и более тесно сближаться. Амплитуда их будет

стремиться к нулю по мере того, как интервал T будет стремиться к бесконечности.

Если бы оставить масштаб чертежа неизменным, то уменьшение амплитуд приведет в конце концов к тому, что их нельзя уже будет графически изобразить на чертеже. Чтобы обойти это затруднение, можно при каждом удвоении промежутка времени изменять вертикальный масштаб чертежа также вдвое, достигая этим примерного сохранения высоты вертикальных линий. По мере того, как промежуток времени T будет стремиться к бесконечности, масштаб будет также стремиться к бесконечности, т. е. конечными отрезками будут изображаться бесконечно малые величины.

Нам нет надобности при этом вычерчивать все отдельные вертикальные палочки, да это вскоре станет и невозможным, так как все они сольются. Достаточно начертить только огибающую, проходящую по их вершинам.

При бесконечном увеличении промежутка времени T эта огибающая стремится к определенному предельному положению. Она может быть вычислена аналитически посредством так называемого двойного интеграла Фурье, если вид функции, выражающей явление, задан.

Из интеграла Фурье можно получить уравнение этой огибающей в форме

$$\frac{dA}{d\Omega} = F(\Omega). \quad (0.59)$$

В этом выражении dA представляет собой бесконечно малую амплитуду, соответствующую частоте Ω , а делитель $d\Omega$ появляется потому, что по мере уменьшения интервала между частотами (с увеличением T) мы изменяем вертикальный масштаб чертежа.

Таким образом мы получаем возможность охарактеризовать спектр, в котором интервалы между частотами бесконечно малы. Такой спектр называется сплошным спектром.

Для того чтобы охарактеризовать функцию как в отношении амплитуд, так и в отношении фаз, надо построить два сплошных спектра, один для синусов, другой для косинусов.

Обычно, однако, прибегают к другому способу и чертят одну кривую для амплитуд, а другую для фаз, что также исчерпывает всю картину. Часто впрочем фазовая кривая не представляет большого интереса для практических целей.

На фиг. 0.30 приведены три кривых, соответствующих уравнению (0.59) для затухающей синусоиды, выражаемой уравнением

$$e = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ E_m \sin(\omega t) e^{-\delta t} & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (0.60)$$

Три кривых соответствуют трем различным значениям отношения $\frac{\delta}{\omega}$, указанным на чертеже.

Приведенные кривые показывают, что чем меньше затухание, определяемое значением $\frac{\delta}{\omega}$, тем больше увеличение амплитуды вблизи района, где $\Omega \cong \omega$.

Следует обратить особое внимание на то, что ординаты этих кривых выражают значение величины $\frac{dE_m}{d\Omega}$. Амплитуды же представляют собой бесконечно малые величины $\frac{dE_m}{d\Omega} \cdot d\Omega = dE_m$, стремящиеся в пределе к нулю. Иными словами, в случае сплошного спектра амплитуда колебания для всякой дискретной частоты равна нулю.

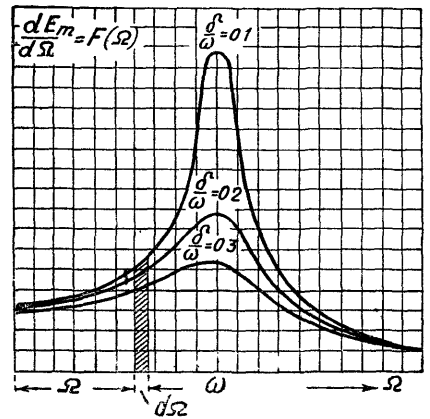
Поэтому, если бы был построен прибор, который мог бы реагировать только на определенные дискретные частоты, он не получил бы никакой энергии от источника, дающего сплошной спектр.

Если же прибор воспринимает полосу частот от Ω до $\Omega + d\Omega$, то действие источника будет пропорционально площадке, заштрихованной на фиг. 0.30, имеющей высоту $\frac{dE_m}{d\Omega}$ и основание $d\Omega$.

Фактически мы всегда имеем дело со сплошными спектрами вследствие того, что реальные физические процессы не выражаются периодическими функциями в математическом смысле. С другой стороны (как будет показано), нельзя построить физического прибора, который реагировал бы только на дискретные частоты, а не на некоторую полосу сплошного спектра вблизи определенных частот.

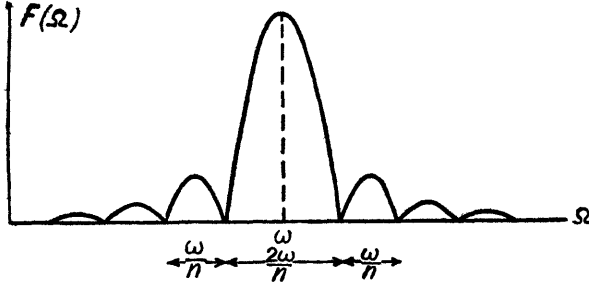
Поэтому линейчатый спектр представляет собой приближенное выражение реального спектра.

В действительности то, что мы называем спектральной линией, представляет собой только резко выраженную вершину кривой сплошного спектра, ординаты которой быстро убывают по мере удаления от данной частоты.



Фиг. 0.30.

Спектр можно называть линейчатым, поскольку он представляется нам таким в пределах точности наших измерений или если такое упрощение не играет роли для поставленной задачи.



Фиг. 0.31.

При увеличении требований со стороны точности линейчатый спектр представляется нам „полосовым“.

Отрезку синусоиды, длящейся n периодов, соответствует сплошной спектр, характер которого показан на фиг. 0.31.

При увеличении числа периодов в отрезке синусоиды центральная часть кривой (вблизи частоты ω) становится уже и выше, в то время, как вто-

ричные максимумы при частотах $\omega \pm \frac{K\omega}{n}$ (где $K = 1, 2, 3 \dots$) становятся меньше.

При $n \rightarrow \infty$ основной максимум при основной частоте стремится к бесконечности, а кривая стягивается в одну вертикальную линию.

§ 14. Трансформация спектров при посредстве линейных систем.

Сопротивление линейной электрической цепи вообще зависит от частоты. Если в цепи отсутствует эдс сложной формы, то ее можно представить как спектр частот и для каждой частоты найти ток, соответствующий эдс при этой частоте. Эти токи будут находиться в различном соотношении к отдельным эдс.

Так например, если для эдс e_1 при частоте ω_1 сопротивление цепи было

$$Z_1 = z_1 e^{j\theta_1}, \quad (0.61)$$

а для эдс e_2 при частоте ω_2 сопротивление было

$$Z_2 = z_2 e^{j\theta_2}, \quad (0.62)$$

то ток, образованный первой эдс, будет

$$i_1 = \frac{E_1}{z_1} e^{-j\theta_1}, \quad (0.63)$$

а ток, образованный второй эдс, будет

$$i_2 = \frac{E_2}{z_2} e^{-j\theta_2}. \quad (0.64)$$

Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{E_2} &\neq \frac{i_1}{i_2} \\ \theta_1 &\neq \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (0.65)$$

Ур-ние (0.65) показывает, что отношение между токами равной частоты не равно отношению между соответствующими напряжениями, и угол сдвига фазы между токами отличается от угла сдвига фазы между эдс.

Совокупность всех токов образует спектр токов, которому соответствует та либо другая кривая формы тока.

Из сказанного ясно, что если Z величина постоянная, то спектр этой кривой не может содержать никаких новых частот. Такое же положение будет, разумеется, иметь место и в том случае, если от тока перейти к напряжению на каком-либо участке цепи.

Спектр этого напряжения будет содержать те же частоты, что и спектр действующей в цепи эдс, но в смысле фаз и амплитуд он может как угодно отличаться от спектра эдс.

Это правило выражает существенную особенность линейных систем с постоянными параметрами (т. е. с неизменяющимся во времени сопротивлением Z). Оно формулируется так: линейные системы могут трансформировать спектр в отношении частот и амплитуд, но не могут создавать новых частот.

Уничтожение существующих частот, т. е. доведение их амплитуд до нуля, согласно этому правилу возможно, но для этого требуется, чтобы цепь обладала для этих частот бесконечным сопротивлением при переходе от напряжения к току или чтобы сопротивление равнялось нулю при переходе от тока к напряжению.

Выделение одного сигнала на фоне других сигналов возможно только в том случае, если спектры этих сигналов различны.

Основной метод, который применяется в радиотехнике для разделения сигналов, как раз и использует отмеченное здесь свойство линейных систем.

При помощи электрических цепей из всей массы принятых сигналов выделяются желаемые сигналы путем увеличения амплитуд тех частот, которые составляют этот сигнал, и уменьшения амплитуд тех частот, которые образуют все остальные мешающие сигналы.



ЭЛЕМЕНТЫ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И ИХ ОСОБЕННОСТИ ПРИ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ.

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛ. I.

A — работа,
 B — магнитная индукция
 C — емкость
 C_l — емкость на единицу длины
 c — скорость света
 D — электрическая индукция
 d — расстояние
 E, e — напряжение, разность потенциалов
 E — сила (напряженность) электрического поля
 e — основание неперовых логарифмов
 F — сила
 H — сила (напряженность) магнитного поля
 h — расстояние
 I, i — сила тока
 j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$)
 L — коэффициент самоиндукции
 L_l — коэффициент самоиндукции на единицу длины
 l — расстояние
 ln — натуральный логарифм
 M — магнитодвижущая сила
 M — коэффициент взаимной индукции
 m — масса
 P — мощность
 Q — заряд
 R, r — активное (ваттное) сопротивление
 R_D — диэлектрическое сопротивление
 R_m — магнитное сопротивление
 r — радиус

t — время
 U — потенциал
 v — скорость
 W — энергия
 Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления ($Z = r + jx$)
 γ — удельная проводимость
 ϵ — диэлектрическая проницаемость
 μ — магнитная проницаемость
 δ — угол потерь
 Φ — поток силовых линий
 ω, Ω — круговые частоты
 \equiv — знак тождества. В выражении $(a + b) \equiv c$ означает: „обозначим $(a + b)$ через c “.

Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m и т. д.

Постоянные и среднеквадратичные значения — теми же буквами без индекса, например E, I, P и т. д.

Мгновенные значения, выраженные в тригонометрической форме, обозначены малыми буквами, например,

$$i = I_m \sin(\omega t) \text{ и пр.}$$

Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например,

$$\dot{i} = a + jb, \dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ и пр.}$$

§ 1. Статическое электрическое поле.

Электрическим полем называется пространство, в котором проявляются электрические силы взаимодействия. Если в электрическое поле внести заряд, то этот заряд испытывает механическую силу, стремящуюся перемещать его в некотором направлении. Это направление называется направлением „электрической силы“ в данной точке пространства.

Поле характеризуется величиной и направлением электрической силы. Величина электрической силы E численно принимается равной механической силе F , которую испытывает в данном поле единичный положительный заряд, сосредоточенный в одной точке.

Так как электрическая сила определяется величиной и направлением, то она изображается вектором E . Следует заметить, что название „электрическая сила“ представляет собой термин, который не надо понимать буквально: электрическая сила ни по своей природе, ни по своей размерности не является „силой“ в механическом смысле, и только определяется путем измерения механической силы, с которой поле воздействует на заряд.

Статическое электрическое поле (т. е. такое, которое мы наблюдаем в неизменяющемся состоянии) заканчивается на электрических зарядах. Поэтому часто говорят, что это поле „образуется зарядами“.

Электрическое поле является основой всех электрических процессов.

Пока электрическое поле существует в неизменном статическом состоянии, никаких электрических явлений не происходит. И, наоборот, всякое электрическое явление связано с изменением, т. е. с убыванием, нарастанием или движением электрического поля в той области пространства, в которой происходят электрические явления.

Для описания и изображения поля удобно пользоваться представлением о силовых линиях (или силовых трубках). Направление силовой линии характеризует направление, а густота (т. е. число линий на квадратный сантиметр нормального сечения) характеризует величину так называемой „электрической индукции“, которая в пустоте равнозначна с электрической силой, а в диэлектриках связана с электрической силой соотношением

$$\epsilon E = D, \quad (1.1)$$

где ϵ некоторый коэффициент, зависящий от вещества, заполняющего пространство. Он называется „диэлектрической проницаемостью среды“.

Число силовых линий, испускаемых единичным зарядом, принимается равным 4π , так что, если заряд Q равномерно распределен по поверхности шара радиуса r , то на поверхности шара на каждый квадратный сантиметр приходится

$$D = \frac{Q}{r^2} \text{ линий.} \quad (1.2)$$

Полное число силовых линий, пронизывающих какой-нибудь контур, называется потоком индукции через этот контур. Так например, на фиг. 1.1 совокупность силовых линий, проходящих внутри кольца A , образует поток Φ , пронизывающий это кольцо; все остальные линии не входят в данный поток, ограниченный кольцом.

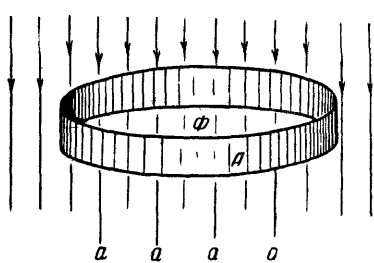
В однородном пространстве поле точечного заряда изобразится линиями, радиально расходящимися из центра (фиг. 1.2).

Всякое поле можно представить как результат сложения радиальных полей, образованных элементарными положительными и отрицательными зарядами.

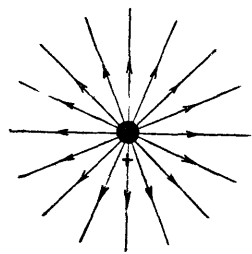
Результирующее поле нескольких зарядов получается путем векторного сложения электрической индукции D в каждой точке пространства.

Так например, на фиг. 1.3 показаны два радиальных поля. Стрелками, поставленными на линиях поля, обозначено направление электрической силы. В случае положительного заряда эта сила направлена от центра, а в случае отрицательного — к центру.

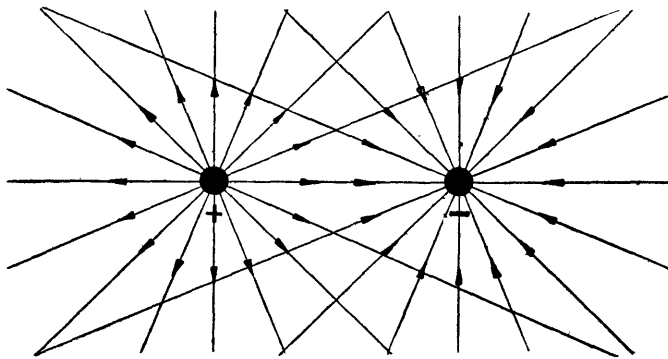
Если в какой-нибудь точке пространства существуют две равные электрические силы, направленные противоположно, они уничтожают одна другую, и результирующая сила поля равна нулю.



Фиг. 1.1.



Фиг. 1.2.



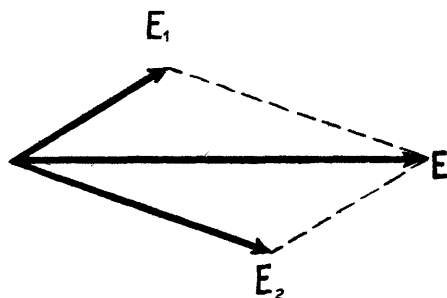
Фиг. 1.3.

Если электрические силы (или электрические индукции), образуемые двумя зарядами, направлены под углом, то результирующая сила (или индукция) получится как равнодействующая этих двух слагающих.

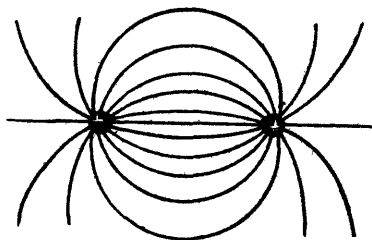
Изображая обе электрические силы векторами E_1 и E_2 , найдем результирующую электрическую силу по правилу параллелограмма, как это, например, показано на фиг. 1.4. То же самое относится и к векторам электрической индукции D .

На фиг. 1.5 показан результат такого сложения полей, изображенных на фиг. 1.3.

Такое сложение полей основано на применении принципа суперпозиции. Оно может производиться только в случае линейной среды, т. е. когда диэлектрическая проницаемость ϵ не зависит от индукции.



Фиг. 1.4.



Фиг. 1.5.

Результирующее поле вокруг заряженного шара при равномерном распределении зарядов на его поверхности совпадает с полем точечного заряда.

Такие построения можно применять только в тех случаях, когда распределение зарядов может считаться известным.

Если заряды расположены на проводнике, то обычно их распределение нельзя считать заранее известным, так как оно в свою очередь зависит от результирующего поля, под влиянием которого заряды могут перемещаться по поверхности проводника. В этих случаях указанным построением пользуются для получения приблизительной картины поля.

§ 2. Электрический потенциал.

В однородном пространстве линии поля расходятся от заряда радиально.

Окружим заряд сферой так, чтобы он был расположен в центре. Так как число линий остается неизменным, а поверхность сферы, которую они пересекают, пропорциональна квадрату радиуса, то очевидно, что число линий, приходящихся на 1 см^2 нормальной поверхности, уменьшается пропорционально квадрату расстояния.

Математически это запишется следующим образом

$$D = \frac{Q}{r^2}. \quad (1.3)$$

Отсюда

$$E \equiv \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2}. \quad (1.4)$$

Если в поле поместить точечный заряд Q_1 , он испытает силу, равную EQ_1 , откуда следует, что

$$F = \frac{Q}{\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot Q_1. \quad (1.5)$$

Эта сила направлена по линии, соединяющей центры зарядов.

Если заряд Q_1 перемещать по направлению силы F (т. е. к центру или от центра поля Q), то будет совершаться некоторая работа A .

На расстоянии dr

$$dA = Fdr = \pm \frac{QQ_1}{\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot dr. \quad (1.6)$$

Если заряд Q_1 переходит с расстояния r' на расстояние r'' , то работа будет

$$A = \pm \frac{QQ_1}{\epsilon} \int_{r'}^{r''} \frac{1}{r^2} dr = \pm \frac{QQ_1}{\epsilon} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right). \quad (1.7)$$

Положив $r'' = \infty$ (т. е. считая, что заряд Q_1 приведен в данную точку из бесконечности) и $Q_1 = 1$, получим

$$A = \pm \frac{Q}{\epsilon} \cdot \frac{1}{r'}. \quad (1.8)$$

Эта работа, совершаемая единичным зарядом при проведении его из бесконечности, называется потенциалом данной точки поля. Очевидно, что а) при передвижении заряда по сфере, в центре которой помещен заряд Q , работа не затрачивается; б) работа не зависит от того, по какому пути заряд был проведен в данную точку; в) работа, совершаемая зарядом при передвижении по любому замкнутому пути, равна нулю.

В случае точечного заряда поверхность сферы является поверхностью равного потенциала.

Величина потенциала в этом случае линейно убывает с расстоянием от центра, т. е.

$$U = \frac{Q}{\epsilon} \cdot \frac{1}{r}. \quad (1.9)$$

Всякое статическое электрическое поле может быть представлено в виде суммы радиальных полей. Поэтому всякое статическое электрическое поле представляет собой потенциальное поле, т. е. пространство, каждая точка которого обладает вполне определенным потенциалом.

В линейной среде этот потенциал является суммой всех потенциалов, которые порознь образуются отдельными элементарными зарядами.

Поэтому во всяком электрическом поле можно мысленно провести поверхности, соединяющие точки с равными потенциалами. Эти поверхности называются „эквипотенциальными поверхностями“.

Каждому потенциалу соответствует своя эквипотенциальная поверхность.

Очевидно, что эти поверхности нигде не пересекаются и в любой точке пространства каждая из них нормальна к электрической силе.

Также очевидно, что чем больше электрическая сила, тем на меньшее расстояние надо передвинуть заряд вдоль линий поля, чтобы совершить ту же работу. Другими словами, эквипотенциальные поверхности, проведенные через то же число единиц потенциала, тем ближе одна к другой, чем сильнее поле.

Электрический потенциал можно отсчитывать от любого потенциала, условно принятого за начало отсчета, т. е. за нулевой потенциал. Это вполне аналогично тому, что высоту на земном шаре мы можем отсчитывать от любой точки, высота которой принята за начало отсчета.

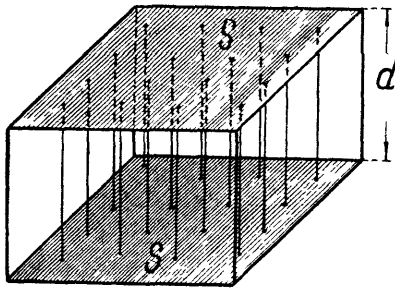
Часто за начало отсчета принимается средний потенциал земного шара; в других случаях потенциал какой-нибудь точки схемы.

Таким образом следует определять потенциал данной точки поля как работу, совершенную при переносе одной положительной единицы электричества из точки, потенциал которой принят за нулевой, в данную точку.

Работа, необходимая для переноса единицы электричества из точки с потенциалом U_1 в точку с потенциалом U_2 , очевидно, равна разности $U_2 - U_1$, которая носит название „разность потенциалов“. С этим понятием, как известно, часто приходится встречаться.

§ 3. Статическая емкость.

Положим, что между двумя одинаковыми параллельными площадками S (фиг. 1.6), расположенными на расстоянии d , существует электрическое поле, одинаковое во всех точках и направленное перпендикулярно к площадкам.



Фиг. 1.6.

Если разность потенциалов между площадками S обозначить через E , то

$$E = \frac{E}{d},$$

а следовательно,

$$\Phi = \frac{S\epsilon E}{d}. \quad (1.12)$$

Перепишем эту формулу так

$$\Phi = \frac{E}{\frac{d}{S\epsilon}}. \quad (1.13)$$

Величину

$$\frac{d}{S\epsilon} = R_D \quad (1.14)$$

мы будем называть „диэлектрическим сопротивлением“ рассматриваемого участка пространства в направлении d , с боков ограниченного поверхностью, перпендикулярной S^1).

Для того чтобы заряды были расположены равномерно по поверхности S , надо, чтобы площадки S представляли собой часть очень больших взаимно параллельных металлических плоскостей, между которыми электрическое поле равномерно в области S .

Тогда можно определить также количество электричества Q , находящегося на площадках S .

Каждая единица заряда испускает по принятому условию 4π линий.

Следовательно,

$$Q = \Phi \frac{1}{4\pi} = \frac{E}{R_D} \cdot \frac{1}{4\pi}. \quad (1.15)$$

Величину $\frac{Q}{E}$ называют емкостью.

В данном случае емкость, следовательно, равна

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}. \quad (1.16)$$

Это—знакомое читателю выражение емкости плоского конденсатора. При выводе этого выражения мы подсчитывали, какое сопротивление оказывает среда силовым линиям потока.

¹⁾ По своему начертанию эта формула совершенно аналогична формуле для сопротивления провода постоянному току $\frac{d}{S\gamma}$.

Различаются только коэффициенты ϵ и γ (диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость).

Другими словами, мы подвергали исследованию не явления на обкладках конденсатора, а явления в среде, разделяющей эти обкладки.

Это на первый взгляд мало заметное обстоятельство имеет огромное значение для правильного понимания природы явления, заключающегося в том, что емкость образуется не проводниками, служащими обкладками конденсатора, но тем пространством, в котором эти проводники находятся.

Из этого, в частности, следует, что, говоря о „емкости“ каких-нибудь предметов (например, металлических шаров), можно применять это выражение только условно.

Не существует емкости предмета самого по себе, но всегда имеет место емкость между двумя предметами, или (говоря другими словами) емкость одного предмета относительно другого или многих других предметов.

Так например, говоря о собственной емкости уединенного металлического шара, надо подразумевать под ней емкость между этим шаром и всеми остальными близкими и далекими проводниками, на которых заканчиваются силовые линии, исходящие с поверхности шара.

§ 4. Вычисление статической емкости в простейших случаях.

Емкость, о которой мы говорили в предыдущем параграфе, называется статической емкостью, так как она относится к статическому электрическому полю.

Вычисление статической емкости возможно только для относительно простых геометрических форм. В более сложных случаях получаются большие математические затруднения, и проще прибегнуть к прямому измерению или измерению на модели.

Укажем здесь два основных метода вычисления емкости.

Первый метод аналогичен тому, которым мы только что пользовались, и мы его применим для вычисления емкости шара.

Возьмем металлический шар радиусом r_1 , показанный на фиг. 1.7 в разрезе, и окружим его другим concentрическим шаром с радиусом r_2 . Тогда $r_2 - r_1$ будет измерять зазор между двумя шарами.

Вычислим диэлектрическое сопротивление между шарами. Для этого проведем внутри зазора между ними две concentрические сферы радиусами r и $r + dr$.

Так как промежуток dr бесконечно мал, то поле в нем можно считать равномерным и приложить к нему выражение для диэлектрического сопротивления, которое в § 3 было написано так

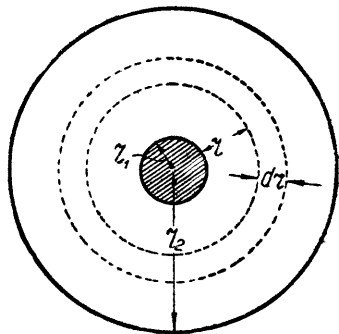
$$R_D = \frac{d}{\epsilon S}. \quad (1.17)$$

Имея в виду, что S в данном случае есть поверхность сферы с радиусом r , напишем

$$dR_D = \frac{dr}{4\pi\epsilon r^2}, \quad (1.18)$$

откуда

$$R_D = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.19)$$



Фиг. 1.7.

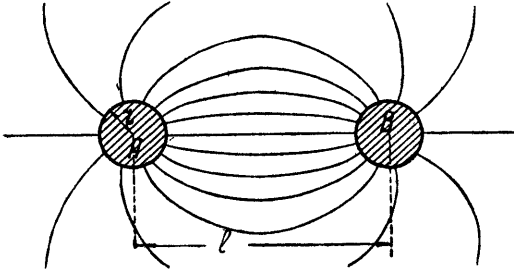
Отсюда емкость

$$C = \frac{1}{4\pi R_D} = \epsilon \frac{r_1}{l - \frac{r_1}{r_2}} \quad (1.20)$$

Если дать r_2 значение ∞ , т. е. предположить, что силовые линии заканчиваются на весьма удаленных проводниках, то

$$C = \epsilon r_1. \quad (1.21)$$

Таким образом емкость уединенного шара численно равна его радиусу. Второй способ основан на вычислении потенциала. Мы применим его для вычисления емкости между двумя шарами, находящимися на большом расстоянии от всех остальных предметов. Диаметр шаров предположим малым по сравнению с расстоянием между ними. Это последнее позволит считать, что заряды на поверхности шаров распределены равномерно (т. е. заряды одного шара не смещены под влиянием зарядов другого шара).



Фиг. 1.8.

Сообщим шару A (фиг. 1.8) заряд $+Q$, а шару B заряд $-Q$.

Потенциал у поверхности шара B составит из двух слагаемых. Во-первых, собственный заряд шара B дает на его поверхности согласно ур-нию (1.9) потенциал (при $\epsilon = 1$)

$$U_1 = -\frac{Q}{r}, \quad (1.22)$$

где r — радиус шара.

Во-вторых, заряд шара A создает в центре шара B потенциал

$$U_2 = +\frac{Q}{l}, \quad (1.23)$$

где l — расстояние между шарами.

При условии, что расстояние l велико по сравнению с радиусом шара B , можно принять, что l есть расстояние от A до любой точки поверхности шара B .

Тогда ур-ние (1.23) даст потенциал, наводимый на поверхности шара B зарядом шара A .

Следовательно, полный потенциал шара B будет

$$U_B = \frac{Q}{l} - \frac{Q}{r}. \quad (1.24)$$

Совершенно так же найдем, что полный потенциал шара A будет

$$U_A = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{l}. \quad (1.25)$$

Вычитая один потенциал из другого, получим разность потенциалов между шарами, которую теперь обозначим E

$$E = \frac{2Q}{r} - \frac{2Q}{l} = 2Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \right). \quad (1.26)$$

Отсюда емкость между шарами

$$C = \frac{Q}{E} = \frac{1}{2} \frac{r}{1 - \frac{r}{l}}. \quad (1.27)$$

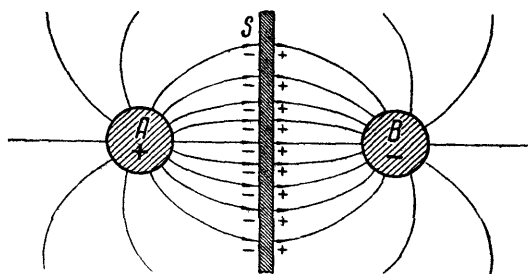
Если шары помещены не в воздухе, а в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , то получим

$$C = \frac{1}{2} \frac{\epsilon r}{1 - \frac{r}{l}}. \quad (1.28)$$

Разумеется, этот результат применим для практики только при определенных условиях. Если r будет сравнимо с l , то заряды на каждом из шаров заметно перераспределятся под влиянием поля другого шара. Вследствие этого большее количества электричества соберется на той стороне поверхности каждого шара, которая обращена к другому шару. Собственное поле A и B не будет уже радиальным. Емкость окажется больше, чем вычисленная.

Если l будет слишком велико, то шары нельзя будет в реальной обстановке рассматривать как уединенные от всех других предметов. Все эти предметы наведут свои потенциалы или, иначе говоря, изменят конфигурацию поля. Вследствие этого взаимная емкость обычно станет меньше вычисленной.

В случае двух одинаковых шаров, заряженных до равных, но противоположных потенциалов, картина поля получается совершенно симметричной. Поэтому в середине между шарами вдоль плоскости, перпендикулярной к линии, соединяющей их центры, потенциал равен нулю. Если поместить здесь, как показано на фиг. 1.9, проводящую тонкую и очень обширную пластину, имеющую нулевой потенциал, то форма поля во всем пространстве не изменится. Однако у самой пластины силовые линии разорвутся и образуются отрицательные заряды на стороне шара A и положительные на стороне шара B .



Фиг. 1.9.

Мы можем теперь уничтожить поле со стороны шара A , например, приблизив шар A до соприкосновения с плоскостью S . Поле со стороны шара B останется неизменным.

Разность потенциалов между S и B равна половине разности потенциалов между A и B . Количество электричества осталось то же. Воспользовавшись ур-нием (1.28), найдем, что емкость между плоскостью S и шаром B равна

$$C = \frac{\epsilon r}{1 - \frac{r}{l}}. \quad (1.29)$$

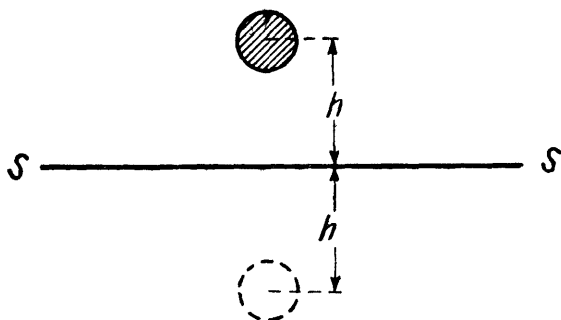
Часто при вычислении емкости бывает удобно поступить обратно, заменяя проводящую плоскость воображаемым зеркальным изображением данного заряженного предмета.

Например, емкость, приходящаяся на единицу длины двухпроводной линии, определяется формулой

$$C_l = \frac{\epsilon}{4 \ln \frac{l}{r}}, \quad (1.30)$$

где l — расстояние между центрами проводов, а r — радиус провода.

Положим теперь, что мы имеем однопроводную линию, подвешенную на высоте h над землей. Действие проводящей поверхности земли заменяют зеркальным изображением провода. Картина, которая получится в разрезе перпендикулярно оси провода, показана на фиг. 1.10. Здесь SS — поверх-



Фиг. 1.10.

ность земли; A — сечение провода; B — сечение его зеркального изображения; $l = 2h$ — расстояние между A и B .

Пользуясь ур-нием 1.30, пишем

$$C_l = \frac{\epsilon}{4 \ln \frac{l}{r}} = \frac{\epsilon}{4 \ln \frac{2h}{r}} \quad (1.31)$$

Для воздушной линии $\epsilon = 1$.

§ 5. Единицы измерения емкости.

Все предыдущие формулы написаны в электростатических единицах. Электростатическая CGS единица емкости, называемая сантиметром, удобна для измерения небольших емкостей, и в радиотехнике ею постоянно пользуются. Практическая единица — фарада равна $9 \cdot 10^{11}$ см.

Электростатическая CGS единица напряжения (разности потенциалов), равная 300 в, и единица количества электричества, равная $\frac{1}{3 \cdot 10^9}$ к, на практике не применяются, но при теоретических выводах ими приходится пользоваться из соображений однородности величин.

При пользовании формулами необходимо, как известно, пользоваться однородными единицами. Для перевода найденных выше формул в практическую систему следует взамен C писать $C \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ ф, взамен E писать $E \cdot 300$ в,

взамен Q писать $Q \frac{1}{3 \cdot 10^9}$ к и взамен мощности P писать $P \cdot 10^7$ вт.

Если формулы содержат только электрические величины, для которых на практике всегда применяются только „практические“ единицы, то формулы остаются неизменными. Например, $Q = EC$; $E \cdot 300 \text{ в} \cdot C \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ ф} = Q \frac{1}{3 \cdot 10^9} \text{ к}$ или $EC = Q$.

Преобразование необходимо только в случае наличия неэлектрических величин, например длины.

Например, емкость между двумя параллельными плоскостями при равномерном поле в электростатических единицах была найдена

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \text{ см.} \quad (1.32)$$

В практической системе

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d \cdot 9 \cdot 10^{11}} \text{ ф,} \quad (1.33)$$

причем длина d и площадь S выражены в сантиметрах и квадратных сантиметрах.

§ 6. Основные формы конденсаторов и вычисление их емкости.

Прибор, назначением которого является создание емкости, как известно, называется конденсатором.

Конденсаторы, применяемые в радиотехнике, чрезвычайно разнообразны по своему устройству и назначению.

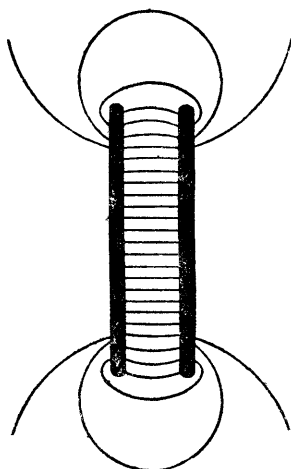
Они строятся как для получения постоянной емкости, так и для емкости, изменяющейся в некоторых пределах.

Так как при высоких частотах даже очень маленькие емкости могут образовать довольно значительную емкостную проводимость, то в отличие от техники сильных токов в радиотехнике находят себе применение конденсаторы емкостью от нескольких сантиметров до нескольких десятков микрофард. Очень большое значение получают здесь различного рода так называемые „паразитные“ емкости, т. е. емкости, образуемые подводящими проводами и различными элементами приборов и схем, что также не имеет места в технике сильных токов.

В связи с этим в радиотехнических устройствах особое значение приобретает способ монтажа и взаимное расположение различных частей схемы. Преобладающими формами осуществления конденсаторов является плоская и цилиндрическая.

Плоский конденсатор получается из сближенных плоских пластин.

Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их длиной и шириной, то главная часть потока сосредоточивается между пластинами, как это показано на фиг. 1.11. Некоторая часть линий, проходящих снаружи пластин, образует так называемый „поток рассеивания“.

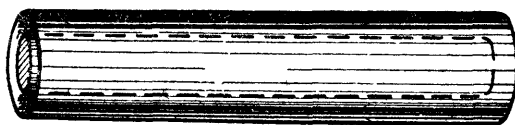


Фиг. 1.11.

Статическая емкость между двумя пластинами такого конденсатора обычно может вычисляться с достаточным приближением при помощи известной уже формулы

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \left(\frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \right) \phi. \quad (1.34)$$

В действительности в воздушных конденсаторах очень часто расстояние между пластинами



Фиг. 1.12.

приходится делать довольно большим, вследствие чего получается значительный поток рассеивания.

Таким образом емкость образуется не только за счет пространства между пластинами, но в заметной доле и за счет пространства, окружающего пластины извне.

Благодаря этому диэлектрическое сопротивление уменьшается, т. е. емкость оказывается несколько больше, чем вычисленная по приведенной формуле.

Другой тип конденсатора получается из двух коаксиальных (т. е. совпадающих в отношении осей) цилиндров (фиг. 1.12). Если ширина зазора мала по сравнению с длиной цилиндров, то статическую емкость можно вычислить по формуле

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \left(\frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \right) \phi, \quad (1.35)$$

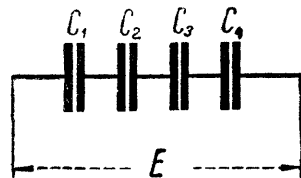
где l — длина цилиндра, r_2 и r_1 — радиусы цилиндрических поверхностей, ограничивающих зазор, так что $(r_2 - r_1)$ представляет собой величину зазора.

Формула действительна, если l очень велико по сравнению с $(r_2 - r_1)$.

Плоская или коаксиальная формы типичны для большинства конденсаторов. На схеме конденсатор, как известно, обозначается двумя толстыми параллельными чертами (фиг. 1.13).



Фиг. 1.13.



Фиг. 1.14.

Если пренебрегать утечкой, то последовательно соединенный ряд конденсаторов с емкостями C_1, C_2, \dots и т. д. (фиг. 1.14) может рассматриваться как ряд диэлектрических сопротивлений, преодолеваемых последовательно потоком индукции.

Общее сопротивление системы равно сумме сопротивлений, т. е.

$$R_D = R_1 + R_2 + \dots \text{ и т. д.}, \quad (1.36)$$

где

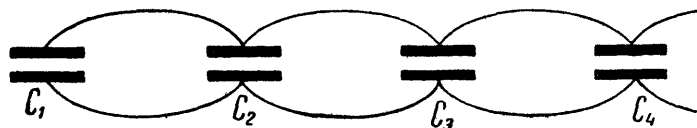
$$R_D = \frac{1}{4\pi C_n},$$

откуда

$$R_D = \frac{4\pi}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots}, \quad (1.37)$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots}. \quad (1.38)$$

При параллельном соединении поток разбивается на отдельные части, пропорциональные емкостям $C_1, C_2 \dots$ и т. д. (фиг. 1.15). Общий поток равен сумме потоков, а следовательно, и общая емкость равна сумме емкостей.

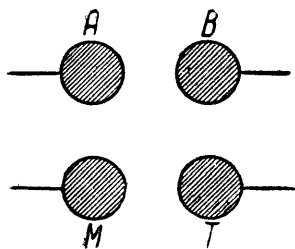


Фиг. 1.15.

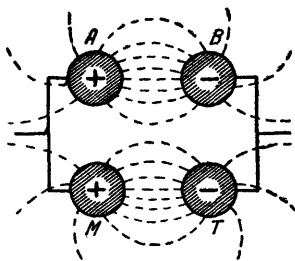
Всякое другое соединение является комбинацией этих двух основных способов соединения, и вычисление емкости не представляет никакой трудности.

Нужно особенно подчеркнуть, что сказанное здесь относится только к тем случаям, когда можно пренебречь взаимным влиянием конденсаторов через поток утечки.

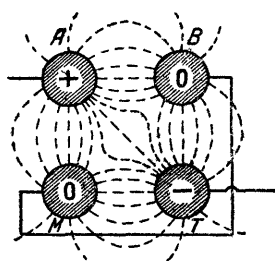
Эти расчеты совершенно нельзя прилагать к тем случаям, когда емкости двух систем, например AB и MT (фиг. 1.16), образуются одним и тем же пространством.



Фиг. 1.16.



Фиг. 1.17.



Фиг. 1.18.

Если емкость AB равна C_1 , а емкость MT равна C_2 , то при параллельном соединении их (фиг. 1.17) общая емкость не равна, а меньше

$$(C_1 + C_2).$$

Наоборот, при последовательном соединении (фиг. 1.18) общая емкость больше, чем

$$\frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}},$$

как было бы в случае конденсаторов без внешнего потока рассеивания.

§ 7. Емкость при переменном потенциале.

Пусть емкость C соединена короткими проводами с источником эдс

$$\dot{E} = E_m e^{j\omega t}, \quad (1.39)$$

где E_m — амплитуда, ω — круговая частота и t — время.

В каждый момент заряд конденсатора

$$Q = 4\pi C e. \quad (1.40)$$

Продифференцировав по t , получим

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dQ}{dt} = C \frac{de}{dt}. \quad (1.41)$$

Величина $\frac{1}{4\pi} \frac{dQ}{dt}$ представляет собой скорость изменения заряда, т. е. ток, который протекает по проводам и который обозначим буквой \dot{I} . Следовательно, при синусоидальном напряжении

$$\dot{I} = C \frac{d\dot{E}}{dt} = j\omega C E_m e^{j\omega t}. \quad (1.42)$$

Очевидно, что $\omega C E_m$ представляет собой амплитуду тока.

Коэффициент, связывающий \dot{E} и \dot{I} , носит название емкостного сопротивления.

Из ур-ний (1.39) и (1.42)

$$\frac{\dot{E}}{\dot{I}} = -\frac{j}{\omega C}. \quad (1.43)$$

Ток \dot{I} опережает по фазе напряжение \dot{E} . Другими словами, он положителен, пока напряжение возрастает, и отрицателен, когда оно убывает.

Так как емкостный ток находится в квадратуре эдс, то он представляет собой реактивный ток. Энергия, запасаемая в конденсаторе в течение четверти периода, вновь отдается в цепь в течение следующей четверти периода.

§ 8. Электростатическая связь и электростатические экраны.

Положим, что какой-нибудь предмет, например шар A , получает переменный потенциал от источника \dot{E} (фиг. 1.19). Пусть на некотором расстоянии l находится второй шар B , причем положим для простоты, что l велико по сравнению с диаметрами шаров D_1 и D_2 .

Тогда, если заряд шара A изменяется по закону

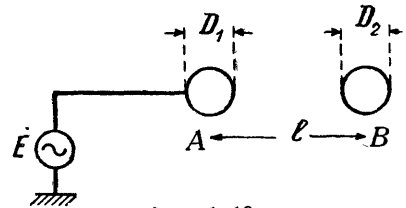
$$\dot{Q} = Q_m e^{j\omega t}, \quad (1.44)$$

то потенциал шара B будет изменяться по закону

$$\dot{U}_B = \frac{Q_m e^{j\omega t}}{l}, \quad (1.45)$$

а потенциал шара A по закону

$$\dot{U}_A = \frac{\dot{Q}}{\frac{D_1}{2}} = \frac{Q_m e^{j\omega t}}{\frac{D_1}{2}}. \quad (1.46)$$

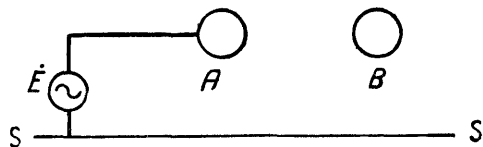


Фиг. 1.19.

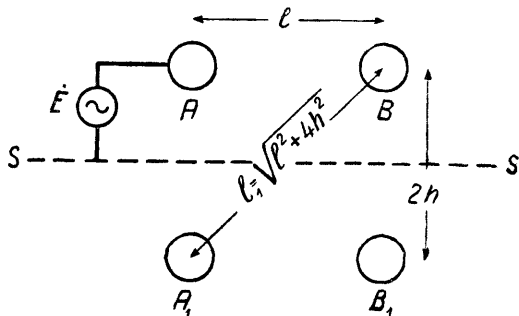
Из сравнения ур-ний (1.45) и (1.46) видно, что изменение потенциала у шара B будет происходить в той же фазе, что и у шара A , но при том же заряде Q_m амплитуда будет тем меньше, чем больше расстояние l .

Расположим теперь оба шара вблизи большой проводящей поверхности, например, поверхности SS (фиг. 1.20). Чтобы найти теперь потенциал шара B , заменим действие этой поверхности действием зеркального изображения шаров A и B .

Для этого заменим фиг. 1.20 фиг. 1.21; на которой прежнее поло-



Фиг. 1.20.



Фиг. 1.21.

жение плоскости SS отмечено пунктиром. Теперь потенциал шара B составится из трех слагаемых:

- а) потенциала, наводимого зарядом шара A , равного \dot{Q} ;
- б) потенциала, соответствующего заряду воображаемого шара A_1 , имеющего обратный знак заряда по сравнению с A , т. е. $-\dot{Q}$;
- с) потенциала, соответствующего заряду воображаемого шара B_1 , который в данном случае равен нулю, так как шар B изолирован и заряд его равен нулю.

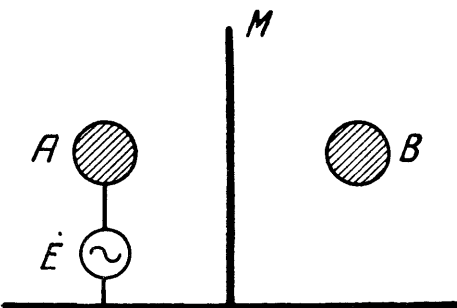
Таким образом потенциал шара B будет

$$\dot{U}_B = \dot{Q} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_1} \right). \quad (1.47)$$

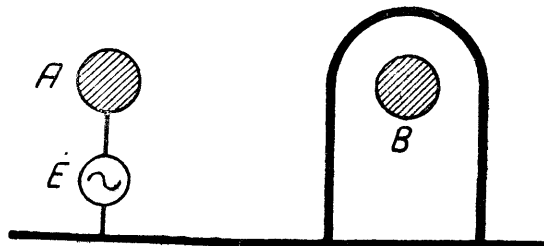
Легко видеть, что разность $\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_1} \right)$ уменьшается по мере приближения шара A или шара B к плоскости SS . Таким образом приближение плоскости SS уменьшает электростатическую связь между шарами.

Это действие проводящей плоскости SS называют «экранирующим действием», а самую проводящую плоскость — «электростатическим экраном».

Значительное усиление электростатического экранирования получится, если взамен плоскости взять какую-нибудь поверхность, которая разделяет один шар от другого, как, например, показано на фиг. 1.22, где шары и поверхность видны в разрезе.



Фиг. 1.22.



Фиг. 1.23.

Полная электростатическая экранировка получится тогда, если шар A или шар B окружен замкнутой поверхностью (например фиг. 1.23), причем достаточно сделать эту поверхность из металлической сетки.

Электростатические экраны широко применяются в радиотехнических устройствах и в особенности в усилителях для уничтожения электростатического воздействия мощных каскадов усилителя на маломощные.

§ 9. Явления в диэлектрике под действием электрического поля.

Под действием электрического поля в диэлектрике происходит целый ряд сложных и разнообразных явлений, механизм которых еще далеко не полностью изучен.

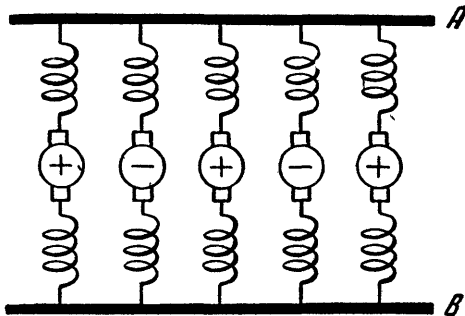
Многие из этих явлений приобретают особенно большое значение при высокой частоте и сильно затрудняют и даже делают невозможным применение ряда диэлектриков, применяющихся в технике низкой частоты.

Во-первых, самая причина, по которой диэлектрик обладает диэлектрической проницаемостью большей единицы, заключается в том, что в нем имеются заряды, способные под влиянием электрического поля смещаться, причем этому смещению противодействует некоторая сила, носящая характер упругости.

Чтобы пояснить это, приведем следующую электромеханическую модель диэлектрика. Между металлическими пластинами *A* и *B* (фиг. 1.24) находятся заряженные шарики *a*, *b*, *c*, *d* и т. д. Шарики поочередно заряжены противоположными знаками, и поэтому в схеме не создают никаких потенциалов на пластинах *A* и *B*.

Показанными на фиг. 1.24 спиральными пружинками, сделанными из изолятора, шарики удерживаются в своем положении в середине между пластинами.

Если теперь к пластинам приложить разность потенциалов, то под влиянием электрического поля шарики переместятся: заряженные отрицательно — приблизятся к положительной пластине, а заряженные положительно — к отрицательной.



Фиг. 1.24.

Поэтому, кроме энергии электрического поля, между пластинами *A* и *B* будет находиться еще запас энергии в форме упругого смещения пружинок. На создание этого запаса энергии должна была быть израсходована работа источника, заряжавшего пластины *A* и *B*. Если пластинам сообщена разность потенциалов E , то энергия затрачивается, во-первых, на заряд конденсатора. Эта энергия равна $\frac{CE^2}{2}$, где C — действительная емкость между пластинами *A* и *B*. Во-вторых, затрачивается еще энергия W на сжатие пластинок. Рассматривая систему как конденсатор и не зная о существовании внутри ее заряженных шариков, мы нашли бы ее емкость следующим образом.

Полная энергия системы равна

$$W_{\text{полн}} = \frac{CE^2}{2} + W. \quad (1.48)$$

При разности потенциалов E она соответствует некоторой кажущейся емкости $C_{\text{каж}}$, которая определится из формулы

$$W_{\text{полн}} = \frac{C_{\text{каж}} E^2}{2}, \quad (1.49)$$

откуда

$$C_{\text{каж}} = 2 \frac{W_{\text{полн}}}{E^2} = \frac{CE^2 + 2W}{E^2} = C + 2 \frac{W}{E^2}. \quad (1.50)$$

Таким образом статическая емкость конденсатора с диэлектриком $C_{\text{каж}}$, получаемая из опыта, оказывается увеличенной против емкости такого же по размерам воздушного конденсатора вследствие наличия упруго смещающихся зарядов. В случае диэлектриков мы это увеличение и учитываем в

форме диэлектрической проницаемости. И так как для большинства диэлектриков запас работы W пропорционален E^2 , то второе слагаемое в ур-нии (1.50), т. е. $2 \frac{W}{E^2}$ оказывается величиной, не зависящей от E .

Во-вторых, молекулы сложного вещества имеют некоторую поляризацию, т. е. представляют собой в электрическом смысле полярные тельца. Каждая молекула, взятая порознь, окружена электрическим полем. Совокупность молекул не образует поля, так как в твердых телах молекулы взаимно ориентированы таким образом, что поля их уничтожаются, а в жидких телах они находятся в беспорядочном движении и расположены по закону вероятности так, что внешнее суммарное поле всех молекул, вместе взятых, равно нулю.

Под влиянием приложенного поля эта ориентировка изменяется, и молекулы поворачиваются таким образом, что образуют поле, направленное противоположно действующему на них извне. При исчезновении приложенного извне поля они вновь возвращаются в прежнее состояние.

В-третьих, в диэлектрике присутствуют свободные ионы, которые под влиянием электрического поля способны перемещаться и образовывать внутри массы диэлектрика объемные заряды, нарушая при этом однородность поля в толще диэлектрика и образуя поля, направленные противоположно приложенному извне.

В-четвертых, в толще диэлектрика под действием поля образуется „сквозной ток“, т. е. ток проводимости, который может быть обусловлен электролизом, переносом ионов или проводимостью металлического характера, т. е. перемещением электронов, слабо связанных с атомным ядром и легко переходящих от одного атома к другому.

Перемещения зарядов и повороты осей поляризованных молекул, носящие упругий характер, образуют в диэлектрике под действием поля запас реактивной энергии, т. е., другими словами, увеличивают диэлектрическую проницаемость.

Перемещения, носящие неупругий характер, и всякого рода трения, происходящие при молекулярных перемещениях, возникающих под действием поля, влекут за собой потерю энергии или, иначе говоря, обуславливают переход ее в тепло.

Как диэлектрическая проницаемость, так и потери зависят от частоты и от физических условий (в особенности от температуры).

Зависимость от величины поля за редкими исключениями практически столь ничтожна, что ею можно пренебречь, пока диэлектрик не начинает разрушаться под действием высокой температуры или перенапряжений. Поэтому при постоянных физических условиях большинство диэлектриков может рассматриваться как линейная система и к ним может быть применен принцип независимости действия.

Разрушение диэлектрика может наступить или вследствие изменения его физических свойств под действием высокой температуры (обусловленной большой мощностью, выделяемой вследствие потерь) или вследствие электрического пробоя, обусловленного тем, что напряженность поля превысила некоторую предельную границу для данного материала.

В отношении электрического пробоя весьма существенную роль играет однородность диэлектрика и однородность поля, в котором он находится.

Пробой, начавшийся в одном месте (вследствие большей силы поля или меньшей прочности диэлектрика в данном месте), приводит к разрушению окружающих мест и в конечном счете к пробоему всей толщи диэлектрика.

Электрическому пробоему обычно предшествуют подготовительные процессы в диэлектрике.

В газе такой подготовительный процесс заключается в постепенном усилении ионизации, производимой электрическим полем. В твердых диэлектриках он заключается в предварительных изменениях вещества, особенно в местах вкрапления различных неоднородностей и, в частности,

каверн, наполненных газом. В последнем случае сначала наступает ионизация и пробой газа, следствием чего в дальнейшем является разрушение твердого диэлектрика.

Поэтому пробивное напряжение, даже в однородном поле, вообще, зависит от длительности действия напряжения.

При высоких частотах разрушение твердого диэлектрика чаще наступает вследствие большого количества выделяемого тепла, которое, как мы увидим ниже, растет с частотой.

Пробой газовых диэлектриков при высокой частоте облегчается более благоприятными условиями ионизации газа.

§ 10. Потери в диэлектриках.

Среди всех других явлений в диэлектриках для техники большой частоты особенно большое значение имеют явления, приводящие к потере энергии.

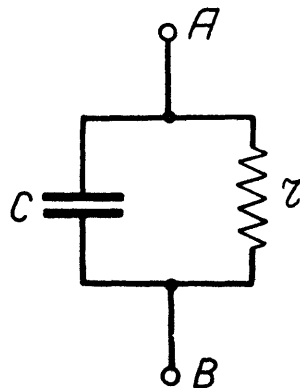
Каким бы внутренним механизмом в диэлектрике ни были вызваны эти потери, они формально могут быть эквивалентно заменены действием некоторого омического сопротивления, включенного параллельно или последовательно с конденсатором.

Такая замена облегчает изучение и взаимное сравнение различных диэлектриков и позволяет легко вычислить количество энергии, выделяющейся в конденсаторах под действием высокой частоты.

В случае замены данного конденсатора действием параллельного сопротивления эквивалентная схема получит вид фиг. 1.25.

Рассмотрим, каково сопротивление такой цепи для напряжения, приложенного в точках *A* и *B*.

Чтобы найти *Z*, поступим следующим образом. Сначала найдем проводимость между точками *A* и *B*. Она равна



Фиг. 1.25.

$$\frac{1}{Z} \equiv a + jb, \quad (1.51)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} b &= \omega C \\ a &= \frac{1}{r} \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

$$Z = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r} - j\omega C}{(\omega C)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2}. \quad (1.53)$$

Можно было бы рассуждать иначе, а именно, предположить, что вся система представляет собой некоторую емкость C_1 , так что

$$\dot{I} = j\dot{E}\omega C_1. \quad (1.54)$$

В этом случае емкость надо было бы считать комплексной

$$C_1 = C - jC_2. \quad (1.55)$$

Из уравнений (1.54) и (1.55) получим

$$\dot{I} = j\omega(C - jC_2)\dot{E} = (\omega C_2 + j\omega C)\dot{E} \quad (1.56)$$

или

$$\frac{1}{Z} = \omega(C_2 + jC). \quad (1.57)$$

При диэлектрике с проводимостью вводят понятие о комплексной диэлектрической проницаемости, применение которой в некоторых случаях оказывается очень удобным.

Действительно, емкость может быть выражена произведением

$$C = A\epsilon, \quad (1.58)$$

где A некоторое число, зависящее исключительно от геометрии поля.

Аналогично этому комплексная емкость может быть выражена через произведение

$$C_1 = A\epsilon_0, \quad (1.59)$$

где ϵ_0 — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Вернемся снова и ур-нию (1.51).

Обозначим угол сдвига между емкостным током и полным током через

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi;$$

тогда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a}{b}. \quad (1.60)$$

Для нас далее будет интересен случай, когда $a \ll b$.

Для этого случая можно положить

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a}{b} \approx 0 \quad (1.61)$$

или

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega Cr} = \delta. \quad (1.62)$$

Мощность, выделяемая в сопротивлении r , выразится следующим образом

$$P = \frac{E^2}{r}. \quad (1.63)$$

Подставив значение $\frac{1}{r}$ из ур-ния (1.62), получим

$$P \approx \omega C \delta E^2 \text{ при } \delta \ll 1. \quad (1.64)$$

Из этого выражения видно, что потери в утечке (при условии, что ее проводимость мала по сравнению с емкостной проводимостью) пропорциональны углу δ . Этот угол носит название „угла потерь“.

На фиг. 1.26 показан способ соединения, при котором емкость и сопротивление включены последовательно.

Полное сопротивление в этом случае будет

$$Z = R - \frac{j}{\omega C}. \quad (1.65)$$

В этом случае также можно говорить о комплексной проводимости всей системы, равной $\frac{1}{Z}$, или ввести понятие о комплексной емкости.

Легко получить для выражения $\frac{1}{Z} = a_1 + jb_1$ значения

$$a_1 = \frac{R\omega^2 C^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2}, \quad (1.66)$$

$$b_1 = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 C^2 R^2}. \quad (1.67)$$

Угол потерь

$$\delta \approx \frac{a_1}{b_1} = \omega CR. \quad (1.68)$$

Мощность, выделяемая в сопротивлении,

$$P = I^2 R = \frac{\omega C \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} E^2; \quad (1.69)$$

при $\delta \ll 1$

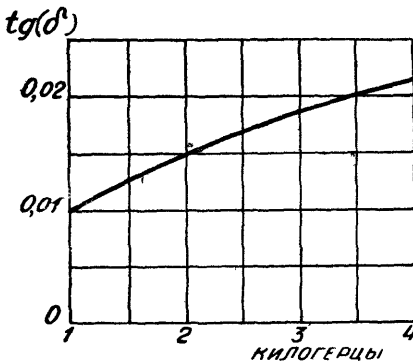
$$P \approx \omega C \delta E^2. \quad (1.70)$$

Угол потерь является чрезвычайно удобной характеристикой диэлектрика или конденсатора в целом и легко находится экспериментально.

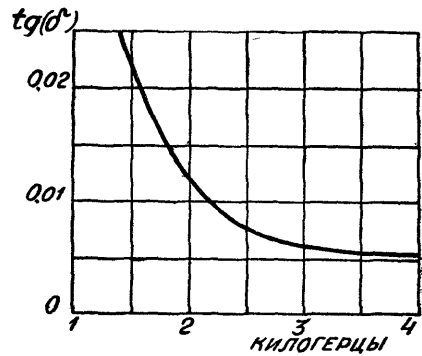
Из ур-ний (1.62) и (1.68) получим для двух рассмотренных эквивалентных схем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega Cr} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \delta = \omega CR.$$

Другими словами, если потери в диэлектрике таковы, что угол потерь уменьшается пропорционально частоте, то они могут быть эквивалентно



Фиг. 1.27.



Фиг. 1.28.

заменены омической утечкой. Потери этого рода могут быть обусловлены, например, сквозным током, идущим через конденсатор.

Если угол потерь возрастает пропорционально частоте, то потери могут быть эквивалентно заменены действием последовательного сопротивления.

Имея кривые $\operatorname{tg} \delta = f(\omega)$, можно в известной мере ориентироваться на основании этих соотношений в характере потерь в данном диэлектрике.

Так например, на фиг. 1.27 показано изменение $\operatorname{tg} \delta$ в зависимости от частоты для парафинированной бумаги при температуре 15°C . Угол потерь пропорционален частоте и, следовательно, потери носят характер последовательно включенного сопротивления. Как мы увидим ниже, это соответствует потерям на внутреннее трение в диэлектрике.

На фиг. 1.28 дана кривая для того же конденсатора при температуре 80°C . Падающий характер кривой указывает, что преобладают потери, имеющие характер омической утечки.

§ 11. Некоторые данные о диэлектриках.

В табл. I.I даны некоторые значения диэлектрической проницаемости, измеренной при низких частотах.

Таблица I.I

Материалы	ϵ	Материалы	ϵ
Эбонит	2,5 ÷ 3,5	Кварц	4,5
Эбонит при частоте $4 \cdot 10^7$ гц	1,9	Камедь	2,5
Стекло плотностью 2,5 ÷ 4,5	5 ÷ 10	Шеллак	3 ÷ 3,7
То же стекло при частоте $5 \cdot 10^7$ гц	2,7	Касторовое масло	4,7
Бакелит	5 ÷ 6	Олифа	3,1
Гуттаперча	3,3 ÷ 4,9	Минеральное масло	2,1
Слюда	4,6 ÷ 8	Вазелин	2,2
Парафин	2 ÷ 2,5	Чистая вода при 0	83
Фарфор	4,3	Чистая вода при 95°C	57

В табл. I.II приведены некоторые ориентировочные данные относительно угла потерь различных материалов при частоте 50 кгц и комнатной температуре.

Табл. I.III показывает зависимость ϵ и $\text{tg } \delta$ от частоты для некоторых материалов.

Таблица I.II

Материалы	$\text{tg } \delta$
Миканит	0,019
Стекло различных сортов	{ от 0,004 до 0,015
Бумага	0,02
Фарфор	{ от 0,007 до 0,15
Хорошие смолы	0,007
Эбонит	0,01
Плавленый кварц	0,0007

Таблица I.III

Материалы	Частота в кгц		
	ϵ	$\text{tg } \delta$	
Бакелитовая бумага	295	5,9	0,050
	670	5,7	0,052
	1040	5,6	0,058
Эбонит	210	3,0	0,008
	710	3,0	0,008
	1126	3,0	0,0010
Стекло флинтглас	500	7,0	0,0045
	800	7,0	0,0045
Кварцевое стекло (пайрекс)	500	4,9	0,0045

За последние годы появился целый ряд новых изоляционных материалов, обладающих особенно ценными свойствами для высокочастотной техники вследствие высокой диэлектрической проницаемости и весьма малых диэлектрических потерь.

Значительное большинство этих материалов относится к керамикам и получается путем обжига различных пород.

Наиболее распространенными исходными веществами являются так называемые „жировики“, белая глина и некоторые горючие сланцы.

Изоляционные материалы получают путем обработки этих исходных веществ, причем одной из существенных операций обычно является обжиг, при котором происходит спекание частиц вещества, происходящее ниже точки его плавления.

К группе изоляционных материалов, изготавливаемых на основе жировиков относятся: „стеатит“, „фреквентит“, „фреквента“. На основе талька: — „калит“, „калан“ и др. На основе глинозема: „синтер-карунд“ и др.

В табл. I.IV приведены данные относительно угла потерь и диэлектрической проницаемости для различных материалов.

Из этой таблицы видно, что, например, по сравнению с фарфором применение высококачественных изолирующих материалов дает огромные выгоды в отношении потерь.

К недостаткам этих материалов принадлежит некоторая трудность их механической обработки. Обработка обычно должна производиться ранее окончательного обжига вещества, после которого последнее уже не поддается обработке.

Таблица I.IV

Материалы	$\operatorname{tg} \delta \cdot 10^4$				
	$\lambda = 100 \text{ м}$	$\lambda = 30 \text{ м}$	$\lambda = 6 \text{ м}$	$\lambda = 3 \text{ м}$	ϵ
Ультракалан	1,0	1,0	1,1	1,1	4,7
Калан	2,8	2,6	2,5	1,8	6,6
Фреквента	3,0	2,8	2,6	—	6,1
Калит	3,7	3,4	3,2	—	6,5
Плавленный кварц	5,5	5,8	7,0	—	3,9
Фреквентит	8,0	6,8	6,0	—	6,0
Микалекс	18,0	18,0	18,0	—	8,0
Стеатит	18,5	17,5	15	—	6,5
Фарфор	50	60	85	—	5,3

В табл. I.V приведены данные относительно механических свойств и электрической прочности различных материалов.

Таблица I.V

Физические свойства материалов	Материалы группы стеатита				Калан
	стеатит	калит	фреквентит	фреквента	
Удельный вес	2,6—2,8	2,6—2,8	2,6—2,8	2,6—2,8	2,8
Пористость в % объема	0	0	0	0	0
Прочность на удар кг/см^2	3,5—5,0	3,5—5,0	3,5—5,0	3,5—5,0	2,9—3,2
Прочность на изгиб кг/см^2	1 200—1 600	1 200—1 600	1 200—1 600	1 200—1 600	1010
Прочность на разрыв кг/см^2	550—950	550—950	550—950	550—950	400—500
Прочность на сжатие кг/см^2	8 500—10 000	8 500—10 000	8 500—10 000	8 500—10 000	5 000—6 000
Коэффициент расширения	$7-9 \cdot 10^{-6}$	$7,8 \cdot 10^{-6}$	$6,7-7,5 \cdot 10^{-6}$	$6,2-6,8 \cdot 10^{-6}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$
Сопrotивление изоляции 300°	10^8	$3,2 \cdot 10^{10}$	10^{10}	$2,5 \cdot 10^{10}$	—
400°	10^7	$1,6 \cdot 10^9$	10^9	$2,3 \cdot 10^9$	$2,6 \cdot 10^{10}$
500°	10^6	$1,8 \cdot 10^8$	10^8	$2,0 \cdot 10^8$	$1,3 \cdot 10^9$
600°	$3 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 0^7$	$4,1 \cdot 10^7$	$3,1 \cdot 10^8$
Пробивное напряжение	150 кв/см	35—45 кв/мм	150 кв/см	150 кв/см	35—45 кв/мм

§ 12. Нагрузка конденсаторов.

Результат произведения EI , где E и I — среднеквадратичные значения тока и напряжения, дает „вольтамперы“.

Произведение $\frac{EI}{2} \sin \varphi$, где φ — угол сдвига между током и напряжением, дает среднее количество реактивной энергии, отнесенное к единице времени. Оно называется „реактивной мощностью“ (P_r) в конденсаторе.

Часто термин „реактивная мощность“ относят к энергии, которая циркулирует через цепь конденсатора в прямом и обратном направлении. В этом случае одна и та же энергия учитывается дважды, и реактивная мощность принимается равной

$$P_r = EI \sin \varphi. \quad (1.71)$$

В случае малости угла φ можно положить $\sin \varphi = 1$ и тогда

$$P_r = EI, \quad (1.72)$$

т. е. реактивная мощность равна вольтамперам.

Произведение $EI \cos \varphi$ определяет активную мощность. Так как угол ω близок к $\frac{\pi}{2}$, то взамен $\cos \varphi$ можно писать $\operatorname{tg}(\delta)$, где δ — угол потерь, равный $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Поэтому угол потерь дает отношение активной мощности к реактивной.

В радиотехнических устройствах очень часто роль емкости заключается в создании определенной реактивной мощности. В этом случае емкость играет в электрических цепях ту же роль, которую играет в механических устройствах пружина. Если определенные вольтамперы заданы, то очевидно, что мощность, выделяемая в конденсаторе при определенном угле потерь, также задана.

Ясно, однако, что чем меньше объем конденсатора, тем выше будет его температура при той же выделяемой мощности, при прочих равных условиях.

Чем выше частота, тем больше выделяемая мощность и, следовательно, тем больше должен быть объем диэлектрика при одинаковых условиях охлаждения во избежание перегрева.

Конденсаторы с твердым диэлектриком особенно опасны в отношении перегрева, так как потери в них после некоторого нагревания растут с температурой и, следовательно, выделяемая мощность с течением времени все более и более увеличивается.

Поэтому для каждого типа конденсаторов существует предельная тепловая нагрузка или, иначе говоря, предельные вольтамперы при данной частоте.

При высоких частотах предел возможному использованию конденсатора часто ставит, именно, величина вольтампер.

Для того чтобы понизить температуру, применяют групповое соединение, показанное на фиг. 1.29. При таком соединении емкость не изменяется по сравнению с одним конденсатором, но количество выделяемого в каждом конденсаторе тепла уменьшается в четыре раза.

При очень низких частотах тепловые потери обычно не играют роли, и предел нагрузки конденсатора определяется допустимым напряжением, которое он может выдержать.

В этом случае для каждого диэлектрика, помещенного в равномерное поле, существует некоторый предельный градиент, после чего поле его разрушает.

Рабочее напряжение следует выбирать таким образом, чтобы градиент достигал во всяком случае не более половины предельной величины.

Таким образом для высоких частот надо выбирать диэлектрик с малыми потерями. Для низких частот при высоком напряжении — диэлектрик с большой диэлектрической прочностью. Для низких частот и низких напряжений выгоднее выбирать диэлектрик с возможно большей диэлектрической проницаемостью.

При техническом выполнении конденсаторов принимаются меры к тому, чтобы поле было по возможности равномерно во всей массе диэлектрика. Достичь этого можно только отчасти. Поэтому в действительности предел возможного использования конденсаторов ниже, чем тот, который мог бы быть достигнут при равномерной нагрузке диэлектрика.

В этом отношении конденсатор характеризуется „коэффициентом использования“, который показывает отношение допустимой нагрузки (в вольт-амперах или эргах) данного образца к той нагрузке, которая могла бы быть допущена для данного диэлектрика при равномерном поле.

Коэффициент использования в технических конденсаторах бывает обычно ниже 70%.

§ 13. Некоторые употребительные типы конденсаторов.

Для отфильтрования переменного тока в выпрямительных устройствах применяются конденсаторы, примерно, того же типа, что и в высоковольтной технике 50-герцного тока.

В настоящее время наиболее распространенным типом конденсатора такого рода являются так называемые бумажно-масляные конденсаторы. Элемент конденсатора состоит из листов станиоля, разделенных несколькими слоями тончайшей папиросной бумаги, высушенной в вакууме и затем пропитанной маслом. Большое количество таких элементов, соединенных в параллель, спрессовываются в виде стопы и помещаются в баке с маслом.

Внешний вид такого конденсатора показан на фиг. 1.30.

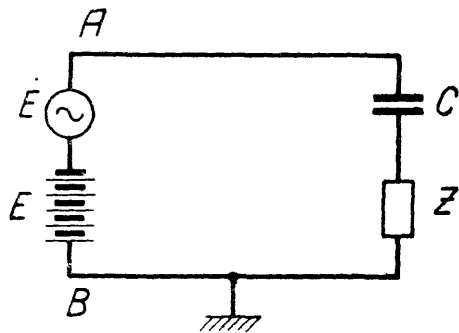
Для низкой частоты при малых напряжениях применяются обычные телефонные конденсаторы с диэлектриком из папиросной бумаги, пропитанной парафином.

Эти же конденсаторы иногда применяются для так называемой блокировки высокой частоты, т. е. для создания короткого замыкания для высокой частоты. Оба типа конденсаторов строятся на емкости от десятых долей микрофарады до нескольких микрофарад.

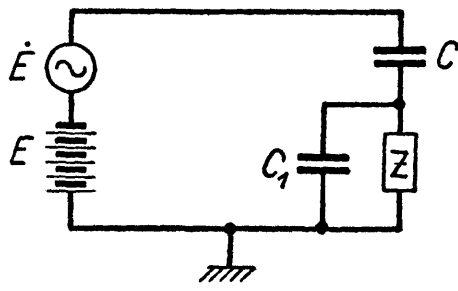
В качестве блокировочных конденсаторов для высокой частоты применяются небольшие слюдяные конденсаторы емкостью несколько сот или тысяч сантиметров, выдерживающие несколько сот вольт постоянного напряжения. Они имеют маленькие размеры и, следовательно, небольшую емкость оболочки относительно земли.

Это позволяет их применять там, где телефонные конденсаторы могут оказаться неприменимыми вследствие их большого размера.

Чтобы пояснить сказанное, обратимся к фиг. 1.31. Положим, что в точках A и B действует некоторое постоянное напряжение E и некоторое высокочастотное напряжение \dot{E} . Пусть требуется в прибор Z пустить только переменную составляющую. Это достигается включением конденсатора C на пути тока. Емкость конденсатора C должна быть взята такой, чтобы для данной высокой частоты он представлял собой практически короткое замыкание по сравнению с Z .



Фиг. 1.31.

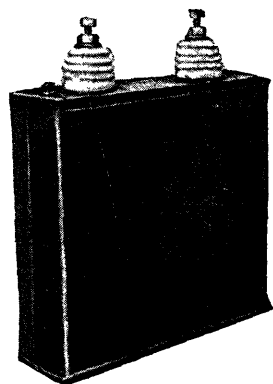


Фиг. 1.32.

Так как конденсатор C имеет геометрические размеры, то его оболочка (или пластины) образуют емкость относительно земли. Вследствие этого схема фиг. 1.31 в действительности превращается в схему фиг. 1.32, где C_1 — паразитная емкость, ответвляющая на себя высокую частоту.

Когда конденсатор играет роль блокировочного, потери в нем при достаточной емкости относительно ничтожны, так как напряжение на его зажимах ничтожно. Это позволяет применять такие диэлектрики, как пропарафинированная или промасленная бумага.

Если же конденсатор участвует в цепи в качестве накопителя энергии, то важно достигнуть двух результатов. Во-первых, сберечь самый конденсатор от перегрева, а во-вторых, предотвратить растрату энергии высокой частоты на потери в диэлектрике.



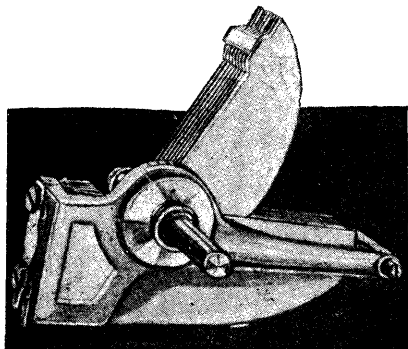
Фиг. 1.30.

В этом смысле в цепях с большой мощностью задача оказывается более трудной.

В то время как при малой мощности следует заботиться только об уменьшении растраты энергии, в цепях с большой мощностью приходится бороться также и с перегревом диэлектрика. Как по этой причине, так и вследствие необходимости создать достаточную диэлектрическую прочность, размеры конденсатора в мощной цепи сильно увеличиваются по сравнению с размерами при малой мощности.

С увеличением размеров возрастает емкость массива конденсатора относительно земли, а следовательно, электрическая схема устройства искажается.

В настоящее время в высокочастотных цепях, кроме воздушных конденсаторов, применяют конденсаторы с кварцевым и слюдяным диэлектриком, а также с диэлектриками из специальных веществ, о которых было сказано выше. Реже применяются специальные сорта стекла. Фарфор, бумага, эбонит и тому подобные материалы не применяются вовсе.



Фиг. 1.33.

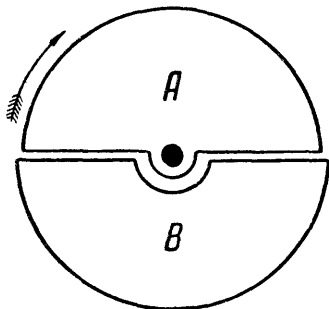
Конденсаторы с жидкими диэлектриками имеют малые потери, но неудобны в обращении и применяются редко.

На фиг. 1.33 показан конденсатор переменной емкости. Устройство подобных конденсаторов поясняется фиг. 1.34 — 1.36.

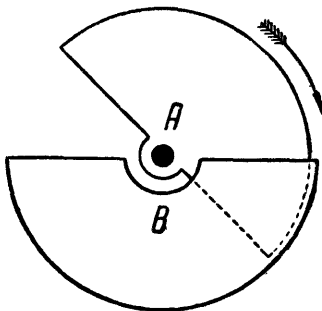
Здесь изображены две металлические полукруглые пластинки, параллельные друг другу, но находящиеся в разных плоскостях. Одна из них насажена на ось. При повороте этой оси пластинки могут занимать различные относительные положения, три из которых показаны на фиг. 1.34, 1.35 и 1.36.

При положении соответственно фиг. 1.34 емкость между пластинками минимальна. При положении по фиг. 1.36 — емкость максимальна. Фиг. 1.35

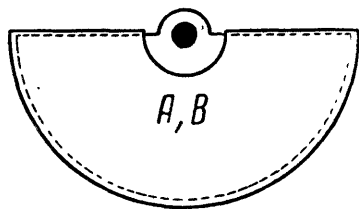
соответствует некоторому промежуточному значению емкости.



Фиг. 1.34.



Фиг. 1.35.



Фиг. 1.36.

Ряд таких же пластинок, соединенных металлически, образует подвижную систему конденсатора фиг. 1.33. Другой, изолированный от первого, ряд образует неподвижную систему.

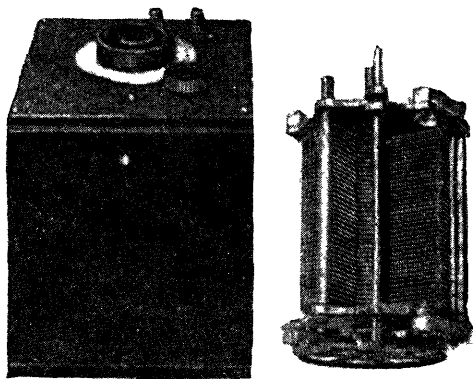
Емкость такого конденсатора является функцией угла φ поворота оси

$$C = C_0 + F(\varphi). \quad (1.73)$$

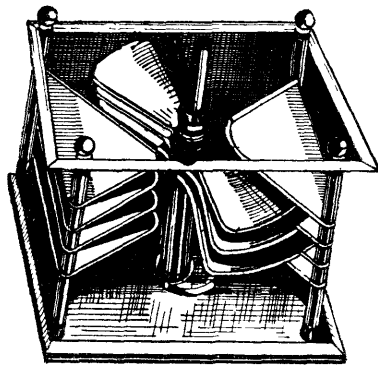
Минимальная емкость C_0 носит название начальной емкости. Функция F зависит от формы пластин, которая в некоторых случаях делается различной, в соответствии с удобством пользования конденсатором.

Распространены конденсаторы, у которых $C - C_0 = a\varphi$, или $C - C_0 = a\varphi^2$, или $C - C_0 = a\sqrt{\varphi}$, где a — постоянная величина. Начальную емкость стре-

мятся делать как можно меньше. У конденсатора фиг. 1.33 $C_0 \approx 3$ см и $C_{\max} = 250$ см, рабочее напряжение 150 в.



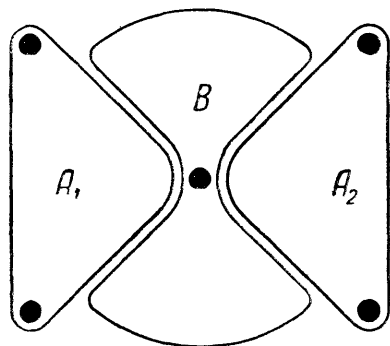
Фиг. 1.37.



Фиг. 1.38.

На фиг. 1.37 показан переменный конденсатор лабораторного типа. Такой конденсатор помещается в металлическом ящике, в который при желании можно налить масло.

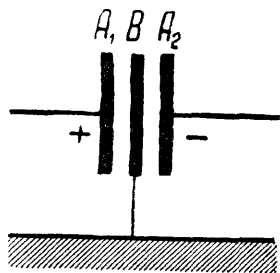
В качестве воздушного конденсатора он имеет емкость порядка 1500 см и рабочее напряжение 300 в. При погружении в масло емкость и пробивное напряжение возрастают в зависимости от свойств масла.



Фиг. 1.39.

Фиг. 1.38 показывает тип дифференциального (двойного) конденсатора. Он состоит из двух неподвижных групп пластин и подвижной системы с бисквитообразными пластинами.

Схема, поясняющая его устройство, приведена на фиг. 1.39. A_1 и A_2 — неподвижные пластины, а B — подвижная



Фиг. 1.40.

система. Часто такой конденсатор включают, как показано на фиг. 1.40, т. е. подвижная система присоединяется к земле, а пластины A_1 и A_2 образуют разные по величине конденсаторы, присоединяемые к противоположным фазам источника переменного тока. Начальная емкость таких конденсаторов относительно велика, но зато благодаря симметричной форме и противоположности зарядов рассеивание мало.

§ 14. Краевые явления.

При высоких частотах весьма легко в воздухе у провода, имеющего большую амплитуду потенциала, образуется так называемая „корона“ или „сияние“.

Это явление связано с сильной ионизацией газа, окружающего проводник. При высокой частоте ионы образуются попеременно, то одного, то другого знака, причем перемены полярности быстро следуют одна за другой.

Образованные за один полупериод ионы не успевают рассеяться, как проводник уже перезаряжается другим знаком. Присутствие ионов, оставшихся от предыдущего полупериода, облегчает истечение новых ионов другого знака. В результате воссоединения ионов развивается большое количество тепла.

Не говоря уже о том, что на это тело затрачивается энергия, оно само по себе может явиться разрушающим фактором, в особенности для изоляторов, поддерживающих проводники.

При очень высоких частотах (так называемых ультрачастотах) разряд принимает форму факела, горящего на проводе наподобие свечи и имеющего температуру вольтовой дуги.

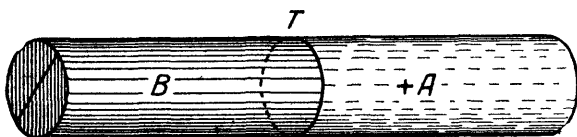
Для образования короны или факела достаточно, чтобы напряженность поля вблизи проводника перешла некоторый предел. Этот предел колеблется от 20—30 кВ на сантиметр при низших частотах до 5—8 кВ при ультрачастотах.

Возникшая корона может поддерживаться при значительно более низких напряженностях поля.

Укажем две основные причины, повышающие напряженность поля и способствующие, следовательно, возникновению короны.

Во-первых, вблизи всякого острия или выступающей части проводника образуется сгущение силовых линий (что равнозначно увеличению напряженности поля).

Во-вторых, такое же сгущение происходит на границе касания изолятора с проводником, и притом в тем большей степени, чем больше диэлектрическая проницаемость вещества изолятора.



Фиг. 1.41.

Чтобы пояснить это, положим, что металлический заряженный цилиндр B соприкасается своим дном с цилиндрическим изолятором A по плоскости T , как это показано на фиг. 1.41.

Сила взаимодействия между зарядами определяется по закону Кулона, как

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon}, \quad (1.74)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей заряды Q_1 и Q_2 .

В рассматриваемом случае изолятор A занимает часть среды, окружающей заряды, и поэтому уменьшает силу взаимодействия между ними, притом тем значительнонее, чем больше его диэлектрическая проницаемость.

Особенно ослабляется взаимное отталкивание зарядов, расположенных на поверхности дна цилиндра, так как силовые линии здесь идут практически целиком в изоляторе. Поэтому на дне цилиндра и на его краю заряды сильно сгустятся. Сильное сгущение будет иметь место и снаружи на краю цилиндра. На границе между цилиндрами A и B электрическая сила, пропорциональная густоте линий D , будет:

в диэлектрике

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon}, \quad (1.75)$$

в воздухе

$$E_2 = D = \epsilon E_1. \quad (1.76)$$

Последнее равенство показывает, что электрическая сила возрастает в районе около места соприкосновения металла с изолятором.

В электрических приборах вообще и в конденсаторах, в частности, это часто приводит к роковым последствиям. Например, если прибор находится под напряжением, близким к тому, которое может создать корону, то соприкосновение с изолятором вызывает эту корону.

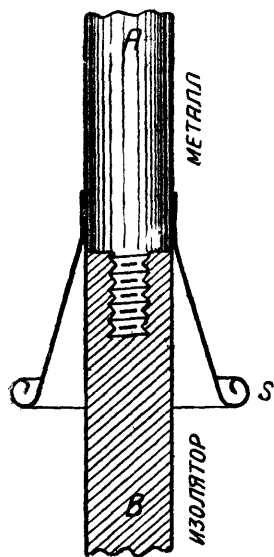
В плоских воздушных конденсаторах края пластин являются местом наибольшей электрической силы. Если края пластин острые, то пробой наступает здесь при напряжении, которое в других местах конденсатора еще не создает опасного градиента. Коэффициент использования вследствие этого снижается. Для того чтобы избежать этого, края пластин утолщают и дают ребру округленную форму.

То же относится к конденсаторам с жидким диэлектриком. В конденсаторах с твердым диэлектриком пробой наступает по той же причине у краев, т. е. в том месте, где диэлектрик выступает из-за металлических обкладок.

При переменном токе здесь происходит наиболее сильное разогревание диэлектрика, которое может привести к разрушению прибора. Для избежания этого иногда диэлектрик на краях утолщают. Это, например, часто делается в так называемых лейденских банках.

В высокочастотных приборах изоляторы являются той частью конструкции, у которой краевой эффект проявляется в наибольшей степени. Поэтому вещество изолятора должно выбираться не только с малым углом потерь, но и с возможно малой диэлектрической проницаемостью.

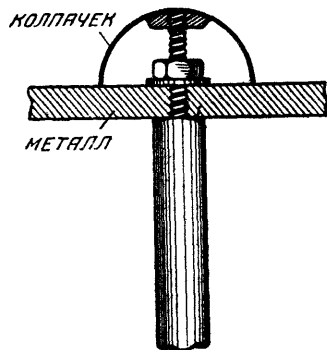
Совершенно ясно, что при высоких напряжениях и при высокой частоте не следует применять скреплений металла с изолятором по типу фиг. 1.41. На



Фиг. 1.42

фиг. 1.42 показана конструкция, пригодная для такого соединения. Здесь место стыка металла *А* с изолятором *В* закрыто колпачком *S*, который разрезает поле в месте стыка.

Для уменьшения градиента на всякого рода заострениях полезно применять конструкции, аналогичные показанной на фиг. 1.43, где острый край винта закрыт внешним металлическим колпачком закругленной формы.



Фиг. 1.43.

§ 15. Магнитное поле.

Магнитным полем называется пространство, в котором проявляются магнитные явления.

Магнитный полюс, помещенный в магнитное поле, испытывает механическую силу, стремящуюся сообщить ему перемещение. Величина этой силы и направление ее, в случае воздействия на северный полюс с принятым за единичное количество магнетизма, характеризует силу и направление поля.

Для изображения поля применяют тот же метод силовых линий, что и в случае электрического поля. В отличие от электрических линий магнитные линии всегда замкнуты. Поэтому магнитное поле не является потенциальным, как статическое электрическое поле.

