Б. Г. ВОЛОДИН
М. П. ГАНИН
И. Я. ДИНЕР
Л. Б. КОМАРОВ
А. А. СВЕШНИКОВ
К. Б. СТАРОБИН

# РУКОВОДСТВО ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Б. Г. ВОЛОДИН, М. П. ГАНИН, И. Я. ДИНЕР, Л. Б КОМАРОВ,
А. А. СВЕШНИКОВ, К. Б. СТАРОБИН

# РУКОВОДСТВО ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## СБОРНИК ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ, ТИПОВЫХ РЕШЕНИЙ И ЗАДАЧ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

*Под общей редакцией*
*д-ра техн. наук проф. А. А. СВЕШНИКОВА*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ СОЮЗНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
ЛЕНИНГРАД 1962

«Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей» охватывает все основные разделы теории вероятностей, встречающиеся при решении практических вопросов, связанных с автоматическим управлением, обработкой опытных данных, установлением их точности и рядом других прикладных дисциплин.

В каждом параграфе дана краткая сводка рабочих формул и схем, применение которых иллюстрируется решением типовых задач. Остальные задачи снабжены ответами, а в отдельных случаях и краткими указаниями, позволяющими читателю самостоятельно найти путь к их решению.

Руководство рассчитано на широкий круг инженеров, научных работников, учащихся высших учебных заведений и может быть использовано как в процессе первоначального изучения теории вероятностей, так и для выработки практических навыков применения вероятностных методов исследования.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель предлагаемой книги — помочь изучающим теорию вероятностей приобрести навыки применения ее результатов к решению различных прикладных вопросов. Поэтому при подборе задач и методов их решения основное внимание, естественно, было обращено не на формально математическую сторону теории вероятностей, а на ее прикладное содержание и на умение решать различные конкретные задачи.

Навыки решения прикладных задач теории вероятностей, как правило, не удается выработать при решении задач, взятых только из одной области науки или техники, например из теории автоматического управления, теории радиосвязи и т. п. Поэтому большинству задач придана различная прикладная направленность. Однако некоторые задачи сформулированы чисто абстрактным образом. Эти задачи на начальной стадии изучения служат хорошей иллюстрацией применения общих выводов теории.

В каждом параграфе книги даны решения типовых задач. Задачи, приведенные для самостоятельного упражнения, снабжены ответами, а в ряде случаев и необходимыми указаниями по их решению.

Книга рассчитана на читателя, владеющего теоретическим материалом в объеме какого-либо общего курса теории вероятностей (например, Е. С. Вентцель «Теория вероятностей», 1958; И. В. Дунин-Барковский и Н. В. Смирнов «Теория вероятностей и математическая статистика в технике», 1955) и некоторыми добавочными сведениями, имеющимися, например, в книгах В. И. Бунимовича «Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах», 1951 и А. А. Свешникова «Прикладные методы теории случайных функций», 1961.

При составлении руководства использован ряд отечественных и иностранных источников, однако большинство задач составлено авторами.

В конце книги приведены приложения, необходимые для решения некоторых задач.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A, B, C, \ldots$ — случайные события;

$U$ — достоверное событие;

$V$ — невозможное событие;

$\overline{A}$ — событие, противоположное событию $A$;

$A + B$ — сумма событий;

$A - B$ — разность событий;

$AB$ — произведение событий;

$p$, $P(A)$ — вероятность события $A$;

$q = 1 - p$ — вероятность противоположного события;

$P(A/B)$ — условная вероятность события $A$ при условии, что событие $B$ произошло;

$H_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ — полная группа гипотез;

$P_{n;\, m}$ — вероятность того, что при $n$ независимых опытах событие произойдет ровно $m$ раз;

$R_{n;\, m}$ — вероятность появления события не менее $m$ раз при $n$ независимых опытах;

$P_{n;\, n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m}$ — вероятность того, что при $n$ независимых опытах событие $A$ произойдет ровно $n_k$ раз $\left(k = 1, 2, \ldots, m;\ \sum_{k=1}^{m} n_k = n\right)$;

$\mu$ — наивероятнейшее значение числа появлений события;

$S(x, y, z, \ldots)$ — производящая функция;

$X, Y, Z, \ldots$ — случайные величины;

$x_i, y_i, z_i, \ldots$ — значения, принимаемые случайными величинами,

$F(x) = F_x(x)$ — функция распределения (интегральный закон распределения) случайной величины $X$;

$f(x) = f_x(x)$ — плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) случайной величины $X$;

$\delta(x)$ — дельта-функция;

$E_x(s)$ или $E_x(t)$ — характеристическая функция;

$\bar{x} = M[X]$ — математическое ожидание случайной величины $X$;

$\overset{\circ}{X} = X - \bar{x}$ — центрированная случайная величина,

$D[X]$ — дисперсия случайной величины $X$;

$\sigma = \sigma_x = \sqrt{D[X]}$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$;

$E$ — срединное отклонение;

$m_k$, $m_k[X]$ — начальный момент $k$-го порядка;

$\mu_k$, $\mu_k[X]$ — центральный момент $k$-го порядка;

Sk — коэффициент асимметрии (мера скошенности);

Ex — эксцесс;

$P(A/x)$ — условная вероятность события $A$, вычисленная в предположении, что случайная величина $X$ приняла значение $x$;

$f(x/A)$ — условная плотность вероятности случайной величины $X$, вычисленная в предположении, что произошло событие $A$;

$M[X/A]$ — условное математическое ожидание, вычисленное в предположении, что произошло событие $A$;

$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятности);

$\hat{\Phi}(z) = \frac{2\varrho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\varrho^2 t^2} dt$ — приведенная функция Лапласа; $\varrho = 0{,}476936\ldots$;

$F(x, y)$ — функция распределения (интегральный закон распределения) системы $(X, Y)$ двух случайных величин;

$f(x, y)$ — плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) системы $(X, Y)$ двух случайных величин;

$k_{xy}$ — момент связи между случайными величинами;

$r_{xy}$ — коэффициент корреляции между случайными величинами $X$ и $Y$;

$f(x/y)$ — условная плотность вероятности случайной величины $X$, вычисленная в предположении, что случайная величина $Y$ приняла значение $y$;

$M[X/y]$ — условное математическое ожидание случайной величины $X$, вычисленное в предположении, что случайная величина $Y$ приняла значение $y$;

$D[X/y]$ — условная дисперсия случайной величины $X$, вычисленная в предположении, что случайная величина $Y$ приняла значение $y$;

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция распределения (интегральный закон распределения) системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из $n$ случайных величин;

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из $n$ случайных величин;

$k_{ij}$ — момент связи между случайными величинами $X_i$ и $X_j$;

$r_{ij}$ — коэффициент корреляции между случайными величинами $X_i$ и $X_j$;

$\|k_{ij}\|$ — корреляционная матрица (матрица моментов связи);

$\|r_{ij}\|$ — матрица коэффициентов корреляции;

$f(x_1, x_2, \ldots, x_k/x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ — условная плотность вероятности подсистемы $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ из системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин, вычисленная в предположении, что случайные величины $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$ приняли соответственно значения $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$;

$M[X_i/x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ — условное математическое ожидание случайной величины $X_i$, вычисленное в предположении, что остальные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ из системы $n$ случайных величин приняли значения $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$;

$D[X_i/x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ — условная дисперсия случайной величины $X_i$, вычисленная в предположении, что остальные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ из системы $n$ случайных величин приняли значения $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$;

$E_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — характеристическая функция системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из $n$ случайных величин;

$H[X]$ — энтропия случайной величины $X$;

$H[X/y]$ — условная энтропия случайной величины $X$, вычисленная в предположении, что случайная величина $Y$ приняла значение $y$;

$H_y[X]$ — средняя условная энтропия случайной величины $X$ относительно $Y$;

$H[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ — энтропия системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ из $n$ случайных величин;

$H_{x_{k+1}, \ldots, x_n}[X_1, X_2, \ldots, X_k]$ — средняя условная энтропия подсистемы $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ случайных величин относительно подсистемы $(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)$;

$I_y[X]$ — количество информации о случайной величине $X$, которое может быть получено в результате наблюдения случайной величины $Y$;

ln — натуральный логарифм;

lg — десятичный логарифм;

log — логарифм при любом основании;

$\tilde{x}$ — подходящее значение математического ожидания $\bar{x}$;

$\tilde{D}[X]$ — подходящее значение дисперсии $D[X]$;

$\tilde{\sigma}$ — подходящее значение среднего квадратического отклонения $\sigma$;

$\tilde{m}_k[X]$ — подходящее значение начального момента $m_k[X]$;

$\tilde{\mu}_k[X]$ — подходящее значение центрального момента $\mu_k[X]$;

$m_i$ — число элементов статистического ряда, попадающих в $i$-й интервал (численность разряда);

$(\tilde{x} - \varepsilon, \ \tilde{x} + \varepsilon)$ — доверительный интервал для математического ожидания;

$(\tilde{\sigma} - \varepsilon, \ \tilde{\sigma} + \varepsilon)$ — доверительный интервал для среднего квадратического отклонения (симметричный);

$(\gamma_1\tilde{\sigma}, \ \gamma_2\tilde{\sigma})$ — доверительный интервал для среднего квадратического отклонения (несимметричный);

$\alpha$ — доверительная вероятность;

$S_n(t)$ — плотность вероятности для закона распределения Стьюдента;

$P_k(\chi)$ — плотность вероятности для закона распределения «$\chi$»;

$X(t), \ Y(t), \ Z(t), \ldots$ — случайные функции;

$\bar{x}(t) = M[X(t)]$ — математическое ожидание случайной функции $X(t)$;

$K_x(t_1, t_2)$ — корреляционная функция случайной функции $X(t)$;

$K_x(\tau) = K_x(t_2 - t_1)$ — корреляционная функция стационарной случайной функции $X(t)$;

$D[X(t)] = \sigma_x^2(t) = K_x(t, \ t)$ — дисперсия случайной функции $X(t)$;

$k(t_1, \ t_2)$ — нормированная корреляционная функция;

$R_{xy}(t_1, \ t_2)$ — корреляционная функция связи случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

$R_{xy}(t_2 - t_1)$ — корреляционная функция связи стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$;

$f(x_1, \ x_2, \ldots / t_1, \ t_2, \ldots)$ — плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) ординат случайной функции в моменты $t_1, \ t_2, \ldots$;

$\mathrm{L}$ — линейный оператор;

$\mathrm{L}_0$ — линейный однородный оператор;

$f(x, \ v/t)$ — дифференциальный закон распределения ординаты случайной функции $X(t)$ и ее производной $V(t) = \dot{X}(t)$, вычисленный для момента времени $t$;

$\bar{n}_a$ — среднее число выбросов случайной функции в единицу времени;

$\bar{N}_a$ — среднее число выбросов случайной функции за время $T$;

$\bar{\tau}_a$ — средняя длительность выброса случайной функции;

$Q$ — вероятность непоявления ни одного выброса за время $T$;

$S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайной функции $X(t)$;

$S_{\dot{x}}(\omega)$ — спектральная плотность производной $\dot{X}(t)$ от случайной функции $X(t)$;

$R^*_{yx}$, $S^*_{yx}$ — комплексно-сопряженные значения функций $R_{yx}$ и $S_{yx}$;

$p(t, t_1)$ — весовая функция линейного дифференциального уравнения;

$U(t)$ — полезный сигнал;

$V(t)$ — помеха;

$\varepsilon(t)$ — ошибка системы;

$l(t, t_1)$ — оптимальная весовая функция динамической системы,

$J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от вещественного аргумента;

$I_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента;

$\mathrm{K}(k^2)$, $\mathrm{E}(k^2)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода;

$\tilde{x}$ — подходящее значение математического ожидания стационарной случайной функции $X(t)$;

$\tilde{K}_x(\tau)$ — подходящее значение корреляционной функции стационарной случайной функции $X(t)$

## ГЛАВА I

# СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

## § 1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ

### Основные формулы

Случайные события обозначаются латинскими буквами $A$, $B$, $C$, ..., $U$, $V$, причем $U$ — достоверное, а $V$ — невозможное события. Равенство $A = B$ означает, что появление одного из этих событий влечет за собой появление другого. Произведение событий $A$ и $B$ есть событие $C = AB$, состоящее в наступлении обоих событий $A$ и $B$. Сумма событий $A$ и $B$ есть событие $C = A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий $A$ и $B$. Разность событий $A$ и $B$ есть событие $C = A - B$, состоящее в том, что $A$ происходит, а $B$ не происходит. Противоположное событие обозначается той же буквой, но с чертой сверху. Например, $A$ и $\bar{A}$ — противоположные события. События $A$ и $B$ несовместны, если $AB = V$. События $A_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) образуют полную группу, если в результате опыта обязательно должно произойти хотя бы одно из них; при этом $\sum_{k=1}^{n} A_k = U$. События равновозможны, если ни одно из них не является объективно возможным больше, чем любое другое.

### Решение типовых задач

Пример 1.1. При каких событиях $A$, $B$ и $C$ возможно равенство $A + B + C = A$?

*Решение.* Сумма $A + B + C$ представляет собой событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий $A$, $B$, $C$. Если $A + B + C = A$, то событие $B + C$ не изменяет события $A$, а потому $B + C$ является частным случаем события $A$. Например, если событие $A$ — попадание в область $S_A$, а $B + C$ — в $S_{B+C}$, то область $S_{B+C}$ расположена в $S_A$.

Аналогично решаются задачи 1.1—1.4 и 1.9.

Пример 1.2. Из таблицы случайных чисел наугад выписываются два числа. Событие $A$ — одно из этих чисел простое, событие $B$ — одно из выписанных чисел четное. Что означают события $AB$ и $A + B$?

*Решение.* Событие $AB$ означает наступление событий $A$ и $B$, т. е. из двух выписанных чисел одно простое, а другое четное. Событие $A + B$ означает наступление хотя бы одного из событий $A$ или $B$, т. е. из двух выписанных чисел одно простое или одно четное или может быть одновременно одно число простое, другое — четное.

Аналогично решаются задачи 1. 5—1. 8.

Пример 1. 3. Доказать, что $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$ и $\overline{\overline{C} + \overline{D}} = CD$.

*Доказательство.* Если положить $C = \overline{A}$ и $D = \overline{B}$, то второе равенство записывается в виде $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$, т. е. $A + B = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$. Поэтому достаточно доказать только справедливость первого равенства.

Пусть событие $A$ — попадание в область $S_A$, $B$ — в $S_B$. Тогда событие $\overline{A}$ — попадание в область вне $S_A$, а $\overline{B}$ — в область вне $S_B$. Произведение $\overline{A}\,\overline{B}$ соответствует попаданию в общую часть областей, расположенных вне $S_A$ и вне $S_B$. Противоположное событие $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$ означает попадание в $S_A$ или $S_B$, а это есть $A + B$. Поэтому $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$.

*Другое доказательство.* Событие $\overline{A}\,\overline{B}$ — это непоявление событий $A$ и $B$. Противоположное событие $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$ означает, что хотя бы одно из событий $A$ или $B$ имеет место, а это сумма событий $A + B$. Поэтому $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} = A + B$.

Аналогично решается задача 1. 10.

Доказанные в примере 1. 3 равенства используются при решении задач 1. 11—1. 15.

Пример 1. 4. Определить случайное событие $X$, исходя из равенства $AX = AB$.

*Решение.* Пусть событие $A$ — попадание в область $S_A$, $B$ — в $S_B$. Тогда $AB$ соответствует попаданию в общую часть $S_{AB}$ областей $S_A$ и $S_B$. Условию $AX = AB$ удовлетворяет область $S_X$, которая содержит $S_{AB}$ и любую область, расположенную вне $S_A$. Поэтому $X = AB + \overline{A}D$, где $D$ — произвольное событие.

Аналогично решается задача 1. 17.

## Задачи для упражнений

1. 1. Что означают события $A + A$ и $AA$?

1. 2. Когда возможно равенство $ABC = A$?

1. 3. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $r_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 10$), причем $r_1 < r_2 < \cdots < r_{10}$. Событие $A_k$ — попадание в круг радиуса $r_k$ ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Что означают события

$$B = \sum_{k=1}^{6} A_k, \quad C = \prod_{k=5}^{10} A_k?$$

1. 4. В квадрате $D$ расположены две области $D_1$ и $D_2$, площади которых $S_1$ и $S_2$. В $D$ брошена точка, попадание которой в любую часть квадрата равновозможно. Событие $A_k$ — попадание точки в область $D_k$ ($k = 1, 2$). Равновозможны ли события $A_1$ и $A_2$?

1. 5. События: $A$ — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, $B$ — все приборы доброкачественные. Что означают события: а) $A + B$; б) $AB$?

1. 6. События $A$, $B$ и $C$ означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере три тома. События $A_s$ и $B_k$ означают соответственно, что из первого собрания сочинений взяты $s$, а из второго $k$ томов. Что означают события: а) $A + B + C$; б) $ABC$; в) $A_1 + B_3$; г) $A_2B_2$; д) $(A_1B_3 + B_1A_3)\,C$?

1. 7. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие $A$ — выбранное число делится на 5; событие $B$ — данное число оканчивается нулем. Что означает событие $A - B$?

1. 8. Событие $A$ — хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие $B$ — бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположные события $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

1. 9. Упростить выражение $A = (B + C)(B + \bar{C})(\bar{B} + C)$.

1. 10. Когда возможны равенства: а) $A + B = \bar{A}$; б) $AB = \bar{A}$; в) $A + B = AB$?

1. 11. Найти случайное событие $X$, когда

$$\overline{X + A} + \overline{X + \bar{A}} = B.$$

1. 12. Доказать, что $\bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = \overline{AB}$.

1. 13. Доказать эквивалентность и справедливость следующих двух равенств:

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \bar{A}_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} A_k}.$$

1. 14. Совместны ли события $A$ и $\overline{A + B + C}$?

1. 15. Доказать, что события $A$, $\bar{A}B$ и $\overline{A + B}$ образуют полную группу.

1. 16. Два шахматиста играют одну партию. Событие $A$ — выиграет первый игрок, $B$ — выиграет второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная группа событий?

1. 17. Определить случайное событие $X$, если: а) $A + X = A + B$; б) $AB + X = (A + C)(B + C)$.

## § 2. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Основные формулы

Непосредственный подсчет вероятностей может быть произведен в том случае, когда результат опыта можно представить в виде полной группы событий, которые попарно несовместны и равновозможны. При этом вероятность события есть отношение числа $m$ благоприятствующих этому событию случаев к общему числу $n$ всех возможных случаев, т. е. $p = \frac{m}{n}$. При нахождении значений $n$ и $m$ часто целесообразно пользоваться теорией сочетаний. Пусть, например, имеется $N = N_1 + N_2$ тщательно перемешанных одинаковых шаров белого ($N_1$) и черного ($N_2$) цвета, из которых наудачу берутся $M$ шаров. Требуется вычислить вероятность того, что в числе извлеченных $M$ шаров будет $M_1$ белых и $M_2 = M - M_1$ черных. Число равновозможных случаев при этом будет $n = C_N^M = \frac{N!}{M!\,(N-M)!}$, а благоприятствующих $m = C_{N_1}^{M_1} C_{N_2}^{M_2}$, так как одновременно с определенной комбинацией $M_1$ белых шаров $M_2$ черных шаров может быть извлечено $C_{N_2}^{M_2}$ способами, а таких комбинаций $C_{N_1}^{M_1}$.

### Решение типовых задач

П р и м е р 2. 1. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные стороны.

*Решение.* Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер, на каждом из которых по 8 кубиков с двумя окрашенными сторонами. Поэтому $m = 12 \cdot 8 = 96$, $p = \frac{m}{n} = 0{,}096$.

Аналогично решаются задачи 2. 1—2. 8.

Пример 2. 2. Определить вероятность того, что последние две цифры у куба наудачу взятого целого числа $N$ единицы.

*Решение.* Представим $N$ в виде $N = a + 10b + \ldots$, где $a, b, \ldots$ — произвольные числа, могущие принимать любые значения от 0 до 9 включительно. Тогда $N^3 = a^3 + 30a^2b + \cdots$ Отсюда видно, что на две последние цифры у $N^3$ влияют только значения $a$ и $b$. Поэтому число возможных значений $n = 100$. Так как последняя цифра у $N^3$ равна единице, то имеется одно благоприятствующее значение $a = 1$. Кроме того, должна быть единицей последняя цифра у $\frac{N^3 - 1}{10}$, т. е. оканчивается на единицу произведение $3b$. Это будет только при $b = 7$. Таким образом, благоприятствующее значение единственное ($a = 1$, $b = 7$), поэтому $p = 0{,}01$.

Аналогично решаются задачи 2. 9—2. 12.

Пример 2. 3. В партии из $n$ изделий бракованных $k$ штук. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки $m$ изделий ровно $l$ окажутся бракованными.

*Решение.* Число возможных способов взять $m$ изделий из $n$ равно $C_n^m$. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа $k$ бракованных изделий взято $l$ штук (это можно сделать $C_k^l$ способами), а остальные $m - l$ изделий не бракованные, т. е. они взяты из общего числа $n - k$ (количество способов равно $C_{n-k}^{m-l}$). Поэтому число благоприятствующих случаев равно $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$. Искомая вероятность будет $p = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$.

Аналогично решаются задачи 2. 13—2. 24.

Пример 2. 4. Из полного набора костей домино наудачу берутся пять костей. Найти вероятность того, что среди них будет хотя бы одна с шестеркой.

*Решение.* Удобнее находить вероятность $q$ противоположного события. Тогда $p = 1 - q$. Вероятность того, что все взятые пять костей не содержат шестерки, равна $q = \frac{C_7^0 C_{21}^5}{C_{28}^5}$. Поэтому $p = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} = 0{,}793$. Аналогично переходом к противоположному событию решаются задачи 2. 25 и 2. 26.

## Задачи для упражнений

2. 1. Лотерея выпущена на общую сумму $n$ рублей. Цена одного билета $r$ рублей. Ценные выигрыши падают на $m$ билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

2. 2. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

2. 3. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

2. 4. Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск

занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка при установлении произвольной комбинации букв.

2. 5. Черный и белый короли находятся соответственно на первой и третьей горизонталях шахматной доски. На доску ставится белый ферзь таким образом, чтобы в образовавшейся позиции фиксировался мат черным, если такая позиция при данных расположениях королей возможна. Определить вероятность такой матовой позиции, если короли могут стоять на любых полях указанных горизонталей.

2. 6. Из двух взятых наудачу костей домино одна открывается. Определить вероятность того, что вторая кость является дублем, если первая кость — не дубль.

2. 7. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, которая оказывается 20 коп. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.

2. 8. Из партии деталей, среди которых $n$ доброкачественных и $m$ бракованных, для контроля наудачу взято $s$ штук. При контроле оказалось, что первые $k$ из $s$ деталей доброкачественны. Определить вероятность того, что следующая деталь будет доброкачественной.

2. 9. Определить вероятность того, что у выбранного наудачу целого числа $N$ оканчивается единицей: а) квадрат; б) четвертая степень; в) результат умножения на произвольное целое число.

2. 10. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от нуля до девяти. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек: а) двузначное число делится на 18; б) трехзначное число делится на 36.

2. 11. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

2. 12. Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными вместе.

2. 13. Из четырех одинаковых карточек, на которых написаны соответственно буквы *А*, *Б*, *В* и *Г*, наугад взяты две. Определить вероятность того, что буквы на этих карточках будут соседними по алфавиту.

2. 14. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

2. 15. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

2. 16. Из десяти билетов выигрышными являются два. Одновременно приобретаются любые пять билетов. Определить вероятность того, что среди них: а) один выигрышный; б) оба выигрышные; в) хотя бы один выигрышный билет.

2. 17. Обобщение задачи 2. 16. Имеются $n + m$ билетов, из которых выигрышных $n$ штук. Одновременно приобретаются $k$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $s$ выигрышных.

2. 18. Для перевозки $n + m$ изделий двух типов использовался железнодорожный состав. Получена информация о том, что в пути следования повреждены два изделия. Определить вероятность того, что повреждены изделия различных типов.

2. 19. В генуэзской лотерее разыгрываются девяносто номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить ту или иную сумму на любой из девяноста номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

2. 20. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиты на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

2. 21. В зале, насчитывающем $n + k$ мест, случайным образом занимают места $n$ человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные $m \leqslant n$ мест.

2. 22. Из колоды карт (52 шт.) наугад извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

2. 23. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама — три, король — четыре, туз — одиннадцать, а остальные карты соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.

2. 24. Из ящика, содержащего $n$ монет, взята по крайней мере одна монета. Определить вероятность того, что взято четное число монет, если равновозможно извлечение любого числа монет из указанной совокупности.

2. 25. Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наугад берутся три билета. Определить вероятность того, что: а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость; б) все три билета стоят семь рублей.

2. 26. Кассир метро перед открытием кассы имел запас мелочи для сдачи на $2m$ пятаков. Какова вероятность того, что после продажи $2n$ билетов по 5 коп. у кассира не будет мелочи для сдачи, если каждый пассажир покупает один билет, причем одинаково возможно, что плата будет получена пятаком или гривенником?

## § 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

### Основные формулы

Геометрическое определение вероятности используется для вычисления вероятности появления события в том случае, когда результат испытания определяется случайным положением точек в некоторой области, причем любые положения точек в этой области равновозможны. Если размер всей области равен $S$, а размер части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть $S_Б$, то вероятность события равна

$$p = \frac{S_Б}{S}.$$

Область $S$ может иметь любое число измерений, поэтому $S_Б$ и $S$ могут представлять собой длины отрезков, площади, объемы и т. д.

При решении задач на геометрические вероятности особое внимание следует обращать на то, какие параметры принимают равновозможные значения. Нечеткая формулировка задачи может привести к многозначности ответов, а при практическом решении задачи — к неверному результату. Например, вероятность того, что длина наудачу проведенной хорды превосходит сторону вписанного в круг равностороннего треугольника, равна $^1/_2$, $^1/_3$ или $^1/_4$ в зависимости от того, что понимать под словами «наудачу проведенной»: равновозможны положения точек пересечения хорды с перпендикулярным ей диаметром, равновозможны значения углов, составляемых хордами с заданным направлением, или равновозможны положения середин хорд в круге.

## Решение типовых задач

П р и м е р 3. 1. На горизонтальной плоскости вдоль прямой $AB$ через интервал $l$ между центрами расположены вертикально одинаковые цилиндры с радиусом основания $r$. Под углом $q$ к прямой бросается шар радиуса $R$. Определить вероятность столкновения шара с цилиндром, если пересечение линии движения шара с прямой $AB$ равновозможно в любой точке.

*Решение.* Пусть $x$ — расстояние от центра шара до ближайшей линии, проходящей через центр цилиндра параллельно линии перемещения шара. Возможные значения $x$ определяются неравенствами (рис. 1)

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\sin q.$$

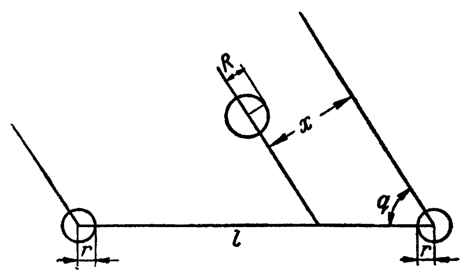


Рис. 1.

Столкновение шара с цилиндром произойдет в том случае, если

$$0 \leqslant x \leqslant (R+r).$$

Искомая вероятность равна отношению длин отрезков, на которых находятся благоприятствующие и возможные значения $x$. Поэтому, если

$$R+r \leqslant \frac{l}{2}\sin q, \qquad p = \frac{2(R+r)}{l\sin q}.$$

При

$$R+r \geqslant \frac{l}{2}\sin q \quad p = 1.$$

Аналогично решаются задачи 3. 1—3. 5 и 3. 26.

П р и м е р 3. 2. На одной дорожке магнитофонной ленты длиной 200 *м* записано сообщение на интервале 20 *м*, на второй независимо от первого записано аналогичное сообщение. Определить вероятность того, что в интервале от 60 до 85 *м* будет непрерывная запись, если начала обоих сообщений равновозможны в любой точке от 0 до 180 *м*.

*Решение.* Пусть $x$ и $y$ — координаты начала записей, причем $x \geqslant y$. Так как $0 \leqslant x \leqslant 180$, $0 \leqslant y \leqslant 180$ и $x \geqslant y$, то областью возможных значений $x$ и $y$ является треугольник с катетами по 180 *м*. Площадь этого треугольника $S = \frac{1}{2}\cdot 180^2$ *м*$^2$. Найдем область значений $x$ и $y$, благоприятствующих указанному событию. Для того, чтобы получилась непрерывная запись, необходимо выполнение неравенства $x - y \leqslant 20$ *м*. Чтобы интервал записи был не менее 25 *м*, должно быть $x - y \geqslant 5$ *м*. Кроме того, для получения непрерывной записи на интервале от 60 до 85 *м* должно быть

$$45 \text{ м} \leqslant y \leqslant 60 \text{ м};$$

$$65 \text{ м} \leqslant x \leqslant 80 \text{ м}.$$

Проведя границы указанных областей, получим, что благоприятствующие значения $x$ и $y$ заключены в треугольнике, площадь которого $S_Б = \frac{1}{2} \cdot 15^2$ $м^2$ (рис. 2). Искомая вероятность равна отношению площади области $S_Б$, попадание в которую благоприятствует данному событию, к площади области $S$ возможных значений $x$ и $y$, т. е.

$$p = \left(\frac{15}{180}\right)^2 = \frac{1}{144}.$$

Аналогично решаются задачи 3. 6—3. 15.

Пример 3. 3. В любые моменты времени промежутка $T$ равновозможны поступления в приемник двух сигналов. Приемник будет забит, если разность по времени между этими сигналами будет меньше $\tau$. Определить вероятность того, что приемник будет забит.

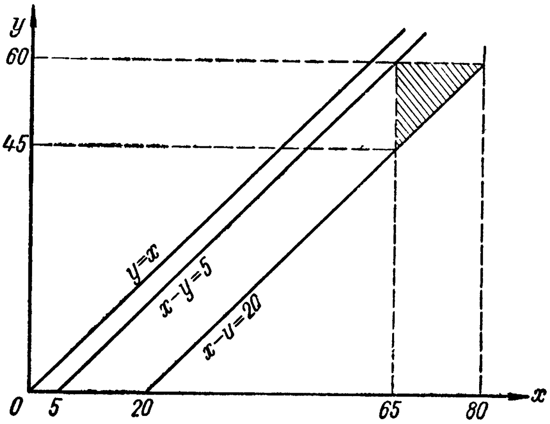


Рис. 2.

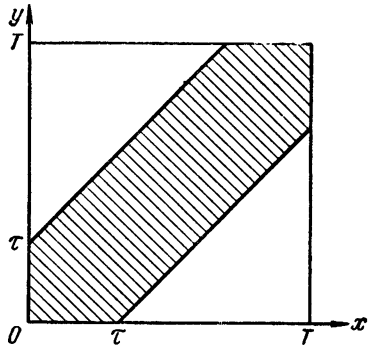


Рис. 3.

*Решение*. Пусть $x$ и $y$ — моменты поступления сигналов в приемник.

Областью возможных значений $x$, $y$ является квадрат площадью $T^2$ (рис. 3). Приемник будет забит, если $|x - y| \leqslant \tau$. Данная область лежит между прямыми $x - y = \tau$ и $x - y = -\tau$. Ее площадь

$$S_Б = S - (T - \tau)^2,$$

поэтому

$$p = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

Аналогично решаются задачи 3. 16—3. 20.

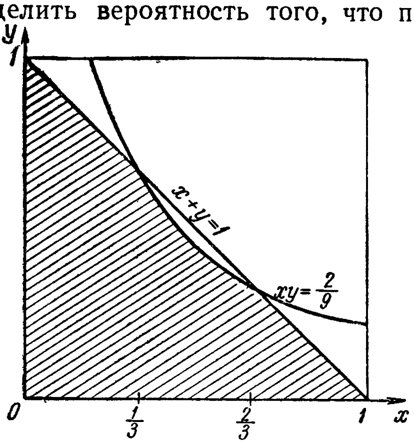


Рис. 4.

Пример 3. 4. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше единицы, а их произведение не больше $\frac{2}{9}$?

*Решение*. Пусть $x$ и $y$ — взятые правильные дроби. Их возможные значения $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, что на плоскости соответствует квадрату с площадью $S = 1$. Благоприятствующие значения: $x + y \leqslant 1$ и $xy \leqslant \frac{2}{9}$. Граница $x + y = 1$ делит квадрат пополам, причем область $x + y \leqslant 1$ представляет собой нижний треугольник (рис. 4).

Вторая граница $xy = \frac{2}{9}$ является гиперболой. Заменяя $y$ на $1 - x$, из $x(1 - x) = \frac{2}{9}$ находим абсциссы точек пересечения этих границ: $x = 1/3$ и $x = 2/3$. Таким образом, второе условие также уменьшает благоприятствующую площадь, величина которой

$$S_Б = \frac{1}{3} + \int_{1/3}^{2/3} y\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2.$$

Искомая вероятность $p = \frac{S_Б}{S} = 0{,}487$.

Аналогично решаются задачи 3. 21—3. 25.

## Задачи для упражнений

3. 1. В некоторой точке $C$ телефонной линии $AB$ длиной $L$ произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка $C$ удалена от точки $A$ на расстояние не меньшее $l$.

3. 2. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 *см*. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса 2,5 *см* не будет пересечен ни одной линией.

3. 3. В круге радиуса $R$ проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более $R$, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

3. 4. Найти вероятность того, что стрела, попавшая в цилиндрическую мишень, рикошетирует, если траектория полета стрелы перпендикулярна оси цилиндра, а смещение плоскости движения стрелы равновозможно от этой оси в любую сторону на величину, не превосходящую радиус основания цилиндра. Стрела рикошетирует в том случае, когда угол между стрелой и нормалью к поверхности цилиндра больше 45°.

3. 5. Перед вращающимся с постоянной скоростью диском поставлен отрезок длиной $2h$, расположенный в плоскости диска. Перпендикуляр, восстановленный в середине отрезка, проходит через центр диска. С окружности диска по касательной в произвольный момент времени слетает частица. Определить вероятность попадания этой частицы на отрезок, если расстояние между отрезком и центром диска равно $l$.

3. 6. Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса $r$. Расстояния между осями прутьев равны соответственно $a$ и $b$. Определить вероятность попадания шариком диаметра $d$ в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна плоскости решетки.

3. 7. В средней части эллипса с полуосями $a = 100$ *см* и $b = 10$ *см* симметрично расположен прямоугольник со сторонами 10 и 3 *см*, большая сторона которого параллельна $a$. Кроме того, проведены непересекающиеся с эллипсом, прямоугольником и между собой четыре окружности, диаметр каждой из которых равен 4,3 *см*. Определить вероятность того, что:

а) случайная точка, положение которой равновозможно внутри эллипса, окажется внутри одного из кругов;

б) окружность радиуса 5 *см*, построенная вокруг этой точки, как около центра, пересечется хотя бы с одной стороной прямоугольника.

3. 8. Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно $kr$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Круг радиуса $r$ и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ наудачу выбрана точка. Определить вероятность попадания этой точки:

а) в круг радиуса $2r$;

б) в заштрихованную область.

3. 9. Лодка перевозит груз с одного берега пролива на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 мин. до пересечения судном курса лодки или не позднее, чем через 20 мин. после пересечения судном курса лодки? Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны.

3. 10. На отрезке длиной $l$ наудачу выбраны две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше $kl$, где $0 < k < 1$?

3. 11. На отрезке $AB$ длиной $l$ наудачу поставлены две точки $L$ и $M$. Найти вероятность того, что точка $L$ будет ближе к точке $M$, чем к точке $A$.

3. 12. Стержень длиной $l$ наудачу разломан на три части. Определить вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

3. 13. На окружности радиуса $R$ наудачу поставлены три точки $A$, $B$, $C$. Какова вероятность, что треугольник $ABC$ остроугольный?

3. 14. Какова вероятность, что из трех взятых наудачу отрезков длиной не более $l$ можно построить треугольник?

3. 15. На отрезке $AB$ длиной $l$ наудачу поставлены две точки $M$ и $N$. Определить вероятность того, что длины всех трех получившихся отрезков не превосходят заданной величины $a \left(l \geqslant a \geqslant \frac{l}{3}\right)$.

3. 16. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа.

3. 17. Два лица имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент промежутка времени $T$. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше $t$.

3. 18. Два лица условились встретиться в определенном месте между 7 час. и 7 ч. 20 мин. Пришедший первым ожидает второго в течение десяти минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи данных лиц, если приход каждого из них независим и равновозможен в любой момент указанного промежутка времени.

3. 19. Два судна в тумане идут одно вдоль, а другое поперек пролива шириной $L$. Скорости движения судов соответственно равны $v_1$ и $v_2$. Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

3. 20. Стержень длиной $l = 200$ *мм* наудачу ломается на части. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть стержня между точками излома будет не более 10 *мм*, если точек излома: а) две, б) три; причем излом стержня равновозможен в любом месте.

3. 21. На поверхности сферы радиуса $R$ произвольно выбираются две точки. Какова вероятность, что проходящая через них дуга большого круга стягивает угол, меньший $\alpha$ ($\alpha < \pi$)?

3. 22. Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между $60°$ северной и $60°$ южной широты. Считая падение спутника в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадет выше $30°$ северной широты.

3. 23. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $L$. Найти вероятность того, что наудачу брошенная игла длиной $l$ ($l < L$) пересечет какую-нибудь прямую (задача Бюффона).

3. 24. Определить вероятность того, что корни: а) квадратного $x^2 + 2ax + b = 0$; б) кубического $x^3 + 3ax + 2b = 0$ уравнений вещественны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant m$. Какова вероятность, что при указанных условиях корни квадратного уравнения будут положительными?

3. 25. В прямоугольник со сторонами $a = 40$ *см* и $b = 30$ *см* наудачу брошена точка, которая принимается за центр круга радиуса 15 *см*. Определить вероятность того, что малые стороны прямоугольника можно соединить непересекающейся с окружностью полосой произвольной формы, в любом месте которой умещается круг радиуса 5 *см*. Рассчитать эту вероятность для случая, когда в прямоугольник независимо одна от другой брошены две точки, которые принимаются за центры кругов радиуса 15 *см*, если полоса не должна пересекать ни одной окружности.

3. 26. На плоскости независимо друг от друга прямолинейно перемещаются точка $A$ и центр $B$ круга радиуса $R$. Скорости этих точек постоянны и равны соответственно $u$ и $v$. В фиксированный момент времени расстояние $AB = r$ ($r > R$), а угол между линией $AB$ и вектором $\bar{v}$ равен $\beta$. Считая все направления движения точки $A$ равновозможными, определить вероятность попадания точки $A$ в круг.

## § 4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Основные формулы

Условной вероятностью $P(A/B)$ события $A$ называется вероятность появления этого события, вычисленная в предположении, что имело место событие $B$. События $A$ и $B$ независимы, если $P(A/B) = P(A)$. Вероятность произведения двух событий определяется по формуле

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B).$$

Для вероятности произведения $n$ событий имеет место формула

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\ldots P\left(A_n/\prod_{k=1}^{n-1} A_k\right).$$

Если события независимые, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей отдельных событий, т. е.

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

### Решение типовых задач

Пример 4. 1. При увеличении напряжения в два раза соответственно с вероятностями 0,3, 0,4 и 0,6 может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя одного из трех последовательно соединенных элементов. Определить вероятность того, что при этом не будет разрыва цепи. Как изменится искомая вероятность, если не будет первого элемента?

*Решение.* Искомая вероятность равна вероятности того, что не выйдут из строя все три элемента. Пусть событие $A_k$ означает, что $k$-й элемент не выйдет из строя ($k = 1, 2, 3$). Тогда $p = P(A_1A_2A_3)$. Так как события независимы, то

$$p = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = 0{,}7\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}168.$$

Если не будет первого элемента, то

$$p = P(A_2A_3) = 0{,}24.$$

Аналогично решаются задачи 4. 1—4. 11.

Пример 4. 2. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции брак, а 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

*Решение.* Пусть событие $A$ состоит в том, что выбранное изделие небракованное, а событие $B$ — выбранное изделие первосортное.

Дано: $p(A) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$, $P(B/A) = 0{,}75$.

Искомая вероятность $p = P(AB) = 0{,}96\cdot 0{,}75 = 0{,}72$.

Аналогично решаются задачи 4. 12—4. 22.

Пример 4. 3. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5% неисправных деталей?

*Решение.* Найдем вероятность $q$ противоположного события $A$, которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Данное событие является произведением пяти событий $A = A_1A_2A_3A_4A_5$, где $A_k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) означает, что $k$-я проверенная деталь доброкачественная.

Вероятность события $A_1$ $P(A_1) = \frac{95}{100}$, так как всего деталей 100, а исправных 95. После осуществления события $A_1$ деталей остается 99, среди которых исправных 94, поэтому $P(A_2/A_1) = \frac{94}{99}$. Аналогично $P(A_3/A_1A_2) = \frac{93}{98}$, $P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{92}{97}$ и $P(A_5/A_1A_2A_3A_4) = \frac{91}{96}$.

По общей формуле находим

$$q = \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96} = 0{,}77.$$

Искомая вероятность $p = 1 - q = 0{,}23$.

Аналогично решаются задачи 4.23—4. 39.

## Задачи для упражнений

4. 1. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность попадания в мишень.

4. 2. Вероятность выхода из строя $k$-го блока вычислительной машины за время $T$ равна $p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Определить вероятность выхода из строя за указанный промежуток времени хотя бы одного из $n$ блоков этой машины, если работа всех блоков взаимно независима.

4. 3. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

4. 4. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором — три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

4. 5. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента $K$ или двух элементов $K_1$ и $K_2$. Вероятность выхода из строя элемента $K$ равна 0,3, а для каждого из элементов $K_1$ и $K_2$ эти вероятности равны 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

4. 6. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа $N$. Отыскание этой лампы производится путем поочередной замены каждой лампы новой. Определить вероятность того, что придется проверять $n$ ламп, если вероятность выхода из строя каждой лампы равна $p$.

4. 7. К автобусной остановке каждые четыре минуты подходит автобус линии *а* и каждые шесть минут автобус линии *б*. Предполагая моменты прихода на остановку автобусов обеих линий независимыми, определить вероятность того, что: а) первый подошедший автобус окажется автобусом линии *а*; б) автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут.

4. 8. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

4. 9. Вероятность того, что в результате четырех независимых опытов событие $A$ произойдет хотя бы один раз, равна половине. Определить вероятность появления события в каждом опыте, если эта вероятность от опыта к опыту не изменяется.

4. 10. В круг радиуса $R$ вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наугад поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

4. 11. Определить вероятность того, что написанная наудачу простая дробь несократима (задача Чебышева).

4. 12. События $A$ и $B$ несовместны. Зависимы ли данные события?

4. 13. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна $p_1$. При повышенном напряжении вероятность аварии прибора-потребителя электрического тока равна $p_2$. Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

4. 14. На участке $AB$ для мотоциклиста-гонщика имеются 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта $B$ до конечного пункта $C$ мотоциклист проедет без остановки, равна 0,7. Определить вероятность того, что на участке $AC$ не будет ни одной остановки.

4. 15. Три игрока играют на следующих условиях. Сначала против первого последовательно ходят второй и третий игроки. При этом первый игрок не выигрывает, а вероятности выигрыша для второго и третьего игроков одинаковы и равны 0,3. Если первый игрок не проигрывает, то он делает по одному ходу против второго и третьего игроков и выигрывает у каждого из них с вероятностью 0,4. После этого игра заканчивается. Определить вероятность того, что в результате такой игры выиграет первый игрок.

4. 16. Вероятность попаданий в первую мишень для данного стрелка равна $^2/_3$. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

4. 17. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит три технологические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1, 0,2 и 0,3. Во втором случае имеются две операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае вероятность получения продукции первого сорта для небракованной детали равна 0,9, а во втором — 0,8.

4. 18. Вероятности того, что любая деталь будет бракованной до и в результате термической обработки, равны соответственно $p_1$ и $p_2$, а вероятности непригодности детали в этих случаях равны $p_3$ и $p_4$. Определить: а) какое количество деталей необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что хотя бы одна из них будет сдана доброкачественной в термическую обработку, б) вероятность того, что хотя бы одна из трех деталей будет непригодной после термической обработки.

4. 19. В прямоугольнике размером $10 \times 20$ *м*$^2$ расположены пять кругов диаметром каждый по 12 *см*. Три из них размещены в области $S$ площадью 8 *м*$^2$, а два — вне этой области. Пусть событие $A$ означает попадание наудачу брошенной в прямоугольник точки в область $S$, а событие $B$ — попадание этой точки в любой из пяти кругов. Являются ли данные события зависимыми?

4. 20. Показать, что если условная вероятность $P(A/B)$ больше безусловной вероятности $P(A)$, то и условная вероятность $P(B/A)$ больше безусловной вероятности $P(B)$.

4. 21. Мишень состоит из двух концентрических кругов с радиусами $kr$ и $nr$, где $k < n$. Считая равновозможным попадание в любую часть круга радиуса $nr$, определить вероятность того, что при двух выстрелах будет одно попадание в круг радиуса $kr$.

4. 22. Найти вероятность того, что дальность до берегового ориентира на судне будет измерена с ошибкой отрицательного знака, если используемый для измерений дальномер имеет систематическую ошибку, равную плюс одному срединному отклонению. Вероятность того, что измерение не может быть произведено вследствие неблагоприятных метеорологических условий, равна 0,02.

4. 23. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной.

Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

4. 24. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места. Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

4. 25. В лотерее $n$ билетов, из которых $m$ выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея $k$ билетов?

4. 26. В лотерее из сорока тысяч билетов ценные выигрыши падают на три билета. Определить: а) вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов; б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения ценного выигрыша была не менее 0,5.

4. 27. По займу ежегодно разыгрываются шесть основных и один дополнительный тираж, который происходит после основного пятого. Из 100 000 серий в каждом основном тираже выигрывают 170 серий, а в каждом дополнительном — 230 серий. Найти вероятность выигрыша на одну облигацию за первые десять лет: а) в каком-либо тираже; б) в дополнительном тираже; в) в основном тираже.

4. 28. Имеются четыре бракованных изделия: на одном повреждена окраска, на другом вмятина, на третьем зазубрины, а на четвертом одновременно все три указанных дефекта. Пусть $A$, $B$, $C$ — события, заключающиеся в том, что у первого наудачу взятого изделия повреждена окраска ($A$), имеется вмятина ($B$) или зазубрины ($C$). Являются ли данные события независимыми попарно и в совокупности?

4. 29. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — совокупность попарно независимых событий. Всегда ли данные события будут независимыми в совокупности, т. е. всегда ли условная вероятность появления любого события, вычисленная в предположении, что какие-либо другие события из этой совокупности произошли, равна безусловной вероятности этого события?

4. 30. Квадрат горизонтальными линиями разделен на $n$ одинаковых полос. В каждую из них бросается точка, положение которой равновозможно в любом месте полосы. Затем аналогично предыдущему проводят $n$ вертикальных линий. Определить вероятность того, что в каждой вертикальной полосе будет только по одной точке.

4. 31. Из $n$ изделий, среди которых $r$ бракованных, наудачу берутся $r$ изделий. Какова вероятность того, что все они бракованные?

4. 32. В обществе из $2n$ человек одинаковое число мужчин и женщин. Места за столом занимаются наудачу. Определить вероятность того, что два лица одного пола не займут места рядом.

4. 33. Общество, состоящее из пяти мужчин и десяти женщин, наудачу разбивается на пять групп по три человека. Найти вероятность того, что в каждой группе будет по одному мужчине.

4. 34. В урне имеются $n + m$ одинаковых шаров, из которых $n$ белого, а $m$ черного цвета, причем $m \geqslant n$. Производятся подряд без возвращения $n$ извлечений по два шара. Определить вероятность того, что каждый раз извлекаются пары разноцветных шаров.

4. 35. В урне имеются $n$ шаров с номерами от 1 до $n$. Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при $k$ первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений?

4. 36. В урне имеются два шара — белый и черный. Производятся извлечения по одному шару до тех пор, пока не появится черный, причем при извлечении белого шара в урну возвращается этот шар и добавляется еще два белых шара. Определить вероятность того, что при первых пятидесяти опытах черный шар не будет извлечен.

4. 37. В очереди за билетами стоимостью в 5 руб. стоят $n + m$ человек, из которых $n$ лиц имеют деньги пятирублевого достоинства, а $m \leqslant n - 1$ — десятирублевого. Каждый покупает только один билет. В кассе до продажи билетов денег нет. Какова вероятность, что никому из очереди не придется ожидать сдачи?

4. 38. Условия задачи такие же, как и в 4. 37, но билет стоит один рубль, а покупатели стоят с деньгами рублевого ($n$ человек) и трехрублевого достоинства ($m$ человек), причем $2m \leqslant n + 1$.

4. 39. Баллотируются два кандидата, за первого в урну опущено $n$ бюллетеней, а за второго $m$ бюллетеней, причем $n > m$. Какова вероятность того, что в ходе подсчета бюллетеней при извлечении их из урны по одному число подсчитанных голосов, поданных за первого, все время будет больше числа голосов, поданных за второго?

## § 5. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### Основные формулы

Вероятность суммы двух событий определяется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

которая обобщается на сумму любого числа событий. Например, для трех событий

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-(AC)-$$
$$-P(BC)+P(ABC).$$

Для любого числа слагаемых общая формула для вероятности суммы событий приведена в условии задачи 5. 33. Для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

### Решение типовых задач

Пример 5. 1. Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается бракованных изделий не более одного из пятидесяти.

*Решение.* Обозначим через $A$ — событие, состоящее в том, что из пятидесяти взятых изделий нет ни одного бракованного, а через $B$ — событие, состоящее в том, что имеется только одно бракованное изделие. Искомая вероятность $p=P(A+B)$. События $A$ и $B$ несовместны. Поэтому $p=P(A)+P(B)$.

Из 100 изделий пятьдесят можно выбрать $C_{100}^{50}$ способами. Из 95 небракованных изделий 50 можно выбрать $C_{95}^{50}$ способами. Поэтому $P(A)=\dfrac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{95}}$. Аналогично $P(B)=\dfrac{C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}$. Тогда

$$p=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=\frac{47\cdot 37}{99\cdot 97}=0{,}181.$$

Аналогично решаются задачи 5. 1—5. 14.

Пример 5. 2. Электрическая цепь между точками $M$ и $N$ составлена по схеме, приведенной на рис. 5. Выход из строя за время $T$ различных элементов цепи — независимые события, имеющие следующие вероятности (табл. 1):

*Таблица 1*

| Элемент | $K_1$ | $K_2$ | $Л_1$ | $Л_2$ | $Л_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | г,6 | 0,5 | 0,4 | 0,7 | 0,9 |

Определить вероятность прекращения питания за указанный промежуток времени вследствие выхода из строя: а) элементов $K_1$ и $K_2$; б) какого-либо элемента.

*Решение.* а) Обозначим через $A_j$ $(j = 1, 2)$ событие, состоящее в выходе из строя элемента $K_j$ $(j = 1, 2)$. Искомая вероятность $P(A) = P(A_1 + A_2)$. Так как события $A_1$ и $A_2$ независимы, то $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}8$.

б) Пусть событие $B$ означает разрыв цепи вследствие выхода из строя всех трех элементов $Л_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Тогда $p = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$. Так как $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}252$, то $p \approx 0{,}85$.

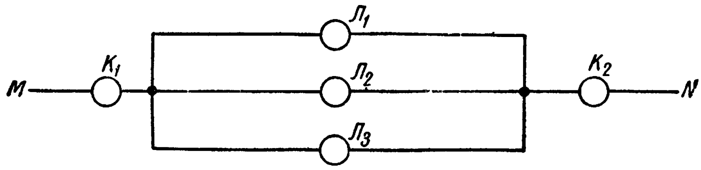


Рис. 5.

Аналогично решаются задачи 5. 15—5. 19.

Пример 5. 3. Вероятность появления события $A$, которое равновозможно в любой момент промежутка $T$, равна $p$. Известно, что за время $t < T$ данное событие не произошло. Определить вероятность $P$ того, что событие $A$ произойдет в оставшийся промежуток времени.

*Решение.* Вероятность $p$ появления события за время $T$ равна вероятности $\frac{t}{T}p$ появления данного события за время $t$ плюс произведение вероятности $\left(1 - \frac{t}{T}p\right)$ того, что событие не произойдет за время $t$, на условную вероятность $P$ появления события за оставшееся время, если раньше оно не произошло. Таким образом, имеет место равенство

$$p = \frac{t}{T}p + \left(1 - \frac{t}{T}p\right)P.$$

Отсюда находим

$$P = \frac{p\left(1 - \frac{t}{T}\right)}{1 - \frac{t}{T}p}.$$

Аналогично решаются задачи 5. 20—5. 26.

Пример 5. 4. В урне имеются $n$ белых, $m$ черных и $l$ красных шаров, которые извлекаются наудачу по одному: а) без возвращения; б) с возвращением после каждого извлечения. Определить в обоих случаях вероятности того, что белый шар будет извлечен раньше черного.

*Решение.* Пусть $P_{\text{I}}$ — вероятность того, что белый шар будет извлечен раньше черного, а $P_{\text{II}}$— вероятность того, что черный шар будет извлечен раньше белого.

Вероятность $P_{\text{I}}$ является суммой вероятностей извлечения белого шара сразу, после одного красного, двух красных и т. д. Таким образом, можно записать в случае, когда шары не возвращаются,

$$P_{\text{I}} = \frac{n}{n+m+l} + \frac{l}{(n+m+l)} \cdot \frac{n}{(n+m+l-1)} + \frac{l}{(n+m+l)} \times$$

$$\times \frac{(l-1)}{(n+m+l-1)} \cdot \frac{n}{(n+m+l-2)} + \ldots,$$

а при возвращении шаров

$$P_{\rm I}=\frac{n}{n+m+l}+\frac{ln}{(n+m+l)^2}+\frac{l^2n}{(n+m+l)^3}+\cdots=\frac{n}{n+m}.$$

Аналогичные равенства имеют место и для вероятности $P_{\rm II}$, которая, как нетрудно видеть, получится из $P_{\rm I}$ при умножении последней на $\frac{m}{n}$. Таким образом, $P_{\rm II}=\frac{m}{n}P_{\rm I}$. Так как, кроме того, $P_{\rm I}+P_{\rm II}=1$, то искомая вероятность $P_{\rm I}=\frac{n}{n+m}$.

Аналогично решаются задачи 5. 27—5. 31.

Пример 5. 5. Некто написал $n$ писем, запечатал их в конверты, а затем наудачу на каждом из них написал различные адреса. Определить вероятность того, что хотя бы на одном из конвертов написан правильный адрес.

*Решение.* Пусть событие $A_k$ состоит в том, что на $k$-м конверте написан правильный адрес ($k=1, 2, \ldots, n$). Искомая вероятность $p=P\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)$. События $A_k$ совместны; при любых $k, j, i, \ldots$ имеют место равенства:

$$P(A_k)=\frac{1}{n},\quad P(A_kA_j)=P(A_k)P(A_j/A_k)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)}=\frac{(n-2)!}{n!},$$

$$P(A_kA_jA_i)=\frac{(n-3)!}{n!}\ \text{и т. д.}\ P\left(\prod_{k=1}^{n}A_k\right)=\frac{1}{n!}.$$

Используя из задачи 5. 34 упрощенную формулу для вероятности суммы $n$ событий, получаем

$$p=C_n^1 n-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

или

$$p=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

При $n$ больших $p\approx 1-e^{-1}$.

Аналогично решаются задачи 5. 36—5. 42.

### Задачи для упражнений

5. 1. В результате опыта соответственно с вероятностями 0,012; 0,010; 0,006 и 0,002 может произойти одно из четырех событий. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет любое из этих событий.

5. 2. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,20; 0,15 и 0,10. Определить вероятность непопадания в мишень.

5. 3. В квадрат, разделенный на $n^2$ одинаковых частей, брошен шарик. Вероятность попадания шарика в малый квадрат $i$-й горизонтальной и $j$-й вертикальной полосы равна $p_{ij}$ $\left(\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}=1\right)$. Определить вероятность попадания шарика в $k$-ю горизонтальную полосу.

5. 4. Две одинаковые монеты радиуса $r$ занимают произвольные положения внутри круга радиуса $R$. В данный круг наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

5. 5. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты короля, даму или валета любой масти или карту пиковой масти?

5. 6. В ящике имеются 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наугад берутся шесть монет. Какова вероятность, что в сумме они составят не более одного рубля?

5. 7. Известны вероятности событий $A$ и $AB$. Найти вероятность события $A\bar{B}$.

5. 8. Доказать, что из условия

$$P(B/A) = P(B/\bar{A})$$

следует независимость событий $A$ и $B$.

5. 9. Событие $A$ является частным случаем события $B$. Доказать, что $P(A) \leqslant P(B)$.

5. 10. В двух урнах находятся одинаковые шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

5. 11. Изделие при своем изготовлении проходит три последовательные операции, при каждой из которых вероятность получения бракованной продукции равна 0,02. Определить приближенно вероятность получения бракованного изделия.

5. 12. Билет в партер стоит пятьдесят копеек, в бельэтаж — сорок копеек, а на ярусы — тридцать копеек. Определить вероятность того, что покупаемые наугад два билета стоят вместе не дороже восьмидесяти копеек, если равновозможно приобретение билетов любого типа.

5. 13. На плоскости проведены две параллельные полосы, ширина которых по 10 *мм*, а расстояние между ними 155 *мм*. Вдоль прямой, перпендикулярной этим полосам, на расстояниях 120 *мм* друг от друга расположены центры окружностей радиуса по 10 *мм*. Определить вероятность того, что хотя бы одна окружность пересечет любую из полос, если центры окружностей располагаются на прямой независимо от положения полос.

5. 14. Вдоль дороги на одинаковом расстоянии друг от друга посеяны в одну линию семена $n$ растений. При пересечении дороги пешеходом в неустановленном месте может быть повреждена посадка одного растения с вероятностью $p\left(p < \frac{1}{n}\right)$. Определить вероятность того, что $m$-й пешеход, пересекающий дорогу в неустановленном месте, повредит посадку, если пешеходы пересекают дорогу последовательно и независимо друг от друга.

5. 15. Определить вероятность того, что наудачу выбранное целое положительное число не делится: а) ни на два, ни на три; б) на два или на три.

5. 16. Вероятность получения билета, у которого равны суммы первых и последних трех цифр номера, равна 0,05525. Какова вероятность иметь такой билет среди двух, если оба билета: а) имеют последовательные номера; б) получены независимо один от другого?

5. 17. Доказать, что при $P(A) = a$ и $P(B) = b$ будет

$$P(A/B) \geqslant \frac{a+b-1}{b}.$$

5.18. На плоскость брошен круг, который может накрыть одну из двух отмеченных точек плоскости с вероятностями 0,5 и 0,6 или обе точки одновременно. Определить вероятность того, что будет накрыта хотя бы одна из точек, если вероятность накрытия одной из точек не зависит от того, накрыта вторая точка или нет.

5.19. Известно, что $P\{X \leqslant 10\} = 0{,}9$, $P\{|Y| \leqslant 1\} = 0{,}95$. Доказать, что при любой зависимости между $X$ и $Y$ для $Z = X + Y$ имеют место следующие неравенства:

$$0{,}85 \leqslant P\{Z \leqslant 11\} \geqslant P\{Z \leqslant 9\} \leqslant 0{,}95.$$

5.20. Игра между $A$ и $B$ ведется на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает $A$, он может выиграть с вероятностью 0,3; если первым ходом $A$ не выигрывает, то ход делает $B$ и может выиграть с вероятностью 0,5; если на этом ходу $B$ не выигрывает, то $A$ делает второй ход, который может привести к его выигрышу с вероятностью 0,4. Определить вероятности выигрыша $A$ и $B$.

5.21. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат равна $p$. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5.22. Игрок $A$ поочередно играет по две партии с игроками $B$ и $C$. Вероятности выигрыша первой партии для $B$ и $C$ равны 0,1 и 0,2; вероятность выиграть во 2-й партии для $B$ — 0,3, для $C$ — 0,4. Определить вероятности того, что: а) первым выиграет $B$; б) первым выиграет $C$.

5.23. Игроки $a$ и $b$ бросают монету. Выигрывает первый из них, если герб выпадает в первый раз или при втором и третьем подбрасывании монеты. В противном случае выигрывает второй игрок. Определить вероятность выигрыша для игрока $b$.

5.24. Из урны, содержащей $n$ шаров с номерами от 1 до $n$, последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером два будет извлечен при втором извлечении.

5.25. Игрок $A$ поочередно играет с игроками $B$ и $C$, имея вероятность выигрыша в каждой партии 0,25, и прекращает игру после первого проигрыша или после двух сыгранных партий с каждым игроком. Определить вероятности выигрыша $B$ и $C$.

5.26. Вероятность выхода из строя детали прибора, вычисленная в предположении, что прибор использовался $k$ раз, равна $G(k)$. Найти вероятность выхода из строя детали при последующих $n$ применениях прибора в предположении, что предшествующие $m$ применений не дали выхода детали из строя.

5.27. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого появится раньше герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.28. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.29. Вероятность получить очко при подаче при игре двух равносильных волейбольных команд равна половине. Определить вероятности получения одного очка для каждой из команд.

5.30. В урне имеются $n$ белых и $m$ черных шаров. Два игрока последовательно достают по одному шару, возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не достанет белый шар. Определить вероятность того, что первым вытащит белый шар игрок, начинающий игру.

5. 31. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго — 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

5. 32. Доказать справедливость равенства

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k\right).$$

5. 33. Доказать, что в общем случае имеет место следующая формула для вероятности суммы событий:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} P(A_k A_j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} P(A_k A_j A_i) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right).$$

5. 34. Упростить общую формулу (из задачи 5. 33) для вероятности суммы $n$ событий применительно к случаю, когда совпадают вероятности произведений при равных количествах событий.

5. 35. Доказать, что

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} P(A_k + A_j) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} P(A_k + A_j + A_i) - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right).$$

5. 36. В урне имеются $n$ одинаковых шаров с номерами от 1 до $n$. Шары извлекаются по одному без возвращения. Определить вероятность того, что хотя бы при одном извлечении номер шара совпадет с номером опыта.

5. 37. В помещение, насчитывающее $n$ мест, $n$ лицам выдали $n$ номерных билетов. Какова вероятность, что ровно $m$ лиц окажутся сидящими на местах, соответствующих номерам билетов, если все места занимаются наудачу?

5. 38. В электропоезд, состоящий из $n$ вагонов, входят $k$ ($k \geqslant n$) пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.

5. 39. Двое играют до победы, причем для этого необходимо первому выиграть $m$ партий, а второму — $n$ партий. Вероятность выигрыша каждой партии первым игрокам равна $p$, а вторым — $q = 1 - p$. Определить вероятность выигрыша всей игры первым игроком.

5. 40. Два игрока условились, что выигрыш получит тот, кто выиграет определенное число партий. Игра была прервана, когда первому игроку осталось до выигрыша $m$, а второму — $n$ партий. Как разделить ставку, если вероятности выигрыша любой партии для обоих игроков равны половине? (Задача Де Мере).

5. 41. Задача о четырех лгунах. Из четырех человек *а*, *б*, *в*, *г* один (*а*) получил информацию, которую в виде сигнала «да» или «нет» сообщает

второму (*б*), второй — третьему (*в*), третий — четвертому (*г*), а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие. Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трех. Какова вероятность, что первый из этих лгунов сказал правду, если четвертый сказал правду?

5. 42. На горизонтальной плоскости проведены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии $L$. На плоскость наудачу брошен выпуклый контур, диаметр которого меньше $L$, а периметр равен $S$. Найти вероятность того, что контур пересечет одну из параллельных прямых.

## § 6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

### Основные формулы

Пусть $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ — полная группа несовместных событий (гипотез), причем событие $A$ может произойти только вместе с одним из этих событий. Тогда для вероятности $P(A)$ появления события $A$ имеет место формула полной вероятности

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(H_k)\,P(A/H_k).$$

### Решение типовых задач

Пример 6. 1. Среди $n$ лиц разыгрываются $m \leqslant n$ выигрышей путем извлечения из ящика одинаковых по виду $n$ билетов. Одинаковы ли шансы выигрыша для любого из играющих? Когда выгоднее тащить билет?

*Решение*. Обозначим через $A_k$ событие, состоящее в извлечении выигрышного билета после $k$ извлечений билетов из ящика. По результатам предыдущих опытов можно сделать $k+1$ гипотезу. Пусть гипотеза $H_{ks}$ означает, что из $k$ извлеченных билетов выигрышных было $s$. Вероятности этих гипотез

$$P(H_{ks})=\frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}\quad (s=0,1,\ldots,k),$$

причем

$$P(H_{ks})=0,\ \text{если}\quad s>m.$$

Так как осталось $n-k$ билетов, из которых $m-s$ выигрышных, то при $m \geqslant s$

$$P(A_k/H_{ks})=\frac{m-s}{n-k}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$P(A_k)=\sum_{s=0}^{k}\frac{C_m^s C_{n-m}^{k-s}}{C_n^k}\,\frac{(m-s)}{(n-k)},\quad \text{считая } C_m^s=0 \text{ при } s>m.$$

Данное равенство можно записать также в виде

$$P(A_k) = \frac{m}{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{C_{m-1}^{s} C_{n-m}^{k-s}}{C_{n-1}^{k}}.$$

Имеем

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m-1}^{s} C_{n-m}^{k-s} x^{n-k-1} = \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^{k} C_k^s \frac{d^s x^{m-1}}{dx^s} \frac{d^{k-s} x^{n-m}}{dx^{k-s}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left(x^{m-1} x^{n-m}\right) = \frac{1}{k!} \frac{d^k x^{n-1}}{dx^k} = C_{n-1}^{k} x^{n-k-1},$$

т. е. справедливо равенство

$$\sum_{s=0}^{k} C_{m-1}^{s} C_{n-m}^{k-s} = C_{n-1}^{k}.$$

Поэтому искомая вероятность $P(A_k) = \frac{m}{n}$ при любом $k$. Таким образом, у всех играющих шансы одинаковы и потому очередность извлечения не имеет значения.

Аналогично решаются задачи 6. 1—6. 19.

Пример 6. 2. Отмеченный шар с вероятностями $p$ и $1 - p$ может находиться в одной из двух урн. Вероятность извлечения шара в этом случае из каждой урны равна $P$ $(P \neq 1)$. Как следует распорядиться правом $n$ раз извлекать шары из любой урны, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара была бы наибольшей, если шар после извлечения возвращается в урну?

*Решение.* Пусть событие $A$ — извлечение отмеченного шара. Гипотезы: $H_1$ — шар находится в первой урне, $H_2$ — во второй. По условию $P(H_1) = p$, $P(H_2) = 1 - p$. Допустим, что из первой урны извлечено $m$, а из второй — $(n - m)$ шаров. Условные вероятности извлечения отмеченного шара будут

$$P(A/H_1) = 1 - (1 - P)^m, \quad P(A/H_2) = 1 - (1 - P)^{n-m}.$$

По формуле полной вероятности искомая вероятность получается

$$P(A) = p\left[1 - (1 - P)^m\right] + (1 - p)\left[1 - (1 - P)^{n-m}\right].$$

Нужно определить $m$ так, чтобы была наибольшей вероятность $P(A)$. Дифференцируя $P(A)$ по $m$, получаем

$$\frac{dP(A)}{dm} = -p(1 - P)^m \ln(1 - P) + (1 - p)(1 - P)^{n-m} \ln(1 - P).$$

Полагая $\frac{dP(A)}{dm} = 0$, приходим к равенству $(1 - P)^{2m-n} = \frac{1-p}{p}$. Поэтому должно быть

$$m = \frac{n}{2} + \frac{\log \frac{1-p}{p}}{2\log(1 - P)}.$$

Данная формула используется при решении задачи 6. 20.

## Задачи для упражнений

6. 1. Имеются две партии одинаковых изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Наудачу взятое изделие из первой партии переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

6. 2. Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

6. 3. В двух урнах находится соответственно $m_1$ и $m_2$ белых и $n_1$ и $n_2$ черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берется один. Какова вероятность, что этот шар белый?

6. 4. Имеется $n$ урн, в каждой из которых по $m$ белых и по $k$ черных шаров. Из первой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекается один шар и перекладывается в третью урну и т. д. Определить вероятность извлечения после такого перекладывания белого шара из последней урны.

6. 5. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

6. 6. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии $^2/_3$ деталей бракованные, а в двух других — все доброкачественные?

6. 7. Радиолампа, поставленная в телевизор, может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1$, $p_2$ и $p_3$, где $p_1 = p_3 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов для этих партий равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

6. 8. Игрок $A$ играет поочередно с двумя игроками, вероятности выигрыша для которых в первой партии равны соответственно 0,5 и 0,6 и увеличиваются после каждой сыгранной партии на 0,1. Первые две партии выиграл $A$. Определить вероятность проигрыша $A$ в третьей партии, если неизвестно, с каким игроком была сыграна первая партия (ничьи исключены).

6. 9. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09 может находиться в шести различных интервалах. В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

6. 10. На круглом стенде (тренировочный стенд для стрельбы из охотничьих ружей по летящим тарелочкам) имеется 8 мест, с которых вероятности попадания в тарелочку для стрелков данного класса равны: на первом и восьмом месте 0,6; на втором и седьмом — 0,7; на третьем и шестом — 0,8; на четвертом и пятом — 0,9. Определить вероятность того, что стрелок, выбранный наудачу, собьет тарелочку, если все стрелки равносильные, а на каждом месте тренируются соответственно 2, 7, 16, 25, 25, 16, 7 и 2 стрелка.

6. 11. Имеются три урны, содержащие белые и черные шары. Вероятность вынуть черный шар из первой урны равна 0,2, из второй и третьей урн — по 0,6. Из урны, взятой наудачу, вынут один шар. Найти вероят-

ность того, что он белого цвета. Определить вероятность того, что будет дважды вынут белый шар из одной и той же урны, если после первого извлечения шар возвращается в урну.

6. 12. Пластина из изолятора длиной 100 *мм* прикрывает две проводящие полосы, идущие перпендикулярно ее длине и имеющие границы на расстояниях от края пластины 20 и 40 *мм* и соответственно 65 и 90 *мм*. С центром в точке, положение которой равновозможно в любом месте пластины, просверлено отверстие диаметром 10 *мм*. Определить вероятность получения электрического контакта с любой из полос, если проводящий контакт приложен сверху к произвольной точке, расположенной на том же расстоянии от основания пластины, что и центр отверстия.

6. 13. Вероятность поступления $k$ вызовов на телефонную станцию за промежуток времени $t$ равна $P_t(k)$. Считая числа вызовов за любые два соседние промежутка времени независимыми, определить вероятность $P_{2t}(s)$ поступления $s$ вызовов за промежуток времени длительностью $2t$.

6. 14. Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

6. 15. В сосуд, содержащий $n$ шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету равновозможны?

6. 16. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наугад берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наугад берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

6. 17. В правом кармане имеются три монеты по 20 коп. и четыре монеты — по 3 коп., а в левом — шесть по 20 коп. и три по 3 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются пять монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монеты в 20 коп., если монета берется наудачу.

6. 18. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

6. 19. В каких случаях имеет место равенство $P(A) = P(A/B) + P(A/\bar{B})$?

6. 20. В одной из двух урн, в каждой из которых 10 шаров, один шар отмечен. Играющий имеет право последовательно извлечь 20 шаров из любой урны, каждый раз возвращая извлеченный шар обратно. Как следует вести игру, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара была наибольшей, если вероятность того, что отмеченный шар находится в первой урне, равна $\frac{2}{3}$? Чему равна эта вероятность?

## § 7. ТЕОРЕМА ГИПОТЕЗ

### Основные формулы

Вероятность $P(H_k/A)$ гипотезы $H_k$ после того, как имело место событие $A$, определяется формулой

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)\,P(A/H_k)}{P(A)},$$

где

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P(A/H_j).$$

Гипотезы $H_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) должны составлять полную группу несовместных событий, т. е.

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} H_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) = 1.$$

## Решение типовых задач

Пример 7. 1. Для передачи сообщения путем подачи сигналов «точка» и «тире» используется телеграфная система. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $^2/_5$ сообщений «точка» и $^1/_3$ сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении 5 : 3. Определить вероятности того, что при приеме сигналов «точка» и «тире» в действительности были переданы эти сигналы.

*Решение.* Пусть событие $A$ — принят сигнал «точка», а событие $B$ — принят сигнал «тире».

Можно сделать две гипотезы: $H_1$ — передан сигнал «точка», $H_2$ — «тире». По условию $P(H_1) : P(H_2) = 5 : 3$. Кроме того, $P(H_1) + P(H_2) = 1$. Поэтому $P(H_1) = \frac{5}{8}$, $P(H_2) = \frac{3}{8}$. Известно, что $P(A/H_1) = \frac{3}{5}$, $P(A/H_2) = \frac{1}{3}$, $P(B/H_1) = \frac{2}{5}$, $P(B/H_2) = \frac{2}{3}$.

Вероятности событий $A$ и $B$ находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}.$$

Искомые вероятности будут

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\,P(B/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично решаются задачи 7. 1—7. 11, 7. 13—7. 24.

Пример 7. 2. Имеются две партии деталей, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии $^1/_4$ деталей недоброкачественные. Деталь, взятая из произвольно выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

*Решение.* Гипотезы: $H_1$ — взята партия с недоброкачественными деталями, $H_2$ — взята партия доброкачественных деталей. Событие $A$ — первая деталь доброкачественная. По условию задачи $P(H_1) = P(H_2) = {}^1/_2$, $P(A/H_1) = {}^3/_4$, $P(A/H_2) = 1$. Поэтому по формуле полной вероятности вероятность события $A$ будет $P(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{7}{8}$. После первого испытания вероятность того, что партия содержит недоброкачественные детали, равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\,P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{7/8} = \frac{3}{7}.$$

Вероятность того, что партия содержит только доброкачественные детали,

$$P(H_2/A) = \frac{4}{7}.$$

Пусть событие $B$ состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности. Если $H_1'$ и $H_2'$ — новые гипотезы, то согласно предыдущим вычислениям $P(H_1') = \frac{3}{7}$, $P(H_2') = \frac{4}{7}$. Кроме того, $P(B/H_1') = 1/4$, $P(B/H_2') = 0$. Поэтому искомая вероятность $P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$.

Аналогично решаются задачи 7. 26—7. 27 и 7. 12.

## Задачи для упражнений

7. 1. Имеются десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одной пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

7. 2. Имеется $k_1$ урн, в каждой из которых $m_1$ белых и $n_1$ черных шаров, и $k_2$ урн, содержащих по $m_2$ белых и по $n_2$ черных шаров. Извлеченный из выбранной наудачу урны один шар оказался белым. Какова вероятность, что данный шар извлечен из первой группы урн?

7. 3. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной хорошую продукцию с вероятностью 0,98, а бракованную — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

7. 4. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

7. 5. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если взятые наудачу 100 лампочек оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

7. 6. В тире имеется девять ружей, из которых пристрелянными являются только два. Вероятность попадания в цель из пристрелянного ружья 0,8, а из непристрелянного — 0,1. Выстрелом из одного наудачу взятого ружья мишень поражена. Определить вероятности того, что взято пристрелянное или непристрелянное ружье.

7. 7. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии станков отклоняется от нормального, используется индикатор, принадлежащий с вероятностями 0,2; 0,3 и 0,5 к одному из трех типов, для которых вероятности срабатывания при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 1; 0,75 и 0,4. От индикатора получен сигнал. К какому типу вероятнее всего принадлежит индикатор?

7. 8. Игрок $D$ играет с неизвестным противником на следующих условиях: первый ход делает противник, в случае его проигрыша делает ход $D$, выигрыш которого означает выигрыш игры, а при проигрыше игра

повторяется второй раз на тех же условиях. Из двух равновозможных противников $B$ имеет вероятность выиграть первым ходом 0,4 и вторым — 0,3; $C$ имеет вероятность выиграть первым ходом 0,8 и вторым ходом 0,6. Для $D$ вероятность выиграть первым ходом равна 0,3 и не зависит от противника, а для второго хода равна 0,5 при игре с $B$ и 0,7 при игре с $C$. Игру выиграл $D$. Какова вероятность: а) что противником был $B$; б) что противником был $C$?

7. 9. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 — с вероятностью 0,7; 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

7. 10. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно $^4/_5$, $^3/_4$, $^2/_3$. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

7. 11. Три измерительных прибора обладают одинаковой точностью, характеризуемой срединным отклонением $E$, однако первый прибор дает систематическую ошибку, равную $-E$, второй — систематическую ошибку $+E$, а третий не имеет систематической ошибки. Два измерения эталона, произведенные взятым наудачу прибором, дали ошибки противоположного знака. Определить вероятность того, что был взят 1, 2 или 3-й прибор.

7. 12. По условиям задачи 7. 11 определить вероятность того, что и при следующих двух измерениях тем же прибором будут ошибки противоположного знака.

7. 13. Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

7. 14. Трое охотников произвели по одному выстрелу по медведю, в результате чего медведь был убит одной пулей. Вероятности попадания одним выстрелом для этих охотников равны соответственно 0,1; 0,4; 0,8. Определить вероятность того, что попал 1, 2 или 3-й охотник.

7. 15. Попадание случайной точки в любое место области $S$ равновозможно, а область $S$ состоит из 4 частей, составляющих соответственно 50, 30, 12 и 8% всей области. При испытании имело место событие $A$, которое происходит при попадании случайной точки в каждую из этих частей с вероятностями соответственно 0,01, 0,05, 0,2 и 0,5. В какую из частей области $S$ наиболее вероятно было попадание?

7. 16. Измерительный прибор может обладать систематической ошибкой, находящейся в одном из шести интервалов с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09, причем граница между 3 и 4 интервалом соответствует отсутствию систематической ошибки. Одно измерение эталона дало положительную ошибку. Определить вероятности того, что прибор обладает систематической ошибкой в указанных интервалах, если вероятности получения положительной ошибки в зависимости от того, в каком интервале находится систематическая ошибка, равны соответственно 0,90; 0,65; 0,30; 0,10; 0,01 и 0.

7. 17. В урне имеется $n$ шаров, причем цвет каждого из них равновозможен (белый или черный). Извлекаются последовательно $k$ шаров, причем каждый раз после извлечения шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если черные шары не извлекались?

7. 18. В первой урне 2 белых, 3 красных и 20 черных шаров, а во второй 8 белых, 15 красных и 2 черных шара. Из каждой урны извлечено

по одному шару, причем один шар оказался белым, а другой — красным. Предполагая при этих извлечениях равновозможным выбор урн, определить вероятность того, что черный шар был извлечен из первой урны.

7. 19. Из двух близнецов один — мальчик. Какова вероятность, что другой тоже мальчик, если условные вероятности рождения двух мальчиков и двух девочек равны соответственно $a$ и $b$?

7. 20. Известно, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых. Вероятность рождения мальчика равна 0,51, а девочки — 0,49. Принимая равными вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности, определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

7. 21. Два стрелка поочередно стреляют в мишень. Вероятности попадания первыми выстрелами для них равны соответственно 0,4 и 0,5, а вероятности попадания при последующих выстрелах для каждого увеличиваются на 0,05. Какова вероятность, что первым произвел выстрел первый стрелок, если при пятом выстреле произошло попадание в мишень?

7. 22. Один из четырех равноточных измерительных приборов имеет систематическую ошибку $E$ (срединное отклонение закона ошибок измерения для этих приборов), а остальные три прибора систематических ошибок не имеют. С помощью одного из приборов произведено три измерения, которые дали два раза положительную ошибку и один раз отрицательную. Какова вероятность, что был взят прибор, имеющий систематическую ошибку?

7. 23. В группе 20 студентов, из которых 5 человек знают 90% экзаменационных билетов по каждому из трех разделов курса, 7 человек—70%, 4 человека — 60% и 4 человека — 50%. На экзамене студент из этой группы дал верные ответы на два вопроса по двум разделам программы и отказался отвечать на вопрос по третьему разделу. Какова вероятность, что данный студент выучил 90, 70, 60 или 50% программы?

7. 24. Произведено три независимых испытания, в каждом из которых событие $A$ может иметь место с вероятностью 0,2. Вероятность появления другого события $B$ зависит от числа появления события $A$: при однократном появлении события $A$ эта вероятность равна 0,1; при двухкратном появлении — 0,3; при трехкратном появлении — 0,7; если событие $A$ не имело место ни разу — событие $B$ невозможно. Определить наивероятнейшее число появлений события $A$, если событие $B$ имело место.

7. 25. В техникуме $n$ студентов, из которых $n_k$ ($k = 1, 2, 3$) человек учатся $k$-й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится больше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

7. 26. Третья часть одной из трех партий деталей является второсортной, остальные детали 1-го сорта. Деталь, взятая из одной партии, оказалась первосортной. Определить вероятность того, что деталь была взята из партии, имеющей второсортные детали. Найти ту же вероятность при условии, что взятая из той же партии вторая деталь оказалась первосортной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

7. 27. Получена партия из восьми изделий одного образца. По данным проверки половины партии три изделия оказались технически исправными, а одно бракованным. Какова вероятность, что при проверке трех последующих изделий одно из них окажется исправным, а два бракованными, если любое количество бракованных изделий в данной партии равновозможно?

## § 8. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОЯВЛЕНИЯ СОБЫТИЯ ПРИ ПОВТОРНЫХ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

### Основные формулы

Если производятся $n$ независимых опытов, вероятность появления события в каждом из которых постоянна и равна $p$, то вероятность $P_{n;\,m}$ того, что это событие при $n$ опытах произойдет ровно $m$ раз, определяется формулой биномиального распределения

$$P_{n;\,m} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$.

Вероятность появления события не менее $m$ раз при $n$ опытах вычисляется по формуле

$$R_{n;\,m} = \sum_{k=m}^{n} P_{n;\,k} \text{ или } R_{n;\,m} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_{n;\,k}.$$

Вероятность появления события хотя бы один раз при $n$ опытах будет

$$R_{n;\,1} = 1 - q^n.$$

Количество $n$ опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньше $P$ можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geqslant \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)},$$

где $p$ — вероятность появления этого события в каждом опыте.

Наивероятнейшее значение $\mu$ числа $m$ появлений события $A$ равно целой части числа $(n+1)\,p$, а при целом $(n+1)\,p$ наибольшее значение вероятности достигается при двух числах: $\mu_1 = (n+1)\,p - 1$ и $\mu_2 = (n+1)\,p$.

Если опыты независимы, а вероятности появления события различны, то вероятность $P_{n;\,m}$ появления события ровно $m$ раз при $n$ опытах равна коэффициенту при $x^m$ в разложении производящей функции

$$S(x) = \prod_{k=1}^{n} (p_k x + q_k) = \sum_{m=0}^{n} P_{n;\,m} x^m,$$

где $q_k = 1 - p_k$, $p_k$ — вероятность появления события в $k$-м опыте.

Коэффициенты $P_{n;\,m}$ могут быть определены дифференцированием функции $S(x)$

$$P_{n;\,m} = \frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m S(x)}{dx^m}\right\}_{x=0},$$

что дает, например,

$$P_{n;\,0} = q_1 q_2 \ldots q_n.$$

При малых $p_k$

$$P_{n;\,0} \approx e^{-\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

## Решение типовых задач

Пример 8. 1. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

*Решение.* Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны $p = q = {}^1/_2$.

а) Вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_{4;\,3} = C_4^1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Вероятность выиграть пять партий из восьми $P_{8;\,5} = C_8^3 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$. Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий из четырех

$$R_{4;\,3} = P_{4;\,3} + P_{4;\,4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

а вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$R_{8;\,5} = P_{8;\,5} + P_{8;\,6} + P_{8;\,7} + P_{8;\,8} = \frac{7}{32} + \left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1\right)\frac{1}{2^8} = \frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Аналогично решаются задачи 8. 1—8. 34.

Пример 8. 2. Имеется шесть потребителей электрического тока, для первого из которых при определенных условиях вероятность того, что произойдет авария, приводящая к отключению потребителя, равна 0,6, для второго — 0,2, а для четырех остальных по 0,3. Определить вероятность того, что генератор тока будет отключен полностью: а) если все потребители соединены последовательно; б) если потребители соединены так, как показано на схеме (рис. 6).

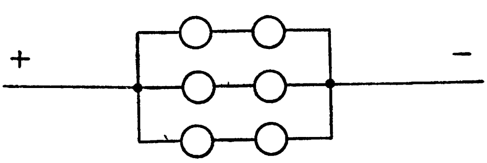


Рис. 6.

*Решение.* а) Вероятность неотключения всех шести потребителей равна произведению вероятностей неотключения каждого потребителя, т. е. $q = 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}077$.

Искомая вероятность равна вероятности отключения хотя бы одного потребителя, т. е. $p = 1 - q = 0{,}923$.

б) В этом случае ток прекратится, если будут отключены все потребители, любые пять, определенные четыре или три. Пусть первый и второй потребители соединены последовательно.

Имеем

$$P_{6;\,6} = p_1 p_2 p_3^4 = 0{,}001;$$

$$P_{6;\,5} = (p_1 q_2 + q_1 p_2)\, p_3^4 + 4 p_1 p_2 q_3 p_3^3 = 0{,}0136;$$

$$P_{6;\,4} = 4\,(p_1 q_2 + q_1 p_2)\, q_3 p_3^3 + 4 p_1 p_2 p_3^2 q_3^2 = 0{,}0635;$$

$$P_{6;\,3} = 4\,(p_1 q_2 + q_1 p_2)\, p_3^2 q_3^2 = 0{,}0988.$$

Суммарная вероятность $p \approx 0{,}177$.

Аналогично решаются задачи 8. 35—8. 39.

Пример 8. 3. Партия изделий содержит один процент брака. Каков должен быть объем случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0,95?

*Решение.* Искомое число $n$ находится по формуле $n \geqslant \frac{\log(1-P)}{\log(1-p)}$. В данном случае $P = 0{,}95$, а $p = 0{,}01$. Поэтому $n \geqslant \frac{\log 0{,}05}{\log 0{,}99} \approx 296$.

Аналогично решаются задачи 8. 40—8. 44.

Пример 8. 4. Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,4, независимо от заявок других магазинов. Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

*Решение.* В данном случае $n = 10$, $p = 0{,}4$, $(n+1)\,p = 4{,}4$. Наивероятнейшее число $\mu$ заявок равно целой части числа $(n+1)\,p$, т. е. $\mu = 4$.

Вероятность четырех заявок из десяти

$$P_{10;\,4} = C_{10}^{4} 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}251.$$

Аналогично решаются задачи 8. 45—8. 46.

### Задачи для упражнений

8. 1. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; б) двух пятерок.

Известно, что все номера четырехзначные и неповторяющиеся.

8. 2. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

8. 3. В учебном заведении обучаются 730 студентов. Вероятность того, что день рождения наудачу взятого студента приходится на любой день года, равна $\frac{1}{365}$. Найти вероятность того, что на первое января выпадает день рождения: а) трех студентов; б) четырех студентов.

8. 4. В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятность того, что любой читатель возьмет книгу по технике, равна 0,7, а по математике — 0,3. Определить вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги или только по технике, или только по математике, если каждый из них берет только одну книгу.

8. 5. Две электрические лампочки включены в цепь последовательно. Определить вероятность того, что при повышении напряжения в сети выше номинального питание в цепи прекратится, если вероятность того, что лампочка перегорит для обеих лампочек одинакова и в этих условиях равна 0,4.

8. 6. Определить вероятность появления события $A$ при трех независимых опытах, если вероятность появления этого события при одном опыте равна $p$.

8. 7. Событие $B$ наступает в том случае, если событие $A$ появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события $B$, если вероятность появления события $A$ при каждом опыте равна 0,3 и произведено: а) пять независимых опытов; б) семь независимых опытов.

8. 8. Электрическая схема, содержащая два блока типа $A$, один блок типа $B$ и четыре блока типа $C$, составлена так, как это показано на рис. 7. Определить вероятность прекращения тока в цепи при любом из трех положений ключа К, если элементы $A$ выходят из строя с вероятностью 0,3, элементы типа $B$ — с вероятностью 0,4, элементы типа $C$ — с вероятностью 0,2.

8. 9. Вероятность того, что агрегат необходимо поставить на ремонт после $m$ аварий, определяется формулой $G(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m$, где $\omega$ — среднее число аварий до постановки агрегата на ремонт. Доказать, что вероятность 'того, что после $n$ циклов потребуется ремонт, определяется по формуле $W_n = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n$, где $p$ — вероятность того, что во время одного производственного цикла произойдет авария.

8. 10. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие $A$ происходит с вероятностью 0,3. Событие $B$ наступает с вероятностью равной 1, если событие $A$ произошло не менее 2 раз; не может наступить, если событие $A$ не имело место, и наступает с вероятностью 0,6, если событие $A$ имело место 1 раз. Определить вероятность появления события $B$.

8. 11. По мишени в тире произведено 200 независимых выстрелов при одинаковых условиях, которые дали 116 попаданий. Определить,

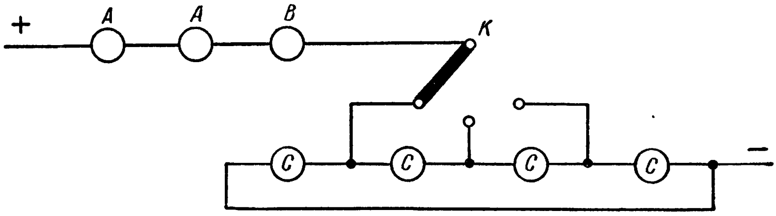


Рис. 7.

какое значение вероятности попадания на один выстрел более вероятно: $^1/_2$ или $^2/_3$, если до опыта обе гипотезы равновероятны и единственно возможны.

8. 12. Рассчитать зависимость вероятности хотя бы одного появления события $A$ при 10 независимых опытах от вероятности $p$ появления события $A$ в каждом опыте для следующих значений $p$: 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6.

8. 13. Вероятность хотя бы одного появления события $A$ при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события $A$ при одном опыте?

8. 14. Вероятность появления некоторого события в каждом из восемнадцати независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере три раза.

8. 15. Вероятность выигрыша на каждый из лотерейных билетов равна 0,02. Рассчитать вероятности хотя бы одного выигрыша на $n$ билетов для $n = 1$, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, если считать, что билеты принадлежат разным сериям.

8. 16. Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятности того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина, равны соответственно 0,03 и 0,02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших лотерейных билетов, выбранных из разных серий.

8. 17. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.

8. 18. Найти вероятности: а) двух и б) хотя бы двух попаданий кольца на колышек при условии, что было зафиксировано хотя бы одно

попадание, если вероятность попадания кольца на колышек при одном броске равна 0,2, а было брошено десять колец.

8. 19. Определить вероятность получения не менее 28 очков при трех выстрелах из спортивного пистолета по мишени с максимальным числом очков, равным 10, если вероятность получения 30 очков равна 0,008. Известно, что при одном выстреле вероятность получения восьми очков равна 0,15, а менее восьми очков — 0,4.

8. 20. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что: а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

8. 21. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы?

8. 22. Три игрока набрасывают кольца на колышек, причем у двух игроков вероятность попадания при каждом броске равна 0,1, а у третьего — 0,2. После восьми бросков одного из игроков получено два попадания. Какова вероятность, что при следующих восьми бросках того же игрока будет два попадания?

8. 23. В урне пять шаров белого и черного цвета. Из урны извлекался шар четыре раза, причем извлеченный шар возвращался. Один раз появился белый шар и трижды черный. Определить вероятности различных предположений о числе белых шаров в урне, если до опыта белый и черный цвет каждого шара равновозможен.

8. 24. Для победы в волейбольном состязании команде необходимо выиграть три партии из пяти; команды неравносильны. Определить вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, если для уравнивания шансов одна должна дать фору: а) в две партии; б) в одну партию.

8. 25. Матч между двумя шахматистами проводится на следующих условиях: 1) учитываются только результативные партии; 2) выигравшим считается тот, кто первым наберет четыре очка при условии, что у противника при этом не более двух очков; 3) если у обоих игроков по три очка, то выигрывает тот, кто первым наберет пять очков.

Определить вероятности выигрыша матча для каждого из игроков, если вероятности выигрыша каждой партии относятся как три к двум.

8. 26. Для прикуривания гражданин пользовался двумя коробками спичек, доставая наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Какова вероятность, что во второй коробке при этом $k$ спичек, если в неначатой коробке их $n$ штук? (Задача Банаха).

8. 27. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку — 0,3. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

8. 28. Во время каждого из опытов на 1 час в цепь включается батарея мощностью в 120 *вт* или в 200 *вт*; вероятности благоприятного исхода опыта равны соответственно 0,06 и 0,08. Результат проведенной системы опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 *вт* или хотя бы двух — с батареей в 120 *вт*. Общая энергия, затраченная на всех опытах, не может превышать 1200 *вт*. Какие батареи выгоднее использовать?

8. 29. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп I типа или не менее двух ламп II типа. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело пять ламп, а условные вероятности перегорания ламп I и II типов равны соответственно 0,7 и 0,3.

8. 30. Вероятность благоприятного исхода отдельного опыта равна 0,4. Производится три независимых опыта. Определить вероятность достижения намеченного результата, если условные вероятности достижения этого результата при благоприятном исходе одного, двух и трех опытов равны соответственно 0,2; 0,5; 0,8.

8. 31. Вероятность участия в каждом из опытов одного из $n$ одинаковых объектов равна $p\left(p < \frac{1}{n}\right)$. Если данный объект участвовал в опытах ровно $k$ раз, результат опытов считается достигнутым. Определить вероятность достижения результата после $m$ опытов.

8. 32. В условиях предыдущей задачи определить вероятность достижения результата при $(2k - 1)$ опыте, если после достижения намеченного результата опыты прекращаются.

8. 33. Вероятность благоприятного исхода отдельного опыта равна 0,2. Для достижения намеченного результата необходимо получить благоприятный исход не менее чем в трех опытах. Какое количество опытов необходимо произвести, чтобы вероятность достижения намеченного результата была не менее 0,9?

8. 34. Пункт $A$ нужно связать с 10 абонентами пункта $B$. Каждый абонент в среднем занимает линию 12 минут в час. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы с вероятностью 0,99 в любой момент обслужить всех абонентов?

8. 35. Четыре игрока поочередно бросают на колышек по одному кольцу, причем вероятности попадания равны соответственно 0,2, 0,4, 0,6 и 0,8. Определить вероятность того, что: а) попадут все четыре игрока; б) попадет хотя бы один из игроков.

8. 36. Производится последовательно четыре независимых опыта, причем вероятности благоприятного исхода в каждом из них равны соответственно 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4. Определить вероятность благоприятного исхода в $k$ опытах ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

8. 37. По условию предыдущей задачи определить вероятность достижения намеченного результата, если вероятности его достижения при благоприятном исходе в одном и в двух опытах равны соответственно 0,2 и 0,6, а в трех и более опытах — единице.

8. 38. Вероятности перегорания первой, второй и третьей ламп равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Вероятность выхода из строя прибора при перегорании одной лампы равна 0,25, при перегорании двух ламп — 0,6, а при перегорании трех ламп — 0,9. Определить вероятность выхода прибора из строя.

8. 39. Охотник стреляет в лося с расстояния 100 *м* и попадает в него с вероятностью 0,5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния до лося 150 *м*. Если нет попадания и в этом случае, то охотник стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося равно 200 *м*. Считая, что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния, определить вероятность попадания в лося.

8. 40. Сколько чисел необходимо взять из таблицы случайных чисел, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечивалось появление среди них трех чисел, оканчивающихся цифрой 7?

8. 41. Вероятность попадания в десятку при одном выстреле $p = 0,2$. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в десятку хотя бы один раз?

8. 42. За один цикл автомат изготовляет 10 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной

детали будет не менее 0,8, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

8. 43. На прямой через 60 *см* один от другого расположены центры окружностей, диаметры которых одинаковы и равны 1 *см*. Несколько таких прямых устанавливаются параллельно друг другу, причем относительный сдвиг линий равновозможен на любую величину от 0 до 60 *см*. Перпендикулярно этим линиям перемещается круг радиуса 7 *см*. Каким должно быть количество линий, чтобы вероятность хотя бы одного пересечения круга с любой окружностью была не менее 0,9?

8. 44. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара, $n$ раз извлекаются шары по одному, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше половины.

8. 45. Для данного баскетболиста вероятность забрасывания в корзину любого мяча равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

8. 46. Найти наивероятнейшие числа отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна $^2/_3$, а отрицательной — $^1/_3$.

## § 9. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

### Основные формулы

Пусть производится $n$ независимых опытов, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Вероятность того, что при $n$ опытах событие $A_k$ произойдет ровно $n_k$ раз $\left(k = 1, 2, \ldots, m, \sum_{k=1}^{m} n_k = n\right)$, определяется формулой (полиномиальное распределение)

$$P_{n;\, n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}.$$

Вероятность $P_{n;\, n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m}$ является коэффициентом при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$ в следующей производящей функции:

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_m x_m)^n.$$

Применение производящих функций часто упрощает получение окончательного результата. Например, если нужно определить вероятность того, что событие $A_1$ при $n$ испытаниях появляется на $l$ раз чаще, чем событие $A_2$, то при $m = 3$ в производящей функции следует положить $x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_3 = 1$. Тогда искомая вероятность является коэффициентом при $x_1^l$ в функции $S(x_1) = \left(p_1 x_1 + p_2 \frac{1}{x_1} + p_3\right)^n$. Аналогичные упрощения делаются и при более общих производящих функциях.

Если все вероятности $p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) равны, то производящую функцию часто можно представить в виде

$$S(x) = \frac{\alpha}{x^r}\left(1 + x + \cdots + x^{k-1}\right)^n = \frac{\alpha}{x^r}\left(\frac{1 - x^k}{1 - x}\right)^n.$$

Для определения коэффициентов при различных степенях $x$ в этом случае нужно функцию $S(x)$ разложить в ряд. Для $(1-x)^{-n}$ удобно использовать следующее разложение

$$(1-x)^{-n} = 1 + C_n^{n-1}x + C_{n+1}^{n-1}x^2 + C_{n+2}^{n-1}x^3 + \cdots$$

При вычислении факториалов больших чисел можно использовать таблицы логарифмов этих величин (см. приложение 2) или формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right),$$

в которой последний множитель мало отличается от единицы.

Вероятность появления события при $n$ опытах в ряде случаев может быть получена путем использования зависимостей между вероятностями появления события при различных количествах опытов, например соотношений вида (рекуррентные формулы)

$$p_k = a_k p_{k-1} + b_k p_{k-2},$$

где $a_k$ и $b_k$ — известные постоянные.

Искомая вероятность определяется с помощью этих равенств после расчета по исходным данным некоторых частных вероятностей.

## Решение типовых задач

Пример 9. 1. Вероятности того, что диаметр любой детали меньше допустимого, больше допустимого и в допустимых пределах, равны соответственно 0,05; 0,10 и 0,85. Из общей партии берутся наудачу 100 деталей. Определить вероятность того, что среди них будет по пять деталей с меньшим и большим диаметрами.

*Решение.* Пусть событие $A_1$ — выбрана наудачу деталь первого, $A_2$ — второго и $A_3$ — третьего типа. По условию $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}10$, $p_3 = 0{,}85$. Всего производится $n = 100$ опытов. Определяется вероятность $p$ того, что при этом события $A_1$ и $A_2$ произойдут по пять раз. Тогда $n_1 = n_2 = 5$, $n_3 = 90$. Поэтому искомая вероятность

$$p = P_{100;\,5,\,5,\,90} = \frac{100!}{5!\,5!\,90!}\,0{,}05^5 \cdot 0{,}10^5 \cdot 0{,}85^{90}.$$

Логарифмируя данное равенство, находим

$$\lg p = \lg 100! - \lg 90! - 2\lg 5! + 5\lg 5 + 90\lg 0{,}85 - 15.$$

Воспользовавшись таблицей приложения 2 для логарифмов факториалов и таблицей десятичных логарифмов, получаем

$$\lg p = \bar{3},\ 7824, \text{ т. е. } p \approx 0{,}006.$$

Аналогично решаются задачи 9. 1—9. 8 и 9. 28.

Пример 9. 2. При каждом испытании вероятность появления события равна $p$. С какой вероятностью оно произойдет четное число раз при $n$ испытаниях?

*Решение.* Обозначим через $p_k$ вероятность того, что после $k$ опытов событие произойдет четное число раз. Данная вероятность связана с вероятностью $p_{k-1}$ появления события четное число раз после $k-1$

опытов. Перед $k$-м опытом можно сделать две гипотезы: при $(k-1)$-м опыте событие произошло четное или нечетное число раз. Вероятности этих гипотез равны соответственно $p_{k-1}$ и $1-p_{k-1}$. Тогда

$$p_k = p_{k-1}(1-p) + (1-p_{k-1})\,p,$$

т. е. $p_k = p + p_{k-1}(1-2p)$.

Данное равенство можно записать еще и так:

$$\left(p_k - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)\left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Перемножая левые и правые части всех $n$ таких равенств, получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\left(p_k - \frac{1}{2}\right) = (1-2p)^n \prod_{k=1}^{n}\left(p_{k-1} - \frac{1}{2}\right).$$

Сокращая обе части данного выражения на $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(p_k - \frac{1}{2}\right)$, получаем

$$p_n - \frac{1}{2} = (1-2p)^n\left(p_0 - \frac{1}{2}\right).$$

Так как $p_0 = 1$, то искомая вероятность будет

$$p = p_n = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right].$$

Аналогично решаются задачи 9.9—9. 15 и 9. 29.

Пример 9. 3. Определить вероятность получения билета, у которого равны суммы первых трех и последних трех цифр номера, если номер шестизначный и может быть любым от 000 000 до 999 999.

*Решение.* Рассмотрим сначала первые три цифры номера. Так как они произвольны, то можно считать, что производится три опыта ($n = 3$), в результате каждого из которых с вероятностью $p = \frac{1}{10}$ появляется одна из цифр. Вероятность того, что в результате этих опытов цифры примут заданные значения определенные числа раз, находится по формуле полиномиального распределения или с помощью производящей функции, которая при $n = 3$ и $p_k = \frac{1}{10}$ $(k = 0{,}1,\ \ldots,\ 9)$ записывается в виде

$$S_1(x) = \frac{1}{10^3}\left(\sum_{k=0}^{9} x_k\right)^3.$$

Индекс «$k$» у $x_k$ указывает на то, что в результате опыта появляется число $k$. Коэффициент при $x_0^{n_0} x_1^{n_1} \ldots x_9^{n_9}$ $\left(\sum\limits_{r=0}^{9} n_r = 3\right)$ равен вероятности того, что среди первых трех цифр число $r$ встречается $n_r$ раз $(r = 0,\ 1,\ \ldots,\ 9)$.

Положим $x_k = x^k$ $(k = 0, \ldots, 9)$. Тогда $x_0^{n_0} x_1^{n_1} \ldots x_9^{n_9} = x^{0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + 2n_2 + \cdots + 9n_9}$. Показатель у $x$ равен сумме первых трех цифр номера. Таким образом, у функции

$$S_1(x) = \frac{1}{10^3}\left(\sum_{k=0}^{9} x^k\right)^3 = \frac{1}{10^3}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3$$

коэффициент при $x^\sigma$ равен вероятности того, что сумма первых трех цифр номера билета равна $\sigma$.

Аналогично у функции

$$S_2(x) = \frac{1}{10^3}\left(\frac{1-x^{-10}}{1-x^{-1}}\right)^3$$

коэффициент при $x^{-\sigma}$ равен вероятности того, что сумма последних трех цифр номера билета равна $\sigma$.

Но тогда у функции

$$S(x) = S_1(x)\, S_2(x) = \frac{1}{10^6 x^{27}}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6$$

коэффициент при $x^0$ равен искомой вероятности того, что суммы первых трех и последних трех цифр номера билета равны.

Имеем

$$(1-x^{10})^6 = 1 - C_6^1 x^{10} + C_6^2 x^{20} - \cdots,$$

$$(1-x)^{-6} = C_5^5 + xC_6^5 + x^2 C_7^5 + \cdots.$$

Поэтому искомая вероятность будет

$$p = \frac{1}{10^6}\left(C_{32}^5 - C_6^1 C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5\right) = 0{,}05525.$$

Аналогично решаются задачи 9. 16—9. 27.

## Задачи для упражнений

9. 1. В урне имеются три шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекались 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращался обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары будут извлечены не менее чем по два раза каждый.

9. 2. На два колышка набрасываются кольца. Всего брошено три кольца. Вероятность попадания каждого кольца на первый колышек равна 0,1, а на второй — 0,2. Определить вероятность того, что будет хотя бы по одному попаданию на каждый колышек.

9. 3. Каждый из девяти шаров с одинаковой вероятностью может быть помещен в один из трех первоначально пустых ящиков. Определить вероятность того, что: а) в каждый ящик попало по три шара; б) в один ящик попало четыре шара, в другой — три, а в оставшийся — два шара.

9. 4. По мишени, состоящей из внутреннего круга и двух концентрических колец, производится десять выстрелов из спортивного пистолета. Вероятности попадания в указанные области при каждом выстреле равны соответственно 0,15; 0,22 и 0,13. Определить вероятность того, что при этом будет шесть попаданий в круг, три — в первое кольцо и одно попадание во второе кольцо.

9. 5. По степени надежности прибор можно разбить на четыре элемента, в каждом из которых имеются электронные лампы; вероятности перегорания одной лампы в каждом из элементов равны соответственно: $p_1 = 0{,}6111$, $p_2 = p_3 = 0{,}0664$, $p_4 = 0{,}2561$. При перегорании хотя бы одной лампы в первом элементе прибор выходит из строя. При перегорании любого числа ламп в четвертом элементе прибор продолжает работать. Во втором и третьем элементах в отдельности может перегореть любое количество ламп (прибор продолжает работать), но если перегорает хотя бы по одной лампе в каждом из этих элементов, то прибор выходит из строя. Определить вероятность выхода прибора из строя при перегорании четырех ламп, если равновозможно перегорание любого числа ламп в любом из элементов.

9. 6. На восемь колышков набрасывается поочередно девять колец. Вероятность попадания каждого кольца на любой из колышков равна 0,03. Определить вероятность того, что при этом будет попадание хотя бы на один колышек.

9. 7. В электропоезд, состоящий из шести вагонов, садится двенадцать человек, причем выбор каждым пассажиром вагона равновозможен. Определить вероятность того, что: а) в каждый вагон вошло по два человека; б) в один вагон никто не вошел, в другой — вошел один человек, в два вагона — по два человека, а в оставшиеся два вагона соответственно три и четыре человека.

9. 8. Урна содержит $l$ белых, $m$ черных и $n$ красных шаров. Производится $l_1 + m_1 + n_1$ извлечений шаров по одному с возвращением каждого извлеченного шара. Определить вероятность того, что будет извлечено: а) сначала $l_1$ белых, затем $m_1$ черных и, наконец, $n_1$ красных шаров; б) $l_1$ белых, $m_1$ черных и $n_1$ красных шаров, причем все шары одного цвета появляются подряд, но последовательность цветов может быть любой; в) $l_1$ белых, $m_1$ черных и $n_1$ красных шаров в любой последовательности.

9. 9. Определить вероятность того, что при $n$ бросаниях монеты герб появится нечетное число раз.

9. 10. Два равносильных противника играют в шахматы до тех пор, пока один из них не выиграет на две партии больше, чем другой, причем учитываются только результативные партии. Какова вероятность, что будет сыграно $2n$ партий?

9. 11. Двое играют до тех пор, пока один из них не выиграет все деньги у другого. Определить вероятность того, что при этом будет сыграно ровно $n$ партий, если все ставки одинаковы; каждый игрок в начале игры имеет по три ставки, а вероятность выигрыша в любой партии для каждого из игроков равна половине.

9. 12. Два игрока продолжают игру до полного разорения одного из них. Капитал первого игрока равен $n$ рублей, второго — $m$ рублей. Вероятности выигрыша каждой партии для этих игроков равны соответственно $p$ и $q$ ($p + q = 1$). В каждой партии выигрыш одного игрока (проигрыш другого) равен одному рублю. Определить вероятности разорения обоих игроков.

9. 13. Отрезок $AB$ разделен на $n + m$ равных частей. Точка может перескакивать с одной точки деления на ближайшую, причем по направлению к точке $B$ с вероятностью $p$, а по направлению к точке $A$ с вероятностью $q = 1 - p$. При достижении точки $A$ или $B$ движение точки $C$ прекращается. Определить вероятность того, что точка $C$ достигнет точки $B$, если первоначальное положение точки $C$ совпадает с $n$-й точкой деления отрезка.

9. 14. В шахматы играют $n+1$ равносильных игроков, причем каждый по очереди играет с победителем. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд у всех $n$ противников. Какова вероятность, что при этом будет сыграно ровно $m$ результативных партий (ничьи не учитываются)?

9. 15. Матч между двумя равносильными шахматистами происходит на следующих условиях (старые условия борьбы за звание чемпиона мира):

1) учитываются только результативные партии;

2) победившим считается набравший шесть очков, если его противник набрал не более четырех очков;

3) если у одного шесть, а у другого пять выигранных партий, то игра продолжается до тех пор, пока разрыв не составит два очка.

Определить вероятность того, что результативных партий придется играть: а) не более десяти; б) ровно $n$.

9. 16. Вероятность появления события в каждом из $n$ опытов одинакова и равна $p$. Доказать, что производящей функцией для вероятностей появления события не менее $n-m$ раз является функция

$$S(x)=\frac{(p+qx)^n}{1-x}.$$

9. 17. Вероятность появления события в $k$-м опыте равна $p_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Доказать, что производящими функциями для вероятностей появления события соответственно не более $m$ и не менее $n-m$ раз при $n$ независимых опытах являются функции

$$S_1(x)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(q_k+p_kx)}{1-x} \quad \text{и} \quad S_2(x)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(p_k+q_kx)}{1-x}.$$

9. 18. Два стрелка производят по $n$ выстрелов, причем каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна половине.

9. 19. В каждом из двух одинаковых приборов — левом и правом — имеется по две лампы. После 100 часов работы в каждом приборе с вероятностью $^1/_4$ перегорает одна лампа и с вероятностью $^1/_{16}$ — обе лампы. Определить вероятность того, что в $n$ парах таких приборов ламп в левых приборах перегорит по крайней мере на $m$ $(m \leqslant 2n)$ больше, чем в правых. Рассчитать эту вероятность для случая, когда $n=m=3$.

9. 20. Матч на звание чемпиона мира по стоклеточным шашкам состоит из двадцати партий. Определить вероятность того, что матч окончится с результатом 12 : 8, если вероятности выигрыша каждой партии для обоих игроков равны 0,2.

9. 21. Для победы в матче за звание чемпиона мира по шахматам претенденту необходимо набрать не менее $12^1/_2$ очков из 24 возможных. При ничейном исходе (12 : 12) звание чемпиона мира сохраняется за чемпионом. Встречаются два равносильных противника, у которых вероятности выигрыша каждой партии в два раза меньше вероятности ничейного исхода. Определить: а) вероятность того, что чемпионом мира останется прежний чемпион и вероятность того, что чемпионом мира станет претендент; б) вероятность того, что в матче будет сыграно двадцать партий.

9. 22. Определить вероятность того, что при бросании $n$ игральных костей (кубиков) сумма очков на верхних гранях будет: а) равна заданному числу $m$; б) не больше $m$.

Найти эти вероятности при $n = 10$, $m = 20$.

9. 23. Определить вероятность получения билета, у которого сумма цифр номера равна 21, если номер билета равновозможен от 0 до 999 999.

9. 24. Показать, что вероятность получения билета, у которого равны суммы первых трех и последних трех цифр номера, совпадает с вероятностью получения билета с номером, сумма цифр которого равна 27, если номер билета равновозможен от 000 000 до 999 999.

9. 25. Каждая из $n$ величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с одинаковой вероятностью может принимать любое целое положительное значение от 1 до $m$. Найти вероятность того, что сумма $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ будет: а) равна заданному числу $N$ ($nm \geqslant N \geqslant n$); б) не меньше заданного числа $N$.

9. 26. Два стрелка производят по три выстрела каждый в свою мишень. Один стрелок при каждом выстреле с одинаковой вероятностью выбивает любое количество очков от 7 до 10, а для другого вероятности выбить 7 или 10 очков равны по $^1/_8$, а вероятности выбить 8 или 9 очков равны по $^3/_8$ каждая. Найти вероятность того, что: а) первый стрелок выбьет 25 очков; б) второй стрелок выбьет 25 очков; в) оба стрелка выбьют одинаковое количество очков.

9. 27. Бросаются две монеты. Определить вероятность того, что равное количество гербов будет при $n$-м бросании монет (не раньше).

9. 28. Определить вероятность необходимости повторного голосования при выборе $l$ человек, если голосуют $n$ человек; вероятность быть вычеркнутым для каждого из $k$ кандидатов одинакова и равна $p$, а для выбора кандидата необходимо получить большинство голосов. Повторное голосование производится в том случае, если будет равное число голосов у $l$-го и $(l + 1)$-го кандидатов (по числу полученных голосов).

9. 29. Две равносильные волейбольные команды играют одну партию. Игра продолжается до тех пор, пока одна команда не будет иметь по крайней мере на два очка больше, чем другая, причем наименьшее необходимое число очков равно 15. Если счет 14 : 14, то игра продолжается до тех пор, пока одна команда не будет иметь на два очка больше, чем другая. Определить вероятности: а) $P_k$ и $Q_k$ выигрыша первой (подающей первый мяч) и второй команд со счетом $15 : k$ ($k = 0, 1, \ldots, 13$); б) $P_{\mathrm{I}}$ и $Q_{\mathrm{I}}$ выигрыша для обеих команд, когда проигравшая команда имеет не более 13 очков; в) $p_k$ и $q_k$ выигрыша со счетом $(16 + k) : (14 + k)$ ($k = 0, 1, \ldots$); г) $P_{\mathrm{II}}$ и $Q_{\mathrm{II}}$ выигрыша, когда каждая команда потеряла не менее 14 очков; д) $P$ и $Q$ выигрыша первой и второй команд.

# ГЛАВА II

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

## § 10. РЯД, МНОГОУГОЛЬНИК И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Случайная величина называется дискретной, если ее частные значения можно пронумеровать.

Дискретная случайная величина может быть задана: 1) рядом распределения; 2) многоугольником распределения; 3) функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения называется совокупность всех частных значений $x_i$ и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$. Ряд распределения обычно дается в виде табл. 2.

*Таблица 2*

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | . . . . . . . . . . . . . . . . | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | . . . . . . . . . . . . . . . . | $p_n$ |

Вероятности $p_i$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

В отдельных случаях ряд распределения может быть задан в виде формулы. Например, для биномиального распределения (см. задачу 10. 10) ряд распределения задается формулой

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (\text{для всех } 0 \leqslant m \leqslant n),$$

которая эквивалентна табл. 3.

*Таблица 3*

| $x_i$ | 0 | 1 | . . . | $m$ | . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $q^n$ | $C_n^1 pq^{n-1}$ | . . . | $C_n^m p^m q^{n-m}$ | . . . | $p^n$ |

Многоугольником распределения называется графическое изображение ряда распределения. Для его построения частные значения случайной величины ($x_i$) откладываются по оси абсцисс, а вероятности $p_i$ — по оси ординат; точки $A_i$ с координатами ($p_i$; $x_i$) соединяются ломаными линиями (рис. 8).

Функцией распределения (интегральным законом распределения) случайной величины $X$ называется функция $F(x)$, равная вероятности

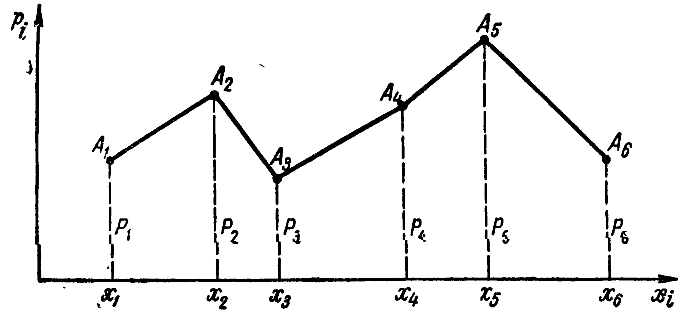

Рис. 8.

$P(x < x)$ того, что случайная величина будет меньше произвольно выбранного значения $x$. Функция $F(x)$ вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование ведется по всем значениям $i$, для которых $x_i < x$.

## Решение типовых задач

Пример 10. 1. Из партии, состоящей из 100 изделий, среди которых имеется 10 бракованных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределения случайного числа $X$ бракованных изделий, содержащихся в выборке.

*Решение*. Так как в выборке, состоящей из пяти изделий, число бракованных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то частные значения $x_i$ случайной величины $X$ равны:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 2;\quad x_4 = 3;\quad x_5 = 4;\quad x_6 = 5.$$

Вероятность $P(X = k)$ того, что в выборке окажется ровно $k$ ($k=0$, 1, 2, 3, 4, 5) бракованных изделий равна

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^k \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}.$$

В результате расчетов по данной формуле с точностью до 0,001 получим:

$$p_1 = P(X = 0) = 0{,}583;\quad p_2 = P(X = 1) = 0{,}340;$$

$$p_3 = P(X = 2) = 0{,}070;$$

$$p_4 = P(X = 3) = 0{,}007;\quad p_5 = P(X = 4) = 0;\quad p_6 = P(X = 5) = 0.$$

По рассчитанным данным выписываем ряд распределения в виде табл. 4.

*Таблица 4*

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,583 | 0,340 | 0,070 | 0,007 | 0 | 0 |

Аналогично решаются задачи 10. 14 и 10. 15.

Пример 10. 2. Изделия испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого изделия пройти испытания равны $^4/_5$ и независимы. Испытания заканчиваются после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Вывести формулу для ряда распределения числа испытаний.

*Решение*. Испытания заканчиваются на $k$-м изделии ($k = 1, 2, 3, \ldots$), если первые $k$—1 изделий пройдут испытания, а $k$-е изделие не выдержит испытаний. Если $X$ — случайное число испытаний, то

$$P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$$

$$(k = 1;\ 2;\ 3;\ \ldots).$$

Полученная формула для ряда распределения эквивалентна табл. 5.

*Таблица 5*

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | . . . | $k$ | . . . |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{5^2}$ | $\frac{4^2}{5^3}$ | . . . | $\frac{4^{k-1}}{5^k}$ | . . . |

Особенность данной задачи состоит в том, что теоретически число испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность такого события стремится к нулю

$$\lim_{k\to\infty} P(X = k) = \lim_{k\to\infty} \frac{4^{k-1}}{5^k} = 0.$$

Аналогично решаются задачи 10. 2, 10. 4, 10. 5, 10. 7, 10. 10 и 10. 12.

Пример 10. 3. На пути движения автомашины четыре светофора. Каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомашине с вероятностью 0,5. Построить многоугольник распределения пройденных автомашиной светофоров до первой остановки.

*Решение*. Случайное число светофоров $X$, пройденных автомашиной до первой остановки, может принимать следующие частные значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$.

Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ того, что число пройденных светофоров $X$ будет равно данному частному значению $x_i$, вычисляются по формуле

$$p_i = P(X = x_i) = \begin{cases} p(1-p)^{i-1} & \text{для } i = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \\ (1-p)^4 & \text{для } i = 5, \end{cases}$$

где $p$ — вероятность светофору задержать автомашину ($p = 0,5$).

В результате вычислений получим: $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}25$; $p_3 = 0{,}125$; $p_4 = 0{,}0625$; $p_5 = 0{,}0625$. По полученным данным строим многоугольник распределения вероятностей (рис. 9).

Аналогично решаются задачи 10. 3, 10. 8, 10. 9.

Пример 10. 4. Космическая ракета имеет прибор, состоящий из четырех блоков $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, дающих отказ при попадании в них хотя бы одной элементарной частицы. Отказ прибора в целом наступает при отказе блока $\alpha$ или одновременном отказе всех трех блоков $\beta$, $\gamma$ и $\delta$.

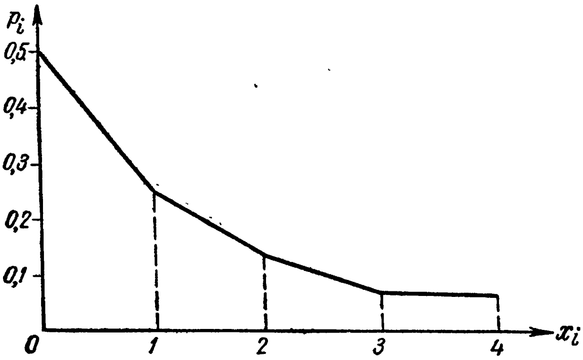


Рис. 9.

Построить функцию распределения $F(x)$ случайного числа $X$ частиц, после попадания которых в прибор он дает отказ, если вероятность частице, попавшей в прибор, попасть в блок $\alpha$ равна $m = 0{,}4$, а в блоки $\beta$, $\gamma$ и $\delta$ соответственно равны $k_1 = k_2 = k_3 = 0{,}2$.

Совместный отказ нескольких блоков при попадании в прибор одной частицы невозможен.

*Решение.* Пусть событие $A$ — отказ прибора, $P_n(\overline{A})$ — вероятность того, что прибор останется пригодным к работе после попадания в него $n$ частиц. Так как при каждом попадании обязательно дает отказ один из блоков, то $m + k_1 + k_2 + k_3 = 1$, а следовательно,

$$P_n(\overline{A}) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=n} C_n^{i_1,\, i_2,\, i_3,\, i_4} m^{i_1} k_1^{i_2} k_2^{i_3} k_3^{i_4},$$

где суммирование ведется по всем возможным значениям целых неотрицательных чисел $i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$, удовлетворяющих двум условиям: 1) $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = n$; 2) при суммировании учитываются только те числа, которые образуют комбинацию, не приводящую к выводу прибора из строя (неповреждающая комбинация).

Произведем отбор неповреждающих комбинаций. Так как $m + k_1 + k_2 + k_3 = 1$, то все возможные вероятности неповреждающих комбинаций находятся среди членов разложения многочлена

$$(m + k_1 + k_2 + k_3)^n = m^n + C_n^1 m^{n-1}(k_1 + k_2 + k_3) + \cdots + C_n^i m^{n-i}(k_1 + k_2 + k_3)^i + \cdots + C_n^{n-1} m (k_1 + k_2 + k_3)^{n-1} + (k_1 + k_2 + k_3)^n.$$

В развернутой сумме все члены, кроме последнего, дают вероятности повреждающих комбинаций и должны быть отброшены. Следовательно, вероятности неповреждающих комбинаций могут быть только среди членов разложения многочлена

$$(k_1 + k_2 + k_3)^n = (k_1 + k_2)^n + C_n^1 (k_1 + k_2)^{n-1} k_3 + \cdots + C_n^{n-1}(k_1 + k_2) k_3^{n-1} + k_3^n.$$

Выделяя эти слагаемые, получим

$$P_n(\overline{A}) = (k_1 + k_2)^n + C_n^1 \left(k_1^{n-1} + k_2^{n-1}\right) k_3 + \cdots + C_n^{n-1}(k_1 + k_2) k_3^{n-1} + k_3^n.$$

Последняя сумма может быть преобразована к виду

$$P_n(\overline{A}) = (k_1 + k_2)^n + (k_1 + k_3)^n + (k_2 + k_3)^n - k_1^n - k_2^n - k_3^n.$$

Итак, вероятность $P_n(A)$ того, что после $n$ опытов прибор выйдет из строя, равна:

$$P_n(A) = 1 - P_n(\overline{A}) = 1 + k_1^n + k_2^n + k_3^n -$$
$$- (k_1 + k_2)^n - (k_1 + k_3)^n - (k_2 + k_3)^n.$$

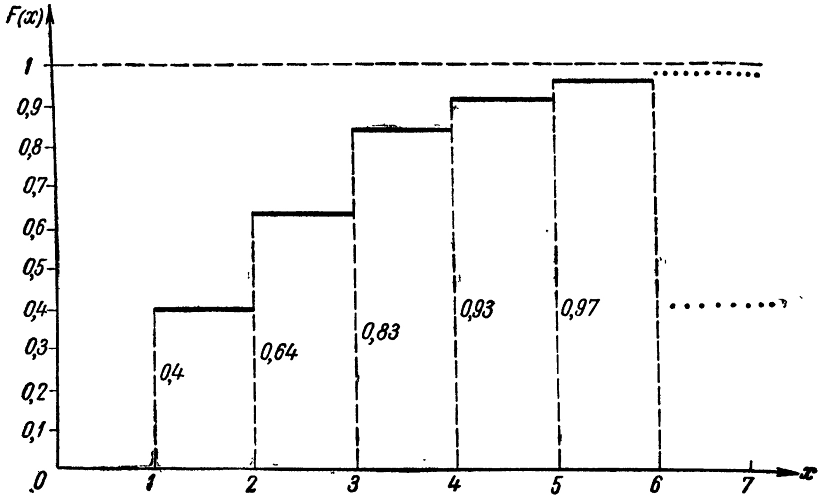


Рис. 10.

Подставляя числовые значения $m$, $k_1$, $k_2$ и $k_3$, получим

$$P_n(A) = 1 + 3\cdot 0{,}2^n - 3\cdot 0{,}4^n = 1 - 3\frac{2^n(2^n-1)}{10^n}.$$

Функция распределения числа опытов, после которого прибор выходит из строя, равна

$$F(x) = 1 - 3\frac{2^{[x]}(2^{[x]}-1)}{10^{[x]}},$$

где под $[x]$ понимается ближайшее целое число, меньшее $x$, например, $[5{,}9] = 5$, $[5] = 4$.

Таким образом, график функции распределения для нескольких начальных значений $x$ имеет вид, представленный на рис. 10.

Аналогично решаются задачи 10. 6 и 10. 11.

## Задачи для упражнений

10. 1. Построить ряд распределения и функцию распределения вероятностей случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p = 0{,}3$.

10. 2. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) функцию распределения вероятностей.

10. 3. Производится набрасывание колец на колышек до первого попадания либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Построить ряд распределения случайного числа брошенных колец, если вероятность наброса равна 0,9.

10. 4. Независимые опыты продолжаются до первого положительного исхода, после чего они прекращаются. Найти для случайного числа опытов: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения; в) наивероятнейшее число опытов, если вероятность положительного исхода при каждом опыте равна 0,5.

10. 5. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряд распределения случайного числа бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого равна 0,4, а для второго 0,6.

10. 6. Мишень состоит из круга № 1 и двух колец с номерами 2, 3. Попадание в круг № 1 дает 10 очков, в кольцо № 2 — 5 очков, в кольцо № 3 — минус 1 очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2, 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Построить ряд распределения для случайной суммы выбитых очков в результате трех попаданий.

10. 7. Опыт производится с помощью серии одинаковых приборов, которые включаются один за другим через 5 сек. Время срабатывания прибора 16 сек. Опыт прекращается сразу же после получения благоприятного исхода на каком-нибудь приборе. Найти ряд распределения для случайного числа включенных приборов, если вероятность благоприятного исхода опыта для каждого прибора равна $^1/_2$.

10. 8. При игре в городки остался невыбитым один городок, а у игрока осталось $n$ бит. Построить ряд распределения числа неиспользованных бит, которые остаются у игрока после того, как последний городок будет выбит, если вероятность выбить городок одним броском равна $p$.

10. 9. В условиях предыдущей задачи построить ряд распределения для случайного числа использованных бит.

10. 10. На колышек одно за другим набрасывается $n$ колец, причем вероятность попадания для каждого броска одна и та же и равна $p$. Построить ряд распределения случайного числа колец, попавших на колышек, если броски независимы.

10. 11. Прибор, состоящий из блоков $a$, $b_1$ и $b_2$, дает отказ в случае осуществления события $C = A + B_1B_2$, где $A$ — отказ блока $a$, $B_1$ и $B_2$ — отказы блоков $b_1$ и $b_2$ соответственно. Отказы происходят при попадании в блок хотя бы одной космической частицы. Построить ряд распределения случайных чисел частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если вероятности попадания в блоки частицы, попавшей в прибор, равны $P(A) = 0{,}5$; $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}25$.

10. 12. Опыт может быть удачным с вероятностью $p$ или неудачным с вероятностью $(1 - p)$. Вероятность получения благоприятного результата при $m$ удачных опытах $G(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m$, при неудачном опыте желаемый результат получен быть не может. Построить ряд распределения числа опытов, которые необходимо поставить для достижения желаемого результата.

10. 13. Число проведенных опытов $X$ случайно и может изменяться в пределах от 1 до $\infty$. Вероятность $P\{X = k\} = \frac{n^k \cdot e^{-n}}{k!}$. Каждый опыт может быть успешным с вероятностью $p$ и неуспешным с вероятностью $(1 - p)$. Построить ряд распределения числа успешных опытов.

10. 14. Вероятность выпадания герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа появления герба $X$ к числу появлений цифры $Y$.

10. 15. Построить ряд распределения суммы цифр трехзначных случайных чисел.

## § 11. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

### Основные формулы

Непрерывной случайной величиной называется такая, которая может принимать любые числовые значения в заданном интервале и для которой существует предел

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x},$$

именуемый плотностью вероятности.

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения (интегральным законом распределения), либо плотностью вероятности $f(x)$ (дифференциальным законом распределения).

Функция распределения вероятности $F(x) = P(X < x)$ дает вероятность того, что случайная величина $X$ окажется меньше произвольно выбранного значения $x$.

Функция распределения вероятности $F(x)$ имеет следующие основные свойства:

1) $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$;

2) $F(x_1) \leqslant F(x_2)$, если $x_1 < x_2$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Плотность вероятности (дифференциальный закон распределения) $f(x)$ обладает следующими основными свойствами:

1) $f(x) \geqslant 0$;

2) $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$;

4) $P(a \leqslant X < b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Плотность вероятности $f(x)$ может быть определена для дискретной случайной величины по формуле

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k),$$

где $x_k$ — частные значения случайной величины,

$p_k$ — соответствующие им вероятности

$$p_k = P(X = x_k),$$

$\delta(x - x_k)$ — дельта-функция.

Дельта-функцией $\delta(x)$ называется такая функция, которая равна нулю всюду, кроме точки $x = 0$, где она обращается в бесконечность и притом так, что интеграл от нее, распространенный на сколь угодно малый отрезок, заключающий точку $x = 0$, равен единице.

Одним из важных аналитических представлений дельта-функции является формула

$$\delta(x - x_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x - x_k)}\, dt.$$

## Решение типовых задач

Пример 11. 1. Функция распределения случайной величины $X$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geqslant a, \\ A + B \arcsin \frac{x}{a} & \text{при} \quad -a < x < a, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant -a. \end{cases}$$

Определить:

а) при каких значениях $A$ и $B$ функция распределения является непрерывной;

б) вероятность того, что случайная величина $X$ окажется в пределах промежутка $\left(-\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$;

в) плотность вероятности $f(x)$ случайной величины $X$.

*Решение.* а) Для того чтобы $F(x)$ была непрерывной функцией, необходимо, чтобы $F(-a) = 0$, а $F(a) = 1$. Из этих условий получаются два уравнения для нахождения неизвестных $A$ и $B$

$$A + B \arcsin\left(\frac{-a}{a}\right) = A - \frac{\pi}{2} B = 0,$$

$$A + B \arcsin\left(\frac{a}{a}\right) = A + \frac{\pi}{2} B = 1.$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}$ и $B = \frac{1}{\pi}$.