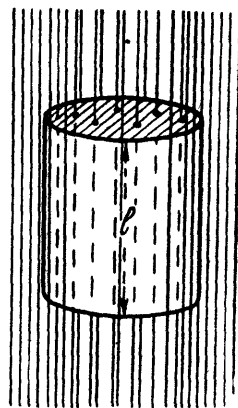
Густота линий характеризует так называемую „магнитную индукцию“ ¹⁾. Магнитная индукция **В** представляет собой вектор, связанный с вектором магнитной силы, или „напряженности поля“ **Н** соотношением

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где μ — магнитная проницаемость.

Совокупность магнитных линий образует магнитный поток.

Если в равномерном магнитном поле мысленно вырезать цилиндр так, (фиг. 1.44), чтобы образующая совпадала с направлением линий поля, то



Фиг. 1.44.

¹⁾ Этот термин никоим образом не надо смешивать с термином „электромагнитная индукция“, который относится к явлению взаимного превращения электрического и магнитного полей.

магнитный поток Φ , проходящий через этот цилиндр, определяется соотношением

$$\Phi = \frac{M}{R_m},$$

где M называют магнитодвижущей силой на краях цилиндра, а R_m — магнитным сопротивлением.

Магнитное сопротивление определяется формулой

$$R_m = \frac{l}{\mu S}, \quad (1.77)$$

аналогичной по виду (но отнюдь не по физическому смыслу) формуле для омического сопротивления.

При неравномерном поле пространство делится на бесконечно малые участки и путем суммирования элементарных сопротивлений подсчитывается полное магнитное сопротивление всей цепи.

Величина, обратная магнитному сопротивлению, называется „магнитной проводимостью“.

Пользование понятием магнитного сопротивления или проводимости представляет удобство.

Однако здесь надо остерегаться понимать термины „сопротивление“ и „проводимость“ в том же смысле, как и при электрическом токе.

Электрическая проводимость приводит, как уже было сказано, к уничтожению электрического поля.

Электропроводник — это такое вещество, в котором имеются заряды обоих знаков, могущие перемещаться под действием поля. Силовая линия поля, оканчивающаяся на этих зарядах, укорачивается по мере того, как заряды сближаются, и, наконец, исчезает вовсе, когда разноименные заряды входят в соприкосновение. Поэтому внутри проводника статическое электрическое поле не может существовать, и это является определением свойства электрической проводимости.

В этом смысле проводников магнетизма нет, так как нет вещества, которое могло бы уничтожить или разорвать силовую линию. Если допустить существование такого вещества, то надо допустить существование свободной магнитной массы, что, как мы видели, несовместимо с понятием о магнитном поле.

„Магнитное сопротивление“ или „магнитную проводимость“ следует понимать лишь как некоторые материальные коэффициенты, показывающие отношение между магнитодвижущей силой и потоком. С формальной стороны они тождественны терминам „диэлектрическое сопротивление“ и „емкость“. Вообще же можно отметить, что термин „сопротивление“ во всех случаях является мало удачным.

Если по бесконечно длинному проводу (фиг. 1.45) протекает ток I , то вокруг провода образуются кольца магнитного поля H .

Сила поля обратно пропорциональна расстоянию от провода и выражается равенством

$$H = \frac{2I}{d}, \quad (1.78)$$

где d — расстояние от оси провода до точки, в которой определяется напряженность поля.

Ур-ние (1.78) может служить для определения единицы для измерения напряженности поля.

Например, напряженность поля по величине будет равна единице, если ток равен одной электромагнитной единице (10 а), а расстояние от центра провода равно 2 см .

Нашей главной задачей является выяснение связи между магнитным и электрическим полем. Эта связь лежит в основе всех электрических явлений. Для понимания тех явлений, которые использует радиотехника, она должна быть особенно хорошо усвоена.

§ 16. Связь магнитного поля с электрическим полем.

Связь между электрическими и магнитными явлениями была установлена еще в 1820 г. шведским физиком Эрстедтом, открывшим действие тока на магнитную стрелку.

Но в полной мере эта связь была раскрыта работами английского физика Фарадея, который открыл так называемое явление электромагнитной индукции, т. е. получение электрического поля посредством магнитного.

Величайшей заслугой Фарадея было то, что он первый понял, что электрические и магнитные явления происходят в пространстве, окружающем провода, а в самих проводах происходит только гашение электромагнитной энергии, т. е. превращение ее в тепло.

Другой английский физик Максвелл развил идеи Фарадея, придал им строгую математическую форму и в математической форме формулировал законы, лежащие в основе электродинамики, т. е. учения об электромагнитных явлениях.

На основании установленных им законов Максвелл теоретически предсказал существование электромагнитных волн, которые позже были открыты Герцем и применение которых создало радиотехнику.

Связь между магнитным и электрическим полем проявляется в следующем.

Всякое движущееся электрическое поле (например поле движущегося заряда) создает магнитное поле. Направление магнитной силы в возникающем таким образом поле перпендикулярно направлению движения и перпендикулярно направлению электрической силы в движущемся поле.

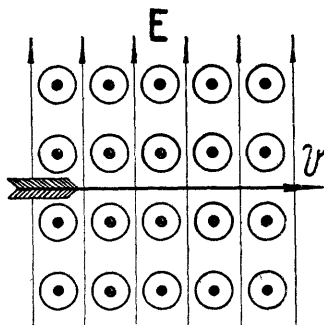
Так например, на фиг. 1.46 тонкими прямыми линиями изображены силовые линии электрического поля. Стрелка со значком v показывает, что это поле движется вправо, причем направление движения перпендикулярно направлению электрической силы. В этом случае возникает магнитное поле

$$H = \frac{ev}{c} E. \quad (1.79)$$

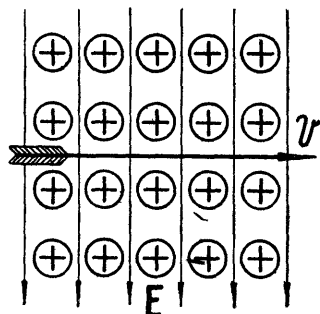
Здесь H — напряженность поля в электромагнитных единицах, e — диэлектрическая проницаемость среды, v — скорость движения, c — скорость света, E — напряженность электрического поля в электростатических единицах.

Линии магнитного поля перпендикулярны направлению движения и направлению электрической силы.

На фиг. 1.46 магнитные линии или трубки изображены в сечении кружками с точкой внутри. Это обозначает, что линии направлены из-за чертежа к наблюдателю. На фиг. 1.46 электрическая сила направлена вверх, а на фиг. 1.47 — вниз. Соответственно этому магнитные линии изображены кружком с крестиком, что показывает направление их от наблюдателя за чертеж.



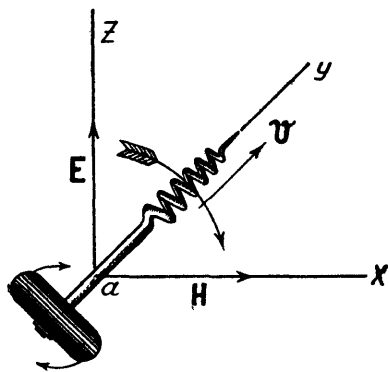
Фиг. 1.46.



Фиг. 1.47.

Вообще, чтобы определить направление магнитной силы, пользуются правилом буравчика, которое для данного случая применяется следующим образом.

Если \mathbf{E} и \mathbf{H} в точке a изобразить векторами (фиг. 1.48), то направление кратчайшего перехода от конца \mathbf{E} к концу \mathbf{H} совпадает с направлением вращения рукоятки правовинтового буравчика, ось которого, помещенная в точке a , совпадает с направлением движения положительного заряда. Буравчик при завинчивании перемещается в ту же сторону, куда направлено движение положительного заряда. На фиг. 1.48 направление кратчайшего перехода от \mathbf{E} к \mathbf{H} изображено стрелкой. Острие буравчика при указанном на фиг. 1.48 расположении \mathbf{E} и \mathbf{H} направлено за чертеж.



Фиг. 1.48.

Если направление движения не перпендикулярно направлению \mathbf{E} , а составляет с ним угол φ , то поле может быть разложено на две составляющие: перпендикулярную движению и совпадающую с ним. Первая будет $E_1 = E \sin \varphi$; она явится причиной магнитного поля

$$H = \frac{v}{c} E_1 = \frac{v}{c} E \sin \varphi. \quad (1.80)$$

Вторая не дает никакого поля, так как движение силовой линии вдоль своей оси не может привести к изменению энергии поля. Иначе говоря, при этом движении сил инерции не появляется.

Совершенно так же при движении магнитного поля (например при движении магнита) перпендикулярно линиям этого поля и перпендикулярно направлению движения возникает электрическое поле.

Напряженность его определяется равенством

$$E = \frac{v\mu H}{c} = \frac{v}{c} B. \quad (1.81)$$

Направление \mathbf{E} определяется тем же правилом.

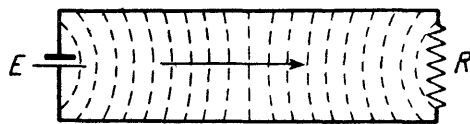
§ 17. Магнитное поле тока проводимости и тока смещения.

Указанное в § 16 взаимное превращение электрической и магнитной энергии обычно удобнее выражать в другой форме. Когда мы имеем дело с электрическими цепями, то бывает проще рассматривать не поля, а соответствующие им токи напряжения, которые мы относим к элементам, составляющим цепь (т. е. к емкостям, самоиндукциям и сопротивлениям).

Например, возьмем цепь постоянного тока, состоящую из элемента E , проводов и сопротивления R (фиг. 1.49).

Явления в такой цепи в действительности заключаются в том, что элемент создает электрическое поле. Линии этого поля непрерывно движутся по направлению к сопротивлению R вдоль проводов. В сопротивлении R силовые линии и энергия их переходят в тепло. Вследствие движения электрических линий возникает магнитное поле. Таким образом присутствие магнитного и электрического поля является следствием движения энергии по проводам от E к R .

Пользование этим вполне правильным представлением может затруднить как измерения, так и вычисления.



Фиг. 1.49.

Гораздо проще в данном случае пользоваться понятием о напряжении элемента и токе в цепи. Обе эти величины легко и удобно измерить.

В этом случае мы говорим, что магнитное поле обусловлено током, и можем вычислить его по соответствующим формулам.

Таким же образом, в случае переменного тока, вместо движения силовых линий часто удобнее рассматривать опять-таки не движение силовых линий, а два тока. Один из этих токов называется током проводимости, т. е. тем самым обыкновенным током, который мы считаем текущим по проводам. Второй ток — это тот ток, который протекает в месте разрыва проводниковой цепи, т. е. емкостный ток.

Величина его равна

$$i = C \frac{de}{dt}. \quad (1.82)$$

Этому току в диэлектрике конденсатора соответствует изменяющийся во времени поток электрических линий. Так, вместо ур-ния (1.82) можно равнозначно написать

$$i = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.83)$$

Этот ток носит название „тока смещения“. Поскольку ток проводимости мы относим к проводам, постольку ток смещения мы должны отнести к диэлектрику (в котором происходит изменение потока индукции).

Так же, как и ток проводимости, ток смещения образует вокруг себя магнитное поле.

§ 18. Коэффициент самоиндукции

Если по витку проволоки идет переменный ток, то внутри этого витка существует изменяющийся магнитный поток, который создает в витке эдс, пропорциональную скорости изменения потока, т. е. величине $\frac{d\Phi}{dt}$. Так как поток пропорционален току, то эдс может быть выражена формулой

$$e = -L \frac{di}{dt}, \quad (1.84)$$

где L — некоторый материальный коэффициент, характеризующий данную цепь в смысле соотношения между током и магнитным потоком¹⁾.

Этот коэффициент носит название „коэффициента самоиндукции“.

В случае синусоидальной эдс ур-ние (1.84) перепишется так

$$\dot{E} = -j\omega L \dot{I}. \quad (1.85)$$

За единицу коэффициента самоиндукции принимается самоиндукция такого провода, в котором при равномерном изменении тока на одну единицу в секунду наводится единичная эдс.

В практической системе (ампер-вольт) единица L называется „генри“. В абсолютной электромагнитной системе эта единица называется „сантиметр“

$$1 \text{ гн} = 10^9 \text{ см.}$$

В радиотехнике часто приходится иметь дело с малыми самоиндукциями, и поэтому выражение L в сантиметрах очень употребительно.

¹⁾ Так же, как емкость характеризует данную цепь в смысле соотношения между напряжением и потоком электрической индукции.

²⁾ Если $\dot{I} = I_m e^{j\omega t}$, то $\frac{d}{dt} \dot{I} = I_m j\omega e^{j\omega t}$. Таким образом символ $\frac{d}{dt}$ при комплексном изображении величин заменяется множителем $j\omega$. При этом ω вообще может быть комплексной величиной.

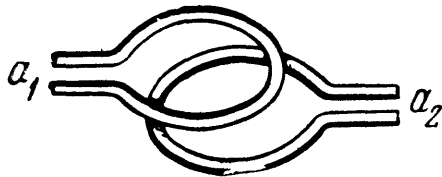
Величина ωL носит, как известно, название „индуктивного сопротивления“. Если L выражено в генри, то ωL получается в омах.

Для сокращения речи величину L называют просто „самоиндукцией“, опуская слово „коэффициент“.

В своем прямом смысле термин „самоиндукция“ относится к приборам, которые предназначены в электрических цепях играть роль индуктивного сопротивления.

§ 19. Взаимная индукция.

Действие одной электрической цепи на другую или одной части цепи на другую часть может быть обусловлено магнитным полем, индуцирующим эдс.



Фиг. 1.50.

В этом случае говорят, что две цепи или их части связаны магнитной связью.

Рассмотрим магнитную связь двух катушек. Положим, что по витку a_1 (Фиг. 1.50) идет переменный ток i_1 , образующий магнитный поток Φ_1 . Часть силовых линий этого потока, которую обозначим Φ_2 ,

входит в другой виток a_2 и возбуждает в нем эдс

$$e_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt}. \quad (1.86)$$

Поток Φ_2 пропорционален току i_1 и зависит от взаимного расположения и размеров обеих катушек.

Обозначим

$$\frac{\Phi_2}{i_1} = M_{12} \quad (1.87)$$

и назовем M_{12} коэффициентом взаимной индукции, учитывающим влияние первой катушки на вторую. Тогда

$$e_2 = - \frac{di_1}{dt} M_{12}. \quad (1.88)$$

Совершенно так же, если по второй катушке идет ток i_2 , в катушке a_1 возбуждается эдс

$$e_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt} = - \frac{di_2}{dt} M_{21}, \quad (1.89)$$

где

$$M_{21} = \frac{\Phi_1}{i_2}, \quad (1.90)$$

т. е. представляет собой коэффициент взаимной индукции, учитывающий влияние второй катушки на первую.

Можно доказать, что

$$M_{12} = M_{21}, \quad (1.91)$$

и поэтому вместо (1.89) и (1.88) можно написать

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= - \frac{di_2}{dt} M \\ e_2 &= - \frac{di_1}{dt} M \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

Или в случае синусоидального тока

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= - j\omega M \dot{i}_2 \\ e_2 &= - j\omega M \dot{i}_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

§ 20. Соединение самоиндукций.

Если две самоиндукции L_1 и L_2 не связаны одна с другой магнитной связью, общий коэффициент самоиндукции при последовательном соединении будет равен сумме L_1 и L_2 , т. е.

$$L = L_1 + L_2. \quad (1.94)$$

При параллельном соединении будет

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}, \quad (1.95)$$

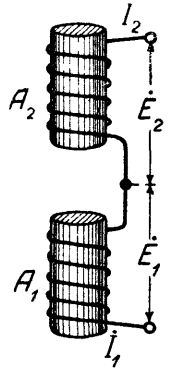
т. е.

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}. \quad (1.96)$$

Иначе обстоит дело, если, например, две катушки связаны магнитной связью.

В этом случае в каждой катушке, кроме эдс от собственной самоиндукции, возникает еще эдс, наведенная вследствие взаимной индукции другой катушкой.

Рассмотрим два простейших случая. Катушки A_1 и A_2 (фиг. 1.51), лишенные омического сопротивления, соединены последовательно. Витки их направлены в одну сторону и магнитные поля их взаимно усиливаются.



Фиг. 1.51.

В этом случае ток I_1 равен току I_2 .

Напишем уравнения, определяющие эдс \dot{E}_1 на концах первой катушки и эдс \dot{E}_2 — на концах второй катушки:

$$\dot{E}_1 - j\omega(L_1 I_1 + M \dot{I}_2) = 0, \quad (1.97)$$

$$\dot{E}_2 - j\omega(L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1) = 0, \quad (1.98)$$

$$I_1 = \dot{I}_2 \equiv \dot{I}, \quad (1.99)$$

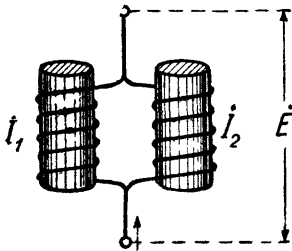
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_1 + \dot{E}_2}{j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}. \quad (1.100)$$

Так как в числителе стоит полная эдс на концах всей цепи, то в знаменателе стоит сопротивление всей цепи. Поэтому величина

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (1.101)$$

играет роль самоиндукции обеих катушек, соединенных последовательно при одинаковом направлении витков. При противоположном направлении витков в одной из катушек или при противоположном соединении катушек получим

$$L = L_1 + L_2 - 2M. \quad (1.102)$$



Фиг. 1.52.

Можно соединить катушки параллельно. Если при этом магнитные поля катушек взаимно усиливаются (фиг. 1.52), то уравнения напишутся так:

$$\dot{E}_1 - j\omega(L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2) = 0, \quad (1.103)$$

$$\dot{E}_2 - j\omega(L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1) = 0, \quad (1.104)$$

$$E_1 = \dot{E}_2 \equiv E. \quad (1.105)$$

Решая эти уравнения, получим

$$I_1 + I_2 = \frac{\dot{E}}{j\omega \left[\frac{L_1 + M \left(\frac{L_1 - M}{L_2 - M} \right) \left[L_2 + M \left(\frac{L_2 - M}{L_1 - M} \right) \right]}{L_1 + L_2 + M \left(\frac{L_1 - M}{L_2 - M} + \frac{L_2 - M}{L_1 - M} \right)} \right]} \quad (1.106)$$

После упрощения знаменателя эта формула будет иметь вид

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{j\omega \left(\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \right)} \quad (1.107)$$

Выражение, стоящее в знаменателе множителем при $j\omega$, играет роль коэффициента самоиндукции.

Если $M = 0$, то

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{j\omega \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} \quad (1.108)$$

В этом случае

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{1 + \frac{L_1}{L_2}} = \frac{L_2}{1 + \frac{L_2}{L_1}} \quad (1.109)$$

Очевидно, что L меньше, чем L_1 и чем L_2 .

Если $L_1 = L_2$ и $M = 0$, то

$$L = \frac{L_1}{2} = \frac{L_2}{2}; \quad (1.10)$$

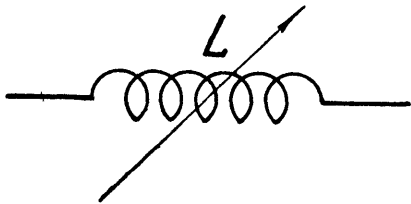
если $L_1 = L_2$ и $M \cong L_1$, то

$$L = L_1 = L_2. \quad (1.111)$$

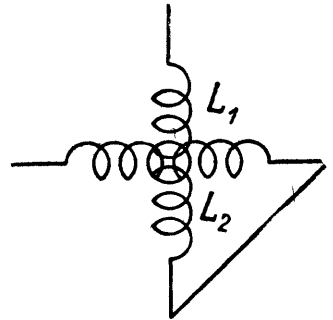
При противоположном направлении витков знак при M изменится на обратный. Тогда при условии $M \cong L_1$ и $L_1 = L_2$ получим

$$L \cong 0. \quad (1.112)$$

В радиотехнике распространены приборы, служащие для получения изменяющейся самоиндукции путем изменения коэффициента взаимной индукции. Такие приборы называются вариометрами. На схемах переменная самоиндукция изображается символом, показанным на фиг. 1.53. Если



Фиг. 1.53.



Фиг. 1.54.

хотят указать, что катушки в вариометре соединены определенным образом, например последовательно, то применяют графический символ, например, фиг. 1.54.

Изменение M достигается или путем изменения расстояния между катушками, или чаще путем поворота плоскости одной катушки относительно другой.

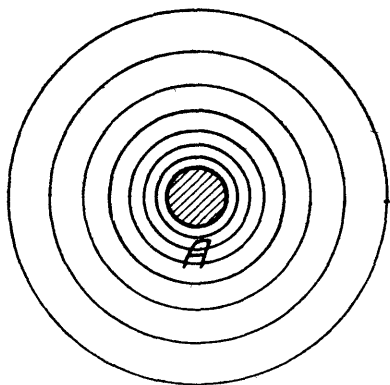
Если плоскости взаимно перпендикулярны, то магнитная связь отсутствует ($k = 0$ и $M = 0$). Если плоскости параллельны, то взаимная индукция достигает некоторой наибольшей в данной конструкции величины. Практически при этом в вариометрах без железного сердечника максимальный коэффициент связи обычно бывает меньше $\frac{1}{2}$ или, иначе говоря, меньше 50%.

§ 21. Замечание о катушках самоиндукции.

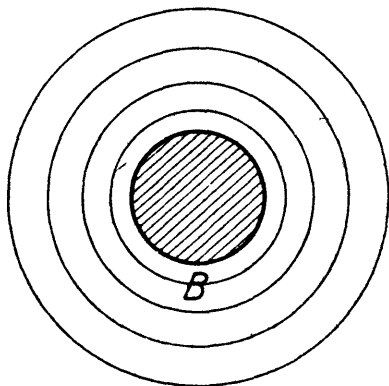
Каждый участок провода обладает свойством самоиндукции, поскольку ток создает вокруг него магнитное поле. При высокой частоте даже небольшие значения коэффициента самоиндукции L приводят к большому индуктивному сопротивлению $j\omega L$. Поэтому в радиотехнических устройствах и схемах часто приходится считаться с самоиндукцией соединительных проводов, хотя бы они и имели небольшую длину.

При равной длине проводов коэффициент самоиндукции больше у провода, имеющего меньший диаметр. В этом легко убедиться, если сравнить магнитный поток более тонкого трубчатого провода A (фиг. 1.55) с магнитным потоком более толстого трубчатого провода B (фиг. 1.56), в предположении, что по ним идет один и тот же ток. В разрезе, перпендикулярном оси провода, магнитные линии представляются кольцами.

Поток A включает такие же кольца, как B , но, кроме того, еще ряд колец, диаметр которых меньше диаметра B . В случае сплошных проводов



Фиг. 1.55.



Фиг. 1.56.

дело обстоит так же, потому что, как будет сказано ниже, высокочастотный ток идет по поверхности проводника и не проникает сколько-нибудь значительно внутрь его.

По этой причине для осуществления самоиндукции следовало бы применять тонкие провода, а для уменьшения индуктивного сопротивления проводки следует применять толстые провода.

Это, однако, не всегда оказывается возможным. В мощных установках тонкие провода, обладающие малой поверхностью, будут в состоянии отводить выделяющееся в них тепло только при очень высокой температуре и могут сгореть. Поэтому здесь приходится идти на значительное увеличение диаметра, а следовательно, и длины провода, чтобы получить надлежащую самоиндукцию.

Толстые соединительные провода обладают другим недостатком — они создают большую емкость.

В приемных цепях самоиндукции могут осуществляться из очень тонких проводов. Количество выделяющегося тепла здесь ничтожно, а увеличения потерь вследствие уменьшения диаметра бояться не следует, так как вместе с уменьшением диаметра (для получения одного и того же коэффициента самоиндукции) уменьшается длина провода.

Наивыгоднейшей формой замкнутого провода (с точки зрения получения наибольшего коэффициента самоиндукции при той же длине провода) является один круговой виток.

Однако, если требуется получить большой коэффициент самоиндукции, диаметр витка окажется слишком большим. Поэтому прибегают к сворачиванию проволоки во многовитковые катушки или спирали.

Длина провода в таких катушках больше, чем длина провода в одном круговом витке при том же коэффициенте самоиндукции.

Наивыгоднейшим сечением катушки является круглое.

Если предположить, что витки катушки расположены в идеальной близости один к другому так, что магнитный поток каждого витка пронизывает все остальные витки, то коэффициент самоиндукции окажется пропорциональным квадрату числа витков. Действительно, если бы одинаковые витки находились далеко один от другого и не оказывали бы друг на друга никакого влияния, полная эдс самоиндукции оказалась бы равной сумме всех эдс, т. е. была бы пропорциональна числу витков. Но в рассматриваемом идеальном случае в каждом витке от всех остальных витков наводится еще эдс вследствие взаимного влияния (взаимная индукция). Поэтому, если число витков n и собственная самоиндукция каждого витка L_0 , то эдс на концах каждого витка $L_0 n$, а на концах всей катушки $nL_0 n = L_0 n^2$.

Этот коэффициент самоиндукции следовало бы назвать „действующим коэффициентом самоиндукции“, но обычно слово „действующий“ опускают.

Его можно было бы вычислять по формуле

$$L = \frac{4\pi n^2}{R_m}. \quad (1.113)$$

В действительности весь магнитный поток одного витка не пересекает все остальные витки. Каждый виток получает от остальных только часть потока, вообще тем меньшую, чем он дальше от него расположен. Кроме того витки могут лежать не все в одной плоскости. Поэтому в действительности коэффициент самоиндукции

$$L < \frac{4\pi n^2}{R_m} \quad (1.114)$$

и может быть выражен формулой

$$L = K \frac{4\pi n^2}{R_m}, \quad (1.115)$$

где K — некоторый множитель, зависящий от формы и размеров провода и конструкции катушки.

Точное вычисление самоиндукции представляет собой сложную задачу даже для одного кругового витка. Точное же вычисление самоиндукции катушки часто оказывается невозможным. Поэтому довольствуются приближенными полуэмпирическими формулами, некоторые из которых приведены в приложениях II и III.

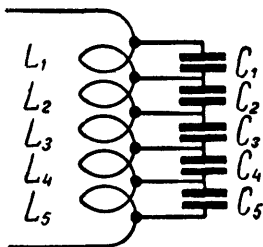
§ 22. Емкость катушек.

Положим, что к концам катушки приложена извне синусоидальная разность потенциалов. Эта разность потенциалов, распределенная между витками катушки, и обуславливает появление электрического поля в пространстве между ними.

Каждая соседняя пара витков может рассматриваться как конденсатор некоторой емкости C . Между этими витками образуется электрическое поле.

Вся катушка может быть эквивалентно заменена схемой фиг. 1.57. Самоиндукция, приходящаяся на один виток, различна в различных частях катушки. А именно, витки, лежащие в центре катушки, имеют большее L вследствие более сильного воздействия на них взаимной индукции от остальных витков. Витки, лежащие ближе к краю катушки, имеют относительно меньшее значение L .

Если принять, что ток I одинаков по всей длине катушки, то падение потенциала, приходящееся на один виток, больше, следовательно, в середине катушки и меньше у ее краев.



Фиг. 1.57.

Поэтому в середине катушки запасается больше электричества в виде зарядов, чем у ее краев.

В первом приближении катушка может рассматриваться как комбинация из параллельно включенной емкости C_K и самоиндукции L_K (фиг. 1.58).

Эквивалентное сопротивление r на фиг. 1.58 замещает диэлектрические потери в изоляции провода и каркасе, на который намотана катушка. Эти потери при высокой частоте могут быть значительны. Обычно стремятся придать обмотке такую конструкцию, чтобы отношение $\frac{L_K}{C_K}$ было максимально.

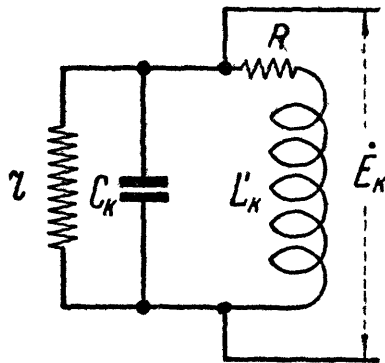
В этом смысле особенно невыгодными являются двуслойные катушки, намотанные обычным образом.

Начальные витки первого ряда A (фиг. 1.59) и последние витки второго ряда B находятся на одном конце катушки в непосредственной близости друг к другу. Они образуют конденсатор, запасаящий большое количество электричества вследствие того, что разность потенциалов здесь максимальна.

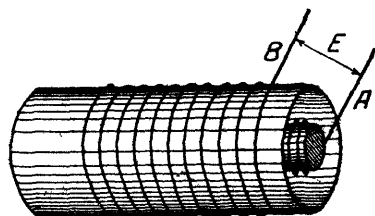
С целью уменьшения емкости в двуслойных катушках прибегают к такому способу намотки, при котором первый виток второго слоя кладется непосредственно на первый виток первого слоя. После этого кладется второй виток первого слоя и на него второй виток второго слоя и т. д. Этим избегается накопление больших разностей потенциалов между близлежащими витками.

Далее применяются различные виды намоток, при которых провода двух соседних витков располагаются не параллельно друг другу. Так например, на фиг. 1.60 показана схема двух рядов проволоки при так называемой корзиночной намотке. Каждый ряд представляет собой многоугольник.

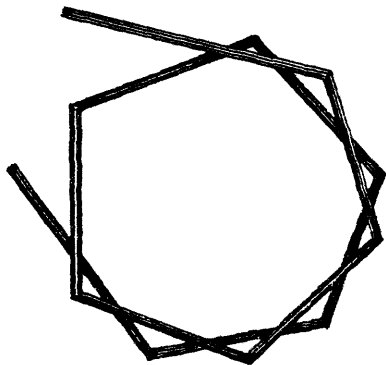
Второй ряд повернут относительно первого на некоторый угол. Следующий ряд той же формы поворачивается еще на некоторый угол. Таким образом провода удаляются друг от друга.



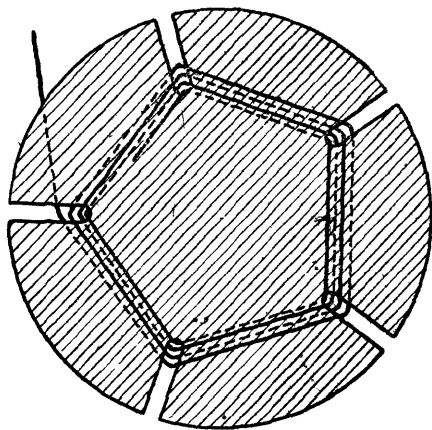
Фиг. 1.58.



Фиг. 1.59.



Фиг. 1.60.



Фиг. 1.61.

Вторая распространенная разновидность катушек этого рода — это так называемая плоская корзиночная катушка.

Способ ее намотки показан на фиг. 1.61. Основанием обмотки служит пресшпановый круг, на который спирально намотан провод, удерживаемый в радиальных прорезах. Число прорезов должно быть нечетным.

Распространены так называемые сотовые катушки.

Следует, однако, иметь в виду, что многослойные, корзиночные и сотовые катушки являются невыгодными в том смысле, что отношение $\frac{R}{L}$ растет по мере удлинения провода, вызванного фигурной формой обмотки, а это ведет к увеличению потерь.

Почти такое же уменьшение емкости можно получить, разбивая обмотку многослойной катушки на ряд секций (так называемых галет).

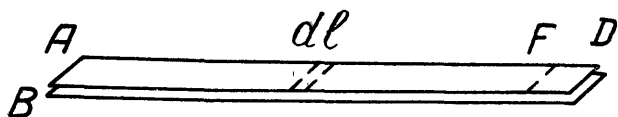
Наиболее совершенной формой в отношении уменьшения емкости следует считать цилиндрическую однослойную катушку, намотанную на возможно более тонкий каркас, сделанный из материала с малыми диэлектрическими потерями и с малой диэлектрической проницаемостью.

§ 23. Понятие о распределенной емкости.

Рассматривая конденсатор (или другие системы, образующие емкость), мы принимали его за чистую емкость. Такая точка зрения справедлива только в случае статического, т. е. неподвижного электрического поля.

Всякий конденсатор обладает омическим сопротивлением и самоиндукцией. Эти свойства сказываются при переменном потенциале, когда заряд конденсатора непрерывно меняется и силовые линии находятся в движении.

Это станет особенно ясным, если взять в качестве конденсатора нарочито длинные пластины фиг. 1.62. Приложим со стороны AB к такому конденсатору переменную разность потенциалов E и рассмотрим участок FD



Фиг. 1.62.

на противоположном конце пластин. Ничто не мешает считать этот участок конденсатора за некоторую самостоятельную емкость и рассматривать всю систему так: FD является конденсатором, а

участок пластин AF и BF проводами, которые доставляют заряд к этому конденсатору. С другой стороны, этот же участок сам по себе является емкостью. Следовательно, он играет двойную роль: с одной стороны — проводов, обладающих самоиндукцией и сопротивлением, а с другой стороны — емкости.

Очевидно, что этим свойством обладает каждый элементарный участок нашей системы (например, участок dl на фиг. 1.62 и всякий другой). Поэтому в действительности рассматриваемую систему было бы точнее представить в виде схемы фиг. 1.63, т. е. в виде цепочки, составленной из элементарных емкостей, самоиндукций и сопротивлений, в которой эти величины равномерно распределены вдоль ее длины.

Разумеется, такая система будет вести себя иначе, чем простой конденсатор, и эта разница в поведении будет сказываться тем сильнее, чем выше частота.

Ниже мы рассмотрим этот вопрос подробнее, а здесь отметим только, что при высоких частотах с этим отличием часто приходится серьезно считаться и во всяком случае постоянно иметь в виду. Пока мы можем резюмировать это так: не существует конденсаторов, которые при переменном токе обладают только емкостью, но во многих практических случаях мы можем совершенно пренебрегать их самоиндукцией и сопротивлением и считать их за „сосредоточенную“ емкость.

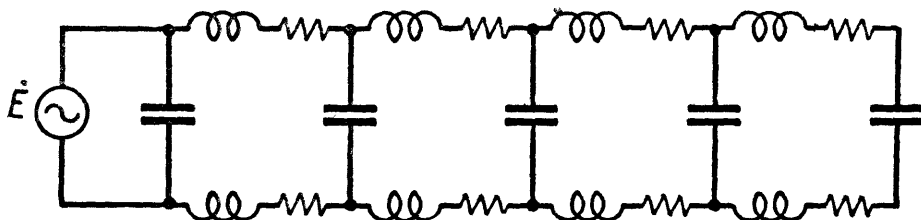
Последнее будет полностью справедливо для статического поля. Оно будет практически совершенно справедливо для медленно меняющегося тока. Однако оно может перестать быть практически справедливым для каждого конденсатора в зависимости от его размеров и устройства при некоторой достаточно высокой частоте, когда становится необходимым учитывать самоиндукцию и сопротивление и рассматривать емкость как

распределенную вдоль того либо другого направления по тому либо другому закону. Емкость, приходящаяся на малый участок электрической цепи, отнесенная к длине участка, называется „емкостью на единицу длины“.

§ 24. Динамическая емкость.

Отсюда мы можем перейти к весьма важному понятию о динамической емкости.

Рассмотрим схему фиг. 1.63.



Фиг. 1.63.

Если на конце такой схемы приложена переменная эдс \dot{E} , то ток определится не только емкостным сопротивлением цепи, но некоторым комплексным сопротивлением, которое обозначим Z , так что

$$i = \frac{\dot{E}}{Z}. \quad (1.116)$$

Между тем, принимая наш прибор за конденсатор, мы определяем его свойства только емкостью и считаем, что ток i соответствует некоторому емкостному сопротивлению $\frac{1}{j\omega C}$, т. е.

$$i = j\dot{E}\omega C. \quad (1.117)$$

Сравнивая ур-ния (1.116) и (1.117), видим, что в последнем случае за емкость C мы принимаем не действительную статическую емкость, а величину

$$C = \frac{1}{j\omega Z}, \quad (1.118)$$

причем Z определяется как через статическую емкость, так и через самоиндукцию и сопротивление конденсатора.

Определенная, таким образом, емкость носит название динамической емкости. Она совпадает со статической, если влияние L и R ничтожно. Она меньше статической, но практически выражается действительным числом, если R ничтожно. Наконец, она выражается комплексным числом, если R представляет заметную величину.

Если конденсатор обладает потерями, то схема фиг. 1.63 дополнится еще параллельными конденсаторам утечками.

§ 25. Емкость катушек при электромагнитной индукции.

Если эдс наводится в катушке посредством электромагнитной индукции, емкость ее зависит от формы магнитного потока, пересекающего витки катушки.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим несколько частных случаев.

1. В короткозамкнутой катушке существует равномерный поток N , изменяющийся во времени (фиг. 1.64). Полная эдс

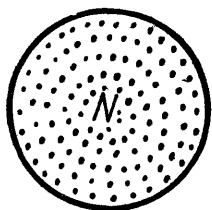
$$e = - \frac{dN}{dt}. \quad (1.119)$$

Никакой разности потенциалов между отдельными участками катушки нет, а следовательно, энергия в электростатической форме отсутствует. Поэтому $C_K = 0$.

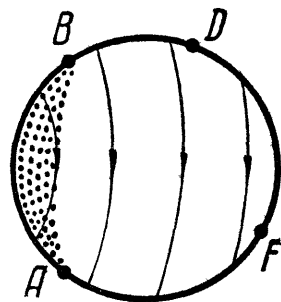
2. Поток N распределен неравномерно в сечении катушек.

При изменении N эдс в каждом витке наводится только между точками A и B (фиг. 1.65); остальная часть витка является для этой эдс внешней цепью, обладающей самоиндукцией L . Разность потенциалов существует между любыми точками одного и того же витка. Она меньше между точками DF и больше между точками AB ,

являющимися как бы зажимами источника. Энергия существует также в виде электростатического поля, схематически показанного на фиг. 1.65 тонкими линиями. Следовательно, емкость $C_K \neq 0$. Практически она, однако, ничтожна.



Фиг. 1.64.



Фиг. 1.65.

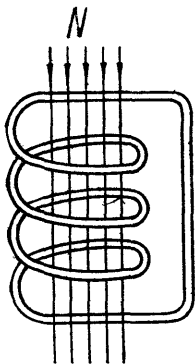
3. Если поток N пронизывает все витки катушки одинаково (фиг. 1.66), то между витками напряжения нет и действующее значение $C_K = 0$.

4. Взята та же катушка, что и на фиг. 1.64, концы ее разомкнуты и здесь включено сопротивление $Z = a + jb$ (фиг. 1.67). Очевидно, что теперь имеется внешняя разность потенциалов, амплитуда которой

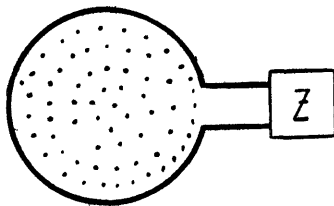
$$E_m = I_m \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.120)$$

Емкость C_K получает тот же смысл, что и в случае катушек с разностью потенциалов, приложенной извне. Влияние емкости C_K возрастает с увеличением внешнего сопротивления.

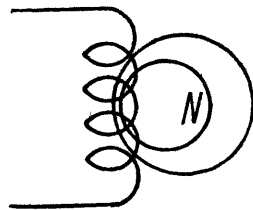
5. Часть витков короткозамкнутой катушки пронизывается магнитным потоком N (фиг. 1.68), другая же часть не пронизывается. Очевидно, что этот случай



Фиг. 1.66.



Фиг. 1.67.



Фиг. 1.68.

приводится и предыдущему. Витки, пронизываемые потоком, создают эдс

$$e = - \frac{dN}{dt}. \quad (1.121)$$

Остальные витки являются внешней индуктивной нагрузкой, к которой приложено напряжение E .

В действительных условиях поток N распределяется неравномерно как по длине, так и по сечению катушки. Поэтому влияние емкости катушки приобретает очень сложный характер и может быть учтено только приближенно.

Важно отметить, что при изменении взаимного расположения катушек, связанных взаимной индукцией, магнитный поток изменяет свое расположение относительно катушек, а следовательно, изменяется и значение емкости C_K .

§ 26. Скинэффект.

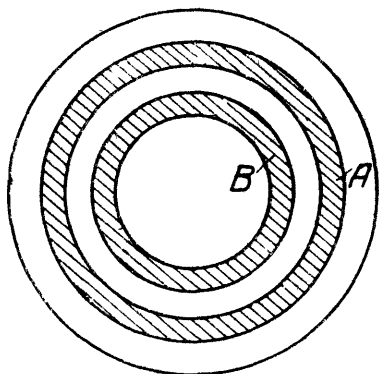
При высокой частоте ток распределяется в сечении провода неравномерно. Явление это называется явлением „вытеснения тока“ или „скин-эффектом“.

Рассмотрим причину этого явления в цилиндрическом проводе.

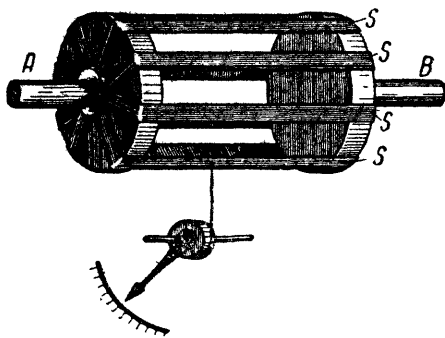
Пусть заштрихованный круг на фиг. 1.69 изображает сечение проводника. Выделим в этом сечении два кольца A и B и будем рассматривать эти кольца как сечение двух проводов.

Самоиндукция провода B больше, чем самоиндукция провода A , так как первый провод тоньше второго. Если все сечение провода разбить на цилиндрические слои, то его можно представить себе состоящим из ряда соприкасающихся проводов различной самоиндукции.

При низкой частоте обычно $r \gg \omega L$, и поэтому ток через все эти цилиндры одинаков. При высокой же частоте ток, идущий через внутренние цилиндры, будет меньше, так как полное сопротивление их больше.



Фиг. 1.69.



Фиг. 1.70.

Кроме того токи в цилиндрах должны быть сдвинуты по фазе относительно друг друга, а следовательно, внутри круглого провода должны существовать разности потенциалов, направленные по радиусам сечения провода.

Таким образом явление скинэффекта приводит к двум главным последствиям: а) при высокой частоте из-за большой самоиндукции внутренних слоев ток идет, главным образом, по тонкому поверхностному слою провода, вследствие чего сопротивление провода при высокой частоте больше, чем при постоянном токе; б) в проводе появляются паразитные уравнительные токи, направленные радиально и ведущие к потере энергии на джоулево тепло.

Влияние скинэффекта падает при уменьшении диаметра провода и при увеличении удельного сопротивления материала.

Вследствие скинэффекта в технике высоких частот сплошные толстые провода не применяются вовсе и заменяются либо тонкими, либо трубчатыми проводами.

Поверхности провода часто покрывают серебром, как материалом, обладающим наибольшей проводимостью.

Медные или бронзовые провода можно, без опасения увеличить потери, заменять биметаллическими проводами с железной основой.

Вследствие скинэффекта тепловые измерительные приборы, градуированные при постоянном токе или при какой-нибудь определенной частоте, дают неправильные показания при другой частоте. Поэтому в радиотехнике применяются специальные тепловые приборы. Одной из распространенных конструкций их является, например, следующая.

Тонкие платиновые пластинки S (фиг. 1.70) закреплены по образующим цилиндра. К ним подводится измеряемый ток от зажимов AB . Ток во всех

пластинках одинаков, так как они расположены симметрично. Скинэффект в них мал вследствие малой толщины и большого сопротивления. Поэтому количество выделяемого тепла зависит только от квадрата тока, но не зависит от частоты.

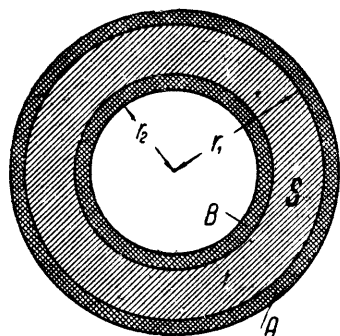
Прогиб при тепловом расширении одной из пластин используется для приведения в движение стрелки, как в обычных тепловых приборах.

§ 27. Скинэффект в катушках.

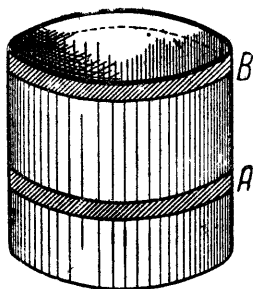
В катушках скинэффект приводит к увеличению плотности тока на внутренней стороне витков и к уменьшению его на внешней стороне витков.

Причину этого легко уяснить при помощи фиг. 1.71. Здесь изображен в плане один замкнутый плоский виток S .

Выделим на нем два кольца одинаковой толщины. Одно у периферии A , а другое у внутренней стороны B . Очевидно, что самоиндукция кольца A больше, чем кольца B , так как сечение магнитного потока в первом случае пропорционально r_1^2 , во втором случае r_2^2 , причем $r_1 > r_2$. Поэтому индуктивное сопротивление у периферии больше. Следовательно, ток здесь меньше.



Фиг. 1.71.



Фиг. 1.72.

Если катушка сделана из тонкой плоской ленты, то получается неравномерное распределение тока вдоль по высоте витка. Это поясняется фиг. 1.72, где один виток изображен в виде цилиндра.

Выделим на цилиндре два тонких одинаковой высоты кольца A и B . Кольцо, находящееся ближе к середине

цилиндра, обладает большей самоиндукцией вследствие более сильной взаимной индукции со стороны всех остальных кольцевых элементов цилиндра (расположенных выше и ниже его) по сравнению с кольцом B . Поэтому плотность тока будет больше у краев цилиндра и меньше у его середины.

Такого рода скинэффект значителен в плоских катушках, имеющих вид, например, спирально свернутой ленты.

Если же лента наматывается на цилиндр, то взаимная индукция между всеми витками в значительной степени ослабляет это явление. Скинэффект заметно сказывается только в крайних витках.

В этом смысле эти катушки являются наиболее выгодными.

В цилиндрических катушках, намотанных из цилиндрического или трубчатого провода, скинэффект уменьшается с уменьшением диаметра провода и с увеличением диаметра катушки.

Скинэффект в катушках приводит к тем же отрицательным последствиям, что и в проводах.

Потери в катушках увеличиваются как вследствие увеличения плотности тока на внутренней стороне катушки, так и вследствие появления токов, уравнивающих внутреннюю разность потенциалов, обусловленную сдвигом фаз между отдельными токовыми линиями. Коэффициент самоиндукции уменьшается вследствие вытеснения тока к внутренней стороне витков, что как бы уменьшает диаметр катушки.

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛ. II.

C — емкость
 C_l — емкость на единицу длины
 c — скорость света
 d — расстояние
 E — эдс, напряжение
 E — напряженность электрического поля
 e — основание неперовых логарифмов
 g — проводимость активная (ваттная) положительная
 H — напряженность магнитного поля
 I — сила тока
 j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$)
 L — коэффициент самоиндукции
 L_l — самоиндукция на единицу длины
 l — расстояние, длина
 \ln — натуральный логарифм
 P — мощность
 R, r — активное (ваттное) положительное сопротивление
 r — радиус
 t — время
 x — расстояние, отсчитанное вдоль линии

Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления
 α — волновой (фазовый) коэффициент линии
 β — километрический коэффициент затухания в линии
 η — коэффициент полезного действия
 λ — длина волны
 μ — магнитная проницаемость
 ρ — волновое сопротивление
 ω — круговая частота
 ω_0 — сокращенное обозначение величины $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m , и т. д.

Постоянные и среднеквадратичные значения — теми же буквами без индекса, например, E, I, P и т. д.

Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например, $\dot{i} = a + jb, \dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ и т. д.

§ 1. Предварительное замечание.

Двухпроводная линия представляет по существу одну из самых простых электрических цепей. Однако тот факт, что в ней емкость и самоиндукция распределены вдоль проводов и не могут рассматриваться как сосредоточенные, несколько затрудняют изучение явлений.

Обычно рассматривают линию после того, как изучены цепи, состоящие из сосредоточенных емкостей и самоиндукций. Это, может быть, несколько упрощает формальное изложение явлений. Зато физическое содержание процессов, происходящих во всякой электрической цепи (и особенно ясно выражающееся в линии) остается в тени.

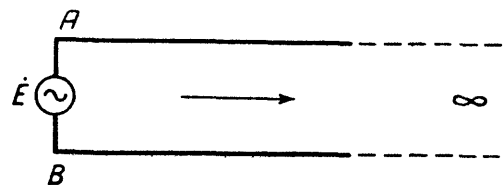
Поэтому мы начнем изложение электрических цепей с двухпроводной линии. Прежде чем дать формальное математическое описание явлений, рассмотрим эти явления с чисто физической стороны. Это поможет в дальнейшем гораздо лучше уяснить физический смысл математических символов и формул, которые предстанут перед читателем в совершенно ином свете, если он даст себе труд разобраться в физическом смысле тех явлений, которым они соответствуют.

§ 2. Бегущие волны потенциала в двухпроводной линии.

Для того чтобы сначала максимально упростить задачу, сделаем предположение, что некоторая двухпроводная линия, образованная двумя одинаковыми проводами, имеет начало, но не имеет конца (т. е. уходит в бесконечность).

Физический смысл этого предположения сводится к тому, что линия настолько длинна, что наше исследование закончится раньше, чем электрический импульс, посланный при первом включении в начало линии некоторой эдс, успеет дойти до конца линии.

Причина, по которой мы делаем такое предположение, заключается в желании иметь перед собой линию, однородную на всем ее протяжении. Если бы мы предположили, что линия где-то кончается, то нам пришлось бы учитывать влияние этого окончания или разрыва на все явления, которые происходят у начала линии.



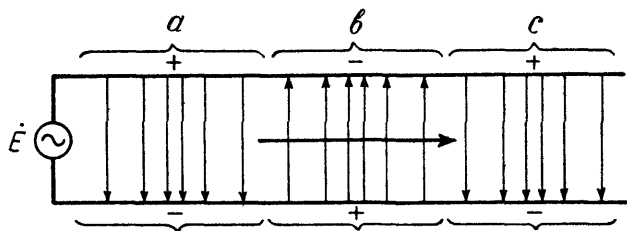
Фиг. 2.1.

Положим, что в начале этой бесконечной линии в точках A и B (фиг. 2.1) действует периодическое напряжение

$$\dot{E} = E_m e^{j\omega t}. \quad (2.1)$$

Что будет происходить при этом в линии? Очевидно, что заряд, сообщаемый в каждый момент началу линии, будет передвигаться с некоторой скоростью вдоль проводов. Так как этот заряд переменный, то в линию все время будут уходить от источника то положительные, то отрицательные заряды, величина и знак которых будут изменяться по синусоидальному закону.

Если в какой-нибудь момент времени зафиксировать мгновенное расположение электрического поля между проводами, то получится картина, показанная, например, на фиг. 2.2. Силовые линии сгущены в точках линии a, b, c и т. д., расположенных через равные интервалы. Направление линий в этих пунктах чередуется, так как положительный заряд на каждом проводе чередуется с отрицательным.



Фиг. 2.2.

Вся эта картина действительно только для одного мгновения. В следующее мгновение она вся передвинется вправо. За один полупериод колебания (т. е. за время $\frac{\pi}{2}$)

картина переместится вправо на расстояние ab , т. е. знаки зарядов и направления силовых линий сменятся во всех точках линии на обратные.

За время одного периода все сдвинется на расстояние ac , и картина вновь восстановится в своем прежнем виде.

Наблюдая закон изменения потенциала в какой-нибудь точке линии, мы обнаружим, что он изменяется синусоидально по закону

$$E = E_m e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (2.2)$$

Наблюдая закон изменения потенциала в какой-нибудь точке, взятой правее, чем первая, мы обнаружим тот же синусоидальный закон изменения (так как заряды и поле будут пробегать эту точку в той же последовательности), но все эти изменения будут запаздывать на время, в течение которого заряд проходит между первой и второй точкой.

Положим, что расстояние между точками равно l . Скорость движения электрического поля в воздухе (т. е. скорость передачи электрического импульса по воздушной линии без потерь), как показывает опыт, близка к скорости света.

Следовательно, для того, чтобы заряд успел пройти расстояние l , требуется время

$$\tau = \frac{l}{c}, \quad (2.3)$$

где c — скорость света.

На этот промежуток времени τ во второй точке все стадии явления будут происходить позже. Это запоздание выразится в запоздании фазы на тот угол, на который повернется вектор, вращающийся с частотой ω за время τ . Так что

$$\psi = \omega\tau \text{ или } \psi = \omega \frac{l}{c}. \quad (2.4)$$

Таким образом, если в первой точке линии закон изменения напряжения будет

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)},$$

то в точке, находящейся вправо на расстоянии l , он будет

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\omega l}{c})} = E_m e^{j[\omega(t - \frac{l}{c}) + \varphi]}. \quad (2.5)$$

Чтобы написать закон изменения напряжения для всех точек линии, будем считать место включения источника за начало отсчета расстояний, а расстояние до любой другой точки обозначим буквой x . Таким образом x явится переменной величиной, могущей принимать любые положительные значения.

Взамен ур-ния (2.5), подставив x вместо l и положив $\varphi = 0$, получим

$$\dot{E}_x = E_m e^{j(\omega t - \frac{\omega x}{c})}. \quad (2.6)$$

Индекс x внизу буквы \dot{E} обозначает, что это напряжение относится к точке с координатой x , причем при $x = 0$, т. е. в точках включения источника AB

$$\dot{E}_x = E_m e^{j\omega t} \equiv \dot{E}_0. \quad (2.7)$$

Рассмотренное нами распространение напряжения вдоль линии, происходящее со скоростью света, носит название „бегущей волны напряжения“. Расстояние ac между точками с одинаковой фазой носит название „длины волны“ и обозначается буквой λ . Очевидно, что

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (2.8)$$

Ур-ние (2.8) показывает, что чем больше частота, тем короче волна. Это, впрочем, непосредственно ясно, так как чем короче период колебания, тем на меньшее расстояние переместится гребень волны за время одного периода.

§ 3. Бегущие волны тока в двухпроводной линии.

Перемещение заряда мы называем током. Поэтому одновременно с бегущей волной потенциала вдоль проводов существует бегущая волна тока. Скорость движения всех зарядов одинакова. Поэтому, где больше заряд, там больше в единицу времени переносится электричества, а следовательно, там больше ток.

Из этого следует, что закон распределения тока вдоль проводов отличается от закона распределения потенциала только амплитудой. Периодичность и фаза те же, что и у потенциала. Движению положительных зарядов соответствует ток положительного направления, движению отрицательных зарядов — ток обратного направления.

Таким образом, если волна потенциала выражается уравнением

$$\dot{E}_x = E_m e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}}, \quad (2.9)$$

то волна тока будет выражаться уравнением

$$\dot{I}_x = I_m e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}}. \quad (2.10)$$

Отношение E_m к I_m представляет положительное вещественное число. Обозначим его через ρ . Так что

$$\rho = \frac{E_m}{I_m}. \quad (2.11)$$

Каково это число ρ , мы вскоре выясним, но ясно, что оно имеет размерность сопротивления.

§ 4. Бегущие электромагнитные волны в двухпроводной линии.

Напряжение образует электрическое поле. Ток образует магнитное поле в форме колец, окружающих провода линии.

Оба эти поля перемещаются в пространстве, окружающем провода, со скоростью света. В каждой точке пространства, благодаря одинаковости фазы, тока и напряжения, оба эти поля также находятся в фазе.

Таким образом то же явление, которое мы только что описывали как волны тока и напряжения в проводах, можно, с другой стороны, описать как явление движения в пространстве, окружающем провода, особых волн, состоящих из электрического поля и перпендикулярного ему магнитного поля. По отношению к этим волнам мы должны применить какой-то другой термин, поскольку мы говорим уже не о токе и напряжении, а об электрическом и магнитном полях.

Эти волны называются „электромагнитными волнами“. Электромагнитная волна переносит от источника вдоль линии энергию в форме электрического и магнитного полей, движущихся со скоростью света.

В том случае, который мы сейчас рассматриваем, термин „волна тока и потенциала“ и термин „электромагнитная волна“ обозначают одно и то же явление. Тот или иной термин может быть применен с одинаковым правом, в зависимости от удобства или в зависимости от того, хотим ли мы сосредоточить внимание на проводах или на пространстве, в котором эти провода находятся. Равнозначность этих представлений с точки зрения количественных результатов основывается на том, что определенному току и потенциалу при заданной конфигурации линии всегда соответствует определенное магнитное и электрическое поле.

При этом мы делаем молчаливое допущение, что явления в пространстве в точности совпадают по времени с соответствующими явлениями в проводах.

Иными словами, мы допускаем, что если, например, на проводе по какой-нибудь причине произошло изменение тока, то соответствующее изменение магнитного поля произойдет в тот же самый момент во всем окружающем пространстве. Между тем известно, что электрические и магнитные явления передаются не мгновенно, а со скоростью света. Поэтому в действительности в удаленных точках пространства всякое возмущение тока (вызванное, например, неоднородностью линии) или напряжения скажется позднее, чем вблизи провода, и поэтому вообще явления в проводе и соответствующие явления в пространстве могут не совпадать по времени.

Чтобы внести точность и ясность в этот вопрос, надо условиться относительно того, что мы понимаем под словами „точное совпадение по времени явлений в пространстве и соответствующих им явлений на проводе“.

Примем, что явления могут считаться происходящими одновременно, если промежуток времени, на который одно явление запаздывает относительно другого, весьма мал. Однако в самом термине „малый промежуток времени“ содержится неясность до тех пор, пока не установлен такой масштаб измерения времени, т. е. не установлена величина промежуток времени, по сравнению с которой можно говорить о величине и порядке малости других промежутков времени.

В нашем случае таким масштабом, естественно, является период колебания. Если промежуток времени, требуемый для передачи возмущения из какой-нибудь точки в другую, очень мал по сравнению с периодом возмущения, то явления в обеих точках можно считать происходящими одновременно. Это условие дает возможность установить масштаб и для пространственных измерений.

За время одного периода возмущение перемещается в пространстве на длину одной волны. Следовательно, можно сказать также и так: „для того, чтобы можно было утверждать, что явления в точках *A* и *B* происходят практически одновременно, достаточно, чтобы эти точки находились на расстоянии, достаточно малом по сравнению с длиной волны“.

По отношению к двухпроводной линии на этом основании можно сделать следующий вывод. Если провода расположены на расстоянии, много меньшем длины волны, то, имея в виду, что электрическое и магнитное поля сосредоточены, главным образом, в зоне, ближайшей к линии (остальным можно пренебречь), мы можем считать, что в каждый момент электрическое и магнитное поля в пространстве вдоль линии совпадают по фазе с напряжением и током в соответствующих точках линии.

Это совпадение может иметь место и в том случае, когда параллельные провода находятся далеко один от другого, но тогда вопрос требует отдельного исследования. Здесь же мы можем исходить из факта одновременности во всех случаях.

Практически в отношении линий, у которых расстояние между проводами меньше, например, $\frac{1}{100} \lambda$ или около того, мы придем к одинаковым численным результатам, будем ли пользоваться представлением о волне тока и напряжения или представлением об электромагнитной волне.

По существу же дела разница будет заключаться в следующем.

Подсчеты удобнее и проще вести, исходя из представления о токе и напряжении, и поскольку в линиях с малым расстоянием между проводами получаемые результаты будут правильными, этим методом и следует пользоваться.

Физическая же сущность явления заключается, именно, в движении электромагнитных волн, для которых провода являются направляющим каналом.

Для электрического поля волны провод является такой же границей, как и обкладка конденсатора для статического поля. Для магнитного поля волны ток является осевой линией, так же, как постоянный ток в проводе является осевой линией для постоянного магнитного поля.

Но известно, что энергия заряженного конденсатора сосредоточена в пространстве между обкладками конденсатора, а энергия магнитного поля — в пространстве вокруг провода.

Поэтому вся та энергия, которая переносится электромагнитной волной, заключена в пространстве, окружающем провода. Сами провода расходуют энергию на джоулево тепло, но никакой энергии не переносят.

Правильная точка зрения заключается в том, что электромагнитная волна, двигаясь вдоль проводов, вызывает в них явления, которые мы называем током и напряжением, а не ток и напряжение образуют электромагнитную волну.

Если мы пользуемся обратной терминологией, то только ради сокращения речи и еще потому, что ток и напряжение легче измерить на опыте, нежели поле.

Для измерения тока и напряжения гораздо легче построить приборы, чем для непосредственного измерения полей волны. Всякого рода вычисления гораздо легче и удобнее производить, исходя из параметров цепей (L , C и R), в которых по существу и скрыты те параметры конфигурации пространства, в котором в действительности происходят электромагнитные явления.

Мы можем, однако, поступать так только до тех пор, пока предположение об одновременности явлений в проводах и в пространстве сохраняет свое значение. В противном случае мы должны будем принять во внимание запаздывание явлений в точках, удаленных от проводов.

Уравнение для электромагнитной волны должно показывать, как изменяется H и E в зависимости от времени и расстояния. При этом очевидно, что эти величины должны быть отнесены к точкам, расположенным одинаково относительно сечения линии, т. е. вдоль некоторой прямой, параллельной двухпроводной линии. Эти уравнения получат вид

$$\dot{E}_x = E_m e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}}, \quad (2.12)$$

$$\dot{H}_x = H_m e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}}. \quad (2.13)$$

§ 5. Стоячие волны в линии.

Некоторые замечательные свойства волн могут быть легко выяснены, если представить себе, что в одной и той же линии распространяются навстречу одна другой две волны (одна справа налево, а другая слева направо), причем периоды и амплитуды этих волн одинаковы.

Для того чтобы написать уравнения этих волн, будем производить отсчет расстояния от какой-нибудь произвольной точки линии, считая положительным расстоянием расстояние, отсчитанное, например, вправо.

Тогда, например, волна потенциала, движущаяся вправо, выразится уравнением

$$\dot{E}_{x1} = E_m e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}}, \quad (2.14)$$

а волна, движущаяся влево (т. е. против направления отсчета расстояния), выразится тем же уравнением, но с заменой $(+x)$ на $(-x)$, т. е.

$$\dot{E}_{x2} = E_m e^{j\omega t + j\omega \frac{x}{c}}. \quad (2.15)$$

Спрашивается, что дает сумма этих двух волн.

Формальная математическая операция сложения \dot{E}_{x1} и \dot{E}_{x2} даст

$$\dot{E}_x = \dot{E}_{x1} + \dot{E}_{x2} = E_m \left(e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}} + e^{j\omega t + j\omega \frac{x}{c}} \right).$$

Стоящее в скобках выражение представляет собою выражение для косинуса. Так что

$$\dot{E}_x = E_m \left(e^{j\omega \frac{x}{c}} + e^{-j\omega \frac{x}{c}} \right) e^{j\omega t} = 2E_m \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) e^{j\omega t}. \quad (2.16)$$

Ур-ние (2.16) показывает, что теперь в системе не обнаруживается бегущих волн потенциала. Для каждого значения координаты x существует совершенно определенное значение величины $\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)$, которое остается постоянным для данной точки.

Существуют точки, в которых

$$\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) = 1.$$

В этих точках амплитуда потенциала всегда имеет значение $2E_m$.
Существуют точки, для которых

$$\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) = 0$$

и в этих точках никогда нет напряжения.

Посмотрим теперь, как распределяется ток.

Так как движение зарядов в волне, движущейся слева направо, происходит в отрицательном направлении, то ток в этой волне имеет знак, обратный по отношению к знаку напряжения.

Поэтому, суммируя токи, надо изменить знак у тока, соответствующего этой волне, на обратный.

Общий ток будет

$$\begin{aligned} i_x &= i_{x_1} + i_{x_2} = I_m \left(e^{j\omega t - j\omega \frac{x}{c}} - e^{j\omega t + j\omega \frac{x}{c}} \right) = \\ &= -2I_m \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) j e^{j\omega t} = 2I_m \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Сдвиг фазы на $-\frac{\pi}{2}$ появляется в последнем члене равенства, вследствие замены $(-j)$ на $e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Ур-ние (2.17) показывает, что амплитуда тока (т. е. величина $2I_m \sin\frac{\omega x}{c}$) изменяется вдоль линии по закону синуса (а не косинуса, как амплитуда напряжения).

Следовательно, в тех местах, где амплитуда напряжения максимальна — амплитуда тока равна нулю, и наоборот.

Мало того, ток сдвинут во времени по фазе на угол $-\frac{\pi}{2}$, т. е. произведение тока на напряжение дает чисто реактивную энергию.

В те моменты времени, когда напряжение достигает максимального мгновенного значения (во всех точках линии одновременно) — ток всюду становится равным нулю. И обратно: в момент максимального тока напряжение равно нулю.

Таким образом в этом явлении, называемом стоячей волной, происходит непрерывное превращение магнитной энергии (тока) в электростатическую (потенциал).

Одна и та же энергия представляется нам поочередно то в виде магнитного, то в виде электрического поля. Поэтому мы можем приравнять энергии этих полей.

Для этого, взяв маленький участок линии dx в пучности тока (где потенциал равен нулю) и такой же участок в пучности напряжения (где ток равен нулю), напишем

$$(dxL_l) I_m^2 = (dxC_l) E_m^2. \quad (2.18)$$

[Произведение (dxL_l) представляет собой самоиндукцию участка dx , а (dxC_l) — емкость такого же участка].

Из ур-ния (2.18) получаем

$$\frac{E_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}, \quad (2.19)$$

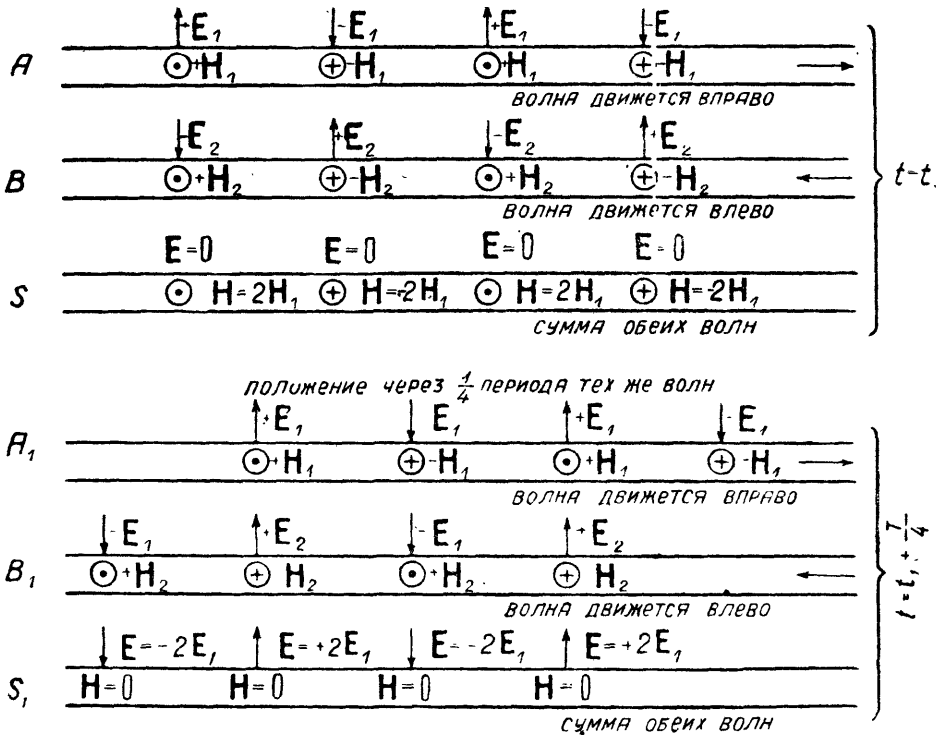
что дает нам соотношение между амплитудами тока и напряжения, т. е. ту величину, которая раньше была обозначена буквой ρ . Эта величина называется „характеристикой линии“ или „волновым сопротивлением линии“.

§ 6. Физическое объяснение явления стоячих волн.

Физическую картину возникновения стоячих волн можно пояснить следующим образом.

На фиг. 2.3 вверху показаны три пары горизонтальных линий A , B и S . Эти линии изображают некоторый участок проводов, вдоль которых распространяется волна. При этом A , B и S изображают одну и ту же двухпроводную линию и начерчены порознь для того, чтобы нагляднее выделить волну, движущуюся вправо (A), волну, движущуюся влево (B) и сумму их (S).

Вертикальные черточки со стрелками отмечают места максимума электрического поля волны в данный момент. Расстояние между двумя соседними черточками равно поэтому половине.



Фиг. 2.3.

В системе A , как это показано наверху стрелкой, волны движутся вправо. Следовательно, и черточки, изображающие максимум поля, движутся вправо. В системе B это движение происходит влево и соответствует встречной волне.

Рядом с черточкой, отмечающей электрическое поле в максимуме, стоит кружок, который показывает направление магнитной силовой линии в этом же месте. Точка в кружке обозначает, что линия идет из-за чертежа на наблюдателя, а крест—что она уходит за чертеж.

Направление линии легко получить, пользуясь правилом штопора.

Так как картина A и B имеет место в рассматриваемый момент в одной и той же двухпроводной линии, то поля обеих волн складываются, и результат этого сложения показан в строке S . Он сводится к тому, что электрическое поле обеих волн взаимно уничтожилось, в то время, как магнитное — взаимно усилилось.

Легко сообразить, что это будет иметь место не только в точках максимальной силы поля, но и во всех остальных. Разница будет только в том, что поле в остальных точках будет слабее.

В результате вдоль двухпроводной линии в данный момент, соответствующий фиг. 2.3, существует только магнитное поле, сила которого синусоидально изменится вдоль оси линии.

Нижняя часть того же чертежа (A_1, B_1, S_1) показывает расположение обеих волн через $1/4$ периода, т. е. после того, как волны одной системы переместились вправо на четверть длины волны, а волны другой системы настолько же переместились влево.

Легко видеть, что теперь магнитное поле исчезло, а осталось только электрическое, максимумы которого располагаются в промежутках между теми точками, в которых раньше были максимумы магнитного поля.

При дальнейшем движении волн снова исчезает электрическое и появляется магнитное поле на прежних местах, но с обратным знаком и т. д.

Таким образом в стоячей волне и магнитное и электрическое поле изменяются синусоидально как во времени, так и вдоль оси линии проводов; оба эти поля в обоих смыслах сдвинуты одно относительно другого на 90° .

§ 7. Получение бегущих и стоячих волн в реальных условиях.

Для того чтобы получить бегущую волну в действительности, вовсе нет надобности делать линию бесконечной длины. Достаточно сделать так, чтобы энергия, достигнув конца линии, была бы нацело поглощена здесь омическим сопротивлением.

Средняя за период энергия, отбираемая от источника (т. е. мощность), равна

$$P = \frac{E_m I_m}{2}, \quad (2.20)$$

а так как

$$\frac{E_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}},$$

то

$$P = \frac{E_m^2}{2 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}. \quad (2.21)$$

Если в конце линии включить сопротивление

$$R = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}},$$

то при амплитуде напряжения E_m в нем поглотится та же самая энергия

$$P = \frac{E_m^2}{2 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}}.$$

Поэтому в этом случае энергия будет непрерывно двигаться от источника \dot{E} (фиг. 2.4) вдоль линии к потребителю R .

В линии будет бегущая волна.

Наоборот, если энергия на конце вовсе не потребляется, т. е. линия или замкнута накоротко или разомкнута, — энергия не будет израсходована и отразится обратно, образуя вторую (отраженную) систему волн в линии.

В этом случае появятся стоячие волны.



Фиг. 2.4.

Наконец, заметим, что подсчет мощности, переносимой бегущей волной в виде электрического и магнитного поля, показывает, что эта мощность в среднем за период в точности равна величине

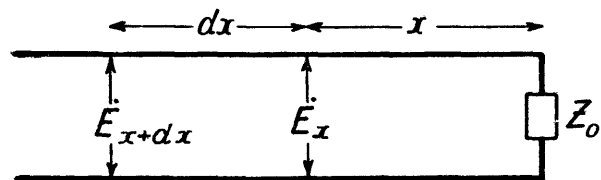
$$P = \frac{E_m I_m}{2}, \quad (2.22)$$

т. е. вся энергия, даваемая источником, переносится только в форме электромагнитного поля. Это положение справедливо для всех случаев передачи электрической энергии.

Как бы ни была сложна действительная обстановка передачи энергии, эта передача всегда происходит только по диэлектрику. Провода играют роль только направляющего канала.

§ 8. Основные уравнения линии без потерь.

Обратимся теперь к математическому исследованию рассмотренных явлений. Положим, что в начале линии (фиг. 2.5) приложено некоторое синусоидальное напряжение, а на конце линия замкнута на сопротивление Z_0 .



Фиг. 2.5

Мы будем рассматривать установившийся режим, при котором во всех точках линии и ток и напряжение будут синусоидальны. Возьмем на произвольном расстоянии x от точки Z_0

участок dx и напишем для этого участка уравнения, которые выражают собой следующие два факта.

а) Если на расстоянии x от Z_0 существует между проводами некоторое напряжение \dot{E}_x , то на расстоянии $(x + dx)$ будет существовать некоторое другое напряжение $(\dot{E}_x + \partial \dot{E}_x)$, причем разность этих напряжений уравновешивается эдс самоиндукции на участке линии dx .

Это записывается так

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} = j\omega L_l \dot{I}_x. \quad (2.23)$$

б) Если вдоль проводов на расстоянии dx ток изменился на величину $\partial \dot{I}_x$, то это изменение тока проводимости должно быть компенсировано равным изменением тока смещения. Иными словами, ток в проводах мог уменьшиться или увеличиться только за счет ответвления части тока в емкость между проводами.

Это записывается так

$$\frac{\partial \dot{I}_x}{\partial x} = j\omega C_l \dot{E}_x. \quad (2.24)$$

Ур-ния (2.23) и (2.24) представляют собой систему уравнений, связывающую значения \dot{E} и \dot{I} в точке x . Это дифференциальные уравнения, так как в них входят частные производные по x от \dot{E}_x и \dot{I}_x .

Для решения их прежде всего разделим переменные, т. е. составим новые уравнения, в каждое из которых будет входить производная только от одной переменной.

Для этого сначала продифференцируем эти уравнения вторично. Найдем:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} = j\omega L_l \frac{\partial \dot{I}_x}{\partial x}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{I}_x}{\partial x^2} = j\omega C_l \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x}. \quad (2.26)$$

Подставив в ур-ние (2.25) значение $\frac{\partial \dot{I}_x}{\partial x}$ из ур-ния (2.24), а в ур-ние (2.26) значение $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x}$ из ур-ния (2.23), получим:

$$-\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} = \omega^2 L_l C_l \dot{E}_x, \quad (2.27)$$

$$-\frac{\partial^2 \dot{I}_x}{\partial x^2} = \omega^2 L_l C_l \dot{I}_x. \quad (2.28)$$

Ур-ния (2.27) и (2.28) показывают, что \dot{E}_x и \dot{I}_x должны представлять собой такие функции, чтобы их вторые частные производные по x равнялись бы самим функциям, умноженным на $(\omega^2 L_l C_l)$, взятым с обратным знаком.

Как известно, такими функциями могут быть синусоидальные или косинусоидальные функции.

Дифференцируя дважды следующие выражения, легко убедиться, что они удовлетворяют ур-ниям (2.27) и (2.28), т. е. представляют собой решение этих уравнений (пока в общем виде):

$$\dot{I}_x = A_1 \sin(mx) + A_2 \cos(mx), \quad (2.29)$$

$$\dot{E}_x = B_1 \sin(mx) + B_2 \cos(mx), \quad (2.30)$$

причем буквами A_1, B_1, A_2, B_2 обозначены величины, не зависящие от x , а буквой m обозначено для сокращения произведение

$$m = \omega \sqrt{C_l L_l}. \quad (2.31)$$

Для того чтобы придать этому решению конкретный характер, надо определить, чему равняются постоянные A_1, B_1, A_2 и B_2 . Для этого поступим следующим образом. Обозначим ток и напряжение на конце линии у сопротивления Z_0 (т. е. при $x=0$) через \dot{I}_0 и \dot{E}_0 . Подставив в ур-ния (2.29) и (2.30) вместо x нуль, получим:

$$\dot{I}_{x=0} = \dot{I}_0 = A_2, \quad (2.32)$$

$$\dot{E}_{x=0} = \dot{E}_0 = B_2. \quad (2.33)$$

Для определения A_1 и B_1 продифференцируем ур-ния (2.29) и (2.30) еще раз:

$$\frac{\partial \dot{I}_x}{\partial x} = A_1 m \cos(mx) - A_2 m \sin(mx), \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} = B_1 m \cos(mx) - B_2 m \sin(mx). \quad (2.35)$$

Подставим теперь сюда значения $\frac{\partial \dot{I}_x}{\partial x}$ и $\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x}$ из ур-ний (2.24) и (2.23), причем положим снова $x=0$, т. е. $\sin(mx)=0$; $\cos(mx)=1$; $\dot{I}_x = \dot{I}_0$; $\dot{E}_x = \dot{E}_0$.

Это даст нам следующие два соотношения:

$$j\omega C_l \dot{E}_0 = A_1 m, \quad (2.36)$$

$$j\omega L_l \dot{I}_0 = B_1 m, \quad (2.37)$$

которые и определяют A_1 и B_1 .

Подставив найденные значения в ур-ния (2.34) и (2.35), и обозначив

$$m = \omega \sqrt{C_l L_l}; \rho = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}},$$

получим следующее выражение, которое представляет собой решение ур-ний (2.23) и (2.24) для рассматриваемого случая:

$$\dot{I}_x = \dot{I}_0 \cos(mx) + j \frac{\dot{E}_0}{\rho} \sin(mx), \quad (2.38)$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 \cos(mx) + j\rho \dot{I}_0 \sin(mx). \quad (2.39)$$

Таким образом значения \dot{I}_x и \dot{E}_x определяются в зависимости от параметров линии C_l и L_l и от значений тока и напряжения в конце участка, где включено сопротивление Z_0 . Если это сопротивление задано, то этим определено отношение между \dot{E}_0 и \dot{I}_0 , так как по закону Ома

$$Z_0 = \frac{\dot{E}_0}{\dot{I}_0}.$$

Давая Z_0 различные значения, мы и получим различные явления в линии, часть которых мы уже установили путем чисто физического рассуждения.

Дальнейшее исследование ур-ний (2.38) и (2.39) можно было бы вести непосредственно в тригонометрической форме, как они написаны. Однако с целью простоты и наглядности мы перейдем к комплексной форме записи, для чего заменим косинус и синус их выражениями через неперово число, а взамен \dot{E}_0 и \dot{I}_0 напомним $E_{m0} e^{j\omega t}$ и $I_{m0} e^{j\omega t}$, причем E_{m0} и I_{m0} вообще могут быть комплексными амплитудами (чем учитывается сдвиг фазы между \dot{E}_0 и \dot{I}_0), но в нашем исследовании мы сможем ограничиться случаем, когда эти величины выражены действительными числами.

Произведя указанную замену, получим из ур-ний (2.38) и (2.39)

$$\dot{I}_x = I_{m0} \left[\frac{e^{j(\omega t + mx)} + e^{j(\omega t - mx)}}{2} \right] + \frac{E_{m0}}{\rho} \left[\frac{e^{j(\omega t + mx)} - e^{j(\omega t - mx)}}{2} \right], \quad (2.40)$$

$$\dot{E}_x = E_{m0} \left[\frac{e^{j(\omega t + mx)} + e^{j(\omega t - mx)}}{2} \right] + I_{m0} \rho \left[\frac{e^{j(\omega t + mx)} - e^{j(\omega t - mx)}}{2} \right]. \quad (2.41)$$

Каждое из слагаемых, стоящих в прямых скобках, т. е. каждое выражение

$$e^{j(\omega t \pm mx)}$$

согласно § 2 можно написать в виде $e^{j(\omega t \pm \frac{\omega x}{c})}$, где c — скорость движения волны. Сопоставляя оба эти выражения, легко видеть, что

$$m = \frac{\omega}{c}$$

или

$$\omega \sqrt{L_l C_l} = \frac{\omega}{c},$$

откуда

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}.$$

Отсюда видно, что скорость движения волны равна $\frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$ и в воздухе соответствует скорости света.

Итак, и ток и напряжение представляются в виде совокупности четырех волн.

Выражение

$$e^{j(\omega t + mx)} \quad (2.42)$$

показывает, что волна движется от источника к нагрузке. Эта волна называется „прямой волной“. (Напомним, что координата x отсчитывается от нагрузки.)

Выражение

$$e^{j(\omega t - mx)} \quad (2.43)$$

показывает, что волна движется от нагрузки в сторону источника. Эта волна называется „отраженной волной“.

Чтобы не писать в дальнейшем громоздких выражений, мы обозначим выражение (2.42) буквой Π , а выражение (2.43)—буквой O . Эти буквы выбраны для удобства запоминания, так как они являются начальными буквами слов „прямая“ и „отраженная“.

Ур-ния (2.40) и (2.41) перепишутся тогда так:

$$\dot{i}_x = I_{m0} \left[\frac{\Pi + O}{2} \right] + \frac{E_{m0}}{\rho} \left[\frac{\Pi - O}{2} \right], \quad (2.44)$$

$$\dot{E}_x = E_{m0} \left[\frac{\Pi + O}{2} \right] + I_{m0} \rho \left[\frac{\Pi - O}{2} \right]. \quad (2.45)$$

При помощи этих уравнений рассмотрим различные случаи нагрузки линии.

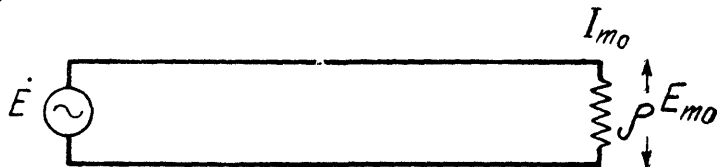
§ 9. Случай, когда линия замкнута на активное сопротивление, равное волновому сопротивлению.

Положим, что нагрузочное сопротивление Z_0 равно „волновому сопротивлению“

$$\rho = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}.$$

Тогда (фиг. 2.6)

$$E_{m0} = I_{m0} Z_0 = I_{m0} \rho. \quad (2.46)$$



Фиг. 2.6.

Подставив это в основные уравнения (записанные сокращенно) (2.44) и (2.45), найдем сначала:

$$\dot{i}_x = I_{m0} \left[\frac{\Pi + O}{2} \right] + \frac{I_{m0} Z_0}{\rho} \left[\frac{\Pi - O}{2} \right]; \quad (2.47)$$

$$\dot{E}_x = E_{m0} \left[\frac{\Pi + O}{2} \right] + \frac{E_{m0} \rho}{Z_0} \left[\frac{\Pi - O}{2} \right]. \quad (2.48)$$

А так как $\frac{Z_0}{\rho} = 1$,

то

$$\left. \begin{aligned} \dot{i}_x &= I_{m0} \Pi \\ \dot{E}_x &= E_{m0} \Pi \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Ур-ние (2.49) показывает, что осталась только одна прямая волна, в которой ток и напряжение находятся в фазе. Такая волна называется „бегущей волной“. Чтобы получить ее, мы должны, следовательно, включить

на конце линии чисто омическое сопротивление, равное волновому сопротивлению линии.

Физически, как уже говорилось, этот случай означает следующее: вся энергия, доставленная к нагрузке, поглощается здесь, так как и ток и напряжение в нагрузке имеют такую же величину, как и в линии. Движение энергии происходит в одном направлении — от источника к нагрузке.

При бегущей волне значения тока и напряжения в любой точке линии будут:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_x &= I_{m_0} e^{j(\omega t + mx)} \\ \dot{E}_x &= I_{m_0} \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} e^{j(\omega t + mx)} \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

где x — расстояние данной точки от нагрузки (а не от источника).

Линия, в которой существует только бегущая волна, является для источника эдс чисто омической нагрузкой, сопротивление которой равно

$$\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$$

В установившемся режиме длина линии играет роль только в отношении сдвига фазы между эдс источника и эдс на концах сопротивления

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$$

Если в этом смысле сравнить две точки линии, находящиеся на расстоянии d , то найдем, что фаза точки, лежащей ближе к нагрузке, запаздывает на угол

$$\varphi = m(x + d) - mx = md = \frac{\omega}{c} d = \frac{2\pi d}{\lambda}. \quad (2.51)$$

Поэтому, если расстояние между источником и нагрузкой равно D , то фаза в нагрузке запаздывает по сравнению с фазой источника

$$\varphi = \frac{2\pi D}{\lambda} \quad \text{или} \quad \frac{\omega}{c} D. \quad (2.52)$$

Написанное выражение для угла сдвига от расстояния очень часто встречается и его следует заметить.

§ 10. Случай, когда линия короткозамкнута на конце.

Положим, что конец линии короткозамкнут. Тогда $E_{m_0} = 0$ и основные уравнения (2.44) и (2.45) дают:

$$\dot{I}_x = I_{m_0} \left[\frac{\Pi + 0}{2} \right], \quad (2.53)$$

$$\dot{E}_x = I_{m_0} \rho \left[\frac{\Pi - 0}{2} \right]. \quad (2.54)$$

Эти выражения показывают, что теперь в проводе существуют прямая и отраженная волны тока и напряжения. Волна тока при отражении не меняет своей фазы (так как знак ее тот же, что и знак прямой волны). Отраженная же волна напряжения меняет знак, т. е. сдвигается по фазе на угол π .

Чтобы выяснить распределение тока и напряжения вдоль провода, перепишем ур-ния (2.53) и (2.54) в тригонометрической форме:

$$\dot{I}_x = I_{m0} e^{j\omega t} \cos(mx), \quad (2.55)$$

$$\dot{E}_x = jI_{m0}\rho e^{j\omega t} \sin(mx). \quad (2.56)$$

Заменив в ур-нии (2.56) j на $e^{j\frac{\pi}{2}}$, получим:

$$\dot{I}_x = I_{m0} e^{j\omega t} \cos(mx), \quad (2.57)$$

$$\dot{E}_x = I_{m0}\rho e^{j\omega t + j\frac{\pi}{2}} \sin(mx). \quad (2.58)$$

Исследуем сначала, как распределяются \dot{I} и \dot{E} вдоль линии в один и тот же момент времени. Для этого надо положить t постоянным и рассматривать постоянный для данного значения t множитель $I_{m0}e^{j\omega t}$ как амплитуду. Удобнее всего положить ωt или $(\omega t + \frac{\pi}{2})$ равным нулю. Тогда

$$\dot{I}_x = I_{m0} \cos(mx), \quad (2.59)$$

$$\dot{E}_x = I_{m0}\rho \sin(mx). \quad (2.60)$$

Отсюда видно, что в каждый данный момент ток и напряжение изменяются вдоль линии синусоидально.

При тех значениях, при которых \dot{I}_x достигает максимума, \dot{E}_x равно нулю, и наоборот.

Точки, в которых \dot{I}_x и \dot{E}_x достигают максимальных значений, называются, как уже говорилось, „пучностями тока и напряжения“. Точки, в которых \dot{I}_x и \dot{E}_x равны нулю, называются „узлами тока и напряжения“.

В пучности тока $\cos(mx) = 1$, а в пучности напряжения $\sin(mx) = 1$.

Первому условию удовлетворяют точки

$$mx = 0, \quad 2\pi, \quad \frac{3}{2}\pi \text{ и т. д.};$$

а так как

$$mx = \frac{\omega}{c} x = \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

то эти точки будут находиться на расстояниях

$$0, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{2}{2}\lambda, \quad \frac{3}{2}\lambda \dots \frac{n}{2}\lambda$$

от короткого замыкания. В этих точках будет пучность тока и узел напряжения.

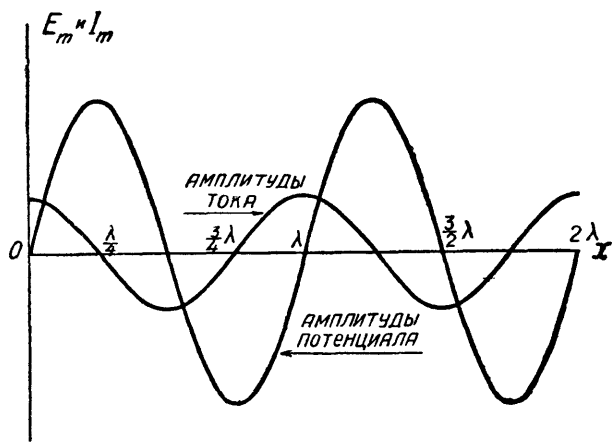
Наоборот, в точках, отстоящих от нагрузки на расстояние

$$\frac{1}{4}\lambda, \quad \frac{3}{4}\lambda, \quad \frac{5}{4}\lambda \text{ и т. д.}$$

будет находиться пучность напряжения и узел тока.

На фиг. 2.7 показано распределение амплитуд тока и потенциала вдоль линии, короткозамкнутой на конце при различной ее длине.

Это явление в целом носит название „стоячих волн в проводе“.



Фиг. 2.7. Отрицательные значения обозначают поворот фазы на 180°.

§ 11. Случай, когда линия разомкнута на конце.

Если линия разомкнута на конце, то $I_{m0} = 0$.

Основные уравнения (2.44) и 2.45)

$$\dot{i}_x = I_{m0} \left[\frac{\pi + 0}{2} \right] + \frac{E_{m0}}{\rho} \left[\frac{\pi - 0}{2} \right]:$$

$$\dot{E}_x = E_{m0} \left[\frac{\pi + 0}{2} \right] + I_{m0} \rho \left[\frac{\pi - 0}{2} \right],$$

получают вид:

$$\dot{i}_x = \frac{E_{m0}}{\rho} \left[\frac{\pi - 0}{2} \right], \quad (2.61)$$

$$\dot{E}_x = E_{m0} \left[\frac{\pi + 0}{2} \right]. \quad (2.62)$$

Сравнивая их с уравнениями для короткого замыкания (2.53) и (2.54):

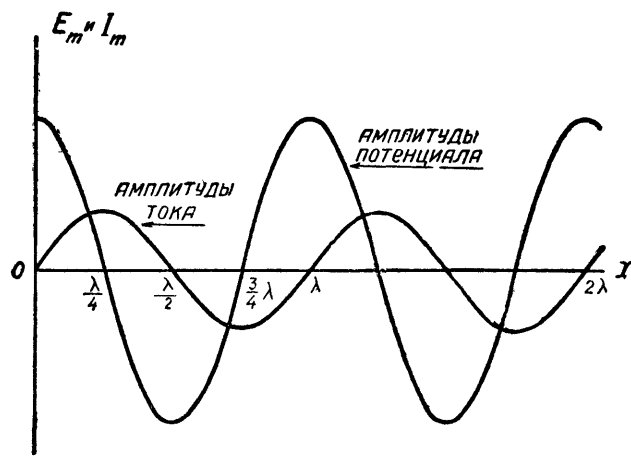
$$\dot{i}_x = I_{m0} \left[\frac{\pi + 0}{2} \right],$$

$$\dot{E}_x = I_{m0} \left[\frac{\pi - 0}{2} \right],$$

мы видим, что обе системы уравнений совершенно идентичны. Уравнения (2.61)

и (2.62) могут быть получены из уравнений (2.53) и (2.54), если взамен \dot{i} написать \dot{E} , взамен \dot{E} написать \dot{i} и взамен ρ написать $\frac{1}{\rho}$.

Поэтому нет надобности вновь подробно анализировать уравнения (2.61) и (2.62). Очевидно, что мы имеем здесь чистую стоячую волну с пучностью напряжения на разомкнутом конце и на расстояниях, кратных полуволне от этого конца. Первая от разомкнутого конца пучность тока находится на расстоянии четверти волны, а дальнейшие — на расстоянии полуволны друг от друга.



Фиг. 2.8. Отрицательные значения обозначают поворот фазы на 180° .

На расстоянии четверти волны от пучностей располагаются узлы тока и напряжения. На фиг. 2.8 показано распределение амплитуд тока и напряжения при различной длине линии.

§ 12. Случай, когда линия замкнута на активное сопротивление, не равное волновому.

Если линия нагружена на сопротивление, не равное волновому, то в ней существуют как стоячие, так и бегущая волны. Бегущая волна доставляет к сопротивлению ту мощность, которая в нем поглощается. Она, как говорят, „транспортирует“ мощность. Стоячие волны появляются потому, что мощность которую способна пропустить линия при данном напряжении, больше той, которая может при том же напряжении быть поглощена в сопротивлении. Поэтому часть энергии должна отразиться обратно.

Чтобы проанализировать явление математически, воспользуемся опять теми же основными уравнениями (2.44) и (2.45)

$$\dot{i}_x = I_{m_0} \left[\frac{\Pi + \mathbf{0}}{2} \right] + \frac{E_{m_0}}{\rho} \left[\frac{\Pi - \mathbf{0}}{2} \right],$$

$$\dot{E}_x = E_{m_0} \left[\frac{\Pi + \mathbf{0}}{2} \right] + I_{m_0} \rho \left[\frac{\Pi - \mathbf{0}}{2} \right].$$

Если на конце включено сопротивление r , то отношение напряжения E_{m_0} к току I_{m_0} будет

$$\frac{E_{m_0}}{I_{m_0}} = r. \quad (2.63)$$

Рассмотрим сначала случай, когда

$$r < \rho.$$

Тогда величина $\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)$, а также величина $\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)$ являются положительными величинами.

Подставив в уравнения (2.44) и (2.45) значения I_{m_0} и E_{m_0} , выраженные через посредство r , легко приведем уравнения (2.44) и (2.45) к виду:

$$\dot{i}_x = I_{m_0} \left[\left(1 - \frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{\Pi + \mathbf{0}}{2}\right) + \Pi \frac{r}{\rho} \right], \quad (2.64)$$

$$\dot{E}_x = E_{m_0} \left[\left(\frac{\rho}{r} - 1\right) \left(\frac{\Pi - \mathbf{0}}{2}\right) + \Pi \right]. \quad (2.65)$$

В этой формуле легко видеть, что в линии имеются две системы волн. Стоячая волна $(\Pi + \mathbf{0})$ тока с амплитудой $I_{m_0} \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)$ и стоячая волна $(\Pi - \mathbf{0})$ напряжения с амплитудой $E_{m_0} \left(\frac{\rho}{r} - 1\right)$. При этом отраженная волна напряжения имеет знак минус, т. е. отражение происходит с потерей фазы 180° . Следовательно, у сопротивления r слагающая стоячей волны напряжения равна нулю. Иными словами, здесь располагается пучность тока и узел напряжения. Все, что было сказано относительно стоячих волн, относится к этой системе волн.

Кроме стоячих волн имеются бегущие волны, выражаемые вторыми членами скобочного выражения.

Бегущая волна тока имеет амплитуду $I_{m_0} \frac{r}{\rho}$, а бегущая волна напряжения — амплитуду E_{m_0} , т. е. все напряжение у сопротивления r образовано только бегущей волной.

Теперь рассмотрим случай $r > \rho$; тогда $\left(\frac{r}{\rho} - 1\right)$ и $\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)$ будут положительными величинами.

Уравнения (2.44) и (2.45) примут вид

$$\dot{i}_x = I_{m_0} \left[\left(\frac{r}{\rho} - 1\right) \left(\frac{\Pi - \mathbf{0}}{2}\right) + \Pi \right]. \quad (2.66)$$

$$\dot{E}_x = E_{m_0} \left[\left(1 - \frac{\rho}{r}\right) \left(\frac{\Pi + \mathbf{0}}{2}\right) + \Pi \frac{\rho}{r} \right]. \quad (2.67)$$

Теперь при $x=0$ ток стоячей волны у сопротивления r равен нулю, так как $\Pi - \mathbf{0}$ равно нулю. Весь ток, текущий в сопротивлении r , образуется бегущей волной тока, представленной в уравнении (2.66) слагаемым $I_{m_0} \frac{r}{\rho}$. Амплитуда тока в сопротивлении равна I_{m_0} . Амплитуда бегущей волны напряжения равна $E_{m_0} \frac{\rho}{r}$; она меньше, чем напряжение E_{m_0} у зажимов сопротивления r .

§ 13. Замечание о других случаях нагрузки линии.

Другие случаи нагрузки линий, когда на конце ее величины чисто реактивные или комплексные сопротивления, могут быть рассмотрены тем же способом, путем подстановки в исходные ур-ния (2.44) и (2.45) значений:

$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{Z_0},$$

$$E_{m0} = I_{m0} Z_0.$$

В результате получим в случае реактивной нагрузки, что ток и напряжение распределяются вдоль линии по тому же закону, как и в случае короткого замыкания на конце или в случае разрыва на конце, но максимумы и минимумы тока и напряжения переместятся на расстояние $1/4$ волны вдоль проводов. При комплексной нагрузке в линии будут существовать и бегущая и стоячие волны, и разница по сравнению с чисто активной нагрузкой сведется опять-таки только к тому, что все узлы и пучности переместятся на одинаковое расстояние к концу линии или к началу линии.

§ 14. Комплексное сопротивление линии без потерь.

Посмотрим теперь, какое сопротивление представляет линия, короткозамкнутая на конце, если ее обрезать на расстоянии l от конца и измерить сопротивление между проводами в точке обреза.

Для этого случая мы имели:

$$\dot{I}_x = I_{m0} e^{j\omega t} \cos(mx), \quad (2.68)$$

$$\dot{E}_x = j I_{m0} \rho e^{j\omega t} \sin(mx). \quad (2.69)$$

Сопротивление в любой точке на расстоянии x от конца будет

$$Z = \frac{\dot{E}_x}{\dot{I}_x}.$$

Из ур-ний (2.68) и (2.69) находим

$$Z = j\rho \operatorname{tg}(mx)$$

или, заменяя x на l ,

$$Z = j\rho \operatorname{tg}(ml). \quad (2.70)$$

Теперь сделаем еще следующую замену.

Как известно,

$$m = \omega \sqrt{L_l C_l} = \frac{\omega}{c}.$$

С другой стороны, выше было дано определение длины волны и показано, что эта длина в воздушной линии связана с частотой соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Поэтому

$$m = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Подставив это в выражение для сопротивления (2.70), получим

$$Z = j\rho \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right). \quad (2.71)$$

Это выражение представляет собой чрезвычайно важный и интересный результат.

Оно показывает, что линия без потерь представляет собой чисто мнимое, т. е. реактивное сопротивление.

Это сопротивление положительно, т. е. представляет собою самоиндукцию в том случае, когда $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$ положителен. Это имеет место, например, когда угол $\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$ лежит в первой четверти, т. е. больше нуля, но меньше $\frac{\pi}{2}$, т. е. при условии

$$\frac{2\pi}{\lambda}l < \frac{\pi}{2} \text{ или } l < \frac{\lambda}{4}.$$

Следовательно, если длина линии без потерь, короткозамкнутой на конце, меньше четверти длины волны, то эта линия является самоиндукцией.

Численная величина коэффициента самоиндукции определяется из ур-ния (2.71) следующим образом.

Пишем

$$Z = j\omega L = j\rho \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right). \quad (2.72)$$

Следовательно,

$$L = \frac{1}{\omega} \rho \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) \equiv \frac{1}{\omega} \rho \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c}l\right). \quad (2.73)$$

Когда длина участка линии равна четверти волны, коэффициент самоиндукции становится равным бесконечности.

Если удлинить линию дальше, $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right)$ станет отрицательным и сопротивление сделается емкостным.

Если таким же образом рассмотреть линию, разомкнутую на конце, найдем, что она представляет собой эквивалент чистой емкости при длине меньше четверти волны. Она становится эквивалентом чистой самоиндукции, как только длина ее больше четверти волны, но меньше половины волны. Далее она опять ведет себя как емкость и т. д.

Общее выражение для емкости аналогично такому же для самоиндукции

$$C = \frac{1}{\omega\rho} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l\right) \equiv \frac{1}{\omega\rho} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c}l\right). \quad (2.74)$$

Если ур-ние (2.74) дает отрицательное значение емкости, то значит линия ведет себя как самоиндукция.

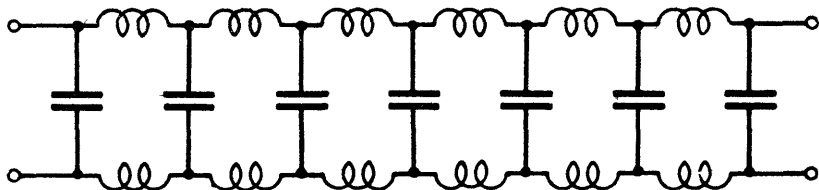
§ 15. Сосредоточенные емкости и самоиндукции, как участки двухпроводной линии.

Важные результаты, которые были получены в предыдущем параграфе, позволяют подойти с более общей точки зрения к конденсаторам и катушкам самоиндукции.

В частности мы можем сделать теперь вполне обоснованно следующие выводы.

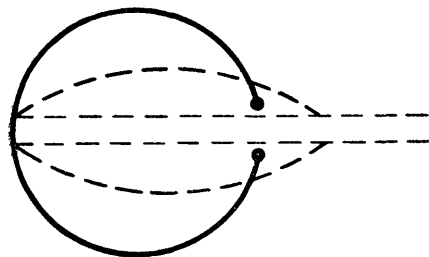
1) Всякий конденсатор, в том числе, например, конденсатор из двух пластин, представляет собой короткую двухпроводную линию. Его „волновое сопротивление“ ρ очень мало (так как отношение $\frac{L_1}{C_1}$ мало). Он представляет собой емкость, пока его длина l меньше четверти длины волны. Если l больше четверти волны, — конденсатор превра-

щается в самоиндукцию. Это может случиться, например, с обычным конденсатором при ультракоротких волнах.



Фиг. 2.9.

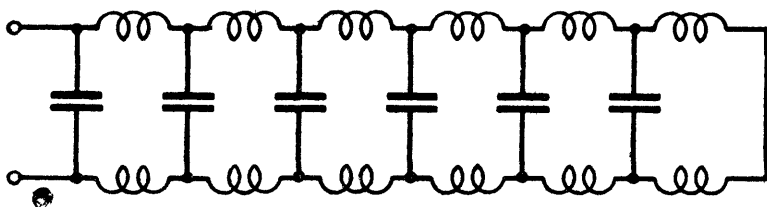
2) Всякий конденсатор обладает не только емкостью, но и самоиндукцией, так что его эквивалентной схемой можно считать цепочку, состоящую из бесчисленного количества элементов, показанных на фиг. 2.9.



Фиг. 2.10.

3) Виток проволоки, который мы рассматриваем как самоиндукцию, представляет собой ту же двухпроводную линию, разведенную в круг (фиг. 2.10). Этот круг является самоиндукцией лишь постольку, поскольку половина его длины меньше четверти длины волны. Далее он ведет себя как емкостное сопротивление, вплоть до длины, равной длине волны, когда он опять делается самоиндукцией.

Катушка самоиндукции представляет собой последовательное соединение таких кругов (или многоугольников), связанных между собой взаимной индукцией. Катушка ведет себя как самоиндукция только до некоторого значения ω , далее она ведет себя как емкость и т. д.



Фиг. 2.11.

Всякий виток и всякая катушка обладают емкостью. Эта емкость распределена вдоль катушки (или витка). Эквивалентной схемой катушки является та же цепочка фиг. 2.9, но короткозамкнутая на одном конце (фиг. 2.11).

§ 16. Линия с распределенными потерями.

Те же основные уравнения могут служить для исследования линии, у которой имеются потери. Потери могут быть двух родов: а) омическое сопротивление проводов, б) диэлектрические потери или потери на утечки, включенные между проводниками.

Чтобы учесть первый вид потерь, придадим самоиндукции проводов комплексный смысл, т. е. положим, что самоиндукция на единицу длины равна

$$L_i' = L_i - j \frac{R}{\omega}, \quad (2.75)$$

где R — сопротивление на единицу длины.

Так же, чтобы учесть потери в диэлектрике и на утечки, придадим емкости комплексный смысл, т. е. будем считать, что емкость на единицу длины равна не действительной емкости C_l , а комплексной емкости

$$C'_l = C_l - j \frac{g}{\omega}, \quad (2.76)$$

где g — эквивалентная проводимость на единицу длины линии.

Тогда взамен коэффициента

$$m = \omega \sqrt{C_l L_l}$$

будем писать комплексный коэффициент, который обозначим пока m'

$$m' = \omega \sqrt{C'_l L'_l}. \quad (2.77)$$

На этом основании можно было бы, пользуясь ранее выведенными ур-ниями (2.38) и (2.39) § 8, непосредственно записать следующее выражение для тока и напряжения в точке:

$$\dot{I}_x = \dot{I}_0 \cos(m'x) + j \frac{\dot{E}_0}{\rho'} \sin(m'x), \quad (2.78)$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 \cos(m'x) + j \dot{I}_0 \rho' \sin(m'x), \quad (2.79)$$

где ρ' — комплексное волновое сопротивление, равное $\sqrt{\frac{L'_l}{C'_l}}$.

Чтобы связать эти уравнения с C_l , L_l , R и g , надо подсчитать значение m' .

Напишем прежде всего выражение для m' на основании ур-ний (2.75) (2.76) и (2.77)

$$m' = \omega \sqrt{\left(L_l - \frac{jR}{\omega}\right) \left(C_l - \frac{jg}{\omega}\right)}. \quad (2.80)$$

Вынесем из-под знака корня множитель $\frac{1}{j\omega}$. Для этого умножим на $j\omega$ каждый из сомножителей, стоящих под корнем. Получим

$$m' = -j \sqrt{(j\omega L_l + R)(j\omega C_l + g)}. \quad (2.81)$$

Обозначим сокращенно значение корня в виде комплекса $(j\alpha + \beta)$.

Тогда

$$m' = -j(j\alpha + \beta) = (\alpha - j\beta). \quad (2.82)$$

Имея в виду, что между круговыми и гиперболическими функциями существует соотношение:

$$\cos(jq) = \text{ch}(q),$$

$$j \sin(jq) = -\text{sh}(q),$$

получим из ур-ний (2.78), (2.79) и (2.82)

$$\dot{I}_x = \dot{I}_0 \text{ch}(j\alpha x + \beta x) + \frac{\dot{E}_0}{\rho'} \text{sh}(j\alpha x + \beta x), \quad (2.83)$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 \text{ch}(j\alpha x + \beta x) + \dot{I}_0 \rho' \text{sh}(j\alpha x + \beta x). \quad (2.84)$$

Эти уравнения обычно и применяют для описания явлений в линии с потерями. Разумеется, их можно с полным правом писать и в форме ур-ний (2.78) и (2.79), подставив вместо m' комплекс $(\alpha - j\beta)$. Значения α и β можно получить из ур-ния (2.81), так как по обозначению

$$(j\alpha + \beta)^2 = (j\omega L_l + R)(j\omega C_l + g).$$

Раскрыв скобки и приравняв отдельно действительные и мнимые части уравнения, получим два квадратных уравнения. Решив их, найдем:

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2}(gR - \omega^2 C_l L_l) + \frac{1}{2} [(g^2 + \omega^2 C_l^2)(R^2 + \omega^2 L_l^2)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.85)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(gR - \omega^2 C_l L_l) + \frac{1}{2} [(g^2 + \omega^2 C_l^2)(R^2 + \omega^2 L_l^2)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.86)$$

Эти сложные выражения можно упростить, так как в линиях обычно отношения $\frac{R}{\omega L}$ и $\frac{g}{\omega}$ много меньше единицы, а

$$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C_l}} - \frac{g}{2} \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \quad (2.87)$$

является обычно очень малой дробью.

Тогда можно написать следующие простые выражения

$$\alpha = \sqrt{L_l C_l} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Эта величина называется „фазовой постоянной“ линии и ранее мы именно ее и обозначали буквой m

$$\beta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}. \quad (2.88)$$

Эта величина называется „постоянной затухания“ линии. Волновое сопротивление принимают равным

$$\rho = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}.$$

Комплекс $(j\alpha + \beta) \equiv \gamma$ называется „постоянной распространения“ линии.

§ 17. Исследование явлений в линии с распределенными потерями, замкнутой на конце на сопротивление, равное волновому.

Основные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_0 \operatorname{ch}(j\alpha x + \beta x) + \rho \dot{I}_0 \operatorname{sh}(j\alpha x + \beta x) \\ \dot{I}_x &= \dot{I}_0 \operatorname{ch}(j\alpha x + \beta x) + \frac{\dot{E}_0}{\rho} \operatorname{sh}(j\alpha x + \beta x) \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

определяют значения напряжения и тока для всех случаев нагрузки линии на ее конце.

Для каждого конкретного случая надо подставить в эти уравнения значения \dot{I}_0 и \dot{E}_0 . Например, если линия замкнута на конце накоротко, то в уравнения (2.89) надо подставить

$$\dot{E}_0 = 0.$$

Если линия разомкнута, то

$$\dot{I}_0 = 0.$$

Если линия замкнута на сопротивление Z , то

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_0}{Z}.$$

Рассмотрим случай, когда линия замкнута на конце на сопротивление, равное волновому сопротивлению, т. е.

$$\dot{i}_0 = \frac{\dot{E}_0}{\rho}.$$

Подставив это в ур-ние (2.89), получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_0 [\operatorname{ch}(j\alpha x + \beta x) + \operatorname{sh}(j\alpha x + \beta x)] \\ \dot{i}_x &= \frac{\dot{E}_0}{\rho} [\operatorname{ch}(j\alpha x + \beta x) + \operatorname{sh}(j\alpha x + \beta x)] \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Так как

$$\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a) = e^a,$$

то ур-ние (2.90) дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_0 e^{j\alpha x + \beta x}, \\ \dot{i}_x &= \frac{\dot{E}_0}{\rho} e^{j\alpha x + \beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

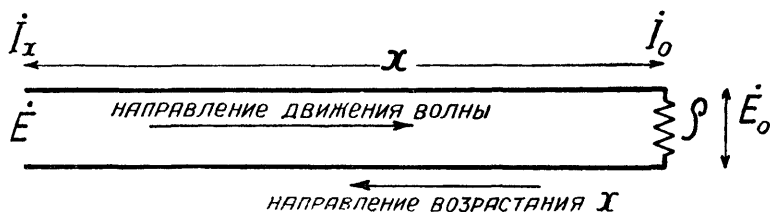
Подставив

$$\dot{E}_0 = E_{m0} e^{j\omega t},$$

напишем эти уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= [E_{m0} e^{\beta x}] e^{j(\alpha x + \omega t)} \\ \dot{i}_x &= \left[\frac{E_{m0}}{\rho} e^{\beta x} \right] e^{j(\alpha x + \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

Правые части ур-ния (2.92) представляют собой выражение волны на протяжении и волны тока. Эти волны движутся в сторону убывания пара



Фиг. 2.12.

метра x , который отсчитывается от конца линии. Так например, на фиг. 2.12 волны движутся слева направо, а расстояние отсчитывается от точек включения сопротивления ρ .

Выражения, поставленные в ур-нии (2.92) в прямые скобки, представляют собой амплитуды напряжения и тока. С увеличением x амплитуды экспоненциально возрастают. Другими словами, если двигаться вдоль линии от конца к месту включения источника — амплитуды возрастают, а если двигаться от источника к концу линии — амплитуды экспоненциально уменьшаются.

Это и является основным и наиболее существенным отличием линии с потерями от линии без потерь.

Ток и напряжение находятся в одной и той же фазе во всех точках линии.

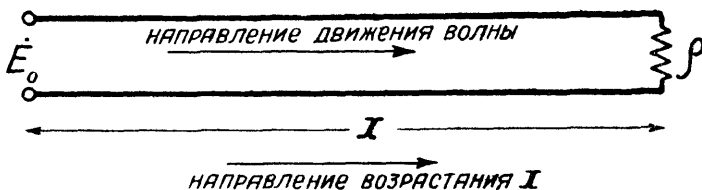
Из всего сказанного ясно, что в рассматриваемом случае в линии существует бегущая волна, движущаяся в сторону нагрузки, и постепенно затухающая вследствие потерь в сопротивлениях и утечках.

Ур-ние (2.92) написано в такой форме, что значение \dot{E}_x определяется через \dot{E}_{m0} .

Если желательно поступить обратно, т. е. определять напряжение в некоторой точке линии, находящейся на расстоянии x от точки включения источника, то надо только переменить знак у параметра x .

Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= [E_{m0} e^{-\beta x}] e^{-j(ax - \omega t)} \\ \dot{I}_x &= \left[\frac{E_{m0}}{\rho} e^{-\beta x} \right] e^{-j(ax - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$



Фиг. 2.13.

В ур-нии (2.93) \dot{E}_{m0} обозначает теперь амплитуду напряжения у источника, а x выражает расстояние от источника до той, либо другой точки на линии (фиг. 2.13).

§ 18. Коэффициент полезного действия линии в случае чисто бегущей волны.

Если линия используется для передачи энергии, то часть этой энергии расходуется в ее сопротивлениях и утечках.

Если в линии имеется только бегущая волна, движущаяся от источника к нагрузке, то при прочих равных условиях потери энергии меньше, чем если в линии существуют еще отраженные волны.

Всякая отраженная волна, движущаяся от нагрузки к источнику, разумеется, не переносит энергии к нагрузке, а, вместе с тем, двигаясь вдоль линии, расходует энергию. Поэтому при передаче энергии стремятся получить чисто бегущую волну, согласовав сопротивление нагрузки с волновым сопротивлением линии. Как это осуществляется технически, мы скажем впоследствии. Здесь же выясним, от чего зависит кпд линии.

Мощность, расходуемая источником,

$$P_{\text{ист}} = \frac{I_{m0} E_{m0}}{2}, \quad (2.94)$$

где I_{m0} и E_{m0} — амплитуды у точек включения источника (т. е. в начале линии).

Амплитуды в конце линии даются ур-нием (2.93) § 17. На основании этого уравнения мощность, расходуемая в нагрузке, будет

$$P_{\text{нагр}} = \frac{E_{m0}^2}{2\rho} e^{-2\beta x}. \quad (2.95)$$

Разделив (2.94) на (2.95) и положив $x = l$, где l — длина линии, получим кпд

$$\eta = \frac{P_{\text{ист}}}{P_{\text{нагр}}} = e^{-2\beta l}. \quad (2.96)$$

Мощность, теряемая в линии,

$$P_{\text{потерь}} = P_{\text{ист}} (1 - \eta). \quad (2.97)$$

§ 19. Случай, когда на конце линии существует отражение.

Во всех случаях, когда сопротивление нагрузки не равно волновому сопротивлению линии, в точках включения нагрузки получится отражение. Отразившаяся волна движется обратно и, дойдя до источника, вновь получит отражение, если его сопротивление не равно волновому.

Исследования этих явлений не отличаются по существу от исследования явлений в линии без потерь. Все выражения для тока и напряжения могут быть непосредственно получены из формул, выведенных ранее для линии без потерь.

Таким образом с чисто качественной стороны все сводится к замене прямых и отраженных волн, сохраняющих свою амплитуду (в случае линии без потерь), прямыми и отраженными волнами, амплитуда которых уменьшается по мере движения волны.

С количественной стороны подсчет несколько затрудняется громоздкостью выражений и необходимостью различного рода преобразований для того, чтобы физический смысл полученной формулы мог бы быть легко понят.

Мы здесь рассмотрим для примера случай, когда линия на конце разомкнута, причем не будем выделять всех волн порознь, а прямо выведем выражения для тока и напряжения в любой точке на расстоянии x от нагрузки.

В основных уравнениях (2.89):

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 \operatorname{ch}(jax + \beta x) + \rho \dot{I}_0 \operatorname{sh}(jax + \beta x),$$

$$\dot{I}_x = \dot{I}_0 \operatorname{ch}(jax + \beta x) + \frac{\dot{E}_0}{\rho} \operatorname{sh}(jax + \beta x)$$

положим $\dot{I}_0 = 0$, что соответствует случаю, когда линия разомкнута на конце. Тогда:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 \operatorname{ch}(jax + \beta x), \quad (2.98)$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{E}_0}{\rho} \operatorname{sh}(jax + \beta x). \quad (2.99)$$

Представим эти величины в форме вектора, фаза и амплитуда которого является функцией параметра x .

Для этого сначала воспользуемся соотношениями:

$$а) \begin{cases} \operatorname{ch}(p + jq) = \operatorname{ch}(p) \cos(q) + j \operatorname{sh}(p) \sin(q), \\ \operatorname{sh}(p + jq) = \operatorname{sh}(p) \cos(q) + j \operatorname{ch}(p) \sin(q), \end{cases}$$

которые дают возможность представить правые части уравнений (2.98) и (2.99) в виде комплексных чисел, а затем эти комплексные числа, соответствующие векторам, представим в виде мнимой степени, используя при этом преобразование, даваемое соотношениями

$$б) \begin{cases} \operatorname{sh}^2(a) + \operatorname{ch}^2(a) = \operatorname{ch}(2a) \\ \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2} \end{cases}$$

Получим

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2\beta x) + \cos(2\alpha x)}{2}} e^{j\psi}, \quad (2.100)$$

$$\dot{I}_x = \dot{E}_0 \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2\beta x) - \cos(2\alpha x)}{2}} e^{j\varphi}. \quad (2.101)$$

Эти уравнения показывают, что для того, чтобы найти, например, напряжение в точке x , надо напряжение в конце линии увеличить по амплитуде на величину радикала и сдвинуть по фазе на угол ψ . Углы ψ и φ определяются выражениями:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{th}(\beta x) \operatorname{tg}(\alpha x), \quad (2.102)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cth}(\beta x) \operatorname{tg}(\alpha x), \quad (2.103)$$

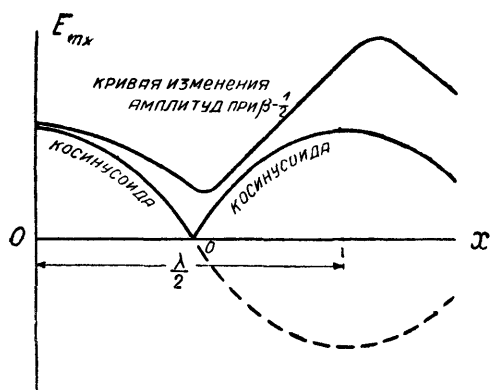
$$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\sin(2\alpha x)}{\operatorname{sh}(2\beta x)}. \quad (2.104)$$

Из ур-ний (2.100) — (2.104) можно сделать следующие выводы:

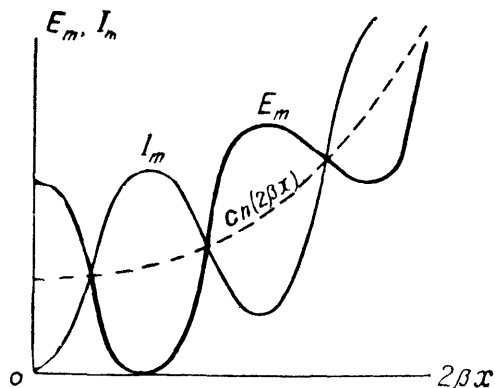
1) Ток и напряжение растут от конца провода к началу, вследствие непрерывного возрастания $\operatorname{ch}(2\beta x)$. Одновременно с этим они испытывают периодические изменения амплитуды вдоль длины провода вследствие влияния члена $\cos(2\alpha x)$.

Если β мало и $\operatorname{ch}(2\beta x)$ растет медленно, то можно принять, что максимальное значение амплитуды напряжения имеет место при $\cos(2\alpha x) = 1$ или $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots$. При этих же значениях x амплитуда тока проходит через минимум, не достигая однако нуля, так как $\operatorname{ch}(2\beta x) > 1$. Наоборот, при $\cos(2\alpha x) = -1$ амплитуда напряжения проходит через минимум, а амплитуда тока через максимум; при этом $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda$ и т. д.

В действительности возрастание $\operatorname{ch}(2\beta x)$ сдвигает несколько максимум в сторону начала фидера, а минимум в сторону конца фидера, заметно



Фиг. 2.14.



Фиг. 2.15.

искажая синусоидальный характер распределения только в том случае, если затухание велико, как это, например, показано на фиг. 2.14, где верхняя кривая дает распределение потенциала при большом затухании ($\beta = \frac{1}{2}$), а нижняя кривая — нормальную косинусоиду.

Общий характер изменения амплитуд тока и напряжения вдоль фидера показан на фиг. 2.15.

2) Угол сдвига фазы напряжения изменяется вдоль фидера. Чтобы выяснить характер этого изменения, положим $\beta = 0$, что соответствует фидеру без потерь, тогда угол $\psi = 0$, или π , т. е. напряжение в различных точках фидера или в одинаковой фазе или в противоположной фазе с напряжением на концах. Это — случай чисто стоячей волны. С другой стороны, если βx достаточно велико, так что можно написать $\operatorname{th}(\beta x) \approx 1$, то $\psi = \alpha x$. Последний случай соответствует бегущей волне, и угол сдвига фазы изменяется пропорционально изменению координаты x . При $0 < \operatorname{th}(\beta x) < 1$ получится некоторое промежуточное изменение фазы вдоль фидера, которое у конца (при $x = 0$) близко к случаю стоячей, а на достаточно большом расстоянии от конца $\operatorname{th}(\beta x) \approx 1$ близко к случаю бегущей волны.

Сдвиг фазы тока относительно фазы напряжения при малых значениях βx близок к 90° , так как $\text{th}(\varphi - \psi) \approx \frac{\sin 2\alpha x}{\text{sh}(0)}$, и, следовательно, $\varphi - \psi \approx \pm \frac{\pi}{2}$.

При $x = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{4}\lambda, \lambda \dots$ и т. д. $\sin(\alpha x)$ получает поочередно значение $-1, +1, -1, \dots$ и т. д., вследствие чего через каждые четверть волны опережение фазы сменяется запаздыванием и, наоборот, как при чисто стоячей волне. Напротив, при большом значении βx величина $\text{sh}(\beta x)$ становится значительной и $(\varphi - \psi)$ приближается к нулю. Сдвиг фазы между током и напряжением исчезает, и картина приближается к картине чисто бегущей волны.

Кажущееся сопротивление фидера от точки x до конца найдется из ур-ний (2.98) и (2.99).

$$Z_x = \frac{E_x}{I_x} = \rho \frac{\text{ch}(j\alpha x + \beta x)}{\text{sh}(j\alpha x + \beta x)} = \rho \frac{\text{ch}(\beta x) \cos(\alpha x) + j \text{sh}(\beta x) \sin(\alpha x)}{\text{sh}(\beta x) \cos(\alpha x) + j \text{ch}(\beta x) \sin(\alpha x)}. \quad (2.105)$$

Освободившись от мнимости в знаменателе, получим

$$Z_x = \rho \frac{\text{ch}(\beta x) \text{sh}(\beta x) - j \cos(\alpha x) \sin(\alpha x)}{\text{sh}^2(\beta x) \cos^2(\alpha x) + \text{ch}^2(\beta x) \sin^2(\alpha x)}. \quad (2.106)$$

Мнимая часть проходит через нуль каждый раз, когда

$$\alpha x = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2} \dots \text{ и т. д.}$$

При этих значениях сопротивление становится чисто активным. При больших значениях βx можно положить

$$\text{ch}(\beta x) = \text{sh}(\beta x).$$

Тогда

$$Z_x = \rho \left[1 - j \frac{\cos(\alpha x) \sin(\alpha x)}{\text{ch}^2(\alpha x)} \right]. \quad (2.107)$$

Ввиду того, что при этих условиях $\text{ch}^2(\beta x) \gg 1$, можно пренебречь реактивной частью сопротивления и тогда $Z_x = \rho$, т. е. в начале фидера при достаточной его длине сопротивление практически равно волновому.

3) Мощность, теряемая на участке фидера между его концом и точкой x ,

$$P_x = \frac{E_{mx} I_{mx}}{2} \cos(\varphi - \psi), \quad (2.108)$$

где E_{mx} и I_{mx} — амплитуды; так как

$$\text{tg}(\varphi - \psi) = \frac{\sin(2\alpha x)}{\text{sh}(2\beta x)},$$

то

$$\cos^2(\varphi - \psi) = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\varphi - \psi)} = \frac{\text{sh}^2(2\beta x)}{\sin^2(2\alpha x) + \text{sh}^2(2\beta x)}. \quad (2.109)$$

Из ур-ний (2.100) — (2.104) и (2.109) находим

$$P_x = \frac{E_{mx} I_{mx}}{2\rho} \cos(\varphi - \psi) = \frac{E_{mx}^2}{2\rho} \sqrt{\frac{[\text{ch}^2(2\beta x) - \cos^2(2\alpha x)] \text{sh}^2(2\beta x)}{\text{sh}^2(2\beta x) + \sin^2(2\alpha x)}}. \quad (2.110)$$

Имея в виду, что $\text{ch}^2(2\beta x) - \text{sh}^2(2\beta x) = 1$, легко видеть, что выражение, стоящее в прямых скобках под знаком корня, равно единице; поэтому

$$P_x = \frac{E_{mx}^2}{4\rho} \text{sh}(2\beta x). \quad (2.111)$$

§ 20. Замечание о применимости полученных результатов только к установившемуся режиму.

Предпосылка, которую мы раньше приняли при решении дифференциальных уравнений, заключалась в том, что ток и напряжение во всех точках линии подчиняются синусоидальному закону. Эта предпосылка выражает собой предположение, что режим установился. Решение получилось в форме уравнений, соответствующих двум системам волн, движущимся навстречу одна другой, и дающих в сумме те либо другие токи и напряжения в каждой точке линии. Эта картина соответствует действительному физическому процессу и из нее вытекает следующее очень важное следствие.

Отраженная волна не может возникнуть раньше, чем прямая волна не дойдет до конца линии. В свою очередь отраженная волна дойдет до начала линии только спустя некоторый промежуток времени, в течение которого она движется. Затем в число „прямых“ волн могут войти также волны, которые отразились от источника, дойдя до точек включения источника. Эти, так сказать, вторичные прямые волны, в свою очередь дойдя до конца линии, произведут отраженные волны.

Та картина, которая дается написанными формулами, относится таким образом к завершившемуся процессу.

В самый первый момент и до тех пор, пока придет первая отраженная волна, всякая линия (а следовательно, и всякий конденсатор или самоиндукция) представляют для источника чисто активную нагрузку, сопротивление которой определяется величиной $\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$.

Активная слагающая остается во все время, пока процесс устанавливается и пока в цепи накапливается некоторая энергия, в виде электромагнитного поля стоячей волны.

Таким образом все написанные формулы относятся к установившемуся режиму.

§ 21. Формулы для определения параметров некоторых линий.

Для всех однородных воздушных линий с малыми потерями, практически, справедливо соотношение,

$$\sqrt{C_1 L_1} = \frac{1}{c},$$

где c — скорость света.

Для двухпроводной воздушной линии, подвешенной далеко от земли,

$$C_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \frac{1}{4 \ln \frac{d}{r}} \text{ ф/см},$$

$$L_1 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20} C_1} \text{ гн/см}.$$

Здесь d — расстояние между центрами проводов; r — радиус провода; \ln — натуральный логарифм.

Отсюда

$$\rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = 120 \ln \frac{d}{r} \text{ ом}. \quad (2.112)$$

Обычно волновое сопротивление двухпроводной линии бывает от 100 до 600 ом. На фиг. 2.16 дан график зависимости волнового сопротивления от расстояния между центрами проводов и радиуса проводов, соответствующий этой формуле.

Ур-ние (2.112) написано в предположении, что провода фидера колеблются в противоположной фазе и имеют разные токи. Если это условие

не соблюдено, то волновое сопротивление может иметь иную величину. В частности, когда оба провода колеблются в фазе и образуют, таким образом, один провод из двух жил, то в присутствии проводящей земли, которая служит обратным проводом системы, волновое сопротивление будет

$$\rho = 30 \ln \frac{4h^2}{dr} \text{ ом}, \quad (2.113)$$

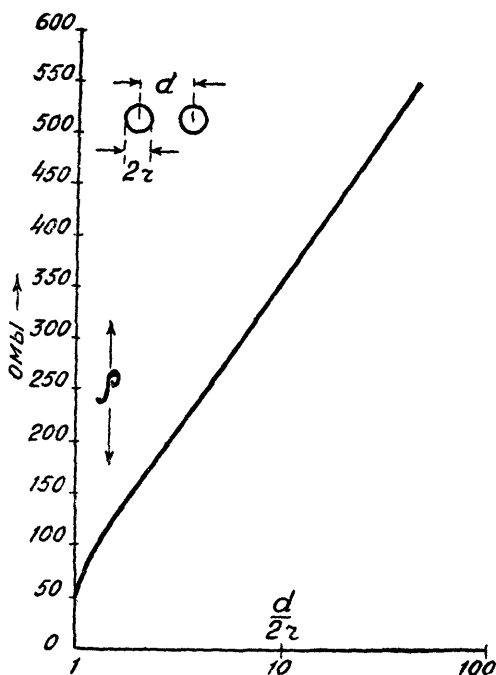
где h — высота проводов над землей, причем $h \gg d \gg r$ и $h \ll \lambda$.

Для линии, состоящей из двух коаксиальных цилиндров, показанной в разрезе на фиг. 2.17,

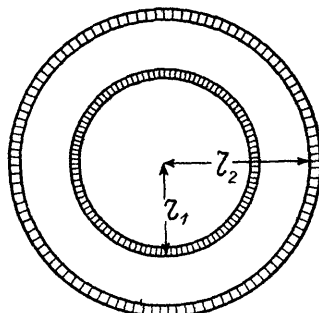
$$C_l = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ ф/см},$$

где r_2 — радиус внутренней поверхности внешнего цилиндра, а r_1 — наружный радиус внутреннего цилиндра

$$L_l = \frac{1}{9 \cdot 10^{20} C_l} \text{ н/см}.$$



Фиг. 2.16.



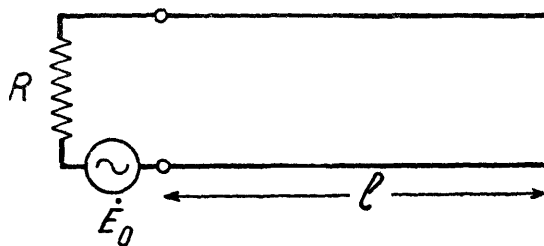
Фиг. 2.17.

§ 22. Явление резонанса в двухпроводной линии при включении сопротивления в пучность тока.

Возьмем участок линии длиной l и включим на одном его конце источник эдс E_0 с частотой ω_0 и последовательно с источником — сосредоточенное сопротивление R , как показано на фиг. 2.18. Если длина волны источника, т. е. величина

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0},$$

равна четырем l , линия представляет собой эквивалент конденсатора бесконечно большой емкости, и является вследствие этого коротким замыканием для переменного тока. Поэтому цепь источника E_0 оказывается замкнутой на сопротивление R . Ток в месте включения источника будет, следовательно,



Фиг. 2.18

$$I_0 = \frac{E_0}{R}. \quad (2.114)$$

Амплитуда тока

$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{R}. \quad (2.115)$$

На конце линии A ток будет равен нулю, но зато здесь будет максимальная амплитуда напряжения, которая, как ясно из предыдущего, определится величиной

$$\dot{E}_{mA} = i_{m0} \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}. \quad (2.116)$$

Теперь будем менять частоту, давая ей значения (ω) , большие и меньшие частоты ω_0 .

При частотах, меньших ω_0 , длина волны будет больше λ_0 , и линия представит собой некоторое емкостное сопротивление, значение которого определится выражением

$$\frac{j}{\omega C} = j \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right). \quad (2.117)$$

Поэтому амплитуда тока в месте включения источника станет

$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (2.118)$$

Это уравнение показывает, что амплитуда тока меньше, чем в случае $\omega = \omega_0$. Она будет все более уменьшаться по мере роста C , т. е. по мере уменьшения частоты ω .

Если частоту сделать, наоборот, большей чем ω_0 , волна станет меньше, чем $4l$, и линия превратится в эквивалент самоиндукции.

Индуктивное сопротивление выразится тем же ур-нием (2.117) с противоположным знаком и будет расти по мере увеличения ω , а амплитуда тока I_{m0} и амплитуда напряжения E_{mA} будут уменьшаться.

Положение, при котором $\omega = \omega_0$, т. е.

$$\frac{2\pi c}{\omega} = 4l,$$

называется положением резонанса и характеризуется тем, что для эдс \dot{E} цепь превращается в чисто активную нагрузку R .

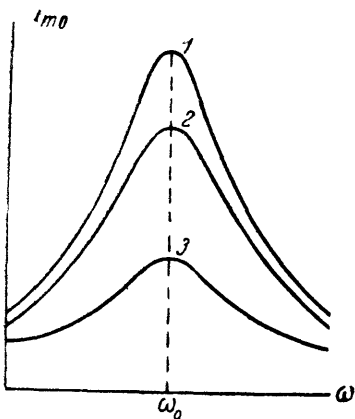
Достигнуть положения резонанса можно, либо изменяя частоту ω , либо, оставляя эту частоту постоянной, изменять длину линии. Эта операция называется „настройкой цепи“.

Признаком резонанса в данном случае является достижение током \dot{I}_0 или напряжением \dot{E}_A максимальной амплитуды.

Изменение амплитуды тока \dot{I}_0 в зависимости от изменения частоты или от изменения настройки (длины) линии может быть выражено графически в виде кривых.

На фиг. 2.19 даны три примерных кривых, дающих зависимость

$$I_{m0} = f(\omega)$$

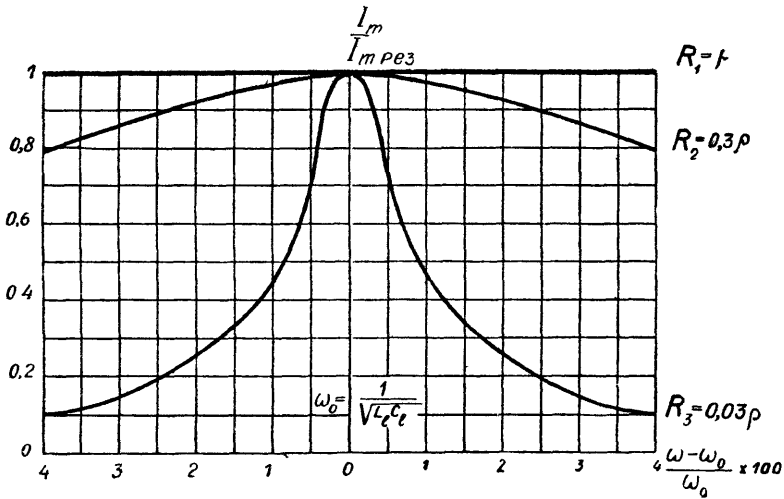


Фиг. 2.19.

для одной и той же линии, но при трех разных сопротивлениях R . Кривая 1 соответствует меньшему, а кривая 3 — большему сопротивлению. Эти кривые зависят разумеется от величины E_{m0} . В данном случае для всех трех кривых применена одна и та же величина E_{m0} . Однако для того, чтобы можно было сравнить форму этих кривых независимо от приложенной эдс, их строят обычно следующим образом.

По оси абсцисс откладывают либо частоту, либо отношение частоты к частоте резонанса ω_0 , либо отношение $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$. По оси ординат откладывают отношение амплитуды тока при данной частоте к амплитуде при резонансе, либо квадраты этих величин.

В таком виде эти кривые называются кривыми резонанса и являются важной характеристикой как участка линии, так и других цепей.



Фиг. 2.20.

На фиг. 2.20 приведены три такие кривые резонанса. Эти три кривые соответствуют длине $\frac{\lambda}{4}$ с волновым сопротивлением ρ , но различным сопротивлениям R , включенным в пучность тока,

$$R_1 = \rho; \quad R_2 = 0,3\rho; \quad R_3 = 0,03\rho.$$

По абсциссам отложено значение $\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$, а по ординатам $\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}}$.

Полезно отдать себе отчет, отчего при меньшем сопротивлении кривая имеет более узкую вершину и более крутые скаты.

Дело здесь в следующем. В момент резонанса амплитуда тока определяется формулой

$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{R}.$$

При отступлении от резонанса в знаменатель входит либо

$$\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \text{либо} \quad \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Чем быстрее нарастает величина ωL или $\frac{1}{\omega C}$ при изменении частоты, тем круче будет падать кривая. Наоборот, чем больше R , тем падение будет медленнее, так как добавок индуктивного напряжения меньше сказывается на величине полного сопротивления. Как известно, индуктивная слагающая, которую запишем так

$$Z = -j \sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right), \quad (2.119)$$

прямо пропорциональна величине волнового сопротивления.

Поэтому отношение $\frac{R}{\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}}$ и определяет быстроту спада кривой, т. е.

остроту ее вершины. Чем больше это отношение; тем медленнее происходит спад, т. е. тем более тупой вид принимает кривая резонанса. Если $\frac{R}{\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}} = \infty$, кривая будет параллельна оси абсцисс (кривая $R_1 = \rho$ на фиг. 2.20).

§ 23. Явление резонанса в двухпроводной линии при включении сопротивления в пучность напряжения.

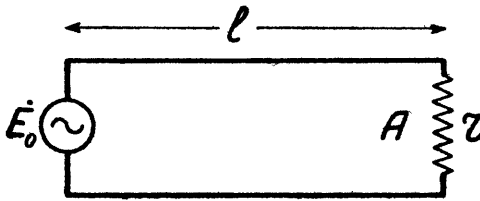
Рассмотрим теперь такую же линию, но предположим, что сопротивление r включено на ее конце, противоположном точке включения источника, как показано на фиг. 2.21. Здесь надо рассмотреть три случая: а) когда $r > \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$, б) когда $r < \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$ и, наконец, в) когда $r = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$.

Начнем с последнего случая.

Так как линия замкнута на активное сопротивление, равное волновому, то в ней установится бегущая волна независимо от ее длины и от частоты.

Амплитуда тока будет

$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}} = \frac{E_{m0}}{r}. \quad (2.120)$$



Фиг. 2.21.

Кривая резонанса получит вид, показанный на фиг. 2.20 для случая $R_1 = \rho$. Положим теперь

$$r > \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}.$$

Явление будет приближаться к случаю линии, разомкнутой на конце (с той только разницей, что кроме стоячей волны, будет еще бегущая волна, как это было выяснено в § 12). В момент резонанса цепь будет эквивалентна, если не короткому замыканию для эдс \dot{E} (как было бы в случае линии, разомкнутой на конце), то некоторому небольшому сопротивлению, которое назовем R .

Чтобы вычислить значение R , поступим так. Посмотрим прежде всего, какая мощность расходуется в сопротивлении r в момент резонанса. Амплитуда напряжения на конце линии равна

$$E_{mA} = I_{m0} \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}. \quad (2.121)$$

Следовательно, мощность в сопротивлении r равна

$$P = \frac{E_{mA}^2}{2r} = \frac{I_{m0}^2 \frac{L_l}{C_l}}{2r}. \quad (2.122)$$

Очевидно, что сопротивление R должно удовлетворять требованию эквивалентности, т. е. мощность, выделяемая в нем при амплитуде тока I_{m0} , должна равняться P .

Так что

$$\frac{I_{m0}^2 \frac{L_l}{C_l}}{2r} = \frac{I_{m0}^2 R}{2}. \quad (2.123)$$

Отсюда

$$R = \frac{L_1}{C_1 r} \quad (2.124)$$

Итак, в момент резонанса амплитуда тока будет равна

$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{R} \quad (2.125)$$

При отступлении от резонанса появятся индуктивные слагающие сопротивления, и ток станет меньше.

Кривая резонанса, соответствующая этому случаю, имеет, следовательно, характер кривых фиг. 2.20, например, для R_2 и R_3 .

Наконец, третий случай, когда

$$r < \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

приближается к случаю, когда линия на конце замкнута накоротко. Если бы r было равно нулю, то цепь явилась бы при резонансе бесконечной самоиндукцией и ток I_{m0} был бы равен нулю. Но на самом деле в линии существует бегущая волна, питающая сопротивление r . Поэтому дело происходит так, как будто в цепь источника эдс включено эквивалентное сопротивление, вычисляемое по той же ф-ле (2.124)

$$R = \frac{L_1}{C_1 r}$$

Следовательно, в момент резонанса ток не равен нулю, и его амплитуда равна

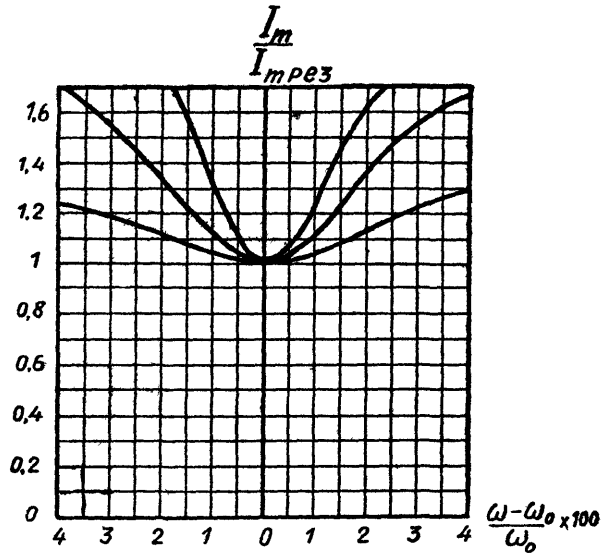
$$I_{m0} = \frac{E_{m0}}{R} \quad (2.126)$$

При отступлении от резонанса сама линия перестает быть бесконечным сопротивлением, и поэтому общее сопротивление падает, а амплитуда тока растет.

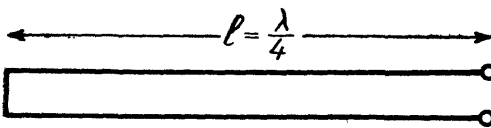
Кривая получает вид, показанный на фиг. 2.22.

Два частных случая, которые мы уже здесь затронули, представляют особый практический интерес и их следует заметить. А именно:

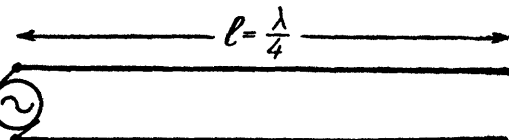
1) если $r = 0$, схема при резонансе получает вид фиг. 2.23а. Она представляет собой участок линии, коротко замкнутой на конце, и эдс \dot{E} вклю-



Фиг. 2.22.



Фиг. 2.23 а.



Фиг. 2.23 б.

чена в пучность напряжения. Сопротивление такой линии для эдс \dot{E} равно бесконечности, т. е. линия эквивалентна полной изоляции;

2) если $r = \infty$, линия оказывается разомкнутой на конце и эквивалентна короткому замыканию для эдс \dot{E} (фиг. 2.23б).

§ 24. Линия как волномер.

Явление резонанса в линии используется для определения частоты источника эдс или, вернее, для определения волны, соответствующей этой частоте. Для этого с источником связывают, например, при помощи взаимной индукции двухпроводную линию (называемую в этом случае „лехеровой системой“). На линии делается подвижной контакт, замыкающий накоротко оба провода. Этот контакт называется „мостом“ и на фиг. 2.24 обозначен буквой *M*. С мостом связывают измерительный прибор, показывающий присутствие тока в мосте и позволяющий судить об его относительной величине. Обыкновенно для этой цели применяют термоэлемент, питающийся гальванометром.



Фиг. 2.24.

Передвижение моста настраивает линию. Когда мост находится в таком положении, что линия оказывается в резонансе с частотой эдс — ток в гальванометре достигает максимального значения. Положения резонанса повторяются через расстояния, равные половине длины волны. Находят несколько таких положений. Интервалы между ними позволяют измерить длину полу волны непосредственно измерительной линейкой. Этот способ (практически, разумеется) можно применять только для волн, длина которых не превышает нескольких метров. Это так называемые короткие и ультракороткие волны. Для измерения более длинных волн применяются приборы, с которыми мы познакомимся ниже.

§ 25. Графики распределения тока и напряжения.

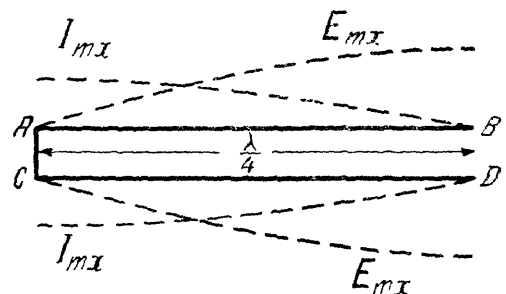
Участок линии длиной *l*, замкнутый на конце накоротко, представляет, как мы видели, систему, настроенную в резонанс с частотой

$$\omega = \frac{2\pi c}{4l}.$$

В процессе колебаний пучность тока находится у короткозамкнутого конца, а пучность напряжения у открытого конца. Распределение амплитуд тока и напряжения вдоль такого участка линии может быть изображено графиком фиг. 2.25.

Жирной линией *ВАСD* изображен провод. Пунктирные линии сверху и снизу дают распределение тока и напряжения. Расстояние этих пунктирных линий от жирных линий в условном масштабе соответствует амплитудам тока и напряжения.

Согласно сказанному ранее о стоячей волне в проводе эти линии представляют собой участки синусоид. Линии, находящиеся выше *AB*, дают положительное значение амплитуд, существующих в проводе *AB*, а линии, находящиеся ниже *CD*, дают значения амплитуд в проводе *CD*, причем эти амплитуды отложены вниз, что соответствует „отрицательным амплитудам“. Этим условно выражается противоположность фазы.



Фиг. 2.25.

Если взять линию длиной l , разомкнутую с обеих сторон, то она будет настроена в резонанс с частотой

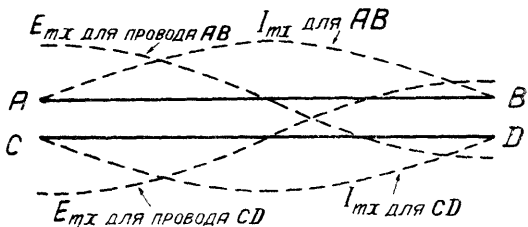
$$\omega = \frac{2\pi c}{2l},$$

т. е. будет колебаться в полволны.

Распределение тока и напряжения выразится графиком фиг. 2.26, построенным таким же образом, как предыдущий.

На концах симметрично расположатся пучности напряжения, а в середине пучность тока.

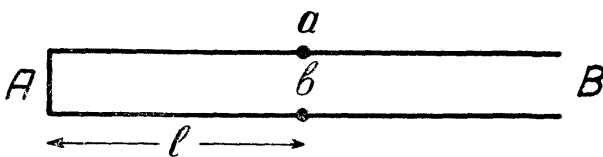
Другой вид участка линии, колеблющейся в полволны, получится, если провода замкнуты на обоих концах. В этом случае здесь будет пучность тока, в середине — пучность напряжения.



Фиг. 2.26.

§ 26. Переход к замкнутому контуру.

Возьмем на участке линии длиной $\frac{\lambda}{4}$, замкнутой с одной стороны, две произвольные точки a и b , лежащие одна против другой (фиг. 2.27), и разрежем линию в этих точках на две части. Часть, содержащую короткое замыкание, назовем A , а другую часть — B . Часть A имеет длину l и короткозамкнута на конце. Поэтому в смысле сопротивления при частоте ω_0 она эквивалентна сосредото-



Фиг. 2.27.

ченной самоиндукции

$$L = \frac{1}{\omega} \rho \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right). \quad (2.127)$$

Часть B имеет длину $\left(\frac{\lambda}{4} - l \right)$ и на концах разомкнута. Поэтому в смысле сопротивления при частоте ω_0 она эквивалентна емкости

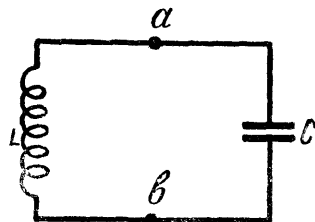
$$C = \frac{1}{\omega \rho} \operatorname{tg} \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{4} - l \right) \right] = \frac{1}{\omega \rho} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda} l \right) \quad (2.128)$$

(в обеих формулах $\rho \equiv \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$).

Поэтому в смысле сопротивления при частоте ω_0 (которая является резонансной частотой для данного отрезка линии) линия может быть заменена соединением емкости C и самоиндукции L , показанной на фиг. 2.28. Такое соединение образует прибор, называемый колебательным контуром.

Для эдс, включенной параллельно контуру, т. е. в точках a и b , контур представляет собой сопротивление

$$Z = \frac{1}{i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}. \quad (2.129)$$



Фиг. 2.28.

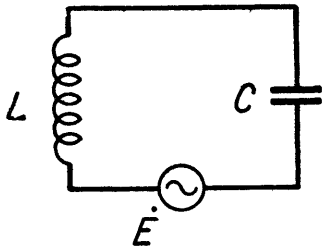
Подставив вместо C и L их значения из ур-ний (2.127) и (2.128), найдем, что

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}.$$

Поэтому уравнение (2.129) дает

$$Z = \infty.$$

Это показывает, что линия без потерь представляет в точках a и b для эдс резонансной частоты бесконечное сопротивление. Наоборот, если ввести в контур LC эдс последовательно, как показано на фиг. 2.29, сопротивление контура будет



$$Z = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (2.130)$$

и подстановка значений L и C дает

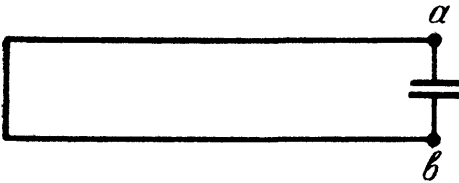
$$Z = 0.$$

Это показывает, что контур (так же, как и линия в четверть волны, замкнутая накоротко на одном конце) представляет собой короткое замыкание для резонансной частоты.

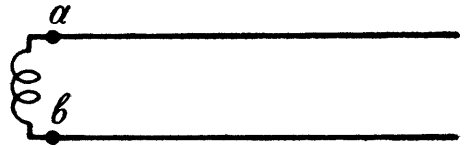
Эти результаты не зависят от выбора расстояния l , на которое точки a и b отстоят от начала линии.

Другими словами, бесчисленное количество контуров может заменить данную линию в смысле ее сопротивления для резонансной частоты.

На практике встречаются такие приборы, которые получаются из участка линии путем замены части длины этого участка емкостью или самоиндукцией.



Фиг. 2.30.



Фиг. 2.31.

Так например, если на фиг. 2.27 отбросить участок B и заменить его сосредоточенной емкостью

$$C = \frac{1}{\omega \rho} \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right),$$

получим схему фиг. 2.30, причем цепь будет настроена на частоту ω_0 . Также можно заменить участок A самоиндукцией, что приведет к схеме фиг. 2.31. Цепь остается в резонансе с частотой ω_0 , если

$$L = \frac{1}{\omega} \rho \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right).$$

§ 27. Переход к открытой системе.

Возьмем участок линии длиной $\frac{\lambda}{2}$, разомкнутой на обоих концах, и будем удалять один провод линии от другого, увеличивая расстояние между ними. Волновое сопротивление линии будет при этом постепенно увеличиваться, стремясь к некоторому пределу. Настройка линии остается прежней. В конце концов можно удалить провод CD на столь большое расстояние, что его присутствие никак не будет сказываться на проводе AB .

При возбуждении в этом проводе колебаний, получим ту же картину распределения тока и напряжения, как и в случае двух проводов.

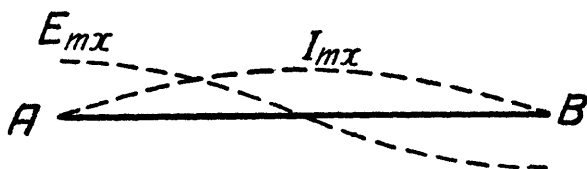
Различие скажется лишь в изменившемся отношении тока к напряжению из-за увеличившегося волнового сопротивления. Последнее будет теперь выражаться формулой

$$\rho = 60 \left[\ln \frac{l}{r} - 0,307 \right] \text{ ом.} \quad (2.131)$$

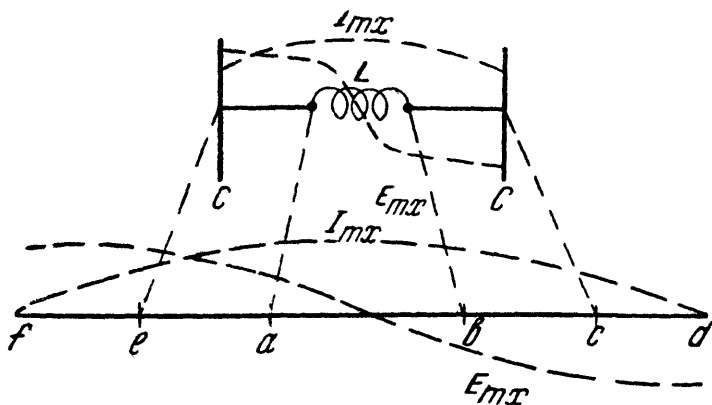
Характер распределения тока и напряжения показан на фиг. 2.32.

Такой колеблющийся одиночный провод называется проводом или стержнем, или вибратором, колеблющимся в полволны. Он находит большое практическое применение в коротковолновых антеннах, о чем будет сказано впоследствии.

Так же, как двухпроводная линия, длина провода может быть укорочена путем замены части его емкостями и самоиндукциями. При этом емкость приходится брать не в форме конденсатора, а в форме некоторой поверхности (например, шара, плоскости и т. п.).



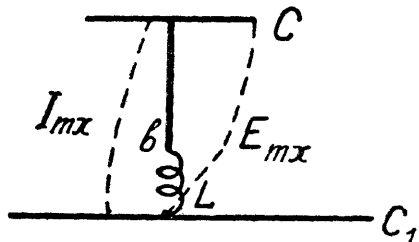
Фиг. 2.32;



Фиг. 2.33.

На фиг. 2.33 показан такой укороченный вибратор и показано, как в нем распределяется ток и напряжение.

Эта картина получается из картины распределения тока и напряжения на вибраторе, который причерчен снизу. Участки *fe* и *cd* исчезли, заменившись емкостями *C*. Участок *ab* также исчез, заменившись сосредоточенной самоиндукцией *L*.



Фиг. 2.34.

На участках же *ea* и *bc* характер распределения тока и напряжения сохранился.

На фиг. 2.34 показан другой случай укорочения вибратора, находящий себе применение в антеннах длинных волн. Здесь *C*₁—весьма большая емкость, заменяющая собой половину длины провода фиг.2.33. В качестве такой емкости может рассматриваться, например, поверхность земли.

C и *L*—емкость и самоиндукция, заменяющие часть провода и создающие укорочение вибратора.

Дальнейшее исследование вибраторов и линий с большим расстоянием между проводами мы должны пока отложить. Для них наша предпосылка об одновременности явлений уже недействительна и в них появляются новые факторы, о которых будет сказано в главе об антеннах.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР.

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛ. III

C — емкость
 c — скорость света
 E, e — напряжение
 e — основание неперовых логарифмов
 f — циклическая частота
 g — активная положительная проводимость
 I, i — сила тока
 j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$)
 L — коэффициент самоиндукции
 \ln — натуральный логарифм
 P — мощность
 R, r — активное (ваттное) положительное сопротивление
 T — период
 t — время
 Y — реактивная проводимость
 Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления ($Z = r + jx$)
 z — кажущееся (полное) сопротивление (модуль)
 δ — коэффициент затухания контура
 ϑ — логарифмический декремент затухания в контуре

λ — длина волны
 ρ — волновое сопротивление
 ω — круговая частота
 ω_0 — сокращенное обозначение величины $\frac{1}{\sqrt{LC}}$
 \equiv — знак тождества. Выражен. $(a+b) \equiv c$ означает: „обозначим $(a+b)$ через c “.

Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m и т. д.

Постоянные и среднеквадратичные значения теми же буквами без индекса, например, E, I, P и т. д.

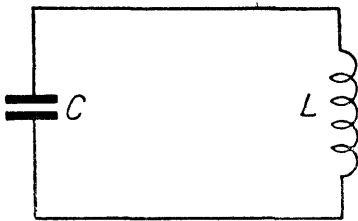
Мгновенные значения, выраженные в тригонометрической форме, обозначены малыми буквами, например, $i = I_m \sin(\omega t)$ и т. д.

Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например,

$$\dot{i} = a + jb; \dot{E} = E_m e^{(j\omega t + \varphi)} \text{ и пр.}$$

§ 1. Простой колебательный контур.

Соединение сосредоточенных емкости и самоиндукции (фиг. 3.1), как было уже сказано, называется колебательным контуром. Колебательный контур является одним из наиболее важных и часто встречающихся элементов радиотехнических устройств.



Фиг. 3.1.

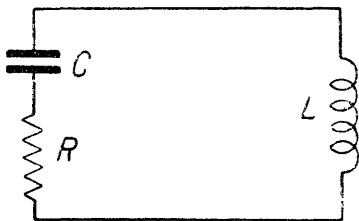
В каждом колебательном контуре всегда есть источники потерь, превращающие часть энергии в тепло. Обычными источниками потерь являются сопротивления проводов, утечки в изоляции и потери в диэлектриках. Кроме того, если контур связан с другими цепями, то он может также отдавать этим цепям часть циркулирующей в нем энергии.

Все эти потери можно заменить некоторыми эквивалентными утечками или последовательно включенными сопротивлениями. Без большой погрешности можно также сопротивления и утечки, распределенные в различных участках самоиндукции и емкости, объединить в одно или два места и рассматривать их как сосредоточенные сопротивления и утечки.

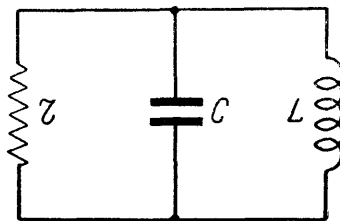
В линиях этого нельзя было сделать вследствие того, что ток и напряжение различны в различных точках линии. В контуре же, поскольку мы принимаем L и C за сосредоточенные, мы этим самым принимаем, что по всей самоиндукции ток одинаков, а у конденсатора напряжение между обкладками всюду одинаково. Возможность таких допущений значительно упрощает исследование явлений в контуре.

Простейшими способами включения сопротивлений являются показанные на фиг. 3.2 и 3.3. Первый способ называется последовательным, а второй — параллельным включением.

Эдс может быть включена в контур различными способами или появляться вследствие индукции в различных частях контура.



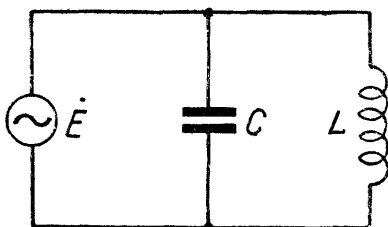
Фиг. 3.2.



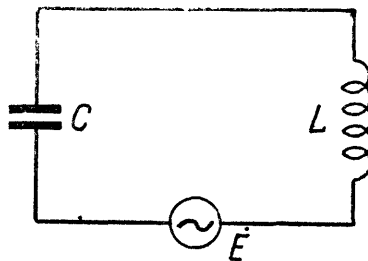
Фиг. 3.3.

Простейшими случаями включения эдс является параллельное включение (которое также называется включением в пучность напряжения), показанное на фиг. 3.4, и последовательное включение, показанное на фиг. 3.5. Последнее называется также включением в пучность тока.

При исследовании явлений мы будем считать, что источник эдс, включенный параллельно, не создает никакой утечки, а источник эдс, включенный последовательно, не создает никакого сопротивления в контуре.



Фиг. 3.4.



Фиг. 3.5

Указанные два простейших способа включения сопротивлений (последовательное и параллельное) и два способа включения эдс (последовательное и параллельное) приводят к возможности получения четырех основных (или простейших) комбинаций работы источника на контур, которыми мы прежде всего займемся в условиях установившегося режима.

§ 2. Комплексное сопротивление и явление резонанса в контуре, когда эдс и сопротивление включены последовательно.

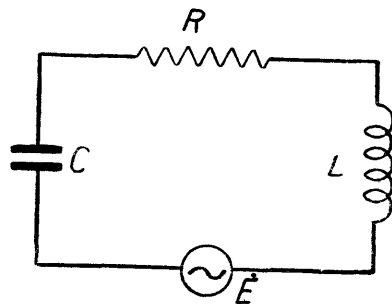
На фиг. 3.6 показана схема включения эдс \dot{E} и сопротивления R в контур „последовательно“.

Сопротивление контура в этом случае, как легко видеть, равно

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

При помощи этого выражения определяем ток в контуре

$$i = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (3.1)$$



Фиг. 3.6.

Освободившись от мнимости в знаменателе, приведем это выражение к виду

$$\dot{i} = a + jb,$$

найдем

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\dot{E}R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ b &= -\frac{\dot{E}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Угол сдвига между током и действующей в цепи эдс

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{b}{a}\right),$$

т. е.

$$\varphi = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}. \quad (3.3)$$

Если

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \equiv \omega_0,$$

то сопротивление контура становится чисто активным и равным R , так как

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Угол сдвига между током и эдс также равен нулю.

Частота, удовлетворяющая этому условию, называется резонансной частотой. Резонансную частоту мы будем отмечать нулевым индексом ω_0 .

Изменяя емкость или самоиндукцию контура, можно настроить контур на ту либо другую резонансную частоту.

Ток в момент резонанса будем отмечать индексом „рез“ (например, $I_{m \text{ рез}}$). Так как при резонансе сопротивление минимально, то ток максимален.

Кривая, показывающая отношение амплитуды тока в контуре, при какой-нибудь частоте ω к амплитуде при резонансе, носит название „кривой резонанса“.

Легко вывести, что кривая резонанса выражается следующим уравнением

$$\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2}}}. \quad (3.4)$$

Она имеет максимум, равный единице, когда

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Дальнейший ход ее зависит от соотношения между величинами L , C и R . Без сложных вычислений легко видеть, что если R очень велико, то член

$$\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2} \quad (3.5)$$

в ур-нии (3.4) будет мал даже при значительной величине разности $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

Поэтому отношение $\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}}$ будет близко к единице даже при сравнительно значительной расстройке.

Если же, наоборот, R очень мало, то достаточно самого небольшого изменения ω , C или L , чтобы член

$$\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}{R^2}$$

получил большое значение, а следовательно, отношение $\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}}$ резко уменьшилось бы.

С другой стороны, быстрое или медленное возрастание разности

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (3.6)$$

зависит от соотношения между L и C .

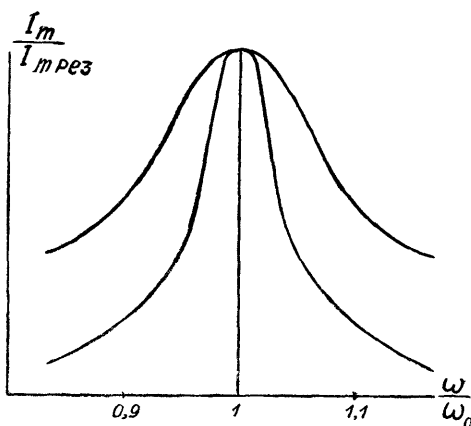
Для того, чтобы выяснить этот вопрос, представим то же выражение (3.6) следующими двумя способами путем подстановки

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = L \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right), \quad (3.7)$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{C} \left(\frac{\omega}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega}\right). \quad (3.8)$$

Выражение (3.7) показывает, что при изменении ω разность $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ растет тем быстрее, чем больше L , а выражение (3.8), — что она растет тем быстрее, чем меньше C . Поэтому ординаты кривой резонанса тем быстрее



Фиг. 3.7.

убывают вблизи частоты резонанса, чем больше величина $\frac{L}{C}$ и чем меньше R .

На фиг. 3.7 показаны две кривые резонанса. „Тупая“ кривая (верхняя) соответствует большей величине, а „острая“ кривая — малой величине отношения

$$\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Величина $\sqrt{\frac{L}{C}}$, имеющая размерность сопротивления, называется „характеристичным сопротивлением контура“.

§ 3. Сдвиг фазы между эдс и током.

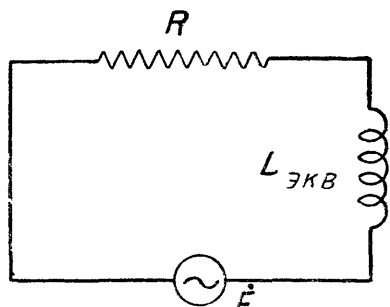
Кроме кривой резонанса контур может быть еще охарактеризован кривой изменения сдвига фазы между эдс и током в зависимости от частоты ω .

При частотах, меньших резонансной, разность $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ ^{отрицательна} положительна, и контур (в установившемся режиме) является эквивалентом самоиндукции, соединенной последовательно с омическим сопротивлением (фиг. 3.8). При частотах, больших резонансной, он, наоборот, эквивалентен емкости, соединенной с омическим сопротивлением (фиг. 3.9).

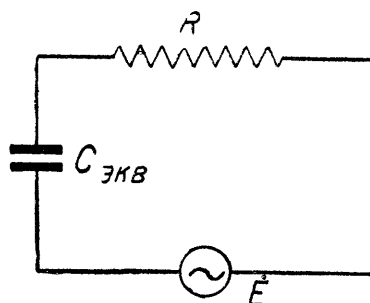
Угол сдвига фазы при резонансе равен нулю, а при больших значениях выражения

$$\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R},$$

(определяющего тангенс угла сдвига) становится близким к 90° .

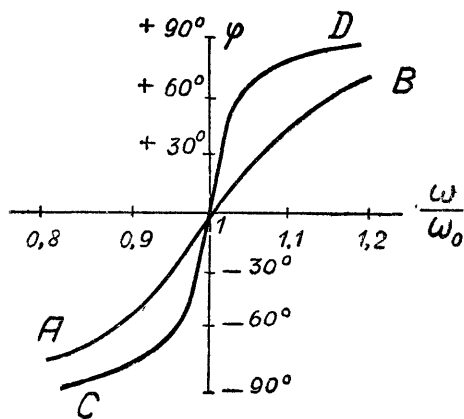


Фиг. 3.8.



Фиг. 3.9.

На фиг. 3.10 показан тип кривых $\varphi = F(\frac{\omega}{\omega_0})$. По ординатам отложен угол φ



Фиг. 3.10

в градусах, а по абсциссам — отношение $\frac{\omega}{\omega_0}$.

Кривая AB соответствует большой величине

$$\frac{R}{\sqrt{L/C}},$$

а кривая CD — малой.

Первая кривая вблизи частоты ω_0 идет более полого, а вторая более круто. Причины этого совершенно те же, что и причины, влияющие на степень остроты кривой резонанса.

§ 4. Вольтамперы и мощность в контуре, настроенном в резонанс, при последовательно включенных эдс и сопротивлении.

Напряжение на конденсаторе \dot{E}_C контура найдется, если помножить ток на емкостное сопротивление конденсатора.

Так что

$$\dot{E}_0 = -j \frac{i}{\epsilon C}. \quad (3.9)$$

В момент резонанса

$$i = \frac{\dot{E}}{R}, \quad (3.10)$$

поэтому

$$\dot{E}_C = -j \frac{\dot{E}}{R\omega C}. \quad (3.11)$$

Множитель $-j$ показывает, что напряжение на конденсаторе сдвинуто на 90° по отношению к эдс \dot{E} , а следовательно, и к току i , который в момент резонанса совпадает по фазе с эдс.

Из этого следует, что когда электрический заряд в конденсаторе достигает своего максимума, магнитное поле равно нулю и обратно.

В контуре происходит, таким образом, два процесса. С одной стороны, в нем циркулирует некоторая энергия, которая переходит из электрической формы в магнитную, и обратно. С другой стороны, в сопротивлении выделяется некоторая активная мощность.

Чтобы сопоставить эти два явления, вводят понятие „реактивной мощности“, которую определяют для единообразия с активной мощностью следующим образом.

Активная мощность

$$P_a = \frac{I_m^2 R}{2} \quad (3.12)$$

может быть при резонансе определена как произведение

$$P_a = \frac{E_m I_m}{2}. \quad (3.13)$$

Аналогично этому реактивной мощностью, или правильнее „вольтамперами“ контура, называют величину

$$P_r = \frac{E_{mc} I_m}{2}. \quad (3.14)$$

Это выражение можно написать еще следующим образом. Имея в виду, что

$$E_{mc} = \frac{I_m}{\omega_0 C}$$

и

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

получим из ур-ния (3.14)

$$P_r = I_m^2 \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (3.15)$$

откуда получаем

$$\frac{P_a}{P_r} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}. \quad (3.16)$$

Ур-ние (3.16) показывает, что реактивная мощность в контуре тем больше по сравнению с активной, чем больше характеристическое сопротивление контура по сравнению с активным сопротивлением, включенным последовательно.

Теперь мы можем сформулировать результаты, полученные в предыдущем параграфе, следующим образом.

Кривая резонанса контура тем острее, а фазовая кривая тем круче, чем больше вольтамперы в контуре по сравнению с мощностью.

Это правило следует запомнить. Оно оказывается более общим, чем приведенное ранее, и в равной степени подится и для других случаев включения сопротивления.

§ 5. Комплексное сопротивление и кривая резонанса для случая, когда эдс и сопротивление включены параллельно контуру.

Рассмотрим теперь случай, когда сопротивление r и эдс E включены параллельно контуру. Соответствующая схема показана на фиг. 3.11.

Комплексная проводимость, которую представляет собой контур для эдс \dot{E} , определится формулой

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad (3.17)$$

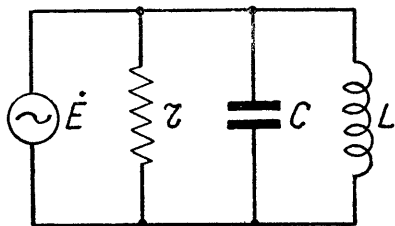
Легко видеть непосредственно из схемы фиг. 3.11, что ток, проходящий через источник, состоит из двух слагаемых. Одно слагаемое представляет собой ток через сопротивление r . Этот ток при постоянной амплитуде E_m одинаков для всех частот и равен

$$i_r = \frac{\dot{E}}{r}.$$

Второе слагаемое образуется током, идущим через контур.

При настройке в резонанс, т. е. когда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$



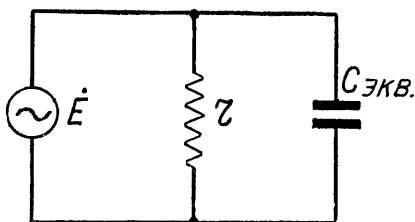
Фиг. 3.11.

контур является бесконечным сопротивлением (в установившемся режиме) и ток равен нулю. При частотах выше резонансной контур эквивалентен емкостному сопротивлению, так как разность

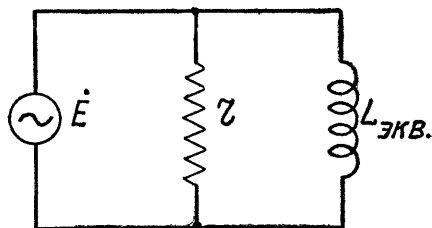
$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

становится положительной; положительная же реактивная проводимость есть емкостная проводимость. Соответствующая эквивалентная схема всей цепи показана на фиг. 3.12.

При частотах, меньших резонансной, эквивалентная схема будет иметь вид фиг. 3.13.



Фиг. 3.12.



Фиг. 3.13.

Это, впрочем, можно заключить также непосредственно из схемы контура, так как очевидно, что при резонансе ток через емкость равен току через самоиндукцию; при частотах выше резонансной будет преобладать ток через емкость, а при частотах ниже резонансной — ток через самоиндукцию, чем и определится знак реактивной слагающей тока, идущего через источник эдс E .

При очень больших частотах емкость C явится почти коротким замыканием, а при очень малых частотах, наоборот, самоиндукция L явится почти коротким замыканием. В обоих случаях ток в цепи источника будет весьма значителен.

Таким образом, кривая резонанса имеет минимум при

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0$$

и уходит в бесконечность при

$$\omega = 0$$

и

$$\omega = \infty.$$

Сравним выражения для комплексного сопротивления контура при последовательных сопротивлениях эдс и комплексной проводимости при параллельных сопротивлениях и эдс, т. е.

и

$$\left. \begin{aligned} Z &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ \frac{1}{Z} &= \frac{1}{r} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Оба выражения одинаковы по форме. Второе выражение может быть получено из первого, если сопротивления заменить проводимостями, как это видно из следующей таблички.

Таблица III.I

Последовательное включение	Параллельное включение
Z	$\frac{1}{Z} = Y$
R	$\frac{1}{r} = g$
L	C
C	L

Соответствие в явлениях выражается следующей таблицей.

Таблица III.II

Последовательное включение	Параллельное включение
<p>При резонансе ток максимален и равен</p> $I_m = \frac{E_m}{R}.$	<p>При резонансе ток минимален и равен</p> $I_m = \frac{E_m}{r}.$
<p>При частотах выше резонансной реактивное сопротивление становится индукционным.</p> <p>При частотах ниже резонансной реактивное сопротивление становится емкостным.</p> <p>Чем меньше отношение</p> $\sqrt{\frac{R}{L/C}},$	<p>При частотах выше резонансной реактивное сопротивление становится емкостным.</p> <p>При частотах ниже резонансной реактивное сопротивление становится индукционным.</p> <p>Чем меньше отношение</p> $\sqrt{\frac{g}{C/L}},$
<p>тем острее кривая резонанса.</p> <p>Чем меньше отношение</p> $\sqrt{\frac{R}{L/C}},$	<p>тем острее кривая резонанса.</p> <p>Чем меньше отношение</p> $\sqrt{\frac{g}{C/L}},$
<p>тем больше вольтамперы по сравнению с мощностью.</p>	<p>тем больше вольтамперы по сравнению с мощностью.</p>

Чем больше вольтамперы по сравнению с мощностью, тем острее кривая резонанса.