Итак, функция распределения случайной величины $X$ равна

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geqslant a, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a} & \text{при} \quad -a \leqslant x \leqslant a, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant -a. \end{cases}$$

б) Вероятность $P\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right)$ того, что случайная величина $X$ окажется в пределах промежутка $\left(-\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$ равна

$$P\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{2a}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(-\frac{a}{2a}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}.$$

в) Плотность вероятности $f(x)$ случайной величины $X$ равна.

1) для всех $x$, принадлежащих промежутку $(-a, a)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}};$$

2) нулю для всех остальных значений $x$.

Получившаяся плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{для } |x| \leqslant a$$

называется законом арксинуса.

Аналогично решаются задачи 11. 1—11. 8.

Пример 11. 2. Плотность вероятности случайной величины равна

$$f(x) = Ax^2e^{-kx} \quad (k > 0,\ 0 \leqslant x < \infty);$$

а) найти коэффициент $A$;

б) вычислить вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал $\left(0, \frac{1}{k}\right)$;

в) найти функцию распределения случайной величины $X$.

*Решение.* а) Коэффициент $A$ определим с помощью равенства

$$\int_0^\infty A\, x^2e^{-kx}dx = 1.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{\int_0^\infty x^2e^{-kx}\,dx}.$$

Двукратным интегрированием по частям получаем

$$\int_0^\infty x^2e^{-kx}\,dx = \frac{2}{k^3}.$$

Следовательно, $A = \frac{k^3}{2}$ и плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}.$$

б) Вероятность $P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right)$ попадания случайной величины $X$ в заданный промежуток вычисляется по формуле

$$P\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = \frac{k^3}{2}\int_0^{\frac{1}{k}} x^2e^{-kx}\,dx = \frac{k^3}{2}\left(-\frac{x^2}{k}e^{-kx} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{k^2}xe^{-kx} - \frac{2}{k^3}e^{-kx}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{k}} = 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}086.$$

в) Функция распределения $F(x)$ случайной величины $X$ определяется по формуле

$$F(x)=\int_0^x \frac{k^3}{2}x^2e^{-kx}dx=1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}.$$

Аналогично решаются задачи 11. 9, 11. 10, 11. 12.

Пример 11. 3. Пусть вызовы на обслуживание электроэнергией образуют простейший поток. Это значит, что вероятность поступления одного вызова на обслуживание за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ и не зависит от числа вызовов за предшествующее время, а вероятность поступления за этот же промежуток времени более одного вызова имеет порядок $o(\Delta t)$. Найти вероятность $P_k(t)$ того, что за промежуток времени $(0, t)$ поступит ровно $k$ вызовов на обслуживание.

*Решение.* Вероятность поступления ровно $k$ вызовов на обслуживание за время $(0, t+\Delta t)$ равна

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)(1-\lambda\Delta t)+P_{k-1}(t)\lambda\Delta t+o(\Delta t).$$

Отсюда

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}=\lambda[P_{k-1}(t)-P_k(t)]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t\to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$, получим

$$P'_k(t)=\lambda\,[P_{k-1}(t)-P_k(t)]\ (k=1, 2, 3., \ldots).$$

Полученная система дифференциальных уравнений решается методом производящих функций.

Возьмем производящую функцию $S(t, x)$ вида

$$S(t, x)=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)x^k,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\sum_{k=0}^{\infty}P'_k(t)x^k=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}x^k[P_{k-1}(t)-P_k(t)]=$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}P_{k-1}(t)x^k-\lambda S=\lambda(x-1)S.$$

Отсюда

$$\frac{1}{S}\cdot\frac{\partial S}{\partial t}=\lambda(x-1)$$

или

$$\frac{\partial\ln S}{\partial t}=\lambda(x-1).$$

Интегрируя уравнение, получим

$$\ln S(t, x)-\ln S(o, x)=\lambda(x-1)t.$$

Так как при $t = 0$ только $P_0(0) = 1$ остальные же $P_k(0) = 0$, то $S(0, x) = P_0(0) = 1$ и, следовательно,

$$\ln S(t, x) = \lambda(x - 1)t$$

или

$$S(t, x) = e^{\lambda(x-1)t} = e^{-\lambda t}e^{\lambda t x} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x^k.$$

Сопоставляя с определением производящей функции, получим решение системы дифференциальных уравнений

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Аналогично решаются задачи 11. 13, 11. 15, 11. 16.

Пример 11. 4. Электронная аппаратура имеет три параллельные дублирующие линии. Вероятность выхода из строя каждой линии за время гарантированного срока работы аппаратуры в целом равна 0,1. Найти плотность вероятности случайного числа вышедших из строя линий за время гарантийного срока, если выход из строя одной линии не зависит от того, работают или вышли из строя другие линии.

*Решение.* Обозначим $X$ случайное число линий, вышедших из строя. Случайная величина $X$ дискретного типа имеет следующий ряд распределения (табл. 6).

*Таблица 6*

| $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

Эта же случайная величина имеет плотность вероятности:

$$f(x) = 0{,}729\delta(x) + 0{,}243\delta(x - 1) + 0{,}027\delta(x - 2) + 0{,}001\delta(x - 3).$$

Аналогично решается задача 11. 17.

## Задачи для упражнений

11. 1. Может ли $F(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ являться функцией распределения случайной величины, изменяющейся в пределах: а) от $-\infty$ до $+\infty$; б) от 0 до $\infty$; в) от $-\infty$ до 0?

11. 2. Может ли функция $\sin x$ быть функцией распределения вероятности случайной величины $X$, изменяющейся в пределах: а) от 0 до $\frac{\pi}{2}$; б) от 0 до $\pi$?

11. 3. Каково должно быть $A$, чтобы $F(x) = A - e^{-x}$ являлась функцией распределения вероятностей случайной величины $X$, изменяющейся в пределах от 0 до $\infty$?

11. 4. Функция распределения вероятностей случайной величины $X$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0 \\ x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{при} \quad 1 < x \end{cases} \quad \text{(закон равномерного распределения)}$$

Найти плотность вероятности случайной величины $X$.

11. 5. Функция распределения вероятности случайной величины $X$ имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{(закон нормального распределения)}$$

Найти плотность вероятности случайной величины $X$.

11. 6. Функция распределения вероятности имеет вид ($\alpha > 0$)

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} & \text{при} \quad x > x_0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant x_0. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности и вероятность нахождения случайной величины в пределах интервала (5; 10), если $x_0 = 3$ и $\alpha = 2$.

11. 7. Функция распределения вероятности случайной величины $X$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{x^2}{25} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ 1 & \text{при} \quad x > 5. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что случайная величина окажется в пределах интервала (3, 6).

11. 8. Функция распределения случайной величины $X$ имеет вид

$$\underset{(-\infty < x < +\infty)}{F(x) = A + B \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2}} \quad \text{(закон Коши)};$$

а) определить постоянные $A$ и $B$;

б) найти плотность вероятности;

в) найти $P(\alpha \leqslant X < \beta)$.

11. 9. Каково должно быть $A$, чтобы $f(x) = Ae^{-x^2}$ являлось плотностью вероятности случайной величины $X$, изменяющейся в бесконечных пределах?

11. 10. При каком значении $A$ функция

$$f(x) = \frac{A}{1 + x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

является плотностью вероятности случайной величины $X$;

а) найти функцию распределения случайной величины $X$;

б) найти вероятность попадания случайной величины в интервал (—1,1).

11. 11. Шкала секундомера имеет цену делений 0,2 сек. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой более 0,05 сек., если отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону.

11. 12. Азимутальный лимб имеет цену делений 1°. Какова вероятность при считывании азимутального угла сделать ошибку в пределах $\pm 10'$.

11. 13. Известно, что вероятность выхода из строя электронной лампы, проработавшей $x$ дней, равна в следующие $\Delta x$ дней $k\Delta x$, независимо от величины $x$. Какова вероятность выхода из строя лампы в течение $l$ дней?

11. 14. Линия трамвая имеет протяженность $L$. Вероятность того, что пассажир сядет в трамвай в окрестности точки $x$, пропорциональна $x(L-x)^2$, а вероятность того, что пассажир, вошедший в точке $x$, выйдет в точке $y$, пропорциональна $(y-x)^h$, $h \geqslant 0$. Найти вероятность того, что: а) пассажир сядет в трамвай ранее пункта $z$; б) пассажир, севший в трамвай в точке $x$, выйдет после пункта $z$.

11. 15. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t=0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента $t$, испытает столкновение в промежутке времени $(t, t+\Delta t)$, равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Найти вероятность $P(t)$ того, что время свободного пробега (т. е. время между двумя соседними столкновениями) будет больше $t$.

11. 16. Считая, что при размножении бактерий делением (на две бактерии) вероятность бактерии разделиться за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна $a\Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от числа предшествующих делений, а также от числа имеющихся бактерий, найти вероятность того, что если в момент $t=0$ была одна бактерия, то в момент $t$ окажется $i$ бактерий.

11. 17. Бросания колец на колышек продолжаются до первого попадания. Найти плотность вероятности случайного расхода колец, если вероятность попадания от броска к броску не меняется и равна 0,5.

## § 12. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

В качестве числовых характеристик случайных величин используются различные параметры:

а) математическое ожидание дискретной случайной величины, обозначаемое $M[X]$ или $\bar{x}$, определяется формулой

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

где $x_i$ — частные значения случайной величины $X$;

$p_i$ — соответствующие им вероятности;

$n$ — общее число частных значений, которое может быть и бесконечным. В последнем случае ряд $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ должен сходиться абсолютно.

Математическое ожидание функции от дискретной случайной величины $X$ вычисляется по формуле

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i).$$

Если $\varphi(X)$ — линейная функция, т. е. $\varphi(X) = aX + b$, то

$$M[aX+b] = aM[X] + b;$$

б) дисперсия дискретной случайной величины $X$ обозначается $D[X]$ и вычисляется по формуле

$$D[X] = M[(X-\bar{x})^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x-\bar{x})^2 .$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma$ случайной величины $X$ связано с дисперсией $D[X]$ соотношением

$$\sigma = +\sqrt{D[X]};$$

в) начальные и центральные моменты $k$-го порядка обозначаются через $m_k$ и $\mu_k$ соответственно и вычисляются для дискретных случайных величин по формулам

$$m_k = M[X^k] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k,$$

$$\mu_k = M[(X - \bar{x})^k] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \bar{x})^k;$$

г) условное математическое ожидание $M[X/A_k]$ дискретной случайной величины определяется формулой

$$M[X/A_k] = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i/A_k) x_i,$$

где $P(X = x_i/A_k)$ — условная вероятность случайной величине $X$ принять значение $x_i$, вычисленная в предположении, что в результате опыта произошло событие $A_k$;

д) полное математическое ожидание определяется формулой

$$M[X] = M[M(X/A_k)] = \sum_{k=1}^{m} P(A_k)\, M[X/A_k],$$

при этом предполагается, что события $A_1, A_2, \ldots, A_m$ образуют полную группу несовместных событий, т. е.

$$\sum_{k=1}^{m} P(A_k) = 1.$$

## Решение типовых задач

Пример 12.1. Партия, насчитывающая 100 изделий, содержит 10 бракованных. Из всей партии случайным образом отбираются с целью проверки качества 5 изделий (случайная выборка). Найти математическое ожидание числа бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

*Решение.* Обозначим черех $X$ — случайное число бракованных изделий, содержащихся в выборке. Случайная величина $X$ принимает следующие частные значения: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$. Вероятности $p_i = P(X = x_i)$ того, что $X$ принимает данное частное значение $x_i$, равны

$$p_i = \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^{5}} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Искомое математическое ожидание

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} (i-1) \frac{C_{10}^{i-1} C_{90}^{6-i}}{C_{100}^{5}} = \frac{1}{C_{100}^{5}} \sum_{j=0}^{5} C_{10}^{j} C_{90}^{5-j} \cdot j.$$

Так как $\sum_{j=0}^{5} C_{10}^{j} C_{90}^{5-j}$ есть коэффициент у $x^5$ в произведении

$$(1+x)^{10}(1+x)^{90}, \quad \text{то} \quad \sum_{j=0}^{5} j C_{10}^{j} C_{90}^{5-j} \quad \text{есть}$$

коэффициент у $x^5$ выражения

$$\frac{\partial}{\partial t}(1+tx)^{10}(1+x)^{90}\Big|_{t=1} = 10x(1+x)^{99}.$$

Следовательно, $\sum_{j=0}^{5} j C_{10}^{j} C_{90}^{5-j} = 10 C_{99}^{4}$, а $\bar{x} = \frac{10 \cdot C_{99}^{4}}{C_{100}^{5}} = 0{,}5$.

Аналогично решаются задачи 12. 1 и 12. 2.

Пример 12. 2. Дискретная случайная величина $X$ задана рядом распределения $p_k = P(X = k)$; $k = 1, 2, 3 \ldots$ Функция $S(u) = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + \cdots$ называется производящей функцией последовательности $\{p_k\}$. Выразить математическое ожидание случайной величины $X$ через производящую функцию.

*Решение.* По определению математического ожидания случайной величины

$$M[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

С другой стороны, значение производной от производящей функции, вычисленное при $u = 1$, равно:

$$S'(1) = \frac{dS(u)}{du}\Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k u^{k-1}\Big|_{u=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k.$$

Следовательно,

$$M[X] = S'(1).$$

Аналогично решаются задачи 12. 3—12. 6 и 12. 24—12. 26.

Пример 12. 3. Опыт может быть успешным с вероятностью $p$ и неуспешным с вероятностью $(1 - p)$.

Условная вероятность достижения намеченного результата после $m$ успешных опытов $G(m)$ равна

$$G(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m.$$

Найти математическое ожидание числа независимых опытов, необходимых для достижения намеченного результата.

*Решение.* Обозначим $P_n(A)$ вероятность достижения намеченного результата при $n$ опытах. Если $P_{n\ m}$ — вероятность иметь ровно $m$ успешных опытов из общего числа $n$ опытов, то согласно формуле полной вероятности

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,\,m} G(m).$$

Так как опыты независимы и вероятность успешного исхода в каждом из них равна $p$, то

$$P_{n,\,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Подставляя в формулу для $P_n(A)$ значения $P_{n,m}$ и $G(m)$, получим

$$P_n(A) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m\right\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left[p\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)\right]^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= 1 - \left[p\left(1 - \frac{1}{\omega}\right) + (1-p)\right]^n = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n.$$

Для достижения намеченного результата потребуется ровно $n$ опытов, если при $n$-м опыте он будет достигнут. Вероятность последнего события равна $P_n(A) - P_{n-1}(A)$. Следовательно, $M[X]$ — математическое ожидание случайного числа опытов, необходимых для достижения намеченного результата,

$$M[X] = \sum_{n=1}^{\infty} n[P_n(A) - P_{n-1}(A)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n\right\} =$$

$$= \frac{p}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{n-1}.$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся известным равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{для} \quad |x| < 1,$$

получающимся путем дифференцирования бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

В результате имеем

$$M[X] = \frac{p}{\omega}\,\frac{1}{\left[1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)\right]^2} = \frac{\omega}{p}.$$

Аналогично решаются задачи 12. 10—12. 15, 12. 21 и 12. 31.

Пример 12. 4. Прибор имеет $n$ предохранителей. В случае перегрузки сгорает один из предохранителей, который заменяется новым. Каково среднее число перегрузок, после которых в приборе окажутся замененными все первоначально установленные предохранители, если выход из строя в момент перегрузки любого из $n$ предохранителей равновозможен?

*Решение.* Обозначим $M(k)$ математическое ожидание числа перегрузок, после которых выходят из строя $k$ первоначально установленных предохранителей из общего числа их $n$.

Для вычисления $M(k)$ воспользуемся формулой полного математического ожидания. Если остались незамененными $k$ предохранителей ($k \geqslant 1$), то для повреждения одного из них потребуется очередная перегрузка. В зависимости от результатов очередной перегрузки будут различными средние числа перегрузок, необходимых для сгорания предохранителей, оставшихся из числа первоначально установленных. При очередной перегрузке могут произойти два события:

$A_1$ — сгорел один из первоначально установленных предохранителей, вероятность чего $P(A_1) = \frac{k}{n}$;

$A_2$ — сгорел замененный предохранитель, вероятность чего $P(A_2) = 1 - \frac{k}{n}$.

Если при очередной перегрузке произойдет событие $A_1$, то для замены всех $k$ предохранителей, не замененных до очередной перегрузки, потребуется $1 + M(k-1)$ перегрузок. Если же при очередной перегрузке произойдет событие $A_2$, то для полной замены предохранителей потребуется $1 + M(k)$ перегрузок. Следовательно, на основании формулы полного математического ожидания имеем

$$M(k) = \frac{k}{n}[1 + M(k-1)] + \left(1 - \frac{k}{n}\right)[1 + M(k)] =$$

$$= 1 + \frac{k}{n}M(k-1) + \frac{n-k}{n}M(k)$$

или после несложных преобразований

$$M(k) - M(k-1) = \frac{n}{k}.$$

Если $k = 1$, т. е. остался лишь один незамененный предохранитель, то вероятность его замены равна $\frac{1}{n}$. Следовательно, на основании примера 12. 3, будем иметь

$$M(1) = n.$$

Итак, имеем цепь равенств

$$M(n) - M(n-1) = \frac{n}{n};$$

$$M(n-1) - M(n-2) = \frac{n}{n-1};$$

. . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . .

$$M(3) - M(2) = \frac{n}{3};$$

$$M(2) - M(1) = \frac{n}{2};$$

$$M(1) = n.$$

Суммируя приведенные равенства, получим

$$M(n) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n,$$

или

$$M(n) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right).$$

Аналогично решаются задачи 12. 16, 12. 20, 12. 22 и 12. 23.

Пример 12. 5. В результате испытаний двух приборов ($A$ и $Б$) установлена вероятность наблюдения помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 7).

*Таблица 7*

| Уровень помех | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Вероятность наблюдения помех данного уровня | Прибор $A$ | 0,20 | 0,06 | 0,04 |
| | Прибор $Б$ | 0,06 | 0,04 | 0,10 |

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим является тот, который в среднем имеет меньший уровень помех.

*Решение.* Обозначим через $X$ случайный уровень помех. Средний уровень помех для прибора $A$

$$M_A[X] = 0,20 \cdot 1 + 0,06 \cdot 2 + 0,04 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Для прибора $Б$

$$M_Б[X] = 0,06 \cdot 1 + 0,04 \cdot 2 + 0,10 \cdot 3 = 0,44 \text{ балла.}$$

Итак, по среднему баллу оба прибора равноценны.

В качестве дополнительного критерия сравнения используем среднее квадратическое отклонение уровня помех

$$\sigma_A = \sqrt{D_A[X]} = \sqrt{M_A[X^2] - (\bar{x}_A)^2} = \sqrt{0,80 - 0,44^2} \approx 0,78 \text{ балла,}$$

$$\sigma_Б = \sqrt{D_Б[X]} = \sqrt{M_Б[X^2] - \bar{x}_Б^2} = \sqrt{1,12 - 0,44^2} \approx 0,96 \text{ балла.}$$

Таким образом, прибор $A$ дает более устойчивые показания относительно средних и, следовательно, он лучше прибора $Б$.

## Задачи для упражнения

12. 1. Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа $p$.

12. 2. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 1, 2, 5, 10 среднее число потребных для взвешивания гирь будет наименьшим (при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашку)?

12. 3. Испытуемый прибор состоит из пяти малонадежных элементов. Отказы элементов независимы, а вероятности их для элементов с номером $i$ равны

$$p_i = 0,2 + 0,1\,(i - 1).$$

Определить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов.

12. 4. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равна $p_1$, $p_2$ и $p_3$. Доказать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равно $p_1 + p_2 + p_3$.

12. 5. Определить математическое ожидание числа приборов, отказавших в работе за время испытаний, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна $p$, а число испытуемых приборов $n$.

12. 6. В лотерее имеется $m_1$ выигрышей стоимостью $k_1$, $m_2$ — стоимостью $k_2$, . . ., $m_n$ — стоимостью $k_n$. Всего билетов $N$. Математическое ожидание проигрыша на один билет равно половине стоимости билета. Определить стоимость билета.

12. 7. Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковые монеты. Выигрывает и получает все 5 монет тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

12. 8. Три игрока $A$, $B$, $C$ играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют $A$ с $B$. Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза. При этом он получает сумму $m$ рублей. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого игрока: а) после первой партии, при условии, что $A$ ее выиграл; б) в начале игры?

12. 9. Три игрока $A$, $B$, $C$ играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют $A$ с $B$. Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна $\frac{1}{2}$. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза; при этом он получает сумму выигрыша, равную числу всех сыгранных партий. Каково математическое ожидание выигрыша для игроков $A$ и $C$ до начала игры?

12. 10. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью $p$. Переналадка линии производится сразу после первого же бракованного изделия. Найти среднее число всех изделий, изготовленных между двумя переналадками линии.

12. 11. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой равна 0,2 при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 сек. до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 сек. Найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двусторонней связи.

12. 12. Найти математическое ожидание и дисперсию числа изделий, изготовляемых на поточной линии при нормальной настройке за период между двумя переналадками, если при нормальной настройке вероятность изготовления бракованного изделия равна $p$, а переналадка производится после изготовления $k$-го бракованного изделия.

12. 13. Функция распределения вероятностей числа отказавших элементов, после которых наступает отказ прибора, имеет вид

$$F(m) = 1 - e^{-\alpha m} \quad (\alpha > 0).$$

Найти $M$ [M] и $D$ [M].

12. 14. Блокировочная схема, состоящая из реле $A$, включенного последовательно с двумя реле $B$ и $C$, соединенных параллельно, должна обеспечить замыкание цепи между клеммой I и II (рис. 11). Вследствие неисправности реле $A$ может не сработать с вероятностью 0,18, а реле $B$ и $C$ с одинаковыми вероятностями равными 0,22. Определить среднее

число включений схемы до первого несрабатывания блокировочной схемы.

12. 15. Прибор имеет элементы $A$, $B$ и $C$, уязвимые к космическому излучению и дающие отказ при попадании в них хотя бы одной частицы. Отказ прибора наступает в случае отказа элемента $A$ или совместного отказа элементов $B$ и $C$. Определить среднее число частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если условные вероятности попадания в элементы $A$, $B$ и $C$ частиц, уже попавших в прибор, соответственно равны 0,1; 0,2; 0,2.

12. 16. Прибор имеет $n$ элементов типа $A$ и $m$ элементов типа $B$. В случае отказа элементов типа $A$ они не заменяются, а работа прибора продолжается до тех пор, пока есть в схеме хотя бы один исправный элемент типа $A$. Элементы типа $B$ в случае отказа вводятся в действие повторным включением так, что число исправных элементов типа $B$ в схеме остается постоянным. Отказ любого из исправных элементов прибора равновозможен. Определить среднее число отказов элементов, приводящих к полному отказу прибора, т. е. к выходу из строя всех $n$ элементов типа $A$.

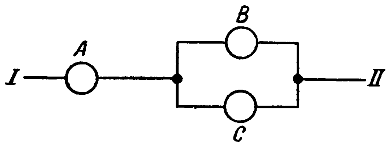

Рис. 11.

12. 17. Доказать, что дисперсия числа появлений события при однократном производстве опыта не превосходит $^1/_4$.

12. 18. Определить условия, для которых третий центральный момент биномиального распределения равен нулю.

12. 19. Функция распределения случайной величины $X$ задана равенством:

$$F(x) = \sum_{m<x} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} np = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} D[X] = a$.

12. 20. Из урны, содержащей весьма большое число белых и черных шаров, смешанных в равной пропорции, вынимается последовательно 10 шаров. Шары, вынутые после появления черного шара, откладываются во вторую урну (если первыми появляются белые шары, то они возвращаются в первую урну). Определить математическое ожидание числа белых и черных шаров во второй урне.

Решить ту же задачу в предположении, что число $n$ вынутых шаров является случайным и подчиняется закону Пуассона с параметром $a = 10$, т. е.

$$P(n = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

12. 21. Игра заключается в том, что монета бросается до появления герба. Если герб выпал при $k$-м бросании монеты, то игрок $A$ получает $k$ рублей от игрока $B$. Сколько рублей должен уплатить игрок $A$ игроку $B$ перед началом игры для того, чтобы игра была безобидной?

12. 22. Автоколонна может прибыть на станцию обслуживания в любой момент времени. При организации дежурства $n$ ремонтных рабочих способом $A$ среднее число обслуживаемых машин равно $np$. При организации дежурства способом $B$ будет обслужено: $n[1-(1-p)^2]$ машин, если автоколонна прибудет в первые две четверти суток; $np$ машин, если автоколонна прибудет в третью четверть суток; $0{,}5np$ машин, если автоколонна прибудет в четвертую четверть суток.

При каких значениях $p$ следует предпочесть организацию дежурства способом $B$.

12. 23. Рабочий обслуживает $n$ однотипных станков, расположенных в ряд с равными промежутками $a$. Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, который раньше других потребовал обслуживания. Предполагая, что неполадка в любом из $n$ станков равновероятна, вычислить среднее значение длины перехода рабочего.

12. 24. Случайная величина $X$ может получать любые целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Выбрать первый член и знаменатель прогресии $q$ так, чтобы математическое ожидание величины $X$ было равно 10 и вычислить при этом условии вероятность $P_{10}$ того, что $X \leqslant 10$.

12. 25. Случайная величина $X$ может иметь любое целое положительное значение $n$ с вероятностью, пропорциональной $\frac{1}{3^n}$.

Найти математическое ожидание $X$.

12. 26. Опыт организован таким образом, что случайная величина $X$ принимает значение $\frac{1}{n}$ с вероятностью $\frac{1}{n}$, где $n$ — любое целое положительное число. Найти $M[X]$.

12. 27. Игра состоит в том, что повторяются независимые опыты, в каждом из которых событие $A$ может произойти с вероятностью $p$. Если событие $A$ произошло в $n > 0$ опытах подряд, а в $(n+1)$-м опыте не произошло, то первый игрок получает от второго игрока $y^n$ рублей. Если же $n = 0$, то первый игрок платит второму игроку 1 рубль. Требуется найти величину $y$ при условии, что игра будет безобидной. Рассмотреть пример $p = \frac{1}{13}$.

12. 28. Из сосуда, содержащего $m$ белых и $n$ черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание числа вынутых черных шаров и его дисперсию, если каждый шар после извлечения возвращался.

12. 29. Даны два ящика с белыми и черными шарами; в первом ящике при общем числе шаров $N$ находится $M$ белых шаров, а во втором ящике имеется $M_1$ белых шаров при общем числе $N_1$ шаров. Из обоих ящиков вынимается одновременно наудачу по одному шару, который кладется в другой ящик. Перемешав шары в обоих ящиках, тот же процесс двойного перекладывания повторяется $k$ раз. Определить математическое ожидание числа белых шаров в первом ящике по окончании указанных $k$ опытов. Рассмотреть случай $k \to \infty$.

12. 30. Связь с дрейфующей станцией могут поддерживать $n$ радиостанций. Вступает в двустороннюю связь та, которая первой примет позывные дрейфующей станции, причем это событие равновероятно для всех $n$ радиостанций $\left(p = \frac{1}{n}\right)$. Дрейфующая станция будет устанавливать связь $m$ раз. Определить вероятность того, что радиостанция № 1 вступит в двустороннюю связь $k$ раз. Найти для нее же математическое ожидание и дисперсию числа вступлений в двустороннюю связь.

12. 31. Независимые испытания аппаратуры повторяются до тех пор пока она не даст отказ. Вероятность отказа от испытания к испытанию не меняется и равна $p$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа безотказных испытаний.

12. 32. Двое поочередно бросают монету до тех пор, пока у обоих не выпадает одинаковое число гербов. Вероятность того, что после

$2n$ бросаний у обоих будет одинаковое количество гербов, равна $p_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}$. Определить математическое ожидание числа бросаний.

## § 13. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Математическое ожидание $\bar{x} = M[X]$ и дисперсия $D[X]$ случайной величины $X$, имеющей плотность вероятности $f(x)$, вычисляются по формулам

$$\bar{x} = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x)\, dx.$$

В первом случае предполагается, что интеграл сходится абсолютно. Математическое ожидание функции случайной величины $X$

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Математические ожидания и дисперсии непрерывных случайных величин обладают такими же свойствами, что и аналогичные вероятностные характеристики дискретных случайных величин. Среднее квадратическое отклонение $\sigma$ определяется формулой

$$\sigma = + \sqrt{D[X]}.$$

Для симметричного закона распределения характеристикой рассеивания случайной величины может служить срединное отклонение $E$, определяемое из условия

$$P\{|X - \bar{x}| < E\} = \frac{1}{2}.$$

Начальный момент $k$-го порядка ($m_k$) и центральный момент $k$-го порядка ($\mu_k$) вычисляются по формулам

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx,$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^k f(x)\, dx.$$

### Решение типовых задач

Пример 13.1. Плотность вероятности случайных амплитуд боковой качки корабля имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x \geqslant 0).$$

Определить:

а) математическое ожидание $M[X]$,

б) дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma$;

в) центральные моменты третьего и четвертого порядков $\mu_3$ и $\mu_4$.

*Решение.* При решении данной задачи возникает необходимость в вычислении интегралов вида

$$J_n = \int_0^\infty t^n e^{-t^2} dt \quad (n > 0 \text{ целое}),$$

которые с помощью подстановки $t^2 = u$ приводятся к известному интегралу Эйлера

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du \quad (p > 0),$$

определяющему гамма-функцию, т. е.

$$J_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

На основании свойства гамма-функции $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, при $p$ целом $\Gamma(p+1) = p!$, а

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, при целом $k$

$$J_{2k} = \frac{1}{2} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi},$$

где

$$(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3)(2k-5) \cdots 7.\ 5.\ 3.\ 1;$$

$$J_{2k+1} = \frac{1}{2} \Gamma(k+1) = \frac{k!}{2}.$$

Последние две формулы могут быть получены и непосредственно повторным интегрированием по частям исходной формулы для $J_n$, не пользуясь свойствами гамма-функции.

а) Математическое ожидание случайной амплитуды боковой качки равно

$$\bar{x} = M[X] = \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Произведя замену переменных интегрирования, положив $\frac{x}{\sigma\sqrt{2}} = t$, получим

$$M[X] = 2\sqrt{2}\sigma \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2}\,\sigma J_2 = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sigma = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Итак,

$$\bar{x} = M[X] = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

б) Так как $D[X] = M[X^2] - \bar{x}^2$, то достаточно вычислить второй начальный момент

$$M[X^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Произведя ту же замену переменных, получим

$$M[X^2] = 4\sigma^2 \int_0^\infty t^3 e^{-t^2} dt = 4\sigma^2 J_3 = 4\sigma^2 \frac{1}{2} = 2\sigma^2.$$

Отсюда

$$D[X] = 2\sigma^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} = \sigma^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_x$ случайной величины $X$

$$\sigma_x = \sigma\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}.$$

в) При вычислении центрального момента третьего порядка удобнее его выразить через начальные моменты

$$\mu_3 = M[(X - \bar{x})^3] = \int_0^\infty (x - \bar{x})^3 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = m_3 - 3\bar{x}m_2 + 2\bar{x}^3.$$

Величины $\bar{x} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $m_2 = 2\sigma^2$ известны; остается вычислить

$$m_3 = \int_0^\infty x^3 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

или

$$m_3 = 4\sqrt{2}\,\sigma^3 \int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt = 4\sqrt{2}\,\sigma^3 J_4 = 4\sqrt{2}\,\sigma^3 \frac{3}{8}\sqrt{\pi} = 3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Подставляя значения $\bar{x}$, $m_2$ и $m_3$ в формулу для $\mu_3$, получим

$$\mu_3 = 3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 3\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,2\sigma^3 + 2\left(\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^3 = \sigma^3(\pi - 3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Аналогично для центрального момента четвертого порядка получим

$$\mu_4 = M[(X - \bar{x})^4] = \int_0^\infty (x - \bar{x})^4 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = m_4 - 4\bar{x}m_3 + 6\bar{x}^2 m_2 - 3\bar{x}^4.$$

Начальный момент четвертого порядка

$$m_4 = \int_0^\infty x^4 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 8\sigma^4 \int_0^\infty t^5 e^{-t^2} dt = 8\sigma^4 J_5 = 8\sigma_4.$$

Подставляя $\bar{x}$, $m_2$, $m_3$ и $m_4$ в формулу для $\mu_4$, получим

$$\mu_4 = \sigma^4\left(8 - \frac{3}{4}\pi^2\right).$$

Аналогично решаются задачи 13. 1—13. 13 и 13. 22—13. 25.

Пример 13. 2. Найти срединное отклонение случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

*Решение.* Так как плотность вероятности симметрична относительно нуля, то $\bar{x}=0$. Срединное отклонение $E$ вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2}=P\{|X-\bar{x}|<E\}=\int_{-E}^{E}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx=\int_{0}^{E}e^{-x}\,dx=1-e^{-E}.$$

Отсюда $E=\ln 2=0{,}6931$.

Аналогично решаются задачи 13. 1 и 13. 4.

Пример 13. 3. Материальная точка под действием центральной силы описывает эллиптическую траекторию. Известна большая полуось $a$ эллипса и его эксцентриситете.

Предполагая, что с одинаковой вероятностью возможно наблюдение за движущейся точкой в любой момент времени, определить математическое ожидание и дисперсию дальности в момент наблюдения, если наблюдатель находится в притягивающем центре, расположенном в одном из фокусов эллипса.

*Решение.* Пусть $T$ — время полного оборота точки по орбите. Обозначим $R(t)$ дальность наблюдения в момент $t$. Так как плотность вероятности моментов наблюдения в пределах промежутка $(0, T)$ постоянна, то математическое ожидание дальности наблюдения

$$\bar{r}=M[R]=\int_{0}^{T}r(t)\frac{1}{T}\,dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}r(t)\,dt.$$

Перейдем от переменного времени $t$ к переменному полярному углу $u$, изменяющемуся в пределах от 0 до $2\pi$. Так как материальная точка движется под действием центральной силы, то имеет место интеграл площадей $r^2\dot{u}=c$ (где $c$ — постоянная величина), откуда следует, что

$$dt=\frac{1}{c}r^2\,du,\qquad T=\frac{1}{c}\int_{0}^{2\pi}r^2(u)\,du,$$

$$\bar{r}=\frac{1}{cT}\int_{0}^{2\pi}r^3(u)\,du.$$

Подставляя в последнее равенство $cT=\int_{0}^{2\pi}r^2(u)\,du$, получим

$$\bar{r}=\frac{\int_{0}^{2\pi}r^3(u)\,du}{\int_{0}^{2\pi}r^2(u)\,du},$$

где в соответствии с уравнением эллипса $r(u)=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos u}$.

Аналогично дисперсия

$$D[R]=\int_{0}^{T}(r-\bar{r})^2\frac{dt}{T}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}r^2\,dt-\bar{r}^2$$

после перехода к новой переменной принимает вид

$$D[R]=\frac{\int\limits_0^{2\pi} r^4(u)\,du}{\int\limits_0^{2\pi} r(u)\,du}-\bar{r}^2.$$

Таким образом, для определения $\bar{r}$ и $D[R]$ необходимо вычислить интеграл вида

$$A_n=\int\limits_0^{2\pi}\frac{du}{(1-e\cos u)^n}\quad (\text{при } n>0 \text{ целом}).$$

Для него справедлива рекуррентная формула

$$A_n=\frac{2n-3}{(n-1)(1-e^2)}A_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(1-e^2)}A_{n-2}.$$

Так как

$$A_0=\int\limits_0^{2\pi}du=2\pi,$$

$$A_1=\int\limits_0^{2\pi}\frac{du}{1-e\cos u}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}},$$

то, применяя рекуррентную формулу, получим

$$A_2=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}};\qquad A_3=\frac{\pi(2+e^2)}{(1-e^2)^{5/2}};\qquad A_4=\frac{2\pi}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right).$$

Следовательно,

$$\bar{r}=a(1-e^2)\frac{A_3}{A_2}=a\left(1+\frac{e^2}{2}\right),$$

$$D[R]=a^2(1^2+e^2)\frac{A_4}{A_2}-\bar{r}^2=\frac{1}{2}a^2e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right).$$

Аналогично решаются задачи 13. 14—13. 16 и 13. 26—13. 31.

## Задачи для упражнений

13. 1. Плотность вероятности случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2l} & \text{при } |x-a|\leqslant l,\\ 0 & \text{при } |x-a|>l.\end{cases}$$

Определить:
а) $M[X]$;
б) $D[X]$;
в) найти связь между средним квадратическим и срединным отклонениями случайной величины $X$.

13. 2. Функция распределения случайной величины $X$ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant -1,\\ a+b\arcsin x & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{при } 1\leqslant x.\end{cases}$$

Определить постоянные $a$ и $b$.

Найти $M[X]$ и $D[X]$.

13. 3. Плотность вероятности случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{\rho}{E} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E^2}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

13. 4. Плотность вероятности случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a \leqslant x \leqslant a).$$

Определить дисперсию и срединное отклонение.

13. 5. Плотность вероятности случайных амплитуд $A$ боковой качки корабля определяется формулой

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

Одинаково ли часто встречаются амплитуды меньшие и большие средней?

13. 6. Скорость молекул газа имеет плотность вероятности

$$f(v) = Av^2 e^{-h^2 v^2} \quad (v \geqslant 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию скорости молекул, а также величину $A$ при заданном $h$.

13. 7. Плотность вероятности случайной величины $X$ задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{x^m}{m!} e^{-x} & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(показательно-степенное распределение).

Определить $M[X]$ и $D[X]$.

13. 8. Функция распределения вероятности имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^3}{x^3} & \text{при } x \geqslant x_0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant x_0. \end{cases}$$

Найти $M[X]$ и $D[X]$.

13. 9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \text{ (распределение Лапласа).}$$

13. 10. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} Ax^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \text{(гамма-распределение)}$$

$$(\alpha > -1, \ \beta > 0).$$

Определить параметр $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

13. 11. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности вида (бета-распределение):

$$f(x) = \begin{cases} Ax^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1, \end{cases}$$

$$(a > 0, \ b > 0).$$

Определить параметр $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

13. 12. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = A(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где $n > 1$ — целое положительное число. Определить постоянную $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

13. 13. Плотность вероятности неотрицательной случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x) = Ax^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $n$ — положительное целое число.

Определить $A$, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$.

13. 14. Каково математическое ожидание длины хорды, соединяющей заданную точку окружности радиуса $R$ с произвольной точкой этой окружности?

13. 15. На отрезке длиной $l$ произвольно выбраны две точки $M$ и $M'$. Каково математическое ожидание длины отрезка $MM'$?

13. 16. Каково математическое ожидание длины хорды, проведенной в круге радиуса $R$ параллельно заданному направлению?

13. 17. Доказать, что при выполнении условий

$$\lim_{x\to-\infty}[xF(x)] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}\{x[1-F(x)]\} = 0$$

для математического ожидания случайной величины справедливо равенство

$$M[X] = \int_0^\infty [1-F(x)]\,dx - \int_{-\infty}^0 F(x)\,dx.$$

13. 18. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска $t$ задается формулой

$$p(t) = 1 - e^{-\gamma t} \quad (\gamma > 0).$$

Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

13. 19. Определить математическое ожидание $m(t)$ массы радиоактивного вещества спустя время $t$, если в начальный момент масса вещества была $m_0$, а вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянна и равна $p$.

13. 20. Определить время полураспада радиоактивного вещества, если вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянна и равна $p$. (Время полураспада $T_n$ определяется моментом, когда масса радиоактивного вещества в среднем уменьшается вдвое.)

13. 21. Обработка результатов одной переписи показала, что дифференциальный закон распределения возраста лиц, занимающихся научной работой, может быть представлен формулой

$$f(t) = k(t - 22{,}5)(97{,}5 - t)^5 \quad (t \text{ — время, годы}).$$

Определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

13. 22. Поезда метрополитена идут с интервалом 2 минуты. Пассажир выходит на платформу в произвольный момент времени. Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания поезда.

13. 23. Найти начальные моменты $m_k$ распределения Стьюдента, задаваемого плотностью вероятности,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{при } k < n.$$

13. 24. Случайная величина $X$ подчиняется бета-распределению, т. е. имеет плотность вероятности

$$f(x, p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

$$(0 < x < 1;\ p > 0;\ q > 0)$$

Найти начальный момент $k$-го порядка.

13. 25. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ плотность вероятности $\frac{2}{\pi}\cos^2 x$.

13. 26. Номинальный размер шарика 10 *мм*. Шарики, не проходящие через круглое отверстие диаметром 10,1 *мм* и проходящие через отверстие диаметром 9,9 *мм*, бракуются. Шарики изготовлены из стали удельным весом 7,8 *Г/см*$^3$. Найти математическое ожидание и дисперсию веса $G$ шарика, считая распределение радиуса шарика в поле допуска равномерным.

13. 27. Неподвижная точка $O$ находится на высоте $h$ над концом $A$ горизонтального отрезка $AK$ длиной $l$. На отрезке $AK$ находится случайная точка $X$, все положения которой на отрезке $AK$ равновероятны. Найти математическое ожидание угла $\varphi$ между линиями $OA$ и $OX$.

13. 28. Ножки циркуля, каждая длиной 10 *см*, раздвинуты на случайный угол $\varphi$, значения которого в пределах от 0 до 180° равновероятны. Найти математическое ожидание расстояния между остриями ножек.

13. 29. Основание равнобедренного треугольника — случайный отрезок, длина которого равномерно распределена в пределах от 0 до 5 *см*. Найти математическое ожидание угла при вершине, если боковые стороны треугольника равны 50 *м*.

13. 30. Колесу придается вращение, которое затухает вследствие трения; фиксированный радиус $R$, останавливаясь, образует с горизонтом случайный угол $\varphi$, который равномерно распределен в пределах от 0 до 360°. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния конца радиуса $R$ от горизонтального диаметра.

13. 31. Две точки находятся на противоположных сторонах $a$ прямоугольника (другие две стороны $b$). Предположив распределение вероятности для каждой точки равномерным, определить вероятность $P(z)$ того,

что расстояние между ними $Z < z$, а также математическое ожидание $M[Z]$.

13. 32. Выразить центральный момент $\mu_k$ через начальные моменты.

13. 33. Выразить начальный момент $k$-го порядка через центральные моменты и математическое ожидание $\bar{x}$.

## § 14. ЗАКОН ПУАССОНА

### Основные формулы

Законом распределения Пуассона называется ряд распределения случайной величины $X$ вида

$$P(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a = M[X]$.

Закон Пуассона может быть применен в качестве аппроксимирующей функции биномиального распределения, когда вероятность $p$ появления события $A$ в каждом отдельном опыте мала, а число $n$ производимых опытов велико. В этом случае имеет место приближенное равенство

$$P_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a = np$.

### Решение типовых задач

П р и м е р 14. 1. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов за год?

*Решение.* Считая случайное число $X$ отказавших элементов подчиняющимся закону Пуассона

$$P(X = m) = P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

где $a = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$, получим:

1) вероятность отказа ровно двух элементов

$$P(X = 2) = P_2 = \frac{a^2}{2!} e^{-a} = \frac{1}{2e} = 0{,}184;$$

2) вероятность отказа не менее двух элементов

$$P(X \geqslant 2) = \sum_{m=2}^{\infty} P_m = 1 - \sum_{m=0}^{1} P_m = 1 - P_0 - P_1 =$$

$$= 1 - e^{-a}(1 + a) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264.$$

Аналогично решаются задачи 14. 1—14. 7.

П р и м е р 14. 2. При разрыве баллона в процессе испытания на прочность образовалось 100 осколков, распределившихся в конусе разлета, ограниченном углами 30° и 60° (рис. 12), равномерно. Найти математическое ожидание и дисперсию числа осколков, приходящихся на 1 $м^2$ части поверхности сферы, находящейся внутри конуса разлета, если радиус сферы 50 *м*, а центр ее совпадает с точкой разрыва.

*Решение.* Пересечем конус разлета осколков сферой радиуса 50 *м* и определим среднее число осколков, приходящихся на единицу площади поверхности шарового пояса, образовавшегося в результате пересечения конуса разлета со сферой. Обозначим $S$ площадь поверхности шарового пояса:

$$S = 50^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= 5000\pi \left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2500\pi \left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 5725 \text{ м}^2.$$

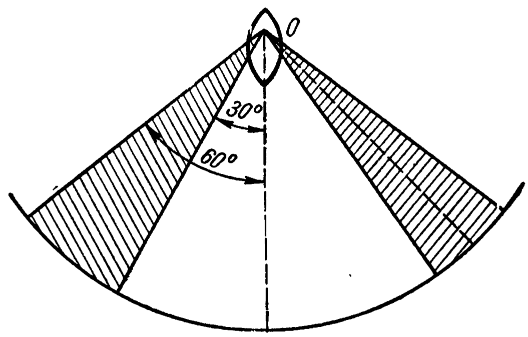


Рис. 12.

Так как общее число осколков $N = 100$, то среднее число их $a$, приходящееся на единицу площади шарового пояса, будет

$$a = \frac{N}{S} = \frac{100}{5725} = 0{,}01745 \text{ осколков.}$$

Учитывая, что вероятность попадания данного осколка в данную площадку $S_0 = 1$ $м^2$ мала (она равна $\frac{S_0}{S} = 1{,}75 \cdot 10^{-4}$), можно считать, что случайное число осколков $X$, приходящихся на 1 $м^2$ поверхности сферы, распределено по закону Пуассона, и, следовательно, имеет место равенство

$$D[X] = M[X] = a = 0{,}01745.$$

Аналогично решаются задачи 14. 10 и 14. 12.

## Задачи для упражнений

14. 1. Радиоаппаратура за 10 000 часов работы в среднем выходит из строя 10 раз. Определить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 100 часов работы.

14. 2. Вероятность любому абоненту позвонить на коммутатор в течение часа равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонит 4 абонента?

14. 3. Аппаратура содержит 2000 одинаково надежных элементов, вероятность отказа для каждого из них равна $p = 0{,}0005$. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

14. 4. В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за время 30 сек., в течение которых телефонистка отлучилась, не будет ни одного вызова?

14. 5. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытание. Сравнить результаты расчетов, полученных с использованием распределения Пуассона и с использованием биномиаль-

ного распределения. В последнем случае расчет производить с помощью семизначных таблиц логарифмов.

14. 6. Сколько изюма должны содержать в среднем сдобные булочки для того, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюмину в булочке была не меньше 0,99, предполагая при этом распределение вероятностей числа изюминок в булочке пуассоновским?

14. 7. Определить знак коэффициента асимметрии случайной величины, распределенной по закону Пуассона. (Коэффициентом асимметрии называется отношение $\mathrm{Sk} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.)

14. 8. В аппаратурный отсек космической ракеты с вероятностью

$$P(r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$$

попадает $r$ элементарных частиц, а вероятность отказа аппаратуры при попадании в отсек частицы равна $p$. Предполагая взаимную независимость отказов аппаратуры при попадании в отсек частиц, вычислить: а) вероятность попадания в отсек ровно $k$ частиц, вызывающих отказ аппаратуры; б) вероятность попадания в отсек хотя бы одной частицы, вызывающей отказ аппаратуры.

14. 9. Корректура книги в 500 страниц содержит 500 исправлений. Определить вероятность того, что на странице не меньше трех опечаток, если для распределения вероятностей числа опечаток на одной странице имеет место закон Пуассона.

14. 10. При радиоактивном распаде вещества за время $\Delta t$ образуется $N = 300$ элементарных частиц, распределяющихся равномерно в конусе разлета, ограниченном углами $\psi_1 = 25°$ и $\psi_2 = 75°$. Найти вероятность не менее одного попадания и дисперсию числа попаданий в пластинку, площадь проекции которой на направление полета элементарных частиц равна 3 *см*$^2$, если расстояние от пластинки до вещества $r = 10$ *см*, а пластинка полностью находится в конусе разлета элементарных частиц.

14. 11. Определить дисперсию числа атомов радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, если даны масса вещества $M$, период полураспада $T_n$, атомный вес вещества $A$, число атомов в грамм-атоме $N_0$.

14. 12. Определить вероятность того, что в экран площадью $S = 0{,}12$ *см*$^2$, поставленный на расстоянии $r = 5$ *см* перпендикулярно потоку от $\alpha$-радиоактивного вещества, попадает в течение секунды: а) равно десять $\alpha$-частиц; б) не менее двух $\alpha$-частиц, если период полураспада вещества $T_n = 4{,}4 \cdot 10^9$ лет, масса вещества $M = 0{,}1$ *г*, атомный вес вещества $A = 238$.

Указание к задачам 14. 11 и 14. 12. 1. Рассеиванием и поглощением частиц пренебречь.

2. Число Авогадро $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ — число атомов в грамм-атоме, т. е. в количестве вещества, вес которого в граммах равен атомному весу.

3. Периодом полураспада вещества $T_n$ называется время, в течение которого масса радиоактивного вещества уменьшается в среднем вдвое.

14. 13. Доказать, что полиномиальное распределение

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}) = C_n^{k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}} p_1^{k_1} p_2^{k_2}, \ldots, p_m^{k_m} p_{m+1}^{k_{m+1}},$$

где

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m + p_{m+1} = 1, \text{ а } k_1 + k_2 + \cdots + k_m + k_{m+1} = n,$$

можно аппроксимировать многомерным законом Пуассона

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m)}\frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\dots\lambda_m^{k_m}}{k_1!k_2!\dots k_m!},$$

где $\lambda_i = np_i$, если все вероятности $p_i$ за исключением $p_{m+1}$ малы, а $n$ велико.

14. 14. Система может находиться только в одном из дискретных состояний $E_0$, $E_1$, ... Переход системы возможен только в соседнее состояние (из $E_n$ в $E_{n+1}$ или $E_{n-1}$, если $n \geqslant 1$, а из $E_0$ только в $E_1$). Если в некоторый момент система находится в состоянии $E_n$, то вероятность того, что за время $(t, t+h)$ осуществится переход $E_n \to E_{n+1}$, равна $\lambda_n h + o(h)$, а вероятность перехода $E_n \to E_{n-1}$ (при $n \geqslant 1$) равна $\mu_n h + o(h)$. Вероятность того, что за время $(t, t+h)$ осуществится более чем одно изменение состояния, имеет порядок малости более высокий, чем $h$. Составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей $P_n(t)$ того, что в момент $t$ система находится в состоянии $E_n$. Написать начальные условия, если достоверно известно, что в момент $t = 0$ система находилась в состоянии $E_i$.

14. 15. Имеется бесконечное число телефонных линий. Поступающие вызовы образуют нагрузку пуассоновского типа с параметром $\lambda$, т. е. вероятность поступления вызова в течение времени $(t, t+h)$ равна $\lambda h + o(h)$ и не зависит от числа ранее поступивших вызовов, а вероятность поступления более одного вызова за то же время имеет порядок $o(h)$. Вероятность того, что ведущийся разговор закончится в течение времени $(t, t+h)$, равна $\mu h + o(h)$. Найти производящую функцию $P(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)s^n$ и сами вероятности $P_n(t)$ того, что в момент $t$ система находится в состоянии $E_n$, означающем занятость разговором $n$ линий, если в начальный момент времени $t = 0$ все линии были свободны (система находилась в состоянии $E_0$).

## § 15. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

### Основные формулы

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

или

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{(x-\bar{x})^2}{E^2}},$$

где $\sigma$ — среднее квадратическое отклонение;

$E$ — срединное отклонение (иногда называемое и вероятным отклонением);

$\rho = 0{,}476936...$

Величины $E$ и $\sigma$ связаны между собой формулой $E = \rho\sqrt{2}\sigma$. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины $X$ в интервал $(x_1, x_2)$ вычисляется по одной из следующих формул:

1) $P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma}\right)\right],$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятности);

2) $P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2-\bar{x}}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1-\bar{x}}{E}\right)\right]$,

где $\hat{\Phi}(x) = \frac{2\varrho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\varrho^2 t^2}dt$ — приведенная функция Лапласа.

Значения функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$, которые связаны между собой соотношением $\hat{\Phi}(x) = \Phi(\varrho\sqrt{2}x)$, даны в приложениях 4 и 5.

## Решение типовых задач

Пример 15. 1. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 *м* в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ *м*. Найти: 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 *м*; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

*Решение.* Обозначим через $X$ — суммарную ошибку измерения дальности. Ее систематическая составляющая $\bar{x} = -50$ *м*. Следовательно, плотность вероятности суммарных ошибок имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+50)^2}{20\,000}}.$$

1. Вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 *м*, вычисляется с помощью таблиц функции Лапласа (интеграл вероятности) по формуле

$$P(|X| < 150) = P(-150 < X < 150) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \right.$$

$$\left. - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(2) - \Phi(-1)],$$

так как интеграл вероятности является функцией нечетной, т. е.

$$\Phi(-x) = -\Phi(x), \text{ то } \Phi(-1) = -\Phi(1).$$

Отсюда

$$P(|X| < 150) = \frac{1}{2}[\Phi(2) + \Phi(1)].$$

Из приложения 4 находим

$$\Phi(2) = 0{,}9545, \quad \Phi(1) = 0{,}6827.$$

Подставляя найденные значения, получим

$$P(|X| < 150) = \frac{1}{2}(0{,}9545 + 0{,}6827) = 0{,}8186.$$

2. Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной, вычисляется по формуле

$$P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{0+50}{100}\right) - \Phi(-\infty)\right] = \frac{1}{2}[\Phi(0{,}5) + \Phi(\infty)].$$

Так как $\Phi(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$, а из приложения 4 находим $\Phi(0{,}5) \doteq 0{,}3829$, то

$$P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2}(0{,}3829 + 1) = 0{,}6914.$$

Аналогично решаются задачи 15. 1—15. 4 и 15. 10—15. 14.

Пример 15.2. В результате проверки точности работы прибора установлено, что $80\%$ ошибок не вышло за пределы $\pm 20$ *м*. Определить срединную ошибку прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не имеет, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

*Решение.* Из условия задачи следует, что

$$P(|X| \leqslant 20) = 0{,}8.$$

Так как плотность вероятности случайных ошибок нормальная, а $\bar{x} = 0$ (систематические ошибки отсутствуют), то

$$P(|X|) \leqslant 20) = P(-20 \leqslant X \leqslant 20) = \\ = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{20}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(-\frac{20}{E}\right)\right] = \hat{\Phi}\left(\frac{20}{E}\right).$$

Неизвестное значение срединной ошибки прибора находим как решение трансцендентного уравнения

$$\hat{\Phi}\left(\frac{20}{E}\right) = 0{,}8.$$

С помощью приложения 5 определяем

$$\frac{20}{E} = 1{,}90,$$

отсюда

$$E = \frac{20}{1{,}90} = 10{,}5 \ \text{м}.$$

Аналогично решаются задачи 15. 8, 15. 18, 15. 20 и 15. 22.

### Задачи для упражнений

15. 1. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 *м* и срединную ошибку 50 *м*. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 *м*.

15. 2. Высотомер имеет систематическую ошибку +20 *м* и срединную ошибку 50 *м*. Для полета самолета отведен коридор высотой 100 *м*. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже коридора, внутри коридора и выше коридора?

15. 3. Срединная ошибка определения дальности радиолокатором равна 25 *м*. Определить: а) дисперсию ошибок определения дальности; б) вероятность получения ошибки в дальности по абсолютной величине не более, чем 20 *м*.

15. 4. Измерительный прибор имеет срединную ошибку 40 *м*, систематические ошибки отсутствуют. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью более 0,9 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине 7,5 *м*.

15. 5. Имеется таблица приведенной функции Лапласа

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{2\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\varrho^2 t^2}\, dt.$$

Найти значение функции

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

15. 6. Даны две случайные величины $X$ и $Y$, имеющие одинаковые дисперсии, но первая распределена нормально, а вторая — равномерно. Определить связь между их срединными отклонениями.

15. 7. Нормально распределенная случайная величина $X$ имеет среднее значение $\bar{x} = -15$ *м* и срединное отклонение 10 *м*. Вычислить таблицу функции распределения вероятностей для значений аргумента через каждые 10 *м* и построить график.

15. 8. Высотомер имеет случайные и систематические ошибки. Систематическая ошибка равна $+20$ *м*. Случайные ошибки распределены по нормальному закону. Какую срединную ошибку должен иметь прибор, чтобы с вероятностью 0,9 ошибки измерения высоты были бы меньше 100 *м*?

15. 9. Найти связь между средним арифметическим отклонением

$$E_1 = M\{|X - \bar{x}|\}$$

нормально распределенной случайной величины и ее средним квадратическим отклонением.

15. 10. Определить для нормально распределенной случайной величины $X$, имеющей $M[X] = 0$,

$$1)\ P\{X \geqslant k\sigma\} \text{ и } 2)\ P\{|X| \geqslant k\sigma\}$$

$$(\text{при } k = 1, 2, 3).$$

15. 11. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих срединную ошибку взвешивания 100 *мг*. Номинальный вес порохового заряда 2,3 *г*. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 *г*.

15. 12. Производятся два независимых измерения прибором, имеющим срединную ошибку 20 *м* и систематическую ошибку $+10$ *м*. Какова вероятность того, что ошибки измерений будут иметь разные знаки, а по абсолютной величине превзойдут 10 *м*?

15. 13. На плоскости проведены две параллельные линии, расстояние между ними $L$. На эту же плоскость бросается круг радиуса $R$. Центр рассеивания расположен на расстоянии $b$ от одной линии во внешнюю сторону. Срединное отклонение центра круга в направлении, перпендикулярном линии, равно $E$. Определить при одном бросании: а) вероятность накрытия кругом хотя бы одной линии; б) вероятность накрытия обеих линий, если $L = 10$ *м*, $R = 8$ *м*, $b = 5$ *м*, $E = 10$ *м*.

15. 14. Изделие считается высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,45 *мм*. Технология изготовления их такова, что случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 *мм*, а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего сорта, если изготовляются четыре изделия.

15. 15. Какой ширины должен быть интервал, чтобы вероятность попадания в него нормально распределенной случайной величины не превышала 0,05, если центр рассеивания случайной величины совпадает с серединой интервала, а срединное отклонение $E = 10$ *м*.

15. 16. Случайная ошибка $X$ измерения дальности до вехи (в метрах) имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+20)^2}{3200}}.$$

Определить вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 30 *м*.

15. 17. Плотность вероятности случайной величины $X$ задана функцией

$$f(x) = \frac{\varrho}{4\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 \frac{(x+7)^2}{16}}.$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее арифметическое отклонение.

15. 18. Дана плотность вероятности случайной величины $X$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{50}}.$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и срединное отклонение.

15. 19. Дальность обнаружения косяка рыбы является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\bar{x} = 20$ каб. и $E = 4$ каб. Какое расстояние должно быть между двумя рыболовными судами, чтобы вероятность обнаружения косяка, идущего посредине между ними, равнялась 0,5, если дальности обнаружения для обоих судов независимы?

15. 20. При большом числе измерений установлено, что 75% ошибок: а) не превосходят $+1{,}25$ *мм*; б) не превосходят по абсолютной величине 1,25 *мм*. Заменяя частоты появления ошибок их вероятностями, определить в обоих случаях срединное отклонение закона распределения ошибок измерения, считая его нормальным с нулевым математическим ожиданием.

15. 21. Случайное отклонение $X$ размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием $\bar{x}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma$. Годными деталями являются те, для которых $a < X < b$. Деталями, подлежащими переделке, являются те, для которых $X > b$. Найти: а) функцию распределения случайных отклонений размеров деталей, подлежащих переделке; б) функцию распределения случайных отклонений размеров годных деталей.

15. 22. Нормально распределенная случайная величина $X$ имеет математическое ожидание, равное нулю. Определить срединное отклонение $E$, при котором $P(a < X < b)$ была бы наибольшей $(0 < a < b)$.

15. 23. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Доказать справедливость рекуррентной формулы для вычисления центральных моментов случайной величины $X$

$$\mu_{k+2} = (k+1)\sigma^2\mu_k.$$

Вычислить $\mu_4$, $\mu_6$ и $\mu_8$.

15. 24. Найти абсолютный центральный момент $k$-го порядка нормально распределенной случайной величины, среднее квадратическое отклонение которой $\sigma$.

15. 25. Найти величины коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, при которых случайная величина $X$, имеющая плотность вероятности

$$f(x) = \frac{P(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где

$$P(x) = a_0 + a_1 \frac{x-\bar{x}}{\sigma} + a_2\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 + a_3\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^3 + a_4\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^4,$$

имеет заданные значения первых четырех моментов, а именно $\bar{x}$, $\sigma^2$, $\mu_3$ и $\mu_4$.

## § 16. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### Основные формулы

Характеристической функцией $E(u)$ случайной величины $X$ называется математическое ожидание функции $e^{iuX}$ (где $u$ — вещественная величина, а $i = \sqrt{-1}$):

$$E(u) = M\,[e^{iuX}].$$

Для непрерывной случайной величины

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuX} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности случайной величины $X$.

Для дискретной случайной величины

$$E(u) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{iux_k},$$

где $x_k$ — частные значения случайной величины;

$p_k = P(X = x_k)$ — вероятности, им соответствующие.

Если начальные моменты случайной величины $X$ существуют, то они выражаются формулой

$$m_k = M\,[X^k] = \frac{1}{i^k} \left.\frac{d^k E(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Плотность вероятности $f(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию формулой

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} E(u)\,du,$$

которая для непрерывных случайных величин дает непрерывную функцию, а для дискретных величин — сумму дельта-функций, позволяющую определить возможные значения случайной величины $X$ и соответствующие им вероятности.

### Решение типовых задач

Пример 16. 1. В партии, состоящей из $n$ изделий $m$ изделий дефектных. Для проверки качества произведена бесповторная выборка $r$ изделий ($m < r < n - m$). Найти характеристическую функцию числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

*Решение*. Случайная величина $X$ — число дефектных изделий, содержащихся в выборке, может принимать все целочисленные значения в интервале $[0, m]$. Обозначим $p_k = P(X = k)$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Применяя определение вероятности, получим

$$p_k = \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}.$$

Следовательно, характеристическая функция

$$E(u) = \sum_{k=0}^{m} \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r} e^{iku}.$$

Аналогично решаются задачи 16. 1—16. 5.

Пример 16. 2. Найти характеристическую функцию случайной величины $X$, имеющей плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

*Решение.* Так как характеристическая функция

$$E(u) = M\,[e^{iuX}],$$

то

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - |x|}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos ux\, dx,$$

поскольку $e^{iux} = \cos ux + i \sin ux$, а $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin ux\, dx = 0$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos ux\, dx = \left[\frac{u \sin ux - \cos ux}{1 + u^2} e^{-x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1 + u^2},$$

т. е.

$$E(u) = \frac{1}{1 + u^2}.$$

Аналогично решаются задачи 16. 6—16. 12.

Пример 16. 3. Случайная величина $X$ имеет характеристическую функцию

$$E(u) = \frac{1}{1 + u^2}.$$

Найти $f(x)$ — плотность вероятности этой случайной величины.

*Решение.* Плотность вероятности $f(x)$ связана с характеристической функцией $E(u)$ соотношением

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} E(u)\, du.$$

Подставив значение $E(u)$, получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iux} du}{1 + u^2}.$$

Для вычисления последнего интеграла рассмотрим интеграл по замкнутому контуру

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{e^{-ixw}}{1+w^2}\,dw$$

от функции $\frac{e^{-ixw}}{1+w^2}$ комплексного переменного $w$, имеющей два полюса: один в точке $w = i$ и второй в точке $w = -i$ (рис. 13). Рассмотрим два случая.

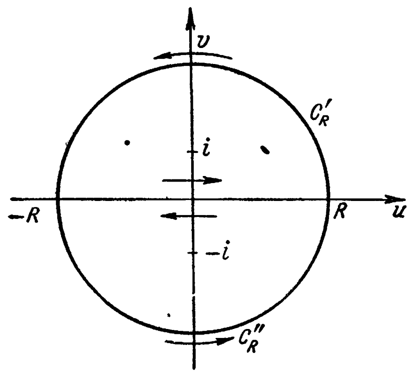

Рис. 13.

1-й случай ($x<0$). Выбрав контур интегрирования в виде полуокружности $C'_R$, стянутой диаметром $(-R, R)$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'_n} \frac{e^{-ixw}}{1+w^2}\cdot dw + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{+R} \frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du.$$

На основании теоремы о вычетах

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1} = \frac{1}{2\pi}\,2\pi i\,\text{Выч.}\left(\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\right)_{w=i} = i\left(\frac{e^{-ixw}}{2w}\right)_{w=i} = \frac{1}{2}e^x$$

или, так как $x$ отрицательно

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw = \frac{1}{2}e^{-|x|},$$

с другой стороны, при $R\to\infty$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C'_R} \frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\,dw = 0.$$

Предел же третьего интеграла

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{+R} \frac{e^{-ixu}du}{u^2+1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixu}}{u^2+1}\,du$$

равен искомому.

Таким образом, при $x<0$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2-й случай ($x>0$). Повторяя аналогичные выкладки, но замыкая вещественную ось полуокружностью, расположенной в нижней полуплоскости, получим

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C''_R} \frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{+R}^{-R} \frac{e^{-ixu}du}{u^2+1}.$$

На основании теоремы о вычетах

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1}=\frac{1}{2\pi}2\pi i\left(\frac{e^{-ixw}}{w^2+1}\right)'_{w=-i}=i\left(\frac{e^{-ixw}}{2w}\right)_{w=-i}=-\frac{1}{2}e^{-x}$$

или, так как $x$ положительно,

$$\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1}=-\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Второй интеграл $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C''_R}\frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1}\to 0$ при $R\to\infty$, а третий интеграл имеет своим пределом искомый, но с обратным знаком

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+R}^{-R}\frac{e^{-ixu}du}{u^2+1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{-ixu}du}{u^2+1}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}du}{u^2+1}.$$

Итак, для $x>0$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ixu}du}{u^2+1}=-\frac{1}{2\pi}\oint\frac{e^{-ixw}dw}{w^2+1}=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Оба случая привели к одной и той же плотности вероятности

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Аналогично решаются задачи 16. 15 и 16. 16.

Пример 16. 4. Найти начальные моменты случайной величины $X$, характеристическая функция которой $E(u)=\frac{1}{1+u^2}$.

*Решение.* Если начальные моменты существуют, а в этом нетрудно убедиться, зная плотность вероятности, полученную в предыдущем примере, то они вычисляются по формуле

$$m_k=\frac{1}{i^k}\left.\frac{d^kE(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Для нахождения производных $\left.\frac{d^kE(u)}{du^k}\right|_{u=0}$ используем то, что эти производные являются коэффициентами при $\frac{u^k}{k!}$ в разложении функции $\frac{1}{1+u^2}$ в ряд Маклорена, т. е.

$$\frac{1}{1+u^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^kE(0)}{du^k}\frac{u^k}{k!}.$$

Для построения этого ряда заметим, что функция $\frac{1}{1+u^2}$ при $|u|<1$ является суммой геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+u^2}=\frac{1}{1-(iu)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}.$$

С помощью тождественных преобразований последний ряд может быть превращен в ряд Маклорена

$$\sum_{m=0}^{\infty}(iu)^{2m}=\sum_{m=0}^{\infty}i^{2m}(2m)!\frac{u^{2m}}{(2m)!}.$$

Итак, ряд Маклорена для функции $\frac{1}{1+u^2}$

$$\frac{1}{1+u^2}=\sum_{m=0}^{\infty}i^{2m}(2m)!\frac{u^{2m}}{(2m)!}$$

и содержит только четные степени $u$. Отсюда следует, что

$$\left.\frac{d^k E(u)}{du^k}\right|_{u=0}=\begin{cases} i^k k! \text{ при } k \text{ — четном,} \\ 0 \text{ при } k \text{ — нечетном,}\end{cases}$$

а начальные моменты

$$m_k=\begin{cases} k! \text{ при } k \text{ — четном,} \\ 0 \text{ при } k \text{ — нечетном.}\end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 16. 3, 16. 7, 16. 8, 16. 10, 16. 14.

## Задачи для упражнений

16. 1. Вероятность появления события при одном испытании $p$. Найти характеристическую функцию числа появлений события при одном испытании.

16. 2. Найти характеристическую функцию числа появлений события $A$ при $n$ независимых испытаниях, если вероятность появления события $A$ от испытания к испытанию меняется и для $k$-го испытания равна $p_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

16. 3. Найти характеристическую функцию $E(u)$ биномиального распределения и определить с помощью этой функции математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X$, подчиняющейся биномиальному распределению.

16. 4. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины $X$, подчиняющейся закону распределения Паскаля

$$P(X=m)=\frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}\ (a>0),$$

и по ней найти $M[X]$ и $D[X]$.

16. 5. Случайная величина $X$ дискретного типа подчиняется закону Пуассона

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Найти: а) характеристическую функцию $E(u)$; б) с помощью $E(u)$ найти $M[X]$ и $D[X]$.

16. 6. Нормально распределенная случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти ее характеристическую функцию.

16. 7. Найти характеристическую функцию и начальные моменты непрерывной случайной величины, плотность вероятности которой

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{для } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

16. 8. Найти характеристическую функцию равномерно распределенной в интервале $(a, b)$ случайной величины и все ее начальные моменты.

16. 9. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = 2h^2xe^{-h^2x^2} \quad (x \geqslant 0).$$

Найти характеристическую функцию случайной величины $X$.

16. 10. Случайная величина $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (\alpha, \lambda > 0)$$

Найти характеристическую функцию и начальные моменты.

16. 11. Найти характеристическую функцию случайной величины $X$, плотность вероятности которой (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (|x| \leqslant a).$$

16. 12. Случайная величина $X$ подчиняется закону Коши

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{(x - \bar{x})^2 + a^2}.$$

Найти характеристическую функцию случайной величины $X$.

16. 13. Пользуясь выражением

$$E(u) = e^{iu\bar{x} - \frac{u^2\sigma^2}{2}},$$

для характеристической функции нормального закона распределения найти характеристическую функцию для случайной величины: а) $Y = aX + b$; б) $\overset{\circ}{X} = X - \bar{x}$.

16. 14. Пользуясь выражением

$$E_{\overset{\circ}{X}}(u) = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}},$$

для характеристической функции центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$, подчиняющейся нормальному закону распределения, определить все центральные моменты.

16. 15. Характеристическая функция непрерывной случайной величины $X$ задана в виде

$$E(u) = e^{-a|u|} \quad (a > 0).$$

Определить плотность вероятности $X$.

16. 16. Даны характеристические функции

$$E_1(u) = \frac{1 + iu}{1 + u^2}; \qquad E_2(u) = \frac{1 - iu}{1 + u^2}.$$

Определить соответствующие им плотности вероятностей.

16. 17. Дана характеристическая функция

$$E(u) = \frac{1}{2e^{-iu} - 1}$$

дискретной случайной величины. Найти ее ряд распределения.

## § 17. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ТЕОРЕМА ГИПОТЕЗ В СХЕМЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Полная вероятность события $A$ вычисляется по формуле

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, P(A/x)\, dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности случайной величины $X$, от значений которой зависит вероятность появления события $A$;

$P(A/x)$ — условная вероятность появления события $A$, вычисленная в предположении, что случайная величина $X$ приняла частное значение $x$.

Условная плотность вероятности $f(x/A)$ случайной величины $X$, т. е. плотность вероятности при условии, что событие $A$ имело место, определяется формулой

$$f(x/A) = \frac{f(x)\, P(A/x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, P(A/x)\, dx} \quad \text{(теорема гипотез)},$$

где $f(x)$ — плотность вероятности случайной величины $X$ до опыта.

### Решение типовых задач

Пример 17.1. Самолету надлежит передать груз судну в море. Вероятность приема груза $P(A/x)$ зависит от дальности $x$ обнаружения самолета и выражается следующей формулой:

$$P(A/x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (k > 0)$$

Найти полную вероятность приемки груза, если дальность обнаружения судном самолета является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a$ и дисперсией $\sigma^2$.

*Решение.* Назовем приемку груза событием $A$, его полная вероятность

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, P(A/x)\, dx.$$

Из условия задачи следует, что дальность обнаружения самолета $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

а условная вероятность приемки груза, вычисленная в предположении, что случайная дальность обнаружения самолета равна $x$, вычисляется по формуле

$$P(A/x) = \begin{cases} 1 - e^{-kx} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Полная вероятность приема груза

$$P(A)=\int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} (1-e^{-kx})\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)\right]-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}-kx}\,dx.$$

Показатель степени у $e$ в последнем интеграле можно привести к виду

$$-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}-kx=-\frac{(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}-k\left(\bar{x}-\frac{k\sigma^2}{2}\right).$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)\right]-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-k\left(\bar{x}-\frac{k\sigma^2}{2}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Так как

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\bar{x}+k\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}-k\sigma^2}{\sigma}\right)\right],$$

то

$$P(A)=\frac{1}{2}\left\{1+\Phi\left(\frac{\bar{x}}{\sigma}\right)-e^{-k\left(\bar{x}-\frac{k\sigma^2}{2}\right)}\cdot\left[1+\Phi\left(\frac{\bar{x}-k\sigma^2}{\sigma}\right)\right]\right\}.$$

Аналогично решаются задачи 17. 1—17. 11.

Пример 17. 2. Деталь состоит из двух линейных звеньев. Случайные отклонения $X$ и $Y$ линейных размеров первого и второго звена от номиналов имеют плотности вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

и

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Годными считаются те детали, размеры которых отличаются от номинала по абсолютной величине не более чем на $d$.

Определить плотность вероятности отклонения размеров первого звена от номинала для годных деталей.

*Решение.* Пусть $A$ — событие, состоящее в том, что изготовленная деталь оказалась годной. Условная вероятность $P(A/x)$ получения годной детали, вычисленная в предположении, что первое звено имело отклонение $x$ от номинала, равна

$$P(A/x)=\int_{x-d}^{x+d}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\,dy=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right)\right].$$

Пусть $f(x/A)$ — плотность вероятности отклонений размеров первого звена от номинала для годных деталей, тогда

$$f(x/A) = \frac{f(x)\,P(A/x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,P(A/x)\,dx}.$$

Подставляя значения $f(x)$ и $P(A/x)$, получим

$$f(x/A) = \frac{\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\,\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right)\right]}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\,\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right)\right]dx},$$

или

$$f(x/A) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}\left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right)\right]}{\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\right)}.$$

Аналогично решаются задачи 17. 12—17. 17.

## Задачи для упражнений

17. 1. На плоскости проведена прямая, на которой с равным интервалом $l$ отмечены точки. Определить вероятность того, что круг, лежащий в той же плоскости и имеющий диаметр $b$, пересечет хотя бы одну из отмеченных точек, если центр круга движется по прямой, пересекающей проведенную прямую под углом $\Theta$, равновозможным в интервале $(\theta_1, \theta_2)$. $\left(\text{Углы } \theta_1 \text{ и } \theta_2 \text{ удовлетворяют условиям } \sin\Theta_1 < \frac{b}{l} \text{ и } \sin\Theta_2 > \frac{b}{l}.\right)$

17. 2. На плоскости проведена прямая, на которой с равным интервалом $l = 80$ отмечены точки. Определить вероятность того, что круг, лежащий в той же плоскости и имеющий диаметр $D = 25$, пересечет хотя бы одну из отмеченных точек, если центр круга движется по прямой, пересекающей проведенную прямую под произвольным углом.

17. 3. На плоскости проведены две параллельные прямые, на которых произвольным и независимым образом отмечены точки с интервалом $l = 100$. Определить вероятность того, что круг, диаметр которого $D = 25$, пересечет хотя бы одну из отмеченных точек, если круг расположен в той же плоскости, а его центр перемещается по прямой, пересекающей параллельные прямые под прямым углом.

17. 4. Дальность обнаружения косяка рыбы является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $\bar{x}$ и срединным отклонением $E$ и одинакова для всех рыболовных судов, осуществляющих поиск рыбы. Определить вероятность обнаружения косяка двумя судами, если косяк с равной вероятностью может пройти в любом месте между двумя судами, а расстояние между ними равно $L$.

17. 5. Вероятность обнаружения космического тела зависит от дальности $D$ (в километрах) до него в момент наблюдения и равна $\frac{3000}{D^2}$. Определить вероятность обнаружения космического тела, если дальность до него в момент наблюдения — случайная величина, равномерно распределенная в пределах интервала от 100 до 200 *км*.

17. 6. На берегу пролива шириной $L = 300$ каб. установлена наблюдательная станция, дальность действия которой является нормально распределенной случайной величиной со средним значением $\bar{x} = 200$ каб. и срединным отклонением $E = 10$ каб. Судно с равной вероятностью может проходить через пролив в любом месте. Определить вероятность того, что наблюдательная станция обнаружит судно.

17. 7. Два рыболовных судна ведут поиск параллельными галсами на расстоянии $L$ один от другого. Дальность обнаружения косяка рыбы является случайной величиной и подчиняется закону нормального распределения со средним значением $\bar{x}$ и срединным отклонением $E$. Случайные дальности обнаружения для первого и второго судов одинаковы. Определить вероятность обнаружения косяка, если он с равной вероятностью может пройти в любом месте между судами.

17. 8. На правую чашку весов положен груз, вес которого подчинен нормальному закону распределения с параметрами $\bar{x} = 20$ *кГ* и $E = 1$ *кГ*. На левой чашке весов находится другой груз, вес которого находится с равной вероятностью в пределах от 0 до 50 *кГ*. Определить вероятность того, что правая чашка перевесит левую. Сравнить полученный результат с тем, который получился бы в предположении, что груз правой чашки не случаен, а в точности равен 20 *кГ*.

17. 9. Произведено $n$ независимых измерений нормальной случайной величины $X$, математическое ожидание которой совпадает с началом отсчета, а срединное отклонение равно $R$. Найти вероятность того, что результат хотя бы одного измерения отклонится от заданного значения $z$ не более чем на величины $\pm r$; $z$ — равномерно распределено в пределах участка $\pm l$ $(r \ll l)$.

17. 10. Дан ряд независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих одну и ту же плотность вероятности $f(x)$. Размахом ряда случайных величин называется случайная величина

$$W_n = X_{\max} - X_{\min}.$$

Найти функцию распределения вероятностей размаха

$$F(w) = P(W_n < w).$$

17. 11. В круге параллельно заданному направлению проводится хорда на случайном расстоянии от центра, а затем в круге произвольно и независимо друг от друга выбираются две точки. Какова вероятность того, что обе точки лежат по одну сторону от хорды, если плотность вероятности случайных расстояний хорды от центра равномерна.

17. 12. Случайные точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют распределение по координате $x$, задаваемое плотностями вероятностей

$$f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Одна из этих $n$ точек совпадает с некоторой отметкой $A_0$, имеющей координату $x_0$, которая измеряется с ошибкой, причем плотность вероятности ошибок измерения равна $f_p(x - x_0)$. Определить вероятность того, что с точкой $A_0$ совпала точка $A_i$.

17. 13. Событие произошло $m$ раз в $n$ независимых испытаниях, причем вероятность того, что оно произойдет, в каждом испытании одинакова. Какова вероятность, что оно произойдет $m'$ раз в $n'$ последующих испытаниях, если до опытов вероятность можно считать случайной величиной, равномерно распределенной в интервале (0,1)?

17. 14. Событие, вероятность которого от опыта к опыту не меняется, произошло $m$ раз в $n$ независимых опытах. Каково математическое ожида-

ние числа появлений этого события в $n'$ последующих опытах, если вероятность события до опыта можно считать равномерно распределенной случайной величиной в интервале (0,1)?

17. 15. Из опытной партии телевизоров отобрано 4, причем три из них оказались исправными, а четвертый — неисправен. Из этой же партии взято еще 3 телевизора. Требуется определить вероятность того, что хотя бы один из телевизоров окажется исправным, считая до опытов вероятность исправного действия телевизора равномерно распределенной случайной величиной в интервале (0,1).

17. 16. Для исследования качества электрических ламп из большой партии их (считать число ламп бесконечным), выпущенных при однородных производственных условиях, были оставлены для испытания на срок службы 10 ламп; одна из них перегорела до истечения контрольного срока. Какова вероятность предположения, что во всей партии не больше 20% ламп перегорят до контрольного срока, если предположить, что до опытов процент некондиционных ламп равновозможен в пределах от 0 до 100?

17. 17. Случайная величина $X$ подчиняется закону Пуассона

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

параметр которого $\lambda$ неизвестен, но имеет до опыта плотность вероятности

$$f(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Произведено испытание, в результате которого случайная величина $X$ приняла значение $m_0$. Найти плотность вероятности $\lambda$ после опыта.

# ГЛАВА III

# СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## § 18. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Функция распределения (интегральный закон распределения) $F(x, y)$ системы двух случайных величин $(X, Y)$ определяется формулой

$$F(x, y) = P\{X < x,\ Y < y\}.$$

Функция распределения системы $n$ случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1,\ X_2 < x_2,\ \ldots,\ X_n < x_n\}.$$

Для системы непрерывных случайных величин существует плотность вероятности (дифференциальный закон распределения), определяемая для системы двух случайных величин формулой

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

для системы $n$ случайных величин формулой

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}.$$

Система дискретных случайных величин, для которой плотность вероятности не существует, может быть охарактеризована совокупностью вероятностей $P\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n\}$, которые могут быть сведены в таблицу с $n$ входами (по числу случайных величин).

Функция распределения выражается через плотность вероятности: для непрерывных случайных величин

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \int\limits_{-\infty}^{x_2} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n;$$

для дискретных случайных величин

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(i_1 < x_1,}\ \sum_{i_2 < x_2, \ldots,}\ \sum_{i_n < x_n)} P\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n\},$$

где суммирование производится по всем возможным значениям каждой из случайных величин, для которых $i_1 < x_1,\ i_2 < x_2,\ \ldots,\ i_n < x_n$.

При $n = 2$ система непрерывных случайных величин может рассматриваться как система координат случайной точки на плоскости, а при $n = 3$ как система координат случайной точки в пространстве.

Вероятность попадания случайной точки в область $S$ определяется как интеграл от плотности вероятности по этой области.

Наиболее важными числовыми характеристиками системы двух случайных величин являются первые начальные моменты (математические ожидания) и вторые центральные моменты (дисперсии этих случайных величин и момент связи между ними). Эти числовые характеристики определяются формулами:

для непрерывных случайных величин

$$M[X] = \bar{x} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)\, dx\, dy,$$

$$M[Y] = \bar{y} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)\, dx dy,$$

$$D[X] = \sigma_x^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$D[Y] = \sigma_x^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (y - \bar{y})^2 f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$k_{xy} = M\left[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})\right] = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y})\, f(x, y)\, dx\, dy;$$

для дискретных случайных величин

$$M[X] = \bar{x} = \sum_{(i)} \sum_{(j)} x_i\, P\{X = x_i,\ Y = y_j\},$$

$$M[Y] = \bar{y} = \sum_{(i)} \sum_{(j)} y_j P\{X = x_i,\ Y = y_j\},$$

$$D[X] = \sigma_x^2 = \sum_{(i)} \sum_{(j)} (x_i - \bar{x})^2 P\{X = x_i,\ Y = y_j\},$$

$$D[Y] = \sigma_y^2 = \sum_{(i)} \sum_{(j)} (y_j - \bar{y})^2 P\{X = x_i,\ Y = y_j\}.$$

$$k_{xy} = M\ \left[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})\right] = \sum_{(i)} \sum_{(j)} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})\, P\{X = x_i,\ Y = y_i\}.$$

Аналогичными формулами выражаются начальные и центральные моменты высших порядков.

Основные числовые характеристики системы $n$ случайных величин также состоят из первых начальных моментов (математических ожиданий)

$$M[X_i] = \bar{x}_i = \int \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\cdots}} \int x_i f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\, dx_1\ dx_2, \ldots,\ dx_n,$$

вторых центральных моментов, т. е. дисперсий (при $i = j$)

$$k_{ii} = D[X_i] = \sigma_i^2 = \int \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\cdots}} \int (x_i - \bar{x}_i)^2 f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\, dx_1\, dx_2, \ldots, dx_n$$

и моментов связи (при $i \neq j$)

$$k_{ij} = M\left[\left(X_i - \bar{x}_i\right)\left(X_j - \bar{x}_j\right)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \left(x_i - \bar{x}_i\right)\left(x_j - \bar{x}_j\right) f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times$$

$$\times\, dx_1\, dx_2, \ldots, dx_n.$$

Вторые центральные моменты составляют корреляционную матрицу

$$\|k_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \ldots k_{1n} \\ & k_{22} & k_{23} \ldots k_{2n} \\ & & k_{33} \ldots k_{3n} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & & k_{nn} \end{matrix}\right\|$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, не коррелированы (не связаны), если недиагональные элементы корреляционной матрицы равны нулю.

Безразмерной характеристикой связи между случайными величинами $X_i$ и $X_j$ служит коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{D[X_i]\, D[X_j]}}.$$

Коэффициенты корреляции составляют нормированную корреляционную матрицу

$$\|r_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & r_{12} & r_{13} \ldots r_{1n} \\ & 1 & r_{23} \ldots r_{2n} \\ & & 1 \ \ldots r_{3n} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & & \cdot\ \cdot \\ & & 1 \end{matrix}\right\|$$

Корреляционная матрица может заполняться своими элементами полностью или, как это сделано выше, наполовину — с учетом симметричности элементов относительно индексов.

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, независимы, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n),$$

и зависимы, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n),$$

где $f_i(x_i)$ — плотность вероятности $i$-й случайной величины (см. § 20).

## Решение типовых задач

Пример 18. 1. В результате испытания изделие может быть либо отнесено к первому сорту с вероятностью $p_1$, либо ко второму сорту с вероятностью $p_2$, либо забраковано с вероятностью $p_3 = 1 - p_1 - p_2$. Числа изделий первого и второго сорта из общего числа $n$ изделий (при независимых испытаниях их качества) образуют систему дискретных случайных величин $(X, Y)$, каждая из которых может принимать любые целочисленные значения от 0 до $n$ включительно, но так, чтобы их сумма не превосходила числа $n$.

Определить закон распределения числа изделий первого и второго сорта, математические ожидания $X$ и $Y$, их дисперсии и момент связи между ними.

*Решение.* Так как испытания независимы, то вероятность того, что $k$ изделий будет отнесено к первому сорту, $s$ изделий ко второму сорту, а остальные $n-k-s$ изделий будут забракованы (с учетом числа всевозможных сочетаний трех слагаемых $k$, $s$ и $n-k-s$, из которых может быть составлена сумма $n$), равна

$$P\{X=k,\ Y=s\}=\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\,p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}.$$

Значения этой вероятности при $k=0,1,\ldots,n$, $s=0,1,\ldots,n$ и $k+s\leqslant n$ составляют закон распределения числа изделий первого и второго сорта. Математическое ожидание числа изделий первого сорта

$$M[X]=\bar{x}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}k\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\,p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\,p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}\right\}\Bigg|_{p_1+p_2+p_3=1}=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}(p_1+p_2+p_3)^n\Big|_{p_1+p_2+p_3=1}=np_1(p_1+p_2+p_3)^{n-1}\Big|_{p_1+p_2+p_3=1}=np_1.$$

Дисперсия числа изделий первого сорта

$$D[X]=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}k^2\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\,p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}-\bar{x}^2=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}k\frac{n!}{n!\,s!\,(n-k-s)!}\,p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}\right\}\Bigg|_{p_1+p_2+p_3=1}-\bar{x}^2=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\{np_1(p_1+p_2+p_3)^{n-1}\}\Big|_{p_1+p_2+p_3=1}-\bar{x}^2=$$

$$=np_1(p_1+p_2+p_3)^{n-1}|_{p_1+p_2+p_3=1}+n(n-1)\,p_1^2(p_1+p_2+p_3)^{n-2}|_{p_1+p_2+p_3=1}-$$
$$-n^2p_1^2=np_1(1-p_1).$$

Аналогично находим

$$M[Y]=np_2;\quad D[Y]=np_2(1-p_2).$$

Момент связи между числом изделий первого и второго сорта равен

$$k_{xy}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{n}ks\frac{n!}{k!\,s!\,(n-k-s)!}\,p_1^k p_2^s p_3^{n-k-s}-\bar{x}\,\bar{y}=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}p_2\frac{\partial}{\partial p_2}\{(p_1+p_2+p_3)^n\}\Big|_{p_1+p_2+p_3=1}-n^2p_1p_2=$$

$$=p_1\frac{\partial}{\partial p_1}\{np_2(p_1+p_2+p_3)^{n-1}\}\Big|_{p_1+p_2+p_3=1}-n^2p_1p_2=n(n-1)\,p_1p_2-$$
$$-n^2p_1p_2=-np_1p_2.$$

П р и м е р 18. 2. Плотность вероятности

$$f(x, y) = 0{,}5 \sin(x + y)$$

системы случайных величин $(X, Y)$ задана в интервалах $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания $X$ и $Y$; в) корреляционную матрицу.

*Решение.* Находим функцию распределения $\left(\text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right.$ и $\left.0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = \int_0^x \int_0^y 0{,}5 \sin(x + y)\, dx\, dy =$$

$$= 0{,}5 \int_0^x \left[\int_0^y \sin(x + y)\, dy\right] dx = 0{,}5 \int_0^x [-\cos(x + y) + \cos x]\, dx =$$

$$= 0{,}5 [\sin x + \sin y - \sin(x + y)].$$

Математическое ожидание случайной величины $X$

$$M[X] = 0{,}5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x + y)\, dx\, dy = 0{,}5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right] dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} = 0{,}785.$$

Дисперсия случайной величины $X$

$$D[X] = 0{,}5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x + y)\, dx\, dy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= 0{,}5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x\right] dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 = 0{,}187.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно $X$ и $Y$ следует, что

$$M[Y] = M[X], \quad D[Y] = D[X].$$

Наконец, находим величину момента связи

$$k_{xy} = 0{,}5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin(x + y)\, dx\, dy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= 0{,}5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x - \frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} = -0{,}045.$$

Таким образом, корреляционная матрица имеет вид

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 0{,}187 & -0{,}045 \\ -0{,}045 & 0{,}187 \end{Vmatrix}.$$

Пример 18. 3. Игла длиной $l$ бросается на плоскость, на которой на расстоянии $L$ друг от друга проведены параллельные линии. Определить вероятность пересечения иглой одной из линий, если $l < L$ (задача Бюффона).

*Решение.* Введем в рассмотрение систему случайных величин $(X, \varphi)$, где $X$ — расстояние от середины иглы до ближайшей линии, а $\varphi$ — угол между иглой и линией (рис. 14). Очевидно, что $X$ может с равной вероятностью принимать значения от 0 до $\frac{L}{2}$, а $\varphi$ также с равной вероятностью от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$f(x, \varphi) = \frac{2}{L} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi L}$$

при

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

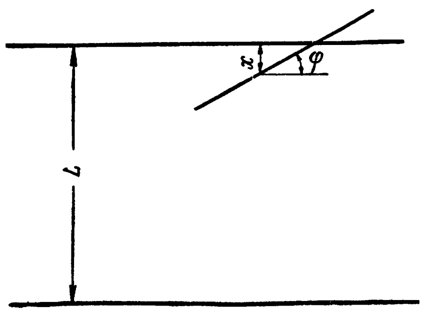

Рис. 14.

Пересечение иглой одной из линий происходит при заданном $x$, если $0 \leqslant x \leqslant \frac{l \sin \varphi}{2}$. Отсюда

$$P = \frac{4}{\pi L} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{l \sin \varphi}{2}} dx = \frac{2l}{\pi L}.$$

### Задачи для упражнений

18. 1. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена закону равной вероятности внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $x = a$, $x = b$ и ординатами $y = c$, $y = d$. Составить выражение для плотности вероятности и функции распределения системы.

18. 2. Система случайных величин $(X, Y)$ имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Требуется: а) определить величину $A$; б) составить выражение для функции распределения.

18. 3. Определить плотность вероятности системы трех положительных случайных величин $(X, Y, Z)$ по заданной функции распределения

$$F(x, y, z) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz})$$
$$(\text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0).$$

18. 4. В условиях предыдущей задачи определить геометрическое место точек, обладающих одинаковой плотностью вероятности

$$f(x, y, z) = f_0.$$

18. 5. В результате проверки партии изделий среди них отбирается не более $n$ кондиционных изделий, а из последних — не более $k$ изделий

высшего сорта, что приводит к двумерной дискретной случайной величине $(X, Y)$, где $X$ — общее число кондиционных изделий, а $Y$ — число изделий высшего сорта. При $n = 6$, $k = 3$ система $(X, Y)$ задана следующей двумерной таблицей (матрицей) распределения вероятностей (табл. 8).

$$P\{X = i,\ Y = j\}$$

*Таблица 8*

| $j$ \ $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,202 | 0,174 | 0,113 | 0,062 | 0,049 | 0,023 | 0,004 |
| 1 | 0 | 0,099 | 0,064 | 0,040 | 0,031 | 0,020 | 0,006 |
| 2 | 0 | 0 | 0,031 | 0,025 | 0,018 | 0,013 | 0,008 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0,001 | 0,002 | 0,004 | 0,011 |

Требуется: а) составить функцию распределения; б) определить вероятность получения не менее двух изделий высшего сорта; в) определить $M[X]$, $M[Y]$ и корреляционную матрицу.

18. 6. Ряд независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ задан плотностями вероятностей $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Определить функцию распределения системы случайных величин, образуемых этим рядом.

18. 7. Размахом ряда случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называют случайную величину

$$W_n = X_{\max} - X_{\min}.$$

Найти: а) функцию распределения размаха ряда $n$ независимых случайных величин, имеющих одну и ту же плотность вероятности $f(x)$; б) то же для системы $n$ зависимых случайных величин, заданной плотностью вероятности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

18. 8. Задана плотность вероятности системы трех случайных амплитуд $f(x_1, x_2, x_3)$, которые могут быть реализованы лишь совместно. Реализация состоит в наблюдении трех амплитуд, причем остается неизвестным, к какой из трех случайных величин относится каждая из амплитуд. Определить вероятность того, что наименьшая амплитуда является реализацией $X_1$, а наибольшая — реализацией $X_3$.

18. 9. Определить вероятность попадания случайной точки в указанную на рис. 15 заштрихованную область, если задана функция распределения $F(x, y)$.

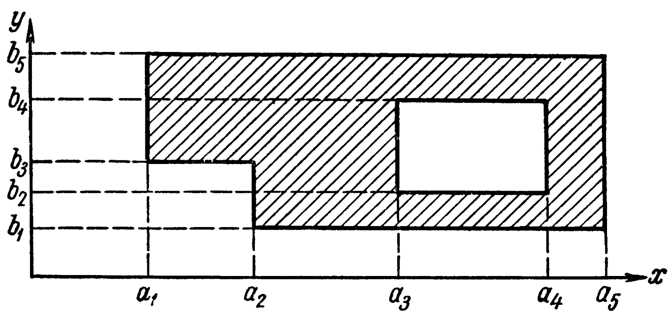


Рис. 15.

18. 10. Определить вероятность попадания точки с координатами $(X, Y)$ в область, определяемую неравенствами $(1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2)$,

если координаты случайной точки $(X, Y)$ подчинены функции распределения $(a > 0)$

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2} & \text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

18. 11. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена закону равной вероятности внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $(0, a)$ и ординатами( $0, b$). Определить вероятность попадания случайной точки в круг радиуса $R$, если $a > b$, а центр круга совпадает с началом координат.

18. 12. Плотность вероятности системы случайных величин $(X, Y)$, заданной внутри круга радиуса $R$, равна

$$f(x, y) = c\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Определить: а) постоянную $c$; б) вероятность попадания в круг радиуса $a < R$, если центры обоих кругов совпадают с началом координат.

18. 13. Случайные величины $X$ и $Y$ связаны соотношением $mX + nY = c$, где $m$, $n$ и $c$ — неслучайные величины, причем $m \neq 0$ и $n \neq 0$. Найти: а) коэффициент корреляции $r_{xy}$; б) отношение среднеквадратических отклонений $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$.

18. 14. Доказать, что коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы.

18. 15. Показать, что

$$k_{xyz} = M[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})(Z - \bar{z})] = M[XYZ] - \bar{x}k_{yz} - \bar{y}k_{xz} - \bar{z}k_{xy} - \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

18. 16. Дана корреляционная матрица системы случайных величин $(X, Y, Z)$

$$\|k_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 16 & -14 & 12 \\ & 49 & -21 \\ & & 36 \end{matrix} \right\|.$$

Составить нормированную корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|$.

18. 17. Однотипные детали в зависимости от точности изготовления различаются по форме как круглые и овальные, а по весу как легкие и тяжелые. Вероятности того, что взятая наудачу деталь окажется круглой и легкой, овальной и легкой, круглой и тяжелой, овальной и тяжелой, соответственно равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma$. Найти математические ожидания и дисперсии: а) числа круглых деталей $X$; б) числа легких деталей $Y$; в) коэффициент корреляции $k_{xy}$ между числом круглых и числом легких деталей, если $\alpha = 0{,}40$, $\beta = 0{,}05$, $\gamma = 0{,}10$.

18. 18. Определить математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин $(X, Y)$, если плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

18. 19. Определить плотность вероятности, математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин $(X, Y)$, заданных в интервалах $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, если функция распределения системы

$$F(x, y) = \sin x \sin y.$$

18. 20. Решить задачу Бюффона о вероятности пересечения хотя бы одной из прямых для случая $l > L$ (см. пример 18. 3).

18. 21. Задача Бюффона для прямоугольника. Иглу длины $l$ бросают на плоскость, состоящую из прямоугольников со сторонами $a$ и $b$. Определить вероятность пересечения иглой хотя бы одной из сторон, если $a < l$, $b < l$.

## § 19. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

### Основные формулы

Плотность вероятности для системы двух случайных величин $(X, Y)$, подчиненных закону нормального распределения на плоскости $xOy$ (короче — системы двух нормальных случайных величин), равна

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]},$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — математические ожидания $X$ и $Y$;

$\sigma_x$, $\sigma_y$ — средние квадратические отклонения;

$r$ — коэффициент корреляции $X$ и $Y$.

Геометрическое место точек, имеющих равную плотность вероятности, есть эллипс, называемый эллипсом рассеивания, уравнение которого имеет вид

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} = k^2.$$

Если оси симметрии эллипса рассеивания параллельны координатным осям $Ox$ и $Oy$, то $r = 0$ и случайные величины $X$ и $Y$ несвязаны и независимы, а плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]},$$

или, если пользоваться срединными отклонениями $E_x = \sigma_x\rho\sqrt{2}$ и $E_y = \sigma_y\rho\sqrt{2}$

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2}\right]}.$$

Уравнение единичного эллипса имеет вид

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{E^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2} = 1.$$

Плотность вероятности для системы $n$ нормальных случайных величин (для многомерного нормального распределения)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\Delta}} e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{(i,\, j)} k_{ij}^{(-1)} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & & k_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель, составленный из элементов корреляционной матрицы;

$k_{ij}^{(-1)}$ — элементы обратной матрицы, равные

$$k_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta} A_{ji} = \frac{1}{\Delta} A_{ij};$$

$A_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента $k_{ij}$.

В частном случае трех нормальных случайных величин $X$, $Y$, $Z$, для которых $k_{xy} = k_{yz} = k_{xz} = 0$, случайные величины $X$, $Y$ и $Z$ несвязаны и независимы. При этом

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-\bar{z})^2}{\sigma_z^2}\right]},$$

или в срединных отклонениях

$$f(x, y, z) = \frac{\varrho^3}{\pi^{3/2} E_x E_y E_z} e^{-\varrho^2\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{E_x^2} + \frac{(y-\bar{y})^2}{E_y^2} + \frac{(z-\bar{z})^2}{E_z^2}\right]}.$$

Этому частному случаю соответствует параллельность осей симметрии эллипсоида рассеивания координатным осям $Ox$, $Oy$, $Oz$.

## Решение типовых задач

Пример 19. 1. Дана корреляционная матрица системы четырех нормальных случайных величин $(X_1, X_2, X_3, X_4)$

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Составить формулу для четырехмерной плотности вероятности при

$$\bar{x}_1 = 10, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = -10, \quad \bar{x}_4 = 1.$$

*Решение.* Находим величину определителя, составленного из элементов корреляционной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 15 \begin{vmatrix} 16 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 16 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 397.$$

Вычисляем алгебраические дополнения (адъюнкты).

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 16 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 28; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 16 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{14} = -\begin{vmatrix} 3 & 16 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 162; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -291;$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 205; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 753;$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -405; \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 15 & 3 & 1 \\ 3 & 16 & 6 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 404.$$

При составлении формулы плотности вероятности учитываем, что при $i \neq j$ в показателе степени содержатся равные слагаемые

$$k_{ij}^{(-1)} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) = k_{ji}^{(-1)} (x_j - \bar{x}_j)(x_i - \bar{x}_i).$$

Плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4\pi^2 \sqrt{397}} \exp\Big\{ -\frac{1}{794} [28 (x_1 - 10)^2 -$$

$$- 26 (x_1 - 10) x_2 + 32 (x_1 - 10)(x_3 + 10) - 28 (x_1 - 10)(x_4 - 1) +$$

$$+ 162 x_2^2 - 582 x_2 (x_3 + 10) + 410 x_2 (x_4 - 1) + 753 (x_3 + 10)^2 -$$

$$- 810 (x_3 + 10)(x_4 - 1) + 404 (x_4 - 1)^2] \Big\}.$$

Пример 19. 2. Случайная точка в пространстве задана тремя прямоугольными координатами, составляющими систему нормальных случайных величин с плотностью вероятности

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}} e^{-\frac{1}{8} [2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2]}.$$

Требуется: а) составить корреляционную матрицу; б) определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 0,01.

*Решение.* а) Непосредственно из формулы для плотности вероятности устанавливаем, что

$$k_{xy} = k_{xz} = 0,$$
$$f(x, y, z) = f(x) f(yz),$$

причем

$$f_x(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{4}};$$
$$f(x, z) = c_2 e^{-\frac{1}{2}\left[y^2 - \frac{2y(z+5)}{4} + \frac{(z+5)^2}{4}\right]}.$$

Отсюда следует, что

$$D[X] = \sigma_x^2 = 2, \quad D(Y) = \sigma_y^2 = \frac{1}{1-r^2}, \quad D[Z] = \sigma_z^2 = \frac{4}{1-r^2},$$
$$\frac{r}{\sigma_y \sigma_z (1-r^2)} = \frac{1}{4}, \qquad r = \frac{k_{yz}}{\sigma_y \sigma_z} = 0{,}5, \ k_{yz} = \frac{4}{3}$$

и

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{16}{3} \end{Vmatrix}.$$

Для проверки можно вычислить нормирующий множитель

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\Delta}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi^{3/2}2\sqrt{2}\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{3/2}}.$$

б) Искомое геометрическое место точек с постоянной плотностью вероятности является эллипсоидом

$$2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2 = -8\ln\left[\frac{16\pi^{3/2}}{100\sqrt{3}}\right].$$

Пример 19. 3. Определить вероятность попадания точки $(X, Y, Z)$ в область, представляющую собой полый параллелепипед, внешняя поверхность которого задана плоскостями

$$x = a_1, \quad x = b_1, \quad y = c_1, \quad y = d_1, \quad z = m_1, \quad z = n_1,$$

а внутренняя поверхность соответственно плоскостями

$$x = a_2, \quad x = b_2, \quad y = c_2, \quad y = d_2, \quad z = m_2, \quad z = n_2.$$

Рассеивание точек $(X, Y, Z)$ подчинено нормальному закону с главными осями, параллельными координатным осям, центром рассеивания в точке $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и срединными отклонениями $E_x$, $E_y$, $E_z$.

*Решение.* Так как главные оси рассеивания параллельны координатным осям, то событие, состоящее в том, что одна из координат, например $x$, примет значение в пределах от $a$ до $b$, не зависит от того, какие значения примут остальные координаты. Поэтому

$$P\{a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad m \leqslant z \leqslant n\} =$$
$$= P\{a \leqslant x \leqslant b\} \quad P\{c \leqslant y \leqslant d\} \quad P\{m \leqslant z \leqslant n\},$$

но

$$P\{a \leqslant x \leqslant b\} = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{b-\bar{x}}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{a-\bar{x}}{E_x}\right)\right].$$

Аналогично определяются вероятности других неравенств.

Искомая вероятность попадания в полый параллелепипед определится как разность вероятностей попадания в параллелепипеды, ограниченные внешней и внутренней поверхностями, т. е.

$$P=\frac{1}{8}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{b_1-\bar{x}}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{a_1-\bar{x}}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{d_1-\bar{y}}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{c_1-\bar{y}}{E_y}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\hat{\Phi}\left(\frac{n_1-\bar{z}}{E_z}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{m_1-\bar{z}}{E_z}\right)\right]-\frac{1}{8}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{b_2-\bar{x}}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{a_2-\bar{x}}{E_x}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\hat{\Phi}\left(\frac{d_2-\bar{y}}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{c_2-\bar{y}}{E_y}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{n_2-\bar{z}}{E_z}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{m_2-\bar{z}}{E_z}\right)\right].$$

## Задачи для упражнений

19. 1. Известно, что $X$ и $Y$ — независимые нормальные случайные величины с математическими ожиданиями $\bar{x}$, $\bar{y}$ и срединными отклонениями $E_x$, $E_y$ соответственно. Выразить через приведенные функции Лапласа функцию распределения системы $(X, Y)$.

19. 2. Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $M[X]=26$, $M[Y]=-12$ и их корреляционная матрица

$$\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}196 & -91\\ & 169\end{Vmatrix}.$$

Составить выражение для плотности вероятности системы $(X, Y)$.

19. 3. Дана плотность вероятности системы случайных величин на плоскости

$$f(x, y)=ce^{-[4(x-5)^2+2(x-5)(y-3)+5(y-3)^2]}.$$

Требуется: а) определить $c$; б) определить корреляционную матрицу; в) вычислить площадь единичного эллипса.

19. 4. Определить плотность вероятности системы двух нормальных случайных величин, для которых $\bar{x}_1=\bar{x}_2=0$ и $\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ & 2\end{Vmatrix}$, в точке $x_1=2$, $x_2=2$.

19. 5. Дана корреляционная матрица системы трех нормальных случайных величин $(X, Y, Z)$

$$\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}5 & 2 & -2\\ & 6 & 3\\ & & 8\end{Vmatrix}.$$

Математические ожидания $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$. Найти плотность вероятности $f(x, y, z)$ и ее максимальное значение.

19. 6. Система $n$ нормальных случайных величин имеет корреляционную матрицу

$$\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1\\ & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2\\ & & 3 & \ldots & 3 & 3 & 3\\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ & & & & n-2 & n-2 & n-2\\ & & & & & n-1 & n-1\\ & & & & & & n\end{Vmatrix}$$

а) Вычислить обратную матрицу. б) Найти плотность вероятности $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \cdots = \bar{x}_n = 0$.

19. 7. Случайные точки на плоскости $(X_1, Y_1)$ и $(X_2, Y_2)$ подчинены нормальному закону распределения, причем дисперсии всех координат одинаковы и равны 10; моменты связи между одноименными координатами $M[X_1X_2] = M[Y_1Y_2] = 2$; остальные пары координат не связаны, математические ожидания всех координат равны нулю. а) Составить корреляционную матрицу. б) Найти плотность вероятности.

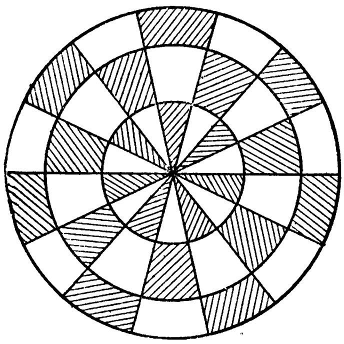

Рис. 16.

19. 8. Координаты случайной точки $A$ на плоскости $(X, Y)$ подчинены нормальному закону

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Определить вероятность того, что точка $A$ окажется внутри эллипса с главными полудиаметрами $ka$ и $kb$, совпадающими с координатными осями $Ox$ и $Oy$.

19. 9. Координаты случайной точки $A$ в пространстве $(X, Y, Z)$ подчинены нормальному закону

$$f(x, y, z) = \frac{\varrho^3}{\pi^{3/2} E_1 E_2 E_3} e^{-\varrho^2\left(\frac{x^2}{E_1^2} + \frac{y^2}{E_2^2} + \frac{z^2}{E_3^2}\right)}.$$

Определить вероятность того, что точка $A$ окажется внутри эллипсоида с главными полудиаметрами $kE_1$, $kE_2$ и $kE_3$, совпадающими с координатными осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$.

19. 10. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена нормальному закону с числовыми характеристиками $M[X] = 0$, $M[Y] = 0$; $E_x = E_y = 10$; $k_{xy} = 0$. Определить вероятность того, что: а) $X < Y$; б) $X > 0$, $Y < 0$.

19. 11. Вычислить вероятность попадания случайной точки $A$, координаты $X$, $Y$ которой подчинены нормальному закону, в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, если координаты вершин прямоугольника $(a, b)$, $(a, d)$, $(c, b)$, $(c, d)$, а числовые характеристики закона распределения $f(x, y)$ заданы ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 10$, $E_x = 20$, $E_y = 10$ и $a = -5$, $b = 10$, $c = 5$, $d = 20$).

19. 12. Случайная точка распределена по нормальному круговому закону со срединным отклонением $E = 10$ *м*. Сравнить вероятность попадания в фигуру, площадь которой 314 *м*$^2$, если она имеет форму: а) круга; б) квадрата; в) прямоугольника с отношением сторон 10 : 1. Центр рассеивания совпадает с геометрическим центром фигуры.

19. 13. Найти вероятность попадания случайной точки в заштрихованную фигуру (рис. 16), ограниченную тремя концентрическими окружностями и лучами, выходящими из центра окружностей, если радиус внешней окружности $R$; рассеивание случайной точки на плоскости нормальное круговое с единичным радиусом, равным $E$. Центр рассеивания совпадает с центром окружностей.

19. 14. Найти вероятность попадания в фигуру, ограниченную концентрическими дугами, проведенными радиусами $R_1$ и $R_2$, и лучами, выходя-

щими из общего центра $O$, если рассеивание случайной точки на плоскости нормальное круговое с единичным радиусом, равным $E$, а дуги имеют длину $\alpha$, рад. Центр рассеивания совпадает с точкой $O$ $(R_1 < R_2)$.

19. 15. Для вероятности попадания в прямоугольник со сторонами $2d$ и $2k$, параллельными главным осям рассеивания, имеет место приближенная формула

$$P(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\bar{x}+d}{E_x}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\bar{x}-d}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\bar{z}+k}{E_z}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{\bar{z}-k}{E_z}\right)\right] \approx$$

$$\approx A\frac{\rho^2}{\pi\alpha\beta}e^{-\rho^2\left(\frac{\bar{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\bar{y}^2}{\beta^2}\right)},$$

которой рекомендуется пользоваться при значениях $\frac{d}{E_x}$ и $\frac{k}{E_z}$, не превосходящих 1,5. Приравняв нулевые и вторые моменты левой и правой части равенства, определить значения $A$, $\alpha$ и $\beta$.

19. 16. Пользуясь приближенной формулой предыдущей задачи, определить вероятность попадания в прямоугольник со сторонами $2d$ и $2k$, параллельными главным осям рассеивания, если центр рассеивания распределен равномерно внутри данного прямоугольника. Сравнить полученный результат с вероятностью попадания в ту же цель при совпадении центра рассеивания с центром цели.

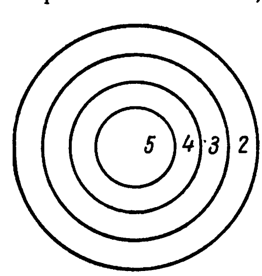

Рис. 17.

19. 17. Мишень состоит из четырех концентрических окружностей радиуса 10, 20, 30 и 40 *см* (рис. 17). Попадание в «яблочко» оценивается в 5 баллов, в каждое из трех колец — соответственно в 4,3 и 2 балла. Задание считается выполненным, если из трех выстрелов получено не менее 7 баллов, и оценивается отлично, если получено более 12 баллов. Какова вероятность выполнить задание при круговом рассеивании со срединным отклонением 20 *см*? Какова вероятность получить при этом отличную оценку?

19. 18. Определить вероятность попадания в прямоугольный треугольник $ABC$ с катетами, параллельными главным осям рассеивания, если центр рассеивания совпадает с точкой $A$. Известно, что катеты пропорциональны соответствующим срединным отклонениям

$$\frac{a}{E_x} = \frac{b}{E_y} = k.$$

19. 19. Чему равна вероятность попадания точки $(X, Y, Z)$ в область, представляющую собой шар радиуса $R$, из которого вырезан куб с ребром $a$ (диагональ куба меньше диаметра шара). Центр рассеивания совпадает с общим центром шара и куба. Рассеивание нормальное, шаровое, со срединным отклонением $E$.

19: 20. Рассчитать вероятность попадания точки $A(X, Y, Z)$ в прямой круговой цилиндр с радиусом основания $R$ и высотой $h$, если рассеивание в плоскости $XY$, параллельной основанию, подчинено нормальному круговому закону со срединным отклонением $E$, а рассеивание по образующей независимо от $X$, $Y$ и подчинено: а) нормальному закону со срединным отклонением $B$ (центр рассеивания находится на оси цилиндра и делит ее в отношении $m : n$); б) закону равной вероятности в диапазоне $(-H, H)$ при $H > h$.

19. 21. Определить вероятность попадания случайной точки $A(X, Y, Z)$ в прямой круговой конус, вершина которого совпадает с центром рассеи-

вания; высота конуса $h$, радиус основания $R$, рассеивание в плоскости $XY$, параллельной основанию, подчинено нормальному круговому закону со срединным отклонением $E$, а рассеивание по высоте независимо от $X$, $Y$ и подчинено нормальному закону со срединным отклонением $a$.

19. 22. Нормальный закон распределения на плоскости задан математическими ожиданиями случайных величин $\bar{x} = \bar{y} = 10$ и корреляционной матрицей

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 36 & -18 \\ & 25 \end{Vmatrix}.$$

Определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна $10^{-5}$.

19. 23. Нормальный закон распределения в пространстве задан математическими ожиданиями случайных величин $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = -2$ и их корреляционной матрицей

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ & 4 & 0 \\ & & 4 \end{Vmatrix}.$$

Определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна $10^{-5}$.

19. 24. Для многомерного нормального распределения, приведенного в задаче (19. 6), определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна $10^{-5}$. При каких $n$ задача не имеет решений?

## § 20. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДСИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

### Основные формулы

Если $F(x, y)$ — функция распределения системы двух случайных величин, то функция распределения $F_x(x)$ случайной величины $X$ определяется равенством

$$F_x(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Аналогично для функции распределения $Y$

$$F_y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Для плотности вероятности случайных величин, входящих в систему, имеем

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция распределения системы $n$ случайных величин, то функция распределения части этих случайных величин (подсистемы случайных величин), например, $X_1$, $X_2$, ..., $X_k$, равна

$$F_{1\,2,\ldots,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \infty \ldots \infty),$$

а плотность вероятности для такой подсистемы определяется формулой

$$f_{1,\,2,\,\ldots,\,k}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n.$$

Условная плотность вероятности одной из двух случайных величин, входящих в систему, вычисленная при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение, равна

$$f(x/y) = \frac{f(x,\ y)}{f_y(y)}$$

и

$$f(y/x) = \frac{f(x,\ y)}{f_x(x)}.$$

Условная плотность вероятности подсистемы случайных величин $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_k)$, вычисленная при условии, что остальные случайные величины $X_{k+1},\ X_{k+2},\ \ldots,\ X_n$ приняли определенное значение, равна

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k/x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n) = \frac{f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{f_{k+1,\ \ldots,\ n}(x_{k+1},\ \ldots,\ x_n)}.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2/x_1) f_3(x_3/x_1,\ x_2) \ldots f_n(x_n/x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}).$$

## Решение типовых задач

Пример 20.1. Положение случайной точки $A(X,\ Y)$ равновероятно в любом месте эллипса с главными полудиаметрами $a$ и $b$, совпадающими с осями координат $Ox$ и $Oy$ соответственно. Требуется: а) определить плотности вероятности каждой из прямоугольных координат и их взаимные условные плотности вероятности; б) установить зависимость и связанность случайных величин, входящих в систему.

*Решение.* а) Так как

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi ab} & \text{при } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \\[2ex] 0 & \text{при } \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1, \end{cases}$$

то

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

и при $|x| < a$

$$f_x(x) = \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\pi ab} = \frac{2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}{\pi a}.$$

При $|x| > a$

$$f_x(x) = 0.$$

Отсюда

$$f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} & \text{при } |x| < a, \\[2ex] 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

Точно так же находим

$$f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}{\pi b} & \text{при } |y|<b,\\ 0 & \text{при } |y|>b,\end{cases}$$

$$f(x/y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} & \text{при } |y|<b,\\ a & \text{при } |y|>b.\end{cases}$$

б) Момент связи между $X$ и $Y$ определяется величиной интеграла

$$k_{xy}=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,\ y)\,dx\,dy,$$

причем функция под знаком интеграла отлична от нуля внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Производя замену переменных

$$x=ar\cos\varphi,\quad y=br\sin\varphi,$$

получим

$$k_{xy}=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 ar\,br\cos\varphi\sin\varphi\frac{1}{\pi ab}abr\,dr\,d\varphi=0.$$

Таким образом, случайные величины $X$ и $Y$ являются не связанными ($k_{xy}=0$), но зависимыми, поскольку

$$f_x(x)\,f_y(y)\neq f(x,\ y).$$

Пример 20. 2. Координаты случайной точки на плоскости подчиняются нормальному закону распределения

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

Определить: а) плотность вероятности координат $X$ и $Y$; б) условные плотности вероятности $f(y/x)$ и $f(x/y)$; в) условные математические ожидания; г) условные дисперсии.

*Решение.* а) Для определения плотности распределения координаты $X$ находим

$$f_x(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)\,dy.$$

Производя замену переменных

$$\frac{x-\bar{x}}{\sigma_1}=u,\quad \frac{y-\bar{y}}{\sigma_2}=v$$

и учитывая, что

$$\frac{1}{1-r^2}[u^2-2ruv+v^2]=u^2+\frac{(v-ru)^2}{1-r^2},$$

получим

$$f_x(x)=e^{-u^2}\frac{1}{\sigma_1 2\pi\sqrt{1-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(v-ru)^2}{2(1-r^2)}}dv=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-u^2},$$

или

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Аналогично находим

$$f_y(y) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_2^2}}.$$

б) Производя вычитание показателей степени при делении $f(x, y)$ на $f_x(x)$, получим

$$f(y/x) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{\left[y-\bar{y}-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\bar{x})\right]^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}}$$

и аналогично

$$f(x/y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{\left[x-\bar{x}-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\bar{y})\right]^2}{2(1-r^2)\sigma_1^2}}.$$

в) Из выражений для условных плотностей распределения следует, что условное математическое ожидание случайной величины $Y$ при фиксированном значении $X = x$ равно

$$\bar{y}_x = M[Y/x] = \bar{y} + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \bar{x}).$$

Аналогично

$$\bar{x}_y = M[X/y] = \bar{x} + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \bar{y}).$$

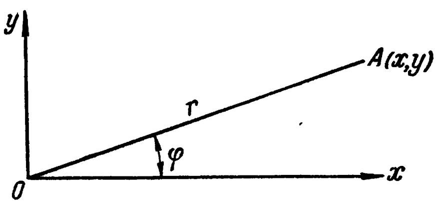


Рис. 18.

Эти уравнения, выражающие линейную зависимость условного математического ожидания одной из случайных величин от фиксированного значения другой случайной величины, называются **уравнениями регрессии**.

г) Из выражений для условных плотностей распределения следует также, что условные дисперсии

$$D[Y/x] = \sigma_{y/x}^2 = \sigma_1^2(1 - r^2),$$

$$D[X/y] = \sigma_{x/y}^2 = \sigma_2^2(1 - r^2).$$

Пример 20. 3. Определить плотность вероятности длины радиуса-вектора, если координаты его конца подчинены нормальному круговому закону

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi a^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию радиуса-вектора.

*Решение.* Плотность вероятности радиуса-вектора получаем в результате интегрирования $f(x, y)$ по углу $\varphi$ (рис. 18).

Так как

$$f(x, y)\, dx\, dy = f_{r,\varphi}(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

то

$$f_r(r)\,dr = \int_0^{2\pi} f_{r,\varphi}(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

или

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} d\varphi = \frac{r}{a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$$

(распределение Рэлея).

Математическое ожидание радиуса-вектора

$$\bar{r} = \int_0^{\infty} \frac{r^2}{a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} dr = a2\sqrt{2}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Дисперсия радиуса-вектора равна

$$D[R] = \int_0^{\infty} \frac{r^3}{a^2} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} dr - \bar{r}^2 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

## Задачи для упражнений

20. 1. Система случайных величин $(X, Y, Z)$ равномерно распределена внутри прямоугольного параллелепипеда, образованного плоскостями $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$, $z = c_2$. Определить законы распределения системы $(X, Y, Z)$, подсистемы $(Y, Z)$ и случайной величины $Z$. Установить зависимость случайных величин, входящих в систему.

20. 2. Положение случайной точки $(X, Y)$ равновероятно в любом месте круга радиуса $R$, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность вероятности и функцию распределения каждой из прямоугольных координат. Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ зависимыми?

20. 3. В условиях предыдущей задачи определить условную плотность вероятности $f(y/x)$ при $|x| < R$, $|x| = R$ и $|x| > R$.

20. 4. В условиях задачи 20. 2 вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин $X$ и $Y$. Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ связанными?

20. 5. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена закону равной вероятности внутри квадрата со стороной $a$. Диагонали квадрата совпадают с осями координат. Определить: а) плотность вероятности системы $(X, Y)$; б) плотность вероятности каждой из прямоугольных координат; в) условные плотности вероятности.

20. 6. В условиях предыдущей задачи вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин $(X, Y)$, установить их зависимость и связанность.

20. 7. Система случайных величин $(X, Y, Z)$ подчиняется закону равной вероятности внутри сферы радиуса $R$. Определить для точек, лежащих внутри сферы, плотность вероятности прямоугольной координаты $Z$ и условную плотность вероятности $f(x, y/z)$.

20. 8. Пользуясь условиями задачи 18. 5, определить:

а) распределение числа кондиционных изделий;

б) распределение числа изделий высшего сорта;

в) условное распределение числа кондиционных изделий, если известно, что в результате проверки отобрано одно изделие высшего сорта;

г) условное распределение числа изделий высшего сорта, если известно, что в результате проверки отобрано 4 кондиционных изделия;

д) условные математические ожидания и дисперсии числа кондиционных изделий для условий, указанных в п. «в», и числа изделий высшего сорта для условий п. «г».

20. 9. Дан дифференциальный закон распределения системы неотрицательных случайных величин

$$f(x, y) = kx\,ye^{-(x^2+y^2)} \qquad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$$

Определить $k$, $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f(x/y)$, $f(y/x)$, первые и вторые моменты распределения.

20. 10. Для системы случайных величин $(X, Y)$ известны $f_y(y)$, $M[X/y]$ и $D[X/y]$. Определить $M[X]$ и $D[X]$.

20. 11. Система двух случайных величин $(X, Y)$ подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2{,}4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{0{,}72\sigma^2}\left[(x-5)^2+0{,}8(x-5)(y+2)+0{,}25(y+2)^2\right]}.$$

Определить: а) условные математические ожидания и дисперсии; б) плотность вероятности каждой из случайных величин, входящих в систему; в) условные плотности вероятности $f(y/x)$ и $f(x/y)$.

20. 12. Плотность вероятности системы двух случайных величин $(X, Y)$ задана в виде

$$f(x, y) = Ae^{-ax^2+bxy-cy^2}.$$

Определить закон распределения $f_x(x)$ и $f_y(y)$. При каких условиях $X$ и $Y$ являются независимыми случайными величинами?

20. 13. Дана плотность вероятности системы двух случайных величин

$$f(x, y) = ke^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Определить постоянную $k$, момент связи между $X$ и $Y$ и условные законы распределения $f(x/y)$ и $f(y/x)$.

20. 14. Положение ориентира на плоскости распределено по нормальному закону при $\bar{x} = 125$ *м*, $\bar{y} = -30$ *м*, $\sigma_x = 40$ *м*, $\sigma_y = 30$ *м*, $r_{xy} = 0{,}6$. Координата $X$ определяет отклонение ориентира «по дальности», т. е. по направлению, параллельному линии наблюдения. Координата $Y$ определяет отклонение ориентира «по боковому направлению», перпендикулярному линии наблюдения. Отклонения отсчитываются от начала координат. Определить: а) плотность вероятности отклонений ориентира по дальности; б) плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению; в) условную плотность вероятности отклонений ориентира по дальности при отсутствии боковых отклонений; г) условную плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению при отклонении по дальности $+25$ *м*.

20. 15. В условиях предыдущей задачи найти уравнения регрессии

$Y$ на $X$ и $X$ на $Y$.

20. 16. Определить плотность вероятности радиусов-векторов и их математическое ожидание, если координаты концов подчинены нормальному закону

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}a^3} e^{-\frac{1}{2a^2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

20. 17. Случайная точка на плоскости $(xOy)$ подчинена нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi ab} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Определить плотность вероятности полярных координат этой точки $f_r(r)$ и $f_\varphi(\varphi)$.

20. 18. В условиях предыдущей задачи найти условные плотности вероятности $f(r/\varphi)$ и $f(\varphi/r)$.

20. 19. Случайная точка в пространстве подчинена нормальному закону распределения

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} abc} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}.$$

Определить: а) плотность вероятности сферических координат этой точки $(R, \Theta, \Phi)$, если $x = r \cos \vartheta \cos \varphi$, $y = r \cos \vartheta \sin \varphi$, $z = r \sin \vartheta$; б) плотность вероятности подсистем случайных величин $(R, \Theta)$ и $(\Theta, \Phi)$.

20. 20. В условиях предыдущей задачи найти условные плотности вероятности

$$f(r/\vartheta, \varphi) \text{ и } f(\varphi/r, \vartheta).$$

20. 21. Для многомерного распределения задачи (19. 7) найти законы распределения подсистем $f_{x_1, x_2}(x_1, x_2)$ и $f_{x_1, y_1}(x_1, y_1)$.

20. 22. В условиях предыдущей задачи определить условную плотность вероятности $f(x_2, y_2/x_1, y_1)$, условные математические ожидания и условные дисперсии

$$M[X_2/x_1, y_1],\ M[Y_2/x_1, y_1],\ D[X_2/x_1, y_1],\ D(Y_2/x_1, y_1]$$

при $x_1 = 0$, $y_1 = 10$.

ГЛАВА IV

# ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## § 21. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Если случайная величина $Y$ связана функциональной зависимостью со случайными величинами $X_1$, $X_2$, т. е. $Y = \varphi(X_1, X_2)$, где $\varphi$ — известная функция, а плотность вероятности $f(x_1, x_2)$ системы $(X_1, X_2)$ задана, то математическое ожидание и дисперсия случайной величины $Y$ определяются по формулам

$$M[Y] = \int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$$D[Y] = \int\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2)]^2 f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 - \bar{y}^2.$$

Аналогичным образом находятся начальные и центральные моменты любого порядка

$$m_k[Y] = \int\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2)]^k f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$$\mu_k[Y] = \int\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2) - \bar{y}]^k f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Данные формулы обобщаются на любое количество случайных аргументов: если $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то

$$m_k[Y] = \int \cdots \underset{-\infty}{\overset{\infty}{(n)}} \cdots \int [\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n,$$

$$\mu_k[Y] = \int \cdots \underset{-\infty}{\overset{\infty}{(n)}} \int [\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \bar{y}]^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1, \ldots, dx_n;$$

если функция $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — линейная, т. е. $Y = \sum_{r=1}^{n} a_i X_i + b$, то

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b,$$

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j k_{ij},$$

где $k_{ij}$ — момент связи.

Знание закона распределения случайных аргументов не является необходимым при определении числовых характеристик также и в некоторых других частных случаях. Пусть $Z = XY$, тогда $M[Z] = M[X] \cdot M[Y] + k_{xy}$. Если, кроме того, случайные величины $X$ и $Y$ не связаны, т. е. момент связи $k_{xy}$ равен нулю, то

$$D[Z] = D[X] \cdot D[Y] + \bar{x}^2 D[Y] + \bar{y}^2 D[X],$$

$$M[Z] = M[X] \cdot M[Y].$$

Последняя формула может быть обобщена на любое число независимых случайных величин

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i].$$

Для определения начальных моментов линейной функции $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ независимых случайных величин удобно пользоваться формулой

$$m_k[Y] = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k} \left[ e^{ibt} \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(at) \right]_{t=0},$$

где $\underset{(j=1,\,2,\,\ldots,\,n)}{E_{x_j}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, e^{itx}\, dx$ — характеристическая функция случайной величины $X_j$.

Коэффициент асимметрии и эксцесс линейной функции независимых величин определяются формулами

$$\mathrm{Sk} = \left.\frac{\psi^{\mathrm{III}}(t)}{[\psi^{\mathrm{II}}(t)]^{3/2}}\right|_{t=0}; \quad \mathrm{Ex} = \left.\frac{\psi^{\mathrm{IV}}(t)}{[\psi^{\mathrm{II}}(t)]^2}\right|_{t=0},$$

где

$$\psi(t) = \ln\left\{ e^{ibt} \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(at) \right\}.$$

## Решение типовых задач

Пример 21. 1. Случайная величина $X$ подчиняется биномиальному закону распределения. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^{aX}$.

*Решение.* Случайная величина $X$ может принимать значения 0, 1, 2, . . ., $i$, . . ., $n$. Вероятность того, что она примет значение $i$ определяется формулой $P_{n,i} = C_n^i p^i q^{n-i}$.

Поэтому

$$M[Y] = \sum_{i=0}^{n} y_i P_{n,i} = \sum_{i=0}^{n} e^{ai} C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (pe^a)^i q^{n-i} = (q + pe^a)^n,$$

$$D[Y] = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 P_{n,i} - \bar{y}^2 = \sum_{i=0}^{n} e^{2ai} C_n^i p^i q^{n-i} - \bar{y}^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i (e^{2a}p)^i q^{n-i} - \bar{y}^2 = (q + pe^{2a})^n - (q + pe^a)^{2n}.$$

Пример 21. 2. Индикатор кругового обзора навигационной станции представляет собой круг радиуса $R$. Отраженный сигнал от ориентира (маяка) с равной вероятностью может появиться в виде пятна в любой точке этого круга. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния центра пятна от центра круга.

*Решение.* Случайное расстояние от центра экрана до пятна может быть выражено через прямоугольные координаты $X$ и $Y$

$$U = \varphi(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Плотность вероятности системы случайных величин $(X, Y)$ задана и определяется формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Поэтому

$$M[U] = M[\varphi(X, Y)] = \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \varphi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} R;$$

$$D[U] = \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} u^2 f(x, y)\, dx\, dy - \bar{u}^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr - \frac{4}{9} R^2 = \frac{R^2}{18}.$$

Аналогично примерам 21. 1 и 21. 2 решаются задачи 21. 3; 21. 5; 21. 7; 21. 8; 21. 19; 21. 31; 21. 32.