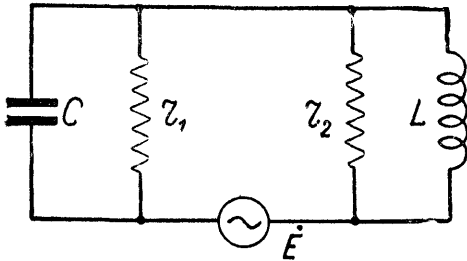
§ 6. Физическая картина при последовательном включении эдс и параллельном включении сопротивлений.

Рассмотренные выше способы включения эдс и сопротивления называются однородными включениями (оба параллельно или оба последовательно).

Более сложными случаями являются те, при которых сопротивление и эдс включены неоднородно. Все исчисления в этом случае делаются так же, как и в случае однородного включения, но они оказываются довольно громоздкими. Поэтому ниже приведены окончательные результаты без выводов. Сами выводы (за исключением громоздкости) не представляют ничего трудного.

Предварительно же посмотрим чисто качественно, каких явлений можно ожидать в этом случае.

На фиг. 3.14 приведена схема, в которой источник эдс \dot{E} включен в контур последовательно, а по обеим сторонам его включены сопротивления r_1 и r_2 . Первое — параллельно емкости C , второе — самоиндукции L .



Фиг. 3. 4

Прежде всего ясно, что при частоте $\omega \rightarrow \infty$ емкостное сопротивление, шунтирующее r_1 , стремится стать коротким замыканием. При этих же условиях индуктивное сопротивление самоиндукции L стремится к бесконечности, и сопротивление r_2 оказывается ничем не шунтированным.

Поэтому при $\omega \rightarrow \infty$ сопротивление, нагружающее источник, стремится к величине r_2 .

Наоборот, при $\omega \rightarrow 0$ (т. е. при весьма низких частотах) самоиндукция превращается в короткое замыкание, шунтирующее r_2 , а сопротивление емкостного шунта у r_1 становится очень большим и поэтому не играет роли. Полное сопротивление цепи определяется величиной r_1 . Для того, чтобы выяснить, каково будет сопротивление цепи при средних значениях ω , положим для простоты, что

$$r_1 = r_2 \equiv r$$

и что

$$r \ll \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.19)$$

Если положить $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то вследствие соотношения (3.19)

$$\frac{1}{\omega C} \gg r$$

и

$$\omega L \gg r.$$

Поэтому можно пренебречь емкостным и индуктивным токами и считать, что весь ток, проходящий через источник, образуется за счет тока, идущего через сопротивления r_1 и r_2 .

Тогда сопротивление цепи будет равно

$$r_1 + r_2 = 2r.$$

Таким образом мы нашли три точки, определяющие форму кривой резонанса, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \omega = \infty \quad I_m = \frac{E_m}{r_2} = \frac{E_m}{r} \\ \text{при } \omega = 0 \quad I_m = \frac{E_m}{r_1} = \frac{E_m}{r} \\ \text{при } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad I_m = \frac{E_m}{r_1 + r_2} = \frac{E_m}{2r} \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

Равенства (3.20) показывают, что кривая резонанса имеет минимум, т. е. форма ее в общих чертах должна иметь характер кривой AB фиг. 3.15. Теперь положим, наоборот, что

$$r \gg \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тогда при

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ток через источник будет значительно больше, чем ток через сопротивления r_1 и r_2 , и в основном образуется за счет тока, идущего через емкость и самоиндукцию.

Поэтому

$$\text{при } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad I_m \gg \frac{E_m}{r_1 + r_2},$$

т. е.

$$I_m > \frac{E_m}{r}.$$

Поэтому теперь для определения кривой резонанса получаем следующие три положения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \omega \rightarrow 0 \quad I_m = \frac{E_m}{r} \\ \text{при } \omega \rightarrow \infty \quad I_m = \frac{E_m}{r} \\ \text{при } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad I_m > \frac{E_m}{r} \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

Кривая резонанса имеет максимум. Вершина кривой тем больше выделяется, чем больше сопротивление r по сравнению с ωL и $\frac{1}{\omega C}$, т. е. чем больше реактивная слагающая тока по сравнению с активной. Поэтому кривая будет тем острее, чем больше отношение вольтампер к мощности. Общий вид кривой соответствует кривой CD фиг. 3.15.

Наконец, если

$$r = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

сопротивление цепи при условии

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

окажется равным r , т. е. всем трем значениям ω ($\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) будет отвечать один и тот же ток

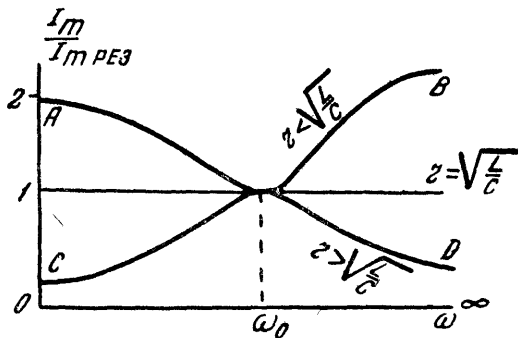
$$I_m = \frac{E_m}{r} = \frac{E_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

§ 7. Математическое исследование этого случая.

Полное сопротивление цепи можно представить как сумму двух сопротивлений

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad (3.22)$$

$$Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + j\omega C}; \quad Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{r_2} - \frac{j}{\omega L}}. \quad (3.23)$$



Фиг. 3.15.

Отсюда Z получается в виде комплекса

$$Z = a + jb, \quad (3.24)$$

где

$$a = \frac{\frac{1}{r_1} \left[\left(\frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} \right)^2 \right] + \frac{1}{r_2} \left[\left(\frac{1}{r_1} \right)^2 + (\omega C)^2 \right]}{\left[\left(\frac{1}{r_1} \right)^2 + (\omega C)^2 \right] \left[\left(\frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]}, \quad (3.25)$$

$$b = \frac{\frac{1}{\omega L} \left[\left(\frac{1}{r_1} \right)^2 + (\omega C)^2 \right] - \omega C \left[\left(\frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{1}{r_1} \right)^2 + (\omega C)^2 \right] \left[\left(\frac{1}{r_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} \right)^2 \right]}. \quad (3.26)$$

Сопротивление контура становится чисто активным, когда $b = 0$. Для этого должно быть

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{C}{L} - \left(\frac{1}{r_1} \right)^2}{\frac{C}{L} - \left(\frac{1}{r_2} \right)^2}}. \quad (3.27)$$

Искомая частота становится мнимой, если одно из сопротивлений больше, а другое меньше волнового сопротивления контура.

Это показывает, что сопротивление контура в этом случае не может быть чисто активным ни при какой частоте.

Если $r_1 = r_2 = r$, то

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (3.28)$$

В этом случае при резонансной частоте

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{rC}{L}} \\ b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Если одно из сопротивлений, например r_1 , отсутствует вовсе, то его надо положить равным бесконечности.

При $r_1 = \infty$ резонансная частота

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{L}{Cr_2^2}}. \quad (3.30)$$

Эта частота меньше $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

При $r_2 = \infty$ резонансная частота

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L}{Cr_1^2}}} \quad (3.31)$$

больше, чем $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

Модуль z при включении сопротивления со стороны конденсатора найдется из ур-ний (3.25) и (3.26), полагая $r_2 = \infty$

$$z^2 = \frac{\left[\frac{1}{r_1(\omega L)^2} \right]^2 + \frac{1}{(\omega L)^2} \left[\frac{1}{r_1^2} + (\omega C)^2 - \left(\frac{C}{L} \right) \right]^2}{\left[\left(\frac{1}{r_1} \right)^2 + (\omega C)^2 \right]^2 \frac{1}{(\omega L)^4}}. \quad (3.32)$$

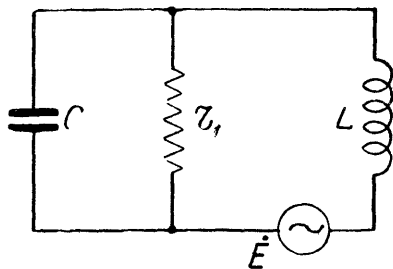
При включении сопротивления со стороны самоиндукции надо положить $r_1 = \infty$. Тогда

$$z^2 = \frac{\left[\frac{(\omega C)^2}{r_2}\right]^2 + (\omega C)^2 \left[\frac{C}{L} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{\omega^2 L^2}\right]^2}{\left[\left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^2 (\omega C)^4}. \quad (3.33)$$

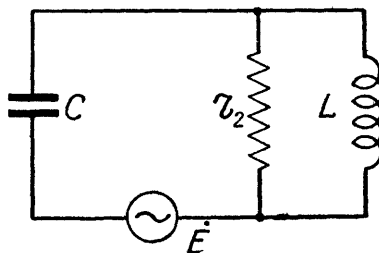
В первом случае (фиг. 3.16) при $\omega = 0$,

$$z = r_1. \quad (3.34)$$

Другими словами, постоянный ток проходит по катушке L , как по короткому замыканию, и далее по сопротивлению r_1 . При $\omega = \infty$ конден-



Фиг. 3.16



Фиг. 3.17.

саторная цепь является коротким замыканием, но самоиндукция L представляет собой бесконечное сопротивление; поэтому

$$z = \infty. \quad (3.35)$$

Во втором случае (фиг. 3.17) при $\omega = 0$

$$z = \infty, \quad (3.36)$$

так как конденсатор не пропускает постоянного тока. При $\omega = \infty$

$$z = r_2, \quad (3.37)$$

так как конденсатор является коротким замыканием, а индуктивное сопротивление, шунтирующее утечку, бесконечно велико.

§ 8. Комплексное сопротивление и кривые резонанса для случая, когда ЭДС включена в контур параллельно, а сопротивление последовательно.

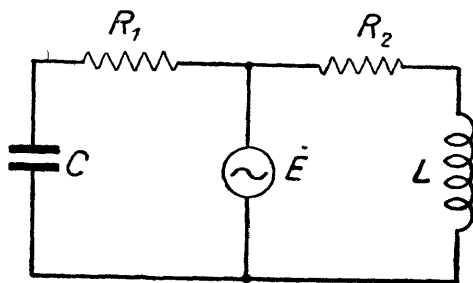
В случае схемы фиг. 3.18 комплексное сопротивление контура для ЭДС \dot{E} определится следующим выражением

$$Z = a + jb,$$

где

$$a = \frac{R_1 [R_2^2 + (\omega L)^2] + R_2 \left[R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}{[R_1 + R_2]^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}; \quad (3.38)$$

$$b = \frac{\frac{1}{\omega C} \left[\frac{L}{C} - R_2^2 \right] - \omega L \left[\frac{L}{C} - R_1^2 \right]}{[R_1 + R_2]^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}. \quad (3.39)$$



Фиг. 3.18.

Цепь ведет себя как омическое сопротивление, если $b = 0$. Может быть три случая:

при $\omega = 0$ (постоянный ток)

$$Z = a = R_2; \quad (3.40)$$

при $\omega = \infty$ (очень высокая частота)

$$Z = a = R_1; \quad (3.41)$$

при резонансной частоте

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{1 - \frac{R_2^2 C}{L}}{1 - \frac{R_1^2 C}{L}}};$$

$$Z = a \quad (3.42)$$

и выражается ур-нием (3.38).

Если одно из сопротивлений больше волнового а другое меньше,— резонансная частота становится мнимой. При равенстве $R_1 = R_2$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0. \quad (3.43)$$

В контуре надо различать два тока (через емкость и через самоиндукцию)

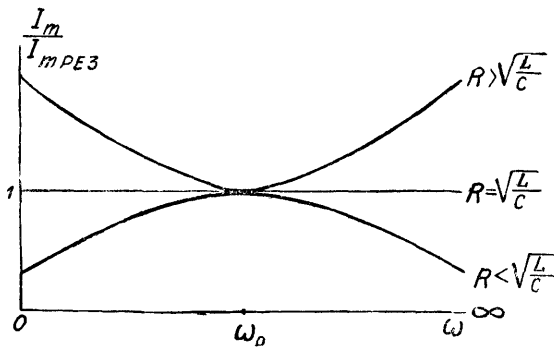
$$\dot{i}_C = \frac{\dot{E}}{R_1 - j \frac{1}{\omega C}}; \quad (3.44)$$

$$\dot{i}_L = \frac{E}{R_2 + j\omega L}. \quad (3.45)$$

При

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ и } R_1 = R_2,$$

$$\dot{i}_C = \dot{i}_L. \quad (3.46)$$



Фиг. 3.19.

Характер кривых резонанса показан на фиг. 3.19 для трех соотношений между R и $\sqrt{\frac{L}{C}} \equiv \rho$

На практике обычно встречаются контуры, у которых сопротивления R_1 и R_2 не равны друг другу. Часто принимают, что одно из них равно нулю.

Выражение для резонансной частоты в последнем случае будет иметь вид

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR_2^2}{L}}, \quad (3.47)$$

или

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR_1^2}{L}}. \quad (3.48)$$

Эти выражения совпадают с найденными ранее и показывают, что резонансная частота уменьшается, когда сопротивление включено со стороны самоиндукции, и увеличивается, когда оно включено со стороны емкости.

Модуль z при включении сопротивления в индукционную ветвь найдется из ур-ний (3.38) и (3.39). При этом полагаем $R_1 = 0$

$$z^2 = \frac{\left[\frac{R_2}{(\omega C)^2} \right]^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \left[\frac{L}{C} - R_2^2 - (\omega L)^2 \right]^2}{\left[R_2^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^2}. \quad (3.49)$$

В случае включения сопротивления в емкостную ветвь ($R_2 = 0$)

$$z^2 = \frac{[R_1(\omega L)^2]^2 + (\omega L)^2 \left[\frac{1}{(\omega C)^2} - \frac{L}{C} - R_1^2 \right]^2}{\left[R_1^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^2}. \quad (3.50)$$

§ 9. Упрощение вычислений для практических случаев и пересчет сопротивлений из пучности тока в пучность напряжения или обратно.

В практических случаях весьма часто используются колебательные контуры, в которых отношение вольтампер к мощности довольно велико. Если это отношение превышает 20 или 30, т. е.

$$\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} > 20 \text{ или } 30,$$

то можно для практических расчетов, не требующих особой точности, упростить формулы, приведенные в двух предыдущих параграфах.

Первое упрощение касается резонансной частоты, которую в этих условиях можно определять по формуле

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Второе упрощение достигается тем, что все сопротивления, включенные как параллельно, так и последовательно, эквивалентно заменяют одним сопротивлением, включенным однородно с действующей в контуре эдс.

Для такой замены действительное сопротивление пересчитывается следующим образом.

Пусть, например, в контуре эдс \dot{E} включена параллельно конденсатору, а сопротивление R последовательно (фиг. 3.20). Принимаем, что резонансная частота контура равна

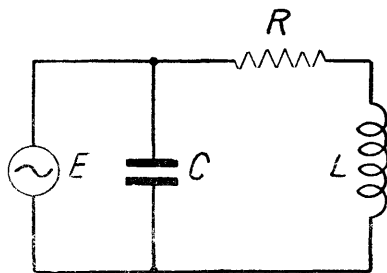
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Мощность, выделяемая в сопротивлении R , равна

$$P_a = \frac{I_m^2 R}{2}.$$

Значение I_m определяем из равенства

$$I_m = E_m \omega C.$$



Фиг. 3.20.

Подставив взамен ω для частоты резонанса

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

получаем

$$I_m = E_m \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Отсюда мощность равна

$$P_a = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{E_m^2 CR}{2L}. \quad (3.51)$$

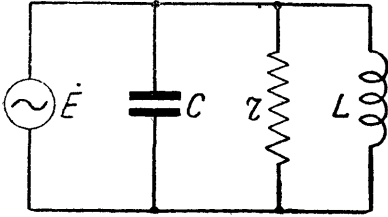
Теперь находим такое сопротивление r , в котором при включении параллельно конденсатору выделится такая же мощность.

По закону Ома такое сопротивление удовлетворяет равенству

$$P_a = \frac{E_m^2}{2r}. \quad (3.52)$$

Сравнивая ур-ния (3.51) и (3.52), видим, что

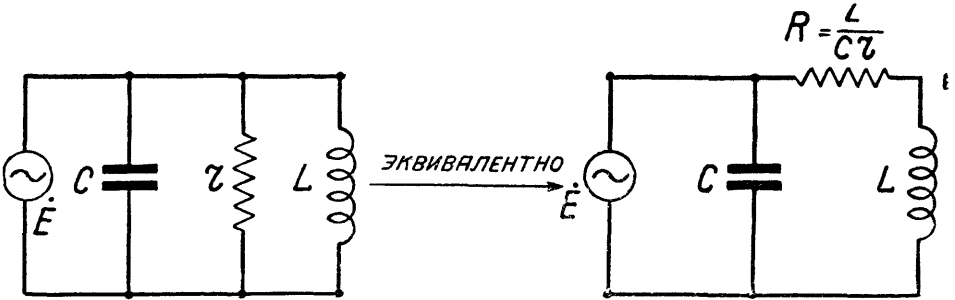
$$r = \frac{L}{CR}. \quad (3.53)$$



Фиг. 3 21.

Таким образом взамен контура фиг. 3.20 можно применить контур фиг. 3.21. Вблизи резонанса он эквивалентен контуру фиг. 3.20.

Обратно, если бы первоначально сопротивление было включено параллельно и имело величину r , его можно было бы заменить последова-



Фиг. 3.22.

тельным сопротивлением, воспользовавшись такой же формулой пересчета (фиг. 3.22),

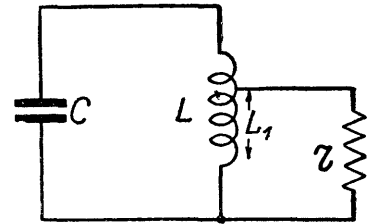
$$R = \frac{L}{Cr}.$$

Часто сопротивление включается, как показано на фиг. 3.23, т. е. шунтирует некоторую часть самоиндукции.

Это включение также можно эквивалентно заменить параллельным или последовательным включением.

Вычисление имеет простой характер, если ответвляющийся в сопротивление ток мал по сравнению с током, идущим по самоиндукции.

Если участок самоиндукции, к которому присоединено сопротивление r имеет индуктивное сопротивление $j\omega L_1$, а полное сопротивление катушки равно $j\omega L$, то амплитуда напряжения на сопротивлении r меньше, чем амплитуда напряжения на всей катушке самоиндукции в $\frac{L}{L_1}$ раз.



Фиг. 3.23.

Поэтому для того, чтобы в эквивалентном сопротивлении r , шунтирующем всю катушку, выделилась та же мощность, последнее должно быть больше r_1 в $\left(\frac{L}{L_1}\right)^2$ раз.

Тогда будет соблюдено равенство

$$P = \frac{E_m L}{2r} = \frac{E_m^2 L_1}{2r_1} \quad (3.54)$$

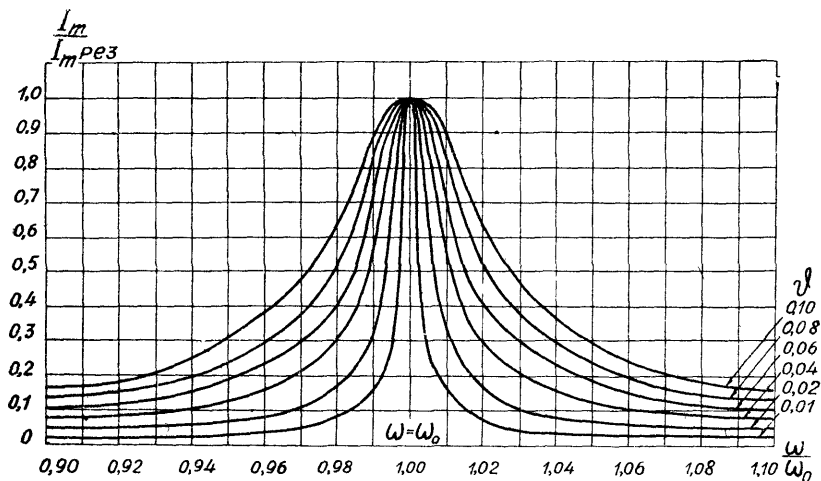
Таким образом

$$r = \left(\frac{L}{L_1}\right)^2 r_1 \quad (3.55)$$

Найдя эквивалентное параллельное сопротивление, легко по указанным формулам пересчета найти, если нужно, эквивалентное последовательное сопротивление.

§ 10. Колебательный контур как фильтр.

То, что было сказано относительно фильтрации колебаний при помощи двухпроводной линии, полностью применимо к контуру. Осуществление линии, настроенной в резонанс при длинных волнах, встречало бы чрезвычайно большие затруднения из-за громоздких размеров. Контур не имеет этого недостатка и может быть сделан очень портативным. Поэтому контур находит чрезвычайно широкое применение в радиоустройствах. В частности



Фиг. 3.24.

в приемных устройствах им пользуются для выделения участка спектра, относящегося к данному сигналу, на фоне других сигналов и различных помех.

Для того, чтобы колебательный контур выполнял свое назначение, его кривая резонанса должна быть достаточно остра, что, как мы видели, может быть достигнуто только при достаточном уменьшении отношения мощности к вольтамперам, а это требует заботливого устройства всех элементов контура с целью свести к минимуму потери и правильного выбора характеристического сопротивления.

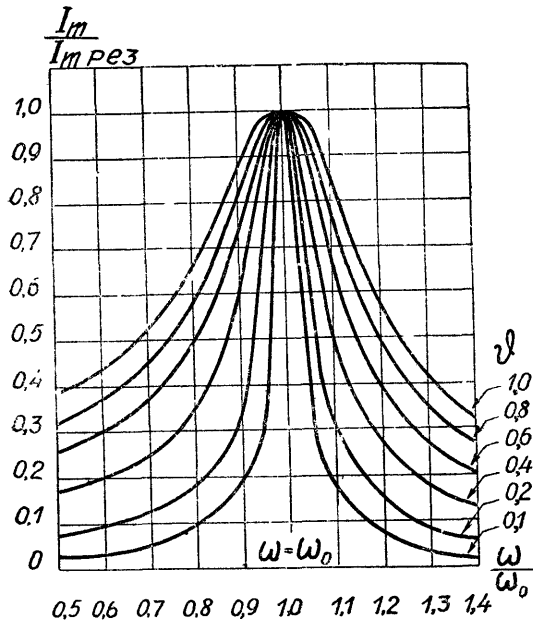
При параллельной эдс следует стремиться к малой величине $\sqrt{\frac{L}{C}}$, а при последовательной к большей величине $\sqrt{\frac{L}{C}}$, что, как очевидно из предыдущего, увеличивает в этих случаях вольтамперы.

В приемных цепях обычно применяются контуры с переменными емкостями и переменными самоиндукциями для того, чтобы иметь возможность настраиваться на различные частоты.

В этом случае качества контура должны быть обеспечены на всем перекрываемом диапазоне.

В хорошо устроенных контурах удается получить отношение вольт-ампер к мощности до 150.

На фиг. 3.24 и фиг. 3.25 дано семейство кривых резонанса для различных значений этого отношения. Для лучшей фильтрации применяется несколько контуров, о чем скажем в главе о фильтрах, где выясним также ряд важных явлений, сопровождающих процесс фильтрации.



Фиг. 3.25.

§ 11. Колебательный контур как волномер.

Явлением резонанса пользуются для устройства простейших приборов для измерения частот. С этой целью применяется контур, обладающий малым затуханием, вследствие чего его

кривые резонанса имеют большую остроту.

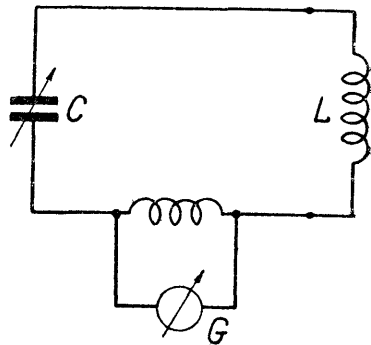
Емкость и самоиндукция контура делаются переменными. Обычно для этой цели применяется воздушный переменный конденсатор прочной конструкции, снабженный шкалой, на которой нанесены деления. Изменение самоиндукции чаще всего достигается сменой катушек. Контур заранее точно градуируется, что дает возможность знать собственную частоту (настройку) контура при данной катушке и данном положении рукоятки конденсатора. Такая градуировка чаще производится не на частоту, а на длину волны, вследствие чего и самый прибор получил название „волномера“.

Техника измерения частоты (или длины волны) при наличии колебательного поля заключается в том, что контур волномера связывают с источником колебаний путем приближения к нему и наблюдают ток в контуре при различных его настройках.

Вращая конденсатор и не изменяя положения волномера относительно источника, замечают, при каком значении конденсатора ток в контуре максимален. Это значение соответствует совпадению собственного периода волномера с периодом действующего колебания.

Длина волны (или частота) определяется по графику градуировки. В качестве токоуказателя может быть применен любой чувствительный прибор G , который обычно связывается с контуром через взаимную индукцию (фиг. 3.26).

Часто в качестве указателя применяют прибор, градуированный не на силу тока, а на квадрат силы тока, вследствие чего показания этого прибора пропорциональны мощности (или вольтамперам) в контуре.



Фиг. 3.26.

§ 12. Замечания о реальном контуре.

В радиотехнике используются частоты, начиная от 10 гц и кончая 10^{10} гц. Весь этот диапазон делят на несколько интервалов, не имеющих точных границ, но все же устанавливающих известные градации частот: частоты до 10^2 гц обычно называются низкими; частоты от 10^2 до 10^4 гц — повышенными или звуковыми; от 10^4 до 10^8 гц — высокими и частоты от 10^8 до 10^{10} гц — высокими или весьма высокими.

1) Колебательный контур с сосредоточенными постоянными в качестве самостоятельного элемента радиоустройства, выделенного идейно и конструктивно, применяется, главным образом, для высоких и отчасти весьма высоких частот.

В этом случае, как правило, применяются катушки без железа и воздушные конденсаторы. Такие контуры практически представляют собой линейные системы, т. е. такие, в которых параметры L , C и r не зависят непосредственно от амплитуды тока и напряжения.

Говоря точнее, эта зависимость столь мала, что лежит ниже предела технической точности измерений.

Косвенная зависимость от амплитуды всегда существует и проявляется, в частности, в том, что под влиянием выделяющегося тепла или электростатических сил приборы изменяют свои размеры и свои электрические свойства.

До наступления теплового равновесия контур медленно изменяет свои параметры. Если контур служит для возбуждения колебаний в генераторе — частота генератора изменяется с температурой частей контура.

Поэтому в нужных случаях применяются специальные конструкции конденсаторов и катушек, в которых действие теплового расширения автоматически компенсируется.

2) Подчеркнем еще раз, что в этой главе мы принимали, что контур образован из сосредоточенных L , C и r . В действительности, как уже говорилось выше, сосредоточенных элементов не существует.

Каждый участок проводника в различной степени соединяет в себе свойства всех трех элементов. Однако практически, как было уже сказано в гл. II, элементы L и C можно считать сосредоточенными, если на них укладывается очень малая доля волны. В высокочастотных контурах это требование соблюдается только отчасти или вовсе не соблюдается, в особенности в отношении катушек самоиндукции.

При высоких частотах емкость катушки часто играет очень значительную роль в двух отношениях.

Во-первых, если элементы контура остаются геометрически неизменными, а частота меняется, то величина коэффициента самоиндукции изменяется с изменением частоты.

Во-вторых, емкость контура в действительности состоит из двух слагаемых: емкости конденсатора и емкости катушки. Поэтому, когда мы изменяем величину емкости конденсатора на A процентов, то в действительности емкость контура изменяется на B процентов, причем $B < A$. Доведя емкость конденсатора до нуля, мы тем не менее имеем в реальном контуре „паразитную“ емкость, создаваемую катушкой.

Что касается самоиндукции конденсатора, то она практически имеет значение только при весьма высоких частотах.

Значительное влияние в качестве самоиндукций или емкостей могут оказать соединительные провода, ведущие от конденсатора к катушке или к другим частям схемы.

3) Влияние скинэффекта в реальных контурах выражается, во-первых, в увеличении сопротивления проводов при увеличении частоты. Во-вторых, в катушках, сделанных из труб или проволоки, с увеличением частоты падает значение коэффициента самоиндукции, так как токовые линии вытесняются с путей, дающих большую самоиндукцию (см. гл. I, § 27).

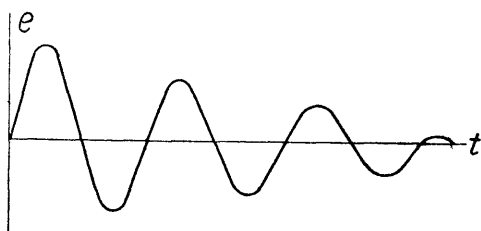
Таким образом выведенные здесь соотношения для контуров могут оказаться недостаточно точными, в особенности при очень высоких частотах.

Учесть эти неточности чисто теоретическим путем весьма трудно в каждом частном случае; поэтому в радиотехнике наряду с расчетом необходимо применение измерений и различных расчетных таблиц, полученных на основании эксперимента.

§ 13. Предварительные замечания об устанавливающихся процессах в контуре.

До сих пор мы рассматривали явления в контуре в установившемся режиме и поэтому могли пользоваться символическим методом. Мы могли бы использовать тот же метод для исследования устанавливающегося режима посредством следующего приема.

Положим, что в контуре действует некоторая эдс, например, выражающаяся во времени кривой фиг. 3.27, и мы хотим узнать, как будет изменяться во времени ток в контуре, состоящем, например, из C , L и R .



Фиг. 3.27.

Представим нашу кривую в виде спектра эдс, т. е. в виде суммы большого или бесконечного числа эдс различных амплитуд, частот и фаз.

Эти эдс, составляющие спектр, будут длиться от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, и поэтому мы застаем в момент времени $t = 0$ и во все последующие моменты уже установившийся режим для всех эдс.

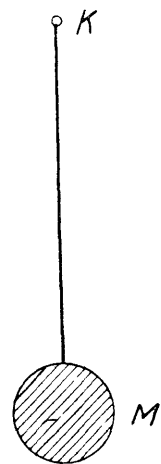
Каждой эдс будет соответствовать некоторый ток, который легко определить, зная устройство контура. Все токи в совокупности дадут некоторый спектр тока. Этому спектру будет соответствовать некоторая кривая тока, которая дает ответ на поставленный вопрос.

Этот путь является универсальным и пригоден для любого случая. Мы им, однако, не можем здесь воспользоваться вследствие его сложности и необходимости некоторого расширения математических сведений читателя.

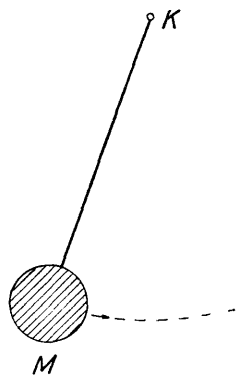
Поэтому мы остановимся только на некоторых наиболее интересных частных случаях устанавливающегося режима и раньше, чем приступить к математическому анализу, рассмотрим явления качественно со стороны их физического содержания. Здесь нам большую помощь может оказать физическая аналогия из области механических явлений, которой мы и воспользуемся.

Представим себе маятник, состоящий из груза M , подвешенного на нити, закрепленной в точке K (фиг. 3.28), и способного совершать колебания. Положим, что под действием какой-то причины маятник колеблется, и мы застаем его в некоторый момент в крайнем левом положении (фиг. 3.29).

В этот момент груз M поднят по отношению к своему среднему положению и обладает некоторым запасом энергии. Сила тяжести, стремясь опустить груз, сообщает ему ускорение, вследствие чего он начинает двигаться вниз и вправо, постепенно теряя свой запас потенциальной энергии и приобретая скорость, т. е. запас кинетической энергии.



Фиг. 3.28.



Фиг. 3.29.

Когда через $1/4$ периода колебания нить маятника примет отвесное положение, вся его потенциальная энергия окажется израсходованной, но зато около этого момента груз будет иметь максимальную скорость, т. е. максимальный запас кинетической энергии.

Кинетическая энергия в следующие $1/4$ периода вновь переходит в потенциальную, и груз, двигаясь вправо, постепенно поднимается, пока не достигнет крайнего правого положения. Теперь опять вся энергия маятника получила потенциальную форму, и процесс колебаний начнется вновь уже в противоположном направлении.

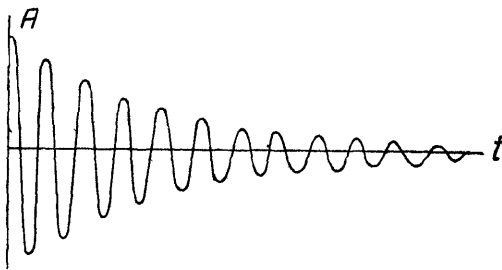
С каждым размахом амплитуда колебаний становится все меньше и меньше, потому что часть энергии затрачивается на преодоление различных трений.

Изображенная графически кривая колебаний получает вид затухающей синусоиды (фиг. 3.30). Затухание идет тем медленнее, чем больше запас энергии маятника по сравнению с потерями мощности на трение.

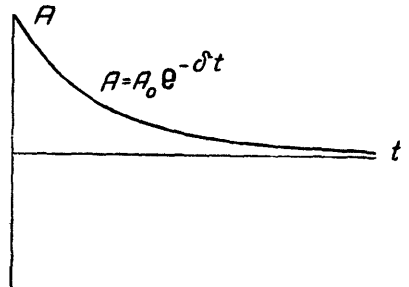
Если отнести затухание на каждый период, то можно сформулировать это и иначе: относительное уменьшение амплитуды в течение периода тем меньше, чем больше реактивная мощность маятника (запас энергии, поделенной на длину периода) по сравнению с активной мощностью (расходуемой на трение).

Совершенно такая же картина должна получиться и в контуре.

Положим, что мы застаем контур в том момент, когда заряд на конденсаторе достиг максимума, а ток в самоиндукции равен нулю. Пусть



Фиг. 3.30.



Фиг. 3.31.

с этого момента всякая внешняя эдс отсутствует. Начнется разряд конденсатора и через некоторое время конденсатор разрядится. Однако за время этого разряда при малой величине сопротивления энергия не могла перейти в тепло. Это значит что она продолжает существовать в контуре в другой форме, а именно — в форме магнитного поля. Это соответствует тому факту, что напряжение на конденсаторе сдвинуто по фазе по отношению к току на угол 90° .

Следовательно, так же, как в маятнике, потенциальная энергия электрического заряда перешла в кинетическую энергию магнитного поля.

Далее магнитное поле, исчезая, поддерживает ток того же направления, которое он имел в момент своего максимума. Этот ток заряжает конденсатор вновь, но заряд имеем знак, противоположный предыдущему.

После этого начинается обратный процесс, заканчивающийся вновь зарядом конденсатора с той же полярностью, как и в самый первый момент.

Этот процесс носит название электрических колебаний. Колебания постепенно затухают так же, как и колебания маятника.

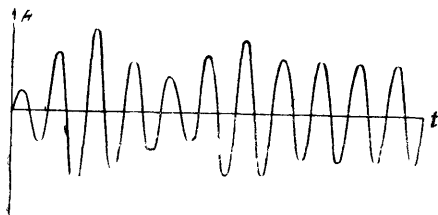
Относительное уменьшение амплитуды за один период тем больше, чем больше энергия, расходуемая в сопротивлении за один период по отношению к запасу энергии контура. Иначе говоря, чем больше активная мощность по сравнению с вольтамперами.

Если маятник поместить в очень вязкую среду или в контуре очень увеличить сопротивление, то колебания прекратятся, и явление примет аperiодический характер, которому соответствует кривая фиг. 3.31.

Аperiодический разряд будет во всяком случае иметь место в том случае, если угол сдвига фазы между током и напряжением в контуре будет близок к нулю, так как тогда одновременно с исчезновением напряжения исчезнет и ток.

Наоборот, даже при очень большом расходе энергии, если угол сдвига фазы близок к 90° , разряд может весьма быстро затухать, но останется колебательным.

Рассмотрим теперь обратный процесс, а именно процесс раскачивания под действием внешней периодической силы. Прилагая к маятнику толчки через равные промежутки времени, мы вызовем процесс его раскачивания. Однако, если эти толчки по своему периоду не будут совпадать с периодом маятника, — его раскачивание не достигнет большой амплитуды. Некоторые толчки будут попадать в такт с колебаниями. Тогда маятник будет получать энергию, отбирая ее от толкающего механизма. Другие толчки попадут не в такт и замедлят раскачивание. Маятник в эти моменты будет, наоборот, отдавать свою энергию толкающему механизму.



Фиг. 3.32.

Если же период толчков в точности совпадает с собственными периодами маятника, раскачивание будет идти непрерывно и закончится тогда, когда вся мощность толкающего механизма будет расходоваться на различные трения.

Аналогичное явление будет иметь место и в случае контура, находящегося под действием эдс.

Максимальная возможная амплитуда в установившемся режиме в контуре будет соответствовать случаю, когда собственный период контура совпадет с периодом вынуждающей эдс. Мы уже знаем, что в контуре с последовательным сопротивлением и последовательной эдс этому соответствует частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Из этого следует, что и при свободных затухающих колебаниях частота должна быть близкой к этой величине (хотя несколько и может отличаться, так как процесс носит затухающий характер).

При несовпадении частоты вынуждающей эдс с собственной частотой контура процесс будет иметь сначала характер чередующегося усиления и ослабления колебаний (как на фиг. 3.32), а затем уже установится на некотором уровне амплитуды.

§ 14. Разряд самоиндукции и емкости через сопротивление.

Рассмотрим еще два случая устанавливающегося режима в более простых цепях, образованных из контура, в котором $L=0$ или $C=\infty$.

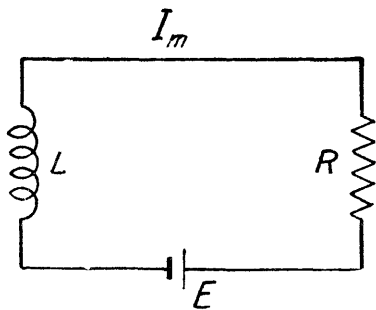
а) Разряд самоиндукции через сопротивление.

Пусть в цепи, составленной из последовательно соединенных сопротивления и самоиндукции, была включена постоянная эдс E , которая действовала неограниченное время (фиг. 3.33) и создала ток I_m .

Пусть в момент времени $t=0$ эта эдс внезапно исчезла, и система начала разряжаться.

Дифференциальное уравнение такой системы будет

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (3.56)$$



Фиг. 3.33.

Полагаем решение его в виде

$$i = Ae^{pt}. \quad (3.57)$$

Подставив в ур-ние (3.56) ур-ние (3.57), найдем

$$LpAe^{pt} + RAe^{pt} = 0, \quad (3.58)$$

или

$$Lp + R = 0. \quad (3.59)$$

Отсюда

$$p = -\frac{R}{L}. \quad (3.60)$$

Следовательно,

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3.61)$$

Начальное условие заключается в том, что при $t=0$, $i = I_m$; поэтому

$$i = I_me^{-\frac{R}{L}t}. \quad (3.62)$$

Ур-ние (3.62) показывает, что с момента предоставления системы самой себе ток уменьшается по экспоненциальному закону и притом тем быстрее, чем больше отношение $\frac{R}{L}$.

Для того чтобы рассмотреть случай, когда постоянная эдс внезапно включена в цепь в момент времени t , заменим эту эдс

$$\begin{aligned} e &= E_m \quad \text{при } t > 0, \\ e &= 0 \quad \text{при } t < 0 \end{aligned}$$

двумя эдс, а именно:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_m \quad \text{при } t \text{ от } -\infty \text{ до } +\infty, \\ e_2 &= -E_m \quad \text{при } t < 0. \end{aligned}$$

Первая эдс, действуя бесконечное время, создаст в цепи к моменту $t=0$ ток

$$i_1 = I_m.$$

Вторая эдс к этому же моменту создаст ток

$$i_2 = -I_m.$$

Оба тока взаимно уничтожаются.

С момента $t=0$ вторая эдс исчезнет. Оставшийся от нее ток уменьшается по найденному закону, т. е.

$$i_2 = I_me^{-\frac{R}{L}t}.$$

Ток первой эдс остается неизменным.

Поэтому общий ток (существующий в цепи) будет

$$i = i_1 + i_2 = I_m \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad (3.63)$$

Это уравнение показывает, что после включения постоянной эдс ток в цепи нарастает, постепенно приближаясь к предельному значению, определяемому для данной цепи законом Ома

$$I_m = \frac{E_m}{R}.$$

Скорость нарастания тока зависит от показателя $-\frac{R}{L}t$. Промежуток времени $\tau = \frac{L}{R}$ называют „постоянной времени“ данной цепи. Чем постоянная времени больше, тем медленнее идет нарастание тока. Режим называется установившимся, когда ток достигает такого значения, что дальнейшее его возрастание не имеет практического значения.

б) Разряд емкости через сопротивление.

Пусть в цепи, состоящую из емкости C и сопротивления r (фиг. 3.34), включена эдс E_m , действующая неограниченное время до момента $t=0$, когда источник эдс внезапно замыкается накоротко. Тогда конденсатор начинает разряжаться через сопротивление r , и в последнем появляется ток i .

Дифференциальное уравнение для этого случая будет

$$e + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad (3.64)$$

где

$$i = \frac{e}{r},$$

так что

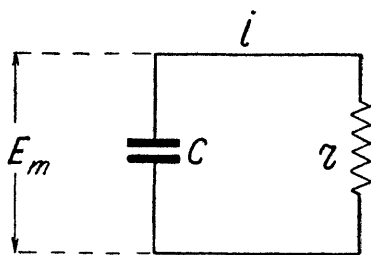
$$\frac{de}{dt} + \frac{e}{Cr} = 0, \quad (3.65)$$

откуда

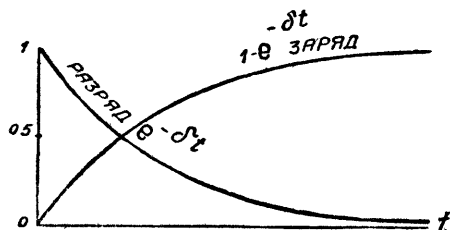
$$e = E_m e^{-\frac{1}{Cr}t}; \quad (3.66)$$

также

$$i = \frac{E_m}{r} e^{-\frac{1}{Cr}t}. \quad (3.67)$$



Фиг. 3.34.



Фиг. 3.35.

Ур-ния (3.66) и (3.67) показывают, что разряд будет происходить по тому же закону, что и в случае самоиндукции, с той только разницей, что постоянная времени теперь выражается величиной

$$\tau = Cr.$$

Совершенно так же, как это было показано выше, можно получить выражение для случая, когда эдс E_m включена в момент времени $t=0$.

Получим

$$e = E_m \left| 1 - e^{-\frac{1}{Cr}t} \right| \quad (3.68)$$

$$i = \frac{E_m}{r} \left| 1 - e^{-\frac{1}{Cr}t} \right| \quad (3.69)$$

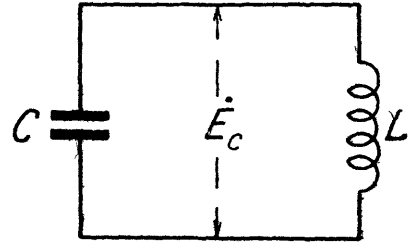
Характер кривых, выражающих зависимость $e^{-\delta t}$ и $(1 - e^{-\delta t})$, показан на фиг. 3.35.

§ 15. Свободные колебания в контуре без потерь.

Рассмотрим теперь разряд в контуре, состоящем из емкости и самоиндукции (фиг. 3.36). Для математического анализа явления надо написать дифференциальные уравнения, выражающие условия равенства эдс и тока.

Очевидно, что в каждый момент напряжение на конденсаторе \dot{E}_c уравнивается напряжением на самоиндукции. Поэтому в контуре без потерь будем иметь

$$\dot{E}_c + L \frac{di}{dt} = 0. \quad (3.70)$$



Фиг. 3.36.

Напряжение на конденсаторе зависит от емкости C и количества электричества q , перенесенного током i ,

$$\dot{E}_c = \frac{1}{C} q = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Поэтому ур-ние (3.70) можно написать так

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0;$$

отсюда

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = - \frac{i}{LC}. \quad (3.71)$$

Ур-ние (3.71) показывает, что ток представляет собой такую функцию времени, вторая производная которой равна самой функции, разделенной на LC и взятой с обратным знаком.

Этому условию удовлетворяет экспоненциальная функция с мнимым показателем $A e^{j \frac{1}{\sqrt{LC}} t}$. Поэтому в ур-нии (3.71) взамен символа $\frac{d}{dt}$ можно написать символ $j\omega$. Получим

$$\omega^2 i = \frac{1}{LC} i,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0.$$

Решение ур-ния (3.71) будет, следовательно,

$$\dot{I} = I_m e^{j\omega t}. \quad (3.72)$$

Кроме того, имея в виду, что

$$\dot{I} = \dot{E} j\omega C$$

(где \dot{E} — напряжение на конденсаторе), можно написать второе уравнение

$$\dot{E} = - \frac{j}{\omega C} \dot{I} = - \frac{j I_m}{\omega C} e^{j\omega t} \equiv E_m e^{j\omega t}. \quad (3.73)$$

Отсюда

$$|E_m| = \left| j \frac{I_m}{\omega C} \right|$$

или

$$E_m = \frac{I_m}{\omega C}.$$

А так как

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то

$$E_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m \quad (3.74)$$

Отношение $\sqrt{\frac{L}{C}}$, как уже говорилось, носит название характеристического сопротивления контура и по своему смыслу аналогично волновому сопротивлению линии.

Ур-ние (3.73) показывает, что если в начальный момент времени $t=0$ на конденсаторе был заряд, создававший напряжение E_m , то в дальнейшем напряжение будет

$$\dot{E} = E_m e^{j\omega t}. \quad (3.75)$$

При этом ток в контуре

$$\dot{I} = \dot{E} j\omega C = j\omega C E_m e^{j\omega t} = j\sqrt{\frac{C}{L}} E_m e^{j\omega t}. \quad (3.76)$$

Ур-ние (3.72) показывает, что если в начальный момент времени ($t=0$) в самоиндукции был ток I_m , то в дальнейшем ток будет равен

$$\dot{I} = I_m e^{j\omega t}, \quad (3.77)$$

а напряжение на конденсаторе

$$\dot{E} = -\frac{j}{\omega C} \dot{I} = -j\sqrt{\frac{L}{C}} I_m e^{j\omega t}. \quad (3.78)$$

В более сложном случае может быть, что в момент времени $t=0$ на конденсаторе контура было напряжение E_{m1} , а в контуре существовал вместе с тем ток I_{m2} . Тогда в дальнейшем в контуре одновременно будут существовать токи и напряжения, вызванные как разрядом конденсатора [ур-ния (3.75) и (3.76)], так и токи и напряжения, вызванные разрядом самоиндукции [ур-ния (3.77) и (3.78)]. Общий ток и общее напряжение по принципу суперпозиции будут равны сумме составляющих, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2, \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \\ \dot{E}_1 &= E_{m1} e^{j\omega t} \\ \dot{I}_1 &= j\sqrt{\frac{C}{L}} E_{m1} e^{j\omega t} \\ \dot{E}_2 &= -j\sqrt{\frac{L}{C}} I_{m2} e^{j\omega t} \\ \dot{I}_2 &= I_{m2} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Колебания будут продолжаться бесконечно, так как контур лишен затухания.

§ 16. Частота и затухание при свободных колебаниях в контуре с потерями.

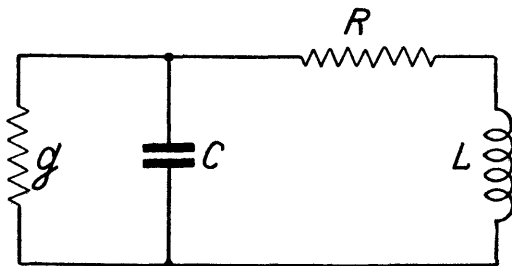
Рассмотрим контур, в котором имеется последовательное сопротивление R и утечка g (фиг. 3.37).

Этот контур можно равнозначно, заменить контуром, состоящим из самоиндукции L' и емкости C' (фиг. 3.38), где L' и C' — комплексные величины. А именно:

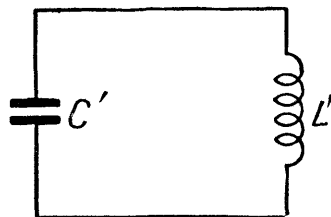
$$\left. \begin{aligned} L' &= L - \frac{jR}{\omega'} \\ C' &= C - \frac{jg}{\omega'} \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

где ω' — действующая частота.

К контуру фиг. 3.38 полностью приложимы все те выводы, которые сделаны в предыдущем параграфе, если только заменить в формулах ω , L и C на ω' , L' и C' , т. е. на комплексные величины.



Фиг. 3.37.



Фиг. 3.38.

Таким образом, получим прежде всего

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}};$$

подставив сюда из ур-ния (3.80) значения L' и C' , найдем

$$\omega'^2 = \frac{1}{\sqrt{\left(L - \frac{jR}{\omega'}\right)\left(C - \frac{jg}{\omega'}\right)}},$$

откуда

$$\omega'^2 LC - j\omega' RC - j\omega' gL - 1 = 0$$

или

$$\omega'^2 - j\omega' \left(\frac{R}{L} + \frac{g}{C}\right) - \frac{Rg}{LC} - \frac{1}{LC} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем

$$\omega' = j \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C}\right) \pm \sqrt{j^2 \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C}\right)^2 + \frac{Rg}{LC} + \frac{1}{LC}}.$$

После небольших преобразований получим

$$\omega' = j \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{jg}{2C}\right)^2}.$$

Знак минус перед корнем отбрасываем, так как вещественную часть комплексной частоты считаем положительной.

Обозначим

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C}\right)^2}, \quad (3.81)$$

$$\delta = \frac{R}{2L} + \frac{g}{2C}. \quad (3.82)$$

Так что

$$\omega' = \omega + j\delta.$$

Если в контуре

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right)^2,$$

ω имеет вещественное значение и представляет собой частоту колебаний.

Если

$$\frac{1}{LC} < \left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right)^2, \quad (3.83)$$

частота делается мнимой, т. е. разряд теряет колебательный характер и переходит в чисто аperiodический. Коэффициент δ называется коэффициентом затухания.

Коэффициент затухания растет с увеличением R и g. Если разряд имеет периодический характер

$$\delta = \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C} \right).$$

При аperiodическом разряде, когда корень $\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right)^2}$ становится мнимым, коэффициент затухания определяется суммой

$$\delta = \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C} \right) + \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right)^2}.$$

Следует подчеркнуть, что увеличение затухания отнюдь не означает приближения разряда к аperiodической форме.

Действительно, момент наступления аperiodического разряда определяется только условием

$$\left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right)^2 = \omega_0^2, \quad (3.84)$$

которое вытекает из неравенства (3.83).

Как бы ни было велико значение

$$\delta = \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C} \right),$$

он не влияет на значение разности

$$\left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right),$$

которая может быть вообще сколь угодно малой или даже равной нулю (при $\frac{R}{L} = \frac{g}{C}$).

Если, например, первоначально в контуре было только сопротивление R и притом было

$$\left(\frac{R}{2L} \right) = \omega_0,$$

разряд имел аperiodический характер, и затухание определялось коэффициентом

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

Включив параллельно конденсатору утечку g, получим колебательный разряд, так как теперь

$$\left(\frac{R}{2L} - \frac{g}{2C} \right)^2 < \omega_0^2,$$

хотя затухание и увеличилось, так как теперь

$$\delta = \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C} \right) > \frac{R}{2L}.$$

§ 17. Токи и напряжения при свободных колебаниях контура с потерями.

Выражения для токов и напряжений были уже написаны в общем виде в § 15 [ур-ние (3.79)] для контура без потерь.

Чтобы перейти к контуру с потерями, надо в этих формулах подставить взамен L значение L' , взамен C значение C' и взамен ω значение ω'

$$\left. \begin{aligned} L' &= L - j \frac{R}{\omega'} \\ C' &= C - j \frac{g}{\omega'} \\ \omega' &= \omega + j\delta \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

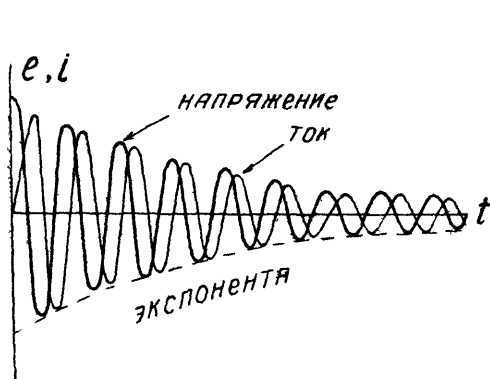
причем в ур-нии (3.85) L и C представляют собой емкость и самоиндукцию контура с потерями, а ω и δ определяются формулами § 16.

Характеристика волнового сопротивления контура с потерями будет

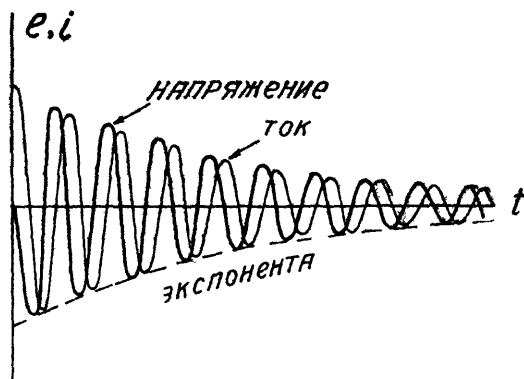
$$\rho = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{L - j \frac{R}{\omega'}}{C - j \frac{g}{\omega'}}$$

Для практически применяемых контуров, ввиду малости R по сравнению с $\omega'L$ и g по сравнению с $\omega'C$, обычно пренебрегают мнимыми составляющими и пишут

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Фиг. 3.39.



Фиг. 3.40.

Поэтому для случая, когда разряд начался с момента $t=0$, когда ток в контуре был равен I_{m1} , а напряжение на конденсаторе было E_{m2} , ур-ния (3.79) § 15 переписываются следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2, \\ \dot{i} &= \dot{i}_1 + \dot{i}_2, \\ \dot{E}_1 &= E_{m1} e^{j\omega t - \delta t} \\ \dot{i}_1 &= j \sqrt{\frac{C}{L}} E_{m1} e^{j\omega t - \delta t} \\ \dot{E}_2 &= -j \sqrt{\frac{L}{C}} I_{m2} e^{j\omega t - \delta t} \\ \dot{i}_2 &= I_{m2} e^{j\omega t - \delta t} \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

На фиг. 3.39 показаны кривые колебаний для случая, когда первоначально существовал только заряд на конденсаторе.

На фиг. 3.40 показаны кривые для случая, когда первоначально существовал только ток в самоиндукции.

§ 18. Различные характеристики контура с потерями.

Из характеристик контура выше уже упоминались характеристическое сопротивление $\sqrt{\frac{L}{C}}$ и коэффициент затухания (δ).

Укажем еще некоторые характеристики.

Промежуток времени T между моментами, когда ток (или напряжение) в контуре, проходя через нулевое значение, одинаков во все время колебаний и равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

называется собственным периодом колебательного контура.

Если $\delta \ll \omega$, то приближенно можно написать

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Если емкость измерять в сантиметрах (т. е. в CGS_e системе) и самоиндукцию также измерять в сантиметрах (т. е. в CGS_m системе), то получим

$$T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LC},$$

где c —скорость света.

Так как произведение Tc дает длину волны, то

$$Tc = \lambda = 2\pi\sqrt{L_{cm}C_{cm}}. \quad (3.87)$$

Эта волна называется „собственной волной контура“.

Ф-ла (3.87) носит название „формулы Томсона“.

Следующей важной характеристикой контура является так называемый логарифмический декремент затухания.

Если в некоторый момент времени ток имел значение i_1 , а спустя один период получил значение i_2 , то отношение $\frac{i_1}{i_2}$ остается постоянным и не зависит от t . Действительно,

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{i_t}{i_{t+T}} = \frac{\frac{E_m}{L\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t)}{\frac{E_m}{L\omega} e^{-\delta(t+T)} \sin(\omega t)} = e^{\delta T},$$

откуда

$$\delta T = \ln i_1 - \ln i_2 = \vartheta.$$

Эта величина называется „логарифмическим декрементом“ затухания контура и в случае $\delta \ll \omega$ может быть выражена равенством

$$\vartheta = \delta T = 2\pi \left(\frac{R}{2L} + \frac{g}{2C} \right) \sqrt{LC}.$$

Если $g = \infty$, т. е. утечки на конденсаторе нет, то

$$\vartheta = 2\pi \frac{R}{2L} \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Чем меньше логарифмический декремент, тем за большее число периодов амплитуда колебаний уменьшится в некоторое заданное число раз.

Величина, обратная декременту, показывает, сколько периодов колебаний пройдет до момента, когда амплитуда уменьшится в e раз. Действительно, экспоненциальный множитель, определяющий затухание, равен $e^{-\delta t}$. Его можно написать и так:

$$e^{-\delta t} = e^{-\vartheta \left(\frac{t}{T} \right)}.$$

Применяя выражение $\left(\frac{t}{T}\right)$, мы измеряем время, измеренное не секундами, а числом периодов. Если амплитуда уменьшилась в e раз, то

$$\vartheta \frac{t}{T} = 1,$$

а следовательно, число периодов равно

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{\vartheta}.$$

Легко показать, что декремент затухания пропорционален отношению мощности к вольтамперам.

§ 19. Определение декремента затухания посредством кривых резонанса.

Коэффициент затухания и декремент могут быть определены из кривой резонанса контура.

Уравнение для такой кривой было дано в § 2, ф-ла (3.4) в следующем виде

$$\frac{I_m}{I_{m \text{ рез}}} = \sqrt{1 + \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}{R^2}}$$

Перепишем его так

$$\frac{I_m^2}{I_{m \text{ рез}}^2} = \frac{1}{1 + \frac{L^2}{R^2} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\right)^2}, \quad (3.88)$$

где ω_0 — собственная частота контура, равная $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Если затухание не слишком велико, то значительные изменения отношения

$$\frac{I_m^2}{I_{m \text{ рез}}^2}$$

произойдут при относительно небольшом отступлении действующей на контур частоты ω от резонансной частоты ω_0 .

Поэтому положим, что

$$\omega = \omega_0 + \Delta,$$

где Δ переменная величина, малая по сравнению с ω_0 .

Тогда, имея в виду, что в урнии (3.88)

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} = \frac{\omega^2 - (\omega_0 + \Delta)^2}{\omega} \approx -2\Delta, \quad (3.89)$$

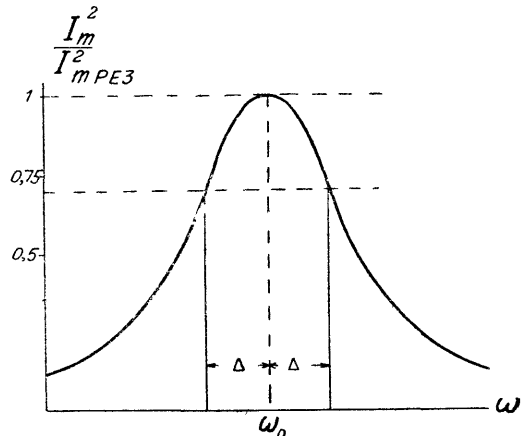
напишем

$$\frac{I_m^2}{I_{m \text{ рез}}^2} = \frac{1}{1 + \frac{4L^2}{R^2} \Delta^2} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2}{\delta^2}}.$$

Отношение $\frac{I_m^2}{I_{m \text{ рез}}^2}$ станет равным половине (фиг. 3.41), если

$$\Delta = \delta. \quad (3.90)$$

Это дает возможность непосредственно измерить значение δ .



Фиг. 3.41.

Коэффициент затухания δ приблизительно равен разности между частотой резонанса и той частотой, при которой ток в контуре уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Практически разность частот измерять не так удобно, как отношение частоты при резонансе к другой какой-нибудь частоте.

Помножив обе части уравнения (3.90) на $\frac{2\pi}{\omega}$, получим

$$2\pi \frac{\Delta}{\omega} = \delta \frac{2\pi}{\omega} = \vartheta \approx 2\pi \frac{\Delta}{\omega_0}.$$

Таким образом, если по оси абсцисс кривой резонанса откладывать не величину Δ , а отношение $\frac{\Delta}{\omega_0}$, т. е. относительную расстройку цепи, а по оси ординат $\frac{I_m^2}{I_{m^2 \text{ рез}}}$, то ординаты уменьшатся вдвое в тот момент, когда $\frac{2\pi\Delta}{\omega_0}$ численно будет равно логарифмическому декременту.

Сказанное здесь для простоты отнесено к случаю последовательного сопротивления.

В случае параллельного сопротивления как характер рассуждений, так и окончательный результат ничем не отличаются.

§ 20. Устанавливающийся процесс в контуре под действием внешней эдс.

Рассмотрим теперь процесс развития колебаний в контуре под действием внешней незатухающей эдс, включенный в некоторый момент (который обозначим как $t=0$), и далее длющийся неопределенно долгое время.

Уравнение этой эдс пусть будет

$$\left. \begin{aligned} e &= 0 && \text{при } t < 0 \\ e &= E_m \cos(\omega t) && \text{при } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

Для того чтобы написать уравнения для тока в контуре под действием этой эдс можно воспользоваться уже полученными ранее результатами при помощи следующего примера.

Мы полагаем, что эдс, действующая на контур, не равна нулю при $t < 0$ и выражается тем же уравнением, как и при $t > 0$.

Другими словами, мы полагаем, что эта эдс существует вечно и выражается уравнением

$$e_1 = E_m \cos(\omega t) \text{ при } t \text{ от } -\infty \text{ до } +\infty. \quad (3.91)$$

Для того же, чтобы восстановить действительное положение вещей, мы полагаем, что кроме этой эдс существует еще другая, которая выражается тем же законом, но с обратным знаком, и длится только до момента $t=0$

Эта вторая эдс выражается, следовательно, так:

$$\left. \begin{aligned} e_2 &= 0 && \text{при } t > 0 \\ e_2 &= -E_m \cos(\omega t) && \text{при } t < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Сумма эдс e_1 и e_2 дает ту самую эдс, которая существует в действительности

$$e_1 + e_2 = e. \quad (3.93)$$

Ток в контуре при таком представлении будет состоять из двух слагающих. Это будет, во-первых, ток i_1 , который соответствует эдс e_1 . Он

определится по формуле для установившегося режима, так как эдс действует сколь-угодно долгое время

$$i_1 = \frac{E_m}{Z},$$

где Z — комплексное сопротивление контура для данного включения эдс. Этот ток будет существовать все время от $t = -\infty$ до $t = +\infty$.

Вторым слагающим будет ток, образованный эдс e_2 , который к моменту $t=0$ определится такой же формулой установившегося режима и будет равен

$$i_2 = -\frac{E_m}{Z}, \quad (3.95)$$

где Z — то же самое сопротивление.

Полный ток до момента $t=0$ будет

$$i = i_1 + i_2 = 0. \quad (3.96)$$

После момента $t=0$ ток i_1 будет продолжаться, вместо же тока i_2 в контуре появится новый ток i_3 , соответствующий затухающим колебаниям, которые возникают в контуре вследствие прекращения действия эдс e_2 .

Начальными условиями этих колебаний являются те заряды и токи, которые были созданы эдс e_2 к моменту ее исчезновения, т. е. к моменту $t=0$. Эти условия всегда легко вычислить из уравнения (3.95).

В простейшем случае, который мы здесь рассмотрим, а именно, когда эдс e присоединена к обкладкам конденсатора C и контур настроен на частоту эдс, в этом вычислении даже нет надобности, так как очевидно, что к моменту $t=0$ эдс

$$\begin{aligned} \text{а эдс} \quad & \left. \begin{aligned} e_1 &= E_m \\ e_2 &= -E_m \end{aligned} \right\} \quad (3.97) \end{aligned}$$

Следовательно, после $t=0$ мы будем иметь, во-первых, ток i_1 , который в случае малого затухания контура при настройке контура в резонанс будет

$$i_1 = E_m \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega t) \quad (3.98)$$

и, во-вторых, ток i_3 , который будет представлять собой затухающее колебание, соответствующее начальному заряду конденсатора, равному $-E_m$.

Если затухание невелико, то на основании полученных ранее результатов этот ток будет равен,

$$i_3 = -E_m \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\delta t} \sin(\omega t), \quad (3.99)$$

где ω — собственная частота контура, совпадающая с частотой эдс, а δ — коэффициент затухания

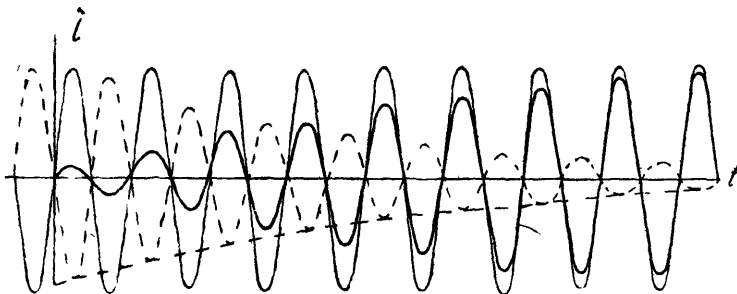
$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \\ \delta &= \frac{R}{2L}. \end{aligned}$$

Таким образом в рассматриваемом простейшем случае, когда действующая частота совпадает с собственной частотой контура

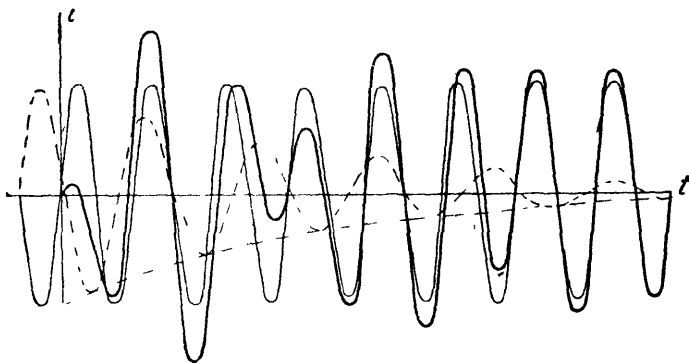
$$i = i_1 + i_3 = E_m \sqrt{\frac{C}{L}} (1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t). \quad (3.100)$$

На фиг. 3.42 показаны кривые для случая, когда действующая частота совпадает с собственной частотой контура.

На фиг. 3.43 показан случай, когда действующая частота не совпадает с собственной частотой контура.



Фиг. 3.42. Толстой линией обозначен суммарный (действительный) ток, пунктиром—затухающие свободные колебания, тонкой линией—вынужденные колебания.



Фиг. 3.43. Толстой линией обозначен суммарный (действительный) ток, пунктиром—затухающие свободные колебания, тонкой линией—вынужденные колебания.

Тонкая линия соответствует току i_1 . Пунктирная линия соответствует току затухающего колебания i_2 . Жирная линия дает сумму обоих токов, т. е. действительный ток в контуре.

§ 21. Свободные и вынужденные колебания.

В связи с указанным представлением в контуре обычно рассматривают два тока: „вынужденный“, т. е. возникший под действием эдс e_1 (и имеющий период этой „вынуждающей эдс“) и „свободный“, т. е. ток, который соответствует эдс e_2 .

Свободный ток, следовательно, имеет затухающий характер и имеет частоту, свойственную данному контуру.

Полный ток есть сумма „свободного“ и „вынужденного“.

Свободный ток, или говоря иначе, колебания с периодом, свойственным самой колебательной системе, возникают при всякой перемене режима действующей эдс. Сюда относится уменьшение или увеличение амплитуды, изменение периода или фазы эдс, появление новых периодических эдс или отдельных толчков.

На все это колебательная система обязательно отзовется в форме появления в ней колебаний свойственного ей периода. Эти колебания далее затухают со свойственным системе коэффициентом затухания.

Явление это играет иногда большую практическую роль, так как контуры и вообще системы, способные колебаться, как бы навязывают свои свободные колебания, создавая этим помехи.

Было бы, однако, совершенно неправильно думать, что этим путем колебательные системы создают свои собственные частоты. В действительности они только выделяют из спектра действующей эдс некоторые полосы частот, которые соответствуют свободным колебаниям и которые обязательно должны уже содержаться в действующем на систему спектре.

§ 22. Устанавливающийся режим при сигналах.

В радиотехнике телеграфные сигналы подаются чаще всего посылкой коротких и длинных групп незатухающих колебаний.

Так например, на фиг. 3.44 графически изображена кривая тока (или напряжения, соответствующая букве „д“ (тире две точки).

В приемном устройстве в контуре, настроенном на частоту колебаний, индуктируется эдс, характеризующаяся такой же кривой (фиг. 3.44). Далее, под действием эдс в контуре возникает ток, амплитуда которого нарастает и спадает согласно тем законам, которые были выведены.

Таким образом общий характер кривой тока получается таким, как это показано на фиг. 3.45.

Амплитуда тока нарастает и постепенно достигает некоторого значения, после которого дальнейший рост практически не имеет значения.

Когда эдс прекратила свое действие, амплитуда тока начинает спадать. И нарастание и спад идут, разумеется, тем медленнее, чем меньше затухание контура.

Контур с очень малым затуханием может совершенно размыть сигнал и слить отдельные его части в одно целое. Сигнал станет неразборчивым и это может затруднить, или даже сделать невозможным, его прием. Такое явление будет наблюдаться тем резче, чем меньшее число периодов колебаний укладывается на протяжении одной посылки (группу колебаний) или на протяжении интервала между посылками.

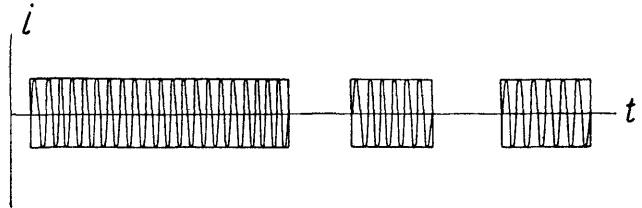
Чем медленнее идет передача и чем выше частота колебаний, тем менее заметен будет этот эффект размывания сигнала

при том же декременте затухания контура.

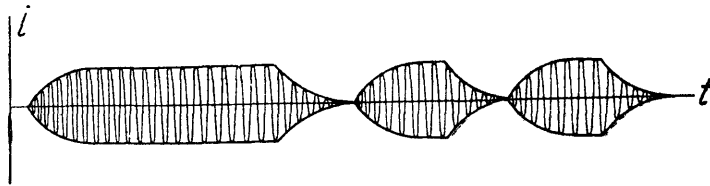
С другой стороны, малый декремент контура необходим для того, чтобы можно было отфильтровать, т. е. отделить данный сигнал, подающийся на какой-то полосе частот от ω до ω_1 , от всяких других чужих сигналов, подающихся на частотах $\omega_2, \omega_3 \dots$ и т. д.

Таким образом здесь вступают в противоречие два требования: требование быстрого действия, т. е. ускорения ритма посылок (и поэтому сокращения длины каждой посылки), противоречит требованию применения остро настроенных цепей, необходимых для выделения данного сигнала. Разрешение этого противоречия заключается в правильном сочетании обоих требований.

Для того чтобы это сделать, мы должны несколько глубже проанализировать физическое содержание этого противоречия. Здесь мы подходим к одному из основных явлений радиотехники, с которым не раз еще встретимся. Правильное понимание и рациональное теоретическое представление об этом явлении крайне важно, и читатель должен особенно внимательно



Фиг. 3.44.

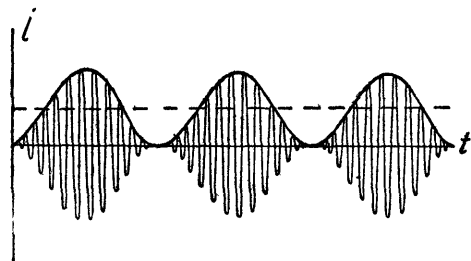


Фиг. 3.45.

относиться к следующим разъяснениям, дающим простой и универсальный ключ ко многим сложным явлениям.

Если данный контур, являющийся линейной системой, не может воспроизвести без искажения данный сигнал, это обязательно и совершенно непреложно означает, что спектр данного сигнала после прохождения через контур существенно искажен.

Совершенно нет надобности детально исследовать, как нарастают и спадают колебания в контуре для того, чтобы сказать, будет искажен сигнал или нет. Для этого достаточно знать: а) каков спектр сигнала в своей существенной части и б) какова полоса пропускания частот данным контуром (или другим фильтром).



Фиг. 3.46.

Обе эти величины обычно легко и при помощи простых приемов могут быть определены. Нарастание же и спад тока или напряжения в контуре могут иметь бесчисленное количество вариантов и доступны исследованию только в более простых случаях.

Что касается спектра телеграфного сигнала, то он состоит из отдельных посылок, а каждая посылка состоит из отрезка синусоиды. Для того чтобы пропустить совершенно без искажения весь сигнал, необходимо равномерно пропустить спектр кривой, состоящий из самого короткого отрезка синусоиды. Однако это является недостижимым идеалом, так как этот спектр сплошной и ширина его простирается от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$. Поэтому данный спектр без всякого искажения пропустить принципиально невозможно. Следует выбрать такую меру искажения, при которой сигнал оставался бы доброкачественным, а фильтр не пропускал бы вместе с тем слишком широкую полосу частот, так как это увеличило бы количество помех.

Рассмотрим в качестве примера телеграфный сигнал, подаваемый азбукой Морзе. Положим, что сигнал состоит только из точки и что в секунду подается 150 точек. Вследствие искажения каждый сигнал вообще будет искажен в том смысле, что и начало и конец его, как только что было показано, будут несколько размыты.

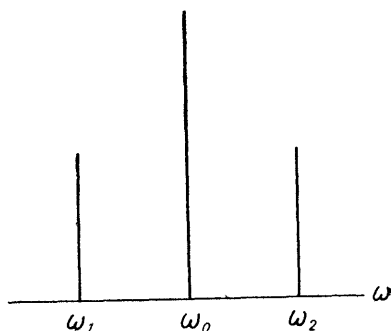
Будем считать пределом допустимого искажения такое, при котором ряд последовательных точек даст кривую, показанную на фиг. 3.46, и посмотрим, какими свойствами должен обладать фильтр, чтобы пропустить подобную кривую без существенных искажений.

Огибающую на фиг. 3.46 предположим для простоты синусоидальной. Тогда вписанная в нее высокочастотная кривая может рассматриваться как результат биения трех частот f_0 — частоты передатчика (в герцах) и $(f_0 + n)$ и $(f_0 - n)$, где n — число точек в секунду, т. е. в данном случае 150.

Спектр этой кривой показан на фиг. 3.47. Величина $\omega_0 = 2\pi f_0$; $\Delta = 2\pi n$.

Чтобы фильтр пропускал без искажения рассматриваемые колебания, надо, чтобы в пределах спектра полосы не было заметной разницы в прохождении различных частот. За меру допустимого отклонения тока от его максимального значения примем величину 0,7, т. е. будем считать, что полоса пропускания контура ограничена частотами, при которых квадрат амплитуды тока вдвое меньше квадрата амплитуды при резонансе (фиг. 3.48).

Эта мерка, разумеется, совершенно условна, но практически она пригодна для большинства форм сигналов. Удобство ее заключается в следую-



Фиг. 3.47.

шем. Как мы видели, квадрат силы тока уменьшается вдвое при отходе от резонанса на частоту Δ , численно равную коэффициенту затухания контура (§ 19). Поэтому для того, чтобы контур пропустил полосу частот от $\omega - \Delta$ до $\omega + \Delta$ и амплитуды при этих крайних частотах были бы ослаблены 0,7 раз, надо сделать коэффициент затухания δ равным половине ширины полосы. Таким образом должно быть

$$\Delta = 2\pi n = \delta.$$

В нашем случае при $n = 150$

$$\delta = 2\pi n \approx 1000.$$

Если частота, на которой ведется передача, будет, например, 10^5 *гц* (что соответствует волне 3000 *м*), то логарифмический декремент контура должен быть

$$\vartheta = \delta T = \frac{10^3}{10^5} = 0,01.$$

Устроить контур со столь малым декрементом возможно, хотя и довольно трудно.

Если бы передача шла на волне 300 *м* ($f = 10^6$ *гц*), требуемый декремент получился бы равным

$$\vartheta = \delta T = \frac{10^3}{10^6} = 0,001.$$

Такой декремент практически не может быть получен в одиночном контуре и поэтому для надлежащей фильтрации потребовалось бы прибегнуть к нескольким контурам или к особым устройствам с электронными лампами.

Наоборот, если бы была применена волна 30 000 *м*, то потребовался бы декремент 0,1, т. е. контур с относительно сильным затуханием.

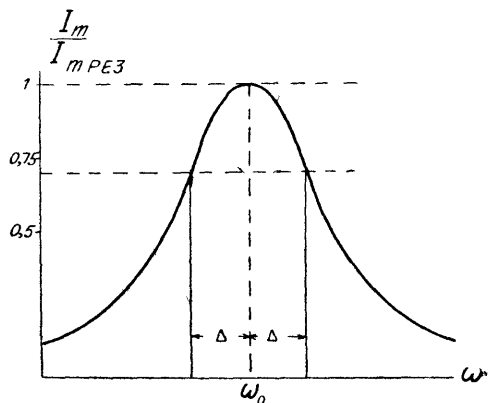
Рассматривая передачу телеграфного сигнала, мы от формы кривой сигнала перешли к спектру. Чаще, однако, бывает, что с самого начала задан именно спектр сигнала или, по крайней мере, ширина этого спектра. Например, кривые микрофонного тока при разговоре могут быть бесконечно разнообразны, но спектр их содержит частоты от 30 до 10 000 *гц*, а для коммерческой телефонии из этого диапазона существенным оказывается только интервал частот от 300 до 3000 *гц*.

Было бы невозможно охватить аналитически все комбинации нарастания и спада кривых телефонного тока в различных контурах с целью выяснения искажений вследствие устанавливающегося режима. Метод спектра дает на это непосредственный и совершенно исчерпывающий ответ: если данная цепь (например, контур) пропускает без значительного ослабления все частоты спектра и если изменение фазовых сдвигов не играет роли, то существенных искажений не будет.

Фазовые сдвиги играют роль в редких случаях, и тогда надо обследовать еще и эту сторону вопроса.

Что же касается несущественных изменений, то они будут обязательно во всех случаях, когда применяется колебательная система, хотя не всегда их можно практически обнаружить.

Эти искажения будут обусловлены теми частями спектра, которые мы ради простоты не принимаем в расчет, представляя спектр сигнала ограниченным полосой частот, в то время, как он всегда простирается во всей области возможных частот.



Фиг. 3.48.

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛ. IV.

C — емкость
 E, e — эдс
 e — основание неперовых логарифмов
 I, i — сила тока
 j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$)
 k — коэффициент связи
 L — коэффициент самоиндукции
 M — коэффициент взаимной индукции
 M_C — коэффициент взаимной емкости
 P — мощность
 R, r — активное (ваттное) положительное сопротивление
 R_s — „вносимое“ сопротивление
 t — время
 x — модуль реактивного сопротивления
 Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления ($Z = r + jx$)
 Φ — поток силовых линий
 δ — коэффициент затухания

η — коэффициент полезного действия (кпд)
 τ — период биений
 Ω, ω, Δ — круговая частота
 \equiv — знак тождества

Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m и т. д.

Постоянные и среднеквадратичные значения теми же буквами без индекса, например, E, I, P и т. д.

Мгновенные значения, выраженные в тригонометрической форме, обозначены малыми буквами, например,

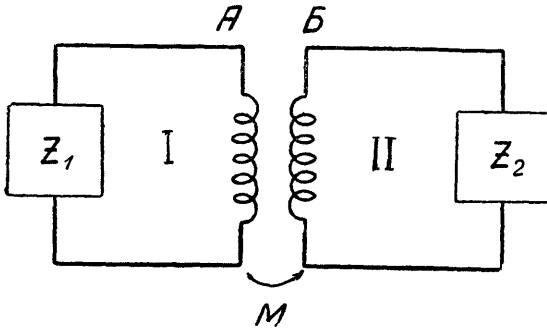
$$i = I_m \sin(\omega t) \text{ и т. п.}$$

Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например,

$$\dot{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ и т. д.}$$

§ 1. Магнитная связь.

Две электрические цепи называются связанными, если при прохождении переменного тока по одной цепи в другой цепи наводится эдс. Связь всегда имеет взаимный характер, т. е. если первая цепь способна возбудить эдс во второй цепи, то и обратно — при прохождении переменного тока по второй цепи, в первой будет наводиться эдс.



Фиг. 4.1.

На практике связь между цепями может быть осуществлена различными способами. Рассмотрим индуктивную связь.

Цепь I фиг. 4.1 связана с цепью II взаимной индукцией, т. е. при прохождении тока по катушке A, принадлежащей цепи I часть силовых линий пересекает катушку B, принадлежащую к цепи II.

Вследствие этого в цепи II наводится эдс

$$\dot{E}_2 = -j\omega M \dot{I}_1,$$

где \dot{I}_1 — ток в первой цепи, а M — коэффициент взаимной индукции.

Так же при прохождении тока по второй цепи в первой наводится эдс

$$\dot{E}_1 = -j\omega M \dot{I}_2.$$

Положим, что в одной из цепей (например, в цепи I) действует источник переменной эдс \dot{E} (фиг. 4.2). Пусть эта цепь представляет собой

контур с емкостью C_1 , самоиндукцией L_1 и сопротивлением R_1 , равным образом, как и связанная с ней вторая цепь с параметрами C_2 , L_2 и R_2 . Коэффициент взаимной индукции обозначим M .

Если бы между контурами не было взаимной связи, то ток в первом контуре определился бы из равенства

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_1}, \quad (4.1)$$

причем

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}. \quad (4.2)$$

Однако, так как между катушками существует взаимная связь и во втором контуре (под действием первого) существует ток \dot{I}_2 , то кроме эдс \dot{E} в первом контуре появляется еще эдс

$$\dot{E}_1 = -j\omega M \dot{I}_2,$$

вследствие чего взамен ур-ния (4.1) надо писать

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E} - j\omega M \dot{I}_2}{Z_1}, \quad (4.3)$$

откуда легко получить

$$\dot{E} = \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2. \quad (4.4)$$

Для второй цепи уравнение будет иметь аналогичный вид, но так как в этой цепи единственным источником эдс является взаимная индукция, то взамен \dot{E} пишем нуль

$$0 = \left(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1. \quad (4.5)$$

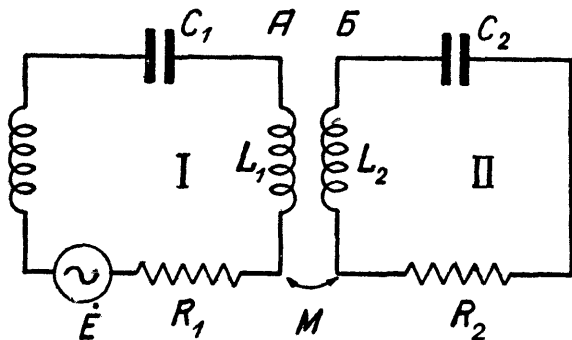
Два ур-ния (4.4) и (4.5) дают возможность найти \dot{I}_1 и \dot{I}_2 , если \dot{E} и параметры цепей заданы.

§ 2. Емкостная связь.

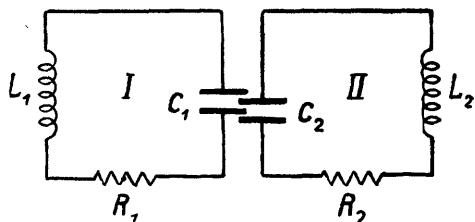
На фиг. 4.3 показаны две цепи, связанные через взаимную емкость. Такая связь практически осуществляется, если электрическое поле конденсатора C_1 проникает в конденсатор C_2 .

На фиг. 4.3 показаны, например, два конденсатора C_1 и C_2 , емкостная связь между которыми обусловлена тем, что часть поля одного конденсатора занимает тот же участок пространства, что и часть поля другого конденсатора.

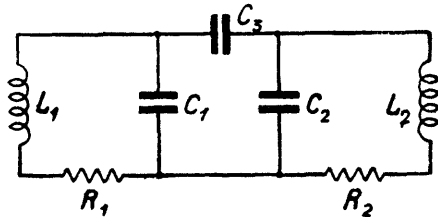
На фиг. 4.4 показан способ осуществления емкостной связи через параллельный конденсатор C_3 .



Фиг. 4.2.



Фиг. 4.3.

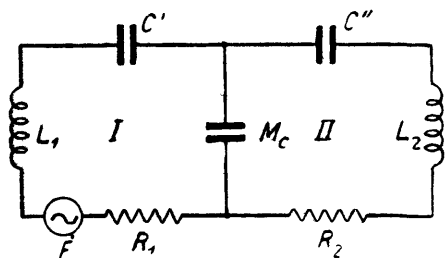


Фиг. 4.4.

сатора занимает тот же участок пространства, что и часть поля другого конденсатора.

На фиг. 4.4 показан способ осуществления емкостной связи через параллельный конденсатор C_3 .

На фиг. 4.5 показана схема емкостной связи посредством включения последовательного конденсатора M_C , общего для обоих контуров.



Фиг. 4.5.

Всякая схема с взаимной емкостью может быть эквивалентно приведена к схеме фиг. 4.5. Здесь емкость M_C является общим звеном, связывающим две цепи — I и II.

Если в первой цепи идет ток i_1 , то во второй цепи появляется эдс, равная по величине падению напряжения на конденсаторе M_C . Поэтому уравнения для этих цепей напишутся следующим образом

$$\dot{E} = i_1 \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C'} + \frac{1}{j\omega M_C} + R_1 \right) + \frac{i_2}{j\omega M_C}. \quad (4.6)$$

$$0 = i_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C''} + \frac{1}{j\omega M_C} + R_2 \right) + \frac{i_1}{j\omega M_C}. \quad (4.7)$$

Если обозначить

$$C_1 = \frac{C' M_C}{C' + M_C}; \quad C_2 = \frac{C'' M_C}{C'' + M_C}, \quad (4.8)$$

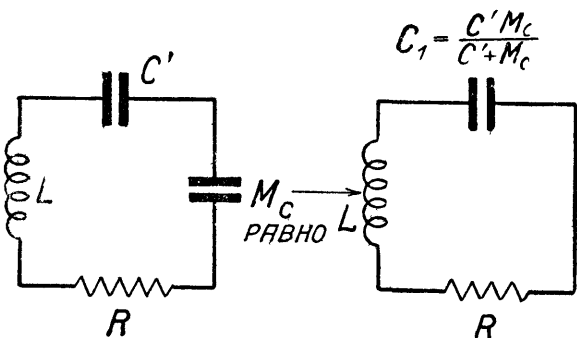
то эти уравнения можно переписать так

$$\dot{E} = i_1 \left(j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_1 \right) + \frac{i_2}{j\omega M_C}, \quad (4.9)$$

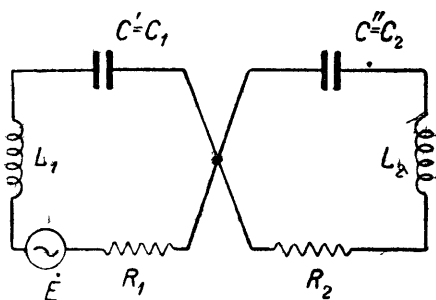
$$0 = i_2 \left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + R_2 \right) + \frac{i_1}{j\omega M_C}. \quad (4.10)$$

Здесь C_1 и C_2 представляют собой емкости первого и второго контура, взятых в отдельности (фиг. 4.6).

Величина M_C называется коэффициентом взаимной емкости.



Фиг. 4.6.



Фиг. 4.7.

Ясно, что связь между контурами тем сильнее, чем больше относительная величина множителя $\frac{1}{j\omega M_C}$. Поэтому связь растет с уменьшением M_C и падает с увеличением M_C .

Если $M_C = \infty$, то проводимость $j\omega M_C = \infty$, а это равносильно короткому замыканию.

В этом случае контуры касаются один другого в одной точке (фиг. 4.7) и никакой связи между ними нет.

§ 3. Связь через сопротивление.

Если сопротивление R входит как в первый, так и во второй контур, как показано на фиг. 4.8, то при прохождении по контуру I тока i_1 , в контуре II возникает эдс

$$\dot{E}_2 = i_1 R.$$

Так же при токе i_2 в контуре II появляется эдс в контуре I

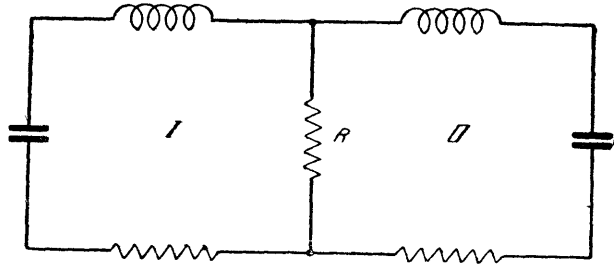
$$\dot{E}_1 = i_2 R.$$

Такая связь называется непосредственной или кондуктивной связью через омическое сопротивление.

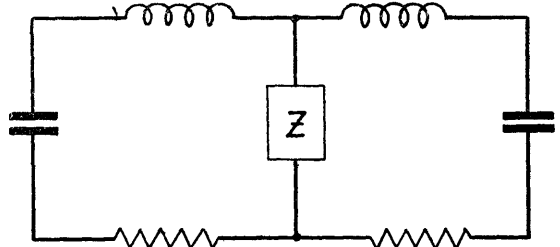
Слово „кондуктивный“ обозначает, что обе цепи находятся одна с другой в электрическом контакте.

Кондуктивная связь может быть также осуществлена посредством включения вместо R некоторого комплексного сопротивления Z , как это, например, показано на фиг. 4.9.

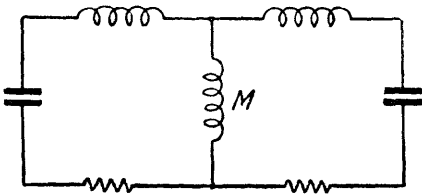
Частным случаем кондуктивной связи является связь через самоиндукцию или емкость, как показано на фиг. 4.10 и 4.11.



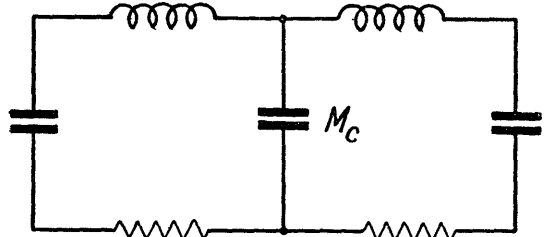
Фиг. 4.8.



Фиг. 4.9.

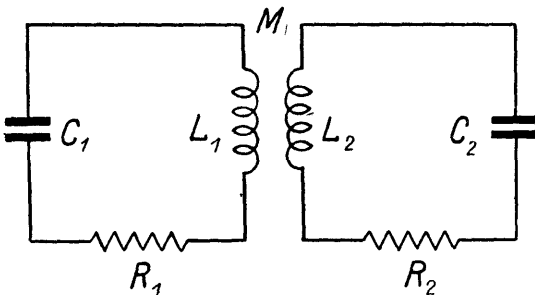


Фиг. 4.10.

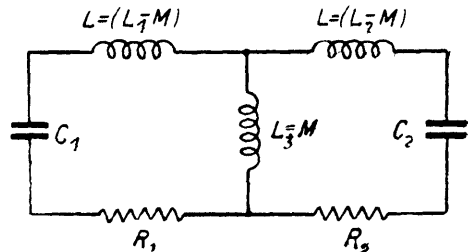


Фиг. 4.11.

Если написать уравнения для двух последних случаев, то по своей форме они окажутся совершенно тождественными с случаем связи через взаимную индукцию или через взаимную емкость (соответственно).



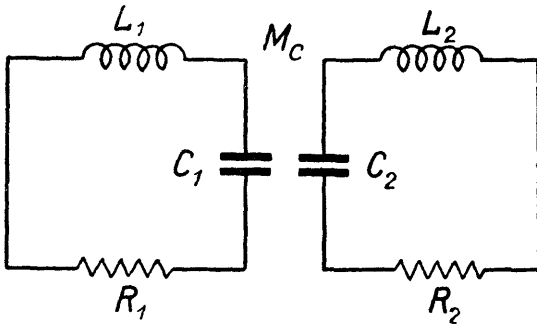
Фиг. 4.12.



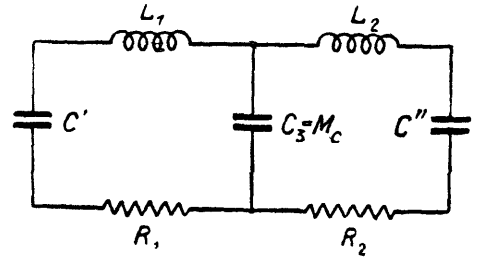
Фиг. 4.13.

Поэтому схему с индуктивной или емкостной связью всегда можно эквивалентно заменить схемой с непосредственной связью.

Схема с индуктивной связью, показанная на фиг. 4.12, эквивалентно заменяется схемой с кондуктивной связью, показанной на фиг. 4.13. Так же схема фиг. 4.14 эквивалентно заменяется схемой фиг. 4.15.



Фиг. 4.14.



Фиг. 4.15.

В случае схемы
фиг. 4.13.

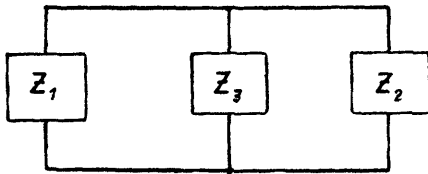
$$\left. \begin{aligned} L' &= L_1 - M \\ L'' &= L_2 - M \\ L_3 &= M \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

В случае схемы
фиг. 4.15

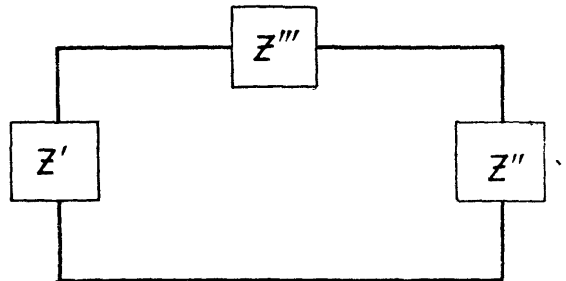
$$\left. \begin{aligned} C_3 &= M_C \\ C' &= \frac{C_1 M_C}{M_C - C_1} \\ C'' &= \frac{C_2 M_C}{M_C - C_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

§ 4. Связь в общей форме.

Как уже сказано, всякий вид связи может быть эквивалентно заменен кондуктивной связью. Каждая из связываемых цепей в свою очередь может рассматриваться как некоторое комплексное сопротивление. Поэтому две связанных цепи всегда могут быть приведены к эквивалентной схеме, показанной на фиг. 4.16.



Фиг. 4.16.



Фиг. 4.17.

Эта схема в свою очередь при желании может быть эквивалентно заменена схемой фиг. 4.17, о чем будет сказано впоследствии.

Если в схеме фиг. 4.18 в первую цепь (Z_1) введена эдс \dot{E} , то токи \dot{i}_1 , \dot{i}_2 и \dot{i}_3 могут быть найдены по следующим формулам

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{E}(Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}; \quad (4.13)$$

$$\dot{i}_2 = \frac{E Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}; \quad (4.14)$$

$$\dot{i}_3 = \frac{E Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}. \quad (4.15)$$

Эти формулы дают решение задачи нахождения токов в самом общем виде. Рассматривая далее различные частные случаи, мы будем на них ссылаться.

Сделаем еще одно важное замечание. Посредством эквивалентной замены индуктивно или емкостно связанных цепей цепями, связанными кондуктивно, мы достигаем того, что самые различные виды связи приводятся к одной и той же форме.

Изучая эту единственную форму связи, мы охватываем все возможные случаи. Это, однако, не значит, что на практике всегда возможно заменить индуктивную связь непосредственной даже при полном соблюдении эквивалентности. Дело в том, что установленная эквивалентность касается только переменного тока, но не касается постоянного тока или постоянных потенциалов. Рассматривая, например, анодную и сеточную цепи электронной лампы, связанные индуктивно, мы в праве заменить на схеме и при всех расчетах индуктивную связь непосредственной. Однако осуществить такую эквивалентную замену в реальной схеме нельзя, если анодная и сеточная цепи находятся при разных начальных потенциалах. Могут быть и другие причины, не допускающие замены индуктивной связи кондуктивной или обратной.

Это, однако, ни в какой мере не лишает верности все расчеты и соображения, сделанные на основании эквивалентных схем.

§ 5. Коэффициент обратной связи.

Если при токе \dot{I}_1 в первом контуре образуется полный поток магнитных линий $\dot{\Phi}_1$ и если n_1 -я доля этого потока пересекает катушку второго контура, то величину

$$M = \frac{L_1}{n_1}$$

мы называем коэффициентом взаимной индукции. Очевидно, что

$$n_1 = \frac{L_1}{M}.$$

Так же, если во втором контуре под действием наведенной эдс возбуждается ток \dot{I}_2 и поток $\dot{\Phi}_2$, и если n_2 -я доля этого потока пересекает катушку первого контура, то мы также пишем

$$M = \frac{L_2}{n_2}$$

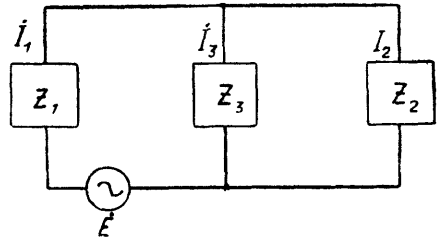
или

$$n_2 = \frac{L_2}{M}.$$

Очевидно, что произведение

$$n_1 n_2 = \frac{L_1 L_2}{M^2}$$

дает меру реакции или, иначе говоря, меру обратного воздействия, которое второй контур оказывает на первый посредством тока \dot{I}_2 , возбужденного во второй катушке током \dot{I}_1 первого контура.



Фиг. 4. 18.

$$k = \sqrt{n_1 n_2} = \sqrt{\frac{L_1 L_2}{M^2}}$$

называется коэффициентом обратной связи или просто „коэффициентом связи“ и играет важную роль при изучении связанных цепей.

Коэффициент k представляет собой отвлеченное число и дается обыкновенно в процентах.

§ 6. Частоты связи в двухконтурной системе.

Системы, состоящие из двух связанных контуров, находят широкое применение в радиотехнике, и впоследствии мы не раз встретимся с ними при описании различных схем. С точки зрения работы такой системы наибольшее практическое значение представляет случай, когда внешняя эдс включена в один из контуров (который мы будем называть первым контуром). Зависимость тока в первом контуре от частоты внешней эдс может быть выражена в форме некоторой кривой

$$I_{m_1} = f(\omega) \quad \text{при} \quad E_{m_1} = \text{const.}$$

Положение, при котором ток достигает максимума, называют точкой резонанса, а частоту, при которой это имеет место, — частотой резонанса.

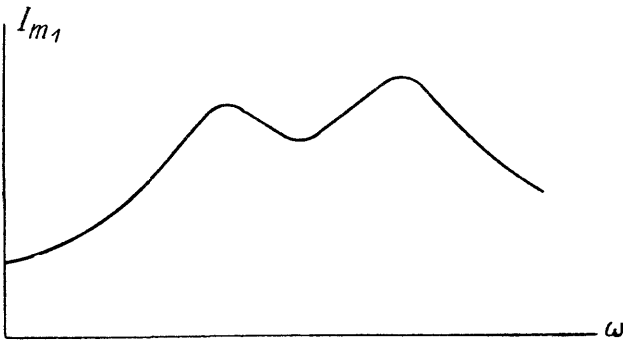
Зависимость тока во втором контуре от частоты при постоянной амплитуде эдс в первом контуре характеризуется также некоторой кривой резонанса для вторичного контура

$$I_{m_2} = F(\omega) \quad \text{при} \quad E_{m_1} \text{ const.}$$

Положение, при котором I_{m_2} достигает максимума, называется точкой резонанса для второго контура.

Вид этих кривых зависит от параметра контуров, т. е. от $L_1, C_1, R_1, L_2, C_2, R_2$ и M ; ниже мы разберем некоторые наиболее важные случаи.

Особенностью этих кривых резонанса, отличающей их от одноконтурной системы, является в ряде случаев наличие не одного, а двух положений резонанса, что на кривой выражается существованием двух вершин (например, на фиг. 4.19).



Фиг. 4.19.

Если легко примириться с мыслью, что система, составленная из двух различных контуров, имеет две различные частоты, то, наоборот, на первый взгляд может показаться весьма странным, что система, составленная из двух совершенно одинаковых контуров, также может иметь две резонансных частоты,

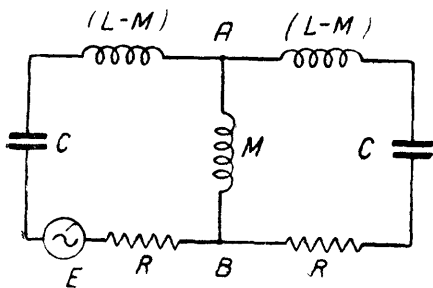
причем обе они отличаются от той резонансной частоты, которая свойственна каждому контуру в отдельности.

Поэтому мы постараемся выяснить это замечательное свойство двухконтурной цепи сначала с чисто физической стороны.

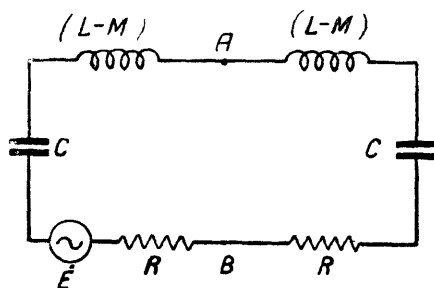
Возьмем два совершенно одинаковых контура, связанных, например, индуктивно, и сделаем замену схемы их эквивалентной схемой с непосредственной связью, как это показано на фиг. 4.20.

Представим себе теперь, что мы удалили катушку M , образующую связь между системами, так, что схема получила вид, показанный на фиг. 4.21.

В этом случае очевидно, что оба контура образуют как бы один контур с емкостью $\frac{C}{2}$, самоиндукцией $2(L - M)$ и сопротивлением $2R$.



Фиг. 4.20.



Фиг. 4.21.

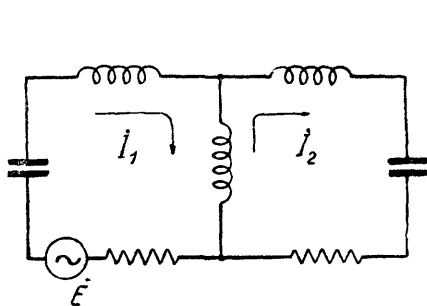
Резонансная частота такого контура будет

$$\omega_1 \approx \frac{1}{\sqrt{C(L - M)}}. \quad (4.16)$$

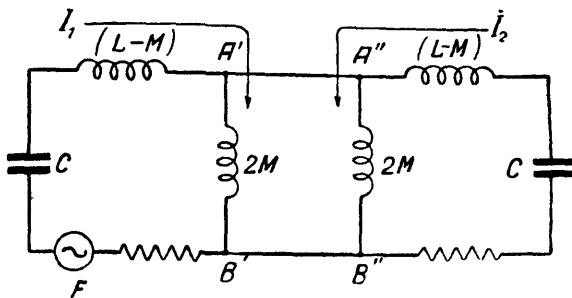
Вследствие симметрии правой и левой части контура в точках A и B реактивная слагающая тока не создает никакой разности потенциалов. Активную же слагающую будем пока считать весьма малой. Для этого надо только сделать R много меньше $\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Если здесь присоединить сопротивление, то ток в этом сопротивлении определится только той разностью потенциалов, которая образуется за счет активного тока и которой мы можем пренебречь. Если сопротивление не слишком мало, то оно вовсе не изменит режима цепи.

Поэтому можно теперь снова вернуть на место катушку M , присоединив ее к точкам A и B . Можно считать, что никакого тока в эту катушку



Фиг. 4.22.



Фиг. 4.23.

не пойдет, и следовательно, она ничем не изменит режима установившихся колебаний, если только самоиндукция ее не будет слишком мала.

Таким образом в двухконтурной системе, составленной из совершенно одинаковых контуров при малом затухании ($R^2 \ll \frac{L}{C}$) и не слишком малой связи, обнаруживается резонанс при частоте, которая отличается от собственной частоты каждого контура и определяется написанным уравнением (4.16).

При этом колебания происходят таким образом, что ток в одном контуре является продолжением тока в другом контуре (как это показано стрелками на фиг. 4.22). В катушке же связи M ток I_1 и ток I_2 направлены взаимно противоположно, и сумма их равна нулю.

Теперь покажем, что возможен второй случай резонанса.

Для этого изобразим ту же схему так, как это показано на фиг. 4.23. Здесь вместо одной катушки связи с самоиндукцией M показаны две ка-

тушки, причем самоиндукция каждой из них равна $2M$. Так как эти катушки соединены параллельно, то их общая самоиндукция равна M , и, следовательно, такая замена не изменяет свойств системы. Сама система представляется теперь как состоящая из двух одинаковых контуров. Емкость каждого контура равна C , а самоиндукция $L - M + 2M - L + M$: Оба контура связаны коротким замыканием в точках $A'A''$ и $B'B''$.

Сделаем частоту эдс \dot{E} равной

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$$

При этой частоте первый контур, взятый сам по себе, находится в резонансе. К точкам A' и B' первого контура присоединен второй контур, который также находится в резонансе с частотой ω_2 и поэтому представляет собой чисто активную проводимость.

Так как по условию сопротивление R мы предполагаем весьма малым по сравнению с $\sqrt{\frac{L}{C}}$, то и эквивалентная активная проводимость второго контура в точках $A'B'$ также очень мала, и поэтому присутствие второго контура не нарушает условий резонанса в первом.

Если M не слишком мало, то токи в обоих контурах можно считать равными по амплитуде. Очевидно, что колебания в системе будут происходить таким образом, что разность потенциалов между A' и B' всегда равна разности потенциалов между A'' и B'' . Поэтому и токи в катушках, включенных между этими точками, направлены в одну и ту же сторону; а из этого следует, что токи в первом и втором контуре направлены согласно стрелкам на фиг. 4.23. В противоположность предыдущему случаю они не продолжают друг друга, а направлены навстречу друг другу. Сумма их в катушке связи M будет теперь равна

$$i + i = 2i,$$

как это показано на фиг. 4.24.

Таким образом мы установили, что существует еще второе положение резонанса, наступающее при частоте

$$\omega_2 \approx \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}$$

причем этот случай отличается от предыдущего тем; что фаза тока во втором контуре повернута на 180° . Вследствие этого в катушке M ток не равен нулю, а имеет двойную величину по сравнению с токами в контурах.

Следовательно, два совершенно одинаковых контура, будучи связаны между собой, образуют систему, у которой существует два положения резонанса. Частоты, при которых наступает резонанс, называются частотами связи и могут быть определены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &\approx \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}} \\ \omega_2 &\approx \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Этими уравнениями обычно пользуются в несколько другом виде. А именно, обозначая

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

получим из ур-ний (4.17)

$$\omega_1^2 = \frac{1}{CL\left(1 - \frac{M}{L}\right)} = \frac{\omega_0^2}{1 - k}, \quad (4.18)$$

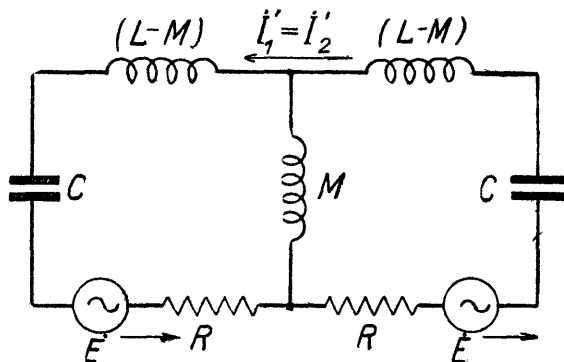
$$\omega_2^2 = \frac{1}{CL\left(1 + \frac{M}{L}\right)} = \frac{\omega_0^2}{1 + k}, \quad (4.19)$$

где $k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2}$ — коэффициент связи. В данном случае $L_1 = L_2 \equiv L$; поэтому $k = \frac{M}{L}$.

§ 7. Кривые резонанса в случае двух одинаковых контуров, связанных между собой.

Мы видели, что в связанной системе, составленной из двух одинаковых контуров, может быть два типа колебаний. Первый тип характеризуется тем, что токи в катушке связи взаимно уничтожаются, а второй тем, что ток в катушке связи вдвое больше тока в контуре. Если эдс включена в первом контуре, то оба типа колебаний возможны и непосредственно неясно, какой именно из них возникнет и как будет протекать явление при различных нерезонансных частотах.

Чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим сначала случай, когда в каждом контуре существует эдс, одинаковая по амплитуде и по частоте. Сделаем фазы этих эдс одинаковыми. Тогда, как это показано на фиг. 4.25, получается только первый тип колебаний. Ток в катушке связи M равен нулю. Изменяя частоту эдс \dot{E} , получим кривую резонанса для этого случая. Кривая будет соответствовать амплитудам тока, а сам ток определится из ур-ния



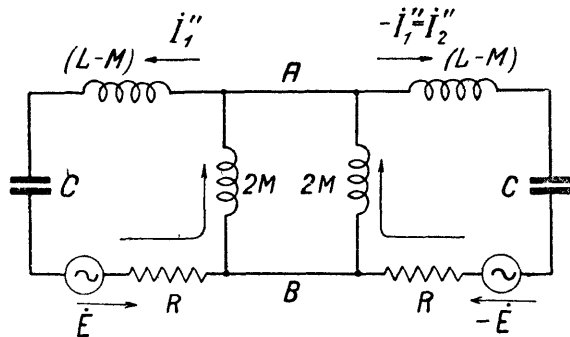
Фиг. 4.25.

Изменяя частоту эдс \dot{E} , получим кривую резонанса для этого случая. Кривая будет соответствовать амплитудам тока, а сам ток определится из ур-ния

$$i_1 = i_2 = \frac{E}{R + j\left[\omega(L-M) - \frac{1}{\omega C}\right]}. \quad (4.20)$$

Изменим теперь фазу эдс во втором контуре на противоположную. Тогда получим колебания второго типа, как это показано на фиг. 4.26.

В силу полной одинаковости контуров тока в проводах A и B не будет, и каждый контур будет колебаться независимо один от другого.



Фиг. 4.26.

Изменяя частоту эдс \dot{E} , получим кривую резонанса, соответствующую амплитуде тока как в первом, так и во втором контуре. Сами же токи определяются из уравнений:

а) для первого контура

$$i_1'' = \frac{\dot{E}}{R + j\left[\omega(L+M) - \frac{1}{\omega C}\right]}$$

б) для второго контура

$$i_2'' = -i_1'' = \frac{-\dot{E}}{R + j\left[\omega(L+M) - \frac{1}{\omega C}\right]}$$

(4.21)

Осуществим теперь оба типа колебаний одновременно. Для этого включим в каждый контур по две эдс соответственно обоим случаям.

Тогда во втором контуре окажутся включенными одновременно две эдс, равные по амплитуде и периоду, но противоположные по фазе. Эти эдс взаимно уничтожаются. В первом же контуре обе эдс окажутся в одной и той же фазе, и амплитуда результирующей эдс будет равна их сумме.

Из этого следует, что включение эдс двойной амплитуды только в один первый контур совершенно равнозначно включению четырех эдс, при котором оба типа колебаний осуществляются одновременно. Поэтому в действительности при действии эдс $2\dot{E}$ только в первом контуре, ток в первом контуре будет равен

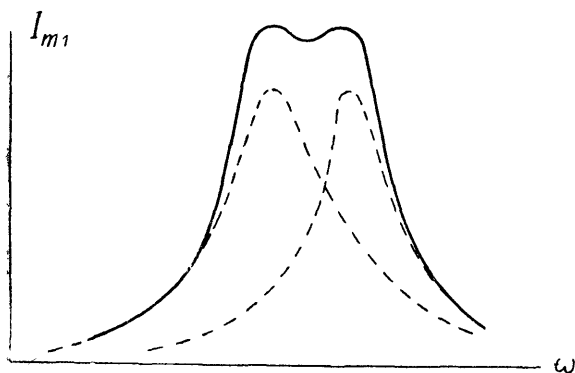
$$i_1 = i_1' + i_1'',$$

а во втором контуре

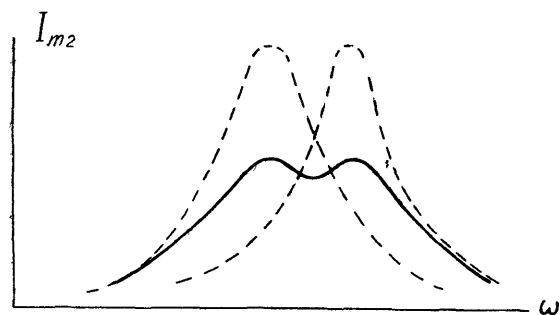
$$i_2 = i_1' - i_1'',$$

где i_1' и i_1'' определяются ур-ниями (4.20) и (4.21).

Если пунктирные линии фиг. 4.27 и 4.28 изображают кривые резонанса для первого и второго типа колебаний порознь, то сплошная кривая фиг. 4.27 дает общую кривую резонанса в первом контуре, а кривые фиг. 4.28 — во втором контуре. (Эдс предполагается включенной в первый контур.)



Фиг. 4.27.



Фиг. 4.28.

Кривая резонанса для тока в первом контуре получается как сумма, а во втором контуре — как разность пунктирных кривых с учетом сдвига фазы. Поэтому ординаты этой кривой не являются простой суммой или разностью ординат пунктирных кривых.

Не вдаваясь в детали, отметим следующие важные обстоятельства, которые непосредственно очевидны.

а) Чем больше связь, тем дальше отстоят друг от друга резонансные частоты, а следовательно, и вершины пунктирных кривых. [См. ур-ния (4.18) и (4.19).] Поэтому тем резче выявлен двугорбый характер кривой резонанса.

б) Чем меньше декремент, тем острее пунктирные кривые, поэтому тем резче выявлен двугорбый характер кривой резонанса.

в) При достаточном уменьшении связи или увеличении декремента обе вершины пунктирных кривых могут настолько сблизиться или сделаться расплывчатыми, что у сплошной кривой исчезнет двугорбый характер и останется только одна вершина. Система потеряет свойство двухчастотности (или, как говорят, двуволности).

г) Если связь велика, а декремент при этом мал, то пунктирные кривые разойдутся далеко (фиг. 4.29) и практически сумма и разность их выразятся одной и той же сплошной линией, которая на чертеже не показана, так как она почти сольется с пунктиром. Из этого следует, что амплитуды токов в первом и втором контуре окажутся одинаковыми.

д) Наоборот, при большом декременте и малой связи сплошная кривая, выражающая разность пунктирных кривых с учетом сдвига фаз, пойдет значительно ниже кривой суммы, т. е. амплитуда тока во втором контуре будет значительно меньше, чем в первом, как это ясно из сравнения фиг. 4.27 и 4.28.

§ 8. Случай, когда эдс включена параллельно конденсатору.

Те же самые резонансные частоты связи получаются, если эдс включена параллельно конденсатору одного из контуров.

Чтобы перейти к этому случаю, рассмотрим две вспомогательные схемы.

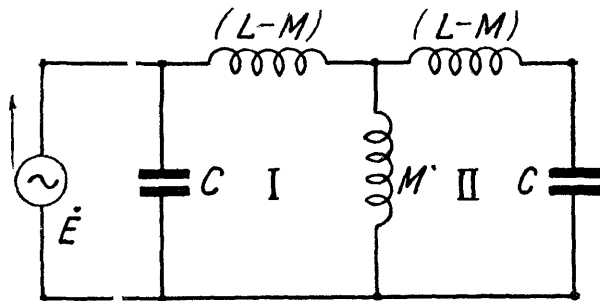
а) Пусть I и II (фиг. 4.30) представляют собой два совершенно одинаковых контура, которые связаны общей катушкой M.

Приложим к их конденсаторам эдс \dot{E} таким образом, чтобы эти эдс были направлены навстречу одна другой. Другими словами, сделаем так, чтобы потенциал в точке A_1 в любой момент был бы равен потенциалу в A_2 , а потенциал в B_1 равен потенциалу в B_2 .

В силу симметрии ток в контуре I одинаков с током в контуре II. В катушке M оба тока проходят в одном и том же направлении и образуют здесь двойной ток. При изменении частоты эдс резонанс наступит, когда

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}.$$

б) Повернем теперь фазу одной из эдс на 180° . Тогда опять-таки в силу симметрии токи в контурах останутся равными, причем по направлению один ток явится продолжением другого. Поэтому в катушке M оба

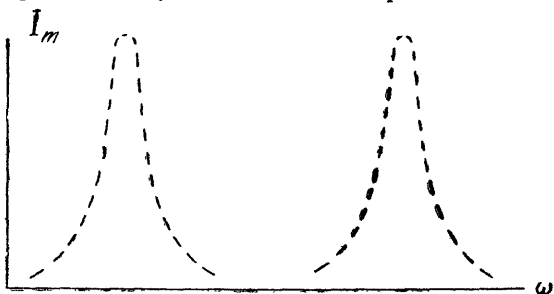


Фиг. 4.31.

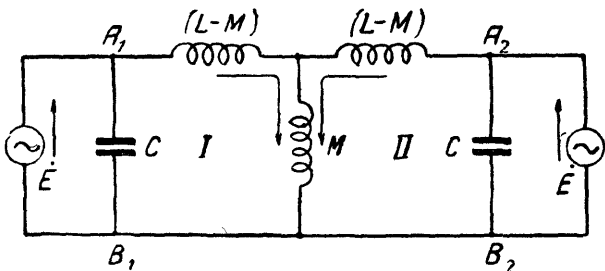
тока взаимно уничтожатся, и эта катушка не играет никакой роли. Резонансная частота определится условием

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}.$$

Соединив оба включения вместе, получим схему фиг. 4.31, из которой ясно, что в первом контуре амплитуда эдс останется прежней а во втором контуре не будет никакой эдс.

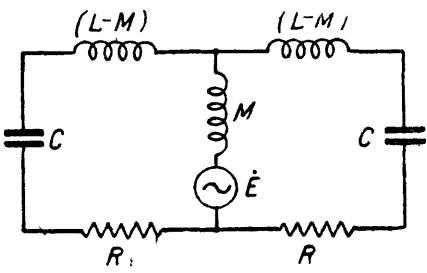


Фиг. 4.29.



Фиг. 4.30.

Следовательно, здесь (как и в случае последовательного включения) при возбуждении колебаний со стороны одного контура в системе существуют две резонансные частоты, определяемые теми же формулами



Фиг. 4.32.

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1-k},$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1+k},$$

где ω_0 — собственная частота каждого контура, а k — коэффициент связи.

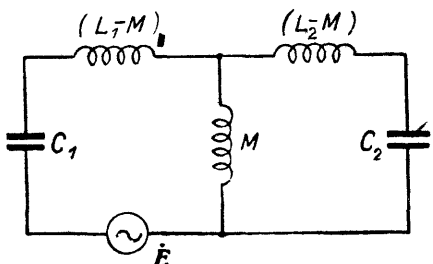
Заметим еще, что при включении источника эдс в катушку связи M (фиг. 4.32) колебания получают тот же характер, что и при возбуждении конденсаторов при помощи эдс одинаковой фазы.

При таком возбуждении существует только одна резонансная частота, определяемая равенством

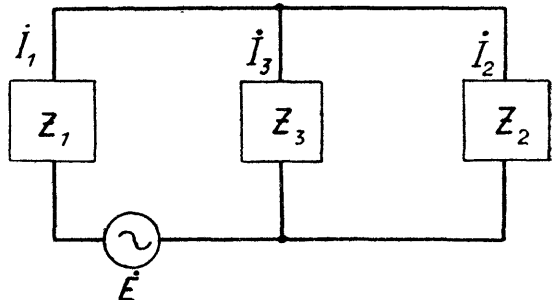
$$\omega_2^2 = \frac{\omega_0^2}{1+k}.$$

§ 9. Математический анализ основных явлений.

Рассмотрим два контура без потерь, связанные посредством катушки M (фиг. 4.33). Этой схеме соответствует схема сопротивлений, показанная на фиг. 4.34.



Фиг. 4.33.



Фиг. 4.34.

Эдс \dot{E} включена в первый контур. Тогда ток в цепи этой эдс будет

$$i_1 = \frac{\dot{E}}{Z},$$

где Z — входное сопротивление системы.

На основании ур-ния (4.13) § 4 пишем

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}. \tag{4.22}$$

Из схем фиг. 4.33 и 4.34 видно, что

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= j \left[\omega (L_1 - M) - \frac{1}{\omega C_1} \right] \\ Z_2 &= j \left[\omega (L_2 - M) - \frac{1}{\omega C_2} \right] \\ Z_3 &= j \omega M. \end{aligned} \right\} \tag{4.23}$$

Подставив эти значения в ур-ние (4.22), найдем

$$Z = \frac{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) - \omega^2 M^2}{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}. \quad (4.24)$$

Это сопротивление равно нулю, если числитель ур-ния (4.24) равен нулю, что после открытия скобок запишем так

$$\omega^2 (L_1 L_2 - M^2) - \frac{L_1}{C_2} - \frac{L_2}{C_1} + \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2} = 0. \quad (4.25)$$

Обозначив

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}},$$

получим из ур-ния (4.25)

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{1 - k^2} + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{1 - k^2} = 0, \quad (4.26)$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{1 - k^2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}{4(1 - k^2)^2} - \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{1 - k^2}}. \quad (4.27)$$

Если контуры настроены в резонанс, то $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ и ур-ние (4.27) даст

$$\left. \begin{aligned} (\omega')^2 &= \frac{\omega_0^2}{1 + k} \\ (\omega'')^2 &= \frac{\omega_0^2}{1 - k} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Ур-ние (4.28) приблизительно справедливо и в том случае, когда контуры обладают омическим сопротивлением R , если только

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \frac{1}{LC}.$$

Это условие обычно имеет место в практически применяемых контурах. Вообще же для того, чтобы вычислить точное значение ω' и ω'' при наличии сопротивлений в контурах, надо, очевидно, подставить в ур-ние (4.22) значения

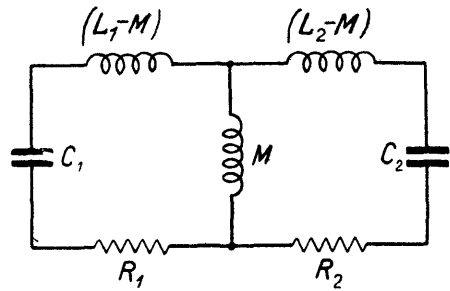
$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j \left[\omega (L_1 - M) - \frac{1}{\omega C_1} \right] \\ Z_2 &= R_2 + j \left[\omega (L_2 - M) - \frac{1}{\omega C_2} \right] \\ Z_3 &= j \omega M \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

и решить его относительно ω .

§ 10. Ток в первичном контуре.

Соответственно схеме фиг. 4 35 сделаем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) &\equiv x_1, \\ \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) &\equiv x_2, \\ \omega M &\equiv x_3. \end{aligned}$$



Фиг. 4.35.

Тогда схеме фиг. 4.35 будет соответствовать схема сопротивлений фиг. 4.36.

Подставив в общее выражение для тока в первом контуре

$$i_1 = \frac{\dot{E}(Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$$

значения Z_1 , Z_2 и Z_3 из схемы фиг. 4.36, получим после преобразований следующее довольно сложное выражение

$$i_1 = \dot{E} \frac{(R_1 R_2^2 + x_3^2 R_2 + x_2^2 R_1) + j(x_3^2 x_2 - x_2^2 x_1 - x_1 R_2^2)}{(R_1 R_2 - x_1 x_2 + x_3^2)^2 + (x_1 R_2 + x_2 R_1)^2}. \quad (4.30)$$

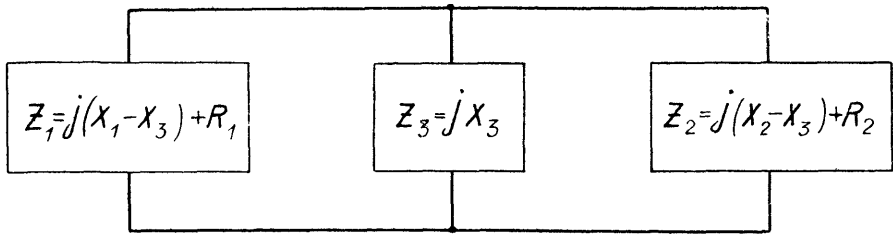
Для практики большое значение имеет такая настройка системы, при которой входной ток становится чисто активным. Тогда мнимая часть ур-ния (4.30) должна обратиться в нуль.

Следовательно, в этом случае

$$x_3^2 x_2 - x_2^2 x_1 - x_1 R_2^2 = 0,$$

что можно переписать так

$$x_2^2 = x_3^2 \frac{x_2}{x_1} - R_2^2. \quad (4.31)$$



Фиг. 4.36.

Так как стоящая в левой части величина x_2^2 всегда положительна, то ур-ние (4.31) может быть удовлетворено только до тех пор, пока правая часть также положительна. Для этого должно быть

$$x_3^2 \geq R_2^2 \frac{x_1}{x_2}. \quad (4.32)$$

Кроме того мнимая часть обращается в нуль, если

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Последнее соответствует одинаковой настройке контуров.

Подставив в ур-ние (4.30) вместо x_2 его значение из ур-ния (4.31), получим после приведения подобных членов следующее простое выражение

$$i_1 = \frac{\dot{E}}{\frac{x_1}{x_2} R_2 + R_1}. \quad (4.33)$$

Ур-ние (4.33) показывает, что при удовлетворении условия (4.31) система представляет для эдс, включенной в первый контур, чисто активное сопротивление, равное

$$\frac{x_1}{x_2} R_2 + R_1. \quad (4.34)$$

Это сопротивление состоит из двух слагаемых — собственного сопротивления первого контура R_1 , и „наведенного“ сопротивления $\frac{x_1}{x_2} R_2$.

При

$$x_1 = x_2 = 0, \quad (4.35)$$

т. е. при настройке контуров в резонанс непосредственно из ур-ния (4.30) получим

$$\dot{I}_1 = \dot{E} \frac{R_2}{R_1 R_2 + x_3^2} = \frac{1}{R_1 + \frac{x_3^2}{R_2}}. \quad (4.36)$$

Сопротивление $\frac{x_3^2}{R_2}$, добавляющееся к сопротивлению R_1 , представляет собой сопротивление, наводимое вторым контуром в первом.

Из ур-ния (4.36) видно, что при $x_3 = 0$ или $R_2 = \infty$

$$\dot{I}_1 = \frac{E}{R_1}. \quad (4.37)$$

Наоборот, если R_2 очень мало, то сопротивление, наводимое им в первом контуре, т. е. величина $\frac{x_3^2}{R_2}$, будет очень велика.

Тот факт, что при x_1 или x_2 , не равном нулю, ур-ние (4.31) не может быть удовлетворено, если

$$x_3^2 < R_2^2 \frac{x_1}{x_2}, \quad (4.38)$$

показывает, что при уменьшении связи более, чем до некоторой критической величины

$$x_3^2 = R_2^2 \frac{x_1}{x_2} \quad (4.39)$$

наступают условия, при которых входное сопротивление первого контура уже не может быть сделано чисто активным. Связь, определяемая ур-нием (4.39), называется критической связью.

Из ур-ния (4.30) можно определить амплитуду тока в первом контуре для общего случая.

Получим

$$I_{m1}^2 = E_m^2 \frac{x_2^2 + R_2^2}{(R_1 R_2 - x_1 x_2 + x_3^2)^2 + (x_1 R_2 + x_2 R_1)^2}. \quad (4.40)$$

Если оба контура порознь настроены в резонанс, т. е. $x_1 = x_2 = 0$, получим

$$I_{m1} = E_m \frac{R_2}{R_1 R_2 + x_3^2}. \quad (4.41)$$

§ 11. Ток во вторичном контуре.

Ток во вторичном контуре, как известно, выражается уравнением

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E} Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}. \quad (4.42)$$

Обозначим так же, как и в предыдущем случае (см. фиг. 4.36),

$$Z_1 = R_1 + j(x_1 - x_3),$$

$$Z_2 = R_2 + j(x_2 - x_3),$$

$$Z_3 = jx_3.$$

Тогда $(R_1 + jx_1)$ представляет собой комплексное сопротивление первого контура, а $(R_2 + jx_2)$ — комплексное сопротивление второго контура. Произведя подстановку этих значений Z_1 , Z_2 и Z_3 в ур-ние (4.42), получим

$$\dot{I}_2 = \dot{E}x_3 \frac{(x_1R_2 + x_2R_1) + j(R_1R_2 - x_1x_2 + x_3^2)}{(R_1R_2 - x_1x_2 + x_3^2)^2 + (x_1R_2 + x_2R_1)^2}. \quad (4.43)$$

Ур-ние (4.43) определяет значение тока \dot{I}_2 в зависимости от параметров контуров и от связи между контурами.

Обозначив

$$\dot{I}_2 \equiv A + jB,$$

где A и B определяются ур-нием (4.43), можем написать следующие уравнения.

Амплитуда тока во вторичном контуре будет

$$I_{m2}^2 = \frac{E_m^2}{A^2 + B^2}. \quad (4.44)$$

Угол сдвига фазы относительно эдс \dot{E} будет

$$\varphi = \arctg \left(\frac{B}{A} \right). \quad (4.45)$$

В частном случае, когда оба контура настроены в резонанс с частотой действующей эдс, их комплексные сопротивления превращаются в чисто активные, поэтому

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 0.$$

Тогда ур-ние (4.43) превращается в следующее

$$\dot{I}_2 = j \frac{\dot{E}x_3}{R_1R_2}. \quad (4.46)$$

Амплитуда

$$I_{m2} = \frac{E_mx_3}{R_1R_2}. \quad (4.47)$$

Фазовый угол

$$\varphi = \arctg \infty = \frac{\pi}{2}. \quad (4.48)$$

Из ур-ния (4.42) легко определить амплитуду тока во вторичном контуре.

А именно,

$$I_{m2}^2 = E_m^2 \frac{x_3^2}{(R_1R_2 - x_1x_2 + x_3^2)^2 + (x_1R_2 + x_2R_1)^2}. \quad (4.49)$$

§ 12. Резонанс во вторичном контуре при изменении настройки и постоянной частоте.

Рассмотрим, как изменяется амплитуда тока во вторичном контуре в зависимости от изменения настройки контуров.

Как было только что сказано, амплитуда тока получается из равенства

$$I_{m2}^2 = E_m^2 \frac{x_3^2}{(R_1R_2 - x_1x_2 + x_3^2)^2 + (x_1R_2 + x_2R_1)^2}. \quad (4.49)$$

Будем считать, что изменение настройки контуров достигается посредством изменения емкостей C_1 и C_2 (фиг. 4.37).

Частоту ω , связь M , а также сопротивления R_1 и R_2 будем считать постоянными.

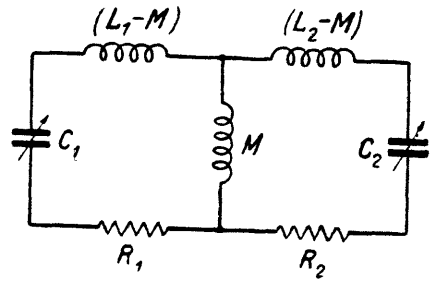
Тогда переменными величинами в ур-нии (4.49) будут x_1 и x_2 , причем

$$x_1 = \left[\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right],$$

$$x_2 = \left[\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right].$$

Таким образом отношение

$$\frac{I_{m2}^2}{E_m^2} = F(x_1, x_2) \quad (4.50)$$



Фиг. 4.37

Ур-ние (4.50) показывает, что амплитуда тока во вторичном контуре при постоянной амплитуде эдс может принимать различные значения, в зависимости от настройки первичного и вторичного контура. Нашей задачей является выяснение законов, которым следует эта зависимость, и условий, при которых ток I_{m2} достигает максимального значения. По отношению ко вторичному току применяется также термин резонанс, причем под резонансом понимается положение настройки, при котором амплитуда вторичного контура достигает максимального значения. Таким образом вообще может быть очень много различных резонансов, в зависимости от того, какой или какие из элементов контуров рассматриваются как переменные, или, иначе говоря, в зависимости от того, каким образом производится настройка. В том случае, который мы сейчас рассматриваем, т. е. когда

$$I_{m2} = f(x_1, x_2) \quad (4.51)$$

различают четыре категории резонансных положений, зависящих от настройки:

а) x_2 оставляем постоянным, а x_1 изменяем. При некотором положении x_1 получается наибольшее значение I_{m2} . Это положение называется частным резонансом первого рода.

Каждой заданной величине x_2 соответствует некоторая величина x_1 , определяющая частный резонанс первого рода.

б) x_1 оставляем постоянным, а x_2 изменяем. Положение x_2 , при котором I_{m2} получит максимальное значение, называется частным резонансом второго рода. Каждой заданной величине x_1 соответствует свой частный резонанс второго рода.

в) Изменяем обе переменные x_1 и x_2 , добиваясь максимального возможного значения I_{m2} . Соответствующее этому положение называется настройкой на максимально возможную амплитуду тока или сложным резонансом.

г) Настроив оба контура в отдельности в резонанс, получают еще одно положение, называемое полным резонансом.

Условие для резонанса первого рода можно найти следующим образом. Считая x_2 постоянным и x_1 переменным, возьмем производную от знаменателя правой части ур-ния (4.49) и приравняем ее нулю для определения максимума этой функции. Минимальное значение знаменателя соответствует максимальному значению I_{m2} . Отсюда находим условие для частного резонанса первого рода

$$x_1 = \frac{x_2^2}{x_2^2 + R_2^2} x_2. \quad (4.52)$$

Также полагая, что x_2 переменная, а x_1 постоянная, найдем условия для частного резонанса второго рода

$$x_2 = \frac{x_1^2}{x_1^2 + R_1^2} x_1. \quad (4.53)$$

Эти уравнения показывают следующее.

Положим, что мы поставили конденсатор C_2 в какое-то произвольное положение (т. е. задали x_2 некоторое значение) и изменяем конденсатор C_1 (т. е. даем величине x_1 различные значения). Наблюдая изменение амплитуды тока I_{m2} , мы обнаружим максимум при

$$x_1 = \frac{x_3^2}{x_2^2 + R_2^2} x_2. \quad (4.52)$$

Это будет частный резонанс первого рода.

Если теперь изменить величину x_2 , то ток может возрасти или уменьшиться в зависимости от того, какова была прежняя величина x_2 и как она изменилась. Но во всяком случае теперь, снова изменяя x_1 , мы найдем некоторое новое положение, при котором I_{m2} достигает максимума, т. е. новый частный резонанс первого рода, соответствующий новому значению x_2 . Если величина x_2 была изменена произвольно, то амплитуда тока при этом новом положении резонанса может быть больше или меньше предыдущей в зависимости от обстоятельств. Но, если, найдя частный резонанс первого рода при некотором постоянном x_2 , мы оставляем теперь неизменным x_1 и при помощи конденсатора C_2 находим максимум тока, то мы окажемся в положении резонанса второго рода, и амплитуда тока вообще будет больше предыдущей. Так, настраиваясь по очереди, мы достигаем, наконец, максимально возможного значения амплитуды тока.

Этому положению будет соответствовать одновременное удовлетворение как условия

$$x_1 = \frac{x_3^2}{x_2^2 + R_2^2} x_2, \quad (4.52)$$

так и условия

$$x_2 = \frac{x_3^2}{x_1^2 + R_1^2} x_1. \quad (4.53)$$

Чтобы найти x_1 и x_2 , соответствующие такому положению, надо решить совместно ур-ния (4.52) и (4.53).

Сделав это, получим следующие три решения:

$$1) x_1 = 0; \quad x_2 = 0 \quad (4.54)$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{\frac{R_1}{R_2} (x_3^2 - R_1 R_2)} \\ x_2 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1} (x_3^2 - R_1 R_2)} \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{\frac{R_1}{R_2} (x_3^2 - R_1 R_2)} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{R_2}{R_1} (x_3^2 - R_1 R_2)} \end{array} \right\} \quad (4.56)$$

Таким образом в общем случае существует три положения настройки, при которых изменение x_1 при $x_2 = \text{const}$ или изменение x_2 при $x_1 = \text{const}$ приведет к уменьшению тока.

Первое положение называется положением полного резонанса, а второе и третье — положениями сложного резонанса.

Если связь меньше критической, т. е.

$$x_3^2 < R_1 R_2,$$

решения второе и третье делаются невозможными, так как x_1 и x_2 получают мнимые значения.

Следовательно, при связи, меньшей, чем критическая, остается только одно положение полного резонанса

При связи, большей, чем критическая, все три положения резонанса существуют.

Подставив значения $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ в ур-ние (4.49), найдем

$$\frac{I_{m2}}{E_m} = \frac{x_3}{R_1 R_2 + x_3^2}. \quad (4.57)$$

Подставив в то же ур-ние значения x_1 и x_2 из ур-ний (4.55) и (4.56), получим

$$\frac{I_{m2}}{E_m} = \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (4.58)$$

Сравнивая (4.57) и (4.58), видим, что в случае (4.58) амплитуда тока достигает большего значения, чем в случае (4.57). Эти значения становятся одинаковыми при

$$R_1 R_2 = x_3^2,$$

т. е. при таком устройстве цепи, когда связь как раз равна критической.

§ 13. Графическое изображение амплитуды вторичного тока.

Сложная картина, которая с количественной стороны была описана в предыдущем параграфе, может быть гораздо более ясно понята с качественной стороны при помощи графического изображения функций $\frac{I_{m2}}{E_m} = F(x_1, x_2)$. Эта функция от двух независимых переменных, и поэтому она может быть изображена некоторой поверхностью. Для того чтобы передать поверхность при помощи чертежа, прибегают к способу, принятому в топографии, при котором точки с одинаковой высотой соединяются в одну общую линию, называемую горизонталью. Горизонтали проводятся через определенные интервалы высот и, будучи спроектированы на плоскость, дают систему кривых, на которых отмечена соответствующая им высота. Такая система с большой наглядностью выражает рельеф местности.

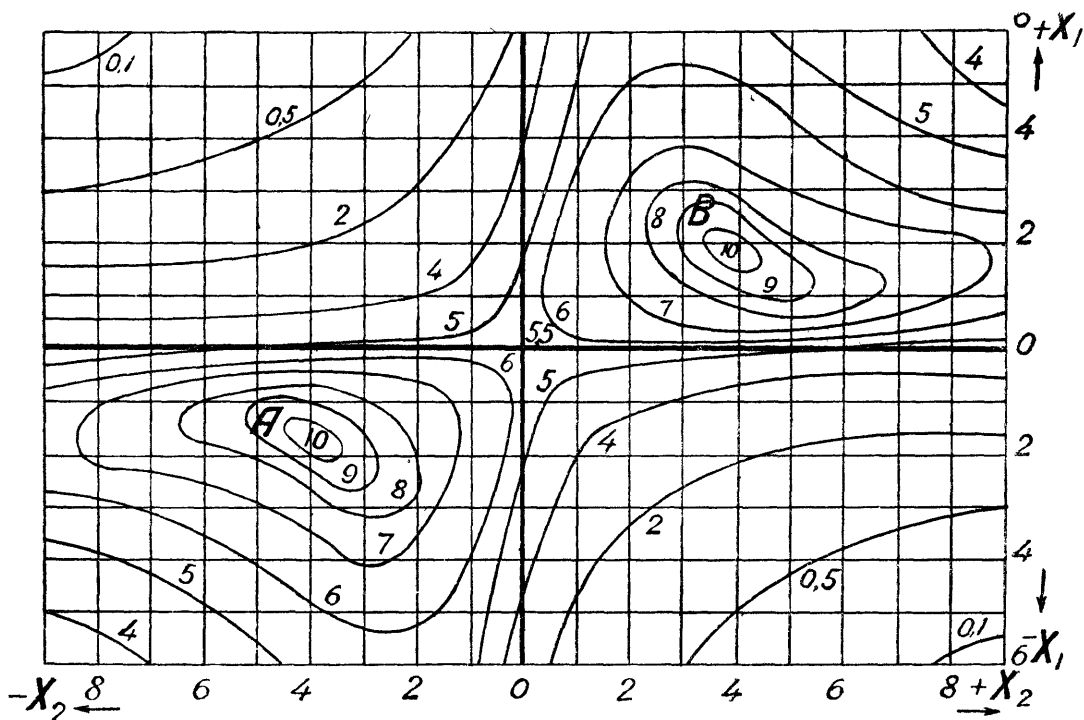
Густота горизонталей выражает крутизну скатов. Ямы и вершины окружены замкнутыми горизонталями, ложбины и мысовидные выступы характеризуются впадинами и выступами на горизонталях.

На фиг. 4.38 показано такое построение, выражающее зависимость I_{m2} от x_1 и x_2 . Диаграмма соответствует случаю $R_1 = 1$; $R_2 = 2$; $x_3 = 3$. Горизонтальная линия, проведенная через середину чертежа, представляет собой ось, на которой отложены значения x_2 . Вправо от точки O эти значения положительны, влево — отрицательны. Перпендикулярная линия представляет собой такую же ось для x_1 .

Каждой комбинации x_1 или x_2 соответствует некоторая точка, высота которой под нулевым уровнем определяется горизонталями и выражает собой в относительных единицах значение $\frac{I_{m2}}{E_m}$ при данных x_1 и x_2 .

Изображенная поверхность имеет две вершины A и B . Вблизи этих вершин любое изменение x_1 и x_2 , или обоих одновременно, вызывает переход на более низкий уровень, т. е. уменьшение I_{m2} . Эти вершины соответствуют максимальному возможному значению амплитуды тока во вторичном контуре. Если стать в точке $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то любое движение по оси x_1 или x_2 даст уменьшение тока; однако, если двигаться наискось, в особенности в направлении A или B , амплитуда I_{m2} увеличивается. При этом x_1 и x_2 приходится изменять одновременно. На этой диаграмме легко понять физическое содержание частных резонансов.

Задав, например, x_1 какое-нибудь постоянное значение и изменяя x_2 , мы пересечем местность в некотором направлении, причем всегда при некотором значении x_2 достигнем более высокой точки, по обе стороны от которой начинается спуск. Это будет моментом частного резонанса. Легко также убедиться, что при очередной настройке на частные резонансы то при помощи x_1 , то при помощи x_2 мы с каждым разом приближаемся



Фиг. 4.38.

либо к вершине A , либо к вершине B , в зависимости от того, в каком месте находится точка, соответствующая исходному положению. Исключение составляет положение $x_1 = x_2 = 0$, когда поочередная перестройка x_1 и x_2 на максимум тока будет постоянно возвращать нас в исходное положение.

По мере уменьшения разности $x_3^2 - R_1 R_2$ обе вершины A и B сближаются и при $x_3^2 = R_1 R_2$ сливаются в одну, расположенную в центре.

§ 14. Сводка результатов, полученных в предыдущих параграфах.

Значение полученных выше математических результатов станет яснее, если проследить на примере изменение условий работы двухконтурной системы при изменении настройки контуров и связи между ними.

Начнем с того, что возьмем два контура, каждый из которых при отсутствии другого настроен на частоту ω источника, включенного в первичный контур.

Настройка в резонанс означает, что

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Будем сближать самоиндукцию этих контуров, вследствие чего между ними появится связь, определяемая взаимной индукцией M , которую мы обозначаем

$$x_3 = M.$$

Амплитуда тока во вторичном контуре будет

$$I_{m2} = E_m \frac{x_2}{R_1 R_2 + x_3^2}. \quad (4.59)$$

Изменяя настройку контуров, мы обнаружим, что максимум получается именно при той настройке, с которой мы начали работу (т. е. $x_1 = x_2 = 0$).

Если теперь постепенно увеличивать связь между контурами, амплитуда I_{m_2} будет расти вплоть до некоторого максимума, а затем при дальнейшем увеличении связи начнет падать.

Остановимся в положении, когда I_{m_2} максимально. Это положение полного резонанса (так как $x_1 = x_2 = 0$) при оптимальной связи.

В этот момент функция

$$I_{m_2} = E_m \frac{x_3}{R_1 R_2 + x_3^2} \quad (4.60)$$

проходит через максимум.

Легко убедиться, взяв первую производную и приравняв ее нулю, что условием максимума $I_{m_2} = f(x_3)$ является условие критической связи, т. е.

$$x_3^2 = R_1 R_2,$$

причем, если это соотношение подставить в ур-ние (4.60), получим

$$I_{m_2} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (4.61)$$

Перестраивая контуры, убедимся, что нет других положений, где амплитуда I_{m_2} была бы большей.

Увеличим теперь связь, сделав ее больше критической. При прежней настройке амплитуда I_{m_2} уменьшится, причем для определения ее остается все то же уравнение

$$I_{m_2} = E_m \frac{x_3}{R_1 R_2 + x_3^2}. \quad (4.60)$$

Если мы сделаем попытку перестроиться, причем будем пробовать делать эту перестройку, вращая сначала один конденсатор (т. е. изменяя, например, x_1 при $x_2 = 0$), или меняя другой конденсатор (т. е. изменяя, например, x_2 при $x_1 = 0$), мы обнаружим падение амплитуды тока при отходе от положения полного резонанса. Однако, если мы изменим оба конденсатора и после этого начнем по очереди настраиваться на максимум то одним, то другим конденсатором — результат окажется иным, и после нескольких операций, при которых мы поочередно будем проходить частные резонансы первого и второго рода, будет достигнута настройка, при которой амплитуда I_{m_2} снова станет равной

$$I_{m_2} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (4.61)$$

Это будет одно из положений сложного резонанса, условием которого является

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{\frac{R_1}{R_2} (x_3^2 - R_1 R_2)} \\ x_2 &= \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1} (x_3^2 - R_1 R_2)} \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

С дальнейшим увеличением связи амплитуда I_{m_2} в положении полного резонанса ($x_1 = x_2 = 0$) будет становиться все меньше. Положения настройки на максимум амплитуды будут все более удаляться от положения полного резонанса.

Амплитуда же I_{m_2} в максимуме (т. е. в положении сложного резонанса) будет оставаться все той же, т. е.

$$I_{m_2} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Что касается амплитуды первичного тока, то [как это легко вывести, сравнивая ур-ния (4.30) и (4.43) для \dot{I}_1 и \dot{I}_2] она при любой настройке может быть получена из амплитуды вторичного тока путем умножения на величину

$$\frac{1}{x_3} \sqrt{x_2^2 + R_2^2}. \quad (4.63)$$

Из этого следует, что первичный ток равен вторичному току, если

$$R_2^2 + x_2^2 = x_3^2. \quad (4.64)$$

§ 15. Распределение мощности между первичным и вторичным контуром и вносимое сопротивление.

Двухконтурная система применяется для трансформирования колебаний. Источник эдс включается в первичный контур, а нагрузка включается во вторичный контур. Задачей двухконтурной системы является в этом случае, так трансформировать колебания, чтобы на источник передалась определенная нагрузка. Требования, которые предъявляются при этом к системе, заключаются в следующем:

1) при заданном активном сопротивлении R_2 во вторичном контуре, в первичном контуре должно быть наведено сопротивление, которое нагрузило бы источник желаемым образом;

2) оба контура должны иметь малые потери для того, чтобы коэффициент полезного действия был достаточно велик;

3) обычно ставится также требование, чтобы входное сопротивление первичного контура было при этом чисто активным.

В дальнейшем условимся обозначаемое буквой R_1 собственное сопротивление первичного контура считать целиком вредным сопротивлением.

Сопротивление R_2 вторичного контура считать целиком полезным сопротивлением.

Напомним, что отношение токов в первичном и вторичном контурах определяется следующим равенством

$$\frac{I_2^2}{I_1^2} = \frac{x_3^2}{x_2^2 + R_2^2}. \quad (4.65)$$

Поэтому, если в первичном контуре имеется сопротивление R_1 , а во вторичном R_2 , то мощности, выделяемые в этих контурах, будут:

в первичном

$$I_1^2 R_1 = P_1 \quad (4.66)$$

во вторичном

$$I_2^2 R_2 = I_1^2 \left[\frac{x_3^2 R_2}{x_2^2 + R_2^2} \right] = P_2. \quad (4.67)$$

Выражение, взятое в ур-нии (4.67) в прямые скобки, соответствует такому эквивалентному сопротивлению, которое, будучи включено в первый контур, заменит собой потери, вносимые от второго контура (так как умножение на него квадрата тока дает мощность, которой второй контур нагружает источник эдс). Это сопротивление называется „вносимым сопротивлением“. Мы будем обозначать его R_6 .

§ 16. Коэффициент полезного действия.

Если R_1 —собственное сопротивление первичного контура, а R_6 – вносимое сопротивление, то полная мощность, затрачиваемая источником, будет

$$P = \frac{E^2}{R_1 + R_6} \text{ или } I_1^2 (R_1 + R_6). \quad (4.68)$$

Полезная же часть этой мощности будет только

$$P_2 = I_1^2 R_6. \quad (4.69)$$

Поэтому коэффициент полезного действия будет

$$\eta = \frac{R_6}{R_1 + R_6} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_6} + 1}. \quad (4.70)$$

Из этого следует, что коэффициент полезного действия растёт по мере увеличения R_6 .

Рассмотрим найденное выше выражение

$$R_6 = \frac{x_3^2 R_2}{x_2^2 + R_2^2}. \quad (4.71)$$

Легко видеть, что вносимое сопротивление, а следовательно, и кпд при прочих равных условиях получается наибольшим, если

$$x_2 = 0,$$

т. е. если вторичный контур настроен в резонанс.

Тогда (из ур-ния 4.71)

$$R_6 = \frac{x_3^2}{R_2}. \quad (4.72)$$

Поэтому кпд растёт с увеличением связи (x_3) и с уменьшением сопротивления R_2 .

§ 17. Мощность во вторичном контуре.

Мы только что видели, что x_1 (настройка первого контура) совершенно не влияет на кпд. Однако из этого вовсе не следует, что эта настройка также не сказывается на режиме системы. Дело в том, что полезная мощность определяется ур-нием (4.69).

$$P_2 = I_1^2 R_6$$

и зависит, следовательно, не только от вносимого сопротивления, но и от тока I_1 , протекающего по первому контуру. Амплитуда этого тока при настройке второго контура в резонанс (т. е. при $x_2 = 0$) будет [из ур-ния (4.40), § 10]

$$I_{m1}^2 = E_m^2 \frac{R_2^2}{(R_1 R_2 + x_3^2)^2 + x_1^2 R_2^2}. \quad (4.73)$$

Легко видеть, что она становится максимальной при

$$x_1 = 0.$$

Таким образом для того, чтобы развить наибольшую мощность во втором контуре, должно быть

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0.$$

Даже не производя вычислений, можно на основании общего правила сказать, что наибольшая мощность получится тогда и только тогда, когда вносимое сопротивление будет равно вредному сопротивлению первого контура.

Поэтому, исходя из того, что при $x_2 = 0$ ур-ние (4.72) § 16 дает

$$R_6 R_2 = x_3^2, \quad (4.74)$$

можно, приравняв сопротивление R_6 сопротивлению R_1 , написать

$$R_1 R_2 = x_3^2. \quad (4.75)$$

Ур-ние (4.75), как известно, выражает собой условие критической связи между контурами.

Вследствие равенства полезного и вредного сопротивлений отдача равна 50%.

Связь, соответствующая условию

$$R_1 R_2 = x_3^2,$$

как было сказано, называется „критической“, кроме того, ее называют также „оптимальной“, связь больше оптимальной называется достаточной или сильной, связь меньше оптимальной — слабой или недостаточной.

§ 18. Коэффициент полезного действия в случае достаточной связи.

Мы нашли, что кпд равен (ур-ние 4.70)

$$\eta = \frac{1}{\frac{R_1}{R_6} + 1}.$$

Далее мы установили, что при прочих равных условиях кпд наибольший при $x_2 = 0$, вследствие чего

$$R_6 = \frac{x_3^2}{R_2}.$$

Проследим, как изменяется кпд при условии, что оба контура настроены в резонанс ($x_1 = 0$ и $x_2 = 0$).

Так как кпд растет с увеличением связи x_3 и так как установлено, что он достигает 50%, когда эта связь становится критической (оптимальной), то очевидно, что при

$$x_3 < R_1 R,$$

$$\eta < 50\%.$$

Делая связь больше критической, мы будем увеличивать кпд и можем сделать его сколь угодно большим.

Однако мощность во вторичном контуре, разумеется, будет падать, так как она равна (ур-ние 4.69)

$$P_2 = I_1^2 R_6,$$

а в свою очередь

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_6}$$

или

$$P_2 = \frac{E^2 R_6}{(R_1 + R_6)^2}. \quad (4.76)$$

Отсюда видно, что с возрастанием вносимого сопротивления мощность во вторичном контуре падает.

Если начертить кривые изменения кпд и мощности в зависимости от связи, они получают вид фиг. 4.39.

Однако при связи больше критической можно получить большую мощность, если контуры настроены не в резонанс. Действительно, при резонансе согласно графику фиг. 4.38, § 13 мы находимся в начале координат. Перестроив оба контура так, чтобы приблизиться к вершинам A и B , мы этим самым увеличим ток во вторичном контуре. Следствием этого будет то, что вносимое сопротивление и кпд уменьшатся.

Если настроить контуры так, чтобы оказаться на одной из вершин, то будем иметь, как известно,

$$x_2^2 = \frac{R_2}{R_1}(x_3^2 - R_1 R_2).$$

Подставив это в ур-ние (4.71) § 16

$$R_0 = \frac{x_3^2 R_2}{x_2^2 + R_2^2},$$

получим

$$R_0 = R_1,$$

т. е. то же условие, что и при оптимальной связи для $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

В этом случае так же, как и в случае оптимальной связи, эдс в первом контуре будет испытывать чисто активную нагрузку, равную $2R_1$.

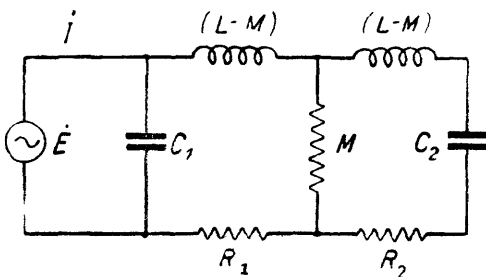
В промежуточных случаях нагрузка будет иметь реактивную составляющую.

Сопротивления контуров, взятых в отдельности, будут комплексными, причем при настройке, соответствующей точке B (фиг. 4.38) (или вблизи нее), контуры будут являться индуктивным сопротивлением, в точке A — емкостным.

На практике при передаче энергии посредством двухконтурной системы обычно работают в точке полного резонанса ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). Если нужно передать во вторичный контур максимальную мощность, — связь делают оптимальной. Если нужно получить высокий кпд, — связь делают выше оптимальной. И только в тех случаях, когда передача мощности и кпд играют второстепенный характер, и система используется в роли фильтра, — применяется связь меньше критической, вследствие чего сопротивление вносимое в первый контур, от нагрузки R_2 уменьшается.

§ 19. Параллельное включение эдс.

До сих пор мы рассматривали случаи, когда эдс была включена в первый контур последовательно. Положим теперь (фиг. 4.40), что эдс E присоеди-



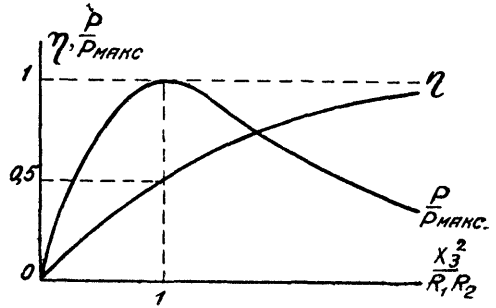
Фиг. 4.40.

нена параллельно первому контуру, причем требуется найти условия, при которых входное сопротивление первого контура чисто активное и равно заданной величине r .

Обозначим буквой i (без индекса) ток, идущий через источник. Если бы емкости C_1 не было вовсе, прежние уравнения были бы применимы к данному случаю с оговоркой, что $x_1 = \omega(L_1 - M)$ и не может быть сделано равным нулю.

Положив $x_2 = 0$, что соответствует максимальному кпд, получим из ур-ния (4.30)

$$i = \dot{E} \frac{R_1 R_2^2 + x_3^2 R_2 - j(x_1 R_2^2)}{(R_1 R_2 + x_3^2)^2 + (x_1 R_2)^2}. \quad (4.77)$$



Фиг. 4.39.

Введем теперь емкость C_1 и дадим ей такую величину, чтобы мнимая составляющая тока обратилась в нуль. Для этого должно быть

$$\omega C_1 = \frac{x_1 R_2^2}{(R_1 R_2 + x_3^2)^2 + (x_1 R_2)^2}. \quad (4.78)$$

Ур-ние (4.78) определяет величину емкости, настраивающей первый контур таким образом, что его входное сопротивление для параллельной эдс оказывается чисто активным, при условии, что второй контур настроен в резонанс с частотой ω .

Величину входного сопротивления r легко определить из ур-ния (4.77), имея в виду, что мнимая часть равна нулю

$$r = \frac{(R_1 R_2 + x_3^2)^2 + (x_1 R_2)^2}{R_1 R_2^2 + x_3^2 R_2}. \quad (4.79)$$

При расчете контура величины x_1 и x_3 должны быть выбраны такими, чтобы ур-ние (4.79) было удовлетворено при заданной величине r .

Мощность, затрачиваемая источником,

$$P = \frac{E^2}{r}. \quad (4.80)$$

Мощность, выделяемая в сопротивлении R_2 ,

$$P_2 = I_2^2 R_2. \quad (4.81)$$

Кпд (при условии сделанных выше предпосылок)

$$\eta = \frac{P_2}{P} = \frac{x_3^2}{R_1 R_2 + x_3^2}. \quad (4.82)$$

§ 20. Полный коэффициент полезного действия.

Вторичный контур всегда обладает некоторым вредным сопротивлением. Этим вредным сопротивлением можно пренебречь, если полезное сопротивление, включенное последовательно с вредным, значительно больше него. Если это условие не имеет места, то сопротивление R_2 надо разбить на две части: вредную R_2' и полезную R_2'' .

В этом случае полный коэффициент полезного действия будет

$$\eta_{\text{полн.}} = \frac{\eta R_2''}{(R_2' + R_2'')}, \quad (4.83)$$

а полезная мощность будет

$$P_{2\text{плезн.}} = I_2^2 R_2''.$$

Эта мощность разумеется максимальна в том случае, когда полная мощность, переходящая во второй контур, имеет наибольшую величину, т. е. когда

$$R_1 = (R_2' + R_2'').$$

Полный коэффициент полезного действия, как ясно из ур-ния (4.83), всегда меньше 50%. Из этого следует, что сопротивление контура всегда надо делать по возможности малым по сравнению с сопротивлением нагрузки.

§ 21. Случай, когда вторичный контур не имеет конденсатора.

Часто встречаются устройства, в которых вторичный контур представляет собой катушку, связанную индуктивно с первичным контуром и питающую нагрузочное сопротивление R_2 .

Схема такого устройства и эквивалентная схема показаны на фиг. 4.41. Отличие от того, что было рассмотрено раньше, заключается в отсутствии конденсатора во вторичном контуре, вследствие чего всегда

$$x_2 = \omega L_2 = \text{const.}$$

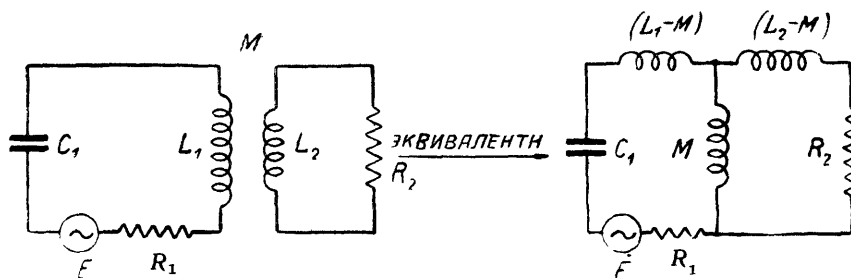
Отдача такой схемы в общем случае меньше, чем при наличии вторичного контура, так как условием наибольшей отдачи при прочих равных условиях является, как было сказано, условие

$$x_2 = 0.$$

Все величины, относящиеся к первичному и вторичному контурам, могут быть получены из общих уравнений, в которых надо полагать

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1},$$

$$x_2 = \omega L_2.$$



Фиг. 4.41.

Обратим внимание на следующее. Так как $x_2 \neq 0$, то входное сопротивление системы $\left(\frac{\dot{E}}{I}\right)$ не может быть чисто активным, за исключением случая, когда

$$x_2 = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}(x_3^2 - R_1 R_2)}. \quad (4.84)$$

Этот случай, как известно, соответствует сложному резонансу.

Второе положение, при котором также осуществляется сложный резонанс, т. е.

$$x_2 = -\sqrt{\frac{R_2}{R_1}(x_3^2 - R_1 R_2)},$$

здесь не может иметь места, так как $x_2 = \omega L_2$ всегда положительно.

Условие, выраженное уравнением (4.84), может быть выполнено только тогда, когда

$$R_2 > R_1.$$

Действительно, возведя обе части в квадрат и подставив $x_2 = \omega L_2$, $x_3 = \omega M$, получим

$$\omega^2 L_2^2 = \frac{R_2}{R_1}(\omega^2 M^2 - R_1 R_2). \quad (4.85)$$

Величина x_3 вообще меньше, чем величина ωL_2 и только в предельном случае, когда вся самоиндукция L_2 использована для связи, получим

$$L_2 = M$$

(фиг. 4.42).

Тогда ур-ние (4.85) переписывается так

$$\omega^2 L_2^2 = \frac{R_2}{R_1} (\omega^2 L_2^2 - R_1 R_2), \quad (4.86)$$

откуда ясно, что $\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ должно быть больше единицы. Если произведение $R_1 R_2$ исчезающе мало по сравнению с $\omega^2 L_2^2$, то (как предельный случай) может быть

$$\frac{R_2}{R_1} \cong 1.$$

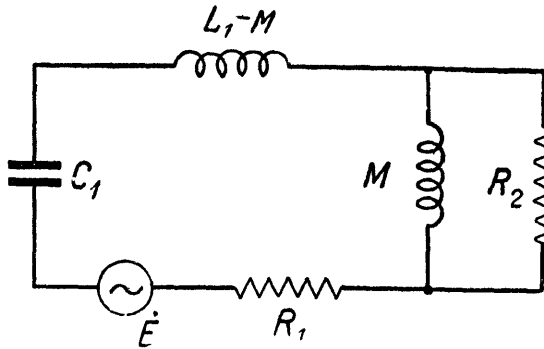
Тем более должно быть

$$R_2 > R_1,$$

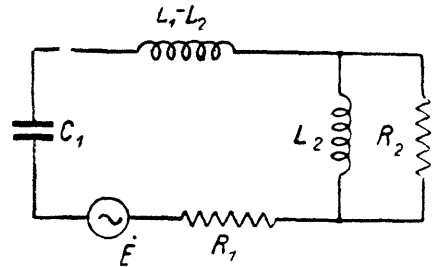
если

$$M < L_2.$$

Таким образом: а) входное сопротивление системы может быть сделано активным только при положении сложного резонанса, б) существует только одно положение сложного резонанса (а не два), в) сложный резонанс может быть осуществлен



Фиг. 4.42.



Фиг. 4.43.

только при определенном соотношении между M , R_1 , R_2 и L_2 . При этом во всяком случае он не может быть осуществлен, если

$$R_2 < R_1.$$

При сложном резонансе мощность во вторичном контуре имеет максимальную величину, как и в случае полной двухконтурной системы, а отдача равна 50%.

Вопрос об отдаче в других случаях удобнее всего исследовать посредством понятия о вносимом сопротивлении, пользуясь прежними ф-лами (4.71) и (4.70)

$$R_g = \frac{x_3^2 R_2}{x_2^2 + R_2^2}, \quad (4.71)$$

$$\eta = \frac{R_g}{R_1 + R_g}. \quad (4.70)$$

В частном случае, когда вся самоиндукция L_2 использована для связи (фиг. 4.43), ур-ние (4.71) дает

$$R_g = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2}{\omega^2 L_2^2 + R_2^2} \quad (4.87)$$

Если

$$\omega^2 L_2^2 \gg R_2,$$

то приближенно

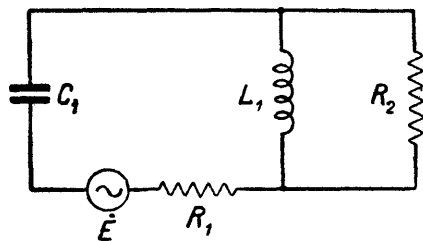
$$R_g \cong R_2. \quad (4.88)$$

Если наоборот (как обычно бывает)

$$\omega^2 L_2^2 \ll R_2,$$

то приближенно

$$R_s \approx \frac{\omega^2 L_2^2}{R_2}. \quad (4.89)$$



Фиг. 4.44.

Если сделать $L_2 = L_1 = M$, то схема получит вид фиг. 4.44.

Подставив теперь в ур-ние (4.89)

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \left(= \frac{1}{L_1 C_1} \right),$$

получим знакомое (из гл. III, § 9) выражение

$$R_s = \frac{L}{CR_2}.$$

§ 22. Случай, когда первичный контур не имеет конденсатора.

Если первичный контур не имеет конденсатора (фиг. 4.45), то в ур-ние (4.13), (4.14) и (4.15) надо поставить:

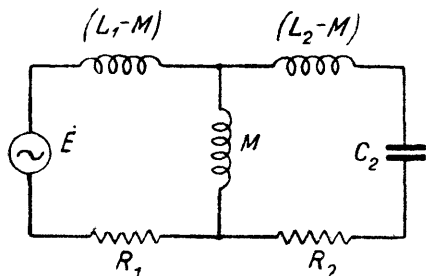
$$x_1 = \omega L_1,$$

$$x_2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right),$$

$$x_3 = \omega M.$$

Теперь x_2 может быть сделан равным нулю; поэтому условие наибольшей отдачи может быть выполнено для любого значения R_1 , R_2 , M и L_1 . Для этого нужно только, чтобы вторичный контур был настроен в резонанс с действующей частотой.

Однако входное сопротивление может быть сделано чисто активным только в одном случае, а именно, если



Фиг. 4.45.

$$x_1 = \sqrt{\frac{R_1}{R_2} (x_3^2 - R_1 R_2)}. \quad (4.90)$$

Это условие не может быть осуществлено, если

$$R_1 < R_2,$$

в чем легко убедиться, рассуждая так же, как и в случае § 21.

Если условие (4.90) выполнено, — мощность во вторичном контуре становится максимальной и равной

$$P_2 = \frac{E^2}{2R_1},$$

т. е. такой же, как и в системе с двумя полными контурами.

Во всех же остальных случаях эта мощность меньше, чем в полной двухконтурной системе, так как входное сопротивление всегда комплексно и следовательно, ток I_1 меньше, чем в случае, когда и первый контур имеет настройку, и входное сопротивление вследствие этого может быть сделано чисто активным.

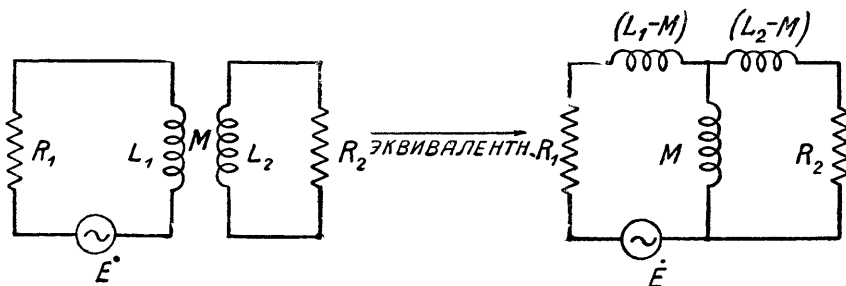
§ 23. Случай, когда оба контура имеют конденсаторов.

Если оба контура не имеют конденсаторов, схема получает вид фиг. 4.46, тождественную со схемой простого трансформатора с рассеиванием. Для того чтобы выполнить условие

$$x_1^2 = \frac{R_1}{R_2} (x_3^2 - R_1 R_2), \quad (4.91)$$

надо (как было показано), чтобы было

$$R_1 > R_2. \quad (4.92)$$



Фиг. 4.46.

С другой стороны, для того чтобы выполнить условие

$$x_2^2 = \frac{R_2}{R_1} (x_3^2 - R_1 R_2) \quad (4.93)$$

надо, чтобы было

$$R_2 > R_1 \quad (4.94)$$

Условия (4.92) и (4.94), очевидно, несовместимы. Поэтому входное сопротивление системы не может быть в точности сделано активным.

Так как $x_2 \neq 0$, отдача такой системы при прочих равных условиях вообще меньше, чем отдача при настраиваемом вторичном контуре.

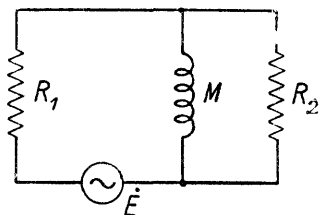
Так как $x_1 \neq 0$, мощность во вторичной цепи при прочих равных условиях вообще меньше, чем при настраиваемом первичном контуре.

Эти заключения в строгом смысле остаются правильными для любой комбинации значений L , R и M , однако, они теряют практический смысл в том случае, если

$$x_1 = x_2 = x_3, \quad (4.95)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} R_1 &\ll x_3 \\ R_2 &\ll x_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.96)$$



Фиг. 4.47.

Действительно, подставив (4.95) в общее выражение для тока в первичной цепи

$$\dot{I}_1 = \dot{E} \frac{(R_1 R_2^2 + x_3^2 R_2 + x_2^2 R_1) + j(x_2^2 x_3 - x_2^2 x_1 - x_1 R_2^2)}{(R_1 R_2 - x_1 x_2 + x_3^2)^2 + (x_1 R_2 + x_2 R_1)^2}$$

и имея в виду условие (4.96), найдем, во-первых, что мнимая часть практически равна нулю, а действительная часть приближенно может быть заменена следующим простым равенством

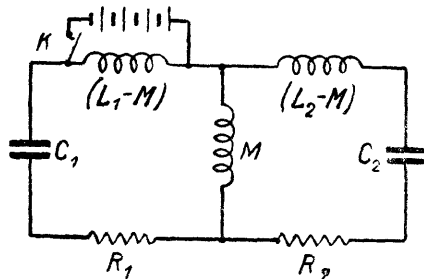
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{R_1 + R_2}.$$

Схема получает вид фиг. 4.47 и соответствует трансформатору без рассеивания с коэффициентом трансформации, равным единице.

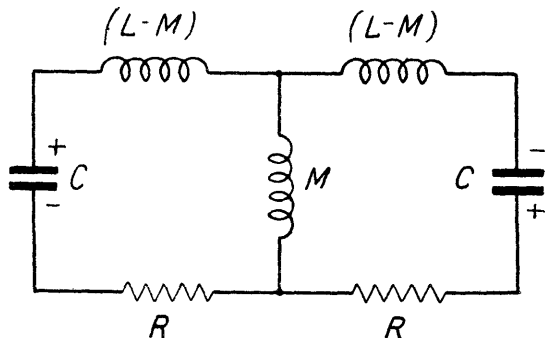
§ 24. Свободные колебания в системе, состоящей из двух одинаковых контуров.

До сих пор мы рассматривали установившийся режим колебаний в системе под действием внешней эдс. Посмотрим теперь, каков характер свободных колебаний в такой системе.

Для этого положим, что системе сообщено некоторое количество электрической энергии, после чего она предоставлена самой себе. Электрическую энергию можно сообщить в форме электрического поля, заря.



Фиг. 4.48.



Фиг. 4.49.

див конденсаторы и предоставив им после этого разряжаться. Можно также сообщить ее в форме магнитного поля, пропустив через катушку контура постоянный ток от внешнего источника и затем внезапно разомкнув цепь этого источника, например, ключом K (фиг. 4.48). Тогда магнитное поле, исчезая, образует ток, который зарядит конденсаторы и даст начало некоторому колебательному процессу.