Пример 21. 3. Из совокупности $N\cdot$ объектов, $Np$ из которых обладают свойством $A$, а остальные $Nq$ этим свойством не обладают, извлечено без возвращения $n$ объектов. Определить математическое ожидание и дисперсию числа объектов выборочной совокупности, обладающих свойством $A$.

*Решение.* Обозначим через $X$ случайное число объектов, обладающих свойством $A$, в выборке из $n$ элементов. Случайная величина $X$ может быть представлена как $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, где $X_i$ — число объектов, обладающих свойством $A$, при $i$-м извлечении. Случайная величина $X_i$ может принимать только два значения: 1 — с вероятностью $Np/N$ или

0 — с вероятностью $1 - \frac{Np}{N}$ и, следовательно, $M[X_i]$ численно равно $p$. Тогда

$$M[X] = M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[X_i] = np.$$

При извлечении объектов без возвращения случайные величины $X_i$ зависимы, поэтому

$$D[X] = D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D[X_i] + \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij},$$

где

$$D[X_i] = (1 - \bar{x}_i)^2 p + (0 - \bar{x}_i)^2 (1 - p) = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p) = \\ = p(1 - p) = pq;$$

$$k_{ij} = M[(X_i - \bar{x}_i)(X_j - \bar{x}_j)] = M[X_i X_j] - \{M[X_i]\}^2 = \\ = P(X_i) P(X_j/x_i) - p^2 = p\frac{Np - 1}{N - 1} - p^2 = -\frac{pq}{N - 1}.$$

Окончательно

$$D[X] = npq\left(1 - \frac{n - 1}{N - 1}\right).$$

Аналогично решаются задачи 21.6; 21.10—21.16; 21.22—21.30; 21.33—21.37.

Пример 21.4. Определить математическое ожидание квадрата расстояния между двумя точками, выбранными наудачу на любой из сторон прямоугольника.

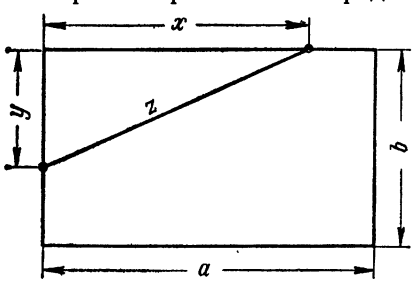

Рис. 19.

*Решение.* При выборе двух точек наугад на любой из сторон прямоугольника возможны следующие единственно возможные и несовместные события (гипотезы) (рис. 19):

$H_1$ — обе точки выбраны на одной и той же стороне $a$;

$H_2$ — обе точки выбраны на одной и той же стороне $b$;

$H_3$ — точки выбраны на смежных сторонах прямоугольника,

$H_4$ — точки выбраны на противоположных сторонах $a$;

$H_5$ — точки выбраны на противоположных сторонах $b$.

Вероятности этих гипотез определяются по формулам

$$P(H_1) = 2\left(\frac{a}{2p}\frac{a}{2p}\right) = \frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_2) = 2\left(\frac{b}{2p}\frac{b}{2p}\right) = \frac{b^2}{2p^2},$$

$$P(H_3) = 8\left(\frac{a}{2p}\frac{b}{2p}\right) = 2\frac{ab}{p^2},$$

$$P(H_4) = 2\left(\frac{a}{2p}\frac{a}{2p}\right) = \frac{a^2}{2p^2},$$

$$P(H_5) = 2\left(\frac{b}{2p}\frac{b}{2p}\right) = \frac{b^2}{2p^2},$$

где $2p$ — периметр прямоугольника.

Определим условное математическое ожидание (т. е. математическое ожидание при условии, что имела место гипотеза $H_i$) квадрата расстояния между двумя точками:

$$M[Z^2/H_1] = \int_0^a \int_0^a f(x, y)(x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{a^2}\int_0^a \int_0^a (x-y)^2\,dx\,dy = \frac{a^2}{6},$$

$$M[Z^2/H_2] = \frac{1}{b^2}\int_0^b \int_0^b (x-y)^2\,dx\,dy = \frac{b^2}{6},$$

$$M[Z^2/H_3] = \frac{1}{ab}\int_0^b \int_0^a (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{3}(a^2+b^2),$$

$$M[Z^2/H_4] = M[b^2 + (X-Y)^2] = b^2 + M[(X-Y)^2] =$$

$$= b^2 + \frac{1}{a^2}\int_0^a \int_0^a (x-y)^2\,dx\,dy = b^2 + \frac{a^2}{6},$$

$$M[Z^2/H_5] = M[a^2 + (X-Y)^2] = a^2 + \frac{1}{b^2}\int_0^b \int_0^b (x-y)^2\,dx\,dy = a^2 + \frac{b^2}{6}.$$

Полное математическое ожидание случайной величины $Z$ определяется по формуле

$$M[Z^2] = \sum_{i=1}^{5} P(H_i)\,M[Z^2/H_i] =$$

$$= \frac{1}{6p^2}(a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) = \frac{(a+b)^4}{6p^2} = \frac{p^2}{6}.$$

Аналогично решаются задачи 21. 17; 21. 18.

## Задачи для упражнений

21. 1. Известны математические ожидания $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Доказать, что математическое ожидание случайной величины $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b$, где $a_k$, $b$ — постоянные неслучайные величины, определяется формулой

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{x}_k + b.$$

21. 2. Известны математические ожидания $\bar{x}_k$ $n$ независимых случайных величин: $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots, X_n$. Доказать, что математическое ожидание произведения $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$ определяется формулой

$$\bar{y} = \prod_{k=1}^{n} \bar{x}_k.$$

21. 3. Случайная величина $X$ подчиняется нормальному закону распределения. Определить математическое ожидание случайной величины $Y$, если

$$Y = e^{\frac{\bar{x}^2 - 2\bar{x}X}{2\sigma_x^2}}.$$

21. 4. Вершина $C$ прямого угла прямоугольного равнобедренного треугольника соединяется отрезком прямой с произвольной точкой $M$ основания; длина основания 2 *м*. Найти математическое ожидание длины отрезка $CM$.

21. 5. На окружность радиуса $R$ с центром в начале координат наудачу брошена точка. Найти математическое ожидание площади квадрата со стороной, равной абсциссе этой точки.

21. 6. В урне черные и белые шары; вероятность извлечь белый шар равна $p$, а черный $q$. Из урны извлекается $n$ шаров, причем вынутый шар каждый раз возвращается обратно в урну. Каково математическое ожидание числа случаев, при которых до и после белого шара вытаскивается черный шар?

21. 7. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена закону нормального распределения

$$f(x, y) = \frac{\varrho^2}{\pi E^2} e^{-\varrho^2 \frac{x^2+y^2}{E^2}}.$$

Определить математическое ожидание случайной величины

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

21. 8. В полукруге радиуса $a$ произвольно выбраны две точки $X$ и $Y$, которые вместе с одним из концов ограничивающего диаметра образуют треугольник. Требуется определить математическое ожидание площади этого треугольника.

21. 9. На окружность единичного радиуса наудачу ставятся три точки $A$, $B$ и $C$. Найти математическое ожидание площади треугольника $ABC$.

21. 10. Число космических частиц, попадающих на данную площадку за время $t$, подчиняется закону Пуассона $P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$. Энергия каждой частицы является случайной и характеризуется средним значением $\bar{w}$. Найти среднюю энергию, получаемую площадкой в единицу времени.

21. 11. Радиоэлектронный комплекс содержит $n$ элементов. Вероятность повреждения (выхода из строя) $k$-го элемента равна $p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Определить математическое ожидание числа поврежденных элементов.

21. 12. Вероятность необходимости ремонта судна после первого рейса 0,4, а при каждом из двух последующих рейсов возрастает на 0,1. Определить математическое ожидание числа ремонтов при трех рейсах.

21. 13. Вероятность возвращения судна без опоздания из дальнего рейса равна $p_1$, а из ближнего $p_2$. Дальние рейсы совершали $n_1$, а ближние $n_2$ судов. Определить математическое ожидание числа судов, возвратившихся без опоздания.

21. 14. Комплекс, состоящий из $n$ однотипных блоков, прекращает работу при выходе из строя хотя бы одного из этих блоков, что происходит с одинаковой вероятностью для любого из них. Вероятность прекращения работы комплекса за некоторый цикл работы равна $p$. Новый цикл начинается после завершения предыдущего или после ремонта повре-

жденного блока, если предыдущий цикл не был завершен. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергавшихся ремонту хотя бы один раз при $m$ циклах.

21. 15. Имеется $n$ блоков, действующих независимо один от другого и совершающих ряд последовательных циклов. Вероятность выхода из строя любого блока за время одного цикла равна $p$. Новый цикл начинается после завершения предыдущего (отдельно для каждого блока) или после ремонта, если предыдущий цикл для данного блока не был завершен. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергавшихся ремонту хотя бы один раз, если каждый блок работал в течение $m$ циклов.

21. 16. Число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый период, подчинено закону Пуассона с параметром $a$. Длительность ремонта машины зависит от числа вышедших из строя элементов и определяется по формуле $t_m = T\,(1 - e^{-\alpha m})$. Определить математическое ожидание длительности ремонта и ущерба, причиненного простоем машины, если ущерб пропорционален квадрату длительности ремонта $\left(S_m = kt_m^2\right)$.

21. 17. Из сосуда, содержащего $n$ шаров, при каждой попытке с вероятностью $p$ удается извлечь один из этих шаров, после чего он помечается и возвращается в сосуд. После серии из $m$ таких попыток $\left(m < \frac{n}{2}\right)$ все меченые шары удаляются из сосуда и производится вторая серия из $m$ попыток с возвращением извлеченных шаров. Определить математическое ожидание числа шаров, которые в результате двух таких серий из $m$ попыток каждая будут иметь хотя бы одну пометку.

21. 18. Имеется $n$ сосудов, каждый из которых содержит по одному шару. Из каждого сосуда делается попытка извлечь шар, что удается с вероятностью $p$. Извлеченный шар помечается и возвращается в сосуд. После первой серии из $m$ попыток, каждая из которых относится к другому сосуду, все сосуды с мечеными шарами удаляются. Далее производится вторая серия из $m$ попыток, причем, если после первой серии осталось менее чем $m$ сосудов, после того как каждый сосуд подвергся одной попытке, некоторые из них подвергаются повторной попытке до завершения серии из $m$ попыток. Определить математическое ожидание числа меченых шаров в двух сериях для случая $n = m = 8$ и $n \geqslant 2m$.

21. 19. Две точки выбраны наудачу на смежных сторонах прямоугольника со сторонами $a$ и $b$. Найти математическое ожидание расстояния между этими точками.

21. 20. Доказать, что для независимых случайных величин

$$D\left[\prod_{k=1}^{n}(X_k - \bar{x}_k)\right] = \prod_{k=1}^{n} D[X_k].$$

21. 21. $X$ и $Y$ — независимые случайные величины, для которых известны математические ожидания и дисперсии. Определить дисперсию произведения $XY$.

21. 22. Известна матрица моментов связи $\|k_{ij}\|$ системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, найти дисперсию случайной величины $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b$, где $a_k$ и $b$ — постоянные неслучайные величины.

21. 23. Получить формулы для математического ожидания и дисперсии числа появлений события при $n$ независимых опытах, если вероят-

ности его появления от опыта к опыту изменяются; в $k$-м опыте вероятность равна $p_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

21. 24. Дан второй смешанный начальный момент $m_{11}$ для системы ($X$, $Y$), известны математические ожидания $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Определить момент связи между случайными величинами $X$ и $Y$.

21. 25. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и подчинены одному и тому же закону распределения с математическим ожиданием $\bar{x}$ и дисперсией $\sigma_x^2$. Определить математическое ожидание и дисперсию для среднего арифметического этих случайных величин.

21. 26. При взвешивании на чашку весов положено 10 разновесов. Точность изготовления каждого из разновесов характеризуется срединной ошибкой в 0,1 *г*. Точность процесса взвешивания характеризуется срединной ошибкой в 0,02 *г*. Найти срединную ошибку в определении веса взвешиваемого тела.

21. 27. Трое стреляют каждый по своей мишени, делая по 5 независимых выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле у стрелка *А* — 0,8, у стрелка *Б* — 0,6, у стрелка *В* — 0,7. Определить математическое ожидание и дисперсию числа попаданий во все мишени.

21. 28. Определить математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при пяти независимых выстрелах, если вероятность попадания при $i$-м выстреле

$$p_i = 0{,}2 + (i - 1)\, 0{,}1.$$

21. 29. На отрезок длиной $l$ наудачу брошены две точки. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

21. 30. Плотность вероятности для системы случайных величин ($XY$) задана формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{300\pi\sqrt{0{,}75}}\, e^{-\frac{1}{1{,}5}\left[\frac{(x-5)^2}{100} + \frac{(x-5)\,y}{150} + \frac{y^2}{225}\right]}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = AX + BY$.

21. 31. Случайная величина $X$ подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}\, E_x}\, e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

21. 32. Случайная величина $X$ подчиняется закону Пуассона. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \cos(b\, X)$.

21. 33. Среднее арифметическое значение дальности определяется по трем замерам. Связь между ошибками измерения зависит от темпа измерений и характеризуется следующими значениями коэффициентов корреляции:

а) при темпе 3 сек. $r_{1,2} = r_{2,3} = 0{,}9$; $r_{1,3} = 0{,}7$;

б) при темпе 5 сек. $r_{1,2} = r_{2,3} = 0{,}7$; $r_{1,3} = 0{,}4$;

в) при темпе измерения 10 сек. $r_{i,j} = 0$.

Определить значения дисперсии для среднего арифметического результата при измерениях с различным темпом, если ошибки отдельного измерения характеризуются дисперсией, равной 30 $м^2$.

21. 34. Из пункта *А* направляются в порт $n$ судов, а из пункта *В* — $m$ судов. Математическое ожидание числа судов, одновременно приходя-

щих в данный порт из пунктов $A$ и $B$, равны между собой. Вероятность одновременного прихода в порт $i$- и $j$-го судов, направляющихся из пункта $A$ (и соответственно из пункта $B$), равна $p_{ij}^{I}$ (соответственно $p_{ij}^{II}$). Определить, при каких условиях дисперсия числа судов, одновременно приходящих в порт из пункта $A$, равна дисперсии числа судов, одновременно приходящих в порт из пункта $B$.

21.35. Определить срединную ошибку углового коэффициента $k$ прямой, построенной по $n$ значениям ординат, взятых через равные интервалы $\tau$, если прямая проведена по способу наименьших квадратов, а ординаты известны со срединной ошибкой $E$.

21.36. Случайная величина $X$ подчиняется закону распределения

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{x^2}{\alpha^3}\,e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Плотность вероятности случайной величины $Y$ задана формулой

$$f(y)=\frac{2\varrho^2}{E^2}\,y e^{-\frac{\varrho^2 y^2}{E^2}} \quad \text{при } y\geqslant 0$$

$$(\text{при } y<0 \quad f(y)\equiv 0).$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - Y$.

21.37. Дана случайная точка на плоскости с координатами $(X, Y)$, причем $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = -10$, $\sigma_x = 100$, $\sigma_y = 20$, $k_{xy} = 0$. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния $Z$ от начала координат до проекции точки на ось $OZ$, образующую с осью $OX$ угол $\alpha = 30°$.

21.38. Определить коэффициент корреляции для случайных величин $X$ и $Y$, если $X$—центрированная нормальная случайная величина, а $Y = X^n$, $n$ — целое положительное число.

21.39. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X(Y - \bar{y})$, если плотность вероятности системы $(X, Y)$ задана формулой

$$f(x, y)=\frac{x^2}{\sigma^3\Delta\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\Delta^2}\left[(y-\bar{y})^2+\Delta^2\right]}.$$

## § 22. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Пусть $Y = \varphi(X)$ и известна плотность вероятности случайной величины $X$. Тогда, если функция $\varphi(X)$ монотонна на участке возможных значений случайного аргумента (т. е. обратная функция $\psi(Y)$ однозначна), то плотность вероятности $f_y(y)$ случайной величины $Y$ определяется формулой

$$f_y(y) = f_x[\psi(y)]\,|\psi'(y)|.$$

Если обратная функция $X = \psi(Y)$ неоднозначна, т. е. одному значению $Y$ соответствует несколько значений $X$: $\psi_1(Y)$, $\psi_2(Y)$, $\psi_3(Y)$, ...

..., $\psi_k(Y)$ (рис. 20), то плотность вероятности случайной величины $Y$ определяется формулой

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} F(y),$$

где

$$F(y) = P\{Y < y\} = \sum_i \int\limits_{\Delta_i(y)} f_x(x)\,dx,$$

где $\Delta_i(y)$ — участки оси абсцисс, которым соответствует $Y < y$.

Аналогично решается эта задача и для функции двух случайных величин. Пусть, например, $Y = \varphi(X_1, X_2)$ и задана плотность вероят-

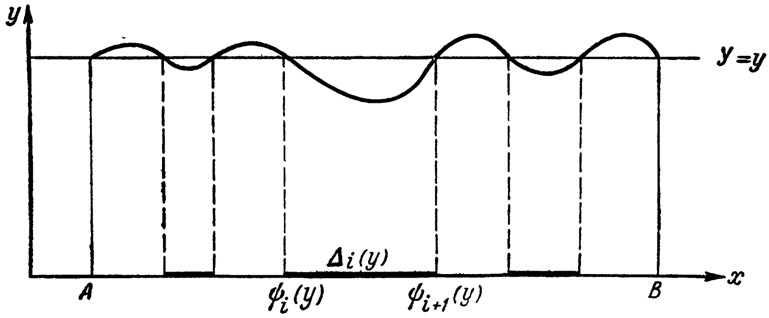


Рис. 20.

ности $f_x(x_1, x_2)$ системы случайных величин $(X_1, X_2)$. Если $(D_y)$—область на плоскости $X_1OX_2$, для которой $Y < y$, то функция распределения

$$F_y(y) = \iint\limits_{(D_y)} f_x(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

а плотность вероятности случайной величины $Y$ $f_y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y)$. В общем случае, если известен якобиан преобразования от случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ к случайным величинам $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

и если это преобразование взаимно однозначно, то

$$f_y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |D|\, f_x(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

## Решение типовых задач

Пример 22.1. Через точку $(O, l)$ наугад проведена прямая. Найти плотность вероятности расстояния $\eta$ от начала координат до этой прямой.

*Решение.* Угол $\varphi$ (рис. 21) является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $(O, \pi)$. Расстояние от начала координат до прямой

$$\eta = l \cos \varphi.$$

Так как обратная функция $\psi(\eta)$ однозначна (с изменением угла $\varphi$ от 0 до $\pi$ функция монотонно убывает), то для определения плотности вероятности случайной величины $\eta$ применима формула

$$f_\eta(\eta) = f_\varphi[\psi(\eta)]\,|\psi'(\eta)|,$$

где

$$\psi(\eta) = \arccos\frac{\eta}{l},$$

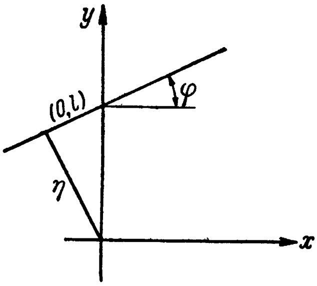


Рис. 21.

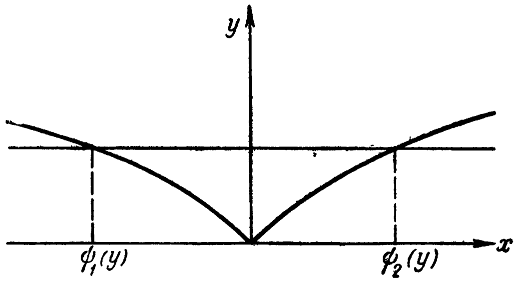


Рис. 22.

$$|\psi'(\eta)| = \frac{1}{l\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{l}\right)^2}},$$

$$f_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{при } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$f_\eta(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{l^2-\eta^2}} & \text{при } |\eta| \leqslant l, \\ 0 & \text{при } |\eta| > l. \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи 22. 2—22. 8; 22. 10—22.15; 22. 18—22. 20.

Пример 22. 2. Случайная величина $Y$ задана формулой

$$Y = \begin{cases} +\sqrt{X} & \text{при } X \geqslant 0, \\ +\sqrt{-X} & \text{при } X < 0. \end{cases}$$

Определить плотность вероятности случайной величины $Y$, если $X$ — нормальная случайная величина с параметрами $M[X] = 0$ и $D[X] = 1$.

*Решение.* Так как в рассматриваемом примере обратная функция двузначна (рис. 22), то предварительно определим функцию закона распределения случайной величины $Y$

$$F_y(y) = P\{Y < y\} = P\{\psi_1(y) < X < \psi_2(y)\} = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f_x(x)\,dx.$$

Плотность вероятности связана с функцией закона распределения зависимостью

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y).$$

Поэтому

$$f_y(y) = \frac{d}{dy}\left\{\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f_x(x)\,dx\right\} = f_x[\psi_2(y)]\,\psi_2'(y) - f_x[\psi_1(y)]\,\psi_1'(y),$$

где

$$\psi_1(y) = -y^2; \quad \psi_2(y) = y^2;$$
$$\psi_1'(y) = -2y; \quad \psi_2'(y) = 2y.$$

Окончательно

$$f_y(y) = \frac{4y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^4}{2}} \text{ для } 0 \leqslant y < \infty; \; f_y(y) = 0 \text{ для } y \leqslant 0.$$

Аналогично решаются задачи 22. 6; 22. 9; 22. 16; 22. 17.

Пример 22. 3. Положение случайной точки с координатами $X$, $Y$

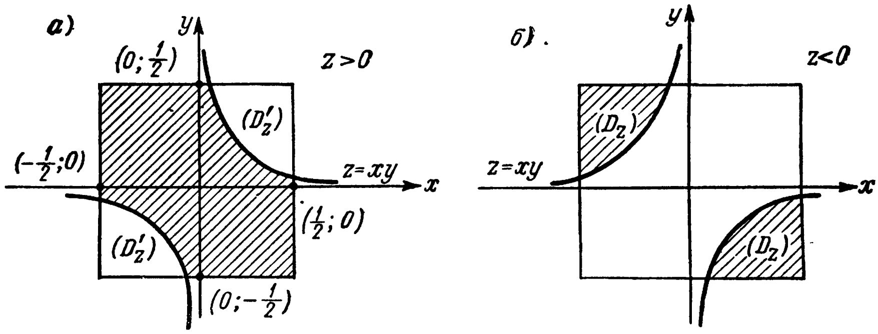


Рис. 23.

равновероятно внутри квадрата, сторона которого 1, а центр совпадает с началом координат. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = XY$.

*Решение.* Рассмотрим отдельно два случая: а) $z > 0$ и б) $z < 0$. Для этих двух случаев построим на плоскости $XOY$ гиперболы, уравнения которых $z = xy$.

На рис. 23, *а*, *б* заштрихована область, внутри которой выполняется условие $Z < z$.

Функция распределения случайной величины $Z$ определяется при $z > 0$

$$F_z(z) = P\{Z < z\} = 1 - P\{Z \geqslant z\} = 1 - 2S_{D_z'} =$$

$$= 1 - 2\int\limits_{2z}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\frac{z}{y}}^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} + 2z - 2z\ln 4z,$$

где $S_{D_z'}$ — площадь области $(D_z')$;

при $z < 0$

$$F_z(z) = 2S_{D_z} = 2\int\limits_{-2z}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{z}{y}} dx = \frac{1}{2} + 2z - 2z\ln(-4z).$$

Дифференцируя эти выражения по $z$, получим плотность вероятности: при $z > 0$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz}F_z(z) = -2\ln 4z;$$

при $z < 0$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz}F_z(z) = -2\ln(-4z).$$

Окончательно плотность вероятности для случайной величины $Z = XY$ может быть записана в таком виде

$$f_z(z) = -2\ln 4|z|; \quad \text{при } |z| > \frac{1}{4} \quad f_z(z) = 0.$$

Аналогично решаются задачи 22. 21—22. 31; 22. 33.

Пример 22. 4. Система случайных величин $(X, Y)$ распределена нормально с плотностью вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти плотность вероятности системы $(R, \Phi)$, если

$$X = R\cos\Phi,$$
$$Y = R\sin\Phi.$$

*Решение.* Для определения плотности вероятности системы $(R, \Phi)$ применяем формулу

$$f(r, \varphi) = f[x(r, \varphi), y(r, \varphi)]\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right|,$$

где $\frac{\partial(x; y)}{\partial(r; \varphi)}$ — якобиан преобразования от заданной системы к системе $(R, \Phi)$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r; \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому

$$f(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{2\sigma^2}} = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Случайные величины $R$ и $\Phi$ независимы, так как

$$f(r, \varphi) = f_r(r) f_\varphi(\varphi),$$

где

$$f_r(r) = \frac{r}{2\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \text{ — закон Рэлея;}$$

$f_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ — закон равномерного распределения.

Аналогично решаются задачи 22. 35—22. 38.

## Задачи для упражнений

22. 1. Функция распределения случайной величины $X$ есть $F_x(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = aX + b$.

22. 2. Случайная величина $X$ распределена нормально

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Определить плотность вероятности случайной величины $Y = X^2$.

22. 3. Случайная величина $X$ подчиняется закону Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Найти плотность вероятности для случайной величины $Y = aX^2$ $(a > 0)$.

22. 4. Случайная величина $X$ подчиняется закону распределения Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}.$$

Определить дифференциальный закон распределения случайной величины $Y = X^n$, где $n$ — целое положительное число.

22. 5. Случайная величина $X$ подчиняется закону распределения Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Определить плотность вероятности случайной величины $Y = 1 - X^3$.

22. 6. Случайная величина $X$ распределена в интервале $(0, \infty)$ с плотностью вероятности $f_x(x) = e^{-x}$. Определить плотность вероятности случайной величины $Y$, если: а) $Y^2 = X$, а знак у $Y$ равновероятен; б) $Y = +\sqrt{X}$.

22. 7. Найти плотность вероятности объема куба, ребро которого $X$— случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0, a)$.

22. 8. Случайные величины $X$ и $Y$ связаны функциональной зависимостью $Y = F(X)$. Случайная величина $X$ равномерно распределена в интервале $(a, b)$, а $F(x)$—функция ее закона распределения. Определить плотность вероятности случайной величины $Y$.

22. 9. Найти плотность вероятности для случайной величины $Z = aX^2$, если $X$ — нормальная случайная величина $\overline{x} = 0$, $D[X] = \sigma^2$, $a>0$.

22. 10. Случайная величина $X$ равномерно распределена в интервале $(0,1)$ и связана с $Y$ функциональной зависимостью $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} Y = e^X$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y$.

22. 11. Случайная величина $X$ равномерно распределена в интервале $(0,1)$. Задана функция $f_t(t) \geqslant 0$, удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_t(t)\,dt = 1$. Случайные величины $X$ и $Y$ связаны функциональной зависимостью $X = \int\limits_{-\infty}^{Y} f_t(t)\,dt$. Доказать, что $f_t(y)$ есть плотность вероятности случайной величины $Y$.

22. 12. Через точку $(0, l)$ проведена наугад прямая. Найти плотность вероятности абсциссы точки пересечения этой прямой с осью $Ox$.

22. 13. Случайная величина $X$ на участке (0,1) подчиняется закону равной вероятности. Определить плотность вероятности случайной величины $Y$, если $X = \frac{1}{2}[+\Phi(Y)]$, где $\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

22. 14. Случайные величины $X$ и $Y$ связаны функциональной зависимостью $Y = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{X-\bar{x}}{\sigma}\right)\right]$, где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Доказать, что если случайная величина $Y$ равномерно распределена в интервале (0,1), то случайная величина $X$ подчиняется закону нормального распределения с параметрами: $M[X] = \bar{x}$ и $D[X] = \sigma^2$.

22. 15. Случайная величина $X$ подчиняется закону распределения Пирсона

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}(1-x^2)^k & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \arcsin X$.

22. 16. Найти плотность вероятности для случайной величины $Y = |X|$, если $X$ — нормальная случайная величина с параметрами: $\bar{x} = 0$ и срединным отклонением $E$.

22. 17. Случайная величина $X$ равномерно распределена на участке $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = a\sin\frac{2\pi}{T}X$.

22. 18. Случайная величина $X$ подчиняется закону распределения Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.

22. 19. Плотность вероятности случайной величины $X$ есть $f_x(x)$ (при $0 < X < \infty$). Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \ln X$.

22. 20. Найти плотность вероятности неотрицательного квадратного корня из средней арифметической квадратов нормальных центрированных случайных величин $Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}$, если дисперсия $D[X_i] = \sigma^2$. $(i = 1, 2, \ldots, n)$

22. 21. Известен дифференциальный закон распределения $f(x, y)$ системы $(X, Y)$. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = XY$.

22. 22. $X$ и $Y$—независимые случайные величины, плотность вероятности которых

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty,$$

$$f_y(y) = ye^{-\frac{y^2}{2}}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \infty.$$

Найти плотность вероятности случайной величины $Z = XY$.

22. 23. Известен дифференциальный закон распределения $f(x, y)$ системы $(X, Y)$ двух случайных величин. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$.

22. 24. Система двух случайных величин $(X, Y)$ подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Определить плотность вероятности случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$. Какому закону распределения подчиняется случайная величина $Z$, если $r = 0$?

22. 25. $X$ и $Y$ — независимые случайные величины; $X$ подчиняется нормальному закону распределения с $\bar{x} = 0$ и $D[X] = \frac{1}{n}$, а дифференциальный закон распределения $Y$ задан в виде

$$f_y(y) = 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{y^{n-1} e^{-\frac{ny^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{при } y \geqslant 0$$

и $f_y(y) = 0$ при $y < 0$. Определить, какому закону подчиняется случайная величина $Z = \frac{X}{Y}$.

22. 26. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена нормальному закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Какому закону распределения подчиняется случайная величина $Z = X - Y$?

22. 27. Система случайных величин $(X, Y)$ подчинена нормальному закону с круговым рассеиванием $E_x = E_y = E$. Найти плотность вероятности расстояния случайной точки $(X, Y)$ от центра рассеивания.

22. 28. Определить плотность вероятности расстояния от центра до случайной точки, если точка равномерно распределена внутри круга радиуса $a$.

22. 29. Координаты случайной точки $M(X, Y)$ образуют систему случайных величин с плотностью вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-h)^2 + y^2}{2\sigma^2}}.$$

Найти плотность вероятности $f_r(r)$ расстояния случайной точки $M(X, Y)$ от начала координат.

22. 30. Координаты случайной точки на плоскости $M(X, Y)$ образуют систему случайных величин с плотностью вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Найти плотность вероятности $f_r(r)$ случайного отстояния точки $M(X, Y)$ от начала координат.

22. 31. Дана плотность вероятности $f(x, y)$ для системы случайных величин $(X, Y)$. Найти плотность вероятности модуля радиуса-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

22. 32. Система зависимых случайных величин $(X, Y)$ имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

Найти линейное преобразование случайных величин $X$, $Y$ к независимым случайным величинам $U$ и $V$. Определить средние квадратические отклонения новых случайных величин.

22. 33. Оба корня квадратного уравнения $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ с равной вероятностью могут принимать любое значение от $-1$ до $+1$. Определить дифференциальные законы распределений коэффициентов $\alpha$ и $\beta$.

22. 34. $X$ и $Y$ — независимые случайные величины, плотности вероятностей которых заданы

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| \leqslant 1); \quad f_y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}} \text{ при } y \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } y < 0. \end{cases}$$

Доказать, что случайная величина $Z = XY$ распределена нормально.

22. 35. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ — две системы случайных величин, между которыми имеется взаимно однозначное соответствие $Y_k = \varphi_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

$$X_k = \psi_k(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Известен дифференциальный закон распределения $f_x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Используя формулы замены переменных в $n$-кратном интеграле, доказать справедливость равенства

$$f_y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_x[\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n]\left|I\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y_i}\right)\right|,$$

где $I\left(\frac{\partial\psi_k}{\partial y_i}\right)$ — якобиан преобразования от первой системы ко второй.

22. 36. Найти плотность вероятности полярных координат $(T, \Phi)$ случайной точки, если ее прямоугольные координаты $(X, Y)$—зависимые случайные нормальные величины, а

$$\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x} = T\cos\Phi, \quad \frac{Y-\bar{y}}{\sigma_y} = T\sin\Phi$$

Каким законам распределения подчиняются случайные величины $T$ и $\Phi$, если $X$ и $Y$ независимы?

22. 37. Две системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ случайных величин связаны линейными зависимостями

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}Y_j \; (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем $|a_{ij}| \neq 0$.

Известна плотность вероятности $f_x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ первой системы. Определить плотность вероятности второй системы.

22. 38. $S = S_0 + V_0t + \frac{1}{2}at^2$,

где $S_0$, $V_0$, $a$ — нормальные случайные величины.

Известны математические ожидания и корреляционная матрица системы $(S_0, V_0, a)$. Определить дифференциальный закон распределения $f(s/t)$.

22. 39. Пусть $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — система зависимых случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения. Доказать, что случайная величина $Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b$ также подчиняется нормальному закону распределения.

## § 23. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ И ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Характеристическая функция системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ определяется формулой

$$E_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M\left[e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Для многомерного нормального распределения с математическими ожиданиями $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ и корреляционной матрицей

$$\| k_{rs} \| = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & & k_{nn} \end{Vmatrix}$$

характеристическая функция имеет вид

$$E(t_1, t_2, \ldots, t_n) = e^{i\sum_{r=1}^{n} t_r \bar{x}_r - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} k_{rs} t_r t_s}.$$

В том случае, когда начальные моменты системы случайных величин соответствующего порядка существуют, они могут быть получены из характеристической функции $E_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ путем дифференцирования

$$M\left[X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}\right] =$$

$$= \frac{1}{i^{\sum_{k=1}^{n} r_k}} \left[\frac{\partial^{r_1 + r_2 + \ldots + r_n} E_{x_1 x_2, \ldots, x_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2} \ldots \partial t_n^{r_n}}\right]_{t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0}.$$

Характеристическая функция случайной величины $Y = \varphi(X)$, являющейся функцией случайной величины $X$, равна

$$E_y(t) = M[e^{itY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\varphi(x)} f(x)\, dx.$$

Характеристическая функция системы случайных величин ($Y_1$, $Y_2$, ..., $Y_n$), каждая из которых является функцией других случайных величин

$$\begin{aligned} Y_1 &= \varphi_1 (X_1, X_2, \ldots, X_m), \\ Y_2 &= \varphi_2 (X_1, X_2, \ldots, X_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= \varphi_n (X_1, X_2, \ldots, X_m), \end{aligned}$$

равна

$$E_{y_1, \ldots, y_n}(t_1, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{k=1}^{n} t_k \varphi_k (x_1, x_2, \ldots, x_m)} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \times$$
$$\times dx_1 dx_2, \ldots, dx_m.$$

С помощью формул обращения интеграла Фурье по характеристической функции может быть найдена плотность вероятности систем и функций случайных величин:

а) плотность вероятности системы случайных величин

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \sum_{k=1}^{n} t_k x_k} E_{x_1, \ldots, x_n}(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n;$$

б) плотность вероятности случайной величины $Y$, являющейся функцией случайной величины $X$,

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} E_y(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-it[y-\varphi(x)]} f(x)\, dx\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta[y - \varphi(x)] f(x)\, dx;$$

в) плотность вероятности системы случайных величин ($Y_1$, $Y_2$, ... ..., $Y_n$), каждая из которых является функцией системы случайных величин ($X_1$, $X_2$, ..., $X_m$),

$$f_y(y_1, y_2, \ldots, y_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \sum_{k=1}^{n} t_k [y_k - \varphi_k (x_1, x_2, \ldots, x_m)]} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \times$$
$$\times dx_1 \ldots dx_m dt_1 \ldots dt_n = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \delta[y_k - \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)] \times$$
$$\times f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_m.$$

## Решение типовых задач

Пример 23. 1. Частица начинает движение из начала координат и перемещается в некотором направлении на расстояние $l_1$. Затем она мгновенно меняет направление движения и в новом произвольном направлении перемещается на величину $l_2$. Траектория блуждающей таким образом частицы состоит из отрезков длиной $l_1$, $l_2$, ..., $l_n$.

Угол $\alpha_k$ между направлением $k$-го отрезка ($k = 1, 2, \ldots, n$) и осью $Ox$ есть случайная величина, равномерно распределенная в интервале $0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2\pi$.

Случайные величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ независимы. Найти характеристическую функцию координаты $X$ конечной точки траектории и соответствующую ей плотность вероятности.

*Решение.* Координата $X$ определяется как сумма проекций отрезков $l_k$ на ось $Ox$

$$X = \sum_{k=1}^{n} l_k \cos \alpha_k.$$

Характеристическая функция случайной величины $X$ по определению равна

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int e^{it \sum\limits_{k=1}^{n} l_k \cos \alpha_k} f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_n.$$

Вследствие независимости $\alpha_k$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n} f(\alpha_k),$$

причем

$$f(\alpha_k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } 0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{при } \alpha_k < 0,\ \alpha_k > 2\pi. \end{cases}$$

Поэтому

$$E_x(t) = \prod_{k=1}^{n} \int_{0}^{2\pi} e^{itl_k \cos \alpha_k} \frac{d\alpha_k}{2\pi} = \prod_{k=1}^{n} J_0(l_k t),$$

где $J_0$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Отсюда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \prod_{k=1}^{n} J_0(l_k t)\, dt,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos tx \prod_{k=1}^{n} J_0(l_k t)\, dt.$$

Пример 23.2. Пользуясь методом характеристических функций, определить математическое ожидание произведения квадрата третьей из шести нормальных центрированных случайных величин на вторую и четвертую случайную величину этой системы. Корреляционная матрица системы случайных величин $\| k_{rs} \|$ задана.

*Решение.* Математическое ожидание $M[X_3^2 X_2 X_4]$ определяется распределением подсистемы случайных величин $(X_2, X_3, X_4)$. Соответствующая этой подсистеме характеристическая функция имеет вид

$$E_{x_2, x_3, x_4}(t_2, t_3, t_4) = e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{r=2}^{4} \sum\limits_{s=2}^{4} k_{rs} t_r t_s}.$$

Искомое математическое ожидание может быть получено путем четырехкратного дифференцирования характеристической функции

$$M\left[X_3^2X_2X_4\right] = \left.\frac{\partial^4 E_{x_2,\,x_3,\,x_4}(t_2,\,t_3,\,t_4)}{\partial t_3^2\partial t_2\partial t_4}\right|_{t_2=t_3=t_4=0}$$

*Первый способ.* Если разложить характеристическую функцию в ряд по степеням ее показателя степени, то обнаружится, что интересующая нас смешанная производная при $t_2 = t_3 = t_4 = 0$ будет содержать только один отличный от нуля член разложения, а именно третий член:

$$M\left[X_3^2X_2X_4\right] = \frac{1}{8}\left.\frac{\partial^4\left(\sum\limits_{r=2}^{4}\sum\limits_{s=2}^{4} k_{rs}t_rt_s\right)^2}{\partial t_3^2\partial t_2\partial t_4}\right|_{t_2=t_3=t_4=0}$$

Смешанная производная от квадрата многочлена при $t_2 = t_3 = t_4 = 0$ будет в свою очередь иметь отличными от нуля только те члены, которые до дифференцирования были пропорциональны $t_3^2t_2t_4$, т. е.

$$M\left[X_3^2X_2X_4\right] = \frac{1}{4}\frac{\partial^4\left[2k_{33}k_{24}t_3^2t_2t_4 + 4k_{23}k_{34}t_3^2t_2t_4\right]}{\partial t_3^2\partial t_2\partial t_4} = k_{33}k_{24} + 2k_{23}k_{34}.$$

*Второй способ.* Для удобства введем обозначение

$$\tau_r = \sum_{s=1}^{n} k_{rs}t_s.$$

Тогда

$$\frac{\partial E}{\partial t_3} = \frac{\partial e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{6}\sum\limits_{s=1}^{6} k_{rs}t_rt_s}}{\partial t_3} = -E\tau_3,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t_3^2} = E\tau_3^2 - E\frac{\partial\tau_3}{\partial t_3} = E\tau_3^2 - Ek_{33},$$

$$\frac{\partial^3 E}{\partial t_3^2\partial t_2} = -E\tau_3^2\tau_2 + 2E\tau_3k_{23} + E\tau_2k_{33},$$

$$\frac{\partial^4 E}{\partial t_3^2\partial t_2\partial t_4} = E\tau_3^2\tau_2\tau_4 - 2E\tau_3\tau_2k_{34} - E\tau_3^2k_{24} -$$

$$-2E\tau_3\tau_4k_{23} + 2Ek_{34}k_{23} - E\tau_2\tau_4k_{33} + Ek_{24}k_{33}.$$

При $t_1 = t_2 = \cdots = t_6 = 0$ имеем

$$E = 1,\ \tau_r = 0,$$

вследствие чего

$$M\left[X_3^2X_2X_4\right] = k_{33}k_{24} + 2k_{23}k_{34}.$$

Пример 23.3. С помощью метода характеристических функций найти плотность вероятности радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2+y^2}$ случайной точки на плоскости, если плотность вероятности прямоугольных координат $(X,\ Y)$ равна $f(x,\ y)$.

*Решение.*

$$E_r(t)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} e^{irt} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

С помощью формулы обращения интеграла Фурье находим плотность вероятности

$$f_r(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-irt}\left[\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} e^{itr_1} f(r_1\cos\varphi, r_1\sin\varphi)\,r_1dr_1d\varphi\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\delta(r-r_1)\,f(r_1\cos\varphi,\ r_1\sin\varphi)\,r_1dr_1d\varphi.$$

Пользуясь свойством дельта-функции, получим

$$f_r(r)=r\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

## Задачи для упражнений

23. 1. Доказать, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

23. 2. Задана характеристическая функция $E_{x_1,\ldots,x_n}(t_1,\ldots,t_n)$ системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Найти характеристическую функцию суммы $Z=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

23. 3. Найти характеристическую функцию линейной функции $Y=\sum\limits_{k=1}^{n} a_kX_k+c$ независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, характеристические функции которых заданы.

23. 4. Найти характеристическую функцию квадрата отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания $Y=(X-\bar{x})^2$ и начальные моменты распределения $Y$.

23. 5. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y=aF(X)+b$, где $X$ — случайная величина, а $F(x)$ — ее функция распределения.

23. 6. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y=\ln F(X)$, где $X$—случайная величина, а $F(X)$—ее функция распределения. Определить начальные моменты распределения $Y$.

23. 7. Найти характеристическую функцию проекции отрезка $a$ на ось $Oy$, если угол между отрезком и осью $Oy$ подчинен закону равной вероятности в пределах от 0 до $2\pi$. Определить плотность вероятности проекции отрезка.

23. 8. Найти характеристическую функцию системы двух случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_1^2}-\frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

23. 9. Найти характеристическую функцию системы $n$ случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, подчиненных нормальному закону распределе-

ния, если заданы математические ожидания случайных величин, входящих в систему $\bar{x}_m = a$ и их корреляционная матрица

$$\|k_{m,l}\|_1^n = \left\| \begin{matrix} \sigma^2 & a\sigma^2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ & \sigma^2 & a\sigma^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \sigma^2 & a\sigma^2 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & \ldots & \ldots \\ & & & & & \sigma^2 & a\sigma^2 \\ & & & & & & \sigma^2 \end{matrix} \right\|.$$

23. 10. Найти характеристическую функцию

$$Y = \sum_{m=1}^{n} X_m,$$

где $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — система нормальных случайных величин, причем

$$\bar{x}_m = m,$$

$$k_{m,l} = n - |m - l|.$$

23. 11. Пользуясь методом характеристических функций, определить $M[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)]$, если $X_1$, $X_2$ — нормальные центрированные случайные величины, для которых $M[X_1^2] = M[X_2^2] = \sigma^2$, а $M[X_1X_2] = k_{12}$.

23. 12. Пользуясь методом характеристических функций, определить: а) $M[X_1^2X_2^2X_3^2]$; б) $M[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)(X_3^2 - \sigma^2)]$, если $X_1$, $X_2$ и $X_3$ — нормальные центрированные случайные величины, для которых $M[X_1^2] = M[X_2^2] = M[X_3^2] = \sigma^2$, а $k_{12}$, $k_{13}$ и $k_{23}$ — моменты связи между соответствующими случайными величинами.

23. 13. Пользуясь методом характеристических функций, определить $M[X_1X_2X_3]$, если $X_1$, $X_2$, $X_3$ — нормальные центрированные случайные величины.

23. 14. Пользуясь методом характеристических функций, выразить $M[X_1X_2X_3X_4]$ через элементы корреляционной матрицы $k_{m,l}$ системы нормальных центрированных случайных величин $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$.

23. 15. Доказать, что центральный момент четного порядка системы $n$ нормальных случайных величин определяется формулой

$$\mu_{r_1, r_2, \ldots, r_n} = M\left[(X_1 - \bar{x}_1)^{r_1}(X_2 - \bar{x}_2)^{r_2} \ldots (X_n - \bar{x}_n)^{r_n}\right] =$$

$$= \frac{r_1!\, r_2! \ldots r_n!}{2^s s!} \sum k_{m_1 l_1} \ldots k_{m_s l_s},$$

где $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 2s$, а сумма распространена на все возможные различные перестановки $2s$ индексов $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и $l_1, l_2, \ldots, l_n$, из которых $r_1$ индексов равно 1, $r_2$ индексов равно 2, ..., $r_n$ индексов равно $n$.

23. 16. Пользуясь методом характеристических функций, найти закон распределения системы случайных величин $(R, \Theta)$, где $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ радиус-вектор случайной точки в пространстве, а $\Theta = \arcsin \frac{Z}{R}$ — широтный угол, если плотность вероятности прямоугольных координат $(X, Y, Z)$ равна $f(x, y, z)$.

## § 24. КОМПОЗИЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

### Основные формулы

Нахождение закона распределения суммы независимых случайных величин по известным законам распределения слагаемых называется композицией законов распределений.

Если $X$ и $Y$ — независимые дискретные случайные величины, то ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$ определяется формулой

$$P\{Z = z\} = \sum_x P(X = x)\, P(Y = z - x) = \sum_y P(Y = y)\, P(X = z - y).$$

Индекс у сумм ($x$ или $y$) означает, что суммирование ведется по всем возможным значениям этих случайных величин. Если $X$ и $Y$—непрерывные случайные величины, то плотность вероятностей случайной величины $Z$

$$f_z(z) = \frac{d}{dz} F(z),$$

где

$$F(z) = \iint\limits_{x+y<z} f_x(x)\, f_y(y)\, dx\, dy.$$

Определение плотности вероятности случайной величины $Z$ упрощается, если хотя бы одна из случайных величин ($X$ или $Y$) имеет закон распределения, заданный одной формулой на всем диапазоне значений аргумента (от $-\infty$ до $+\infty$). В этом случае

$$f_x(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)\, f_y(z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\, f_x(z - y)\, dy.$$

Композиция многих распределений ($Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$) определяется формулой

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} E_y(t)\, dt,$$

где

$$E_y(t) = \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(t),$$

$$E_{x_j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j t} f_{x_j}(x_j)\, dx_j$$

(характеристическая функция случайной величины $X_j$), а также может быть получена путем последовательного применения формулы композиции двух случайных величин.

### Решение типовых задач

Пример 24. 1. $X$ и $Y$ — независимые случайные величины. $X$ равномерно распределена в интервале (0, 1); $Y$ имеет распределение Симпсона (рис. 24):

$$f_y(y) = \begin{cases} y & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 2 - y & \text{при } 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$.

*Решение.* Так как функции $f_x(x)$ и $f_y(y)$ заданы только на определенных участках осей $Ox$ и $Oy$, то выделим предварительно область $(D_z)$,

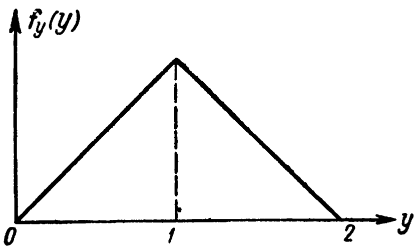


Рис. 24.

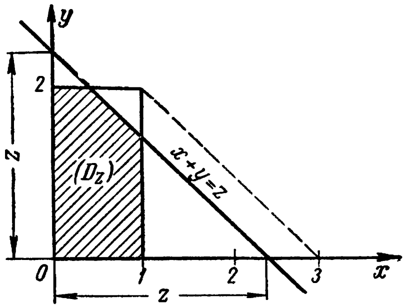


Рис. 25.

внутри которой выполняется условие $Z < z$ (рис. 25), и найдем выражение для функции закона распределения.

Имеем

$$F(z) = P\{Z < z\} = \iint\limits_{(D_z)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

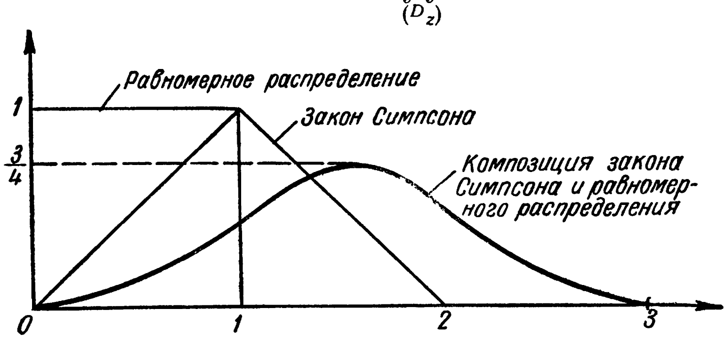


Рис. 26.

$$F(z) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^z f_y(y)\,dy \int\limits_0^{z-y} f_x(x)\,dx = \frac{z^3}{6} & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ \displaystyle\int\limits_0^{z-1} dx \int\limits_0^1 y\,dy + \int\limits_0^{z-1} dx \int\limits_1^{z-x} (2-y)\,dy + \int\limits_{z-1}^1 dx \int\limits_0^{z-x} y\,dy = & \\ \displaystyle = z - 1 + \frac{(2-z)^3}{6} - \frac{(z-1)^3}{6} & \text{при } 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ \displaystyle 1 - \int\limits_{z-1}^2 (2-y)\,dy \int\limits_{z-y}^1 dx = 1 - \frac{1}{6}(3-z)^3 & \text{при } 2 \leqslant z \leqslant 3. \end{cases}$$

Дифференцируя по $z$, определяем плотность вероятности

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} z^2 & \text{при } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ -z^2 + 3z - \dfrac{3}{2} & \text{при } 1 \leqslant z \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{2} z^2 - 3z + \dfrac{9}{2} & \text{при } 2 \leqslant z \leqslant 3. \end{cases}$$

Функции $f_x(x)$, $f_y(y)$ и $f_z(z)$ представлены на рис. 26.

Аналогично решаются задачи 24. 1—24. 2; 24. 4; 24. 9.

Пример 24. 2. Случайная точка $C$ с равной вероятностью может находиться в любой точке отрезка $A_1A_2$ длиной $2L$. Возможное отклонение центра отрезка $F_1F_2 = 2B$ от середины отрезка $A_1A_2$ имеет нормальное распределение со срединным отклонением $E$. Определить вероятность того, что удаление точки $C$ от ближайшего из концов отрезка $F_1F_2$ не превзойдет заданной величины $d$.

*Решение.* Обозначим случайное отклонение точки $C$ от центра отрезка $A_1A_2$ через $X$, а отклонение центра отрезка $F_1F_2$ от середины отрезка $A_1A_2$ через $Y$. В дальнейшем будем считать, что положение точки $C$ зафиксировано в точке $O$ (рис. 27), тогда отклонение центров отрезков $F_1F_2$ и $A_1A_2$ будет равно $Z = X + Y$. Так как функция $f_y(y)$ задана на всей числовой оси, то плотность вероятности для $Z$ определяется формулой

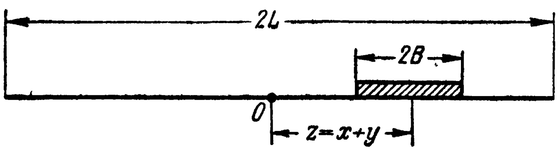


Рис. 27.

$$f_z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x)\,dx = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} f_y(z-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E} e^{-\rho^2\frac{(z-x)^2}{E^2}}\,dx = \frac{1}{2L}\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{L+z}{E}}^{\frac{L-z}{E}} e^{-\rho^2 t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4L}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{L+z}{E}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{L-z}{E}\right)\right].$$

Удаление точки $C$ от ближайшего из концов отрезка $F_1F_2$ не превзойдет величины $d$, если $|z| < d + B$. Поэтому вероятность этого события определяется формулой

$$P = P\{|z| < d + B\} = \int\limits_{-(d+B)}^{d+B} f_z(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{4L}\int\limits_{-(d+B)}^{d+B}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{L+z}{E}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{L-z}{E}\right)\right]dz =$$

$$= \frac{E}{4L}\left[\int\limits_{\frac{L-(d+B)}{E}}^{\frac{L+d+B}{E}} \hat{\Phi}(t)\,dt - \int\limits_{\frac{L+d+B}{E}}^{\frac{L-(d+B)}{E}} \hat{\Phi}(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{E}{2L}\int\limits_{\frac{L-(d+B)}{E}}^{\frac{L+d+B}{E}} \hat{\Phi}(t)\,dt = \frac{1}{2L}\left\{(L+B+d)\,\hat{\Phi}\left(\frac{L+d+B}{E}\right) - (L-B-d)\times\right.$$

$$\left.\times\hat{\Phi}\left(\frac{L-d-B}{E}\right) + \frac{E}{\rho\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{\rho^2}{E^2}(L+d+B)^2} - e^{-\frac{\rho^2}{E^2}(L-d-B)^2}\right]\right\}.$$

Аналогично решаются задачи 24. 3; 24. 5—24. 8; 24. 13—24. 17.

Пример 24. 3. Смешаны две группы однотипных деталей, содержащих $n_1$ и $n_2$ деталей каждая. Соответственно число бракованных деталей в каждой группе деталей ($X$ и $Y$) имеет биномиальное распределение

$$P\{X = m\} = C_{n_1}^m p^m q^{n_1-m},$$

$$P\{Y = m\} = C_{n_2}^m p^m q^{n_2-m}.$$

Найти распределение вероятностей для случайной величины $Z = X + Y$.

*Решение.* Для определения распределения дискретной случайной величины $Z$ используется формула

$$P\{Z = z\} = \sum_x P(X = x) P(Y = z - x) = \\ = \sum_y P(Y = y) P(X = z - y),$$

где индекс $x$ или $y$ у суммы обозначает, что суммирование производится по всем возможным значениям этих случайных величин. Предположим, что суммирование ведется по всем возможным значениям случайной величины $X$. Тогда для того, чтобы вероятность $P(Y = z - x)$ была бы отличной от нуля, возможные значения $X$ должны находиться внутри интервала $0 \leqslant x \leqslant z$. Поэтому

$$P\{Z = z\} = \sum_{x=0}^{z} C_{n_1}^x p^x q^{n_1-x} C_{n_2}^{z-x} p^{z-x} q^{n_2-z+x} = \\ = p^z q^{n_1+n_2-z} \sum_{x=0}^{z} C_{n_1}^x C_{n_2}^{z-x} = C_{n_1+n_2}^z p^z q^{n_1+n_2-z}.$$

(Равенство $\sum_{x=0}^{z} C_{n_1}^x C_{n_2}^{z-x} = C_{n_1+n_2}^z$ может быть доказано, например, по индукции. Сначала доказать для $n_1 = 1$ и всех $n_2$.)

Примечание. Эта задача легко может быть решена, если воспользоваться аппаратом характеристических функций. Определим характеристические функции для случайных величин $X$ и $Y$

$$E_x(t) = M[e^{iXt}] = (e^{it}p + q)^{n_1},$$

$$E_y(t) = M[e^{iYt}] = (e^{it}p + q)^{n_2}.$$

Так как случайные величины $X$ и $Y$ по условию независимы, то

$$E_z(t) = E_x(t) E_y(t) = \left(pe^{it} + q\right)^{n_1+n_2}.$$

Из этого следует, что случайная величина $Z$ также имеет биномиальное распределение.

Аналогично решаются задачи 24. 14; 24. 18—24. 20; 24. 22.

Пример 24. 4. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, каждая из которых подчиняется одному и тому же закону Пуассона

$$P\{X_j = m\} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Найти распределение вероятностей случайной величины $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и доказать, что центрированная и нормированная случайная величина $\frac{Y - \bar{y}}{\sigma_y}$ при $n \to \infty$ имеет нормальное распределение.

*Решение.* Определим характеристическую функцию для случайной величины $X_j$

$$E_{x_j}(t) = M\,[e^{itX_j}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\,\frac{a^k}{k!}\,e^{-a} =$$

$$= e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a}e^{ae^{it}} = e^{a\,(e^{it}-1)}.$$

Так как случайные величины $X_j$ независимы, то характеристическая функция случайной величины $Y$ определяется формулой

$$E_y(t) = \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(t) = e^{na\,(e^{it}-1)}.$$

Следовательно, случайная величина $Y$ имеет своим законом распределения закон Пуассона. Обозначим $Z = \frac{Y-\bar{y}}{\sigma_y}$. Случайная величина $Z$ получена в результате центрирования и нормирования случайной величины $Y$. Известно, что для закона Пуассона математическое ожидание и дисперсия численно равны между собой и равны параметру этого закона. Поэтому

$$Z = \frac{Y-na}{\sqrt{na}}.$$

Определим характеристическую функцию для случайной величины $Z$

$$E_z(t) = M\,[e^{itZ}] = M\left[e^{\frac{it\,(Y-na)}{\sqrt{na}}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-na}\,\frac{(na)^k}{k!}\,e^{it\frac{(k-na)}{\sqrt{na}}} =$$

$$= e^{-na}\,e^{-it\sqrt{na}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nae^{\frac{it}{\sqrt{na}}}\right)^k}{k!} = e^{-na}e^{-it\sqrt{na}}\exp\left[nae^{\frac{it}{\sqrt{na}}}\right] =$$

$$= e^{-na}e^{-it\sqrt{na}}\exp\left[na\left(1+\frac{it}{\sqrt{na}}-\frac{t^2}{2na}+\ldots\right)\right] = e^{na\left(-\frac{t^2}{2na}+\frac{i^3t^3}{3!\,(na)^{3/2}}-\ldots\right)}.$$

Следовательно,

$$\underset{n\to\infty}{E_z(t)} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Предельное значение $E_z(t)$ является характеристической функцией случайной величины, имеющей нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной единице.

Аналогично решаются задачи 24. 6; 24. 12; 24. 20; 24. 21.

## Задачи для упражнений

24. 1. Определить плотность вероятности суммы двух независимых величин, каждая из которых равномерно распределена в интервале $(a, b)$.

24. 2. Найти композицию двух законов равной вероятности с параметрами $2a$ и $2b$ $(b > a)$, если центры рассеивания этих законов совпадают.

24. 3. Случайная величина $X$ подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $\bar{x}$ и $\sigma_x$, а $Y$ — закону равной вероятности с параметром $\frac{b-a}{2}$. Найти плотность вероятностей случайной величины $Z = X + Y$.

24. 4. Найти плотность вероятностей суммы трех независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена в интервале $(a, b)$.

24. 5. Найти композицию нормального закона (математическое ожидание $\bar{x}$, срединное отклонение $E$) и закона равной вероятности, заданного в интервале $(\bar{x} - l, \bar{x} + l)$. Определить относительную ошибку, возникающую от замены суммарного закона нормальным законом, если при замене сохраняется величина математического ожидания и дисперсии. (Расчет произвести для $\bar{x} = 0$; $l = E$, $l = 2E$, $l = 3E$ и $l = 4E$ в точке $z = 0$.)

24. 6. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$, если случайные величины $X$ и $Y$ независимы и подчиняются закону Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{h}{1 + h^2 (x - a)^2},$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{k}{1 + k^2 (y - b)^2}.$$

24. 7. Найти композицию двух законов распределения, плотность вероятности для которых определяется по формулам

$$f_x(x) = \frac{a}{\pi (x^2 + a^2)},$$

$$f_y(y) = \frac{b}{\pi (y^2 + b^2)}.$$

24. 8. Найти плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин $X$ и $Y$, подчиняющихся законам гиперболического секанса

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} x}; \quad f_y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\operatorname{ch} y}.$$

24. 9. $X$ и $Y$ — независимые случайные величины, плотности вероятности которых заданы формулами

$$f_x(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant \infty),$$

$$f_y(y) = \frac{1}{3} e^{-\frac{y}{3}} \quad (0 \leqslant y \leqslant \infty).$$

Найти плотность вероятности случайной величины

$$Z = X + Y.$$

24. 10. Найти плотность вероятности расстояний между случайными точками $A_1 (X_1, Y_1)$ и $A_2 (X_2, Y_2)$, если системы случайных величин $(X_1, Y_1)$ и $(X_2, Y_2)$ независимы и нормально распределены. Единичные эллипсы рассеивания точек $A_1$ и $A_2$ имеют главные полудиаметры $(a_1, b_1)$ и $(a_2, b_2)$. Угол между полудиаметрами $a_1$ и $a_2$ равен $\alpha$. Центры единичных эллипсов совпадают.

24. 11. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нормально распределены и имеют $\bar{x}_j = 0$ и $D[X_j] = 1$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Найти характеристическую функцию для случайной величины

$$Y = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 .$$

24. 12. $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ — нормально распределенные независимые случайные величины с $\bar{x}_i = 0$ и $D[X_i] = 1$. Доказать, что случайная величина $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ имеет своим дифференциальным законом распределения функцию

$$f_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} \text{ при } y \geqslant 0.$$

24. 13. Прибор дает при измерении систематическую ошибку $x$ и случайную ошибку, подчиненную нормальному закону распределения со срединным отклонением $E$. Проверить при $E \geqslant d$ точность приближенной формулы для вероятности $p(x)$ получения ошибки в пределах заданного допуска $\pm d$

$$p(x) = \frac{2\varrho d}{E_x \sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 \frac{x^2}{E_x^2}},$$

где

$$E_x = \sqrt{E^2 + \frac{2}{3} \varrho^2 d^2} .$$

24. 14. Двое независимо один от другого стреляют в тире каждый по своей мишени до первого попадания. Определить математическое ожидание и дисперсию общего числа промахов и найти функцию распределения числа промахов, если вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна $p_1$, а для второго $p_2$.

24. 15. Какой запас прочности должен иметь образец, чтобы вероятность того, что он выдержит нагрузку была бы не менее 98%? Ошибки в определении заданной нагрузки и величине предельной нагрузки подчиняются закону нормального распределения и характеризуются срединными отклонениями $E_{Q_1} = 10\% \; \bar{q}_1$ и $E_{Q_2} = 5\% \; \bar{q}_2$, где $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ — математические ожидания заданной и предельной нагрузок, причем $\bar{q}_1 = 20$ *кГ*.

24. 16. Обрыв телефонного кабеля может произойти с равной вероятностью в любом месте между двумя пунктами, расстояние между которыми равно $L$. Из этих пунктов навстречу друг другу выезжают две ремонтные бригады, проходящие за определенное время пути, которые являются нормально распределенными независимыми случайными величинами с параметрами $\bar{x}$ и $E$. Определить вероятность того, что за это время обе бригады обнаружат место повреждения кабеля, если $2\bar{x} < L$.

24. 17. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что место повреждения кабеля будет обнаружено по крайней мере одной из ремонтных бригад.

24. 18. $X$ и $Y$ — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения $i$ и $j$ соответственно с вероятностями

$$P(X = i) = (1 - a) a^i \text{ и } P(Y = j) = (1 - b) b^j,$$

где $a$ и $b$ — положительные числа меньше единицы.

Найти интегральный закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

24. 19. $X$, $Y$ — независимые дискретные случайные величины; $X$ — принимает три возможных значения 0, 1, 3 с вероятностями $^1/_2$, $^3/_8$, $^1/_8$, а $Y$ — два возможных значения 0 и 1 с вероятностями $^1/_3$, $^2/_3$. Определить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

24. 20. $X$, $Y$ — независимые дискретные случайные величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона

$$P\{X = m\} = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

$$P\{Y = m\} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Найти ряд распределения вероятностей для случайной величины $Z = X + Y$.

24. 21. $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ независимые дискретные случайные величины, каждая из которых может принимать только два значения: единицу с вероятностью $p$ и нуль с вероятностью $q = 1 - p$. Найти распределение вероятностей случайной величины $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

24. 22. $X$ и $Y$—независимые дискретные случайные величины, принимающие целые положительные значения $k$ от 1 до $\infty$ с вероятностью $\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Найти интегральный закон распределения для случайной величины $Z = X + Y$.

## § 25. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Любая непрерывная дифференцируемая функция, производная которой не обращается в данной точке в бесконечность, при достаточно малых пределах изменения аргументов может быть приближенно заменена линейной путем разложения ее в ряд Тэйлора с удержанием только линейных членов. Разложение функции случайных аргументов производится в окрестности точки, соответствующей математическим ожиданиям ее аргументов. Приближенное значение математического ожидания и дисперсии при этом определяется:

а) для функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}),$$

$$D[Y] \approx [\varphi'(\bar{x})]^2 D[x];$$

б) для функции $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ нескольких случайных аргументов

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$$

$$D[Y] \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}\right)^2 D[X_i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j}\right) k_{ij},$$

где $k_{ij}$ — момент связи между случайными величинами $X_i$ и $X_j$, а через $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}$ условно обозначены производные, вычисленные для значений аргументов, равных их математическим ожиданиям.

Если случайные аргументы взаимно не связаны, то дисперсия функции определяется по формуле

$$D[Y] \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}\right)^2 D[X_i].$$

Для уточнения результатов, полученных методом линеаризации, в разложении функции сохраняют, кроме первых двух, и некоторые последующие члены. Если удержаны первые три члена разложения функции в ряд, то математическое ожидание и дисперсия функции приближенно определяются по формулам:

а) для функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2}\varphi''(\bar{x}) D[X],$$

$$D[Y] \approx [\varphi'(\bar{x})]^2 D[X] + \frac{1}{4}[\varphi''(\bar{x})]^2 (\mu_4[X] -$$

$$- D^2[X]) + \varphi'(\bar{x})\varphi''(\bar{x})\mu_3[X];$$

б) для функции нескольких случайных аргументов $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$\bar{y} = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2} D[X_i] + \sum_{i<j} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j} k_{ij}.$$

Когда случайные аргументы взаимно независимы

$$\bar{y} \approx \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2} D[X_i],$$

$$D[Y] \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}\right)^2 D[X_i] + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2}\right)^2 (\mu_4[X_i] - D^2[X_i]) +$$

$$+ \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 D[X_i] D[X_j] + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_i^2}\right) \mu_3[X_i].$$

## Решение типовых задач

Пример 25. 1. Математическое ожидание числа бракованных аппаратов при их проверке на безотказность действия определяется формулой

$$T = N\left[1 - \left(1 - \frac{P}{\omega N}\right)^m\right],$$

где $P$ — вероятность того, что испытание одного из аппаратов будет признано зачетным;

$\omega$ — среднее число зачетных испытаний до получения отказа в действии аппарата;

$N$ — число аппаратов, участвующих в проверке;

$m$ — число испытаний (зачетных и незачетных), приходящихся на один аппарат.

Пользуясь методом линеаризации, определить зависимость математического ожидания и дисперсии случайной величины $T$ от $m$, если $N$, $P$ и $\omega$ независимые случайные величины, математическое ожидание и дисперсия которых соответственно равны:

$$M[N] = 5, \quad M[P] = 0{,}8, \quad M[\omega] = 4,$$

$$D[N] = 1, \quad D[P] = 0{,}1, \quad D[\omega] = 0{,}2.$$

*Решение.* Применяя общие формулы метода линеаризации, получим

$$M[T] = \bar{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega}\,\bar{n}}\right)^m\right] = 5\left(1 - 0{,}96^m\right),$$

$$D[T] = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n}\right)^2 D[N] + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial p}\right)^2 D[P] + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega}\right)^2 D[\omega],$$

где

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n}\Bigg|_{\substack{N=\bar{n}\\ \omega=\bar{\omega}\\ P=\bar{p}}} = 1 - \left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega}\,\bar{n}}\right)^m - \frac{m\bar{p}}{\bar{\omega}\,\bar{n}}\left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega}\,\bar{n}}\right)^{m-1} =$$

$$= 1 - 0{,}96^m - 0{,}04m\,0{,}96^{m-1},$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial p} = \frac{m}{\bar{\omega}}\left(1 - \frac{\bar{p}}{\bar{\omega}\,\bar{n}}\right)^{m-1} = 0{,}25m\,0{,}96^{m-1},$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \omega} = -0{,}05m\,0{,}96^{m-1},$$

$$D[T] = 0{,}00835m^2\,0{,}96^{2(m-1)} -$$

$$-0{,}08m\,0{,}96^{m-1}\left(1 - 0{,}96^m\right) + \left(1 - 0{,}96^m\right)^2.$$

Приближенные значения математического ожидания и дисперсии случайной величины $T$ для различных $m$ приведены в табл. 9

*Таблица 9*

| $m$ | 2 | 10 | 30 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $D[T]$ | 0,025 | 0,327 | 0,684 | 0,854 |
| $M[T]$ | 0,390 | 1,675 | 3,530 | 4,915 |

Аналогично решаются задачи 25. 1—25. 11, 25. 14, 25. 17, 25. 19—25. 22.

Пример 25. 2. Максимальная высота полета спутника определяется формулой

$$Y = y_0 + (R + y_0)\left[\frac{1 + l}{2(1 - \lambda)} - 1\right],$$

где

$$\lambda = \frac{V^2}{2gR}\left(1 + \frac{y_0}{R}\right);$$

$$l = \sqrt{1 - 4\lambda(1 - \lambda)\cos^2\Theta};$$

$y_0$ — высота активного участка траектории;
$g$ — ускорение силы тяжести на поверхности земли;
$R$ — радиус земли.

Функция $Y$ в области практически возможных значений случайных аргументов линеаризуется. Начальная скорость ($V$) и угол бросания ($\Theta$) нормальные случайные величины, плотность вероятности которых

$$f(v,\ \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_\theta\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(v-\bar{v})^2}{\sigma_v^2} - 2r\frac{(v-\bar{v})(\theta-\bar{\theta})}{\sigma_v\sigma_\theta} + \frac{(\theta-\bar{\theta})^2}{\sigma_\theta^2}\right]}.$$

Найти приближенное значение дисперсии для максимальной высоты полета спутника.

*Решение.* Так как заданная функция по условию линеаризуема в области практически возможных значений случайных аргументов, то

$$D[Y] \approx \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial v}\right)^2 D[V] + \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \theta}\right)^2 D[\Theta] + 2\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \theta}\right) k_{v\theta},$$

где

$$k_{v\theta} = r\sigma_v\sigma_\theta,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{\lambda(R + y_0)[2(1-\lambda)(2\lambda - 1)\cos^2\Theta + l(1 + l)]}{vl(1-\lambda)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \theta} = \frac{\lambda(R + y_0)\sin 2\Theta}{l}.$$

Аналогично решаются задачи 25. 13, 25. 23.

Пример 25. 3. $X$, $Y$—независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$f_y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad (0 \leqslant y \leqslant 1).$$

Пользуясь методом линеаризации, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = \operatorname{arc\,tg}\frac{X}{Y}$. Полученные результаты уточнить, используя для этого разложение заданной функции в ряд Тэйлора с удержанием в нем членов не выше второго порядка.

*Решение.* Используя общие формулы линеаризации, имеем

$$M[Z] \approx \operatorname{arc\,tg}\frac{\bar{x}}{\bar{y}},$$

$$D(Z) \approx \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right)^2 D[X] + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right)^2 D[Y],$$

где

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$D[X] = D[Y] = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \bar{x}^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2},$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\ y=\bar{y}}} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -\frac{\bar{x}}{\bar{x}^2+\bar{y}^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, метод линеаризации дает

$$M[Z] \approx \operatorname{arc\,tg}\frac{\pi/2}{\pi/2} = \frac{\pi}{4},$$

$$D[Z] \approx 2\,\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{\pi^2-8}{2\pi^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$$

Учитывая следующий член разложения в ряд Тэйлора, получим

$$M[Z] \approx \operatorname{arc\,tg}\frac{\bar{x}}{\bar{y}} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x^2}D[X] + \frac{\partial^2\bar{z}}{\partial y^2}D[Y]\right\},$$

$$D[Z] \approx \left(\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}\right)^2 D[X] + \left(\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\right)^2 D[Y] + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x^2}\right)^2(\mu_4[X] - D^2[X]) +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial y^2}\right)^2(\mu_4[Y] - D^2[Y])\right\} + \frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x\partial y}D[X]D[Y] +$$

$$+ \frac{\partial\bar{z}}{\partial x}\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x^2}\mu_3[X] + \frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial y^2}\mu_3[Y],$$

где

$$\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x^2} = -\frac{2\bar{x}\,\bar{y}}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2} = -\frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial y^2} = \frac{2\bar{x}\,\bar{y}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x\partial y} = \frac{\bar{x}^2-\bar{y}^2}{(\bar{x}^2+\bar{y}^2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial x^2} = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi^2}{8}\right) = -\frac{\pi^3}{32},$$

$$\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\frac{\partial^2\bar{z}}{\partial y^2} = \left(-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^3}{32},$$

$$\mu_3[X] = \mu_3[Y] = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- 3\bar{x}\int_0^1 \frac{2}{\pi}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\bar{x}^3 = \frac{4}{3\pi} - \frac{3}{\pi} + \frac{16}{\pi^3} = \frac{16}{\pi^3} - \frac{5}{3\pi},$$

$$\mu_4[X] = \mu_4[Y] = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4 =$$

$$= \frac{3}{8} - 4\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{3\pi} + 6\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1}{2} - 3\frac{16}{\pi^4} = \frac{4}{3\pi^2} + \frac{3}{8} - \frac{48}{\pi^4}.$$

Поэтому с учетом квадратичных членов ряда Тэйлора получим

$$M[Z] \approx \frac{\pi}{4},$$

$$D[Z] \approx \frac{\pi^2-8}{16} + \frac{\pi^4}{8\cdot 128} + \frac{7\pi^2}{48} - \frac{3}{2}.$$

Аналогично решаются задачи 25. 12, 25. 15, 25. 16, 25. 18.

## Задачи для упражнений

25. 1. При прохождении через проводник с сопротивлением $R$ тока $I$ за время $T$ выделяется тепло, количество которого (в калориях) определяется по формуле

$$Q = 0{,}24\ I^2RT.$$

Ошибки измерения величины $I$, $R$, $T$ являются независимыми нормальными случайными величинами с математическими ожиданиями $\bar{i} = 10\ a$, $\bar{r} = 30\ ом$, $\bar{t} = 10$ мин. и срединными отклонениями $E_I = 0{,}1$ А, $E_R = 0{,}2\ ом$, $E_T = 0{,}5$ сек. Найти приближенное значение срединного отклонения случайной величины $Q$.

25. 2. Частота основного тона струны определяется по формуле

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{ML}},$$

где $P$ — сила натяжения;
$M$ — масса струны;
$L$ — длина струны.

Известны математические ожидания $\bar{p}$, $\bar{m}$, $\bar{l}$ и средние квадратические отклонения $\sigma_p$, $\sigma_m$ и $\sigma_l$. Определить рассеивание частоты основного тона струны из-за разброса силы натяжения, массы и длины струны, если соответствующие коэффициенты корреляции равны $r_{pm}$, $r_{pl}$ и $r_{ml}$.

25. 3. Сопротивление участка электрической цепи определяется по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2},$$

где $R$ — омическое сопротивление;
$L$ — индуктивность проводника тока;
$c$ — его емкость;
$\omega$ — частота тока.

Определить срединную ошибку в величине сопротивления из-за ошибок при независимых измерениях $R$, $L$, $C$ и $\omega$, если заданы $\bar{r}$, $\bar{l}$, $\bar{c}$, $\bar{\omega}$ и $E_R$, $E_L$, $E_C$ и $E_\omega$.

25. 4. При параллельном соединении элементов сила тока в цепи определяется по формуле

$$I = \frac{E}{R + \frac{r}{n}},$$

где $E$ — электродвижущая сила элемента;

$r$ — его внутреннее сопротивление;

$n$ — число элементов;

$R$ — сопротивление внешней части цепи.

Пользуясь методом линеаризации, определить математическое ожидание и дисперсию силы тока, если случайные величины $E$, $R$ и $r$ независимы, $\bar{E}$, $\bar{R}$, $\bar{r}$ и $\sigma_E$, $\sigma_R$, $\sigma_r$ заданы.

25. 5. Используя метод линеаризации, найти срединные отклонения $E_x$ и $E_y$, характеризующие рассеивание координат материальной точки, движущейся в безвоздушном пространстве, если

$$X = V_0 T_n \cos\theta_0; \quad Y = V_0 T_n \sin\theta_0 - \frac{gT_n^2}{2},$$

где $V_0$ — начальная скорость материальной точки ($\bar{v}_0 = 800$ *м/сек*; $E_{v_0} = 0{,}1\%$ от $\bar{v}_0$);

$T_n$ — время полета ($\bar{t}_n = 40$ *сек*, $E_{Tn} = 0{,}1$ *сек*);

$\theta_0$ — угол бросания ($\bar{\theta}_0 = 45°$; $E_{\theta_0} = 4'$);

$g$ — ускорение силы тяжести.

Случайные величины $V_0$, $T_n$ и $\theta_0$ независимы и нормальны.

25. 6. Найти приближенное значение срединной ошибки определения проекции скорости судна на заданное направление вследствие ошибок измерения его скорости ($V_c$) и курсового угла ($q_c$), если $V_1 = -V_c \cos q_c$, $E_{V_c} = 1$ *м/сек*, $E_{q_c} = 1°$, а наивероятнейшие значения $V_c$ и $q_c$ соответственно равны 10 *м/сек* и 60° (случайные величины $V_c$ и $q_c$ независимы и нормальны).

25. 7. Применим ли в условиях предыдущей задачи метод линеаризации, если ошибка расчетных формул не должна превосходить 0,2 *м/сек*?

25. 8. Найти приближенное значение срединных отклонений прямоугольных координат случайной точки

$$X = H \operatorname{ctg} \varepsilon \cos \beta,$$
$$Y = H \operatorname{ctg} \varepsilon \sin \beta,$$
$$Z = H,$$

если случайные величины $H$, $\varepsilon$ и $\beta$ независимы и нормальны, а математические ожидания и срединные отклонения их соответственно равны: $\bar{H} = 6200$ *м*, $\bar{\varepsilon} = 45°$; $\bar{\beta} = 30°$; $E_H = 25$ *м*; $E_\beta = E_\varepsilon = 0{,}001$ рад.

25. 9. Переход от сферических координат к декартовым производится по формулам:

$$X = R \sin\theta \cos\varphi,$$
$$Y = R \sin\theta \sin\varphi,$$
$$Z = R \cos\theta.$$

Ошибки в определении $\theta$, $R$ и $\varphi$ независимы и нормальны со срединными отклонениями $E_R = 10$ *м*; $E_\theta = E_\varphi = 0{,}001$ рад. Определить приближенное значение срединных отклонений ошибок прямоугольных координат, если $\bar{\theta} = \bar{\varphi} = 45°$, $\bar{r} = 10\,000$ *м*.

25. 10. Приближенное выражение для скорости ракеты в момент окончания работы двигателя характеризуется формулой К. Э. Циолковского

$$V = u_e \ln \frac{q+\omega}{q},$$

где $u_e$ — эффективная скорость истечения газов;
$q$ — вес ракеты без топлива;
$\omega$ — вес топлива.

Рассеивание веса топлива характеризуется срединным отклонением $E_\omega$. Определить приближенное значение срединного отклонения скорости из-за разброса веса топлива, если математическое ожидание $M[\omega] = \bar{\omega}$.

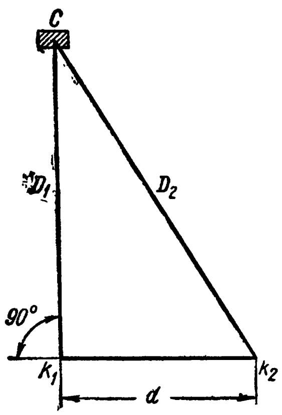

Рис. 28.

25. 11. Высота горной вершины ($H$) определяется по наклонной дальности ($D$) и углу места ($\varepsilon$)

$$H = D \sin \varepsilon.$$

Найти приближенное значение срединной ошибки определения высоты, если $E_D = 80$ *м*, $E_\varepsilon = 0{,}001$, а наивероятнейшие значения соответственно равны: $\bar{D} = 12\,300$ *м* и $\bar{\varepsilon} = 31°{,}2$. (Случайные величины $D$ и $\varepsilon$ независимы и нормальны.)

25. 12. $Z = \sin XY$, где $X$ и $Y$ — независимые случайные величины. Найти приближенное значение $\sigma_z$, если $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}001$.

25. 13. Высота горной вершины определяется по формуле: $H = D \sin \varepsilon$. Плотность вероятности ошибок в определении наклонной дальности ($D$) и угла места ($\varepsilon$) задана

$$f(D, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_D\sigma_\varepsilon\sqrt{0{,}91}} e^{-\frac{1}{1{,}82}\left[\frac{(D-\bar{D})^2}{\sigma_D^2} + 0{,}6\frac{(D-\bar{D})(\varepsilon-\bar{\varepsilon})}{\sigma_D\sigma_\varepsilon} + \frac{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right]},$$

где $\sigma_D = 40$ *м*, $\sigma_\varepsilon = 0{,}001$ рад.; $\bar{D} = 10\,000$ *м*, $\bar{\varepsilon} = 30°$. Найти приближенное значение срединного отклонения ошибок определения высоты.

25. 14. Дальность $K_1C$ (рис. 28) определяется радиолокационной станцией, ошибки измерения которой характеризуются срединным отклонением $E_p = 20$ *м*. Дальность $K_2C$ может быть определена либо дальномером, срединное отклонение ошибок которого $E_D = 40$ *м*, либо рассчитана по формуле

$$D_2 = \sqrt{D_1^2 + d^2}$$

$$(M[D_1] = 10\,000 \text{ м}; \quad M[d] = 2500 \text{ м}).$$

Определить, какой способ определения дальности $K_2C$ является более точным, если ошибки в определении расстояния $d$ между $K_1$ и $K_2$ характеризуются срединным отклонением $E_d = 50$ *м*.

25. 15. Учитывая три первых члена разложения в ряду Тэйлора функции $Y = \varphi(X)$, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y$, если $X$ подчиняется нормальному закону распределения.

25. 16. Площадь треугольника определяется формулой

$$S = \frac{ab}{2} \sin \gamma.$$

Учитывая члены разложения в ряд Тэйлора функции $S = \varphi(\gamma)$ до $\gamma^3$ включительно, определить математическое ожидание площади треугольника и дисперсию его площади из-за рассеивания угла, если случайная величина $\gamma$ распределена нормально, причем $\bar{\gamma}$ и $D[\gamma]$ заданы.

25. 17. В треугольнике $ABC$ (рис. 29) сторона $a$ и противолежащий угол $\alpha$ — случайные величины, которые можно считать несвязанными и нормальными. Определить приближенное значение математического ожидания угла $x$ и его срединного отклонения, если база $b$ известна, а математические ожидания и срединные отклонения случайных величин $a$ и $\alpha$ заданы.

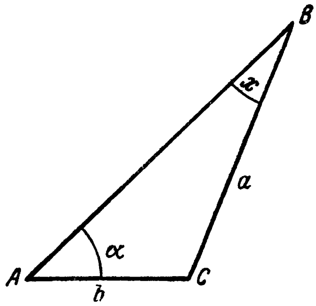


Рис. 29.

25. 18. Случайная величина $X$ подчиняется закону нормального распределения

$$f_x(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+5)^2}{200}}.$$

Определить приближенное значение математического ожидания и дисперсии случайной величины $Y = \frac{1}{X}$, учитывая два и три члена разложения в ряд Тэйлора.

25. 19. Радиус шара можно считать нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $\bar{r}$ и дисперсией $\sigma_r^2$ $(\bar{r} \gg \sigma_r)$. Определить математическое ожидание и дисперсию объема шара по точным формулам. Сравнить полученные результаты с результатами, получаемыми методом линеаризации.

25. 20. Для определения объема конуса измерены: а) диаметр основания и высота; б) диаметр основания и длина образующей. В каком из этих двух случаев дисперсия объема конуса меньше, если математические ожидания высоты конуса $\bar{h} = 8$ *дм*, диаметра основания $\bar{d} = 12$ *дм*, длины образующей $\bar{l} = 10$ *дм*, а $\sigma_h = \sigma_d = \sigma_l = 0{,}1$ *дм*.

25. 21. При взвешивании вместо гирь использована дробь, диаметр которой в среднем равен 2 *мм*. Какова срединная ошибка взвешивания, если срединное отклонение диаметра дроби 0,04 *мм*, удельный вес металла, из которого изготовлена дробь, равен 11,2 *г/см*$^3$; при взвешивании использовано 50 дробинок.

25. 22. Определить срединную ошибку измерения ускорения силы тяжести по времени качания маятника длиной $L = 5$ *м*, если период колебаний маятника найден по времени $n = 10$ полных размахов; время измеряется со срединной ошибкой $E_t = 0{,}1$ сек; длина $L$ известна со срединной ошибкой $E_l = 5$ *мм*, а срединная ошибка определения момента прохождения маятника через положение равновесия равна $E_{t'} = 0{,}5\%$ периода $T$, где $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, $g = 9{,}81$ *м/сек*$^2$.

25. 23. Используя метод линеаризации, определить приближенное значение дисперсий случайной величины $Z = \sqrt{kX^2 + Y^2}$, если $X = \sin V$; $Y = \cos V$, а случайная величина $V$ равномерно распределена в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

## § 26. КОМПОЗИЦИЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРИАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

### Основные формулы

Всякий двумерный (трехмерный) нормальный закон распределения может рассматриваться как композиция двух (трех) вырожденных нормальных законов распределения, характеризующих законы распределения косоугольных координат случайной точки на плоскости (в пространстве), если за оси координат выбраны сопряженные направления единичного эллипса (эллипсоида) распределения [1].

Вырожденный нормальный закон распределения однозначно характеризуется вектором, проведенным из центра распределения этого закона по направлению оси координат и равным срединному отклонению вырожденного закона распределения. Определенный таким образом вектор называется векториальным отклонением.

Композиция нормальных законов распределения на плоскости (в пространстве) эквивалентна композиции векториальных отклонений. Композиция нормальных законов распределения, лежащих в одной плоскости, заданных векториальными отклонениями $\overleftrightarrow{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, осуществляется по следующим правилам:

1) координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ центра суммарного закона распределения определяются по формулам

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_i,$$

где $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ — координаты начала векториального отклонения $\overleftrightarrow{a_i}$;

2) элементы $k_{ij}$ корреляционной матрицы суммарного закона распределения определяются формулами:

$$k_{11} = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{i=1}^{k} a_{ix}^2 = \frac{A}{2\rho^2}; \qquad k_{22} = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{i=1}^{k} a_{iy}^2 = \frac{C}{2\rho^2};$$

$$k_{12} = \frac{1}{2\rho^2} \sum_{i=1}^{k} a_{ix} a_{iy} = \frac{B}{2\rho^2},$$

где $a_{ix}$ и $a_{iy}$ — проекции векториального отклонения на оси произвольно выбранной единой прямоугольной системы координат;

3) главные направления ($\xi$, $\eta$) суммарного закона распределения, соответствующие им дисперсии $\left(\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2\right)$ и угол $\alpha$, составленный осью $O\xi$ с осью $Ox$, определяются формулами

$$\sigma_\xi^2 = k_{11} \cos^2\alpha + k_{12} \sin 2\alpha + k_{22} \sin^2\alpha =$$
$$= \frac{1}{4\rho^2} \left[A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{4\rho^2} [A + C + (A - C) \sec 2\alpha];$$

---

[1] Если в качестве сопряженных направлений выбраны главные диаметры эллипса (эллипсоида), то вырожденные законы распределения характеризуют законы распределения прямоугольных координат случайной точки.

$$\sigma_\eta^2 = k_{11}\sin^2\alpha + k_{12}\sin 2\alpha + k_{22}\cos^2\alpha = \frac{1}{4\varrho^2}\left[A + C - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{4\varrho^2}[A + C - (A - C)\sec 2\alpha],$$

где $\alpha$ — любой из корней уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}.$$

Главные полудиаметры единичного эллипса

$$a = \sigma_\xi \varrho \sqrt{2}, \quad b = \sigma_\eta \varrho \sqrt{2}.$$

Эллиптическая ошибка (нормальный закон распределения на плоскости) может быть разложена на две векториальные ошибки (два вырожденных нормальных закона распределения) по направлениям сопряженных диаметров единичного эллипса.

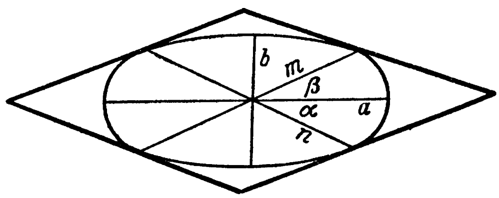

Рис. 30.

Если $a$ и $b$ — главные полудиаметры единичного эллипса, $m$ и $n$ — сопряженные полудиаметры того же эллипса, $\alpha$ и $\beta$ — углы, образуемые полудиаметрами $n$ и $m$ с полудиаметром $a$, $\beta + \alpha$ — угол растворения сопряженных полудиаметров, то согласно теореме Аполлония (рис. 30)

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2,$$
$$mn \sin(\beta + \alpha) = ab,$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2},$$
$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\alpha}.$$

Композиция векториальных отклонений в пространстве осуществляется по аналогичным правилам. Необходимые вычисления удобно вести, пользуясь следующей схемой расчета (табл. 10).

*Таблица 10*

| № п. п. $(i)$ | $a_i$ | $a_{ix}$ | $a_{iy}$ | $a_{iz}$ | $a_{ix}^2$ | $a_{iy}^2$ | $a_{iz}^2$ | $a_{iz}a_{iy}$ | $a_{ix}a_{iz}$ | $a_{iy}a_{ix}$ | $\varkappa_i = a_{ix} + a_{iy} + a_{jz}$ | $\varkappa_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |
| $\Sigma$ | | | | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | | $A_1 + A_2 + A_3 + 2(B_1 + B_2 + B_3)$ |

Элементы корреляционной матрицы $\|k_{ij}\|$ суммарного закона распределения определяются формулами:

$$k_{11} = \sigma_x^2 = \frac{A_1}{2\varrho^2}, \quad k_{22} = \sigma_y^2 = \frac{A_2}{2\varrho^2}, \quad k_{33} = \sigma_z^2 = \frac{A_3}{2\varrho^2},$$

$$k_{23} = \frac{B_1}{2\varrho^2}, \quad k_{31} = \frac{B_2}{2\varrho^2}, \quad k_{12} = \frac{B_3}{2\varrho^2}.$$

Последние два столбца табл. 10 служат для контроля правильности вычислений: должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \varkappa_i^2 = A_1 + A_2 + A_3 + 2(B_1 + B_2 + B_3).$$

Дисперсии $\xi$, $\eta$, $\zeta$ по главным направлениям суммарного эллипсоида распределения $\left(\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\zeta^2\right)$ определяются формулами

$$\sigma_\xi^2 = \frac{a^2}{2\varrho^2}, \quad \sigma_\eta^2 = \frac{b^2}{2\varrho^2}, \quad \sigma_\zeta^2 = \frac{c^2}{2\varrho^2},$$

где $a$, $b$, $c$ — главные полудиаметры единичного эллипсоида суммарного закона распределения, связаны с корнями $(u_1, u_2, u_3)$ уравнения $u^3 + pu + q = 0$ соотношениями:

$$a^2 = u_1 + \frac{l}{3};$$

$$b^2 = u_2 + \frac{l}{3};$$

$$c^2 = u_3 + \frac{l}{3};$$

$$p = -\frac{1}{3}l^2 + m; \quad q = -\frac{2}{27}l^3 + \frac{1}{3}lm + n;$$

$$l = A_1 + A_2 + A_3;$$

$$m = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2;$$

$$n = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + A_3B_3^2 - A_1A_2A_3 - 2B_1B_2B_3.$$

Корни кубического уравнения могут быть найдены или по специальным таблицам [1], или по формулам

$$u_1 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad u_2 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p}\cos\frac{\varphi - 2\pi}{3},$$

$$u_3 = 2\sqrt{-\frac{1}{3}p}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

где

$$\cos\varphi = \frac{9q}{2\sqrt{-3p^3}}.$$

---

[1] См. например, Е. Янке и Ф. Эмде «Таблицы функций с формулами и кривыми».

Направляющие косинусы осей $\xi$, $\eta$, $\zeta$ в координатной системе $Oxyz$ определяются как решения трех систем уравнений ($i = 1, 2, 3$)

$$(A_1 - \lambda_i)\,\alpha_{i1} + B_3\alpha_{i2} + B_2\alpha_{i3} = 0;$$

$$B_3\alpha_{i1} + (A_2 - \lambda_i)\,\alpha_{i2} + B_1\alpha_{i3} = 0;$$

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1,$$

где

$$\lambda_1 = a^2, \quad \lambda_2 = b^2, \quad \lambda_3 = c^2,$$

а $\alpha_{ij}$ обозначает косинус угла между $i$-й осью координатной системы $O\xi\eta\zeta$ и $j$-й осью системы $Oxyz$.

## Решение типовых задач

Пример 26. 1. Положение точки $A$ определяется с наблюдательного пункта $O$ по дальности $OA = D$ и угловому отклонению от ориентира $B$.

Срединная ошибка в определении дальности составляет $100k$ % от дальности; срединная ошибка в определении углового отклонения $\varepsilon$ радиан. Ошибка нанесения точки $A$ на карту подчинена нормальному круговому закону со срединным отклонением $r$; ошибка определения положения точки $O$ также подчинена нормальному круговому закону со срединным отклонением $R$. Определить общую эллиптическую ошибку положения точки $A$, нанесенной на карту. Как изменится вероятность попадания точки $A$ в квадрат $100 \times 100$ при уменьшении $D$ с 20 до 10 *км* ($r = 20$ *м*, $R = 40$ *м*, $\varepsilon = 0{,}003$, $k = 0{,}005$).

*Решение.* По направлению оси $OA$ действуют независимые векториальные отклонения $kD$, $r$ и $R$, а в перпендикулярном направлении — независимые векториальные отклонения $\varepsilon D$, $r$ и $R$. Закон распределения ошибок положения точки $A$, нанесенной на карту, определяется единичным эллипсом с полудиаметрами

$$\sqrt{k^2D^2 + r^2 + R^2} \text{ и } \sqrt{\varepsilon^2D^2 + r^2 + R^2},$$

поэтому

$$P = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{\sqrt{k^2D^2 + r^2 + R^2}}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{50}{\sqrt{\varepsilon^2D^2 + r^2 + R^2}}\right).$$

При дальности $OA = 20\,000$ *м*

$$P_1 = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{109{,}5}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{50}{74{,}8}\right) = 0{,}083.$$

При переходе на ближний наблюдательный пункт ($OA = 10\,000$ *м*)

$$P_2 = \hat{\Phi}\left(\frac{50}{67{,}1}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{50}{53{,}8}\right) = 0{,}181.$$

Пример 26. 2. Эллиптическая ошибка положения точки в вертикальной плоскости задана главными полудиаметрами $a = 40$ *м*, $b = 10$ *м*. Определить величину сопряженных полудиаметров, один из которых горизонтален, если известно, что полудиаметр $a$ наклонен к горизонту под углом 30°.

*Решение.* Горизонтальный полудиаметр $n$ наклонен к полудиаметру $a$ под углом $\alpha = -30°$. Поэтому

$$m^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\alpha} = 337 \text{ м}^2,$$

$$m = 18{,}4 \text{ м},$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\alpha} = 0{,}108, \quad \beta = 6°10', \quad \beta - \alpha = 36°10',$$

$$n = \frac{ab}{m \sin(\beta - \alpha)} = 36{,}9 \text{ м}.$$

Для контроля может быть использована формула

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 = 1700 \text{ м}^2.$$

Пример 26. 3. Составить корреляционную матрицу трехмерного закона распределения, являющегося композицией следующих векториальных отклонений (табл. 11).

*Таблица 11*

| $i$ | $a_i$ | $\cos(a_i, x)$ | $\cos(a_i, y)$ | $\cos(a_i, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 0,5 | $-0{,}5\sqrt{3}$ | 0 |
| 2 | 30 | $\sqrt{0{,}4}$ | $\sqrt{0{,}3}$ | $\sqrt{0{,}3}$ |
| 3 | 50 | −0,8 | 0 | −0,6 |
| 4 | 25 | 0 | 1 | 0 |

Определить главные полудиаметры единичного суммарного эллипсоида и направляющие косинусы углов между главным полудиаметром $a$ и координатными осями.

*Решение.* 1) Расчет элементов корреляционной матрицы приведен в табл. 12.

*Таблица 12*

| $i$ | $a_i$ | $a_{ix}$ | $a_{iy}$ | $a_{iz}$ | $a_{ix}^2$ | $a_{iy}^2$ | $a_{iz}^2$ | $a_{iz}a_{iy}$ | $a_{ix}a_{iz}$ | $a_{iy}a_{ix}$ | $\varkappa_i$ | $\varkappa_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 10 | −17,32 | 0 | 100 | 300 | 0 | 0 | 0 | −173,2 | −7,32 | 54 |
| 2 | 30 | 18,97 | 16,43 | 16,43 | 360 | 270 | 270 | 270 | 270 | 311,7 | 51,83 | 2686 |
| 3 | 50 | −40 | 0 | −30 | 1600 | 0 | 900 | 0 | 1200 | 0 | −70 | 4900 |
| 4 | 25 | 0 | 25 | 0 | 0 | 625 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 | 625 |
| $\Sigma$ | | | | | $A_1 = 2060$ | $A_2 = 1195$ | $A_3 = 1170$ | $B_1 = 270$ | $B_2 = 1512$ | $B_3 = 138{,}5$ | | 8265 |
| Контроль: 2060 + 1195 + 1170 + 2 (270 + 1512 + 138,5) = 8266 | | | | | | | | | | | | |

$$k_{11} = \frac{A_1}{2\varrho^2} = 4528; \quad k_{22} = \frac{A_2}{2\varrho^2} = 2627; \quad k_{33} = \frac{A_3}{2\varrho^2} = 2572;$$

$$k_{23} = \frac{B_1}{2\varrho^2} = 593{,}5; \quad k_{31} = \frac{B_2}{2\varrho^2} = 3323; \quad k_{12} = \frac{B_3}{2\varrho^2} = 304{,}4.$$

2) Расчет главных полудиаметров единичного суммарного эллипсоида.

По приведенным выше формулам находим:

$$l = 4425; \quad m = 3892\cdot 10^3; \quad n = -8871\cdot 10^4;$$

$$p = -2635\cdot 10^3; \quad q = -767\cdot 10^6;$$

$$\cos\varphi = 0{,}4658; \qquad \varphi = 62^\circ 14'20'';$$

$$\cos\frac{\varphi}{3} = 0{,}9352; \quad \cos\frac{\varphi - 2\pi}{3} = -0{,}1608; \quad \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} = -0{,}7744;$$

$$u_1 = 1752; \quad u_2 = -301{,}3; \quad u_3 = -1451;$$

$$a^2 = 3227; \qquad b^2 = 1174; \qquad c^2 = 24;$$

$$a = 56{,}8; \qquad b = 34{,}3; \qquad c = 4{,}9.$$

3) Расчет косинусов углов между главным полудиаметром $a$ и координатными осями.

Составляем систему уравнений

$$-1167\alpha_{11} + 138\alpha_{12} + 1512\alpha_{13} = 0,$$
$$138\alpha_{11} - 2032\alpha_{12} + 270\alpha_{13} = 0,$$
$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1.$$

Из первых двух уравнений находим

$$\alpha_{12} = 0{,}1684\alpha_{11}, \quad \alpha_{13} = 0{,}7563\alpha_{11};$$

из третьего уравнения

$$\alpha_{11} = \pm 0{,}7905.$$

Таким образом,

$$\cos(a, x) = \alpha_{11} = \pm 0{,}7905; \quad \cos(a, y) = \alpha_{12} = \pm 0{,}1331;$$
$$\cos(a, z) = \alpha_{13} = \pm 0{,}5978.$$

## Задачи для упражнений

26. 1. Найти композицию двух векториальных ошибок $c_1 = 30$ *м* и $c_2 = 40$ *м*, если угол между ними $\gamma = 30^\circ$, а центры распределения совпадают.

26. 2. Решить предыдущую задачу при $\gamma = 0$ и при $\gamma = 90^\circ$.

26. 3. Найти суммарный закон распределения, характеризующий ошибку положения некоторой точки на плоскости по величинам $a_i$

*Таблица 13*

| $i$ | $a_i$, *м* | $\alpha_i$ | $i$ | $a_i$, *м* | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9 | 30°37′ | 5 | 0,4 | 158°48′ |
| 2 | 0,5 | 59°36′ | 6 | 0,5 | 189°3′ |
| 3 | 0,7 | 92°12′ | 7 | 0,2 | 273°18′ |
| 4 | 0,8 | 127°17′ | 8 | 0,3 | 316°54′ |

и углам $\alpha_i$ с положительным направлением оси абсцисс отдельных векториальных ошибок, ее составляющих (табл. 13).

26. 4. Найти единичный эллипс суммарного закона рассеивания точек на плоскости, получающегося при сложении следующих векториальных отклонений, лежащих в этой плоскости (табл. 14).

*Таблица 14*

| $i$ | $a_i$, *м* | $\alpha_i$, град. | $i$ | $a_i$, *м* | $\alpha_i$, град. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 297 | 5 | 40 | 117 |
| 2 | 30 | 117 | 6 | 60 | 27 |
| 3 | 30 | 117 | 7 | 70 | 297 |
| 4 | 40 | 297 | 8 | 80 | 207 |

26. 5. Найти композицию векториальной ошибки $\Delta = 18$ *м*, образующей с направлением $Ox$ угол $\beta = 75°$, и нормального закона распределения, заданного единичным эллипсом, одна из главных полуосей которого совпадает с направлением $Ox$ и равна $a = 30$ *м*, другая главная полуось $b = 20$ *м*.

26. 6. Найти композицию двух нормальных законов распределения на плоскости: а) при главных полуосях единичных эллипсов $a_1 = b_1 = 50$ *м*, $a_2 = b_2 = 25$ *м*; б) при главных полуосях единичных эллипсов $a_1 = 50$ *м*, $b_1 = 25$ *м*, $a_2 = 50$ *м*, $b_2 = 25$ *м*, если угол между полуосями $a_1$ и $a_2$ составляет 30°.

26. 7. Разложить эллиптическую ошибку на две векториальных $m$ и $n$, из которых одна ($m$) образует угол $\lambda$ с главной полуосью единичного эллипса $a$ (другая главная полуось $b$).

26. 8. Разложить эллиптическую ошибку с главными полуосями 80 *м* и 60 *м* на две векториальных, если одна из них образует с большей полуосью угол 30°.

26. 9. Координаты берегового ориентира определяются с судна радиолокационной станцией путем измерения дальности и направления на него. Ошибки измерения радиолокационной станции заданы единичным эллипсом с главными полуосями $E_x = 80$ *м* в направлении оси $Ox$ и $E_z = 30$ *м* в направлении оси $Oz$. Единичный эллипс ошибок определения координат ориентира вследствие неточного знания его места имеет главные полуоси $E_1 = 100$ *м*, $E_2 = 40$ *м*, причем $E_1$ образует с осью $Ox$ угол 20°. Определить: а) плотность вероятности для суммарных ошибок определения места судна в координатной системе $xOz$; б) главные полудиаметры и ориентировку относительно оси $Ox$ единичного эллипса суммарных ошибок определения координат судна.

26. 10. Ошибки определения места судна в море вызваны тремя векториальными ошибками, величины которых и направление относительно меридиана приведены в табл. 15.

*Таблица 15*

| $\Delta_i$, *м* | $\Delta_1 = 40$ | $\Delta_2 = 80$ | $\Delta_3 = 20$ |
|---|---|---|---|
| $\theta_i^\circ$ | $\theta_1 = 65$ | $\theta_2 = 35$ | $\theta_3 = 335$ |

Найти единичный эллипс ошибок определения места судна в море.

26. 11. Найти закон распределения координат точки $C$, определенных путем ее визирования с двух пунктов $A$ и $B$, если дана база $Б$, углы $\beta_1$ и $\beta_2$, а также срединные угловые ошибки визирования с обоих постов $E_{\beta_1} = E_{\beta_2} = E_\beta$. Положение точек $A$ и $B$ известно без ошибок (рис. 31).

26. 12. В условиях предыдущей задачи рассчитать главные полуоси единичного эллипса и их ориентировку относительно направления $AB$ при $Б = 15$ *км*, $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 75°$, $E_{\beta_1} = E_{\beta_2} = 0{,}0005$.

26. 13. В условиях задач 26. 11 и 26. 12 определить суммарный закон распределения ошибок в положении ориентира $C$, если, кроме ошибок визирования $E_{\beta_1}$ и $E_{\beta_2}$, задан закон распределения ошибок в определении положения точки $B$ относительно точки $A$ с главными полуосями вдоль базы $E_1 = 30$ *м* и перпендикулярно базе $E_2 = 15$ *м*.

26. 14. Для определения истинного курса судна и его скорости дважды определяют по береговым ориентирам место судна (в точках $A_1$ и $A_2$) через промежуток времени $\tau = 20$ сек. Закон распределения ошибок определения места судна — круговой с радиусом единичного круга $r = 30$ *м*. Определить срединную ошибку в величине скорости судна и его курса, если расстояние $A_1A_2$ оказалось равным $D = 1000$ *м*.

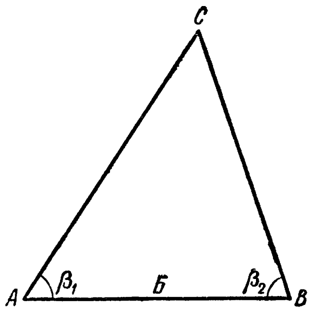


Рис. 31.

26. 15. Координаты судна, с которым должно встретиться другое судно в момент $t = 0$, известны с ошибкой, подчиненной нормальному круговому закону распределения, радиус единичного круга которого равен 100 *м*. Вектор скорости этого судна также известен с ошибкой. Срединная ошибка в величине скорости судна 2 *м/сек*, что составляет 10% от его скорости, а срединная ошибка в определении курса судна составляет 0,08 рад. Рассчитать единичный эллипс ошибок положения судна для момента времени $t = 1$ мин.

26. 16. Положение метеорологического шара-баллона в момент наблюдения известно с ошибкой, подчиненной нормальному шаровому закону распределения, радиус единичного шара которого равен 50 *м*; скорость шара известна со срединной ошибкой 2 *м/сек*. Направление вектора скорости шара-баллона задано нормальным круговым законом распределения в плоскости, перпендикулярной его курсу, при радиусе единичного круга 3 *м/сек*. Рассчитать единичный эллипсоид ошибок положения шара-баллона спустя 20 сек. после момента определения его координат и вектора скорости.

26. 17. Найти плотность вероятности для суммы двух случайных нормальных векторов в пространстве $(X, Y, Z)$ и случайного вектора в плоскости $(X, Z)$, для которых первые моменты соответственно равны:

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = 20, & \bar{y}_1 = -10, & \bar{z}_1 = -15, \\ \bar{x}_2 = 10, & \bar{y}_2 = 25, & \bar{z}_2 = -40, \\ \bar{x}_3 = 15, & & \bar{z}_3 = -20, \end{array}$$

а корреляционные матрицы относительно координатных осей

$$\|k_{ij}^{(1)}\| = \left\| \begin{matrix} 12 & -2 & 0 \\ & 8 & 1 \\ & & 14 \end{matrix} \right\|, \quad \|k_{ij}^{(2)}\| = \left\| \begin{matrix} 10 & 2 & 1 \\ & 8 & -1 \\ & & 17 \end{matrix} \right\|, \quad \|k_{ij}^{(3)}\| = \left\| \begin{matrix} 3 & 0 & -1 \\ & 0 & 0 \\ & & 5 \end{matrix} \right\|.$$

Случайные векторы взаимно независимы.

26. 18. Найти композицию векториального отклонения $\bar{x} = 25$, $E_x = 40$, нормальных законов распределения на плоскости $xOy$ с единичным эллипсом

$$\frac{(x+5)^2}{400} + \frac{(y+10)^2}{900} = 1$$

и в пространстве с единичным эллипсоидом

$$\frac{(x-10)^2}{100} + \frac{(y-10)^2}{225} + \frac{z^2}{64} = 1,$$

если $x$, $y$, $z$ — прямоугольные координаты точки в пространстве.

26. 19. Составить корреляционную матрицу системы случайных величин в пространстве, соответствующую композиции следующих векториальных отклонений (табл. 16).

*Таблица 16*

| $i$ | $a_i$ | $\cos(a_i, x)$ | $\cos(a_i, y)$ | $\cos(a_i, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 0,6 | —0,8 | 0 |
| 2 | 60 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| 3 | 80 | —0,5 | 0,5 | $0{,}5\sqrt{2}$ |

26. 20. В условиях предыдущей задачи определить главные полуоси единичного суммарного эллипсоида и направляющие косинусы углов между главной полуосью $a$ и координатными осями.

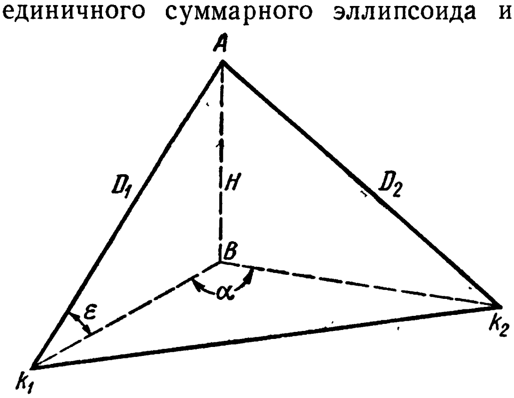

Рис. 32.

26. 21. Положение точки $K_2$ относительно точки $K_1$ определяется по измеренным из точки $A$ дальностям $D_1$ и $D_2$ и углу в горизонтальной плоскости $\angle K_1BK_2 = \alpha$ (рис. 32). Найти корреляционную матрицу ошибок в определении положения точки $K_2$ относительно $K_1$, если известно, что срединные ошибки в определении дальностей равны $E_D$, а в определении угла $E_\alpha$. Ошибки измерения взаимно независимы и подчинены нормальному закону распределения. Высота $H$ точки $A$ над горизонтальной плоскостью $K_1BK_2$ известна без ошибок.

26. 22. Решить задачу 26. 21 в условиях, когда вместо высоты $H$ задано безошибочное значение угла $\varepsilon = \angle AK_1B$.

# ГЛАВА V
# ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ

## § 27. ЭНТРОПИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ВЕЛИЧИН

### Основные формулы

Энтропия случайной величины (случайного события) служит мерой неопределенности опыта по определению возможного значения данной случайной величины (возможного исхода события).

Энтропия дискретной случайной величины $X$, заданной рядом распределения $p_i = P\{X = x_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), определяется формулой

$$H[X] = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_a p_i.$$

По этой же формуле определяется энтропия случайного события, если $p_i$ — вероятность $i$-го исхода опыта. Энтропия непрерывной случайной величины $X$, заданной плотностью вероятности $f(x)$ определяется формулой

$$H[X] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log_a f(x)\, dx + c.$$

Произвольная постоянная $c$, определяющая начало отсчета энтропии непрерывной случайной величины, принята в дальнейшем равной нулю.

Энтропия измеряется в единицах, соответствующих основанию логарифмов $a$ (двоичных при $a = 2$, десятичных при $a = 10$ и т. д.). В дальнейшем, где это специально не оговорено, принято, что $a > 1$. Условная энтропия случайной величины $X$ относительно случайной величины $Y$ определяется по формуле
для дискретных $X$ и $Y$

$$H[X/y_j] = -\sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i/Y = y_j\} \log P\{X = x_i/Y = y_j\};$$

для непрерывных $X$ и $Y$

$$H[X/y] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y) \log f(x/y)\, dx.$$

Средняя условная энтропия $H_y[X]$ определяется как математическое ожидание условной энтропии. Для дискретных случайных величин

$$H_y[X] = M[H[X/y]] = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P\{Y = y_j\} P\{X = x_i/Y = y_j\} \times$$
$$\times \log P\{X = x_i/Y = y_j\},$$

для непрерывных случайных величин

$$H_y[X] = M[H[X/y]] = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) f(x/y) \log f(x/y)\, dx\, dy.$$

Аналогичные формулы имеют место для систем случайных величин. Так

$$H[X_1, X_2, \ldots, X_n] = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \times$$
$$\times \log f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2, \ldots, dx_n$$

— энтропия системы $n$ случайных величин, а

$$H_z[X, Y] = -\int\int_{-\infty}^{\infty}\int f_z(z) f(x, y/z) \log f(x, y/z)\, dx\, dy\, dz$$

— средняя условная энтропия подсистемы случайных величин $(X, Y)$ относительно $z$,

$$H_{y,z}[X] = -\int_{-\infty}^{\infty}\int\int f(x, y) f(z/x, y) \log f(z/x, y)\, dx\, dy\, dz$$

— средняя условная энтропия случайной величины $Z$ относительно случайных величин $Y$ и $X$

### Решение типовых задач

Пример 27. 1. Производится стрельба по двум мишеням; по первой мишени сделано два выстрела, по второй — три. Вероятности попадания при одном выстреле соответственно равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Исход стрельбы по какой мишени является более определенным?

*Решение.* Исход стрельбы определяется числом попаданий в мишень, которое подчинено биномиальному закону распределения

$$P\{X = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Составляем ряд распределения для первой мишени при $n = 2$ и $p = \frac{1}{2}$ (табл. 17);

*Таблица 17*

| $m$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P\{X = m\}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

*Таблица 18*

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P\{X = m\}$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ |

для второй мишени при $n = 3$ и $p = \frac{1}{3}$ (табл. 18).

Мерой неопределенности исхода стрельбы служит энтропия числа попаданий. Находим энтропию числа попаданий при стрельбе по первой мишени

$$H_1 = -\frac{1}{4}\lg\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lg\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lg\frac{1}{4} = 0{,}451 \text{ дес. ед.};$$

по второй мишени

$$H_2 = -\frac{1}{27}\lg\frac{1}{27} - \frac{2}{9}\lg\frac{2}{9} - \frac{4}{9}\lg\frac{4}{9} - \frac{8}{27}\lg\frac{8}{27} = 0{,}511 \text{ дес. ед.}$$

Поэтому исход стрельбы по первой мишени обладает большей определенностью.

Аналогично решаются задачи 27. 1—27. 11.

Пример 27. 2. Среди всех законов распределения непрерывной случайной величины $X$, для которых задана одна и та же дисперсия $D$, найти закон распределения с максимальной энтропией.

*Решение.* Воспользуемся следующей теоремой вариационного исчисления. Функция $y = y(t)$, обращающая в максимум интеграл

$$I = \int_a^b \Phi(t, y)\, dt$$

при дополнительных условиях

$$\int_a^b \Psi_s(t, y)\, dt = c_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

находится из уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} = 0,$$

причем постоянные $\alpha_s$ определяются с помощью заданных дополнительных условий. В нашем примере ищется максимум интеграла

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f \ln f\, dx$$

при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, dx = 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f\, dx = D.$$

Отсюда

$$\Phi = -f \ln f; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial f} = -\ln f - 1;$$

$$\Psi_1 = f; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial f} = 1;$$

$$\Psi_2 = (x - \bar{x})^2 f; \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial f} = (x - \bar{x})^2.$$

Далее

$$-\ln f - 1 + \alpha_1 + \alpha_2 (x - \bar{x})^2 = 0,$$

$$f(x) = ce^{-\alpha_2 (x - \bar{x})^2},$$

где

$$c = e^{-\alpha_1 + 1}.$$

Из дополнительных условий находим

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2D}.$$

Таким образом, найдено, что при заданной дисперсии $D$ наибольшей энтропией обладает нормальный закон распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D}}e^{-\frac{1}{2D}(x-\bar{x})^2}.$$

Аналогично решаются задачи 27. 12—27. 15.

Пример 27. 3. Доказать, что энтропия дискретной случайной величины не превосходит $\log n$ ($n$ — число значений, принимаемых случайной величиной) и что максимум энтропии, равный $\log n$, достигается при $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$.

Для доказательства воспользуемся неравенством $\ln x \geqslant 1-\frac{1}{x}$, причем знак «>» имеет место при любых неотрицательных значениях $x$, кроме $x=1$, при котором выполняется равенство. Применим это неравенство к выражению

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \log_a(np_k) \geqslant \frac{1}{\ln a}\sum_{k=1}^{n} p_k\left(1-\frac{1}{np_k}\right)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k-1}{\ln a}=0.$$

Отсюда

$$H=-\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \leqslant \log n.$$

Случаю $np_k=1$ соответствует максимум энтропии, равный $\log n$. Аналогично решается задача 27. 16.

### Задачи для упражнений

27. 1. В двух урнах имеется по 15 шаров, причем в первой урне 5 красных, 7 белых и 3 черных, а во второй — соответственно 4, 4 и 7. Из каждой урны вынимается по одному шару. Определить, для какой из урн исход опыта является более определенным.

27. 2. Вероятность появления события при одном испытании равна $p$, непоявления события $q=1-p$. При каком $p$ результат испытания обладает наибольшей неопределенностью?

27. 3. Исход какого из двух опытов обладает большей неопределенностью: 1) внутри правильного треугольника наугад ставится точка, которая может оказаться внутри или вне вписанного в него круга; 2) внутри круга наугад ставится точка, которая может оказаться внутри или вне вписанного в него правильного треугольника.

27. 4. В правильный $n$-угольник путем соединения середин его соседних сторон вписан другой правильный $n$-угольник. Точка, поставленная внутри данного многоугольника, может оказаться внутри или вне вписанного многоугольника. Определить: а) энтропию опыта; б) значение $n$, при котором энтропия максимальна.

27. 5. Вероятность появления события $A$ при одном испытании равна $p$. Испытания повторяются до первого появления события $A$. Найти энтропию числа испытаний и выяснить характер изменения энтропии с изменением $p$.

27. 6. Определить энтропию случайной величины, подчиненной биномиальному закону распределения: а) в общем случае; б) при $n=2$, $p=q=0,5$.

27. 7. Определить энтропию непрерывной случайной величины, подчиняющейся: а) закону равной вероятности в интервале $(a, b)$; б) нормальному закону распределения с дисперсией $\sigma_x^2$; в) экспоненциальному закону распределения

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-ax} & \text{при } x\geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x<0. \end{cases} \quad (a>0)$$

27. 8. Найти энтропию случайной величины $X$, интегральный закон распределения которой имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ x^2 & \text{»} \quad 0<x\leqslant 1, \\ 1 & \text{»} \quad x>1. \end{cases}$$

При каких значениях основания логарифмов энтропия положительна, при каких отрицательна?

27. 9. Определить условную энтропию $H[X/y]$ и среднюю условную энтропию $H_y[X]$ случайной величины $Y$ относительно $X$, а также $H[Y/x]$ и $H_x[Y]$ случайной величины относительно $X$ для системы $(X, Y)$, подчиняющейся нормальному закону распределения.

27. 10. Найти энтропию системы $n$ случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения.

27. 11. По заданным энтропиям $H[X]$ и $H[Y]$ случайных величин $X$ и $Y$ и средней условной энтропии $H_y[X]$ случайной величины $X$ относительно $Y$ определить среднюю условную энтропию $H_x[Y]$ случайной величины $Y$ относительно $X$.

27. 12. Среди всех законов распределения непрерывной случайной величины $X$, для которых плотность вероятности равна нулю вне интервала $a<x<b$, определить закон распределения с максимальной энтропией.

27. 13. Среди всех законов распределения непрерывной случайной величины $X$, для которых плотность вероятности равна нулю при $x<0$, найти при заданном математическом ожидании $M[X]$ случайной величины $X$ закон распределения с максимальной энтропией.

27. 14. Найти дифференциальный закон распределения, при котором энтропия случайной величины максимальна, если задан ее второй начальный момент $m_2$.

27. 15. Среди множества законов распределения системы $n$ случайных величин с заданной корреляционной матрицей найти закон распределения, при котором энтропия системы максимальна.

27. 16. Доказать, что средняя условная энтропия случайной величины $X$ относительно $Y$ не превосходит безусловной энтропии, т. е. $H_y[X]\leqslant H[X]$. Какому случаю соответствует выполнение равенства $H_y[X]=H[X]$?

27. 17. Доказать, что

$$H[X_1, X_2, \ldots, X_n]\leqslant \sum_{k=1}^{n} H[X_k].$$

27. 18. Между двумя системами случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ установлено взаимно однозначное соответствие $Y_k=\varphi_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X_k=\Psi_k(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, $(k=1, 2, \ldots, n)$. Найти энтропию $H[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$, если задана многомерная плотность вероятности $f_x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

27. 19. Две системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ случайных величин связаны линейными соотношениями

$$Y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} X_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Определить разность энтропий

$$H[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] - H[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

а) в общем случае; б) при $n = 3$ и матрице преобразований

$$\| a_{kj} \| = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

## § 28. КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ

### Основные формулы

Количество информации о случайной величине $X$, которое может быть получено в результате наблюдения другой случайной величины $Y$ измеряется разностью безусловной энтропии случайной величины $X$ и ее средней условной энтропии относительно $Y$

$$I_y[X] = H[X] - H_y[X].$$

Для дискретных случайных величин

$$I_y[X] = M\left[\log \frac{P\{X = x/Y = y\}}{P\{X = x\}}\right] = M\left[\log \frac{P\{X = x, Y = y\}}{P\{X = x\} P\{Y = y\}}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P\{X = x_i, Y = y_j\} \log \frac{P\{X = x_i, Y = y_j)}{P\{X = x_i\} P\{Y - y_j\}}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$I_y[X] = M\left[\log \frac{f(x/y)}{f_x(x)}\right] = M\left[\log \frac{f(x, y)}{f_x(x) f_y(y)}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_x(x) f_y(y)} \, dx \, dy.$$

Количество информации измеряется в тех же единицах, что и энтропия. Количество информации не зависит от начала отсчета энтропии, что позволяет считать выбор этого начала произвольным.

### Решение типовых задач

Пример 28. 1. Некоторое количество однотипных деталей в зависимости от точности изготовления распределяется на круглые и овальные, а по весу — на легкие и тяжелые. К легким относится 70% всех деталей. Среди легких деталей 80% деталей круглых. Всего же насчитывается 64% круглых от общего числа деталей. Какое количество информации о форме детали можно получить при ее взвешивании?

*Решение*. Составим таблицу распределения системы двух случайных величин: $X$ — число круглых деталей и $Y$ — число легких деталей. Для одной детали каждая из этих случайных величин может принимать два значения (1 и 0).

Вероятность того, что наугад взятая деталь окажется круглой и легкой, равна

$$P\{X = 1,\ Y = 1\} = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56;$$

овальной и легкой

$$P\{X = 0,\ Y = 1\} = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14;$$

круглой и тяжелой

$$P\{X = 1,\ Y = 0\} = 0{,}64 - 0{,}56 = 0{,}08;$$

овальной и тяжелой

$$P\{X = 0,\ Y = 0\} = 1 - 0{,}56 - 0{,}14 - 0{,}08 = 0{,}22.$$

При этом $P\{X = 1\} = 0{,}64, \quad P\{X = 0\} = 0{,}36,$

$$P\{Y = 1\} = 0{,}70, \quad P\{Y = 0\} = 0{,}30.$$

Отсюда количество информации о форме детали ($X$), получаемое при ее взвешивании ($Y$), равно

$$I_y[X] = P\{X = 1, Y = 1\} \log \frac{P\{X = 1, Y = 1\}}{P\{X = 1\}, P\{Y = 1\}} +$$

$$+ P\{X = 0, Y = 1\} \log \frac{P\{X = 0, Y = 1\}}{P\{X = 0\} P\{Y = 1\}} +$$

$$+ P\{X = 1, Y = 0\} \log \frac{P\{X = 1, Y = 0\}}{P\{X = 1\} P\{Y = 0\}} +$$

$$+ P\{X = 0, Y = 0\} \log \frac{P\{X = 0, Y = 0\}}{P\{X = 0\} P\{Y = 0\}} =$$

$$= 0{,}56 \lg \frac{0{,}56}{0{,}64 \cdot 0{,}7} + 0{,}14 \lg \frac{0{,}14}{0{,}36 \cdot 0{,}7} + 0{,}08 \lg \frac{0{,}08}{0{,}64 \cdot 0{,}3} +$$

$$+ 0{,}22 \lg \frac{0{,}22}{0{,}36 \cdot 0{,}3} = 0{,}0561 \text{ дес. ед.}$$

Пример 28. 2. Вероятности поступления и непоступления сигнала на вход приемника соответственно равны $\alpha$ и $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$. Вследствие помех сигнал, поступивший на вход приемника, может быть воспринят на выходе с вероятностью $\beta$ и не воспринят с вероятностью $\bar{\beta} = 1 - \beta$. При отсутствии сигнала на входе он может быть из-за помех воспринят на выходе с вероятностью $\gamma$ и не воспринят с вероятностью $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$. Определить количество информации о поступлении или непоступлении сигнала на вход по наблюдению сигнала на выходе.

*Решение*. Обозначим через $X$ — случайное число сигналов на входе и через $Y$ — случайное число сигналов на выходе. Тогда

$$P\{X = 1\} = \alpha; \quad P\{X = 0\} = \bar{\alpha};$$

$$P\{Y = 1/X = 1\} = \beta;\ P\{Y = 0/X = 1\} = \bar{\beta};\ P\{Y = 1/X = 0\} = \gamma;$$

$$P\{Y = 0/X = 0\} = \bar{\gamma};\ P\{Y = 1\} = \alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma;\ P\{Y = 0\} =$$

$$= \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}.$$

Поэтому

$$I_y[X] = \alpha\beta\log\frac{\beta}{\alpha\beta+\bar{\alpha}\gamma} + \bar{\alpha}\gamma\log\frac{\gamma}{\alpha\beta+\bar{\alpha}\gamma} +$$

$$+ \alpha\bar{\beta}\log\frac{\bar{\beta}}{\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\bar{\gamma}} + \bar{\alpha}\bar{\gamma}\log\frac{\bar{\gamma}}{\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\bar{\beta}}.$$

Можно также воспользоваться формулой

$$I_y[X] = I_x[Y] = H[Y] - H_x[Y];$$

при безусловной энтропии выходного сигнала

$$H[Y] = -(\alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma)\log(\alpha\beta + \bar{\alpha}\gamma) - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma})\log(\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{\gamma})$$

и средней условной энтропии выходного сигнала относительно входного

$$H_x[Y] = -\alpha(\beta\log\beta + \bar{\beta}\log\bar{\beta}) - \bar{\alpha}(\gamma\log\gamma + \bar{\gamma}\log\bar{\gamma}).$$

Легко убедиться, что оба способа дают один и тот же результат.

Пример 28.3. По двум одинаковым дублирующим друг друга каналам связи передается сигнал $x_1$ с вероятностью $p$ или сигнал $x_2$ с вероятностью $\bar{p} = 1 - p$. Сигналы передаются по каждому каналу независимо друг от друга, так что возможна одновременная посылка по одному из каналов $x_1$, а по другому $x_2$.

Вследствие помех, действующих независимо на каждый канал, принятый сигнал может не совпадать с переданным. Прием сообщения $x_1$ по первому каналу обозначен $y_1$, а по второму $z_1$; прием сообщения $x_2$ соответственно обозначен через $y_2$ и $z_2$.

Условные вероятности приема сигнала $y_i$ или $z_i$, если был послан сигнал $x_j$, для обоих каналов одинаковы и равны

$$P\{y_1/x_1\} = P\{z_1/x_1\} = \Delta;$$

$$P\{y_2/x_1\} = P\{z_2/x_1\} = \bar{\Delta} = 1 - \Delta;$$

$$P\{y_1/x_2\} = P\{z_1/x_2\} = \bar{\delta} = 1 - \delta;$$

$$P\{y_2/x_2\} = P\{z_2/x_2\} = \delta.$$

Передачу, которая принимает таким образом одно из четырех значений $(x_1, x_1)$, $(x_2, x_1)$, $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_2)$, обозначим $X$.

а) Определить количество информации $I_{y,z}[X]$, содержащееся в сообщении, передаваемом по таким двум каналам.

б) Вычислить это количество информации при $p = \bar{p} = 0{,}5$, $\delta = \bar{\Delta} = 0{,}1$.

*Решение.* а) Энтропия источника сообщений

$$H[X] = -p^2\log p^2 - 2p\bar{p}\log(p\bar{p}) - \bar{p}^2\log\bar{p}^2 =$$

$$= -2(p\log p + \bar{p}\log\bar{p}).$$

На приемном конце возможны 4 сообщения $(y_1, z_1)$, $(y_1, z_2)$, $(y_2, z_1)$ и $(y_2, z_2)$ с вероятностями

$$p(y_1, z_1) = p^2\Delta^2 + 2p\bar{p}\Delta\bar{\delta} + \bar{p}^2\bar{\delta}^2,$$

$$p(y_1, z_2) = p(y_2, z_1) = p^2\Delta\bar{\Delta} + p\bar{p}(\Delta\delta + \bar{\Delta}\bar{\delta}) + \bar{p}^2\delta\bar{\delta},$$

$$p(y_2, z_2) = p^2\bar{\Delta}^2 + 2p\bar{p}\bar{\Delta}\delta + \bar{p}^2\delta^2.$$

Согласно теореме гипотез находим, что условная вероятность $P\{x_2, x_1/y_1, z_2\}$ посылки по первому каналу сигнала $x_2$, а по второму — сигнала $x_1$, при условии, что по этим каналам приняты сообщения $y_1$ и $z_2$, соответственно, равна

$$P\{x_2, x_1/y_1, z_2\} = \frac{p\bar p\,\bar\Delta\bar\delta}{p^2\Delta\bar\Delta + p\bar p\,(\Delta\delta + \bar\Delta\,\bar\delta) + \bar p^2\delta\bar\delta}.$$

Аналогично определяются и другие условные вероятности вида $P\{x_i, x_j/y_k, z_l\}$, где $i$, $j$, $k$ и $l$ принимают значения 1 или 2. Поэтому

$$I_{y\,z}[X] = H[X] - H_{y,\,z}[X] =$$

$$= -2\,(p\log p + \bar p\log\bar p) + p^2\Delta^2\log\frac{p^2\Delta^2}{p^2\Delta^2 + 2p\bar p\Delta\bar\delta + \bar p^2\bar\delta^2} +$$

$$+ 2p\bar p\Delta\delta\log\frac{p\bar p\Delta\bar\delta}{p^2\Delta^2 + 2p\bar p\Delta\bar\delta + \bar p^2\bar\delta^2} + \bar p^2\bar\delta^2\log\frac{\bar p^2\bar\delta^2}{p^2\Delta^2 + 2p\bar p\Delta\bar\delta + \bar p^2\bar\delta^2} +$$

$$+ 2p^2\Delta\bar\Delta\log\frac{p^2\Delta\bar\Delta}{p^2\Delta\bar\Delta + p\bar p\,(\Delta\delta + \bar\Delta\bar\delta) + \bar p^2\delta\bar\delta} + 2p\bar p\Delta\delta\log\frac{p\bar p\Delta\delta}{p^2\Delta\bar\Delta + p\bar p\,(\Delta\delta + \bar\Delta\bar\delta) + \bar p^2\delta\bar\delta} +$$

$$+ 2p\bar p\bar\Delta\bar\delta\log\frac{p\bar p\bar\Delta\bar\delta}{p^2\Delta\bar\Delta + p\bar p\,(\Delta\delta + \bar\Delta\,\bar\delta) + \bar p^2\delta\bar\delta} + 2\bar p^2\delta\bar\delta\log\frac{\bar p^2\delta\bar\delta}{p^2\Delta\bar\Delta + p\bar p\,(\Delta\delta + \bar\Delta\bar\delta) + \bar p^2\delta\bar\delta} +$$

$$+ p^2\bar\Delta^2\log\frac{p^2\bar\Delta^2}{p^2\bar\Delta^2 + 2p\bar p\bar\Delta\delta + \bar p^2\delta^2} + 2p\bar p\bar\Delta\delta\log\frac{p\bar p\bar\Delta\delta}{p^2\bar\Delta^2 + 2p\bar p\bar\Delta\delta + \bar p^2\delta^2} +$$

$$+ \bar p^2\delta^2\log\frac{\bar p^2\delta^2}{p^2\bar\Delta^2 + 2p\bar p\delta\bar\Delta + \bar p^2\delta^2};$$

б) $I_y[X] = 2\,(\lg 2 + \Delta\lg\Delta + \bar\Delta\lg\bar\Delta) = 0{,}3196$ дес. ед.