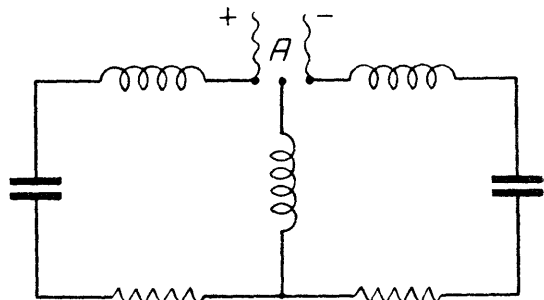
Наконец, может быть и комбинированный случай, когда энергия сообщена одновременно в обеих формах.

Принципиальной разницы между этими случаями нет и характер явления по существу остается одним и тем же, хотя в количественном смысле детали явления могут быть различными между собой.

Мы рассмотрим здесь только случай, когда энергия первоначально сосредоточена в конденсаторе, т. е. имеет форму электрического поля. Чтобы уяснить характер явления, рассмотрим сначала следующие два вспомогательных случая.

а) Имеется двухконтурная система из совершенно одинаковых контуров, схема которой показана на фиг. 4.49. В некоторый момент мгновенно конденсаторам контуров сообщены равные заряды, но противоположного знака (что и обозначено на схеме¹), после чего система предоставлена самой себе.

В первом контуре возникнет ток, направление которого в первый момент показано на фиг. 4.51. Совершенно такой же ток возникает во втором контуре, но направление его в катушке связи будет противоположным.

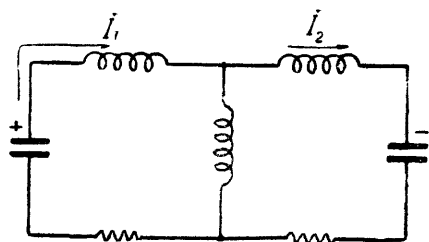


Фиг. 4.50.

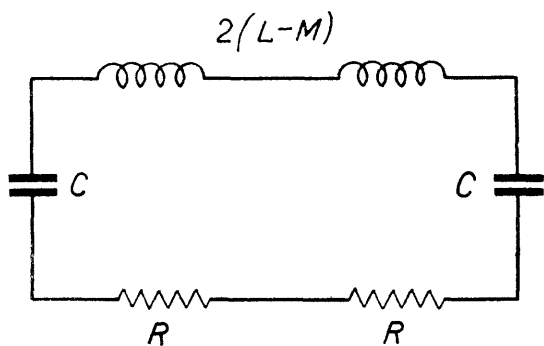
¹ Технически это можно сделать, устроив предварительно разрывы по обеим сторонам точки A фиг. 4.50 и приложив сюда напряжение от некоторого источника. Конденсаторы зарядятся противоположными знаками. Увеличивая напряжение источника, в некоторый момент получим перекрытие разрыва искрой, которая явится коротким замыканием, соединяющим место разрыва. С этого момента вступает в силу схема фиг. 4.49.

Вследствие полной симметрии токи в катушке в каждый момент взаимно уничтожаются. Поэтому эта катушка не играет никакой роли и ее можно вовсе удалить.

Тогда схема получает вид фиг. 4.52 и представляет собой один контур с емкостью $\frac{C}{2}$, самоиндукцией $2(L-M)$ и сопротивлением $2R$. Как известно, при разряде конденсатора в таком контуре возникают затухающие колебания. Начальная амплитуда напряжения в данном случае равна сумме напряжений на конденсаторах, которую обозначим E_m .



Фиг. 4.51.



Фиг. 4.52.

Частота колебаний, как это известно из теории одиночного контура, равна

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{(L-M)C} - \frac{R^2}{4(L-M)^2}}, \quad (4.97)$$

если

$$R \ll 4(L-M),$$

то

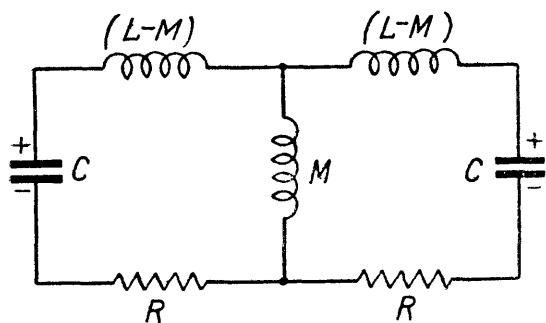
$$\omega_1 \cong \sqrt{\frac{1}{(L-M)C}}. \quad (4.98)$$

Показатель затухания определяется уравнением

$$\delta = \frac{R}{2(L-M)}. \quad (4.99)$$

Наконец, амплитуду тока обозначим

$$I'_m = \frac{2E_m}{2(L-M)\omega} = \frac{E_m}{(L-M)\omega}. \quad (4.100)$$



Фиг. 4.53.

Зависимость тока и напряжения от времени выразится известными формулами

$$\left. \begin{aligned} e &= E_m e^{-\delta t} \cos(\omega t) \\ i &= -\frac{E_m}{(L-M)\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

Все эти формулы были выведены в гл. III для одиночного контура. Таким образом рассматриваемая система ведет себя как одиночный контур, причем величина $2(L-M)$

в данном случае является самоиндукцией контура.

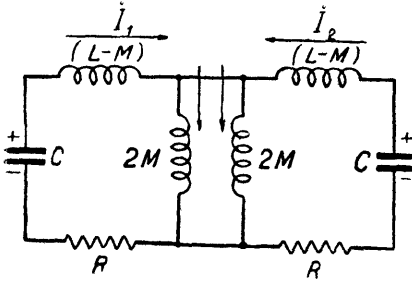
б) Теперь рассмотрим второй вспомогательный случай, а именно, когда в начальный момент конденсаторы были заряжены одинаково, как это показано на фиг. 4.53.

Заменяем эту схему равнозначной схемой фиг. 4.54¹⁾.

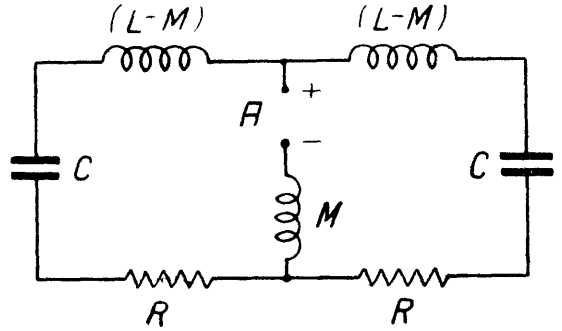
Так как оба контура совершенно симметричны, то возникшие в них колебания будут совершенно одинаковыми. Направление токов в первый момент показано на фиг. 4.54. Легко видеть, что эти токи имеют одинаковое направление в катушке связи.

Все величины, характеризующие колебания, определяются теми же уравнениями, как и для предыдущего случая, но только взамен $(L - M)$ теперь станет $(L + M)$.

Осуществим теперь оба способа возбуждения одновременно. Для этого надо верхней на чертеже обкладке конденсатора первого контура дважды



Фиг. 4.54.

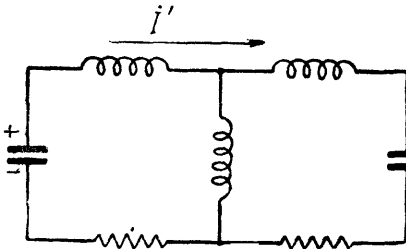


Фиг. 4.55.

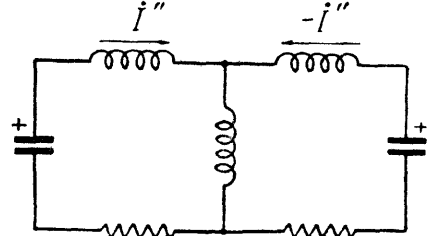
сообщить положительный заряд, а такой же обкладке конденсатора второго контура один раз сообщить отрицательный, а другой раз — равный ему положительный заряд.

В результате окажется, что заряжен только первый контур; и притом до двойной амплитуды.

Из этого следует, что когда заряд в рассматриваемой двухконтурной системе начинается с того, что заряжен только первый конденсатор до напряжения E_m , то течение процессов происходит так, как будто одновременно были осуществлены оба предыдущих способа разряда.



Фиг. 4.56.



Фиг. 4.57.

Таким образом, например, ток в первом контуре может рассматриваться, как сумма двух токов i' и i'' . Первый из них соответствует разряду обоих конденсаторов с первоначальным расположением знаков согласно фиг. 4.56, а второй — согласно фиг. 4.57.

Совмещая в одной системе заряды, указанные на фиг. 4.56 и фиг. 4.57, и обозначая теперь суммарный ток в первом контуре i_1 , запишем это так

$$i_1 = i' + i''.$$

¹⁾ Чтобы технически осуществить рассматриваемый случай, делают искровой промежуток в цепи катушки связи (в точке А фиг. 4.55) и подводят сюда высокое напряжение. Когда проскакивает искра, промежуток А перекрывается, и схема становится равнозначной схеме фиг. 4.53.

Во втором контуре ток i'' имеет противоположное направление. Поэтому

$$i_2 = i' - i''.$$

Зная ток i_2 , легко перейти и к напряжению на конденсаторе второго контура \dot{E}_2 , так как

$$\dot{E}_2 = \frac{i_2}{j\omega C}.$$

Обратим внимание, что если первоначальный полный заряд на первом конденсаторе обозначить не $2E_m$, а просто E_m , то в выражениях для амплитуд составляющих токов появится двойка в знаменателе.

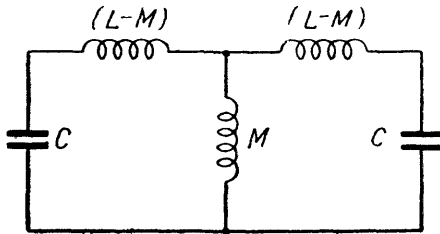
Так например,

$$I_m'' = \frac{E_m}{2(L+M)\omega}. \quad (4.102)$$

Этим обозначением мы и будем дальше пользоваться.

§ 25. Случай, когда оба контура не имеют затухания.

На основании результатов, полученных в предыдущем параграфе, рассмотрим случай, когда система состоит из двух одинаковых контуров без затухания (фиг. 4.58), причем при $t=0$ в системе имеется только напряжение E_m на конденсаторе первого контура.



Фиг. 4.58.

Будем пользоваться следующими обозначениями. Слагающий ток, соответствующий колебаниям первого типа (с частотой $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$), обозначаем i' или i_1' .

Ток, соответствующий колебаниям второго типа (с частотой $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}}$), обозначаем i'' или i_2'' .

Те же индексы будем применять и для слагающих напряжений.

Полный ток в первом контуре i_1 или i_1' . Напряжение на конденсаторе первого и второго контура e_1 , \dot{E}_1 , e_2 и \dot{E}_2 .

Выпишем формулы, определяющие значения токов

$$\left. \begin{aligned} i' &= -\frac{E_m}{2\omega_1(L-M)} \sin(\omega_1 t) \text{ при } t > 0 \\ i'' &= -\frac{E_m}{2\omega_2(L+M)} \sin(\omega_2 t) \text{ при } t > 0 \\ i_1 &= i' + i'' \\ i_2 &= i' - i'' \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

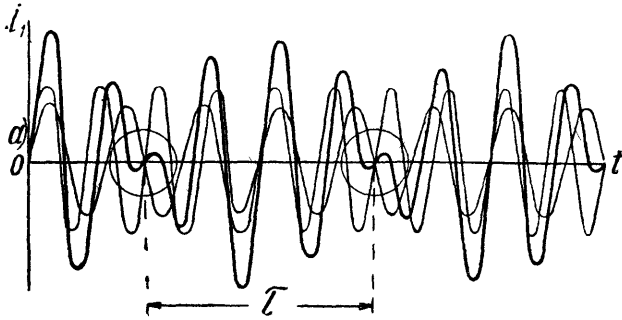
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}}; \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L+M)C}}.$$

Из этих уравнений очевидно, что с момента $t=0$ в каждом контуре существует два синусоидальных колебания с различными периодами.

Такие колебания дают, как известно, биения, причем период биений τ равен разности между числом колебаний в секунду, так что

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2} - \frac{2\pi}{\omega_1}. \quad (4.104)$$

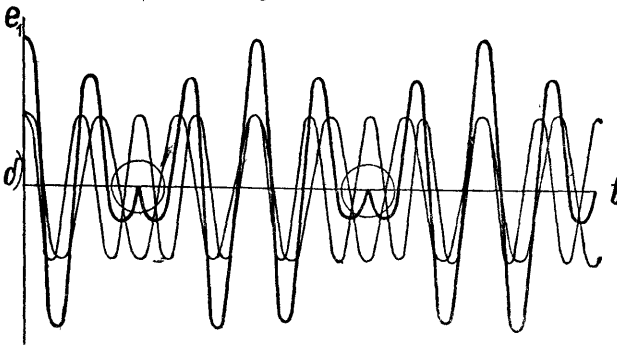
Полное напряжение на первом конденсаторе найдется умножением тока \dot{I}_1 на емкостное сопротивление первого контура



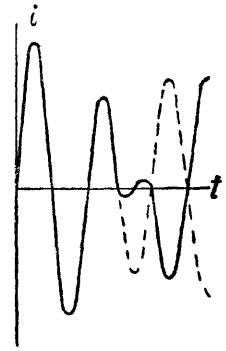
$$E_1 = \frac{i'}{j\omega_1 C} + \frac{i''}{j\omega_2 C}. \quad (4.105)$$

Так же для второго контура.

$$\dot{E}_2 = \frac{i'}{j\omega_1 C} - \frac{i''}{j\omega_2 C}. \quad (4.106)$$

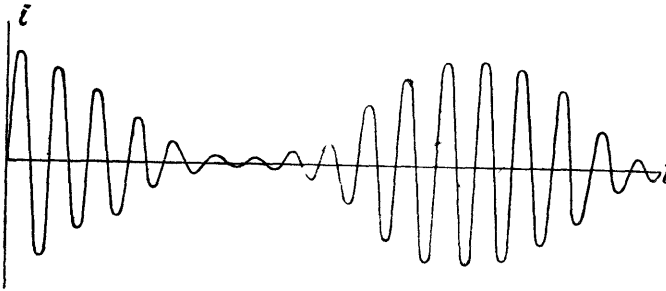


Фиг. 4.59.



Фиг. 4.60.

На фиг. 4.59 показан пример кривых, соответствующих данному случаю. На кривой а) тонкими линиями показаны слагающие токи в первом



Фиг. 4.61.

контуре, а жирной линией их сумма. На кривых б) то же для напряжений в первом контуре ¹⁾.

¹⁾ Характерным свойством этих кривых является поворот фазы колебания на 180° во время перехода через узел биения, как это отмечено на фиг. 4.59 кружками.

Для лучшего пояснения приводим еще фиг. 4.60, на которой пунктиром показано продолжение кривой, которое имело бы место, если бы не было поворота фазы. Таким образом кривая фиг. 4.61 не выражает собой биения между двумя колебаниями, как это иногда ошибочно изображают. Такая кривая является суммой трех колебаний

$$A \cos(\omega t) + \frac{A}{2} \cos[(\omega + \Delta)t] + \frac{A}{2} \cos[(\omega - \Delta)t].$$

§ 26. Влияние связи на затухание и частоту.

При наличии сопротивления R , одинакового в обоих контурах, частоты и коэффициенты затухания двух слагающих колебаний определяются следующими известными уже выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{(L-M)C} - \frac{R^2}{4(L-M)^2}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{(L+M)C} - \frac{R^2}{4(L+M)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{R}{2(L-M)} \\ \delta_2 &= \frac{R}{2(L+M)} \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

Из этих выражений непосредственно видно, что коэффициент затухания δ_1 больше, чем δ_2 .

С увеличением связи δ_1 неограниченно увеличивается, в то время как δ_2 , наоборот, уменьшается и в пределе (при $L=M$) может иметь значение

$$\delta_2 = \frac{R}{2(L+L)} = \frac{R}{4L}. \quad (4.109)$$

Что касается частоты ω_1 , то если собственные затухания каждого контура, взятого в отдельности, малы, при малых M можно пренебречь влиянием члена $\frac{R^2}{4(L-M)^2}$, стоящего под знаком корня.

Тогда

$$\omega_1 \approx \frac{1}{\sqrt{(L-M)C}} \quad (4.110)$$

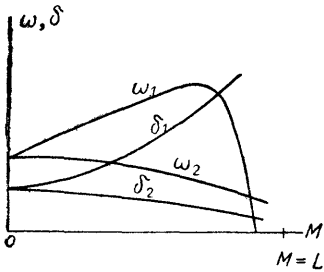
и, очевидно, увеличивается с увеличением связи.

Однако, когда M становится близким к L , то член $\frac{R^2}{4(L-M)^2}$ начинает расти весьма быстро и частота ω_1 , достигнув некоторого максимального значения, вновь уменьшается и достигает нуля, когда

$$\frac{1}{(L-M)C} = \frac{R^2}{4(L-M)^2} \quad \text{или} \quad CR^2 = 4(L-M), \quad (4.111)$$

что соответствует переходу к аperiodическому разряду.

Характер кривых $\omega = f(M)$ и $\delta = F(M)$ для рассматриваемого случая, когда R включено последовательно, показан на фиг. 4.62.



Фиг. 4.62.

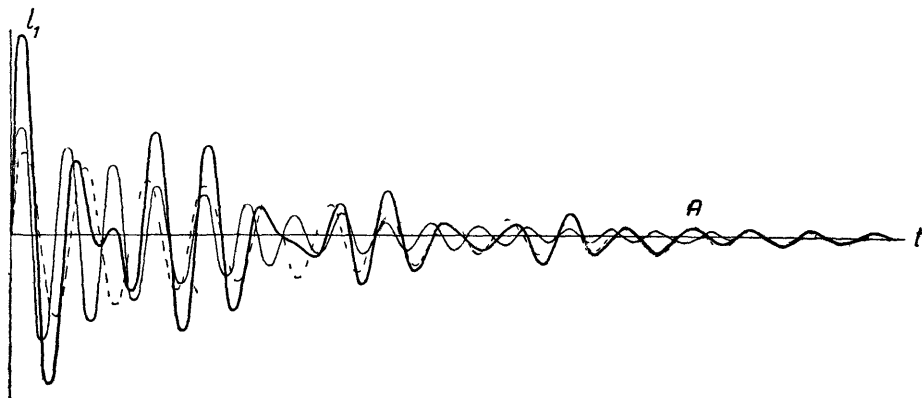
§ 27. Различные режимы при разряде в двухконтурной системе с последовательным сопротивлением.

Таким образом составляющие колебания имеют различные декременты. При достаточном увеличении связи одно из них может перейти в аperiodический разряд.

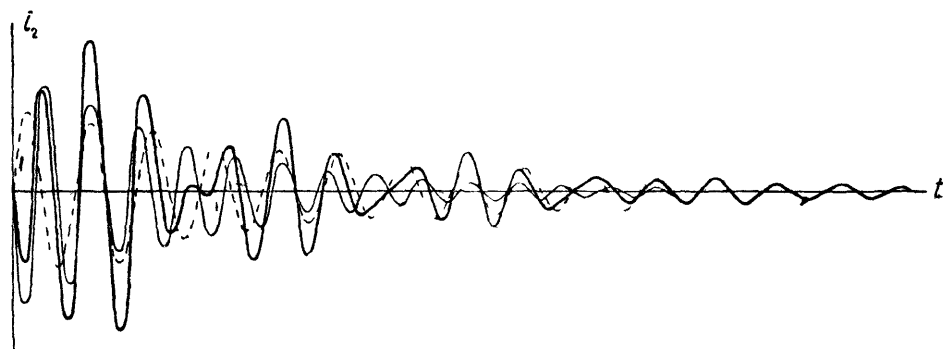
Различие в затухании приводит к тому, что амплитуда одного колебания (более короткого) падает быстрее, чем другого.

Следующие кривые показывают характер изменения тока в первичном контуре при сильной связи.

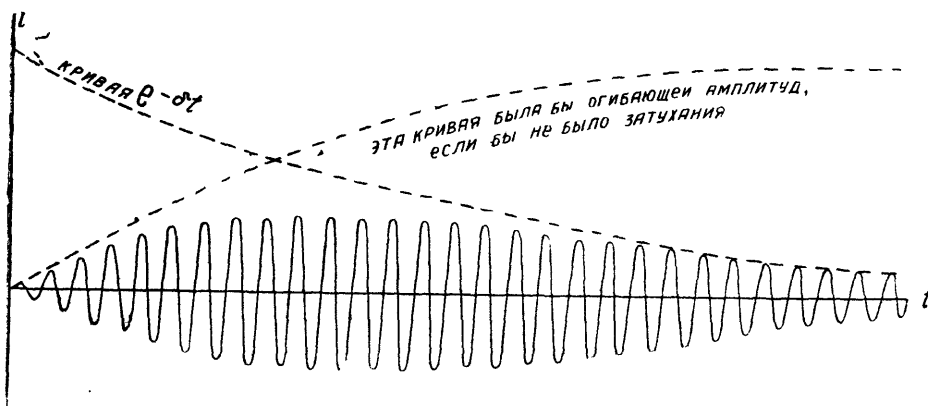
Фиг. 4.63 дает кривую в первом контуре, а фиг. 4.64 во втором. Из этих кривых видно, что амплитуда в первом контуре быстро падает, а во втором нарастает. После этого идет обратный процесс. Биения имеют место



Фиг. 4.63. Ток в первичном контуре при разряде конденсатора. Тонкой линией обозначены колебания короткого периода с большим коэффициентом затухания; пунктиром—колебания длинного периода с меньшим коэффициентом затухания; жирной линией—общий ток (суммы токов).



Фиг. 4.64. Ток во вторичном контуре при разряде конденсатора первичного контура. Тонкой линией обозначены колебания короткого периода с большим коэффициентом затухания; пунктиром — колебания длинного периода (разность токов), жирной линией—общий ток



Фиг. 4.65.

в течение короткого отрезка времени, а затем более короткое колебание, которое в начале имело большую амплитуду, затухает. После точки А колебания продолжают уже только с частотой ω_2 и с декрементом δ_2 .

На фиг. 4.65 показана кривая тока во вторичном контуре при малой связи. В этом случае частоты связи мало отличаются и поэтому раньше,

чем успевает проявиться биение, колебания уже затухнут. Переход к такой форме разряда определяется тем же условием, что и критическая связь.

§ 28. Ударное возбуждение двухконтурной системы.

В эпоху начального развития радиотехники, до появления электронных ламп, наиболее распространенным способом возбуждения колебаний был так называемый искровой способ.

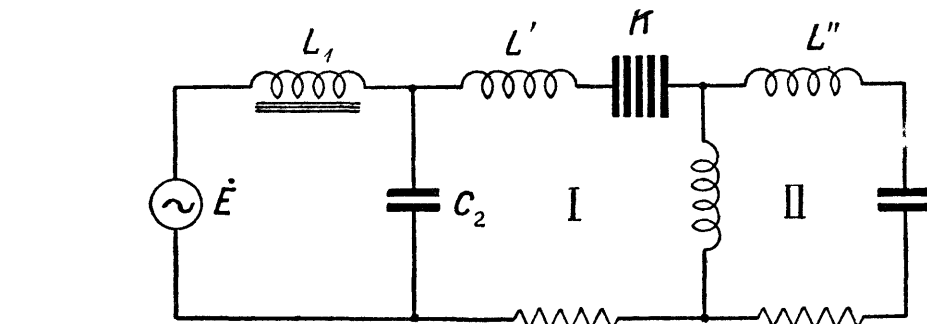
При этом способе колебания возбуждались, например, следующим образом.

В контур вводился искровой промежуток K (фиг. 4.66), соединявшийся с источником напряжения. Напряжение источника постепенно повышалось до критической величины, при которой в разряднике образуется искра. Пока искры нет, напряжение на конденсаторе контура равно напряжению источника. Как только проскакивает искра в промежутке K , образуется проводящий мост из паров металла, контур оказывается замкнутым и в нем начинается колебательный разряд.

Присутствие искры приводило к большим потерям энергии и поэтому стремились создать колебания в контуре, лишенном искры. Для этого применили два контура, связанные между собой. Оказалось, однако, что при достаточной связи цель не достигается, так как образуются биения, при которых энергия попеременно перекачивается то в первый, то во второй контуры.

Таким образом ток в первом контуре попрежнему создавал потери в искре, и сверх того появилось излучение не одной, а двух частот связи.

Вопрос был решен Вином, который применил особый разрядник, в котором искра погасает тотчас, как только произошло первое биение, и энергия перешла во второй контур. Достигалось это тем, что разрядник состоял из большого числа очень коротких промежутков и хорошо охлаждался.



Фиг. 4.67.

По этим причинам ионизация, являющаяся причиной проводимости воздуха, тотчас исчезала как только амплитуда колебательного тока делалась меньше некоторого предела.

Работа такой схемы протекает следующим образом.

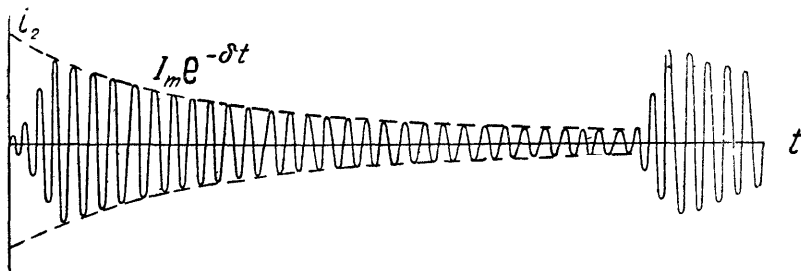
Источник переменного тока \dot{E} (фиг. 4.67) с низкой частотой Ω действует в цепи, состоящей из большой самоиндукции L_1 и емкости C_2 . Эта цепь настроена в резонанс с частотой Ω . Амплитуда в ней постепенно увеличивается вследствие резонанса и, наконец, в некоторый момент достигает величины, достаточной для образования искры в разряднике K .

С этого момента начинаются колебания в связанных контурах I и II, причем разрядник K должен рассматриваться как короткое замыкание, а самоиндукция L_1 — как бесконечное сопротивление.

Благодаря сильной связи период биений мал. Поэтому ток в первом контуре быстро падает, а ток во втором контуре быстро нарастает.

Как только ток в первом контуре упадет ниже определенного предела — искра потухает, и I контур вновь оказывается настроенным на низкую частоту Ω , очень далекую от частоты ω контура II. Поэтому колебания из второго контура не передаются обратно в первый, и второй контур колеблется с своим собственным периодом.

Источник низкой частоты в момент образования искры оказывается не в резонансе с питаемой им цепью, так как из нее исключается емкость C_2 ,



Фиг. 4.68.

которая для низкой частоты замкнута накоротку. С момента же потухания искры резонанс восстанавливается и начинается накопление энергии в контуре C_2L_1 , приводящее через некоторое время к новому пробоев разрядника K .

Колебания при такой системе показаны на фиг. 4.68.

В настоящее время этот способ возбуждения колебаний имеет, главным образом, исторический интерес, так как искровой метод возбуждения колебаний почти полностью оставлен.

Мы приводим его только для полноты изложения еще и потому, что термин „ударное возбуждение“ часто встречается в литературе.

§ 29. Механическая аналогия связанных систем.

Очень наглядная механическая модель двухконтурной системы осуществляется следующим простым способом.

Берут нить и закрепляют ее концы в двух точках так, чтобы нить была горизонтальна и имела некоторый провес. В двух точках на равном расстоянии от середины к этой нити подвешивают две совершенно одинаковые гири на вертикальных нитках небольшой длины. Получается два связанных маятника.

Все это устройство показано на фиг. 4.69.

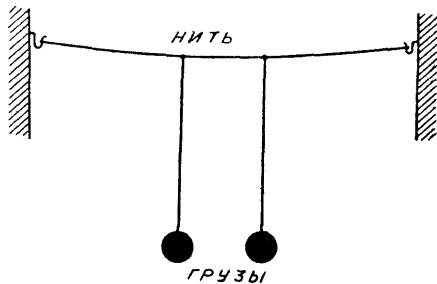
Маятники приводят в качание так, что их движение происходит в плоскостях, перпендикулярных линии, проходящей через точки закрепления.

1-й опыт. Став прямо перед маятниками, берут гири, отводят их „на себя“ на одинаковый угол от их отвесного положения и затем одновременно отпускают.

Оба маятника начинают качаться совершенно одинаково, и качание это постепенно затухает. Горизонтальная нить движется вместе с маятниками.

Это один способ возбуждения колебаний в этой системе.

2-й опыт. Берут обе гири, но разводят их в противоположных направлениях, т. е. одну к себе, а другую от себя на одинаковый угол.



Фиг. 4.69.

Предоставленные самим себе маятники качаются в противоположных фазах. Период колебания получается заметно меньше, чем в предыдущем случае.

Причина этого легко обнаруживается, если обратить внимание на поведение горизонтальной нити. Она теперь уже не движется вся в одну сторону, но делится на две части—правую и левую, которые в каждый момент движутся в противоположные стороны вследствие того, что каждый маятник увлекает свою часть нити в ту сторону, куда сам двигается.

Получается эффект укорочения эффективной длины маятников.

Таким образом мы установили два типа движения, имеющих два различных периода.

3-й опыт. Соединим теперь оба предыдущих движения в одно. Для этого надо первый маятник взять на себя так сказать дважды, т. е. отклонить его на себя на двойной угол. Второй же маятник надо один раз отклонить на себя, а другой раз—от себя. Иными словами, второй маятник вовсе не надо отклонять.

Итак, отклонив только один маятник, пустим его качаться. Тотчас же мы увидим, что вследствие связи через провес нити второй маятник придет в колебание. Легко заметить, что фаза колебания второго маятника отстает на 90° от фазы первого.

Именно поэтому второй маятник все время задерживает колебания первого, отбирая от него энергию, и сам раскачиваясь все больше и больше.

Так как запаздывание фазы второго маятника все время сохраняется, то он отбирает энергию не только до тех пор, пока его амплитуда меньше, но и после этого, вплоть до момента почти полной остановки первого маятника.

Тогда роли меняются. Движение первого маятника меняет свою фазу на 180° , вследствие чего он становится запаздывающим и в свою очередь начинает отбирать энергию от второго маятника.

Движение каждого маятника происходит по кривой, выражающей собой биения между двумя частотами, соответствующими первому и второму типу колебаний.

На этой же модели легко убедиться, что маятники разной длины при разном весе грузов также поочередно обмениваются энергией, но амплитуды их уже делаются неодинаковыми, а моменты замирания движения могут быть выражены менее ясно.

Из этого можно с полным основанием заключить, что явление биений имеет место в электрических контурах и при неодинаковом устройстве первого и второго контура, хотя протекает оно сложнее, чем в случае одинаковых контуров.

СЛОЖНЫЕ ЦЕПИ И ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ.

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛ. V.

a — фазовый коэффициент четырех- полюсника	γ — постоянная распространения в линии ($jx + \beta$)
b — коэффициент затухания на одно звену цепочки	ζ — волновое сопротивление четы- реполюсника
C — емкость	ρ — волновое сопротивление линии
C_l — емкость на единицу длины	ω — круговая частота
E — разность потенциалов	\equiv — знак тождества
g — активная (ваттная) положитель- ная проводимость	$\ \ $ — знак матрицы
I — сила тока	$\left. \begin{matrix} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{matrix} \right\}$ — коэффициенты четырехполюсни- ка, соответствующие уравне- ниям $\dot{E}_1 = A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2$; $\dot{I}_1 = A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2$
j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора)	
L — коэффициент самоиндукции	
L_l — самоиндукция на единицу длины	Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m и т. д.
R, r — активное (ваттное) положитель- ное сопротивление	Постоянные и среднеквадратичные значения — теми же буквами без ин- декса, например, E, I, P и т. д.
r — коэффициент, имеющий размер- ность сопротивления (комплекс- ное число)	Мгновенные значения, выраженные в тригонометрической форме, обозначены малыми буквами, например, $i = I_m \sin(\omega t)$ и т. п.
U — реактивная проводимость	Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены боль- шой буквой с точкой наверху, например, $\dot{I} = a + jb; \dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ и т. п.
Z — комплексное выражение кажуще- гося сопротивления ($Z = r + jx$)	
α — волновой (фазовый) коэффициент в линии	
β — километрический коэффициент за- тухания в линии	

§ 1. Предварительные замечания о сложных цепях.

Как бы ни были сложны электрические цепи, составленные из линейных элементов, в конце концов они всегда представляют собой только комбинацию сосредоточенных или распределенных емкостей, самоиндукций и сопротивлений.

Тем не менее при большом числе элементов полное математическое исследование явлений и расчеты становятся очень громоздкими и во многих случаях вообще не могут быть выполнены, так как приводят к уравнениям высших степеней.

Наиболее простым и всегда разрешаемым алгебраически случаем является случай установившегося режима. Решение уравнений Кирхгофа, написанных в комплексной форме, является самым общим методом исследования установившегося режима в любой электрической цепи. Однако этот способ при большом числе разветвлений и замкнутых путей в схеме, занимает много времени и представляет собой утомительную, чисто механическую работу.

Практически изучение сложных схем облегчается тремя обстоятельствами. Во-первых, почти все применяемые схемы могут быть разбиты на несколько определенных классов, каждый из которых характеризуется определенными свойствами и имеет свою область применения. Во-вторых, во многих случаях сложные цепи образуются из повторяющихся одинаковых элементов, вследствие чего количество независимых переменных, определяющих режим цепи, сводится к очень небольшому числу. Наконец, в-третьих, зачастую совершенно нет необходимости в глубоком исследовании всех деталей электрических явлений в сложных цепях, так как практический

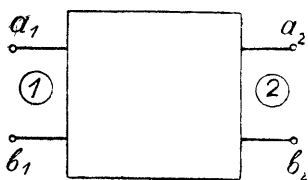
интерес представляют собой только некоторые определенные характеристики таких цепей.

Чтобы избежать необходимости каждый раз снова проделывать вычисления, аналогичные тем, которые многократно уже делались другими или по другим поводам, можно пользоваться готовыми, раз навсегда выведенными формулами для некоторых типичных комбинаций. В этом случае дело сводится к подстановке в подходящую общую формулу тех параметров, которые характеризуют данную частную цепь. С другой стороны, самый метод исследования сложных цепей в смысле деления ее на элементы, и в смысле составления уравнений и способа их решения может быть видоизменен путем применения новых представлений и других методов. К числу таких методов принадлежит так называемый метод четырехполюсника.

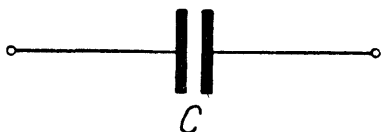
§ 2. Понятие о четырехполюснике.

Электрическая цепь, имеющая две точки, к которым подводится энергия, и две точки, к которым присоединяется нагрузка, называется четырехполюсником.

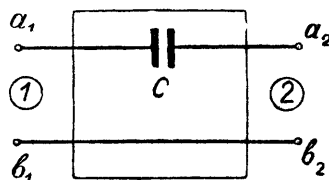
Первые две точки будем называть входными зажимами четырехполюсника, а вторые — выходными.



Фиг. 5.1.



Фиг. 5.2.

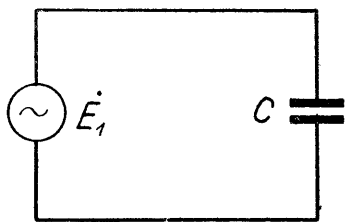


Фиг. 5.3.

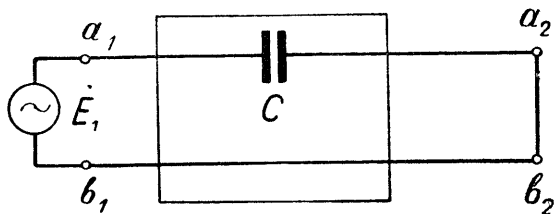
Источником энергии может быть какой-нибудь генератор или другая электрическая цепь, для которой данный четырехполюсник является нагрузкой.

В простейших случаях, когда внутреннее устройство четырехполюсника никак не отмечается, последний изображается на схеме в виде прямоугольника с четырьмя зажимами (фиг. 5.1).

Если зажимы a_1 , b_1 рассматриваются как входные, то зажимы a_2 , b_2 являются выходными, или наоборот. Обычно входные токи и напряжения обозначаются индексом „1“ внизу буквы, а выходные — индексом „2“.



Фиг. 5.4.



Фиг. 5.5.

Любая электрическая цепь может быть приведена к виду четырехполюсника или комбинации четырехполюсников

Например, схема конденсатора C (фиг. 5.2) может быть представлена в виде схемы 5.3, т. е. в виде четырехполюсника.

В этом случае, например, взамен схемы фиг. 5.4 надо будет начертить схему, как показано на фиг. 5.5, причем для данного частного случая зажимы a_2 , b_2 замкнуты накоротко.

Четырехполюсник называется линейным, если все элементы, из которых он составлен, представляют собой линейные емкости, самоиндукции и сопротивления.

Он называется четырехполюсником с постоянными параметрами, если входящие в него L , C и R не зависят от времени и являются, следовательно, только функциями частоты.

Если внутри четырехполюсника имеются источники энергии, влияющие на баланс энергии, то четырехполюсник называется „активным“ в противоположность „пассивному“ четырехполюснику, не содержащему таких внутренних источников. Таким образом цепи, состоящие только из линейных, не зависящих от времени L , C и R , являются всегда пассивными четырехполюсниками.

Законы, которые будут выведены для пассивного четырехполюсника, не могут быть приложены к активному за исключением следующего случая. Положим, что устроен некоторый прибор, который имеет два внешних зажима и обладает тем свойством, что он выделяет во внешнюю цепь энергию, пропорциональную квадрату проходящего через него тока. Такой прибор будет играть в цепи роль, обратную той, которую играет омическое сопротивление, поглощающее энергию пропорционально квадрату силы тока. Поэтому он может рассматриваться как отрицательное сопротивление.

В тех пределах, в которых указанная пропорциональность между током и выделяемой энергией сохраняется, отрицательное сопротивление может рассматриваться как линейный элемент цепи.

То же самое можно сказать и относительно прибора, который выделяет в цепь энергию, пропорциональную квадрату напряжения. Такой прибор может рассматриваться как отрицательная проводимость.

Очевидно, что у такого прибора, который является у внешних зажимов отрицательным сопротивлением или отрицательной проводимостью, должен быть свой источник энергии. Поэтому четырехполюсник, заключающий в себе отрицательное сопротивление или отрицательную утечку, является по существу активным четырехполюсником, но формально может рассматриваться как пассивный.

В дальнейшем мы ограничимся только рассмотрением линейных пассивных четырехполюсников с постоянными параметрами.

Естественно поставить себе вопрос, какую пользу может принести введение понятия о четырехполюснике и чем лучше представлять, например, емкость или контур, или другую цепь в форме четырехполюсника, а не в естественной форме.

Польза от такой замены заключается в следующем. Когда мы переходим к изучению сложных цепей, то выявление свойств этих цепей и изучение явлений в них становится трудным, если пользоваться теми методами, которые были удобными для простых цепей. Применяемые на практике сложные цепи обычно обладают определенными конфигурациями, т. е. определенным способом последовательности включения отдельных элементов. В электрических устройствах, применяемых в связи, большое распространение имеет, например, конфигурация, при которой ряд звеньев соединяется в некоторую цепь, образуя линию передачи сигнала или отдельный участок такой линии.

Как вся цепь, так и каждое звено этой цепи имеет свои входные и свои выходные зажимы (т. е. своей конфигурацией уже напоминает четырехполюсник).

При расчете и изучении действия такой цепи, или ее звеньев, в ряде случаев можно отвлечься от всей сложности явлений и ограничиться изучением одного определенного фактора или узкой группы каких-нибудь факторов, для чего оказывается возможным применить более простые и удобные методы, чем те, которыми мы пользовались.

Мало того, методы, пригодные для изучения простых цепей, могут привести к непреодолимым трудностям, если их применять к очень сложным цепям.

Метод четырехполюсника, к изложению которого мы переходим, заключается в том, что цепь характеризуется определенной зависимостью между четырьмя величинами: входным напряжением и током и выходным

напряжением и током. Для всех линейных цепей, будь то линии, более сложные цепи или более простые цепи, эта взаимная зависимость определяется посредством четырех комплексных чисел, являющихся функциями частоты, и постоянных при данной частоте.

Если два или несколько четырехполюсников соединяются между собою, то образующийся таким образом новый четырехполюсник обладает своими четырьмя комплексными числами, которые опять-таки полностью характеризуют его свойства. Эти комплексные числа, называемые „параметрами“ или „постоянными“ четырехполюсника, могут быть получены из „постоянных“ составляющих четырехполюсников путем вычисления по определенным правилам или из специальных таблиц.

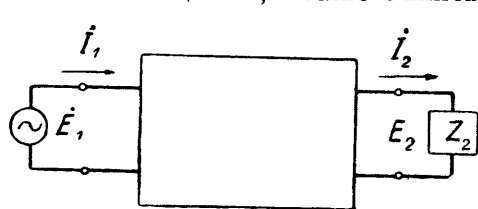
Таким образом метод четырехполюсника представляет особый метод расчета, который во многих случаях оказывается более простым и удобным, чем расчет, основанный на непосредственном применении закона Кирхгофа.

§ 3. Основные уравнения пассивного четырехполюсника.

Рассмотрим линейный пассивный четырехполюсник с постоянными параметрами (который ниже будем называть просто „четыреполюсником“), фиг. 5.6.

Пусть к входным зажимам приложено напряжение \dot{E}_1 и идет ток \dot{I}_1 , а вторичные зажимы замкнуты на некоторую нагрузку, вследствие чего здесь имеется напряжение \dot{E}_2 и ток \dot{I}_2 .

Для всей системы, образуемой источником энергии, четырехполюсником и внешней цепью, можно написать уравнения Кирхгофа.



Фиг. 5.6.

Для каждой узловой точки схемы уравнение токов будет иметь, как известно, вид

$$\Sigma \dot{I} = 0.$$

Для каждого замкнутого пути внутри схемы уравнение эдс будет иметь вид

$$\dot{E} = \Sigma Z \dot{I}.$$

Совокупность этих уравнений, как известно, позволяет определить все токи и все напряжения в системе, в том числе, разумеется, токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 и напряжения \dot{E}_1 и \dot{E}_2 четырехполюсника.

Исключим из рассмотрения все токи и напряжения, за исключением \dot{I}_1 , \dot{I}_2 , \dot{E}_1 и \dot{E}_2 .

Тогда оставшиеся два уравнения будут иметь вид

$$a_1 \dot{E}_1 + b_1 \dot{I}_1 + c_1 \dot{E}_2 + d_1 \dot{I}_2 = 0, \quad (5.1)$$

$$a_2 \dot{E}_1 + b_2 \dot{I}_1 + c_2 \dot{E}_2 + d_2 \dot{I}_2 = 0, \quad (5.2)$$

где a , b , c и d — некоторые постоянные коэффициенты, зависящие только от устройства цепи четырехполюсника.

Решение этих уравнений можно написать в следующем виде

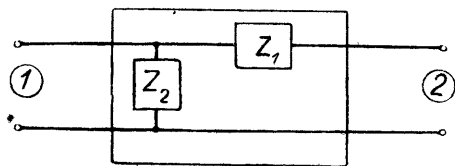
$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Ур-ние (5.3) содержит четыре комплексных коэффициента, не зависящих от \dot{E} и \dot{I} , называемых „параметрами четырехполюсника“. Из этих коэффициентов A_1 и A_4 являются комплексными числами нулевой размерности, A_2 имеет размерность сопротивления, A_3 — проводимости.

При заданной частоте A_1 , A_2 , A_3 и A_4 являются величинами постоянными, а вообще являются некоторыми функциями частоты.

В простейших случаях не представляет труда определить параметры четырехполюсника, исходя из закона Кирхгофа. Для более сложных случаев применяются особые приемы, которые будут указаны ниже.

Так например, пусть требуется сделать такое вычисление для четырехполюсника, схема которого показана на фиг. 5.7. Положим сначала, что энергия передается слева направо. На основании закона Кирхгофа пишем



Фиг. 5.7.

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3 \\ \dot{E}_1 &= \dot{I}_1 Z_1 + \dot{E}_2 \\ \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_2}{Z_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Решая эти уравнения относительно \dot{I}_1 и \dot{E}_1 , получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}_2 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) + \dot{I}_2 Z_1 \\ \dot{I}_1 &= \dot{E}_2 \frac{1}{Z_2} + \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Из сопоставления написанных уравнений с уравнением (5.3) очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \\ A_2 &= Z_1 \\ A_3 &= \frac{1}{Z_2} \\ A_4 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Если поменять ролью зажимы данного четырехполюсника, т. е. рассмотреть случай, когда энергия передается справа налево, тем же путем найдем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= Z_1 \\ A_3 &= \frac{1}{Z_2} \\ A_4 &= 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Сравнение уравнений (5.6) и (5.7) показывает, что коэффициенты A_2 и A_3 остались без изменения, а коэффициенты A_1 и A_4 поменялись местами.

Это правило остается действительным для рассматриваемых четырехполюсников также и при любой другой схеме.

§ 4. Зависимость между коэффициентами четырехполюсника.

Положим, что на входе четырехполюсника приложено сначала некоторое напряжение \dot{E}_1 с частотой ω_1 , а затем другое напряжение \dot{E}_1' с ча-

стотой ω_2 . Пусть соответствующие токи будут \dot{I}_1 и \dot{I}_1' . Так как частоты ω_1 и ω_2 различны, то вообще

$$\frac{\dot{E}_1}{I_1} \neq \frac{\dot{E}_1'}{I_1'}$$

или

$$\dot{E}_1 \dot{I}_1' - E_1' \dot{I}_1 \neq 0. \quad (5.8)$$

Аналогично можно написать и для напряжения и тока на выходе

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{I}_2} \neq \frac{\dot{E}_2'}{\dot{I}_2'}$$

Если \dot{E}_2 имеет частоту ω_1 , а \dot{E}_2' частоту ω_2 , то

$$\dot{E}_2 \dot{I}_2' - \dot{E}_2' \dot{I}_2 \neq 0. \quad (5.9)$$

Всегда, однако, можно подобрать значения \dot{E}_2 и \dot{E}_2' такими, чтобы

$$\dot{E}_1 \dot{I}_1' - \dot{E}_1' \dot{I}_1 - \dot{E}_2 \dot{I}_2' + \dot{E}_2' \dot{I}_2 = 0. \quad (5.10)$$

Исключим теперь из ур-ния (5.10) \dot{E}_1 , \dot{I}_1 , \dot{E}_1' и \dot{I}_1' , подставив их значения из основного уравнения четырехполюсника, т. е.

$$\dot{E}_1 = A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2,$$

а также

$$\dot{E}_1' = A_1 \dot{E}_2' + A_2 \dot{I}_2'$$

$$\dot{I}_1' = A_3 \dot{E}_2' + A_4 \dot{I}_2'$$

Получим после приведения подобных членов следующее выражение

$$(A_1 A_4 - A_2 A_3 - 1)(\dot{E}_2 \dot{I}_2' - \dot{E}_2' \dot{I}_2) = 0. \quad (5.11)$$

Так как множитель, заключенный во вторые скобки, вообще не равен нулю, то множитель, заключенный в первые скобки, всегда должен быть равен нулю. Следовательно,

$$A_1 A_4 - A_2 A_3 = 1. \quad (5.12)$$

Это замечательное соотношение показывает, что для определения пассивного линейного четырехполюсника вообще достаточно трех параметров, так как четвертый может быть определен из ур-ния (5.12).

§ 5. Симметричные и несимметричные четырехполюсники.

Если даны уравнения четырехполюсника в обычной форме

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

легко написать уравнения для определения \dot{E}_2 и \dot{I}_2 . Решив ур-ние (5.13) относительно \dot{E}_2 и \dot{I}_2 и приняв во внимание, что

$$A_1 A_4 - A_2 A_3 = 1, \quad (5.14)$$

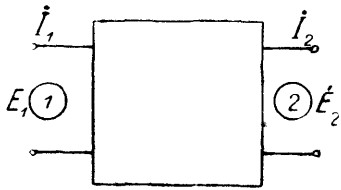
получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_2 &= A_4 \dot{E}_1 + A_2 \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 &= A_3 \dot{E}_1 + A_1 \dot{I}_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

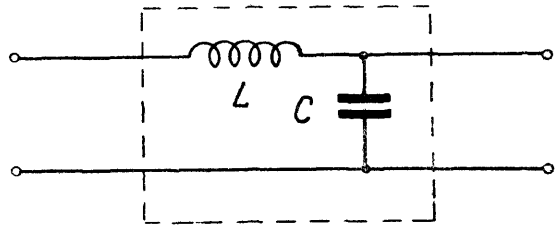
Ур-ние (5.15) показывает, что по сравнению с ур-нием (5.13) коэффициенты A_1 и A_4 поменялись местами, а коэффициенты A_2 и A_3 остались без изменения.

С этим правилом мы уже встретились в § 4 на частном примере.

Таким образом в общем случае переход энергии слева направо (фиг. 5.8) (когда зажимы 1 являются входными зажимами) отличается от



Фиг. 5.8.



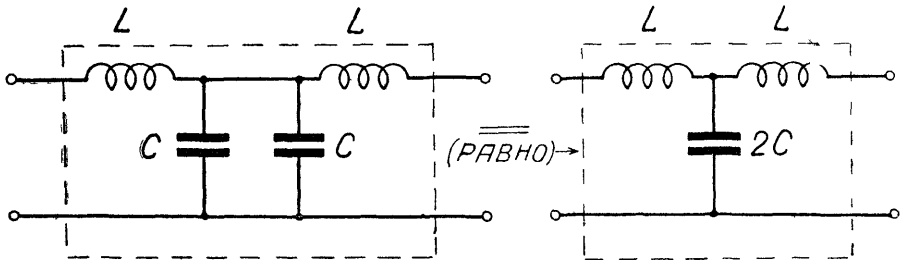
Фиг. 5.9.

перехода энергии справа налево (когда зажимы 2 являются входными зажимами).

Такой четырехполюсник называется несимметричным. Примером несимметричного четырехполюсника является схема фиг. 5.9. Два несимметричных четырехполюсника, включенные навстречу друг другу, образуют симметричный четырехполюсник.

На фиг. 5.10 показан симметричный четырехполюсник, образованный из несимметричных, типа фиг. 5.9.

В симметричном четырехполюснике передача энергии слева направо происходит так же, как и справа налево. Поэтому ур-ния (5.13) и (5.15)



Фиг. 5.10.

должны дать тождественные результаты. Для этого A_1 должно быть равно A_4 .

Поэтому взаимная связь между коэффициентами, выражаемая ур-нием (5.14), напишется теперь так

$$A_1^2 - A_2 A_3 = 1, \quad (5.16)$$

так как

$$A_1 = A_4.$$

§ 6. Определение параметров симметричного четырехполюсника посредством измерения.

Назовем „входным“ сопротивлением четырехполюсника отношение

$$\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_1} = Z_1.$$

Так же „выходным“ сопротивлением назовем отношение

$$\frac{\dot{E}_2}{\dot{I}_2} = Z_2.$$

Тогда в основных уравнениях четырехполюсника

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

разделив верхнюю строку на нижнюю и заменив $\frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_1}$ и $\frac{\dot{E}_2}{\dot{I}_2}$ через Z_1 и Z_2 , получим

$$Z_1 = \frac{A_1 Z_2 + A_2}{A_3 Z_2 + A_4}. \quad (5.18)$$

Это сопротивление может быть измерено на опыте.

Для того чтобы определить путем измерения параметры четырехполюсника, поступают следующим образом.

Производят измерение входного сопротивления Z_1 данного четырехполюсника: а) при короткозамкнутых выходных зажимах (Z_{1k}) и б) при разомкнутых выходных зажимах Z_{1p} .

Первому случаю соответствует отсутствие напряжения на выходе ($\dot{E}_2 = 0$), второму — отсутствие тока ($\dot{I}_2 = 0$).

Тогда из уравнения (5.17) получим

$$Z_{1k} = \frac{A_2}{A_4}, \quad (5.19)$$

(значок k обозначает, что цепь на выходе короткозамкнута)

$$Z_{1p} = \frac{A_1}{A_3} \quad (5.20)$$

значок p обозначает, что цепь на выходе разомкнута).

Если четырехполюсник симметричный, то к уравнениям (5.19) и (5.20) присоединяются еще уравнения

$$\begin{aligned} A_1 &= A_4, \\ A_1^2 - A_2 A_3 &= 1, \end{aligned}$$

так что

$$Z_{1k} = \frac{A_2}{A_1}, \quad (5.21)$$

$$Z_{1p} = \frac{A_1}{A_3}. \quad (5.22)$$

Отсюда

$$Z_{1p} - Z_{1k} = \frac{A_1^2 - A_2 A_3}{A_3 A_1} = \frac{1}{A_3 A_1}. \quad (5.23)$$

Разделив уравнение (5.22) на уравнение (5.23), найдем

$$\frac{Z_{1p}}{Z_{1p} - Z_{1k}} = A_1^2. \quad (5.24)$$

Умножив уравнение (5.21) на уравнение (5.22), получим

$$Z_{1k} Z_{1p} = \frac{A_2}{A_3}. \quad (5.25)$$

С другой стороны,

$$A_1^2 - 1 = A_2 A_3. \quad (5.26)$$

Умножив уравнение (5.25) на уравнение (5.26), найдем

$$Z_{1k} Z_{1p} (A_1^2 - 1) = A_2^2,$$

что легко преобразовать при помощи ур-ния (5.24) и получить

$$\frac{Z_{1k}^2 Z_{1p}}{Z_{1k} - Z_{1p}} = A_2^2. \quad (5.27)$$

Разделив ур-ние (5.25) на ур-ние (5.26), найдем после подстановки значения A_1^2

$$\frac{1}{Z_{1p}(Z_{1p} - Z_{1k})} = A_3^2. \quad (5.28)$$

§ 7. Определение параметров несимметричного четырехполюсника посредством измерения.

В случае несимметричного четырехполюсника кроме измерений входного сопротивления при короткозамкнутых и разомкнутых выходных зажимах, надо сделать те же измерения с четырехполюсником, обратным данному. Иначе говоря, надо поменять ролями входные и выходные зажимы данного четырехполюсника и повторить измерения, включив источник эдс у зажимов, которые ранее рассматривались как выходные зажимы.

Новые измерения дадут значения сопротивления, которые обозначим буквами Z_{2k} и Z_{2p} , соответственно случаю короткого замыкания и случаю полного размыкания зажимов, которые раньше были входными.

При вычислении Z будем пользоваться теперь уравнениями:

$$\dot{E}_2 = A_4 \dot{E}_1 + A_2 \dot{I}_1,$$

$$\dot{I}_2 = A_3 \dot{E}_1 + A_1 \dot{I}_1.$$

Таким образом получим два новых уравнения, в которых Z определится из измерения

$$Z_{2k} = \frac{A_2}{A_1},$$

$$Z_{2p} = \frac{A_4}{A_3}.$$

К ним добавляются два прежних уравнения:

$$Z_{1k} = \frac{A_2}{A_4},$$

$$Z_{1p} = \frac{A_1}{A_3}$$

и уравнение

$$A_1 A_4 - A_2 A_3 = 1.$$

Не производя выкладок, которые по существу ничем не отличаются от предыдущих, выпишем результаты для этого случая

$$A_1^2 = \frac{Z_{1p}}{Z_{2p} - Z_{2k}}, \quad (5.29)$$

$$A_2^2 = \frac{Z_{1p} Z_{2k}^2}{Z_{2p} - Z_{2k}} = \frac{Z_{2p} Z_{1k}^2}{Z_{1p} - Z_{1k}}, \quad (5.30)$$

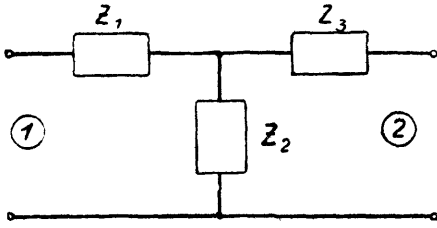
$$A_3^2 = \frac{1}{Z_{2p}(Z_{1p} - Z_{1k})} = \frac{1}{Z_{1p}(Z_{2p} - Z_{2k})}, \quad (5.31)$$

$$A_4^2 = \frac{Z_{2p}}{Z_{1p} - Z_{1k}}. \quad (5.32)$$

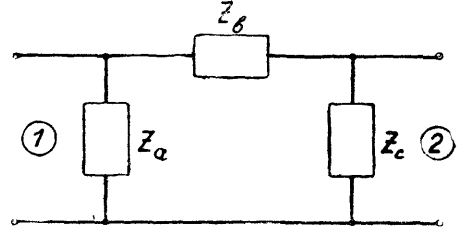
Эти формулы позволяют определять параметры любой сложной цепи путем четырех измерений.

§ 8. Т-образные и П-образные четырехполюсники.

Простейшие схемы четырехполюсников, применяемых в качестве элементов сложных цепей, обычно могут быть приведены либо к виду, показанному на фиг. 5.11, либо к виду, показанному на фиг. 5.12. Первые назы-



Фиг. 5.11.

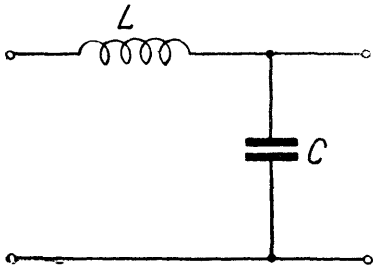


Фиг. 5.12.

ваются Т-образным типом, а вторые П-образным, по сходству с начертанием этих букв.

Под Z_1, Z_2, \dots могут пониматься в свою очередь более или менее сложные комплексы элементов.

Схема неполного типа, пример которой показан на фиг. 5.13, может быть по желанию отнесена к тому либо другому виду.



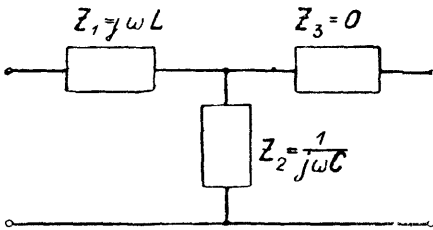
Фиг. 5.13.

Например, на фиг. 5.14 схема фиг. 5.13 представлена как Т-образный четырехполюсник, а на фиг. 5.15 как П-образный.

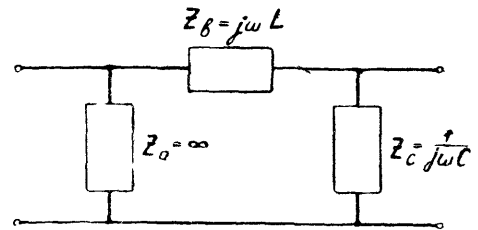
Зная значения Z_1, Z_2 и Z_3 для Т-образной схемы фиг. 5.11 или Z_a, Z_b и Z_c для П-образной схемы фиг. 5.12, можно, пользуясь формулами предыдущего параграфа, написать значения для параметров этих четырехполюсников.

Для этого сначала выпишем значения входных сопротивлений, для разомкнутых и замкнутых выходных зажимов.

Начнем с Т-образной схемы фиг. 5.11. Индексом „1“ — обозначаем случай, когда измерение сопротивления производится слева (у зажимов 1). Индекс $1k$ обозначает, что зажимы 2 короткозамкнуты, а индекс $1p$, что



Фиг. 5.14.



Фиг. 5.15.

зажимы 2 разомкнуты. Индексы $2k$ и $2p$ обозначают, что сопротивление измеряется со стороны зажимов 2, а замыкаются и размыкаются зажимы 1.

$$Z_{1p} = Z_1 + Z_2, \quad (5.33)$$

$$Z_{1k} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 + Z_1 Z_2}{Z_2 + Z_3}, \quad (5.34)$$

$$Z_{2p} = Z_2 + Z_3, \quad (5.35)$$

$$Z_{2k} = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 + Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (5.36)$$

Отсюда, пользуясь формулами предыдущего параграфа, получим

$$A_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_a}, \quad (5.37)$$

$$A_2 = \frac{Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 + Z_1 Z_2}{Z_2}, \quad (5.38)$$

$$A_3 = \frac{1}{Z_2}, \quad (5.39)$$

$$A_4 = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2} \quad (5.40)$$

Аналогичные подсчеты для П-образной схемы дают результаты, приведенные в следующих формулах, в которых буквою Y обозначена комплексная проводимость. Так что, например, $\frac{1}{Z_{2p}} = Y_{2p}$; $\frac{1}{Z_a} = Y_a$ и т. д.

$$Y_{1k} = Y_a + Y_b, \quad (5.41)$$

$$Y_{1p} = \frac{Y_a Y_b + Y_a Y_c + Y_b Y_c}{Y_b + Y_c}, \quad (5.42)$$

$$Y_{2k} = Y_b + Y_c, \quad (5.43)$$

$$Y_{2p} = \frac{Y_a Y_b + Y_a Y_c + Y_b Y_c}{Y_a + Y_b}. \quad (5.44)$$

Отсюда, пользуясь формулами предыдущего параграфа,

$$A_1 = \frac{Y_b + Y_c}{Y_b}, \quad (5.45)$$

$$A_2 = \frac{1}{Y_b}, \quad (5.46)$$

$$A_3 = \frac{Y_a Y_b + Y_a Y_c + Y_b Y_c}{Y_b}, \quad (5.47)$$

$$A_4 = \frac{Y_a + Y_b}{Y_b}. \quad (5.48)$$

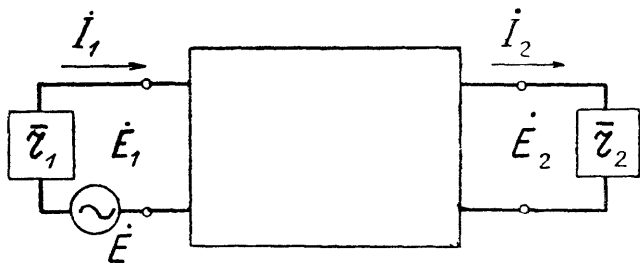
Эти формулы являются общими.

Чтобы найти A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , в каждом конкретном случае надо привести схему к виду Т- или П-образного четырехполюсника и подставить в эти формулы соответствующие конкретные значения сопротивлений или проводимостей.

§ 9. Нагруженный четырехполюсник.

До сих пор мы рассматривали четырехполюсник сам по себе, отвлекаясь от тех цепей, которые к нему присоединены. Эти цепи могут быть введены в рассмотрение двумя способами. Можно их представлять в виде некоторых комплексных сопротивлений (которые для отличия от сопротивлений, образующих двухполюсник, будем обозначать буквой r с черточкой наверху, например $\overline{r_n}$). С другой стороны, эти цепи можно представлять также в форме некоторых четырехполюсников с соответствующими параметрами. В этом последнем случае вся цепь в целом представится состоящей из ряда четырехполюсников (так или иначе соединенных между собой). Такая цепь сама явится новым четырехполюсником, характеризваемым своими четырьмя параметрами A_1, A_2, A_3, A_4 .

Правила, которые позволяют разыскать параметры четырехполюсника, образованного из ряда других четырехполюсников (параметры которых известны), являются предметом специальной теории. Здесь мы рассмотрим только первый способ расчета. В следующем параграфе, кроме того, приведены таблицы, которые значительно облегчают нахождение параметров сложного четырехполюсника, составленного из более или менее значительного числа элементов.



Фиг. 5.16.

На фиг. 5.16 изображена схема четырехполюсника с присоединенными к нему сопротивлениями \bar{r}_1 и \bar{r}_2 и эдс \dot{E} .

Для расчета токов и напряжений служат следующие формулы:

а) основные формулы четырехполюсника

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

б) закон Ома для входной и выходной цепи, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E} - \dot{I}_1 \bar{r}_1 \\ \dot{E}_2 &= \dot{I}_2 \bar{r}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

На основании этих формул не представляет труда получить следующую табл. V.I.

Таблица V.I

Входное напряжение	$\dot{E}_1 = \dot{E} \frac{A_1 \bar{r}_2 + A_2}{H}$
Входной ток	$\dot{I}_1 = \dot{E} \frac{A_3 \bar{r}_2 + A_4}{H}$
Выходное напряжение	$\dot{E}_2 = \dot{E} \frac{\bar{r}_2}{H}$
Выходной ток	$\dot{I}_2 = \dot{E} \frac{1}{H}$
Отношение выходного и входного напряжений	$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{A_1 + \frac{A_2}{\bar{r}_2}}$
Отношение выходного и входного токов	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{A_3 \bar{r}_2 + A_4}$
Входное сопротивление системы	$Z = \frac{\dot{E}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_1 \bar{r}_2 + A_2}{A_3 \bar{r}_2 + A_4}$
$H = A_1 \bar{r}_2 + A_2 + A_3 \bar{r}_1 \bar{r}_2 + A_4 \bar{r}_1$	

Мы уже видели, что при коротком замыкании выходных зажимов ($\dot{E}_2 = 0$) входное сопротивление становится равным

$$Z_{1k} = \frac{A_2}{A_4}.$$

§ 10. Другие параметры четырехполюсника и таблицы для вычислений.

Уравнения

$$\dot{E}_1 = A_1 \dot{E}_2 + A_2 \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = A_3 \dot{E}_2 + A_4 \dot{I}_2$$

дают возможность сразу определить \dot{E}_1 и \dot{I}_1 , если известны \dot{E}_2 и \dot{I}_2 .

Можно составить и другие уравнения, которые позволят сразу, без дополнительных вычислений, находить различные другие зависимости.

В этом случае взамен параметров A станут некоторые другие параметры, которые могут быть вычислены, если известны параметры A , или определены самостоятельно, или взяты из соответствующих таблиц.

Приняты следующие обозначения для этих параметров.

Таблица V.II

Параметр Y , позволяющий определять токи, если известны напряжения	$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{E}_1 + Y_2 \dot{E}_2$ $\dot{I}_2 = Y_3 \dot{E}_1 + Y_4 \dot{E}_2$
Параметр W , позволяющий определять напряжение, если известны токи	$\dot{E}_1 = W_1 \dot{I}_1 + W_2 \dot{I}_2$ $\dot{E}_2 = W_3 \dot{I}_1 + W_4 \dot{I}_2$
Параметр F , позволяющий определить \dot{E}_2 и \dot{I}_1 , если известны \dot{E}_1 и \dot{I}_2	$\dot{E}_2 = F_1 \dot{E}_1 + F_2 \dot{I}_2$ $\dot{I}_1 = F_3 \dot{E}_1 + F_4 \dot{I}_2$
Параметр D , позволяющий определить \dot{E}_1 и \dot{I}_2 , если известны \dot{E}_2 и \dot{I}_1	$\dot{E}_1 = D_1 \dot{E}_2 + D_2 \dot{I}_1$ $\dot{I}_2 = D_3 \dot{E}_2 + D_4 \dot{I}_1$

В следующих таблицах даны значения параметров A , Y , W , F и D для четырехполюсников, составленных из одного, двух или трех элементов. Под элементом понимается некоторая более простая цепь. Для вычисления надо знать только комплексные сопротивления этих элементов Z_1 , Z_2 , Z_3 и схему их соединения.

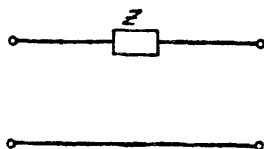
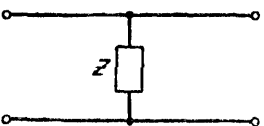
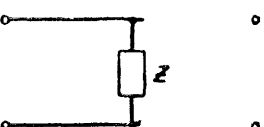
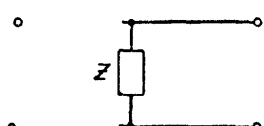
Значения параметров записаны в форме так называемой матрицы¹⁾.

При этом способе обозначения между двумя парами вертикальных черточек помещены четыре алгебраических выражения, каждое из которых соответствует значению того либо другого коэффициента.

Порядок их размещения всегда таков. Значение коэффициента с индексом „1“ помещено слева вверху. Рядом правее помещено значение коэффициента с индексом „2“. В следующей строке в том же порядке помещены значения коэффициентов с индексами „3“ и „4“.

¹⁾ Эта форма записи принята потому, что для вычислений методом четырехполюсника применяют приемы матричного исчисления.

Параметры четырехполюсников, составленных из одного двухполюсника.

С х е м а	$\ A\ $	$\ Y\ $	$\ W\ $	$\ F\ $	$\ D\ $
	$\begin{vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{Y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \frac{1}{Z} & -1 \\ \frac{1}{Z} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y & -Y \\ Y & -Y \end{vmatrix}$	$\ \infty\ $	$\begin{vmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{Y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{Y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{vmatrix}$	$\ \infty\ $	$\begin{vmatrix} Z & -Z \\ Z & -Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{Y} & \frac{-1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & \frac{-1}{Y} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{Z} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -Y & 1 \end{vmatrix}$
	$\ \infty\ $	$\begin{vmatrix} \frac{1}{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\ \infty\ $	$\ \infty\ $	$\ \infty\ $
	$\ \infty\ $	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y \end{vmatrix}$	$\ \infty\ $	$\begin{vmatrix} 0 & -Z \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{Y} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\ \infty\ $

Параметры четырехполюсников, составленных из двух двухполюсников.

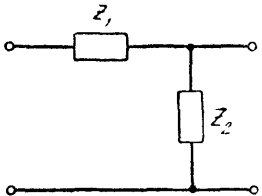
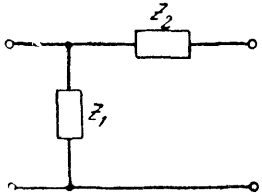
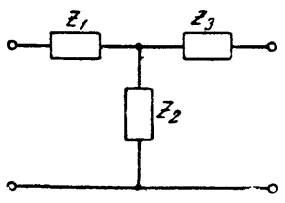
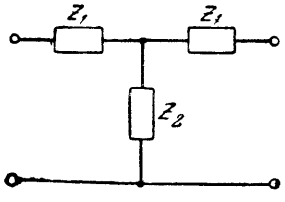
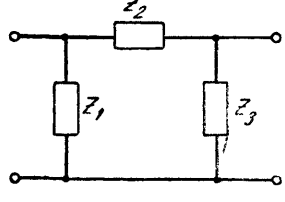
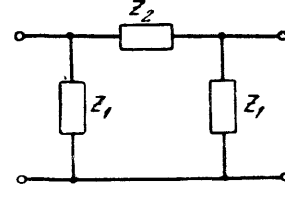
Схема	A	Y	W	F	D
	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1 + y_2}{y_1} & \frac{1}{y_1} \\ y_2 & 1 \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_1} \\ \frac{1}{Z_1} & -\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} y_1 & -y_1 \\ y_1 & -(y_1 + y_2) \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -Z_2 \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} & -\frac{1}{y_2} \\ \frac{1}{y_2} & -\frac{1}{y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} & -\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \frac{1}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1}{y_1 + y_2} & -\frac{1}{y_1 + y_2} \\ \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} & \frac{y_1}{y_1 + y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} 1 & Z_1 \\ -\frac{1}{Z_1 + Z_2} & 1 \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{y_1} \\ -\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} & 1 \end{array} \right\ \end{aligned}$
	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{y_2} \\ y_1 & \frac{y_1 + y_2}{y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} & -\frac{1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_1} & -\frac{1}{Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} y_1 + y_2 & -y_2 \\ y_2 & -y_2 \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} Z_1 & -Z_2 \\ Z_2 & -(Z_1 + Z_2) \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{1}{y_1} & -\frac{1}{y_2} \\ \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} 1 & -Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{y_2} \\ y_1 & 1 \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ -\frac{1}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_2}{y_1 + y_2} & \frac{1}{y_1 + y_2} \\ -\frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2} & \frac{y_2}{y_1 + y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$

СХЕМА	A	Y
	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} & \frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & \frac{Z_2+Z_3}{Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1+y_2}{y_1} & \frac{y_1+y_2+y_3}{y_1y_3} \\ y_2 & \frac{y_2+y_3}{y_3} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_2+Z_3}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3} & \frac{-Z_2}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3} \\ \frac{Z_2}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3} & \frac{-(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1(y_2+y_3)}{y_1+y_2+y_3} & \frac{-y_1y_3}{y_1+y_2+y_3} \\ \frac{y_1y_3}{y_1+y_2+y_3} & \frac{-y_3(y_1+y_2)}{y_1+y_2+y_3} \end{array} \right\ \end{aligned}$
	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} & \frac{Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1+y_2}{y_1} & \frac{2y_1+y_2}{y_1^2} \\ y_2 & \frac{y_1+y_2}{y_1} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1(Z_1+2Z_2)} & \frac{-Z_2}{Z_1(Z_1+2Z_2)} \\ \frac{Z_2}{Z_1(Z_1+2Z_2)} & \frac{-(Z_1+Z_2)}{Z_1(Z_1+2Z_2)} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1(y_1+y_2)}{2y_1+y_2} & \frac{-y_1^2}{2y_1+y_2} \\ \frac{y_1^2}{2y_1+y_2} & \frac{-y_1(y_1+y_2)}{2y_1+y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$
	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1Z_3} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_2+y_3}{y_2} & \frac{1}{y_2} \\ \frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{y_2} & \frac{y_1+y_2}{y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & \frac{-Z_2+Z_3}{Z_2Z_3} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} y_1+y_2 & -y_2 \\ y_2 & -(y_2+y_3) \end{array} \right\ \end{aligned}$
	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} & Z_2 \\ \frac{2Z_1+Z_2}{Z_1^2} & \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} \frac{y_1+y_2}{y_2} & \frac{1}{y_2} \\ \frac{y_1(y_1+2y_2)}{y_2} & \frac{y_1+y_2}{y_2} \end{array} \right\ \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left\ \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1Z_2} & \frac{-1}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & \frac{-(Z_1+Z_2)}{Z_1Z_2} \end{array} \right\ \\ & \left\ \begin{array}{cc} y_1+y_2 & -y_2 \\ y_2 & -(y_1+y_2) \end{array} \right\ \end{aligned}$

вленных из трех двухполюсников.

W		F		D	
Z_1+Z_2	$-Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$	$-\frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_2}{Z_2+Z_3}$	$\frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}$
Z_2	$-(Z_2+Z_3)$	$\frac{1}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$	$\frac{-1}{Z_2+Z_3}$	$\frac{Z_2}{Z_2+Z_3}$
$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$	$-\frac{1}{y_2}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2}$	$-\frac{y_1+y_2+y_3}{y_3(y_1+y_2)}$	$\frac{y_3}{y_2+y_3}$	$\frac{y_1+y_2+y_3}{y_1(y_2+y_3)}$
$-\frac{1}{y_2}$	$-\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$	$\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2}$	$-\frac{y_2y_3}{y_2+y_3}$	$\frac{y_3}{y_2+y_3}$
Z_1+Z_2	$-Z_2$	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$	$-\frac{Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_1(Z_1+2Z_2)}{Z_1+Z_2}$
Z_2	$-(Z_1+Z_2)$	$\frac{1}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$	$\frac{-1}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}$
$\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$	$-\frac{1}{y_2}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2}$	$-\frac{2y_1+y_2}{y_1(y_1+y_2)}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2}$	$\frac{y_2+2y_1}{y_1(y_1+y_2)}$
$\frac{1}{y_2}$	$-\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}$	$\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2}$	$-\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}$	$\frac{y_1}{y_1+y_2}$
$\frac{Z_1(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3}$	$-\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}$	$\frac{Z_3}{Z_2+Z_3}$	$-\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}$	$\frac{Z_3}{Z_2+Z_3}$	$\frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3}$
$\frac{Z_1Z_3}{Z_1+Z_2+Z_3}$	$-\frac{Z_3(Z_1+Z_2)}{Z_1+Z_2+Z_3}$	$\frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1(Z_2+Z_3)}$	$\frac{Z_3}{Z_2+Z_3}$	$-\frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1(Z_2+Z_3)}$	$\frac{Z_3}{Z_2+Z_3}$
$\frac{y_2+y_3}{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}$	$-\frac{y_2}{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}$	$\frac{y_2^2}{y_2+y_3}$	$-\frac{1}{y_2+y_3}$	$\frac{y_2}{y_2+y_3}$	$\frac{1}{y_2+y_3}$
$\frac{y_2}{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}$	$-\frac{y_1+y_2}{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}$	$\frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{y_2+y_3}$	$\frac{y_2}{y_2+y_3}$	$-\frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{y_2+y_3}$	$\frac{y_2}{y_2+y_3}$
$\frac{Z_1(Z_1+Z_2)}{2Z_1+Z_2}$	$-\frac{Z_1^2}{2Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$	$-\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$	$\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$
$\frac{Z_1^2}{2Z_1+Z_2}$	$-\frac{Z_1(Z_1+Z_2)}{2Z_1+Z_2}$	$\frac{2Z_1+Z_2}{Z_1(Z_1+Z_2)}$	$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$	$-\frac{2Z_1+Z_2}{Z_1(Z_1+Z_2)}$	$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$
$\frac{y_1+y_2}{y_1(y_1+2y_2)}$	$-\frac{y_2}{y_1(y_1+2y_2)}$	$\frac{y_2}{y_1+y_2}$	$-\frac{1}{y_1+y_2}$	$\frac{y_2}{y_1+y_2}$	$\frac{1}{y_1+y_2}$
$\frac{y_2}{y_1(y_1+2y_2)}$	$-\frac{y_1+y_2}{y_1(y_1+2y_2)}$	$\frac{y_1(y_1+2y_2)}{y_1+y_2}$	$\frac{y_2}{y_1+y_2}$	$-\frac{y_1(y_1+2y_2)}{y_1+y_2}$	$\frac{y_2}{y_1+y_2}$

Таким образом, хотя эти индексы и не указаны, но они ясны из местоположения данного выражения.

Так например, запись

$$\|A\| = \begin{vmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{vmatrix} \quad (5.51)$$

равнозначна следующей записи

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \\ A_2 &= Z_1 \\ A_3 &= \frac{1}{Z_2} \\ A_4 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Также запись

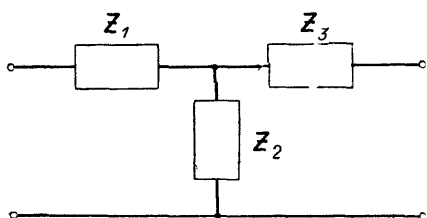
$$\|W\| = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ Z_2 & -(Z_2 + Z_3) \end{vmatrix} \quad (5.53)$$

равнозначна записи

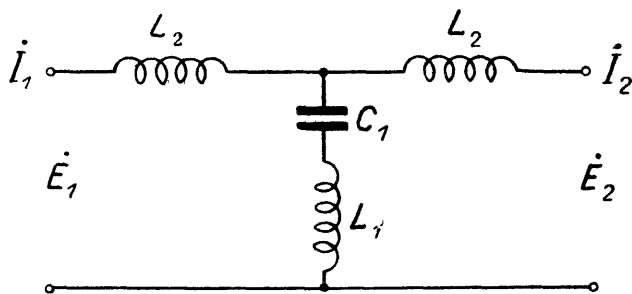
$$\left. \begin{aligned} W_1 &= Z_1 + Z_2 \\ W_2 &= -Z_2 \\ W_3 &= Z_2 \\ W_4 &= -(Z_2 + Z_3) \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Согласно сказанному выше, на основании последней записи, относящейся к схеме фиг. 5.17 и взятой из табл. V, можно сразу написать

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= (Z_1 + Z_2)\dot{I}_1 - Z_2\dot{I}_2 \\ \dot{E}_2 &= Z_2\dot{I}_1 - (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$



Фиг. 5.17.



Фиг. 5.18.

Если дана, например, схема фиг. 5.18, то, сопоставляя ее с фиг. 5.17, видим, что

$$\begin{aligned} Z_1 &= j\omega L_2, \\ Z_2 &= j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \\ Z_3 &= Z_1 = j\omega L_2. \end{aligned}$$

Подставив это в уравнение (5.55), находим искомую зависимость.

В таблицах параметры, к которым относятся матрицы, даны сверху вертикальных колонн.

Колонны разделены горизонтальными линиями. Между этими линиями слева помещена схема, к которой относятся все матрицы горизонтального ряда. В каждой клетке помещены две матрицы. Одна из них дает выражение параметров в зависимости от комплексного сопротивления $Z_1, 2, 3$, а другая — в зависимости от комплексной проводимости $Y_1, 2, 3$.

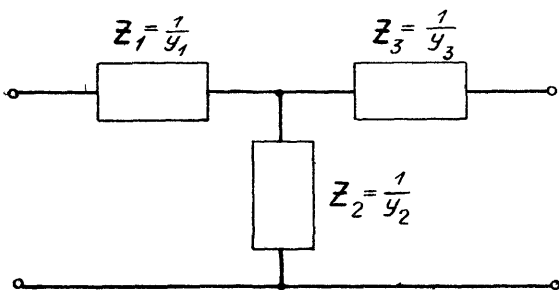
$$\frac{1}{Z_1} = Y_1; \quad \frac{1}{Z_2} = Y_2; \quad \frac{1}{Z_3} = Y_3.$$

Таблицы для большего числа элементов даны в приложении V.

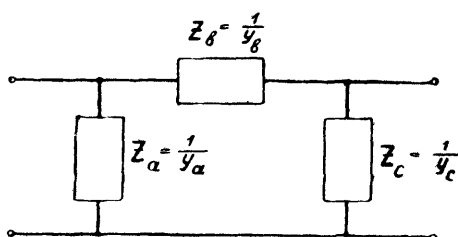
§ 11. Эквивалентные четырехполюсники и преобразование Т-образной схемы в П-образную.

Четырехполюсники называются эквивалентными, если параметры A_1, A_2, A_3 и A_4 одного соответственно равны таким же параметрам другого.

Очевидно, что в двух эквивалентных четырехполюсниках взаимные зависимости между токами и напряжениями одинаковы. В этом смысле эквивалентные четырехполюсники представляют собой цепи с одинаковым,



Фиг. 5.19.



Фиг. 5.20.

электрическими свойствами для внешней цепи в установившемся режиме, хотя устройство их может быть совершенно различно.

Цепи, построенные по П-образной схеме, можно эквивалентно заменить цепями, построенными по Т-образной схеме.

Электрические цепи с распределенными постоянными можно эквивалентно заменить цепями с сосредоточенными постоянными.

Рассмотрим преобразование Т-образного четырехполюсника в П-образный. Для этого выпишем значения параметров A из предыдущего параграфа для Т и П. Это сделано в следующей табл. V. VI. Таблица соответствует фиг. 5.19 и 5.20.

Таблица V. VI

Параметр	Т-образный четырёхполюсник	П-образный четырёхполюсник
A_1	$\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}$	$\frac{y_b + y_c}{y_b}$
A_2	$\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$	$\frac{1}{y_b}$
A_3	$\frac{1}{Z_2}$	$\frac{y_a y_b + y_a y_c + y_b y_c}{y_b}$
A_4	$\frac{Z_2 + Z_3}{Z_2}$	$\frac{y_a + y_b}{y_b}$

Приравняв значение каждого коэффициента А, стоящее во второй колонке таблицы, соответствующему значению того же А, стоящему в третьей колонке, получим четыре уравнения.

Решив эти уравнения относительно $Z_{1, 2, 3}$, получим

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z_2 &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \\ Z_3 &= \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c} \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

где $Z_{a, b, c} = \frac{1}{y_{a, b, c}}$.

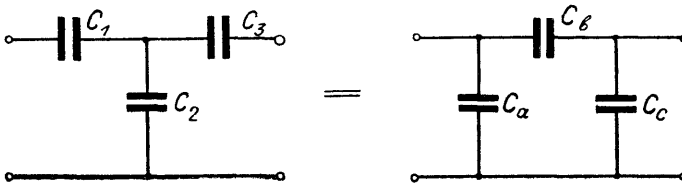
Ур-ния (5.56) дают возможность найти те сопротивления $Z_{1, 2, 3}$, из которых надо составить Т-образную схему, эквивалентную П-образной с заданными значениями $Z_{a, b, c} = \frac{1}{y_{a, b, c}}$.

Решив те же ур-ния относительно $y_{a, b, c}$, найдем

$$\left. \begin{aligned} y_a &= \frac{y_2 y_3}{y_1 + y_2 + y_3} \\ y_b &= \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2 + y_3} \\ y_c &= \frac{y_1 y_3}{y_1 + y_2 + y_3} \end{aligned} \right\} \quad (5.57)$$

где $y_{1, 2, 3} = \frac{1}{Z_{1, 2, 3}}$.

Ур-ния (5.57) позволяют найти проводимости, которые надо включить по П-образной схеме для того, чтобы эквивалентно заменить Т-образную схему.



Фиг. 5.21.

В частности, например, Т-образный четырехполюсник, составленный из конденсаторов C_1, C_2, C_3 (фиг. 5.21) эквивалентно заменяется П-образным четырехполюсником с емкостями C_a, C_b, C_c , если

$$\left. \begin{aligned} C_a &= \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_b &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_c &= \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Для обратной замены должно быть

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{C_a C_b + C_a C_c + C_b C_c}{C_a} \\ C_2 &= \frac{C_a C_b + C_a C_c + C_b C_c}{C_c} \\ C_3 &= \frac{C_a C_b + C_a C_c + C_b C_c}{C_b} \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Для того чтобы написать те же формулы для четырехполюсников, составленных из самоиндукций, надо заменить букву C буквой L , индексы a, b и c индексами 1, 2, 3, и обратно — индексы 1, 2, 3 — индексами a, b, c .

В рассмотренном примере, когда четырехполюсник составлен только из однородных индуктивных элементов (L или C), частота не входит в написанные уравнения. Поэтому эквивалентность Т- и П-образной схемы не зависит от частоты.

Такой же результат получится и в том случае, если четырехполюсник состоит только из омических сопротивлений.

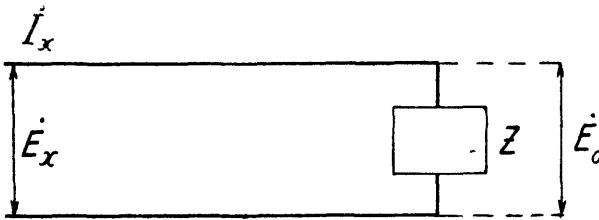
Если же в схему входят хотя бы два разнородных элемента, т. е. C и L или L и R или C и R , в уравнениях (5.56) или (5.57), служащих для вычисления эквивалентных элементов Z_1, Z_2, Z_3 или Y_1, Y_2, Y_3 , появится множитель частоты.

Разумеется, в этом случае одна схема будет эквивалентна другой только при той частоте, для которой сделано вычисление по уравнениям (5.56) или (5.57).