Аналогично решаются задачи 28.16, 28.22.

## Задачи для упражнений

28.1. Показать, что количество информации о случайной величине $X$, которое может быть получено в результате наблюдения случайной величины $Y$, есть неотрицательная величина.

28.2. Доказать, что $I_y[X] = I_x[Y]$.

28.3. Известно, что $(X, Y)$ — система двух непрерывных случайных величин, а $Z = \varphi(X)$ ($\varphi$ — любая однозначная функция). Доказать, что количество информации о величинах $X$ и $Z$, получаемое по наблюдениям случайной величины $Y$, одинаково, т. е.

$$I_y[X] = I_y[Z].$$

28.4. Показать, что максимальное значение количества информации $I_y[X]$ о дискретной случайной величине $X$, получаемое по наблюдениям другой дискретной случайной величины $Y$, равно энтропии $H[X]$. Почему аналогичное утверждение несправедливо для непрерывных случайных величин?

28.5. Для некоторой системы двух зависимых дискретных случайных величин $(X, Y)$ имеет место равенство

$$I_y[X] = H[X].$$

Известно, что вероятности $P\{X = x_k\}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$ отличны от нуля. Что означает данное равенство и когда оно возможно?

28. 6. Студент может сдать зачет с вероятностью $\alpha$, не проработав весь материал, и с вероятностью $\beta$, проработав весь материал курса, или не сдать зачет с вероятностью $\gamma$, не проработав весь материал, и с вероятностью $\delta$, проработав весь материал ($\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$). Какое количество информации о подготовленности студента к зачету можно получить по данным о результатах сдачи зачета?

28. 7. Ошибки координат геодезического пункта характеризуются нормальным законом распределения с главными полудиаметрами, направленными по осям $X$ и $Y$, причем коэффициент корреляции координат $X$ и $Y$ равен $r_{xy}$. Определить количество информации об ошибках в направлении оси $X$, которое можно получить, измеряя ошибки по направлению $Y$.

28. 8. В условиях предыдущей задачи определить угол между наибольшим главным диаметром эллипса ошибок и осью $X$, при котором количество информации об ошибках вдоль оси $X$ по результатам измерения ошибок по направлению, перпендикулярному оси $X$, будет максимальной. Чему равно это максимальное количество информации?

28. 9. Число $X$ появлений события $A$ в серии $n$ независимых испытаний распределено по биномиальному закону

$$P\{X=m\}=P_{n,m}=C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где $p$ — вероятность появления события $A$ при одном испытании. В зависимости от результатов указанной серии независимых испытаний происходит или не происходит событие $B$ с условными вероятностями

$$P\{B/X=m\}=G_m,\quad P\{\overline{B}/X=m\}=1-G_m.$$

Определить количество информации о появлении события $B$, рассматривая последнее как случайную величину, принимающую значения 1 или 0.

28. 10. В условиях предыдущей задачи определить количество информации, если

$$G_m=\begin{cases}0 \text{ при } m=0,\\ 1 \text{ при } m>0.\end{cases}$$

28. 11. В условиях задачи 28. 10 определить: а) число испытаний в серии $n_0$, которому соответствует максимальное значение количества информации о событии $B$ при заданном $p$; б) диапазон значений $p$, при котором $2\leqslant n_0\leqslant 3$.

28. 12. Число $X$ появлений события $A$ в серии независимых испытаний распределено по закону Пуассона

$$P\{X=m\}=\frac{a^m e^{-a}}{m!}.$$

В зависимости от результатов указанной серии испытаний происходит или не происходит событие $B$ с условными вероятностями

$$P\{B/X=m\}=G_m,\quad P\{\overline{B}/X=m\}=1-G_m$$

соответственно. Определить количество информации о появлении события $B$, если

$$G_m=\begin{cases}0 \text{ при } m=0,\\ 1 \text{ при } m>0.\end{cases}$$

28. 13. В условиях предыдущей задачи определить математическое ожидание $a_0$ числа появлений события $A$, которому соответствует максимальное значение количества информации о появлении события $B$.

28. 14. Из-за шума имеется элемент беспорядочности в приеме сигналов. Приему зеленого сигнала в трех случаях из четырех соответствует передача сигнала «Да» и в одном случае сигнала «Нет». Приему красного сигнала в двух случаях из четырех соответствует передача сигнала «Да» и в двух других случаях сигнала «Нет». Определить количество информации о переданном сигнале, содержащееся в принятом сообщении, если прием зеленого или красного сигнала одинаково вероятен.

28. 15. В условиях предыдущей задачи приему сигнала того или иного цвета соответствует один и тот же процент случаев передачи сигнала «Да» или «Нет». Определить количество информации, содержащейся в таком сообщении.

28. 16.[1] По каналу связи с помехами передается одно из двух сообщений $x_1$ или $x_2$ с вероятностями $P(x_1) = p$ и $P(x_2) = 1 - p = \bar{p}$. На приемном конце канала прием сигнала $x_1$ обозначается через $y_1$, а сигнала $x_2$ через $y_2$. Канал характеризуется следующей матрицей условных вероятностей $P\{y_i/x_j\}$ приема сигнала $y_i$, если был послан сигнал $x_j$

$$P\{y_1/x_1\} = \Delta, \qquad P\{y_2/x_1\} = \bar{\Delta} = 1 - \Delta,$$
$$P\{y_1/x_2\} = \bar{\delta} = 1 - \delta, \qquad P\{y_2/x_2\} = \delta.$$

Требуется: а) определить количество информации $I_y[X]$, содержащееся в сообщении, передаваемом по каналу, б) найти $I_y[X]$ при $p = \bar{p} = 0{,}5$, $\Delta = \delta = 0{,}1$.

28. 17. В условиях предыдущей задачи определить: $I_y[X]$: а) при $\Delta = \delta = 0{,}5$; б) при $\Delta = 1 - \delta$. Объяснить полученный результат.

28. 18. По двум одинаковым дублирующим друг друга каналам связи передается сигнал $x_1$ (с вероятностью $p$) либо сигнал $x_2$ (с вероятностью $\bar{p} = 1 - p$). Одновременная посылка по одному каналу сообщения $x_1$, а по другому $x_2$ — невозможна. На каждый канал действует независимая помеха. Прием сообщения $x_1$ или $x_2$ по первому каналу обозначен через $y_1$ и $y_2$, а по второму через $z_1$ и $z_2$ соответственно. Матрицы условных вероятностей $P\{y_i/x_j\}$ для первого канала и $P\{z_i/x_j\}$ для второго канала одинаковы и совпадают с матрицей $P\{y_i/x_j\}$ задачи 28. 16. а) Определить количество информации $I_{y,z}[X]$, содержащееся в сообщении, передаваемом по таким двум каналам, считая, что влияние каналов друг на друга отсутствует. б) Вычислить $I_{y,z}[X]$ при $p = \bar{p} = 0{,}5$ и $\Delta = \delta = 0{,}1$.

28. 19. В условиях предыдущей задачи определить $I_{y,z}[X]$: а) при $\Delta = \delta = 0{,}5$; б) при $\Delta = 1 - \delta$.

28. 20. В условиях задачи 28. 18 определить количество информации $I_{y,z}[X]$, если на оба канала действует одна и та же помеха.

28. 21. В условиях задачи 28. 18 определить количество информации, содержащееся в сообщении, если при расшифровке передачи пользуются одним из следующих правил:

I. Если по обоим каналам принят сигнал $x_1$, то считается, что передан сигнал $x_1$; в остальных случаях считается, что передан сигнал $x_2$.

II. Если по обоим каналам принят сигнал $x_2$, то считается, что передан сигнал $x_2$, в остальных случаях считается, что передан сигнал $x_1$.

28. 22. Пользуясь решением задачи 28. 21 определить, при каком из двух правил (I или II) количество информации на одно сообщение больше, если:

а) $p = 0{,}2$; $\Delta = \delta = 0{,}4$;

б) $p = 0{,}8$; $\Delta = \delta = 0{,}4$.

---

[1] Задачи 28. 16—28. 28 составил Ю. Е. Глимбоцкий.

28. 23. Испытатель судит о результатах опыта $A$, имеющего два исхода $x_1$ и $x_2$ с вероятностями $p$ и $\bar{p} = 1 - p$ соответственно по результатам опыта $B$, состоящего в наблюдении некоторой случайной величины $U$. Известно, что при исходе $x_1$ величина $U$ имеет условную плотность вероятности (рис. 33)

$$f_1(u) = \begin{cases} \varphi(u) & \text{при } a_1 \leqslant u \leqslant b_1, \\ 0 & \text{при } u > b_1,\ u < a_1, \end{cases}$$

а при исходе $x_2$

$$f_2(u) = \begin{cases} \psi(u) & \text{при } a_2 \leqslant u \leqslant b_2, \\ 0 & \text{при } u > b_2,\ u < a_2. \end{cases}$$

Определить количество информации о результатах опыта $A$, которое может быть получено при наблюдении результатов опыта $B$, если $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$.

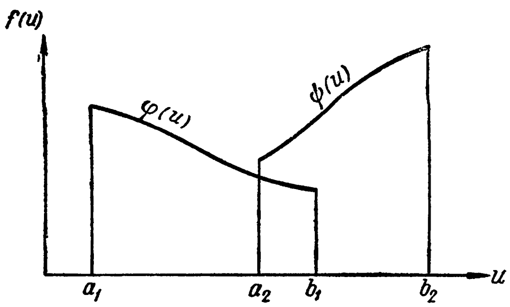


Рис. 33.

28. 24. В условиях задачи 28. 23 определить: а) количество информации $I_B[A]$ при $a_2 > b_1$, когда диапазоны изменения случайной величины $U$ при исходе $x_1$ и исходе $x_2$ не пересекаются; б) при $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$; $\varphi(u) = \psi(u)$.

28. 25. Пользуясь решением задачи 28. 23, определить количество информации $I_B[A]$, если $p = 0{,}2$ (рис. 34).

$$f_1(u) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{при } 1 \leqslant u \leqslant 3. \\ 0 & \text{при } u > 3,\ u < 1; \end{cases}$$

$$f_2(u) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{при } 2 \leqslant u \leqslant 7 \\ 0 & \text{при } u > 7,\ u < 2. \end{cases}$$

28. 26. По каналу связи с помехами передается параметрический сигнал $X$, который имеет распределение вероятностей $f_1(x)$. Условная вероятность приема сигнала $Y$, если передан сигнал $x$, равна $f(y/x)$. Определить количество информации, содержащееся в принятом сигнале: а) в общем виде, б) если

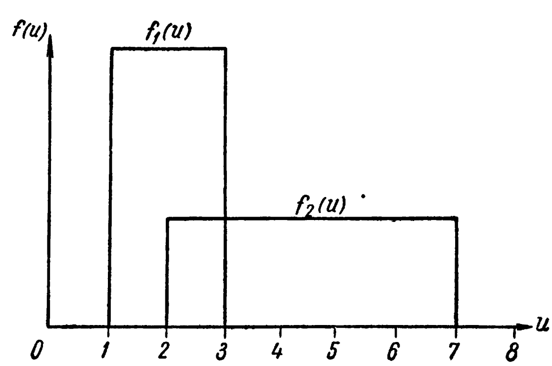


Рис. 34.

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 \text{ при } x > b, x < a; \end{cases}$$

$$f(y/x) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c} & \text{при } c \leqslant y \leqslant d \\ 0 & \text{при } y > d,\ y < c. \end{cases}$$

28. 27. В условиях предыдущей задачи определить количество информации $I_y[X]$, если

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при } x > b,\ x < a; \end{cases}$$

$$f(y/x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x \leqslant y \leqslant 2x, \\ 0 & \text{при } y > 2x,\ y < x. \end{cases}$$

28. 28. По двум одинаковым каналам связи передается сигнал $X$ с распределением вероятностей $f_x(x)$. На каждый канал действует независимая помеха; влияние каналов друг на друга отсутствует. Условная вероятность приема сигнала $Y$, если передан сигнал $x$ по первому каналу, равна $f_y(y/x)$. Соответственно для второго канала эта условная вероятность равна $f_z(z/x)$. Определить количество информации, содержащееся в принятом сигнале.

# ГЛАВА VI
# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

## § 29. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

### Основные формулы

Если случайная величина $X$ имеет конечную дисперсию, то при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство Чебышева

$$P\{|X-\bar{x}| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D[X]}{\varepsilon^2}.$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots,$ последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, то каково бы ни было постоянное $\varepsilon > 0$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

(теорема Чебышева).

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ одинаково распределены и имеют конечные математические ожидания $\bar{x}$, то каково бы ни было постоянное $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \bar{x}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

(теорема Хинчина)

Для последовательности зависимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n, \ldots,$ удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0$$

при любом постоянном $\varepsilon > 0$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

(теорема Маркова).

Для того, чтобы к последовательности как угодно зависимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ был применим закон больших чисел, т. е. чтобы при любом постоянном $\varepsilon > 0$ выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{n\to\infty} M \frac{\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \bar{x}_k)\right\}^2}{1+\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \bar{x}_k)\right\}^2} = 0.$$

### Решение типовых задач

Пример 29. 1. Доказать, что если $M[e^{X^2}]$ существует, то

$$P\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M[e^{X^2}]}{e^{\varepsilon^2}}.$$

*Решение.* Пусть случайная величина $X$ имеет плотность вероятности $f(x)$. Тогда

$$P\{|X| \geqslant \varepsilon\} = P\{e^{X^2} \geqslant e^{\varepsilon^2}\} = \int\limits_{e^{x^2} \geqslant e^{\varepsilon^2}} f(x)\,dx.$$

В последнем интеграле интегрирование производится по всем значениям $x$, удовлетворяющим неравенству $e^{x^2} \geqslant e^{\varepsilon^2}$.

Так как при указанных значениях $x$ справедливо неравенство $\frac{e^{x^2}}{e^{\varepsilon^2}} \geqslant 1$, то

$$\int\limits_{e^{x^2} \geqslant e^{\varepsilon^2}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{e^{\varepsilon^2}} \int\limits_{e^{x^2} \geqslant e^{\varepsilon^2}} e^{x^2} f(x)\,dx.$$

Если распространить интегрирование неотрицательной функции $e^{x^2} f(x)$ на всю числовую ось, то интеграл не уменьшится и будет справедливо неравенство

$$\int\limits_{e^{x^2} \geqslant e^{\varepsilon^2}} e^{x^2} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} f(x)\,dx = M[e^{X^2}].$$

Сопоставляя полученные неравенства, получим

$$P\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M[e^{X^2}]}{e^{\varepsilon^2}},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично решаются задачи 29. 2—29. 5.

Пример 29. 2. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, имеющих одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}.$$

Проверить, применима ли к этой последовательности теорема Хинчина.

*Решение.* Для применимости теоремы Хинчина необходимо существование математического ожидания случайной величины $X$, т. е. чтобы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\frac{dF(x)}{dx}dx$ сходился абсолютно. Однако

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\frac{dF(x)}{dx}dx = \frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \lim_{A\to\infty}\frac{2a}{\pi}\int\limits_{0}^{A}\frac{x\,dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{a}{\pi}\lim_{A\to\infty}\ln\left(1+\frac{A^2}{a^2}\right) = \infty,$$

т. е. интеграл не сходится, математическое ожидание не существует и теорема Хинчина неприменима.

Пример 29.3. Можно ли интеграл $J = \int\limits_{a}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ $(a > 0)$ после замены переменных $y = \frac{a}{x}$ вычислить методом Монте-Карло по формуле

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k},$$

где $y_k$ — случайные числа из интервала $[0,1]$?

*Решение.* Произведя указанную замену переменной, получим

$$J = \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}dy.$$

Будем рассматривать $y$ как случайную величину, равномерно распределенную в интервале $[0,1]$. Произведем независимую, случайную выборку чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$ из интервала $[0,1]$; из них образуем величину $J_n$

$$J_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k}.$$

Величину $J_n$ можно считать приближенным значением $J$ только тогда, когда справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\{|J_n - J| < \varepsilon\} = 1.$$

Случайные числа $y_k$ имеют одинаковые распределения, а следовательно и функции их $\frac{1}{y_k}\sin\frac{a}{y_k}$ имеют одинаковые распределения. Для применения теоремы Хинчина остается убедиться в существовании математического ожидания

$$M\left[\frac{1}{Y}\sin\frac{a}{Y}\right],$$

где $Y$ — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0,1]$, т. е. надо доказать, что

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}dy$$

сходится абсолютно. Однако

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}\right| dy = \int_a^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \sum_{k=s}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{k=s}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+k\pi}dy,$$

но

$$\sum_{k=s}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y+k\pi}dy > \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^{\pi} \sin y\, dy = \frac{2}{\pi} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{k+1},$$

где $s \geqslant \frac{a}{\pi}$.

Так как ряд $\sum\limits_{k=s}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ расходится, то расходится и интеграл

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}\right| dy.$$

Последнее означает, что $M\left[\frac{1}{y}\sin\frac{a}{y}\right]$ не существует, а следовательно, и метод Монте-Карло в данном случае неприменим.

П р и м е р 29. 4. Плотность вероятности случайных ошибок измерения известной постоянной величины $a$ некоторым прибором в процессе $n$ независимых опытов оставалась неизменной. Можно ли принять величину

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — результаты измерения величины $a$, в качестве приближенного значения дисперсии ошибок испытуемого прибора?

*Решение.* Обозначим истинное значение дисперсии ошибок испытуемого прибора $\sigma^2$. Величину $S_n^2$ можно рассматривать в качестве приближенного значения $\sigma^2$, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|s_n^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Результаты наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, можно рассматривать, согласно условию примера, как независимые случайные величины, имеющие одинаковые распределения. Следовательно, и величины $Y_i = (X_i - a)^2$ независимы и имеют одинаковые распределения. Вычислим математические ожидания $Y_i$

$$M[Y_i] = M[(X_i - a)^2] = M[X_i^2] - 2aM[X_i] + a^2 =$$

$$= \sigma^2 + \bar{x}_i^2 - 2a\bar{x}_i + a^2 = \sigma^2 + (\bar{x}_i - a)^2,$$

где $\bar{x}_i = M[X_i]$. Для выполнения равенства $M[Y_i] = \sigma^2$ необходимо, чтобы $\bar{x}_i = a$, что означает отсутствие систематических ошибок измерения у испытуемого прибора.

Итак, если у испытуемого прибора отсутствуют систематические ошибки, то выполнены условия применимости закона больших чисел и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a)^2 - \sigma^2\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

## Задачи для упражнений

29. 1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что нормальная случайная величина отклонится от своего математического ожидания больше, чем на: а) четыре срединных отклонения; б) три средних квадратических отклонения.

29. 2. Доказать, что какова бы ни была случайная величина $X$ и $\varepsilon > 0$

$$P(\varepsilon X > t^2 + \ln J) < e^{-t^2},$$

где

$$J = M[e^{\varepsilon X}].$$

29. 3. Доказать, что если $M[e^{aX}]$ существует, то

$$P\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M[e^{aX}]}{e^{a\varepsilon}} \quad (a > 0).$$

29. 4. Доказать, что если $\varphi(x)$ монотонно возрастающая положительная функция, а $M[\varphi(X)] = m$ существует, то

$$P\{|X| > t\} \leqslant \frac{m}{\varphi(t)}.$$

29. 5. Случайная величина $X$ подчиняется показательно-степенному закону распределения

$$f(x) = \frac{x^m}{m!} e^{-x} \quad (x \geqslant 0).$$

Доказать справедливость неравенства

$$P\{0 < X < 2(m+1)\} > \frac{m}{m+1}.$$

29. 6. Событие $A$ происходит в каждом опыте с вероятностью $1/2$. Можно ли с вероятностью большей 0,97 утверждать, что число появлений события $A$ в 1000 опытах будет в пределах от 400 до 600?

29. 7. Определить, имеет ли место закон больших чисел для среднего арифметического из $n$ попарно независимых случайных величин $X_k$, заданных рядом распределения (табл. 19).

*Таблица 19*

| $x_{ki}$ | $\sqrt{2}$ | $0$ | $-\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $p_{ki}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

29. 8. Пусть $X_k$—случайная величина, принимающая с вероятностью 0,5 два значения $k^s$ и $-k^s$. При каком $s$ к среднему арифметическому из последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ таких независимых случайных величин применим закон больших чисел?

29. 9. Доказать, что к среднему арифметическому из последовательности независимых случайных величин $X_k$, заданных рядом распределения (табл. 20), применим закон больших чисел.

*Таблица 20*

| $x_{ki}$ | $\sqrt{\ln k}$ | $-\sqrt{\ln k}$ |
|---|---|---|
| $p_{ki}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

29. 10. Установить, будут ли выполнены достаточные условия применимости закона больших чисел для последовательности взаимно независимых случайных величин $X_k$ с распределениями, задаваемыми следующим образом ($k \geqslant 1$):

а) $P\{X_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$;

б) $P\{X_k = \pm 2^k\} = 2^{-(2k+1)}$; $P\{X_k = 0\} = 1 - 2^{-2k}$;

в) $P\{X_k = \pm k\} = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}}$; $P\{X_k = 0\} = 1 - k^{-\frac{1}{2}}$.

29. 11. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ имеют одинаковые математические ожидания и ограниченные дисперсии. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел, если все моменты связи $k_{ij} = M\,[(X_i - \bar{x})(X_j - \bar{x})]$ отрицательны?

29. 12. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ последовательность случайных величин такая, что $X_k$ может зависеть только от $X_{k-1}$ и $X_{k+1}$, но не зависит от всех других $X_j$. Доказать, что к последовательности этих случайных величин применим закон больших чисел, если только случайные величины $X_k$ имеют конечные дисперсии и математические ожидания.

29. 13. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ задана рядом распределения

$$P\{X_i = k\} = \frac{1}{k^3\zeta(3)} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1{,}20256$ — значение функции Римана при аргументе 3.

Проверить, применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел.

29. 14. Дана последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, для которых $D\,[X_n] \leqslant c$ ограничены и $\varrho_{ij} \to 0$ при $|i - j| \to \infty$ ($\varrho_{ij}$ — коэффициент корреляции между $X_i$ и $X_j$). Доказать, что к данной последовательности применим закон больших чисел (теорема Бернштейна).

29. 15. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ задана рядом распределения

$$P\{X_i = (-1)^{k-1}k\} = \frac{6}{k^2\pi^2} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Проверить, применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел.

## § 30. ТЕОРЕМЫ МУАВРА—ЛАПЛАСА И ЛЯПУНОВА

### Основные формулы

Если производится серия $n$ независимых опытов, в каждом из которых событие $A$ появляется с одной и той же вероятностью $p$ $(0 < p < 1)$, то согласно теореме Муавра — Лапласа имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leqslant \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}\,[\Phi(b) - \Phi(a)],$$

где $m$ — число появлений события $A$ в результате $n$ опытов; $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятности), значения которой даны в приложении 4.

Если последовательность взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ при любом постоянном $\tau > 0$ удовлетворяет условию Линдеберга

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\tau B_n} (x-a_k)^2\, dF_k(x) = 0,$$

то согласно теореме Ляпунова выполняется предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a \leqslant \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a_k) < b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(b) - \Phi(a)\right],$$

где $F_k(x)$ — функция распределения случайной величины $X_k$;
$a_k = M[X_k]$ — математическое ожидание $X_k$;
$b_k^2 = D[X_k]$ — дисперсия $X_k$;

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

## Решение типовых задач

Пример 30. 1. Вероятность выхода из строя изделия за время испытаний на надежность $p = 0{,}05$. Какова вероятность, что за время испытаний 100 изделий выйдут из строя: а) не менее 5 изделий; б) менее 5 изделий; в) от 5 до 10 изделий?

*Решение.* Так как число испытуемых изделий велико, то поставленную задачу можно решить приближенно, но с достаточной для практики точностью, с помощью теоремы Муавра—Лапласа. На основании этой теоремы вероятность того, что некоторое событие $A$ произойдет не более $m_2$ раз, но и не менее $m_1$ раз может быть вычислена по приближенной формуле

$$P(m_1 \leqslant m < m_2) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)\right],$$

если только $n$ достаточно велико. При указанных в условии примера исходных данных $n = 100$; $p = 0{,}05$; $q = 1 - p = 0{,}95$ получим следующие значения искомых вероятностей.

а) Вероятность выхода из строя не менее 5 изделий

$$P(5 \leqslant m) = P(5 \leqslant m < 100) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{100-5}{\sqrt{4{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{4{,}75}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(43{,}6) - \Phi(0)\right] = 0{,}5.$$

б) Вероятность выхода из строя менее 5 изделий

$$P(m < 5) = P(0 \leqslant m < 5) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{4{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{0-5}{\sqrt{4{,}75}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi(0) + \Phi(2{,}29)\right] = \frac{1}{2}0{,}9780 = 0{,}489.$$

В данном примере можно оценить суммарную погрешность $\Delta$ вычисления вероятностей $P(5 \leqslant m)$ и $P(m < 5)$. Действительно,

$$\Delta = [P(5 \leqslant m) - 0{,}5] + [P(m < 5) - 0{,}489] = 1 - 0{,}989 = 0{,}011.$$

а) Вероятность выхода из строя от 5 до 10 изделий

$$P(5 \leqslant m < 10) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{10-5}{\sqrt{4{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{5-5}{\sqrt{4{,}75}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi(2{,}29) - \Phi(0)] = \frac{1}{2}\cdot 0{,}978 = 0{,}489.$$

Аналогично решаются задачи 30. 1—30. 4.

Пример 30. 2. Сколько нужно произвести независимых испытаний, чтобы с вероятностью 0,8 событие $A$, вероятность появления которого при одном опыте равна $P(A) = 0{,}05$, наблюдалось бы не менее 5 раз?

*Решение.* На основании теоремы Муавра—Лапласа

$$P(5 \leqslant m) \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{n-0{,}05n}{\sqrt{0{,}0475n}}\right) - \Phi\left(\frac{5-0{,}05n}{\sqrt{0{,}0475n}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(4{,}36\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{5-0{,}05n}{\sqrt{0{,}0475n}}\right)\right].$$

Уже при $n = 1$ $\Phi(4{,}36\sqrt{n}) \approx 1$, а так как по условию примера $P(5 \leqslant m) = 0{,}8$, то $n$ можно найти как корень трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{5-0{,}05n}{\sqrt{0{,}0475n}}\right)\right] \approx 0{,}8$$

или

$$\Phi\left(\frac{5-0{,}05n}{\sqrt{0{,}0475n}}\right) = -0{,}6.$$

По приложению 4 находим аргумент $x = -0{,}8416$, соответствующий значению функции $\Phi(x) = -0{,}6$. Решая уравнение

$$\frac{5-0{,}05n}{\sqrt{0{,}0475n}} = -0{,}8416,$$

находим единственный корень $n = 144$. Итак, для появления события $A$ не менее пяти раз с вероятностью 0,8 необходимо произвести 144 испытания.

Аналогично решаются задачи 30. 5—30. 7.

Пример 30. 3. Сколько опытов надо произвести при вычислении интеграла

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью 0,9 можно было считать относительную погрешность в вычисленном значении интеграла менее 5%?

*Решение.* Для вычисления интеграла $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ методом Монте-Карло его рассматривают как математическое ожидание функции случайной величины $X$, равномерно распределенной в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда приближенное значение интеграла

$$J_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \cos X_k,$$

где $X_k$ — случайные числа из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Составим случайную величину $T_n = \frac{J_n - J}{\sqrt{D[J_n]}}$, имеющую своим предельным законом распределения, согласно теореме Ляпунова, функцию $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, так как $X_k$ независимы и одинаково распределены, а $J = M[J_n]$. Имеем

$$D[J_n] = \frac{\pi^2}{4n} D[\cos X] = \frac{\pi^2}{4n}\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx - \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{4n}\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2 - 8}{8n}.$$

Отсюда

$$\sqrt{D[J_n]} = \sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{8n}}.$$

Применяя теорему Ляпунова, при $b = -a = \varepsilon$ получим

$$P\left\{\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}}\,|J_n - J| < \varepsilon\right\} \approx \Phi(\varepsilon) = 0{,}9,$$

отсюда $\varepsilon = 1{,}645$.

Для того, чтобы относительная погрешность $\frac{J_n + J}{J}$ была меньше 0,05, учитывая, что $J = 1$, необходимо произвести такое число опытов $n$, чтобы

$$\sqrt{\frac{8n}{\pi^2 - 8}}\,0{,}05 > 1{,}645,$$

откуда получаем $n > 252$.

Аналогично решаются задачи 30. 10—30. 12.

## Задачи для упражнений

30. 1. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частость этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

30. 2. Имеются 100 станков, работающих независимо друг от друга, одной и той же мощности и одного и того же режима работы, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

30. 3. Вероятность выхода из строя за время $T$ одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что из 100 конденсаторов в течение времени $T$ выйдут из строя: а) не менее 20 конденсаторов; б) не более 28 конденсаторов; в) от 14 до 26 конденсаторов.

30. 4. Пользуясь теоремой Муавра—Лапласа, показать, что при достаточно большом числе опытов $n$

$$P\left\{p - \varepsilon \leqslant \frac{m}{n} \leqslant p + \varepsilon\right\} \approx \hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\varrho\sqrt{2pq}}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right),$$

где $\frac{m}{n}$ — частость появления события, вероятность которого $p$.

30. 5. Вероятность некоторого события определяется методом Монте-Карло. Определить число независимых опытов, обеспечивающих с вероят-

ностью не менее 0,99 получение искомой вероятности с ошибкой, не превосходящей 0,01. Оценку произвести по неравенству Чебышева и по теореме Лапласа.

30. 6. Для оценки качества партии произведенной продукции она подвергается проверке. Вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной при каждой проверке одна и та же и равна 0,1. Партия изделий не принимается при обнаружении не менее 10 бракованных изделий. Сколько надо проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,6 можно было утверждать, что партия, имеющая 10% брака, не будет принята?

30. 7. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частость интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1?

30. 8. Производится 60 опытов в одинаковых условиях. Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие появится в большинстве опытов?

30. 9. Вероятность некоторого события $A$ равна $1/3$. Производится 45 000 независимых опытов. Каково вероятное отклонение $E$ числа появлений события $A$ от среднего значения?

30. 10. Вычисление интеграла $J = \int\limits_0^1 x^2 dx$ произведено методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов. Вычислить вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины $J$ не превзойдет 0,01.

30. 11. Сколько опытов надо произвести при вычислении интеграла

$$J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью $P \geqslant 0,99$ можно было считать абсолютную погрешность в вычисленном значении интеграла, не превосходящей 0,1% от $J$?

30. 12. Вероятность $P(C) = P(A + B)$, где $P(B/\overline{A})$ дано, определяется методом Монте-Карло двумя способами: а) приближенное значение $P(C)$ определяется как частость появления события $C$ в ряду из $n$ независимых опытов; б) определяется частость $\frac{m}{n}$ появления события $A$ в ряду из $n$ независимых опытов, а приближенное значение $P(C)$ определяется по формуле

$$P(C) \approx \tilde{P}_n(C) = \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m}{n}\right) P(B/\overline{A}).$$

1. Доказать, что оба способа ведут к правильному результату.
2. Определить необходимое число опытов в обоих случаях для получения ошибки в оценке $P(C)$, не превосходящей 0,01, с вероятностью не меньшей 0,95, если $P(B/\overline{A}) = 0,3$, а значение $P(A)$ имеет порядок 0,4.

30. 13. Имеется 100 урн, в каждой из которых находится по 5 красных и 95 черных шаров. Опыты организованы так, что после каждого извлечения из урны шара он вновь возвращается в ту же урну, а результаты опыта наблюдателю не сообщаются. Сколько потребуется опытов, чтобы: 1) с вероятностью 0,8 извлечь хотя бы один красный шар из каждой урны; 2) с вероятностью 0,8 извлечь хотя бы один красный шар не менее чем из 50 урн?

30. 14. Вычислить характеристическую функцию $E_{Y_n}(t)$ случайной величины

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D[X_i]}}$$

и найти ее предел при $n \to \infty$, если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и имеют одинаковые плотности вероятностей или ряды распределения вида:

а)

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{при } |x_i| \leqslant h, \\ 0 & \text{при } |x_i| > h; \end{cases}$$

б)

$$P(X_i = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a};$$

в)

$$f(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i < 0, \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i} & \text{при } x_i \geqslant 0. \end{cases}$$

30. 15. Найти предел при $n \to \infty$ характеристической функции $E_{Y_n}(t)$ случайной величины

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D[X_i]}},$$

если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы, имеют одинаковые плотности вероятностей, математические ожидания и дисперсии, а моменты более высокого порядка ограничены.

30. 16. В области $\Omega$, площадь которой равна $n^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), случайным образом появляется $n$ точек. К какой предельной функции распределения стремится при $n \to \infty$ число точек, попадающих в данную область $\omega$, являющуюся частью области $\Omega$?

# ГЛАВА VII

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## § 31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПЫТОВ

### Основные формулы

Значения случайной величины $X$, полученные в результате $n$ опытов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называются выборкой объема $n$. В данной книге принято считать, что опыты взаимно независимы и произведены в одних и тех же условиях. Задачей обработки результатов наблюдений является нахождение оценок (подходящих значений) для числовых характеристик исследуемой случайной величины, которые обозначаются теми же буквами, что и искомые величины, но с волнистой чертой сверху (например $\tilde{x}$, $\tilde{\sigma}_x$, $\tilde{D}[X]$ и т. д.). При неограниченном возрастании объема выборки $n$ оценка должна сходиться по вероятности к оцениваемому параметру.

Оценка называется несмещенной, если при любом объеме выборки ее математическое ожидание совпадает с искомым параметром.

Среднее арифметическое результатов $n$ опытов

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

является несмещенной оценкой для математического ожидания. Приведенной выше формуле для $\tilde{x}$ эквивалентна формула

$$\tilde{x} = c + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c),$$

где $c$ — произвольное число, вводимое для удобства расчетов («ложный нуль»).

При неизвестном значении математического ожидания несмещенной оценкой дисперсии будет

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \tilde{x}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 - \frac{n}{n-1}\left(\tilde{x} - c\right)^2.$$

Если исследуемая случайная величина нормальная, то несмещенной оценкой среднего квадратического отклонения будет

$$\tilde{\sigma} = k_n \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{x}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1{,}45} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{x}\right)^2},$$

где

$$k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \, \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Значения коэффициента $k_n$ приведены в табл. 21.

*Таблица 21*

| $n$ | $k_n$ | $n$ | $k_n$ | $n$ | $k_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,1284 | 10 | 1,0280 | 30 | 1,0087 |
| 4 | 1,0853 | 12 | 1,0230 | 35 | 1,0072 |
| 5 | 1,0640 | 15 | 1,0181 | 40 | 1,0064 |
| 6 | 1,0506 | 20 | 1,0134 | 45 | 1,0056 |
| 7 | 1,0423 | 25 | 1,0104 | 50 | 1,0051 |

При известном математическом ожидании несмещенной оценкой дисперсии будет

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^{2*}.$$

Если $x_1$, $y_1$, . . ., $x_n$, $y_n$ — значения случайных величин $X$ и $Y$, полученные в результате $n$ независимых опытов, произведенных в одинаковых условиях, то несмещенная оценка для момента связи случайных величин при неизвестном математическом ожидании $X$ и $Y$ будет

$$\tilde{k}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \tilde{x}\right)\left(y_j - \tilde{y}\right);$$

при известном математическом ожидании

$$\tilde{k}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x}\right)\left(y_j - \bar{y}\right).$$

При большом объеме выборки элементы статистического ряда объединяют в группы (разряды), представляя результаты опыта в виде упорядоченного вариационного ряда (табл. 22).

---

* Если исследуемая величина нормальна, то несмещенная оценка для среднего квадратического отклонения определяется по формуле

$$\tilde{\sigma} = k_{n+1} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

*Таблица 22*

| № разрядов | 1 | 2 | ...... | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| Границы разряда $x_{j-1}-x_j$ | $x_0-x_1$ | $x_1-x_2$ | ...... | $x_{k-1}-x_k$ |
| Среднее значение для разряда $x_j^*$ | $x_1^*$ | $x_2^*$ | ...... | $x_k^*$ |
| Число элементов в разряде $m_j$ | $m_1$ | $m_2$ | ...... | $m_k$ |
| Частость разряда $p_j^* = \frac{m_j}{n}$ | $p_1^*$ | $p_2^*$ | ...... | $p_k^*$ |

Подходящие значения математического ожидания, дисперсии и моментов более высокого порядка в этом случае приближенно определяются формулами

$$\tilde{x} \approx \sum_{j=1}^{k} x_j^* p_j^*,$$

$$\tilde{D}[X] \approx \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^* - \tilde{x}\right)^2 p_j^*,$$

$$\tilde{\mu}_s[X] \approx \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^* - \tilde{x}\right)^s p_j^*,$$

$$\tilde{m}_s[X] \approx \sum_{j=1}^{k} (x_j^*)^s p_j^*,$$

или более точными формулами (с учетом поправки Шеппарда):

$$\tilde{m}_1[X] = \sum_{j=1}^{k} x_j^* p_j^*,$$

$$\tilde{m}_2[X] = \sum_{j=1}^{k} (x_j^*)^2 p_j^* - \frac{h^2}{12},$$

$$\tilde{m}_3[X] = \sum_{j=1}^{k} (x_j^*)^3 p_j^* - \frac{h^2}{4} \sum_{j=1}^{k} x_j^* p_j^*,$$

$$\tilde{m}_4[X] = \sum_{j=1}^{k} (x_j^*)^4 p_j^* - \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^{k} (x_j^*)^2 p_j^* + \frac{7h^4}{240},$$

$$\tilde{\mu}_2[X] = \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^* - \tilde{x}\right)^2 p_j^* - \frac{h^2}{12},$$

$$\tilde{\mu}_3[X] = \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^* - \tilde{x}\right)^3 p_j^*,$$

$$\tilde{\mu}_4[X] = \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^* - \tilde{x}\right)^4 p_j^* - \frac{h^2}{2} \sum_{j=1}^{k} \left(x_j^* - \tilde{x}\right)^2 p_j^* + \frac{7h^4}{240},$$

где $h$ — длина интервала разряда.

## Решение типовых задач

Пример 31. 1. Для определения точности измерительного прибора, систематическая ошибка которого практически равна нулю, было произведено 5 независимых измерений. Результаты этих измерений представлены в табл. 23.

*Таблица 23*

| № измерения | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$, *м* | 2781 | 2836 | 2807 | 2763 | 2858 |

Определить несмещенную оценку для дисперсии ошибок измерительного прибора, если: а) значение измеряемой величины известно и равно 2800 *м*; б) значение измеряемой величины неизвестно.

*Решение.* Значение измеряемой величины равно $\bar{x}$. Поэтому в случае «а» подходящая несмещенная оценка для дисперсии определяется по формуле

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{6439}{5} = 1287{,}8 \text{ м}^2.$$

Когда значение измеряемой величины неизвестно, ее подходящее значение определяется по формуле

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 2809 \text{ м}.$$

Поэтому в случае «б» несмещенная оценка для дисперсии

$$\tilde{D}[X] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{x}\right)^2 = \frac{6034}{4} = 1508{,}5 \text{ м}^2.$$

Аналогично решаются задачи 31. 1—31. 4, 31. 15—31. 18.

Пример 31. 2. Для определения подходящего значения среднего квадратического отклонения ошибок измерительного прибора, систематические ошибки которого практически равны нулю, было произведено пять независимых опытов, результаты которых приведены в табл. 24.

*Таблица 24*

| № опыта | $x_i$, *м* |
|---|---|
| 1 | 92 |
| 2 | 101 |
| 3 | 103 |
| 4 | 98 |
| 5 | 96 |

При обработке результатов измерений использовались две формулы, позволяющие определить несмещенные оценки для $\sigma$:

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{x}\right)^2},$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \tilde{x} \right|.$$

Найти $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ и определить их дисперсии.

*Решение*. Расчет величин $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ дан в табл. 25.

Суммируя по колонкам таблицы, получим:

*Таблица 25*

| $x_i$ | $\lvert x_i - \tilde{x} \rvert$ | $(x_i - \tilde{x})^2$ |
|---|---|---|
| 92 | 6 | 36 |
| 101 | 3 | 9 |
| 103 | 5 | 25 |
| 98 | 0 | 0 |
| 96 | 2 | 4 |

$$A_1 = \sum_i x_i = 490, \quad A_2 = \sum_i \left| x_i - \tilde{x} \right| = 16, \quad A_3 = \sum_i \left(x_i - \tilde{x}\right)^2 = 74.$$

$$\tilde{x} = \frac{A_1}{n} = 98 \text{ м},$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{1 - \frac{3}{4n} - \frac{7}{32n^2} + \cdots} \sqrt{\frac{A_3}{n}} = 4{,}58 \text{ м},$$

$$\tilde{\sigma}_2 = A_2 \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}} = 4{,}48 \text{ м}.$$

Полученные таким образом подходящие значения $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ являются случайными величинами, математическое ожидание которых равно $\sigma$, т. е. $M\left[\tilde{\sigma}_1\right] = \sigma$ и $M\left[\tilde{\sigma}_2\right] = \sigma$. Для характеристики степени разброса этих случайных величин относительно математического ожидания определим их дисперсии. Ошибки измерения являются результатом действия большого числа независимых причин и поэтому на основании центральной предельной теоремы можно считать, что их распределение является нормальным. Тогда

$$D\left[\tilde{\sigma}_1\right] = M\left[\left(\tilde{\sigma}_1\right)^2\right] - \left\{M\left[\tilde{\sigma}_1\right]\right\}^2 = M\left[\left(\tilde{\sigma}_1\right)^2\right] - \sigma^2.$$

Здесь

$$M\left[\left(\tilde{\sigma}_1\right)^2\right] = \frac{k_1^2}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \tilde{x}\right)^2\right],$$

$$k_1 = \frac{1}{1 - \frac{3}{4n} - \frac{7}{32n^2} + \cdots},$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$M\left[\tilde{\sigma}_1^2\right] = \frac{k_1^2}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\tilde{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\tilde{x}^2\right] =$$

$$= \frac{k_1^2}{n}\left\{n\sigma^2 - \frac{1}{n} M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\right\},$$

где

$$M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i \neq j}^{n} x_i x_j\right] = n\sigma^2.$$

Окончательно имеем

$$D\left[\tilde{\sigma}_1\right] = \frac{k_1^2}{n}(n\sigma^2 - \sigma^2) - \sigma^2 = \sigma^2\left(k_1^2\frac{n-1}{n} - 1\right).$$

Определим дисперсию случайной величины $\tilde{\sigma}_2$

$$D\left[\tilde{\sigma}_2\right] = M\left[\left(\tilde{\sigma}_2\right)^2\right] - \left\{M\left[\tilde{\sigma}_2\right]\right\}^2,$$

где

$$M\left[\left(\tilde{\sigma}_2\right)^2\right] = k_2^2 M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \tilde{x}\right|\right)^2\right],$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}.$$

Обозначим $z_i = x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Так как $z_i$ — линейная функция случайных аргументов, имеющих нормальное распределение, то она также характеризуется нормальным распределением, параметры которого

$$M[z_i] = M\left[x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = 0,$$

$$D[z_i] = D\left[x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sigma^2 +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n} M\left[x_i \sum_{j=1}^{n} x_j\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Поэтому

$$M\left[\left(\tilde{\sigma}_2\right)^2\right] = k_2^2 M\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|\right)^2\right] = k_2^2 M\left[\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n}|z_i||z_j|\right] =$$

$$= k_2^2\left\{nD[z_i] + n(n-1)(M[|z_i|])^2\right\},$$

где

$$M[|z_i|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\int_0^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\int_{-\infty}^{0} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dz =$$

$$= \frac{2\sigma_z}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2(n-1)}{\pi n}}.$$

Окончательно имеем

$$D\left[\tilde{\sigma}_2\right] = k_2^2\left[n\,\frac{\sigma^2(n-1)}{n} + n(n-1)\,\frac{2(n-1)}{\pi n}\,\sigma^2\right] - \sigma^2 =$$

$$= k_2^2\sigma^2(n-1)\left[1 + \frac{2(n-1)}{\pi}\right] - \sigma^2 = \sigma^2\,\frac{\pi-2}{2n}.$$

Соотношение между дисперсиями для случайных величин $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ при различных $n$ показаны в табл. 26.

*Таблица 26*

| $n$ | 5 | 10 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{D\left[\tilde{\sigma}_2\right]}{D\left[\tilde{\sigma}_1\right]}$ | 1,003 | 1,118 | 1,140 | 1,460 |

Из решения примера следует, что определение подходящего значения для $\sigma$ по формуле $\tilde{\sigma}_1 = k_1\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\tilde{x}\right)^2}{n}}$ имеет бо́льшую достоверность чем результат, полученный по формуле $\tilde{\sigma}_2 = k_2\sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_i - \tilde{x}\right|$, т. е. оценка $\tilde{\sigma}_1$ является более эффективной.

Аналогично решаются задачи 31. 8, 31. 14, 31. 22.

Пример 31. 3. Из текущей продукции прецизионного токарного автомата был произведен выбор 200 валиков. Результаты измерений отклонений диаметров валиков от номинала записаны в форме табл. 27.

*Таблица 27*

| № разрядов | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Границы разрядов, *мк* | От −20 до −15 | От −15 до −10 | От −10 до −5 | От −5 до 0 | От 0 до +5 | От +5 до +10 | От +10 до +15 | От +15 до +20 | От +20 до +25 | От +25 до +30 |
| Среднее значение разряда | −17,5 | −12,5 | −7,5 | −2,5 | +2,5 | +7,5 | +12,5 | +17,5 | +22,5 | +27,5 |
| Число элементов в разряде | 7 | 11 | 15 | 24 | 49 | 41 | 26 | 17 | 7 | 3 |
| Частость разряда | 0,035 | 0,055 | 0,075 | 0,120 | 0,245 | 0,205 | 0,130 | 0,085 | 0,035 | 0,015 |

Определить подходящие значения математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса.

*Решение.* Для упрощения промежуточных расчетов введем случайную величину

$$z_j = \frac{x_j^* - c}{h},$$

где в качестве «ложного нуля» примем $c = 2{,}5$ *мк*, а ширину разряда $h = 5$ *мк*.

Определение подходящих значений первых четырех моментов случайной величины с учетом поправок Шеппарда можно произвести по формулам

$$\tilde{x} = hA + c,$$

$$\tilde{D}[X] = h^2\left(B - A^2 - \frac{1}{12}\right),$$

$$\tilde{\mu}_3[X] = h^3(D - 3AB + 2A^3),$$

$$\tilde{\mu}_4[X] = h^4\left[E - A\left(4D - \frac{A}{2}\right) + B\left(6A^2 - \frac{1}{2}\right) - 3A^4 + \frac{7}{240}\right],$$

где

$$A = \sum_{j=1}^{k} p_j^* z_j,$$

$$B = \sum_{j=1}^{k} p_j^* z_j^2,$$

$$D = \sum_{j=1}^{k} p_j^* z_j^3,$$

$$E = \sum_{j=1}^{k} p_j^* z_j^4.$$

Расчеты сведем в табл. 28.

*Таблица 28*

| № разрядов | $p_j^*$ | $x_j^*$ | $z_j = \frac{x_j^* - c}{h}$ | $(4)^2$ | $(4)^3$ | $(4)^4$ | $(2)\times(4)$ | $(2)\times(5)$ | $(2)\times(6)$ | $(2)\times(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 1 | 0,035 | —17,5 | —4 | 16 | —64 | 256 | —0,140 | 0,560 | —2,240 | 8,960 |
| 2 | 0,055 | —12,5 | —3 | 9 | —27 | 81 | —0,165 | 0,495 | —1,485 | 4,455 |
| 3 | 0,075 | —7,5 | —2 | 4 | — 8 | 16 | —0,150 | 0,300 | —0,600 | 1,200 |
| 4 | 0,120 | —2,5 | —1 | 1 | — 1 | 1 | —0,120 | 0,120 | —0,120 | 0,120 |
| 5 | 0,245 | +2,5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0,205 | +7,5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0,205 | 0,205 | 0,205 | 0,205 |
| 7 | 0,130 | +12,5 | 2 | 4 | 8 | 16 | 0,260 | 0,520 | 1,040 | 2,080 |
| 8 | 0,085 | +17,5 | 3 | 9 | 27 | 81 | 0,255 | 0,765 | 2,295 | 6,885 |
| 9 | 0,035 | +22,5 | 4 | 16 | 64 | 256 | 0,140 | 0,560 | 2,240 | 8,960 |
| 10 | 0,015 | +27,5 | 5 | 25 | 125 | 625 | 0,075 | 0,375 | 1,875 | 9,375 |
| | | | | | | Σ | $A$ | $B$ | $D$ | $E$ |

$A = 0{,}36$; $D = 3{,}21$;
$B = 3{,}90$; $E = 42{,}24$.

Цифры в скобках означают порядковый номер колонки.

Подставляя полученные значения в приведенные выше формулы, получим

$$\tilde{x} = 5A + 2{,}5 = 4{,}3 \text{ мк},$$

$$\tilde{D}[X] = 25\left(B - A^2 - \frac{1}{12}\right) = 92{,}25 \text{ мк}^2,$$

$$\tilde{\mu}_3[X] = 125(D - 3AB + 2A^3) = -113{,}75 \text{ мк}^3,$$

$$\tilde{\mu}_4[X] = 625\left[E - A\left(4D - \frac{A}{2}\right) + B\left(6A^2 - \frac{1}{2}\right) - 3A^4 + \frac{7}{240}\right] = 24215{,}62 \text{ мк}^4,$$

$$\widetilde{\mathrm{Sk}}[X] = \frac{\tilde{\mu}_3[X]}{\tilde{\sigma}_x^3} = -\frac{113{,}75}{885{,}97} = -0{,}128,$$

$$\widetilde{\mathrm{Ex}}[X] = \frac{\tilde{\mu}_4[X]}{\tilde{\sigma}_x^4} - 3 = \frac{24215{,}62}{8510{,}06} - 3 = -0{,}16.$$

Аналогично решаются задачи 31. 5; 31. 9; 31. 20; 31. 21.

## Задачи для упражнений

31. 1. Определить несмещенную оценку для срединной ошибки измерительного прибора, если при 12 независимых измерениях этим прибором базы длиной 232,38 *м* были получены следующие результаты: 232,50; 232,48; 232,15; 232,53; 232,45; 232,30; 232,48; 232,05; 232,45; 232,60; 232,47; 232,30 *м*.

31. 2. Даны результаты 8 независимых измерений одной и той же величины прибором, не имеющим систематических ошибок: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 *м*. Определить несмещенную оценку для дисперсии ошибок измерительного прибора, если: а) длина измеряемой прибором базы известна $\bar{x} = 375$ *м*; б) длина измеряемой базы неизвестна.

31. 3. При обработке данных 15 испытаний спортивного самолета были получены следующие значения его максимальной скорости: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 423,0 *м/сек*. Определить несмещенные оценки для математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета.

31. 4. При обработке данных 6 испытаний спортивного катера были получены следующие значения его максимальной скорости: 27, 38, 30, 37, 35, 31 *м/сек*. Определить несмещенные оценки для математического ожидания и срединного отклонения максимальной скорости катера.

31. 5. Чувствительность телевизора к видеопрограмме характеризуется данными, приведенными в табл. 29.

*Таблица 29*

| $x_j^*$, *мкв* | $m_j$ | $x_j^*$, *мкв* | $m_j$ | $x_j^*$, *мкв* | $m_j$ | $x_j^*$, *мкв* | $m_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 10 | | | 425 | 5 | 625 | 3 |
| 225 | 1 | 325 | 9 | 450 | 26 | 650 | 1 |
| 250 | 26 | 350 | 20 | 500 | 24 | 700 | 6 |
| 275 | 8 | 375 | 10 | 550 | 3 | 800 | 4 |
| 300 | 23 | 400 | 29 | 600 | 19 | | |

Определить оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения для чувствительности телевизора к видеопрограмме.

31. 6. Определить математическое ожидание подходящего значения дисперсии случайной величины $X$, определяемой по выборке объема $n$, если: а) математическое ожидание $\bar{x}$ известно, а подходящее значение дисперсии определяется по формуле

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2;$$

б) математическое ожидание $\bar{x}$ неизвестно, его подходящее значение $\tilde{x}$ определяется по результатам той же выборки, а

$$\tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \tilde{x}\right)^2.$$

*Таблица 30*

| $x_j^*$ | $m_j$ |
|---|---|
| 44 | 7 |
| 45 | 18 |
| 46 | 120 |
| 47 | 48 |
| 48 | 33 |
| 49 | 5 |
| 50 | 1 |
| 52 | 1 |
| 58 | 2 |

31. 7. Для определения частости события $A$ производится $n$ независимых опытов. Определить, при каком значении $P(A)$ дисперсия частости будет максимальной.

31. 8. Произведено $n$ независимых измерений одной и той же неизвестной постоянной величины. Ошибки измерения подчиняются нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю.

Для определения подходящего значения дисперсии по результатам опыта были использованы две формулы

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j - \tilde{x})^2}{n}; \qquad \tilde{\sigma}_2^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{(x_j - \tilde{x})^2}{n-1}.$$

Определить дисперсию случайных величин $\tilde{\sigma}_1^2$ и $\tilde{\sigma}_2^2$.

31. 9. Полученные в результате опыта значения случайной величины $X$ разбиты на группы. Среднее значение $x_j^*$ для каждой группы и число элементов в группе $m_j$ даны в табл. 30.

Определить оценки для коэффициента асимметрии и эксцесса.

31. 10. Для определения места судна в море используют среднее арифметическое значение измеренной дальности до маяка. Какой из двух приборов, измеряющих дальность, рационально взять, если время для измерений задано, а второй прибор при вдвое большей срединной ошибке требует для выполнения одного измерения втрое меньше времени?

31. 11. Выборка из генеральной совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подвергается обработке по разностям с целью определения подходящего значения генеральной дисперсии. Для обработки применяется формула

$$\tilde{\sigma}_x^2 = k\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1} - x_j)^2.$$

Каким должно быть $k$, чтобы $\tilde{\sigma}_x^2$ являлась несмещенной оценкой $\sigma_x^2$, если случайная величина $X$ является нормальной?

31. 12. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются результатами независимых наблюдений одной и той же неизвестной постоянной величины. Ошибки наблю-

дений подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Средняя квадратическая ошибка наблюдений определяется по формуле

$$\tilde{\sigma} = k \sum_{j=1}^{n} |x_j - \tilde{x}|,$$

где

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Определить значение $k$, при котором $\tilde{\sigma}$ является несмещенной оценкой $\sigma$.

31. 13. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты независимых измерений известной постоянной величины $\bar{x}$. Ошибки измерений подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Обработка наблюдений ведется для определения подходящего значения средней квадратической ошибки по формуле

$$\tilde{\sigma} = k \sum_{j=1}^{n} |x_j - \bar{x}|.$$

Каким должно быть $k$, чтобы были несмещенными оценки: а) среднего квадратического отклонения ошибок; б) дисперсии ошибок?

31. 14. Произведено $n$ независимых неравноточных измерений: $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ одной и той же неизвестной постоянной величины. Подходящее значение измеряемой величины определяется по формуле

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{j=1}^{n} A_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} A_j}.$$

Какими должны быть $A_j$, чтобы дисперсия $\tilde{x}$ была минимальной, если средняя квадратическая ошибка $j$-го измерения равна $\sigma_j$?

31. 15. Произведено $n$ независимых опытов над системой двух случайных величин, имеющей нормальное распределение на плоскости, в которых определены значения этих величин $(x_k, z_k)$ $(k = 1, 2., \ldots, n)$. Главные оси рассеивания параллельны координатным осям. Определить подходящие значения математического ожидания и срединных отклонений этих величин, соответствующих несмещенным оценкам для дисперсий.

31. 16. Решить задачу 31. 15 для случая, когда результаты независимых испытаний даны в табл. 31.

*Таблица 31*

| № опыта $k$ | $x_k$, м | $z_k$, м | № опыта $k$ | $x_k$, м | $z_k$, м |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 55 | 77 | 9 | 41 | 31 |
| 2 | 43 | 46 | 10 | 36 | 60 |
| 3 | 63 | 34 | 11 | 56 | 48 |
| 4 | 57 | 61 | 12 | 72 | 78 |
| 5 | 44 | 84 | 13 | 48 | 62 |
| 6 | 26 | 54 | 14 | 16 | 49 |
| 7 | 59 | 53 | 15 | 49 | 31 |
| 8 | 72 | 21 | 16 | 36 | 64 |

31. 17. Для условий задачи 31. 15 определить параметры единичного эллипса рассеивания, если до проведения опытов направление главных осей рассеивания неизвестно.

31. 18. Решить задачу 31. 17 для случая, когда результаты 16 независимых испытаний даны в табл. 32.

*Таблица 32*

| № опыта | Отклонения *м* | | № опыта | Отклонения *м* | | № опыта | Отклонения *м* | | № опыта | Отклонения *м* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_i$ | $z_i$ | | $x_i$ | $z_i$ | | $x_i$ | $z_i$ | | $x_i$ | $z_i$ |
| 1 | +2 | +59 | 5 | +2 | +72 | 9 | +1 | + 7 | 13 | +4 | +103 |
| 2 | +3 | +88 | 6 | 0 | +34 | 10 | —2 | +57 | 14 | 0 | + 65 |
| 3 | +2 | +32 | 7 | 2 | —12 | 11 | —1 | +42 | 15 | +1 | + 16 |
| 4 | —2 | —24 | 8 | +3 | +50 | 12 | +2 | +23 | 16 | +1 | + 28 |

31. 19. Выборка из генеральной совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подвергается обработке с целью определения подходящего значения генерального среднего квадратического отклонения по формуле

$$\tilde{\sigma} = k\sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(x_j - \tilde{x}\right)^2}{n}},$$

где

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Определить, каким должно быть $k$, чтобы $\tilde{\sigma}$ являлась несмещенной оценкой для среднего квадратического отклонения $\sigma$.

31. 20. Из таблицы случайных чисел взято 150 двузначных чисел (00 принималось за 100). Эти числа были разбиты по десяткам на интервалы (табл. 33).

*Таблица 33*

| 1—10 | 11—20 | 21—30 | 31—40 | 41—50 | 51—60 | 61—70 | 71—80 | 81—90 | 91—100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 19 | 13 | 14 | 19 | 14 | 11 | 13 | 16 |

Построить гистограмму и график накопленной частости. Определить оценки для математического ожидания и дисперсии.

31. 21. С помощью таблицы случайных однозначных чисел образовано 250 сумм по 5 чисел. По разрядам числа распределены, как указано в табл. 34 (если число попадает на границу разрядов, то в смежных разрядах прибавляется по $^1/_2$). Построить гистограмму и определить оценки для математического ожидания и дисперсии.

31. 22. Произведено $n$ независимых измерений одной и той же неизвестной постоянной величины. Систематические ошибки измерения равны нулю, а случайные ошибки распределены нормально. Для определения

*Таблица 34*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—3 | 3—6 | 6—9 | 9—12 | 12—15 | 15—18 | 18—21 | 21—24 |
| 0 | 0,5 | 1,5 | 10,0 | 17,5 | 28,5 | 39 | 41 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 24—27 | 27—30 | 30—33 | 33—36 | 36—39 | 39—42 | 42—45 |
| 45 | 30,5 | 27,0 | 7,5 | 1 | 1 | 0 |

подходящего значения дисперсии ошибок измерения были использованы две формулы

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \tilde{x})^2}{n-1}; \quad \tilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1} - x_j)^2.$$

Являются ли $\tilde{\sigma}_1^2$ и $\tilde{\sigma}_2^2$ несмещенными оценками для дисперсии; какая из этих формул позволяет определять подходящее значение дисперсии с бóльшей точностью?

## § 32. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

### Основные формулы

Оценки (подходящие значения) математического ожидания и среднего квадратического отклонения, определяемые равенствами

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_i,$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2},$$

дают приближенные значения $\bar{x}$ и $\sigma$. Надежность полученных значений может быть охарактеризована вероятностью

$$P\{|\tilde{x} - \bar{x}| < \varepsilon\} = \alpha,$$

где $(\tilde{x} - \varepsilon,\ \tilde{x} + \varepsilon)$ — доверительный интервал, характеризующий точность полученного результата;

$\alpha$ — доверительная вероятность, т. е. вероятность того, что интервал со случайными концами $(\tilde{x} - \varepsilon,\ \tilde{x} + \varepsilon)$ накроет неизвестный параметр $\bar{x}$.

При нормальном распределении случайной величины $X$ доверительная вероятность выражается формулами:

для подходящего значения математического ожидания:

а) при известном $\sigma$ $\quad \alpha = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right),$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа;

б) при неизвестном $\sigma$ $\quad \alpha = \int\limits_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t)\,dt,$

где

$$S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}$$ — закон распределения Стьюдента;

$$t_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x})^2}{n-1}}}.$$

Значения интеграла $\int\limits_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t)\,dt$ приведены в приложении 10, в котором $k = n - 1$;

для подходящего значения среднего квадратического отклонения:

$$\alpha = P\left\{\left|\tilde{\sigma}-\sigma\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right\} = \int\limits_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi)\,d\chi,$$

где $P_k(\chi) = \dfrac{\chi^{k-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{k-2}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)},$

$k = n - 1,$

$q = \dfrac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}}.$

Значения интеграла $\int\limits_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi)\,d\chi$ приведены в приложении 13. Доверительный интервал $\left(\gamma_1\tilde{\sigma},\ \gamma_2\tilde{\sigma}\right)$ для среднего квадратического отклонения является несимметричным и при заданной доверительной вероятности $\alpha$ определяется формулой

$$\alpha = P\left\{\gamma_1\tilde{\sigma} < \tilde{\sigma} < \gamma_2\tilde{\sigma}\right\},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{n}}{\chi_2}; \qquad \gamma_2 = \frac{\sqrt{n}}{\chi_1};$$

$\chi_1$ и $\chi_2$ определяются таким образом, чтобы

$$P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} > \chi_2^2\right\} = P\left\{\frac{n\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} < \chi_1^2\right\} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Для определения $\gamma_1$ и $\gamma_2$ по данной доверительной вероятности $\alpha$ без предварительного вычисления величин $\chi_1$ и $\chi_2$ можно использовать приложение 12.

## Решение типовых примеров

П р и м е р 32. 1. Среднее значение дальности до ориентира, полученное по четырем независимым измерениям, равно 2250 *м*. Срединная ошибка измерительного прибора $E = 40$ *м*. Найти с надежностью 95% доверительный интервал для оценки подходящего значения измеряемой величины.

*Решение.* Вероятность накрыть истинное значение измеряемой величины $\bar{x}$ интервалом $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$ со случайными концами при известном $E$ определяется формулой

$$P\left\{\left|\bar{x} - \tilde{x}\right| \leqslant \varepsilon\right\} = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\rho^2\frac{z^2}{E_1^2}}dz = \hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon}{E_1}\right),$$

где $E_1 = \frac{E}{\sqrt{n}}$ — срединное отклонение случайной величины

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Решая уравнение $\hat{\Phi}\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{E}\right) = 0{,}95$, из приложения 5 находим $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{E} = 2{,}91$

$$\varepsilon = \frac{2{,}91}{\sqrt{n}}E = \frac{2{,}91\cdot 40}{2} = 58{,}2 \text{ м}.$$

Отсюда искомые пределы для доверительного интервала будут:
верхний — 2250 *м* + 58,2 *м* = 2308,2 *м*,
нижний — 2250 *м* — 58,2 *м* = 2191,8 *м*.

Аналогично решаются задачи 32. 1, 32. 6, 32. 13.

П р и м е р 32. 2. Средняя квадратическая ошибка одного высотомера $\sigma = 15$ *м*. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с надежностью 0,99 ошибка средней высоты $\tilde{x}$ была бы больше — 30 *м*, если ошибки высотомеров нормальны и не имеют систематической ошибки?

*Решение.* Условия задачи могут быть записаны так:

$$P\left\{-30 < \tilde{x} - \bar{x} < \infty\right\} = 0{,}99.$$

Случайная величина

$$Z = \tilde{x} - \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \bar{x}$$

является линейной функцией нормально распределенных случайных аргументов, а поэтому также имеет нормальное распределение, параметры которого

$$M[Z] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j - \bar{x}\right] = 0,$$

$$D[Z] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Тогда

$$P\left\{-30<\tilde{x}-\bar{x}<\infty\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\int\limits_{-30}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{30}{\sigma_z}\right)\right]=0{,}99.$$

Решая уравнение

$$\Phi\left(\frac{30\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0{,}98,$$

из приложения 4 находим $\frac{30\sqrt{n}}{\sigma}=2{,}33,$

$$n=\left(\frac{2{,}33\sigma}{30}\right)^2=1{,}36.$$

Отсюда следует, что число высотомеров на самолете должно быть не менее двух.

Аналогично решаются задачи 32. 7, 32. 11.

Пример 32. 3. На контрольных испытаниях 16 осветительных ламп были определены подходящие значения для математического ожидания и среднего квадратического отклонения их срока службы, которые оказались равными $\tilde{x}=3000$ час. и $\tilde{\sigma}=20$ час. Считая, что срок службы каждой лампы является нормальной случайной величиной, определить:

— доверительный интервал для математического ожидания и среднего квадратического отклонения, который с вероятностью 0,9 накрывает истинное значение определяемых параметров;

— с какой вероятностью можно утверждать, что абсолютное значение ошибки определения $\bar{x}$ не превзойдет 10 час, а ошибка в определении $\sigma$ будет меньше 2 час.

*Решение.* При определении границ доверительного интервала для оценки математического ожидания воспользуемся уравнением

$$\alpha=\int\limits_{-t_\alpha}^{t_\alpha}S_n(t)\,dt.$$

В приложении 10 по $k=n-1=15$ и $\alpha=0{,}9$ находим $t_\alpha=$ $=\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}}=1{,}753$, откуда $\varepsilon=\frac{1{,}753\tilde{\sigma}}{n}=8{,}765$ часа.

Поэтому искомые границы доверительного интервала для $\bar{x}$ будут:
верхняя — $3000+8{,}765=3008{,}765$ часа;
нижняя — $3000-8{,}765=2991{,}235$ часа.

При определении границ доверительного интервала для оценки $\sigma$ воспользуемся данными приложения 12. Входами в таблицу этого приложения являются величина $n-1$ и доверительная вероятность $\alpha$. Для $k=n-1=15$ и $\alpha=0{,}9$ имеем

$$\gamma_1=0{,}775,$$
$$\gamma_2=1{,}437.$$

Таким образом, совместимые с данными наблюдения значения лежат в пределах от $0{,}775\,\tilde{\sigma}=15{,}50$ часа до $1{,}437\,\tilde{\sigma}=28{,}74$ часа.

Решим теперь обратную задачу, т. е. для заданного объема выборки определим вероятности следующих двух неравенств:

$$-10 \text{ час.} < \tilde{\bar{x}} - \bar{x} < 10 \text{ час.};$$

$$-2 \text{ час.} < \tilde{\sigma} - \sigma < 2 \text{ час.}$$

При определении вероятности первого неравенства необходимо воспользоваться распределением Стьюдента

$$\alpha = P\left\{\left|\bar{x} - \tilde{\bar{x}}\right| < \varepsilon\right\} = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} S_n(t)\,dt.$$

Из приложения 10 по $t_\alpha = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\tilde{\sigma}} = \frac{10\sqrt{16}}{20} = 2$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 15$ находим $\alpha = 0{,}93$; $\chi$-распределение позволяет определить вероятность второго неравенства

$$\alpha = P\left\{\left|\tilde{\sigma} - \sigma\right| < \varepsilon\right\} = \int_{\frac{\sqrt{k}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{k}}{1-q}} P_k(\chi)\,d\chi.$$

По $q = \frac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}} = \frac{2}{20} = 0{,}1$ и числу степеней свободы $k = n - 1 = 15$ из приложения 13 определяем вероятность $\alpha = 0{,}41$.

Аналогично решаются задачи 32. 2—32. 5, 32. 8—32. 10.

## Задачи для упражнений

32. 1. Для определения подходящего значения измеряемой величины $(\tilde{x})$ было произведено 25 измерений. Систематическая ошибка прибора равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены нормально со срединным отклонением $E = 10$ *м*. Определить доверительные границы, внутри которых с вероятностью 0,99 лежит истинное значение измеряемой величины, если $\tilde{x} = 100$ *м*.

32. 2. Ошибки измерений подчинены нормальному закону. Результаты измерений не содержат систематических ошибок и записаны в виде статистического ряда (табл. 35). Определить подходящее значение измеряемой величины и доверительные границы, внутри которых истинное значение измеряемой величины находится с вероятностью 0,95.

*Таблица 35*

| $j$ | $x_j^*$ | $m_j$ |
|---|---|---|
| 1 | 114 | 2 |
| 2 | 115 | 5 |
| 3 | 116 | 8 |
| 4 | 117 | 4 |
| 5 | 118 | 3 |

32. 3. Произведено 40 независимых измерений базы постоянной длины. После обработки результатов опыта получены подходящие значения для измеряемой величины и среднего квадратического отклонения: $\tilde{x} = 10\,400$ *м* и $\tilde{\sigma}_x = 85$ *м*. Ошибки измерения расстояния подчиняются закону нормального распределения. Найти вероятность того, что истинные значения определяемых параметров лежат в пределах: для математического ожидания $\pm 0{,}1\%$ от $\tilde{x}$; для среднего квадратического отклонения $\pm 5\%$ от $\tilde{\sigma}_x$.

32. 4. Произведено 11 измерений постоянной величины. Результаты измерений даны в табл. 36. Ошибки измерений распределены по нормальному закону, систематические ошибки отсутствуют. Определить: 1) подходящие значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения; 2) вероятность того, что абсолютное значение ошибки в определении истинного значения измеряемой величины меньше 2% от $\tilde{x}$; 3) вероятность того, что абсолютное значение ошибки в определении среднего квадратического отклонения меньше 1% от $\tilde{\sigma}$.

*Таблица 36*

| № измерений $j$ | $x_j$, *м* |
|---|---|
| 1 | 9,9 |
| 2 | 12,5 |
| 3 | 10,3 |
| 4 | 9,2 |
| 5 | 6,0 |
| 6 | 10,9 |
| 7 | 10,3 |
| 8 | 11,8 |
| 9 | 11,6 |
| 10 | 9,8 |
| 11 | 14,0 |

32. 5. На основании 100 опытов было определено, что в среднем для производства детали требуется $\tilde{\omega} = 5{,}5$ сек., а $\tilde{\sigma}_\omega = 1{,}7$ сек. Сделав допущение, что время для производства детали есть нормальная случайная величина, определить границы, в которых лежат истинные значения для $\omega$ и $\sigma_\omega$ с надежностью 85 и 90% соответственно.

32. 6. Определение скорости самолета было проведено на 5 испытаниях, в результате которых вычислено подходящее значение скорости $\tilde{v} = 870{,}3$ *м/сек*. Найти 95%-ный доверительный интервал, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со срединным отклонением $E_v = 2{,}1$ *м/сек*.

32. 7. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со срединным отклонением $E = 20$ *м*. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не более 15 *м* при надежности 90%?

32. 8. Найти при надежности 0,9 доверительные границы для дальности до ориентира $X$ и для срединного отклонения $E$, если при 10 независимых измерениях были получены значения дальности, приведенные в табл. 37.

*Таблица 37*

| № опыта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$, *м* | 25 025 | 24 970 | 24 780 | 25 315 | 24 907 | 24 646 | 24 717 | 25 354 | 24 911 | 25 374 |

32. 9. Произведено 5 независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. Опыты дали следующие результаты (в абсолютных электростатических единицах):

$$4{,}781\cdot 10^{-10},\quad 4{,}792\cdot 10^{-10},$$
$$4{,}795\cdot 10^{-10},\quad 4{,}779\cdot 10^{-10}.$$
$$4{,}769\cdot 10^{-10},$$

Определить подходящее значение для заряда электрона и найти доверительные границы при надежности 99%.

32. 10. По 15 независимым равноточным измерениям были рассчитаны подходящие значения математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета $\tilde{v} = 424{,}7$ *м/сек*

и $\tilde{\sigma}_v = 8{,}7$ *м/сек*. Определить: а) доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при надежности 0,9; б) вероятности, с которыми можно утверждать, что абсолютное значение ошибки в определении $\tilde{v}$ и $\sigma_v$ не превзойдет 2 *м/сек*.

32. 11. В качестве подходящего значения дальности до цели принимают среднее арифметическое из результатов независимых измерений дальности $n$ дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со срединным отклонением $E = 10$ *м*. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности до цели с вероятностью 0,9 не превышала 15 *м*?

32. 12. Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки каждого измерения подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Сколько надо произвести измерений для определения подходящего значения среднего квадратического отклонения прибора, чтобы с надежностью 70% абсолютное значение ошибки в определении этой величины было бы не более 20% от $\tilde{\sigma}$?

32. 13. Систематические ошибки измерительного прибора практически равны нулю, а случайные распределены нормально со срединным отклонением $E = 20$ *м*. Необходимо, чтобы абсолютное значение разности между подходящим значением измеряемой величины и истинным ее значением не превосходило 10 *м*. Определить, с какой вероятностью будет выполнено это условие, если число наблюдений 3, 5, 10, 25 (построить график).

32. 14. Подходящее значение измеряемой величины определяется по формуле

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Результаты отдельных измерений подчинены одному и тому же закону нормального распределения. Определить доверительные границы, внутри которых с надежностью 0,9 находится истинное значение измеряемой величины для следующих условий: а) $\sigma = 20$ *м*, $n = 3{,}5,\ 10{,}25$; б) $\tilde{\sigma} = 20$ *м*, $n = 3,\ 5,\ 10,\ 25$.

32. 15. В испытуемой партии изделий случайный параметр $X$ имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma$ известно, а величина $x_0$ неслучайна.

Дано, что: если $x_0 \leqslant A$ продукция считается хорошей; если $A < x_0 \leqslant B$ продукция считается допустимой; при $x_0 > B$ продукция бракуется.

При контрольных испытаниях группы из $n$ изделий определяется подходящее значение параметра $x_0 \left( x_0 \approx \tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$. Партия принимается, если $\tilde{x} \leqslant C$, и бракуется, если $\tilde{x} > C$. Определить: а) риск поставщика $m = P\left\{\tilde{x} > C / x_0 = A\right\}$ не сдать качественную партию; б) риск заказчика $n = P\left\{\tilde{x} \leqslant C / x_0 = B\right\}$ принять бракованную партию.

## § 33. КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

### Основные формулы

Критерии согласия применяются для статистической проверки гипотез о предполагаемом виде закона распределения. Критерии согласия позволяют определить вероятность того, что при гипотетическом законе распределения наблюдающееся в рассматриваемой выборке отклонение вызывается случайными причинами, а не ошибкой в гипотезе. Если эта вероятность велика, то отклонение от гипотетического закона распределения следует признать случайным и считать, что гипотеза о предполагаемом законе распределения не опровергается, в противном случае гипотеза опровергается.

Вероятностный характер критериев не позволяет однозначно подтвердить или опровергнуть проверяемую гипотезу. Критерий позволяет утверждать, что гипотеза не противоречит опытным данным, если вероятность наблюденного отклонения от гипотетического закона велика, или, что гипотеза не согласуется с опытными данными, если эта вероятность мала. Вопрос о том, насколько мала или велика должна быть указанная вероятность, решается не из математических, а из практических соображений. Обычно используется один из двух критериев: критерий $\chi^2$ (критерий Пирсона) и критерий Колмогорова. Для применения критерия $\chi^2$ вся область изменения изучаемой случайной величины $x$ разбивается на $n$ интервалов и определяются численности разрядов $m_i$ числа элементов статистического ряда, попадающих в каждый интервал (или группу).

Качественный анализ полученной гистограммы распределения или общие соображения о механизме возникновения случайной величины служат основанием для выбора типа закона распределения, сглаживающего рассматриваемую выборку. Параметры этого закона распределения могут быть определены или из теоретических соображений или путем нахождения их подходящих значений на основании обработки опытных данных. На основании принятого закона распределения вычисляются вероятности $p_i$ попадания значений случайной величины $x$ в $i$-тый интервал. Величина $\chi_q^2$, характеризующая уклонение опытного распределения от предполагаемого, определяется формулой

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i},$$

где $n$ — число интервалов;

$N$ — общее число опытных значений величины $x$.

Критерий $\chi_q^2$ имеет распределение, стремящееся при $N \to \infty$ к распределению $\chi^2$ с $k = n - c - 1$ степенями свободы, где $c$ — число параметров гипотетического закона распределения, вычисляемых по опытным данным. Значения величины $\chi_q^2$ в зависимости от вероятности $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right)$ и от $k$ даны в приложении 11. По вычисленному значению $\chi_q^2$ и числу $k$ из этого приложения находим $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right)$ — вероятность бо́льшего уклонения от гипотетического закона распределения, чем имеющее место для рассматриваемой выборки. Если эта вероятность велика, т. е. превышает некоторый уровень $p_q$, то расхождение следует признать случайным и считать, что гипотеза не опровергается; если она мала, то делается вывод, что гипотеза не согласуется с опытным распределением. Величина уровня $p_q$ должна выбираться с учетом конкретных условий задачи. Обычно принимается $p_q = 0{,}03 \div 0{,}05$.

При использовании критерия $\chi^2$ желательно, чтобы как общее число опытных значений исследуемой случайной величины, так и численности разрядов $m_i$ были достаточно велики. Практически достаточно, чтобы было $N \geqslant 50 \div 60$, а $m_i \geqslant 5 \div 8$. Если какое-либо из $m_i$ меньше установленного минимального значения, то два или несколько соседних интервалов должны быть объединены в один, с тем, чтобы численность разряда $m_i$ для объединенного интервала была достаточно большой. При этом соответственно уменьшается число степеней свободы $k$.

В том случае, когда статистический ряд распределения сравнивается с теоретическим законом распределения, не содержащим неизвестных параметров, удобен критерий согласия Колмогорова. Для его применения находится наибольшее отклонение $D$ гипотетического $F(x)$ от статистического $F^*(x)$ интегральных законов распределения

$$D = \max |F(x) - F^*(x)|,$$

затем вычисляется величина $\lambda$

$$\lambda = \sqrt{N} \cdot D.$$

По приложению 14 для распределения максимума отклонения эмпирической функции $F^*(x)$ от теоретической $F(x)$ находится вероятность $P(\lambda)$. Если значение $P(\lambda)$ велико ($P(\lambda) \geqslant 0{,}03 \div 0{,}05$), то гипотеза о совпадении теоретического закона распределения $F(x)$ с опытным $F^*(x)$ не опровергается; если же вероятность $P(\lambda)$ мала, то расхождение между ними следует признать не случайным и гипотезу отвергнуть.

Критерий Колмогорова может быть применен также для решения вопроса о том, принадлежат ли две выборки объемов $n_1$ и $n_2$ одной генеральной совокупности. При этом величина $D_{n_1, n_2}$ находится из выражения

$$D_{n_1, n_2} = \max |F_1^*(x) - F_2^*(x)|,$$

где $F_1^*(x)$ и $F_2^*(x)$ — статистические законы распределения, построенные для первой и второй выборок соответственно, а величина $\lambda$ — по формуле

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D_{n_1, n_2}.$$

Критерий $\chi^2$ позволяет также проверить гипотезу о независимости двух (или нескольких) признаков, характеризующих рассматриваемое явление.

В этом случае, исходя из гипотезы о независимости двух признаков $A$ и $B$, вычисляют теоретические частоты $m_{ij}$ числа случаев, когда наблюдаются оба признака совместно, по формуле

$$m_{ij} = \frac{h_{i0} h_{0j}}{n},$$

где $h_{i0}$ — наблюденное число случаев, характеризующих распределение по признаку $A$ при любых значениях признака $B$;

$h_{0j}$ — наблюденное число случаев, характеризующих распределение по признаку $B$ при любых значениях признака $A$;

$n$ — общее число случаев

$$n = \sum_{i=1}^{m} h_{i0} = \sum_{j=1}^{l} h_{0j}$$

($m$ и $l$ — число интервалов (групп) по признакам $A$ и $B$ соответственно). При этом число степеней свободы вычисляется по формуле

$$k = (m - 1)(l - 1).$$

В тех случаях, когда опытное распределение не согласуется с законом нормального распределения, иногда удается получить удовлетворительное согласие с законом распределения, который определяется $A$-рядом Шарлье

$$F(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) - \frac{\mathrm{Sk}}{6}\varphi_2(z) + \frac{\mathrm{Ex}}{24}\varphi_3(z),$$

где $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ — производные 2 и 3-го порядка от дифференциального закона нормального распределения;

$z = \dfrac{x - M[x]}{\sigma}$;

$\mathrm{Sk} = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ — асимметрия;

$\mathrm{Ex} = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ — эксцесс;

$\mu_3$, $\mu_4$ — центральные моменты 3 и 4-го порядков соответственно;

$\sigma$ — среднее квадратическое отклонение величины $x$.

Функции $\Phi(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ приведены в 4 и 7 приложениях.

Для этой же цели может быть использован и ряд Эджворта, отличающийся от $A$-ряда Шарлье членами более высокого порядка малости.

## Решение типовых задач

Пример 33.1. Радиоактивное вещество наблюдалось в течение 2608 равных промежутков времени (по 7,5 сек. каждый). Для каждого из этих интервалов регистрировалось число частиц, попавших в счетчик. В табл. 38 приведены числа $N_m$ промежутков времени, в течение которых в счетчик попало ровно $m$ частиц.

*Таблица 38*

| $m$ | $N_m$ | $m$ | $N_m$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 57 | 6 | 273 |
| 1 | 203 | 7 | 139 |
| 2 | 383 | 8 | 45 |
| 3 | 525 | 9 | 27 |
| 4 | 532 | 10 и более | 16 |
| 5 | 408 | Итого | $N = \sum N_m = 2608$ |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, гипотезу о согласии наблюденных данных с законом распределения Пуассона

$$P(m, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}.$$

*Решение.* На основании наблюденных данных вычисляем подходящее значение $\tilde{\lambda}$ параметра $\lambda$ гипотетического закона распределения Пуассона по формуле

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} mN_m}{N},$$

где $N = \sum\limits_{m=0}^{\infty} N_m = 2608$; $\tilde{\lambda} = 3{,}870$.

Вычисляем теоретические вероятности $p_m$ попадания в счетчик $m$ частиц при наличии закона Пуассона, используя приложение 3 для функции $P(m, \lambda) = p_m$. В результате интерполирования по $\lambda$ между $\lambda = 3$ и $\lambda = 4$ получим значения $p_m$ и $Np_m$, приведенные в табл. 39.

*Таблица 39*

| $m$ | $p_m$ | $Np_m$ | $N_m - Np_m$ | $(N_m - Np_m)^2$ | $\frac{(N_m - Np_m)^2}{Np_m}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,021 | 54,8 | 2,2 | 4,84 | 0,088 |
| 1 | 0,081 | 211,2 | —8,2 | 67,24 | 0,318 |
| 2 | 0,156 | 406,8 | —23,8 | 566,44 | 1,392 |
| 3 | 0,201 | 524,2 | 0,8 | 0,64 | 0,001 |
| 4 | 0,195 | 508,6 | 23,4 | 547,56 | 1,077 |
| 5 | 0,151 | 393,8 | 14,2 | 201,64 | 0,512 |
| 6 | 0,097 | 253,0 | 20,0 | 400,00 | 1,581 |
| 7 | 0,054 | 140,8 | —1,8 | 3,24 | 0,023 |
| 8 | 0,026 | 67,8 | —22,8 | 519,84 | 7,667 |
| 9 | 0,011 | 28,7 | —1,7 | 2,89 | 0,101 |
| 10 | 0,007 | 18,3 | —2,3 | 5,29 | 0,289 |
| | 1,000 | | | $\chi_q = 13{,}049$ | |

Вычисляем значение $\chi_q^2$

$$\chi_q^2 = \sum_{m=0}^{10} \frac{(N_m - Np_m)^2}{Np_m}.$$

Подробно вычисления приведены в табл. 39.

Получаем $\chi_q^2 = 13{,}05$.

Так как число степеней свободы $k = n - c - 1$, где общее число интервалов $n = 11$, а число параметров, определенных на основании наблюденных данных, $c = 1$ (параметр $\tilde{\lambda}$), то

$$k = 11 - 1 - 1 = 9.$$

По приложению 11, входя в таблицу с величинами $k = 9$ и $\chi_q^2 = 13{,}05$, находим вероятность $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right)$ того, что величина $\chi^2$ превзойдет значение $\chi_q^2$.

Получаем

$$P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}166.$$

Значение $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right)$ достаточно велико и, следовательно, можно считать, что гипотеза о согласии наблюденных данных с законом распределения Пуассона не опровергается. Подобным же образом производится проверка согласия наблюденных данных с гипотетическим законом распределения в задачах: 33. 1, 33. 2, 33. 3, 33. 10, 33. 15, 33. 20 (с законом нормального распределения), 33. 5, 33. 7, 33. 9 (с законом равномерного распределения), 33. 11, 33. 12 (с законом распределения Пуассона); 33. 10 (с законом распределения Симпсона); 33. 18 (с законом распределения Рэлея); 33. 15 (с законом распределения Максвелла); 33. 13, 33. 14 (с биномиальным законом распределения); 33. 19 (с законом распределения абсолютного значения нормально распределенной величины); 33. 20 (с композицией законов нормального и равномерного распределения); 33. 23 (с законом распределения $\chi^2$).

Пример 33. 2. Результаты измерения 1000 деталей разбиты на 10 групп, как указано в табл. 40.

Проверить, пользуясь критерием Колмогорова, гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения, имеющим параметры: $M[x] = 100$ *мм*, $\sigma = 1$ *мм*.

*Таблица 40*

| Границы интервалов, *мм* | Численности разрядов $m_i$ | Границы интервалов, *мм* | Численности разрядов $m_i$ |
|---|---|---|---|
| Менее 98,0 | 21 | 100,0—100,5 | 201 |
| 98,0—98,5 | 47 | 100,5—101,0 | 142 |
| 98,5—99,0 | 87 | 101,0—101,5 | 97 |
| 99,0—99,5 | 158 | 101,5—102,0 | 41 |
| 99,5—100,0 | 181 | Более 102,0 | 25 |

*Решение.* Для теоретического интегрального закона распределения $F(z)$ имеем

$$F(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа, значения которой приведены в приложении 4.

Значения ординат статистического интегрального закона распределения $F^*(z)$ вычисляются как нарастающая сумма частостей $p_i^*$

$$p_i^* = \frac{m_i}{N},$$

где $N = \sum m_i = 1000$; $z_i$ — координаты правых границ интервалов, взятых в единицах $\sigma$. Подробно вычисления приведены в табл. 41.

Составив для каждого значения $z_i$ разность

$$F^*(z_i) - F(z_i)$$

и выбрав ее наибольшее по абсолютной величине значение $D$ из табл. 41, находим $D = 0{,}0060$.

*Таблица 41*

| № интервалов | Границы интервалов $z_i$ | $0{,}5\Phi(z_i)$ | $F(z_i)$ | $p_i^*$ | $F^*(z_i)$ | $F^*(z_i) - F(z_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-\infty$ | —0,5000 | 0 | | 0 | 0 |
| 1 | | | | 0,021 | | |
| | —2,0 | —0,4772 | 0,0228 | | 0,0210 | —0,0018 |
| 2 | | | | 0,047 | | |
| | —1,5 | —0,4332 | 0,0668 | | 0,0680 | 0,0012 |
| 3 | | | | 0,087 | | |
| | —1,0 | —0,3413 | 0,1587 | | 0,1550 | —0,0037 |
| 4 | | | | 0,158 | | |
| | —0,5 | —0,1915 | 0,3085 | | 0,3130 | 0,0055 |
| 5 | | | | 0,181 | | |
| | 0 | 0 | 0,5000 | | 0,4940 | —0,0060 |
| 6 | | | | 0,201 | | |
| | 0,5 | 0,1915 | 0,6915 | | 0,6950 | 0,0035 |
| 7 | | | | 0,142 | | |
| | 1,0 | 0,3413 | 0,8413 | | 0,8370 | —0,0043 |
| 8 | | | | 0,097 | | |
| | 1,5 | 0,4332 | 0,9332 | | 0,9340 | 0,0008 |
| 9 | | | | 0,041 | | |
| | 2,0 | 0,4772 | 0,9772 | | 0,9750 | —0,0022 |
| 10 | | | | 0,025 | | |
| | $+\infty$ | 0,5000 | 1,0000 | | 1,0000 | |

Определяя

$$\lambda = \sqrt{ND} = \sqrt{1000} \cdot 0,0060 = 0,1897,$$

находим значение $P(\lambda)$ из приложения 14

$$P(\lambda) = 1,000.$$

Значение $P(\lambda)$ весьма велико и, следовательно, можно считать, что гипотеза о согласии наблюденных данных с законом нормального распределения, имеющим параметры $M[x] = 100$ и $\sigma = 1$, не опровергается.

Подобным образом производится проверка согласия наблюденных данных с гипотетическим законом распределения в задачах: 33. 4 (с законом нормального распределения); 33. 6 и 33. 8 (с законом равномерного распределения); 33. 16 (с законом распределения Коши); 33. 17 (с законом распределения арксинуса); 33. 24 (с законом распределения Стьюдента). Исключительно высокая вероятность $P(\lambda) = 1,000$ заставляет усомниться в объективности использования опытных данных.

Пример 33. 3. Произведен выбор 200 деталей из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Проверяемый размер деталей измерен с точностью до 1 *мк*. В табл. 42 приведены отклонения от

*Таблица 42*

| № интервалов | Границы интервалов | $m_i$ | $p_i^*$ | № интервалов | Границы интервалов | $m_i$ | $p_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-20 \div -15$ | 7 | 0,035 | 6 | $5 \div 10$ | 41 | 0,205 |
| 2 | $-15 \div -10$ | 11 | 0,055 | 7 | $10 \div 15$ | 26 | 0,130 |
| 3 | $-10 \div -5$ | 15 | 0,075 | 8 | $15 \div 20$ | 17 | 0,085 |
| 4 | $-5 \div 0$ | 24 | 0,120 | 9 | $20 \div 25$ | 7 | 0,035 |
| 5 | $0 \div 5$ | 49 | 0,245 | 10 | $25 \div 30$ | 3 | 0,015 |

номинального размера, разбитые на интервалы по 5 *мк* в каждом, числа деталей $m_i$, попадающих в указанные интервалы, и их частости

$$p_i^* = \frac{m}{N},$$

где $N = \sum m_i = 200$.

Проверка согласия наблюденных данных с законом нормального распределения при помощи критерия $\chi^2$ дала следующие результаты (см. задачу 33. 1):

$$P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,301.$$

Требуется подобрать закон распределения, пользуясь $A$-рядом Шарлье, и проверить, используя критерий $\chi^2$, улучшится ли согласие наблюденных данных с этим законом распределения по сравнению с нормальным законом распределения.

*Решение*. Определяем значения $x_i$ середин интервалов (см. табл. 43) и находим подходящие значения математического ожидания $\tilde{x}$,

*Таблица 43*

| $i$ | $x_i$ | $\overset{*}{p}_i x_i$ | $x_i - \tilde{x}$ | $(x_i - \tilde{x})^2$ | $(x_i - \tilde{x})^3$ | $(x_i - \tilde{x})^4$ | $\overset{*}{p}_i (x_i - \tilde{x})^2$ | $\overset{*}{p}_i (x_i - \tilde{x})^3$ | $\overset{*}{p}_i (x_i - \tilde{x})^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −17,5 | −0,6125 | −21,8 | 475,2 | −10 360 | 225 853 | 17,43 | −362,6 | 7904,9 |
| 2 | −12,5 | −0,6875 | −16,8 | 282,2 | −4742 | 79 659 | 15,52 | −260,8 | 4381,2 |
| 3 | −7,5 | −0,5675 | −11,8 | 139,2 | −1643 | 19 388 | 10,44 | −123,2 | 1454,1 |
| 4 | −2,5 | −0,3000 | −6,8 | 46,2 | −314 | 2 138 | 5,54 | −37,7 | 256,6 |
| 5 | 2,5 | −0,6125 | −1,8 | 3,2 | −6 | 10 | 0,78 | −1,5 | 2,4 |
| 6 | 7,5 | 1,5375 | 3,2 | 10,2 | 30 | 105 | 2,09 | 6,2 | 21,5 |
| 7 | 12,5 | 1,6250 | 8,2 | 67,2 | 551 | 4 125 | 8,74 | 71,6 | 587,7 |
| 8 | 17,5 | 1,4875 | 13,2 | 174,2 | 2 300 | 30 360 | 14,81 | 195,5 | 2580,6 |
| 9 | 22,5 | 0,7875 | 18,2 | 331,2 | 6 029 | 109 720 | 11,59 | 211,0 | 3840,2 |
| 10 | 27,5 | 0,4125 | 23,2 | 532,2 | 12 487 | 289 702 | 7,98 | 187,3 | 4345,5 |
| Итого: | | 4,295 | | | | | 94,92 | −114,2 | 25 375 |

дисперсии $\tilde{\sigma}^2$, третьего $\tilde{\mu}_3$ и четвертого $\tilde{\mu}_4$ центральных моментов для величины $X$ по формулам

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{10} \overset{*}{p}_i x_i;$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{10} \overset{*}{p}_i (x_i - \tilde{x})^2;$$

$$\tilde{\mu}_3 = \sum_{i=1}^{10} \overset{*}{p}_i (x_i - \tilde{x})^3;$$

$$\tilde{\mu}_4 = \sum_{i=1}^{10} \overset{*}{p}_i (x_i - \tilde{x})^4.$$

Подробно вычисления приведены в табл. 43. Получим: $\tilde{x} = 4{,}30$ *мк*; $\tilde{\sigma} = 9{,}71$ *мк*; $\tilde{\mu}_3 = -114{,}2$ *мк*$^3$; $\tilde{\mu}_4 = 25\,375$ *мк*$^4$. Вычисляем подходящие значения асимметрии $\widetilde{\mathrm{Sk}}$ и эксцесса $\widetilde{\mathrm{Ex}}$ по формулам

$$\widetilde{\mathrm{Sk}} = \frac{\tilde{\mu}_3}{\tilde{\sigma}^3} = -0{,}1247;$$

$$\widetilde{\mathrm{Ex}} = \frac{\tilde{\mu}_4}{\tilde{\sigma}^4} - 3 = -0{,}1455.$$

Используя первые три члена $A$-ряда Шарлье

$$F(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) - \frac{\mathrm{Sk}}{6}\varphi_2(z) + \frac{\mathrm{Ex}}{24}\varphi_3(z),$$

где

$$z = \frac{x - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}},$$

получим

$$F(z) = 0{,}5 + 0{,}5\,\Phi(z) + 0{,}0208\varphi_2(z) - 0{,}0061\varphi_3(z).$$

Вычисляем значения $F(z_i)$ ($z_i$ — координаты границ интервалов относительно $\tilde{x}$ в единицах $\tilde{\sigma}$); значения $z_i$ и дальнейшие вычисления $F(z_i)$ приведены в табл. 44.

Теоретические вероятности $p_i$ на основании закона распределения, определяемого $A$-рядом Шарлье

$$p_i = F(z_i) - F(z_{i-1}),$$

где $z_i$ — координата правой границы интервала $i$, выраженная в единицах $\tilde{\sigma}$.

Используя найденные значения $p_i$ для вычисления $\chi_q^2$ по формуле

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{10} \frac{(m_i - Np_i)^2}{Np_i},$$

где

$$N = \sum_{i=1}^{10} m_i = 200$$

(вычисления произведены в табл. 44), получаем $\chi_q^2 = 5{,}911$.

*Таблица 44*

| $i$ | $z_{i-1} \div z_i$ | $0{,}5\Phi(z_i)$ | $\varphi_2(z_i)$ | $\varphi_3(z_i)$ | $F(z_i)$ | $p_i$ | $np_i$ | $m_i - np_i$ | $\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-\infty \div$ $\div -1{,}99$ | $-0{,}5 \div$ $\div -0{,}4761$ | $0 \div 0{,}1630$ | $0 \div 0{,}1062$ | $0 \div 0{,}0267$ | 0,0267 | 5,34 | −1,66 | 0,516 |
| 2 | −1,47 | −4292 | 0,1572 | −0,1670 | 0751 | 0484 | 9,68 | −1,32 | 0,180 |
| 3 | −0,96 | −3315 | −0,0197 | −0,5021 | 1712 | 0961 | 19,22 | 4,22 | 0,926 |
| 4 | −0,44 | −1700 | −0,2920 | −0,4472 | 3266 | 1454 | 29,08 | 5,08 | 0,887 |
| 5 | 0,07 | 0279 | −0,3960 | 0,0834 | 5192 | 1926 | 38,52 | −10,48 | 2,852 |
| 6 | 0,59 | 2224 | −0,2185 | 0,5245 | 7147 | 1955 | 39,10 | −1,90 | 0,092 |
| 7 | 1,10 | 3643 | 0,0458 | 0,4290 | 8627 | 1480 | 29,60 | 3,60 | 0,438 |
| 8 | 1,62 | 4474 | 0,1745 | 0,0654 | 9506 | 0879 | 17,58 | 0,58 | 0,019 |
| 9 | 2,13 | 4834 | 0,1460 | −0,1351 | 0,9872 | 0336 | 7,32 | −0,12 | 0,001 |
| 10 | $2{,}13 \div \infty$ | 0,5000 | 0 | 0 | 1,0000 | 0,0128 | 2,56 | | |
| | | | | | | | | | $\chi_q^2 = 5{,}911$ |

Число степеней свободы $k = n - c - 1 = 4$, так как число классов $n = 9$ (последние два интервала вследствие их малочисленности объединяем в один); число параметров, определенных на основании наблюденных данных $c = 4\left(\tilde{x},\ \tilde{\sigma},\ \tilde{S}_x,\ \tilde{E}_x\right)$. По приложению 11, входя в таблицу с величинами $k = 4$ и $\chi_q^2 = 5{,}911$, находим

$$P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}208.$$

Гипотеза о согласии опытных данных с законом распределения $F(z)$, определяемым $A$-рядом Шарлье, не опровергается. Однако нет оснований утверждать, что согласование лучше, чем с законом нормального распределения, упомянутым в условии задачи.

Аналогичным образом решаются задачи 33. 21, 33. 22.

Пример 33. 4. Имеются две группы деталей одного образца, полученных с двух станков, по 60 штук в каждой. Данные об измерении характерного размера $x$ деталей приведены в табл. 45.

*Таблица 45*

| № детали | Размер $x$ | | № детали | Размер $x$ | | № детали | Размер $x$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I группа | II группа | | I группа | II группа | | I группа | II группа |
| 1 | 72,58 | 72,50 | 21 | 72,50 | 72,35 | 41 | 72,30 | 72,31 |
| 2 | 72,35 | 72,35 | 22 | 72,69 | 72,16 | 42 | 72,28 | 72,46 |
| 3 | 72,33 | 72,69 | 23 | 72,54 | 72,51 | 43 | 72,51 | 72,36 |
| 4 | 72,54 | 72,60 | 24 | 72,48 | 72,50 | 44 | 72,37 | 72,39 |
| 5 | 72,24 | 72,54 | 25 | 72,36 | 72,50 | 45 | 72,14 | 72,30 |
| 6 | 72,42 | 72,42 | 26 | 72,50 | 72,48 | 46 | 72,42 | 72,30 |
| 7 | 72,58 | 72,68 | 27 | 72,43 | 72,53 | 47 | 72,36 | 72,38 |
| 8 | 72,47 | 72,54 | 28 | 72,46 | 72,25 | 48 | 72,28 | 72,55 |
| 9 | 72,54 | 72,55 | 29 | 72,56 | 72,48 | 49 | 72,20 | 72,36 |
| 10 | 72,24 | 72,33 | 30 | 72,48 | 72,36 | 50 | 72,48 | 72,24 |
| 11 | 72,38 | 72,56 | 31 | 72,43 | 72,53 | 51 | 72,66 | 72,23 |
| 12 | 72,70 | 72,36 | 32 | 72,56 | 72,23 | 52 | 72,64 | 72,16 |
| 13 | 72,47 | 72,36 | 33 | 72,34 | 72,55 | 53 | 72,73 | 72,17 |
| 14 | 72,49 | 72,15 | 34 | 72,38 | 72,51 | 54 | 72,43 | 72,37 |
| 15 | 72,28 | 72,48 | 35 | 72,56 | 72,25 | 55 | 72,28 | 72,38 |
| 16 | 72,47 | 72,46 | 36 | 72,32 | 72,11 | 56 | 72,64 | 72,46 |
| 17 | 71,95 | 72,36 | 37 | 72,41 | 72,44 | 57 | 72,72 | 72,12 |
| 18 | 72,18 | 72,38 | 38 | 72,14 | 72,51 | 58 | 72,35 | 72,28 |
| 19 | 72,66 | 72,40 | 39 | 72,29 | 72,55 | 59 | 72,60 | 72,23 |
| 20 | 72,35 | 72,38 | 40 | 72,31 | 72,24 | 60 | 72,46 | 72,38 |

*Таблица 46*

| $x_i$ | Численности разрядов | | Накопленные численности разрядов | | $F_1^*(x_i)$ | $F_2^*(x_i)$ | $\lvert F_1^*(x_i)-F_2^*(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I группа | II группа | I группа | II группа | | | |
| 71,95 | 1 | — | 1 | 0 | 0,0167 | 0 | 0,0167 |
| 72,11 | — | 1 | 1 | 1 | 0,0167 | 0,0167 | 0,0000 |
| 72,12 | — | 1 | 1 | 2 | 0,0167 | 0,0333 | 0,0167 |
| 72,14 | 2 | — | 3 | 2 | 0,0500 | 0,0333 | 0,0167 |
| 72,15 | — | 1 | 3 | 3 | 0,0500 | 0,0500 | 0,0000 |
| 72,16 | — | 2 | 3 | 5 | 0,0500 | 0,0833 | 0,0333 |
| 72,17 | — | 1 | 3 | 6 | 0,0500 | 0,1000 | 0,0500 |
| 72,18 | 1 | — | 4 | 6 | 0,0667 | 0,1000 | 0,0333 |
| 72,20 | 1 | — | 5 | 6 | 0,0833 | 0,1000 | 0,0167 |
| 72,23 | — | 3 | 5 | 9 | 0,0833 | 0,1500 | 0,0667 |
| 72,24 | 2 | 2 | 7 | 11 | 0,1167 | 0,1833 | 0,0667 |
| 72,25 | — | 2 | 7 | 13 | 0,1167 | 0,2167 | 0,1000 |
| 72,28 | 4 | 1 | 11 | 14 | 0,1833 | 0,2333 | 0,0500 |

Продолжение

| $x_i$ | Численности разрядов | | Накопленные численности разрядов | | $F_1^*(x_i)$ | $F_2^*(x_i)$ | $\lvert F_1^*(x_i)-F_2^*(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I группа | II группа | I группа | II группа | | | |
| 72,29 | 1 | — | 12 | 14 | 0,2000 | 0,2333 | 0,0333 |
| 72,30 | 1 | 2 | 13 | 16 | 0,2167 | 0,2667 | 0,0500 |
| 72,31 | 1 | 1 | 14 | 17 | 0,2333 | 0,2833 | 0,0500 |
| 72,32 | 1 | — | 15 | 17 | 0,2500 | 0,2833 | 0,0333 |
| 72,33 | 1 | 1 | 16 | 18 | 0,2667 | 0,3000 | 0,0333 |
| 72,34 | 1 | — | 17 | 18 | 0,2833 | 0,3000 | 0,0167 |
| 72,35 | 3 | 2 | 20 | 20 | 0,3333 | 0,3333 | 0,0000 |
| 72,36 | 2 | 6 | 22 | 26 | 0,3667 | 0,4333 | 0,0667 |
| 72,37 | 1 | 1 | 23 | 27 | 0,3833 | 0,4500 | 0,0667 |
| 72,38 | 2 | 5 | 25 | 32 | 0,4167 | 0,5333 | 0,1167 |
| 72,39 | — | 1 | 25 | 33 | 0,4167 | 0,5500 | 0,1333 |
| 72,40 | — | 1 | 25 | 34 | 0,4167 | 0,5667 | 0,1500 |
| 72,41 | 1 | — | 26 | 34 | 0,4333 | 0,5667 | 0,1333 |
| 72,42 | 2 | 1 | 28 | 35 | 0,4667 | 0,5833 | 0,1167 |
| 72,43 | 3 | — | 31 | 35 | 0,5167 | 0,5833 | 0,0667 |
| 72,44 | — | 1 | 31 | 36 | 0,5167 | 0,6000 | 0,0833 |
| 72,46 | 2 | 3 | 33 | 39 | 0,5500 | 0,6500 | 0,1000 |
| 72,47 | 3 | — | 36 | 39 | 0,6000 | 0,6500 | 0,0500 |
| 72,48 | 3 | 3 | 39 | 42 | 0,6500 | 0,7000 | 0,0500 |
| 72,49 | 1 | — | 40 | 42 | 0,6667 | 0,7000 | 0,0333 |
| 72,50 | 2 | 3 | 42 | 45 | 0,7000 | 0,7500 | 0,0500 |
| 72,51 | 1 | 3 | 43 | 48 | 0,7167 | 0,8000 | 0,0833 |
| 72,53 | — | 2 | 43 | 50 | 0,7167 | 0,8333 | 0,1167 |
| 72,54 | 3 | 2 | 46 | 52 | 0,7667 | 0,8667 | 0,1000 |
| 72,55 | — | 4 | 46 | 56 | 0,7667 | 0,9333 | 0,1667 |
| 72,56 | 3 | 1 | 49 | 57 | 0,8167 | 0,9500 | 0,1333 |
| 72,58 | 2 | — | 51 | 57 | 0,8500 | 0,9500 | 0,1000 |
| 72,60 | 1 | 1 | 52 | 58 | 0,8667 | 0,9667 | 0,1000 |
| 72,64 | 2 | — | 54 | 58 | 0,9000 | 0,9667 | 0,0667 |
| 72,66 | 2 | — | 56 | 58 | 0,9333 | 0,9667 | 0,0333 |
| 72,68 | — | 1 | 56 | 59 | 0,9333 | 0,9833 | 0,0500 |
| 72,69 | 1 | 1 | 57 | 60 | 0,9500 | 0,0000 | 0,0500 |
| 72,70 | 1 | — | 58 | 60 | 0,9667 | 1,0000 | 0,0333 |
| 72,72 | 1 | — | 59 | 60 | 0,9833 | 1,0000 | 0,0167 |
| 72,73 | 1 | — | 60 | 60 | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 |
| | 60 | 60 | | | | | |

Проверить, используя критерий Колмогорова, гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности, т. е., что оба станка дают одинаковое распределение размера $x$ детали.

*Решение.* Располагаем детали в группах по возрастающей величине размера $x$ и вычисляем статистические интегральные законы распределения $F_1^*(x)$ и $F_2^*(x)$ для каждой из групп (см. табл. 46).

Находим наибольшее по абсолютной величине значение $D_{n_1,\, n_2}$ разности $F_1^*(x) - F_2^*(x)$:

$$D_{n_1,\, n_2} = 0{,}1667 \text{ (см. табл. 46).}$$

Определив

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\, D_{n_1,\, n_2},$$

где в нашем случае $n_1 = n_2 = 60$, получим $\lambda = 0{,}9130$. Пользуясь приложением 14 для найденного значения $\lambda$, будем иметь $P(\lambda) = 0{,}375$.

Значение $P(\lambda)$ велико, следовательно, гипотеза о том, что обе выборки принадлежат одной генеральной совокупности, не опровергается.

Пример 33. 5. Было измерено $n = 600$ деталей, причем для каждой из них проверялись размеры $A$ и $B$. Результаты измерений приведены в табл. 47, где через $h_{ij}$ обозначено число деталей, распределенных

*Таблица 47*

| $A_i$ \ $B_j$ | Заниженные $j = 1$ | В пределах допусков $j = 2$ | Завышенные $j = 3$ | $h_{io}$ |
|---|---|---|---|---|
| Заниженные $i = 1$ | 6 | 48 | 8 | 62 |
| В пределах допусков $i = 2$ | 52 | 402 | 36 | 490 |
| Завышенные $i = 3$ | 6 | 38 | 4 | 48 |
| $h_{oj}$ | 64 | 488 | 48 | 600 |

по признакам $A$ и $B$; для признака $A$: $i = 1$, если размер занижен; $i = 2$, если размер в пределах допусков; $i = 3$, если размер завышен; для признака $B$: $j = 1, 2, 3$, если размер занижен, в пределах допусков или завышен соответственно.

Проверить, используя критерий $\chi^2$, являются ли независимыми отклонения размеров $A$ и $B$ детали от допустимых.

*Решение.* Находим подходящие значения $m_{ij}$ математических ожиданий чисел наблюдений, имеющих признаки $A_i$ и $B_j$, исходя из гипотезы о независимости отклонений размеров $A$ и $B$ детали от допустимых,

$$m_{ij} = \frac{h_{oi} h_{oj}}{n}.$$

Значения $m_{ij}$ приведены в табл. 48.

Вычисляем $\chi_q^2$ по формуле

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{(h_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}.$$

Вычисления приведены в табл. 49, где даны значения $\frac{(h_{ij}-m_{ij})^2}{m_{ij}}$. Получаем $\chi_q^2 = 2{,}519$. Определяем число степеней свободы

$$k = (m-1)(l-1),$$

где $m$ — число групп по признаку $A$;
$l$ — » » » » $B$;

$m = 3$, $n = 3$, $k = 4$. Используя приложение 11 при $k = 4$ и $\chi_q^2 = 2{,}519$, находим

$$P(\chi^2 \geqslant \chi_q^2) = 0{,}672.$$

*Таблица 48*

| $i \diagdown j$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 6,61 | 50,43 | 4,96 |
| 2 | 52,26 | 398,57 | 39,20 |
| 3 | 5,12 | 39,06 | 3,86 |

Значение $P(\chi^2 \geqslant \chi_q^2)$ велико, следовательно, гипотеза о независимости отклонений размеров детали по признакам $A$ и $B$ от допустимых не опровергается.

Задача на проверку гипотезы о согласии наблюденных данных с выбранным законом распределения по двум характерным признакам приведена под номером 33. 25 в задачах для упражнений.

*Таблица 49*

| $i \diagdown j$ | 1 | 2 | 3 | $\sum_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0563 | 0,1171 | 1,8632 | 2,0366 |
| 2 | 0,0013 | 0,0295 | 0,2612 | 0,2920 |
| 3 | 0,1513 | 0,0316 | 0,0077 | 0,1906 |
| $\sum_i$ | 0,2089 | 0,1782 | 2,1321 | $\sum_{i,j} = \chi_q^2 = 2{,}5192$ |

## Задачи для упражнений

33. 1. Произведен выбор 200 деталей из текущей продукции прецизионного токарного автомата. Проверяемый размер деталей измерен

*Таблица 50*

| № интервалов | Границы интервалов | $m_i$ | $\overset{*}{p}_i$ | № интервалов | Границы интервалов | $m_i$ | $\overset{*}{p}_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-20 \div -15$ | 7 | 0,035 | 6 | $5 \div 10$ | 41 | 0,205 |
| 2 | $-15 \div -10$ | 11 | 0,055 | 7 | $10 \div 15$ | 26 | 0,130 |
| 3 | $-10 \div -5$ | 15 | 0,075 | 8 | $15 \div 20$ | 17 | 0,085 |
| 4 | $-5 \div 0$ | 24 | 0,120 | 9 | $20 \div 25$ | 7 | 0,035 |
| 5 | $0 \div 5$ | 49 | 0,245 | 10 | $25 \div 30$ | 3 | 0,015 |

с точностью до 1 *мк*. В табл. 50 приведены отклонения от номинального размера, разбитые на интервалы по 5 *мк* в каждом, численности разрядов $m_i$ указанных величин отклонений и их частости $p_i^*$.

Оценить с помощью критерия $\chi^2$ гипотезу о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения.

33. 2. В табл. 51 приведены отклонения диаметра валиков, обработанных на станке, от заданного размера.

*Таблица 51*

| Интервалы, *мк* | 0—5 | 5—10 | 10—15 | 15—20 | 20—25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Численности разрядов $m_i$ | 15 | 75 | 100 | 50 | 20 |
| Частости $p_i^*$ | 0,06 | 0,30 | 0,40 | 0,20 | 0,04 |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения.

33. 3. Образовано 250 чисел $x$, каждое из которых представляет собой сумму цифр пятизначного числа, выбранного из таблицы случайных чисел. Полученные суммы разбиты на 15 интервалов в соответствии с табл. 52.

*Таблица 52*

| Границы интервала | $m_i$ | Границы интервала | $m_i$ | Границы интервала | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0—3 | 0 | 15—18 | 28,5 | 30—33 | 27,0 |
| 3—6 | 0,5 | 18—21 | 39,0 | 33—36 | 7,5 |
| 6—9 | 1,5 | 21—24 | 41,0 | 36—39 | 1,0 |
| 9—12 | 10,0 | 24—27 | 45,0 | 39—42 | 1,0 |
| 12—15 | 17,5 | 27—30 | 30,5 | 42—45 | 0 |

Суммы, кратные трем, условно отнесены к обоим граничащим интервалам, к каждому из которых отнесена половина числа этих сумм. Установить, используя критерий $\chi^2$, согласуется ли приведенное статистическое распределение с законом нормального распределения, за параметры которого принять подходящие значения математического ожидания и дисперсии, определенные по наблюденным данным.

33. 4. Решить предыдущую задачу, применяя критерий Колмогорова. Для установления гипотетического закона нормального распределения использовать то обстоятельство, что отдельные цифры в пятизначном случайном числе могут встретиться с равной вероятностью $p = 0{,}10$; на этом основании вычислить математическое ожидание и дисперсию суммы пяти случайных цифр.

33. 5. Цифры 0, 1, 2, ..., 9 среди 800 первых десятичных знаков числа $\pi$ появлялись 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 раз соответственно. Проверить с помощью критерия $\chi^2$ гипотезу о согласии этих данных с законом равномерного распределения.

33. 6. Решить предыдущую задачу, используя критерий Колмогорова, считая, что вероятность появления каждой цифры среди первых 800 десятичных знаков числа $\pi$ равна 0,10.

33. 7. Из таблицы случайных чисел выбрано 150 двузначных чисел (в совокупность двузначных чисел включается и 00). Результаты выборки приведены в табл. 53.

*Таблица 53*

| Границы интервалов | Численности разрядов $m_i$ | Частости $p_i^*$ | Границы интервалов | Численности разрядов $m_i$ | Частости $p_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0—9 | 16 | 0,107 | 50—59 | 19 | 0,127 |
| 10—19 | 15 | 0,100 | 60—69 | 14 | 0,093 |
| 20—29 | 19 | 0,127 | 70—79 | 11 | 0,073 |
| 30—39 | 13 | 0,087 | 80—89 | 13 | 0,087 |
| 40—49 | 14 | 0,093 | 90—99 | 16 | 0,107 |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, гипотезу о согласии наблюдений с законом равномерного распределения.

33. 8. Решить предыдущую задачу, применяя критерий Колмогорова.

33. 9. Отсчет по шкале измерительного прибора оценивается приблизительно в долях деления шкалы. Теоретически любое значение последней цифры равновероятно, но в ряде случаев производящий отсчет отдает предпочтение одним цифрам перед другими. В табл. 54 приведено

*Таблица 54*

| Цифра $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 35 | 16 | 15 | 17 | 17 | 19 | 11 | 16 | 30 | 24 |

200 результатов отсчета последней цифры между соседними делениями шкалы. Установить, используя критерий $\chi^2$, имеется ли систематическая ошибка в отсчете, т. е. отдается ли предпочтение при округлении некоторым цифрам перед другими. В противном случае наблюдения должны согласовываться с законом равномерного распределения, при котором вероятность появления любой цифры $p_i = 0,10$.

*Таблица 55*

| $x_i$, °C | $m_i$ | $x_i$, °C | $m_i$ |
|---|---|---|---|
| $-40 \div -30$ | 5 | $10 \div 20$ | 81 |
| $-30 \div -20$ | 11 | $20 \div 30$ | 36 |
| $-20 \div -10$ | 25 | $30 \div 40$ | 20 |
| $-10 \div 0$ | 42 | $40 \div 50$ | 8 |
| $0 \div 10$ | 88 | $50 \div 60$ | 4 |

33. 10. Результаты наблюдений за среднесуточной температурой воздуха в течение 320 суток приведены в табл. 55.

Проверить с помощью критерия $\chi^2$ согласие наблюдений с законом нормального распределения и с законом распределения Симпсона (законом треугольника), параметры которых определить на основании опытных данных.

33. 11. В табл. 56 приведены числа $N_m$ участков равной площади (0,25 $км^2$) южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по $m$ попаданий самолетов-снарядов во время второй мировой войны. Проверить с помощью критерия $\chi^2$ согласие опытных данных с законом распределения Пуассона

$$P(m, \lambda) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

*Таблица 56*

| $m$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 и более | Итого |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_m$ | 229 | 211 | 93 | 35 | 7 | 1 | $N=\sum N_m=576$ |

33. 12. Через равные промежутки времени в тонком слое раствора золота регистрировалось число частиц золота, попадавших в поле зрения микроскопа. Результаты наблюдений приведены в табл. 57

*Таблица 57*

| Число частиц $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Итого |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 112 | 168 | 130 | 68 | 32 | 5 | 1 | 1 | $\sum m_i=518$ |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, согласие с законом распределения Пуассона.

33. 13. По каждой из 100 мишеней произведено из спортивного пистолета по 10 выстрелов, причем фиксировались только попадания и промахи. Результаты стрельб приведены в табл. 58.

*Таблица 58*

| Число попаданий | $m_i$ | Число попаданий | $m_i$ | Число попаданий | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 22 | 8 | 4 |
| 1 | 2 | 5 | 26 | 9 | 2 |
| 2 | 4 | 6 | 18 | 10 | 0 |
| 3 | 10 | 7 | 12 | | |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, имелась ли при каждой из этих стрельб одинаковая вероятность попадания на 1 выстрел, иными словами, подчиняются ли результаты стрельбы биномиальному закону распределения.

33. 14. Семь монет подбрасывались одновременно 1536 раз, причем каждый раз отмечалось число $X$ выпавших гербов. В табл. 59 приведены числа $m_i$ случаев, когда число выпавших гербов было равно $X_i$.

*Таблица 59*

| $X_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_i$ | 12 | 78 | 270 | 456 | 386 | 252 | 69 | 13 |

Пользуясь критерием $\chi^2$, проверить согласие гипотезы о наличии биномиального закона распределения с опытными данными. Учесть, что вероятность выпадения герба при бросании каждой из монет равна $\frac{1}{2}$.

33. 15. Произведено 228 измерений $x_k$ чувствительности телевизора (в микровольтах). Результаты измерений приведены в табл. 60. Проверить

*Таблица 60*

| $x_k$ | $m_k$ | $x_k$ | $m_k$ | $x_k$ | $m_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 1 | 450 | 33 | 700 | 13 |
| 250 | 2 | 500 | 34 | 750 | 8 |
| 300 | 11 | 550 | 31 | 800 | 3 |
| 350 | 20 | 600 | 25 | | |
| 400 | 28 | 650 | 19 | | |

при помощи критерия $\chi^2$ гипотезы о согласии результатов измерений с законом нормального распределения и с законом распределения Максвелла. Параметры этих законов распределения вычислить на основании опытных данных. Учесть, что для закона распределения Максвелла

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} e^{-\frac{x^2}{2a^2}},$$

причем математическое ожидание $M[x]$ величины $x$ связано с $a$ формулой $M[x] = 1{,}596a$. За значение $x = 0$ для построения теоретического закона распределения Максвелла следует принять $x_0$ — наименьшее наблюденное значение величины $x$.

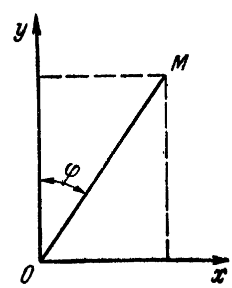

Рис. 35.

33. 16. Положение точки $M$ на плоскости определяется прямоугольными координатами $x$ и $y$, причем на опыте замерялись абсцисса $x$ и угол $\varphi$, составляемый радиусом-вектором точки $M$ с осью $y$ (рис. 35). Распределение величины $\varphi$ по результатам 1000 измерений приведено в табл. 61.

*Таблица 61*

| $\varphi_i$, град. | $m_i$ | $\varphi_i$, град. | $m_i$ | $\varphi_i$, град. | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-90 \div -75$ | 155 | $-30 \div -15$ | 49 | $30 \div 45$ | 67 |
| $-75 \div -60$ | 118 | $-15 \div 0$ | 48 | $45 \div 60$ | 66 |
| $-60 \div -45$ | 73 | $0 \div 15$ | 48 | $60 \div 75$ | 111 |
| $-45 \div -30$ | 59 | $15 \div 30$ | 53 | $75 \div 90$ | 153 |

Величина $x$ подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием равным нулю и с дисперсией равной $\sigma^2$. Проверить, используя критерий Колмогорова, можно ли считать случайную величину $y$ независимой от $x$ и подчиненной закону нормального распределения с математическим ожиданием равным нулю и с дисперсией $\sigma_y^2 = \frac{1}{4}\sigma^2$. Учесть, что в случае справедливости такого предположения величина $z = \operatorname{tg}\varphi$ должна подчиняться закону распределения Коши (закону распределения арктангенса)

$$f(z) = \frac{2}{\pi(z^2 + 4)}.$$

33. 17. Для проверки точности хода специальных маятниковых часов фиксировались в наудачу выбранные моменты времени углы отклонения оси маятника от вертикали $\alpha_i$. Амплитуда колебаний поддерживалась постоянной и равной $a = 15°$. Результаты 1000 таких измерений приведены в табл. 62.

*Таблица 62*

| Интервалы углов $\alpha_i$, град. | $m_i$ | Интервалы углов $\alpha_i$, град. | $m_i$ |
|---|---|---|---|
| $-15 \div -12$ | 188 | $0 \div 3$ | 74 |
| $-12 \div -9$ | 88 | $3 \div 6$ | 76 |
| $-9 \div -6$ | 64 | $6 \div 9$ | 81 |
| $-6 \div -3$ | 86 | $9 \div 12$ | 100 |
| $-3 \div 0$ | 62 | $12 \div 15$ | 181 |

Если маятник совершает гармонические колебания, углы $\alpha_i$ должны подчиняться закону распределения арксинуса

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}.$$

Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о согласии наблюдений с законом распределения арксинуса.

33. 18. С помощью контрольного прибора было измерено отстояние $r$ (в микронах) центра тяжести детали от оси ее наружной цилиндрической поверхности для 600 деталей. Результаты измерений представлены в табл. 63.

*Таблица 63*

| Интервалы значений $r_i$ | $m_i$ | Интервалы значений $r_i$ | $m_i$ |
|---|---|---|---|
| 0—16 | 40 | 80— 96 | 45 |
| 16—32 | 129 | 96—112 | 19 |
| 32—48 | 140 | 112—128 | 8 |
| 48—64 | 126 | 128—144 | 3 |
| 64—80 | 91 | 144—160 | 1 |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, согласуются ли наблюденные данные с законом распределения Рэлея (законом эксцентриситета)

$$f(r) = \frac{1}{a^2} r e^{-\frac{r^2}{2a^2}},$$

для которого математическое ожидание $M[r]$ и дисперсия $D(r)$ вычисляются по формулам

$$M[r] = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad D(r) = a^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Параметр $a^2$ для закона распределения Рэлея следует определить по опытным данным.

33. 19. По данным каталога Воронцова—Вельяминова распределение расстояний до планетарных туманностей представлено в табл. 64, где

Таблица 64

| $X_i$ | $m_i$ | $X_i$ | $m_i$ | $X_i$ | $m_i$ | $X_i$ | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—0,5 | 9 | 3,0—3,5 | 12 | 6,0—6,5 | 3 | 9,0— 9,5 | 2 |
| 0,5—1,0 | 11 | 3,5—4,0 | 7 | 6,5—7,0 | 2 | 9,5—10,0 | 0 |
| 1,0—1,5 | 8 | 4,0—4,5 | 10 | 7,0—7,5 | 1 | 10,0—10,5 | 0 |
| 1,5—2,0 | 12 | 4,5—5,0 | 8 | 7,5—8,0 | 0 | | |
| 2,0—2,5 | 13 | 5,0—5,5 | 5 | 8,0—8,5 | 0 | $n=\sum_{i=1}^{21} m_i = 118$ | |
| 2,5—3,0 | 16 | 5,5—6,0 | 0 | 8,5—9,0 | 0 | | |

$X_i$ — расстояние (в килопарсеках) до туманности, а $m_i$ — число случаев (численность разряда).

Предполагая, что $X_i$ есть абсолютное значение нормально распределенной величины, найти параметры этого закона распределения и проверить, используя критерий $\chi^2$, гипотезу о согласии наблюденных данных с этим законом распределения. Учесть, что интегральный закон распределения $F(|x|)$ случайной величины $|X|$ имеет вид

$$F(|x|)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{x+\bar{x}}{\sigma}\right)\right],$$

где $\bar{x}$ и $\sigma$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины $X$, подчиненной закону нормального распределения, которые связаны с математическим ожиданием $M[|X|]$ и начальным моментом 2-го порядка $m_2$ абсолютной величины $|X|$ формулами

$$\sigma=\sqrt{\frac{m_2}{1+k^2}},\quad \bar{x}=k\sqrt{\frac{m_2}{1+k^2}}.$$

Здесь величина $k$ представляет собой корень уравнения

$$\frac{2[\varphi(k)+0{,}5k\Phi(k)]}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{M[|x_i|]}{\sqrt{m_2}},$$

где $\varphi(k)$ и $\Phi(k)$ определяются по приложениям 4 и 6.

33. 20. В табл. 65 приведены результаты измерения $x_i$ некоторой величины.

Таблица 65

| Интервал $x_i$ | $m_i$ | Интервал $x_i$ | $m_i$ | Интервал $x_i$ | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 75—77 | 2 | 85—87 | 32 | 95—97 | 8 |
| 77—79 | 4 | 87—89 | 24 | 97—99 | 3 |
| 79—81 | 12 | 89—91 | 23 | 99—101 | 1 |
| 81—83 | 24 | 91—93 | 22 | | |
| 83—85 | 25 | 93—95 | 20 | $N=\sum_{i=1}^{13} m_i=200$ | |

Проверить, используя критерий $\chi^2$, согласие опытных данных с законом нормального распределения и с композицией законов нормального и равномерного распределений, параметры которых следует определить на основании результатов измерений.

Учесть, что для случайной величины $X = Y + Z$, где $Y$ подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием равным нулю и с дисперсией $\sigma^2$, а $Z$ — закону равномерного распределения, в интервале $(\alpha, \beta)$, дифференциальный закон распределения $\psi(x)$ выражается формулой

$$\psi(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}\left[\Phi\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x-\beta}{\sigma}\right)\right].$$

Для определения подходящих значений параметров $\sigma$, $\alpha$, $\beta$, входящих в формулу для $\psi(x)$, необходимо на основании опытных данных определить подходящие значения математического ожидания $\tilde{x}$ и центральных моментов II и IV порядков $\tilde{\mu}_2$ и $\tilde{\mu}_4$, после чего подходящие значения величин $\sigma$, $\alpha$, $\beta$ определяются из уравнений

$$\tilde{\sigma}^2 = \tilde{\mu}_2' - \sqrt{\frac{5}{2}\tilde{\mu}_2^2 - \frac{5}{6}\tilde{\mu}_4};$$

$$\frac{(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})^2}{12} = \sqrt{\frac{5}{2}\tilde{\mu}_2^2 - \frac{5}{6}\tilde{\mu}_4};$$

$$\frac{\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}}{2} = \tilde{x}.$$

33. 21. Произведено 300 измерений $x$ некоторой величины, результаты которых приведены в табл. 66. Проверить, используя критерий $\chi^2$, согла-

*Таблица 66*

| Интервал $x_i$ | $m_i$ | Интервал $x_i$ | $m_i$ | Интервал $x_i$ | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50—60 | 1 | 100—110 | 56 | 150—160 | 16 |
| 60—70 | 2 | 110—120 | 61 | 160—170 | 4 |
| 70—80 | 9 | 120—130 | 49 | 170—180 | 2 |
| 80—90 | 23 | 130—140 | 25 | | |
| 90—100 | 33 | 140—150 | 19 | | |

сие опытных данных с законом нормального распределения, подходящие значения параметров которого подобрать на основании опытных данных. Сгладить опытные данные с помощью закона распределения, который определяется $A$-рядом Шарлье, и проверить с помощью критерия $\chi^2$ согласие опытных данных с полученным законом распределения.

33. 22. Измерения скорости света $c$, произведенные Майкельсоном, Пизом и Пирсоном, дали результаты, приведенные в табл. 67. Для сокращения записи первые три цифры значений $c_i$ (в *км/сек*) в таблице опущены (299 000).

*Таблица 67*

| Интервал $c_i$ | $m_i$ | Интервал $c_i$ | $m_i$ | Интервал $c_i$ | $m_i$ | Интервал $c_i$ | $m_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 735—740 | 3 | 755—760 | 17 | 775—780 | 40 | 795—800 | 5 |
| 740—745 | 7 | 760—765 | 23 | 780—785 | 17 | 800—805 | 2 |
| 745—750 | 4 | 765—770 | 29 | 785—790 | 16 | 805—810 | 3 |
| 750—755 | 8 | 770—775 | 45 | 790—795 | 10 | 810—815 | 4 |

Получены следующие подходящие значения математического ожидания $\tilde{c}$ и среднего квадратического отклонения $\tilde{\sigma}$, вычисленные по опытным данным:

$$\tilde{c} = 299773{,}85 \textit{ км/сек}; \quad \tilde{\sigma} = 14{,}7 \textit{ км/сек}.$$

Проверка на основании критерия $\chi^2$ гипотезы о согласии опытных данных с законом нормального распределения, имеющим параметры $\tilde{c}$ и $\tilde{\sigma}$, дала значение $\chi_q^2 = \chi_{q\,\text{н}}^2 = 18{,}52$; число степеней свободы в этом случае равно $k_\text{н} = 9$, что дает $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_{q\,\text{н}}^2\right) = 0{,}018$ (малочисленные интервалы объединялись). Гипотезу следует считать опровергнутой.