§ 12. Эквивалентная замена однородной линии четырехполюсником с сосредоточенными постоянными и обратная замена.

В гл. II § 17 были выведены следующие уравнения для однородной двухпроводной линии:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}_0 \operatorname{ch}(j\alpha x + \beta x) + \rho \dot{I}_0 \operatorname{sh}(j\alpha x + \beta x) \\ \dot{I}_x &= \frac{E_0}{\rho} \operatorname{sh}(j\alpha x + \beta x) + \dot{I}_0 \operatorname{ch}(j\alpha x + \beta x) \end{aligned} \right\} \quad (5.60)$$



Фиг. 5.22.

Эти уравнения дают возможность определить значения тока и напряжения \dot{I}_x и \dot{E}_x у входных зажимов (фиг. 5.22), если известны ток и напряжение \dot{I}_0 и \dot{E}_0 у выходных зажимов линии. Напомним, что в этих уравнениях

$$\alpha \cong \omega \sqrt{L_l C_l}$$

и называется фазовым коэффициентом

$$\beta \cong \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C_l}{L_l}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$$

и называется километрическим коэффициентом затухания.

R представляет собой последовательное сопротивление, а g — утечку (проводимость), равномерно распределенные вдоль линии, но рассчитанные на 1 км длины линии,

$$\sqrt{\frac{L_l}{C_l}} \cong \rho$$

и называется волновым сопротивлением линии.

Наконец, сумма $(j\alpha + \beta) \cong \gamma$

называется постоянной распространения линии.

Заменим в уравнении (5.60) индексы x и 0 на „1“ и „2“ с тем, чтобы придать этому уравнению ту форму, которой мы пользовались для четырехполюсника, и положим x , т. е. длину линии, равной единице.

Получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= \dot{E}_2 [\operatorname{ch}(\gamma)] + j_2 \left[\sqrt{\frac{\bar{L}_1}{\bar{C}_1}} \operatorname{sh}(\gamma) \right] \\ \dot{i}_1 &= \dot{E}_2 \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\bar{L}_1}{\bar{C}_1}}} \operatorname{sh}(\gamma) \right] + j_2 [\operatorname{ch}(\gamma)] \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Ур-ние (5.61) показывает, что если линию единичной длины рассматривать как четырехполюсник, то параметрами последнего будут величины, стоящие в прямых скобках, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_4 = \operatorname{ch}(\gamma) \\ A_2 &= \sqrt{\frac{\bar{L}_1}{\bar{C}_1}} \operatorname{sh}(\gamma) \\ A_3 &= \sqrt{\frac{\bar{C}_1}{\bar{L}_1}} \operatorname{sh}(\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

причем $\gamma = (j\alpha + \beta)$.

Поэтому каждая данная линия может быть эквивалентно заменена четырехполюсником с сосредоточенными постоянными, если параметры последнего соответствуют ур-нию (5.62).

Можно поступить и наоборот и заменить симметричный четырехполюсник эквивалентной двухпроводной линией единичной длины.

Такая замена оказывается очень плодотворной в теории фильтров. Тогда взамен параметров A четырехполюсник может быть охарактеризован параметрами, аналогичными по формальному смыслу параметрам α , β , γ и

$$\rho = \sqrt{\frac{\bar{L}_1}{\bar{C}_1}}$$

Эти параметры мы, однако, для отличия обозначим другими буквами, как это показано в следующей табл. V. VII.

Таблица V.VII

Название параметров (в различной терминологии)	Обозначения	
	для линии	для четырехполюсника с сосредоточенными элементами
Волновое сопротивление линии или цепочки Характеристическое сопротивление цепочки	ρ	ϵ
Километрический коэффициент затухания; затухание на единицу длины линии или затухание на одно звено цепочки	β	b
Фазовый коэффициент; фазовый множитель на единицу длины линии; фазовая постоянная или фазовый множитель на одно звено цепочки или фазовая постоянная звена	α	a
Постоянная распространения	$\gamma = (j\alpha + \beta)$	$(ja + b)$

Для того чтобы представить четырехполюсник с параметрами

$$\|A\| = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

в виде линии единичной длины, надо выразить величины ζ , b , a через параметры A .

На основании ур-ния (5.62) пишем

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_4 = \operatorname{ch}(ja + b) \\ A_2 &= \zeta \operatorname{sh}(ja + b) \\ A_3 &= \frac{1}{\zeta} \operatorname{sh}(ja + b) \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

откуда получаем

$$\zeta = \sqrt{\frac{A_2}{A_3}}$$

Что касается значений a и b , то ограничимся только четырехполюсниками, составленными исключительно из индуктивных и емкостных элементов. Тогда A_1 представляет собой всегда вещественное число. Действительно, A_1 имеет нулевую размерность и получается от деления некоторого произведения комплексных сопротивлений на другое произведение той же степени. Поэтому знак мнимости в числителе и знаменателе сокращается.

Преобразуем выражение для A из ур-ния (5.63) так, чтобы уничтожить мнимость в аргументе гиперболического косинуса

$$A_1 = \operatorname{ch}(ja + b) = \operatorname{ch}(b) \cos(a) + j \operatorname{sh}(b) \sin(a).$$

Раз A_1 — вещественное число, то произведение

$$\operatorname{sh}(b) \sin(a) = 0$$

и, следовательно,

$$A_1 = \operatorname{ch}(b) \cos(a). \quad (5.64)$$

Положим теперь, что $b = 0$. Это обозначает, что данный четырехполюсник ведет себя во всех отношениях так же, как линия без потерь.

Может показаться, что это условие уже обеспечено тем, что элементы четырехполюсника не содержат омических сопротивлений. Однако, в действительности это не так. Четырехполюсник отличается от линии в том отношении, что при движении энергии вдоль однородной линии нет никаких отражений. Отражения могут быть только от концов линии. В четырехполюснике такие отражения существуют от каждой точки разветвления и внутри отдельных элементов. Однако сумма всех отраженных волн у входных зажимов может быть равна нулю.

Только в этом последнем случае вся энергия, уходящая от источника, целиком расходуется (в установившемся режиме) в сопротивлении, присоединенном к выходным зажимам. Для того чтобы не было отражения у выходных зажимов — здесь должно быть присоединено сопротивление, равное волновому сопротивлению.

Тогда $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$ и четырехполюсник ведет себя совершенно так же, как линия, не имеющая затухания.

Итак, если $b = 0$, то

$$\operatorname{sh}(b) = 0$$

$$\operatorname{ch}(b) = 1$$

и следовательно,

$$A_1 = \operatorname{ch}(b) \cos(a) = \cos(a). \quad (5.65)$$

А так как $\cos(a)$ может меняться только в пределах от -1 до $+1$, то следовательно, условие $b=0$ может быть осуществлено только тогда, если A_1 данного четырехполюсника имеет величину, меньшую единицы и большую минус единицы.

Таким образом мы пришли к важному выводу, на который будем ссылаться при изложении теории фильтров: четырехполюсник может быть эквивалентно заменен линией без потерь только в том случае, если

$$-1 < A_1 < +1.$$

Вернемся теперь к другому условию, вытекающему из того, что четырехполюсник составлен из чистых реактивностей, т. е.

$$\operatorname{sh}(b) \sin(a) = 0.$$

В том случае, когда b не равно нулю, следовательно $\sin(a)$ равно нулю, т. е. $a=0$ или $a=\pi$.

Тогда $\cos a = 1$ и коэффициент A_1 выразится равенством

$$A_1 = \operatorname{ch}(b) \cos(a) = \operatorname{ch} b. \quad (5.66)$$

Таким образом, если в матрице данного четырехполюсника элемент A_1 имеет значение между $+1$ и -1 , то

$$\left. \begin{aligned} b &= 0 \\ a &= \arccos(A_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

В остальных случаях

$$\left. \begin{aligned} b &= \operatorname{arcch}(A_1) \\ a &= 0 \text{ или } \pi \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Практический смысл полученных здесь результатов выяснится в следующей главе.

ФИЛЬТРУЮЩИЕ ЦЕПИ И ФИЛЬТРЫ.

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ГЛ. VI.

- a — фазовый коэффициент четырехполюсника
- b — коэффициент затухания на одно звено цепочки
- C — емкость
- E — напряжение
- e — основание неперовых логарифмов
- f — циклическая частота
- g — активная положительная проводимость
- I — сила тока
- j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора)
- L — коэффициент самоиндукции
- \ln — натуральный логарифм
- M — коэффициент взаимной индукции
- n — коэффициент трансформации
- P — мощность
- R, r — активное (ваттное) положительное сопротивление

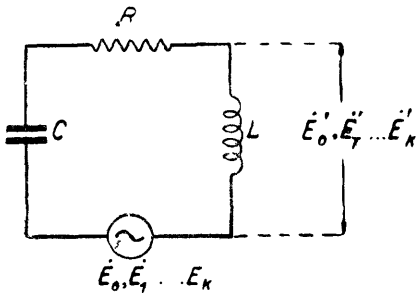
- jx — реактивное сопротивление
 - Y — реактивная проводимость
 - Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления ($Z = r + jx$)
 - ζ — волновое сопротивление, четырехполюсника
 - ω — круговая частота
 - $\|$ — обозначение модуля
- Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m , например, E_m, I_m, P_m и т. д.
- Постоянные и среднеквадратичные значения — теми же буквами без индекса, например, E, I, P , и т. д.
- Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например, $\dot{I} = a + jb; \dot{E} = E_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ и т. п.

§ 1. Общие замечания.

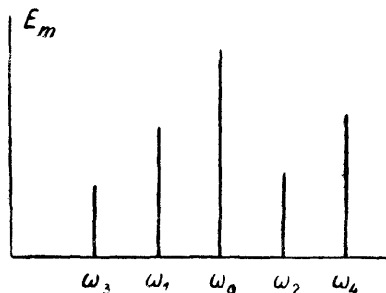
Как было показано в „Введении“, ток или напряжение (изменяющиеся во времени) всегда могут быть представлены в виде некоторого „спектра“, т. е. в виде суммы синусоидальных токов или напряжений с различными частотами, фазами и амплитудами.

Если такая совокупность частот действует на электрическую цепь, сопротивление которой различно для различных частот, то в результате получается видоизменение спектра.

В случае линейных цепей это видоизменение приводит к тому, что новый спектр содержит те же самые частоты, но амплитуды и фазы их



Фиг. 6.1.



Фиг. 6.2.

оказываются другими. Так например, положим, что в колебательный контур (фиг. 6.1) введено 5 эдс с частотами $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, причем частота ω_0 соответствует частоте резонанса.

Пусть амплитуды, соответствующие этим частотам, выражаются длиной вертикальных линий фиг. 6.2, которая представляет собой таким образом спектр данной совокупности эдс.

Относительно каждой из этих эдс контур ведет себя по-разному, так как его сопротивление

$$Z = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + R = f(\omega). \quad (6.1)$$

Каждой из приложенных эдс соответствует свой ток

$$i_k = \frac{\dot{E}_k}{Z} \quad (6.2)$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

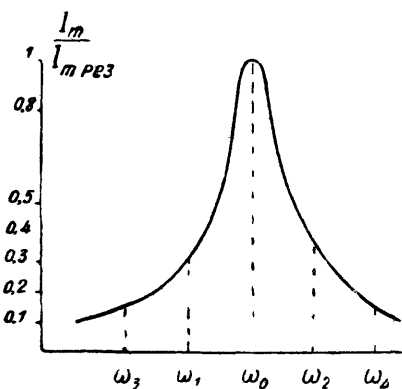
Каждому току соответствует некоторое напряжение на самоиндукции

$$\dot{E}'_k = \omega_k L i_k \quad (6.3)$$

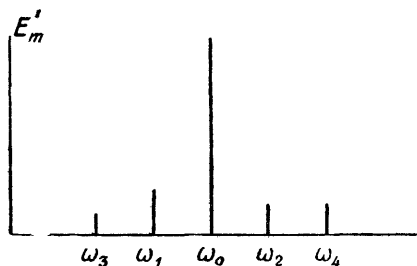
$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

Таким образом, действуя на контур совокупностью эдс $\sum_{k=0}^{k=4} \dot{E}_k$, мы получаем на концах самоиндукции контура совокупность, т. е. спектр напряжений $\sum_{k=0}^{k=4} \dot{E}'_k$, отличающийся по амплитудам и по фазам от исходного спектра.

Для того чтобы получить наглядное представление о характере изменения амплитуд, обратимся к фиг. 6.3 и положим, что изображенная здесь кривая представляет собой кривую резонанса данного контура. Из этой кривой видно, что если все эдс \dot{E}_k одинаковой амплитуды и ток при частоте ω_0 равен



Фиг. 6.3.



Фиг. 6.4.

единице, то ток при частоте ω_1 равен $1/3$, а токи при частоте ω_3 и ω_4 равны $1/6$.

Из этого следует, что в новом спектре напряжений значение E'_{m1} оказывается меньше чем E'_{m0} в 3 раза, а E'_{m3} и E'_{m4} — в 6 раз.

Новый спектр изобразится графиком фиг. 6.4. Вертикальный масштаб этого графика выбран таким, чтобы длина вертикального отрезка, соответствующего E'_{m0} , осталась той же, как и на фиг. 6.2 для отрезка E_{m0} .

Этот случай представляет собой один из примеров такой операции, с которой мы уже встречались раньше; в результате ее частотный спектр эдс или тока изменяется в смысле распределения амплитуд и фаз, но не в смысле частот.

Практический смысл этой операции может быть, однако, и иным. Действительно, если кривая резонанса достаточно остра, то амплитуда E'_0 столь сильно возрастет по сравнению с амплитудами E'_{m1} , E'_{m2} , E'_{m3} и E'_{m4} , что в спектре практически останется только эдс E'_0 , соответствующая частоте резонанса. Всеми остальными составляющими можно пренебречь.

В этом случае практически результатом операции будет уничтожение всех составляющих с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 и выделение одной составляющей с частотой ω_0 .

Линейные цепи, используемые для целей изменения спектра, называются линейными фильтрующими цепями или фильтрами.

В радиотехнике такие цепи находят очень широкое и разнообразное применение и имеют самое разнообразное устройство.

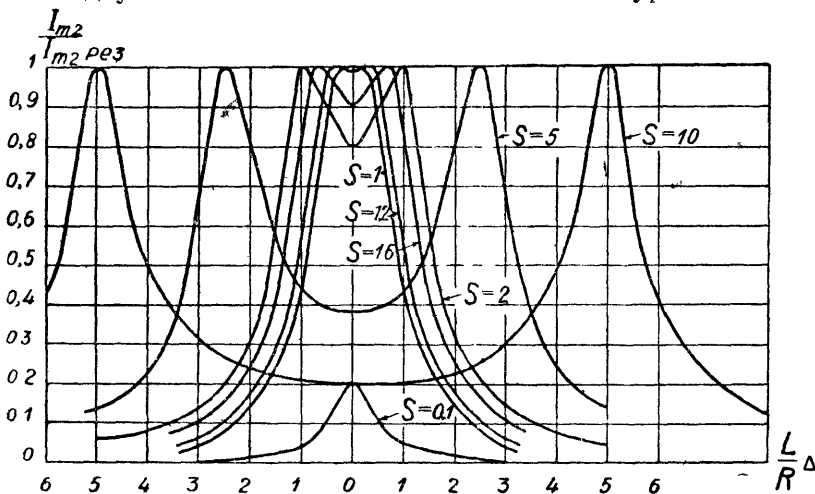
По своему назначению фильтры разделяются на ряд классов, к которым относятся: а) „сглаживающие фильтры“, поглощающие пульсации и пропускающие постоянную слагающую; б) блокировочные цепи, пропускающие переменную составляющую и задерживающие постоянную составляющую тока или напряжения; в) „выравнивающие фильтры“, назначением которых является реставрация (восстановление) в прежнем виде спектра, искаженного действием каких-либо приборов, содержащих индуктивные элементы; г) фильтры низкой частоты, срезающие все частоты выше некоторого предела; д) фильтры высокой частоты, срезающие все частоты ниже некоторого предела; е) фильтры, пропускающие определенную полосу частот и срезающие все остальные частоты; ж) фильтры, срезающие некоторую полосу частот и пропускающие все остальные. Последние два типа называются полосовым и режекторным фильтрами.

Фильтр может состоять из одного элемента, или из одного контура, или из комбинации многих элементов или „звеньев“. Многосвязные системы первоначально были развиты и распространены в телефонной технике, но в настоящее время они широко применяются и в радиотехнике.

В технике проводной связи под фильтрами, однако, понимаются только специальные виды многосвязных систем, рассмотрение которых будет ниже изложено.

§ 2. Резонансные цепи, выделяющие полосу частот.

Кроме простого колебательного контура для выделения некоторой полосы частот в радиотехнике находят широкое применение системы, составленные из двух или нескольких одинаковых контуров.



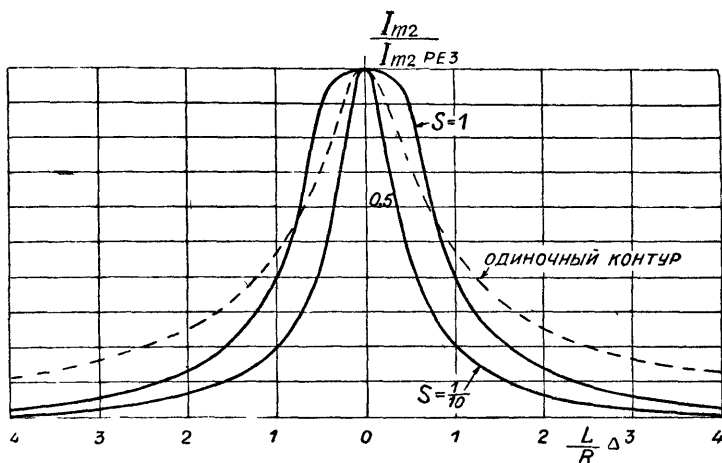
Фиг. 6.5. Изменение отношения $\frac{I_{m2}}{I_{m2 \text{ рез}}}$ при различных значениях S в зависимости от изменения частоты.

На фиг. 6.5 показаны кривые резонанса системы, состоящей из двух связанных одинаковых контуров. Различные кривые относятся к различным значениям отношения

$$S = \frac{\omega^2 M^2}{R_1 R_2},$$

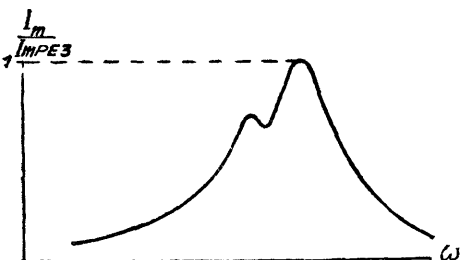
где M — коэффициент взаимной индукции, а $R_1 = R_2 = R$ — последовательные сопротивления в контурах. Буквой Δ на чертеже обозначено приращение частоты в процентах по отношению к частоте резонанса.

Кривые выражают отношение амплитуды тока во вторичном контуре к ее максимальному значению в зависимости от частоты, при постоянной эдс в первом контуре.



Фиг. 6.6. Сравнение резонансных кривых двух связанных контуров с резонансной кривой простого контура, причем декремент одиночного контура такой же, как и декремент каждого из связанных контуров.

Кривые показывают, что посредством двухконтурной системы можно выделить или одну полосу или две полосы вблизи положений резонанса. Крутизна скатов кривой резонанса у двухконтурной системы вообще больше, чем в случае одного контура, что можно видеть из фиг. 6.6, где приведены кривые резонанса для двухконтурной системы и кривая резонанса одного из одинаковых контуров, составляющих эту систему.



Фиг. 6.7.

При применении трех и более контуров при сильной связи получаются кривые резонанса, имеющие три и более вершин. При критической связи эти вершины сливаются в одну и получается кривая резонанса, выделяющая некоторую полосу частот.

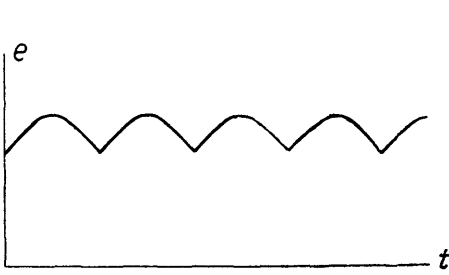
С уменьшением затухания контуров и с увеличением их числа боковые скаты кривой резонанса становятся круче, вследствие чего выделяемая полоса более резко ограничивается.

Если в двухконтурной или многоконтурной системе контуры не одинаковы, кривые резонанса могут получить несимметричный вид, например, фиг. 6.7.

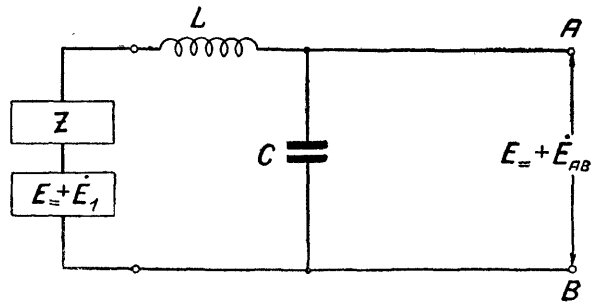
§ 3. Сглаживающие фильтры.

В целом ряде случаев источник, предназначенный для питания радиотехнического устройства, дает пульсирующее напряжение (фиг. 6.8), в то время, как для питания данного устройства требуется постоянный ток. Пульсация имеет место в напряжении, даваемом машиной переменного тока вследствие работы коллектора. Особенно большая пульсация получается при выпрямлении переменного тока. Для уничтожения ее применяется фильтр, состоящий из самоиндукции L и емкости C (фиг. 6.9). Такой фильтр

практически не создает потерь для постоянной слагающей. При разомкнутой внешней цепи напряжение, создаваемое переменной слагающей на за-



Фиг. 6.8.



Фиг. 6.9.

жимах конденсатора A и B , являющихся вместе с тем зажимами для присоединения внешней нагрузки, будет

$$\dot{E}_{AB} = \frac{\dot{E}_1}{\left(Z + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) j\omega C}, \quad (6.4)$$

где Z —внутреннее сопротивление источника, а \dot{E}_1 —переменная слагающая напряжения, даваемого источником, и ω частота пульсации.

Из уравнения (6.4) получаем

$$\frac{E_{mAB}}{E_{m1}} = \left| \frac{1}{\left(Z + j\omega L - \frac{j}{\omega C} \right) j\omega C} \right| \quad (6.5)$$

(где прямые скобки обозначают модуль).

Положив Z для простоты равным нулю, найдем

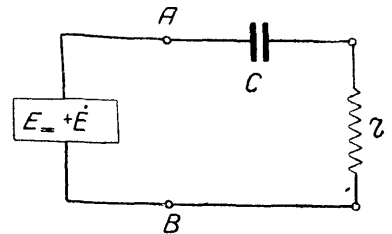
$$\frac{E_{mAB}}{E_{m1}} = \frac{1}{\omega^2 LC - 1}. \quad (6.6)$$

Очевидно, что увеличением L или C можно сделать пульсацию E_{mAB} сколь угодно малой. Из этого же равенства очевидно, что чем выше частота пульсаций, тем при меньших значениях L и C достигается сглаживание.

§ 4. Блокировочные конденсаторы.

Положим, что в точках AB (фиг. 6.10) приложена эдс $\dot{E} + E_{\equiv}$, состоящая из постоянной и переменной слагающей. Пусть требуется пропустить к зажимам сопротивления r только переменную слагающую. Тогда цепь r отделяют от AB конденсатором C , который „блокирует“ (т. е. защищает) r от постоянной слагающей. Емкость этого конденсатора должна быть выбрана такой, чтобы на нем не было заметного падения потенциала. Иначе говоря, должно быть

$$\omega C \gg r.$$



Фиг. 6.10.

Конденсатор C по своей конструкции должен выдерживать полное напряжение и, во всяком случае, не иметь проводимости, сравнимой с $\frac{E_{\equiv}}{r}$.

Напряжение E_{mC} , падающее на конденсаторе C , пропорционально проходящему через него току I_{mC}

$$E_{mC} = \frac{I_{mC}}{\omega C}.$$

Следовательно, во время работы в диэлектрике существуют вольт-амперы (или реактивная мощность) P_r

$$P_r = \frac{E_{mC} I_{mC}}{2} = \frac{I_{mC}^2}{2\omega C}. \quad (6.7)$$

С этой величиной приходится считаться в мощных устройствах, где конденсатор в случае диэлектрика с потерями может быть разрушен вследствие разогревания.

§ 5. Запирающие настроенные контуры.

Пусть к зажимам цепи фиг. 6.11 приложено напряжение $\Sigma \dot{E}$, содержащее некоторый спектр частот. Из этого спектра требуется не пропустить в нагрузку Z полосы спектра вблизи некоторой частоты ω_1 . Этого можно достичь, вставив в провода, идущие от зажимов к Z , контуры, настроенные на частоту ω_1 .

Чтобы выяснить, какая доля напряжения при частоте ω_1 будет задержана контурами, будем рассуждать следующим образом.

Контур представляет собой для эдс частоты ω_1 чисто активное сопротивление, равное

$$r = \frac{L}{CR},$$

где R —приведенное сопротивление потерь в контуре.

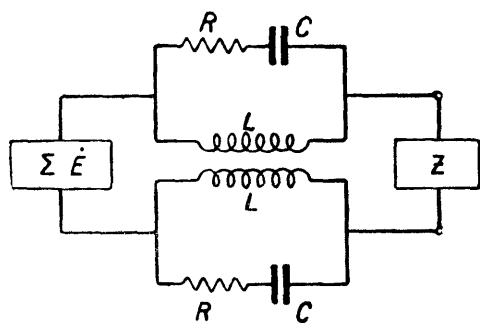
Следовательно, при частоте ω_1 включение в цепь контуров равноценно включению омического сопротивления, равного $2r$, последовательно с сопротивлением Z . Поэтому напряжение, остающееся на концах Z , будет

$$\dot{E}_Z = \frac{\dot{E}_{\omega_1} Z}{2r + Z}, \quad (6.8)$$

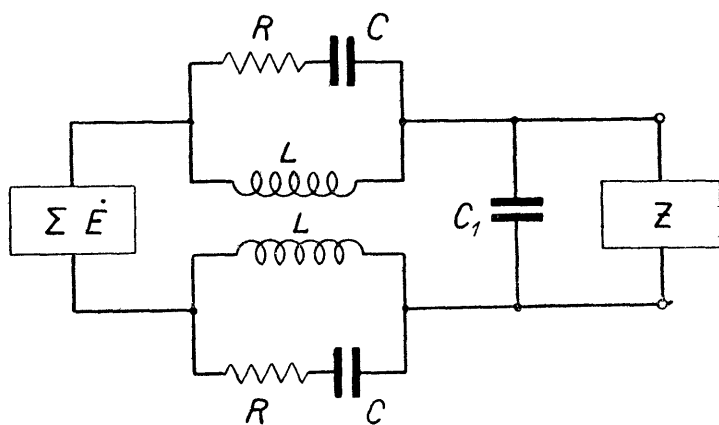
где \dot{E}_{ω_1} —слагающая напряжения при частоте ω_1 до фильтра.

Из ур-ния (6.8) ясно, что фильтр будет действовать тем совершеннее, чем меньше Z и чем больше r .

При $Z = \infty$, т. е. в случае размыкания нагрузки, фильтр вовсе не будет действовать. Поэтому в этом случае необходимо создать некоторую дополнительную нагрузку, например, в виде конденсатора C_1 (фиг. 6.12). Емкость этого конденсатора должна быть достаточной для того, чтобы падение напряжения на нем не превосходило заданной допустимой величины.



Фиг. 6.11.



Фиг. 6.12.

Что касается остального спектра частот, за исключением некоторой полосы вблизи ω_1 , то низкие частоты встречают большое сопротивление в контурных конденсаторах C , но зато, если самоиндукция L мала, она является для них как бы коротким замыканием. Высокие частоты встречают большое сопротивление в самоиндукции L , но могут пройти без большого ослабления через емкость C , если она достаточно велика. Таким образом мы встречаемся здесь с противоречивыми требованиями. С одной стороны, чтобы увеличить $r = \frac{L}{CR}$, сохранив значение $\frac{1}{LC} = \omega_1^2$, надо увеличить L и уменьшить C , а с другой стороны, для уменьшения затухания частот вне полосы, ближайшей к ω_1 , надо уменьшить L и увеличить C .

Выбор той или иной комбинации L и C в каждом случае должен быть сделан в соответствии с задачей, которую должен решить данный фильтр, и в соответствии с величиной нагрузочного сопротивления, от которого зависит выбор допустимой минимальной величины $r = \frac{L}{CR}$.

При этом надо заметить, что формула $r = \frac{L}{CR}$ написана в предположении, что все потери R сосредоточены в самоиндукции. Поэтому очевидно, что с уменьшением самоиндукции они будут также несколько уменьшаться.

С другой стороны, если конденсатор контура C имеет омическую проводимость, пропорциональную емкости, то сопротивление r определится равенством

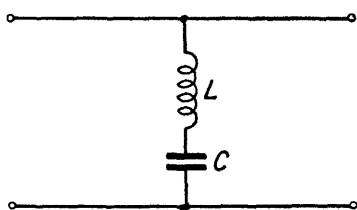
$$r = \frac{L}{CR} + \frac{1}{g_c C}, \quad (6.9)$$

где g_c —эквивалентная проводимость на единицу емкости вследствие потерь в конденсаторе. Поэтому, вообще говоря, хорошая работа такого фильтра может быть получена, если применен конденсатор без потерь и если потери в самоиндукции ничтожны, так что большое значение сопротивления $r = \frac{L}{CR}$ осуществляется при малом значении $\frac{L}{C}$.

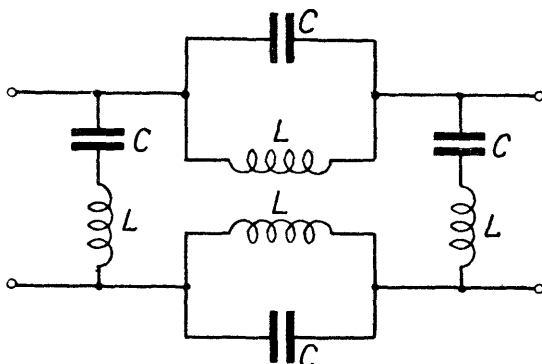
§ 6. Короткозамыкающие настроенные контуры.

Цепь, показанная на фиг. 6.13, при настройке $\omega_1^2 = \frac{1}{LC}$ дает короткое замыкание для полосы частот вблизи ω_1 и относительно мало пропускает частоты, лежащие далеко от ω_1 .

Для высоких частот самоиндукция L является большим сопротивлением, а для низких частот конденсатор C является



Фиг. 6.13.



Фиг. 6.14.

большим сопротивлением. Поэтому полоса пропускания суживается при увеличении отношения $\frac{L}{C}$.

Получение достаточных значений $\frac{L}{C}$ может затрудняться собственной емкостью катушек, которая как бы образует конденсатор, параллельный виткам катушки, и меняет смысл схемы.

Комбинация короткозамыкающего фильтра с запирающим, показанная на фиг. 6.14, образует более сложную цепь, в которой частота ω_1 не только задерживается в запирающих контурах, но и замыкается накоротко при выходе из них.

Фильтры двух последних типов и их комбинации находят себе применение, главным образом, для защиты линий, отдельных участков схемы и аппаратов от попадания в них высокой частоты определенного периода.

§ 7. Замечание о фильтрах в собственном смысле слова и о роли их в системе передачи.

Как уже было упомянуто, термин „фильтр“ в технике проводной связи применяют по отношению к специальным электрическим цепям. Эти цепи служат для линейного видоизменения спектра, но, кроме того, они удовлетворяют еще особым требованиям, вытекающим из их роли в системе передачи сигнала.

Особенности работы этих устройств можно пояснить следующим примером.

Положим, что два передающих устройства находятся на одном конце двухпроводной линии, а два приемных — на другом конце (фиг. 6.15).

Для того чтобы был возможен отдельный прием сигналов от передатчиков № 1 и № 2, последние используют для сигнала различные полосы спектра. Так например, передатчик № 1 использует частоты от ω_1 до ω_2 , а передатчик № 2 — частоты от ω_3 до ω_4 , причем эти полосы несколько удалены одна от другой и во всяком случае одна другую не перекрывают.

Если бы соединительной линии не было, и волны, соответствующие этим частотам, двигались бы в свободном пространстве (как это имеет место в случае радиопередачи), то для выделения необходимой полосы частот на приеме можно было бы применить, например, то либо другое число настроенных контуров.

В случае линии самый процесс перехода энергии остается тем же самым в том смысле, что такие же волны, как и в случае радиопередачи, движутся вдоль проводов, которые служат для волн направляющим каналом. Вследствие того, что энергия при движении от передатчика к приемнику не расходится в стороны, а движется только вдоль линии, она сохраняет значительно большую интенсивность, чем в случае радиопередачи. Волны, отразившиеся от приемника и затем повторно отразившиеся от передатчика, могут оказаться достаточно интенсивными, чтобы своими повторными приходами к приемному устройству вызвать искажение сигнала.

Поэтому к фильтру приемника предъявляется требование не только выделить нужную полосу частот, но и уничтожить отражение на входе, т. е. полностью поглотить пришедшую энергию.

Для этой цели фильтр со стороны входных зажимов должен представлять собой чисто активное сопротивление, одинаковое для всех частот принимаемой полосы и равное волновому сопротивлению линии.

Для уничтожения отражения на выходе фильтра нагрузочное сопротивление должно быть также согласовано с фильтром (например, должно быть чисто активным и равным волновому сопротивлению фильтра).

В современных устройствах проводная линия используется для одновременной двусторонней работы значительного числа телеграфных, телефонных и бильд-передатчиков и приемников, причем используется весьма широкий диапазон частот (от 10 гц до 10^6 гц), разделенный на отдельные полосы, называемые „каналами“. В этих условиях к фильтрующим цепям предъявляются весьма высокие и разнообразные требования, которые обычно

Для этой цели фильтр со стороны входных зажимов должен представлять собой чисто активное сопротивление, одинаковое для всех частот принимаемой полосы и равное волновому сопротивлению линии.

Для уничтожения отражения на выходе фильтра нагрузочное сопротивление должно быть также согласовано с фильтром (например, должно быть чисто активным и равным волновому сопротивлению фильтра).

В современных устройствах проводная линия используется для одновременной двусторонней работы значительного числа телеграфных, телефонных и бильд-передатчиков и приемников, причем используется весьма широкий диапазон частот (от 10 гц до 10^6 гц), разделенный на отдельные полосы, называемые „каналами“. В этих условиях к фильтрующим цепям предъявляются весьма высокие и разнообразные требования, которые обычно

не в состоянии выполнить фильтр, составленный из цепочки однородных элементов. Поэтому передача происходит через ряд фильтров, каждый из которых играет свою особую роль и к каждому из которых предъявляется требование согласованности сопротивления с предыдущим и последующим звеном, необходимой для отсутствия отражений.

Основная роль таких фильтров заключается: а) в выделении нужной полосы частот, б) в подавлении мешающей полосы частот, отчасти пропущенной фильтром первого типа, в) в трансформации сопротивления, т. е. в образовании согласованного перехода от одного сопротивления к другому, г) в корректировании линейных искажений, что сводится, главным образом, к ослаблению тех частот, спектры которых по сравнению с другими частотами оказались менее ослабленными предыдущими устройствами.

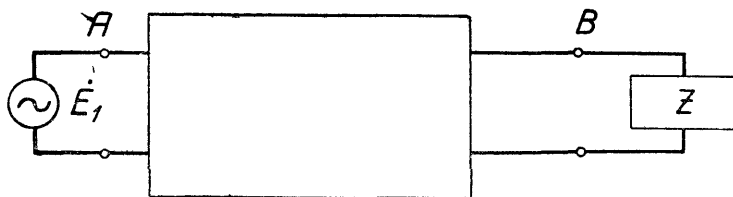
В современных радиотехнических устройствах применяется многократная передача на одной и той же основной частоте, излучаемой передатчиком. Для этого на основную частоту накладываются более низкие вспомогательные частоты. Отдельные полосы этих более низких частот используются для различных одновременно действующих линий связи с использованием того же передатчика.

Далее существуют специальные виды передач, с которыми мы познакомимся впоследствии и при которых вопросы фильтрации получают большую сложность. Наконец, проводная линия входит в современную радиосвязь как необходимый элемент. Передающие и приемные станции строятся на расстоянии десятков километров одна от другой и соединяются с радиоцентром проволочной линией. Радиовещательные станции выносятся далеко за город и также соединяются со студией проволочной линией.

Вследствие этих причин фильтры в указанном смысле находят широкое применение и в радиотехнике. В настоящее время теория фильтров представляет собой значительный раздел учения об электрических цепях. Мы коснемся здесь только самых основных положений этой теории.

§ 8. Неперы и децибелы.

Вместе с многоэлементными (многозвенными) фильтрами в радиотехнику перешли из телефонной техники и некоторые термины, из которых необходимо здесь отметить термин „затухание“. Под „затуханием“ в радио-



Фиг. 6.16.

технике прежде понималось только уменьшение амплитуды колебаний во времени, характеризуемое коэффициентом затухания. В настоящее время этот термин применяют по примеру телефонистов также и для обозначения изменения амплитуды в пределах некоторого участка тракта, вдоль которого движется энергия.

Представим участок такого тракта в виде четырехполюсника AB (фиг. 6.16), ко входным зажимам которого приложено напряжение \dot{E}_1 , а к выходным зажимам присоединена некоторая нагрузка Z . Обозначим напряжение на выходных зажимах через \dot{E}_2 .

Тогда отношение $\frac{E_{m2}}{E_{m1}}$ показывает, во сколько раз уменьшилась (или увеличилась) амплитуда напряжения на данном участке тракта при данном сопротивлении Z и при данной частоте ω .

Для характеристики четырехполюсника удобнее пользоваться не непосредственно отношением $\frac{E_{m_2}}{E_{m_1}}$, а логарифмом этого отношения, причем для однообразия, разумеется, желательнее пользоваться одним и тем же основанием логарифма во всех случаях. Однако в настоящее время по этому поводу не достигнуто соглашения и пользуются двумя системами. Немецкие и большинство европейских авторов пользуются неперовым основанием и выражают затухание в „неперах“.

Затухание на протяжении данного участка цепи от A до B

$$\text{затухание } (A - B) = -\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \text{ неперов.}$$

Совершенно также можно написать и относительно тока

$$\text{затухание } (A - B) = -\ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right) \text{ неперов.}$$

В случае мощности, которая зависит от квадрата силы тока или от квадрата напряжения, получим

$$\text{затухание } (A - B) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ неперов.}$$

Здесь P_2 —мощность в потребляющей цепи Z , а P_1 —мощность, идущая в четырехполюсник от источника.

Американские авторы применяют десятичные логарифмы. Для измерения затухания служит единица „бел“. Для практических целей пользуются одной десятой бела, которая называется „децибел“. Основная единица определяется по мощности, а не по напряжению или току. Так что

$$\text{затухание } (A - B) = \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ бел} = 10 \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ децибел};$$

$$\text{затухание } (A - B) = 2 \lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \text{ бел} = 20 \lg\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \text{ децибел.}$$

Для перехода от одной системы к другой можно пользоваться следующей таблицей

Таблица VI.1

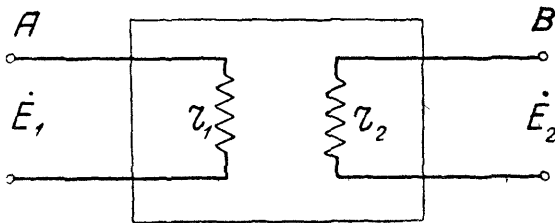
Таблица для перехода от неперов к децибелам

Неперы	Децибелы	Неперы	Децибелы	Неперы	Децибелы	Неперы	Децибелы	Неперы	Децибелы	Неперы	Децибелы
0,1	0,869	1,1	9,555	2,1	18,241	3,1	26,927	4,2	36,53	6,2	53,90
0,2	1,737	1,2	10,423	2,2	19,109	3,2	27,795	4,4	38,26	6,4	55,63
0,3	2,606	1,3	11,282	2,3	19,978	3,3	28,664	4,6	40,00	6,6	57,34
0,4	3,474	1,4	12,160	2,4	20,846	3,4	29,532	4,8	41,75	6,8	59,07
0,5	4,343	1,5	13,029	2,5	21,715	3,5	30,401	5,0	43,43	7,0	60,80
0,6	5,212	1,6	13,898	2,6	22,584	3,6	31,270	5,2	45,22	7,2	62,65
0,7	6,080	1,7	14,766	2,7	23,452	3,7	32,138	5,4	46,95	7,4	64,35
0,8	6,949	1,8	15,635	2,8	24,321	3,8	33,007	5,6	48,70	7,6	66,10
0,9	7,817	1,9	16,503	2,9	25,189	3,9	33,875	5,8	50,45	7,8	67,85
1,0	8,686	2,0	18,372	3,0	26,058	4,0	34,744	6,0	52,12	8,0	69,49

Очевидно, что, если $E_{m_1} = E_{m_2}$, то $\frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} = 1$ и затухание отсутствует.

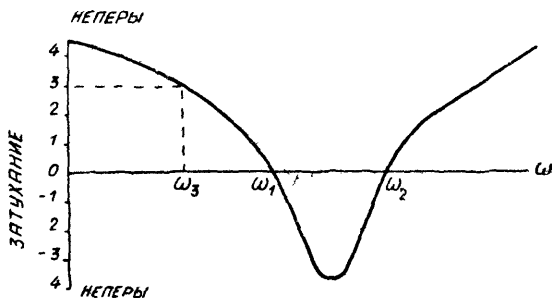
Уменьшение амплитуды в 100 раз будет охарактеризовано затуханием, равным 40 дБ или 4,6 неп. Уменьшение амплитуды в 1000 раз соответствует затуханию 60 дБ или 6,9 неп и т. д.

Важно заметить, что в отношении тока и напряжения термин „затухание“ в том смысле, как он здесь применяется, указывает только на уменьшение амплитуды. Энергия в цепи при этом может расходоваться или не расходоваться. Так например, четырехполюсник, изображенный на фиг. 6.17, имеет разрыв между началом A и концом B . Поэтому при любом \dot{E}_1 , значение \dot{E}_2 будет равно нулю; затухание бесконечно и совершенно не зависит от величины сопротивлений r_1 или r_2 , в которых может расходоваться какая угодно мощность.



Фиг. 6.17.

Кривая, показывающая зависимость затухания от частоты, является основной характеристикой фильтра. Пример такой кривой показан на фиг. 6.18. Соответственно данной кривой амплитуда напряжения на выходе меньше амплитуды на входе при всех $\omega < \omega_1$, так как затухание положительно. При $\omega = \omega_3$ затухание равно 3 неп., т. е. амплитуда уменьшается в e^3 раз. При $\omega = \omega_1$ затухание равно нулю. В промежутке между ω_1 и ω_2 затухание отрицательно. Это значит, что амплитуда напряжения на выходе больше, чем на входе. При $\omega > \omega_2$ затухание вновь становится положительным.



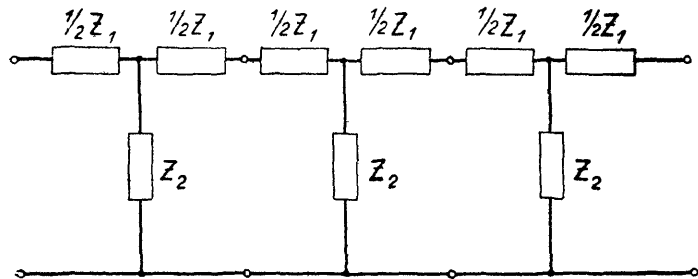
Фиг. 6.18

Такая кривая может охарактеризовать четырехполюсник только при определенной нагрузке, к которой она относится. С изменением нагрузки изменяется и форма кривой

Кривая, характеризующая затухание по мощности, имеет, вообще говоря, иную форму, и, как было уже сказано, характеризует четырехполюсник совершенно с другой стороны. Обе кривые совпадут только в том случае, если четырехполюсник со стороны входа представляется чисто омическим сопротивлением при всех частотах, и если выход также нагружен на чисто омическое сопротивление. Тогда для охарактеризования поведения цепи в зависимости от частоты достаточно одной кривой.

§ 9. Т-образные и П-образные звенья.

Однородный фильтр представляет собой цепочку, составленную из одинаковых звеньев. Каждое звено в свою очередь составляется из последовательных и параллельных элементов.



Фиг. 6.19.

На фиг. 6.19 показана цепочка из Т-образных звеньев. Звено от звена отделено на схеме маленькими кружками. Элемент $\frac{1}{2} Z_1$ называется последовательным элементом, а элемент Z_2 — параллельным. Обозначение $\frac{1}{2} Z_1$, а не просто Z_1 принято для удобства деления всей цепочки на одинаковые элементы.

В конструктивном выполнении два рядом стоящие элемента $\frac{1}{2} Z_1$, принад-

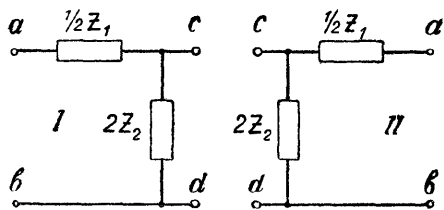
лежащие на схеме разным звеньям, фактически осуществляются в виде одного элемента Z_1 .

Звено можно представить состоящим из двух полузвеньев, как это показано, например, на фиг. 6.20, где I и II представляют собой полузвенья, состоящие из одного последовательного и одного параллельного элемента.

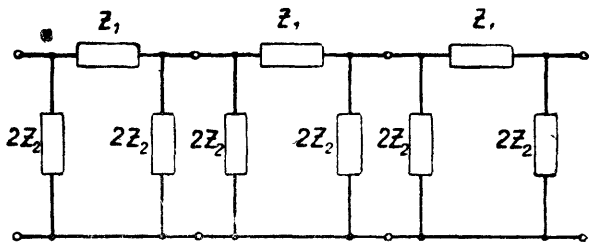
Зажимы a и b называются Т-образной стороной полузвена, а зажимы c и d — П-образной стороной полузвена.

На фиг. 6.21 показана схема фильтра из П-образных звеньев.

Элемент Z_1 называется последовательным элементом, а элемент $2Z_2$ — параллельным. Обозначение $2Z_2$, а не Z_2 принято по тем же соображениям



Фиг. 6.20.



Фиг. 6.21.

деления схемы на одинаковые звенья. Конструктивно два параллельных элемента ($2Z_2$) образуют один элемент с сопротивлением Z_2 .

Комбинация одного параллельного элемента $2Z_2$ и половины последовательного элемента, т. е. $\frac{1}{2} Z_1$, называется, как и в предыдущем случае, „полузвеном“ с Т-образными и П-образными сторонами. Таким образом соединением одних и тех же полузвеньев можно получить либо звенья П, либо звенья Т.

§ 10. Исследование фильтров методом четырехполюсника.

В гл. V было показано, что симметрический четырехполюсник, составленный из реактивных элементов, может быть эквивалентно заменен линией единичной длины.

Если A_1 , A_2 , A_3 , и A_4 представляют собою коэффициенты четырехполюсника (причем $A_1 = A_4$), то параметры эквивалентной линии, как было найдено, выразятся следующим образом.

1) Волновое сопротивление

$$\zeta = \sqrt{\frac{A_2}{A_3}}$$

2) Фазовая постоянная a и постоянная затухания b выражаются различно в зависимости от того, лежит ли A_1 в пределах от -1 до $+1$ или вне этих пределов. А именно,

При $-1 < A_1 < +1$.

$$a = \arccos(A_1)$$

$$b = 0.$$

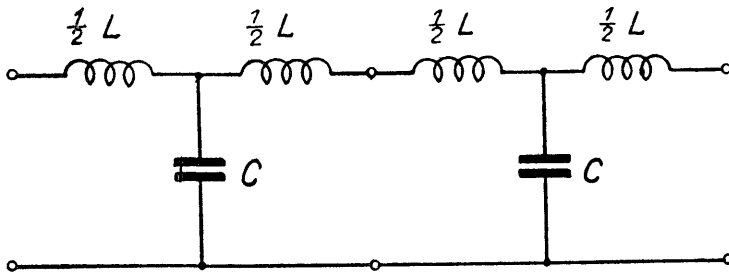
В остальных случаях

$$a = 0 \text{ или } \pi$$

$$b = \operatorname{arcch}(A_1).$$

Поэтому фильтр, составленный из индуктивных элементов, при нагрузке на сопротивление, равное волновому во всем интервале, где A_1 заключено между -1 и $+1$, пропускает частоты без затухания ($b = 0$). Эта область частот называется областью прозрачности фильтра.

В остальной области частот, где $b \neq 0$, существует затухание, обусловленное тем, что отражения внутри звена таковы, что звено не является со стороны входа чисто активным сопротивлением.



Фиг. 6.22.

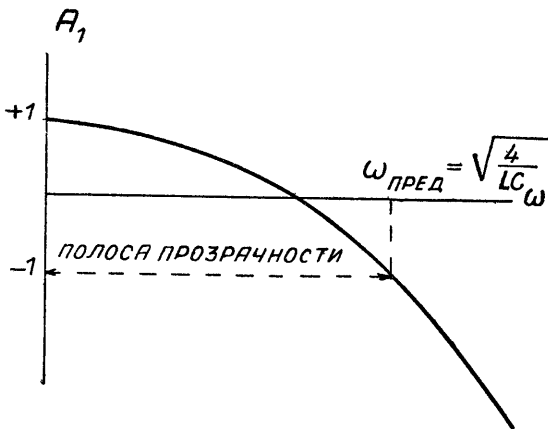
Рассмотрим в качестве примера цепочку, состоящую из последовательных индуктивных и параллельных емкостных звеньев, схема которой показана на фиг. 6.22.

По табл. V.V четырехполюсников находим

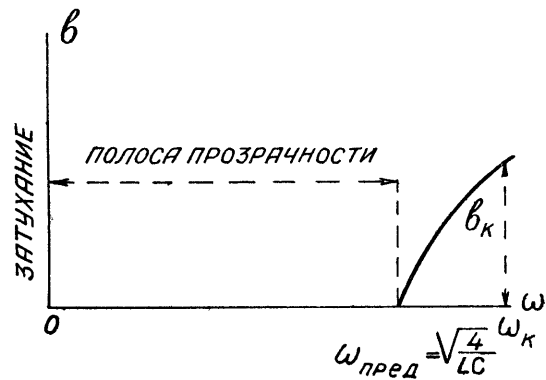
$$A_1 = \left[j\omega \frac{L}{2} + \frac{1}{j\omega C} \right] j\omega C = 1 - \omega^2 C \frac{L}{2}. \quad (6.10)$$

По этому уравнению строим кривую

$$A_1 = F(\omega).$$



Фиг. 6.23.



Фиг. 6.24.

Эта кривая приведена на фиг. 6.23. A_1 лежит в пределах от -1 до $+1$ в интервале, в котором частота имеет значение от $\omega = 0$ до $\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{4}{LC}}$.

Последняя частота называется предельной частотой. До предельной частоты затухания нет. Далее

$$b = \text{arc ch}(A_1).$$

Зависимость b от частоты дана на фиг. 6.24

Если при какой-нибудь частоте ω_k $b = b_k$, то это значит, что при этой частоте амплитуда на выходе меньше амплитуды на входе в e^{b_k} раз. Или, иначе говоря, затухание равно

$$\ln \frac{E_1}{E_2} = b_k \text{ непер.}$$

Найдем еще волновое сопротивление этого 'фильтра. По таблицам определяем

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4} = \zeta^2.$$

Отсюда

$$\zeta = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \quad (6.11)$$

§ 11. Расчет фильтра низкой частоты методом четырехполюсника.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели фильтр, пропускающий без затухания низкие частоты и имеющий затухание для частот выше предельной, определяемой условием

$$\omega^2_{\text{пред}} = \frac{4}{LC}.$$

Покажем теперь, как сделать обратную операцию, т. е. рассчитать элементы фильтра этого же типа, если задано его волновое сопротивление $\zeta = r$, задана предельная частота $\omega_{\text{пред}}$ и задано затухание b_k , которое фильтр должен иметь при некоторой частоте ω_k .

Так как для данной схемы

$$A_1 = 1 - \omega^2 C \frac{L}{2},$$

то предельная частота будет ($A_1 = 1$)

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{4}{LC}}. \quad (6.12)$$

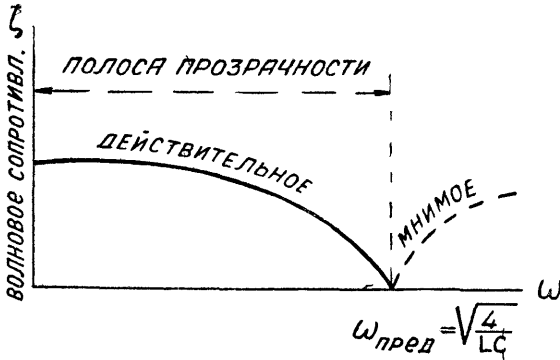
Это дает нам одно уравнение для определения L и C фильтра. Второе требование, которое мы должны поставить по отношению к фильтру, заключается в том, что его волновое сопротивление ζ должно быть равно сопротивлению нагрузки.

Мы уже видели [§ 10, ур-ние (11)], что для данного случая

$$\zeta = \sqrt{\frac{A_2}{A_3}} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \quad (6.13)$$

Из ур-ния (6.13) видно, что ζ зависит от частоты и поэтому для всех частот нельзя удовлетворить поставленному условию

$$\zeta = r.$$



Фиг. 6.25.

Мало того, для значений $\omega > \omega_{\text{пред}}$, как легко видеть из сопоставления ур-ния (6.12) и ур-ния (6.13), волновое сопротивление ζ делается мнимым. Если начертить кривую $\zeta = f(\omega)$, обозначая сплошной линией действительные значения, а пунктирной мнимые, то получим картину, показанную на фиг. 6.25.

Обычно выбирают соотношение элементов таким, чтобы при $\omega = 0$ было соблюдено условие $r = \zeta$. Для этого, как ясно из ур-ния (6.13), должно быть

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = r.$$

При этих условиях фильтр будет удовлетворять поставленному условию в пределах практической точности в интервале $\omega = 0$ до $\omega = \frac{2}{3} \omega_{\text{пред}}$.

Таким образом, выбрав мы имеем необходимые два уравнения для определения L и C четырехполюсника

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{4}{LC}} \quad \text{и} \quad r = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Выбрав, таким образом, параметры звена, вычисляем, каким будет затухание при частоте ω_1 , относительно которого поставлено требование

$$b < N \text{ неперов при } \omega_1.$$

При этом вычислении пользуемся формулой

$$b = \text{arc ch } A_1,$$

причем для данной схемы

$$A_1 = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC. \quad (6.14)$$

Подставив в ур-ние (6.14) значение A_1 при $\omega = \omega_1$, найдем, что на одно звено затухание

$$b = N_1 \text{ неперов.}$$

Очевидно, что для того, чтобы получить затухание больше N неперов, надо применить n звеньев, причем n представляет собой первое целое число, большее чем $\frac{N}{N_1}$.

§ 12. Другое выражение для определения полосы прозрачности.

Мы нашли, что область прозрачности определяется условием

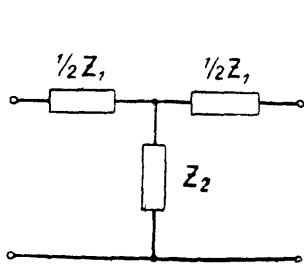
$$-1 < A_1 < +1. \quad (6.15)$$

Если схема фильтра дана в форме цепочки из звеньев фиг. 6.26 или 6.27, то, так как для этих схем

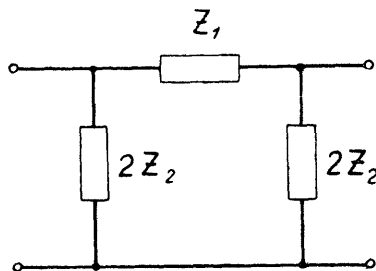
$$A_1 = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2},$$

условие (6.15) может быть равнозначно заменено условием

$$-1 < \frac{Z_1}{4Z_2} < 0. \quad (6.16)$$



Фиг. 6.26.



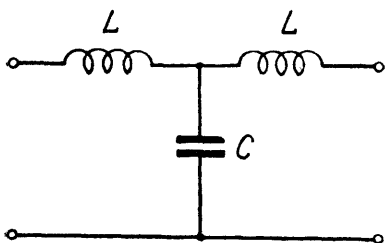
Фиг. 6.27.

Неравенство (6.16) показывает, что фильтр имеет полосу прозрачности при тех частотах, при которых отношение $\frac{Z_1}{4Z_2}$ лежит в пределах между нулем и минус единицей.

Очевидно, что это может быть выполнено только в том случае, если Z_1 и Z_2 имеют различные знаки, т. е. одно из этих сопротивлений индуктивное, а другое емкостное.

Если Z_1 и Z_2 представляют собой сложные цепи, может случиться, что фильтр имеет несколько полос прозрачности, соответственно тому, что при изменении частоты Z_1 и Z_2 могут несколько раз изменять свои знаки на обратные.

Обращаем внимание, что приведенные формулы соответствуют обозначениям, сделанным на схемах фиг. 6.26 и 6.27, т. е. последовательное плечо принято равным $\frac{1}{2} Z_1$, а параллельное Z_2 в случае Т-образной схемы.



Фиг. 6.28.

В случае П-образной схемы параллельное плечо обозначено как $2Z_2$, а последовательное как Z_1 .

Поэтому, если дана, например, схема звена с обозначениями, сделанными на фиг. 6.28, то, чтобы воспользоваться выведенными формулами, надо писать

$$j\omega L = \frac{1}{2} Z_1,$$

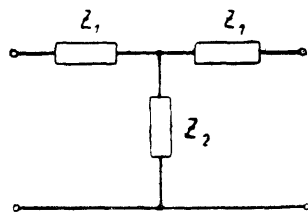
$$j\frac{1}{\omega C} = Z_2,$$

после чего можно применять ур-ние (6.16).

С другой стороны, при определении коэффициентов четырехполюсника при помощи таблиц (обозначения на которых сделаны в расчете на любые цепи) следует сопоставлять обозначения, сделанные в таблице, с теми обозначениями, которые сделаны на применяемых схемах.

Например, в таблице находим матрицу, соответствующую схеме фиг. 6.29.

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & \frac{Z_1(Z_1 + 2Z_2)}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \end{array} \right\|$$



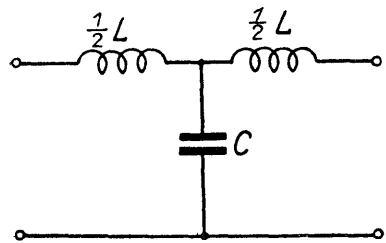
Фиг. 6.29.

Коэффициенты же для схемы фиг. 6.26, на которой последовательные плечи обозначены как $\frac{1}{2} Z_1$, будут

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2} Z_1 + Z_2}{Z_2}, \quad A_2 = \frac{\frac{1}{2} Z_1 \left(\frac{1}{2} Z_1 + 2Z_2 \right)}{Z_2}, \quad A_3 = \frac{1}{Z_2}, \quad A_4 = A_1.$$

§ 13. Простейшие фильтры типа постоянной k .

Фильтры, в которых произведение параллельного и последовательного элемента фильтра сохраняет постоянное значение, при всех частотах носит название фильтров постоянной k .



Фиг. 6.30.

Так например, для рассмотренного выше фильтра низкой частоты, звено которого воспроизведено на фиг. 6.30, найдем

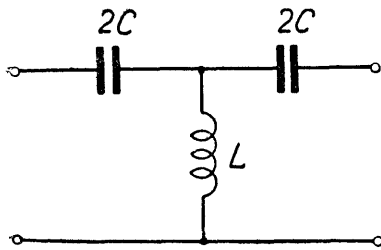
$$2j\omega \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C} \equiv k^2.$$

К числу фильтров этого рода принадлежит фильтр, схема звена которого показана на фиг. 6.31. Характеристика этого фильтра показана на фиг. 6.32. По таблицам находим

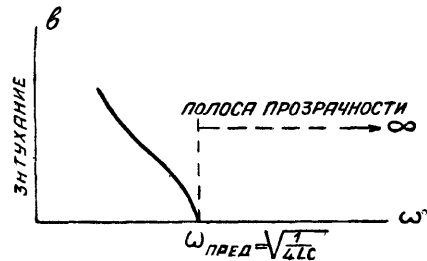
$$A_1 = 1 - \frac{1}{2\omega^2 LC}.$$

Поэтому предельная частота равна

$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{1}{4LC}}.$$



Фиг. 6.31.



Фиг. 6.32.

Волновое сопротивление этого фильтра легко найти, определив по таблицам коэффициенты A_2 и A_3 . Получим

$$\zeta = \sqrt{\frac{A_2}{A_3}} = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}.$$

§ 14. Полосовой фильтр типа k .

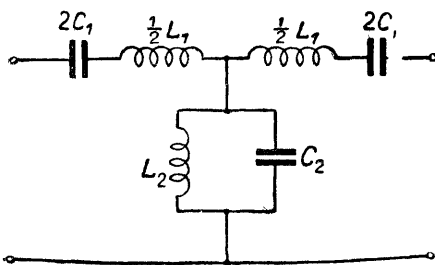
Фильтр, схема которого показана на фиг. 6.33, также принадлежит к фильтрам постоянной k , если

$$L_1 C_2 = L_2 C_1.$$

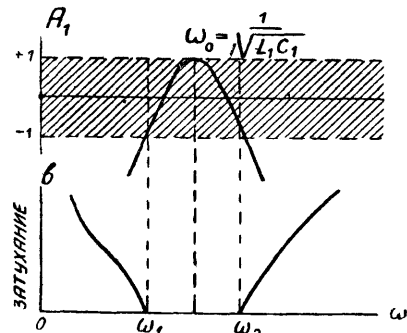
Действительно, в этом случае произведение сопротивлений плеч будет

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega L_2}\right) = \frac{L_1}{C_2} = k^2.$$

Характеристика затухания этого фильтра показана на фиг. 6.34. Из этой характеристики видно, что фильтр имеет полосу прозрачности, ограниченную областями затухания. Поэтому он называется полосовым фильтром.



Фиг. 6.33.



Фиг. 6.34.

Коэффициент A_1 для данной схемы будет

$$A_1 = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right). \quad (6.17)$$

Характер изменения A_1 с частотой ω показан на той же фиг. 6.34 сверху.

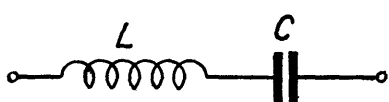
Предельные частоты ω_1 и ω_2 могут быть определены на основании ур-ния (6.17), положив

$$\frac{1}{2} \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) \left(\omega C_2 - \frac{1}{\omega L_2}\right) = 2.$$

Непосредственное решение связано с громоздкими вычислениями. Поэтому мы укажем сначала упрощенный прием, применение которого полезно и в других случаях.

§ 15. Аналогия между элементами полосового и низкочастотного фильтра.

Для цепи, образованной последовательным соединением емкости и самоиндукции (фиг. 6.35), при частоте ω_1 можно написать



Фиг. 6.35.

$$x = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}.$$

В зависимости от значения ω_1 , x может быть положительным или отрицательным. Возьмем другую частоту ω_2 и подберем ее таким образом, чтобы значение x по абсолютной величине было бы равно его значению при частоте ω_1 , а по знаку — обратно.

Тогда

$$x = \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right) = - \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right). \quad (6.18)$$

Обозначим

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

и перепишем уравнение (6.18) так

$$\omega_0 L \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = - \omega_0 L \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right). \quad (6.19)$$

Разделив обе части на $\omega_0 L$ и перекомбинировав члены в уравнении (6.19), получим

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0^2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2},$$

откуда очевидно, что

$$\sqrt{\omega_1 \omega_2} = \omega_0. \quad (6.20)$$

Уравнение (6.20) показывает, что частота резонанса ω_0 является средним геометрическим между любой парой частот ω_1 и ω_2 , при которых x имеет одинаковое абсолютное значение, но противоположные знаки.

Из уравнения (6.20) имеем

$$\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_2}.$$

Подставим это в равенство

$$x = \omega_0 L \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right),$$

получим

$$x = \omega_0 L \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0^2/\omega_2} \right) = (\omega_1 - \omega_2) L. \quad (6.21)$$

Уравнение (6.21) дает следующий замечательный результат.

Формула для определения сопротивления цепи из последовательной емкости и самоиндукции имеет тот же вид, как и формула для определения индуктивного сопротивления (ωL) с той только разницей, что вместо частоты множителем при L стоит разность частот ω_1 и ω_2 , связанных между собой равенством

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2.$$

Совершенно аналогичная формула получится и для параллельного соединения емкости и самоиндукции (фиг. 6.36).

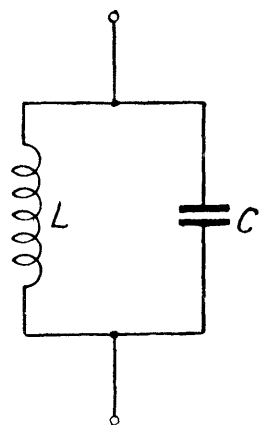
В этом случае

$$\frac{1}{x} = \omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = - \left(\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} \right). \quad (6.22)$$

Сравнив ур-ние (6.22) с ур-нием (6.18), можно сразу написать окончательный результат, заменив x на $\frac{1}{x}$ и поменяв C и L местами. Получим

$$x = \frac{1}{(\omega_1 - \omega_2) C}. \quad (6.23)$$

Эти аналогии позволяют чрезвычайно упростить вычисления в сложных цепях. Мы ими воспользуемся для исследования некоторых фильтров.



Фиг. 6.36.

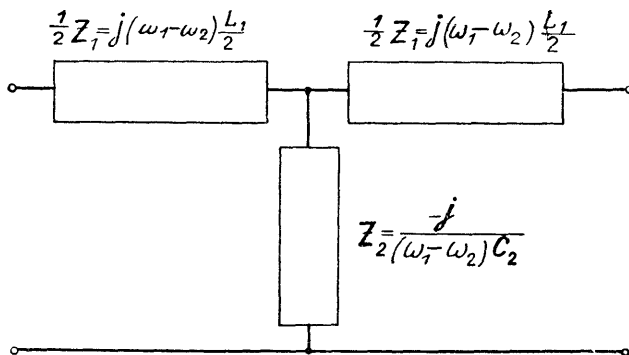
§ 16. Вычисление параметров полосового фильтра посредством аналогии с низкочастотным фильтром.

На основании указанных в предыдущем параграфе аналогий звено полосового фильтра приводится к следующей эквивалентной схеме (фиг. 6.37).

По таблицам коэффициентов четырехполюсника легко получим

$$A_1 = 1 - \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2)^2 L_1 C_2, \quad (6.24)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{A_2}{A_3}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2} - \frac{L_1^2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{4}}. \quad (6.25)$$



Фиг. 6.37.

Ур-ние (6.24) дает возможность определить предельные частоты фильтра.

Непосредственно видно, что если, например, $\omega_1 = \omega_0$, то, так как в этом случае и $\omega_2 = \omega_0$, $A_1 = 1$.

На графике фиг. 6.34 этому соответствует вершина кривой $A_1 = f(\omega)$. Для того чтобы A_1 было равно минус единице, надо, чтобы было выполнено равенство

$$(\omega_1 - \omega_2) = \sqrt{\frac{4}{L_1 C_2}}.$$

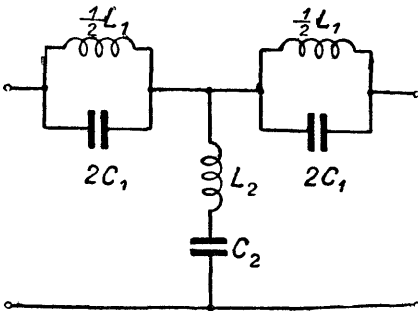
В следующей таблице сопоставлены формулы для полосового фильтра с формулами для фильтра низкой частоты.

Таблица VI II

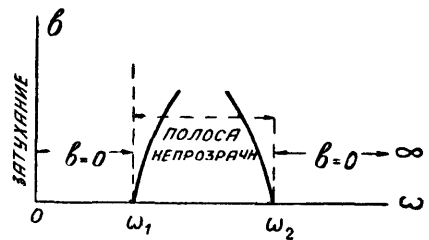
Фильтр низкой частоты	Полосовой фильтр
$A_1 = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC$	$A_1 = 1 - \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) L_1 C_2$
$\omega_{\text{пред.}} = \sqrt{\frac{4}{LC}}$	$(\omega_1 - \omega_2) = \sqrt{\frac{4}{L_1 C_2}}$
$\zeta = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2 \omega^2}{4}}$	$\zeta = \sqrt{\frac{L_1}{C_2} - \frac{L_1^2 (\omega_1 - \omega_2)^2}{4}}$
$b = \text{arc ch } (A_1)$	$b = \text{arc ch } (A_1)$

§ 17. Режекторный фильтр.

В полосовом Т-образном фильтре последовательные плечи состоят из последовательно соединенных емкости и самоиндукции, а параллельные — из параллельно соединенных емкости и самоиндукции. Если эти элементы поменять местами, получится схема фиг. 6.38. Фильтр, составленный из таких звеньев, имеет области пропускания по обеим сторонам некоторой



Фиг. 6.38.



Фиг. 6.39.

полосы, в пределах которой получается затухание. Характеристика его показана на фиг. 6.39. Он носит название полосового запирающего фильтра или „режекторного фильтра“.

Воспользовавшись аналогиями, указанными в § 15, последовательные плечи этого фильтра можно рассматривать как емкостные, а параллельные — как индуктивные. Другими словами, в том же смысле, в каком полосовой фильтр соответствует фильтру низкой частоты, этот фильтр соответствует фильтру высокой частоты.

Поэтому можно прямо написать величины, относящиеся к этому фильтру, заменив в выражении для фильтра высокой частоты C на C_1 , L на L_2 , ω на $(\omega_1 - \omega_2)$.

Получим следующую таблицу.

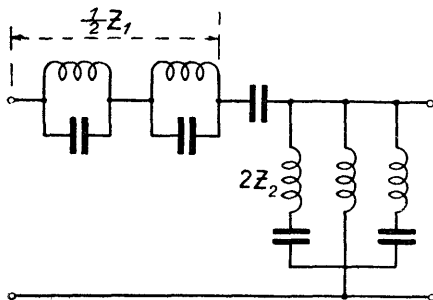
Фильтр высокой частоты	Режекторный фильтр
$A_1 = \frac{1}{2\omega^2 LC}$	$A_1 = \frac{1}{2(\omega_1 - \omega_2)^2 L_2 C_1}$
$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{1}{4LC}}$	$(\omega_1 - \omega_2) = \sqrt{\frac{1}{4L_2 C_1}}$
$\zeta = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{1}{4\omega^2 C^2}}$	$\zeta = \sqrt{\frac{L_2}{C_1} - \frac{1}{4(\omega_1 - \omega_2)^2 C_1^2}}$
$b = \text{arc ch}(A_1)$	$b = \text{arc ch}(A_1)$
	$\omega_0^2 \equiv \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2}$ $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$

§ 18. Фильтры с несколькими полосами прозрачности.

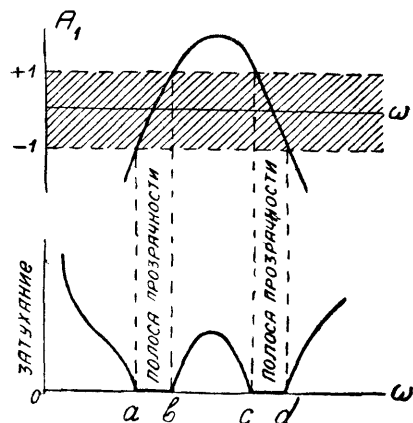
Если в полосовом фильтре рассмотренного типа $L_1 C_1 \neq L_2 C_2$, то изменение A_1 с частотой выражается кривой фиг. 6.40. Вершина этой кривой заходит выше уровня $A_1 = 1$. Поэтому получаются две полосы прозрачности $a-b$ и $c-d$, и между ними — полоса затухания $b-c$.

Могут быть также образованы фильтры и типа постоянной k , в которых имеется несколько полос прозрачности.

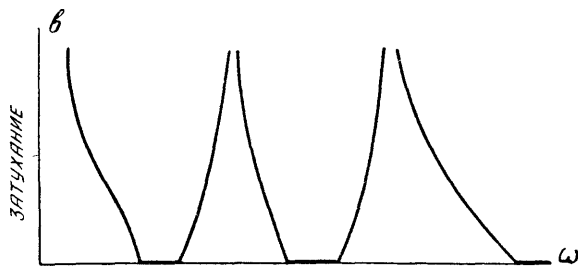
Так например, схема, показанная на фиг. 6.41, позволяет получить три полосы прозрачности. Характеристика его показана на фиг. 6.42.



Фиг. 6.41.



Фиг. 6.40.

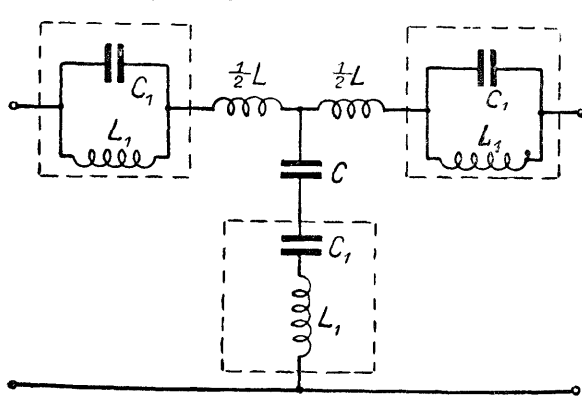


Фиг. 6.42.

§ 19. Фильтры типа m .

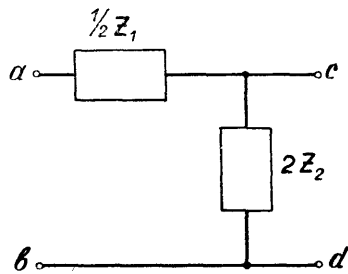
Фильтры типа k обладают относительно малым затуханием в области, близкой к полосе прозрачности. Казалось бы, что для увеличения затухания вблизи полосы прозрачности, или в других областях, можно включить в звенья типа k , запирающие и короткозамыкающие контуры.

Например, на фиг. 6.43 показано последовательное включение в звено простого фильтра низкой частоты контура L_1C_1 , запирающего частоты



Фиг. 6.43.

вблизи $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, или параллельное включение контура, короткозамыкающего те же частоты.



Фиг. 6.44.

Однако при таком включении произвольно взятых контуров волновое сопротивление и полоса прозрачности вообще изменятся.

Если ставится требование к сохранению этих параметров неизменными, то включаемые новые элементы должны удовлетворять особым условиям, которые мы здесь выясним.

Рассмотрим полувзвено фильтра, схема которого показана на фиг. 6.44. Волновое сопротивление его со стороны зажимов ab равно

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} Z_1 \left(\frac{1}{2} Z_1 + 2Z_2 \right)}. \quad (6.26)$$

(Заметим, что $\frac{1}{2} Z_1$ —сопротивление при коротком замыкании зажимов cd ; $\left(\frac{1}{2} Z_1 + 2Z_2 \right)$ —при холостом ходе, т. е. при полном размыкании зажимов cd).

Изменим сопротивление плеча $\frac{1}{2} Z_1$ в m раз и посмотрим, что надо сделать с плечом $2Z_2$ для того, чтобы сохранить прежнее значение волнового сопротивления.

Прежде всего очевидно, что для того, чтобы произведение под знаком корня в ур-нии (6.26) осталось неизменным, надо в $\frac{1}{m}$ раз увеличить сумму $\left(\frac{1}{2} Z_1 + 2Z_2 \right)$.

Таким образом в измененном звене сопротивление короткого замыкания будет

$$Z_{1k(m)} = \frac{mZ_1}{2},$$

а сопротивление холостого хода

$$Z_{1p(m)} = \frac{Z_1}{2m} + \frac{2Z_2}{m}.$$

Для исходного полувзвена можно написать

$$Z_{1p} - Z_{1k} = \left(\frac{1}{2} Z_1 + 2Z_2 \right) - \frac{1}{2} Z_1 = 2Z_2.$$

Используя это уравнение в отношении измененной схемы полувзена, найдем

$$2Z_{2(m)} = \frac{Z_1}{2m} + \frac{2Z_2}{m} - \frac{mZ_1}{2}$$

или

$$2Z_{2(m)} = \frac{1}{m}(2Z_2) + \left(\frac{1-m^2}{m}\right) \frac{1}{2} Z_1. \quad (6.27)$$

Ур-ние (6.27) показывает, что параллельное плечо должно состоять из двух последовательных сопротивлений.

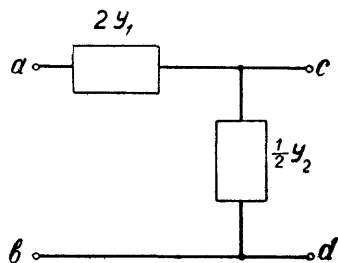
Одно из них имеет тот же характер, что Z_2 , но по величине меньше в m раз. Другое имеет тот же характер, что и Z_1 , но по величине больше в $\left(\frac{1-m^2}{m}\right)$ раз.

Следовательно, если Z_1 было индуктивным, а Z_2 было емкостным, то в результате преобразования в параллельном плече появляется, кроме емкости, также и самоиндукция. Наоборот, если Z_2 было индуктивным, то в результате преобразования в нем появляется еще последовательная емкость. Таким образом в результате преобразования в параллельном плече появляется контур.

Такое преобразование может быть осуществлено для любого положительного значения m , меньшего единицы, так как при этом $(1-m^2)$ и $\frac{1}{m}$ являются положительными числами.

Аналогичным образом можно показать, что если рассматривать полувзено как составную часть П-образного фильтра (фиг. 6.45), т. е. написать выражение для волнового сопротивления с П-образной стороны, то при увеличении проводимости $\frac{Y_2}{2}$ в m раз проводимость $2Y_{1m}$ должна состоять из двух проводимостей соответственно равенству

$$2Y_{1m} = \frac{1}{m}(2Y_1) + \left(\frac{1-m^2}{m}\right) \frac{1}{2} Y_2.$$



Фиг. 6.45.

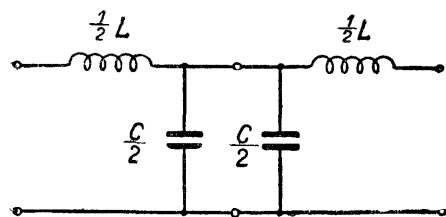
§ 20. Образование производных типа m из прототипов типа постоянной k для фильтров низкой и высокой частоты.

В предыдущем параграфе было показано, каким образом можно, не изменяя волнового сопротивления, ввести в параллельное и последовательное плечо полувзена новый элемент, образующий колебательный контур.

Два одинаково измененные полувзена могут быть соединены в звено, причем вследствие равенства волновых сопротивлений, отражения в точках соединения не будет, и следовательно, волновое сопротивление преобразованного звена также сохранит значение волнового сопротивления. Так как в полосе прозрачности волновое сопротивление является вещественной величиной, а в полосе непрозрачности — мнимой, то поскольку сохраняется значение волнового сопротивления, сохраняется также и граница полосы прозрачности. Таким образом значение предельной частоты одинаково

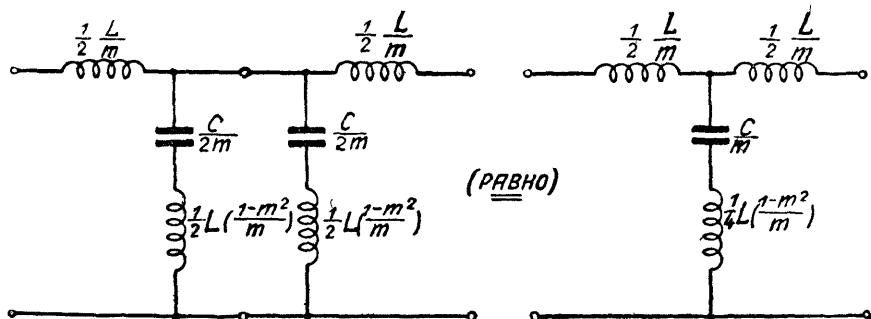
у „прототипа“ (т. е. у исходной схемы фильтра) и у преобразованного типа (называемого типом m).

Рассмотрим теперь целые звенья фильтров типа m . На фиг. 6.46 показано звено низкой частоты типа k , образованное из двух полувзеньев. Это



Фиг. 6.46.

звено является прототипом для звена типа m , показанного на фиг. 6.47. На последнем чертеже сначала показано преобразование каждого полувзена, а затем две параллельные емкости и две параллельные самоиндукции соединены вместе, т. е. заменены одной емкостью и одной самоиндукцией.

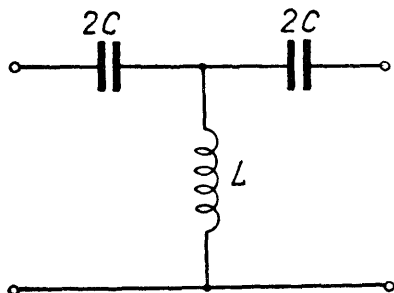


Фиг. 6.47.

В результате преобразования в параллельной ветви появляется контур с резонансной частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{LC(1-m^2)}}.$$

При этой частоте контур является коротким замыканием, которое преграждает движение энергии вдоль звена, т. е. вызывает бесконечное затухание.



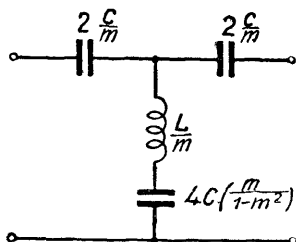
Фиг. 6.48.

Так как предельной частотой данного прототипа (а следовательно, и для измененного звена) является частота

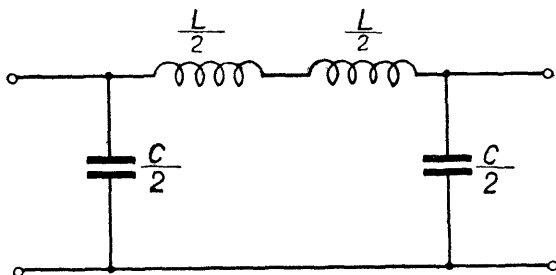
$$\omega_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{4}{LC}},$$

то, чем меньше величина m , тем ближе частота бесконечного затухания к границе полосы прозрачности.

На фиг. 6.48 показан прототип k фильтра высокой частоты, а на фиг. 6.49 — схема соответствующего звена типа m .



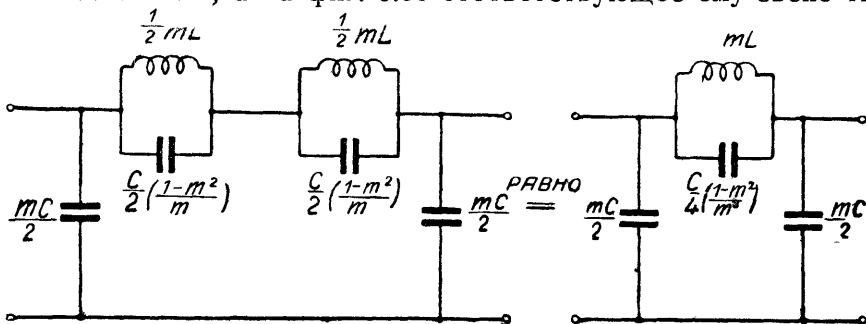
Фиг. 6.49.



Фиг. 6.50.

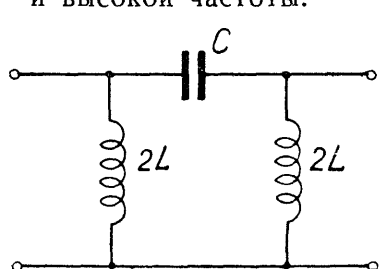
На фиг. 6.50 показан прототип П-образного звена фильтра низкой частоты постоянной k , а на фиг. 6.51 — соответствующее ему звено типа m . Левая часть схемы поясняет процесс образования звена из полувзеньев.

На фиг. 6.52 показан прототип П-образного звена фильтра высокой частоты постоянной k , а на фиг. 6.53 соответствующее ему звено типа m^1).

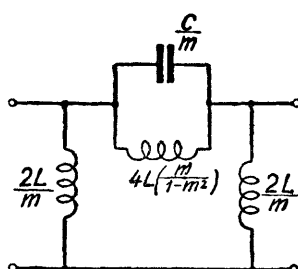


Фиг. 6.51.

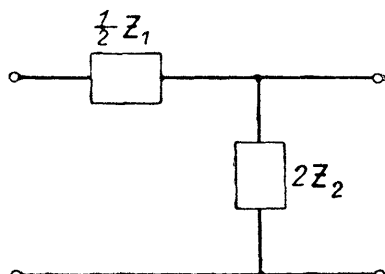
На фиг. 6.55 приведены кривые, дающие зависимость затухания от частоты при различных значениях m для преобразованных фильтров низкой и высокой частоты.



Фиг. 6.52.

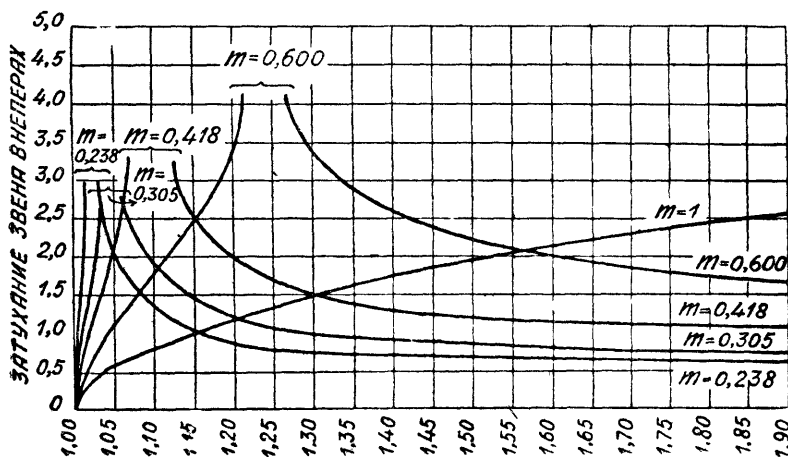


Фиг. 6.53.



Фиг. 6.54.

По ординатам отложено затухание в неперях, а по абсциссам отношение действующей частоты к предельной частоте: Из этих кривых видно, что чем меньше m , тем быстрее нарастает затухание вблизи предельной частоты ($\frac{\omega}{\omega_{\text{пред}}} = 1$).