Сгладить наблюдения с помощью закона распределения, который определяется $A$-рядом Шарлье, и проверить, используя критерий $\chi^2$, согласие опытных данных с полученным законом распределения.

33. 23. Для проверки стабильности работы станка через каждый час производится проба, состоящая в том, что измеряется 20 случайно отобранных деталей и по результатам измерений в каждой $i$-той выборке вычисляется несмещенная оценка дисперсии $\tilde{\sigma}_i^2$. Значения $\tilde{\sigma}_i^2$ по 47 таким выборкам приведены в табл. 68. Проверить, используя критерий $\chi^2$, гипотезу

*Таблица 68*

| $i$ | $\tilde{\sigma}_i^2$ | $i$ | $\tilde{\sigma}_i^2$ | $i$ | $\tilde{\sigma}_i^2$ | $i$ | $\tilde{\sigma}_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1225 | 13 | 0,1444 | 25 | 0,1681 | 37 | 0,1089 |
| 2 | 1444 | 14 | 1600 | 26 | 1369 | 38 | 1089 |
| 3 | 1296 | 15 | 1521 | 27 | 1681 | 39 | 0784 |
| 4 | 1024 | 16 | 1444 | 28 | 0676 | 40 | 1369 |
| 5 | 1369 | 17 | 1024 | 29 | 1024 | 41 | 0729 |
| 6 | 0961 | 18 | 0961 | 30 | 1369 | 42 | 1089 |
| 7 | 1296 | 19 | 1156 | 31 | 0576 | 43 | 0784 |
| 8 | 1156 | 20 | 1024 | 32 | 1024 | 44 | 5121 |
| 9 | 1764 | 21 | 1521 | 33 | 0841 | 45 | 1600 |
| 10 | 0900 | 22 | 1024 | 34 | 1521 | 46 | 1681 |
| 11 | 1225 | 23 | 1600 | 35 | 0676 | 47 | 0,1089 |
| 12 | 0,1156 | 24 | 0,1296 | 36 | 0,1225 | | |

об однородности ряда дисперсий, или, иными словами, предположение об отсутствии разладки станка в смысле изменения рассеивания по измеряемому размеру детали. Учесть то обстоятельство, что в случае справедливости этой гипотезы величина

$$q_i = \frac{(n_i - 1)\,\tilde{\sigma}_i^2}{\tilde{\sigma}^2}$$

приближенно следует закону распределения $\chi^2$ с $(n_i - 1)$ степенями свободы, причем $\tilde{\sigma}^2$ представляет собой несмещенную оценку дисперсии $\sigma^2$ всей генеральной совокупности и вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{\sigma}_i^2 (n_i - 1)}{N - m},$$

где $n_i = n = 20$ — число элементов в каждой выборке;

$m = 47$ — число выборок;

$N = \sum_{i=1}^{m} n_i = 940$ — общее число элементов во всех выборках.

33. 24. Имеется $m = 40$ выборок деталей по $n = 20$ штук в каждой, причем для каждой $i$-той группы известны подходящие значения математического ожидания $\tilde{x}_i$, наудачу взятое (например, первое в каждой выборке) значение $x$ из $i$-той выборки $x_{i1}$ и несмещенная оценка дисперсии $\tilde{\sigma}_i^2$ измерения размера детали $x$. Значения величин $\tilde{x}_i$, $x_{i1}$, $\tilde{\sigma}_i^2$ для указанных 40 выборок приведены в табл. 69.

*Таблица 69*

| $i$ | $x_{i1}$ | $\tilde{x}_i$ | $\tilde{\sigma}_i^2$ | $i$ | $x_{i1}$ | $\tilde{x}_i$ | $\tilde{\sigma}_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 148 | 132 | 24 | 21 | 114 | 112 | 39 |
| 2 | 182 | 152 | 38 | 22 | 112 | 108 | 32 |
| 3 | 195 | 145 | 40 | 23 | 49 | 97 | 52 |
| 4 | 81 | 134 | 32 | 24 | 116 | 106 | 36 |
| 5 | 149 | 124 | 37 | 25 | 138 | 124 | 36 |
| 6 | 143 | 144 | 31 | 26 | 120 | 149 | 37 |
| 7 | 133 | 142 | 31 | 27 | 120 | 129 | 41 |
| 8 | 132 | 143 | 34 | 28 | 104 | 120 | 26 |
| 9 | 111 | 109 | 42 | 29 | 121 | 105 | 26 |
| 10 | 156 | 121 | 30 | 30 | 99 | 110 | 32 |
| 11 | 103 | 93 | 35 | 31 | 123 | 105 | 37 |
| 12 | 61 | 118 | 45 | 32 | 109 | 123 | 24 |
| 13 | 149 | 116 | 38 | 33 | 100 | 116 | 32 |
| 14 | 209 | 123 | 40 | 34 | 115 | 123 | 29 |
| 15 | 124 | 106 | 39 | 35 | 108 | 109 | 27 |
| 16 | 52 | 181 | 46 | 36 | 125 | 138 | 35 |
| 17 | 147 | 102 | 32 | 37 | 170 | 126 | 33 |
| 18 | 145 | 124 | 31 | 38 | 132 | 132 | 33 |
| 19 | 128 | 125 | 34 | 39 | 114 | 131 | 28 |
| 20 | 98 | 119 | 32 | 40 | 155 | 115 | 37 |

Проверить, применяя критерий Колмогорова, гипотезу о нормальном распределении размера детали $x$.

Учесть, что в этом случае (при $n \neq 4$) величины $\eta_i$

$$\eta_i = \frac{\tau_i \sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1-\tau_i^2}},$$

где

$$\tau_i = \frac{x_{ij} - \tilde{x}_i}{\tilde{\sigma}_i},$$

подчиняются закону распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2 = 18$, где $x_{ij}$ — наудачу взятое значение $x$ из $i$-той выборки (в нашем случае $x_{i1}$).

*Таблица 70*

| № партии изделий $i$ \ Размер деталей $j$ | Результаты измерений $j$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 (заниженный размер) | 2 (нормальный размер) | 3 (завышенный размер) | $h_{io}$ |
| 1 | 25 | 50 | 25 | 100 |
| 2 | 52 | 41 | 7 | 100 |
| $h_{oj}$ | 77 | 91 | 32 | 200 |

33. 25. Произведен обмер двух партий изделий по 100 деталей в каждой. Числа $h_{ij}$ деталей с нормальными, заниженными и завышенными размерами приведены в табл. 70.

Проверить с помощью критерия $\chi^2$, являются ли независимыми номер партии изделий и характер размеров проверяемых деталей.

## § 34. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ ПО СПОСОБУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

### Основные формулы

Пусть заданы $(n+1)$ пар значений $(x_i;\ y_i)$, где $y_i$ — опытное значение измеряемой величины при фиксированном значении аргумента $x_i$. Будем считать, что ошибки измерений независимы и подчиняются закону нормального распределения с нулевым математическим ожиданием, а измерения равноточны, т. е. среднее квадратическое отклонение $\sigma$, характеризующее ошибку измерений, одинаково для всех $y_i$.

При способе наименьших квадратов аппроксимирующую функцию $F(x)$ выбирают так, чтобы сумма $S$ квадратов отклонений $\varepsilon_i$

$$\varepsilon_i = y_i - F(x_i) \tag{1}$$

обращалась в минимум, т. е. из условия

$$S = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \min. \tag{2}$$

Если в качестве аппроксимирующей функции взят полином, т. е.

$$F(x) = Q_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m, \tag{3}$$

где $m \leqslant n$, то его коэффициенты $a_k$ определяются из системы $(m+1)$ нормальных уравнений

$$S_k a_0 + S_{k+1} a_1 + \cdots + S_{k+m} a_m = v_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{4}$$

Здесь

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2m), \tag{5}$$

$$v_k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{6}$$

Подходящее значение дисперсии $\sigma^2$, характеризующей точность измерений величин $y_i$, вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n - m}, \tag{7}$$

где $S_{\min}$ — вычисляется по формуле (2) при значениях коэффициентов $a_k$, являющихся решением системы нормальных уравнений (4).

Если требуется также вычислить подходящие значения дисперсий $\tilde{\sigma}^2_{a_k}$ коэффициентов $a_k$, то при решении методом исключения системы нормальных уравнений величины $v_k$ не заменяются их числовыми значениями. В результате решения получаем для коэффициентов $a_k$ линейные зависимости от величин $v_k$. Если в эти зависимости подставить числовые значения $v_k$, то получим значения коэффициентов $a_k$ аппроксимирующего многочлена. Если же в правую часть линейной зависимости для $a_k$ подставить вместо $v_k$ единицу, а вместо остальных $v_l$ ($l \neq k$) — нули, то получим величину $M_{k,k}$, с помощью которой подходящее значение дисперсии $\tilde{\sigma}^2_{a_k}$ коэффициента $a_k$ вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}^2_{a_k} = M_{k,k}\tilde{\sigma}^2. \tag{8}$$

В частности, при $m = 1$ (линейная зависимость $y$ от $x$) и при условии, что $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$ (этого всегда можно добиться, выбрав среднее арифметическое значение $x_i$ за начало отсчета), формулы имеют вид

$$a_0 = \frac{v_0}{n+1}; \quad a_1 = \frac{v_1}{S_2};$$

$$\tilde{\sigma}^2_{a_0} = \frac{S_{\min}}{(n+1)(n-m)}; \quad \tilde{\sigma}^2_{a_1} = \frac{S_{\min}}{S_2(n-m)}. \tag{9}$$

При неравноточных измерениях, когда каждое измерение $y_i$ характеризуется своей дисперсией $\sigma_i^2$, в сумме квадратов отклонений $\varepsilon_i^2$ каждое слагаемое нужно брать с «весом» $p_i^2$, обратно пропорциональным дисперсии. Для аппроксимации полиномом все приведенные выше формулы остаются в силе, если величины $S_k$ и $v_k$ заменить соответственно величинами $S'_k$ и $v'_k$

$$S'_k = \sum_{i=0}^{n} p_i^2 x_i^k; \quad v'_k = \sum_{i=0}^{n} p_i^2 y_i x_i^k, \tag{10}$$

где $p_i^2 = \frac{A^2}{\sigma_i^2}$, а постоянная $A^2$ — коэффициент пропорциональности, который выбирается произвольно из соображений числового удобства. В этом случае

$$S_{\min} = \sum_{i=0}^{n} p_i^2 \varepsilon_i^2, \tag{11}$$

после чего подходящие значения $\sigma^2_{a_k}$ для дисперсий коэффициентов $a_k$ вычисляются по формулам (8), где величины $M_{k,k}$ определяются описанным выше способом с заменой $S_k$ и $v_k$ на $S'_k$ и $v'_k$.

Если из опыта известны «веса» измерений $p_i^2$, то подходящее значение $\tilde{\sigma}_i^2$ дисперсии $i$-того измерения вычисляется по формуле

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{S_{\min}}{p_i^2(n-m)}. \tag{12}$$

В данном случае роль коэффициента пропорциональности $A^2$ играет величина $\frac{S_{\min}}{n-m}$.

Если при $i$-том значении аргумента $x_i$ произведено $n_i$ равноточных измерений величины $y$ и имеется лишь среднее арифметическое значение $y_i$ из этих $n_i$ значений, то задача решается аналогичным образом.

При этом

$$S'_k = \sum_{i=0}^{n} n_i x_i^k; \quad v'_k = \sum_{i=0}^{n} n_i y_i x_i^k, \tag{13}$$

а

$$S_{\min} = \sum_{i=0}^{n} n_i \varepsilon_i^2, \tag{14}$$

где величины $n_i$ играют роль «весов».

Подходящее значение $\tilde{\sigma}^2$ дисперсии отдельного измерения вычисляется по формуле (7)

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n-m},$$

а подходящее значение $\tilde{\sigma}_i^2$ дисперсии, характеризующей величину $\tilde{y}_i$,

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2}{n_i - 1}. \tag{15}$$

Подходящие значения $\tilde{\sigma}_{a_k}^2$ для дисперсий коэффициентов при этом вычисляются так же, как и в предыдущих случаях.

Доверительные интервалы, накрывающие с любой заданной надежностью найденные по изложенному методу коэффициенты $a_k$, определяются следующим образом. Величины

$$t = \frac{a_k - M[a_k]}{\tilde{\sigma}_{a_k}} \tag{16}$$

распределены по закону Стьюдента с $k = n - m$ степенями свободы. Найдя при заданной надежности $\alpha$ с помощью приложения 10 для закона распределения Стьюдента $P(t < \gamma)$ величину $\gamma$, удовлетворяющую равенству

$$P(t < \gamma) = \alpha,$$

получим доверительный интервал, определяемый неравенствами

$$a_k - \gamma\tilde{\sigma}_{a_k} < M[a_k] < a_k + \gamma\tilde{\sigma}_{a_k}. \tag{17}$$

При равноточных измерениях доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$, характеризующего точность измерений, при заданной надежности $\alpha$ определяется неравенствами

$$\gamma_1\tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\tilde{\sigma}, \tag{18}$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-m}{\chi_1^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{n-m}{\chi_2^2}}, \tag{19}$$

а $\chi_1^2$ и $\chi_2^2$ определяются из таблицы $\chi^2$-распределения на основании равенств

$$p\left(\chi^2 \leqslant \chi_1^2\right) = \frac{1-\alpha}{2}; \quad p\left(\chi^2 \geqslant \chi_2^2\right) = \frac{1+\alpha}{2}. \tag{20}$$

Значения $\gamma_1$ и $\gamma_2$ могут быть найдены по приложению 12 по входным величинам $k = n - m$ и $\alpha$. В случае, когда $n$ и $m$ велики, вычисление величин $S_k$ и $v_k$ по формулам (5) и (6) или им аналогичным, а также решение системы уравнений (4) представляет большие трудности. При равноотстоящих значениях аргумента $x_i$ вычисления можно значительно сократить, используя ортогональные полиномы Чебышева $P_{k,n}(x)$ — полиномы $k$-й степени, для которых

$$\sum_{i=0}^{n} P_{k,n}(x_i)\,P_{l,n}(x_i) = 0 \quad \text{при } k \neq l,$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_{k,n}^2(x_i) = \frac{(n+k+1)(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{(2k+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+1)}. \tag{21}$$

При этом предполагается, что значения $x_i$ представляют собой числа 0, 1, 2, 3, . . ., $n$; это всегда может быть достигнуто подстановкой

$$x_i' = \frac{x_i - x_0}{h}, \tag{22}$$

где $h$ — шаг аргумента $x_i$.

Искомый аппроксимирующий многочлен при этом имеет вид

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k P_{k,n}(x), \tag{23}$$

где

$$b_k = \frac{c_k}{S_k}; \qquad c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i P_{k,n}(x_i); \qquad S_k = \sum_{i=0}^{n} P_{k,n}^2(x_i).$$

Подходящее значение $\tilde{\sigma}_{b_k}^2$ дисперсии коэффициента $b_k$

$$\tilde{\sigma}_{b_k}^2 = \frac{S_{\min}}{S_k(n-m)}. \tag{24}$$

Формулы для полиномов Чебышева $P_{k,n}(x)$ для $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&P_{0,n}(x) = 1,\\
&P_{1,n}(x) = 1 - 2\frac{x}{n},\\
&P_{2,n}(x) = 1 - 6\frac{x}{n} + 6\frac{x(x-1)}{n(n-1)},\\
&P_{3,n}(x) = 1 - 12\frac{x}{n} + 30\frac{x(x-1)}{n(n-1)} - 20\frac{x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)},\\
&P_{4,n}(x) = 1 - 20\frac{x}{n} + 90\frac{x(x-1)}{n(n-1)} - 140\frac{x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)} +\\
&\quad + 70\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)},\\
&P_{5,n}(x) = 1 - 30\frac{x}{n} + 210\frac{x(x-1)}{n(n-1)} - 560\frac{x(x-1)(x-2)}{n(n-1)(n-2)} +\\
&\quad + 630\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} - 252\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Общая формула

$$P_{k,n}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j C_{k+j}^j \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}. \tag{26}$$

Таблицы полиномов Чебышева для $k = 1, 2, 3, 4, 5$, $n = 5, 6, 7, \ldots, 20$, $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ приведены в приложении 18. Значения полиномов Чебышева в этих таблицах умножены на величину $P_{k,n}(0)$ для получения целых значений. В случае вычисления $Q_m(x)$ по формуле (23) с помощью таблиц, а также $\tilde{\sigma}^2_{b_k}$ по формуле (24), это обстоятельство не требует специального учета. Если требуется перейти к многочлену $Q_m(x)$ в обычной форме, необходимо выражения $P_{k,n}(x)$, составленные по формулам (25), умножить на значения $P_{k,n}(0)$, приведенные в приложении 18.

В ряде случаев искомая аппроксимирующая функция не является многочленом, но может быть легко сведена к нему заменой переменных. Ряд таких функций с указанием необходимой замены переменных приведен в табл. 71.

*Таблица 71*

| № пп. | Исходная функция | К какому виду приводится | Замена переменных |
|---|---|---|---|
| 1 | $y = Ae^{kx}$ | $z = a_0 + a_1x$ | $z = \ln y$; $a_0 = \ln A$; $a_1 = k$ |
| 2 | $y = Bx^b$ | $z = a_0 + a_1u$ | $z = \lg y$; $u = \lg x$; $a_0 = \lg B$; $a_1 = b$ |
| 3 | $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ | $y = a_0 + a_1u$ | $u = \frac{1}{x}$ |
| 4 | $y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$ | $y = a_0 + a_1u$ | $u = \frac{1}{x^b}$ |
| 5 | $y = Ae^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ | $z = a_0 + a_1x + a_2x^2$ | $z = \lg y$; $a_0 = \lg A - \frac{\lg e}{2\sigma^2}$ $a_1 = \frac{a \lg e}{\sigma^2}$; $a_2 = -\frac{\lg e}{2\sigma^2}a^2$ |
| 6 | $y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$ | $y = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \cdots$ | $u = \frac{1}{x}$ |
| 7 | $y = a_0 + a_1x^b + a_2x^{2b} + \cdots$ | $y = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \cdots$ | $u = x^b$ |
| 8 | $y = a_0x^{-m} + a_1x^n$ | $z = a_0 + a_1u$ | $z = yx^m$; $u = x^{m+n}$ |

Если измеряемая величина $y$ зависит от нескольких аргументов $x_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$, причем значения $y$ и $x_k$ определяются в $(n + 1)$ опытах, то для получения по способу наименьших квадратов коэффициентов линейной зависимости вида

$$y = a_0x_0 + a_1x_1 +, \ldots, + a_mx_m \tag{27}$$

необходимо решить систему $(m + 1)$ линейных (нормальных) уравнений

$$\left.\begin{array}{l} s_{00}a_0 + s_{01}a_1 + \cdots + s_{0m}a_m = b_0, \\ s_{10}a_0 + s_{11}a_1 + \cdots + s_{1m}a_m = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m0}a_0 + s_{m1}a_1 + \cdots + s_{mm}a_m = b_m. \end{array}\right\} \tag{28}$$

Здесь величины $s_{kl}$ и $b_k$ вычисляются по формулам

$$s_{kl} = \sum_{i=0}^{n} x_{ki} x_{li}; \quad b_k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_{ki}, \tag{29}$$

где $x_{ki}$ — значение величины $x_k$ в $i$-м опыте; очевидно, что $s_{kl} = s_{lk}$.

Подходящие значения дисперсий коэффициентов $a_k$ определяются, как и выше, по формулам (8), где $M_{k,\,k}$ является решением системы уравнений (28) при замене всех $b_l$ нулями ($l \neq k$), а $b_k$ — единицей.

Роль величин $x_k$ могут играть любые функции $f_k(x)$ аргумента $x$. При этом будет получено разложение по функциям $f_k(x)$ вида (27).

В частности, если роль функций $f_k(x)$ играют тригонометрические функции $\sin kx$ и $\cos kx$ ($k = 0, 1, \ldots, m$), а приближаемая функция $y$ задана на интервале $(0,2\pi)$, то коэффициенты $a_k$, $b_k$ для приближенного многочлена вида

$$y = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{30}$$

вычисляются по формулам Бесселя:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i, \\ a_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \cos kx_i \; (k = 1, 2, \ldots, m), \\ b_k &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \sin kx_i \; (k = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где $N$ — общее число значений аргумента $x_i$, при которых производились наблюдения; необходимо отметить, что формулы (31) применимы только в случае равноотстоящих значений $x_i$.

В тех случаях, когда искомая функция сложна, ее можно приближенно представить в виде многочлена, разлагая в ряд по степеням одного из определяемых параметров. При этом выбирается ориентировочное значение этого параметра и разложение в ряд производится в его окрестности. Например, если искомая зависимость имеет вид

$$y = A \cos (t + \varepsilon), \tag{32}$$

то выбираем приближенное значение $\varepsilon = \varepsilon'$ по опытным данным. Можем написать

$$y = A \cos (t' + \delta),$$

где $t' = t + \varepsilon'$, $\delta = \varepsilon - \varepsilon'$.

Полагая $\cos \delta = 1$, $\sin \delta = \delta$, найдем

$$y = A \cos t' - A\delta \sin t',$$

или

$$y = a_1 \cos t' + b_1 \sin t', \tag{33}$$

где

$$a_1 = A, \quad b_1 = A\delta.$$

Получилась зависимость вида (27) при $x_1 = \sin t'$, $x_2 = \cos t'$.

Когда ошибкам измерения подвержены не только значения функции $y$, но и аргумента $x$, коэффициенты $a_0$ и $a_1$ для линейной зависимости

$$y = a_0 + a_1 x \tag{34}$$

вычисляются следующим образом. Коэффициент $a_1$ находится как корень квадратного уравнения (нужный корень выбирается исходя из конкретных условий задачи):

$$a_1^2 + \frac{\left[S_1^2 - (n+1)\,S_2\right]\dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - \left[r_1^2 - (n+1)\,r_2\right]}{S_1 r_1 - (n+1)\,v_1}\,a_1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 0, \tag{35}$$

а затем $a_0$ вычисляется по формуле

$$a_0 = \frac{r_1 - a_1 S_1}{n+1}, \tag{36}$$

где $\sigma_x^2$, $\sigma_y^2$ — дисперсии отдельного измерения величин $x$ и $y$ соответственно;

$$\left.\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=0}^{n} x_i^k,\ (k = 1,\ 2); \\ r_k &= \sum_{i=0}^{n} y_i^k,\ (k = 1,\ 2); \\ v_1 &= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

## Решение типовых примеров

Пример 34. 1. При исследовании влияния температуры $t$ на ход хронометра $\omega$ получены результаты, приведенные в табл. 72.

*Таблица 72*

| $t_i^0$, С | 5,0 | 9,6 | 16,0 | 19,6 | 24,4 | 29,8 | 34,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_i$ | 2,60 | 2,01 | 1,34 | 1,08 | 0,94 | 1,06 | 1,25 |

Считая справедливой зависимость

$$\bar{\omega} = a_0 + a_1(t - 15) + a_2(t - 15)^2,$$

где $\bar{\omega}$ — расчетные значения величины $\omega$, определить коэффициенты $a_k$, подходящие значения средних квадратических отклонений: $\tilde{\sigma}$ — отдельного измерения и $\tilde{\sigma}_{a_k}$ — коэффициентов $a_k$; установить доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$ и для среднего квадратического отклонения $\sigma$, характеризующего точность отдельного измерения, при надежности $\alpha = 0{,}90$.

*Решение.* 1. Составляем нормальные уравнения для нахождения коэффициентов $a_k$ и $M_{k,k}$. Для уменьшения значений коэффициентов нормальных уравнений вводим переменную

$$x = \frac{t - 15}{15},$$

а затем определяем коэффициенты нормальных уравнений $S_k$ и $v_k$ по формулам (5), (6):

$$S_k = \sum_{i=0}^{6} x_i^k \ (k = 0, 1, 2, 3, 4);$$

$$v_k = \sum_{i=0}^{6} y_i x_i^k \ (k = 0, 1, 2).$$

Вычисление величин $S_k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) и $v_k$ ($k = 0, 1, 2$) произведено с помощью арифмометра или клавишной вычислительной машины; результаты приведены в табл. 73.

*Таблица 73*

| $i$ | $x_i^0$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $\omega_i$ | $\omega_i x_i$ | $\omega_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | —0,667 | 0,4449 | —0,2967 | 0,1979 | 2,60 | —1,7342 | 1,1567 |
| 1 | 1 | —0,360 | 0,1296 | —0,0467 | 0,0168 | 2,01 | —0,7236 | 0,2605 |
| 2 | 1 | 0,067 | 0,0045 | 0,0003 | 0,0000 | 1,34 | 0,0898 | 0,0060 |
| 3 | 1 | 0,307 | 0,0942 | 0,0289 | 0,0089 | 1,08 | 0,3316 | 0,1017 |
| 4 | 1 | 0,627 | 0,3931 | 0,2465 | 0,1546 | 0,94 | 0,5894 | 0,3695 |
| 5 | 1 | 0,987 | 0,9742 | 0,9615 | 0,9490 | 1,06 | 1,0462 | 1,0327 |
| 6 | 1 | 1,293 | 1,6718 | 2,1617 | 2,7949 | 1,25 | 1,6162 | 2,0898 |
| | $S_0 = 7$ | $S_1 = 2,254$ | $S_2 = 3,7123$ | $S_3 = 3,0555$ | $S_4 = 4,1221$ | $v_0 = 10,28$ | $v_1 = 1,2154$ | $v_2 = 5,0169$ |

Получаем

$$S_0 = 7;\ S_1 = 2,254;\ S_2 = 3,7123;\ S_3 = 3,0555;\ S_4 = 4,1221;\ v_0 = 10,28;$$
$$v_1 = 1,2154;\ \ v_2 = 5,0169.$$

Записываем нормальные уравнения, не заменяя пока величины $v_0$, $v_1$, $v_2$ их числовыми значениями:

$$7a_0' + 2,254a_1' + 3,7123a_2' = v_0; \quad \text{(I)}$$

$$2,254a_0' + 3,7123a_1' + 3,0555a_2' = v_1; \quad \text{(II)}$$

$$3,7123a_0' + 3,0555a_1' + 4,1221a_2' = v_2. \quad \text{(III)}$$

Здесь $a_0'$, $a_1'$, $a_2'$ — коэффициенты искомого квадратичного многочлена для $\overline{\omega}$ при использовании аргумента $x$:

$$\overline{\omega} = a_0' + a_1'x + a_2'x^2.$$

2. Решаем нормальные уравнения методом исключения, нумеруя получаемые уравнения, по следующей схеме.

Делим уравнение (I) на коэффициент при $a_0'$

$$a_0' + 0,3220a_1' + 0,53033a_2' = 0,14286v_0. \quad \text{(IV)}$$

Умножаем полученное уравнение на коэффициенты при $a_0$ в уравнениях (II) и (III)

$$2{,}254a_0' + 0{,}72579a_1' + 1{,}1954a_2' = 0{,}32201v_0; \qquad \text{(V)}$$

$$3{,}7123a_0' + 1{,}1954a_1' + 1{,}9687a_2' = 0{,}53034v_0. \qquad \text{(VI)}$$

Вычитаем уравнения (V) и (VI) из уравнений (II) и (III) соответственно:

$$2{,}9865a_1' + 1{,}8601a_2' = v_1 - 0{,}32201v_0; \qquad \text{(VII)}$$

$$1{,}8601a_1' + 2{,}1534a_2' = v_2 - 0{,}53034v_0. \qquad \text{(VIII)}$$

Делим уравнение (VII) на коэффициент при $a_1'$.

$$a_1' + 0{,}62284a_2' = 0{,}33484v_1 - 0{,}10782v_0. \qquad \text{(IX)}$$

Умножаем полученное уравнение на коэффициент при $a_1'$ в уравнении (VIII).

$$1{,}8601a_1' + 1{,}1585a_2' = 0{,}62284v_1 - 0{,}20056v_0. \qquad \text{(X)}$$

Вычитаем уравнение (X) из уравнения (VIII)

$$0{,}9949a_2' = v_2 - 0{,}62284v_1 - 0{,}32978v_0. \qquad \text{(XI)}$$

Находим $a_2'$ из уравнения (XI)

$$a_2' = 1{,}0051v_2 - 0{,}62603v_1 - 0{,}33147v_0. \qquad \text{(XII)}$$

Находим $a_1'$ из уравнения (IX), подставляя в него полученное значение $a_2'$ из уравнения (XII):

$$a_1' = -0{,}62602v_2 + 0{,}72476v_1 + 0{,}09863v_0. \qquad \text{(XIII)}$$

Находим $a_0'$ из уравнения (IV) подставляя в него значения $a_1$ из уравнения (XIII) и $a_2'$ из уравнения (XII)

$$a_0' = -0{,}33145v_2 + 0{,}09863v_1 + 0{,}28689v_0. \qquad \text{(XIV)}$$

3. Определяем числовые значения коэффициентов $a_k'$, подставляя в уравнения (XII), (XIII), (XIV) значения $v_0$, $v_1$, $v_2$:

$$a_0' = 1{,}4042; \quad a_1' = -1{,}2459; \quad a_2' = 0{,}87410.$$

4. Находим значения величин $M_{k,\,k}$, необходимых для вычисления подходящих значений дисперсий коэффициентов $\tilde{\sigma}^2_{a_k'}$. Для этого подставляем вместо $v_k$ в уравнение (14)

$$v_0 = 1, \quad v_1 = v_2 = 0;$$

в уравнение (13)

$$v_1 = 1, \quad v_0 = v_2 = 0;$$

в уравнение (12)

$$v_2 = 1, \quad v_0 = v_1 = 0.$$

Получаем

$$M_{0,\,0} = 0{,}28689; \quad M_{1,\,1} = 0{,}72476; \quad M_{2,\,2} = 1{,}0051.$$

5. Вычисляем подходящие значения дисперсии отдельного измерения $\tilde{\sigma}^2$ и дисперсий $\tilde{\sigma}^2_{a'_k}$ коэффициентов $a'_k$ по формулам (7) и (8):

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n-m},$$

где $S_{\min} = \sum_{i=0}^{6} \varepsilon_i^2$,

$$\varepsilon_i = \omega_i - \bar{\omega}_i;$$

$$\bar{\omega} = 1{,}4042 - 1{,}2459x + 0{,}87410x^2;$$

$$\tilde{\sigma}^2_{a'_k} = M_{k,\,k}\tilde{\sigma}^2; \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

В нашем случае $n = 6$, так как число опытных точек равно $n + 1 = 7$, а степень уравнения для $\bar{\omega}$ $m = 2$; значения $\omega_i$ и $\varepsilon_i$, а также $S_{\min}$ даны в табл. 74.

*Таблица 74*

| $i$ | $a'_0 + a'_1x_i$ | $a'_2x_i^2$ | $\bar{\omega}_i$ | $\varepsilon_i$ | $\varepsilon_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,2352 | 0,3889 | 2,624 | — 0,024 | $0{,}0^20576$ |
| 1 | 1,8527 | 0,1133 | 1,966 | 0,044 | 1936 |
| 2 | 1,3207 | 0,0039 | 1,325 | 0,015 | 0225 |
| 3 | 1,0217 | 0,0823 | 1,104 | — 0,024 | 0576 |
| 4 | 0,6230 | 0,3436 | 0,967 | — 0,027 | 0729 |
| 5 | 0,1745 | 0,8515 | 1,026 | 0,034 | 1156 |
| 6 | —0,2067 | 1,4613 | 1,255 | — 0,005 | $0{,}0^20025$ |
| | | | | $S_{\min} = 0{,}0^2\ 5223$ | |

Имеем: $S_{\min} = 0{,}0^25223$; $\tilde{\sigma}^2 = 0{,}0^213058$; $\tilde{\sigma}^2_{a'_0} = 0{,}0^337462$; $\tilde{\sigma}^2_{a'_1} = 0{,}0^394639$; $\tilde{\sigma}^2_{a'_2} = 0{,}0^213125$; $\tilde{\sigma} = 0{,}03614$; $\tilde{\sigma}_{a'_0} = 0{,}01936$; $\tilde{\sigma}_{a'_1} = 0{,}03076$; $\tilde{\sigma}_{a'_2} = 0{,}03623$.

6. Возвращаемся к аргументу $t$, точнее $(t - 15)$, для чего определяем значения коэффициентов $a_k$ в выражении

$$\bar{\omega} = a_0 + a_1(t - 15) + a_2(t - 15)^2,$$

а также находим подходящие значения средних квадратических отклонений коэффициентов $a_k$:

$$x = \frac{t-15}{15}; \quad a_0 = a'_0 = 1{,}4042; \quad a_1 = \frac{a'_1}{15} = -0{,}08306;$$

$$a_2 = \frac{a'_2}{15^2} = 0{,}003885; \quad \tilde{\sigma}_{a_0} = \tilde{\sigma}_{a'_0} = 0{,}01936;$$

$$\tilde{\sigma}_{a_1} = \frac{\tilde{\sigma}_{a'_1}}{15} = 0{,}001291; \quad \tilde{\sigma}_{a_2} = \frac{\tilde{\sigma}_{a'_2}}{15^2} = 0{,}0001610.$$

7. Находим доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$ при надежности $\alpha = 0{,}90$, пользуясь приложением 10 для $t$-распределения Стьюдента; по числу степеней свободы

$$k = n - m = 4 \text{ и } \alpha = 0{,}90$$

находим значение

$$\gamma = 2{,}132.$$

Доверительные интервалы имеют вид (17)

$$a_k - \gamma\tilde{\sigma}_{a_k} < M[a_k] < a_k + \gamma\tilde{\sigma}_{a_k};$$

конкретно для математических ожиданий коэффициентов $a_0$, $a_1$, $a_2$ получаем

$$1{,}363 < M\,[a_0] < 1{,}446;$$

$$0{,}08031 < M\,[a_1] < 0{,}08581;$$

$$0{,}003542 < M\,[a_2] < 0{,}004228.$$

8. Находим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$, характеризующего точность отдельного измерения, используя $\chi^2$-распределение; доверительный интервал имеет вид (18)

$$\gamma_1\tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\tilde{\sigma},$$

где значения $\gamma_1$ и $\gamma_2$ определяются по приложению 12 при $k = 4$ и $\alpha = 0{,}90$. Имеем $\gamma_1 = 0{,}649$; $\gamma_2 = 2{,}37$, что дает

$$0{,}02345 < \sigma < 0{,}08565.$$

*Таблица 75*

| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 1,300 | 1,5 | 0,037 |
| 0,3 | 1,245 | 1,8 | —0,600 |
| 0,6 | 1,095 | 2,1 | —1,295 |
| 0,9 | 0,855 | 2,4 | —1,767 |
| 1,2 | 0,514 | 2,7 | —1,914 |

Задачи на вычисление коэффициентов аппроксимирующего многочлена с помощью составления и решения системы нормальных уравнений, с последующим вычислением подходящих значений средних квадратических отклонений $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}_{a_k}$, характеризующих точность отдельного измерения и точность коэффициентов аппроксимирующего многочлена, а также с установлением доверительных интервалов для среднего квадратического отклонения $\sigma$ и для коэффициентов $a_k$ приведены в разделе «Задачи для упражнений» (34. 1, 34. 2, 34. 3, 34. 5, 34. 9, 34. 10, 34. 13).

Пример 34. 2. Равноточные измерения некоторой величины $y$, отвечающие ряду значений аргумента $x$, привели к результатам, помещенным в табл. 75.

Подобрать многочлен 5-й степени, приближенно представляющий зависимость $y$ от $x$ в интервале значений $x$ [0; 2,7], используя ортогональные полиномы Чебышева; оценить точность отдельного измерения, характеризуемую средним квадратическим отклонением $\sigma$, и найти подходящие значения средних квадратических отклонений коэффициентов $b_k$ при полиномах Чебышева $P_{k,n}(x)$.

*Решение.* 1. Переходим к аргументу $z = \frac{x}{0{,}3}$, чтобы сделать шаг аргумента равным единице, и вычисляем по формулам (23) коэффициенты $b_k$, где

$$b_k = \frac{c_k}{S_k},$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} P_{k,\,n}(z_i)\, y_i \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5);$$

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} P_{k,\,n}^2(z_i) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Табличные значения полиномов Чебышева $P_{k,\,n}(z_i)$ и значения $S_k$ находим из приложения 18. В нашем случае $n = 9$, $m = 5$ (табл. 76).

*Таблица 76*

| $z$ | $P_{0,9}(z)$ | $P_{1,9}(z)$ | $P_{2,9}(z)$ | $P_{3,9}(z)$ | $P_{4,9}(z)$ | $P_{5,9}(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 9 | 6 | 42 | 18 | 6 |
| 1 | 1 | 7 | 2 | —14 | —22 | —14 |
| 2 | 1 | 5 | —1 | —35 | —17 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | —3 | —31 | 3 | 11 |
| 4 | 1 | 1 | —4 | —12 | 18 | 6 |
| 5 | 1 | —1 | —4 | 12 | 18 | — 6 |
| 6 | 1 | —3 | —3 | 31 | 3 | —11 |
| 7 | 1 | —5 | —1 | 35 | —17 | — 1 |
| 8 | 1 | —7 | 2 | 14 | —22 | 14 |
| 9 | 1 | —9 | 6 | —42 | 18 | — 6 |
| | $S_0 = 10$ | $S_1 = 330$ | $S_2 = 132$ | $S_3 = 8580$ | $S_4 = 2860$ | $S_5 = 780$ |

Значения $c_k$ для $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ вычисляем на арифмометре (клавишной вычислительной машине) с накоплением результата. В результате получаем:

$$S_0 = 10; \qquad S_1 = 330; \qquad S_2 = 132;$$

$$S_3 = 8580; \qquad S_4 = 2860; \qquad S_5 = 780;$$

$$c_0 = —0{,}530; \qquad c_1 = 66{,}802; \qquad c_2 = —7{,}497;$$

$$c_3 = —14{,}659; \qquad c_4 = 14{,}515; \qquad c_5 = —1{,}627.$$

Для коэффициентов $b_k$ имеем

$$b_0 = —0{,}0530; \quad b_1 = 0{,}20243; \quad b_2 = —0{,}05680;$$

$$b_3 = —0{,}00486; \quad b_4 = 0{,}00508; \quad b_5 = —0{,}00209.$$

Напомним, что если при вычислениях используются табличные значения полиномов Чебышева, то формула для искомого многочлена 5-й степени имеет вид

$$\bar{y} = b_0 P_{0,9}(z) + b_1 P_{1,9}(z) + b_2 P_{2,9}(z) + b_3 P_{3.9}(z) + \\ + b_4 P_{4,9}(z) + b_5 P_{5,9}(z).$$

Здесь $\bar{y}$ — расчетные значения величины $y$.

Если же для вычисления полиномов Чебышева используются аналитические формулы (25), то найденные коэффициенты $b_k$ следует заменить коэффициентами $b'_k = b_k P_{k,n}(0)$ ($P_{k,n}(0)$ — табличное значение $P_{k,n}(z)$ при $z = 0$).

2. Определяем подходящие значения средних квадратических отклонений отдельного измерения $\tilde{\sigma}$ и коэффициентов $b_k$ : $\tilde{\sigma}_{b_k}$ по формулам (7) и (24)

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{S_{\min}}{n-m}},$$

где $S_{\min} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2$,

$$\varepsilon_i = y_i - \bar{y}_i,$$

$$\tilde{\sigma}_{b_k} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{S_k}} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Значения $\bar{y}_i$ вычисляются также на арифмометре с накоплением результата по строке; при этом коэффициенты $b_k$ умножаются на значения $P_{k,n}(z_i)$. Значения $\bar{y}_i$, $\varepsilon_i$, $\varepsilon_i^2$ и $S_{\min}$ приведены в табл. 77. В результате

*Таблица 77*

| $x$ | $z$ | $y$ | $\bar{y}$ | $\varepsilon_i$ | $\varepsilon_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0 | 1,300 | 1,310 | — 0,010 | $0{,}0^2 0100$ |
| 0,3 | 1 | 1,245 | 1,236 | 0,009 | 0081 |
| 0,6 | 2 | 1,095 | 1,098 | — 0,003 | 0009 |
| 0,9 | 3 | 0,855 | 0,868 | — 0,013 | 0169 |
| 1,2 | 4 | 0,514 | 0,514 | 0,000 | 0000 |
| 1,5 | 5 | 0,037 | 0,017 | 0,020 | 0400 |
| 1,8 | 6 | —0,600 | —0,602 | 0,002 | 0004 |
| 2,1 | 7 | —1,295 | —1,263 | — 0,032 | 1024 |
| 2,4 | 8 | —1,767 | —1,793 | 0,026 | 0676 |
| 2,7 | 9 | —1,914 | —1,908 | — 0,006 | $0{,}0^2 0036$ |
| | | | | $S_{\min} = 0{,}0^2 2679$ | |

вычислений получаем: $S_{\min} = 0{,}002679$; $\sigma = 0{,}02588$; $\tilde{\sigma}_{b_0} = 0{,}008185$; $\tilde{\sigma}_{b_1} = 0{,}001425$; $\tilde{\sigma}_{b_2} = 0{,}002252$; $\tilde{\sigma}_{b_3} = 0{,}0002794$; $\tilde{\sigma}_{b_4} = 0{,}0004839$; $\tilde{\sigma}_{b_5} = 0{,}0009266$.

Эти же величины характеризуют точность коэффициентов при истинных значениях полиномов Чебышева, вычисляемых по аналитическим формулам (25).

Задачи на составление аппроксимирующего многочлена с помощью ортогональных полиномов Чебышева и последующее вычисление подходящих значений средних квадратических отклонений $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}_{b_k}$, характеризующих точность отдельного измерения и точность коэффициентов при полиномах Чебышева в полученном аппроксимирующем многочлене, а также установление доверительных интервалов для среднего квадратического отклонения $\sigma$ приведены в разделе «Задачи для упражнений» (34. 4, 34. 6, 34. 12).

Пример 34. 3. Показания барометра-анероида $A$ и ртутного барометра $B$ при различной температуре $t$ приведены в табл. 78. Подобрать

*Таблица 78*

| $i$ | $t$, °C | $A$, *мм* | $B$, *мм* | $i$ | $t$, °C | $A$, *мм* | $B$, *мм* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10,0 | 749,0 | 744,4 | 5 | 3,8 | 757,5 | 754,0 |
| 1 | 6,2 | 746,1 | 741,3 | 6 | 17,1 | 752,4 | 747,8 |
| 2 | 6,3 | 756,6 | 752,7 | 7 | 22,2 | 752,5 | 748,6 |
| 3 | 5,3 | 758,9 | 754,7 | 8 | 20,8 | 752,2 | 747,7 |
| 4 | 4,8 | 751,7 | 747,9 | 9 | 21,0 | 759,5 | 755,6 |

коэффициенты $a_k$ для формулы, выражающей зависимость величины $B$ от $t$ и от $A$:

$$B = A + a_0 + a_1 t + a_2 (760 - A).$$

Найти доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$ и оценить точность наблюдений (построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения $\sigma$ при надежности $\alpha = 0{,}90$).

*Решение.* 1. Обозначим для удобства: $x_0 = 1$; $x_1 = t$; $x_2 = 760 - A$; $y = B - A$. Тогда искомая формула примет вид

$$y = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Исходные данные при этих обозначениях представлены в табл. 79.

*Таблица 79*

| $i$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $y$ | $a_0 + a_1 x_1$ | $a_2 x_2$ | $\bar{y}$ | $\lvert\varepsilon_i\rvert$ | $\varepsilon_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 10,0 | 11,0 | —4,6 | —3,725 | —0,739 | —4,46 | 0,14 | 0,0196 |
| 1 | 1 | 6,2 | 13,9 | —4,8 | —3,686 | — 934 | —4,62 | 18 | 0324 |
| 2 | 1 | 6,3 | 3,4 | —3,9 | —3,687 | — 228 | —3,92 | 02 | 0004 |
| 3 | 1 | 5,3 | 1,1 | —4,2 | —3,676 | — 074 | —3,75 | 45 | 2025 |
| 4 | 1 | 4,8 | 8,3 | —3,8 | —3,671 | — 558 | —4,23 | 43 | 1849 |
| 5 | 1 | 3,8 | 2,5 | —3,5 | —3,661 | — 168 | —3,83 | 33 | 1089 |
| 6 | 1 | 17,1 | 7,6 | —4,6 | —3,799 | — 511 | —4,31 | 29 | 0841 |
| 7 | 1 | 22,2 | 7,5 | —3,9 | —3,852 | — 504 | —4,36 | 46 | 2116 |
| 8 | 1 | 20,8 | 7,8 | —4,5 | —3,838 | — 524 | —4,36 | 14 | 0196 |
| 9 | 1 | 21,0 | 0,5 | —3,9 | —3,840 | —0,034 | —3,87 | 0,03 | 0,0009 |
| | | | | | | | | $S_{\min} = 0{,}8649$ | |

2. Определяем значения $s_{kl}$ и $b_k$ по формулам (29)

$$s_{kl} = \sum_{i=0}^{9} x_{ki} x_{li} \qquad (k, l = 0, 1, 2);$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{9} y_i x_{ki} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Произведя вычисления на арифмометре (клавишной вычислительной машине) с накоплением результата по столбцам табл. 79, найдем:

$$s_{0,0} = 10; \qquad s_{0,1} = 117{,}5; \qquad s_{0,2} = s_{2,0} = 63{,}6;$$
$$s_{1,1} = 1902{,}59; \qquad s_{1,2} = s_{2,1} = 741{,}97; \qquad s_{2,2} = 577{,}22;$$
$$b_0 = -41{,}7; \qquad b_1 = 494{,}87; \qquad b_2 = -276{,}75.$$

3. Составляем систему нормальных уравнений, причем вместо $b_k$ их числовые значения пока не подставляем

$$10\,a_0 + 117{,}5\,a_1 + 63{,}6\,a_2 = b_0, \tag{I}$$
$$117{,}5\,a_0 + 1902{,}59\,a_1 + 741{,}97\,a_2 = b_1, \tag{II}$$
$$63{,}6\,a_0 + 741{,}97\,a_1 + 577{,}22\,a_2 = b_2. \tag{III}$$

Решаем эту систему уравнений методом исключения. Вычисления ведем по следующей схеме (подробное описание этой схемы см. в примере 34. 1):

$$a_0 + 11{,}75a_1 + 6{,}36a_2 = 0{,}1b_0 \quad \text{[уравнение (I) : 10]}, \tag{IV}$$
$$117{,}5a_0 + 1380{,}6a_1 + 747{,}3a_2 = 11{,}75b_0 \quad \text{[уравнение (IV)} \times 117{,}5], \tag{V}$$
$$63{,}6a_0 + 747{,}3a_1 + 404{,}5a_2 = 6{,}36b_0 \quad \text{[уравнение (IV)} \times 63{,}6], \tag{VI}$$
$$522{,}0a_1 - 5{,}33a_2 = -11{,}75b_0 + b_1 \quad \text{[уравнение (II) — уравнение (V)]}, \tag{VII}$$
$$-5{,}33a_1 + 172{,}72a_2 = -6{,}36b_0 + b_2 \quad \text{[уравнение (III) — уравнение (VI)]}, \tag{VIII}$$
$$-a_1 + 32{,}405a_2 = -1{,}1932b_0 + 0{,}18762b_2 \quad \text{[уравнение (VIII) : 5,33]}, \tag{IX}$$
$$-522{,}0a_1 + 16915a_2 = -622{,}85b_0 + 97{,}938b_2 \quad \text{[уравнение (IX)} \times 522{,}0], \tag{X}$$
$$16910a_2 = -634{,}6b_0 + b_1 + 97{,}938b_2 \quad \text{[уравнение (VII) + уравнение (X)]}, \tag{XI}$$
$$a_2 = -0{,}037528b_0 + 0{,}0^4 59136b_1 + 0{,}0^2 57917b^2 \quad \text{[уравнение (XI)} \times 16910], \tag{XII}$$
$$a_1 = -0{,}02289b_0 + 0{,}0^2 19163b_1 + 0{,}0^4 6b_2 \quad \text{[из уравнения (IX)]}, \tag{XIII}$$
$$a_0 = -0{,}60764b_0 - 0{,}022893b_1 - 0{,}037540b_2 \quad \text{[из уравнения (IV)]}. \tag{XIV}$$

4. Подставляем в уравнения (XII), (XIII), (XIV) числовые значения $b_k$ для определения значений коэффициентов $a_k$, а также подставляем в уравнение (XIV) вместо $b_0 \sim 1$, вместо $b_1$ и $b_2 \sim 0$; в уравнение (XIII) вместо $b_1 \sim 1$, вместо $b_0$ и $b_2 \sim 0$; в уравнение (XII) вместо $b_2 \sim 1$, вместо $b_0$ и $b_1 \sim 0$ для определения величин $M_{k,k}$. В результате вычислений получим:

$$a_0 = -3{,}621; \qquad M_{0,0} = 0{,}60764;$$
$$a_1 = -0{,}01041; \qquad M_{1,1} = 0{,}0^2 19163;$$
$$a_2 = -0{,}06719; \qquad M_{2,2} = 0{,}0^2 57917.$$

5. Вычисляем подходящие значения средних квадратических отклонений: $\tilde{\sigma}$, характеризующего точность отдельного наблюдения, и $\tilde{\sigma}_{ak}$ — коэффициентов $a_k$ по формулам (7) и (8)

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n-m},$$

где

$$S_{\min} = \sum_{i=0}^{9} \varepsilon_i^2,$$

$$\varepsilon_i = \bar{y}_i - y_i,$$

$$\bar{y} = -3{,}261 - 0{,}01041x_1 - 0{,}06719x_2,$$

$$n = 9, \qquad m = 2,$$

$$\tilde{\sigma}^2_{a_k} = M_{k,\,k}\tilde{\sigma}^2, \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

Производя вычисления в табл. 79, находим $S_{\min} = 0{,}8649$;

$$\tilde{\sigma}^2 = 0{,}12356; \qquad \tilde{\sigma} = 0{,}3515;$$

$$\tilde{\sigma}^2_{a_0} = 0{,}07508; \qquad \tilde{\sigma}_{a_0} = 0{,}274;$$

$$\tilde{\sigma}^2_{a_1} = 0{,}0^32368; \qquad \tilde{\sigma}_{a_1} = 0{,}0154;$$

$$\tilde{\sigma}^2_{a_2} = 0{,}0^37156; \qquad \tilde{\sigma}_{a_2} = 0{,}0268.$$

6. Устанавливаем доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$ и для среднего квадратического отклонения $\sigma$, характеризующего точность отдельного измерения, используя распределение Стьюдента (для $a_k$ — приложение 10) и $\chi^2$-распределение (для $\sigma$ — приложение 12).

Число степеней свободы $k = n - m = 7$; надежность $\alpha = 0{,}90$. Находим: $\gamma = 1{,}897$; $\gamma_1 = 0{,}705$; $\gamma_2 = 1{,}797$.

Получаем доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$ по формуле (17)

$$a_k - \gamma\tilde{\sigma}_{a_k} < M[a_k] < a_k + \gamma\tilde{\sigma}_{a_k}.$$

Числовые расчеты дают:

$$-4{,}141 < M[a_0] < -3{,}101;$$

$$-0{,}0396 < M[a_1] < 0{,}0188;$$

$$-0{,}1180 < M[a_2] < 0{,}0164.$$

Для среднего квадратического отклонения $\sigma$ доверительный интервал представится неравенством (18)

$$\gamma_1\tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\tilde{\sigma}$$

или

$$0{,}2478 < \sigma < 0{,}6316.$$

Пример 34.4. Измерение величины $y$ при ряде значений аргумента $x$ производилось различными методами, вследствие чего точности отдельных измерений получились неодинаковыми.

*Таблица 80*

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $p_i^2$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $p_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,5 | 6,20 | 0,5 | 5 | —0,5 | 4,55 | 1,0 |
| 1 | 1,1 | 3,45 | 1,0 | 6 | —1,0 | 8,85 | 1,0 |
| 2 | 0,7 | 2,00 | 1,0 | 7 | —1,5 | 15,70 | 0,5 |
| 3 | 0,3 | 1,80 | 1,0 | 8 | —2,0 | 24,40 | 0,25 |
| 4 | —0,1 | 2,40 | 1,0 | | | | |

В табл. 80 приведены значения $x_i$, $y_i$ и «веса» $p_i^2$, характеризующие точность измерения $y_i$ при данном значении $x_i$.

Считая, что зависимость $y$ от $x$ представлена многочленом 2-й степени вида

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

найти подходящие значения дисперсий отдельных измерений и подходящие значения дисперсий коэффициентов $a_k$.

*Решение*. 1. Вычисляем по формулам (10) коэффициенты $S'_k$ и $v'_k$ для нормальной системы уравнений с учетом «веса» каждого измерения:

$$S'_k = \sum_{i=0}^{8} p_i^2 x_i^k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

$$v'_k = \sum_{i=0}^{8} p_i^2 y_i x_i^k \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

Выполняя вычисления, заполняем табл. 81, причем суммирование производим одновременно с умножением на $p_i^2$ с накоплением результата по столбцам.

*Таблица 81*

| $i$ | $p_i^2$ | $x_i$ | $x_i^2$ | $x_i^3$ | $x_i^4$ | $y_i$ | $y_i x_i$ | $y_i x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,50 | 1,5 | 2,25 | 3,375 | 5,0625 | 6,20 | 9,300 | 13,950 |
| 1 | 1,00 | 1,1 | 1,21 | 1,331 | 1,4641 | 3,45 | 3,795 | 4,174 |
| 2 | 1,00 | 0,7 | 0,49 | 0,343 | 0,2401 | 2,00 | 1,400 | 0,980 |
| 3 | 1,00 | 0,3 | 0,09 | 0,027 | 0,0081 | 1,80 | 0,540 | 0,162 |
| 4 | 1,00 | —0,1 | 0,01 | —0,001 | 0,0001 | 2,40 | — 0,240 | 0,024 |
| 5 | 1,00 | —0,5 | 0,25 | —0,125 | 0,0625 | 4,55 | — 2,275 | 1,138 |
| 6 | 1,00 | —1,0 | 1,00 | —1,000 | 1,0000 | 8,85 | — 8,850 | 8,850 |
| 7 | 0,50 | —1,5 | 2,25 | —3,375 | 5,0625 | 15,70 | —23,550 | 35,325 |
| 8 | 0,25 | —2,0 | 4,00 | —8,000 | 16,0000 | 24,40 | —48,800 | 97,600 |

Получаем

$$S'_0 = 7{,}250; \qquad S' = 0; \qquad S'_2 = 6{,}300;$$

$$S'_3 = -1{,}425; \quad S'_4 = 11{,}837;$$

$$v'_0 = 40{,}100; \qquad v'_1 = -24{,}955; \quad v'_2 = 64{,}366.$$

2. Составляем систему нормальных уравнений, причем значения $v'_0$, $v'_1$, $v'_2$ пока числовыми значениями не заменяем:

$$7{,}250 a_0 + 0 \qquad + \ 6{,}300 a_2 = v'_0, \tag{I}$$

$$0 \quad + 6{,}300 a_1 - \ 1{,}425 a_2 = v'_1, \tag{II}$$

$$6{,}300 a_0 - 1{,}425 a_1 + 11{,}837 a_2 = v'_2. \tag{III}$$

Решаем систему методом исключения, последовательно нумеруя получающиеся уравнения, по схеме, которая подробно была описана в примере 34. 1:

$a_0 + 0{,}86897 a_2 = 0{,}13793 v'_0$ [уравнение (I) : 7,250], (IV)

$a_1 - 0{,}22619 a_2 = 0{,}15873 v'_1$ [уравнение (II) : 6,300], (V)

$6{,}300 a_0 + 5{,}4745 a_2 = 0{,}86897 v'_0$ [уравнение (III) $\times$ 6,300], (VI)

$1{,}425 a_1 - 0{,}32232 a_2 = 0{,}22619 v'_1$ [уравнение (V) $\times$ 1,425], (VII)

$6{,}0402a_2 = v_2' - 0{,}86897v_0' +$

$+ 0{,}22619v_1'$ [уравнение (III) + (VI) — (VII)], (VIII)

$a_2 = 0{,}16556v_2' - 0{,}14386v_0' +$

$+ 0{,}037447v_1'$ [уравнение (VIII) : 6,0402], (IX)

$a_1 = 0{,}037447v_2' + 0{,}16720v_1' -$

$- 0{,}032540v_0'$ [из уравнения (V)], (X)

$a_0 = -0{,}14386v_2' - 0{,}032540v_1' +$

$+ 0{,}26294v_0'$ [из уравнения (IV)], (XI)

3. Подставляем в уравнения (IX), (X), (XI) числовые значения $v_k'$ для определения значений коэффициентов $a_k$, а также подставляем в уравнение (XI) вместо $v_0' \sim 1$, вместо $v_1'$ и $v_2' \sim 0$; в уравнение (X) вместо $v_1' \sim 1$, вместо $v_0'$ и $v_2' \sim 0$; в уравнение (IX) вместо $v_2' \sim 1$, вместо $v_0'$ и $v_1' \sim 0$ для определения величин $M_{k,\,k}$. В результате получаем:

$$a_0 = 2{,}0963; \qquad M_{0,\,0} = 0{,}26294;$$
$$a_1 = -3{,}0671; \qquad M_{1,\,1} = 0{,}16720;$$
$$a_2 = 3{,}9531; \qquad M_{2,\,2} = 0{,}16556.$$

4. Вычисляем подходящие значения дисперсий отдельных измерений $\tilde{\sigma}_i^2$ и дисперсий $\tilde{\sigma}_{a_k}^2$ коэффициентов $a_k$ по формулам (11), (12), (8):

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{S_{\min}}{n-m} \cdot \frac{1}{p_i^2}, \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8)$$

где

$$S_{\min} = \sum_{i=0}^{8} p_i^2 \varepsilon_i^2,$$

$$\varepsilon_i = \bar{y}_i - y_i,$$

$$\bar{y} = 2{,}0963 - 3{,}0671x + 3{,}9531x^2,$$

$$n = 8, \qquad m = 2,$$

$$\tilde{\sigma}_{a_k}^2 = M_{k,\,k}\frac{S_{\min}}{n-m}, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

Выполняя вычисления, заполняем табл. 82.

*Таблица 82*

| $i$ | $y_i$ | $a_0 + a_1x$ | $a_2x^2$ | $\bar{y}_i$ | $\varepsilon_i$ | $\varepsilon_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6,20 | —2,5044 | 8,8945 | 6,390 | 0,190 | 0,0361 |
| 1 | 3,45 | —1,2775 | 4,7833 | 3,506 | 056 | 0031 |
| 2 | 2,00 | —0,0507 | 1,9370 | 1,886 | —114 | 0130 |
| 3 | 1,80 | 1,1762 | 0,3558 | 1,532 | —268 | 0718 |
| 4 | 2,40 | 2,4030 | 0,0395 | 2,442 | 042 | 0018 |
| 5 | 4,55 | 3,6298 | 0,9883 | 4,618 | 068 | 0046 |
| 6 | 8,85 | 5,1634 | 3,9531 | 9,116 | 266 | 0708 |
| 7 | 15,70 | 6,6970 | 8,8945 | 15,592 | —108 | 0117 |
| 8 | 24,40 | 8,2305 | 15,8124 | 24,043 | —0,357 | 0,1274 |
| | | | | | $S_{\min} = 0{,}2208$ | |

В результате имеем:

$$S_{\min} = 0{,}2208;\ \tilde{\sigma}_0^2 = \tilde{\sigma}_7^2 = 0{,}0736;\ \tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{\sigma}_2^2 = \tilde{\sigma}_3^2 = \tilde{\sigma}_4^2 =$$

$$= \tilde{\sigma}_5^2 = \tilde{\sigma}_6^2 = 0{,}0368;\quad \tilde{\sigma}_8^2 = 0{,}1472;\quad \tilde{\sigma}_{a_0}^2 = 0{,}00967;$$

$$\tilde{\sigma}_{a_1}^2 = 0{,}00615;\quad \tilde{\sigma}_{a_2}^2 = 0{,}00599;$$

$$\tilde{\sigma}_{a_0} = 0{,}0983;\ \tilde{\sigma}_{a_1} = 0{,}0784;\quad \tilde{\sigma}_{a_2} = 0{,}0774.$$

Задачи на вычисление коэффициентов аппроксимирующего многочлена при различной точности отдельных измерений, характеризуемой различными «весами» $p_i^2$ или различным количеством измерений $n_i$ при каждом из значений аргумента $x_i$, приведены в разделе «Задачи для упражнений» (34. 7, 34. 8, 34. 11).

Пример 34. 5. Электрическое сопротивление молибдена $\varrho$ в зависимости от температуры T °K характеризуется данными табл. 83.

Считая справедливой линейную зависимость вида

$$\varrho = a_0 + a_1 T,$$

определить коэффициенты $a_0$ и $a_1$ по способу наименьших квадратов. Учесть то обстоятельство, что ошибкам измерения подвержены значения $\varrho$ и значения $T$; эти ошибки характеризуются средними квадратическими отклонениями $\sigma_\varrho = 0{,}8$, $\sigma_T = 15°$. Найти наибольшее отклонение расчетной величины $\varrho$ от опытной.

*Таблица 83*

| $T$, °K | $\varrho$, *мком·см* | $T$, °K | $\varrho$, *мком·см* |
|---|---|---|---|
| 2289 | 61,97 | 1489 | 37,72 |
| 2132 | 57,32 | 1286 | 32,09 |
| 1988 | 52,70 | 1178 | 28,94 |
| 1830 | 47,92 | | |

*Решение*. 1. Вычисляем величины $S_k$, $r_k$, $v_1$ по формулам (37)

$$S_k = \sum_{i=0}^{n} T_i^k \qquad (k = 1;\ 2),$$

$$r_k = \sum_{i=0}^{n} \varrho_i^k \qquad (k = 1;\ 2),$$

$$v_1 = \sum_{i=0}^{n} \varrho_i T_i,$$

где $n = 6$ (см. табл. 84).

*Таблица 84*

| $i$ | $T$ | $T^2 \cdot 10^{-2}$ | $\varrho$ | $\varrho^2$ | $T\varrho \cdot 10^{-1}$ | $\bar{\varrho}$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2289 | 52 395 | 61,97 | 3840,3 | 14 185 | 61,82 | —0,15 |
| 1 | 2132 | 45 454 | 57,32 | 3285,6 | 12 221 | 57,15 | —0,17 |
| 2 | 1988 | 39 521 | 52,70 | 2777,3 | 10 477 | 52,86 | —0,16 |
| 3 | 1830 | 33 489 | 47,92 | 2296,3 | 8769 | 48,15 | —0,23 |
| 4 | 1489 | 22 171 | 37,72 | 1422,8 | 5617 | 38,00 | —0,28 |
| 5 | 1286 | 16 538 | 32,09 | 1029,8 | 4127 | 31,95 | —0,14 |
| 6 | 1178 | 13 877 | 28,94 | 837,5 | 3409 | 28,73 | —0,21 |
| | $S_1 = 12\,192$ | $S_2 = 22\,344 \cdot 10^3$ | $r_1 = 318{,}66$ | $r_2 = 15\,490$ | $v_1 = 58\,805 \cdot 10$ | | |

Получаем

$$S_1 = 12\,192; \qquad S_2 = 22\,344 \cdot 10^3;$$
$$r_1 = 318{,}66; \qquad r_2 = 15\,490;$$
$$v_1 = 58\,805 \cdot 10.$$

2. Составляем уравнение вида (35) для отыскания коэффициента $a_1$

$$a_1^2 + \frac{\left[S_1^2 - (n+1)\,S_2\right]\frac{\sigma_\varrho^2}{\sigma_T^2} - \left[r_1^2 - (n+1)\,r_2\right]}{S_1 r_1 - (n+1)\,v_1} - \frac{\sigma_\varrho^2}{\sigma_T^2} = 0.$$

Имеем

$$\frac{\sigma_\varrho^2}{\sigma_T^2} = 0{,}0028444;$$

$$S_1^2 - (n+1)\,S_2 = -7763 \cdot 10^3;$$
$$r_1^2 - (n+1)\,r_2 = -6886;$$
$$S_1 r_1 - (n+1)\,v_1 = -23\,125 \cdot 10.$$

Уравнение (35) принимает вид

$$a_1^2 + 0{,}065708\,a_1 - 0{,}0028444 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим два значения $a_1$:

$$a_{11} = 0{,}029786; \quad a_{12} = -0{,}095494.$$

Очевидно, что корень $a_{12}$ не годится, так как он отрицателен, а из данных табл. 83 легко заключить, что при возрастании $T$ величина $\varrho$ возрастает. Следовательно,

$$a_1 = 0{,}029786.$$

3. Вычисляем коэффициент $a_0$ по формуле (36)

$$a_0 = \frac{r_1 - a_1 S_1}{n+1};$$

получаем

$$a_0 = -6{,}3558.$$

4. Вычисляем в табл. 84 значения $\varepsilon_i$:

$$\varepsilon_i = \overline{\varrho}_i - \varrho_i,$$

где $\overline{\varrho}$ — расчетные значения величины $\varrho$

$$\overline{\varrho} = -6{,}3558 + 0{,}029786\,T.$$

На основании данных табл. 84 находим, что

$$|\varepsilon_{max}| = 0{,}28.$$

### Задачи для упражнений

34. 1. Результаты равноточных измерений глубины $h$ проникания тела в преграду при различных значениях его удельной энергии $E$ (энергии, приходящейся на 1 $см^2$ площади соударения) приведены в табл. 85.

Подобрать линейную зависимость вида

$$h = a_0 + a_1 E,$$

и определить подходящие значения $\tilde{\sigma}^2_{a_k}$ дисперсий коэффициентов $a_k$ и подходящее значение $\tilde{\sigma}^2$ дисперсии, характеризующей точность отдельного измерения.

*Таблица 85*

| $i$ | $E_i$ | $h_i$ | $i$ | $E_i$ | $h_i$ | $i$ | $E_i$ | $h_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 41 | 4 | 5 | 139 | 20 | 10 | 250 | 31 |
| 1 | 50 | 8 | 6 | 154 | 19 | 11 | 269 | 36 |
| 2 | 81 | 10 | 7 | 180 | 23 | 12 | 301 | 37 |
| 3 | 104 | 14 | 8 | 208 | 26 | | | |
| 4 | 120 | 16 | 9 | 241 | 30 | | | |

34. 2. Решить предыдущую задачу, перенеся для упрощения вычислений начало отсчета аргумента $E$ в точку, равную среднему арифметическому значению величин $E$, и начало отсчета величин $h$ в точку, близкую к математическому ожиданию $h$.

34. 3. Высота $h$ падения тела за время $t$ определяется формулой

$$h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

где $a_0$ — путь, пройденный телом к моменту начала отсчета времени;
$a_1$ — скорость тела в момент начала отсчета времени;
$a_2$ — половина ускорения силы тяжести $g$.

Определить коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$ и оценить точность определения ускорения силы тяжести указанным методом на основании серии равноточных измерений, результаты которых приведены в табл. 86.

*Таблица 86*

| $t$, сек. | $h$, *см* | $t$, сек. | $h$, *см* | $t$, сек. | $h$, *см* | $t$, сек. | $h$, *см* | $t$, сек. | $h$, *см* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{30}$ | 11,86 | $\frac{4}{30}$ | 26,69 | $\frac{7}{30}$ | 51,13 | $\frac{10}{30}$ | 85,44 | $\frac{13}{30}$ | 129,54 |
| $\frac{2}{30}$ | 15,67 | $\frac{5}{30}$ | 33,71 | $\frac{8}{30}$ | 61,49 | $\frac{11}{30}$ | 99,08 | $\frac{14}{30}$ | 146,48 |
| $\frac{3}{30}$ | 20,60 | $\frac{6}{30}$ | 41,93 | $\frac{9}{30}$ | 72,90 | $\frac{12}{30}$ | 113,77 | | |

34. 4. Решить предыдущую задачу, используя ортогональные полиномы Чебышева.

34. 5. Равноточные измерения $y$ некоторой величины через равные интервалы аргумента $x$ дали результаты, приведенные в табл. 87.

*Таблица 87*

| $x$ | —3 | —2 | —1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | —0,71 | —0,01 | 0,51 | 0,82 | 0,88 | 0,81 | 0,49 |

Подобрать многочлен 2-й степени вида

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

и определить подходящие значения $\tilde{\sigma}^2$ дисперсии отдельного измерения и $\tilde{\sigma}^2_{a_k}$ дисперсий коэффициентов $a_k$.

34. 6. Величина износа резца $y$, определяемая его толщиной (в миллиметрах), в зависимости от времени работы $t$ (в часах) представлена в табл. 88.

*Таблица 88*

| $t$ | $y$ | $t$ | $y$ | $t$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 30,0 | 6 | 27,5 | 12 | 26,1 |
| 1 | 29,1 | 7 | 27,2 | 13 | 25,7 |
| 2 | 28,4 | 8 | 27,0 | 14 | 25,3 |
| 3 | 28,1 | 9 | 26,8 | 15 | 24,8 |
| 4 | 28,0 | 10 | 26,5 | 16 | 24,0 |
| 5 | 27,7 | 11 | 26,3 | | |

Подобрать с помощью ортогональных полиномов Чебышева зависимость $y$ от $t$ в виде многочленов 1 и 3-й степеней. Считая справедливой полученную зависимость, оценить в обоих случаях величину дисперсии отдельного измерения и построить доверительные интервалы для среднего квадратического отклонения $\sigma$ при надежности $\alpha = 0{,}90$.

34. 7. Величины сжатия $x_i$ стального бруска под действием нагрузки $y_{ij}$ приведены в табл. 89. Каждому значению $x_i$ соответствует от 3 до 5 зна-

*Таблица 89*

| $i$ | $x_i$, *мм* | $y_{ij}$, *кг* | | | | | $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $j=1$ | $j=2$ | $j=3$ | $j=4$ | $j=5$ | |
| 0 | 5 | 50 | 61 | 43 | — | — | 3 |
| 1 | 10 | 73 | 78 | 33 | — | — | 3 |
| 2 | 20 | 145 | 137 | 151 | — | — | 3 |
| 3 | 40 | 272 | 268 | 259 | 254 | 265 | 5 |
| 4 | 60 | 380 | 366 | 383 | 371 | 376 | 5 |

чений нагрузок, полученных в ряде опытов. Определить математические ожидания $y_i$ нагрузок при каждом из значений сжатия $x_i$ и соответствующие подходящие значения дисперсий $\tilde{\sigma}_i^2$, считая, что величина $y$ связана с $x$ линейной зависимостью

$$y = a_0 + a_1 x,$$

отвечающей закону Гука; построить доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$, а также доверительные границы для неизвестного истинного значения нагрузки при $x$ от 5 до 60 *мм* при надежности $\alpha = 0{,}90$.

«Веса» измерений, отвечающих каждому значению сжатия $x_i$, принять обратно пропорциональными величинами $\tilde{\sigma}_i^2$.

34. 8. Величина $y$ измерялась при ряде значений $x$. В табл. 90 приведены средние значения $y_i$, отвечающие значениям аргумента $x_i$, а также числа $n_i$ измерений величины $y$ при $x = x_i$.

Построить аппроксимирующий многочлен 2-й степени и оценить средние квадратические отклонения коэффициентов $a_k$.

*Таблица 90*

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $n_i$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,10 | 21 | 3 | 4 | 0,32 | 11 |
| 1 | 2 | 0,19 | 8 | 4 | 5 | 0,39 | 11 |
| 2 | 3 | 0,24 | 13 | 5 | 6 | 0,48 | 10 |

34. 9. Себестоимость $y$ (в рублях) одного экземпляра книги в зависимости от тиража $x$ (тысячи экземпляров) характеризуется данными, собранными издательством в течение ряда лет (табл. 91). Подобрать коэффициенты для гиперболической зависимости вида

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$$

*Таблица 91*

| $x$ | $y$ | $x$ | $y$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10,15 | 10 | 2,11 | 100 | 1,21 |
| 2 | 5,52 | 20 | 1,62 | 200 | 1,15 |
| 3 | 4,08 | 30 | 1,41 | | |
| 5 | 2,85 | 50 | 1,30 | | |

и построить доверительные интервалы для коэффициентов $a_k$, а также для величины $y$ при различных значениях $x_i$ при надежности $\alpha = 0,95$.

34. 10. Конденсатор заряжен до некоторого напряжения, отвечающего моменту начала отсчета времен, после чего он разряжается через некоторое сопротивление; напряжение $U$ измеряется с округлением до 5 *в* в различные моменты времени. Результаты измерений приведены в табл. 92. Известно, что зависимость $U$ от $t$ имеет вид

$$U = U_0 e^{-at}.$$

*Таблица 92*

| $i$ | $t_i$, сек. | $U_i$ | $i$ | $t_i$, сек. | $U_i$ | $i$ | $t_i$, сек. | $U_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 100 | 4 | 4 | 30 | 8 | 8 | 10 |
| 1 | 1 | 75 | 5 | 5 | 20 | 9 | 9 | 5 |
| 2 | 2 | 55 | 6 | 6 | 15 | 10 | 10 | 5 |
| 3 | 3 | 40 | 7 | 7 | 10 | | | |

Требуется выбрать коэффициенты $U_0$ и $a$, составить доверительные интервалы для $U_0$ и $a$ при надежности $\alpha = 0,90$.

34. 11. В результате продувок в аэродинамической трубе для модели самолета были получены данные (табл. 93) о зависимости угла отклонения руля высоты $\delta_В$, обеспечивающего прямолинейный горизонтальный полет, от скорости воздушного потока $v$.

*Таблица 93*

| $i$ | $v_i$, *м/сек* | $\delta_в^\circ$ | $n_i$ | $i$ | $v_i$, *м/сек* | $\delta_в^\circ$ | $n_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 80 | —3°44′ | 8 | 5 | 140 | —0°38′ | 6 |
| 1 | 90 | —2°58′ | 12 | 6 | 160 | —0°07′ | 9 |
| 2 | 100 | —2°16′ | 11 | 7 | 180 | 0°10′ | 12 |
| 3 | 110 | —1°39′ | 9 | 8 | 200 | 0°35′ | 10 |
| 4 | 120 | —1°21′ | 14 | | | | |

Через $n_i$ в таблице обозначены числа измерений при данном значении скорости $v_i$. Известно, что балансировочная кривая представляет собой зависимость

$$\delta_в = a_0 + \frac{a_1}{v^2}.$$

Найти коэффициенты $a_k$ и подходящие значения средних квадратических отклонений этих коэффициентов.

34. 12. Результаты измерения $x$ размера деталей разбиты на интервалы и для них вычислены частости $p_i^*$, которые приведены в табл. 94.

*Таблица 94*

| Интервал $x$ | $p_i^*$ | Интервал $x$ | $p_i^*$ | Интервал $x$ | $p_i^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 50—60 | 0,00333 | 100—110 | 0,18667 | 150—160 | 0,05333 |
| 60—70 | 0,00667 | 110—120 | 0,20333 | 160—170 | 0,01333 |
| 70—80 | 0,03000 | 120—130 | 0,16333 | 170—180 | 0,00667 |
| 80—90 | 0,07667 | 130—140 | 0,08333 | | |
| 90—100 | 0,11000 | 140—150 | 0,06333 | | |

Считая, что значения $p_i^*$ относятся к серединам интервалов $x_i$, подобрать по способу наименьших квадратов параметры $p_0$, $\bar{x}$, $\sigma$ для зависимости

$$p = p_0 e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

аппроксимирующей опытное распределение, применив ортогональные полиномы Чебышева. Проверить, является ли полученная зависимость дифференциальным законом нормального распределения величины $x$, т. е. выполняется ли равенство

$$p_0 = \frac{10}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}.$$

34. 13. В табл. 95 приведены измеренные значения некоторой величины $y$ в зависимости от времени $t$ (сутки).

Подобрать уравнение вида

$$\bar{y} = a \sin(\omega t - \varepsilon),$$

где $\omega$ — величина 360 град./сутки; определению подлежат коэффициенты $a$

и $\varepsilon$. При этом предварительно выбрать приближенное значение $\varepsilon'$ и представить $y$ в виде

$$y = a \sin \theta + b \cos \theta,$$

где

$$\theta = \omega t - \varepsilon',$$
$$b = -a(\varepsilon - \varepsilon').$$

Найти наибольшее отклонение измеренной величины $y$ от аппроксимирующей функции $\bar{y}$.

*Таблица 95*

| $t$ | $y$ | $t$ | $y$ | $t$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | —25 | 0,35 | 26 | 0,70 | —16 |
| 05 | —26 | 40 | 32 | 75 | 3 |
| 10 | — 4 | 45 | 40 | 80 | —21 |
| 15 | 7 | 50 | 32 | 85 | —22 |
| 20 | 6 | 55 | 21 | 90 | —29 |
| 25 | 13 | 60 | 11 | 0,95 | —32 |
| 0,30 | 30 | 0,65 | — 5 | | |

34. 14. В результате опыта получены следующие значения функции $y = f(x)$ с периодом $2\pi$ (табл. 96).

*Таблица 96*

| $x_i$, град. | $y_i$ | $x_i$, град. | $y_i$ | $x_i$, град. | $y_i$ | $x_i$, град. | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 1,31 | 105 | 2,12 | 195 | 2,89 | 285 | —2,30 |
| 30 | 1,84 | 120 | 2,38 | 210 | 2,01 | 300 | —2,22 |
| 45 | 2,33 | 135 | 2,98 | 225 | 0,92 | 315 | —1,57 |
| 60 | 2,21 | 150 | 3,44 | 240 | —0,24 | 330 | —1,03 |
| 75 | 2,24 | 165 | 3,51 | 255 | —1,23 | 345 | —0,01 |
| 90 | 2,39 | 180 | 3,33 | 270 | —1,98 | 360 | —0,82 |

Найти представление этой функции многочленом

$$\bar{y} = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x;$$

найти наибольшее отклонение измеренной величины $y$ от аппроксимирующей функции $\bar{y}$.

# ГЛАВА VIII

# СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

## § 35. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

### Основные формулы

Математическим ожиданием $\bar{x}(t)$ случайной функции $X(t)$ называется функция, ординаты которой равны математическим ожиданиям ее ординат, т. е.

$$\bar{x}(t) = M[X(t)],$$

где $M$ — обозначение операции нахождения математического ожидания.

Корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$K_x(t_1, t_2) = M\left\{\left[X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)\right]\left[X(t_2) - \bar{x}(t_2)\right]\right\},$$

где знаком * отмечены комплексно-сопряженные величины.[1]

Для стационарных функций

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1), \quad \bar{x}(t) = \text{const}.$$

Дисперсия ординаты случайной функции связана с $K_x(t_1, t_2)$ формулой $D[X(t)] = \sigma^2_{x(t)} = K_x(t, t)$. Нормированная корреляционная функция

$$k_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}}.$$

Полной характеристикой случайной функции является совокупность законов распределения

$$f(x_1/t_1),\ f(x_1, x_2/t_1, t_2),\ f(x_1, x_2, x_3/t_1, t_2\ t_3),\ \ldots$$

различного порядка, т. е. законов распределения ординат случайной функции в моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots$ Математическое ожидание $\bar{x}(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ определяются первыми двумя законами распределения $f(x_1/t_1)$ и $f(x_1, x_2/t_1, t_2)$ по формулам (для непрерывных случайных функций) [2]

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/t)\,dx,$$

$$K_x(t_1, t_2) = \int\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1, x_2/t_1, t_2)dx_1\,dx_2 - \bar{x}(t_1)\,\bar{x}(t_2).$$

---

[1] В задачах, если это не оговорено, $X(t)$ считается вещественной.

[2] Считаем $X(t)$ вещественной.

Закон распределения любого порядка нормального случайного процесса определяется функциями $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ по формулам для закона распределения системы нормальных случайных величин, математические ожидания которых

$$\bar{x}(t_1), \bar{x}(t_2), \bar{x}(t_3), \ldots,$$

а элементы корреляционной матрицы $k_{jl} = K_x(t_j, t_l)$ для любых значений индексов $j, l$.

Корреляционная функция связи $R_{xy}(t_1, t_2)$ двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ определяется формулой

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\{[X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)][Y(t_2) - \bar{y}(t_2)]\} =$$
$$= M\{X^*(t_1) Y(t_2)\} - \bar{x}^*(t_1)\bar{y}(t_2).$$

Для стационарных процессов

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1).$$

## Решение типовых задач

Задачи данного параграфа принадлежат к двум основным типам. В задачах первого типа требуется определить корреляционную функцию случайной функции, использовав свойства ее ординат, или установить общие свойства корреляционной функции. При решении этих задач нужно непосредственно исходить из определения корреляционной функции. В задачах второго типа требуется найти вероятность того, что ординаты случайной функции примут определенные значения. Для решения этих задач необходимо воспользоваться соответствующим законом распределения, определяемым значением корреляционной функции.

Пример 35. 1. Определить корреляционную функцию $K_x(t_1, t_2)$, если

$$X(t) = \sum_{j=1}^{k} [A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t],$$

где $\omega_j$ — заданные числа, а вещественные случайные величины $A_j$ и $B_j$ взаимно не связаны, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, определяемые равенствами

$$D[A_j] = D[B_j] = \sigma_j^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

*Решение.* Так как $\bar{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} [\bar{a}_j \cos \omega_j t + \bar{b}_j \sin \omega_j t] = 0$, то по определению корреляционной функции

$$K_x(t_1, t_2) = M\left\{\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} [A_j \cos \omega_j t_1 + B_j \sin \omega_j t_1] \times \right.$$
$$\left. \times [A_l \cos \omega_l t_2 + B_l \sin \omega_l t_2]\right\}.$$

Раскрывая скобки и применяя теорему о математическом ожидании суммы, замечаем, что все слагаемые, содержащие множители вида

$M[A_jA_l]$, $M[B_jB_l]$ при $j \neq l$ и вида $M[A_jB_l]$ при любых $j$ и $l$ равны нулю, а $M[A_j^2] = M[B_j^2] = \sigma_j^2$. Поэтому

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 (\cos \omega_j t_1 \cos \omega_j t_2 + \sin \omega_j t_1 \sin \omega_j t_2) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2 \cos \omega_j (t_2 - t_1).$$

Пример 35. 2. $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, математическое ожидание которой равно нулю. Доказать, что если

$$Z(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{X(t)\,X(t+\tau)}{|X(t)\,X(t+\tau)|}\right],$$

то

$$\bar{z}(t) = \frac{1}{\pi} \arccos[-k_x(\tau)],$$

где $k_x(\tau)$ — нормированная корреляционная функция $X(t)$.

*Решение.* Пользуясь тем, что $X(t)$ нормальна, закон распределения второго порядка может быть представлен в виде

$$f(x_1, x_2/t, t+\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-k_x^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2k_x(\tau)\,x_1x_2}{2\sigma_x^2\left[1-k_x^2(\tau)\right]}\right\}.$$

Искомое математическое ожидание может быть представлено в виде

$$\bar{z}(t) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{x_1x_2}{|x_1x_2|}\right] f(x_1, x_2/t, t+\tau)\,dx_1\,dx_2.$$

Так как $\frac{1}{2}\left[1 + \frac{x_1x_2}{|x_1x_2|}\right]$ тождественно равно нулю в том случае, когда знаки у ординат $x_1$ и $x_2$ различны, и равно единице в противоположном случае, то

$$\bar{z}(t) = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f(x_1, x_2/t, t+\tau)\,dx_1\,dx_2 + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x_1, x_2/t, t+\tau)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= 2\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} f(x_1, x_2/t, t+\tau)\,dx_1\,dx_2,$$

что после выполнения интегрирования дает результат, указанный в условии задачи. (При интегрировании удобно ввести новые переменные $r$, $\varphi$, положив $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$.)

## Задачи для упражнений

35. 1. Доказать, что: а) $|K_x(t_1, t_2)| \leqslant \sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}$; б) $|K_x(t_1, t_2)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\sigma^2_{x(t_1)} + \sigma^2_{x(t_2)}\right]$.

35. 2. Доказать, что $|R_{xy}(t_1, t_2)| \leqslant \sigma_{x(t_1)}\sigma_{y(t_2)}$.

35. 3. Доказать, что корреляционная функция не изменяется от добавления к случайной функции любой неслучайной функции.

35. 4. Найти дисперсию случайной функции $X(t)$, ординаты которой изменяются скачками на величины $\Delta_j$ в случайные моменты времени. Число скачков, происходящих в течение отрезка времени $\tau$, подчиняется

закону Пуассона с постоянной $a\tau$, а величины скачков $\Delta_j$ взаимно независимы и подчиняются нормальному закону с постоянной дисперсией $\sigma^2$ и нулевым математическим ожиданием.

35. 5. Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, которая может принимать два значения: $+1$ и $-1$, а число перемен знака функции подчиняется закону Пуассона с постоянной временно́й плотностью $a$, а $\bar{x}(t)$ можно считать равным нулю.

35. 6. Случайная функция $X(t)$ состоит из отрезков горизонтальных прямых единичной длины, ординаты которых взаимно независимы, могут с одинаковой вероятностью иметь любой знак, а их абсолютные значения подчиняются закону распределения

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{\Gamma(x+1)} e^{-\lambda}, \quad x \geqslant 0 \text{ (гамма-распределение).}$$

Определить $K_x(\tau)$.

35. 7. Корреляционная функция угла крена корабля $\Theta(t)$ имеет вид

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau.$$

Определить вероятность того, что в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$ угол крена $\Theta(t_2)$ будет больше 15°, если $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\bar{\theta} = 0$, $\Theta(t_1) = 5°$, $\tau = 2$ сек., $A = 30$ град.², $\alpha = 0{,}02$ 1/сек., $\beta = 0{,}75$ 1/сек.

35. 8. Использование эхолота с корабля, испытывающего бортовую качку, возможно, если угол крена $|\Theta(t)| \leqslant \theta_0$. Момент первого измерения выбирается так, чтобы это условие выполнялось. Определить вероятность того, что второе измерение может быть произведено через время $\tau_0$ (сек.), если $\Theta(t)$ — нормальная функция, $\bar{\theta} = 0$, а дисперсия $D[\Theta(t)] = \sigma_\theta^2$ и нормированная корреляционная функция $k(\tau) = \frac{K_\theta(\tau)}{\sigma_\theta^2}$ даны.

35. 9. Корреляционная функция угла крена $\Theta(t)$ $K_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|} \times \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$, где $A = 36$ град.², $\alpha = 0{,}25$ 1/сек., $\beta = 1{,}57$ 1/сек. В момент времени $t$ угол крена равен 2°, $\dot{\Theta}(t) \geqslant 0$. Найти вероятность того, что в момент времени $t+2$ сек. угол крена по величине будет меньше 10°, если $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\theta(t) = 0$.

35. 10. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной функции $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — числовые (не случайные) функции, а $K_x(t_1, t_2)$ и $\bar{x}(t)$ известны.

35. 11. Найти закон распределения первого порядка для ординат случайной функции

$$X(t) = A(t)\cos[\omega t + \Theta(t)],$$

если законы распределения первого порядка для случайных функций $A(t)$ и $\Theta(t)$ имеют вид

$$f_a(a/t) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \ (a \geqslant 0), \quad f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi);$$

$\omega$ — постоянная, а для одного и того же момента времени $A(t)$ и $\Theta(t)$ взаимно независимы.

35. 12. Случайные точки распределяются на числовой оси таким образом, что вероятность $P_n$ появления в заданном интервале оси $\tau$ $n$ точек

определяется законом Пуассона $P_n = \frac{(a\tau)^n}{n!} e^{-a\tau}$, где $a$ — положительная постоянная. Определить закон распределения первого порядка для случайной функции $X(m)$, дающей расстояние между $m$-й и $(m+n+1)$-й случайными точками.

35. 13. Определить закон распределения ординаты случайной функции $U(x, y)$ двух переменных $x$, $y$, если

$$U(x, y) = \zeta(x + \xi_0, y + \eta_0) - \zeta(x, y),$$

корреляционная функция $K_\zeta(\xi, \eta)$, определяемая равенством

$$K_\zeta(\xi, \eta) = M\{[\zeta(x, y) - \bar\zeta(x, y)][\zeta(x+\xi, y+\eta) - \bar\zeta(x+\xi, y+\eta)]\},$$

дана в виде

$$K_\zeta(\xi, \eta) = Ae^{-\alpha_1|\xi| - \alpha_2|\eta|} \cos\beta_1\xi \cos\beta_2\eta;$$

$\zeta(x, y)$ — нормальная случайная функция;

$$A = 100;\ \alpha_1 = 0{,}2;\ \alpha_2 = 0{,}1;\ \ \beta_1 = 0{,}5;\ \beta_2 = 1{,}0;\ \xi_0 = 1;\ \eta_0 = 2.$$

## § 36. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

### Основные формулы

Линейным однородным оператором $L_0$ называется совокупность таких математических действий, для которой выполняются условия

$$L_0 A\varphi(t) = AL_0\varphi(t), \quad L_0[\varphi_1(t) + \varphi_2(t)] = L_0\varphi_1(t) + L_0\varphi_2(t),$$

где $A$ — любая постоянная;
$\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — любые функции.

Линейным неоднородным оператором L называется оператор, связанный с линейным однородным оператором соотношением

$$L\varphi(t) = L_0\varphi(t) + F(t),$$

где $\varphi(t)$ — любая, а $F(t)$ — заданная функция.

Если $Y(t) = L_0X(t)$, то

$$\bar y(t) = L_0\bar x(t);\ K_y(t_1, t_2) = L_{t_1}L_{t_2}K_x(t_1, t_2),$$

где индексы $t_1$ и $t_2$ в обозначении оператора L показывают, что в первом случае оператор действует по переменной $t_1$, а во втором случае — по переменной $t_2$.

Если L — неоднородный оператор, соответствующий однородному оператору $L_0$, а $Z(t) = LX(t)$, то

$$\bar z(t) = L\bar x(t) = L_0\bar x(t) + F(t),$$
$$K_z(t_1, t_2) = L_{0t_1}L_{0t_2}K_x(t_1, t_2),$$

т. е. корреляционная функция результата применения линейного неоднородного оператора к заданной случайной функции равняется корреляционной функции результата применения к данной случайной функции соответствующего линейного однородного оператора.

Случайная функция дифференцируема, если ее корреляционная функция имеет вторую смешанную частную производную при равных значениях ее аргументов, что для стационарных функций эквивалентно существованию второй производной от $K(\tau)$ при $\tau = 0$.

Нахождение математического ожидания и корреляционной функции результата применения нелинейного оператора к случайной функции, вероятностные свойства которой известны, значительно более сложно. Исключением является только нормальный случайный процесс для некоторых типов нелинейных операторов. Например, если $X(t)$ — нормальная случайная функция [считаем $X(t)$ вещественной], а $Y(t) = X^2(t)$, то

$$\bar{y}(t) = M[X^2(t)] = D[X(t)] + \bar{x}^2(t),$$

$$K_y(t_1, t_2) = M\{X^2(t_1) X^2(t_2)\} - \{D[X(t_1)] + \bar{x}^2(t_1)\} \times$$
$$\times \{D[X(t_2)] + \bar{x}^2(t_2)\} = 2K_x^2(t_1, t_2),$$

так как математическое ожидание произведения четырех нормальных величин $X(t_1)$, $X(t_1)$, $X(t_2)$ и $X(t_2)$ может быть получено путем дифференцирования характеристической функции системы случайных величин (см. § 23).

Также может быть получено математическое ожидание и корреляционная функция существенно нелинейного выражения

$$Y(t) = \operatorname{sign} X(t),$$

если $X(t)$ нормальна (см. пример 36. 2).

## Решение типовых задач

Задачи данного параграфа могут быть решены путем использования общей формулы для корреляционной функции результата применения линейного оператора к случайной функции, однако в некоторых задачах удобнее исходить прямо из определения корреляционной функции. Второй путь является неизбежным, если помимо линейных операторов в данное выражение входят нелинейные операторы. Ниже рассмотрены примеры применения обоих этих способов решения.

Пример 36. 1. Определить среднее квадратическое отклонение угла $\Psi$ поворота гироскопа направления после 10 минут работы гироскопа, вследствие наличия случайного момента $M(t)$, возникающего на оси внутреннего карданова кольца, если уравнение, определяющее закон изменения $\Psi$, может быть принято в виде $\dot{\Psi}(t) = \frac{M(t)}{H}$, где кинетический момент $H = 2100$ *Гсмсек*, а

$$K_m(\tau) = n^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right);$$

$$n = 13{,}6 \ \textit{Гсм}, \quad \beta = 0{,}7\frac{1}{\text{сек.}}, \quad \alpha = 0{,}1\frac{1}{\text{сек.}}$$

*Решение*. Так как после интегрирования имеем (начальные условия, в соответствии со смыслом задачи, нулевые)

$\Psi(t) = \frac{1}{H}\int\limits_0^t M(t_1)\,dt_1$, т. е. $\Psi(t)$ связана с $M(t)$ линейным соотношением, то для корреляционной функции $K_\psi(t_1, t_2)$ получим

$$K_\psi(t_1, t_2) = \frac{1}{H^2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} K_m(t'' - t')\,dt''\,dt',$$

а для дисперсии

$$D[\Psi(t)] = \sigma^2_{\psi(t)} = \frac{1}{H^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t K_m(t''-t')\,dt''\,dt' =$$

$$= \frac{2}{H^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\,K_m(\tau)\,d\tau.$$

Так как

$$e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right) = -\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\frac{d^2}{d\tau^2}e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

то последний интеграл просто может быть вычислен по частям, что дает

$$D[\Psi(t)] = \frac{2n^2}{H^2(\alpha^2+\beta^2)}\left\{1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)\right\} \approx \frac{2n^2}{H^2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Подставляя числовые данные, получим $\sigma_\psi = 45'$.

Пример 36. 2. Определить дисперсию угла $\Psi$ поворота гироскопа направления через $T = 10$ мин. работы гироскопа, если угол $\Psi$ определяется уравнением

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{b}{H}\operatorname{sign}\dot{\Theta}(t),$$

где $\Theta(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, имеющая корреляционную функцию

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$$

$\overline{\theta} = 0$, $b$ и $H$ — постоянные.

*Решение.* Здесь, помимо линейных операций интегрирования и дифференцирования, в заданное выражение входит нелинейная операция sign. Поэтому, обозначив временно $\dot{\Theta}(t) = X(t)$, положим $Y(t) = \operatorname{sign} X(t)$. Пользуясь определением $K_y(\tau)$ как второго центрального смешанного момента случайных величин $Y_1 = \operatorname{sign} X(t)$ и $Y_2 = \operatorname{sign} X(t+\tau)$, получим

$$K_y(\tau) = 2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 - 2\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где закон распределения $f(x_1, x_2)$ — нормальный.

Подставляя значение этого закона распределения и переходя от прямоугольных координат $x_1$, $x_2$ к полярным, оба интеграла легко вычисляются и дают

$$K_y(\tau) = \frac{2}{\pi}\arcsin k_x(\tau),$$

где нормированная корреляционная функция $k_x(\tau)$ определяется формулой

$$k_x(\tau) = k_{\dot{\theta}}(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Искомая дисперсия

$$D[\Psi(t)] = \frac{2b^2}{H^2}\int_0^t (t-\tau)\,K_y(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{4b^2}{\pi H^2}\int_0^t (t-\tau)\arcsin\left[e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)\right]d\tau.$$

Пример 36. 3. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции

$$Y(t) = a(t)\,X(t) + b(t)\,\frac{dX(t)}{dt},$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — заданные (числовые) функции, а $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны.

*Решение.* Функция $Y(t)$ является результатом применения линейного оператора $\left[a(t) + b(t)\frac{d}{dt}\right]$ к случайной функции $X(t)$. Поэтому искомый результат может быть получен путем применения общих формул. Однако решение может быть найдено и путем непосредственного вычисления $\bar{y}(t)$ и $K_y(t_1, t_2)$. Имеем

$$\bar{y}(t) = M\left[a(t)\,X(t) + b(t)\,\frac{dX(t)}{dt}\right] = a(t)\,\bar{x}(t) + b(t)\,\frac{d\bar{x}(t)}{dt},$$

$$K_y(t_1,t_2) = M\left[\left\{a^*(t_1)\left[X^*(t_1) - \bar{x}^*(t_1)\right] + b^*(t_1)\left[\frac{dX^*(t_1)}{dt_1} - \frac{d\bar{x}^*(t_1)}{dt_1}\right]\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{a(t_2)\left[X(t_2) - \bar{x}(t_2)\right] + b(t_2)\left[\frac{dX(t_2)}{dt_2} - \frac{d\bar{x}(t_2)}{dt_2}\right]\right\}\right] =$$

$$= a^*(t_1)\,a(t_2)\,K_x(t_1, t_2) + a^*(t_1)\,b(t_2)\,\frac{\partial}{\partial t_2}K_x(t_1, t_2) +$$

$$+ b^*(t_1)\,a(t_2)\,\frac{\partial}{\partial t_1}K_x(t_1, t_2) + b^*(t_1)\,b(t_2)\,\frac{\partial^2}{\partial t_1\,\partial t_2}K_x(t_1, t_2).$$

## Задачи для упражнений

36. 1. Определить корреляционную функцию производной случайной функции $X(t)$, если

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

36. 2. Определить корреляционную функцию и дисперсию случайной функции

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

если

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

36. 3. $X(t)$ — стационарная случайная функция, корреляционная функция которой известна. Определить корреляционную функцию связи $X(t)$ и $\frac{dX(t)}{dt}$.

36. 4. Сколько производных имеет случайная функция $X(t)$, обладающая корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}?$$

36. 5. Сколько раз можно дифференцировать случайную функцию $X(t)$, если

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)?$$

36. 6. До какого порядка существуют производные случайной функции $X(t)$, если ее корреляционная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| - 2\alpha^2\tau^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 |\tau^3|\right)?$$

36. 7. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Определить корреляционную функцию связи

$$\dot{X}(t + t_0) \text{ и } X(t).$$

36. 8. Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Определить дисперсии функций

$$Y(t) = X(t + \tau) \text{ и } Z(t) = \dot{X}(t + \tau).$$

36. 9. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Найти корреляционную функцию случайной функции

$$Y(t) = a\frac{dX(t)}{dt}.$$

36. 10. Определить вероятность $P$ того, что производная $V(t)$ от нормальной стационарной функции $X(t)$ будет иметь значения большие $a = \sqrt{5}$ *м/сек*, если $\bar{x} = 10$ *м*,

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где

$$A = 4 \text{ м}^2, \quad \alpha = 1\frac{1}{\text{сек.}}, \quad \beta = 2\frac{1}{\text{сек.}}.$$

36. 11. Известны математические ожидания, корреляционные функции и корреляционная функция связи двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

36. 12. По известным вероятностным характеристикам системы $n$ случайных функций $X_j(t)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определить мате-

матическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции

$$X(t)=\sum_{j=1}^{n} X_j(t).$$

36. 13. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ задана. Определить корреляционную функцию случайной функции $Y(t)$, если

$$Y(t)=X(t)+\frac{dX(t)}{dt}+\frac{d^2X(t)}{dt^2}.$$

36. 14. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau)=\sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

Определить корреляционную функцию случайной функции

$$Z(t)=X(t)+\frac{d^2X(t)}{dt^2}.$$

36. 15. Известна корреляционная функция $K_x(\tau)$ случайной функции $X(t)$. Определить дисперсию случайной функции

$$Y(t)=\int_0^t X(\xi)\,d\xi.$$

36. 16. Стационарная случайная функция $Y(t)$ связана с другой функцией $X(t)$ соотношением

$$Y(t)=\frac{dX(t)}{dt}.$$

Определить корреляционную функцию $X(t)$, если при $t=0$, $X(t)=0$, а $K_y(\tau)$ известна.

36. 17. Определить корреляционную функцию связи между $X(t)$ и $Y(t)=\int_0^t X(\xi)\,d\xi$, если $K_x(t_1, t_2)$ известна.

36. 18. При измерении слабого тока зеркальным гальванометром для уменьшения влияния случайного дрожания рамки гальванометра произведена запись показаний прибора длительностью $T=10$ сек., и значение $\tilde{j}$ средней ординаты этой записи принято за искомое значение силы тока. Определить срединную ошибку результата, если дрожание рамки характеризуется корреляционной функцией силы тока $J(t)$:

$$K(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|},$$

где

$$A=10^{-16}A^2,\quad \alpha=10^{-1}\frac{1}{\text{сек.}}.$$

36. 19. Определить дисперсию $Y(t)$ при $t=20$ сек., если

$$Y(t)=\int_0^t X(t_1)\,dt_1,$$

$$K_x(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|),\quad A=10\ \text{см}^2/\text{сек}^2,\quad \alpha=0{,}5\frac{1}{\text{сек.}}$$

36. 20. Определить корреляционную функцию и математическое ожидание случайной функции

$$Y(t) = a_0 X(t) + a_1 \frac{dX(t)}{dt} + b_1 \int_0^t e^{-\lambda t_1} X(t_1)\, dt_1 + c,$$

если $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны, а постоянные $a_0, a_1$ и $b_1$ — вещественные.

36. 21. Определить корреляционную функцию связи $R_{yz}(t_1, t_2)$, если

$$Y(t) = aX(t) + b\frac{dX(t)}{dt},$$

$$Z(t) = c\frac{dX(t)}{dt} + d\frac{d^2X(t)}{dt^2},$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — вещественные постоянные.

36. 22. Скорость самолета определяется гироскопическим интегратором, который дает ошибку

$$\Delta V(t) = g\int_0^t \sin\vartheta(t_1)\, dt_1,$$

где $\vartheta(t)$ — ошибка стабилизации оси интегратора, имеющая корреляционную функцию

$$K_\vartheta(\tau) = 4\cdot 10^{-8} e^{-0{,}08|\tau|}\ \text{рад}^2.,$$

а $g$ — ускорение силы тяжести. Найти среднюю квадратическую ошибку определения скорости после 10 часов полета ($\tau$ дано в сек.).

36. 23. Случайная функция $\Theta(t)$ является вещественной, нормальной и стационарной, $\bar{\theta} = 0$. Найти корреляционную функцию

$$X(t) = A\ddot{\Theta}(t) + B\Theta(t) + C\dot{\Theta}^2(t),$$

где $A$, $B$ и $C$ — вещественные постоянные.

36. 24. Возмущающий момент, действующий на ротор гироскопического прибора, установленного на корабле, связан с углом крена $\Theta(t)$ и углом дифферента $\Psi(t)$ корабля соотношением

$$M(t) = a\Theta^2(t) + b\Psi^2(t) + c\Theta(t)\dot{\Psi}(t).$$

Определить корреляционную функцию случайной функции $M(t)$, если $K_\theta(\tau)$ и $K_\psi(\tau)$ известны, $R_{\theta\psi}(\tau) \equiv 0$.

36. 25. Дано

$$K_x(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Определить корреляционную функцию $K_y(\tau)$, если

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}.$$

36. 26. Дано

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

Определить корреляционную функцию связи между $X(t)$ и $\frac{d^2X(t)}{dt^2}$.

36. 27. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$, определить $K_y(t_1, t_2)$, если $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)\frac{d^2X(t)}{dt^2}$, где $a(t)$ и $b(t)$ — числовые (не случайные) функции.

36. 28. Дано

$$Y(t) = \int_0^t X(\xi)\, d\xi.$$

Существует ли отличная от нуля функция $X(\xi)$, при которой $Y(t)$ является стационарной случайной функцией?

36. 29. Является ли функция $Z(t) = X(t) + Y$ стационарной в широком смысле слова, если $X(t)$ — стационарная случайная функция, а $Y$ — случайная величина: а) не связанная с $X(t)$; б) $Y = X(t_0)$.

## § 37. ЗАДАЧИ О ВЫБРОСАХ

### Основные формулы

Выбросом случайной функции $X(t)$ за данный уровень $a$ называется пересечение (снизу вверх) графиком этой функции горизонтальной прямой, отстоящей от оси $t$ на расстоянии $a$.

Вероятность того, что выброс произойдет в бесконечно малом интервале времени $dt$, расположенном вблизи точки $t$, равна $p(a/t)\,dt$; временна́я плотность вероятности $p(a/t)$ выражается через дифференциальный закон распределения $f(x, v/t)$ ординаты случайной функции $X(t)$ и ее производной $V(t) = \dot{X}(t)$, вычисленный для момента времени $t$:

$$p(a/t) = \int_0^\infty f(a, v/t)\, v\, dv.$$

Временна́я плотность вероятности пересечения случайной функцией уровня $a$ сверху вниз

$$p'(a/t) = -\int_{-\infty}^0 f(a, v/t)\, v\, dv.$$

Для нормальных функций

$$p(a/t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_v}{\sigma_x} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \sqrt{\frac{1}{K_x(t,t)} \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\Big|_{t_1 = t_2 = t}}.$$

Для стационарных функций

$$p(a/t) = p'(a/t) = p(a) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}.$$

Среднее число выбросов $\bar{n}_a$ стационарной случайной функции в единицу времени равно $p(a)$.

Среднее число выбросов стационарной случайной функции за время $T$ равно $\bar{N}_a = Tp(a)$.

Средняя длительность выброса $\bar{\tau}_a$ стационарной случайной функции

$$\bar{\tau}_a = \frac{\int_a^\infty f(x)\, dx}{p(a)},$$

где $f(x)$ — закон распределения ординат случайной функции. Для нормального процесса

$$\bar{\tau}_a = \pi \frac{\sigma_x}{\sigma_{\dot{x}}} e^{\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right].$$

Аналогичные формулы для нестационарных процессов:

$$\overline{N}_a = \int_0^T \int_0^\infty v f(a, v/t)\, dv\, dt,$$

$$\overline{\tau}_a = \frac{\int_0^T \int_0^\infty f(x/t)\, dx\, dt}{\int_0^T \int_0^\infty v f(a, v/t)\, dv\, dt}.$$

К задаче о выбросах сводятся задачи определения среднего числа максимумов случайной функции (выбросы производной за нулевой уровень) и некоторые другие задачи. При малом среднем числе выбросов за время $T$ вероятность $Q$ не появления ни одного выброса за этот промежуток времени может быть приближенно оценена по формуле $Q = e^{-\overline{N}_a}$, т. е. число выбросов в данном интервале времени приближенно можно считать подчиняющимся закону Пуассона.

## Решение типовых задач

Пример 37. 1. Определить, сколько раз в среднем в течение времени $T = 10$ мин. угол крена корабля $\Theta(t)$ на качке будет принимать нулевые значения, если $\bar{\theta} = 0$,

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-0,1|\tau|}\left(\cos 0,7\tau + \frac{1}{7}\sin 0,7|\tau|\right),$$

где $\tau$ — выражено в секундах, а $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция.

*Решение.* Среднее число выбросов за нулевой уровень

$$p(0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\ddot{k}_x(0)}.$$

Так как $\ddot{k}_x(\tau) = -(0,7^2 + 0,1^2)\, e^{-0,1|\tau|}\left(\cos 0,7\tau - \frac{1}{7}\sin 0,7|\tau|\right)$,

то

$$p(0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{0,50} = 0,1124\,\frac{1}{\text{сек.}},$$

а искомое число выбросов за 10 мин. $\overline{N}_0 = 600 \cdot 0,1124 = 67,5$.

Пример 37. 2. Угол крена $\Theta(t)$ и угол дифферента $\Psi(t)$ — несвязанные нормальные случайные функции, корреляционные функции которых заданы

$$K_\theta(\tau) = 25e^{-0,07|\tau|}(\cos 0,7\tau + 0,1\sin 0,7|\tau|)\ \text{град}^2.;$$

$$K_\psi(\tau) = 12,5e^{-0,02|\tau|}\left(\cos 1,41\tau + 10^{-2}\sqrt{2}\sin\sqrt{2}|\tau|\right)\ \text{град}^2.,$$

где $\tau$ выражено в секундах.

Определить среднее время пребывания мачты корабля вне конуса, ось которого вертикальна, а угол, составленный образующей с осью конуса, равен 2°, если отклонение мачты от вертикали $\nu$ можно определять по приближенной формуле $\nu = \sqrt{\Theta^2 + \Psi^2}$.

*Решение.* Отличие от предыдущего примера заключается в том, что исследуемая случайная функция $\nu(t)$ не является нормальной. Поэтому необходимо применить общую формулу

$$\bar{\tau}_a = \frac{\int\limits_a^\infty f(\nu)\,d\nu}{\int\limits_0^\infty v f(a, v)\,dv},$$

где $V(t) = \frac{d\nu(t)}{dt}$.

Для нахождения закона распределения $f(\nu)$ необходимо проинтегрировать закон распределения системы нормальных случайных величин $\Theta(t)$, $\Psi(t)$ по области $\nu \leqslant \sqrt{\theta^2 + \psi^2} \leqslant \nu + d\nu$, что легко осуществляется, если от прямоугольных координат $\theta$, $\psi$ перейти к полярным $\nu$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\psi}{\theta}$. Выполнив интегрирование, будем иметь

$$f(\nu) = \frac{\nu}{\sigma_\theta \sigma_\psi} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} + \frac{1}{\sigma_\psi^2}\right)\nu^2} I_0\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_\theta^2} - \frac{1}{\sigma_\psi^2}\right)\nu^2\right] =$$

$$= \frac{\nu}{12{,}5\sqrt{2}} e^{-0{,}03\nu^2} I_0(0{,}01\nu^2),$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента. Для получения $f(\nu, v)$ закон распределения системы взаимно независимых случайных величин $\Theta(t)$, $\dot{\Theta}(t)$, $\Psi(t)$, $\dot{\Psi}(t)$ необходимо проинтегрировать по области изменения его аргументов, для которой выполняются условия $v \leqslant \frac{d}{dt}\sqrt{\theta^2 + \psi^2} \leqslant v + dv$, $\nu \leqslant \sqrt{\theta^2 + \psi^2} \leqslant \nu + d\nu$. Это интегрирование удобней выполнить, если от $\Theta$, $\dot{\Theta}$, $\Psi$, $\dot{\Psi}$ перейти к переменным интегрирования $\nu$, $\dot{\nu}$, $\varphi$, $\dot{\varphi}$, что дает

$$f(\nu, v) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_\theta \sigma_\psi \sigma_{\dot{\theta}} \sigma_{\dot{\psi}}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\cos^2\varphi}{\sigma_\theta^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\sigma_\psi^2}\right) r^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{\sigma_{\dot{\theta}}^2} + \frac{(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2}{\sigma_{\dot{\psi}}^2}\right]\right\} d\dot{\varphi}\, d\varphi.$$

В условиях задачи $\sigma_{\dot{\psi}}^2 = \sigma_{\dot{\theta}}^2 = 12{,}5$ град²/сек², поэтому двойной интеграл упрощается и может быть вычислен

$$f(\nu, v) = \frac{\nu}{62{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{25}} e^{-0{,}03\nu^2} I_0(0{,}01\nu^2).$$

Подстановка полученных законов распределения в формулу для $\bar{\tau}_a$ дает

$$\bar{\tau}_a = \frac{\sqrt{\pi}\int\limits_2^\infty e^{-0{,}03\nu^2} \nu I_0(0{,}01\nu^2)\,d\nu}{5e^{-0{,}12} I_0(0{,}04)}.$$

Так как в теории функций Бесселя доказывается, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-b\nu^2} I_0(c\nu^2)\,\nu\,d\nu = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-bx} I_0(cx)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c^2}},$$

то интеграл, стоящий в числителе, можно представить в виде

$$\int_{2}^{\infty} e^{-0,03\nu^2} I_0(0,01\nu^2)\,\nu\,d\nu = \frac{25}{\sqrt{2}} - \int_{0}^{2} e^{-0,03\nu^2} I_0(0,01\nu^2)\,\nu\,d\nu.$$

В последнем интеграле значение аргумента у функции Бесселя при верхнем пределе весьма мало. Поэтому, пользуясь разложением функции Бесселя в ряд

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \cdots,$$

получим

$$\int_{0}^{2} e^{-0,03\nu^2}\left[1 + \frac{10^{-4}}{4}\nu^2 + \cdots\right]\nu\,d\nu \approx \frac{1}{0,06}\left(1 - e^{-0,12}\right),$$

т. е.

$$\bar{\tau}_a \approx \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{25}{\sqrt{2}} - \frac{1}{0,06}\cdot 0,1131\right)}{5e^{-0,12}(1 + 0,01 + \cdots)} = 6,0 \text{ сек.}$$

Пример 37. 3. Определить среднее число максимумов нормальной случайной функции $X(t)$, приходящееся на единицу времени, если

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

*Решение.* Случайная функция $X(t)$ имеет максимум, если ее производная $\dot{X}(t)$ имеет выброс за нулевой уровень (сверху вниз), т. е.

$$\bar{\tau}_a = \pi\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_{\ddot{x}}} = \pi\frac{\alpha}{\alpha^2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{3}}.$$

### Задачи для упражнений

37. 1. Определить среднюю длительность выброса нормальной случайной функции $X(t)$ за уровень $a = 2$ *см*, если $\bar{x} = -8$ *см*, а $K_x(\tau) = 100\,e^{-0,1|\tau|}(1 + 0,1|\tau|)$ *см*$^2$, где $\tau$ выражено в секундах.

37. 2. Среднее число выбросов нормальной стационарной случайной функции за уровень $a = \bar{x}$ в одну секунду равно 0,01. Определить дисперсию скорости изменения этой функции, если дисперсия самой функции равна 64 *см*$^2$.

37. 3. Корреляционная функция угла крена корабля $\Theta(t)$ определяется формулой

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Считая процесс качки нормальным, определить, сколько раз, в среднем, за 20 мин. хода корабля угол крена будет выходить за пределы $\pm 25°$, если $\bar{\theta} = 0$, $A = 100$ град.$^2$, $\alpha = 0,1$ 1/сек., $\beta = 0,7$ 1/сек.

37. 4. Ошибки на выходе динамической системы нормальны, имеют нулевое математическое ожидание и характеризуются корреляционной функцией

$$K(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

где $A = 5$ квадратным угловым минутам, $\alpha = 1{,}5$ 1/сек. Определить, на сколько секунд в среднем будет выключаться система, если выключение производится автоматически при получении ошибки, превосходящей по абсолютной величине $3'$.

37. 5. Корреляционная функция нормального случайного процесса

$$K_x(t_1, t_2) = At_1 t_2 e^{-\alpha|t_2-t_1|}(1 + \alpha|t_2 - t_1|).$$

Определить значение времени $t$, начиная с которого среднее число выбросов за уровень $a = \bar{x}$ в единицу времени станет меньше заданного числа $p_0$, если $p_0 > \frac{\alpha}{2\pi}$.

37. 6. Для устранения вредного воздействия, оказываемого внешним случайным возмущением, характеризуемым нормальной случайной функцией $X(t)$, необходимо затратить мощность $W(t)$, пропорциональную $\dot{X}^2(t)$:

$$W(t) = \kappa \dot{X}^2(t).$$

Определить, сколько раз, в среднем, в единицу времени мощности двигателя будет не хватать для устранения возмущения, если максимально возможная его мощность равна $w_0$, $\bar{x} = 0$,

$$K_{\dot{x}}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

а $\kappa$, $w_0$, $A$, $\alpha$, $\beta$ — известные постоянные.

37. 7. На самолете установлен прибор (акселерометр), измеряющий ускорения, нормальные к оси фюзеляжа в плоскости крыла. Программа, заданная автопилоту самолета — горизонтальный прямолинейный полет с постоянной скоростью. Вследствие ошибок управления угол $\psi(t)$, составленный направлением вектора скорости самолета с неизменной вертикальной плоскостью, становится случайным. Определить, сколько раз, в среднем, в единицу времени чувствительный элемент акселерометра будет доходить до упора, если это имеет место в том случае, когда мгновенный радиус кривизны траектории самолета в горизонтальной плоскости становится равным минимально допустимому радиусу циркуляции $R_0$. Скорость самолета $v$ можно считать постоянной, а

$$K_{\dot{\psi}}(t_2 - t_1) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где

$$\tau = t_2 - t_1.$$

37. 8. Точность удержания самолетом заданной высоты $\bar{h}$ с помощью автономной системы управления характеризуется корреляционной функцией

$$K_h(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Считая высоту $H(t)$ нормальной, определить, какую наименьшую высоту $\bar{h}$ можно установить в системе приборов автономного полета, чтобы за время полета $T$ вероятность аварии самолета вследствие столкновения с поверхностью земли была бы меньше $\delta = 0{,}01\%$, если $A = 400$ $м^2$, $\alpha = 0{,}01$ 1/сек., $\beta = 0{,}1$ 1/сек., $T = 5$ час.

37. 9. Радиолиния управления может обеспечить передачу команды без искажения в том случае, если помеха $X(t)$, поступающая на вход приемника, в течение передачи по абсолютной величине ни разу не прев-

зойдет некоторого уровня $a$. Определить вероятность $Q$ передачи команды без искажения, если

$$\bar{x}=0, \quad K_x(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|),$$

а время передачи команды $T$.

37. 10. Определить закон распределения ординат нормальной случайной функции $X(t)$ в точках ее максимумов, если

$$\bar{x}=0, \quad K_x(\tau)=Ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

37. 11. Дан нормальный случайный процесс $X(t)$. Найти закон распределения ординат его минимумов, если

$$K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{\alpha^2}{3}\tau^2\right).$$

37. 12. Определить среднее число точек перегиба нормальной случайной функции $X(t)$, приходящееся на время $T$, если

$$K_x(\tau)=Ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

37. 13. Определить среднее число максимумов $\bar{n}$ нормальной случайной функции двух переменных $\zeta(x, y)$, приходящееся на единицу площади, если ее двумерная корреляционная функция является функцией двух переменных

$$K_\zeta(\xi, \eta)=M\left\{\left[\zeta^*(x, y)-\bar{\zeta}^*\right]\left[\zeta(x+\xi, y+\eta)-\bar{\zeta}\right]\right\},$$

а двумерная спектральная плотность

$$S_\zeta(\omega_1, \omega_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-i(\omega_1\xi+\omega_2\eta)}K_\zeta(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

известна.

37. 14. В условиях предыдущей задачи определить среднее число точек $\bar{n}$, приходящееся на единицу площади, в которых обе первые частные производные функции $\frac{\partial\zeta(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial\zeta(x, y)}{\partial y}$ меняют знак с «+» на «—».

## § 38. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

### Основные формулы

Для всякой стационарной функции $X(t)$ справедливо спектральное разложение

$$X(t)-\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,d\Phi(\omega),$$

где случайные приращения $d\Phi(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$M[d\Phi(\omega)]=0; \quad M[d\Phi^*(\omega)\,d\Phi(\omega_1)]=S_x(\omega)\,\delta(\omega-\omega_1)\,d\omega\,d\omega_1.$$

Здесь $S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайной функции $X(t)$; $\delta(\omega-\omega_1)$ — обозначение дельта-функции, т. е. функции, определяемой условиями

$$\delta(y)=\begin{cases}\infty, & \text{если } y=0;\\ 0, & \text{если } y\neq 0,\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\,dy=1; \quad \int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,\delta(y-x)\,dx=F(y),$$

где $F(x)$ — любая непрерывная в точке $x = y$ функция.

Корреляционная функция и спектральная плотность связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\, d\omega,$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_x(\tau)\, d\tau,$$

являющимися следствием спектрального разложения $X(t)$. При $\tau = 0$ первая из приведенных формул дает

$$K_x(0) = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega.$$

Спектральная плотность не может иметь отрицательных ординат; для вещественных функций

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega).$$

Случайные функции, обладающие конечной дисперсией, имеют спектральные плотности, обращающиеся на бесконечности в нуль быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$.

Спектральная плотность производной $\dot{X}(t)$ связана с $S_x(\omega)$ формулой

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega).$$

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости случайной функции является условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)\, d\omega < \infty,$$

для выполнения которого нужно, чтобы $S_x(\omega)$ при росте $\omega$ стремилась к нулю быстрее, чем $\frac{1}{\omega^3}$.

Корреляционная функция связи стационарно связанных случайных функций $R_{xy}(\tau)$ и взаимная спектральная плотность $S_{xy}(\omega)$ связаны соотношениями

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}(\omega)\, d\omega,$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau)\, d\tau.$$

Из определений $R_{xy}(\tau)$ и $S_{xy}(\omega)$ следует, что

$$R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau),$$

$$S_{xy}(\omega) = S^*_{yx}(\omega).$$

Спектральная плотность произведения двух нормальных (вещественных) стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$:

$$Z(t) = X(t)\, Y(t)$$

выражается через $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $S_{xy}(\omega)$ по формуле

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega - \omega_1) S_y(\omega_1)\,d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega - \omega_1) S_{yx}(\omega_1)\,d\omega_1 + \bar{x}^2 S_y(\omega) + \bar{y}^2 S_x(\omega).$$

В частном случае, когда

$$Y(t) \equiv X(t), \quad S_y(\omega) = S_{xy}(\omega) = S_x(\omega)$$

и

$$S_z(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega - \omega_1) S_x(\omega_1)\,d\omega_1 + 2\bar{x}^2 S_x(\omega).$$

Тот же результат можно получить, если воспользоваться формулой, справедливой для любых двух нормальных функций

$$K_{xy}(\tau) = K_x(\tau) K_y(\tau) + R_{xy}(\tau) R_{yx}(\tau) + \bar{x}^2 K_y(\tau) + \bar{y}^2 K_x(\tau),$$

а затем преобразовать $R_{xy}(\tau)$ по Фурье.

## Решение типовых задач

Для решения задач 38. 1—38. 10 необходимо непосредственное применение преобразования Фурье. При вычислении корреляционной функции, когда спектральная плотность является отношением полиномов $\omega$, обычно наиболее просто результат может быть получен с помощью вычетов. При нахождении спектральной плотности по заданной корреляционной функции, когда в ее выражение входит модуль аргумента, бесконечную область интегрирования нужно разбить на области $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. В остальных задачах необходимо найти корреляционную функцию или спектральную плотность, пользуясь их определением, а в некоторых задачах и свойствами нормальных величин.

Пример 38. 1. Определить корреляционную функцию, если

$$S(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

*Решение.* Преобразуя по Фурье, имеем

$$K(\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

При $\tau > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2 + \lambda_j^2}$ равняется интегралу от функции комплексного переменного $\omega$, взятого по контуру, составленному из вещественной оси, замкнутой полуокружностью бесконечного радиуса, расположенной в верхней полуплоскости. Поэтому его значение равно вычету вокруг единственного полюса $\omega = i\lambda_j$ (считаем $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$), расположенного внутри контура, умноженному на $2\pi i$, т. е. $\frac{\pi}{\lambda_j} e^{-\lambda_j \tau}$, а

$$K(\tau) = \pi \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j} e^{-\lambda_j \tau}.$$

Аналогичным образом при $\tau<0$, замыкая вещественную ось через нижнюю полуплоскость, получим $K(\tau)=\pi\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\lambda_j}e^{\lambda_j\tau}$, т. е. при любом знаке $\tau$

$$K(\tau)=\pi\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{\lambda_j}e^{-\lambda_j|\tau|}.$$

Пример 38. 2. Определить спектральную плотность, если

$$K(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

*Решение.* Обозначив

$$J(\alpha,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\tau}\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\,d\tau,$$

замечаем, что

$$S(\omega)=J-\alpha\frac{\partial J}{\partial\alpha}+\frac{\alpha^2}{3}\frac{\partial^2 J}{\partial\alpha^2}.$$

Так как

$$J(\alpha,\omega)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-i\omega)\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{(-\alpha-i\omega)\tau}\,d\tau\right\}=\frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)},$$

то после дифференцирования по $\alpha$ и простых преобразований получим

$$S(\omega)=\frac{8\sigma^2\alpha^5}{3\pi(\omega^2+\alpha^2)^3}.$$

Пример 38. 3. Определить спектральную плотность

$$Z(t)=X(t)\dot{X}(t),$$

если $X(t)$ — нормальная случайная функция, а

$$K_x(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

*Решение.* Так как $Z(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}X^2(t)$, то

$$S_z(\omega)=\frac{1}{2}\omega^2 S_{x^2}(\omega)=\omega^2\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega-\omega_1)S_x(\omega_1)\,d\omega_1=$$

$$=\frac{2A\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi}\cdot\frac{\omega^2(\omega^2+20\alpha^2+4\beta^2)}{[(\omega^2+4\alpha^2+4\beta^2)^2-16\beta^2\omega^2](\omega^2+4\alpha^2)}.$$

## Задачи для упражнений

38. 1. Дана спектральная плотность

$$S(\omega)=\begin{cases}a, & \text{если } -b\leqslant\omega\leqslant b;\\ 0, & \text{если } b<|\omega|.\end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K(\tau)$.

38. 2. Дана спектральная плотность

$$S(\omega)=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant|\omega|<\omega_0;\\ c^2, & \text{если } \omega_0\leqslant|\omega|\leqslant 2\omega_0;\\ 0, & \text{если } 2\omega_0<|\omega|.\end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K(\tau)$.

38. 3. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|).$$

38. 4. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=\begin{cases}\sigma^2(1-|\tau|), & \text{при } |\tau|\leqslant 1;\\ 0, & \text{при } |\tau|>1.\end{cases}$$

38. 5. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau.$$

38. 6. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

38. 7. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|-2\alpha^2\tau^2+\frac{1}{3}\alpha^3|\tau|^3\right).$$

38. 8. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),\quad \alpha>0.$$

38. 9. Сколько производных имеет случайная функция $X(t)$, если

$$K(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

38. 10. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau)=\sum_{j=1}^{n}A_je^{-\alpha_j|\tau|},\quad \operatorname{Re}\alpha_j>0.$$

38. 11. Определить, для каких значений отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ спектральная плотность

$$S(\omega)=\frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\cdot\frac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2}$$

имеет максимум при $\omega=0$.

38. 12. Спектральная плотность

$$S(\omega)=\frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\cdot\frac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2}.$$

Исследовать график зависимости отношения $\lambda$ максимальной ординаты $S(\omega)$ к начальной ординате от отношения $\kappa=\frac{\alpha}{\beta}$.

38. 13. Определить дисперсию производной случайной функции $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

38. 14. Определить взаимные спектральные плотности $S_{x\dot{x}}(\omega)$ и $S_{\dot{x}x}(\omega)$, если

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

38. 15. Команда $\Delta(t)$, поступающая на органы управления автоматически управляемого объекта, определяется по формуле

$$\Delta(t) = \kappa_1 U(t) + \kappa_2 \dot{U}(t).$$

Найти $S_\Delta(\omega)$, если

$$K_u(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

38. 16. Динамическая система (упредитель) используется для получения значения входной случайной функции $X(t)$ в момент времени $t + \tau_0$, где $\tau_0$ — время упреждения. Определить взаимную спектральную плотность между $X(t)$ и $X(t + \tau_0)$, если $K_x(\tau)$ дана.

38. 17. На вход динамической системы поступает случайная функция $X(t)$, являющаяся суммой полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$:

$$X(t) = U(t) + V(t).$$

Задачей динамической системы является воспроизведение функции

$$Y(t) = \frac{d^k}{dt^k} U(t + \tau_0).$$

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ и $S_{uv}(\omega)$ заданы.

38. 18. Определить спектральную плотность $S_z(\omega)$, если $\dot{Z}(t) = \dot{X}(t)\dot{Y}(t)$, а $X(t)$ и $Y(t)$ независимые случайные функции, корреляционные функции которых заданы

$$K_x(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right),$$

$$K_y(\tau) = A_2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right).$$

38. 19. Определить спектральную плотность $S_z(\omega)$, если

$$Z(t) = X(t)\,Y(t),$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — независимые случайные функции

$$K_x(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1|\tau|}, \quad K_y(\tau) = A_2 e^{-\alpha_2|\tau|},$$

а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ даны.

38. 20. «Карданова ошибка» $\Delta(t)$, возникающая при использовании карданова подвеса в некоторых стабилизационных корабельных устройствах, связана с углами крена $\Theta(t)$ и дифферента $\Psi(t)$ корабля соотношением

$$\Delta(t) = \Theta(t)\,\Psi(t).$$

Считая $\Theta(t)$ и $\Psi(t)$ независимыми случайными функциями, определить корреляционную функцию, дисперсию и спектральную плотность ошибки $\Delta(t)$, если $\bar{\theta} = \bar{\psi} = 0$,

$$K_\theta(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right),$$

$$K_\psi(\tau) = A_2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right).$$

38. 21. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если $Y(t) = [\dot{X}(t)]^2$, где $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, а

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

38. 22. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X^2(t),$$

где $X(t)$ — нормальная случайная функция, $\bar{x}$ известно, а

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}.$$

38. 23. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt},$$

где $X(t)$ — нормальная случайная функция,

$$S_x(\omega) = ae^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}},$$

а $\bar{x}$ дано.

38. 24. Поправка $\Delta(t)$ на качку корабля, поступающая в угол горизонтального наведения навигационной радиолокационной станции, определяется формулой

$$\Delta(t) = -\Phi(t) + \Psi(t)\Theta(t)\cos^2 q - \frac{1}{4}(\Theta^2 - \Psi^2)\sin 2q.$$

Определить $S_\Delta(\omega)$, если $q$ можно считать постоянным, а угол рыскания $\Phi(t)$, угол дифферента $\Psi(t)$ и угол крена $\Theta(t)$ — несвязанные нормальные случайные функции, корреляционные функции которых заданы

$$K_\varphi(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right);$$

$$K_\psi(\tau) = A_2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right);$$

$$K_\theta(\tau) = A_3 e^{-\alpha_3|\tau|}\left(\cos\beta_3\tau + \frac{\alpha_3}{\beta_3}\sin\beta_3|\tau|\right), \quad \bar{\varphi} = \bar{\theta} = \bar{\psi} = 0.$$

38. 25. Нормальная случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ и математическое ожидание $\bar{x}$.

Найти максимум спектральной плотности $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X^2(t).$$

38. 26. Два одинаковых диска, оси вращения которых совпадают, вращаются с различными (несоизмеримыми) угловыми скоростями $\Omega_1$ и $\Omega_2$ (рис. 36). В дисках проделаны отверстия, имеющие форму сектора с центральным углом $\gamma$, ограниченного окружностями с радиусами $r + \frac{1}{2}\Delta$ и $r - \frac{1}{2}\Delta$, центры которых распределены по закону равной вероятности по окружности.

С одной стороны дисков расположен точечный источник света $L$, с другой — фотоэлемент $F$, перед которым расположена диафрагма $D$; просвет в диафрагме имеет форму сектора с углом $\Gamma$ при вершине, ограниченного окружностями радиусов $r + \frac{1}{2}\Delta$ и $r - \frac{1}{2}\Delta$. Сила фототока $J(t)$ пропорциональна сумме просветов всех отверстий, попадающих в просвет диафрагмы. Определить спектральную плотность силы тока $S_j(\omega)$, если число отверстий в обоих дисках одинаково и равно $n$, а для любого отверстия 1-го диска независимо от положения других отверстий можно считать равновероятным, что оно окажется против отверстия 2-го диска на любом угловом расстоянии от оптической оси системы источник света — фотоэлемент.[1] (Случаями, когда размер просвета уменьшается диафрагмой, пренебречь.)