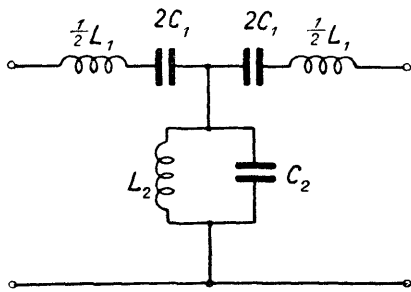
Фиг. 6.55.

¹) Следует заметить, что преобразованные полувзвены, послужившие нам для образования Т-образных звеньев, могут быть использованы также и для получения П-образных звеньев. В этом случае волновое сопротивление звена будет отличаться от волнового сопротивления прототипа на коэффициент $\left[1 + (1 - m^2) \frac{Z_1}{4Z_2} \right]$, где $\frac{1}{2} Z_1$ и $2Z_2$ соответствуют обозначениям схемы звена типа k фиг. 6.54.

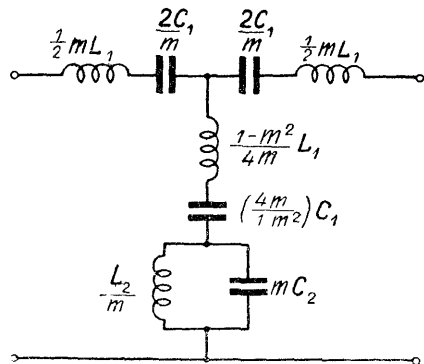
То же относится и к образованию Т-образных звеньев из элементов, которые после преобразования имеют одинаковое волновое сопротивление с прототипом с П-образной стороны.

§ 21. Производные сложных звеньев типа постоянной k .

Звенья типа m могут быть образованы также и из сложных звеньев типа постоянной k .



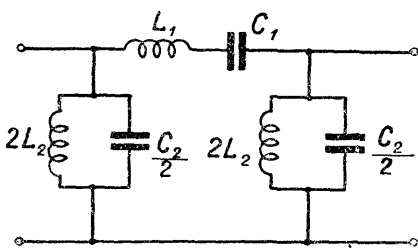
Фиг. 6.56.



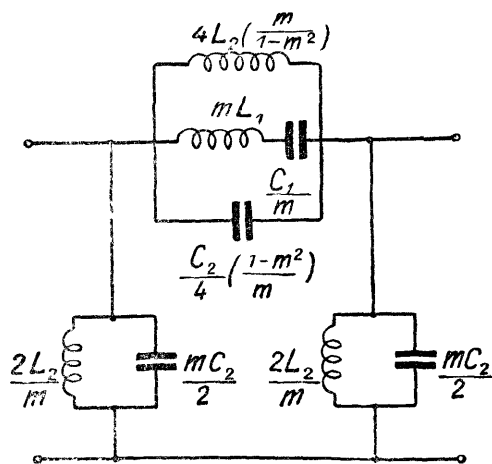
Фиг. 6.57.

На фиг. 6.56 показано звено полосового фильтра, а на фиг. 6.57 соответствующее ему звено типа m .

На фиг. 6.58 показано звено режекторного фильтра типа постоянной k , а на фиг. 6.59 — соответствующее ему звено типа m .



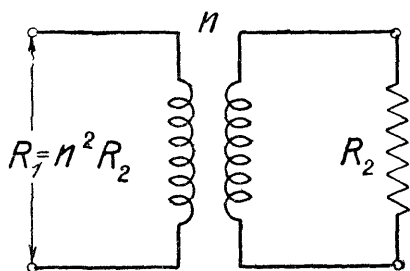
Фиг. 6.58.



Фиг. 6.59.

§ 22. Преобразование сопротивлений и несимметричные четырехполюсники.

Преобразование сопротивления может быть достигнуто при помощи различных трансформаторов. При рассмотрении этого вопроса удобно пользоваться понятием об идеальном трансформаторе, под которым понимается трансформатор, не имеющий сопротивления, рассеивания, емкости обмоток и емкости между обмотками.



Фиг. 6.60.

Хотя понятие о таком трансформаторе является по существу некоторой абстракцией, но с помощью этого понятия можно обобщить, как будет здесь показано, симметричные и несимметричные фильтры.

Обозначим коэффициент трансформации по току буквой n .

Тогда, если во вторичную обмотку включено сопротивление R_2 (фиг. 6.60), то со стороны первичных зажимов идеальный трансформатор является эквивалентным сопротивлению $n^2 R_2 \equiv R_1$.

Это соотношение вытекает из следующего расчета.

Пусть к первичным зажимам трансформатора присоединен источник лишенный внутреннего сопротивления, а ко вторичным — нагрузка в вид сопротивления R_2 .

Тогда мощность, выделяемая в нагрузке, будет

$$P_2 = I_2^2 R_2.$$

Ток в первичной обмотке при коэффициенте трансформации n будет

$$I_1 = \frac{I_2}{n}.$$

Эквивалентное сопротивление R_1 должно быть таким, чтобы в нем выделялась та же самая мощность P_2 . Следовательно,

$$\left(\frac{I_2}{n}\right)^2 R_1 = I_2^2 R_2,$$

откуда

$$n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

или

$$R_1 = n^2 R_2.$$

Если ко вторичной обмотке присоединено некоторое комплексное сопротивление Z_2 , то эквивалентное комплексное сопротивление Z_1 выразится аналогичным равенством

$$Z_1 = n^2 Z_2.$$

При этом надо заметить, что, так как n является вещественным числом, то фазовые углы у Z_1 и Z_2 одинаковы.

Соединение идеального трансформатора с симметричным фильтром, показанное на фиг. 6.61, дает несимметричную систему. Действительно, если волновое сопротивление на выходе фильтра равно ζ_2 и трансформатор имеет коэффициент трансформации, равный n , то волновое сопротивление у входных зажимов трансформатора будет равно $\zeta_1 = n^2 \zeta_2$.

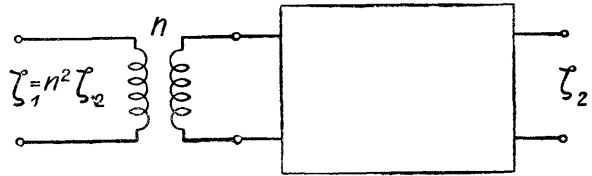
Применяя идеальный трансформатор, можно соединять между собой четырехполюсники с различным волновым сопротивлением без отражения в точках соединения.

Если надо соединить два четырехполюсника с волновыми сопротивлениями ζ_1 и ζ_2 , то идеальный трансформатор должен иметь коэффициент трансформации

$$n^2 = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}.$$

Если соединение идеального трансформатора и симметричного четырехполюсника образует несимметричный четырехполюсник, то и обратно, — всякий несимметричный четырехполюсник может рассматриваться как соединение симметричного четырехполюсника с идеальным трансформатором.

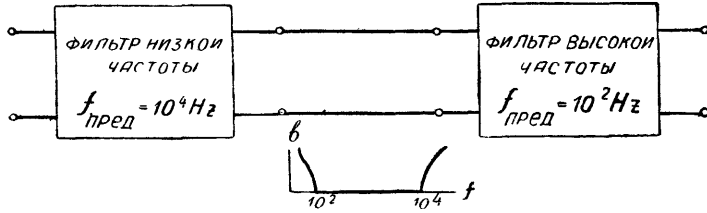
Таким образом несимметричные четырехполюсники могут применяться в качестве переходных элементов от цепи с одним волновым сопротивлением к цепи с другим волновым сопротивлением.



Фиг. 6.61.

§ 23. Получение полосового и режекторного фильтров посредством фильтров высокой и низкой частоты.

Если два фильтра высокой и низкой частоты соединены последовательно, как показано на фиг. 6.62, то получается система, пропускающая полосу частот, лежащую между предельными частотами фильтров.

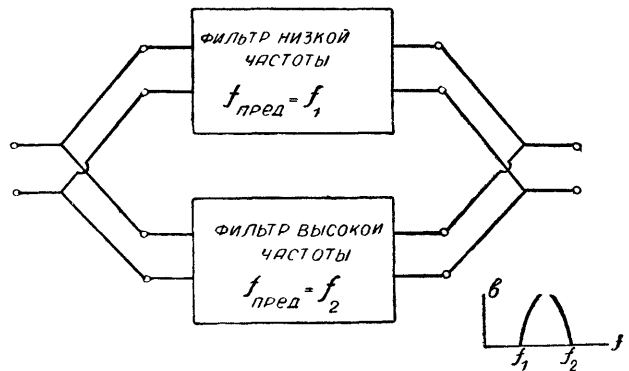


Фиг. 6.62.

Так например, если предельной частотой для фильтра низкой частоты является $f_1 = 10^4$ гц, то все частоты выше f_1 будут ослаблены.

С другой стороны, если предельной частотой фильтра высокой частоты будет, например, 10^2 гц, то все частоты ниже 10^2 гц будут также ослаблены. Следовательно, полоса прозрачности будет простирается от 10^2 до 10^4 гц.

Параллельное соединение фильтров низкой и высокой частоты (фиг. 6.63) дает режекторный фильтр. Частоты выше предельной частоты низкочастотного фильтра проходят по высокочастотной стороне. Частоты ниже предельной частоты фильтра высокой частоты проходят по низкочастотной стороне. Те же частоты, которые лежат в полосе непрозрачности обоих фильтров, испытывают затухание.



Фиг. 6.63.

Практически такого рода соединения оказывается выгодно применять в том случае, если в пределах полосы прозрачности (или полосы заграждения в случае режекторного фильтра), низкая и высокая частоты отличаются более, чем в два раза.

§ 24. Затухание, вносимое потерями.

До сих пор мы рассматривали фильтры, составленные из чисто реактивных элементов. Такие фильтры называются „идеальными фильтрами“. Практически в элементах фильтра всегда имеются потери, которые могут быть эквивалентно заменены соответствующими последовательными сопротивлениями и утечками.

Поэтому элементы звеньев имеют в действительности комплексное сопротивление. Это приводит к следующим основным следствиям:

- а) волновое сопротивление фильтра в действительности не представляет собой вещественной величины и является комплексным,
 - б) в полосе прозрачности в действительности существует некоторое затухание, тем большее, чем менее выполнены условия идеального фильтра,
 - в) в полосе непрозрачности затухание не может быть бесконечным.
- Поэтому на практике следует принимать все меры к уменьшению потерь в элементах фильтров.

Обычно за меру качества катушки самоиндукции принимают величину

$$d_L = \frac{R}{\omega L}. \quad (6.28)$$

Чем меньше d_L , тем выше качество катушки в смысле потерь.

На практике при высоких частотах удается получить d_L порядка 0,003.

Это облегчается большим значением ω , стоящей в знаменателе правой части ур-ния (6.28), несмотря на то, что с другой стороны скинэффект и повышает значение R .

При частотах ниже 100 $\mu\text{ц}$ получение $d_L = 0,03$ уже становится затруднительным.

Обычно для фильтров применяются катушки, имеющие d_L от 0,003 до 0,02 в зависимости от требуемого совершенства фильтрации и частоты.

За меру качества конденсаторов принимается величина

$$d_C = \omega Cr,$$

где r эквивалентное сопротивление, присоединенное параллельно конденсатору.

Потери в конденсаторах при низких частотах весьма малы и при слюдяных конденсаторах d_C обычно меньше 0,001, вплоть до частоты порядка $10^5 - 10^6 \mu\text{ц}$. При более высоких частотах потери значительно возрастают, как об этом подробно было сказано в гл. I.

При частотах порядка $10^8 - 10^9 \mu\text{ц}$ и выше потери в слюдяных конденсаторах могут уже превышать потери в катушках. В этом случае для фильтров высокого качества применяют или конденсаторы с специальными диэлектриками с малыми потерями, или воздушные конденсаторы.

Тем не менее потери никогда не могут быть сведены к столь низкому уровню, как при низких частотах, так как кроме потерь в диэлектриках при очень высоких частотах часть энергии рассеивается вследствие емкостной связи с окружающими элементами.

§ 25. Затухание, вносимое отражением.

До сих пор мы предполагали, что звено фильтра замкнуто на сопротивление, равное его волновому сопротивлению. В действительности волновое сопротивление фильтра, как известно, зависит от частоты, в то время, как сопротивление нагрузки может представлять собою чисто активное сопротивление R . Поэтому в реальных цепях нельзя получить точного согласования между фильтром и нагрузочными цепями. Это приводит к тому, что в точках присоединения нагрузки получается отражение.

Амплитуды тока и напряжения в этом случае могут быть и больше и меньше, чем в случае согласованного сопротивления, в зависимости от устройства фильтра и от величины нагрузки.

Вследствие отражения фильтр получает положительное или отрицательное затухание в пределах той полосы частот, которая при согласованной нагрузке являлась полосой прозрачности.

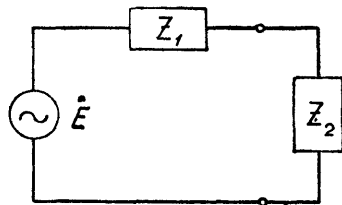
Выясним зависимость отражения от величины включенного сопротивления. Положим, что источник эдс замкнут на нагрузку Z_2 и имеет внутреннее сопротивление Z_1 (фиг. 6.64). Тогда ток в цепи будет

$$i = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_2}. \quad (6.29)$$

Если сопротивление Z_1 и Z_2 равны между собой, то

$$i = \frac{\dot{E}}{2Z_1}. \quad (6.30)$$

Ур-ние (6.30) соответствует согласованному соединению источника и внешнего сопротивления Z_2 , а ур-ние (6.29) — несогласованному.



Фиг. 6.64.

Положим, что, имея различные Z_1 и Z_2 , мы вводим между зажимами источника и сопротивлением Z_2 идеальный трансформатор, посредством которого сопротивление Z_2 трансформируется в сопротивление Z_1 .

Такой трансформатор согласно § 22 должен обладать коэффициентом трансформации

$$n = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}.$$

Ток в цепи источника определится ур-нием (6.30), а ток \dot{I}_2 в цепи нагрузки будет в $\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$ раз больше.

Так что

$$\dot{I}_2 = \frac{Z}{2Z_1} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = \frac{\dot{E}}{2\sqrt{Z_1 Z_2}}. \quad (6.31)$$

Отношение тока

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_2},$$

который протекает при несогласованной нагрузке, к току \dot{I}_2 , определяемому ур-нием (6.31), обозначим буквой D . Это отношение называется „фактором отражения“

$$D = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_1 + Z_2}.$$

В случае фильтра сопротивление Z_1 является волновым сопротивлением фильтра, а Z_2 — сопротивлением нагрузки.

Величина, обратная фактору отражения, т. е.

$$\frac{1}{D} = \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}},$$

является мерой эффективности передачи при непосредственном соединении звеньев цепи с различными сопротивлениями Z_1 и Z_2 по сравнению с согласованным соединением, если согласование достигнуто путем трансформации Z_2 .

Так как величина $\frac{1}{D}$ является вообще комплексом, то ее можно представить как

$$\frac{1}{D} = \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \right| e^{j\phi}.$$

Квадрат амплитуды $\left| \frac{1}{D} \right|^2$ является мерой перехода мощности в нагрузку. При $Z_1 = Z_2$

$$\left| \frac{1}{D} \right|^2 = \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \right|^2 = 1,$$

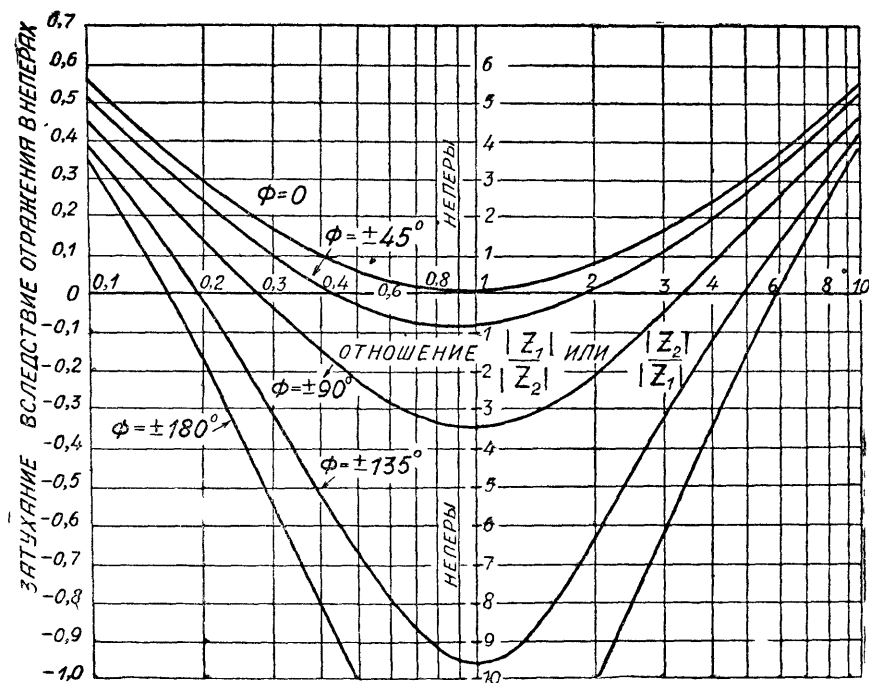
т. е. затухание по мощности равно нулю. В других случаях отражение может привести как к уменьшению, так и к усилению перехода мощности, т. е. затухание может быть и больше и меньше нуля, и может быть определено по формулам

$$N_{\text{от}} = 20 \lg \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \right|$$

или

$$N_{\text{неп}} = \ln \left| \frac{Z_1 + Z_2}{2\sqrt{Z_1 Z_2}} \right|.$$

На фиг. 6.65 показаны кривые, дающие затухание вследствие отражения в зависимости от отношения модулей двух последовательно включенных



Фиг. 6.65.

сопротивлений $|Z_1|$ и $|Z_2|$ (фиг. 6.66). Цифра 1 на оси абсцисс соответствует случаю

$$|Z_1| = |Z_2|.$$

Правее этой точки

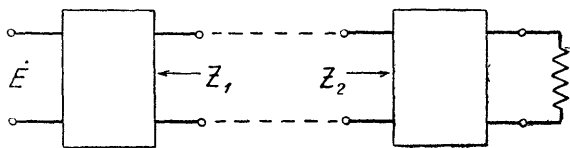
$$|Z_1| > |Z_2|.$$

Левее

$$|Z_1| < |Z_2|.$$

Для того чтобы пользоваться этими кривыми, кроме отношения модулей, надо знать угол Φ . Для этого надо разделить Z_1 на Z_2 и представить полученный результат в форме мнимой степени

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Ae^{j\Phi}.$$



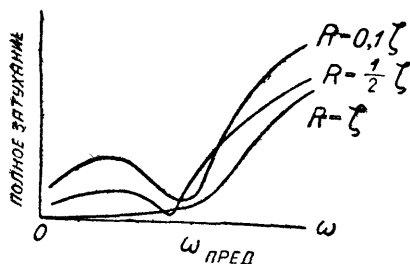
Фиг. 6.66.

Каждая кривая соответствует своему углу Φ . Случай $\Phi = 0$ соответствует случаю, наиболее нас интересующему, когда фазовый угол между комплексами Z_1 и Z_2 равен нулю. Это значение Φ имеет в полосе прозрачности фильтра при условии, что фильтр нагружен чисто активным сопротивлением, которое (как это всегда бывает) не равно волновому сопротивлению фильтра в пределах всей полосы прозрачности.

При несогласованности волнового сопротивления фильтра с сопротивлением присоединенных к нему цепей не только на входе, но и на выходе отражения имеют более сложный характер. В этом случае отражение имеет место в обеих точках перехода; кроме того, волны, отраженные от одного конца, вновь отражаются от другого.

Полное затухание, вносимое всеми этими отражениями, приближенно определяется следующей формулой

$$N_{\text{аб}} = 20 \lg \left| \frac{1}{D_1} \right| + 20 \lg \left| \frac{1}{D_2} \right| - 20 \lg \left| \frac{1}{D} \right|;$$



Фиг. 6.67.

где D_1 — фактор отражения на одном конце фильтра (например, у его входных зажимов); D_2 — фактор отражения на другом конце фильтра; D — фактор отражения, который имел бы место, если бы сопротивления, присоединенные ко входным и выходным зажимам фильтра, были бы соединены непосредственно одно с другим.

На фиг. 6.67 приведены для примера три кривых затухания фильтра низкой частоты при различных отношениях между сопротивлением нагрузки R и волновым сопротивлением ζ , а именно:

$$R = \zeta; R = \frac{1}{2} \zeta; R = \frac{1}{10} \zeta.$$

Из этих кривых видно, что при несогласовании нагрузки затухание распространяется на всю область полосы прозрачности.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Формулы для преобразования круговых и гиперболических функций

Круговые функции.

а) Основные формулы.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

б) Формулы сложения и вычитания, умножения и деления.

$$(1) \quad \begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta, \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) : (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta), \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1) : (\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha). \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}, \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \sin (\alpha \pm \beta) : (\cos \alpha \cos \beta),$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \sin (\alpha \pm \beta) : (\sin \alpha \sin \beta),$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta) &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha, \\ \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$(5) \quad 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha, \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$(6) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)].$$

с) Зависимость между круговыми и показательными функциями.

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x, \quad e^{-jx} = \cos x - j \sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2},$$

$$j = \sqrt{-1}.$$

Гиперболические функции.

а) Определение.

$$\operatorname{sh} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}},$$

б) Основная зависимость.

$$\operatorname{sh} (-\varphi) = -\operatorname{sh} \varphi, \quad \operatorname{ch} (-\varphi) = \operatorname{ch} \varphi, \quad \operatorname{th} (-\varphi) = -\operatorname{th} \varphi$$

$$\operatorname{ch}^2 \varphi - \operatorname{sh}^2 \varphi = 1, \quad \operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}, \quad \operatorname{cth} \varphi = \frac{1}{\operatorname{th} \varphi},$$

$$(\operatorname{ch} \varphi \pm \operatorname{sh} \varphi)^n = \operatorname{ch} n\varphi \pm \operatorname{sh} n\varphi,$$

$$\operatorname{sh} \varphi = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1} = \frac{\operatorname{th} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \varphi}},$$

$$\operatorname{th} \varphi = \frac{\operatorname{sh} \varphi}{\operatorname{ch} \varphi} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \varphi - 1}}{\operatorname{ch} \varphi},$$

$$e^{\varphi} = \operatorname{ch} \varphi + \operatorname{sh} \varphi, \quad e^{-\varphi} = \operatorname{ch} \varphi - \operatorname{sh} \varphi.$$

с) Зависимость между круговыми и гиперболическими функциями.

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= -j \operatorname{sh} j\alpha, & \cos \alpha &= \operatorname{ch} j\alpha, & \operatorname{tg} \alpha &= -j \operatorname{th} j\alpha, & \operatorname{ctg} \alpha &= j \operatorname{cth} j\alpha, \\ \sin j\alpha &= j \operatorname{sh} \alpha, & \cos j\alpha &= \operatorname{ch} \alpha, & \operatorname{tg} j\alpha &= j \operatorname{th} \alpha, & \operatorname{ctg} j\alpha &= -j \operatorname{cth} \alpha, \\ \operatorname{sh}(j\alpha) &= j \sin \alpha, & \operatorname{ch}(j\alpha) &= \cos \alpha, & \operatorname{th}(j\alpha) &= j \operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{cth}(j\alpha) &= -j \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

д) Зависимость между функциями двух секторов и функциями двойных секторов.

$$\begin{aligned} (1) \quad \operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta, \\ \operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta, \\ \operatorname{th}(\alpha \pm \beta) &= (\operatorname{th} \alpha \pm \operatorname{th} \beta) : (1 \pm \operatorname{th} \alpha \operatorname{th} \beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \operatorname{sh} 2\alpha &= 2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha = \frac{2 \operatorname{th} \alpha}{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}, \\ \operatorname{ch} 2\alpha &= \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{sh}^2 \alpha = 2 \operatorname{ch}^2 \alpha - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \alpha = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \alpha}{1 - \operatorname{th}^2 \alpha}, \\ \operatorname{th} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{th} \alpha}{1 + \operatorname{th}^2 \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{sh} \beta &= 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} \beta &= 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} \beta &= 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \beta &= 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \operatorname{th} \alpha \pm \operatorname{th} \beta &= \frac{\operatorname{sh}(\alpha \pm \beta)}{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \operatorname{ch} 2\alpha - 1 &= 2 \operatorname{sh}^2 \alpha, & \operatorname{ch} 2\alpha + 1 &= 2 \operatorname{ch}^2 \alpha, \\ \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - 1}{\operatorname{ch} 2\alpha + 1} &= \operatorname{th}^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta &= \frac{1}{2} \operatorname{ch}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \operatorname{ch}(\alpha - \beta), \\ \operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta &= \frac{1}{2} \operatorname{ch}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{ch}(\alpha - \beta), \\ \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \beta &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(\alpha - \beta), \\ \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \beta &= \frac{1}{2} \operatorname{sh}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

Формулы для вычисления коэффициента самоиндукции.

В приводимых ниже формулах все линейные размеры даны в сантиметрах. Коэффициент самоиндукции в CGS электромагнитной системе (т. е. в сантиметрах).

1) Прямолинейный провод длиной l и диаметром d (формула Неймана)

$$L = 2l \left[\ln \frac{4l}{d} - 1 \right] \text{ см.}$$

В табл. I приведены значения L для некоторых случаев.

Таблица I

Таблица II

Длина провода l в см	Самоиндукция L в см		
	$d=0,05$ см	$d=0,1$ см	$d=0,2$ см
10	113,7	99,8	86
20	255,5	227,5	200
30	407	365,5	324
40	565	510	455
50	729	660	591
60	898	815	731
70	1068	970	834
80	1242	1130	1020
90	1418	1293	1170
100	1597	1459	1320
125	2053	1880	1706

Диаметр витка D в см	Самоиндукция L в см			
	$d=0,1$ см	$d=0,2$ см	$d=0,3$ см	$d=0,4$ см
10	310,4	266,5	241	223
20	707	618	567	531
30	1137	1006	930	875
40	1590	1414	1312	1238
50	2057	1840	1710	1622
60	2536	2275	2123	2015
70	3030	2722	2548	2420
80	3528	3175	2975	2830
90	4040	3640	3410	3250
100	4547	4110	3850	3680

2) Один круглый виток из провода круглого сечения. D — диаметр витка, d — диаметр провода (формула Кирхгофа)

$$L = 2\pi D \left[\ln \left(\frac{8D}{d} \right) - 1,75 \right] \text{ см.}$$

Некоторые числа приведены в табл. II.

При высокой частоте более точный результат дает формула

$$L = 2\pi D \left[\ln \left(\frac{8D}{d} \right) - 2 \right] \text{ см.}$$

3) Квадратный виток из провода круглого сечения. a — сторона квадрата, d — диаметр провода (формула Кирхгофа)

$$L = 8a \left[\ln \left(\frac{2a}{d} \right) + \frac{d}{2a} - 0,524 \right] \text{ см.}$$

Таблица III

Сторона квадрата a в см	Самоиндукция L в см		
	$d=0,1$ см	$d=0,2$ см	$d=0,4$ см
10	385	327	271
15	621	533	455
20	875	764	653
25	1138	999	860
30	1410	1244	1076
40	1970	1750	1528
50	2550	2280	2000
60	3150	2820	2490
70	3760	3370	2985
80	4380	3940	3500
90	5010	4520	4020
100	5660	5100	4550

Некоторые значения приведены в табл. III.

4) Однослойная катушка, намотанная очень плотно (без просветов). Диаметр катушки D , число витков n , длина намотки l (формула Нагаока)

$$L = \frac{\pi^2 D^2 n^2 K}{l} \text{ см.}$$

Здесь K — поправочный коэффициент, определяемый следующей табл. IV в зависимости от величины $\frac{D}{l}$.

D/l	K	D/l	K	D/l	K	D/l	K
0,00	1,0000	0,36	0,8632	0,72	0,7556	1,80	0,5511
0,02	0,9916	0,38	0,8565	0,74	0,7504	2,00	0,5255
0,04	0,9832	0,40	0,8499	0,76	0,7452	2,20	0,5025
0,06	0,9750	0,42	0,8433	0,78	0,7401	2,40	0,4816
0,08	0,9668	0,44	0,8369	0,80	0,7351	2,60	0,4626
0,10	0,9588	0,46	0,8306	0,82	0,7301	2,80	0,4452
0,12	0,9509	0,48	0,8243	0,84	0,7252	3,00	0,4292
0,14	0,9430	0,50	0,8181	0,86	0,7205	3,5	0,3944
0,16	0,9353	0,52	0,8120	0,88	0,7157	4,0	0,3654
0,18	0,9276	0,54	0,8060	0,90	0,7110	4,5	0,3409
0,20	0,9201	0,56	0,8001	0,92	0,7063	5,0	0,3198
0,22	0,9126	0,58	0,7943	0,94	0,7018	6,0	0,2854
0,24	0,9053	0,60	0,7885	0,98	0,6972	7,0	0,2584
0,26	0,8980	0,62	0,7828	0,96	0,6928	8,0	0,2366
0,28	0,8909	0,64	0,7772	1,00	0,6884	9,0	0,2185
0,30	0,8838	0,66	0,7717	1,20	0,6475	10,0	0,2033
0,32	0,8767	0,68	0,7663	1,40	0,6115	20,0	0,1240
0,34	0,8699	0,70	0,7609	1,60	0,5795	50,0	0,0611

5) Плоская спираль из круглой проволоки. Внешний диаметр спирали D , внутренний d . Число витков n (формула Шпильмана).

$$L = n^2 DK.$$

K — поправочный коэффициент, зависящий от отношения $\frac{d}{D}$, находится по следующей табл. V.

Таблица V

d/D	K	d/D	K	d/D	K
0,00	6,9676	0,25	11,6340	0,50	18,9740
0,05	7,7158	0,30	12,8578	0,90	45,7434
0,10	8,5558	0,35	14,1916	1,00	∞
0,15	9,4876	0,40	15,6458		
0,20	10,5125	0,45	17,2340		

ПРИЛОЖЕНИЕ III.

Формулы для расчета коэффициента взаимной индукции.

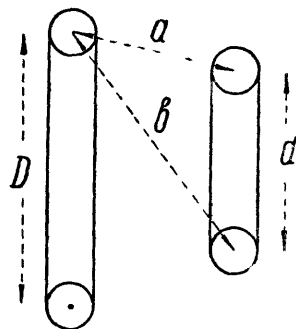
Коэффициент взаимной индукции может быть рассчитан только для простейших случаев. В приводимых ниже формулах все линейные размеры даны в сантиметрах. Коэффициент взаимной индукции M — в электромагнитных единицах (сантиметрах).

1) Два параллельных провода длиной l находятся на расстоянии d . При этом $l \gg d$.

$$M = 2l \left[\ln \frac{2l}{d} - 1 + \frac{d}{l} \right] \text{ см.}$$

2) Два круглых витка, [расположенных параллельно и коаксиально, показаны в разрезе на фиг. 1. На этом же чертеже видно значение a , b , D и d .

$$M = \frac{K}{2} \sqrt{Dd} \text{ см.}$$



Фиг. 1.

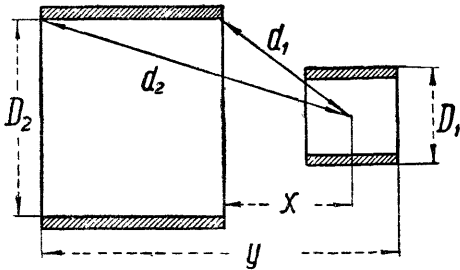
Коэффициент K находится из следующей табл. VI.

Таблица VI

$\frac{a}{b}$	K	$\frac{a}{b}$	K	$\frac{a}{b}$	K
1, 0	0,000	0,82	0,616	0,45	4,890
0,99	0,007	0,81	0,674	0,40	5,970
0,98	0,020	0,80	0,735	0,35	7,270
0,97	0,037	0,78	0,863	0,30	8,850
0,96	0,058	0,76	1,002	0,25	10,80
0,95	0,081	0,74	1,158	0,20	13,30
0,94	0,107	0,72	1,310	0,18	14,50
0,93	0,136	0,70	1,491	0,16	15,90
0,92	0,168	0,68	1,644	0,14	17,40
0,91	0,202	0,66	1,859	0,12	19,30
0,90	0,239	0,64	2,068	0,10	21,50
0,89	0,278	0,62	2,290	0,08	24,20
0,88	0,319	0,60	2,527	0,06	27,80
,87	0,363	0,58	2,780	0,04	32,80
0,86	0,409	0,56	3,050	0,02	38,70
0,85	0,457	0,54	3,337	0,015	45,10
0,84	0,508	0,52	3,643	0,010	50,20
0,83	0,561	0,50	3,969		

3) Две круглые однослойные катушки с числом витков n_1 и n_2 , расположенные коаксиально (фиг. 2). Буквенные обозначения на фиг. 2 соответствуют обозначениям в формуле

$$M = 0,62 \frac{(D_1 D_2)^2 n_1 n_2}{l_1 l_2} (K_1 l_1 + K_2 K_3),$$



Фиг. 2.

где l_1 — длина малой катушки, а l_2 — длина большой катушки

$$K_1 = \frac{8}{D_2^2} \left[\frac{y}{d_2} - \frac{x}{d_1} \right],$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{d_1^5} - \frac{y}{d_2^5} \right],$$

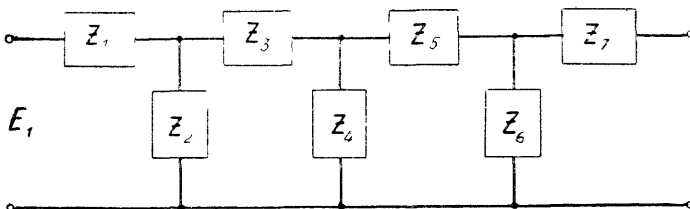
$$K_3 = \frac{D_1^2}{8} \left[3 - \frac{4l_1^2}{D_1^2} \right] l_1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV.

Формулы для лестничных и мостовых схем.

Многие схемы могут быть приведены к виду так называемых лестничных схем.

Пример начертания лестничной схемы показан на фиг. 3. Здесь под $Z_1, Z_2 \dots$ подразумеваются те, либо другие комплексные сопротивления.



Фиг. 3.

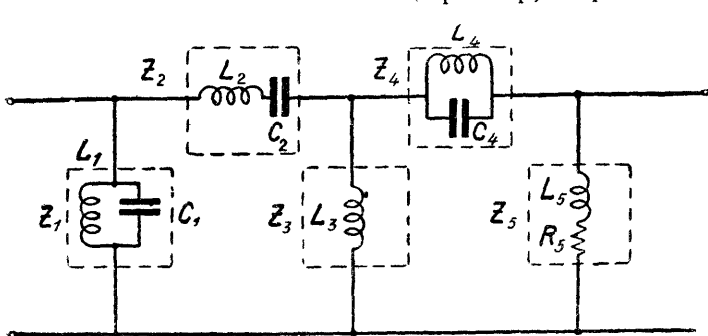
При этом на первый взгляд схема может и не иметь вида, при котором расположение элементов напоминало бы лестничное расположение.

Так например, схема фиг. 4 вовсе не напоминает схемы фиг. 3 по своему построению. Однако ту же самую схему можно например, начертить так, как, показано на фиг. 5, и тогда она получает характер лестничной схемы.

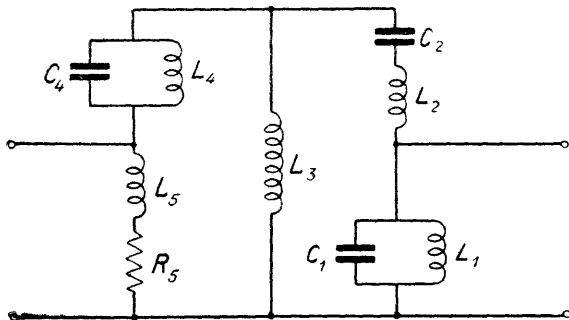
Удачное расположение элементов сложной схемы, выявляющее ее смысл, является очень важным моментом как для расчетов, так и для понимания действия схемы.

Мы выпишем здесь ряд формул для лестничных схем с различным числом элементов.

Для того чтобы пользоваться этими формулами, надо прежде всего придать схеме лестничный характер, стремясь к тому, чтобы представить



Фиг. 5.



Фиг. 4.

данную схему в виде лестницы с наибольшим количеством ступеней. Далее обозначают на действительной схеме стрелками направления токов так, как они указаны на той типичной схеме, которой пользуются.

После этого взамен Z_1 , Z_2 и т. д. подставляют в данную формулу действительные значения комплексных сопротивле-

ний и находят токи i_1 , i_2 и т. д., текущие через весь элемент Z в целом. После этого легко найти интересующие значения токов и напряжений для любого участка относительно простой цепи, которая была обозначена как Z_n .

На фиг. 6 показана схема, содержащая три элемента. Соответствующие ей уравнения будут

$$i_1 = \frac{E_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3},$$

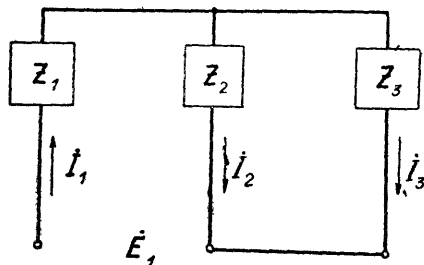
$$i_2 = \frac{\dot{E}_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3},$$

$$i_3 = \frac{E_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}.$$

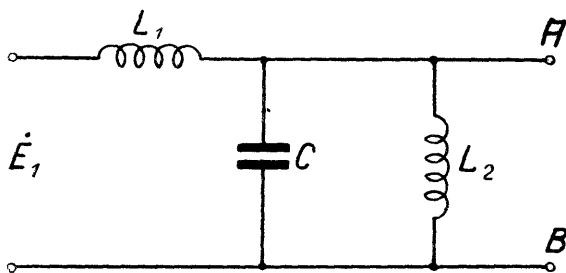
Положим, что написанными формулами хотят воспользоваться для определения напряжения между точками A и B в схеме фиг. 7.

Так как

$$Z_1 = j\omega L_1; \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C}; \quad Z_3 = j\omega L_2,$$



Фиг. 6.

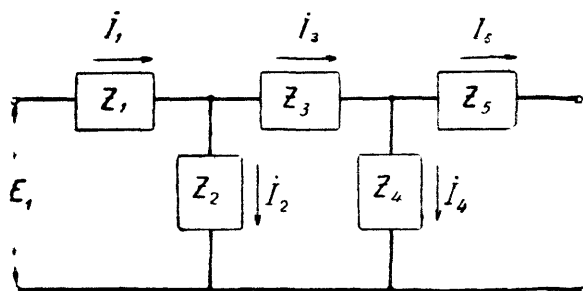


Фиг. 7.

$$\dot{I}_3 = \dot{E}_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_1 \cdot j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L_2} = \dot{E}_1 \frac{j}{\omega^3 L_1 L_2 C - \omega L_1 - \omega L_2}.$$

Далее

$$\dot{E}_{AB} = \dot{I}_3 j\omega L_2 = \dot{E}_1 \frac{1}{1 + \frac{L_1}{L_2} - \omega^2 L_1 C}.$$



Фиг. 8.

Для лестничной схемы, показанной на фиг. 8 и содержащей пять элементов, токи определяются следующими формулами

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 [(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5]}{H},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_1 [Z_3(Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5]}{H}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 (Z_4 + Z_5)}{H},$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 Z_5}{H},$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 Z_4}{H},$$

где

$$H \equiv Z_1(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5(Z_1 + Z_2) + Z_2 Z_3(Z_4 + Z_5).$$

Если \$Z_1 = Z_3 = Z_5\$ и в свою очередь \$Z_2 = Z_4\$, то получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 [(Z_1 + Z_2)^2 + Z_1 Z_2]}{H}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_1 [Z_1(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2]}{H}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_1 Z_2 (Z_1 + Z_2)}{H},$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{E}_1 Z_1 Z_2}{H},$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{E}_1 Z_2^2}{H},$$

где

$$H = Z_1(Z_1 + Z_2)^2 + 2Z_1 Z_2 (Z_1 + Z_2).$$

Наконец, если

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5,$$

получим

$$i_1 = \frac{5E_1}{8Z},$$

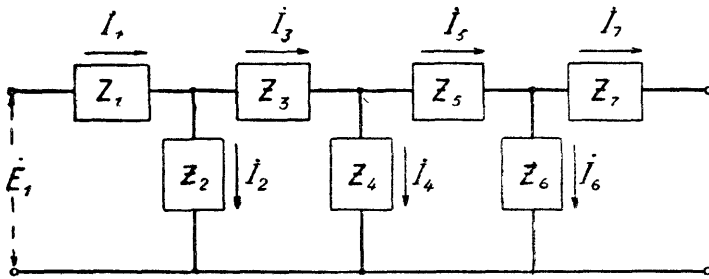
$$i_2 = \frac{3E_1}{8Z},$$

$$i_3 = \frac{E_1}{4Z},$$

$$i_4 = \frac{E_1}{8Z},$$

$$i_5 = \frac{E_1}{8Z}.$$

Если элементов не 5, а 4, то полагают, например Z_1 (или другое Z) равным нулю. Этим путем иногда удается привести схему к лестничному виду.



Фиг. 9.

Для схемы, содержащей семь элементов (фиг. 9)

$$i_1 = \frac{E_1 \{Z_6 + Z_7\} \{Z_2 + Z_3\} (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5 \{Z_2 + Z_3 + Z_4\} + Z_6 Z_7 (Z_2 + Z_3 + Z_4)}{H},$$

$$i_2 = \frac{E_1 \{Z_6 + Z_7\} \{Z_5 (Z_3 + Z_4) + Z_3 Z_4\} + Z_6 Z_7 (Z_3 + Z_4)}{H},$$

$$i_3 = \frac{E_1 Z_2 \{ (Z_4 + Z_5) (Z_6 + Z_7) + Z_6 Z_7 \}}{H},$$

$$i_4 = \frac{E_1 Z_2 \{ Z_5 (Z_6 + Z_7) + Z_6 Z_7 \}}{H},$$

$$i_5 = \frac{E_1 Z_2 Z_4 (Z_6 + Z_7)}{H},$$

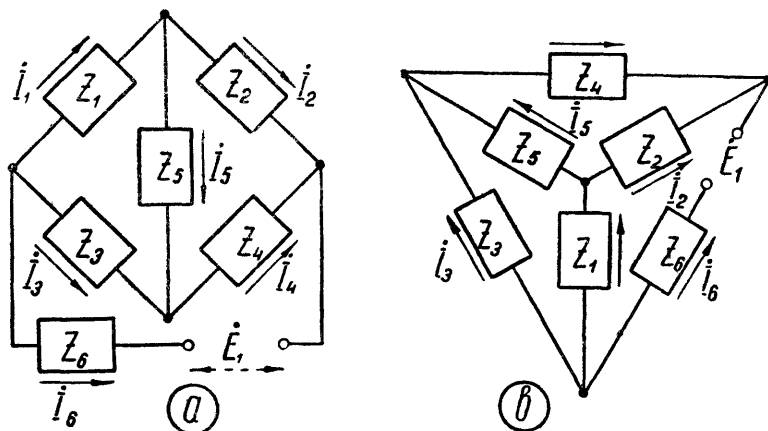
$$i_6 = \frac{E_1 Z_2 Z_4 Z_7}{H},$$

$$i_7 = \frac{E_1 Z_2 Z_4 Z_6}{H},$$

где

$$H \equiv \{Z_6 + Z_7\} \{Z_1 (Z_2 + Z_3) (Z_4 + Z_5) + Z_2 Z_3 (Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5 (Z_1 + Z_2)\} + Z_6 Z_7 \{ (Z_1 + Z_2) (Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2 \}.$$

На фиг. 10 показаны две схемы так называемого мостового типа. Все эти схемы совершенно идентичны и различаются только способом изображения.



Фиг. 10.

Для них имеем следующие формулы

$$i_1 = \frac{\dot{E}_1 [Z_5(Z_3 + Z_4) + Z_3(Z_2 + Z_4)]}{H},$$

$$i_2 = \frac{\dot{E}_1 [Z_5(Z_3 + Z_4) + Z_4(Z_1 + Z_3)]}{H},$$

$$i_3 = \frac{\dot{E}_1 [Z_5(Z_1 + Z_2) + Z_1(Z_2 + Z_4)]}{H},$$

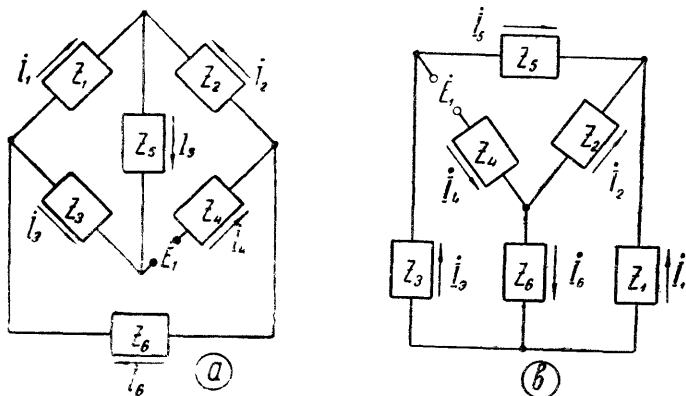
$$i_4 = \frac{\dot{E}_1 [Z_5(Z_1 + Z_2) + Z_2(Z_1 + Z_3)]}{H},$$

$$i_5 = \frac{\dot{E}_1 (Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4)}{H},$$

$$i_6 = \frac{\dot{E}_1 [Z_5(Z_1 + Z_3) + (Z_2 + Z_4)(Z_1 + Z_3 + Z_5)]}{H}$$

где

$$H \equiv (Z_1 + Z_2)(Z_3 Z_4 + Z_5 Z_6) + (Z_3 + Z_4)(Z_1 Z_2 + Z_5 Z_6) + (Z_5 + Z_6)(Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3) + Z_5(Z_1 Z_3 + Z_2 Z_4) + Z_6(Z_1 Z_2 + Z_3 Z_4).$$



Фиг. 11.

На фиг. 11 показаны те же мостовые схемы, но источник эдс включен в одно из плеч моста. Два варианта начертания a и b изображают одну и ту же схему

$$i_1 = \frac{E_1[Z_2Z_3 - Z_5Z_6]}{H},$$

$$I_2 = \frac{E_1[Z_1(Z_3 + Z_6) + Z_6(Z_3 + Z_5)]}{H},$$

$$i_3 = \frac{E_1[Z_1(Z_2 + Z_6) + Z_5(Z_2 + Z_6)]}{H},$$

$$i_4 = \frac{E_1[Z_1(Z_2 + Z_6) + (Z_3 + Z_5)(Z_1 + Z_2 + Z_6)]}{H},$$

$$i_5 = \frac{E_1[Z_1(Z_3 + Z_6) + Z_3(Z_2 + Z_6)]}{H},$$

$$i_6 = \frac{E_1[Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2(Z_3 + Z_5)]}{H},$$

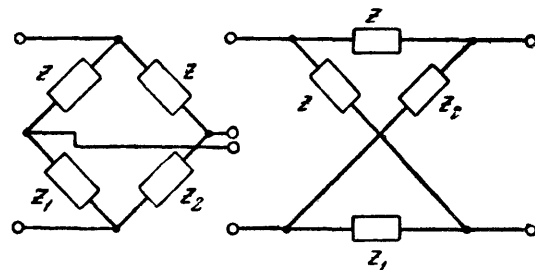
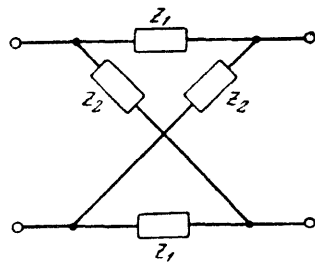
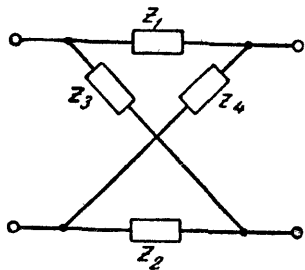
где

$$H \equiv (Z_1 + Z_2)(Z_3Z_4 + Z_5Z_6) + (Z_3 + Z_4)(Z_1Z_2 + Z_5Z_6) + (Z_5 + Z_6)(Z_1Z_4 + Z_2Z_3) + Z_5(Z_1Z_3 + Z_2Z_4) + Z_6(Z_1Z_2 + Z_3Z_4).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ V.

Таблицы четырехполюсников

Параметры четырехполюсников, составленных из четырех двухполюсников.



$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} & \frac{Z_1Z_2(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} & \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \end{vmatrix}$$

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ \frac{2}{Z_2 - Z_1} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{vmatrix}$$

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{(Z + Z_1)(Z + Z_2)}{Z(Z_2 - Z_1)} & \frac{Z(Z_1 + Z_2) + 2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ \frac{2Z + Z_1 + Z_2}{Z(Z_2 - Z_1)} & 2\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{vmatrix}$$

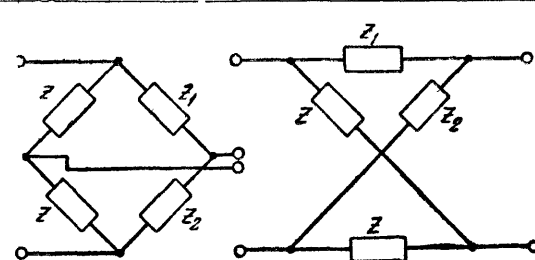
$$= \begin{vmatrix} \frac{(Y_1 + Y_4)(Y_2 + Y_3)}{Y_1Y_2 - Y_3Y_4} & \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{Y_1Y_2 - Y_3Y_4} \\ \frac{Y_1Y_4(Y_2 + Y_3) + Y_2Y_3(Y_1 + Y_4)}{Y_1Y_2 - Y_3Y_4} & \frac{(Y_1 + Y_3)(Y_2 + Y_4)}{Y_1Y_2 - Y_3Y_4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 - Y_2} & \frac{2}{Y_1 - Y_2} \\ \frac{2Y_1Y_2}{Y_1 - Y_2} & \frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 - Y_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{(Y + Y_1)(Y + Y_2)}{Y(Y_1 - Y_2)} & \frac{2Y + Y_1 + Y_2}{Y(Y_1 - Y_2)} \\ \frac{Y(Y_1 + Y_2) + 2Y_1Y_2}{Y_1 - Y_2} & 2\frac{Y_1 + Y_2}{Y_1 - Y_2} \end{vmatrix}$$

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_1Z_4(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4)} & -\frac{Z_3Z_4 - Z_1Z_2}{Z_1Z_4(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4)} \\ \frac{Z_3Z_4 - Z_1Z_2}{Z_1Z_4(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4)} & -\frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_1Z_4(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4)} \end{vmatrix}$$

$$\|Y\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1Z_2} & \frac{Z_1 - Z_2}{2Z_1Z_2} \\ -\frac{Z_1}{2Z_1Z_2} & -\frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1Z_2} \end{vmatrix}$$



$$= \begin{vmatrix} \frac{(Y_1 + Y_3)(Y_2 + Y_4)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} & -\frac{Y_1Y_2 - Y_3Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} \\ \frac{Y_1Y_2 - Y_3Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} & -\frac{(Y_1 + Y_4)(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{Y_1 + Y_2}{2} & -\frac{Y_1 - Y_2}{2} \\ \frac{Y_1 - Y_2}{2} & -\frac{Y_1 + Y_2}{2} \end{vmatrix}$$

$$\|W\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{(Z_1+Z_4)(Z_2+Z_3)}{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4} & - \frac{Z_3Z_4-Z_1Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4} \\ \frac{Z_3Z_4-Z_1Z_2}{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4} & - \frac{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)}{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_3)}{Y_1Y_2(Y_3+Y_4)+Y_3Y_4(Y_1+Y_2)} - \frac{Y_1Y_2-Y_3Y_4}{Y_1Y_2(Y_3+Y_4)+Y_3Y_4(Y_1+Y_2)} \\ \frac{Y_1Y_2-Y_3Y_4}{Y_1Y_2(Y_3+Y_4)+Y_3Y_4(Y_1+Y_2)} & - \frac{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)}{Y_1Y_2(Y_3+Y_4)+Y_3Y_4(Y_1+Y_2)} \end{array} \right\|$$

$$\|F\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_3Z_4-Z_1Z_2}{(Z_1+Z_4)(Z_2+Z_3)} & \frac{Z_1Z_4(Z_2+Z_3)+Z_2Z_3(Z_1+Z_4)}{(Z_1+Z_4)(Z_2+Z_3)} \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4}{(Z_1+Z_4)(Z_2+Z_3)} & \frac{Z_3Z_4-Z_1Z_2}{(Z_1+Z_4)(Z_2+Z_3)} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{Y_1Y_2-Y_3Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_3)} - \frac{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_3)} \\ \frac{Y_1Y_2-Y_3Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_3)} & - \frac{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_3)} \end{array} \right\|$$

$$\|D\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_3Z_4-Z_1Z_2}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)} & \frac{Z_1Z_4(Z_2+Z_3)+Z_2Z_3(Z_1+Z_4)}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)} \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3+Z_4}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)} & \frac{Z_3Z_4-Z_1Z_2}{(Z_1+Z_3)(Z_2+Z_4)} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{Y_1Y_2-Y_3Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)} - \frac{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)} \\ \frac{Y_1Y_2-Y_3Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)} & - \frac{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4}{(Y_1+Y_3)(Y_2+Y_4)} \end{array} \right\|$$

$$\|W\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_1+Z_2}{2} & \frac{Z_1-Z_2}{2} \\ -\frac{Z_1-Z_2}{2} & -\frac{Z_1+Z_2}{2} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{Y_1+Y_2}{2Y_1Y_2} & -\frac{Y_1-Y_2}{2Y_1Y_2} \\ \frac{Y_1-Y_2}{2Y_1Y_2} & -\frac{Y_1+Y_2}{2Y_1Y_2} \end{array} \right\|$$

$$\|F\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} & -\frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} \\ \frac{2}{Z_1+Z_2} & \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} \end{array} \right\|$$

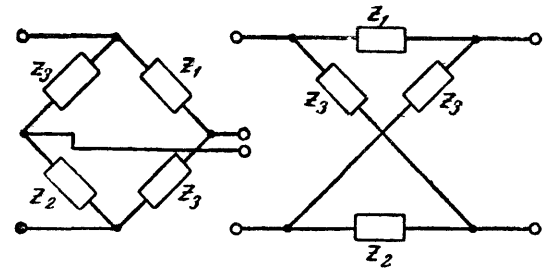
$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2} & -\frac{2}{Y_1+Y_2} \\ \frac{2Y_1Y_2}{Y_1+Y_2} & \frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2} \end{array} \right\|$$

$$\|D\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} & \frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2} \\ -\frac{2}{Z_1+Z_2} & \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2} & \frac{2}{Y_1+Y_2} \\ -\frac{2Y_1Y_2}{Y_1+Y_2} & \frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2} \end{array} \right\|$$

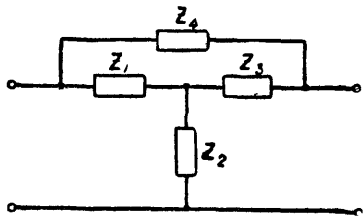
$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{Z_2} \frac{Z_1+Z_2}{Z_1} & \frac{Z(Z_1+Z_2)+2Z_1Z_2}{Z_2-Z_1} \\ \frac{2Z_2+Z_1+Z_2}{Z(Z_2-Z_1)} & \frac{(Z+Z_1)(Z+Z_2)}{Z(Z_2-Z_1)} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{Y_1-Y_2} \frac{Y_1+Y_2}{Y_1-Y_2} & \frac{2Y+Y_1+Y_2}{Y(Y_1-Y_2)} \\ \frac{Y(Y_1+Y_2)+2Y_1Y_2}{Y_1-Y_2} & \frac{(Y+Y_1)(Y+Y_2)}{Y(Y_1-Y_2)} \end{array} \right\|$$



$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_3(Z_1+Z_2+2Z_3)-(Z_3^2-Z_1Z_2)}{Z_3^2-Z_1Z_2} & \frac{Z_3[Z_3(Z_1+Z_2+2Z_3)-2(Z_3^2-Z_1Z_2)]}{Z_3^2-Z_1Z_2} \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_3^2-Z_1Z_2} & \frac{Z_2(Z_1+Z_2+2Z_3)-(Z_3^2-Z_1Z_2)}{Z_3^2-Z_1Z_2} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{Y_3(Y_1+Y_2+Y_3+Y_1Y_2-Y_3^2)}{Y_1Y_2-Y_3^2} & \frac{Y_1+Y_2+2Y_3}{Y_1Y_2-Y_3^2} \\ \frac{Y_3[Y_3(Y_1+Y_2+Y_3)+2(Y_1Y_2-Y_3Y_4)]}{Y_1Y_2-Y_3^2} & \frac{Y_3(Y_1+Y_2+Y_3)+Y_1Y_2-Y_3^2}{Y_1Y_2+Y_3^2} \end{array} \right\|$$

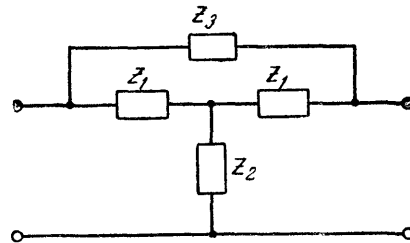


$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} & \frac{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{Z_1 + Z_3 + Z_4}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{Y_3(Y_1 + Y_4) + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)} & \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)} \\ \frac{Y_1(Y_1Y_3 + Y_1Y_4 + Y_3Y_4)}{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)} & \frac{Y_1(Y_2 + Y_3) + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)} \end{vmatrix}$$

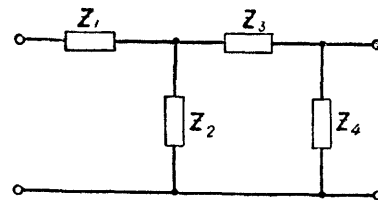
$$\|Y\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)} & -\frac{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)} \\ \frac{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)} & -\frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{Y_1(Y_2 + Y_3) + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & -\frac{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \\ \frac{Y_1Y_3 + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} & -\frac{Y_3(Y_1 + Y_2) + Y_4(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \end{vmatrix}$$



$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1(Z_1 + Z_3) + Z_2(2Z_1 + Z_3)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_3)} & \frac{Z_1Z_3(Z_1 + 2Z_2)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_3)} \\ \frac{2Z_1 + Z_3}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_3)} & \frac{Z_1(Z_1 + Z_3) + Z_2(2Z_1 + Z_3)}{Z_1^2 + Z_2(2Z_1 + Z_3)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{Y_1(Y_1 + Y_2) + Y_3(2Y_1 + Y_2)}{Y_1^2 + Y_3(2Y_1 + Y_2)} & \frac{2Y_1 + Y_2}{Y_1^2 + Y_3(2Y_1 + Y_2)} \\ \frac{Y_1Y_2(Y_1 + 2Y_3)}{Y_1^2 + Y_3(2Y_1 + Y_2)} & \frac{Y_1(Y_1 + Y_2) + Y_3(2Y_1 + Y_2)}{Y_1^2 + Y_3(2Y_1 + Y_2)} \end{vmatrix}$$



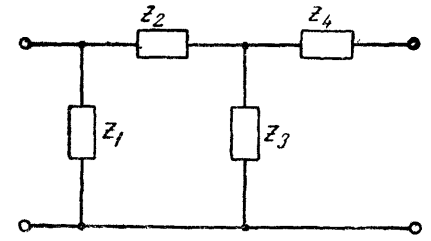
$$\|W\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_1(Z_3+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_1+Z_3+Z_4} & - \frac{Z_1Z_3+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_1+Z_3+Z_4} \\ \frac{Z_1Z_3+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_1+Z_3+Z_4} & - \frac{Z_3(Z_1+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_1+Z_2+Z_3} \end{array} \right\|$$

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_2(Z_3+Z_4)+Z_1(Z_2+Z_3+Z_4)}{Z_2Z_4} & \frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_2} \\ \frac{Z_2+Z_3+Z_4}{Z_2Z_4} & \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{y_3(y_1+y_2)+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_2(y_1y_3+y_1y_4+y_3y_4)} & - \frac{y_1y_3+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)} \\ \frac{y_1y_3+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_2(y_1y_3+y_1y_4+y_3y_4)} & - \frac{y_1(y_2+y_3)+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{y_3(y_1+y_2)+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_1y_3} & \frac{y_1+y_2+y_3}{y_1y_3} \\ \frac{y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4}{y_3} & \frac{y_2+y_3}{y_3} \end{array} \right\|$$

$$\|F\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_1Z_3+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_1(Z_3+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} & - \frac{Z_4(Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3)}{Z_1(Z_3+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} \\ \frac{Z_1+Z_3+Z_4}{Z_1(Z_3+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} & \frac{Z_1Z_3+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_1(Z_3+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} \end{array} \right\|$$



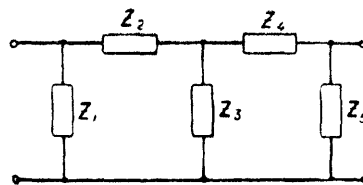
$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{y_1y_3+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_3(y_1+y_2)+y_4(y_1+y_2+y_3)} & \frac{y_1+y_2+y_3}{y_3(y_1+y_2)+y_4(y_1+y_2+y_3)} \\ \frac{y_2(y_1y_3+y_1y_4+y_3y_4)}{y_3(y_1+y_2)+y_4(y_1+y_2+y_3)} & \frac{y_1y_3+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_3(y_1+y_2)+y_4(y_1+y_2+y_3)} \end{array} \right\|$$

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_2+Z_3}{Z_3} & \frac{Z_2Z_2+Z_2Z_4+Z_3Z_4}{Z_3} \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_1Z_3} & \frac{Z_3(Z_1+Z_2)+Z_4(Z_1+Z_2+Z_3)}{Z_1Z_3} \end{array} \right\|$$

$$\|D\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{Z_1Z_3+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_3(Z_1+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} & \frac{Z_1Z_2+Z_1Z_3+Z_2Z_3}{Z_3(Z_1+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} \\ \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z_3(Z_1+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} & \frac{Z_1Z_3+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)}{Z_3(Z_1+Z_4)+Z_2(Z_1+Z_3+Z_4)} \end{array} \right\|$$

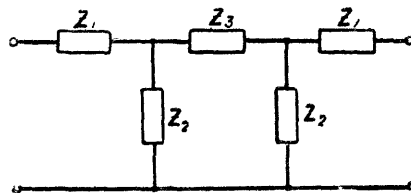
$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{y_1y_3+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_1(y_2+y_3)+y_4(y_1+y_2+y_3)} & \frac{y_1+y_2+y_3}{y_1(y_2+y_3)+y_4(y_1+y_2+y_3)} \\ \frac{y_4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)}{y_1(y_2+y_3)+y_4(y_1+y_2+y_3)} & \frac{y_1y_3+y_4(y_1+y_2+y_3)}{y_1(y_2+y_3)+y_4(y_1+y_2+y_3)} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{cc} \frac{y_2+y_3}{y_2} & \frac{y_2+y_3+y_4}{y_2y_4} \\ \frac{y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3}{y_2} & \frac{y_2(y_3+y_4)+y_1(y_2+y_3+y_4)}{y_2y_4} \end{array} \right\|$$



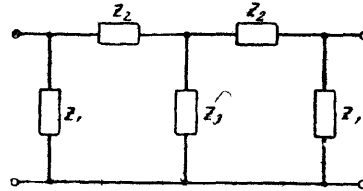
$$\|A\| = \left\| \begin{array}{l} \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_2 Z_3}{Z_3 Z_5} \\ \frac{Z_3(Z_1 + Z_2) + (Z_4 + Z_5)(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_4 Z_3 Z_5} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \frac{Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4}{Z_3} \\ \frac{Z_3(Z_1 + Z_2) + Z_4(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_1 Z_3} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \frac{y_4(y_2 + y_3) + y_5(y_2 + y_3 + y_4)}{y_2 y_4} \\ \frac{y_4 y_5(y_1 + y_2) + (y_4 + y_5)(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)}{y_2 y_4} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \frac{y_2 + y_3 + y_4}{y_2 y_4} \\ \frac{y_2(y_3 + y_4) + y_1(y_2 + y_3 + y_4)}{y_2 y_4} \end{array} \right\|$$



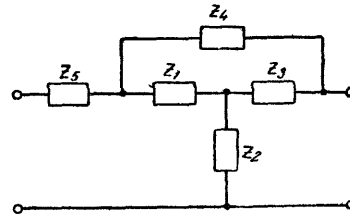
$$\|A\| = \left\| \begin{array}{l} \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_2}{Z_2^2} \\ \frac{2Z_2 + Z_3}{Z_2^2} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \frac{(Z_1 + Z_2)(2Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Z_2^2} \\ \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + Z_1 Z_2}{Z_2^2} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \frac{(y_1 + y_2)(y_2 + y_3) + y_2 y_3}{y_1 y_3} \\ \frac{2y_2 y_3 + y_2^2}{y_3} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} \frac{(y_1 + y_2)(y_1 + y_2 + 2y_3)}{y_1^2 y_3} \\ \frac{(y_1 + y_2)(y_2 + y_3) + y_2 y_3}{y_1 y_3} \end{array} \right\|$$



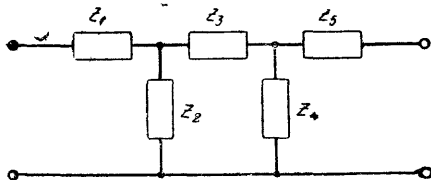
$$\|A\| = \left\| \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}{Z_1 Z_3} \right. \\ \left. \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z_3 + 2Z_3)}{Z_1^2 Z_3} \right\| \\ = \left\| \frac{y_1(2y_2 + y_3) + y_2(y_2 + y_3)}{y_2^2} \right. \\ \left. \frac{(y_1 + y_2)(2y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3)}{y_2^2} \right\|$$

$$\frac{2Z_2 Z_3 + Z_2^2}{Z_3} \\ (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 \\ \frac{Z_1 Z_3}{Z_1^2 Z_3} \\ \frac{2y_2 + y_3}{y_2^2} \\ \frac{y_1(2y_2 + y_3) + y_2(y_2 + y_3)}{y_2^2}$$



$$\|A\| = \left\| \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + (Z_2 + Z_3)(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \right. \\ \left. \frac{Z_1 + Z_3 + Z_4}{Z_1 Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \right\| \\ = \left\| \frac{y_2 y_5 (y_3 + y_4) + (y_2 + y_3)(y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_2 y_4)}{y_5 [y_1 y_3 + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)]} \right. \\ \left. \frac{y_2 (y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_2 y_4)}{y_1 y_3 + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)} \right\|$$

$$\frac{Z_2 Z_3 (Z_2 + Z_3) + (Z_4 + Z_5)(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Z_1 Z_2 + Z_3 (Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z_2 (Z_1 + Z_2 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{y_1 (y_2 + y_3) + (y_4 + y_5)(y_1 + y_2 + y_3)}{y_5 [y_1 y_3 + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)]} \\ \frac{y_1 (y_2 + y_3) + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)}{y_1 y_3 + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)}$$

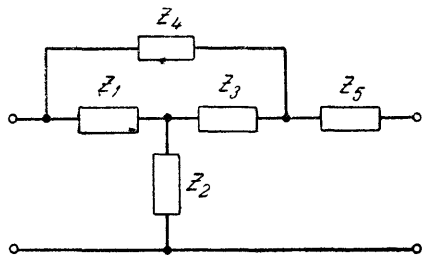


$$\|A\| = \left\| \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_2}{\frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4}} \right\|$$

$$= \left\| \frac{(Y_1 + Y_2)(Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}{\frac{Y_1 Y_3}{Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4}} \right\|$$

$$\left\| \frac{Z_4 Z_5 (Z_1 + Z_2) + (Z_4 + Z_5) (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{\frac{Z_2 Z_4}{(Z_1 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_4 Z_5}} \right\|$$

$$\left\| \frac{Y_3 (Y_1 + Y_2) + (Y_4 + Y_5) (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{\frac{Y_1 Y_3 Y_5}{(Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_2 Y_3}} \right\|$$



$$\|A\| = \left\| \frac{Z_1 (Z_3 + Z_4) + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)} \right\|$$

$$\left\| \frac{Y_3 (Y_1 + Y_2) + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{\frac{Y_1 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_2 (Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4)}} \right\|$$

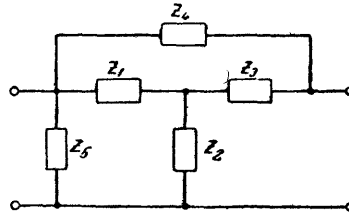
$$\left\| \frac{Y_2 (Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4)}{Y_1 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)} \right\|$$

$$\left\| \frac{Z_4 Z_5 (Z_1 + Z_2) + (Z_4 + Z_5) (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)} \right\|$$

$$\left\| \frac{Y_3 (Z_1 + Z_4) + (Z_2 + Z_5) (Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)} \right\|$$

$$\left\| \frac{Y_3 (Y_1 + Y_2) + (Y_4 + Y_5) (Y_1 + Y_2 + Y_3)}{Y_5 [Y_1 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)]} \right\|$$

$$\left\| \frac{Y_2 Y_5 (Y_1 + Y_4) + (Y_2 + Y_5) (Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_4)}{Y_5 [Y_1 Y_3 + Y_4 (Y_1 + Y_2 + Y_3)]} \right\|$$

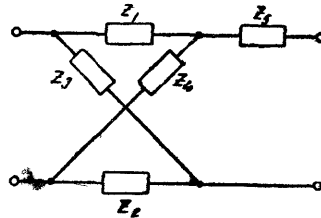


$$\|A\| = \left\| \begin{array}{l} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{Z_1(Z_3 + Z_4) + (Z_2 + Z_5)(Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_5[Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)]} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \frac{y_3(y_1 + y_2) + y_4(y_1 + y_2 + y_3)}{y_1y_3 + y_4(y_1 + y_2 + y_3)} \\ \frac{y_2y_5(y_3 + y_4) + (y_2 + y_5)(y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_4)}{y_1y_3 + y_4(y_1 + y_2 + y_3)} \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{Z_4(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)}{Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)} \\ \frac{Z_4Z_5(Z_2 + Z_3) + (Z_4 + Z_5)(Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3)}{Z_5[Z_1Z_3 + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)]} \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{y_1 + y_2 + y_3}{y_1y_3 + y_4(y_1 + y_2 + y_3)} \\ \frac{y_1(y_2 + y_3) + (y_4 + y_5)(y_1 + y_2 + y_3)}{y_1y_3 + y_4(y_1 + y_2 + y_3)} \end{array} \right\|$$

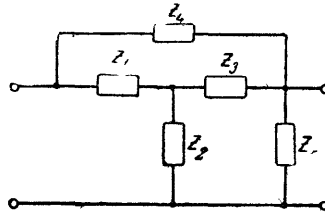


$$\|A\| = \left\| \begin{array}{l} \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \end{array} \right\|$$

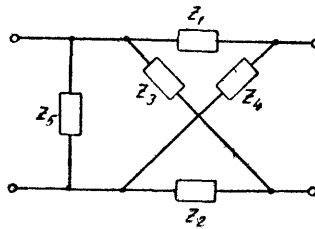
$$= \left\| \begin{array}{l} \frac{(y_1 + y_4)(y_5 + y_3)}{y_1y_2 - y_3y_4} \\ \frac{y_1y_4(y_2 + y_3) + y_2y_3(y_1 + y_4)}{y_1y_2 - y_3y_4} \end{array} \right\|$$

$$\left\| \begin{array}{l} \frac{Z_1Z_4(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_5(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \\ \frac{(Z_1 + Z_5)(Z_2 + Z_3) + Z_5(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \end{array} \right\|$$

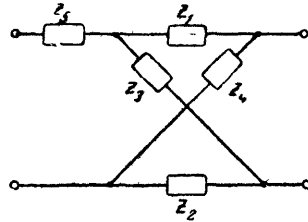
$$\left\| \begin{array}{l} \frac{(y_1 + y_4)(y_2 + y_3) + y_5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{y_5(y_1y_2 - y_3y_4)} \\ \frac{y_1y_4(y_2 + y_3) + y_2y_3(y_1 + y_4) + y_5(y_1 + y_3)(y_2 + y_4)}{y_5(y_1y_2 - y_3y_4)} \end{array} \right\|$$



$$\|A\| = \frac{\frac{Z_4 Z_5 (Z_1 + Z_2) + (Z_4 + Z_5) (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Z_5 [Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)]} \cdot \frac{Z_3 (Z_1 + Z_4) + (Z_2 + Z_5) (Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_5 [Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)]}}{\frac{y_3 (y_1 + y_2) + (y_4 + y_5) (y_1 + y_2 + y_3)}{y_1 y_3 + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)}} = \frac{\frac{Z_4 (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)}{Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)} \cdot \frac{Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)}{Z_1 Z_3 + Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4)}}{\frac{y_1 y_3 + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)}{y_1 (y_2 + y_3) + y_4 (y_1 + y_2 + y_3)}}$$

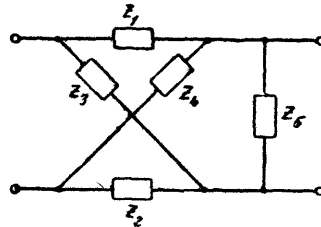


$$\|A\| = \frac{\frac{(Z_1 + Z_4) (Z_2 + Z_3)}{Z_3 Z_4 - Z_1 Z_2} \cdot \frac{(Z_1 + Z_4) (Z_2 + Z_3) + Z_5 (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)}{Z_5 (Z_3 Z_4 - Z_1 Z_2)}}{\frac{(y_1 + y_4) (y_2 + y_3)}{y_1 y_2 - y_3 y_4}} = \frac{\frac{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_5 Z_2 (Z_1 + Z_4)}{Z_3 Z_4 - Z_1 Z_2} \cdot \frac{Z_1 Z_4 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3 (Z_1 + Z_4) + Z_5 (Z_1 + Z_3) (Z_2 + Z_4)}{Z_5 (Z_3 Z_4 - Z_1 Z_2)}}{\frac{(y_1 + y_3) (y_2 + y_4) + y_5 (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{y_1 y_2 - y_3 y_4}}$$



$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{(Z_1 + Z_4)(Z_3 + Z_2) + Z_5(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} & \frac{Z_1Z_4(Z_2 + Z_3) + Z_2Z_3(Z_1 + Z_4) + Z_5(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} & \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{y_1y_4(y_2 + y_3) + y_2y_3(y_1 + y_4) + y_5(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)}{y_5(y_1y_2 - y_3y_4)} & \frac{(y_1 + y_3)(y_2 + y_4) + y_5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{y_5(y_1y_2 - y_3y_4)} \\ \frac{y_1y_4(y_2 + y_3) + y_2y_3(y_1 + y_4)}{y_1y_2 - y_3y_4} & \frac{(y_1 + y_3)(y_2 + y_4)}{y_1y_2 - y_3y_4} \end{vmatrix}$$



$$\|A\| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1Z_3(Z_2 + Z_4) + Z_2Z_4(Z_1 + Z_3) + Z_5(Z_1 + Z_4)(Z_3 + Z_2)}{Z_5(Z_3Z_4 - Z_1Z_2)} & \frac{Z_1Z_3(Z_2 + Z_4) + Z_2Z_4(Z_1 + Z_3)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \\ \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) + Z_5(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)}{Z_5(Z_3Z_4 - Z_1Z_2)} & \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_3Z_4 - Z_1Z_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{(y_1 + y_4)(y_2 + y_3) + y_5(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{y_1y_2 - y_3y_4} & \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{y_1y_2 - y_3y_4} \\ \frac{y_1y_3(y_2 + y_4) + y_2y_4(y_1 + y_3) + y_5(y_1 + y_3)(y_2 + y_4)}{y_1y_2 - y_3y_4} & \frac{(y_1 + y_3)(y_2 + y_4)}{y_1y_2 - y_3y_4} \end{vmatrix}$$

Введение

Стр.

1. Предмет радиотехники	5
2. Линейные и нелинейные системы и принцип суперпозиции	7
3. Синусоидальная функция	8
4. Символическое изображение синусоидальной функции комплексным числом	9
5. Символическое изображение синусоидальных функций при помощи мнимой степени	13
6. Экспоненциальные функции	14
7. Комплексное сопротивление	15
8. Комплексное изображение других физических величин	16
9. Связь между экспоненциальными, круговыми и гиперболическими функциями	18
10. Понятие о линейчатых спектрах эдс и тока	20
11. Примеры линейчатых спектров	21
12. Изображение непериодических явлений при помощи линейчатого спектра	25
13. Понятие о сплошных спектрах	26
14. Трансформация спектров при посредстве линейных систем	28

Глава I. Элементы радиотехнических цепей и их особенности при высокой частоте

1. Статическое электрическое поле	30
2. Электрический потенциал	32
3. Статическая емкость	34
4. Вычисление статической емкости в простейших случаях	35
5. Единицы измерения емкости	38
6. Основные формы конденсаторов и вычисление их емкости	38
7. Емкость при переменном потенциале	41
8. Электростатическая связь и электростатические экраны	41
9. Явления в диэлектрике под действием электрического поля	43
10. Потери в диэлектриках	45
11. Некоторые данные о диэлектриках	48
12. Нагрузка конденсаторов	49
13. Некоторые употребительные типы конденсаторов	50
14. Краевые явления	53
15. Магнитное поле	55
16. Связь магнитного поля с электрическим полем	57
17. Магнитное поле тока проводимости и тока смещения	58
18. Коэффициент самоиндукции	59
19. Взаимная индукция	60
20. Соединение самоиндукций	61
21. Замечание о катушках самоиндукции	63
22. Емкость катушек	64
23. Понятие о распределенной емкости	66
24. Динамическая емкость	67
25. Емкость катушек при электромагнитной индукции	67
26. Скинэффект	69
27. Скинэффект в катушках	70

Глава II. Двухпроводная линия

1. Предварительное замечание	1
2. Бегущие волны потенциала в двухпроводной линии	71
3. Бегущие волны тока в двухпроводной линии	73
4. Бегущие электромагнитные волны в двухпроводной линии	74
5. Стоячие волны в линии	76
6. Физическое объяснение явления стоячих волн	78
7. Получение бегущих и стоячих волн в реальных условиях	79
8. Основные уравнения линии без потерь	80
9. Случай, когда линия замкнута на активное сопротивление, равное волновому сопротивлению	83
10. Случай, когда линия короткозамкнута на конце	84
11. Случай, когда линия разомкнута на конце	86
12. Случай, когда линия замкнута на активное сопротивление, не равное волновому	86
13. Замечание о других случаях нагрузки линии	88
14. Комплексное сопротивление линии без потерь	88
15. Средоточенные емкости и самоиндукции, как участки двухпроводной линии	89

§ 16.	Линия с распределенными потерями	90
§ 17.	Исследование явлений в линии с распределенными потерями, замкнутой на конце на сопротивление, равное волновому	92
§ 18.	Коэффициент полезного действия линии в случае чисто бегущей волны	94
§ 19.	Случай, когда на конце линии существует отражение	95
§ 20.	Замечание о применимости полученных результатов только к установившемуся режиму	98
§ 21.	Формулы для определения параметров некоторых линий	98
§ 22.	Явление резонанса в двухпроводной линии при включении сопротивления в пучность тока	99
§ 23.	Явление резонанса в двухпроводной линии при включении сопротивления в пучность напряжения	102
§ 24.	Линия как волномер	104
§ 25.	Графики распределения тока и напряжения	104
§ 26.	Переход к замкнутому контуру	105
§ 27.	Переход к открытой системе	106

Глава III. Колебательный контур.

§ 1.	Простой колебательный контур	108
§ 2.	Комплексное сопротивление и явление резонанса в контуре, когда эдс и сопротивление включены последовательно	109
§ 3.	Сдвиг фазы между эдс и током	111
§ 4.	Вольтамперы и мощность в контуре, настроенном в резонанс, при последовательно включенных эдс и сопротивлении	112
§ 5.	Комплексное сопротивление и кривая резонанса для случая, когда эдс и сопротивление включены параллельно контуру	113
§ 6.	Физическая картина при последовательном включении эдс и параллельном включении сопротивлений	116
§ 7.	Математическое исследование этого случая	117
§ 8.	Комплексное сопротивление и кривые резонанса для случая, когда эдс включена в контур параллельно, а сопротивления последовательно	119
§ 9.	Упрощение вычислений для практических случаев и пересчет сопротивлений из пучности тока в пучность напряжения или обратно	121
§ 10.	Колебательный контур как фильтр	123
§ 11.	Колебательный контур как волномер	124
§ 12.	Замечания о реальном контуре	125
§ 13.	Предварительные замечания об устанавливающемся процессе в контуре	126
§ 14.	Разряд самоиндукции и емкости через сопротивление	128
§ 15.	Свободные колебания в контуре без потерь	131
§ 16.	Частота и затухание при свободных колебаниях в контуре с потерями	132
§ 17.	Токи и напряжения при свободных колебаниях контура с потерями	135
§ 18.	Различные характеристики контура с потерями	136
§ 19.	Определение декремента затухания посредством кривых резонанса	137
§ 20.	Устанавливающийся процесс в контуре под действием внешней эдс	138
§ 21.	Свободные и вынужденные колебания	140
§ 22.	Устанавливающийся режим при сигналах	141

Глава IV. Связанные системы:

§ 1.	Магнитная связь	144
§ 2.	Емкостная связь	145
§ 3.	Связь через сопротивление	147
§ 4.	Связь в общей форме	148
§ 5.	Коэффициент обратной связи	149
§ 6.	Частоты связи в двухконтурной системе	150
§ 7.	Кривые резонанса в случае двух одинаковых контуров, связанных между собой	153
§ 8.	Случай, когда эдс включена параллельно конденсатору	155
§ 9.	Математический анализ основных явлений	156
§ 10.	Ток в первичном контуре	157
§ 11.	Ток во вторичном контуре	159
§ 12.	Резонанс во вторичном контуре при изменении настройки и постоянной частоте	160
§ 13.	Графическое изображение амплитуды вторичного тока	163
§ 14.	Сводка результатов, полученных в предыдущих параграфах	164
§ 15.	Распределение мощности между первичным и вторичным контуром и вносимое сопротивление	166
§ 16.	Коэффициент полезного действия	166
§ 17.	Мощность во вторичном контуре	167
§ 18.	Коэффициент полезного действия в случае достаточной связи	168
§ 19.	Параллельное включение эдс	169
§ 20.	Полный коэффициент полезного действия	170
§ 21.	Случай, когда вторичный контур не имеет конденсатора	170

§ 22.	Случай, когда первичный контур не имеет конденсатора	173
§ 23.	Случай, когда оба контура не имеют конденсаторов	174
§ 24.	Свободные колебания в системе, состоящей из двух одинаковых контуров	175
§ 25.	Случай, когда оба контура не имеют затухания	178
§ 26.	Влияние связи на затухание и частоту	180
§ 27.	Различные режимы при разряде в двухконтурной системе с последовательным сопротивлением	180
§ 28.	Ударное возбуждение двухконтурной системы	182
§ 29.	Механическая аналогия связанных систем	183

Глава V. Сложные цепи и четырехполюсники.

§ 1.	Предварительные замечания о сложных цепях	185
§ 2.	Понятие о четырехполюснике	186
§ 3.	Основные уравнения пассивного четырехполюсника	188
§ 4.	Зависимость между коэффициентами четырехполюсника	189
§ 5.	Симметричные и несимметричные четырехполюсники	190
§ 6.	Определение параметров симметричного четырехполюсника посредством измерения	191
§ 7.	Определение параметров несимметричного четырехполюсника посредством измерения	193
§ 8.	T-образные и П-образные четырехполюсники	194
§ 9.	Нагруженный четырехполюсник	195
§ 10.	Другие параметры четырехполюсника и таблицы для вычислений	197
§ 11.	Эквивалентные четырехполюсники и преобразование T-образной схемы в П-образную	203
§ 12.	Эквивалентная замена однородной линии четырехполюсником с сосредоточенными постоянными и обратная замена	205

Глава VI. Фильтрующие цепи и фильтры.

§ 1.	Общие замечания	209
§ 2.	Резонансные цепи, выделяющие полосу частот	211
§ 3.	Сглаживающие фильтры	212
§ 4.	Блокировочные конденсаторы	213
§ 5.	Запирающие настроенные контуры	214
§ 6.	Короткозамыкающие настроенные контуры	215
§ 7.	Замечание о фильтрах в собственном смысле слова и о роли их в системе передачи	216
§ 8.	Неперы и децибелы	217
§ 9.	T-образные и П-образные звенья	219
§ 10.	Исследование фильтров методом четырехполюсника	220
§ 11.	Расчет фильтра низкой частоты методом четырехполюсника	222
§ 12.	Другое выражение для определения полосы прозрачности	223
§ 13.	Простейшие фильтры типа постоянной k	224
§ 14.	Полосовой фильтр типа k	225
§ 15.	Аналогия между элементами полосового и низкочастотного фильтра	226
§ 16.	Вычисление параметров полосового фильтра посредством аналогии с низкочастотным фильтром	227
§ 17.	Режекторный фильтр	228
§ 18.	Фильтры с несколькими полосами прозрачности	229
§ 19.	Фильтры типа m	230
§ 20.	Образование производных типа m из прототипов типа постоянной k для фильтров низкой и высокой частоты	231
§ 21.	Производные сложных звеньев типа постоянной k	234
§ 22.	Преобразование сопротивлений и несимметричные четырехполюсники	234
§ 23.	Получение полосового и режекторного фильтров посредством фильтров высокой и низкой частоты	236
§ 24.	Затухание, вносимое потерями	236
§ 25.	Затухание, вносимое отражением	237

Приложения.

Приложение I.	Формулы для круговых и гиперболических функций	241
Приложение II.	Формулы для вычисления коэффициента самоиндукции	243
Приложение III.	Формулы для расчета коэффициента взаимной индукции	245
Приложение IV.	Формулы для лестничных и мостовых схем	246
Приложение V.	Таблицы четырехполюсников	252

Цена 6 р. 25 коп.

Передает 1 р.

изд. в С. Р.

ЗАКАЗЫ НАПРАВЛЯТЬ ПО СЛЕДУЮЩЕМУ АДРЕСУ:

Москва, проезд Истопрудного бульвара, 2

СВЯЗЬТЕХИЗДАТ