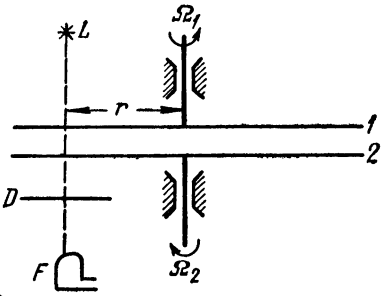

Рис. 36.

## § 39. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЫХОДЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### Основные формулы

Для любого линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)Y(t) = X(t)$$

общее решение может быть представлено в виде

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(t) + Y_1(t),$$

где $y_j(t)$ — система независимых частных интегралов однородного уравнения;

$C_j$ — постоянные, определяемые начальными условиями и являющиеся, вообще говоря, случайными величинами;

$Y_1(t)$ — частный интеграл неоднородного уравнения, удовлетворяющий нулевым начальным условиям и определяемый равенством

$$Y_1(t) = \int_0^t p(t, t_1)X(t_1)\,dt_1,$$

где $p(t, t_1)$ — весовая функция системы, определяемая частными интегралами $y_j(t)$ по формуле

[1] Прибор такого типа предложен В. С. Гительсоном.

$$p(t, t_1) = \begin{vmatrix} y_1(t_1) & \ldots\ldots & y_n(t_1) \\ \dot{y}_1(t_1) & \ldots\ldots & \dot{y}_n(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(t_1) & \ldots\ldots & \dot{y}_n^{(n-2)}(t_1) \\ y_1(t) & \ldots\ldots & y_n(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1(t_1) & \ldots\ldots & y_n(t_1) \\ \dot{y}_1(t_1) & \ldots\ldots & \dot{y}_n(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)}(t_1) & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(t_1) \end{vmatrix}.$$

В том случае, когда коэффициенты уравнения постоянные, весовая функция зависит только от разности аргументов

$$p(t, t_1) = p(t - t_1).$$

Если система устойчива, а $X(t)$ стационарна, то при достаточно большом $t$ (сравнительно с временем переходного процесса) функцию $Y(t)$ можно считать также стационарной. В этом случае

$$\bar{y} = \frac{1}{a_n}\bar{x},$$

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n|^2},$$

а $K_y(\tau)$ может быть найдена путем обращения $S_y(\omega)$ по Фурье.

В том случае, когда $X(t)$ связана со стационарной случайной функцией $Z(t)$ формулой

$$X(t) = b_0 \frac{d^m Z(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} Z(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m Z(t),$$

$$S_y(\omega) = \frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \ldots + b_m|^2}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n|^2} S_z(\omega),$$

причем последняя формула остается справедливой и в том случае, если $Z(t)$ не имеет производную $m$-го порядка, но выражение для $S_y(\omega)$ при росте $\omega$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$.

Если время $t$, прошедшее после начала работы системы, невелико, функция $X(t)$ нестационарна или коэффициенты уравнения зависят от времени, то для нахождения вероятностных характеристик решения уравнения необходимо воспользоваться общими формулами для линейных операторов, применяя которые находим (считаем для простоты постоянные $C_j$ не связанными с $X(t)$):

$$\bar{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t)\bar{c}_j + \int_0^t p(t, t_1)\bar{x}(t_1)\,dt_1,$$

$$K_y(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} y_j^*(t_1)\,y_l(t_2)\,k_{jl} + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} p^*(t_1, \xi)\,p(t_2, \eta)\,K_x(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

где $\|k_{jl}\|$ — корреляционная матрица системы случайных величин $C_j$.

Для уравнения с постоянными коэффициентами в последних формулах вместо $p(t_1, t_2)$ нужно подставить $p(t_2 - t_1)$.

Если $X(t)$ стационарная функция, то

$$Y(t) = \int_0^t p(t, t_1)\,\bar{x}\,dt_1 + \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega, t)\,d\Phi(\omega),$$

где $y(\omega, t)$ — частный интеграл уравнения, в котором $X(t)$ заменена на $e^{i\omega t}$, взятый при нулевых начальных условиях.

В этом случае

$$K_{y_1}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(\omega, t_1)\, y(\omega, t_2)\, S_x(\omega)\, d\omega.$$

Аналогичная формула имеет место и тогда, когда $X(t)$ нестационарна, но может быть получена путем умножения стационарной функции на заданную (не случайную) функцию времени, например:

$$X(t) = b(t)\, X_1(t),$$

где $X_1(t)$ стационарна.

В этом случае под $y(\omega, t)$ нужно понимать частный интеграл уравнения, в котором правая часть заменена на $b(t)\, e^{i\omega t}$, т. е. по-прежнему стационарная функция заменена на $e^{i\omega t}$.

Если задана система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, соответствующая устойчивой динамической системе

$$\frac{dY_j(t)}{dt} + \sum_{l=1}^{n} a_{jl} Y_l(t) = X_j(t) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

где $a_{jl}$ — постоянные, $X_j(t)$ — стационарные случайные функции, а время $t$ достаточно велико, то ее решения являются стационарными случайными функциями, спектральные плотности и взаимные спектральные плотности которых могут быть выражены через спектральные плотности и взаимные спектральные плотности правых частей уравнений:

$$S_{y_j}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} A_{lj}^* A_{mj} S_{x_l x_m}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2},$$

$$S_{y_j y_k}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} A_{lj}^*(\omega)\, A_{mk}(\omega)\, S_{x_l x_m}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2}.$$

Здесь $\Delta(\omega)$ — определитель, составленный из коэффициентов левых частей уравнений:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} + i\omega & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + i\omega & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} + i\omega \end{vmatrix},$$

$A_{lj}(\omega)$ — алгебраические дополнения элемента этого определителя, стоящего на пересечении строки № $l$ и столбца № $j$, а $S_{x_j x_j}(\omega) \equiv S_{x_j}(\omega)$.

Закон распределения решения линейного уравнения (системы линейных уравнений), в правую часть которого входят нормальные случайные функции и нормальные случайные величины, также нормален. Если уравнение линейное, но закон распределения случайных функций, входящих в правую часть равенства, не нормален, то закон распределения решения также не будет нормальным. Математическое ожидание $\bar{y}$ и центральные моменты $\mu_j$ этого закона распределения для любого $t$ определяются формулами

$$\bar{y} = \int_0^t p(t, t_1)\,\bar{x}(t_1)\,dt_1;$$

$$\mu_2 = \int_0^t \int_0^t p(t, t_1)\,p(t, t_2)\,K_x(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2;$$

$$\mu_3 = \int_0^t \int_0^t \int_0^t p(t, t_1)\,p(t, t_2)\,p(t, t_3)\,K_x(t_1, t_2, t_3)\,dt_1 dt_2 dt_3,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

где $X(t)$ — случайная функция, стоящая в правой части уравнения, а

$$K_x(t_1, t_2, \ldots, t_j) = M\left\{\prod_{l=1}^{j}\left[X(t_l) - \bar{x}(t_l)\right]\right\}.$$

## Решение типовых задач

Пример 39. 1. Найти дисперсию скорости самолета, определяемой путем интегрирования показаний акселерометра, после $T$ сек. полета, если при интегрировании не возникают добавочные ошибки; ошибка $\varepsilon(t)$ измерения ускорения определяется уравнением

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2h\dot{\varepsilon}(t) + n^2\varepsilon(t) = gn^2\gamma(t),$$

где $S_\gamma(\omega) = c^2 \approx \text{const}$; начальные значения ошибки $\varepsilon(t)$ и ее скорости $\dot{\varepsilon}(t)$ можно считать нулевыми, а время переходного процесса много меньше $T$.

*Решение.* Согласно условию ошибку $\varepsilon(t)$ можно считать стационарной случайной функцией времени, поэтому

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{g^2n^4c^2}{|(n^2 - \omega^2) + 2ih\omega|^2} = \frac{g^2n^4c^2}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

Ошибка скорости $\delta V = \int_0^t \varepsilon(t_1)\,dt_1$ уже не будет стационарной и ее дисперсия определится формулой

$$D[\delta V(t)] = 2\int_0^T (T - \tau)\,K_\varepsilon(\tau)\,d\tau \approx 2T\int_0^\infty K_\varepsilon(\tau)\,d\tau = 2\pi T S_\varepsilon(0) = 2\pi g^2c^2T.$$

Подобным же образом решаются все задачи, в которых искомая случайная функция является стационарным решением линейного уравнения с постоянными коэффициентами или результатом применения линейного оператора к стационарному решению.

Пример 39. 2. Определить для момента времени $t$ дисперсию частного интеграла $Y_I(t)$ уравнения $\frac{dY(t)}{dt} + aY(t) = tX(t)$, удовлетворяющего нулевым начальным условиям, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

*Решение.* В данном случае $Y(t)$ не обладает свойством стационарности, поскольку в правой части уравнения стоит нестационарная функция времени.

Имеем $Y_I(t) = \int\limits_0^t e^{-a(t-t_1)} Z(t_1)\, dt_1$,

где

$$Z(t) = tX(t).$$

Так как

$$K_x(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\, d\omega = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

то

$$K_z(t_1, t_2) = \sigma_x^2 t_1 t_2 e^{-\alpha|t_2-t_1|},$$

а

$$D[Y_I(t)] = K_{yI}(t, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t K_z(t_1, t_2)\, e^{-a(2t-t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2,$$

что после выполнения интегрирования дает

$$D[Y_I(t)] = 2\sigma_x^2 \left\{ \frac{t^2}{2a(a+\alpha)} - \frac{t(\alpha+2a)}{2a^2(a+\alpha)^2} + \frac{\alpha+2a}{4a^3(a+\alpha)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{t(a-\alpha)-1}{(a^2-\alpha^2)^2} e^{-(a+\alpha)t} + \frac{4a^3-(2a+\alpha)(a-\alpha)^2}{4a^3(a^2-\alpha^2)} e^{-2at} \right\}.$$

Пример 39.3. Найти спектральные плотности и взаимную спектральную плотность стационарных решений системы уравнений

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2\frac{dY(t)}{dt} + 4Y(t) + Z(t) = X_1(t),$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} + 9Z(t) = X_2(t),$$

если

$$S_{x_1}(\omega) = \frac{\sigma_1^2}{\pi(\omega^2+1)}; \quad S_{x_2}(\omega) = \frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2+4)};$$

$$S_{x_1x_2}(\omega) = \frac{a}{(\omega^2-2)^2 + i\omega}.$$

*Решение.* Составляя определитель из левых частей уравнений путем замены операции дифференцирования на $i\omega$, получим

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 + 2i\omega + 4 & 1 \\ 0 & i\omega + 9 \end{vmatrix} = [(4-\omega^2) + 2i\omega](i\omega + 9).$$

Алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = (i\omega + 9); \quad A_{12} = 0; \quad A_{21} = -1;$$

$$A_{22} = (4-\omega^2) + 2i\omega.$$

Следовательно, по общей формуле получим

$$S_y(\omega) = \frac{|A_{11}|^2 S_{x_1}(\omega) + |A_{21}|^2 S_{x_2}(\omega) + \overset{*}{A}_{11} A_{21} S_{x_1x_2}(\omega) + \overset{*}{A}_{21} A_{11} S_{x_2x_1}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2} =$$

$$= \frac{1}{(\omega^2+81)[(\omega^2-4)^2+4\omega^2]}\left\{\frac{\sigma_1^2(\omega^2+81)}{\pi(\omega^2+1)}+\frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2+4)}-\frac{2a[\omega^2-9(\omega^2-2)^2]}{(\omega^2-2)^4+\omega^2}\right\};$$

$$S_{yz}(\omega)=\frac{A_{11}^*A_{12}S_{x_1}(\omega)+A_{11}^*A_{22}S_{x_1x_2}(\omega)+A_{21}^*A_{12}S_{x_2x_1}(\omega)+A_{21}^*A_{22}S_{x_2}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2}=$$

$$=\frac{1}{[(\omega^2-4)+2i\omega](\omega^2+81)}\left\{\frac{a(i\omega-9)}{(\omega^2-2)^2+i\omega}+\frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2+4)}\right\};$$

$$S_z(\omega)=\frac{S_{x_2}(\omega)}{|i\omega+9|^2}=\frac{2\sigma_2^2}{\pi(\omega^2+4)(\omega^2+81)}.$$

## Задачи для упражнений

39. 1. На вход динамической системы первого порядка, описываемой уравнением

$$\frac{dY(t)}{dt}+\alpha Y(t)=X(t),\quad \alpha>0,$$

поступает случайная функция $X(t)$, спектральная плотность которой в полосе частот $|\omega|\leqslant\omega_0$, где $\omega_0\gg\alpha$, может быть принята постоянной:

$$S_x(\omega)\approx c^2.$$

Определить корреляционную функцию $Y(t)$ при $t\gg\frac{1}{\alpha}$.

39. 2. Динамическая система описывается уравнением

$$a_0\frac{dY(t)}{dt}+a_1Y(t)=b_0\frac{dX(t)}{dt}+b_1X(t),$$

где $\bar{x}$ задано; $K_x(\tau)=\sigma_x^2e^{-\alpha|\tau|}$, а $\frac{a_1}{a_0}>0$.

Определить математическое ожидание и дисперсию стационарного решения этого уравнения.

39. 3. Отклонение $U(t)$ кренометра, расположенного в плоскости мидель-шпангоута, определяется уравнением

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2}+2h\frac{dU(t)}{dt}+n^2U(t)=n^2F(t),\quad (h>0,\quad n^2\geqslant h^2),$$

где $F(t)=\frac{1}{g}\left[\ddot{\eta}_c(t)-c\ddot{\Theta}(t)\right]$, где скорость бокового смещения центра тяжести из-за орбитального движения $\dot{\eta}_c$ и угол крена $\Theta(t)$ можно считать несвязанными случайными функциями,

$$K_{\dot{\eta}_c}(\tau)=A_\eta e^{-\alpha_\eta|\tau|}\left[\cos\beta_\eta\tau+\frac{\alpha_\eta}{\beta_\eta}\sin\beta_\eta|\tau|\right],$$

$$K_\theta(\tau)=A_\theta e^{-\alpha_\theta|\tau|}\left[\cos\beta_\theta\tau+\frac{\alpha_\theta}{\beta_\theta}\sin\beta_\theta|\tau|\right],$$

а все постоянные, входящие в формулы, известны. Определить $S_u(\omega)$.

39. 4. Астатический гироскоп с пропорциональной коррекцией расположен на корабле в плоскости мидель-шпангоута. Определить дисперсию отклонения его оси $\alpha$ от направления, даваемого физическим маятником, если угол $\alpha$ определяется уравнением

$$\dot{\alpha}+\varepsilon\alpha=\varepsilon U(t),\ \varepsilon>0;$$

время, прошедшее после включения гироскопа, достаточно велико, чтобы $\alpha(t)$ считать стационарным, а для определения спектральной плотности $S_u(\omega)$ воспользоваться результатом решения задачи 39. 3, где

$$A_\eta = 1{,}24\ м^2/сек^2; \quad \alpha_\eta = 0{,}1\,\frac{1}{сек.}; \quad \beta_\eta = 1{,}20\,\frac{1}{сек.},$$

$$A_\theta = 3{,}8\cdot 10^{-2}\ рад^2.; \quad \alpha_\theta = 0{,}04\,\frac{1}{сек.}; \quad \beta_\theta = 0{,}42\,\frac{1}{сек.};$$

$$h = 0{,}6\,\frac{1}{сек.}; \quad n = 6{,}28\,\frac{1}{сек.}; \quad c = 10\ м; \quad \varepsilon = 0{,}01\,\frac{1}{сек.}.$$

39. 5. Определить спектральную плотность и корреляционную функцию стационарного решения уравнения

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2h\frac{dY(t)}{dt} + k^2Y(t) = X(t), \quad h > 0, \quad k^2 \geqslant h^2,$$

если можно считать, что $S_x(\omega) = c^2 = \text{const}$ ($X(t)$ обладает свойствами «белого шума»).

39. 6. Угловое отклонение рамки гальванометра $\Theta(t)$ от положения равновесия при разомкнутой цепи определяется уравнением

$$I\frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + r\frac{d\Theta(t)}{dt} + D\Theta(t) = \text{M}(t), \quad 4ID \geqslant r^2,$$

где $I$ — момент инерции рамки;
$r$ — коэффициент трения;
$D$ — коэффициент жесткости нити, на которой подвешена рамка;
$\text{M}(t)$ — возмущающий момент, вызываемый случайными ударами молекул окружающей среды.

Определить спектральную плотность и корреляционную функцию угла $\Theta(t)$, если спектральную плотность $\text{M}(t)$ можно считать постоянной, а согласно результатам статистической физики $\sigma_\theta^2 D = kT$, где $k$ — постоянная Больцмана; $T$ — абсолютная температура среды.

39. 7. Случайная стационарная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ уравнением

$$\frac{d^3Y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 11\frac{dY(t)}{dt} + 6Y(t) = 5X(t) + 7\frac{d^3X(t)}{dt^3}.$$

Определить $S_y(\omega)$, если $S_x(\omega) = \dfrac{4}{\pi(\omega^2+1)}$.

39. 8. Может ли иметь уравнение

$$\ddot{Y}(t) - 2\dot{Y}(t) + 3Y(t) = X(t)$$

(где $X(t)$ — стационарна) стационарное решение?

39. 9. Определить дисперсию ординаты центра тяжести корабля $\zeta_c(t)$ на волнении, если

$$\ddot{\zeta}_c(t) + 2h\dot{\zeta}_c(t) + \omega_0^2\zeta_c(t) = \omega_0^2 X(t),$$

где ордината волнового профиля $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

$h$ и $\omega_0$ — постоянные, определяемые параметрами корабля;
$A$ — дисперсия ординаты волнового профиля;
$\alpha$ — параметр, характеризующий нерегулярность волнения;
$\beta$ — преобладающая частота волнения;

$$h > 0, \quad \omega_0^2 \geqslant h^2.$$

39. 10. Ошибка акселерометра, измеряющего горизонтальное ускорение самолета, определяется уравнением

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2h\dot{\varepsilon}(t) + n^2\varepsilon(t) = gn^2\gamma(t),$$

где $h = 0{,}6\,\frac{1}{\text{сек.}}$, $n = 6{,}28\,\frac{1}{\text{сек.}}$, $g = 9{,}81$ $м/сек^2$;

угол крена $\gamma(t)$ — стационарная нормальная случайная функция, корреляционная функция которой дана

$$K_\gamma(\tau) = 3\cdot 10^{-4}e^{-0{,}6|\tau|}(\cos 5\tau + 0{,}12\sin 5|\tau|).$$

Определить дисперсию $\varepsilon(t)$ при установившемся режиме работы акселерометра.

39. 11. Доказать, что если на вход линейной устойчивой динамической системы, описываемой уравнениями с постоянными коэффициентами, поступает случайная функция $X(t)$, обладающая свойствами «белого шума» ($S_x(\omega) = c^2$), то при достаточно большом времени после включения системы корреляционная функция случайной функции, получаемой на выходе, определяется равенством

$$K_y(\tau) = c^2 2\pi\int_0^\infty p(t)\,p(t-\tau)\,dt,$$

где $p(t)$ — весовая функция системы.

39. 12. Найти дисперсию угла крена корабля $\Theta(t)$, определяемого уравнением

$$\ddot{\Theta}(t) + 2h\dot{\Theta}(t) + \kappa^2\Theta(t) = \kappa^2 F(t)$$

($h > 0$, $\kappa^2 > h^2$), если угол волнового склона $F(t)$ имеет нулевое математическое ожидание,

$$K_f(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

а процесс качки можно считать установившимся.

39. 13. Стационарная случайная функция $Y(t)$ связана со стационарной функцией $X(t)$, спектральная плотность которой известна, уравнением

$$\ddot{Y}(t) + 2h\dot{Y}(t) + \kappa^2 Y(t) = \kappa^2 X(t),$$

где $h > 0$, $\kappa^2 \geqslant h^2$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{yx}(\omega)$ и корреляционную функцию связи $R_{yx}(\tau)$.

39. 14. Дано

$$\ddot{Y}(t) + 8\dot{Y}(t) + 7Y(t) = X(t),$$
$$K_x(\tau) = 4e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Определить корреляционную функцию $Y(t)$ для моментов времени, превосходящих время переходного процесса.

39. 15. На вход динамической системы с весовой функцией $p(\tau)$ поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием. Определить дисперсию отклонения выходного сигнала $Y(t)$ от некоторой стационарной функции $Z(t)$, если $K_x(\tau)$ и $R_{xz}(\tau)$ известны, $\bar{z}=0$, а переходный процесс системы можно считать окончившимся.

39. 16. Определить для момента времени $t \gg 1/a$ дисперсию интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) + aY(t) = tX(t)$$

при нулевых начальных условиях, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi}\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.$$

39. 17. Вследствие случайного дебаланса гиромотора, установленного на платформе, имеющей случайное вертикальное ускорение $W(t)$, гироскоп направления совершает прецессию с угловой скоростью $\dot{\alpha}$, определяемую формулой

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{PL}{H}\left[1+\frac{1}{g}W(t)\right].$$

Определить математическое ожидание и дисперсию азимутального увода $\alpha(t)$ в момент времени $t$, если $M[L]=0$, $D[L]=\sigma_l^2$, $K_w(\tau)$ и $\bar{w}$ заданы, $P$, $H$ и $g$ — известные постоянные, а между $L$ и $W$ нет связи.

39. 18. Определить корреляционную функцию частного интеграла $Y_1(t)$ уравнения

$$\ddot{Y}(t) + 2h\dot{Y}(t) + \kappa^2 Y(t) = e^{-at}X(t),$$

при нулевых начальных условиях, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi}\frac{\alpha}{\omega^2+\alpha^2}, \quad h>0, \quad \kappa^2 \geqslant h^2.$$

39. 19. Случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ уравнением

$$\dot{Y}(t) - tY(t) = X(t).$$

Определить $K_y(t_1, t_2)$, если $K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$, а при $t=0$ $Y(t)=0$.

39. 20. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию частного интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) - a^2tY(t) = bX(t)$$

при нулевых начальных условиях, если $\bar{x}(t) = t$,

$$K_x(\tau) = Ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

39. 21. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию решения дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t) + \frac{1}{t}Y(t) = X(t),$$

если при $t = t_0 \neq 0$ $Y(t) = y_0$,

где $y_0$ — неслучайная величина; $\bar{x}(t) = 1/t$; $K_x(t_1, t_2) = t_1t_2e^{-\alpha|t_2-t_1|}$.

39. 22. Написать общее выражение для математического ожидания и корреляционной функции решения $Y(t)$ дифференциального уравнения $n$-го порядка, весовая функция которого равна $p(t_1, t_2)$, если в правой части уравнения стоит случайная функция $X(t)$; $\bar{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны, начальные значения $Y(t)$ и первых $(n-1)$ ее производных — случайные величины, не связанные с ординатами случайной функции $X(t)$, математические ожидания $e_j$ и корреляционная матрица $\|k_{jl}\|$ которых $(l, j = 1, 2, \ldots, n)$ известны.

39. 23. Дана система

$$\dot{Y}_1(t)+3Y_1(t)-Y_2(t)=X(t); \quad \dot{Y}_2(t)+2Y_1(t)=0.$$

Определить дисперсию $Y_2(t)$ для $t=0,5$ сек., если при $t=0$ $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ являются случайными величинами, не связанными с $X(t)$;

$$D[Y_1(0)]=1; \; D[Y_2(0)]=2; \; M\{[Y_1(0)-\bar{y}_1(0)][Y_2(0)-\bar{y}_2(0)]\}=-1;$$

$$S_x(\omega)=\frac{2}{\pi(\omega^2+1)^2} \text{ сек.}$$

39. 24. Определить дисперсии решений системы уравнений в момент времени $t$:

$$\dot{Y}_1(t)+3Y_1(t)-Y_2(t)=tX(t);$$

$$\dot{Y}_2(t)+2Y_1(t)=0,$$

если начальные условия нулевые, а

$$S_x(\omega)=\frac{2}{\pi(\omega^2+1)}.$$

39. 25. Определить дисперсии решений системы уравнений при $t=0,5$ сек.:

$$\dot{Y}_1(t)+3Y_1(t)-Y_2(t)=tX(t); \quad \dot{Y}_2(t)+2Y_1(t)=0,$$

если $S_x(\omega)=\dfrac{2}{\pi(\omega^2+1)}$, а начальные условия нулевые.

39. 26. На вход автоматического фрикциона, используемого в качестве дифференцирующе-сглаживающего устройства, поступает случайная функция $X(t)$. Определить дисперсию сглаженной функции $Z(t)$ и дисперсию сглаженной скорости ее изменения $Y(t)$, если работа фрикциона описывается системой уравнений

$$b\dot{Y}(t)+Y(t)=a\dot{X}(t);$$

$$b\dot{Z}(t)+Z(t)=X(t),$$

где $a$ и $b$ — постоянные масштабные коэффициенты; $K_x(\tau)=\sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, а переходной процесс закончился.

39. 27. Определить для $t=1$ закон распределения решения уравнения

$$\ddot{Y}(t)+3\dot{Y}(t)+2Y(t)=X(t),$$

если при $t=0$ $Y(t)=y_0$, $\dot{Y}(t)=\dot{y}_0$, а $y_0$, $\dot{y}_0$ и $X(t)$ нормальны и взаимно не коррелированы; $M[y_0]=M[\dot{y}_0]=\bar{x}=0$; $D[y_0]=1,5$; $D[\dot{y}_0]=0,2$; $K_x(\tau)=2e^{-|\tau|}$.

39. 28. Отклонение $U(t)$ от вертикали плоского физического маятника, плоскость качания которого совпадает с диаметральной плоскостью корабля, определяется уравнением

$$\ddot{U}(t) + 2h\dot{U}(t) + Y(t)U(t) = X(t);$$

случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ определяются формулами

$$X(t) = -\frac{n^2}{g}\{\ddot{\xi}_c + \ddot{\eta}_c\varphi - \varrho_x(\dot{\varphi}^2 + \dot{\Psi}^2 + \Psi\ddot{\Psi}) + \varrho_z(\ddot{\Psi} + \ddot{\varphi}\Theta + 2\dot{\varphi}\dot{\Theta})\};$$

$$Y(t) = n^2\left(1 - \frac{\ddot{\zeta}_c - \varrho_x\ddot{\Psi}}{g}\right),$$

где все коэффициенты постоянны, а угол рыскания $\varphi(t)$, угол дифферента $\Psi(t)$, угол крена $\Theta(t)$ и скорости координат центра тяжести корабля $\dot{\xi}_c(t)$, $\dot{\eta}_c(t)$, $\dot{\zeta}_c(t)$ — нормальные стационарные, не связанные между собой случайные функции.

Выразить спектральные плотности $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $S_{xy}(\omega)$, необходимые для нахождения вероятностных характеристик $U(t)$ на моделирующем устройстве, через спектральные плотности $S_\varphi(\omega)$, $S_\psi(\omega)$, $S_\theta(\omega)$, $S_{\dot{\xi}_c}(\omega)$, $S_{\dot{\eta}_c}(\omega)$, $S_{\dot{\zeta}_c}(\omega)$.

39. 29. Для момента времени $t \gg 1/\kappa$ найти асимметрию Sk и эксцесс Ex частного интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) + \kappa Y(t) = X^2(t),$$

удовлетворяющего нулевым начальным условиям, если $X(t)$ нормальная стационарная функция, $\bar{x} = 0$, $K_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$.

39. 30. Определить корреляционную функцию связи $R_{yz}(\tau)$ стационарных решений уравнений:

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2h_1\frac{dY(t)}{dt} + \kappa_1^2 Y(t) = \kappa_1^2 X(t);$$

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + 2h_2\frac{dZ(t)}{dt} + \kappa_2^2 Z(t) = \kappa_2^2 X(t),$$

где случайная функция $X(t)$ обладает свойством белого шума ($S_x(\omega) \approx c^2$); $\kappa_1 > h_1 > 0$; $\kappa_2 > h_2 > 0$.

## § 40. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### Основные формулы

Оптимальной динамической системой называется система, которая по входной функции $X(t) = U(t) + V(t)$, где $U(t)$ — «полезный сигнал», а $V(t)$ — «помеха», получает на выходе функцию $Y(t)$, дисперсия отклонения которой от некоторой функции $Z(t)$ имеет минимальное значение, [1] т. е. такая система, для которой

$$D[\varepsilon(t)] = D[Y(t) - Z(t)] = \min.$$

[1] Возможны и другие определения понятия оптимальной динамической системы. Например, под оптимальной системой можно понимать систему, у которой вероятность того, что разность $Y(t) - Z(t)$ по абсолютному значению не превысит данной величины, достигает максимума. Однако определение, данное в тексте, находит наиболее широкое применение в технике.

Функция $Z(t)$ связана с полезным сигналом $U(t)$ соотношением

$$Z(t) = \mathrm{N}U(t) = \int_0^t n(t,\ t_1)\, U(t_1)\, dt_1,$$

где N — символ известного оператора;
$n(t,\ t_1)$ — его весовая функция.

Под нахождением оптимальной системы понимается определение по вероятностным свойствам случайных функций $U(t)$ и $V(t)$ и виду оператора N вида оператора L или соответствующей ему весовой функции $l(t,\ t_1)$, с помощью которых функция $X(t)$ может быть преобразована в функцию $Y(t)$:

$$Y(t) = \mathrm{L}X(t) = \int_0^t l(t,\ t_1)\, X(t_1)\, dt_1.$$

Задача определения оптимальной динамической системы решается просто, если: а) случайные функции $U(t)$ и $V(t)$ стационарны и стационарно связаны, а операторы L и N линейны и не зависят от времени;

б) спектральная плотность $S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S^*_{uv}(\omega)$ является дробно-рациональной функцией своего аргумента, т. е. может быть представлена в виде

$$S_x(\omega) = a^2 \frac{|P_m(\omega)|^2}{|Q_n(\omega)|^2},$$

где полиномы $P_m(\omega)$ и $Q_n(\omega)$ имеют корни, расположенные только в верхней полуплоскости комплексного переменного, т. е. могут быть представлены в виде

$$P_m(\omega) = \prod_{j=1}^{\beta} (\omega - \mu_j)^{m_j}; \quad Q_n(\omega) = \prod_{i=1}^{\gamma} (\omega - \nu_i)^{n_i},$$

где комплексные числа $\mu_j$ и $\nu_i$ имеют положительные вещественные части, $m_j$ и $n_j$ — кратности соответствующих корней, а $\sum_{j=1}^{\beta} m_j = m$, $\sum_{i=1}^{\gamma} n_i = n$;

в) при определении ординат функции $Y(t)$ могут быть использованы значения ординат функции $X(t)$ за неограниченно большой промежуток времени, предшествующий текущему моменту времени $t$.

В этом случае передаточная функция $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, связанная с ее весовой функцией соотношениями

$$l(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} L(i\omega)\, d\omega,$$

$$L(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} l(\tau)\, d\tau,$$

определяется следующим образом (считаем $\bar{u} = \bar{v} = 0$):

если система работает без запаздывания (т. е. $Z(t)$ является результатом применения некоторого оператора к текущим или будущим значениям ординат функции $U(t)$)

$$L(i\omega) = \frac{1}{a^2}\frac{Q_n(\omega)}{P_m(\omega)}\chi(\omega),$$

где

$$\chi(\omega) = \sum_{r=1}^{\alpha}\sum_{\kappa=1}^{l_r}\frac{c_{\kappa,r}}{(\omega-\lambda_r)^{\kappa}},$$

$$c_{\kappa,r} = \frac{1}{(l_r-\kappa)!}\frac{d^{l_r-\kappa}}{d\omega^{l_r-\kappa}}\left[(\omega-\lambda_r)^{l_r}\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}S_{xz}(\omega)\right]\Bigg|_{\omega=\lambda_r},$$

$\lambda_r\,(r = 1, 2, \ldots, \alpha)$ — полюс кратности $l_r$ выражения $\dfrac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}S_{xz}(\omega)$, лежащий в верхней полуплоскости;

если оптимальная динамическая система должна работать с запаздыванием (т. е. функция $Z(t)$ является результатом применения некоторого оператора к ординатам функции $U(t)$ в момент времени, на $\tau_0$ секунд предшествующий текущий момент времени $t$):

$$L(i\omega) = \frac{S_{xz}(\omega)}{S_x(\omega)} - \frac{1}{a^2}\frac{Q_n(\omega)}{P_m(\omega)}\Psi(\omega),$$

где

$$\Psi(\omega) = \sum_{r=1}^{\alpha'}\sum_{\kappa=1}^{l'_r}\frac{c'_{\kappa,r}}{(\omega-\varkappa_r)^{\kappa}},$$

$$c'_{\kappa,r} = \frac{1}{\left(l'_r-\kappa\right)!}\frac{d^{l'_r-\kappa}}{d\omega^{l'_r-\kappa}}\left[(\omega-\varkappa_r)^{l'_r}\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}S_{xz}(\omega)\right]\Bigg|_{\omega=\varkappa_r};$$

$\varkappa_r\,(r = 1, 2, \ldots, \alpha')$ — полюсы выражения

$$\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}S_{xz}(\omega)$$

кратности $l'_r$, лежащие в нижней полуплоскости.

Дисперсия $D[\varepsilon(t)]$ для оптимальной динамической системы

$$D[\varepsilon(t)] = D[Z(t)] - D[Y(t)].$$

Если динамическая система использует ординаты случайной функции за конечный интервал времени $(t - T, t)$, предшествующий текущему моменту времени $t$ («система с конечной памятью»), а полезный сигнал является суммой полинома $R_\kappa(t)$ заданной степени «$\kappa$» (коэффициенты полинома — любые постоянные величины) и стационарной случайной функции $U(t)$, т. е. функция $X(t)$, поступающая на вход системы, равна сумме

$$X(t) = R_\kappa(t) + U(t) + V(t),$$

то при тех же предположениях о виде спектральной плотности $S_x(\omega)$ весовая функция $l(\tau)$ оптимальной динамической системы определяется формулами:

$$l(t)=\sum_{j=0}^{\kappa} D_j t^j+\sum_{r=1}^{2m} c_r e^{\alpha_r t}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|Q_n(\omega)|^2}{|P_m(\omega)|^2}N(i\omega)S_u(\omega)e^{i\omega t}d\omega+$$
$$+\sum_{i=1}^{n-m}A_i\delta^{(i-1)}(t)+\sum_{i=1}^{n-m}B_i\delta^{(i-1)}(t-T)\qquad(0\leqslant t\leqslant T).$$

Здесь $\alpha_r$ — корни уравнения $|P_m(i\alpha)|^2=0$, $N(i\omega)$ — передаточная функция оператора N, а постоянные, входящие в правую часть равенства, определяются путем подстановки выражения $l(\tau)$ в уравнение

$$\int_{0-}^{T+} l(\tau)K_x(t-\tau)d\tau-\frac{1}{2}\left[R_{xz}(t)+R_{xz}^*(t)\right]=\sum_{j=0}^{\kappa}\lambda_j t^j,\quad(0\leqslant t\leqslant T),$$

которому удовлетворяет весовая функция $l(\tau)$ оптимальной динамической системы, и уравнивания коэффициентов у одинаковых степеней $t$ и у одинаковых показательных функций. К получаемым таким образом $(2n+k+1)$ уравнениям необходимо добавить еще $(k+1)$ уравнение, дающее равенство моментов функции $l(\tau)$ и весовой функции $n(\tau)$, соответствующей заданному оператору N, т. е. уравнения

$$\int_{0-}^{T+} l(\tau)\tau^j d\tau=\mu_j,\ (j=0,1,2,\ldots,\kappa),$$

где

$$\mu_j=\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)\tau^j d\tau.$$

Получающаяся таким образом система уравнений полностью определяет все постоянные, входящие в выражение для $l(\tau)$. Передаточная функция $L(i\omega)$ может быть получена из $l(\tau)$ путем преобразования Фурье

$$L(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}l(\tau)d\tau,$$

а дисперсия ошибки $\varepsilon(t)$ для оптимальной системы в данном случае

$$D[\varepsilon(t)]=D[Z(t)]-\frac{1}{2}\left[R_{yz}(0)+R_{yz}^*(0)\right]+\sum_{j=0}^{\kappa}\lambda_j\mu_j.$$

Аналогичным образом решается задача определения весовой функции оптимальной динамической системы в том случае, если неслучайная часть полезного сигнала содержит линейную комбинацию (с постоянными, но не известными параметрами) тригонометрических или показательных функций времени. Отличие будет заключаться только в том, что в выражении для $l(\tau)$ появится аналогичная линейная комбинация, коэффициенты которой могут быть определены путем подстановки в исходное интегральное уравнение.

В ряде задач отказываются от создания оптимальных динамических систем вследствие трудностей, связанных с их практической реализацией, и идут на создание систем, не являющихся оптимальными в строгом смысле этого слова, но дающих наименьшую дисперсию $D\,[\varepsilon(t)]$ из числа систем, реализация которых в данном случае не представляет особых затруднений. Например, при определении значения функции $U(t)$ в момент времени $t+\tau$ в качестве функции $Y(t)$ можно принять

$$Y(t) = A_1 U(t) + A_2 \dot{U}(t)$$

и определить $A_1$ и $A_2$ так, чтобы

$$D\,[Y(t) - Z(t)] = \min.$$

При такой постановке задачи определение вида оператора L (значений постоянных, входящих в выражение для этого оператора) сводится к определению экстремума функции нескольких переменных.

## Решение типовых задач

Пример 40. 1. Динамическая система проектируется для наилучшего приближения к случайной функции $Z(t) = \mathrm{N}U(t+\tau)$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xz}(\omega)$, если $X(t) = U(t) + V(t)$, а передаточная функция $N(i\omega)$ оператора N, время упреждения $\tau$, спектральные плотности $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ и взаимная спектральная плотность $S_{uv}(\omega)$ известны.

*Решение.* Подставив $U+V$ вместо $X(t)$ в выражение

$$R_{xz}(\tau) = M\left\{[X^*(t) - \bar{x}^*][Z(t+\tau) - \bar{z}(t+\tau)]\right\}.$$

заменив $U(t)$ и $V(t)$ их спектральными разложениями и учитывая, что $Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n(\tau)\,U(t-\tau)\,d\tau$, после простых преобразований получим

$$S_{xz}(\omega) = [S_u(\omega) + S_{vu}(\omega)]\,N(i\omega).$$

Аналогичным образом решаются задачи 40. 1 и 40. 2, являющиеся вводными для данного параграфа.

Пример 40. 2. На вход динамической системы поступает случайная функция $X(t) = U(t) + V(t)$, где спектральная плотность полезного сигнала $S_u(\omega) = \dfrac{\alpha^2}{\omega^2+\beta^2}$, $S_{uv}(\omega) = 0$, а спектральную плотность помехи можно считать постоянной $S_v(\omega) = c^2$. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, если задачей системы является получение функции $Z(t) = U(t+\tau)$, где: а) $\tau \geqslant 0$; б) $\tau < 0$.

*Решение.* В данном случае

$$S_x(\omega) = \frac{c^2\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2 c^2}{\omega^2+\beta^2} = c^2\frac{|P_1(\omega)|^2}{|Q_1(\omega)|^2};\ P_1(\omega) = \omega - i\gamma;\ Q_1(\omega) = \omega - i\beta;$$

$$\gamma = \frac{1}{c}\sqrt{\alpha^2+\beta^2 c^2}.$$

а) При $\tau \geqslant 0$ выражение $\dfrac{Q_1^*(\omega)}{P_1^*(\omega)} S_{xz}(\omega)$ имеет один полюс в верхней полуплоскости: $\omega = i\beta$, следовательно,

$$L(i\omega) = \frac{1}{c^2}\frac{\omega - i\beta}{\omega - i\gamma}\frac{1}{\omega - i\beta}\left[(\omega - i\beta)\frac{\omega + i\beta}{\omega + i\gamma}e^{i\omega\tau}\frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2}\right]_{\omega = i\beta} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{c^2}\frac{e^{-\beta\tau}}{(\beta + \gamma)(\gamma + i\omega)};$$

б) При $\tau < 0$ $\quad \dfrac{Q_1^*(\omega)}{P_1^*(\omega)}S_{xz}(\omega)$

в нижней полуплоскости имеет один полюс: $\omega = -i\gamma$, следовательно,

$$L(i\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2}e^{i\omega\tau}\frac{\omega^2 + \beta^2}{c^2(\omega^2 + \gamma^2)} -$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\omega - i\beta}{\omega - i\gamma}\frac{1}{\omega + i\gamma}\left[(\omega + i\gamma)\frac{\omega + i\beta}{\omega + i\gamma}\frac{\alpha^2}{\omega^2 + \beta^2}e^{i\omega\tau}\right]_{\omega = -i\gamma} =$$

$$= \frac{\alpha^2}{c^2}\frac{1}{\omega^2 + \gamma^2}\left[e^{i\omega\tau} + \frac{\omega - i\beta}{i(\beta + \gamma)}e^{\gamma\tau}\right].$$

Пример 40.3. Дистанция $D(t)$ до самолета, измеряемая радиолокатором с ошибкой $V(t)$, поступает для определения текущего значения скорости в динамическую систему, которая учитывает значения измеренной дальности только за период времени $(t - T,\ t)$. Определить оптимальную весовую функцию $l(\tau)$, если $K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|}$; истинное значение дальности с достаточной точностью можно считать полиномом третьей степени от $t$, $\sigma_v = 30$ *м*, $\alpha = 0{,}5\ \frac{1}{\text{сек.}}$, $\beta = 2{,}0\ \frac{1}{\text{сек.}}$, $T = 20$ сек.

*Решение.* Так как корреляционной функции $K_v(\tau)$ соответствует спектральная плотность $S_v(\omega) = \dfrac{\alpha\sigma_v^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$, а полезная часть случайного сигнала $U(t) = 0$, то в соответствии с обозначениями, принятыми в данном параграфе, имеем $\kappa = 3$, $n - m = 1$, $S_x(\omega) = S_v(\omega)$, числитель $S_v(\omega)$ не содержит $\omega$ и, следовательно, не имеет корней.

Весовая функция оптимальной системы будет

$$l(\tau) = A_1\delta(\tau) + B_1\delta(\tau - T) + D_0 + D_1\tau + D_2\tau^2 + D_3\tau^3.$$

Для определения постоянных после подстановки $l(\tau)$ в уравнение

$$\int_{0-}^{T+} l(\tau)K_x(t - \tau)\,d\tau = \sum_{j=0}^{3}\lambda_j t^j$$

и уравнивания коэффициентов у одинаковых показательных функций получим

$$-\alpha A_1 + D_0 - \frac{1}{\alpha}D_1 + \frac{2}{\alpha^2}D_2 - \frac{6}{\alpha^3}D_3 = 0,$$

$$-\alpha B_1 + D_0 + \frac{1}{\alpha}(1 + \alpha T)D_1 + \frac{1}{\alpha^2}(2 + 2\alpha T + \alpha^2T^2)D_2 +$$

$$+\frac{1}{\alpha^3}(6 + 6\alpha T + 3\alpha^2T^2 + \alpha^3T^3)D_3 = 0.$$

Дополняя эти уравнения равенствами, получающимися из уравнивания моментов $l(\tau)$ и $n(\tau) = \delta^{(1)}(\tau)$:

$$A_1 + B_1 + TD_0 + \frac{1}{2}T^2D_1 + \frac{1}{3}T^3D_2 + \frac{1}{4}T^4D_3 = 0;$$

$$B_1 + \frac{1}{2}TD_0 + \frac{1}{3}T^2D_1 + \frac{1}{4}T^3D_2 + \frac{1}{5}T^4D_3 = -1;$$

$$B_1 + \frac{1}{3}TD_0 + \frac{1}{4}T^2D_1 + \frac{1}{5}T^3D_2 + \frac{1}{6}T^4D_3 = 0;$$

$$B_1 + \frac{1}{4}TD_0 + \frac{1}{5}T^2D_1 + \frac{1}{6}T^3D_2 + \frac{1}{7}T^4D_3 = 0,$$

получим полную систему линейных уравнений, определяющих искомые постоянные. Решение системы дает:

$$D_0 = 5{,}948\cdot 10^{-1},\quad D_2 = 9{,}618\cdot 10^{-2},\quad A_1 = 6{,}138,$$

$$D_1 = -7{,}803\cdot 10^{-1},\quad D_3 = -0{,}2896\cdot 10^{-2}.\quad B_1 = -2{,}582.$$

**Задачи для упражнений**

40. 1. На вход динамической системы поступает

$$X(t) = U(t) + V(t),$$

где $U(t)$ — полезный сигнал, а $V(t)$ — помеха. Определить $S_x(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ и $S_{uv}(\omega)$ известны.

40. 2. На вход динамической системы, предназначенной для получения функции $Z(t) = \frac{dU(t)}{dt}$, поступает случайная функция $X(t) = U(t) + V(t)$, где $V(t)$ — помеха, возникающая при получении значений ординаты функции $U(t)$. Определить взаимную спектральную плотность $S_{xz}(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ и $S_v(\omega)$ известны.

40. 3. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, предназначенной для получения производной от случайной функции $X(t)$ за $\tau$ секунд до последнего наблюдения ординаты $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

Найти дисперсию ошибки определения скорости.

40. 4. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной дифференцирующей системы, если система служит для определения производной случайной функции $U(t)$ в момент времени $t - \tau$ $(\tau > 0)$, а на вход системы поступает случайная функция $X(t)$, являющаяся суммой полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$, которая не связана с $U(t)$. Дано

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2},\quad S_v(\omega) = \frac{b^2}{(\omega^2 + \beta^2)^2}.$$

40. 5. Определить передаточную функцию оптимального фильтра, предназначенного для получения текущего значения полезного сигнала, если на его вход поступает сумма полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$. $U(t)$ и $V(t)$ взаимно не связаны, а

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + \alpha^2};\quad S_v(\omega) = \frac{b^2}{\omega^2 + \beta^2}.$$

40. 6. Выразить дисперсию ошибки оптимальной динамической системы через спектральные плотности $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ (где $U(t)$ — полезный сигнал, $V(t)$ — помеха), если передаточная функция оптимальной системы $L(i\omega)$, а N — оператор, результат применения которого к функции $U(t)$ должна вырабатывать система с наименьшей ошибкой.

40. 7. На вход динамической системы, предназначенной для получения производной $\dot{U}(t)$, поступает $X(t) = U(t) + V(t)$, где помеха $V(t)$ не связана с $U(t)$,

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 - 2\beta^2)^2 + 4\gamma^4}; \qquad S_v(\omega) = c^2 = \text{const}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию системы и дисперсию ошибки определения производной оптимальной системой.

40. 8. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы для получения значения ординаты $U(t+\tau)$, если на вход системы поступает случайная функция $U(t)$, а $S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + \alpha^2}$, $\alpha > 0$, $\tau \geqslant 0$.

40. 9. Спектральная плотность входного сигнала $S_x(\omega) = \frac{1}{(\omega^2+1)^2}$, время упреждения $\tau\ (\tau \geqslant 0)$. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы.

40. 10. Спектральная плотность входного сигнала

$$S_x(\omega) = \frac{a^2(\omega^2 + \alpha^2)}{\omega^4 + 4\beta^4}.$$

Найти оптимальную передаточную функцию динамической системы для определения $X(t+\tau)$ и дисперсию ошибки определения $X(t+\tau)$ при $\tau \geqslant 0$.

40. 11. На вход динамической системы поступает сумма полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$, не связанные между собой. Определить оптимальную передаточную функцию для получения значения сигнала в момент времени $t + \tau$, если $\tau \geqslant 0$,

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + \alpha^2}, \qquad S_v(\omega) = \frac{b^2}{\omega^2 + \beta^2}.$$

40. 12. На вход запаздывающего фильтра поступает сумма некоррелированных сигналов: полезного $U(t)$ и помехи $V(t)$, корреляционные функции которых известны

$$K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\beta|\tau|}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы и ошибку фильтрации, если время запаздывания $\tau_0$ $(\tau_0 \geqslant 0)$.

40. 13. Спектральная плотность входного сигнала $S_x(\omega) = \frac{a^2}{\omega^4 + 4\alpha^4}$, время упреждения $\tau$ $(\tau \geqslant 0)$. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы для нахождения $X(t+\tau)$.

40. 14. На качающемся корабле необходимо определить такой момент времени $t$, чтобы через $\tau_0$ секунд после него линейная функция угла крена $\Theta(t)$ и его производной $n_1\Theta(t) + n_2\dot{\Theta}(t)$ (где $n_1$ и $n_2$—заданные постоянные) приняла бы заданное значение $c$. Определить оптимальную передаточную функцию упредителя и дисперсию $\sigma_\varepsilon^2$ ошибки, если $\bar{\theta} = 0$,

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

40. 15. Координата корабля, идущего прямым курсом при неизменной скорости, определяется с ошибкой $V(t)$, характеризуемой корреляционной функцией

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где $\sigma_v = 25$ *м*, $\alpha = 0{,}25$ 1/сек.

Определить наибольшую точность, достижимую при определении скорости изменения координаты корабля, если наблюдательное время $T = 20$, 40 и 240 сек.

40. 16. В условиях предыдущей задачи определить наибольшую точность, достижимую при определении скорости изменения координаты корабля, если $K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$, а остальные условия те же.

40. 17. Для определения текущего значения угловой скорости бортовой качки корабля $\dot{\Theta}(t)$ используется динамическая система, на вход которой поступает текущее значение угла крена $\Theta(t)$, искаженное ошибкой измерения $V(t)$. Определить дисперсию ошибки $\varepsilon(t)$ определения угловой скорости качки, если динамическую систему можно считать оптимальной, $\bar{\theta} = 0$, $\bar{v} = 0$, $K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha_v|\tau|}$, $R_{\theta v}(\tau) = 0$,

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где

$$\sigma_\theta = 0{,}1 \text{ рад.},\quad \alpha = 0{,}1\,\frac{1}{\text{сек.}},\quad \beta = 0{,}75\,\frac{1}{\text{сек.}},\quad \sigma_v = 2\cdot 10^{-2} \text{ рад.},\quad \alpha_v = 0{,}5\,\frac{1}{\text{сек.}}.$$

40. 18. Динамическая система проектируется для получения значения случайной функции $X(t)$ в момент $t + \tau_0$ по значениям ординат этой функции в течение интервала времени $[t - T, t]$. Определить оптимальную передаточную функцию системы и дисперсию ошибки определения $X(t + \tau_0)$, если измерение ординат функции $X(t)$ осуществляется практически без ошибок

$$X(t) = c_1 + c_2 t + U(t),$$

где $c_1$ и $c_2$ — неизвестные постоянные, а $U(t)$ — случайная функция, корреляционная функция которой

$$K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),\quad \sigma_u = 1,\quad \alpha = 0{,}1\,\frac{1}{\text{сек.}},$$

$$\tau_0 = 10 \text{ сек.},\quad T = 40 \text{ сек.}$$

40. 19. Динамическая система проектируется для получения производной случайной функции $X(t)$ в момент $t + \tau_0$. Определить оптимальную передаточную функцию системы, если

$$X(t) = c_1 + c_2 t + U(t),\quad K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

где $c_1$ и $c_2$ — постоянные, система обладает «конечной памятью $T$» (т. е. учитывает значения $X(t)$ только за интервал времени $[t - T, t]$), $\sigma_u = 1$, $\alpha = 0{,}1\,\frac{1}{\text{сек.}}$, $\tau_0 = 10$ сек., $T = 40$ сек.

40. 20. Определить весовую функцию $l(\tau)$ оптимальной динамической системы «с конечной памятью $T$», предназначенной для дифференцирования функции $X(t) = R_1(t) + U(t)$, и ошибку определения $\dot{X}(t)$, где $R_1(t)$ — полином 1-й степени, а $K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

40. 21. В системах приборов автономного управления самолетами могут быть применены инерциальные системы приборов управления двух типов: в первом случае при работе системы определяется полезный сигнал

$$u_1(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin \Omega t + c_4 \cos \Omega t,$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4$ — некоторые (неизвестные) постоянные, а $\Omega = 1{,}25 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{сек.}}$; во втором случае полезный сигнал имеет вид

$$u_2(t) = c_3 \sin \Omega t + c_4 \cos \Omega t.$$

Найти оптимальные передаточные функции динамических систем, служащих для определения полезного сигнала в первом и втором случае, если системы обладают «конечной памятью» $T = 20$ сек., а полезный сигнал, поступающий в систему, искажен ошибкой $V(t)$,

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|\right), \quad \bar{v} = 0,$$

$$\alpha = 0{,}5 \frac{1}{\text{сек.}}, \quad \beta = 3 \frac{1}{\text{сек.}}, \quad \sigma_v^2 = 4 \cdot 10^{-4},$$

40. 22. В качестве упрежденного значения случайной функции $X(t + \tau_0)$ взято $Y(t) = aX(t)$. Определить значение постоянной $a$, обращающей в минимум дисперсию ошибки $\varepsilon(t) = aX(t) - X(t + \tau_0)$ и величину $D[\varepsilon(t)]$ при оптимальном значении $a$, если $\bar{x} = 0$, а $S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$.

40. 23. В качестве упрежденного значения случайной функции $X(t + \tau)$ взята линейная комбинация $Z(t) = aX(t) + b\dot{X}(t)$. Определить значения постоянных $a$ и $b$, обращающих в минимум дисперсию ошибки

$$\varepsilon(t) = aX(t) + b\dot{X}(t) - X(t + \tau)$$

и величину минимальной дисперсии, если $\bar{x} = 0$,

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|\right).$$

40. 24. В качестве упрежденного значения случайной функции $U(t + \tau_0)$ взято $Y(t) = a[U(t) + V(t)]$, где $V(t)$ — ошибка определения текущего значения полезного сигнала $U(t)$. Определить значение постоянной $a$, обращающей в минимум дисперсию

$$\varepsilon(t) = Y(t) - U(t + \tau_0) \text{ и } D[\varepsilon(t)]_{\min},$$

если

$$S_{uv}(\omega) = 0; \; S_u(\omega) = \frac{\sigma_u^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}; \; S_v(\omega) = \frac{\sigma_v^2 \beta}{\pi(\omega^2 + \beta^2)},$$

$$\bar{u} = \bar{v} = 0.$$

40. 25. Управляющий сигнал требуется подать в динамическую систему агрегата, установленного на качающемся судне, в момент, упреждающий на $\tau_0$ секунд нулевое значение угловой скорости качки $\dot{\Theta}(t)$. В действительности сигнал подается в момент обращения в нуль линейной комбинации

$$Y(t) = a\Theta(t) + b\dot{\Theta}(t) + c.$$

Определить оптимальные значения постоянных $a$, $b$ и $c$ и величину дисперсии $\dot{\Theta}(t+\tau_0)$, если $\overline{\theta}=0$,

$$K_\theta(\tau)=\sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

$$\sigma_\theta=5^\circ,\quad \beta=0{,}7\,\frac{1}{\text{сек.}},\quad \alpha=0{,}042\,\frac{1}{\text{сек.}},\quad \tau_0=0{,}2\ \text{сек.}$$

40. 26. В условиях предыдущей задачи определить оптимальные значения постоянных $a$, $b$, $c$, при которых

$$D\,[\Theta(t+\tau_0)-Y(t)]=\min.$$

## § 41. МЕТОД ОГИБАЮЩИХ

### Основные формулы

Всякую нормальную стационарную функцию $X(t)$ можно представить в виде

$$X(t)=A(t)\cos\Phi(t),$$

где случайные функции $A(t)$ и $\Phi(t)$ являются взаимно независимыми.

Функция $X(t)$ с функцией $Y(t)=A(t)\sin\Phi(t)$ имеет корреляционную функцию связи, которая определяется спектральной плотностью случайной функции $X(t)$ соотношением

$$R_{xy}(\tau)=2\int_0^\infty S_x(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega.$$

$R_{xy}(\tau)$ обращается в нуль при $\tau=0$. Следовательно, для равных моментов времени функции $X(t)$ и $Y(t)$ не связаны, а так как они нормальны, то и независимы.

Законы распределения ординат функций $A(t)$ и $\Phi(t)$ однозначно определяются корреляционной функцией $K_x(\tau)=\sigma_x^2 k(\tau)$ по формулам:

законы распределения первого порядка

$$f(a)=\frac{a}{\sigma_x^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2}};$$

$$f(\varphi)=\frac{1}{2\pi};\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi;$$

законы распределения второго порядка

$$f(a_1,a_2)=\frac{a_1a_2}{\sigma_x^4p^2}e^{-\frac{\left(a_1^2+a_2^2\right)}{2\sigma_x^2p^2}}I_0\left(\frac{a_1a_2\sqrt{1-p^2}}{\sigma_x^2p^2}\right);$$

$$f(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{p^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{1-\varkappa^2}+\frac{\varkappa}{(1-\varkappa^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\varkappa\right)\right],$$

где $a_1$, $\varphi_1$ и $a_2$, $\varphi_2$ — значения амплитуды и фазы огибающей в моменты времени $t$ и $t+\tau$,

$$p^2=1-k^2(\tau)-r^2(\tau),$$

$$k(\tau)=\frac{1}{\sigma_x^2}K_x(\tau),\ r(\tau)=\frac{1}{\sigma_x^2}R_{xy}(\tau),\quad \varkappa(\tau)=\sqrt{1-p^2}\cos(\varphi_2-\varphi_1-\gamma),$$

$$\gamma(\tau)=\operatorname{arc\,tg}\frac{r(\tau)}{k(\tau)},$$

а $I_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Следствием приведенных выше формул являются условные законы распределения

$$f(a_2/a_1)=\frac{a_2}{\sigma_x^2p^2}e^{-\frac{a_2^2}{2\sigma_x^2p^2}}I_0\left(\frac{a_1a_2\sqrt{1-p^2}}{\sigma_x^2p^2}\right)e^{-\frac{a_1^2(1-p^2)}{2\sigma_x^2p^2}};$$

$$f(\varphi_2/\varphi_1)=\frac{p^2}{2\pi}\left[\frac{1}{1-\varkappa^2}+\frac{\varkappa}{(1-\varkappa^2)^{3/2}}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\varkappa\right)\right]$$

и формула для корреляционной функции

$$K_a(\tau)=\sigma_x^2\left[2\mathbf{E}(1-p^2)-p^2\mathbf{K}(1-p^2)-\frac{\pi}{2}\right],$$

где $\mathbf{K}(k^2)$ и $\mathbf{E}(k^2)$ — обозначения полных эллиптических интегралов первого и второго рода

$$\mathbf{K}(k^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\mathbf{E}(k^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Четырехмерный и двумерные законы распределения амплитуды огибающей, ее фазы и соответствующих скоростей имеют вид:

$$f(a,\dot a,\varphi,\dot\varphi)=$$

$$=\frac{a^2}{4\pi^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\sigma_x^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left[\dot a^2+a^2\left(\omega_2^2-2\omega_1\dot\varphi+\dot\varphi^2\right)\right]\right\};$$

$$f(a,\dot\varphi)=\frac{a^2}{\sigma_x^2\sqrt{2\pi}\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2}}\exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\left(\omega_2^2-2\omega_1\dot\varphi+\dot\varphi^2\right)\right\};$$

$$f(\dot a,\varphi)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2}}\exp\left\{-\frac{\dot a^2}{2\sigma_x^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\right\};$$

$$f(a,\dot a)=f(a)f(\dot a);$$

$$f(\varphi,\dot\varphi)=f(\varphi)f(\dot\varphi);$$

$$f(\dot a)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\sqrt{\omega_2^2-\omega_1^2}}\exp\left\{-\frac{\dot a^2}{2\sigma_x^2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)}\right\};$$

$$f(\dot\varphi)=\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\left[\left(\dot\varphi-\omega_1\right)^2+\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\right]^{3/2}},$$

где

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2}\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega\,d\omega;$$

$$\omega_2^2 = \frac{2}{\sigma_x^2}\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega^2\,d\omega.$$

Вероятность того, что $\dot{\varphi}$ больше нуля, определяется равенством

$$P\{\dot{\varphi} \geqslant 0\} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

Аналогичным образом

$$P\{\dot{\varphi} \leqslant 0\} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

При узкополосном спектре случайной функции $X(t)$ величина $\Delta^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2$ мала сравнительно с $\omega_1^2$ и некоторые из вышеприведенных формул могут быть упрощены путем разложения соответствующих выражений по степеням малого отношения $\frac{\Delta}{\omega_1}$. В частности, при узкополосном спектре дисперсии $D[\dot{A}(t)]$ и $D[\dot{\Phi}(t)]$ становятся малыми, а так как $M[A(t)] = 0$, $M[\Phi(t)] = \omega_1$, то при дифференцировании случайной функции $X(t) = A(t)\cos\Phi(t)$ в ряде случаев $\dot{A}(t)$ можно считать равной нулю, а $\dot{\Phi}(t)$ заменять на $\omega_1$.

При узкополосном спектре для плотности вероятности времени пребывания $\tau$ случайной функции выше (ниже) нулевого уровня («закона распределения полупериода») имеет место приближенное выражение

$$f(\tau) \approx \frac{\pi\Delta^2\tau}{2\left[(\pi - \omega_1\tau)^2 + \Delta^2\tau^2\right]^{3/2}},$$

точность которого тем выше, чем меньше отношение $\frac{\Delta}{\omega_1}$.

## Решение типовых задач

Все задачи данного параграфа решаются путем непосредственного применения соответствующих формул, приведенных вначале, и не нуждаются в особых пояснениях. В ряде задач до применения формул необходимо предварительно определить спектральную плотность по заданной корреляционной функции или дисперсию по заданной спектральной плотности, что осуществляется по формулам, приведенным в § 38.

Пример 41. 1. Определить среднее число выбросов в единицу времени случайной функции

$$\Theta(t) = \Phi(t) - \omega_1 t,$$

где $\Phi(t)$ — фаза нормальной случайной функции $X(t)$, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2}\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega\,d\omega,\quad \alpha = 0{,}1\,\frac{1}{\text{сек.}}.$$

*Решение.* Определяем спектральную плотность

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau = \frac{2\alpha^3\sigma_x^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}.$$

Следовательно,

$$\omega_1 = \frac{4\alpha^3}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\omega\, d\omega}{(\omega^2+\alpha^2)^2} = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Применяя общую формулу для числа выбросов в единицу времени, получим

$$p = \int\limits_0^{\infty} f(\theta,\ \dot\theta)|_{\theta=0}\, \dot\theta d\dot\theta.$$

Так как $\Theta(t) = \Phi(t) - \omega_1 t$, то закон распределения $f(\theta, \dot\theta)$ может быть получен путем простой замены $\Phi(t)$ через $\Theta(t)$ в законе распределения $f(\varphi,\ \dot\varphi)$, т. е.

$$f(\theta,\ \dot\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\left[(\dot\theta-\omega_1)^2+\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\right]^{3/2}},$$

где

$$\omega_2^2 = \frac{2}{\sigma_x^2}\int\limits_0^{\infty} S_x(\omega)\,\omega^2\, d\omega = \alpha^2.$$

Подставляя $f(\theta, \dot\theta)$ в формулу для $p$, получим

$$p = \frac{\omega_1+\omega_2}{4\pi} = \frac{(\pi+2)\,\alpha}{4\pi^2} = 0{,}13\ \frac{1}{\text{сек.}}$$

## Задачи для упражнений

41. 1. Корреляционная функция определяется формулой

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Считая $X(t)$ нормальной $(\bar{x} = 0)$, определить корреляционную функцию амплитуды огибающей этой функции.

41. 2. Какова вероятность того, что фаза огибающей нормальной случайной функции $X(t)$ будет уменьшаться, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|);$$

$$\alpha = 0{,}01;\ \ 0{,}10;\ \ 0{,}50\frac{1}{\text{сек.}}.$$

41. 3. Для стационарной нормальной случайной функции $X(t)$ определить вероятность того, что фаза будет увеличиваться (уменьшаться), если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

41. 4. Определить вероятность $P$ того, что скорость изменения фазы огибающей будет больше

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega d\omega,$$

если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau|\right).$$

41. 5. Для нормальной случайной функции $X(t)$ определить закон распределения скорости изменения фазы, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

41. 6. Определить закон распределения фазы и скорости изменения фазы нормальной случайной функции $X(t)$, для которой

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

41. 7. Определить закон распределения скорости изменения фазы нормальной случайной функции $X(t)$, обладающей спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{A^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}.$$

41. 8. Определить закон распределения огибающей и скорости изменения огибающей нормальной случайной функции $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{2\alpha^3\sigma_x^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

41. 9. В условиях предыдущей задачи определить условный закон распределения огибающей в момент времени $t + \tau$, если в момент времени $t$

$$A(t) = \sigma_x, \quad \tau = 2 \text{ сек.}, \quad \alpha = 0{,}1 \frac{1}{\text{сек.}}.$$

41. 10. Найти приближенное выражение для закона распределения времени пребывания случайной функции ниже нулевого уровня, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0{,}01|\tau|}\left(\cos 0{,}7\tau + \frac{1}{70} \sin 0{,}7|\tau|\right).$$

41. 11. Считая возможным пользоваться формулами для огибающей случайной функции с узкополосным спектром, найти закон распределения промежутков времени между последовательными моментами прохождения палубы корабля через положение равновесия, если угол крена $\Theta(t)$ нормальная случайная функция, характеризуемая корреляционной функцией

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-0{,}1|\tau|}\left(\cos 0{,}7\,\tau + \frac{1}{7} \sin 0{,}7|\tau|\right),$$

а килевая качка отсутствует.

41. 12. Определить среднее число выбросов в единицу времени случайной функции $A(t)$ за уровень $2\sigma_x$, если $A(t)$ огибающая нормальной случайной функции $X(t)$, а

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

41. 13. Определить среднее число выбросов амплитуды огибающей нормального случайного процесса $X(t)$ за уровень $2\sigma_x$, если

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

41. 14. Определить условный закон распределения фазы нормальной случайной функции $X(t)$ в момент времени $t+\tau$, если в момент времени $t$ фаза равнялась нулю, а

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Пренебрегая дисперсией амплитуды огибающей, определить дисперсию $X(t)$ в момент $\left(t + \frac{\pi}{\omega_1}\right)$, где

$$\omega_1 = \frac{2}{\sigma_x^2}\int_0^\infty S_x(\omega)\,\omega\,d\omega, \quad \alpha = 0{,}01\,\frac{1}{\text{сек.}}, \quad \beta = 0{,}70\,\frac{1}{\text{сек.}}.$$

41. 15. Определить корреляционную функцию связи двух нормальных стационарных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, если

$$X(t) = A(t)\cos\Phi(t); \quad Y(t) = A(t)\sin\Phi(t);$$

$$K_x(\tau) = K_y(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

## § 42. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

### Основные формулы

Методы определения математического ожидания, корреляционной функции и законов распределения ординат случайной функции при обработке серии реализаций не отличаются от методов определения соответствующих вероятностных характеристик системы случайных величин. При обработке реализаций стационарных случайных функций обычно допустимо вместо усреднения по реализациям пользоваться усреднением по времени, т. е. находить вероятностные характеристики по одной или нескольким достаточно длительным реализациям (выполнение этого условия носит название эргодичности). В этом случае подходящие значения математического ожидания и корреляционной функции определяются формулами

$$\tilde{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt,$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\left[x(t) - \tilde{x}\right]\left[x(t+\tau) - \tilde{x}\right]dt,$$

где $T$ — полное время записи реализации.

Вместо последней формулы иногда используют практически эквивалентную ей формулу

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)\,x(t+\tau)\,dt - \tilde{x}^2.$$

В том случае, когда математическое ожидание $\bar{x}$ известно точно, последняя формула приобретает вид

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)\,x(t+\tau)\,dt - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} [x(t)-\bar{x}]\,[x(t+\tau)-\bar{x}]\,dt.$$

Когда $\tilde{x}$ и $\tilde{K}_x(\tau)$ определяются по значениям ординат реализации случайной функции в дискретные моменты времени $t_j = (j-1)\,\Delta$, соответствующие формулы приобретают вид

$$\tilde{x} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x(t_j);$$

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{m-l}\sum_{j=1}^{m-l}\left[x(t_j)-\tilde{x}\right]\left[x(t_j+\tau)-\tilde{x}\right]$$

или

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{m-l}\sum_{j=1}^{m-l} x(t_j)\,x(t_j+\tau) - \tilde{x}^2,$$

где $\tau = l\Delta$, $T = m\Delta$.

Для нормальных случайных функций дисперсии подходящих значений $\tilde{x}$ и $\tilde{K}_x(\tau)$ могут быть выражены через $K_x(\tau)$. При практических расчетах вместо неизвестной корреляционной функции $K_x(\tau)$ в формулы для $D[\tilde{x}]$ и $D[\tilde{K}_x(\tau)]$ подставляют ее подходящее значение $\tilde{K}_x(\tau)$.

При определении значения корреляционной функции по результатам обработки нескольких реализаций различной длительности за подходящие значения ординат $\tilde{K}_x(\tau)$ следует взять сумму ординат, полученных при обработке отдельных реализаций, с весами, обратно пропорциональными дисперсиям этих ординат.

## Решение типовых задач

Пример 42. 1. Ординаты стационарной случайной функции определяются путем фотографирования шкалы измерительного прибора через равные промежутки времени $\Delta$. Определить наибольшее допустимое значение $\Delta$, при котором увеличение дисперсии $\tilde{K}_x(0)$ сравнительно с дисперсией, получаемой при обработке непрерывного графика реализации случайной функции, будет не более, чем на $\delta\%$, если приближенное значение $\tilde{K}_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$, полное время записи $T \gg \frac{1}{\alpha}$. Известно, что $\bar{x} = 0$, а функцию $X(t)$ можно считать нормальной.

*Решение.* Так как $\bar{x} = 0$, то при использовании непрерывной записи подходящее значение $K_x(0)$ определяется по формуле

$$\tilde{K}_1(0) = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt.$$

Для нахождения дисперсии $\widetilde{K}_1(0)$ имеем

$$D\left[\widetilde{K}_1(0)\right] = M\left[\widetilde{K}_1^2(0)\right] - \left\{M\left[\widetilde{K}_1(0)\right]\right\}^2 =$$
$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_x^2(t_2 - t_1)\,dt_1\,dt_2 \approx \frac{4}{T^2}A^2\int_0^T (T-\tau)\,e^{-\alpha\tau}d\tau.$$

Отбрасывая после интегрирования величины, содержащие малый (по условию) множитель $e^{-\alpha T}$, получим

$$D\left[\widetilde{K}_1(0)\right] = \frac{4A^2}{T^2\alpha^2}(\alpha T - 1).$$

При дискретном определении ординат случайной функции подходящее значение $\widetilde{K}_x(0)$

$$\widetilde{K}_2(0) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x^2(j\Delta).$$

Определяя дисперсию $\widetilde{K}_2(0)$, получим

$$D\left[\widetilde{K}_2(0)\right] = \frac{1}{m^2}\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} M\left[X^2(j\Delta)\,X^2(l\Delta)\right] - m^2K_x(0)\right\} =$$
$$= \frac{2}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} K_x^2(l\Delta - j\Delta),$$

где при вычислении математического ожидания использовано свойство моментов системы нормальных случайных величин.

Подставляя подходящее значение $\widetilde{K}_x(\tau)$, получим

$$D\left[\widetilde{K}_2(0)\right] = \frac{2A^2}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} e^{-2\alpha\Delta|l-m|} = \frac{4A^2}{m^2}\sum_{r=0}^{m}(m-r)\,e^{-2\alpha r\Delta} - \frac{2A^2}{m} =$$
$$= \frac{4A^2\Delta}{T^2}\cdot\frac{T\left(1 - e^{-2\alpha\Delta}\right) - 2\Delta e^{-2\alpha\Delta}}{\left(1 - e^{-\alpha\Delta}\right)^2}.$$

Граничное значение $\Delta$ найдется из уравнения

$$\frac{D\left[\widetilde{K}_2(0)\right]}{D\left[\widetilde{K}_1(0)\right]} = 1 + 0{,}01\delta,$$

т. е. из уравнения

$$\frac{\alpha^2\Delta\left[T\left(1 - e^{-2\alpha\Delta}\right) - 2\Delta e^{-2\alpha\Delta}\right]}{2(\alpha T - 1)\left(1 - e^{-\alpha\Delta}\right)^2} = 1 + 0{,}01\delta,$$

которое можно упростить, если положить $(\alpha T - 1) \approx \alpha T$.

В этом случае

$$-\frac{2\alpha\Delta e^{-2\alpha\Delta}}{T\left(1 - e^{-2\alpha\Delta}\right)^2} + \frac{\alpha\Delta\left(1 + e^{-2\alpha\Delta}\right)}{\left(1 - e^{-2\alpha\Delta}\right)} = 1 + 0{,}01\delta.$$

При $\alpha\Delta \ll 1$ приближенно получим

$$\alpha\Delta \approx \frac{\sqrt{\delta^2 + 400\delta} - \delta}{100}.$$

### Задачи для упражнений

42. 1. Доказать, что условие

$$\lim_{\tau \to \infty} K_x(\tau) = 0$$

является необходимым условием для того, чтобы функция $X(t)$ была эргодичной.

42. 2. Проверить, можно ли в качестве подходящего значения спектральной плотности взять выражение

$$\tilde{S}_x(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{i\omega t} x(t)\, dt \right|^2,$$

если $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция ($\bar{x} = 0$), а $\int_0^\infty |K_x(\tau)|\, d\tau < \infty$.

42. 3. Для определения подходящего значения корреляционной функции стационарного нормального случайного процесса $X(t)$ ($\bar{x} = 0$) используется коррелятор, работающий по формуле

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)\, x(1 + \tau)\, dt.$$

Вывести формулу для $D[\tilde{K}_x(\tau)]$.

42. 4. Определить математические ожидания и дисперсии подходящих значений корреляционных функций, определяемых по одной из формул

$$\tilde{K}_1(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)\, x(t + \tau)\, dt - \left(\tilde{x}\right)^2;$$

$$\tilde{K}_2(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} \left[x(t) - \tilde{x}\right] \left[x(t + \tau) - \tilde{x}\right] dt,$$

где $\tilde{x} = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)\, dt$, если $X(t)$ — нормальная случайная функция.

42. 5. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Найти дисперсию подходящего значения математического ожидания, определяемого по формуле

$$\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt.$$

42. 6. Значение спектральной плотности $\tilde{S}_x(\omega)$ найдено путем обращения по Фурье подходящего значения корреляционной функции. Определить $D[\tilde{S}_x(\omega)]$ как функцию $\omega$, если

$$\tilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, x(t + \tau)\, dt, \quad \bar{x} = 0,$$

процесс нормальный, а при решении задачи вместо $K_x(\tau)$ в окончательной формуле можно взять

$$\widetilde{K}_x(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

$$T = 10 \text{ мин.}, \quad A = 100 \ см^2, \quad \alpha = 0{,}2 \frac{1}{\text{сек.}}.$$

42. 7. Корреляционная функция $K_x(\tau)$, определяемая на опыте, используется для нахождения дисперсии стационарного решения дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t).$$

Определить, во сколько раз изменится $\sigma_y$, если вместо выражения

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0{,}21|\tau|}(\cos 0{,}75\tau + 0{,}28 \sin 0{,}75|\tau|),$$

достаточно точно аппроксимирующего $K_x(\tau)$, принять выражение

$$\widetilde{K}'_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha_1|\tau|} \cos \beta_1 \tau,$$

где $\alpha_1$ и $\beta_1$ подобраны таким образом, чтобы положение первого нуля и ордината первого минимума выражения $\widetilde{K}'_x(\tau)$ совпали бы с соответствующими величинами для $\widetilde{K}_x(\tau)$.

42. 8. Подходящее значение $\widetilde{K}_x(\tau)$ используется для нахождения

$$D[Y(t)],$$

где

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}.$$

Определить, во сколько раз изменится $\sigma_y$, если вместо выражения

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0{,}10|\tau|}\left(\cos 0{,}7\tau + \frac{1}{7}\sin 0{,}7|\tau|\right),$$

достаточно точно аппроксимирующего выражение $\widetilde{K}_x(\tau)$, принять

$$\widetilde{K}'_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2} \cos \beta\tau,$$

где $\alpha$ и $\beta$ подобраны так, что положение первого нуля и значение первого минимума у функций $\widetilde{K}_x(\tau)$ и $\widetilde{K}'_x(\tau)$ совпадают.

42. 9. Корреляционная функция угла крена корабля $\Theta(t)$ приближенно может быть представлена в виде

$$\widetilde{K}_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin \beta|\tau|\right),$$

где $A = 36$ град.$^2$, $\alpha = 0{,}05 \frac{1}{\text{сек.}}$, $\beta = 0{,}75 \frac{1}{\text{сек.}}$.

Определить $D[\widetilde{K}_\theta(\tau)]$ при $\tau = 0$ и $\tau = 3$ сек., если $\Theta(t)$ — нормальная функция, а $\widetilde{K}_\theta(\tau)$ получена в результате обработки записи качки за время $T = 20$ мин.

42. 10. Ордината подходящего значения корреляционной функции при $\tau = 0$ равна 100 $см^2$, а при $\tau = \tau_1 = 4{,}19$ сек. достигает наибольшего отрицательного значения, равного —41,5 $см^2$.

По этим данным подобрать аналитическое выражение для $\tilde{K}(\tau)$:

а) в виде $\tilde{K}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$;

б) в виде $\tilde{K}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$.

Определить, насколько отличается для этих двух случаев значение первого нуля функции $\tilde{K}(\tau)$.

42. 11. Определить $D[\tilde{K}_\theta(\tau)]$ при $\tau = 0$; 2,09; 4,18 и 16,72 сек., если

$$\tilde{K}_\theta(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\theta(t)\,\theta(t+\tau)\,dt,$$

а

$$K_\theta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau,$$

где $A = 25$ град.$^2$, $\alpha = 0{,}12\frac{1}{\text{сек.}}$, $\beta = 0{,}75\frac{1}{\text{сек.}}$, $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\bar{\theta} = 0$. Для определения $K_\theta(t)$ использована запись реализации $\Theta(t)$ длиной 10 *м*, причем 1 *см* графика по оси времени соответствует 1 сек.

42. 12. График реализации случайной функции $X(t)$, нанесенный на бумажную ленту проводящим электрический ток составом, протаскивается с постоянной скоростью под двумя контактами, смещенными один относительно другого по направлению оси времени на расстояние, соответствующее $\tau$, сек. Контакты соединены с релейной схемой таким образом, что реле включает секундомер в том случае, когда ординаты реализации в точках, где находятся контакты, имеют одинаковые знаки, и выключает в противоположном случае. Показать, что если $\bar{x} = 0$, а $X(t)$ — нормальная стационарная функция, то подходящее значение ее нормированной корреляционной функции может быть определено по формуле

$$\tilde{k}(\tau) = \cos\pi\left(1 - \frac{t_1}{t}\right),$$

где $t_1$ — суммарный отсчет секундомера;

$t$ — общее время движения ленты.

42. 13. В условиях предыдущей задачи определить $D[\tilde{k}(5)]$, если для определения $\tilde{k}(5)$ использован график реализации случайной функции, соответствующий времени записи $T = 10$ мин.,

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha = 0{,}2\frac{1}{\text{сек.}}.$$

42. 14. В результате обработки трех реализаций одной и той же стационарной случайной функции $X(t)$ длительностью $T_1$, $T_2$ и $T_3$ получено три графика подходящих значений корреляционной функции. Предполагая процесс нормальным, вывести формулу для получения ординат корреляционной функции $\tilde{K}_x(\tau)$ с учетом всего опытного материала, исходя из требования минимальной дисперсии ошибки, если для каждой реализации подходящее значение корреляционной функции определялось по формуле

$$\tilde{K}_j(\tau) = \frac{1}{T_j}\int^{T_j} x(t)\,x(t+\tau)\,dt, \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

42. 15. Определить дисперсию подходящего значения корреляционной функции нормального случайного процесса с нулевым математическим ожиданием, если для нахождения $\widetilde{K}_x$ ($\tau$) взяты ординаты реализации случайной функции через равные интервалы $\Delta$, $\bar{x} = 0$, длительность записи $T = m\Delta$, $\tau = l\Delta$, а в окончательной формуле допустимо $K_x(\tau)$ заменить на $\widetilde{K}_x(\tau)$.

42. 16. Ординаты случайной функции определяются путем фотографирования шкалы прибора через равные промежутки времени $\Delta = 1$ сек. Определить, во сколько раз изменится $D\,[\widetilde{K}\,(0)]$ сравнительно с дисперсией, полученной при обработке непрерывного графика реализации, если

$$K(\tau) = Ae^{-0,5|\tau|}$$

($\tau$ дано в секундах); процесс нормальный; время наблюдения $T = 5$ мин.

42. 17. Для приближенного определения ординат реализации стационарной случайной функции $X(t)$, имеющей нулевое математическое ожидание и заданную корреляционную функцию $K_x(\tau)$, используется формула

$$X(t) = \sum_{j=0}^{m} \left( A_j \cos \frac{2\pi jt}{T} + B_j \sin \frac{2\pi jt}{T} \right) \alpha_j,$$

где $A_j$, $B_j$ — взаимно несвязанные случайные величины с единичными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями; $T$ — заданное число. Определить постоянные $\alpha_j$ так, чтобы

$$\Delta = \int_0^T \left[ K_x(\tau) - \widetilde{K}_x(\tau) \right]^2 d\tau = \min,$$

где $\widetilde{K}_x$ ($\tau$) — корреляционная функция, соответствующая приведенному выше приближенному выражению для $X(t)$. Определить величину $\Delta$ при оптимальных значениях постоянных $\alpha_j$.

# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## ГЛАВА I

## СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

### § 1. Соотношения между случайными событиями

1.1. По определению $A + A = A$, $AA = A$.
1.2. Событие $A$ — частный случай события $BC$.
1.3. $B = A_6$, $C = A_5$.
1.4. Нет, если $S_1 \neq S_2$.
1.5. а) Достоверное событие $U$; б) невозможное событие $V$.
1.6. а) Взята хотя бы одна книга; б) взято хотя бы по одному тому из всех трех сочинений; в) взята одна книга из первого сочинения или три из второго или одна из первого и три из второго; г) взято по два тома из первого и второго сочинений; д) взят хотя бы один том из третьего сочинения и, кроме того, взяты — один том из первого сочинения и три из второго или один из второго и три из первого.
1.7. Выбранное число оканчивается цифрой 5.
1.8. $\bar{A}$ — все изделия доброкачественные; $\bar{B}$ — бракованных изделий одно или нет ни одного.
1.9. Учитывая свойства событий $(B + B = B,\ BB = B,\ B + \bar{B} = U,\ BU = B,\ B\bar{B} = V,\ B + V = B)$, получаем $A = BC$.
1.10. а) $A$ — попадание в область $S_A$, $\bar{A}$ — вне $S_A$. Тогда $A + B = U$, т. е. должно быть $A = V$, $B = U$; б) $AB$ — попадание в область $S_{AB}$, общую для $S_A$ и $S_B$, $\bar{A}$ — вне $S_A$. Тогда $AB = V$, т. е. должно быть $A = U$, $B = V$; в) $AB$ — попадание в общую область $S_{AB}$, $A + B$ — в $S_{A+B}$; $S_{AB} = S_{A+B}$ только при $S_A = S_B$, т. е. должно быть $A = B$.
1.11. $X = \bar{B}$.
1.12. Воспользоваться равенствами $\bar{A} = \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$, $\bar{B} = A\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$.
1.13. Эквивалентность показывается переходом к противоположным событиям. Равенства доказываются переходом от $n$ к $n + 1$.
1.14. Нет, так как $\overline{A + B + C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.
1.15. Воспользоваться равенством $\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}$.
1.16. $C$ — ничейный исход.
1.17. а) $X = \bar{A}B + AD$; в) воспользоваться равенством $(A + C)(B + C) = AB + C$.

$$X = \overline{AB}C + ABD,$$

где $D$ — произвольное событие.

### § 2. Непосредственный подсчет вероятностей

2.1. $p = \dfrac{rm}{n}$.
2.2. 4/9.
2.3. $p = 0{,}25$, так как первая карта может быть любой масти.
2.4. $\dfrac{1}{6^5} \approx 0{,}00013$.

2.5. 41/480.

2.6. 7/27.

2.7. Очередность извлечения при таких условиях не имеет значения, поэтому $p = 2/9$.

2.8. Можно считать, что для контроля детали берутся из общей партии; $p = \dfrac{n-k}{n+m-k}$.

2.9. Можно рассматривать только однозначные числа. а) 0,2, б) 0,4, в) 0,04.

2.10. а) $N = a + 10b$. Условию удовлетворяют только случаи, когда $a$ — четное и $a+b$ делится на 9; $p = \dfrac{1}{18}$; б) $N = a + 10b + 100c$. Это число должно делиться на 4 и на 9, т. е. $a + b + c$ делится на 9; $a + 2b$ — на 4 $(m = 22)$; $p = \dfrac{11}{360}$.

2.11. $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5 - 1} \approx 0{,}302$.

2.12. $\dfrac{8 \cdot 3!}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \dfrac{1}{15}$.

2.13. 0,5.

2.14. $C_5^2/C_8^2 = \dfrac{5}{14}$.

2.15. 0,3.

2.16. а) $\dfrac{5}{9}$; б) $\dfrac{2}{9}$; в) $1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

2.17. $p = \dfrac{C_n^s C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}$.

2.18. $p = \dfrac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}$.

2.19. $p_k = \dfrac{C_5^k}{C_{90}^k}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$, $p_1 = 0{,}0556$, $p_2 = 0{,}0025$, $p_3 = 0{,}85 \cdot 10^{-4}$, $p_4 = 0{,}2 \cdot 10^{-5}$, $p_5 = 0{,}2 \cdot 10^{-7}$.

2.20. а) $\dfrac{C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \dfrac{n}{2n-1}$; б) $2\dfrac{C_2^2 C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \dfrac{n-1}{2n-1}$.

2.21. $p = \dfrac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$.

2.22. $p = \dfrac{C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{52}^3} = 0{,}0029$.

2.23. $n = C_{36}^3 = 7140$. Благоприятствующие комбинации: 1) (7, 7, 7); 2) (9, 9, 3), (9, 6, 6); 3) (2, 8, 11), (2, 9, 10), (3, 7, 11), (3, 8, 10), (4, 6, 11), (4, 7, 10), (4, 8, 9), (6, 7, 8), поэтому $m = 4 + 2 \cdot 4 \cdot C_4^2 + 4^3 \cdot 8 = 564$; $p = 0{,}079$.

2.24. Число возможных случаев $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1$. Число благоприятствующих случаев $m = C_n^2 + C_n^4 + \cdots = \dfrac{1}{2}[(1+1)^n + (1-1)^n - 2] = 2^{n-1} - 1$; $p = \dfrac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$.

2.25. а) $p = 1 - \dfrac{C_5^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3} = 0{,}75$; б) $p = \dfrac{C_5^1 C_3^2 + C_5^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \dfrac{7}{24}$.

2.26. Необходимо получить $n - m$ пятаков от $2n$ покупателей. Число возможных случаев $C_{2n}^{n-m}$, $p = 1 - \dfrac{M}{C_{2n}^{n-m}}$,

где $M$ — число случаев, когда невозможно продать $2n$ билетов. $M = \sum\limits_{j=1}^{n-m} M_j$;

$M_1 = C_{2n-(2m+1)}^{n-m}$ — число случаев, когда первый пятак поступил от $(2m+2)$-го покупателя;

$M_2 = C_{2n-(2m+3)}^{n-m-1}$ — число случаев, когда первый пятак поступил не позднее, чем от $(2m+1)$-го, а второй — от $(2m+4)$-го и т. д.

$$p = 1 - \frac{1}{C_{2n}^{n-m}} \sum_{k=1}^{n-m} C_{2k-1}^{k}.$$

## § 3. Геометрические вероятности

3.1. $p = 1 - \frac{l}{L}$.

3.2. $p = \frac{3}{9,5} \approx 0,316$.

3.3. 0,134.

3.4. 0,293.

3.5. Построение: $AB$ — отрезок длиной $2h$, $C$ — центр диска, $AD$ и $BE$ — касательные к диску, расположенные в верхней части. Треугольники $ADC$, $BEC$ совпадают при повороте на угол $\varphi = \angle DCE$ поэтому $\angle ACB = \varphi$, $h = l \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $p = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h}{l}$.

3.6. $1 - \left(1 - \frac{2r+d}{a}\right)\left(1 - \frac{2r+d}{b}\right)$.

3.7. а) 0,0185; б) $p = \frac{160 + 25\pi}{1000\pi} = 0,076$.

3.8 а) 0,16; б) 0,6.

3.9. $x$ — расстояние от берега до лодки, $y$ (с соответствующим знаком) — от лодки до судна, когда лодка и судно находятся на одной линии. Возможные значения: $x \leqslant v \cdot 1$, $|x + y| \leqslant v \cdot 1$ ($v$ — скорость лодки, $1 = 1$ час). Благоприятствующие: $|y| \leqslant \frac{1}{3} v$; $p = \frac{5}{9}$.

3.10. $k(2-k)$.

3.11. $x = AL$, $y = AM$. Возможные значения: $0 \leqslant x$; $y \leqslant l$. Благоприятствующие: $|y - x| \leqslant x$; $p = 0,75$.

3.12. Два отрезка $x$, $y$. Возможные значения: $0 \leqslant x + y \leqslant l$. Благоприятствующие: $x \leqslant \frac{l}{2}$, $y \leqslant \frac{l}{2}$, $x + y \geqslant \frac{l}{2}$; $p = 1/4$.

3.13. Две дуги $x$, $y$. Возможные значения: $0 \leqslant x$; $y \leqslant 2\pi R$. Благоприятствующие: $x \leqslant \pi R$, $y \leqslant \pi R$, $x + y \geqslant \pi R$; $p = 1/4$.

3.14. Отрезки $x$, $y$, $z$. Возможные значения: $0 \leqslant x$; $y$; $z \leqslant l$. Благоприятствующие: $x + y \geqslant z$, $x + z \geqslant y$, $y + z \geqslant x$; $p = \frac{1}{2}$.

3.15. $AM = x$ $MN = y$. Возможные значения: $0 \leqslant x + y \leqslant l$. Благоприятствующие: $x \leqslant a$, $y \leqslant a$, $x + y \geqslant l - a$. При $\frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}$ $p = \left(1 - \frac{3a}{l}\right)^2$, при $\frac{l}{2} \leqslant a \leqslant l$ $p = 1 - 3\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2$.

3.16. $x$, $y$ — время прибытия пароходов. Возможные значения: $0 \leqslant x \leqslant 24$; $0 \leqslant y \leqslant 24$. Благоприятствующие: $y - x \leqslant 1$, $x - y \leqslant 2$; $p = 0,121$.

3.17. $p = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$.

3.18. 0,75.

3.19. $x$ — расстояние от берега до первого судна, $y$ — до второго. Возможные значения: $0 \leqslant x$; $y \leqslant L$. Благоприятствующая область $|x - y| \leqslant d \sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}$ получается при переходе к относительному движению (первое судно стоит, второе — движется со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$); $p = 1 - \left[1 - \frac{d}{L}\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}\right]^2$.

3.20. а) $p = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^2 = 0,0975$. б) $x$, $y$, $z$ — координаты точек излома. Возможные значения: $0 \leqslant x$; $y$; $z \leqslant 200$. Благоприятствующие: $|x - y| \leqslant 10$, $|x - z| \leqslant 10$, $|y - z| \leqslant 10$; $p = 1 - \left(\frac{180}{200}\right)^3 = 0,271$.

3. 21. $p = \frac{2\pi(1-\cos\alpha)R^2}{4\pi R^2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

3. 22. $p = \left\{R^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi d\varphi d\psi\right\} : \left\{2R^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi d\varphi d\psi\right\} = 0{,}21.$

3. 23. $x$ — расстояние от середины иглы до ближайшей линии, $\varphi$ — угол между линией и иглой. Возможные значения: $0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; благоприятствующие: $x \leqslant \frac{l}{2}\sin\varphi$; $p = \frac{2l}{L\pi}$.

3. 24. Возможные значения: $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant m$; а) благоприятствующие значения: $b \leqslant a^2$.

При $m \geqslant n^2$ $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2nm}\int\limits_0^n b\,da = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{6m}$

При $m \leqslant n^2$ $p = 1 - \frac{1}{2nm}\int\limits_0^m \sqrt{b}\,db = 1 - \frac{\sqrt{m}}{3n}$. Корни будут положительными, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$. При $m \geqslant n^2$ $p = \frac{n^2}{12m}$; при $m \leqslant n^2$ $p = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{m}}{6n}$.

б) корни уравнения будут вещественны, если $b^2 + a^3 \leqslant 0$. Область благоприятствующих значений коэффициентов: $a \leqslant 0$, $b^2 \leqslant -a^3$. При $n^3 \leqslant m^2$ $p = \frac{1}{2nm}\int\limits_0^n a^{3/2}da = \frac{n^{3/2}}{5m}$. При $n^3 \geqslant m^2$ $p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2nm}\int\limits_0^m b^{2/3}db = \frac{1}{2}\left(1 - 0{,}6\frac{m^{2/3}}{n}\right)$.

3. 25. а) $p = \frac{1}{3}$;

б) разбиваем прямоугольник на параллельные полосы шириной 5 *см*. Пусть $S$ — величина площади, которая отсчитывается следующим образом: если точка лежит в первой полосе, то $S$ — вся площадь, лежащая левее этой точки. Если точка находится во второй полосе, то $S$ — соответствующая площадь второй полосы и всей первой полосы и т. д. Обозначим $S_1$ и $S_2$ — отсчитываемые указанным способом площади для обеих точек.

Возможные значения: $0 \leqslant S_1$, $S_2 \leqslant 1200$; благоприятствующие: $0 \leqslant S_1$ $S_2 \leqslant 200$; $1000 \leqslant S_1$, $S_2 \leqslant 1200$. Кроме того, имеются еще четыре благоприятствующие области изменения $S_1$ и $S_2$, которые ограничены отрезками прямых и дугами окружностей. Эти области относительно малы и потому их можно рассчитывать приближенно. Тогда уравнения границ четырех областей можно записать в виде: 1) $S_2 = 1150 + S_1$, $0 \leqslant S_1 \leqslant 50$; 2) $S_1 = 1150 + S_2$, $0 \leqslant S_2 \leqslant 50$; 3) $S_2 = 850 + S_1$, $150 \leqslant S_1 \leqslant 200$; 4) $S_1 = 850 + S_2$, $150 \leqslant S_2 \leqslant 200$. Благоприятствующая площадь 85 000, возможная 1 440 000; $p \approx 0{,}06$.

3. 26. Пусть $A$ и $B$ — положения движущейся точки и центра круга, $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — их векторы скоростей, $r$ — расстояние $AB$. Из точки $B$ проводим окружность радиуса $R$. Считаем $\beta > 0$, если вектор $\vec{v}$ лежит левее линии $AB$, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$. Из точки $A$ проводим касательные к окружности радиуса $R$. Точка $A$ попадет в круг, если вектор относительной скорости попадет в получившийся сектор с углом при вершине $2\varepsilon$, $\varepsilon = \arcsin\frac{R}{r}$. Из точки $A$ проводим вектор $-\vec{v}$. Пусть точка $O$ — конец этого вектора. Из точки $O$ проводим окружность, радиус которой по величине совпадает со скоростью точки $A$. Точка $A$ попадет в круг только в том случае, если вектор $\vec{u} + (-\vec{v})$ лежит в секторе. Пусть $u > v$. Тогда искомая вероятность будет (см. рис. 37) $p = \frac{\alpha}{2\pi}$. Для определения $\alpha$ положим $\delta = \angle OCA$, $x = \angle OCD$, $y = \angle ODC$, $\gamma = \angle ADO$. Тогда $\alpha = 2\varepsilon + \delta - \gamma$. Используя равенства

$$\frac{\sin\gamma}{v} = \frac{\sin(\beta-\varepsilon)}{u} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\delta}{v} = \frac{\sin(\beta+\varepsilon)}{u},$$

получаем

$$p=\frac{1}{2\pi}\left\{2\varepsilon+\arcsin\left[\frac{v}{u}\sin(\beta+\varepsilon)\right]-\arcsin\left[\frac{v}{u}\sin(\beta-\varepsilon)\right]\right\}.$$

Данная формула справедлива при любом $\beta$. При $v>u$ задача решается аналогично, но при этом нужно рассматривать несколько случаев:

1. $|\beta|\geqslant\varepsilon+\frac{\pi}{2}$ $\quad p=0;$

2. $\frac{\pi}{2}+\varepsilon\geqslant|\beta|\geqslant\varepsilon$:

а) при $u\leqslant v\sin(|\beta|-\varepsilon)$ $\quad p=0.$

б) при $v\sin(|\beta|-\varepsilon)\leqslant u\leqslant$ $\leqslant v\sin(|\beta|+\varepsilon)$

$$p=\frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(|\beta|-\varepsilon)\right];$$

в) при $u>v\sin(|\beta|+\varepsilon)$

$$p=\frac{1}{\pi}\left\{\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(|\beta|-\varepsilon)\right]-\right.$$

$$\left.-\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(|\beta|+\varepsilon)\right]\right\}.$$

3. $|\beta|\leqslant\varepsilon$:

а) при $u\leqslant v\sin(\varepsilon-|\beta|)$ $\quad p=1,$

б) при $v\sin(\varepsilon-|\beta|)\leqslant u\leqslant$ $\leqslant v\sin(\varepsilon+|\beta|)$

$$p=1-\frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(\varepsilon-|\beta|)\right];$$

в) при $u>v\sin(\varepsilon+|\beta|)$

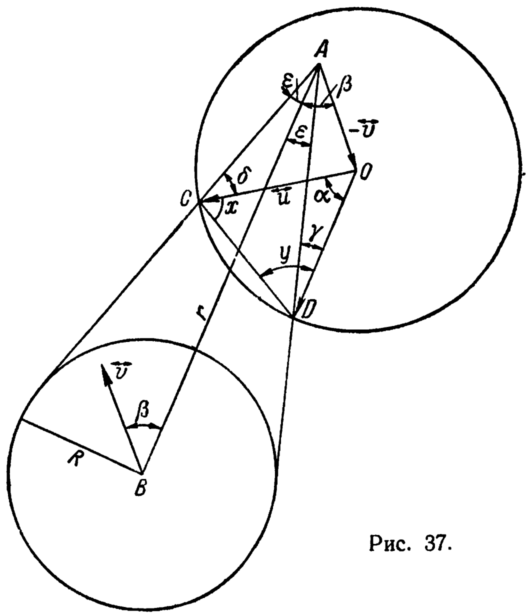


Рис. 37.

$$p=1-\frac{1}{\pi}\left\{\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(\varepsilon-|\beta|)\right]+\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(\varepsilon+|\beta|)\right]\right\}.$$

## § 4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

4.1. $p=1-(1-0{,}7)(1-0{,}8)=0{,}94$

4.2. $p=1-\prod_{k=1}^{n}(1-p_k).$

4.3. $p=(1-0{,}2)^3=0{,}512.$

4.4. 0,251.

4.5. $p=1-(1-0{,}3)(1-0{,}2^2)=0{,}328$

4.6. $p(1-p)^{n-1}.$

4.7. а) 3/5; б) $1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$

4.8. $1-0{,}5^n\geqslant 0{,}9;\ n\geqslant 4$

4.9. $1-(1-p)^4=0{,}5;\ p\approx 0{,}159.$

4.10. $p=\left(\frac{S_\Delta}{\pi R^2}\right)^4=\frac{729}{256\pi^4}=0{,}029$

4.11. $p=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\cdot\ldots=\frac{6}{\pi^2}\approx 0{,}608$

4.12. Из несовместности событий следует $P(A/B)=0$ и $P(B/A)=0$, т. е. события зависимы.

4.13. $p_1p_2.$

4.14. $p=0{,}7\cdot 0{,}9^{12}=0{,}197.$

4.15. $p=0{,}7^2(1-0{,}6^2)=0{,}314$

4.16. 0,75.

4.17. $p_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}45$; $p_2 = 0{,}7^2 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}39$.

4.18. а) $0{,}1 = (p_1 p_3)^n$, т. е. $n = \dfrac{-1}{\lg p_1 p_3}$; б) $p = 1 - (1 - p_1 p_3)^3 (1 - p_2 p_4)^3$.

4.19. $p(B/A) = 15p(B)$. События зависимы.

4.20. Следует из равенства $P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$.

4.21. $p = 2\left(\dfrac{k}{n}\right)^2 \left[1 - \left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right]$.

4.22. Срединное отклонение $E$ характеризует половину длины интервала, вероятность попадания в который равна половине; середина этого интервала соответствует нулевой ошибке; $p = 0{,}25 \cdot 0{,}98 = 0{,}245$.

4.23. $p = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{360}$.

4.24. а) $p = 1 - \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{7}{8} = 0{,}3$; б) $p = 1 - \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = 0{,}6$.

4.25. $p = 1 - \dfrac{(n-m)!\,(n-k)!}{n!\,(n-m-k)!}$.

4.26. а) $p = 1 - \dfrac{39\,997!\;39\,000!}{40\,000!\;38\,997!} \approx 1 - \left(\dfrac{39}{40}\right)^3 = 0{,}073$;

б) $0{,}5 \geqslant \dfrac{(40\,000 - N)(39\,999 - N)(39\,998 - N)}{40\,000 \cdot 39\,999 \cdot 39\,998} \approx \left(\dfrac{40\,000 - N}{40\,000}\right)^3$, $\quad N \geqslant 8252$.

4.27. а) $p = 1 - \dfrac{(100\,000 - 170)}{100\,000} \cdot \dfrac{(100\,000 - 2 \cdot 170)}{(100\,000 - 170)} \cdots \dfrac{(100\,000 - 60 \cdot 170 - 10 \cdot 230)}{(100\,000 - 59 \cdot 170 - 10 \cdot 230)} =$

$= 1 - \dfrac{(100\,000 - 60 \cdot 170 - 10 \cdot 230)}{100\,000} = 0{,}125$;

б) $p_{\text{доп}} = 1 - \dfrac{(100\,000 - 5 \cdot 170 - 230)}{(100\,000 - 5 \cdot 170)} \dfrac{(100\,000 - 11 \cdot 170 - 2 \cdot 230)}{(100\,000 - 11 \cdot 170 - 230)} \cdots$

$\cdots \dfrac{(100\,000 - 59 \cdot 170 - 10 \cdot 230)}{(100\,000 - 59 \cdot 170 - 9 \cdot 230)} \approx 0{,}0246$;

в) $p = 1 - (1 - p_{\text{доп}})(1 - p_{\text{осн}})$, $p_{\text{осн}} = 1 - \dfrac{1-p}{1 - p_{\text{доп}}} = 0{,}1029$.

4.28. $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$, $P(A/B) = P(B/A) = P(C/A) = P(A/C) = P(B/C) =$ $= P(C/A) = \dfrac{1}{2}$, т. е. события попарно независимы; $P(A/BC) = P(B/AC) =$ $= P(C/AB) = 1$, т. е. события не являются независимыми в совокупности.

4.29. Нет (см., например, задачу 4.28).

4.30. $p = \dfrac{n!}{n^n}$.

4.31. $1/C_n^r$.

4.32. $p = 2\dfrac{n}{2n} \cdot \dfrac{n}{(2n-1)} \dfrac{(n-1)}{(2n-2)} \dfrac{(n-1)}{(2n-3)} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{2\,(n!)^2}{(2n)!}$.

4.33. $p = \dfrac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} \dfrac{C_4^1 C_8^2}{C_{12}^3} \cdot \dfrac{C_3^1 C_6^2}{C_9^3} \cdot \dfrac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} \cdot 1 = \dfrac{3^5 5!\,10!}{15!} = 0{,}081$.

4.34. $p = \dfrac{C_n^1 C_m^1}{C_{n+m}^2} \cdot \dfrac{C_{n-1}^1 C_{m-1}^1}{C_{n+m-2}^2} \cdots \dfrac{1 \cdot C_{m-(n-1)}^1}{C_{m-n+2}^2} = \dfrac{2^n n!\,m!}{(n+m)!}$.

4.35. $p = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{(n-1)} \cdots \dfrac{1}{[n-(k-1)]} = \dfrac{(n-k)!}{n!}$.

4.36. $p = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{99}{100} = \dfrac{100!}{2^{100}\,(50!)^2} \approx 0{,}08$.

4.37. Пусть $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ — покупатели с деньгами пятирублевого достоинства, а $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$ — десятирублевого, причем их номера соответствуют порядку в очереди. Событие $A_k$ состоит в том, что придется ждать сдачу только из-за покупателя $b_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$);

$$p = \prod_{k=1}^{m} P(\overline{A}_k) = \frac{n}{(n+1)} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-m+1)}{(n-m+2)} = \frac{n-m+1}{n+1}.$$

4.38. Решается так же, как и задача 4.37

$$P(A_k) = \frac{2}{n-2k+3}, \quad p = \prod_{k=1}^{m} P(\overline{A}_k) = \frac{n-2m+1}{n+1}.$$

4.39. Первый извлеченный бюллетень должен быть подан за первого кандидата. Вероятность этого $\frac{n}{n+m}$. Затем бюллетени должны идти в такой последовательности, чтобы бюллетеней поданных за первого кандидата, всегда было извлечено не меньше, чем за второго. Вероятность этого события равна $\frac{n-m}{n}$ (см. задачу 4.37); $p = \frac{n}{(n+m)} \cdot \frac{(n-m)}{n} = \frac{n-m}{n+m}$.

## § 5. Теорема сложения вероятностей

5.1. 0,03.
5.2. 0,55.
5.3. $p_k = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}$.
5.4. $2\left(\frac{r}{R}\right)^2$.
5.5. $\frac{11}{26}$.
5.6. $p = 1 - \frac{1}{C_{17}^6}\left(C_{10}^6 + C_{10}^5 C_5^1 + C_{10}^5 C_2^1 + C_{10}^4 C_5^2 + C_{10}^4 C_5^1 C_2^1 + C_{10}^3 C_5^3\right) \approx 0{,}4$.
5.7. $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$.
5.8. $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = [P(A) + P(\overline{A})]\, P(B/A) = P(B/A)$.
5.9. $P(B) = P(A) + P(B\overline{A}) \geqslant P(A)$.
5.10. 0,323.
5.11. $p \approx 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}06$.
5.12. $\frac{2}{3}$.
5.13. 0,5.
5.14. $npq^{m-1}$.
5.15. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$.
5.16. $A$ — первый билет имеет равные суммы; $B$ — второй. а) $P(A+B) = 2P(A) = 0{,}1105$; б) $P(A+B) = 2P(A) - P^2(A) = 0{,}1075$.
5.17. Из $P(A+B) \leqslant 1$ следует $P(B) - P(AB) \leqslant P(\overline{A})$ или $P(A/B) \geqslant 1 - \frac{P(\overline{A})}{P(B)} = \frac{a+b-1}{b}$.
5.18. 0,8.
5.19. Из $Z = X + Y$ следует: $Z \leqslant X + |Y|$, $Z \geqslant X - |Y|$, $P\{Z \leqslant 11\} \geqslant P\{X \leqslant 10$ и $|Y| \leqslant 1\} = P\{X \leqslant 10\} + P\{|Y| \leqslant 1\} - P\{X \leqslant 10$ или $|Y| \leqslant 1\} \geqslant 0{,}9 + 0{,}95 - 1 = 0{,}85$, $P\{Z \geqslant 9\} \geqslant 0{,}05$, $P\{Z \leqslant 9\} \leqslant 0{,}95$.
5.20. 0,44 и 0,35.

5.21. $p(2-p)$.

5.22. $p_B = 0{,}1 + 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 = 0{,}316$; $p_C = 0{,}9\,(0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}4) = 0{,}3816$.

5.23. $p = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$.

5.24. $p = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(n-1)} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{1}{n} = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$

5.25. $p_B \approx 0{,}8$, $p_C \approx 0{,}2$.

5.26. $G(m+n) = G(m) + [1 - G(m)]\,G(n/m)$; $G(n/m) = \dfrac{G(m+n) - G(m)}{1 - G(m)}$.

5.27. $p_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^5} + \ldots = \dfrac{2}{3}$, $p_2 = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots = \dfrac{1}{3}$. Другое решение: $p_1 + p_2 = 1$, $p_2 = \dfrac{1}{2}p_1$, т. е. $p_1 = \dfrac{2}{3}$, $p_2 = \dfrac{1}{3}$.

5.28. $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_2 = \dfrac{1}{2}p_1$, $p_3 = \dfrac{1}{2}p_2$, т. е. $p_1 = \dfrac{4}{7}$, $p_2 = \dfrac{2}{7}$, $p_3 = \dfrac{1}{7}$.

5.29. $p_1 + p_2 = 1$, $p_2 = \dfrac{1}{2}p_1$, т. е. $p_1 = \dfrac{2}{3}$, $p_2 = \dfrac{1}{3}$.

5.30. $p_1 + p_2 = 1$, $p_1\dfrac{m}{n+m} = p_2$, $p = p_1 = \dfrac{n+m}{n+2m}$.

5.31. $p_1$ — вероятность попадания первым стрелком; $p_2$ — вторым; $p = p_1$; $p_1 + p_2 = 1$ $p_2 = 0{,}8\cdot 0{,}3\,\dfrac{p_1}{0{,}2} = 1{,}2\,p_1$, $p = 0{,}455$.

5.32. Воспользоваться условием задачи 1.13.

5.33. Для $n = 2$ и $n = 3$ формула справедлива. Считаем ее справедливой для $n - 1$. Тогда из

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n-1} A_k\right) + P(A_n) - P\left(A_n \sum_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

получаем

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \left[\sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) + P(A_n)\right] - \left[\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1} P(A_kA_j) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} P(A_kA_n)\right] + \left[\sum_{k=1}^{n-3}\sum_{j=k+1}^{n-2}\sum_{i=j+1}^{n-1} P(A_kA_jA_i) + \sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1} P(A_kA_jA_n)\right] -$$
$$- \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{n-1} A_kA_n\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} P(A_kA_j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} P(A_kA_jA_i) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right), \text{ и. т. д.}$$

5.34. Подсчитывая количество одинаковых членов, получаем

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = C_n^1 P(A_k) - C_n^2 P(A_kA_j) + C_n^3 P(A_kA_jA_i) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right).$$

5.35. Используя равенство $\prod_{k=1}^{n} A_k = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k}$ из 1.13 и формулу из 5.33, получаем

$$P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \left\{\sum_{k=1}^{n} P(\overline{A}_k) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} P(\overline{A}_k\overline{A}_j) + \sum_{k=1}^{n-2}\sum_{j=k+1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\right.$$
$$\left. P(\overline{A}_k\overline{A}_j\overline{A}_i) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k\right)\right\}.$$ Но согласно 1.13 $\prod_{k=1}^{s} \overline{A}_k = \overline{\sum_{k=1}^{s} A_k}$,

поэтому при любом $s$ $P\left(\prod_{k=1}^{s}\overline{A}_k\right)=1-P\left(\sum_{k=1}^{s}A_k\right)$. Учитывая еще равенство $1-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^n=0$, приходим к указанной в условии задачи формуле.

5. 36. $p=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.

5. 37. Вероятность, что $m$ человек из $n$ займут свои места, есть $C_n^m\,\frac{(n-m)}{n!}=\frac{1}{m!}$

Вероятность того, что оставшиеся $n-m$ человек будут сидеть не на своих местах, равна $\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}$, $p=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^k}{k!}$.

5. 38. Событие $A_j$ — в $j$-тый вагон не войдет ни один пассажир, $P(A_j)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$,

$P(A_jA_i)=\left(1-\frac{2}{n}\right)^k$, $P(A_jA_iA_s)=\left(1-\frac{3}{n}\right)^k$ и т. д.

Используя формулу из задачи 5. 34, получаем

$$p=1-C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k-\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

5. 39. Первый игрок выигрывает в следующих $n$ случаях:

1) из $m$ партий не проиграет ни одной;
2) из $m$ партий проиграет одну, но $(m+1)$-ую партию выиграет;
3) из $m+1$ партий проиграет две, но $(m+2)$-ую партию выиграет.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$n$) из $m+n-2$ партий проиграет $n-1$, а затем выиграет. $P=p^m\left(1+C_m^1q+\right.$ $\left.+C_{m+1}^2q^2+\ldots+C_{m+n-2}^{n-1}q^{n-1}\right)$.

5. 40. Ставка делится пропорционально отношению $\frac{p_1}{p_2}$ вероятностей выигрыша для первого и второго игроков,

$$p_1=\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2}C_m^1+\frac{1}{2^2}C_{m+1}^2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}C_{m+n-2}^{n-1}\right),$$

$$p_2=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{2^2}C_{n+1}^2+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}}C_{m+n-2}^{m-1}\right).$$

5. 41. Событие $A$ — первый сказал правду; $B$ — четвертый сказал правду. $p=P(A/B)=$ $=\frac{P(A)\,P(B/A)}{P(B)}$. Пусть $p_k$ — вероятность того, что (с учетом двойных искажений) $k$-й лгун передал правильную информацию; $p_1=\frac{1}{3}$, $p_2=\frac{5}{9}$, $p_3=\frac{13}{27}$, $p_4=\frac{41}{81}$; $P(A)=p_1$, $P(B/A)=p_3$, $P(B)=p_4$; $p=\frac{13}{41}$.

5. 42. Заменяем выпуклый контур многоугольником с $n$ сторонами. Событие $A$ — будет пересечение линии, $A_{ij}$ — $i$-ой и $j$-й сторонами; $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}A_{ij}$, $p'=$ $=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}p_{ij}$, где $p_{ij}=P(A_{ij})$, $p'=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}p_k^*$, $p_k^*=\sum_{i=1}^{n}p_{ki}-p_{kk}$ — вероятность пересечения $k$-ой стороной длиной $l_k$ параллельных линий. Из решения задачи Бюффона 3. 23 $p_k^*=\frac{2l_k}{L\pi}$, $p'=\frac{1}{L\pi}\sum_{k=1}^{n}l_k$. Так как эта вероятность не зависит от числа и величин сторон, то $p=\frac{S}{L\pi}$.

## § 6. Формула полной вероятности

6.1. $p=\frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{13}{132}$.

6.2. $p=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{7}{18}$.

6.3. $H_1$ — среди извлеченных шаров нет белых; $H_2$ — один белый; $H_3$ — оба белых.
$p=\frac{m_1n_2+m_2n_1+2m_1m_2}{2(n_1+m_1)(n_2+m_2)}$.

6.4. $H_{j1}$ — из $j$-ой урны извлекается белый шар; $H_{j2}$ — черный шар.

$$P(H_{11})=\frac{m}{m+k},\quad P(H_{12})=\frac{k}{m+k},$$

$$P(H_{21})=\frac{m}{(m+k)}\frac{(m+1)}{(m+k+1)}+\frac{k}{(m+k)}\frac{m}{(m+k+1)}=\frac{m}{m+k},\quad P(H_{22})=\frac{k}{m+k}.$$

Считаем $P(H_{j1})=\frac{m}{m+k}$, $P(H_{j2})=\frac{k}{m+k}$. Тогда $P(H_{j+1,1})=\frac{m}{m+k}$.

Поэтому $p=\frac{m}{m+k}$.

6.5. 0,7.
6.6. 2/9.
6.7. 0,225.
6.8. 0,75.
6.9. 0,332.
6.10. 0,828.

6.11. а) 0,533; б) $p=\frac{1}{3}\cdot 0{,}8^2+\frac{2}{3}\cdot 0{,}4^2=0{,}32$.

6.12. Событие $A$ — получение контакта. Гипотеза $H_k$ — на $k$-ой полосе возможен контакт ($k=1,2$). Пусть $x$ — положение центра отверстия, $y$ — точка приложения контакта. $P(H_1)=P\{15\leqslant x\leqslant 45\}=0{,}3$, $P(H_2)=P\{60\leqslant x\leqslant 95\}=0{,}35$. Контакт возможен на первой полосе, если: при $25\leqslant x\leqslant 35$ $|x-y|\leqslant 5$; при $15\leqslant x\leqslant 25$ $20\leqslant y\leqslant x+5$; при $35\leqslant x\leqslant 45$ $x-5\leqslant y\leqslant 45$. Поэтому $P(A/H_1)=\frac{1}{15}$. Аналогично $P(A/H_2)=\frac{1}{14}$; $p=0{,}045$.

6.13. Событие $A$ — поступление за промежуток $2t$ $s$ вызовов. Гипотеза $H_k$ ($k=0,1,\ldots,s$) — за первый промежуток времени поступило $k$ вызовов; $P(H_k)=P_t(k)$. Вероятность поступления $s-k$ вызовов за второй промежуток будет $P(A/H_k)=P_t(s-k)$. $P_{2t}(s)=\sum_{k=0}^{s}P_t(k)P_t(s-k)$.

6.14. Гипотеза $H_k$ — имеется $k$ бракованных лампочек, $P(H_k)=\frac{1}{6}$ ($k=0,1,\ldots,5$). Событие $A$ — все 100 лампочек исправные,
$P(A/H_k)=\frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}}\approx 0{,}9^k$ ($k=0,1,\ldots,5$); $p=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}P(A/H_k)\approx 0{,}78$.

6.15. Гипотеза $H_k$ — в урне было $k$ белых шаров ($k=0,1,\ldots,n$); событие $A$ — из урны будет извлечен белый шар. $P(H_k)=\frac{1}{n+1}$, $P(A/H_k)=\frac{k+1}{n+1}$,
$p=\frac{n+2}{2(n+1)}$.

6.16. Гипотеза $H_k$ ($k=0,1,2,3$) — для первой игры взято $k$ новых мячей. Событие $A$ — для второй игры взято три новых мяча, $P(H_k)=\frac{C_9^kC_6^{3-k}}{C_{15}^3}$, $P(A/H_k)=\frac{C_{9-k}^3}{C_{15}^3}$; $p=0{,}089$.

6.17. $p=\frac{1}{14C_7^5}\left(9C_4^2+8C_3^2C_4^3+7C_3^1\right)=0{,}58$.

6. 18. $p=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}+\left(\frac{25}{30}\cdot\frac{5}{29}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}\right)\frac{24}{28}=\frac{190}{203}$.

6. 19. $P(A)=P(B)P(A/B)+P(\overline{B})P(A/\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$. Равенство возможно только в некоторых частных случаях: а) $A=V$; б) $B=U$; в) $B=A$; г) $B=\overline{A}$; д) $B=V$.

6. 20. По формуле из примера 6. 2 следует, что $m\approx 13$. $p\approx 0{,}67$.

## § 7. Теорема гипотез

7. 1. $p=\dfrac{0{,}1\cdot\frac{5}{6}}{0{,}9\cdot\frac{1}{2}+0{,}1\cdot\frac{5}{6}}=\dfrac{5}{32}$.

7. 2. $p=\dfrac{1}{1+\dfrac{k_2m_2(m_1+n_1)}{k_1m_1(m_2+n_2)}}$.

7. 3. Гипотезы: $H_1$ — изделие хорошее; $H_2$ — брак. Событие $A$ — изделие признается хорошим; $P(H_1)=0{,}96$, $P(H_2)=0{,}04$, $P(A/H_1)=0{,}98$, $P(A/H_2)=0{,}05$, $P(A)=0{,}9428$. $p=P(H_1/A)=0{,}998$.

7. 4. Гипотезы: $H_k\ (k=0,1,\ldots,5)$ — имеется $k$ бракованных изделий. Событие $A$ — извлекается бракованное изделие, $P(H_k)=\frac{1}{6}$, $P(A/H_k)=\frac{k}{5}$, $P(H_k/A)=\frac{P(H_k)}{P(A)}P(A/H_k)$. Наиболее вероятна гипотеза $H_5$, т. е. пять бракованных изделий.

7. 5. $P(H_0/A)=\frac{1}{6\cdot 0{,}78}=0{,}214$ (см. задачу 6. 14).

7. 6. $\frac{16}{23}$ и $\frac{7}{23}$.

7. 7. Ко второму типу.

7. 8. Событие $A$ — выигрыш игрока $D$; гипотеза $H_k\ (k=1,2)$ — противником был игрок $B$ или $C$; $P(H_k)=1/2$; $P(A/H_1)=0{,}6\cdot 0{,}3+(1-0{,}18)\,0{,}7\cdot 0{,}5$; $P(A/H_2)=0{,}2\cdot 0{,}3+(1-0{,}06)\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7$; $P(H_1/A)=0{,}59$; $P(H_2/A)=0{,}41$.

7. 9. Из второй группы.

7. 10. Событие $A$ — попали двое; $H_k$ — промахнулся $k$-й стрелок. $p=P(H_3/A)=\frac{6}{13}$.

7. 11. Событие $A$ — при двух измерениях получены ошибки противоположного знака; гипотеза $H_k\ (k=1,2,3)$ — измерение производилось $k$-м прибором. Срединное отклонение $E$ характеризует половину длины интервала, вероятность попадания в который равна половине; середина этого интервала соответствует нулевой ошибке. $P(H_k)=\frac{1}{3}$, $P(A/H_1)=P(A/H_2)=\frac{3}{8}$, $P(A/H_3)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{5}{12}$, $P(H_1/A)=P(H_2/A)=0{,}3$, $P(H_3/A)=0{,}4$.

7. 12. Событие $A$ — снова будут ошибки противоположного знака, гипотеза $H_k$ — измерение производилось $k$-м прибором. $P(H_1)=P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}4$, $P(A/H_1)=P(A/H_2)=\frac{3}{8}$, $P(A/H_3)=\frac{1}{2}$, $P(A)=\frac{17}{40}$.

7. 13. Событие $A$ — вепрь убит одной пулей, $P(A)=\sum_{k=1}^{3}p(H_k)$. Гипотеза $H_k$ — попал $k$-й стрелок $(k=1,2,3)$. $P(H_1)=0{,}048$, $P(H_2)=0{,}128$, $P(H_3)=0{,}288$, $P(H_1/A)=0{,}103$, $P(H_2/A)=0{,}277$, $P(H_3/A)=0{,}620$.

7. 14. 0,023; 0,140; 0,837.

7. 15. В четвертую часть.

7. 16. 0,282; 0,363; 0,262; 0,087; 0,006; 0.

7. 17. $p=\dfrac{n^k}{1+2^k+\ldots+n^k}$.

7. 18 Событие $A$ — извлекли черный и красный шары; $H_k$ — из $k$-й урны $(k=1,2)$; $P(H_k)=\frac{1}{2}$, $P(A/H_1)=\frac{300}{625}$, $P(A/H_2)=\frac{6}{625}$; $p=P(H_1/A)=\frac{50}{51}$.

7.19. События: $M_1$ — первый близнец — мальчик; $M_2$ — второй — тоже мальчик. Гипотезы: $H_1$ — оба мальчика; $H_2$ — мальчик и девочка. $P(M_1) = a + \frac{1}{2}[1-(a+b)]$, $p = P(M_2/M_1) = \frac{2a}{1+a-b}$

7.20. События $A_k$ и $B_k$: $k$-ым родился мальчик и девочка ($k = 1, 2$). $P(A_1A_2) + P(B_1B_2) + 2P(A_1B_2) = 1$, $P(A_1A_2 + B_1B_2) = 4P(A_1B_2)$. Поэтому $P(A_1A_2) + P(B_1B_2) = \frac{2}{3}$, $P(A_1B_2) = \frac{1}{6}$, $P(A_1A_2) = 0{,}51 - \frac{1}{6}$; $p = P(A_2/A_1) = \frac{103}{153}$.

7.21. 5/11.

7.22. 1/9 (см. задачу 7.11).

7.23. 0,161, 0,410, 0,229, 0,200.

7.24. Одно появление.

7.25. Гипотезы: $H_1$ — студент учится первый год; $H_2$ — второй год. Событие $A$ — второй студент учится больше первого.

$$P(H_1) = \frac{n_1}{n-1}, \quad P(H_2) = \frac{n_2}{n-1}, \quad P(A/H_1) = \frac{n_2+n_3}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{n_3}{n-1},$$

$$P(A) = \frac{1}{(n-1)^2}[n_1(n_2+n_3) + n_2n_3], \quad p = \frac{1}{P(A)}\left[P(H_1)\frac{n_3}{n-1} + P(H_2)\frac{n_3}{n-1}\right] = \frac{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}}.$$

7.26. 1/4 и $\frac{2}{11}$.

7.27. Гипотезы $H_k$ ($k = 0, 1, \ldots, 8$) — из 8 деталей $k$ штук исправные. Событие $A$ — из взятых четырех деталей три исправные.

$$P(H_k) = \frac{1}{9} \qquad P(H_j/A) = 0, \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ 8), \qquad P(H_k/A) = \frac{C_k^3 C_{8-k}^1}{C_8^4} \quad (k = 3, 4\ 5, 6, 7),$$

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad p = P(H_4/A)\,\frac{3}{4} + P(H_5/A)\,\frac{1}{2} = \frac{3}{14}.$$

## § 8. Вычисление вероятностей появления события при повторных независимых испытаниях

8.1. а) $0{,}9^4 = 0{,}656$; б) $0{,}9^4 + 4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^3 = 0{,}948$.

8.2. а) $C_{10}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}$; б) $1 - \frac{1}{2^{10}}\left(1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^1 + 1\right) = \frac{957}{1024}$.

8.3. а) $p = C_{730}^3 \left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(\frac{364}{365}\right)^{727} \approx \frac{4}{3}e^{-2} = 0{,}18$; б) $p \approx \frac{2}{3}e^{-2} = 0{,}09$.

8.4. 0,17.

8.5. 0,64.

8.6. $1-(1-p)^3$.

8.7. а) 0,163; б) 0,353.

8.8. $p = 1 - (0{,}8^4 + 4\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2)\cdot 0{,}7^2\cdot 0{,}6 = 0{,}76$.

8.9. $$W_n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m\right] = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n.$$

8.10. $p = 1 - (0{,}7^4 + 4\cdot 0{,}7^3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4) = 0{,}595$.

8.11. Гипотезы: $H_1$ — вероятность попадания при одном выстреле равна /2; $H_2$ — 2/3. Событие $A$ — произошло 116 попаданий. $P(H_1/A) \approx 2P(H_2/A)$, т. е. вероятнее первая гипотеза.

8. 12. См. табл. 97

*Таблица 97*

| $p$ | 0,01 | 0,05 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_{10;\,1}$ | 0,0956 | 0,4013 | 0,6513 | 0,8926 | 0,9718 | 0,9940 | 0,9990 | 0,9999 |

8. 13. 0,2.
8. 14. 0,73.
8. 15. $R_{n;\,1} \approx 1 - e^{-0,02n}$ $(n > 10)$. См. табл. 98.

*Таблица 98*

| $n$ | 1 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_{n;\,1}$ | 0,02 | 0,18 | 0,33 | 0,45 | 0,55 | 0,63 | 0,70 | 0,75 | 0,80 | 0,84 | 0,86 |

8. 16. $p \doteq 1 - 0,95^{10} = 0,4$.
8. 17. $p = 1 - 0,9^5 = 0,41$.
8. 18. События: $A$ — произошло два попадания; $B$ — хотя бы два попадания; $C$ — хотя бы одно попадание. а) $P(A/C) = \dfrac{P(A)}{P(C)} = 0,34$; б) $P(B/C) = \dfrac{P(B)}{P(C)} = 0,70$.
8. 19. $p = p_{10}^3 + 3p_{10}^2(p_9 + p_8) + 3p_{10}p_9^2 = 0,0935$.
8. 20. а) $p = \sum\limits_{k=0}^{3} P'_{3;\,k} P''_{3;\,k} = 0,321$; б) 0,243.
8. 21. 0,488.
8. 22. Событие $A$ — произошло два попадания. Гипотезы $H_k$ — бросал $k$-й игрок ($k = 1, 2, 3$); $p = \sum\limits_{k=1}^{3} P(H_k/A)\,P(A/H_k) \approx 0,22$.
8. 23. Гипотезы — $H_k$ — в урне $k$ белых шаров ($k = 0, 1, \ldots, 5$); $P(H_0/A) = P(H_5/A) = 0$, $P(H_1/A) = 0,438$, $P(H_2/A) = 0,370$, $P(H_3/A) = 0,164$ $P(H_4/A) = 0,028$.
8. 24. а) $p = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,794$; б) $3p^4 - 4p^3 + \dfrac{1}{2} = 0$, $p = 0,614$.
8. 25. $P_{\rm I} = p^4 + C_4^1 p^4 q + C_5^2 p^4 q^2 + C_6^3 p^3 q^3 \left(p^2 + 2p^2 q\right) = 0,723$; $P_{\rm II} = 0,277$.
8. 26. $p = \dfrac{C_{2n-k}^{n}}{2^{2n-k}}$.
8. 27. 0,784.
8. 28. По 200 *вт* $\left(R_{6;\,1} = 0,394,\ R_{10;\,2} = 0,117\right)$.
8. 29. 0,64.
8. 30. 0,2816.
8. 31. $P_m = nC_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}$ при $m \geqslant k$; $P_m = 0$ при $m < k$.
8. 32. $p = \sum\limits_{m=k}^{2k-1} P_m = np^k \sum\limits_{m=k}^{2k-1} C_{m-1}^{k-1} q^{m-k}$.
8. 33. Должно быть $0,1 \geqslant 0,8^n \left[1 + \dfrac{n}{4} + \dfrac{n(n-1)}{32}\right]$, $n \geqslant 25$.
8. 34. Должно быть $0,99 \cdot 5^{10} = 4^{10} + C_{10}^1 4^9 + \cdots + C_{10}^n 4^{10-n}$, $n = 5$.

8.35. а) 0,0384; б) 0,9616.
8.36. $P_{4;\,0}=0{,}3024,\quad P_{4;\,1}=0{,}4404,\quad P_{4;\,2}=0{,}2144,\quad P_{4;\,3}=0{,}0404,\quad P_{4;\,4}=0{,}0024.$
8.37. 0,26.
8.38. 0,159.
8.39. 95/144.
8.40. $n=29$.
8.41. $n\geqslant 10$.
8.42. $n\geqslant 16$.
8.43. 8.
8.44. 8.
8.45. $\mu=4;\quad p=0{,}251$.
8.46 $\mu_+=3;\quad \mu_-=1;\quad p=\frac{32}{81}$.

## § 9. Полиномиальное распределение. Рекуррентные формулы. Производящие функции

9.1. $p=P_{5;\,2,\,2,\,1}+2P_{5;\,3,\,2,\,0}=\frac{50}{243}$.

9.2. 0,102.

9.3. а) $p=\frac{9!}{(3!)^3}\cdot\frac{1}{3^9}=0{,}085$; б) $p=6\cdot\frac{9!}{4!\,3!\,2!}\,\frac{1}{3^9}=0{,}385$.

9.4. $p=\frac{10!}{6!\,3!}0{,}15^6\cdot 0{,}22^3\cdot 0{,}13=0{,}13\cdot 10^{-4}$.

9.5. $p=1-2\left(0{,}0664^4+\frac{1}{2}0{,}2561^4+4\cdot 0{,}0664\cdot 0{,}2561^3+6\cdot 0{,}0664^2\cdot 0{,}2561^2+4\cdot 0{,}2561\times\right.$
$\left.\times\, 0{,}0664^3\right)=0{,}983$.

9.6. $p=1-(1-8\cdot 0{,}03)^9=0{,}9154$.

9.7. а) $p=\frac{12!}{2^6 6^{12}}=0{,}00344$; б) $p=\frac{6!}{2}\cdot\frac{12!}{2!\,2!\,3!\,4!}\,\frac{1}{6^{12}}=0{,}138$.

9.8. а) $p_{\rm I}=\frac{l^{l_1}m^{m_1}n^{n_1}}{(l+m+n)^{l_1+m_1+n_1}}$; б) $p=6p_{\rm I}$; в) $p=\frac{(l_1+m_1+n_1)!}{l_1!\,m_1!\,n_1!}\times$
$\times\frac{l^{l_1}m^{m_1}n^{n_1}}{(l+m+n)^{l_1+m_1+n_1}}$.

9.9. $p=p_n,\quad p_k=p_{k-1}\frac{1}{2}+(1-p_{k-1})\frac{1}{2}=0{,}5,\quad p=0{,}5$.

9.10. Пусть $p_k$ — вероятность ничейного исхода, когда сыграно $2k$ партий. $p_{k+1}=$ $=\frac{1}{2}p_k\quad (k=1,\,2,\,\ldots),\quad p_0=1,\quad p_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};\ p=\frac{1}{2}p_{n-1}=\frac{1}{2^n}$.

9.11. Число $n$ должно быть нечетным. Пусть $p_k$ — вероятность того, что после $2k+1$ партий игра не закончилась.

$$p_0=1,\quad p_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k\ \left(k=1,\,2,\,\ldots,\,\frac{n-3}{2}\right),\quad p=\frac{1}{4}\,p_{\frac{n-3}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{2}}.$$

9.12. $p_{\rm I}=?$ $p_{\rm II}=?$ $p_k$ — вероятность разорения 1-го игрока, когда у него $k$ рублей. По формуле полной вероятности $p_k=pp_{k+1}+qp_{k-1}$. Кроме того, $p+q=1$, $p_0=1$, $p_{n+m}=0$. Поэтому $q(p_k-p_{k-1})=p(p_{k+1}-p_k)$.

1) $p=q$. Тогда $p_k=1-kc,\ c=\frac{1}{n+m}$, т. е. $p_{\rm I}=\frac{m}{n+m},\quad p_{\rm II}=\frac{n}{n+m}$;

2) $p\neq q$. Тогда $p_k-p_{k-1}=\left(\frac{p}{q}\right)^k(p_1-1)$. Суммируя эти равенства от 1 до $n$

и от 1 до $n+m$, получаем $1-p_n=(1-p_1)\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}$, $1-p_{n+m}=$

$=(1-p_1)\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}{1-\frac{q}{p}}$. Поэтому $p_{\mathrm{I}}=\dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^m}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n+m}}$, $p_{\mathrm{II}}=1-p_{\mathrm{I}}=$

$=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}$.

9. 13. При $p=\frac{1}{2}$ $P=\dfrac{n}{n+m}$; при $p\neq\frac{1}{2}$ $P=\dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}$ (сравни с задачей 9. 12).

9. 14. $P=P_m$; $P_m=0$ при $m\leqslant n$. $P_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$; при $n<m<2n-1$ $P_m=\dfrac{1}{2^n}$. В общем случае $P_m$ определяется из рекуррентной формулы $P_m=\frac{1}{2}P_{m-1}+$ $+\frac{1}{2^2}P_{m-2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}P_{m-n+1}$, которая получается по формуле полной вероятности. При этом гипотеза $H_k$ — первый противник победителя выиграл $k$ партий, $P_{m-k}=P(H_k)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$.

9. 15. $P_k$ — вероятность того, что придется играть ровно $k$ партий. При $k=1$, 2, 3, 4, 5, $P_k=0$, $P_6=2p^6=\frac{1}{2^5}$, $P_7=2C_6^1p^6q=\frac{3}{2^5}$, $P_8=2C_7^2p^6q^2=\frac{21}{2^7}$, $P_9=$ $=\frac{7}{2^5}$, $P_{10}=\frac{63}{2^8}$.

а) $R=\sum\limits_{k=1}^{10}P_k=\frac{193}{256}$;

б) если $n$ нечетное, то $P_n=0$. При четном $n$ $P_n=\frac{1}{2}p_{\frac{n}{2}-1}$, где $p_k$ — вероятность того, что после $2k$ партий противники имеют равное число очков; $p_5=C_{10}^5\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{2^8}$, $p_{k+1}=\frac{1}{2}p_k$, т. е. $p_k=\frac{63}{2^{k+3}}$ $(k=5, 6, \ldots)$, $P_n=$ $=\dfrac{63}{2^{\frac{n}{2}+3}}$.

9. 16. Разложить $(1-x)^{-1}$ в ряд и найти коэффициент при $x^m$.

9. 17. Так же, как в задаче 9. 16.

9. 18. Искомая вероятность равна свободному члену в производящей функции

$$S(x)=\frac{1}{4^n}\left(x+2+\frac{1}{x}\right)^n=\frac{(1+x)^{2n}}{4^nx^n};\quad p=\frac{1}{4^n}C_{2n}^n.$$

9. 19. Искомая вероятность равна сумме коэффициентов при $x$ в степени не меньше $m$ в функции

$$S(x)=\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}+\frac{1}{4x}+\frac{16}{x^2}\right)^n=\frac{(1+x)^{4n}}{(4x)^{2n}},\qquad p=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=2n+m}^{4n}C_{4n}^k.$$

При $n=m=3$ $p=0{,}073$.

9. 20. Искомая вероятность равна удвоенной сумме коэффициентов при $x^4$ в функции

$$S(x)=\frac{1}{5^{20}}\left(x+\frac{1}{x}+3\right)^{20}=\frac{1}{5^{20}}\sum_{m=0}^{20}\sum_{n=0}^{20-m}\frac{20!}{m!\,n!\,(20-m-n)!}\,x^{m-n}3^{20-m-n},$$

$$p=2\,\frac{20!}{5^{20}}\sum_{k=0}^{8}\frac{3^{16-2k}}{(4+k)!\,k!\,(16-2k)!}=0{,}104.$$

9. 21. а) Искомая вероятность $p_{\text{чемп}}$ равна сумме коэффициентов при неотрицательных степенях $x$ в функции

$$S(x)=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4x}+\frac{1}{2}\right)^{24}=\frac{(1+x)^{48}}{4^{24}x^{24}}.$$

$$p_{\text{чемп}}=\frac{1}{4^{24}}\sum_{k=24}^{48}C_{48}^{k}=\frac{1}{2\cdot 4^{24}}\left(2^{48}+C_{48}^{24}\right)=0{,}5577,\quad p_{\text{прет}}=0{,}4423;$$

б) вероятность противоположного события равна сумме коэффициентов при $x$ в степенях от $-4$ до 3 в функции

$$S(x)=\frac{1}{4^{20}}\,\frac{(1+x)^{40}}{x^{20}};\qquad p=1-\frac{1}{4^{20}}\sum_{k=16}^{23}C_{40}^{k}=0{,}22.$$

9. 22. а) $P_m=?$ $P_m$ находится с помощью производящей функции $S(x)=\frac{1}{6^n}(x+x^2+$ $+\cdots+x^6)^n=\frac{x^n(1-x^6)^n}{6^n(1-x)^n}$. Используя равенство $\frac{1}{(1-x)^n}=1+C_n^{n-1}x+$ $+C_{n+1}^{n-1}x^2+\cdots$, получаем $P_m=\frac{1}{6^n}\left(C_{m-1}^{n-1}-C_n^1C_{m-7}^{n-1}+C_n^2C_{m-13}^{n-1}-\cdots\right)$, причем ряд обрывается, когда $m-6k<n$;

б) $R_m=\sum_{k=n}^{m}P_k$. Используя равенство $1+C_n^{n-1}+\cdots+C_{s-1}^{n-1}=C_s^n$, получаем $R_m=\frac{1}{6^n}\left(C_m^n-C_n^1C_{m-3}^n+C_n^2C_{m-12}^n-\cdots\right)$. При $n=10$, $m=20$ $P_{20}=$ $=\frac{1}{6^{10}}\left(C_{19}^9-C_{10}^1C_{13}^9\right)=0{,}0014$, $R_{20}=\frac{1}{6^{10}}\left(C_{20}^{10}-C_{10}^1C_{14}^{10}\right)=0{,}0029$

9. 23. Искомая вероятность равна коэффициенту при $x^{21}$ в функции

$$S(x)=\frac{1}{10^6}(1+x+\cdots+x^9)^6=\frac{1}{10^6}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6=$$

$$=\frac{1}{10^6}\left(1-C_6^1x^{10}+C_6^2x^{20}-\cdots\right)\left(1+C_6^5x+C_7^5x^2+\cdots\right).$$

$$p=\frac{1}{10^6}\left(C_{26}^5-C_6^1C_{16}^5+C_6^2C_6^5\right)=0{,}04$$

9. 24. Вероятность получения билета, сумма цифр номера которого равна 27, есть коэффициент при $x^{27}$ в функции $S(x)$ из задачи 9. 23; $p=0{,}05525$ (См. пример 9. 3.)

9. 25. а) $p_N$ равна коэффициенту при $x^N$ в функции

$$S(x)=\frac{x^n}{m^n}\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n.\quad p_N=\frac{1}{m^n}\left(C_{N-1}^{n-1}-C_n^1C_{N-m-1}^{n-1}+C_n^2C_{N-2m-1}^{n-1}-\cdots\right),$$

причем ряд обрывается, когда $N - ms < n$;

б) $p = 1 + p_N - \sum_{k=n}^{N} p_k = 1 + p_N - \frac{1}{m^n}\left(C_N^n - C_n^1 C_{N-m}^n + C_n^2 C_{N-2m}^n - \cdots\right)$

(Сравни с 9. 22.)

9. 26. а) $S_1(x) = \frac{x^{21}}{4^3}\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)^3, \quad p = \frac{1}{4^3}\left(C_6^2 - 3\right) = 0{,}1875;$

б) $S_2(y) = \frac{y^{21}}{8^3}(1+y)^9, \quad p = \frac{1}{8^3} C_9^4 = 0{,}2461;$

в) $S(x) = S_1(x) S_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{32^3} \frac{(1+x^2)^3 (1+x)^{12}}{x^9}; \quad p = \frac{2}{32^3}\left(C_{12}^3 + 3C_{12}^5\right) = 0{,}1585$

9 27. Гипотеза $H_k$ — равное число гербов стало после $k$ бросаний обеих монет ($k = 1, 2, \ldots, n$), событие $A$ — после $n$ бросаний будет равное число гербов, но оно могло быть и раньше

$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A/H_k), \quad p = P(H_n) = ? \quad P(A) = P(A/H_0), \quad P(A/H_k) = \frac{1}{4^{n-k}} C_{2n-2k}^{n-k}$. Поэтому $C_{2n}^n = \sum_{k=1}^{n} 4^k C_{2n-2k}^{n-k} P(H_k)$. Задаваясь различными $n$, можно найти $p = P(H_n)$. Пусть $R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k P(H_k), \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j p_j$, где

$p_{n-j} = P(A/H_j)$. Объединяя члены при $x^n$, получаем $Q(x) R(x) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[\sum_{k=1}^{n} p_{n-k} P(H_k)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} x^n P_n(A) = Q(x) - 1;$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^k \frac{(2k)}{(k!)^2} = (1-x)^{-\frac{1}{2}};$$

$$R(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k!(k-1)!}; \quad p = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}.$$

9. 28. Пусть $\mu$ — число голосов, поданных за определенного кандидата; вероятность этого $P_\mu = C_n^\mu p^\mu q^{n-\mu}$. Вероятность того, что за кандидата подано не более $\mu$ голосов, равна $\alpha_\mu = \sum_{s=0}^{\mu} P_s$. Вероятность того, что из $k$ кандидатов $l-1$ человек получат не менее $\mu$ голосов, $k-l-1$ не более $\mu$ голосов каждый, а двое — по $\mu$ голосов, будет

$$\frac{k!}{2(l-1)!(k-l-1)!}\left(1 + P_\mu - \alpha_\mu\right)^{l-1} \alpha_\mu^{k-l-1} P_\mu^2$$

$$p = \frac{k}{2(l-1)!(k-l-1)!} \sum_{\mu=0}^{n} P_\mu^2 \alpha_\mu^{k-l-1} \left(1 + P_\mu - \alpha_\mu\right)^{l-1}.$$

9. 29. Вероятность выигрыша одного очка для подающей команды равна $\frac{2}{3}$.

а) $P_k = C_{15}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{13+k} + C_{k-1}^1 C_{15}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{11+k} +$

$$+C_{k-1}^2 C_{15}^3 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^{9+k} + \cdots + C_{k-1}^{k-2} C_{15}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{17-k} +$$

$$+ C_{15}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \left(\frac{2}{3}\right)^{15-k} \quad \text{или} \quad P_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{15} \frac{1}{6^k} \left(4^{k-1} C_{15}^1 + \right.$$

$$\left. + 4^{k-2} C_{k-1}^1 C_{15}^2 + 4^{k-3} C_{k-1}^2 C_{15}^3 + \cdots + 4 C_{k-1}^1 C_{15}^{k-1} + C_{15}^k \right);$$

$$Q_k = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \frac{1}{6^k} \left(4^k + 4^{k-1} C_k^1 C_{14}^1 + 4^{k-2} C_k^2 C_{14}^2 + \cdots + 4 C_k^{k-1} C_{14}^{k-1} + C_{14}^k\right)$$

($k = 0, 1, \ldots, 13$). Числа $P_k$ и $Q_k$ приведены в табл. 99;

*Таблица 99*

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 0,00228 | 0,00571 | 0,01047 | 0,01623 | 0,02260 | 0,02915 | 0,03546 |
| $Q_k$ | 0,00114 | 0,00342 | 0,00695 | 0,01159 | 0,01709 | 0,02312 | 0,02929 |

| $k$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 0,04118 | 0,04604 | 0,04986 | 0,05254 | 0,05407 | 0,05450 | 0,05392 |
| $Q_k$ | 0,03524 | 0,04064 | 0,04525 | 0,04890 | 0,05148 | 0,05299 | 0,05345 |

б) $P_{\mathrm{I}} = \sum\limits_{k=0}^{13} P_k = 0{,}47401, \quad Q_{\mathrm{I}} = \sum\limits_{k=0}^{13} Q_k = 0{,}42056;$

в) пусть $\alpha_k$ — вероятность набрать $14 + k$ очков из $28 + 2k$ для первой (подающей) команды, выиграв последний мяч, $\beta_k$ — аналогичная вероятность для второй команды; $\beta_0 = Q_{13}$;

$$\alpha_0 = C_{14}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{26} + C_{13}^1 C_{14}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{24} +$$

$$+ \cdots + C_{13}^1 C_{14}^{13} \left(\frac{1}{3}\right)^{26} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{28} = 0{,}05198;$$

$$\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = \frac{1}{3}(\alpha_k + \beta_k), \quad \alpha_{k+1} - \beta_{k+1} = -\frac{1}{9}(\alpha_k - \beta_k), \text{ т. е.}$$

$$(\alpha_k + \beta_k) = \frac{1}{3^k}(\alpha_0 + \beta_0), \quad (\alpha_k - \beta_k) = \frac{(-1)^k}{9^k}(\alpha_0 - \beta_0);$$

$$p_k = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{3^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{9^{k+1}}(\alpha_0 - \beta_0), \quad q_k = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{9^{k+1}}(\alpha_0 - \beta_0);$$

$$p_k = \frac{0{,}10543}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k \cdot 0{,}00148}{9^{k+1}}, \quad q_k = \frac{0{,}10543}{3^{k+1}} + \frac{(-1)^k \cdot 0{,}00148}{9^{k+1}};$$

г) $P_{\mathrm{II}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 0{,}05257, \quad Q_{\mathrm{II}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k = 0{,}05286;$

д) $P = P_{\mathrm{I}} + P_{\mathrm{II}} = 0{,}52658, \quad Q = Q_{\mathrm{I}} + Q_{\mathrm{II}} = 0{,}47342.$

## ГЛАВА II

## СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### § 10. Ряд, многоугольник и функция распределения вероятностей дискретных случайных величин

10. 1. См. табл. 100.

*Таблица 100*

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_i$ | 0,7 | 0,3 |

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}7 & \text{»} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{»} \quad x > 1. \end{cases}$$

10. 2. См. табл. 101.

*Таблица 101*

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,125 | 0 375 | 0,375 | 0,125 |

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}125 & \text{»} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}500 & \text{»} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}875 & \text{»} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{»} \quad x > 3. \end{cases}$$

10. 3. См. табл. 102.

*Таблица 102*

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,9 | 0,09 | 0,009 | 0,0009 | 0,0001 |

10. 4. а) $P(X = m) = q^{m-1}p = \frac{1}{2^m}$; б) один опыт.

10. 5. $X_1$ — случайное число бросков для баскетболиста, начавшего броски; $X_2$ — то же, для второго баскетболиста.

$$\left.\begin{aligned} P(X_1 = m) &= 0{,}6^{m-1}0{,}4^m \\ P(X_2 = m) &= 0{,}6^{m+1}0{,}4^{m-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{для всех } m \geqslant 1.$$

10. 6. См. табл. 103.

*Таблица 103*

| $x_i$ | —3 | 3 | 8 | 9 | 14 | 15 | 19 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,008 | 0,036 | 0,060 | 0,054 | 0,180 | 0,027 | 0,150 | 0,135 | 0,225 | 0,125 |

10. 7. $P(X = m) = q^{m-4}p = \frac{1}{2^{m-3}}$ для всех $m \geqslant 4$, так как минимальное случайное число включений равно четырем и будет тогда, когда первый же включенный прибор даст благоприятный исход.

10. 8. $P(X=m)=\begin{cases} q^{n-1} \text{ при } m=0, \\ q^{n-m-1}\, p \text{ при } 0<m\leqslant n-1. \end{cases}$

10. 9. $P(X=m)=\begin{cases} pq^{m-1} \text{ для } 1\leqslant m\leqslant n-1, \\ q^{n-1} \text{ для } m=n. \end{cases}$

10. 10. $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ для всех $0\leqslant m\leqslant n$.

10. 11. $P(X=m)=1-2\cdot 0{,}25^m$ для всех $m\geqslant 1$.

10. 12. $P(X=k)=\left(1-\frac{p}{\omega}\right)^{k-1}\frac{p}{\omega}$ для всех $k\geqslant 1$.

10. 13. $P(X=m)=\frac{(np)^m}{m!}e^{-np}$ для всех $m\geqslant 1$.

10. 14. См. табл. 104.

*Таблица 104*

| $z_i$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | 4 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

10. 15. См. табл. 105.

*Таблица 105*

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^3\cdot p_i$ | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 63 | 69 | 73 | 75 |
| $x_i$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| $10^3\cdot p_i$ | 75 | 73 | 69 | 63 | 55 | 45 | 36 | 28 | 21 | 15 | 10 | 6 | 3 | 1 |

## § 11. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

11. 1. а) Не может; б) не может; в) может.
11. 2. а) Может; б) не может.
11. 3. $A=1$.
11. 4. $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ если } x \text{ принадлежит } (0,1), \\ 0 \text{ если } x \text{ не принадлежит } (0,1). \end{cases}$

11. 5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

11. 6. $f(x)=\begin{cases} \frac{18}{x^3} \text{ при } x>3, \\ 0 \text{ при } x<3. \end{cases}$

$P(5<X<10)=0{,}27$.

11.7. $\frac{16}{25}$.

11.8. а) $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{\pi}$; б) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$; в) $P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{a(\beta - \alpha)}{a^2 + \alpha\beta}$.

11.9. $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

11.10. а) $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; б) $P(|X| < 1) = \frac{1}{2}$.

11.11. $p = \frac{1}{2}$.

11.12. $p = \frac{2}{3}$.

11.13. Ввести случайную величину $X$ — промежуток времени, в течение которого лампа теряет работоспособность. Составить дифференциальное уравнение для $p(x) = P(X < x)$ функции распределения случайной величины $X$. Решение этого уравнения при $x = l$ имеет вид: $p(l) = 1 - e^{-kl}$.

11.14. а) $\frac{z^2}{L^4}(6L^2 - 8Lz + 3z^2)$; б) $1 - \left(\frac{z - x}{L - x}\right)^{h+1}$.

11.15. $P(t) = e^{-\lambda t}$. Составить дифференциальное уравнение для $P(t)$.

11.16. Дифференциальное уравнение для нахождения $P_i(t)$ имеет вид: $\frac{dP_i(t)}{dt} + aiP_i(t) = a(i-1)P_{i-1}(t)$ (рекуррентная формула). Отсюда $P_i(t) = e^{-at}\left(1 - e^{-at}\right)^{i-1}$.

11.17. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\delta(x - x_i)$.

## § 12. Числовые характеристики дискретных случайных величин

12.1. $\bar{x} = p$.

12.2. $\bar{x}_а = 1{,}8$; $\bar{x}_б = 1{,}7$; $\bar{x}_в = 2{,}0$; наименьшее среднее число взвешиваний будет при системе «б».

12.3. $M[X] = 2$; $D[X] = 1{,}1$.

12.4. Для доказательства достаточно вычислить $M[X] = \left.\frac{dS(u)}{du}\right|_{u=1}$, где $S(u) = (q_1 + p_1u)(q_2 + p_2u)(q_3 + p_3u)$.

12.5. Составляем производящую функцию $S(u) = (q + pu)^n$; $M[X] = S'(1) = np$.

12.6. $\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{n} m_ik_i$.

12.7. Для первого $\frac{7}{11}$, для второго $-\frac{7}{11}$ монет, т. е. игра проигрышная для второго игрока.

12.8. Ввести в рассмотрение величины $a$, $b$, $c$ — математические ожидания выигрыша игроков $A$, $B$, $C$ соответственно при условии, что игрок $A$ выиграл у $B$. Для этих величин справедливы равенства $a = \frac{m}{2} + \frac{b}{2}$; $c = \frac{a}{2}$; $b = \frac{c}{2}$, которые составляют систему уравнений для нахождения неизвестных $a$, $b$ и $c$.
Решая получим

$$a = \frac{4}{7}m; \quad b = \frac{1}{7}m; \quad c = \frac{2}{7}m.$$

Во втором случае

$$M(A) = \frac{5}{14}m; \quad M(B) = \frac{5}{14}m; \quad M(C) = \frac{2}{7}m.$$

12. 9. $M(A) = \frac{2}{2^2} + \left(\frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5}\right) + \left(\frac{7}{2^7} + \frac{8}{2^8}\right) + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{2^m} - 3\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{3^m} =$

$= \frac{3}{2} - \frac{24}{49} = 1\frac{1}{98}$; $M(C) = \frac{3}{2^2} + \frac{6}{2^5} + \frac{9}{2^8} + \cdots =$

$$= \frac{3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{8^m} = \frac{3}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)^2} = \frac{48}{49}.$$

12. 10. $M[X] = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{1}{p}$.

12. 11. $M[X] = p \sum_{m=4}^{\infty} m(1-p)^{m-4} = 4 + \frac{1-p}{p} = 3 + \frac{1}{p} = 8.$

12. 12. $M[X] = \frac{k}{p}$; $D[X] = \frac{k(1-p)}{p}$. Ряд $S = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m!}{(m-k)!} q^{m-k}$ суммируется

с помощью формулы $S = \frac{d^k}{dq^k} \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{k!}{(1-q)^{k+1}}$, где $q = 1 - p$.

12. 13. $M[M] = \omega$; $D[M] = \omega(\omega - 1)$, где $\omega = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$.

Суммирование рядов производится по формулам:

$$\sum_{m=1}^{\infty} me^{-\alpha m} = -\frac{d}{d\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha m} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}}\right);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-\alpha m} = \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha m} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{1 - e^{-\alpha}}\right).$$

12. 14. $M[X] = \frac{1}{p_1 + p_2 p_3 (1 - p_1)} = 4{,}55$, где $p_1 = 0{,}18$; $p_3 = p_2 = 0{,}22$.

12. 15. $M[X_1] = 4\frac{2}{3}$; $M[X_2] = 3\frac{1}{3}$.

12. 16. $M(n) = n + m \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

12. 17. Исследовать на максимум дисперсию как функцию вероятности появления события.

12. 18. $\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$ обращается в нуль при $p = 0$; $p = 0{,}5$ и $p = 1$.

12. 19. Рассмотреть дисперсию как функцию вероятности появления события.

12. 20. В обоих случаях математическое ожидание числа черных шаров во второй урне равно 5, а белых — в первом случае $4 + \frac{1}{2^{10}}$, во втором случае $4 + e^{-5}$.

12. 21. Два рубля.

12. 22. При $p < \frac{3}{4}$.

12. 23. $M[X] = \frac{n^2 - 1}{3n} a$. При отыскании вероятностей $p_k = P(X = ka)$ того, что случайная длина перехода равна $ka$, воспользоваться формулой полных вероятностей, приняв в качестве гипотезы $A_i$ то, что рабочий в данный момент стоит у $i$-го станка.

12. 24. $q = 0{,}9;\ P_{10} \quad 1 - q^{10} \approx 0{,}651.$

12. 25. $M[X] = \dfrac{3}{2}.$

12. 26. $M[X] = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}.$

12. 27. $y = \dfrac{1}{2p};\ y = 6{,}5$ рублей.

12. 28. $M[X] = \dfrac{n}{m};\quad D[X] = \dfrac{n(m+n)}{m^2}.$

12. 29. $X_k = \dfrac{M+M_1}{N+N_1}N + \dfrac{MN_1 - NM_1}{N+N_1}\left(1 - \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{N_1}\right)^k;\ \lim\limits_{k\to\infty} X_k = \dfrac{M+M_1}{N+N_1}N.$

Составить конечно-разностное уравнение для математического ожидания числа белых шаров $X_k$, находящихся в первой урне после $k$ опытов $X_{k+1} - X_k = \dfrac{M+M_1}{N_1} - \left(\dfrac{1}{N_1} + \dfrac{1}{N}\right)X_k.$

12. 30. $p = C_m^k\left(\dfrac{1}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{m-k};\quad \bar{x} = \dfrac{m}{n};\ D[X] = \dfrac{m(n-1)}{n^2}.$

12. 31. $\bar{x} = \dfrac{q}{p};\ D[X] = \dfrac{q^2}{p^2} + \dfrac{q}{p},$ где $q = 1 - p.$

12. 32. $M[X] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2np_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \infty,$ так как

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

## § 13. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

13. 1. $M[X] = a;\ D[X] = \dfrac{l^2}{3};\ E = \sigma\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

13. 2. $M[X] = 0;\ D[X] = \dfrac{1}{2}.$

13. 3. $M[X] = \dfrac{E}{\varrho\sqrt{\pi}};\ D[X] = \dfrac{E^2}{\varrho^2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\right).$

13. 4. $D[X] = \dfrac{a^2}{2};\ E = \dfrac{a}{\sqrt{2}}.$

13. 5. $P(a < \bar{a}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}};\ P(a > \bar{a}) = e^{-\frac{\pi}{4}};\ \dfrac{P(a<\bar{a})}{P(a>\bar{a})} = \dfrac{0{,}544}{0{,}456} = 1{,}19$

13. 6. $A = \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}};\ M[V] = \dfrac{2}{h\sqrt{\pi}};\quad D[V] = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{\pi}\right).$

13. 7. $M[X] = D[X] = m + 1.$

13. 8. $M[X] = \dfrac{3}{2}x_0;\ D[X] = \dfrac{3}{4}x_0^2.$

13. 9. $M[X] = 0;\ D[X] = 2.$

13. 10. $A = \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)};\quad M[X] = (\alpha+1)\beta;\ D[X] = \beta^2(\alpha+1).$

13. 11. $A = \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};\ M[X] = \dfrac{a}{a+b};\ D[X] = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$

13. 12. $A = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; $M[X]=0$; $D[X]=\dfrac{1}{n-2}$. Для вычисления интеграла $\int\limits_0^\infty (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}\,dx$ воспользоваться подстановкой $x=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$, приводящей к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию.

13. 13. $A = \dfrac{1}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$; $M[X]=\dfrac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$; $D[X]=n-1-\bar{x}^2$.

13. 14. $M[X]=\dfrac{4R}{\pi}$.

13. 15. Предварительно найти функцию распределения, а по ней плотность вероятности абсолютной величины разности координат точек $M$ и $M'$. $M[X]=\dfrac{l}{3}$.

13. 16. $M[X]=\dfrac{\pi R}{2}$.

13. 17. Воспользуемся соотношением $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=-\dfrac{d[1-F(x)]}{dx}$.

13. 18. $M[T]=\dfrac{1}{\gamma}$. Обратить внимание на то, что $p(t)$ является функцией распределения случайного времени поиска ($T$), необходимого для обнаружения судна.

13. 19. $M(t)=M_0e^{-pt}$. Учесть, что вероятность распада любого фиксированного атома за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна $p\Delta t$ и составить дифференциальное уравнение для $M(t)$.

13. 20. $T_n=\dfrac{1}{p}\dfrac{\lg 2}{\lg e}$. Воспользоваться решением задачи 13. 19.

13. 21. $\dfrac{P(T<\bar{T})}{P(T>\bar{T})}=0{,}79$, т. е. научных работников, имеющих возраст более среднего (среди научных работников) больше, чем имеющих возраст менее среднего. Средний возраст среди научных работников $\bar{T}=41{,}25$ года.

13. 22. $M[T]=60$ сек.; $D[T]=1200$ сек$^2$. или $\sigma_T=34{,}6$ сек.

13. 23. $m_{2\nu}=\dfrac{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots5.3.1}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2\nu)}n^\nu$ при $n\geqslant 2\nu+1$ $m_{2\nu+1}=0$. При вычислении интегралов вида $\int\limits_0^\infty x^{2\nu}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ произвести замену переменных $x=\sqrt{n\dfrac{y}{1-y}}$, приводящую к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию.

13. 24. $m_k=\dfrac{\Gamma(p+k)\,\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(p+q+k)}$.

13. 25. $M[X]=0$; $D[X]=\dfrac{\pi^2}{12}+\dfrac{1}{2}$.

13. 26. 3,8 *г*; 1,3 *г*$^2$.

13. 27. $M[\varphi]=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{l}{h}-\dfrac{h}{2l}\ln\left(1+\dfrac{l^2}{h^2}\right)$.

13. 28. $\dfrac{40}{\pi}$ *см.*

13. 29. $\dfrac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-4$

13.30 $\dfrac{2R}{\pi}$; $R^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\right)$.

13.31.

$$P(z)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad z<b, \\ 1-\left(1-\dfrac{\sqrt{z^2-b^2}}{a}\right)^2 & \text{при} \quad b<z<\sqrt{a^2+b^2}, \\ 1 & \text{при} \quad z>\sqrt{a^2+b^2}, \end{cases}$$

$$M[Z]=\frac{b^2}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}+\frac{a^2-2b^2}{3a^2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2}{3}\frac{b^3}{a^2}.$$

13.32. $\mu_k=\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}(\bar{x})^{k-j}m_j$, где $m_j=M[X^j]$.

13.33. $m_k=\sum\limits_{j=0}^{k}C_k^j(\bar{x})^{k-j}\mu_j$, где $\mu_j=M\left\{(X-\bar{x})^j\right\}$

## § 14. Закон Пуассона

14.1 $p=1-e^{-0,1}\approx 0,095$.

14.2. $p=\dfrac{3^4}{4!}e^{-3}\approx 0,17$.

14.3. $p=1-e^{-1}\approx 0,63$.

14.4. $p=e^{-0,5}\approx 0,61$.

14.5. 1) 0,95958; 2) 0,95963.

14.6. $\sim$ 4,6 изюмин.

14.7. $\mathrm{Sk}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}>0$.

14.8. а) $\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$; б) $1-e^{-\lambda p}$.

14.9. $p=\dfrac{1}{e}\sum\limits_{m=3}^{500}\dfrac{1}{m!}\approx 0,08$.

14.10. $M[M]=D[m]=\dfrac{N_0S}{2\pi r^2(\cos\psi_1-\cos\psi_2)}\approx 2,22$; $p=1-e^{-M(m)}=0,89$.

14.11. $M[X]=D[X]=\dfrac{\lg 2}{\lg e}\cdot\dfrac{MN_0}{AT_п}$. Составить дифференциальное уравнение для среднего числа частиц в момент времени $t$. Приравнять среднее число частиц половине первоначального. Полученное в результате этого уравнение дает возможность найти вероятность распада данной частицы; умножая ее на число частиц, получим $M[X]$.

14.12. б) $p=\dfrac{n^{10}}{10!}e^{-n}\approx 1,02\cdot 10^{-10}$; б) $p=1-e^{-n}-ne^{-n}\approx 0,673$, где $n=\dfrac{MN_0ptS}{4\pi r^2A}\approx$ $\approx 0,475$.

14.13. Представить $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1})$ в виде $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1})=$

$$=\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m}{n}\right)^s}\cdot\left(1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i}{n}\right)^n\prod_{n=1}^{m}\frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!}, \text{ где } S=$$

$$= \sum_{i=1}^{m} k_i. \text{ Так как } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ и } S \text{ конечны, то} \lim_{n\to\infty} \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{S-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}\right)^s} \times$$

$$\times \left(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^n = e^{-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}.$$

14. 14. $\dot{P}_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$;
$\dot{P}_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t)$
при $n \geqslant 1$.

Начальные условия $P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = i, \\ 0 & \text{при } n \neq i. \end{cases}$

Для вычисления вероятностей $P_n(t+h)$ нахождения системы в состоянии $E_n$ следует применить формулу полных вероятностей, рассмотрев следующие гипотезы (табл. 106).

*Таблица 106*

| Номера гипотез | Состояние системы в момент $t$ | Условная вероятность перехода системы в состояние $E_n$ |
|---|---|---|
| 1 | $E_n$ | $1 - \lambda_n h - \mu_n h$ |
| 2 | $E_{n-1}$ | $\lambda_{n-1} h$ |
| 3 | $E_{n+1}$ | $\mu_{n+1} h$ |
| 4 | Любое, кроме $E_{n-1}$, $E_n$, $E_{n+1}$ | $o(h)$ |

14. 15. $P(s, t) = e^{(1-s)\,a(t)}$; $P_n(t) = \dfrac{[a(t)]^n}{n!} e^{-a(t)}$, где $a(t) = \dfrac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$.

Использовать дифференциальные уравнения, полученные в задаче 14. 14, положив в них $\lambda_n = \lambda$ и $\mu_n = \mu$. С их помощью составить дифференциальное уравнение для производящей функции $P(s, t)$ $\dfrac{\partial P(s, t)}{\partial t} = (1-s)\left\{-\lambda P(s, t) + \mu \dfrac{\partial P(s, t)}{\partial s}\right\}$. Решить данное уравнение методом Фурье, положив $P(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(s, t)$, где $r_k(s, t) = p_k(s)\, q_k(t)$.

При этом получится

$$P(s, t) = e^{\frac{\lambda}{\mu} s} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \left\{\frac{e^t}{(1-s)^{\frac{1}{\mu}}}\right\}^{c_k}.$$

Произвольные постоянные $D_k$ и $c_k$ определяются с помощью начального условия

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

## § 15. Закон нормального распределения случайной величины

15. 1. $p = 0{,}0536$.
15. 2. $p_{(-)} = 0{,}1725$; $p_к = 0{,}4846$; $p_{(+)} = 0{,}3429$.
15. 3. 1372 $м^2$; 0,4105.
15. 4. 22 измерения.

15. 5. $F(x)=\frac{1}{2}\left[1+\hat{\Phi}\left(\frac{x}{\varrho\sqrt{2}}\right)\right]$, где $\varrho=0,476936\ldots$

15. 6. $E_x=2\varrho\sqrt{\frac{2}{3}}E_y\approx 0,78E_y$.

15. 7. См. табл. 107.

*Таблица 107*

| $x$ | $-65$ | $-55$ | $-45$ | $-35$ | $-25$ | $-15$ | $-5$ | $+5$ | $+15$ | $+25$ | $+35$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^5F(x)$ | 35 | 350 | 2150 | 8865 | 25000 | 50000 | 75000 | 91135 | 97850 | 99650 | 99965 |

15. 8. $E\approx 39$ *м*. Получающееся трансцендентное уравнение проще всего решить графически.

15. 9. $E_1=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

15. 10. 1). 0,1587; 0,0228; 0,00135; 2) 0,3173; 0,0455; 0,0027.

15. 11. $p\approx 0,089$.

15. 12. $p=0,25$.

15. 13. а) 0,5196; б) 0,1281.

15. 14. $M[X]=3$ изделия.

15. 15. Не более 1,86 *м*.

15. 16. $R_{3,1}\approx 0,87$.

15. 17. $M[X]=-7$; $D[X]=35,2$; $E_1\approx 4,7$.

15. 18. $M[X]=-3$; $D[X]=25$; $E\approx 3,37$.

15. 19. $\sim 46,5$ каб.

15. 20. а) 1,25 *мм*; б) 0,73 *мм*.

15. 21. а) $$F_a(x)=\frac{\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sigma}\right)}\quad (x>b);$$

б) $$F_б(x)=\frac{\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma}\right)}\quad (a<x<b).$$

15. 22. $E=\varrho\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{\ln\frac{b}{a}}}$.

15. 23. Доказывается интегрированием по частям интеграла, выражающего $\mu_{k+2}$. $\mu_4=3\sigma^4$; $\mu_6=15\sigma^6$; $\mu_8=105\sigma^8$.

15. 24. $$M\{|X-\bar{x}|^k\}=\frac{2^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sigma^k.$$

15. 25. $a_0=1+\frac{\text{Ex}}{8}$; $a_1=-\frac{\text{Sk}}{2}$; $a_2=-\frac{\text{Ex}}{4}$; $a_3=\frac{\text{Sk}}{6}$; $a_4=\frac{\text{Ex}}{24}$.

## § 16. Характеристические функции

16. 1. $E(u)=q+pe^{iu}$, где $q=1-p$.

16. 2. $E(u)=\prod_{i=1}^{n}(q_k+p_ke^{iu})$, где $p_k+q_k=1$.

16. 3. $E(u)=(q+pe^{iu})^n$; $\bar{x}=np$; $D[X]=npq$.

16.4. $E(u)=\dfrac{1}{1+a\left(1-e^{iu}\right)}$; $\overline{x}=a$; $D[X]=a(1+a)$.

16.5. $E(u)=e^{a\left(e^{iu}-1\right)}$; $\overline{x}=D[X]=a$

16.6. $E(u)=e^{iu\overline{x}-\frac{\sigma^2u^2}{2}}$.

16.7. $E(u)=\dfrac{1}{1-iu}$; $m_k=k!$

16.8. $E(u)=\dfrac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$; $m_k=\dfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$.

16.9. $E(u)=1+v\sqrt{\pi}e^{-v^2}[i-\Phi(v)]$, где $v=\dfrac{u}{2h}$ и $\Phi(v)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^v e^{-z^2}\,dz$. Произвести интегрирование по частям, а затем воспользоваться формулами:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\sin 2px\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-p^2}\Phi(p);\quad \int\limits_0^\infty e^{-px^2}\cos qx\,dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

(См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн „Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений", Москва, 1951 г., стр. 200.)

16.10. $E(u)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{iu}{\alpha}\right)^\lambda}$; $m_k=\dfrac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{\alpha^k}$.

16.11. $E(u)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{iau\cos\varphi}\,d\varphi=I_0(au)$. Перейти к полярным координатам и воспользоваться одним из интегральных представлений функции Бесселя. (См. Янке и Эмде „Таблицы функций", 1959 г., стр. 239.)

16.12. $E(u)=e^{i\overline{x}u-a|u|}$. Путем замены переменных приводится к виду

$E(u)=e^{i\overline{x}u}\dfrac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{ixu}\,dx}{x^2+a^2}$. Входящий в формулу интеграл вычисляется с помощью теории вычетов, для чего необходимо рассмотреть интеграл по замкнутому контуру $\dfrac{a}{\pi}\oint\dfrac{e^{izu}\,dz}{z^2+a^2}$. При положительных $u$ интегрирование осуществляется по замкнутой диаметром полуокружности в верхней полуплоскости, при $u$ отрицательном — по такому же контуру в нижней полуплоскости.

16.13. $E_y(u)=e^{iu(b+a\overline{x})-\frac{u^2}{2}a^2\sigma^2}$; $E(u)=e^{-\frac{u^2}{2}\sigma^2}$.

16.14. $\mu_{2k}=\sigma^{2k}(2k-1)!!$; $\mu_{2k+1}=0$.

16.15. $f(x)=\dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ (закон Коши).

16.16. $f_1(x)=\begin{cases}e^{-x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x>0;\\ e^x & \text{при } x<0.\end{cases}$ Решать с помощью теории вычетов, рассматривая в отдельности случаи положительных и отрицательных значений $x$.

16.17. $P(X=k)=\dfrac{1}{2^k}$, где $k=1, 2, 3, \ldots$ Разложить характеристическую функцию в ряд по степеням $\dfrac{1}{2}e^{iu}$ и воспользоваться аналитическим представлением дельта-функции, приведенным в предисловии к § 11.

## § 17. Формула полной вероятности и теорема гипотез в схеме случайных величин

17.1. $p = \dfrac{b}{l(\theta_2 - \theta_1)} \ln \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_2}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_1}{2}}$.

17.2. Условная вероятность пересечения круга с точкой равна

$$P(A/\theta) = \begin{cases} \dfrac{b}{l\sin\theta} & \text{при } \alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha, \\ 1 & \text{при прочих } \theta \text{ из } (0, \pi), \end{cases}$$ где $\alpha = \arcsin\dfrac{b}{l}$. Полная вероятность встречи круга с точкой $P(A) = \dfrac{2\alpha}{\pi} - \dfrac{2b}{\pi l}\ln\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \approx 0{,}565$.

17.3. Обозначая диаметр круга $b$ и интервал между точками $l$, получим

$$p = \frac{b(2l - b)}{l^2} = 0{,}4375.$$

17.4. $$p = \frac{E}{\varrho L\sqrt{\pi}}\left\{e^{-\varrho^2\frac{(L-2\bar{x})^2}{4E^2}} - e^{-\varrho^2\frac{(L-\bar{x})^2}{E^2}}\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\bar{x}}{L} - 1\right)\left[\hat{\Phi}\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{L-2\bar{x}}{2E}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[1 - \hat{\Phi}\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right)\right].$$

17.5. $p = 0{,}15$.

17.6. $$p = \frac{1}{2}\left[1 - \hat{\Phi}\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right)\right] + \frac{E}{2L\varrho\sqrt{\pi}}\left\{e^{-\varrho^2\frac{\bar{x}^2}{E^2}} - e^{-\varrho^2\frac{(L-\bar{x})^2}{E^2}}\right\} + \frac{\bar{x}}{2L}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{\bar{x}}{E}\right)\right] \approx 0{,}67.$$

17.7. $$p = \frac{1}{2}\left[1 - \hat{\Phi}\left(\frac{L-2\bar{x}}{2E}\right)\right] + \frac{\bar{x}}{L}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{L-2\bar{x}}{2E}\right) + \hat{\Phi}\left(\frac{\bar{x}}{E}\right)\right] + \frac{E}{\varrho L\sqrt{\pi}}\left[e^{-\varrho^2\frac{\bar{x}^2}{E^2}} - e^{-\varrho^2\frac{(L-2\bar{x})^2}{4E^2}}\right].$$

17.8. В обоих случаях один и тот же результат $p_1 = p_2 = 0{,}4$.

17.9. $$p = 1 - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x+r}{R}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x-r}{R}\right)\right]\right\}^n dx.$$

17.10. $$F(w) = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left\{\int_y^{y+w} f(x)\,dx\right\}^{n-1} dy.$$

17.11. $p = 1 - \dfrac{128}{45\pi^2} \approx 0{,}712$.

17.12. $p_i = \dfrac{r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}$, где $r_i = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) f_p(x - x_0)\,dx$.

17.13. $$P_{n',m'} = \frac{n'!}{m'!(n'-m')!}\cdot\frac{(m+m')!(n+n'-m-m')!}{(n+n'+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{m!(n-m)!}.$$

При решении задач 17.13—17.15 следует воспользоваться бета-функцией и ее выражением через гамма-функции.

17.14. $M[X] = n'\dfrac{m+1}{n+2}$.

17.15. $R_{3,1} = \frac{13}{14}$.

17.16. $p \approx 0{,}678$.

17.17. $f(\lambda/m_0) = \frac{2(2\lambda)^{m_0+1}}{(m_0+1)!} e^{-2\lambda}$.

# ГЛАВА III

# СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## § 18. Законы распределения и числовые характеристики систем случайных величин

18.1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \\ 0 & \text{вне прямоугольника;} \end{cases}$

$F(x, y) = F_1(x) F_2(y)$, где

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant b, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при } x \leqslant a; \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geqslant d, \\ \frac{y-c}{d-c} & \text{при } c \leqslant y \leqslant d, \\ 0 & \text{при } y \leqslant c. \end{cases}$$

18.2. а) $A = 20$; б) $F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$.

18.3. $f(x, y, z) = abce^{-(ax+by+cz)}$.

18.4. Треугольник с координатами вершин:

$$\left(\frac{1}{a} \ln \frac{abc}{f_0},\ 0,\ 0\right); \quad \left(0,\ \frac{1}{b} \ln \frac{abc}{f_0},\ 0\right); \quad \left(0,\ 0,\ \frac{1}{c} \ln \frac{abc}{f_0}\right).$$

18.5. а) $F(i, j) = P\{X < \ ,\ Y < j\} = P\{X \leqslant \ -1,\ Y \leqslant j-1\}$ (См. табл. 108).

*Таблица 108*

| $j-1$ \ $i-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,202 | 0,376 | 0,489 | 0,551 | 0,600 | 0,623 | 0,627 |
| 1 | 0,202 | 0,475 | 0,652 | 0,754 | 0,834 | 0,877 | 0,887 |
| 2 | 0,202 | 0,475 | 0,683 | 0,810 | 0,908 | 0,964 | 0,982 |
| 3 | 0,202 | 0,475 | 0,683 | 0,811 | 0,911 | 0,971 | 1,000 |

б) $1 - P\{X \leqslant 6,\ Y \leqslant 1\} = 1 - 0{,}887 = 0{,}113$;

в) $M[X] = 1{,}947$; $M[Y] = 0{,}504$; $\|k_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 2{,}610 & 0{,}561 \\ & 0{,}548 \end{matrix} \right\|$

18.6. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(\xi_i)\, d\xi_i$.

18.7. а) $P\{W < w\} = n \int_{-\infty}^{\infty} [F(y+w) - F(y)]^{n-1} f(y)\, dy$, где $F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(y)\, dy$;

б) $P\{W < w\} = \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{x_i}^{x_i+w} \ldots (n-1) \ldots \int_{x_i}^{x_i+w} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots \right.$

$\left. \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1}, \ldots, dx_n \right] dx_i$.

18.8. $P = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{x_2}\int\limits_{x_2}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1\,dx_3\right]dx_2.$

18.9. $P = F(a_1, b_3) - F(a_1, b_5) + F(a_2, b_1) - F(a_2, b_3) + F(a_3, b_4) - F(a_3, b_2) + F(a_4, b_2) - F(a_4, b_4) + F(a_5, b_5) - F(a_5, b_1).$

18.10. $P = a^{-3} - a^{-6} - a^{-9} + a^{-12}.$

18.11.

$$p = \begin{cases} \dfrac{\pi R^2}{4ab} & \text{при } 0 \leqslant R \leqslant b, \\ \dfrac{R^2}{4ab}(\pi - 2\beta + \sin 2\beta) & \text{при } b \leqslant R \leqslant a, \\ \dfrac{R^2}{4ab}(\pi - 2\alpha - 2\beta + \sin 2\alpha + \sin 2\beta) & \text{при } a \leqslant R \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1 & \text{при } R > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

При этом $\alpha = \arccos\dfrac{a}{R}$, $\beta = \arccos\dfrac{b}{R}$.

18.12. а) $c = \dfrac{3}{\pi R^3}$; б) $p = \dfrac{3a^2}{R^2}\left(1 - \dfrac{2a}{3R}\right)$.

18.13. Указание: воспользоваться соотношением $m\bar{x} + n\bar{y} = c$.

а) $r_{xy} = \begin{cases} +1 & \text{при } \dfrac{n}{m} < 0, \\ -1 & \text{при } \dfrac{n}{m} > 0. \end{cases}$

б) $\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \left|\dfrac{n}{m}\right|$.

18.14. Рассмотреть математическое ожидание квадрата выражений: $\sigma_y(X - \bar{x}) + \sigma_x(Y - \bar{y})$ и $\sigma_y(X - \bar{x}) - \sigma_x(Y - \bar{y})$.

18.15. Воспользоваться соотношением $k_{xy} = M[XY] - \bar{x}\bar{y}$.

18.16. $\|r_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ & 1 & -0{,}5 \\ & & 1 \end{Vmatrix}$.

18.17. $M[X] = \alpha + \gamma = 0{,}5$; $M[Y] = \alpha + \beta = 0{,}45$; $D[X] = (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = 0{,}25$; $D[Y] = (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 0{,}2475$. $K_{xy} = M[XY] - M[X]\,M[Y] = \alpha - (\alpha + \gamma)\times(\alpha + \beta) = \alpha\delta - \beta\gamma = 0{,}175$.

18.18. $M[X] = M[Y] = 0$; $\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \infty & 0 \\ & \infty \end{Vmatrix}$.

18.19. $f(x, y) = \cos x \cos y$.

$$M[X] = M[Y] = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \pi - 3 & 0 \\ & \pi - 3 \end{Vmatrix}.$$

18.20. $p = \dfrac{2l}{\pi L}\left[1 - \sqrt{1 - \dfrac{L^2}{l^2}} + \dfrac{L}{l}\arccos\dfrac{L}{l}\right]$.

18. 21 $p=\frac{l}{\pi ab}[2(a+b)-l]$. Указание: воспользоваться формулой $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, где событие $A$ — пересечение иглой стороны $a$, событие $B$ — пересечение стороны $b$.

## § 19. Закон нормального распределения на плоскости и в пространстве. Многомерное нормальное распределение

19. 1. $F(x, y)=\frac{1}{4}\left[1+\hat{\Phi}\left(\frac{x-\bar{x}}{E_x}\right)\right]\left[1+\hat{\Phi}\left(\frac{y-\bar{y}}{E_y}\right)\right]$.

19. 2. $f(x, y)=\frac{1}{182\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196}+\frac{(x-26)(y+12)}{182}+\frac{(y+12)^2}{169}\right]}$.

19. 3. а) $c=1{,}39$; б) $\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}0{,}132 & -0{,}026\\ & 0{,}105\end{Vmatrix}$; в) $S_{эл}=0{,}162$

19. 4. $f(2{,}2)=\frac{1}{2\pi e^3\sqrt{2}}=0{,}00563$.

19. 5. $f(x, y, z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}}e^{-\frac{1}{230}[39x^2+36y^2+26z^2-44xy+36xz-38yz]}$; $f_{\max}=\frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}}=$

$=0{,}00595$.

19 6. $$\|k_{ij}^{-1}\|=\begin{Vmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & 0\ldots 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0\ldots 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\ldots 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\ldots 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots 1\end{Vmatrix};$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2-\frac{x_n^2}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2},\quad \text{где } x_0=0.$$

19. 7. $$\|k_{ij}\|=\begin{Vmatrix}10 & 0 & 2 & 0\\ & 10 & 0 & 2\\ & & 10 & 0\\ & & & 10\end{Vmatrix},$$

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2)=\frac{1}{384\pi^2}e^{-\frac{5}{96}\left(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2\right)+\frac{1}{48}(x_1x_2+y_1y_2)}.$$

19. 8. $P(k)=1-e^{-\frac{k^2}{2}}$.

19. 9. $P(k)=\hat{\Phi}(k)-\frac{2\rho k}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2k^2}$.

19.10. а) $P\{X<Y\}=\frac{1}{2}$; б) $P\{X<0,\ Y>0\}=\frac{1}{4}$.

19.11. $P=\frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{c-\bar{x}}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{a-\bar{x}}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{d-\bar{y}}{E_y}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{b-\bar{y}}{E_y}\right)\right]=0{,}0335$.

19.12. а) $P_{\text{круг}}=1-e^{-\rho^2}=0{,}2035$; б) $P_{\text{кв}}=\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right]^2=0{,}2030$; в) $P_{\text{прям}}=$

$=\hat{\Phi}\left(\frac{\sqrt{0{,}1\pi}}{2}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\sqrt{10\pi}}{2}\right)=0{,}1411$.

19.13. $P=\frac{1}{2}\left[1-e^{-\rho^2\frac{R^2}{E^2}}\right]$.

19.14. $P=\frac{\alpha}{2\pi}\left(e^{-\rho^2\frac{R_1^2}{E^2}}-e^{-\rho^2\frac{R_2^2}{E^2}}\right)$.

19.15. $A=4dk$; $\alpha=E_x\sqrt{1+\frac{2\rho^2d^2}{3E_x^2}}$; $\beta=E_z\sqrt{1+\frac{2\rho^2k^2}{3E_z^2}}$.

19.16. $P=\hat{\Phi}\left(\frac{d}{\alpha}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{k}{\beta}\right)<\hat{\Phi}\left(\frac{d}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{k}{E_z}\right)$, так как $\alpha>E_x$ и $\beta>E_z$.

19.17. $P_{\text{вып}}=1-q^3-3q^2(1-q)-3q\,[(p_2+p_3)^2+2p_2p_4]-p_2^3=0{,}379$.

$P_{\text{отл}}=p_5^3+3p_5^2(p_3+p_4)+3p_4^2p_5=0{,}007$, где $p_2=0{,}196$, $p_3=0{,}198$, $p_4=0{,}148$,

$p_5=0{,}055$, $q=0{,}403$.

19.18. $P=\frac{1}{8}\left[\hat{\Phi}(k)\right]^2$.

19.19. $P=\hat{\Phi}\left(\frac{R}{E}\right)-\frac{2\rho R}{E\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\rho^2R^2}{E^2}}-\left[\hat{\Phi}\left(\frac{a}{2E}\right)\right]^3$.

19.20. а) $P=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\rho^2\frac{R^2}{E^2}}\right)\left[\hat{\Phi}\left(\frac{mh}{(m+n)B}\right)+\hat{\Phi}\left(\frac{nh}{(m+n)B}\right)\right]$;

б) $P=\frac{h}{2H}\left(1-e^{-\rho^2\frac{R^2}{E^2}}\right)$.

19.21. $P=\frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{h}{a}\right)-\frac{hE}{\sqrt{h^2E^2+R^2a^2}}\hat{\Phi}\left(\frac{\sqrt{h^2E^2+R^2a^2}}{Ea}\right)\right]$.

19.22. $25(x-10)^2+36(x-10)(y-10)+36(y-10)^2=7484{,}6$.

19.23. $16(x-2)^2+15y^2+16(z+2)^2+8(x-2)(z+2)=805{,}1$.

19.24. $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2=\frac{2}{\lg e}\left[5-\frac{n}{2}\lg(2\pi)\right]$. Задача не имеет решений при $n>12$.

## § 20. Законы распределения подсистем случайных величин и условные законы распределения

20.1. $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)} & \text{при } a_1\leqslant x\leqslant a_2,\ b_1\leqslant y\leqslant b_2,\ c_1\leqslant z\leqslant c_2,\\ 0 & \text{вне параллелепипеда;}\end{cases}$

$f(y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b_2-b_1)(c_2-c_1)} & \text{при } b_1\leqslant y\leqslant b_2,\ c_1\leqslant z\leqslant c_2,\\ 0 & \text{вне прямоугольника;}\end{cases}$

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{c_2-c_1} & \text{при } c_1\leqslant z\leqslant c_2,\\ 0 & \text{вне интервала. Случайные величины } X,\ Y,\ Z \text{ независимы.}\end{cases}$$

20.2. $f_x(x)=\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$; $f_y(y)=\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$; $F_x(x)=\dfrac{1}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{x}{R}+\right.$ $\left.+\dfrac{x}{R}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{R^2}}\right]+\dfrac{1}{2}$; $F_y(y)=\dfrac{1}{\pi}\left[\arcsin\dfrac{y}{R}+\dfrac{y}{R}\sqrt{1-\dfrac{y^2}{R^2}}\right]+\dfrac{1}{2}$;
$X$ и $Y$ зависимы, так как $f(x,\ y)\neq f_x(x)\,f_y(y)$.

20.3. $$f(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} & \text{при } |x|<R,\\ \dfrac{1}{2}[\delta(y+R)+\delta(y-R)] & \text{при } |x|=R,\\ 0 & \text{при } |x|<R.\end{cases}$$

20.4. $\|k_{ij}\|=\left\|\begin{matrix}\dfrac{R^2}{4} & 0\\ & \dfrac{R^2}{4}\end{matrix}\right\|$; $X$ и $Y$ не связаны.

20.5. а) $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2} & \text{внутри квадрата,}\\ 0 & \text{вне квадрата;}\end{cases}$

б) $f_x(x)=\dfrac{a\sqrt{2}-2|x|}{a^2}$, $f_y(y)=\dfrac{a\sqrt{2}-2|y|}{a^2}$;

в) $f(y/x)=\dfrac{1}{a\sqrt{2}-2|x|}$, $f(x/y)=\dfrac{1}{a\sqrt{2}-2|y|}$.

20.6. $D[X]=D[Y]=\dfrac{a^2}{12}$, $k_{xy}=0$. Случайные величины $X$ и $Y$ зависимы, но не связаны.

20.7. $f_z(z)=\dfrac{3(R^2-z^2)}{4R^3}$ при $|z|<R$; $f(x,\ y/z)=\dfrac{1}{\pi(R^2-z^2)}$ при $|z|<R$.

20.8. а)

*Таблица 109*

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P\{X=i\}$ | 0,202 | 0,273 | 0,208 | 0,128 | 0,100 | 0,060 | 0,029 |

б)

*Таблица 110*

| $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P\{Y=j\}$ | 0,627 | 0,260 | 0,095 | 0,018 |

в)

*Таблица 111*

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P\{X=i/Y=1\}$ | 0,000 | 0,381 | 0,246 | 0,154 | 0,119 | 0,077 | 0,023 |

г) *Таблица 112*

| $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P\{Y=j/X=4\}$ | 0,49 | 0,31 | 0,18 | 0,02 |

д) $M[X/1]=2{,}334;\quad M[Y/4]=0{,}73$

20. 9. $k=4;\ f_x(x)=2xe^{-x^2}\ (x\geqslant 0);\ f_y(y)=2ye^{-y^2}\ (y\geqslant 0);\ f(x/y)=f_x(x);\ f(y/x)=$

$=f_y(y);\ M[X]=M[Y]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2};\ D[X]=D[Y]=1-\dfrac{\pi}{4};\ k_{xy}=0.$

20. 10. $M[X]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} M[X/y]\,f_y(y)\,dy;\quad D[X]=\int_{-\infty}^{\infty} D[X/y]\,f_y(y)\,dy+$

$+\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\{\bar{x}-M[X/y]\}^2 f_y(y)\,dy.$

20. 11. Так как $M[X]=5,\ M[Y]=-2,\ \sigma_x=\sigma,\ \sigma_y=2\sigma,\ r=-0{,}8,$ то: а) $M[X/y]=$

$=5-\dfrac{0{,}8}{2}(y+2)=4{,}2-0{,}4y,\quad M[Y/x]=-2-0{,}8\cdot 2(x-5)=6-1{,}6x,$

$\sigma_{x/y}=0{,}6\sigma,\ \sigma_{y/x}=1{,}2\sigma;$ б) $f_x(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}};$

$f_y(y)=\dfrac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y+2)^2}{8\sigma^2}};$ в) $f(x/y)=\dfrac{1}{0{,}6\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x+0{,}4y-4{,}2)^2}{0{,}72\sigma^2}},$

$f(y/x)=\dfrac{1}{1{,}2\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y+1{,}6x-6)^2}{2{,}88\sigma^2}}.$

20. 12. $f_x(x)=A\sqrt{\dfrac{\pi}{c}}\,e^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2};\quad f_y(y)=A\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)y^2}.$ Для независимости $X$ и $Y$ необходимо, чтобы было $\dfrac{f(x,\ y)}{f_x(x)\,f_y(y)}=\dfrac{\sqrt{ac}}{\pi A}\,e^{-\frac{b^2}{4}\left(\frac{x^2}{c}-\frac{4xy}{b}+\frac{y^2}{a}\right)}=1.$
Это условие выполняется при $b=0$. При этом

$A=\dfrac{\sqrt{ac}}{\pi}.$

20. 13. $k=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi};\quad k_{xy}=-\dfrac{1}{18};\quad f(x/y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(2x+1{,}5y)^2};\quad f(y/x)=\dfrac{3}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(x+3y)^2}.$

20. 14. а) $f_x(x)=\dfrac{1}{40\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-125)^2}{3200}};$

б) $f_y(y)=\dfrac{1}{30\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y+30)^2}{1800}};$

в) $f(x/0)=\dfrac{1}{32\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-149)^2}{2048}};$

г) $f(y/25)=\dfrac{1}{24\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y+75)^2}{1152}}.$

20. 15. $M[X/y] = 0{,}8y + 149$; $M[Y/x] = 0{,}45x - 86{,}25$.

20. 16. $f(r) = \frac{2r^2}{a^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$; $\bar{r} = M[R] = \frac{4a}{\sqrt{2\pi}}$.

20. 17. $f_R(R) = \frac{R}{ab} e^{-\frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)} I_0\left[\frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]$, где $I_0(x) =$

$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\pm x\cos\varphi}\,d\varphi$ — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента;

$$f_\varphi(\varphi) = \left[2\pi ab\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\right]^{-1}.$$

20. 18. $f(R/\varphi) = R\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) e^{-\frac{R^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)}$;

$$f(\varphi/R) = \frac{1}{2\pi I_0\left[\frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]} e^{-\frac{R^2}{4}\cos 2\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}.$$

20. 19. а) $f(R,\ \vartheta,\ \varphi) = \frac{R^2\sin\vartheta}{(2\pi)^{3/2}abc} e^{-\frac{R^2}{2}\left[\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\vartheta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right]}$;

б) $f(R,\ \vartheta) = \frac{R^2\sin\vartheta}{\sqrt{2\pi}abc} e^{-\frac{R^2}{2}\left[\frac{\sin^2\vartheta}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\cos^2\vartheta}{2}\right]} \times$

$\times I_0\left[\frac{R^2\cos^2\vartheta}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]$;

$$f(\vartheta,\ \varphi) = \frac{\sin\vartheta}{4\pi abc\left[\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\vartheta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right]^{3/2}}.$$

20. 20. $f(R/\vartheta,\ \varphi) = \frac{2R^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\vartheta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right]^{3/2} \times$

$\times \exp\left\{-\frac{R^2}{2}\left(\frac{\cos^2\vartheta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\vartheta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right)\right\}$;

$$f(\varphi/R,\ \vartheta) = \frac{\exp\left\{-\frac{R^2}{4}\cos^2\vartheta\cos 2\varphi\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right\}}{2\pi I_0\left[\frac{R^2\cos^2\vartheta}{4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\right]}.$$

20. 21. $f_{x_1,\,x_2}(x_1,\ x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{96}} e^{-\frac{1}{96}\left(5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2\right)}$; $f_{x_1y_1}(x_1,\ y_1) = \frac{1}{20\pi} e^{-\frac{x_1^2+y_1^2}{20}}$.

20. 22. $f(x_2;\ y_2/0;\ 10) = \frac{5}{96\pi} e^{-\frac{5}{96}\left[x_2^2 + (y_2-2)^2\right]}$; $M[X_2/0;\ 10] = 0$; $M[Y_2/0;\ 10] = 2$;

$D[X_2/0;\ 10] = D[Y_2/0;\ 10] = 9{,}6$.

# ГЛАВА IV

# ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## § 21. Числовые характеристики функций случайных величин

21.3. $M[Y] = 1$.

21.4. 1,15 *м*.

21.5. $\frac{1}{2}R^2$.

21.6. $(n-2)pq^2$ (при $n > 1$).

21.7. $M[Z] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\varrho}E$.

21.8. $\frac{11a^2}{18\pi}$.

21.9. $\frac{3}{\pi}$.

21.10. $\lambda\bar{w}$.

21.11. $\sum_{k=1}^{n} p_k$

21.12. 1,5.

21.13. $n_1p_1 + n_2p_2$.

21.14. $n\left[1-\left(1-\frac{p}{n}\right)^m\right]$

21.15. $n[1-(1-p)^m]$.

21.16. $\bar{t} = T\left[1-e^{-a(1-e^{-\alpha})}\right]$; $\bar{s} = kT^2\left[1-2e^{-a(1-e^{-\alpha})}+e^{-a(1-e^{-2a})}\right]^2$.

21.17. $n\left[1-\left(1-\frac{p}{n}\right)^m\right]+\sum_{k=0}^{m}(n-k)\left[1-\left(1-\frac{p}{n-k}\right)^m\right]P_n^m(k)$, где $P_n^m(k)$ — вероятность того, что в результате первой серии будет помечено ровно $k$ из $n$ шаров. Эта вероятность вычисляется по формуле:

$$P_n^m(k) = C_n^k\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-1)^i\left[1-\frac{p(n-k+i)}{n}\right]^m.$$

21.18. а) для $n = m = 8$ $\quad mp + \sum_{k=0}^{4}\{(m-2k)p + k[1-(1-p)^2]\}P_n^m(k) +$

$$+ P_n^m(5)[3-(1-p)^2-2(1-p)^3] + 2P_n^m(6)[1-(1-p)^4] + P_n^m(7)[1-(1-p)^8],$$

где $P_n^m(k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$; б) для $n \geqslant 2m$ $2mp$

21.19. $\frac{a^2}{6b}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+\frac{b^2}{6a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$.

21.21. $D[XY] = D[X]D[Y] + \bar{x}^2D[Y] + \bar{y}^2D[X]$.

21.22. $D[Y] = \sum_{k=1}^{n}a_k^2D[X_k] + \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_jk_{ij}$.

21.23. $\sum_{k=1}^{n}p_k$; $\quad \sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k)$.

21.24. $k_{xy} = M[XY] - \bar{x}\bar{y}$.

21.25. $M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \bar{x}$; $D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{\sigma_x^2}{n}$.

21.26. 0,316 *г*.

21.27. 10,5; 3,05.

21.28. 2; 1,1.

21.29. $\frac{l}{3}$; $\frac{l^2}{18}$.

21.30. $M[Z] = 5A$; $D[Z] = 100A^2 + 225B^2 - 150AB$.

21.31. $M[Y] = \frac{E_x}{\varrho\sqrt{\pi}}$; $D[Y] = \frac{E_x^2}{\varrho^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right]$.

21.32. $M[Y] = e^{-\bar{x}(1-\cos b)}\cos(\bar{x}\sin b)$; $D[Y] = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-\bar{x}(1-\cos 2b)} \times \right.$
$\left.\times \cos(\bar{x}\sin 2b)\right] - \bar{y}^2$.

21.33. а) 26,7 *м*$^2$; б) 22,0 *м*$^2$; в) 10 *м*$^2$.

21.34. $\sum_{i \neq j}^{N} p_{ij}^{\mathrm{I}} = \sum_{i \neq j}^{N} p_{ij}^{\mathrm{II}}$.

21.35. $E_a = \frac{E}{\tau}\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$. Для определения углового коэффициента прямой по способу наименьших квадратов используется формула: $k = \frac{12}{\tau n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)y_i$.

21.36. $M[Z] = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\alpha - \frac{E\sqrt{\pi}}{2\varrho}$; $D[Z] = \alpha^2\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) + \frac{E^2}{4\varrho^2}(4 - \pi)$.

21.37. $M[Z] = 5(\sqrt{3} - 1)$; $D[Z] = 7600$.

21.38. $r_{xy} = \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}}$, если $n$ — четное; $r_{xy} = 0$, если $n$ — нечетное.

21.39. $M[Z] = 0$; $D[Z] = 2\Delta^2\sigma^2$.

## § 22. Законы распределения функций случайных величин

22.1. $F_y(y) = \begin{cases} F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{при } a > 0, \\ 1 - F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) & \text{при } a < 0. \end{cases}$

22.2. $f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}} & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0. \end{cases}$

22.3. Если $a > 0$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\pi\sqrt{y}(a+y)} & \text{при } 0 \leqslant y < \infty, \\ 0 & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

если $a < 0$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{a}}{\pi\sqrt{y}(a+y)} & \text{при } -\infty < y \leqslant 0, \\ 0 & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

22.4. Для нечетного $n$ $f_y(y)=\dfrac{a}{\pi\left(a^2+y^{2/n}\right)}\cdot\dfrac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$; для четного $n$

$$f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{2a}{\pi\left(a^2+y^{2/n}\right)}\cdot\dfrac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1} & \text{при } y>0,\\ 0 & \text{при } y\leqslant 0.\end{cases}$$

22.5. $f_y(y)=\dfrac{1}{3\pi\left[1+(1-y)^{2/3}\right](1-y)^{2/3}}$.

22.6. а) $f_y(y)=|y|e^{-y^2}$ $\quad(-\infty<y<\infty)$;

б) $f_y(y)=2ye^{-y^2}$ $\quad(0<y<\infty)$.

22.7. $f(v)=\dfrac{1}{3av^{2/3}}$ $\quad(0<v<a^3)$.

22.8. $f_y(y)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } y<0 \text{ или } y>1.\end{cases}$

22.9. $f_z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a z}\,\sigma}e^{-\frac{z}{2a\sigma^2}} & \text{при } z\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } z<0.\end{cases}$

22.10. $f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\sin\pi y} & \text{при } \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e,\\ 0 & \text{при } y<\dfrac{1}{2} \text{ или } y>\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e.\end{cases}$

22.12. $f_x(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{l}{l^2+x^2}$, $\quad-\infty\leqslant x\leqslant\infty$.

22.13. $f_y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.

22.15. $f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(k+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}\cos^{2k+1}y & \text{при } |y|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } |y|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

22.16. $f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\rho}{\sqrt{\pi}E}e^{-\rho^2\frac{y^2}{E^2}} & \text{при } 0\leqslant y<\infty,\\ 0 & \text{при } y<0.\end{cases}$

22.17. $f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}} & \text{при } |y|<a \text{ (закон распределения арксинуса)},\\ 0 & \text{при } |y|\geqslant a.\end{cases}$

22.18. $f_y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi} & \text{при } |y|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } |y|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

22.19. $f_y(y)=f_x(e^y)\,e^y$.

22.20. $f_y(y)=\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^n}y^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2\sigma^2}}$. Для решения задачи применяется аппарат характеристических функций. Характеристическая функция для случайной величины $X_i^2$, если $\sigma^2=1$, а $\bar{x}_i=0$, равна $E_{x_i}(t)=(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда характеристическая функция случайной величины $U=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$, $E_u(t)=(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$, а плотность вероятности $f\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}(1-2t)^{-\frac{n}{2}}dt=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}$.

Если случайные величины $X_i$ имеют одну и ту же дисперсию $\sigma^2$, а $\bar{x}_i=0$, то случайная величина $Y=+\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ связана со случайной величиной $U$ функциональной зависимостью $Y=+\sqrt{\frac{1}{n}\sigma^2U}$. Поэтому $f_y(y)=f_u[\psi(y)]\times\times|\psi'(y)|$, где $\psi(y)=\frac{y^2n}{\sigma^2}$.

22.21. $f_z(z)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$.

22.22. $f_z(z)=\frac{1}{2}e^{-|z|}$ (экспоненциальный закон).

22.23. $f_z(z)=\int_0^{\infty}yf(zy,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0}yf(zy,y)\,dy$.

22.24. $f_z(z)=\frac{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\pi\left(\sigma_y^2z^2-2r\sigma_x\sigma_yz+\sigma_x^2\right)}$ при $r=0$ $f_z(z)=\frac{\sigma_x/\sigma_y}{\pi\left[z^2+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2\right]}$ (закон распределения Коши)

22.25. $f_z(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+z^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ (закон распределения Стьюдента).

22.26. Случайная величина $Z$ подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией $\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$.

22.27. $f_r(r)=\begin{cases}\frac{2\varrho^2}{E^2}re^{-\frac{\varrho^2r^2}{E^2}} & \text{при } 0\leqslant r<\infty,\\ 0 & \text{при } r<0.\end{cases}$

22.28. $f_r(r)=\begin{cases}\frac{2r}{a^2} & \text{при } 0<r<a,\\ 0 & \text{при } r>a \text{ или } r<0.\end{cases}$

22.29. $f_r(r)=\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2+h^2}{2\sigma^2}}I_0\left(\frac{rh}{\sigma^2}\right)$, где $I_0(z)$ — бесселева функция нулевого порядка от мнимого аргумента.

22. 30. $f_r(r)=\frac{r}{\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{r^2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)}{4\sigma_x^2\sigma_y^2}}I_0\left[\frac{r^2\left(\sigma_x^2-\sigma_y^2\right)}{4\sigma_x^2\sigma_y^2}\right].$

22. 31. $f_r(r)=r\int\limits_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\left[f\left(x,\sqrt{r^2-x^2}\right)+f\left(x,-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right]dx=$

$=r\int\limits_0^{2\pi}f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$

22. 32. $U=(X-\bar{x})\cos\alpha+(Y-\bar{y})\sin\alpha;\ V=(X-\bar{x})\sin\alpha+(Y-\bar{y})\cos\alpha;$

$\operatorname{tg}2\alpha=2\frac{r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2};\ \sigma_u^2=\sigma_x^2\cos^2\alpha+\sigma_y^2\sin^2\alpha+r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha;$

$\sigma_v^2=\sigma_x^2\sin^2\alpha+\sigma_y^2\cos^2\alpha-r_{xy}\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha;\ \left|\sigma_x^2+\sigma_y^2=\sigma_u^2+\sigma_v^2\right|.$

22. 33. $f_\alpha(\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2-|\alpha|) & \text{при } |\alpha|\leqslant 2,\\ 0 & \text{при } |\alpha|\geqslant 2;\end{cases}$

$f_\beta(\beta)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln|\beta| & \text{при } |\beta|\leqslant 1,\\ 0 & \text{при } |\beta|>1.\end{cases}$

22. 36. $f(t,\varphi)=\frac{t}{2\pi\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{t^2}{2\left(1-r_{xy}^2\right)}(1-r_{xy}\sin 2\varphi)}$. При $r_{xy}=0$ $\Phi$ равномерно распределена в интервале $(0,2\pi)$, а случайная величина $T$ подчиняется закону Рэлея.

22. 37. $f_y(y_1,y_2,\ldots,y_n)=f_x\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}y_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n}a_{nj}y_j\right)|\det A|.$

22. 38. $f(s/t)$ — плотность вероятности закона нормального распределения с параметрами: $M[S]=\bar{s}_0+\bar{v}_0t+\bar{a}\frac{t^2}{2}$, $D[S]=D[S_0]+t^2D[V_0]+\frac{t^4}{4}D[a]+2tk_{s_0v_0}+$
$+t^2k_{s_0a}+t^3k_{v_0a}.$

## § 23. Характеристические функции систем и функций случайных величин

23. 1. Воспользоваться тем, что для независимых случайных величин

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}f_k(x_k).$$

23. 2. $E_z(t)=E_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(t,t,\ldots,t).$

23. 3. $E_y(t)=e^{itc}\prod_{k=1}^{n}E_{x_k}(a_kt).$

23. 4. $E_y(t)=\frac{1}{\sqrt{1-2it\sigma_x^2}}$; $m_r=M[Y^r]=1\cdot 3\cdot 5\ldots(2r-1)\sigma_x^{2r}.$

23. 5. $E_y(t)=\frac{e^{it(a+b)}-e^{itb}}{ita}.$

23.6. $E_y(t)=\frac{1}{1+ti}$; $m_r=M[Y^r]=(-1)^r r!$

23.7. $E_y(t)=J_0(at)$, где $J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}d\varphi$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $f_y(y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} J_0(at)\cos ty\,dt=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}$.

23.8. $E_{x,\,y}(t_1,t_2)=e^{i(\bar{x}t_1+\bar{y}t_2)-\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2t_1^2+2\sigma_1\sigma_2 r t_1t_2+\sigma_2^2t_2^2\right)}$.

23.9. $E_{x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=e^{ai\sum\limits_{m=1}^{n}t_m-\frac{\sigma^2}{2}\sum\limits_{m=1}^{n}t_m^2-\alpha\sigma^2\sum\limits_{m=1}^{n-1}t_mt_{m+1}}$.

23.10. $E_y(t)=e^{it\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}t^2}$.

23.11. $M\left[\left(X_1^2-\sigma^2\right)\left(X_2^2-\sigma^2\right)\right]=2k_{12}^2$.

23.12. а) $M\left[X_1^2X_2^2X_3^2\right]=8k_{12}k_{13}k_{23}+2\sigma^2\left(k_{12}^2+k_{13}^2+k_{23}^2\right)+\sigma^6$;

б) $M\left[\left(X_1^2-\sigma^2\right)\left(X_2^2-\sigma^2\right)\left(X_3^2-\sigma^2\right)\right]=8k_{12}k_{13}k_{23}$.

23.13. $M[X_1X_2X_3]=0$.

23.14. $M[X_1X_2X_3X_4]=k_{12}k_{34}+k_{13}k_{24}+k_{23}k_{14}$.

23.15. Для доказательства воспользоваться разложением характеристической функции $E_{x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n)=e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}k_{m,l}\,t_mt_l}$ в бесконечный ряд по степеням $t_1,t_2,\ldots,t_n$.

23.16. $f(r,\theta)=r^2\cos\theta\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta)\,d\varphi$.

## § 24. Композиция законов распределения

24.1. $$f_z(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z\leqslant 2a,\\ \dfrac{z-2a}{(b-a)^2} & \text{при } 2a\leqslant z\leqslant a+b,\\ \dfrac{2b-z}{(b-a)^2} & \text{при } a+b\leqslant z\leqslant 2b,\\ 0 & \text{при } z>2b.\end{cases}$$

24.2. $$f_z(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z>\bar{x}+\bar{y}+a+b,\\ \dfrac{\bar{x}+\bar{y}+a+b-z}{4ab} & \text{при } \bar{x}+\bar{y}+b-a\leqslant z\leqslant\bar{x}+\bar{y}+a+b,\\ \dfrac{1}{2b} & \text{при } \bar{x}+\bar{y}+a-b\leqslant z\leqslant\bar{x}+\bar{y}+b-a,\\ \dfrac{z+a+b-\bar{x}-\bar{y}}{4ab} & \text{при } \bar{x}+\bar{y}-a-b\leqslant z\leqslant\bar{x}+\bar{y}+a-b,\\ 0 & \text{при } z\leqslant\bar{x}+\bar{y}-a-b.\end{cases}$$

24. 3. $f_z(z)=\frac{1}{2(b-a)}\left[\Phi\left(\frac{z-a-\bar{x}}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{z-b-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right],$

где $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

24. 4. $$f_z(z)=\begin{cases} 0 & \text{при } z<3a, \\ \frac{(z-3a)^2}{2(b-a)^3} & \text{при } 3a\leqslant z\leqslant 2a+b, \\ \frac{(z-3a)^2-3[z-(b+2a)]^2}{2(b-a)^3} & \text{при } 2a+b\leqslant z\leqslant a+2b, \\ \frac{(3b-z)^2}{2(b-a)^3} & \text{при } a+2b\leqslant z\leqslant 3b, \\ 0 & \text{при } z>3b. \end{cases}$$

24. 5. Композиция закона нормального распределения с законом равной вероятности имеет плотность вероятности:

$$f_z(z)=\frac{1}{4l}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{z-2\bar{x}+l}{E}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{z-2\bar{x}-l}{E}\right)\right].$$

Уравняв математическое ожидание и дисперсию для $f_z(z)$ и для плотности вероятностей закона нормального распределения $f_z'(z)$, получим:

$$f_z'(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}e^{-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}},\ \text{где } \bar{z}=2\bar{x},\ \sigma_z=\sqrt{\frac{E^2}{2\varrho^2}+\frac{l^2}{3}}.$$

Если $\bar{x}=0$, то относительная ошибка такой замены в точке $z=0$ равна

$$\Delta\%=\frac{f_z(0)-f_z'(0)}{f_z(0)}100\%\ \text{(табл. 113)}$$

*Таблица 113*

| $l$ | $E$ | $2E$ | $3E$ | $4E$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta\%$ | —0,30 | —3,02 | —9,70 | —17,10 |

24. 6. $f(z)=\frac{1}{\pi}\frac{l}{1+l^2(z-c)^2}$, где $c=a+b$; $l=\frac{hk}{h+k}$ (для решения использовать характеристические функции случайных величин $X$ и $Y$).

24. 7. $f_z(z)=\frac{a+b}{\pi[z^2+(a+b)^2]}.$

24. 8. $f_z(z)=\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{z}{\operatorname{sh} z}.$

24. 9. $f_z(z)=e^{-\frac{z}{3}}\left(1-e^{-\frac{z}{6}}\right)$ при $z\geqslant 0$, $f_z(z)=0$ при $z\leqslant 0$.

24. 10. $f(r)=\frac{r}{\sqrt{\Delta}}e^{-\frac{(k_{11}+k_{22})r^2}{4\Delta}}I_0\left[\frac{r^2}{4\Delta}\sqrt{(k_{22}-k_{11})^2+4k_{12}^2}\right],$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка;

$\Delta=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{vmatrix};$

$k_{11}=\frac{1}{2\varrho^2}\left[a_1^2+a_2^2+\left(b_2^2-a_2^2\right)\sin^2\alpha\right];$

$k_{22}=\frac{1}{2\varrho^2}\left[b_1^2+b_2^2+\left(a_2^2-b_2^2\right)\sin^2\alpha\right];$

$k_{12}=k_{21}=\frac{1}{4\varrho^2}\left(a_2^2-b_2^2\right)\sin 2\alpha.$

24.11. $E_y(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$.

24.14. $M[X] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 2;\quad D[X] = \frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{p_1} - 1\right) + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2} - 1\right);$

$$F_n(x) = \frac{1}{p_2 - p_1}\{(1-p_1)p_2[1-(1-p_1)^n] - p_1(1-p_2)[1-(1-p_2)^n]\}.$$

24.15. Требуемый запас прочности $0{,}37\bar{q}_1 = 7{,}4$ *кГ*.

24.16. $P_{\text{обн.}} = \frac{1}{4L}\int\limits_0^L \left[1 - \hat{\Phi}\left(\frac{y-\bar{x}}{E}\right)\right]\left[1 + \hat{\Phi}\left(\frac{y-L+\bar{x}}{E}\right)\right]dy - \frac{1}{2L}\times$

$$\times\left\{(L-\bar{x})\,\hat{\Phi}\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right) - \bar{x}\hat{\Phi}\left(\frac{\bar{x}}{E}\right) + \frac{E}{\varrho\sqrt{\pi}}\left[e^{-\varrho^2\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right)^2} - e^{-\varrho^2\left(\frac{\bar{x}}{E}\right)^2}\right]\right\}.$$

24.17. $P_{\text{обн.}} = 0{,}75 - \frac{(L-\bar{x})}{2L}\,\hat{\Phi}\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right) + \frac{\bar{x}}{2L}\,\hat{\Phi}\left(\frac{\bar{x}}{E}\right) + \frac{1}{4L}\times$

$$\times\int\limits_0^L \hat{\Phi}\left(\frac{y-\bar{x}}{E}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{y-L+\bar{x}}{E}\right)dy - \frac{E}{2\varrho L\sqrt{\pi}}\left[e^{-\varrho^2\left(\frac{L-\bar{x}}{E}\right)^2} - e^{-\left(\frac{\varrho\bar{x}}{E}\right)^2}\right].$$

24.18. $F_n(z) = \frac{1}{a-b}[a(1-b)(1-a^n) - b(1-a)(1-b^n)]$.

24.19. См. табл. 114.

*Таблица 114*

| $z_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P\{Z = z_i\}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{11}{24}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{12}$ |

24.20. $P\{Z = m\} = \frac{(2a)^m}{m!}e^{-2a}$.

24.21. Случайная величина $Y$ имеет биномиальное распределение.

24.22. $F_z(n) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$.

## § 25. Линеаризация функций случайных величин

25.1. $E_Q \approx 9100$ кал.

25.2. $D[\nu] = \frac{\bar{p}}{16\bar{m}\,\bar{l}}\left[\frac{\sigma_p^2}{\bar{p}^2} + \frac{\sigma_m^2}{\bar{m}^2} + \frac{\sigma_l^2}{\bar{l}^2} - \frac{2\sigma_p\sigma_m r_{pm}}{\bar{p}\,\bar{m}} - \frac{2\sigma_p\sigma_l r_{pl}}{\bar{p}\,\bar{l}} + \frac{2\sigma_m\sigma_l r_{ml}}{\bar{m}\,\bar{l}}\right].$

25.3. $$E_z = \frac{\sqrt{\bar{R}^2E_R^2 + \left(\bar{\omega}\,\bar{L} - \frac{1}{\bar{\omega}\,\bar{c}}\right)^2\left[\bar{\omega}^2E_l^2 + \frac{E_c^2}{\bar{\omega}^2\bar{c}^4} + \left(\bar{l} + \frac{1}{\bar{\omega}^2\bar{c}}\right)^2E_\omega^2\right]}}{\sqrt{\bar{R}^2 + \left(\bar{\omega}\,\bar{L} - \frac{1}{\bar{\omega}\,\bar{c}}\right)^2}}.$$

25.4. $D[J] = \bar{J}^2\left[\frac{\sigma_E^2}{\bar{E}^2} + \frac{\sigma_R^2}{\left(\bar{R} + \frac{\bar{r}}{n}\right)^2} + \frac{\sigma_r^2}{n^2\left(\bar{R} + \frac{\bar{r}}{n}\right)^2}\right].$

25. 5. $E_x \approx 66{,}66$ *м*; $E_y \approx 38{,}60$ *м*

25. 6. $E_{v_1} \approx 0{,}52$ *м/сек.*

25. 7. Для принятых условий функция $V_1 = -V_c \cos q_c$ не является спрямляемой

25. 8. $E_x \approx 23{,}1$ *м*; $E_y \approx 14{,}3$ *м*; $E_z = 25$ *м.*

25. 9. $E_x = E_y \approx 8{,}66$ *м*; $E_z \approx 10$ *м.*

25. 10. $E_v \approx \dfrac{u_e}{q+\bar{\omega}} E_\omega.$

25. 11. $E_h \approx 43$ *м.*

25. 12. $\sigma_z \approx 10^{-6}$.

25. 13. $E_h \approx 12{,}98$ *м.*

25. 14. Срединное отклонение ошибок определения дальности $k_2c$ при использовании данных радиолокационной станции равно $\approx 22{,}85$ *м.*

25. 15. $\bar{y} = \varphi(\bar{x}) + \dfrac{1}{2}\varphi''(x)\Big|_{x=\bar{x}} D[X];$

$$D[Y] = \left[\varphi'(x)\Big|_{x=\bar{x}}\right]^2 D[X] + \frac{1}{2}\left[\varphi''(x)\Big|_{x=\bar{x}}\right]^2 D^2[X].$$

25. 16. $M[S] = \dfrac{ab}{2}\left(1 - \dfrac{\sigma_\gamma^2}{2}\right)\sin\bar{\gamma};$

$$D[S] = \frac{a^2b^2}{4}\left[\sigma_\gamma^2 \cos^2\bar{\gamma} + \frac{\sigma_\gamma^4}{2}\left(1+\cos^2\bar{\gamma}\right) + \frac{5}{12}\sigma_\gamma^6 \ os^2\bar{\gamma}\right].$$

25. 17. $E_x = \dfrac{b\sqrt{\dfrac{E_\alpha^2}{\bar{a}^2}\sin^2\bar{\alpha} + E_\alpha^2\cos^2\bar{\alpha}}}{\sqrt{\bar{a}^2 - b^2\sin^2\bar{\alpha}}}, \quad \bar{x} = \arcsin\left(\dfrac{b}{a}\sin\bar{\alpha}\right).$

25. 18. а) при удержании двух членов разложения в ряд Тэйлора функции

$Y = \dfrac{1}{X} \qquad \bar{y} \approx -0{,}2, \ D[Y] \approx 0{,}16;$

б) при удержании трех членов разложения в ряд Тэйлора функции

$Y = \dfrac{1}{X} \qquad \bar{y} \approx 0{,}6, \ D[Y] \approx 1{,}44.$

25. 19. а) по точным формулам:

$\bar{v} = \dfrac{4}{3}\pi\bar{r}\left[3\sigma_R^2 + \bar{r}^2\right], \ D[V] = \dfrac{16}{3}\pi^2\left[3\sigma_R^6 + 12\bar{r}^2\sigma_R^4 + 3\bar{r}^4\sigma_R^2\right];$

б) по формулам метода линеаризации:

$\bar{v} \approx \dfrac{4}{3}\pi\bar{r}^3, \ D[V] \approx 16\pi^2\bar{r}^4\sigma_R^2.$

25. 20. а) при измерении высоты конуса $D[V] \approx 4\pi^2$;
б) при измерении длины образующей $D[V] \approx 3{,}57\pi^2$.

25. 21. 19,9 *мг.*

25. 22. $E_g = g\sqrt{\dfrac{4}{nT^2}\left(E_t^2 + 2E_{t_1}^2\right) + \dfrac{1}{L^2}E_l^2} \approx 0{,}65$ *см/сек²*

25. 23. $D[Z] \approx \dfrac{(1-k)^2\pi^2}{96(k+1)}.$

## § 26. Композиция двумерных и трехмерных нормальных законов распределения с использованием понятия векториальных отклонений

26. 1. Нормальный закон распределения с главными полуосями единичного эллипса: $a = 48{,}4$, $b = 12{,}4$, наклоненными к векториальной ошибке $c_1$ под углом $\alpha = 19°40'$ и $109°40'$.

26. 2. При $\gamma = 0$ — вырожденный нормальный закон (векториальная ошибка) $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 50$ *м*. При $\gamma = 90°$ — нормальный закон распределения с главными полуосями единичного эллипса $a = c_1 = 30$ *м*, $b = c_2 = 40$ *м*, совпадающими с направлениями векториальных ошибок.

26. 3. Главные полуоси $a = 1{,}2$ *м*, $b = 1{,}1$ *м* наклонены к оси абсцисс под углами 33 и 123°.

26. 4. Главные полуоси $a = b = 100$ *м*, т. е. суммарное рассеивание круговое

26. 5. $a = 30{,}8$, $b = 26{,}0$, $\alpha = 18°15'$.

26. 6. а) $a = b = 25\sqrt{5}$;

б) $a = 68{,}9$, $b = 38{,}8$, $\alpha = 15°$.

26. 7. $m = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda}}$, $n = \sqrt{a^2 + b^2 - m^2}$.

Угол между векториальными ошибками $\varepsilon = \arcsin \dfrac{ab}{mn}$.

26. 8. $m = 73{,}2$, $n = 68{,}1$, $\varepsilon = 74°21'$.

26. 9. а) $f(x, y) = 1{,}17 \cdot 10^{-5} e^{-7{,}06 \cdot 10^{-2}(0{,}295x^2 - 0{,}670xy + 1{,}31y^2)}$;

б) $a = 126{,}5$; $b = 53{,}8$; $\alpha = 12°10'$.

26. 10. $a = 88{,}0$; $b = 25{,}7$; $\alpha = 39°12'$.

26. 11. Закон распределения определяется двумя векториальными ошибками (рис. 38):

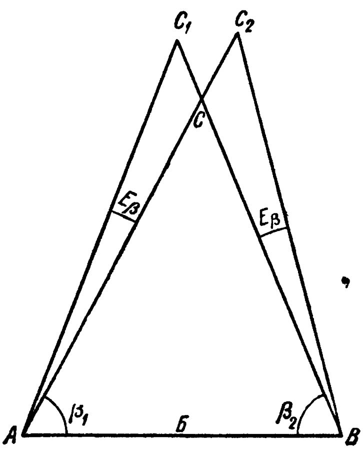


Рис. 38.

$$a_1 = CC_1 = \frac{БE_\beta \sin \beta_2}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2)},$$

$$a_2 = CC_2 = \frac{БE_\beta \sin \beta_1}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2)},$$

образующими с положительным направлением оси абсцисс углы $\alpha_1 = \pi - \beta_2$ и $\alpha_2 = \beta_1$, что дает

$$2\rho^2 k_{11} = \frac{Б^2 E_\beta^2}{\sin^4(\beta_1 + \beta_2)} (\sin^2 \beta_1 \cos^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2 \cos^2 \beta_2),$$

$$2\rho^2 k_{22} = \frac{Б^2 E_\beta^2}{\sin^4(\beta_1 + \beta_2)} (\sin^4 \beta_1 + \sin^4 \beta_2),$$

$$2\rho^2 k_{12} = \frac{Б^2 E_\beta^2}{\sin^4(\beta_1 + \beta_2)} (\sin^3 \beta_1 \cos \beta_1 - \sin^3 \beta_2 \cos \beta_2),$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2 \beta_1 \sin 2\beta_1 - \sin^2 \beta_2 \sin 2\beta_2}{\sin^2 \beta_1 \cos 2\beta_1 + \sin^2 \beta_2 \cos 2\beta_2}.$$

26. 12. $a = 18{,}0$, $b = 7{,}39$, $\alpha = 85°36'$.

26. 13. К векториальным ошибкам $a_1$ и $a_2$ прибавляется еще векториальная ошибка

$$a_3 = \frac{\sqrt{E_1^2 \sin^2 \beta_2 + E_2^2 \cos^2 \beta_2}}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}$$

при $\alpha_3 = \beta_0$, что дает в точке $C$ единичный эллипс ошибок с главными полуосями $a = 41{,}2$, $b = 19{,}7$, образующими с направлением базы углы 74°20′ и 164°20′.

26. 14. $E_v = 2{,}1$ *м/сек*, $E_q = 0{,}042$ рад.

26. 15. $a = 156$ *м*, $b = 139$ *м*, главная полуось направлена вдоль курса судна.

26.16. $a = 64{,}0$; $b = c = 78{,}1$; полуось $a$ направлена вдоль курса

26.17. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{120\,(2\pi)^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-45)^2}{50} - \frac{(y-15)^2}{32} - \frac{(z+75)^2}{72}}$.

26.18. Уравнение единичного суммарного эллипсоида

$$\frac{(x-30)^2}{2100} + \frac{y^2}{1125} + \frac{z^2}{64} = 1.$$

26.19. $\|k_{ij}\| =$

$$= \begin{Vmatrix} 7421 & -2568 & -7597 \\ & 8406 & +2322 \\ & & 9672 \end{Vmatrix}.$$

26.20. $p = -1{,}47\cdot 10^7$; $q = -8{,}9\cdot 10^8$; $\varphi = 65°45'$; $u_1 = 4106$; $u_2 = -622$; $u_3 = -3484$; $a = 89{,}3$; $b = 57{,}0$; $c = 19{,}3$; $\cos(a, x) = \pm 0{,}6179$; $\cos(a, y) = \mp 0{,}3528$; $\cos(a, z) = \mp 0{,}7025$.

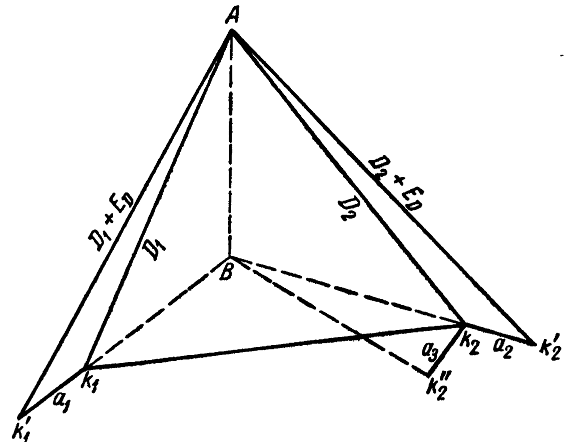


Рис. 39.

26.21. Если выбрать (рис. 39) за ось $Ox$ — направление $BK_2$, а за ось $Oy$ — перпендикулярное направление, то с помощью метода линеаризации находим три векториальные ошибки: $a_1 = \dfrac{D_1E_D}{\sqrt{D_1^2 - H^2}}$, $\alpha_1 = \alpha$; $a_2 = \dfrac{D_2E_D}{\sqrt{D_2^2 - H^2}}$, $\alpha_2 = 0$;

$$a_3 = \sqrt{D_2^2 - H^2}\, E_\alpha,$$

$\alpha_3 = 90°$. Отсюда находим $k_{11} =$

$$= \frac{E_D^2}{2\rho^2}\left(\frac{D_1^2 \cos^2\alpha}{D_1^2 - H^2} + \frac{D_2^2}{D_2^2 - H^2}\right); \quad k_{12} =$$

$$= \frac{E_D^2}{2\rho^2}\,\frac{D_1^2 \sin\alpha\cos\alpha}{D_1^2 - H^2};$$

$$k_{22} = \frac{E_D^2}{2\rho^2}\left[\frac{D_1^2\sin^2\alpha}{D_1^2 - H^2} + \frac{E_\alpha^2}{E_D^2}\left(D_2^2 - H^2\right)\right].$$

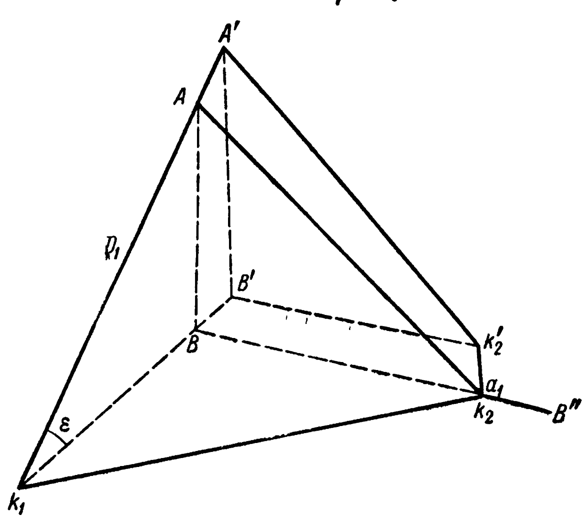


Рис. 40.

26.22. Векториальные ошибки $\overleftrightarrow{a_2}$ и $\overleftrightarrow{a_3}$ остаются по величине и направлению такими же, как и в предыдущей задаче. Величина векториальной ошибки $\overleftrightarrow{a_1}$ из-за ошибки в дальности $D_1$ и ее направление $\alpha_1 = \angle K_2'K_2B''$ определяется по формулам (рис. 40): $a_1 = K_2K_2' = E_2\,\lambda\cos\varepsilon$, $\sin\alpha_1 = \dfrac{1}{\lambda}\sin\alpha$,

где

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{2D_1\sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{\sqrt{D_2^2 - D_1^2\sin^2\varepsilon}}\cos\alpha + \frac{D_1^2\sin^2\varepsilon\,\mathrm{tg}^2\,\varepsilon}{D_2^2 - D_1^2\sin^2\varepsilon}}.$$

## ГЛАВА V
## ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ

### § 27. Энтропия случайных событий и величин

27.1. Так как $H_1 - H_2 = 1{,}4 \lg 2 - \frac{1}{3} - 0{,}2 \lg 3 = -0{,}073$ дес. ед. $< 0$, то для первой урны исход опыта более определенный.

27.2. $p = \frac{1}{2}$.

27.3 $H_1 = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \lg \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) \lg \left(1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right) = 0{,}297$ дес. ед.; $H_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lg \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right) \lg \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right) = 0{,}295$ дес. ед., т. е. неопределенность практически одинакова.

27.4. а) $H = -\cos^2 \frac{\pi}{n} \log \cos^2 \frac{\pi}{n} - \sin^2 \frac{\pi}{n} \log \sin^2 \frac{\pi}{n}$; б) $n = 4$.

27.5. Так как $P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$, то $H[X] = -\frac{p \log p + (1-p) \log (1-p)}{p}$.
С уменьшением $p$ от 1 до 0 энтропия монотонно возрастает от 0 до $\infty$.

27.6. а) $H[X] = -n[p \log p + (1-p) \log (1-p)] - \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \log C_n^m$;
б) $H[X] = 1{,}5 \log 2$.

27.7. а) $\log (b - a)$; б) $\log [\sigma_x \sqrt{2\pi e}]$; в) $\log \frac{e}{a}$.

27.8. $H[X] = \log_a (0{,}5\sqrt{e})$ — положительна при $a < 1$ и отрицательна при $a > 1$.

27.9. $H[X/y] = H_y[X] = \log (\sigma_x \sqrt{2\pi e (1 - r^2)})$,
$H[Y/x] = H_x[Y] = \log (\sigma_y \sqrt{2\pi e (1 - r^2)})$,

где $\sigma_x$ и $\sigma_y$ — средние квадратические отклонения; $r$ — коэффициент корреляции $X$ и $Y$.

27.10.
$$H[X_1, X_2, \ldots, X_n] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |k|}} e^{-\frac{1}{2|k|} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2|k|} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \log e + \log \left(\sqrt{(2\pi)^n |k|}\right)\right] dx_1 dx_2, \ldots, dx_n = \log \sqrt{(2\pi e)^n |k|},$$
где $|k|$ — определитель корреляционной матрицы.

27.11. $H_x[Y] = H[Y] - H[X] + H_y[X]$.

27.12. Закон равной вероятности
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при } x < a,\ x > b. \end{cases}$$

27.13. Закон экспоненциального распределения
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{M[X]} \exp \left[\frac{-x}{M[X]}\right] & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

27.14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_2}} e^{-\frac{x^2}{2m_2}}$.

27.15. Нормальный закон
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |k|}} e^{-\frac{1}{2|k|} \sum_{i,j} a_{ij} (x_i - M[X_i])(y_i - M[Y_i])}.$$

27.16. Воспользоваться приемом примера 27.3 применительно к выражению
$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_x(x) f_y(y)} dx\, dy.$$
Случай $H_y[X] = H[X]$ соответствует независимым $X$ и $Y$.

27. 17. Воспользоваться формулой $H[X_1, X_2, \ldots, X_n] = H[X_1] + H_{x1}[X_2] + + H_{x_1, x_2}[X_3] + \cdots + H_{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}}[X_n]$.

27. 18. $H[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = H[X_1, X_2, \ldots, X_n] +$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \log \left| J\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right) \right| dx_1\, dx_2 \ \ldots,\ dx_n$$ где $J\left(\frac{\partial\varphi_k}{dx_j}\right)$ — якобиан преобразования от $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ к $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

27. 19. а) Логарифм абсолютного значения определителя матрицы $\|a_{kj}\|$; б) 1,85 дес. единиц.

## § 28. Количество информации

28. 3. Воспользоваться формулой $f_z(z) = f[\psi(z)] \cdot |\psi'(z)|$, где $\psi(z) = x$ функция, обратная функции $\varphi(x) = z$.

28. 4. Для дискретных случайных величин всегда имеет место неравенство $H_y[X] \geqslant 0$, вследствие чего $I_y[X] \leqslant H[X]$. Для непрерывных случайных величин $H_y[X]$ может принимать отрицательные значения.

28. 5. Равенство $I_y[X] = H[Y]$ означает, что при любой реализации $X = x_k$ реализация случайной величины $Y$ становится вполне определенной. Это возможно, если $P\{Y = y_i/X = x_k\}$ равна для одного из $y_i$ единице, а для остальных — нулю.

28. 6. $$I = \alpha \log \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} + \beta \log \frac{\beta}{(\alpha+\beta)(\beta+\delta)} + \gamma \log \frac{\gamma}{(\alpha+\gamma)(\gamma+\delta)} + \delta \log \frac{\delta}{(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}.$$

28. 7. $$I_y[X] = \log \frac{1}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}}.$$

28. 8 $I_{max} = \log \frac{a^2 + b^2}{2ab}$, где $a$ и $b$ — главные полудиаметры эллиптического распределения; $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

28. 9. Обозначив через $Y$ число появлений события $B$, равное 1 или 0, получим
$$I_A[B] = \sum_{m=0}^{n} P_{n,\,m} \left\{ G_m \log \frac{G_m}{\sum\limits_{m=0}^{n} P_{n,\,m} G_m} + (1 - G_m) \log \frac{1 - G_m}{\sum\limits_{m=0}^{n} P_{n,\,m}(1 - G_m)} \right\}.$$

28. 10. $I_A[B] = -[1 - (1-p)^n] \log [1 - (1-p)^n] - (1-p)^n \log (1-p)^n$.

28. 11. а) $n_0 = \frac{-\log 2}{\log(1-p)}$; б) $0{,}293 > p \geqslant 0{,}206$.

28. 12. $I_A[B] = -(1 - e^{-a}) \log (1 - e^{-a}) - e^{-a} \log e^{-a}$.

28. 13. $a_0 = \ln 2$.

28. 14. $\frac{3}{8} \log \frac{6}{5} + \frac{1}{4} \log \frac{4}{5} + \frac{1}{8} \log \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \log \frac{4}{3} = 0{,}047$ двоичных ед.

28. 15. Нуль.

28. 16. а) $I_x[Y] = -(p\Delta + \bar{p}\bar{\delta}) \log (p\Delta + \bar{p}\bar{\delta}) - (p\bar{\Delta} + \bar{p}\delta) \log (p\bar{\Delta} + \bar{p}\delta) + p(\Delta \log \Delta + \bar{\Delta} \log \bar{\Delta}) + \bar{p}(\delta \log \delta + \bar{\delta} \log \bar{\delta})$;

б) $I_x[Y] = \lg 2 + \Delta \lg \Delta + \bar{\Delta} \lg \bar{\Delta} = 0{,}1598$ дес. ед.

28. 17. В обоих случаях $I_y[X] = 0$, так как вероятности приема сигнала $x_1$ или $x_2$ не зависят от того, какой сигнал передан в действительности.

28. 18. а) $I_{y,z}[X] = -p\log p - \bar p\log\bar p + p\Delta^2\log\frac{p\Delta^2}{p\Delta^2+\bar p\,\bar\delta^2} + \bar p\,\bar\delta^2\log\frac{\bar p\,\bar\delta^2}{p\Delta^2+\bar p\,\bar\delta^2} +$

$+ 2p\Delta\bar\Delta\log\frac{p\Delta\bar\Delta}{p\Delta\bar\Delta+\bar p\,\bar\delta\delta} + 2\bar p\,\bar\delta\delta\log\frac{\bar p\,\bar\delta\delta}{p\Delta\bar\Delta+\bar p\,\bar\delta\delta} + p\bar\Delta^2\log\frac{p\bar\Delta^2}{p\bar\Delta^2+\bar p\delta^2} +$

$+ \bar p\delta^2\log\frac{\bar p\delta^2}{p\bar\Delta^2+\bar p\delta^2}$; б) $I_{y,z}[X] = (1-2\Delta\bar\Delta)\lg 2 + \Delta^2\lg\Delta^2 + \bar\Delta^2\lg\bar\Delta^2 -$

$-(\Delta^2+\bar\Delta^2)\lg(\Delta^2+\bar\Delta^2) = 0{,}2234$ дес. ед.

28. 19. В обоих случаях $I_{y,z}[X] = 0$.

28. 20. $I_{y,z}[X] = -(p\Delta+\bar p\,\bar\delta)\log(p\Delta+\bar p\,\bar\delta) - (p\bar\Delta+\bar p\delta)\log(p\bar\Delta+\bar p\delta) +$

$+ p(\Delta\log\Delta+\bar\Delta\log\bar\Delta) + \bar p(\delta\log\delta+\bar\delta\log\bar\delta)$, т. е. количество информации такое же, что и при одном канале.

28. 21. $I^{\mathrm{I}} = -p\log p - \bar p\log\bar p + p\,\Delta^2\log\frac{p\Delta^2}{p\Delta^2+\bar p\,\bar\delta^2} + \bar p\,\bar\delta^2\log\frac{\bar p\,\bar\delta^2}{p\Delta^2+\bar p\,\bar\delta^2} +$

$+ p(2\Delta\bar\Delta+\bar\Delta^2)\log\frac{p(2\Delta\bar\Delta+\bar\Delta^2)}{p(2\Delta\bar\Delta+\bar\Delta^2)+\bar p(2\delta\bar\delta+\delta^2)} +$

$+ \bar p(2\delta\bar\delta+\delta^2)\log\frac{\bar p(2\delta\bar\delta+\delta^2)}{p(2\Delta\bar\Delta+\bar\Delta^2)+\bar p(2\delta\bar\delta+\bar\delta^2)}$; $I^{\mathrm{II}}$ получается из $I^{\mathrm{I}}$, если поменять местами $\Delta$ и $\bar\Delta$, а также $\delta$ и $\bar\delta$.

28. 22. а) $I_y^{\mathrm{I}}[X] = 0{,}0070$ дес. ед., $I_y^{\mathrm{II}}[X] = 0{,}0078$ дес. ед.;

б) $I_y^{\mathrm{I}}[X] = 0{,}0078$ дес. ед.; $I_y^{\mathrm{II}}[X] = 0{,}0070$ дес. ед.

28. 23. $I_B[A] = -p\log p - \bar p\log\bar p + \int\limits_{a_2}^{b_1}\{p\varphi(u)\log[p\varphi(u)] - [p\varphi(u)+\bar p\psi(u)]\times$

$\times\log[p\varphi(u)+\bar p\psi(u)] + \bar p\psi(u)\log[\bar p\psi(u)]\}\,du$.

28. 24. а) $I_B[A] = -p\log p - \bar p\log\bar p$, т. е. в этом случае наблюдение результатов опыта $B$ дает полную информацию об опыте $A$;

б) $I_A[B] = I_B[A] = 0$.

28. 25. 0,1421 дес. ед.

28. 26. а) $I_y[X] = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f(y/x)\log\frac{f(y/x)}{f_2(y)}\,dx\,dy$,

где $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f(y/x)\,dx$;

б) $I_y[X] = 0$, что видно непосредственно, так как $f(y/x)$ не зависит от $x$.

28. 27. $I_y[X] = \log e\left[\ln\frac{b-a}{\ln\frac{b}{a}} - \frac{b\ln b - a\ln a}{b-a} + 1\right]$.

28. 28. $I_{y,z}[X] = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\log\frac{f(x, y, z)}{f_x(x)f_{y,z}(y, z)}\,dx\,dy\,dz$,

где $f(x, y, z) = f_x(x)f_{y,z}(y, z/x) = f_x(x)f_y(y/x)f_z(z/x, y)$, $f_z(z/x, y) = f_z(z/x)$ вследствие независимости $z$ от $y$, а $f_{y,z}(y, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_x(x)f_y(y/x)f_z(z/x)\,dx$.

# ГЛАВА VI

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

## § 29. Закон больших чисел

29.1. а) $P\{|X-\bar{x}|\geqslant 4E\}\leqslant 0{,}1375$; б) $P\{|X-\bar{x}|\geqslant 3\sigma\}\leqslant \frac{1}{9}$.

29.2. Доказывается так же, как неравенство Чебышева. В ходе доказательства использовать очевидное неравенство $\int\limits_{e^{\varepsilon x}>e^{t^2}l} f(x)\,dx\leqslant \int\limits_{e^{\varepsilon x}>e^{t^2}l}\frac{1}{l}e^{\varepsilon x-t^2}f(x)\,dx$.

29.3. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству неревенства Чебышева, получается цепь неравенств $P\{X\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{e^{a\varepsilon}}\int\limits_{e^{ax}\geqslant e^{a\varepsilon}}e^{ax}dF(e^{ax})\leqslant\frac{M[e^{aX}]}{e^{a\varepsilon}}$.

29.4. Использовать неравенство, вытекающее из свойств функции $\varphi(x)$, $\int\limits_{|x|>t}f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{\varphi(t)}\int\limits_{|x|>t}\varphi(x)f(x)\,dx$, где $f(x)$ — плотность вероятности $X$.

29.5. Воспользоваться неравенством Чебышева, учтя при этом, что $\bar{x}=m+1$, а $M[X^2]=(m+1)(m+2)$ и, следовательно, $P\{0<X<2(m+1)\}=$
$$=P\{|X-\bar{x}|<m+1\}>1-\frac{D[X]}{(m+1)^2}.$$

29.6 Обозначая $X_n$ — случайное число появлений события $A$ в результате $n$ опытов имеем $P\{|X_n-500|<100\}>1-\frac{250}{100^2}=0{,}975$. Следовательно, сказанное в задаче справедливо.

29.7 Случайные величины $X_k$ взаимно независимы и имеют одинаковые математические ожидания $\bar{x}_k=0$ и дисперсии $D[X_k]=1$, что свидетельствует о выполнении условий теоремы Чебышева.

29.8. При $s<\frac{1}{2}$, так как в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}D\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right]=$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^{2s}=0.$$

29.9. $\lim\limits_{n\to\infty}D\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left\{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\right\}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, что доказывает применимость закона больших чисел.

29.10. а) Не выполняются, так как
$$\lim_{n\to\infty}D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(4^n-1)}{3n^2}=\infty;$$
б) выполняется, так как
$$\lim_{n\to\infty}D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$
в) не выполняются, так как
$$\lim_{n\to\infty}D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}>\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=1/2.$$

29. 11. Применим, так как при $k_{ij} < 0$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right\} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D[X_k] < \frac{c}{n},$$

где $c$ — верхняя граница $D[X_k]$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Из неравенства следует $\lim\limits_{n\to\infty} D\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right\} = 0.$

29. 12. Для доказательства достаточно оценить

$$D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right\} = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} r_{k,\ k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}\right\}, \text{ где } \sigma_k^2 = D[X_k],$$

а $r_{k,\ k+1} = \dfrac{M[(X_k - \bar{x}_k)(X_{k+1} - \bar{x}_{k+1})]}{\sigma_k\sigma_{k+1}}$. Заменяя все $\sigma_k$ их наибольшим значением $b$, получим $D\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right\} < \dfrac{3n-2}{n^2}b^2$. Откуда немедленно следует

$$\lim_{n\to\infty} D\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right\} = 0.$$

29. 13. Применим, так как выполнены условия теоремы Хинчина

29. 14. Рассмотрим

$$D[Z_n] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\sigma_i\sigma_j\right| < \frac{c}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|r_{ij}|,$$

где $\sigma_i$ — среднее квадратическое отклонение случайной величины $X_i$. Так как $r_{ij} \to 0$ при $|i-j| \to \infty$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N$, что для всех $|i-j| > N$ справедливо неравенство $|r_{ij}| < \varepsilon$. Это значит, что в матрице $\|r_{ij}\|$, насчитывающей $n^2$ элементов, не более $Nn$ элементов превосходит $\varepsilon$ (их мы заменим единицей), остальные же меньше $\varepsilon$. Из сказанного следует неравенство $\left|\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij}\right| < \dfrac{Nn}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}(n^2 - Nn)\varepsilon = \varepsilon + \dfrac{N}{n}(1-\varepsilon)$,

указывающее на то, что $\lim\limits_{n\to\infty} D[Z_n] = 0$; это и доказывает теорему.

29. 15. Закон больших чисел неприменим, так как ряд $\dfrac{6}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$, определяющий $M[X_i]$, не является абсолютно сходящимся.

## § 30. Теоремы Муавра — Лапласа и Ляпунова

30. 1. $P\left(0{,}2 \leqslant \frac{m}{n} < 0{,}4\right) = 0{,}97.$

30. 2. $P(70 \leqslant m < 86) = 0{,}927.$

30. 3. а) $P(m \geqslant 20) = 0{,}5$; б) $P(m < 28) = 0{,}9772$; в) $P(14 \leqslant m < 26) = 0{,}8664.$

30. 4. В предельном равенстве теоремы Муавра — Лапласа положить $b = -a = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, а затем воспользоваться интегральными представлениями функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$.

30. 5. Ввиду того, что вероятность события неизвестна, дисперсию числа появлений события следует принять максимальной, т. е. положить $pq = 0{,}25$. При этом допущении: а) $n \simeq 250\,000$; б) $n = 16\,600$.

30. 6. В задачах, где верхний предел допустимого числа появлений события равен числу произведенных опытов, $b$ оказывается настолько большим, что $\Phi(b) \approx 1$. При этом допущении $n \approx 108$.

30.7. $n \approx 65$.

30.8. $p = 0{,}943$.

30.9. 67,5.

30.10. Интеграл $J = \int\limits_0^1 x^2 dx$ можно рассматривать как математическое ожидание квадрата случайной величины, равномерно распределенной в интервале (0,1), тогда его статистическим аналогом, определяемым методом Монте-Карло, будет величина $J_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2$, где $X_k$ — случайные числа из интервала (0,1). В задаче требуется вычислить вероятность $P\{|J_{1000} - J| < 0{,}01\}$. Она может быть определена с помощью предельного равенства теоремы Ляпунова, для этого необходимо определить $M[J_n]$ и $D[J_n]$. Получим $P\{|J_{1000} - J| < 0{,}01\} = 0{,}71$.

30.11. $n \approx 1{,}55 \cdot 10^6$. Использовать указание предыдущей задачи с той лишь разницей, что $J_n = \frac{\pi}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n} \sin X_k$, где $X_k$ — случайные числа из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

30.12. 1) Так как разность $P(C) - \tilde{P}_n(C) = \left[\frac{m}{n} - P(A)\right] \cdot [1 - P(B/\bar{A})]$, то с точки зрения закона больших чисел оба метода приводят к правильным результатам; 2) В первом случае потребуется более 9570 опытов, во втором случае более 4500 опытов.

30.13. 1) 3100; 2) 1500.

30.14. Во всех трех случаях предельная характеристическая функция равна $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

30.15. $\lim\limits_{n \to \infty} E_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

30.16. $P(X = m) = \begin{cases} 1 \text{ при } m = 0, \\ 0 \text{ при } m > 0, \end{cases}$ где $X$ — случайное число точек, попавших в область $\omega$.

# ГЛАВА VII

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

## § 31. Определение числовых характеристик случайных величин по результатам опытов

31.1. 10,58 *м*.

31.2. а) 814,87 *м*$^2$; б) 921,86 *м*$^2$.

31.3. $\tilde{v} = 424{,}73$ *м/сек*; $\tilde{\sigma}_v = 8{,}84$ *м/сек*;

31.4. $\tilde{v} = 33$ *м/сек*; $\tilde{E}_v = 3{,}07$ *м/сек*.

31.5. $\tilde{x} = 404{,}85$ *мкв*; $\tilde{\sigma}_x = 133$ *мкв*.

31.6. $M\left[\tilde{\sigma}_1^2\right] = D[X]$; $M\left[\tilde{\sigma}_2^2\right] = \frac{n-1}{n} D[X]$.

31.7. При $P(A) = 0{,}5$ $D_{\max} = \frac{1}{4n}$.

31.8. $D\left[\tilde{\sigma}_1^2\right] = \frac{2(n-1)}{n^2} D^2[X]$; $D\left[\tilde{\sigma}_2^2\right] = \frac{2}{n-1} D^2[X]$.

31.9. $\widetilde{\mathrm{Sk}} = 0{,}85$; $\widetilde{\mathrm{Ex}} = 2{,}70$.

31.10. Более рациональным является первый прибор. Срединное отклонение ошибок среднего арифметического значения измеренной дальности для него в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раз меньше, чем для второго прибора.

31.11. $k = \frac{1}{2(n-1)}$.

31. 12. $k=\sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$.

31. 13. а) $k=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; б) $k=\frac{1}{\sqrt{n\left[1+\frac{2}{\pi}(n-1)\right]}}$.

31. 14. $A_i=\frac{\lambda}{\sigma_i^2}$, где $\lambda$ — произвольное число.

31. 15. $\tilde{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$; $\tilde{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k$; $\tilde{E}_x=\varrho\sqrt{\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\tilde{x}\right)^2}$;

$$\tilde{E}_z=\varrho\sqrt{\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k-\tilde{z}\right)^2}.$$

31. 16. $\tilde{x}=48{,}75$ *м*; $\tilde{z}=53{,}31$ *м*. $\tilde{E}_x=10{,}75$ *м*; $\tilde{E}_z=12{,}50$,

31. 17.
$$\tilde{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k;\quad \tilde{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k;$$

$$E_\xi=\varrho\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2\cos^2\alpha+\tilde{k}_{xz}\sin 2\alpha+\tilde{\sigma}_z^2\sin^2\alpha};$$

$$E_\eta=\varrho\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2\sin^2\alpha-\tilde{k}_{xz}\sin 2\alpha+\tilde{\sigma}_z^2\cos^2\alpha},$$

где $\tilde{\sigma}_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\tilde{x}\right)^2$; $\tilde{\sigma}_z^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k-\tilde{z}\right)^2$;

$$\tilde{k}_{xz}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}\left(x_k-\tilde{x}\right)\left(z_k-\tilde{z}\right),$$

а угол $\alpha$ определяется решением тригонометрического уравнения

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\tilde{k}_{xz}}{\tilde{\sigma}_x^2-\tilde{\sigma}_z^2}.$$

31. 18. $\tilde{x}=1$ *м*; $\tilde{z}=40$ *м*;

$\tilde{E}_\xi=23$ *м*; $\tilde{E}_\eta=1{,}07$ *м*.

31. 19. $k=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{2}}$. Предварительно доказать, что плотность вероятности случайной величины $\tilde{\sigma}$ определяется формулой

$$f_n\left(\tilde{\sigma}\right)=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\tilde{\sigma}^{n-2}e^{-\frac{n\tilde{\sigma}^2}{2\sigma^2}}.$$

31.20. См. табл. 115.

*Таблица 115*

| $J_j$ | 1—10 | 11—20 | 21—30 | 31—40 | 41—50 | 51—60 | 61—70 | 71—80 | 81—90 | 91—100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j^* = \frac{m_j}{n}$ | 0,107 | 0,100 | 0,127 | 0,087 | 0,093 | 0,127 | 0,093 | 0,073 | 0,087 | 0,107 |
| $F^*(x)$ | 0,107 | 0,207 | 0,334 | 0,421 | 0,514 | 0,641 | 0,734 | 0,807 | 0,894 | 1,0 |

$\tilde{x} = 48{,}50; \quad \tilde{D}[X] = 829{,}18.$

31.21. См. табл. 116.

*Таблица 116*

| $J_j$ | 0—3 | 3—6 | 6—9 | 9—12 | 12—15 | 15—18 | 18—21 | 21—24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j^* = \frac{m_j}{n}$ | 0,000 | 0,002 | 0,006 | 0,040 | 0,070 | 0,114 | 0,156 | 0,164 |

| $J_j$ | 24—27 | 27—30 | 30—33 | 33—36 | 36—39 | 39—42 | 42—45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j^* = \frac{m_j}{n}$ | 0,180 | 0,122 | 0,108 | 0,030 | 0,004 | 0,004 | 0,000 |

$\tilde{x} = 22{,}85; \quad \tilde{D}[X] = 40{,}08.$

31.22. $\tilde{\sigma}_1^2$ и $\tilde{\sigma}_2^2$ являются несмещенными оценками дисперсии $\left(M\left[\tilde{\sigma}_1^2\right] = M\left[\tilde{\sigma}_2^2\right] = \sigma^2\right)$;

$D\left[\tilde{\sigma}_1^2\right] = \frac{2\sigma^4}{n-1}; \quad D\left[\tilde{\sigma}_2^2\right] = \frac{3n-4}{(n-1)^2}\sigma^4$, т. е. при любом $n$

$D\left[\tilde{\sigma}_1^2\right] < D\left[\tilde{\sigma}_2^2\right]$ (см. табл. 117).

*Таблица 117*

| $n$ | 3 | 5 | 7 | 10 | 15 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D\left[\tilde{\sigma}_1^2\right]}{D\left[\tilde{\sigma}_2^2\right]}$ | 0,80 | 0,73 | 0,71 | 0,69 | 0,68 | 0,67 |

## § 32. Доверительные вероятности и доверительные интервалы

32.1. (92,36 *м*; 107,64 *м*).

32.2. $\tilde{x} = 116\frac{1}{22}$ *м*; (115,53; 116,57 *м*).

32.3. 0,55, 0,34.

32.4. 1) $\tilde{x} = 10{,}57$ *м*; $\tilde{\sigma}_x = 2{,}05$; 2) 0,26; 3) 0,035

32.5. (5,249; 5,751 сек.); (1,523; 1,928 сек.).

32.6. (867,6; 873,0 *м/сек*).

32.7. Не менее 11 измерений.

32.8. (24 846; 25 154 *м*); (130,7; 294,9 *м*).

32.9. $(4,761\cdot 10^{-10};\ 4,805\cdot 10^{-10})$; $\tilde{x} = 4,783\cdot 10^{-10}$.

32.10. а) 420,75; 428,65 *м/сек*; (6,69; 12,70 *м/сек*); б) 0,61; 0,76.

32.11. Не менее трех дальномеров.

32.12. Не менее 15 измерений.

32.13. 0,44; 0,55; 0,71; 0,91.

32.14. См. табл. 118.

*Таблица 118*

| $n$ | 3 | 5 | 10 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma = 20$ *м* | $\tilde{x} \pm 18,98$ *м* | $\tilde{x} \pm 14,66$ *м* | $\tilde{x} \pm 10,37$ *м* | $\tilde{x} \pm 6,57$ *м* |
| $\tilde{\sigma} = 20$ *м* | $\tilde{x} \pm 33,72$ *м* | $\tilde{x} \pm 19,05$ *м* | $\tilde{x} \pm 11,16$ *м* | $\tilde{x} \pm 6,84$ *м* |

32.15. $m = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{C-A}{\sigma}\right)\right]; \quad n = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{n}\,\frac{B-C}{\sigma}\right)\right].$

## § 33. Критерии согласия

33.1. $\tilde{x} = 4,30$ *мк*; $\tilde{\sigma} = 9,71$ *мк*; $k = 6$; $\chi_q^2 = 7,19$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,301$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом нормального распределения не опровергается.

33.2. $\tilde{x} = 11,8$ *г*; $\tilde{\sigma} = 4,691$ *г*; $k = 2$; $\chi_q^2 = 1,16$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,568$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом нормального распределения не опровергается.

33.3. $\tilde{x} = 22,85$ *г*; $\tilde{\sigma} = 6,394$; $k = 6$; $\chi_q^2 = 5,939$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,436$. Гипотеза о согласии статистического распределения с законом нормального распределения не опровергается.

33.4. $M[Z] = 4,5$; $D[Z] = 8,25$, где $Z$ — значение случайной цифры; $M[X] = 22,5$; $D[X] = 41,25$; $\tilde{\sigma} = 6,423$; $D = 0,0405$; $\lambda = 0,6403$; $P(\lambda) = 0,8069$. Гипотеза о согласии статистического распределения с законом нормального распределения не опровергается.

33.5. $\chi_q^2 = 5,012$; $k = 9$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,831$. Гипотеза о том, что первые 800 десятичных знаков в числе $\pi$ подчиняются закону равномерного распределения не опровергается.

33.6. $D = 0,0138$; $\lambda = 0,3903$; $P(\lambda) = 0,9980$. Гипотеза о согласии распределения первых 800 десятичных знаков в числе $\pi$ с законом равномерного распределения не опровергается.

33.7. $\chi_q^2 = 4$; $k = 9$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,91$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения не опровергается.

33.8. $D = 0,041$; $\lambda = 0,5021$; $P(\lambda) = 0,9626$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения не опровергается.

33.9. $\chi_q^2 = 24,9$; $k = 9$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,0034$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения опровергается. Результаты наблюдений содержат систематическую ошибку.

33.10. $\tilde{x} = 8,75$; $\tilde{\sigma} = 16,85$; $\chi_{q\text{н}}^2 = 11,86$; $k_\text{н} = 5$; $P_\text{н}\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,0398$; для параметра $\delta$ закона распределения Симпсона получается подходящее значение $\tilde{\delta} = \sqrt{6}\,\tilde{\sigma} = 41,28$; $\chi_{qC}^2 = 17,06$; $k_C = 5$; $P_C\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,00402$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Симпсона опровергается, а гипотезу о согласии наблюдений с законом нормального распределения можно считать не опровергнутой.

33.11. $\tilde{\lambda} = 0,928$; $\chi_q^2 = 2,172$; $k = 4$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0,705$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Пуассона не опровергается.

33. 12. $\tilde{\lambda} = 1{,}54$; $\chi_q^2 = 7{,}953$; $k = 6$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}246$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Пуассона не опровергается.

33. 13. $\tilde{x} = 5$; $p = 0{,}5$; $\chi_q^2 = 3{,}156$; $k = 9$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}944$. Гипотеза о том, что при каждой из стрельб имелась постоянная вероятность попадения на 1 выстрел, не опровергается.

33. 14. $\chi_q^2 = 10{,}32$; $k = 7$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}176$. Гипотеза о согласии наблюдений с биномиальным законом распределения не опровергается.

33. 15. $\tilde{x} = 508{,}6$; $\tilde{\sigma} = 123{,}7$; $\chi_{q\text{н}}^2 = 2{,}95$; $k_\text{н} = 7$; $P_\text{н}\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}888$. Параметр $\tilde{\sigma}_M$ для закона распределения Максвелла определяется из формулы

$$\tilde{\sigma}_M = \frac{\tilde{x} - x_0}{1{,}596} = 193{,}4; \quad \chi_{qM}^2 = 1{,}383; \quad k_M = 7; \quad P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}986.$$

Вероятность гипотезы о согласии наблюдений с законом распределения Максвелла более высока, чем вероятность гипотезы о согласии наблюдений с законом нормального распределения.

33. 16. Интегральный закон распределения арктангенса

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)\,dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{z}{2};$$

$$D = 0{,}0125; \quad \lambda = 0{,}6166; \quad P(\lambda) = 0{,}842.$$

Гипотеза о согласии статистического распределения величин $z$ с законом распределения Коши и, следовательно, величин $y$ — с законом нормального распределения не опровергается.

33. 17. Дифференциальный закон распределения арксинуса $f(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}$;

$D = 0{,}0290$; $\lambda = 0{,}917$; $P(\lambda) = 0{,}370$. Гипотеза о том, что маятник совершает гармонические колебания, не опровергается.

33. 18. $\tilde{r} = 50{,}13$; $\tilde{\sigma} = \tilde{r}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} = 40{,}0$; $\chi_q^2 = 2{,}73$; $k = 8$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}95$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Рэлея не опровергается.

33. 19. $\tilde{x} = 2{,}8644$; $\tilde{\nu}_2 = 11{,}469$; $M[x] = k\tilde{\sigma}$; $\tilde{\sigma} = \sqrt{\dfrac{\tilde{\nu}_2}{1 + k^2}}$; $k$ — корень уравнения:

$$T(k) = \frac{\varphi(k) + 0{,}5k\Phi(k)}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\tilde{x}}{2\sqrt{\tilde{\nu}_2}};$$ $T(k) = 0{,}4229$; при $k = 1{,}2$ $T(k) = 0{,}4200$;

при $k = 1{,}3$ $T(k) = 0{,}4241$; $k = 1{,}271$; $M[x] = 2{,}662$; $\tilde{\sigma} = 2{,}0944$; $\chi_q^2 = 5{,}304$; $k = 9$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = 0{,}894$. Гипотеза о том, что $X$ есть абсолютное значение нормально распределенной величины, не опровергается.

33. 20. $\tilde{x} = 87{,}46$; $\tilde{\sigma} = 2{,}4712$;

$\tilde{\alpha} = 80{,}02$; $\tilde{\beta} = 94{,}90$;

$\chi_{q\text{н}}^2 \geqslant 500$; $k_\text{н} = 7$; $P_\text{н}\left(\chi^2 \geqslant \chi_{q\text{н}}^2\right) \approx 0$.

Дифференциальный закон распределения $\psi(x)$, представляющий композицию законов нормального распределения с параметрами $a = 0$ и $\tilde{\sigma}$ и равномерного распределения с параметрами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, имеет вид

$$\psi(x) = \frac{1}{14{,}88 \cdot 2}\left[\Phi\left(\frac{x - 80{,}02}{2{,}4712}\right) + \Phi\left(\frac{94{,}90 - x}{2{,}4712}\right)\right];$$

$$\chi_{q\psi}^2 = 2{,}949; \quad k_\psi = 6; \quad P\left(\chi^2 \geqslant \chi_{q\psi}^2\right) = 0{,}814.$$

Гипотеза о согласии наблюдений с законом нормального распределения опровергается. Гипотеза о согласии с композицией законов нормального и равномерного распределений не опровергается.

33. 21. $\tilde{x} = 115{,}3$; $\tilde{\sigma} = 21{,}43$; $\chi^2_{q\text{н}} = 10{,}20$; $k_\text{н} = 10$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi^2_{q\text{н}}\right) = 0{,}43$; $\tilde{\mu}_3 = 2046{,}3$; $\tilde{\mu}_4 = 61\,367 \cdot 10$; $\widetilde{\text{Sk}} = 0{,}2079$; $\widetilde{\text{Ex}} = -0{,}0912$.

Интегральный закон распределения, который определяется $A$-рядом Шарлье $F(z)$:

$$F(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) - 0{,}03465\varphi_2(z) - 0{,}0038\varphi_3(z),$$

где

$$z = \frac{x - 115{,}3}{21{,}43}; \quad \chi^2_{qШ} = 8{,}304; \quad k_Ш = 8; \quad P_Ш\left(\chi^2 \geqslant \chi^2_{qШ}\right) = 0{,}411.$$

Гипотезы о согласии наблюдений с законами нормального распределения и с законом распределения, который определяется $A$-рядом Шарлье, не опровергается. Закон распределения, определяемый $A$-рядом Шарлье, не улучшает существенно согласия наблюдений с теоретическим законом распределения.

33. 22. $\tilde{\mu}_3 = -221{,}12$; $\tilde{\mu}_4 = 15\,599 \cdot 10$;

$\widetilde{\text{Sk}} = -0{,}06961$; $\widetilde{\text{Ex}} = 0{,}3406$.

Интегральный закон распределения, определяемый $A$-рядом Шарлье

$$F(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) + 0{,}01160\varphi_2(z) + 0{,}01417\varphi_3(z),$$

где

$$z = \frac{c - 299773{,}85}{14{,}7}; \quad \chi^2_q = 17{,}25; \quad k = 6; \quad P\left(\chi^2 \geqslant \chi^2_q\right) = 0{,}0085.$$

Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения, определяемым $A$-рядом Шарлье, не улучшает согласия наблюдений с теоретическим законом распределения.

33. 23. $\tilde{\sigma}^2 = 0{,}1211$; $k = 2$; $\chi^2_q = 1{,}629$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi^2_q\right) = 0{,}59$. Гипотеза о согласии наблюденных значений $q_i$ с законом распределения $\chi^2$ и, следовательно, гипотеза об однородности ряда дисперсий не опровергается.

33. 24. $F^*(\eta_i) = \dfrac{k - \frac{1}{2}}{n}$; $D_\eta = 0{,}126$; $\lambda = 0{,}797$; $P(\lambda) = 0{,}549$.

Гипотеза о согласии наблюденных значений $\eta_i$ с законом распределения Стьюдента, а следовательно, и о согласии наблюденных значений $x$ с законом нормального распределения не опровергается.

33. 25. $\chi^2_q = 20{,}48$; $k = 2$; $P\left(\chi^2 \geqslant \chi^2_q\right) = 0{,}001$.

Гипотеза о независимости характера размеров от номера партии опровергается. Следует признать, что для второй партии изделий характерно систематическое занижение размеров.

## § 34. Обработка результатов наблюдений по способу наименьших квадратов

34. 1. $\tilde{h} = 0{,}609 + 0{,}1242E$; $M_{0,0} = 0{,}3896$; $M_{1,1} = 0{,}1156 \cdot 10^{-4}$; $\tilde{\sigma}^2 = 1{,}464$; $\tilde{\sigma}^2_{a_0} = 0{,}5704$; $\tilde{\sigma}^2_{a_1} = 1{,}69 \cdot 10^{-5}$.

34. 2. $\tilde{h} = 0{,}679 + 0{,}124E$; $\tilde{\sigma}^2 = 1{,}450$; $\tilde{\sigma}^2_{a_0} = 0{,}5639$; $\tilde{\sigma}^2_{a_1} = 1{,}672 \cdot 10^{-5}$.

Совпадение с результатами задачи 34. 1 вполне удовлетворительное. Точность результата в задаче 34. 2 выше, чем в задаче 34. 1, так как при решении задачи 34. 1 производилось большое количество вычислительных операций, в том числе вычитание близких по величине чисел.

34. 3. $\tilde{h} = 9{,}14 + 65{,}89t + 489{,}28t^2$; $\tilde{\sigma}^2 = 0{,}001245$; $\tilde{\sigma}_g = 1{,}177$ *см/сек*$^2$.

34. 4. $\tilde{h} = 65{,}021 - 5{,}1756P_{1,13}(x) \cdot 13 + 1{,}0873P_{2,13}(x) \cdot 13$, где $x = 30t - 1$, или $\tilde{h} = 9{,}133 + 65{,}895t + 489{,}28t^2$; $\tilde{\sigma}_g = 1{,}167$ *см/сек*$^2$.

34. 5. $\bar{y} = 0{,}8057 + 0{,}2004x - 0{,}1018x^2$; $\tilde{\sigma}^2 = 2{,}758 \cdot 10^{-4}$; $\tilde{\sigma}^2_{a_0} = 9{,}192 \cdot 10^{-5}$; $\tilde{\sigma}^2_{a_1} = 9{,}848 \cdot 10^{-6}$; $\tilde{\sigma}^2_{a_2} = 3{,}283 \cdot 10^{-6}$.

34. 6. $\bar{y} = 26{,}97 + 0{,}3012P_{1,16}(t) = 29{,}38 - 0{,}3012t$; $\bar{y} = 26{,}97 - 0{,}3012P_{1,16}(t) - 9{,}16 \cdot 10^{-4}P_{2,16}(t) + 0{,}01718P_{3,16}(t) = 29{,}82 - 0{,}7133t + 0{,}06782t^2 - 0{,}002864t^3$, где $P_{k,16}(t)$ — табличные значения полиномов Чебышева; для линейной зависимости: $\tilde{\sigma} = 0{,}3048$; при $\alpha = 0{,}90$ $0{,}2362 < \sigma < 0{,}4380$; для зависимости 3-й степени: $\tilde{\sigma} = 0{,}1212$; при $\alpha = 0{,}90$ $0{,}0924 < \sigma < 0{,}1800$.

34. 7. $\bar{y} = 21{,}09 + 5{,}954x$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 2{,}90$; $14{,}3 < M[a_0] < 27{,}9$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0{,}0889$; $5{,}75 < M[a_1] < 6{,}16$. Искомые доверительные границы см. в табл. 119

*Таблица 119*

| $x_i$ | 5 | 10 | 20 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| Нижняя граница $y_i$ | 44,0 | 73,5 | 132,1 | 248,4 | 364,1 |
| Верхняя граница $y_i$ | 57,8 | 87,7 | 148,2 | 270,0 | 392,6 |

34. 8. $\bar{y} = 0{,}3548 + 0{,}06574x + 0{,}00130x^2$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 0{,}0147$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0{,}0106$; $\tilde{\sigma}_{a_2} = 0{,}00156$.

34. 9. $\bar{y} = 1{,}1188 + \dfrac{8{,}9734}{x}$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 0{,}02316$; $1{,}065 < M[a_0] < 1{,}172$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 0{,}06157$; $8{,}831 < M[a_1] < 9{,}115$. Искомые доверительные границы см. в табл. 120.

*Таблица 120*

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Нижняя граница $y_i$ | 9,940 | 5,517 | 4,039 | 2,852 | 1,961 | 1,513 | 1,364 | 1,244 | 1,156 | 1,111 |
| Верхняя граница $y_i$ | 10,244 | 5,695 | 4,181 | 2,973 | 2,071 | 1.621 | 1,472 | 1,351 | 1,262 | 1,217 |

34. 10. $U = 100{,}8e^{-0{,}3127t}$; $89{,}97 < M[U_0] < 112{,}9$; $0{,}2935 < M[\alpha] < 0{,}3319$.

34. 11. $\delta_e = 204'{,}9 - \dfrac{34\,205}{v^2}$; $\tilde{\sigma}_{a_0} = 4'{,}36$; $\tilde{\sigma}_{a_1} = 504$.

34. 12. $p = 0{,}1822e^{-\frac{(x-117{,}25)^2}{2 \cdot 462{,}91}}$; $|\varepsilon_{max}| = 0{,}04633$; вычисление $p_0$ по формуле $p_0' = \dfrac{10}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ дает $p_0' = 0{,}1854$.

34. 13. Подобранное значение $\varepsilon' = 62°$; подбор осуществлен на основании уравнения $y = a' \sin(\omega t - \varepsilon')$, где

$$a_1' = \frac{|y_{0,05}| + |y_{0,45}| + |y_{0,85}|}{3} = 33;$$

подобранная зависимость имеет вид $y = 30{,}753 \sin(\omega t - 59°59')$; $|\bar{y} - y|_{max} = 18°{,}4$.

34. 14. $\bar{y} = 1{,}0892 - 1{,}2496\cos x + 2{,}0802\sin x + 0{,}9795\cos 2x + 0{,}4666\sin 2x$; $|\varepsilon_{max}| = 0{,}24$ при $x = 120°$.

# ГЛАВА VIII

## СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

### § 35. Общие свойства корреляционных функций и законов распределения случайных функций

35. 1. Обозначая закон распределения второго порядка для случайной функции $X(t)$ через $f(x_1, x_2/t_1, t_2)$, по определению $K_x(t_1, t_2)$, имеем $K_x(t_1, t_2) = \int\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) f(x_1, x_2/t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2$. Применение неравенства Буняковского дает $|K_x(t_1, t_2)|^2 \leqslant \int\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - \bar{x}_1)^2 f(x_1, x_2/t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2 \int\int_{-\infty}^{\infty}(x_2' - \bar{x}_2)^2 f(x_1', x_2'/t_1, t_2) \times$ $\times\, dx_1' dx_2' = \sigma^2_{x(t_1)}\sigma^2_{x(t_2)}$, что эквивалентно первому неравенству. Для доказательства второго неравенства достаточно рассмотреть очевидное соотношение $M\{|[X(t_1) - \bar{x}(t_1)] - [X(t_2) - \bar{x}(t_2)]|^2\} \geqslant 0$.

35. 2. Доказывается аналогично предыдущему.

35. 3. Следует из определения корреляционной функции.

35. 4. Так как $X(t) = \sum_{j=1}^{n}\Delta_j + c$, где $c$ — неслучайная постоянная, а $n$ — число скачков за время $t$, то $X(t)$ — нормальная,

$$\bar{x} = 0,\quad D[X(t)] = M[n\sigma^2] = at\sigma^2.$$

35. 5. Корреляционная функция $K_x(t)$ равна вероятности того, что за время $\tau$ произойдет четное число перемен знака за вычетом вероятности нечетного числа перемен знака, т. е. $K_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\tau)^{2n}}{(2n)!}e^{-a\tau} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-a\tau} = e^{-2a\tau}$.

35. 6. Так как $M[X(t)X(t+\tau)]$ отлично от 0 только в том случае, когда оба конца интервала $\tau$ попадают в один единичный интервал, вероятность чего равна 0 при $|\tau| > 1$ и $(1 - |\tau|)$ при $|\tau| \leqslant 1$, то при $|\tau| \leqslant 1$ $K_x(\tau) = (1 - |\tau|)M[X^2] = (1 - |\tau|)\int_0^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{\Gamma(x+1)} e^{-\lambda} dx = \lambda(1 - |\tau|)$. Следовательно,

$$K_x(\tau) = \begin{cases}\lambda(1 - |\tau|) & |\tau| \leqslant 1,\\ 0 & |\tau| > 1.\end{cases}$$

35. 7. Обозначая $\Theta_1 = \Theta(t_1)$, $\Theta_2 = \Theta(t_1 + \tau)$, для условного закона распределения $\Theta_2$ имеем $f(\theta_2/\theta_1 = 5^\circ) = \left.\frac{f(\theta_1, \theta_2)}{f(\theta_1)}\right|_{\theta_1 = 5^\circ}$, где $f(\theta_1, \theta_2)$ — нормальный закон распределения системы случайных величин с корреляционной матрицей

$$\begin{Vmatrix} K_\theta(0) & K_\theta(\tau)\\ K_\theta(\tau) & K_\theta(0)\end{Vmatrix}.$$

Подставляя условия задачи, получим

$$P = \int_{15}^{\infty} f(\theta_2/\theta_1 = 5^\circ)\,d\theta_2 = \frac{1}{2}[1 - \Phi(2{,}68)] = 0{,}0037.$$

35. 8. Обозначая углы крена в моменты $t$ и $t + \tau_0$ через $\Theta_1$ и $\Theta_2$, соответственно, а их закон распределения через $f(\theta_1, \theta_2)$, для условного закона распределения угла крена в момент второго измерения получим

$$f(\theta_2/-\theta_0 \leqslant \Theta_1 \leqslant \theta_0) = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta_1, \theta_2)\,d\theta_1}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1, \theta_2)\,d\theta_2\,d\theta_1}.$$

Искомая вероятность

$$P=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sigma_\theta\Phi\left(\frac{\theta_0}{\sigma_\theta}\right)}\int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0} e^{-\frac{\theta_2^2}{2\sigma_\theta^2}}\left[\Phi\left(\frac{\theta_0+k\theta_2}{\sigma_\theta}\right)+\Phi\left(\frac{\theta_0-k\theta_2}{\sigma_\theta}\right)\right]d\theta_2.$$

35. 9. Обозначая $X_1=\Theta(t)$, $X_2=\dot\Theta(t)$, $X_3=\Theta(t+\tau_0)$, для корреляционной матрицы системы $X_1$, $X_2$, $X_3$, получим

$$\|k_{jl}\|=\begin{Vmatrix} K_\theta(0) & 0 & K_\theta(\tau_0)\\ 0 & -\ddot K_\theta(0) & -\dot K_\theta(\tau_0)\\ K_\theta(\tau_0) & -\dot K_\theta(\tau_0) & K_\theta(0)\end{Vmatrix},$$

что после подстановки чисел дает

$$\|k_{jl}\|=\begin{Vmatrix} 36 & 0 & 36e^{-0,5}\\ 0 & 36\,(0,25^2+1,57^2) & 0\\ 36e^{-0,5} & 0 & 36\end{Vmatrix}.$$

Определяя по закону распределения $f(x_1, x_2, x_3)$ условный закон распределения

$$f(x_3/x_1=2,\ x_2>0)=\left.\frac{\int\limits_0^\infty f(x_1,\ x_2,\ x_3)\,dx_2}{\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_0^\infty f(x_1,\ x_2,\ x_3)\,dx_2\,dx_3}\right|_{x_1=2}$$

для искомой вероятности, получим

$$p=\int\limits_{-10}^{10} f(x_3/x_1=2,\ x_2>0)\,dx_3=0,958.$$

35. 10. $\bar y(t)=a(t)\,\bar x(t)+b(t);\quad K_y(t_1,\ t_2)=a^*(t_1)\,a(t_2)\,K_x(t_1,\ t_2).$

35. 11. $f(x)\,dx=\iint\limits_{x\leqslant a\cos\theta\leqslant x+dx} f_a(a)\,f_\theta(\theta)\,da\,d\theta;\quad f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$

35. 12. Вероятность того, что интервал $T$ будет заключен между $\tau$ и $\tau+d\tau$, равна вероятности того, что в интервале $(0,\ \tau)$ будет $n$ точек, а в интервале $(\tau,\ \tau+d\tau)$ — одна точка. Так как по условию эти события независимы, то

$$P\{\tau\leqslant T\leqslant\tau+d\tau\}=\frac{(a\tau)^n}{n!}\,e^{-a\tau}\,a\,d\tau,\quad\text{т. е.}\quad f(\tau)=\frac{a^{n+1}\tau^n}{n!}\,e^{-a\tau}.$$

35. 13. $f(u)=\dfrac{1}{15,8\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{498}}.$

## § 36. Линейные операции над случайными функциями

36. 1. Так как при $\tau=0$, $\dot K_x(\tau)$ не имеет разрыва, то

$$K_{\dot x}(\tau)=-\frac{d^2}{d\tau^2}\,K_x(\tau)=A\alpha^2e^{-\alpha|\tau|}(1-\alpha|\tau|).$$

36. 2. $K_y(\tau)=A\,(\alpha^2+\beta^2)\,e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau-\dfrac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right);$

$D[Y(t)]=K_y(0)=A\,(\alpha^2+\beta^2).$

36. 3. Пользуясь определением корреляционной функции связи, получим

$$R_{x\dot x}(\tau)=M\left\{[X^*(t)-\bar x^*]\,\frac{dX(t+\tau)}{d\tau}\right\}=\frac{d}{d\tau}\,M\,\{[X^*(t)-\bar x^*]\,[X(t+\tau)-\bar x]\}=$$
$$=\frac{d}{d\tau}\,K_x(\tau).$$

36. 4. Так как любая производная $K_x(\tau)$ непрерывна в нуле, то $X(t)$ дифференцируема любое число раз.

36. 5. Два раза, так как $\left.\frac{d^2}{d\tau^2}K_x(\tau)\right|_{\tau=0}$ и $\left.\frac{d^4}{d\tau^4}K_x(\tau)\right|_{\tau=0}$ существуют, а $\frac{d^6}{d\tau^6}K_x(\tau)$ терпит разрыв в нуле.

36. 6. Существует только 1-я производная, так как $\frac{d^2}{d\tau^2}K_x(\tau)$ существует при $\tau=0$, а $\frac{d^3}{d\tau^3}K_x(\tau)$ терпит разрыв в этой точке.

36. 7. $R_{x\dot{x}}(\tau)=\alpha^2\sigma_x^2(\tau-t_0)\,e^{-\alpha|\tau-t_0|}$.

36. 8. $D[Y(t)]=\sigma_x^2;\quad D[Z(t)]=\alpha^2\sigma_x^2$.

36. 9. $K_y(\tau)=2a^2\sigma_x^2\alpha^2e^{-\alpha^2\tau^2}(1-2\alpha^2\tau^2)$.

36. 10. Закон распределения $f(v)$ — нормальный с дисперсией $\sigma_v^2=A(\alpha^2+\beta^2)$.
$P=0{,}3085$.

36. 11. $\bar{z}(t)=\bar{x}(t)+\bar{y}(t);\ K_z(t_1,\ t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{yx}(t_1,t_2)$.

36. 12. $\bar{x}(t)=\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j(t);\quad K_x(t_1,t_2)=\sum_{j=1}^{n}K_{x_j}(t_1,t_2)+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{x_lx_j}(t_1,t_2)$.

36. 13 $K_y(\tau)=K_x(\tau)+\frac{d^2}{d\tau^2}K_x(\tau)+\frac{d^4}{d\tau^4}K_x(\tau)$.

36. 14. $$K_z(\tau)=\sigma_x^2e^{-\alpha|\tau|}\left\{1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2+\frac{2\alpha^2}{3}(\alpha^2\tau^2-\alpha|\tau|-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^4}{3}(\alpha^2\tau^2-5\alpha|\tau|+3)\right\}.$$

36. 15. Так как $K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_x(t_2'-t_1')\,dt_2'\,dt_1'$, то полагая $t_1=t_2=t$, переходя к новым переменным интегрирования и выполняя одно интегрирование, получим
$$D[Y(t)]=K_y(t,\ t)=2\int_0^t(t-\tau)K_x(\tau)\,d\tau.$$

36. 16 Решая задачу аналогично предыдущей, после преобразования двойного интеграла, получим $K_x(t_1,\ t_2)=\int_0^{t_2}(t_2-\tau)K_y(\tau)\,d\tau+\int_0^{t_1}(t_1-\tau)K_y(-\tau)\,d\tau-$
$$-\int_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)K_y(\tau)\,d\tau.$$

36. 17. $R_{xy}(t_1,\ t_2)=\int_0^{t_2}K_x(t_1,\ \xi)\,d\xi$.

36. 18. Так как $\tilde{j}=\frac{1}{T}\int_0^T J(t)\,dt$, то $D\left[\tilde{j}\right]=\frac{2A}{\alpha T}\left[1-\frac{1}{\alpha T}(1-e^{-\alpha T})\right]=$
$=\sigma_{\tilde{j}}^2=(0{,}86\cdot10^{-8})^2A^2$. Срединная ошибка $E_{\tilde{j}}=\rho\sqrt{2}\sigma_{\tilde{j}}=0{,}58\cdot10^{-8}A$.

36 19. $D[Y(20)]=1360$ *см*$^2$.

36. 20. $\bar{y}(t) = a_0\bar{x}(t) + a_1 \frac{d\bar{x}(t)}{dt} + b_1 \int\limits_0^t e^{-\lambda t_1}\bar{x}(t_1)\,dt_1 + c;$

$$K_y(t_1, t_2) = a_0^2 K_x(t_1, t_2) + a_0 a_1 \left[\frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right] +$$

$$+ a_1^2 \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + a_0 b_1 \left[\int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda t_1'} K_x(t_1', t_2)\,dt_1' + \int\limits_0^{t_2} e^{-\lambda t_2'} K_x(t_1, t_2')\,dt_2'\right] +$$

$$+ a_1 b_1 \left[\int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda t_1'} \frac{\partial K_x(t_1', t_2)}{\partial t_2}\,dt_1' + \int\limits_0^{t_2} e^{-\lambda t_2'} \frac{\partial K_x(t_1, t_2')}{\partial t_1}\,dt_2'\right] +$$

$$+ b_1^2 \int\limits_0^{t_2}\int\limits_0^{t_1} e^{-\lambda\left(t_1'+t_2'\right)} K_x(t_1', t_2')\,dt_1'\,dt_2'.$$

36. 21. $R_{yz}(t_1, t_2) = ac \frac{\partial K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + ad \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_2^2} +$

$$+ bc \frac{\partial^2 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} + bd \frac{\partial^3 K_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2^2}.$$

36. 22. Так как дисперсия $D[\vartheta(t)]$ мала, то $\sin\vartheta \approx \vartheta$,

$$D[\Delta V(t)] = 2g^2 \int\limits_0^t (t-\tau) K_\vartheta(\tau)\,d\tau = \frac{2g^2 A}{\alpha}\left[t - \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right],$$

что после подстановки числовых величин дает $\sigma_{\Delta v} = 1{,}86$ *м/сек.*

36. 23. Используя определение корреляционной функции как математическое ожидание произведения отклонений ординат случайной функции и формулы для моментов нормальных случайных величин, получим

$$K_x(\tau) = A^2 \ddot{K}_\theta(\tau) + B^2 K_\theta(\tau) + 2c^2 \ddot{K}^2(\tau) + 2AB\ddot{K}_\theta(\tau).$$

36. 24. $K_m(\tau) = 2a^2 K_\theta^2(\tau) + 2b^2 K_\psi^2(\tau) - c^2 K_\theta(\tau)\ddot{K}_\psi(\tau).$

36. 25. $K_y(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2}[1 + 2\alpha^2(1 - 2\alpha^2\tau^2)].$

36. 26. $R_{xy}(\tau) = -\frac{1}{3} A\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| - \alpha^2\tau^2).$

36. 27. $K_y(t_1, t_2) = a^*(t_1)\,a(t_2)\,K_x(\tau) + b_1^*(t_1)\,b(t_2) \frac{d^4 K_x(\tau)}{d\tau^4} +$

$$+ [a^*(t_1)\,b(t_2) + b^*(t_1)\,a(t_2)] \frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}.$$

36. 28. Не существует.

36. 29. а) Стационарна; б) не стационарна.

## § 37. Задачи о выбросах

37. 1. $\bar{\tau}_a = 10\pi[1 - \Phi(1)]\,e^{\frac{1}{2}} = 16{,}45$ сек.

37. 2. $D[V(t)] = 0{,}25$ *см²/сек²*.

37. 3. Число выбросов снизу вверх за уровень $a = 25°$ равно числу выбросов сверху вниз за уровень $a_1 = -25°$, следовательно, искомое число выбросов

$$2T\frac{1}{2\pi}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,e^{-\frac{a^2}{2A}} = 11{,}9 \text{ раза.}$$

37. 4. $\frac{\pi}{1,5} e^{0,9}\left[1-\Phi\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right]=0,91$ сек.

37. 5. Начиная с $t=\left(\sqrt{4\pi^2 p_0^2-\alpha^2}\right)^{-1}$.

37. 6. Задача сводится к определению числа выбросов случайной функции $\dot{X}(t)$ за уровни $\sqrt{\frac{w_0}{\kappa}}$ вверх и $-\sqrt{\frac{w_0}{\kappa}}$ (вниз). Ответ: $\frac{1}{\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, e^{-\frac{w_0}{2\kappa A}}$.

37. 7. Так как радиус кривизны $R=\frac{v}{\dot{\Psi}(t)}$, то чувствительный элемент будет доходить до упора, когда $\dot{\Psi}(t)$ выйдет за пределы полосы $\pm\frac{v}{R_0}$, что дает в единицу времени $\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\pi} e^{-\frac{v^2}{2A\left(\alpha^2+\beta^2\right)R_0^2}}\ \frac{1}{\text{сек.}}$.

37. 8. При $\bar{h}\geqslant 54,5$ *м.*

37. 9. $Q=\exp\left\{-\frac{\alpha T}{\pi} e^{-\frac{a^2}{2A}}\right\}$.

37. 10. Обозначив закон распределения системы нормальных величин $X(t)$, $\dot{X}(t)$ и $\ddot{X}(t)$ через $f(x,\ x_1,\ x_2)$, для искомого закона распределения получим

$$f(x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{0} f(x,\ 0,\ x_2)\,dx_2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x,\ 0,\ x_2)\,dx_2\,dx}.$$

Учитывая, что корреляционная матрица системы имеет вид

$$\|k_{jl}\|=\left\|\begin{matrix} K_x(0) & 0 & \ddot{K}_x(0) \\ 0 & -\ddot{K}_x(0) & 0 \\ \ddot{K}_x(0) & 0 & \ddot{\ddot{K}}_x(0) \end{matrix}\right\|,$$

после интегрирования получим

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi A}}\, e^{-\frac{x^2}{2A}}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2A}}\right)\right].$$

37. 11. $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$.

37. 12. Искомое число равно числу выбросов (в обе стороны) $\ddot{X}(t)$ за нулевой уровень и, следовательно, $\frac{T}{\pi}\cdot\frac{\sigma_{\dddot{x}}}{\sigma_{\ddot{x}}}=\frac{T\alpha}{\pi}\sqrt{10}$.

37. 13. $$\bar{n}=p=\frac{1}{8\pi^2\sqrt{\Delta_1 A_{55}}}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\Phi\left(\frac{A_{55}\sqrt{z_3 z_4}+A_{35}z_3+A_{45}z_4}{\sqrt{A_{55}\Delta_2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\Phi\left(\frac{A_{55}\sqrt{z_3 z_4}-A_{35}z_3-A_{45}z_4}{\sqrt{A_{55}\Delta_2}}\right)\right] z_3 z_4\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\Delta_2}\left[A_{33}z_3^2+A_{44}z_4^2+2A_{34}z_3 z_4-\frac{(A_{35}z_3+A_{45}z_4)^2}{A_{55}}\right]\right\}dz_3\,dz_4,$$

где

$$\Delta_1 = k_{11}k_{22} - k_{12}^2, \quad \Delta_2 = \left\| \begin{matrix} k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{34} & k_{44} & k_{45} \\ k_{35} & k_{45} & k_{55} \end{matrix} \right\|, \quad A_{jl}\ (j,\ l = 3,\ 4,\ 5)$$

алгебраические дополнения определителя $\Delta_2$, $k_{jl}$ $(j,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ 4)$

$$k_{13} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_1^3 d\omega_1\,d\omega_2; \qquad k_{22} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_2^2 d\omega_1\,d\omega_2;$$

$$k_{34} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta\left(\omega_1,\ \omega_2\right)\omega_1^2\omega_2^2\,d\omega_1\,d\omega_2; \qquad k_{33} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta\left(\omega_1,\ \omega_2\right)\omega_1^4\,d\omega_1\,d\omega_2;$$

$$k_{44} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta\left(\omega_1,\ \omega_2\right)\omega_2^4\,d\omega_1\,d\omega_2; \qquad k_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_1^2\,d\omega_1\,d\omega_2;$$

$$k_{12} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_1\omega_2\,d\omega_1\,d\omega_2; \qquad k_{14} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_1\omega_2^2\,d\omega_1\,d\omega_2;$$

$$k_{35} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_1^3\omega_2\,d\omega_1\,d\omega_2; \qquad k_{45} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\omega_2)\,\omega_1\,\omega_2^3\,d\omega_1\,d\omega_2;$$

$$k_{55} = \int_{-\infty}^{\infty}\int S_\zeta(\omega_1,\ \omega_2)\,\omega_1^2\omega_2^2\,d\omega_1\,d\omega_2.$$

37. 14. $\bar{n}$ равно плотности вероятности $p$ перемены знаков у $\zeta_x$ и $\zeta_y$ вблизи точки с координатами $x$, $y$, определяемой формулой

$$pdx\,dy = P\left\{\frac{\partial\zeta(x,\ y)}{\partial x} > 0,\ \frac{\partial\zeta(x+dx,\ y)}{\partial x} > 0,\ \frac{\partial\zeta(x,\ y)}{\partial y} > 0,\ \frac{\partial\zeta(x,\ y+dy)}{\partial y} < 0\right\} =$$

$$= P\left\{0 < \frac{\partial\zeta(x,\ y)}{\partial x} < -\frac{\partial^2\zeta(x,\ y)}{dx^2}dx;\quad 0 < \frac{\partial\zeta(x,\ y)}{\partial y} < -\frac{\partial^2\zeta(x,\ y)}{\partial y^2}dy\right\}.$$

Вероятность $pdxdy$ может быть вычислена, если учесть, что $K_\zeta(\xi,\ \eta)$ однозначно определяет закон распределения $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}$. Выполнив вычисления, получим

$$\bar{n} = p = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\frac{k_{33}k_{44} - k_{34}^2}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}}\left\{1 + \frac{k}{(1-k^2)^{1/2}} \times \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right]\right\},$$

где

$$k = -\frac{k_{24}}{k_{22}k_{44}},$$ а $k_{jl}$ см. ответ 37. 13.

## § 38. Спектральное разложение стационарных случайных функций

38. 1. $K(\tau) = 2a\dfrac{\sin b\tau}{\tau}$.

38. 2. $K(\tau) = 2c^2(2\cos\omega_0\tau - 1)\dfrac{\sin\omega_0\tau}{\tau}$.

38. 3. Обозначив $J(\alpha,\ \omega) = \dfrac{A}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau}\,d\tau = \dfrac{A\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$,

имеем $S(\omega) = J - \alpha\dfrac{\partial J}{\partial\alpha} = \dfrac{2A}{\pi}\dfrac{\alpha^3}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$.

38. 4. $S(\omega)=\dfrac{\sigma^2}{2\pi}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{2}}{\dfrac{\omega}{2}}\right)^2.$

38. 5. $S(\omega)=\dfrac{\alpha\sigma^2}{\pi}\cdot\dfrac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2}=\dfrac{\alpha\sigma^2}{\pi}\cdot\dfrac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2}=$

$$=\frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\cdot\frac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

38. 6. $S(\omega)=\dfrac{2\sigma^2}{\pi}\cdot\dfrac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2}=\dfrac{2\sigma^2}{\pi}\cdot\dfrac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2}=$

$$=\frac{2\sigma^2}{\pi}\cdot\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

38. 7. Решая задачу аналогично 38. 3, получим $S(\omega)=\dfrac{\sigma^2}{\pi}\cdot\dfrac{16\alpha^3\omega^4}{(\omega^2+\alpha^2)^4}.$

38. 8. $S(\omega)=\dfrac{2A\alpha\omega^2}{\pi\,[(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2]}.$

38. 9. Две производные.

38. 10. $S(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_j\alpha_j}{\omega^2+\alpha_j^2}.$

38. 11. $\dfrac{dS(\omega)}{d\omega}=\dfrac{2\alpha\sigma^2\omega}{\pi\,[(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]^2}\cdot\{4\beta^2(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)^2\}.$

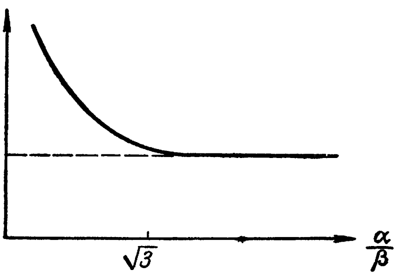


Рис. 41.

Следовательно, при $\omega=0$ всегда будет экстремум. Если при $\omega=0$ выражение в фигурной скобке отрицательно, то знак производной в этой точке меняется с «+» на «—»; в этой точке будет максимум и других максимумов не может быть. Таким образом, условием отсутствия максимумов, кроме нулевой точки, будет $\alpha^2>3\beta^2$. При $\alpha^2=3\beta^2 S(\omega)=\dfrac{\sigma^2\alpha}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega^2+4\beta^2}$, т. е. $S(\omega)$ тоже имеет только один максимум в начале координат. Таким образом: если $\alpha^2\geqslant 3\beta^2$, то имеется один максимум в начале; если $\alpha^2<3\beta^2$, то в начале будет минимум и появятся два максимума в точках $\omega=\pm\omega_2$, где $\omega_2=\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}\times\sqrt{2\sqrt{\beta^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

38. 12. При $\kappa<\sqrt{3}$ $\lambda=\dfrac{\kappa^2+1}{4(\sqrt{\kappa^2+1}-1)}$. При $\kappa\geqslant\sqrt{3}$ $\lambda=1$, т. е. график имеет вид, представленный схематически на рис. 41.

38. 13. Так как $S_{\dot x}(\omega)=\dfrac{a^2\omega^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$, то $D[\dot X(t)]=\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_{\dot x}(\omega)\,d\omega=\dfrac{\pi a^2}{2\alpha}.$

38. 14. Так как $S_x(\omega)=\dfrac{A}{2\alpha\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$, а $R_{x\dot x}(\tau)=\dfrac{d}{d\tau}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}S_x(\omega)\,d\omega$, то

$$S_{x\dot x}(\omega)=i\omega S_x(\omega)=\frac{iA\omega}{2\alpha\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}=-S_{\dot x x}(\omega).$$

38. 15. Так как $K_\delta(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\left[\kappa_1^2(1+\alpha|\tau|) + \alpha^2\kappa_2^2(1-\alpha|\tau|)\right]$, то преобразование Фурье дает $S_\delta(\omega) = \dfrac{2A\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}\left(\kappa_1^2 + \omega^2\kappa_2^2\right)$.

38. 16. Корреляционная функция связи $X(t)$ и $Y(t) = X(t+\tau_0)$ отличается от корреляционной функции $K_x(\tau)$ только тем, что $\tau$ заменено на $\tau+\tau_0$, т. е.

$$R_{xy} = K_x(\tau+\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau+\tau_0)} S_x(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}(\omega)\,d\omega,$$

т. е. $S_{xy}(\omega) = e^{i\omega\tau_0} S_x(\omega)$.

38. 17. $S_{xy}(\omega) = (i\omega)^k e^{i\omega\tau_0}[S_u(\omega) + S_{vu}(\omega)]$.

38. 18. Так как $K_z(\tau) = K_{\dot{x}}(\tau)K_{\dot{y}}(\tau) = A_1A_2\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right)\left(\alpha_2^2+\beta_2^2\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)|\tau|}\times$

$$\times\left(\cos\beta_1\tau - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right)\left(\cos\beta_2\tau - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right),$$

то обращение по Фурье дает

$$S_z(\omega) = A\left\{\frac{\alpha\cos\gamma' + (\omega-\beta')\sin\gamma'}{\alpha^2+(\omega-\beta')^2} - \frac{\alpha\cos\gamma' + (\omega+\beta')\sin\gamma'}{\alpha^2+(\omega+\beta')^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha\cos\gamma'' + (\omega-\beta'')\sin\gamma''}{\alpha^2+(\omega-\beta'')^2} - \frac{\alpha\cos\gamma'' + (\omega+\beta'')\sin\gamma''}{\alpha^2+(\omega+\beta'')^2}\right\},$$

где $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta' = \beta_1+\beta_2$, $\beta'' = \beta_1-\beta_2$, $\gamma' = \gamma_1+\gamma_2$, $\gamma'' = \gamma_1-\gamma_2$,

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad A = \frac{A_1A_2\beta_1^2\beta_2^2}{4\pi\cos^3\gamma_1\cos^3\gamma_2}.$$

38. 19. Так как $K_z(\tau) = K_x(\tau)K_y(\tau) + \bar{x}^2K_y(\tau) + \bar{y}^2K_x(\tau)$, то

$$S_z(\omega) = \frac{A_1A_2(\alpha_1+\alpha_2)}{\pi[\omega^2+(\alpha_1+\alpha_2)^2]} + \frac{\bar{x}^2A_2\alpha_2}{\pi\left(\omega^2+\alpha_2^2\right)} + \frac{\bar{y}^2A_1\alpha_1}{\pi\left(\omega^2+\omega_1^2\right)}.$$

38. 20. Так как $K_\Delta(\tau) = K_{\dot\psi}(\tau)K_{\dot\theta}(\tau)$, то преобразование Фурье дает

$$S_\Delta(\omega) = \frac{A_1A_2}{4\pi\cos\gamma_1\cos\gamma_2}\left\{\frac{\alpha\cos\gamma' - (\omega-\beta')\sin\gamma'}{\alpha^2+(\omega-\beta')^2} - \right.$$

$$- \frac{\alpha\cos\gamma' - (\omega+\beta')\sin\gamma'}{\alpha^2+(\omega+\beta')^2} + \frac{\alpha\cos\gamma'' - (\omega-\beta'')\sin\gamma''}{\alpha^2+(\omega-\beta'')^2} -$$

$$\left. - \frac{\alpha\cos\gamma'' - (\omega+\beta'')\sin\gamma''}{\alpha^2+(\omega+\beta'')^2}\right\},$$

где $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta' = \beta_1+\beta_2$, $\beta'' = \beta_1-\beta_2$, $\gamma' = \gamma_1+\gamma_2$, $\gamma'' = \gamma_1-\gamma_2$,

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

38. 21. Применяя общую формулу

$$S_y(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_1)^2 S_x(\omega-\omega_1)\,\omega_1^2 S_x(\omega_1)\,d\omega_1$$

и результаты задачи 38. 18, получим

$$S_y(\omega) = \frac{2\alpha A^2\beta^4}{\pi\cos^6\gamma}\left\{\frac{1}{\omega^2+4\alpha^2} + \frac{\operatorname{cosec}\gamma\sin 3\gamma\omega^2 - 4(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+4\alpha^2-4\beta^2)^2+64\alpha^2\beta^2}\right\}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\alpha}{\beta}.$$

38. 22. $S_y(\omega)=\frac{4A\alpha}{\pi}\left(\frac{A}{\omega^2+4\alpha^2}+\frac{\bar{x}^2}{\omega^2+\alpha^2}\right).$

38. 23. $S_y(\omega)=\omega^2\left(a^2\alpha\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}+a\bar{x}e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}}\right).$

38. 24. $S_\Delta(\omega)=S_\varphi(\omega)+\cos^4 q\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_\psi(\omega-\omega_1)S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1+$

$$+\frac{1}{8}\sin^2 2q\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_\theta(\omega-\omega_1)S_\theta(\omega_1^*)\,d\omega_1+\int\limits_{-\infty}^{\infty}S_\psi(\omega-\omega_1)S_\psi(\omega_1)\,d\omega_1\right],$$

где

$$S_\varphi(\omega)=\frac{2A_1\alpha_1}{\pi}\cdot\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{(\omega^2+\alpha_1^2+\beta_1^2)^2-4\beta_1^2\omega^2},$$

$$S_\theta(\omega)=\frac{2A_2\alpha_2}{\pi}\cdot\frac{\alpha_2^2+\beta_2^2}{(\omega^2+\alpha_2^2+\beta_2^2)^2-4\beta_2^2\omega^2},$$

$$S_\psi(\omega)=\frac{2A_3\alpha_3}{\pi}\cdot\frac{\alpha_3^2+\beta_3^2}{(\omega^2+\alpha_3^2+\beta_3^2)^2-4\beta_3^2\omega^2},$$

а все интегралы могут быть вычислены в конечном виде, однако окончательный результат получается громоздким, поэтому предпочтительнее в данном случае прибегнуть к численным методам интегрирования.

38. 25. Так как $K_y(\tau)=2K_{x^2}(\tau)+4\bar{x}^2K_x(\tau)$, то $S_y(\omega)=\frac{4\sigma_x^4}{\pi}\,\frac{\alpha}{\omega^2+4\alpha^2}+4\bar{x}^2\,\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$; имеется один максимум при $\omega=0$.

38. 26. $S_j(\omega)=\frac{\sigma^2\alpha}{\pi}\left[\frac{1-\cos\frac{\omega}{a}}{\omega^2}+\frac{1}{\omega\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)\sin\frac{\omega}{a}\right],$

где

$$\sigma^2=\frac{\Gamma j_0^2n^2}{\pi a^2}\left\{\frac{1}{3aT}\left[1+\frac{n(n-1)\Gamma}{2\pi}\right]-\frac{n^2\Gamma}{4\pi}\right\};$$

$$\alpha=\frac{j_0^2n^2\Gamma}{2\pi a^2T\sigma^2}\left[1+\frac{n(n-1)\Gamma}{2\pi}\right];$$

$$T=\frac{4\pi^2}{\Omega_1\Omega_2},\quad a=\frac{2(\Omega_1+\Omega_2)}{\gamma},$$

а $j_0$ — сила фототока, возникающего при попадании в просвет диафрагмы одного отверстия.

## § 39. Определение вероятностных характеристик случайных функций на выходе динамических систем

39. 1. $Y(t)$ — стационарная функция, следовательно, $S_y(\omega)=\frac{c^2}{\omega^2+\alpha^2}$, что после обращения по Фурье дает $K_y(\tau)=\frac{\pi c^2}{\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$.

39. 2. Так как $Y(t)$ стационарна, то находя математические ожидания обеих частей уравнения, получаем $\bar{y}=\frac{b_1}{a_1}\bar{x}$. Для спектральной плотности имеем

$$S_y(\omega)=\frac{(b_0^2\omega^2+b_1^2)S_x(\omega)}{(a_0^2\omega^2+a_1^2)}=\frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi}\cdot\frac{b_0^2\omega^2+b_1^2}{(a_0^2\omega^2+a_1^2)(\omega^2+\alpha^2)},$$

что после интегрирования в бесконечных пределах дает

$$D[Y(t)] = \frac{\sigma_x^2}{\alpha_0 a_1} \cdot \frac{a_1 b_0^2 \alpha + a_0 b_1^2}{a_1 + a_0 \alpha}.$$

39.3. $S_u(\omega) = \frac{n^4}{g^2} \cdot \frac{\omega^2 [S_{\dot{\eta}_c}(\omega) + c^2 \omega^2 S_\theta(\omega)]}{(\omega^2 - n^2)^2 + 4h^2\omega^2}$,

где

$$S_{\dot{\eta} c}(\omega) = \frac{2A_\eta \alpha_\eta \left(\alpha_\eta^2 + \beta_\eta^2\right)}{\pi \left[\left(\omega^2 - \beta_\eta^2 - \alpha_\eta^2\right)^2 + 4\alpha_\eta^2 \omega^2\right]};$$

$$S_\theta(\omega) = \frac{2A_\theta \alpha_\theta \left(\alpha_\theta^2 + \beta_\theta^2\right)}{\pi \left[\left(\omega^2 - \beta_\theta^2 - \alpha_\theta^2\right)^2 + 4\alpha_\theta^2 \omega^2\right]}.$$

39.4. Так как по условию задачи $\alpha(t)$ можно считать стационарной, то $S_\alpha(\omega) = \frac{\varepsilon^2 S_u(\omega)}{\omega^2 + \varepsilon^2}$, где $S_u(\omega)$ получено в задаче 39.3. Интегрируя $S_\alpha(\omega)$ в бесконечных пределах с помощью вычетов, получим $\sigma_\alpha^2 = 2{,}13 \cdot 10^{-6}$ рад.$^2$; $\sigma_\alpha = 1{,}46 \cdot 10^{-3}$ рад.

39.5. $S_y(\omega) = \frac{2\sigma^2 \alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}$,

где обозначено: $\alpha = h$, $\beta = \sqrt{\kappa^2 - h^2}$, $\sigma^2 = \frac{\pi c^2}{2h\kappa^2}$. Обращение $S_y(\omega)$ по Фурье дает $K_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$.

39.6. $S_\theta(\omega) = \frac{2\sigma_\theta^2 \alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{\pi[(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}$;

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\kappa T}{D}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{I}, \quad \beta = \frac{1}{2I}\sqrt{4ID - r^2}.$$

39.7. $S_y(\omega) = \frac{4(49\omega^6 + 25)}{\pi(\omega^2 + 1)^2(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)}$.

39.8. Не может, так как корни характеристического уравнения имеют положительные вещественные части и, следовательно, система, описываемая уравнением, неустойчива.

39.9. Так как $\zeta_c(t)$ стационарна, то

$$S_{\zeta_c}(\omega) = \frac{\omega_0^4 S_x(\omega)}{\left|-\omega^2 + 2hi\omega + \omega_0^2\right|^2},$$

а

$$D[\zeta_c(t)] = \frac{A\alpha(\alpha^2 + \beta^2)\omega_0^4}{[(\beta_1 - \beta)^2 + (\alpha_1 - \alpha)^2][(\beta_1 + \beta)^2 + [(\alpha_1 - \alpha)^2][(\beta_1 - \beta)^2 + (\alpha_1 + \alpha)^2][(\beta_1 + \beta^2) + (\alpha_1 + \alpha)^2]} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left(-\beta_1^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha_1^2\right)^2 + 4\left(\alpha^2\beta_1^2 - 2\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_1^4 - 2\alpha^2\alpha_1^2 + \alpha_1^2\beta^2\right.}{\alpha_1\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(-\beta^2 + \beta_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha^2\right)^2 + 4\left(\alpha_1^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 - 2\alpha_1^2\alpha^2 + \alpha^2\beta_1^2\right.}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \right\},$$

где $\alpha_1 = h$, $\beta_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$.

39. 10. Обозначив $\omega_0 = n$, $A = 3\cdot 10^{-4}g^2$, получим $D[\varepsilon(t)] = D[\zeta_c(t)]$, где $D[\zeta_c(t)]$. См. ответ задачи 39. 9 Подставляя числовые данные, получим: $D[\varepsilon(t)] = 0{,}06513$, $\sigma_\varepsilon = 0{,}255$.

39. 11. Формула является следствием общей формулы, данной во введении.

39. 12. Положив $\omega_0 = \kappa$, получим $D[\theta(t)] = D[\zeta_c(t)]$, где $D[\zeta_c(t)]$ дано в ответе задачи 39. 9.

39. 13. $S_{yx}(\omega) = \dfrac{\kappa^2 S_x(\omega)}{(\kappa^2-\omega^2)-2hi\omega}$, $R_{yx}(\tau) = \kappa^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\cdot\dfrac{S_x(\omega)}{(\kappa^2-\omega^2)-2hi\omega}\,d\omega.$

39. 14. Независимые частные интегралы однородного уравнения $e^{-t}$ и $e^{-7t}$, весовая функция $p(t) = \dfrac{1}{6}(e^{-t} - e^{-7t})$,

$$\frac{336}{\sqrt{\pi}}K_y(\tau) = 7e^{-\tau+\frac{1}{4\alpha^2}}\left\{1+\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau-\frac{1}{2\alpha}\right)\right]\right\} - e^{-7\tau+\frac{12,25}{\alpha^2}}\left\{1+\right.$$

$$\left.+\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau-\frac{3,5}{\alpha}\right)\right]\right\} + 7e^{\tau+\frac{1}{4\alpha^2}}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau+\frac{1}{2\alpha}\right)\right]\right\} - e^{7\tau+\frac{12,25}{\alpha^2}}\times$$

$$\times\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau+\frac{3,5}{\alpha}\right)\right]\right\}.$$

39. 15. $D[Y(t)-Z(t)] = D[Z(t)] + \displaystyle\int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty} p^*(\tau_1)\,p(\tau_2)\,K_x(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1 d\tau_2 -$

$$-2\,\mathrm{Re}\int_{0-}^{\infty} p^*(\tau)\,R_{xz}(\tau)\,d\tau,$$

где знак «—» в нижних пределах интегрирования обозначает, что точка 0 включена в область интегрирования.

39. 16. $D[Y(t)] = \dfrac{\sigma_x^2}{a(a+\alpha)}\left[t^2 + \dfrac{\alpha+2a}{2a^2(a+\alpha)}(1-2at)\right].$

39. 17. $\bar{\alpha} = \mathrm{const}$, значение которой можно принять равным нулю, выбрав соответствующим образом начало отсчета

$$D[\alpha(t)] = \frac{P^2\sigma_l^2}{H^2}\cdot\left(1+\frac{\bar{w}}{g}\right)^2 t^2 + \frac{2P^2\sigma_l^2}{g^2H^2}\int_0^t (t-\tau)\,K_w(\tau)\,d\tau.$$

39. 18. Заменяя $X(t)$ спектральным разложением, получим спектральное разложение для

$$Y_{\mathrm{I}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-\omega^2+2hi\omega+\kappa^2}\left[e^{-at+i\omega t} + \frac{-(\omega+\omega_0)+(a-h)i}{2\omega_0}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-(h-i\omega_0)t} + \frac{-(\omega_0-\omega)-(a-h)i}{2\omega_0}e^{-(h+i\omega_0)t}\right]d\Phi(\omega),$$

где $\omega_0 = \sqrt{\kappa^2-h^2}$.

Откуда следует

$$K_{y\mathrm{I}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_x(\omega)}{(\omega^2-\kappa^2)^2+4h^2\omega^2}\left\{e^{-a(t_1+t_2)+i\omega(t_2-t_1)} + \frac{1}{4\omega_0^2}e^{-h(t_1+t_2)}\times\right.$$

$$\times\left[[(\omega-\omega_0)^2+(a-h)^2]e^{-i\omega_0(t_2-t_1)} + [(\omega+\omega_0)^2+(a-h)^2]e^{i\omega_0(t_2-t_1)}+\right.$$

$$\left.+\left[\omega_0^2-(\omega-ai+hi)^2\right]e^{i\omega_0(t_1+t_2)} + \left[\omega_0^2-(\omega+a-hi)^2\right]e^{-i\omega_0(t_1+t_2)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\omega_0}e^{-(a+i\omega)t_1-ht_2}\left[(\omega-\omega_0+ai-hi)e^{-i\omega_0 t_2} + (-\omega-\omega_0+ai-\right.$$

$$\left.-hi)e^{i\omega_0 t_2}\right] + \frac{1}{2\omega_0}e^{-(a-i\omega)t_2-ht_1}\left[(\omega-\omega_0-ai+hi)e^{i\omega_0 t_1}+\right.$$

$$\left.\left.+(-\omega-\omega_0-ai+hi)e^{-i\omega_0 t_1}\right]\right\}d\omega,$$

что после подстановки выражения $S_x(\omega)$ и интегрирования с помощью вычетов дает окончательный результат в конечном виде

$$K_{yI}(t_1, t_2) = \sigma_x^2 \alpha \left\{ \frac{[e^{(\alpha-a) t_1} - M_1 \alpha - N_1][e^{-(\alpha+a) t_2} + M_2 \alpha - N_2]}{\alpha [a^2 + \kappa^2 - 2ha + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 (h-a)^2]} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Re} \frac{[e^{(\gamma-a-i\beta) t_1} + M_1 (i\beta - \gamma) - N_1][e^{(i\beta-\gamma-a) t_2} - M_2 (i\beta-\gamma) - N_2]}{2\gamma\beta [(\beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2) + 2i\beta\gamma](\beta + i\gamma)} \right\},$$

где

$$M_j = e^{-ht_j} \frac{\sin \beta t_j}{\beta}, \quad N_j = e^{-ht_j} \left( \cos \beta t_j + \frac{h-a}{\beta} \sin \beta t_j \right), \quad \gamma = |h-a|, \quad \beta = \omega_0.$$

39. 19. $$K_y(t_1, t_2) = \frac{\pi}{2} A e^{\frac{1}{2}\left(t_1^2 + t_2^2 + 2\alpha^2\right)} \left\{ [\Phi(t_1 - \alpha) + \Phi(\alpha)][\Phi(t_2 + \alpha) + \Phi(t_1 + \alpha)] - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2} \Phi(\xi + \alpha)\, d\xi \right\},$$

где $t_2 \geqslant t_1$.

39. 20. $$\bar{y}(t) = \frac{b}{a^2}\left(-1 + e^{\frac{a^2 t^2}{2}}\right), \quad K_y(t_1, t_2) = \frac{Ab^2 \sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a^2 + 2\alpha^2}} e^{\frac{a^2}{2}\left(t_1^2 + t_2^2\right)} \times$$

$$\times \int_0^{t_2} e^{-\frac{a^2 (a^2 + 4\alpha^2) t^2}{2(a^2 + 2\alpha^2)}} \left\{ \Phi\left[\frac{(a^2 + 2\alpha^2) t_1 - 2\alpha^2 t}{\sqrt{a^2 + 2\alpha^2}}\right] + \Phi\left[\frac{2\alpha^2 t}{\sqrt{a^2 + 2\alpha^2}}\right] \right\} dt.$$

39. 21. $$\bar{y}(t) = \frac{t_0}{t} y_0 + \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \bar{x}(\xi)\, \xi\, d\xi = 1 + \frac{t_0}{t}(y_0 - 1), \quad K_y(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{1}{t_1 t_2} \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} K_x(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{t_1 t_2} \left\{ \frac{4}{3\alpha^3}\left(t_1^3 - t_0^3\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left(t_1^4 - t_0^4\right) + \frac{2}{5\alpha}\left(t_1^5 - t_0^5\right) - \right.$$

$$- \left[ \left(\frac{t_1^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} t_1 + \frac{2}{\alpha^3}\right) e^{\alpha t_1} - \left(\frac{t_0^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^2} t_0 + \frac{2}{\alpha^3}\right) e^{\alpha t_0} \right] \left[ \left(\frac{t_1^2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} t_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{\alpha^3}\right) e^{-\alpha t_1} + \left(\frac{t_2^2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} t_2 + \frac{2}{\alpha^3}\right) e^{-\alpha t_2} \right] \Bigg\} \text{ при } t_2 \geqslant t_1.$$

39. 22. $$\bar{y}(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k,\, j=1}^{n} A_{jk} y_k(t) e_j + \int_0^t p(t, \xi)\, \bar{x}(\xi)\, d\xi; \quad K_y(t_1, t_2) =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_{k,\, j,\, l,\, m=1}^{n} A_{jm} A_{lk} y_m^*(t_1)\, y_k(t_2)\, \kappa_{jl} + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} p(t_1, \xi)\, p(t_2, \eta)\, K_x(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ — независимые частные интегралы соответствующего однородного уравнения,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(0), & y_2(0) & \ldots & y_n(0) \\ y_1'(0), & y_2'(0) & \ldots & y_n'(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0), & y_2^{(n-1)}(0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix},$$

а $A_{jl}$ — алгебраические дополнения этого определителя

39. 23. Так как решение системы дает $Y_2(t) = -2\int\limits_0^t [e^{-(t-t_1)} - e^{-2(t-t_1)}] X(t_1)\,dt_1 +$

$+ 2[Y_2(0) - Y_1(0)]e^{-t} + [2Y_1(0) - Y_2(0)]e^{-2t}$, а $K_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}$, то $D[Y_2(t)] =$

$= 4\left[\frac{2}{9} + (1-2t)e^{-2t} + \left(\frac{4}{3}t - \frac{2}{9}\right)e^{-3t} + e^{-4t}\right] + (2e^{-t} - e^{-2t})^2 D[Y_2(0)] +$

$+ (2e^{-2t} - 2e^{-t})^2 D[Y_1(0)] + 2(2e^{-t} - e^{-2t})(2e^{-2t} - 2e^{-t})\, k_{y_1(0),\,y_2(0)}$, что при $t =$

$= 0{,}5$ сек. дает $D[Y_2(0{,}5)] = 0{,}624$.

39. 24. $D[Y_1(t)] = \frac{3}{2}e^{-4t} + \frac{4}{9}\left(-t^2 + 4t - \frac{20}{3}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{5}{4}\right)e^{-2t} +$

$+ \left(\frac{1}{9}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{23}{108}\right)$; $D[Y_2(t)] = \frac{3}{2}e^{-4t} - \frac{8}{27}(3t^2 - 6t + 14)e^{-3t} +$

$+ (2t^2 - 4t + 1)e^{-2t} + \left(\frac{8}{9}t^2 - \frac{20}{9}t + \frac{89}{54}\right)$.

39. 25. $D[Y_1(0{,}5)] = 0{,}01078$; $D[Y_2(0{,}5)] = 0{,}00150$.

39. 26. Так как $Y(t)$ и $Z(t)$ по условию можно считать стационарными, то

$$S_y(\omega) = \frac{a^2\alpha\sigma_x^2\omega^2}{\pi b^2(\omega^2 + \alpha^2)\left(\omega^2 + \frac{1}{b^2}\right)};\quad S_z(\omega) = \frac{\alpha\sigma_x^2}{\pi b^2(\omega^2 + \alpha^2)\left(\omega^2 + \frac{1}{b^2}\right)},$$

что после интегрирования дает

$$D[Y(t)] = \frac{a^2\alpha\sigma_x^2}{b(\alpha b + 1)};\quad D[Z(t)] = \frac{\sigma_x^2}{\alpha b + 1}.$$

39. 27. Нормальный закон с параметрами $\bar{y} = 0$, $\sigma_y = 0{,}78$.

39. 28. $$S_x(\omega) = \frac{n^4}{g^2}\Bigg\{\omega^2 S_{\xi_c}(\omega) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_1^2 S_{\dot\eta_c}(\omega_1) S_\varphi(\omega - \omega_1)\,d\omega_1 + \varrho_x^2\Bigg[2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_1^2(\omega -$$

$$-\omega_1)^2 S_\varphi(\omega - \omega_1) S_\varphi(\omega_1)\,d\omega_1 + 3\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega - \omega_1)^2 S_\psi(\omega - \omega_1)\,\omega_1^2 S_\psi(\omega_1)\,d\omega_1 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_\psi(\omega - \omega_1)\,\omega_1^4 S_\psi(\omega_1)\,d\omega_1 + 4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega - \omega_1)\,\omega_1^3 S_\psi(\omega - \omega_1) S_\psi(\omega_1)\,d\omega_1\Bigg] +$$

$$+ \varrho_z^2\Bigg[\omega^4 S_\psi(\omega) + \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega - \omega_1)^4 S_\varphi(\omega - \omega_1) S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1 + 4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega - \omega_1)^2 \times$$

$$\times S_\varphi(\omega - \omega_1)\,\omega_1^2 S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1 + 4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega - \omega_1)^3\omega_1 S_\varphi(\omega - \omega_1) S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1\Bigg]\Bigg\};$$

$$S_y(\omega) = \frac{n^4}{g^2}\omega^2\left[S_{\dot\zeta_c}(\omega) + \varrho_x^2\omega^2 S_\psi(\omega)\right],\quad S_{xy}(\omega) = \frac{1}{g^2}n^4\varrho_x\varrho_z\omega^4 S_\psi(\omega).$$

39. 29. Для нахождения асимметрии и эксцесса нужно определить моменты $Y(t)$ до четвертого включительно. При вычислении этих моментов необходимо определить математические ожидания: $M[X^2(t_1)X^2(t_2)]$, $M[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)]$ и $M[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)X^2(t_4)]$, для определения которых нужно взять производные соответствующих порядков от характеристической функции системы нормальных случайных величин. Например,

$$M[X^2(t_1)X^2(t_2)] = \frac{\partial^4}{\partial s_1^2\partial s_2^2}\left(e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j,l=1}^{2}k_{jl}s_js_l}\right)\Bigg|_{s_j=0},$$

где $\|\kappa_{jl}\|$ — корреляционная матрица системы случайных величин: $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$ и $X(t_4)$. Выполнив вычисления, получаем $M[X^2(t_1)X^2(t_2)] = 2K_x^2(t_2-t_1)+K_x^2(0)$; $M\{[X(t_1)X(t_2)X(t_3)]^2\} = K_x^3(0)+2K_x^2(t_2-t_1)K_x(0)+ 2K_x^2(t_3-t_2)K_x(0)+2K_x^2(t_3-t_1)K_x(0)+8K_x(t_2-t_1)K_x(t_3-t_1)K_x(t_3-t_2)$;

$M\{[X(t_1)X(t_2)X(t_3)X(t_4)]^2\} = K_x^4(0)+2K_x^2(0)\left[K_x^2(t_3-t_4)+K_x^2(t_2-t_4)+ K_x^2(t_2-t_1)+K_x^2(t_3-t_2)+K_x^2(t_4-t_1)+K_x^2(t_3-t_1)\right]+4\left[K_x^2(t_2-t_1)\times K_x^2(t_4-t_3)+K_x^2(t_3-t_1)K_x^2(t_4-t_2)+K_x^2(t_4-t_1)K_x^2(t_3-t_2)\right]+8K_x(0)[K_x(t_3-t_2)\times K_x(t_4-t_2)K_x(t_4-t_3)+K_x(t_1-t_3)K_x(t_1-t_4)K_x(t_4-t_3)+K_x(t_2-t_1)\times K_x(t_2-t_4)K_x(t_4-t_1)+K_x(t_3-t_1)K_x(t_3-t_2)K_x(t_2-t_1)]+16[K_x(t_1-t_2)\times K_x(t_1-t_3)K_x(t_2-t_4)K_x(t_3-t_4)+K_x(t_2-t_1)K_x(t_1-t_4)K_x(t_2-t_3)\times K_x(t_3-t_4)+K_x(t_1-t_3)K_x(t_1-t_4)K_x(t_2-t_3)K_x(t_2-t_4)]$.

Подставляя полученные выражения в общие формулы для моментов решения дифференциального уравнения, получим:

$$\mathrm{Sk}=\frac{2}{\kappa+\alpha}\sqrt{2\kappa(\kappa+2\alpha)};\quad \mathrm{Ex}=3\left[\frac{15\kappa^2+25\kappa\alpha+2\alpha^2}{(\kappa+\alpha)(3\kappa+2\alpha)}-1\right].$$

39.30. При $\tau\geqslant 0$ $R_{yz}(\tau)=\dfrac{2\pi(\kappa_1\kappa_2 c)^2}{\omega_2}e^{-h_2\tau}\times$

$$\times\frac{2\omega_2(h_1+h_2)\cos\omega_2\tau-\left[\omega_2^2-\omega_1^2-(h_1+h_2)^2\right]\sin\omega\tau}{[(\omega_2-\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2][(\omega_2+\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2]};\text{ при } \tau\leqslant 0$$

$$R_{yz}(\tau)=\frac{2\pi(\kappa_1\kappa_2 c)^2}{\omega_1}e^{h_1\tau}\,\frac{2\omega_1(h_1+h_2)\cos\omega_1\tau+\left[\omega_2^2-\omega_1^2+(h_1+h_2)^2\right]\sin\omega_1\tau}{[(\omega_2-\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2][(\omega_2+\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2]},$$

$\omega_1^2=\kappa_1^2-h_1^2$, $\omega_2^2=\kappa_2^2-h_2^2$.

## § 40. Оптимальные динамические системы

40.1. Определяя $K_x(\tau)$ как корреляционную функцию суммы связанных случайных функций и обращая полученное равенство по Фурье, получим $S_x(\omega)=S_u(\omega)+ S_v(\omega)+S_{uv}(\omega)+S^*_{uv}(\omega)$.

40.2. $S_{xz}(\omega)=i\omega\,[S_u(\omega)+S_{vu}(\omega)]$.

40.3. $L(i\omega)=i\omega e^{-i\omega\tau}$; $D[\varepsilon(t)]=0$

40.4. $$L(i\omega)=\frac{i\alpha^2}{a^2(\omega^2+\beta^2)^2+b^2(\omega^2+\alpha^2)^2}\left\{\omega(\omega^2+\beta^2)^2e^{-i\omega\tau}-\frac{(\omega-i\alpha)^2(\omega-i\beta)^2}{2m}\times\right.$$
$$\times\left[(m-in)\left(\frac{m-in+i\beta}{m-in-i\alpha}\right)^2e^{-(n+im)\tau}(\omega+m+in)+(m+in)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{m+in-i\beta}{m+in+i\alpha}\right)^2e^{-(n-im)\tau}(\omega-m+in)\right]\right\},$$

где

$$m=\sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}-\mu}{2}},\quad n=\sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}+\mu}{2}},\quad \mu=\frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2+b^2},$$
$$\nu=\frac{ab\,|\beta^2-\alpha^2|}{a^2+b^2}.$$

40.5. $L(i\omega)=\dfrac{a^2}{c^2}\cdot\dfrac{(\alpha+\beta)(\omega-i\beta)}{(\alpha+d)(\omega-id)}$,

где

$$c=\sqrt{a^2+b^2},\quad d=\frac{1}{c}\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$$

40. 6. $D[\varepsilon(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |N(i\omega)|^2 S_u(\omega)\,d\omega - \int\limits_{-\infty}^{\infty} |L(i\omega)|^2 [S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + + S_{uv}^*(\omega)]\,d\omega$

40. 7. $$L(i\omega) = \frac{i\alpha^2}{2mc^2}\left\{\frac{m+in}{[m+i(n+n_1)]^2 - m_1^2}\cdot\frac{\omega+m-in}{(\omega-m_1-in_1)(\omega+m_1-in_1)} - \right.$$
$$\left. - \frac{-m+in}{[m-i(n+n_1)]^2 - m_1^2}\cdot\frac{\omega-m-in}{(\omega-m_1-in_1)(\omega+m_1-in_1)}\right\},$$

где

$$m = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4}+\beta^2}; \qquad n = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4}-\beta^2};$$
$$m_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4+\frac{\alpha^2}{4c^2}}+\beta^2}; \qquad n_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4+\frac{\alpha^2}{4c^2}}-\beta^2};$$
$$D[\varepsilon(t)] = \frac{\pi\alpha^2}{2n} - \frac{\alpha^4\pi}{2m^2c^2}\left[\frac{|A|^2}{n} - \mathrm{Im}\left(\frac{A^2}{m+in}\right)\right];$$

$$A = \frac{m+in}{\left[m^2-m_1^2-(n+n_1)^2\right]+2im(n+n_1)}.$$

40. 8. $L(i\omega) = e^{-\alpha\tau}$.

40. 9. $L(i\omega) = e^{-\tau}[i\omega\tau + (1+\tau)]$.

40. 10. $$L(i\omega) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega - i\alpha}\left\{\omega\left[\cos\beta\tau - \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\sin\beta\tau\right] + i[(2\beta-\alpha)\sin\beta\tau - \alpha\cos\beta\tau]\right\};$$
$$D[\varepsilon(t)] = \frac{\pi a^2}{2\beta}\left\{\frac{(\alpha^2+2\beta^2)}{2\beta^2} - e^{-2\beta\tau}\left[\cos\beta\tau - \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\sin\beta\tau\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}e^{-2\beta\tau}\left[\cos\beta\tau + \left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)\sin\beta\tau\right]^2\right\}.$$

40. 11. $$L(i\omega) = \frac{a^2(\alpha+\beta)}{c^2(d+\alpha)}e^{-\alpha\tau}\frac{\omega-i\beta}{\omega-id},$$
где
$$c^2 = a^2+b^2, \quad d^2 = \frac{a^2\beta^2+b^2d^2}{c^2}.$$

40. 12. $$L(i\omega) = \frac{c^2}{a^2(\omega^2+b^2)}\left\{(\omega^2+\beta^2)e^{-i\omega\tau_0} - \frac{(b-\beta)}{(\alpha+b)}e^{-b\tau_0}(\omega-i\alpha)(\omega-i\beta)\right\},$$
где
$$a^2 = \frac{1}{\pi}\left(\alpha\sigma_u^2+\beta\sigma_v^2\right); \quad b^2 = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\alpha\beta}{\pi}\left(\beta\sigma_u^2+\alpha\sigma_v^2\right); \quad c^2 = \frac{\alpha\sigma_u^2}{\pi}.$$

40. 13. $L(i\omega) = e^{-\alpha\tau}\left(\cos\alpha\tau + \sin\alpha\tau + i\frac{\omega}{\alpha}\sin\alpha\tau\right)$.

40. 14. $$L(i\omega) = \frac{1}{2\beta(\omega-i\gamma)}e^{-\alpha\tau_0}\{e^{-i\beta\tau_0}[\beta - i(\alpha-\gamma)](\omega-\beta-i\alpha) +$$
$$+ e^{i\beta\tau_0}[\beta + i(\alpha-\gamma)](\omega+\beta-i\alpha)\};$$
$$D[\varepsilon(t)] = \left[n_1^2+n_2^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]\sigma_\theta^2 - 2a^2n_2^2\pi\left[\frac{1}{\alpha}|A|^2 - \mathrm{Im}\left(\frac{A^2}{\beta+i\alpha}\right)\right],$$

где

$$a^2 = \frac{2\sigma_\theta^2}{\pi}\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)n_2^2, \qquad A = \frac{1}{2\beta}e^{-(\alpha-i\beta)\tau_0}(\beta+i\alpha-i\gamma), \qquad \gamma = \frac{n_1}{n_2}.$$

40. 15. Искомая величина характеризуется средней квадратической ошибкой оптимальной динамической системы, равной соответственно: 1,67, 0,738, 0,0627 *м/сек* ($\sigma_\varepsilon = 2\sigma_v \sqrt{\frac{6\alpha}{T(12+6\alpha T+\alpha^2T^2)}}$).

40. 16. $D[\varepsilon(t)] = 4\sigma_v^2\alpha^2 d$,

где

$$d = \frac{1}{4+4\gamma+\gamma^2+\frac{1}{12}\gamma^3}, \quad \gamma = \alpha T,$$ что дает для $\sigma_\varepsilon$: 1,62, 0,829, 0,0846 *м/сек.*

40. 17. $$D[\varepsilon(t)] = \sigma_\theta^2\left(\alpha^2+\beta^2\right) - \frac{\pi\kappa_1^4}{a^2}\left\{\frac{c_1^2}{\alpha_v} + \frac{2|c_2|^2}{\alpha} + \frac{2c_1}{\beta^2+(\alpha+\alpha_v)^2} \times\right.$$

$$\left.\times\,[\beta b' - a'(\alpha+\alpha_v)]\right\},$$

где

$$a^2 = \frac{\sigma_v^2\alpha_v}{\pi}, \qquad \kappa^2 = \frac{2\sigma_\theta^2\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\sigma_v^2\alpha_v}, \qquad \kappa_1^2 = \sigma_v^2\alpha_v\kappa^2;$$

$$c_1 = -\frac{\alpha_v}{(\alpha_v+\alpha_1)(\alpha_v+\beta_1)[\beta^2+(\alpha_v-\alpha)^2]};$$

$$c_2 = \frac{-\alpha+i\beta}{2\beta(\beta+i\alpha+i\alpha_1)(\beta+i\alpha+i\beta_1)(\beta+i\alpha-i\alpha_v)} = a'+ib';$$

$$\alpha_1^2 = \alpha^2-\beta^2+\frac{\kappa^2}{2}+\sqrt{\left(\alpha^2-\beta^2+\frac{\kappa^2}{2}\right)^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-\kappa^2\alpha_v^2};$$

$$\beta_1^2 = \alpha^2-\beta^2+\frac{\kappa^2}{2}-\sqrt{\left(\alpha^2-\beta^2+\frac{\kappa^2}{2}\right)^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-\kappa^2\alpha_v^2}.$$

40. 18. $$L(i\omega) = \frac{(\omega^2+\alpha^2)^2}{4\alpha^3}\left\{\frac{\beta}{\alpha+i\omega}+\frac{\gamma}{(\alpha+i\omega)^2}+\frac{\lambda_1}{i\omega}-\frac{\lambda_2}{\omega^2}-\right.$$

$$\left.-e^{-i\omega T}\left[e^{-\alpha T}\left(\frac{\beta+\gamma T}{\alpha+i\omega}+\frac{\gamma}{(\alpha+i\omega)^2}\right)+\frac{\lambda_1+\lambda_2T}{i\omega}-\frac{\lambda_2}{\omega^2}\right]\right\}-$$

$$-\frac{(\omega-i\alpha)^2}{4\alpha^3}[3\alpha\beta-\gamma+2\alpha\lambda_1-\lambda_2-i\omega(\beta+\lambda_1)]-\frac{(\omega+i\alpha)^2}{4\alpha^3}e^{-i\omega T}\times$$

$$\times\left\{e^{-\alpha T}[\alpha(\beta+\gamma T)+\gamma]+2\alpha(\lambda_1+\lambda_2T)+\lambda_2+i\omega[(\beta+\gamma T)e^{-\alpha T}+(\lambda_1+\lambda_2T)]\right\},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{4(\mu_1-\beta)}{4+\alpha T}-\frac{T}{2}\lambda_2 = -0{,}015202\ \frac{1}{\text{сек.}};$$

$$\lambda_2 = -\frac{4\left[\alpha^2\mu_2-\alpha\beta+\gamma+\frac{\alpha^2T}{2}(\mu_1-\beta)\right]}{\frac{1}{12}\alpha^3T^3+\alpha^2T^2+4\alpha T+4} = -0{,}0112\ \frac{1}{\text{сек.}};$$

$$\mu_1 = 1;\quad \mu_2 = \tau_0;\quad \beta = (1+\alpha\tau_0)e^{-\alpha\tau_0};\quad \gamma = \alpha e^{-\alpha\tau_0};$$

$$D[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2\left[1+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2-\frac{\beta}{\alpha}(2\alpha\beta-2\gamma+\alpha\lambda_1-\lambda_2)-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma}{\alpha^2}(\gamma+\lambda_2)\right] = 0{,}4525.$$

40. 19. Общая формула для $L(i\omega)$ та же, что и в предыдущей задаче, но $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\beta = -\alpha^2\tau_0 e^{-\alpha\tau_0}$, $\gamma = -\alpha^2 e^{-\alpha\tau_0}$, $\lambda_1 = 4{,}58\cdot 10^{-3}$, $\lambda_2 = -2{,}54\cdot 10^{-4}$,
$D[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2\left[\alpha^2 + \lambda_2\mu_2 - \frac{\beta}{\alpha}(2\alpha\beta - 2\gamma + \alpha\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{\gamma}{\alpha^2}(\gamma + \lambda_2)\right] = 0{,}0110\frac{1}{\text{сек.}^2}$.

40. 20. $l(\tau) = \delta(\tau)$, $D[\varepsilon(t)] = 0$.

40. 21. Для первой системы $L(i\omega) = [(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2]\left\{\left[\frac{\lambda_1}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} + \frac{\lambda_3 + i\lambda_4}{2(\Omega - \omega)} + \frac{\lambda_3 - i\lambda_4}{2(\Omega + \omega)}\right] - e^{-i\omega T}\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 T}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} + \frac{\lambda_3 + i\lambda_4}{2(\Omega - \omega)}e^{i\Omega T} + \frac{\lambda_3 - i\lambda_4}{2(\Omega + \omega)}e^{-i\Omega T}\right]\right\} - [\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - 2i\alpha\omega]\,[2\alpha(\lambda_1 + \lambda_4) - \lambda_2 - \lambda_3\Omega - i(\lambda_1 + \lambda_4)\omega] - e^{-i\omega T}[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + 2i\alpha\omega]\,[2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2 T + \lambda_3\sin\Omega T + \lambda_4\cos\Omega T) + \lambda_2 + \lambda_3\Omega\cos\Omega T - \lambda_4\Omega\sin\Omega T + i\omega(\lambda_1 + \lambda_2 T + \lambda_3\sin\Omega T + \lambda_4\cos\Omega T)]$,
где постоянные $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ и $\lambda_4$ определяются системой: $\lambda_1 + 10\lambda_2 + 0{,}1244\lambda_3 + 0{,}9903\lambda_4 = 0{,}000578$; $\lambda_1 + 13{,}4034\lambda_2 + 0{,}1728\lambda_3 + 0{,}9620\lambda_4 = 0$; $\lambda_1 - 0{,}8752\lambda_2 + 0{,}1657\lambda_3 + 0{,}9837\lambda_4 = 0$; $\lambda_1 + 10{,}1831\lambda_2 + 0{,}1236\lambda_3 + 0{,}9889\lambda_4 = 0{,}000584$, которая имеет решение: $\lambda_1 = -0{,}0018$; $\lambda_2 = 0{,}000011$, $\lambda_3 = -0{,}0106$, $\lambda_4 = 0{,}0036$. Дисперсия для оптимальной системы первого типа $D[\varepsilon(t)] = 0{,}135\cdot 10^{-4}$. Для второй системы вид $L(i\omega)$ сохраняется тот же, но $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а $\lambda_3$ и $\lambda_4$ определяются уравнениями: $\lambda_3 + 5{,}937\lambda_4 = 0$; $\lambda_3 + 8{,}003\lambda_4 = 0{,}0047$, что дает $\lambda_3 = -0{,}0136$; $\lambda_4 = 0{,}0023$. Дисперсия для этой системы $D[\varepsilon(t)] = 0{,}266\cdot 10^{-4}$.

40. 22. $a = e^{-\alpha|\tau_0|}$; $D[\varepsilon(t)] = \left(1 - e^{-2\alpha|\tau_0|}\right)\sigma_x^2$.

40. 23. $a = e^{-\alpha\tau}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\right)$; $b = \frac{1}{\beta}e^{-\alpha\tau}\sin\beta\tau$; $D[\varepsilon(t)] = \sigma_x^2\left[1 - e^{-2\alpha\tau}\left(1 + 2\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\cos\beta\tau + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\beta\tau\right)\right]$.

40. 24. $a = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}e^{-\alpha\tau_0}$; $D[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2\left(1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}e^{-2\alpha\tau_0}\right)$.

40. 25. $a = -\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta}e^{-\alpha\tau_0}\sin\beta\tau_0 = -0{,}09721\frac{1}{\text{сек.}}$; $b = e^{-\alpha\tau_0}\left(\cos\beta\tau_0 - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau_0\right) = 0{,}9736$; $c = 0$; $D[\varepsilon(t)] = 0{,}404$ град²/сек.².

40. 26. $a = e^{-\alpha\tau_0}\left(\cos\beta\tau_0 + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau_0\right) = 0{,}99$; $b = \frac{1}{\beta}e^{-\alpha\tau_0}\sin\beta\tau_0 = 0{,}20$ сек.; $c = 0$.

## § 41. Метод огибающих

41. 1. $K_a(\tau) = \sigma_x^2\left[2\mathbf{E}(1 - p^2) - p^2\mathbf{K}(1 - p^2) - \frac{\pi}{2}\right]$,
где

$$p^2 = 1 - k^2(\tau) - r^2(\tau);\quad k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|};\quad r(\tau) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\tau}{\omega^2 + \alpha^2}d\omega = \frac{1}{\pi}[e^{-\alpha\tau}\,\mathrm{Ei}(\alpha\tau) - e^{\alpha\tau}\,\mathrm{Ei}(-\alpha\tau)];$$

$\mathrm{Ei}(x)$ — обозначение интегральной показательной функции.

41.2 Так как $S_x(\omega) = \sigma_x^2 \dfrac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}$, то $\omega_1 = \dfrac{2\alpha}{\pi}$, $\omega_2 = \alpha$, $P\{\dot{\Phi} \geqslant 0\} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2}{\pi}\right) = 0{,}818$, $P\{\dot{\Phi} \leqslant 0\} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right) = 0{,}182$, т. е. не зависят от $\alpha$.

41.3. $P\{\dot{\Phi} \geqslant 0\} = \dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{1}{\pi\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)\right]$;

$$P\{\dot{\Phi} \leqslant 0\} = \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{\pi\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)\right].$$

41.4. $P = 0{,}5$ и не зависит от $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

41.5. $$f(\dot{\varphi}) = \frac{\alpha^2\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)}{2\left[\left(\dot{\varphi}-\frac{2\alpha}{\pi}\right)^2+\alpha^2\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)\right]^{3/2}}.$$

41.6. Фаза распределена равномерно в интервале $(0,2\pi)$; скорость изменения фазы равновероятна в интервале $(-\infty, \infty)$, так как процесс недифференцируем

41.7. $$f(\dot{\varphi}) = \frac{(\alpha^2+\beta^2)\left[1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)^2\right]}{2\left\{\left[\dot{\varphi}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\pi\beta}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)\right]^2+(\alpha^2+\beta^2)\times\left[1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\pi^2\beta^2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)^2\right]\right\}^{3/2}}.$$

41.8. $$f(a, \dot{a}) = \frac{a}{\alpha\sigma_x^3\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}\left[a^2+\frac{\dot{a}^2}{\alpha^2\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)}\right]}.$$

41.9 Так как $k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$; $k(2) = 0{,}982$,

$$r(2) = 2\int_0^\infty \frac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}\sin 2\omega\, d\omega = \frac{1}{\pi}[1{,}2e^{-0{,}2}\,\mathrm{Ei}(0{,}2) - 0{,}8\,\mathrm{Ei}(-0{,}2)] = 0{,}122;$$

$$f(a_2/a_1 = \sigma_x) = \frac{48{,}08\cdot a_2}{\sigma_x^2}\exp\left\{-\frac{24{,}04a_2^2}{\sigma_x^2}-23{,}2\right\} I_0\left(47{,}56\frac{a_2}{\sigma_x}\right).$$

41.10. Так как $\Delta^2 = \omega_2^2 - \omega_1^2 = (\alpha^2+\beta^2)\left[1-\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)}{\pi^2\beta^2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)^2\right] = 0{,}0089$, $\dfrac{\Delta}{\omega_2} = 0{,}0135 \ll 1$, то пригодна приближенная формула

$$f(\tau) \approx \frac{4{,}45\pi\cdot 10^{-3}}{\tau^2\left[\left(\frac{\pi}{\tau}-0{,}693\right)^2+8{,}9\cdot 10^{-3}\right]^{3/2}}.$$

41.11. $$f(\tau) = \frac{0{,}041\pi}{\tau^2\left[\left(\frac{\pi}{\tau}-0{,}647\right)^2+0{,}0814\right]^{3/2}}.$$

41.12. Искомое среднее число выбросов равно вероятности произойти выбросу в единицу времени $p = 2\sqrt{\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\pi}}\,e^{-2} = 0{,}083\alpha\,\dfrac{1}{\text{сек.}}$.

41.13. $0{,}0424\alpha\,\dfrac{1}{\text{сек.}}$.

41.14. $f(\varphi_2/\varphi_1)=\frac{p^2}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-\varkappa^2}+\frac{\varkappa}{(1-\varkappa^2)^{3/2}}\left[\frac{\pi}{2}+\arcsin\varkappa\right]\right\}$,

где

$$p^2=1-k^2(\tau)-r^2(\tau),\qquad \tau=\frac{\pi^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)^{-1}=4{,}53\text{ сек.},$$

$$k(\tau)=-0{,}95,\quad r(\tau)=2\int_0^\infty\frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]}\sin\omega\tau\,d\tau$$

$$\varkappa=\sqrt{1-p^2}\cos(\varphi_2-\gamma),\quad \gamma=179^\circ,\quad D[X(t+\tau)]\approx M[A^2]\,M[\cos^2\Phi]-$$
$$-\{M[A]\,M[\cos\Phi]\}^2,\quad M[\cos\varphi]=\int_0^{2\pi}f(\varphi_2/\varphi_1)\cos\varphi_2\,d\varphi_2,\quad M[\cos^2\varphi]=$$
$$=\int_0^{2\pi}f(\varphi_2/\varphi_1)\cos^2\varphi_2\,d\varphi_2.$$

41.15. $R_{xy}(\tau)=2\sigma_x^2\int_0^\infty S_x(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega=\frac{2\alpha\left(\alpha^2+\beta^2\right)\sigma_x^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega\tau}{(\omega^2-\beta^2+\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2}d\omega.$

Положив $\sigma^2=\frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi}\omega_2^2$, имеем $\frac{1}{(\omega^2-\beta^2+\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2}=$

$$=\sum_{\lambda=0}^\infty a_\lambda e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}H_{2\lambda}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right),$$

где $H_n(x)$ — полином Чебышева — Эрмита, а $a_\lambda=\sigma_x\frac{2^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}\,\lambda!}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}\times$ $\times\frac{d\omega}{(\omega^2-\beta^2+\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ вычисляется в конечном виде Поэтому $R_{xy}(\tau)$ можно получить в виде бесконечного сходящегося ряда, содержащего интегральные функции Лапласа от мнимого аргумента и показательные функции.

## § 42. Определение вероятностных характеристик случайных функций по опытным данным

42.1 Нужно доказать, что если $\tilde{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$, то $M[\tilde{x}]=\bar{x}$, $\lim\limits_{T\to\infty}D[\tilde{x}]=0$.

42.2. Нет, так как $\lim\limits_{T\to\infty}M[\tilde{S}_x(\omega)]=S_x(\omega)$, но $\lim\limits_{T\to\infty}D[\tilde{S}_x(\omega)]=S_x^2(\omega)$ и, следовательно, не стремится к нулю при росте $T$.

42.3. $D[\tilde{K}_x(\tau)]=\frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\left[K_x^2(\tau_1)+K_x(\tau_1+\tau)\,K_x(\tau_1-\tau)\right]d\tau_1.$

42.4. $M[\tilde{K}_1(\tau)]=K(\tau)-\frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T+\tau}(T-\tau-\tau_1)\,K(\tau_1)\,d\tau_1;$

$$M[\tilde{K}_2(\tau)]=K(\tau)-\frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\,K(\tau+\tau_1)\,d\tau_1;$$

$$D[\tilde{K}_1(\tau)]=\frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\,[K^2(\tau_1)+K(\tau_1+\tau)\,K(\tau_1-\tau)]\,d\tau_1+$$
$$+\frac{8}{(T-\tau)^4}\left[\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\,K(\tau_1)\,d\tau_1\right]^2-\frac{4}{(T-\tau)^3}\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau}K(t_3-t_1)\times$$

$$\times K(t_2-t_1-\tau)\,dt_1\,dt_2\,dt_3;\quad D[\widetilde{K}_2(\tau)]=\frac{2}{(T-\tau)^2}\int\limits_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)[K^2(\tau_1)+$$

$$+K(\tau_1+\tau)K(\tau_1-\tau)+K(\tau)K(\tau+\tau_1)+K(\tau)K(\tau_1-\tau)]\,d\tau_1-$$

$$-\frac{2}{(T-\tau)^3}\int\limits_0^{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau}[K(t_2-t_1)K(t_3-t_1)+K(t_2-t_1+\tau)K(t_3-t_1-\tau)]\times$$

$$\times dt_1\,dt_2\,dt_3+\frac{2}{(T-\tau)^4}\left\{\int\limits_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)[K(\tau_1+\tau)+K(\tau_1-\tau)]\,d\tau_1\right\}^2+$$

$$+\frac{4}{(T-\tau)^4}\left\{\int\limits_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)K(\tau_1)\,d\tau_1\right\}^2-\frac{4}{(T-\tau)^4}\left\{\int\limits_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\times\right.$$

$$\left.\times K(\tau+\tau_1)\,d\tau_1\right\}^2$$

42.5. $D[\tilde{x}]=\dfrac{2\sigma_x^2}{\alpha T}\left(1-\dfrac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha T}\right).$

42.6. $$D[\widetilde{S}(\omega)]=\frac{1}{2\pi^2T^2}\int\limits_0^T(T-t)\left\{\int\limits_0^T[K(t+\eta)+K(t-\eta)]\sin(T-\eta)\,\omega\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\left|\int\limits_{-T}^{T}e^{-i\tau\omega}K(t-\tau)\,d\tau\right|^2\right\}dt.$$

42.7. $\sigma_y$ уменьшится на 2%

42.8. $\sigma_y$ уменьшится на 3%

42.9. $D[\widetilde{K}_\theta(0)]=22$ град$^4$., $D[\widetilde{K}_\theta(3)]=2{,}8$ град$^4$.

42.10. а) Значение первого нуля функции $\widetilde{K}(\tau)$ равно 2,20 сек.; б) равно 2,30 сек

42.11 $$D[\widetilde{K}_\theta(\tau)]=\frac{A^2}{2(T-\tau)}\left\{\frac{2\alpha^2+\beta^2}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}+e^{-2\alpha\tau}\left[2\tau\cos 2\beta\tau+\frac{1}{\beta}\sin 2\beta\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\alpha}\cos 2\beta\tau+\frac{\alpha\cos 2\beta\tau-\beta\sin 2\beta\tau}{\alpha^2+\beta^2}\right]\right\};\qquad D[\widetilde{K}_\theta(0)]=5{,}82\text{ град.}^4,$$

$D[\widetilde{K}_\theta(2{,}09)]=5{,}35$ град.$^4$; $D[\widetilde{K}_\theta(4{,}18)]=4{,}80$ град.$^4$, $D[\widetilde{K}_\theta(16{,}72)]=2{,}92$ град.$^4$, а соответствующие среднеквадратические отклонения равны 2,41; 2,32; 2,19 и 1,71 град $^2$

42.12. При росте $t$ отношение $\dfrac{t_1}{t}$ сходится по вероятности к вероятности $p$ совпадения знаков ординат случайной функции $X(t)$ и $X(t+\tau)$, которая для нормального процесса связана с нормированной корреляционной функцией $k(\tau)$ соотношением $k(\tau)=\cos\pi(1-p)$, которое может быть доказано путем интегрирования двумерного нормального закона распределения ординат случайной функции в соответствующих пределах.

42.13. Обозначая $Z(t)=\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{X(t)\,X(t+\tau)}{|X(t)\,X(t+\tau)|}\right]$, $p$ — вероятность совпадения знаков у $X(t)$ и $X(t+\tau)$, имеем $\bar{z}=p$, $\tilde{k}_x(\tau)=\cos\pi(1-\tilde{z})\approx\cos\pi(1-\bar{z})+$ $+\pi(\tilde{z}-\bar{z})\sin\pi(1-\bar{z})$ Следовательно, $D[\tilde{k}_x(\tau)]\approx\pi^2D[\tilde{z}]\sin^2\pi(1-p)=$ $=\pi^2\left[1-k_x^2(\tau)\right]D[\tilde{z}]$, где $D[\tilde{z}]=\dfrac{2}{T^2}\displaystyle\int\limits_0^T(T-\tau_1)K_z(\tau_1)\,d\tau_1$, а

$$K_z(\tau)=\left\{\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{-\infty}^0+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{-\infty}^0+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\right\}\times$$

$\times f(x_1,x_2,x_3,x_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4-\bar{z}^2$, где $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — закон распределения системы нормальных величин $X(t_1)$, $X(t_1+\tau)$, $X(t_2)$, $X(t_2+\tau)$.

42.14. $\widetilde{K}_x(\tau) = g_1\widetilde{K}_1(\tau) + g_2\widetilde{K}_2(\tau) + g_3\widetilde{K}_3(\tau)$,

где приближенно

$$g_j = \frac{\dfrac{1}{\sigma_j^2}}{\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2} + \dfrac{1}{\sigma_3^2}}, \qquad j = 1, 2, 3, \qquad \sigma_j^2 = \frac{2}{T_j^2}\int_0^{T_j} (T_j - \tau)\,\widetilde{K}_j(\tau)\,d\tau.$$

При $T_j$, значительно превосходящих время затухания $K_x(\tau)$, приближенно можно считать $\sigma_j^2 = \dfrac{2}{T_j}\left(a - \dfrac{b}{T_j}\right)$, где $a = \displaystyle\int_0^\infty \widetilde{K}(\tau)\,d\tau$, $b = \displaystyle\int_0^\infty \tau\widetilde{K}(\tau)\,d\tau$, а за значение $\widetilde{K}(\tau)$ можно принять подходящее значение, полученное по любой из реализаций.

42.15 $$D[\widetilde{K}_x(\tau)] = \frac{2}{(m-l)^2}\sum_{s=1}^{m-l-1}\left[\widetilde{K}_x^2(s\Delta) + \widetilde{K}_x(s\Delta + l\Delta)\,\widetilde{K}_x(s\Delta - l\Delta)\right](m - l - s) + \frac{1}{m-l}\left[\widetilde{K}_x^2(0) + \widetilde{K}_x^2(l\Delta)\right].$$

42.16. На 9%

42.17. $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T K_x(\tau)\,d\tau$, $a_j = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T K_x(\tau)\cos\dfrac{2\pi j\tau}{T}\,d\tau$, $j > 0$;

$$\Delta_{\text{опт}} = \int_0^T K_x^2(\tau)\,d\tau - Ta_0^2 - \frac{T}{2}\sum_{j=1}^m a_j^2.$$

# ПРИЛОЖЕНИЯ

*ПРИЛОЖЕНИЕ 1*

**Биномиальные коэффициенты** $C_n^m \left(C_n^m = C_n^{n-m}\right)$

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 1 | | | | | | | | | |
| 3 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | |
| 4 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | |
| 5 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | |
| 6 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | |
| 7 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | |
| 8 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | |
| 9 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | |
| 10 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | |
| 11 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 |
| 12 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 |
| 13 | 13 | 78 | 286 | 715 | 1 287 | 1 716 | 1 716 | 1 287 | 715 | 286 | 78 |
| 14 | 14 | 91 | 364 | 1001 | 2 002 | 3 003 | 3 432 | 3 003 | 2 002 | 1 001 | 364 |
| 15 | 15 | 105 | 455 | 1365 | 3 003 | 5 005 | 6 435 | 6 435 | 5 005 | 3 003 | 1 365 |
| 16 | 16 | 120 | 560 | 1820 | 4 368 | 8 008 | 11 440 | 12 870 | 11 440 | 8 008 | 4 368 |
| 17 | 17 | 136 | 680 | 2380 | 6 188 | 12 376 | 19 448 | 24 310 | 24 310 | 19 448 | 12 376 |
| 18 | 18 | 153 | 816 | 3060 | 8 568 | 18 564 | 31 824 | 43 758 | 48 620 | 43 758 | 31 824 |
| 19 | 19 | 171 | 969 | 3876 | 11 628 | 27 132 | 50 388 | 75 582 | 92 378 | 92 378 | 75 582 |
| 20 | 20 | 190 | 1140 | 4845 | 15 504 | 38 760 | 77 520 | 125 970 | 167 960 | 184 756 | 167 960 |
| 21 | 21 | 210 | 1330 | 5985 | 20 349 | 54 264 | 116 280 | 203 490 | 293 930 | 352 716 | 352 716 |
| 22 | 22 | 231 | 1540 | 7315 | 26 334 | 74 613 | 170 544 | 319 770 | 497 420 | 746 646 | 705 432 |

**Логарифмы факториалов** $\lg n!$

| $n$ | $\lg n!$ | $n$ | $\lg n!$ | $n$ | $\lg n!$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000000 | 36 | 41,570535 | 71 | 101,929663 |
| 2 | 0,301029 | 37 | 43,138736 | 72 | 103,786995 |
| 3 | 0,778151 | 38 | 44,718520 | 73 | 105,650318 |
| 4 | 1,380211 | 39 | 46,309585 | 74 | 107,519550 |
| 5 | 2,079181 | 40 | 47,911645 | 75 | 109,394611 |
| 6 | 2,857332 | 41 | 49,524428 | 76 | 111,275425 |
| 7 | 3,702430 | 42 | 51,147678 | 77 | 113,161916 |
| 8 | 4,605520 | 43 | 52,781146 | 78 | 115,054010 |
| 9 | 5,559763 | 44 | 54,424599 | 79 | 116,951637 |
| 10 | 6,559763 | 45 | 56,077811 | 80 | 118,854727 |
| 11 | 7,601155 | 46 | 57,740569 | 81 | 120,763212 |
| 12 | 8,680336 | 47 | 59,412667 | 82 | 122,677026 |
| 13 | 9,794280 | 48 | 61,093908 | 83 | 124,596104 |
| 14 | 10,940408 | 49 | 62,784104 | 84 | 126,520383 |
| 15 | 12,116499 | 50 | 64,483074 | 85 | 128,449802 |
| 16 | 13,320619 | 51 | 66,190645 | 86 | 130,384301 |
| 17 | 14,551068 | 52 | 67,906648 | 87 | 132,323820 |
| 18 | 15,806341 | 53 | 69,630924 | 88 | 134,268303 |
| 19 | 17,085094 | 54 | 71,363318 | 89 | 136,217693 |
| 20 | 18,386124 | 55 | 73,103680 | 90 | 138,171935 |
| 21 | 19,708343 | 56 | 74,851868 | 91 | 140,130977 |
| 22 | 21,050766 | 57 | 76,607743 | 92 | 142,094765 |
| 23 | 22,412494 | 58 | 78,371171 | 93 | 144,063247 |
| 24 | 23,792705 | 59 | 80,142023 | 94 | 146,036375 |
| 25 | 25,190645 | 60 | 81,920174 | 95 | 148,014099 |
| 26 | 26,605619 | 61 | 83,705504 | 96 | 149,996370 |
| 27 | 28,036982 | 62 | 85,497896 | 97 | 151,983142 |
| 28 | 29,484140 | 63 | 87,297236 | 98 | 153,974368 |
| 29 | 30,916538 | 64 | 80,103416 | 99 | 155,970003 |
| 30 | 32,423660 | 65 | 90,916330 | 100 | 157,970003 |
| 31 | 33,915021 | 66 | 92,735874 | | |
| 32 | 35,420171 | 67 | 94,561948 | | |
| 33 | 36,938685 | 68 | 96,394457 | | |
| 34 | 38,470164 | 69 | 98,233306 | | |
| 35 | 40,014232 | 70 | 100,078405 | | |

**Закон распределения Пуассона** $P(m, \lambda) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

| $m$ \ $\lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 |
| 1 | 090484 | 163746 | 222245 | 268128 | 303265 | 329287 |
| 2 | 004524 | 016375 | 033337 | 053626 | 075816 | 098786 |
| 3 | 000151 | 001092 | 003334 | 007150 | 012636 | 019757 |
| 4 | 000004 | 000055 | 000250 | 000715 | 001580 | 002964 |
| 5 | | 000002 | 000015 | 000057 | 000158 | 000356 |
| 6 | | | 000001 | 000004 | 000013 | 000036 |
| 7 | | | | | 000001 | 000003 |

| $m$ \ $\lambda$ | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,496585 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 |
| 1 | 347610 | 359463 | 365913 | 367879 | 270671 | 149361 |
| 2 | 121663 | 143785 | 164661 | 183940 | 270671 | 224042 |
| 3 | 028388 | 038343 | 049398 | 061313 | 180447 | 224042 |
| 4 | 004968 | 007669 | 011115 | 015328 | 090224 | 168031 |
| 5 | 000081 | 001227 | 002001 | 003066 | 036089 | 100819 |
| 6 | 000008 | 000164 | 000300 | 000511 | 012030 | 050409 |
| 7 | 000001 | 000019 | 000039 | 000073 | 003437 | 021604 |
| 8 | | 000002 | 000004 | 000009 | 000899 | 008102 |
| 9 | | | | 000001 | 000191 | 002701 |
| 10 | | | | | 000038 | 000810 |
| 11 | | | | | 000007 | 000221 |
| 12 | | | | | 000001 | 000055 |
| 13 | | | | | | 000013 |
| 14 | | | | | | 000003 |
| 15 | | | | | | 000001 |

| $m$ \ $\lambda$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,018316 | 0,006738 | 0,002479 | 0,000912 | 0,000335 | 0,000123 |
| 1 | 073263 | 033690 | 014873 | 006383 | 002684 | 001111 |
| 2 | 141525 | 084224 | 044618 | 022341 | 010735 | 004998 |
| 3 | 195367 | 140374 | 089235 | 052129 | 028626 | 014994 |
| 4 | 195367 | 175467 | 133853 | 091226 | 057252 | 033737 |
| 5 | 156293 | 175467 | 160623 | 127717 | 091604 | 060727 |
| 6 | 104194 | 146223 | 160623 | 149003 | 122138 | 091090 |
| 7 | 059540 | 104445 | 137677 | 149003 | 139587 | 117116 |
| 8 | 029770 | 064278 | 103258 | 130377 | 139587 | 131756 |
| 9 | 013231 | 036266 | 068838 | 101405 | 124077 | 131756 |
| 10 | 005292 | 018133 | 041303 | 070983 | 099262 | 118580 |
| 11 | 001925 | 008242 | 022529 | 045171 | 072190 | 097020 |
| 12 | 000642 | 003434 | 011262 | 026350 | 048127 | 072765 |
| 13 | 000197 | 001321 | 005199 | 014188 | 029616 | 050376 |
| 14 | 000056 | 000472 | 002228 | 007094 | 016924 | 032384 |
| 15 | 000015 | 000157 | 000891 | 003311 | 009026 | 019431 |
| 16 | 000004 | 000049 | 000334 | 001448 | 004513 | 010930 |
| 17 | 0,000001 | 000014 | 000118 | 000596 | 002124 | 005786 |
| 18 | | 000004 | 000039 | 000232 | 000944 | 002893 |
| 19 | | 0,000001 | 000012 | 000085 | 000397 | 001370 |
| 20 | | | 000004 | 000030 | 000159 | 000617 |
| 21 | | | 0,000001 | 000010 | 000061 | 000264 |
| 22 | | | | 000003 | 000022 | 000108 |
| 23 | | | | 0,000001 | 000008 | 000042 |
| 24 | | | | | 000003 | 000016 |
| 25 | | | | | 0,000001 | 000006 |
| 26 | | | | | | 000002 |
| 27 | | | | | | 0,000001 |

**Функция Лапласа (интеграл вероятностей)** $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

| z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0 0000 | 0798 | 1596 | 2393 | 3191 | 3988 | 4784 | 5581 | 6376 | 7171 |
| 0,1 | 7966 | 8759 | 9552 | 0343* | 1134* | 1924* | 2712* | 3499* | 4285* | 5069* |
| 0,2 | 0,1 5852 | 6633 | 7413 | 8191 | 8967 | 9741 | 0514* | 1284* | 2052* | 2818* |
| 0,3 | 0,2 3582 | 4344 | 5103 | 5860 | 6614 | 7366 | 8115 | 8862 | 9605 | 0346* |
| 0,4 | 0,3 1084 | 1819 | 2552 | 3280 | 4006 | 4729 | 5448 | 6164 | 6877 | 7587 |
| 0,5 | 8292 | 8995 | 9694 | 0389* | 1080* | 1768* | 2452* | 3132* | 3809* | 4481* |
| 0,6 | 0,4 5149 | 5814 | 6474 | 7131 | 7783 | 8431 | 9075 | 9714 | 0350* | 0981* |
| 0,7 | 0,5 1607 | 2230 | 2848 | 3461 | 4070 | 4675 | 5275 | 5870 | 6161 | 7047 |
| 0,8 | 7629 | 8206 | 8778 | 9346 | 9909 | 0468* | 1021* | 1570* | 2114* | 2653* |
| 0,9 | 0,6 3188 | 3718 | 4243 | 4763 | 5278 | 5789 | 6294 | 6795 | 7291 | 7783 |
| 1,0 | 8269 | 8750 | 9227 | 9699 | 0166* | 0628* | 1086* | 1538* | 1986* | 2429* |
| 1,1 | 0,7 2867 | 3300 | 3729 | 4152 | 4571 | 4986 | 5395 | 5800 | 6200 | 6595 |
| 1,2 | 6986 | 7372 | 7754 | 8130 | 8502 | 8870 | 9233 | 9592 | 9945 | 0295* |
| 1,3 | 0,8 0640 | 0980 | 1316 | 1648 | 1975 | 2298 | 2617 | 2931 | 3241 | 3547 |
| 1,4 | 3849 | 4146 | 4439 | 4728 | 5013 | 5294 | 5571 | 5844 | 6113 | 6378 |
| 1,5 | 6639 | 6696 | 7149 | 7398 | 7644 | 7886 | 8124 | 8358 | 8589 | 8817 |
| 1,6 | 9040 | 9260 | 9477 | 9690 | 9899 | 0106* | 0309* | 0508* | 0704* | 0897* |
| 1,7 | 0,9 1087 | 1273 | 1457 | 1637 | 1814 | 1988 | 2159 | 2327 | 2492 | 2655 |
| 1,8 | 2314 | 2970 | 3124 | 3275 | 3423 | 3569 | 3711 | 3852 | 3989 | 4124 |
| 1,9 | 4257 | 4387 | 4514 | 4639 | 4762 | 4882 | 5000 | 5116 | 5230 | 5341 |
| 2,0 | 5450 | 5557 | 5662 | 5764 | 5865 | 5964 | 6060 | 6155 | 6247 | 6338 |
| 2,1 | 6427 | 6514 | 6599 | 6683 | 6765 | 6844 | 6923 | 6999 | 7074 | 7148 |
| 2,2 | 7219 | 7289 | 7358 | 7425 | 7491 | 7555 | 7618 | 7679 | 7739 | 7798 |
| 2,3 | 7855 | 7911 | 7966 | 8019 | 8072 | 8123 | 8172 | 8221 | 8269 | 8315 |
| 2,4 | 8360 | 8405 | 8448 | 8490 | 8531 | 8571 | 8611 | 8649 | 8686 | 8723 |
| 2,5 | 8758 | 8793 | 8826 | 8859 | 8891 | 8923 | 8953 | 8983 | 9012 | 9040 |
| 2,6 | 9068 | 9095 | 9121 | 9146 | 9171 | 9195 | 9219 | 9241 | 9263 | 9285 |
| 2,7 | 9307 | 9327 | 9347 | 9367 | 9386 | 9404 | 9422 | 9439 | 9456 | 9473 |
| 2,8 | 9489 | 9505 | 9520 | 9535 | 9549 | 9563 | 9576 | 9590 | 9602 | 9615 |
| 2,9 | 9627 | 9639 | 9650 | 9661 | 9672 | 9682 | 9692 | 9702 | 9712 | 9721 |
| 3,0 | 9730 | 9739 | 9747 | 9755 | 9768 | 9771 | 9779 | 9786 | 9793 | 9800 |
| 3,1 | 9806 | 9813 | 9819 | 9825 | 9831 | 9837 | 9842 | 9848 | 9853 | 9858 |
| 3,2 | 9863 | 9867 | 9872 | 9876 | 9880 | 9885 | 9889 | 9892 | 9896 | 9900 |
| 3,3 | 9903 | 9907 | 9910 | 9913 | 9916 | 9919 | 9922 | 9925 | 9928 | 9930 |
| 3,4 | 9933 | 9935 | 9937 | 9940 | 9942 | 9944 | 9946 | 9948 | 9950 | 9952 |
| 3,5 | 9953 | 9955 | 9957 | 9958 | 9960 | 9961 | 9963 | 9964 | 9966 | 9967 |
| 3,6 | 9968 | 9969 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9978 |
| 3,7 | 9978 | 9979 | 9980 | 9981 | 9982 | 9982 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 |
| 3,8 | 9986 | 9986 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |
| 3,9 | 9990 | 9991 | 9991 | 9992 | 9992 | 9992 | 9992 | 9993 | 9993 | 9993 |
| 4, | 0,99937 | 59 | 73 | 83 | 89 | 93 | 95 | 97 | 98 | 99 |

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины $z$, а в верхней строке — ее сотые доли (в последней строке таблицы даны значения функции через 0,1).

Звездочка у числа означает, что первые цифры числа следует взять из следующей строки.

**Приведенная функция Лапласа** $\widehat{\Phi}(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\rho^2 x^2}\, dx$

| $z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0, 0000 | 0054 | 0108 | 0161 | 0215 | 0269 | 0323 | 0377 | 0430 | 0484 |
| 0,1 | 0, 0538 | 0591 | 0645 | 0699 | 0752 | 0806 | 0859 | 0913 | 0966 | 1020 |
| 0,2 | 0, 1073 | 1126 | 1180 | 1233 | 1286 | 1339 | 1392 | 1445 | 1498 | 1551 |
| 0,3 | 0, 1603 | 1656 | 1709 | 1761 | 1814 | 1866 | 1918 | 1971 | 2023 | 2075 |
| 0,4 | 0, 2127 | 2179 | 2230 | 2282 | 2334 | 2385 | 2436 | 2488 | 2539 | 2590 |
| 0,5 | 0, 2641 | 2691 | 2742 | 2793 | 2843 | 2893 | 2944 | 2994 | 3044 | 3093 |
| 0,6 | 0, 3143 | 3192 | 3242 | 3291 | 3340 | 3389 | 3438 | 3487 | 3535 | 3584 |
| 0,7 | 0, 3632 | 3680 | 3728 | 3775 | 3823 | 3870 | 3918 | 3965 | 4012 | 4059 |
| 0,8 | 0, 4105 | 4152 | 4198 | 4244 | 4290 | 4336 | 4381 | 4427 | 4472 | 4517 |
| 0,9 | 0, 4562 | 4604 | 4651 | 4695 | 4739 | 4783 | 4827 | 4870 | 4914 | 4957 |
| 1,0 | 0, 5000 | 5043 | 5085 | 5128 | 5170 | 5212 | 5254 | 5295 | 5337 | 5378 |
| 1,1 | 0, 5419 | 5459 | 5500 | 5540 | 5581 | 5620 | 5660 | 5700 | 5739 | 5778 |
| 1,2 | 0, 5817 | 5856 | 5894 | 5932 | 5970 | 6008 | 6046 | 6083 | 6120 | 6157 |
| 1,3 | 0, 6194 | 6231 | 6267 | 6303 | 6339 | 6375 | 6410 | 6445 | 6480 | 6515 |
| 1,4 | 0, 6550 | 6584 | 6618 | 6652 | 6686 | 6719 | 6753 | 6786 | 6818 | 6851 |
| 1,5 | 0, 6883 | 6915 | 6947 | 6979 | 7011 | 7042 | 7073 | 7104 | 7134 | 7165 |
| 1,6 | 0, 7195 | 7225 | 7255 | 7284 | 7313 | 7342 | 7371 | 7400 | 7428 | 7457 |
| 1,7 | 0, 7485 | 7512 | 7540 | 7567 | 7594 | 7621 | 7648 | 7675 | 7701 | 7727 |
| 1,8 | 0, 7753 | 7778 | 7804 | 7829 | 7854 | 7879 | 7904 | 7928 | 7952 | 7976 |
| 1,9 | 0, 8000 | 8023 | 8047 | 8070 | 8093 | 8116 | 8138 | 8161 | 8183 | 8205 |
| 2,0 | 0, 8227 | 8248 | 8269 | 8291 | 8312 | 8332 | 8353 | 8373 | 8394 | 8414 |
| 2,1 | 0, 8433 | 8453 | 8473 | 8492 | 8511 | 8530 | 8549 | 8567 | 8585 | 8604 |
| 2,2 | 0, 8622 | 8639 | 8657 | 8674 | 8692 | 8709 | 8726 | 8742 | 8759 | 8775 |
| 2,3 | 0, 8792 | 8808 | 8824 | 8839 | 8855 | 8870 | 8886 | 8901 | 8916 | 8930 |
| 2,4 | 0, 8945 | 8959 | 8974 | 8988 | 9002 | 9016 | 9029 | 9043 | 9056 | 9069 |
| 2,5 | 0, 90825 | 0954 | 1082 | 1208 | 1332 | 1456 | 1578 | 1698 | 1817 | 1935 |
| 2,6 | 0, 92051 | 2166 | 2280 | 2392 | 2503 | 2613 | 2721 | 2828 | 2934 | 3038 |
| 2,7 | 0, 93141 | 3243 | 3344 | 3443 | 3541 | 3638 | 3734 | 3828 | 3922 | 4014 |
| 2,8 | 0, 94105 | 4195 | 4284 | 4371 | 4458 | 4543 | 4627 | 4711 | 4793 | 4874 |
| 2,9 | 0, 94954 | 5033 | 5111 | 5187 | 5263 | 5338 | 5412 | 5485 | 5557 | 5628 |
| 3,0 | 0, 95698 | 5767 | 5835 | 5902 | 5968 | 6033 | 6098 | 6161 | 6224 | 6286 |
| 3,1 | 0, 96346 | 6406 | 6466 | 6524 | 6582 | 6638 | 6694 | 6749 | 6804 | 6857 |
| 3,2 | 0, 96910 | 6962 | 7013 | 7064 | 7114 | 7163 | 7211 | 7259 | 7306 | 7352 |
| 3,3 | 0, 97397 | 7442 | 7486 | 7530 | 7573 | 7615 | 7657 | 7698 | 7738 | 7778 |
| 3,4 | 0, 97817 | 7855 | 7893 | 7930 | 7967 | 8003 | 8039 | 8074 | 8109 | 8143 |
| 3,5 | 0, 98176 | 8209 | 8241 | 8273 | 8304 | 8335 | 8365 | 8395 | 8424 | 8453 |
| 3,6 | 0, 98482 | 8510 | 8538 | 8565 | 8592 | 8618 | 8644 | 8669 | 8694 | 8719 |
| 3,7 | 0, 98743 | 8767 | 8790 | 8813 | 8836 | 8858 | 8880 | 8901 | 8922 | 8942 |
| 3,8 | 0, 98962 | 8982 | 9002 | 9021 | 9040 | 9059 | 9077 | 9095 | 9113 | 9130 |
| 3,9 | 0, 99147 | 9164 | 9181 | 9197 | 9213 | 9229 | 9244 | 9259 | 9274 | 9288 |

| z | | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,0 | 0,99 | 3023 | 3301 | 3569 | 3824 | 4075 |
| 4,1 | 0,99 | 4310 | 4546 | 4768 | 4982 | 5188 |
| 4,2 | 0,99 | 5387 | 5578 | 5761 | 5938 | 6108 |
| 4,3 | 0,99 | 6270 | 6429 | 6581 | 6726 | 6866 |
| 4,4 | 0,99 | 7000 | 7129 | 7253 | 7372 | 7487 |
| 4,5 | 0,99 | 7596 | 7702 | 7803 | 7900 | 7993 |
| 4,6 | 0,99 | 8082 | 8170 | 8250 | 8228 | 8404 |
| 4,7 | 0,99 | 8476 | 8545 | 8612 | 8675 | 8736 |
| 4,8 | 0,99 | 8794 | 8850 | 8904 | 8955 | 9003 |
| 4,9 | 0,999 | 050 | 095 | 137 | 179 | 218 |
| 5,0 | 0,999 | 255 | 290 | 325 | 357 | 388 |
| 5,1 | 0,999 | 418 | 446 | 473 | 499 | 524 |
| 5,2 | 0,999 | 547 | 569 | 591 | 612 | 631 |
| 5,3 | 0,999 | 649 | 670 | 684 | 700 | 715 |
| 5,4 | 0,999 | 730 | 744 | 757 | 769 | 781 |
| 5,5 | 0,999 | 792 | 803 | 814 | 823 | 833 |
| 5,6 | 0,999 | 841 | 850 | 858 | 865 | 871 |
| 5,7 | 0,999 | 879 | 886 | 892 | 898 | 903 |
| 5,8 | 0,9999 | 08 | 13 | 18 | 23 | 27 |
| 5,9 | 0,9999 | 31 | 35 | 38 | 42 | 45 |
| 6,0 | 0,9999 | 48 | 51 | 54 | 56 | 59 |
| 6,1 | 0,9999 | 61 | 63 | 65 | 67 | 69 |
| 6,2 | 0,9999 | 71 | 73 | 74 | 76 | 77 |
| 6,3 | 0,9999 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 |
| 6,4 | 0,9999 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 |
| 6,5 | 0,9999 | 88 | 89 | 90 | 90 | 91 |

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины $z$, а в верхней строке —ее сотые доли. Во втором столбце стоят первые десятичные знаки функции $\widehat{\Phi}$ $(z)$, а в остальных столбцах — последующие десятичные знаки.

*ПРИЛОЖЕНИЕ 6*

**Закон нормального распределения (плотность вероятности) при аргументе, выраженном в средних квадратических отклонениях** $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

| z | Сотые доли для z | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | $3989 \cdot 10^{-4}$ | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | $2661 \cdot 10^{-4}$ | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |

| $z$ | Сотые доли для $z$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1,0 | $2420\cdot10^{-4}$ | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1955 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 9893* | 9723* | 9566* |
| 1,7 | $9405\cdot10^{-5}$ | 9246 | 9089 | 8933 | 8780 | 8628 | 8478 | 8329 | 8183 | 8038 |
| 1,8 | 7895 | 7754 | 7614 | 7477 | 7341 | 7206 | 7074 | 6943 | 6814 | 6687 |
| 1,9 | 6562 | 6438 | 6316 | 6195 | 6077 | 5959 | 5844 | 5730 | 5618 | 5508 |
| 2,0 | 5399 | 5292 | 5186 | 5082 | 4980 | 4879 | 4780 | 4682 | 4586 | 4491 |
| 2,1 | 4398 | 4307 | 4217 | 4128 | 4041 | 3955 | 3871 | 3788 | 3706 | 3626 |
| 2,2 | 3547 | 3470 | 3394 | 3319 | 3246 | 3174 | 3103 | 3034 | 2965 | 2898 |
| 2,3 | 2883 | 2768 | 2705 | 2643 | 2582 | 2522 | 2463 | 2406 | 2349 | 2294 |
| 2,4 | 2239 | 2186 | 2134 | 2083 | 2033 | 1984 | 1936 | 1888 | 1842 | 1797 |
| 2,5 | 1753 | 1709 | 1667 | 1625 | 1585 | 1545 | 1506 | 1468 | 1431 | 1394 |
| 2,6 | 1358 | 1323 | 1289 | 1256 | 1223 | 1191 | 1160 | 1130 | 1100 | 1071 |
| 2,7 | 1042 | 1014 | 9871* | 9606* | 9347* | 9094* | 8846* | 8605* | 8370* | 8140* |
| 2,8 | $7915\cdot10^{-6}$ | 7697 | 7483 | 7274 | 7071 | 6873 | 6679 | 6491 | 6307 | 6127 |
| 2,9 | 5953 | 5782 | 5616 | 5454 | 5296 | 5143 | 4993 | 4847 | 4705 | 4567 |
| 3,0 | 4432 | 4301 | 4173 | 4049 | 3928 | 3810 | 3695 | 3584 | 3475 | 3370 |
| 3,1 | 3267 | 3167 | 3070 | 2975 | 2884 | 2794 | 2707 | 2623 | 2541 | 2461 |
| 3,2 | 2384 | 2309 | 2236 | 2165 | 2096 | 2029 | 1964 | 1901 | 1840 | 1780 |
| 3,3 | 1723 | 1667 | 1612 | 1560 | 1508 | 1459 | 1411 | 1364 | 1319 | 1275 |
| 3,4 | 1232 | 1191 | 1151 | 1112 | 1075 | 1038 | 1003 | 9689* | 9358* | 9087* |
| 3,5 | $8727\cdot10^{-7}$ | 8426 | 8135 | 7853 | 7581 | 7317 | 7061 | 6814 | 6575 | 6343 |
| 3,6 | 6119 | 5902 | 5693 | 5490 | 5294 | 5105 | 4921 | 4744 | 4573 | 4408 |
| 3,7 | 4248 | 4093 | 3944 | 3800 | 3661 | 3526 | 3396 | 3271 | 3149 | 3032 |
| 3,8 | 2919 | 2810 | 2705 | 2604 | 2506 | 2411 | 2320 | 2232 | 2147 | 2065 |
| 3,9 | 1937 | 1910 | 1837 | 1766 | 1698 | 1633 | 1569 | 1508 | 1449 | 1393 |
| 4,0 | $1338\cdot10^{-7}$ | 1286 | 1235 | 1186 | 1140 | 1094 | 1051 | 1009 | 9687* | 9299* |
| 4,1 | $8926\cdot10^{-8}$ | 8567 | 8222 | 7890 | 7570 | 7263 | 6967 | 6683 | 6410 | 6147 |
| 4,2 | 5894 | 5662 | 5418 | 5194 | 4979 | 4772 | 4573 | 4382 | 4199 | 4023 |
| 4,3 | 3854 | 3691 | 3535 | 3386 | 3242 | 3104 | 2972 | 2845 | 2723 | 2606 |
| 4,4 | 2494 | 2387 | 2284 | 2185 | 2090 | 1999 | 1912 | 1829 | 1749 | 1672 |
| 4,5 | 1598 | 1528 | 1461 | 1396 | 1334 | 1275 | 1218 | 1164 | 1112 | 1062 |
| 4,6 | 1014 | 9684* | 9248* | 8830* | 8430* | 8047* | 7681* | 7331* | 6996* | 6676* |
| 4,7 | $6370\cdot10^{-9}$ | 6077 | 5797 | 5530 | 5274 | 5030 | 4796 | 4573 | 4360 | 4156 |
| 4,8 | 3961 | 3775 | 3598 | 3428 | 3267 | 3112 | 2965 | 2824 | 2690 | 2561 |
| 4,9 | $2439\cdot10^{-9}$ | 2322 | 2211 | 2105 | 2003 | 1907 | 1814 | 1727 | 1643 | 1563 |

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины $z$, а в верхней строке — ее сотые доли.

Звездочка у числа означает, что его нужно умножить на 10 в степени, указанной в следующей строке.

**Вторая и третья производные от плотности вероятности для закона нормального распределения при аргументе, выраженном в средних квадратических отклонениях**

$$\varphi_2(z) = (z^2 - 1)\,\varphi(z), \quad \varphi_3(z) = -(z^3 - 3z)\,\varphi(z)$$

| $z$ | $\varphi_2(z)$ | $\varphi_3(z)$ | $z$ | $\varphi_2(z)$ | $\varphi_3(z)$ | $z$ | $\varphi_2(z)$ | $\varphi_3(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | —0,3989 | 0,0000 | 0,70 | —0,1582 | 0,5486 | 1,40 | 0,1437 | 0,2180 |
| 02 | — 3987 | 0239 | 72 | — 1483 | 5500 | 42 | 1480 | 2033 |
| 04 | — 3980 | 0478 | 74 | — 1372 | 5506 | 44 | 1519 | 1887 |
| 06 | — 3970 | 0716 | 76 | — 1262 | 5502 | 46 | 1555 | 1742 |
| 08 | — 3951 | 0952 | 78 | — 1152 | 5490 | 48 | 1588 | 1599 |
| 0,10 | — 3930 | 1187 | 0,80 | — 1043 | 5469 | 1,50 | 1619 | 1457 |
| 12 | — 3904 | 1419 | 82 | — 0934 | 5440 | 52 | 1647 | 1317 |
| 14 | — 3873 | 1648 | 84 | — 0825 | 5403 | 54 | 1672 | 1180 |
| 16 | — 3838 | 1874 | 86 | — 0718 | 5358 | 56 | 1694 | 1044 |
| 18 | — 3798 | 2097 | 88 | — 0611 | 5305 | 58 | 1714 | 0911 |
| 0,20 | — 3754 | 2315 | 0,90 | — 0506 | 5244 | 1,60 | 1730 | 0781 |
| 22 | — 3706 | 2529 | 92 | — 0401 | 5177 | 62 | 1745 | 0654 |
| 24 | — 3653 | 2737 | 94 | — 0298 | 5102 | 64 | 1756 | 0529 |
| 26 | — 3596 | 2940 | 96 | — 0197 | 5021 | 66 | 1766 | 0408 |
| 28 | — 3535 | 3138 | 98 | — 0098 | 4933 | 68 | 1773 | 0290 |
| 0,30 | — 3471 | 3330 | 1,00 | 0,0000 | 4839 | 1,70 | 1777 | 0176 |
| 32 | — 3402 | 3514 | 02 | 0096 | 4740 | 72 | 1780 | 0065 |
| 34 | — 3330 | 3693 | 04 | 0190 | 4635 | 74 | 1780 | — 0042 |
| 36 | — 3254 | 3864 | 06 | 0281 | 4524 | 76 | 1778 | — 0146 |
| 38 | — 3176 | 4028 | 08 | 0370 | 4409 | 78 | 1774 | — 0245 |
| 0,40 | — 3094 | 4188 | 1,10 | 0458 | 4290 | 1,80 | 1768 | — 0341 |
| 42 | — 3008 | 4332 | 12 | 0542 | 4166 | 82 | 1761 | — 0433 |
| 44 | — 2920 | 4472 | 14 | 0624 | 4038 | 84 | 1751 | — 0521 |
| 46 | — 2830 | 4603 | 16 | 0704 | 3907 | 86 | 1740 | — 0605 |
| 48 | — 2736 | 4726 | 18 | 0780 | 3772 | 88 | 1727 | — 0685 |
| 0,50 | — 2640 | 4841 | 1,20 | 0854 | 3635 | 1,90 | 1713 | — 0760 |
| 52 | — 2543 | 4946 | 22 | 0926 | 3496 | 92 | 1697 | — 0832 |
| 54 | — 2443 | 5043 | 24 | 0994 | 3354 | 94 | 1679 | — 0900 |
| 56 | — 2341 | 5131 | 26 | 1060 | 3201 | 96 | 1661 | — 0964 |
| 58 | — 2238 | 5209 | 28 | 1123 | 3065 | 98 | 1641 | — 1024 |
| 0,60 | — 2133 | 5278 | 1,30 | 1182 | 2918 | 2,00 | 1620 | — 1080 |
| 62 | — 2026 | 5338 | 32 | 1239 | 2771 | 02 | 1598 | — 1132 |
| 64 | — 1919 | 5389 | 34 | 1293 | 2624 | 04 | 1574 | — 1180 |
| 66 | — 1811 | 5431 | 36 | 1344 | 2476 | 06 | 1550 | — 1224 |
| 68 | — 1702 | 5463 | 38 | 1392 | 2328 | 08 | 1526 | — 1265 |
| 0,70 | —0,1592 | 0,5486 | 1,40 | 0,1437 | 0,2180 | 2,10 | 0,1500 | —0,1302 |

| $z$ | $\varphi_2(z)$ | $\varphi_3(z)$ | $z$ | $\varphi_2(z)$ | $\varphi_3(z)$ | $z$ | $\varphi_2(z)$ | $\varphi_3(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,10 | 0,1500 | —0,1302 | 2,80 | 0,0541 | —0,1073 | 3,50 | 0,0098 | —0,0282 |
| 12 | 1474 | — 1336 | 82 | 0520 | — 1045 | 52 | 0093 | — 0269 |
| 14 | 1446 | — 1366 | 84 | 0500 | — 1017 | 54 | 0087 | — 0256 |
| 16 | 1419 | — 1393 | 86 | 0480 | — 0990 | 56 | 0082 | — 0243 |
| 18 | 1391 | — 1416 | 88 | 0460 | — 0962 | 58 | 0078 | — 0231 |
| 2,20 | 1362 | — 1436 | 2,90 | 0441 | — 0934 | 3,60 | 0073 | — 0219 |
| 22 | 1333 | — 1445 | 92 | 0423 | — 0906 | 62 | 0069 | — 0208 |
| 24 | 1304 | — 1467 | 94 | 0405 | — 0879 | 64 | 0065 | — 0198 |
| 26 | 1275 | — 1478 | 96 | 0388 | — 0852 | 66 | 0061 | — 0187 |
| 28 | 1245 | — 1486 | 98 | 0371 | — 0824 | 68 | 0057 | — 0177 |
| 2,30 | 1215 | — 1492 | 3,00 | 0354 | — 0798 | 3,70 | 0054 | — 0168 |
| 32 | 1185 | — 1495 | 02 | 0339 | — 0771 | 72 | 0051 | — 0159 |
| 34 | 1155 | — 1496 | 04 | 0324 | — 0745 | 74 | 0048 | — 0150 |
| 36 | 1126 | — 1494 | 06 | 0309 | — 0720 | 76 | 0045 | — 0142 |
| 38 | 1096 | — 1490 | 08 | 0295 | — 0694 | 78 | 0042 | — 0134 |
| 2,40 | 1066 | — 1483 | 3,10 | 0281 | — 0669 | 3,80 | 0039 | — 0127 |
| 42 | 1036 | — 1475 | 12 | 0268 | — 0645 | 82 | 0037 | — 0120 |
| 44 | 1007 | — 1465 | 14 | 0256 | — 0621 | 84 | 0034 | — 0113 |
| 46 | 0978 | — 1453 | 16 | 0243 | — 0598 | 86 | 0032 | — 0107 |
| 48 | 0949 | — 1439 | 18 | 0232 | — 0575 | 88 | 0030 | — 0100 |
| 2,50 | 0920 | — 1424 | 3,20 | 0220 | — 0552 | 3,90 | 0028 | — 0095 |
| 52 | 0892 | — 1408 | 22 | 0209 | — 0530 | 92 | 0026 | — 0089 |
| 54 | 0864 | — 1390 | 24 | 0199 | — 0509 | 94 | 0024 | — 0084 |
| 56 | 0836 | — 1370 | 26 | 0189 | — 0488 | 96 | 0023 | — 0079 |
| 58 | 0809 | — 1350 | 28 | 0180 | — 0468 | 98 | 0022 | — 0074 |
| 2,60 | 0782 | — 1328 | 3,30 | 0171 | — 0448 | 4,00 | 0021 | — 0070 |
| 62 | 0756 | — 1305 | 32 | 0162 | — 0429 | 10 | 0014 | — 0051 |
| 64 | 0730 | — 1282 | 34 | 0153 | — 0411 | 20 | 0010 | — 0036 |
| 66 | 0705 | — 1258 | 36 | 0145 | — 0393 | 30 | 0007 | — 0026 |
| 68 | 0680 | — 1233 | 38 | 0138 | — 0376 | 40 | 0005 | — 0018 |
| 2,70 | 0656 | — 1207 | 3,40 | 0130 | — 0359 | 50 | 0003 | — 0012 |
| 72 | 0632 | — 1181 | 42 | 0123 | — 0342 | 60 | 0002 | — 0008 |
| 74 | 0608 | — 1154 | 44 | 0116 | — 0327 | 70 | 0001 | — 0006 |
| 76 | 0585 | — 1127 | 46 | 0110 | — 0311 | 80 | 0001 | — 0004 |
| 78 | 0563 | — 1100 | 48 | 0104 | — 0297 | 90 | 0001 | — 0002 |
| 2,80 | 0,0541 | —0,1073 | 3,50 | 0,0098 | —0,0282 | 5,00 | 0,0000 | —0,0001 |

**Закон нормального распределения (плотность вероятности) при аргументе, выраженном в срединных ошибках** $\widehat{\varphi}(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 x^2}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,26908 | 6907 | 6906 | 6903 | 6898 | 6893 | 6886 | 6878 | 6869 | 6859 |
| 0,1 | 6847 | 6834 | 6820 | 6805 | 6789 | 6771 | 6752 | 6732 | 6711 | 6688 |
| 0,2 | 6665 | 6640 | 6614 | 6588 | 6558 | 6529 | 6499 | 6467 | 6433 | 6399 |
| 0,3 | 6363 | 6326 | 6289 | 6250 | 6210 | 6168 | 6127 | 6084 | 6040 | 5994 |
| 0,4 | 5947 | 5899 | 5850 | 5800 | 5750 | 5698 | 5644 | 5590 | 5535 | 5478 |
| 0,5 | 5421 | 5362 | 5303 | 5243 | 5181 | 5119 | 5056 | 4992 | 4927 | 4860 |
| 0,6 | 4793 | 4723 | 4656 | 4585 | 4515 | 4443 | 4370 | 4297 | 4222 | 4147 |
| 0,7 | 4071 | 3993 | 3916 | 3837 | 3757 | 3677 | 3596 | 3514 | 3431 | 3347 |
| 0,8 | 3263 | 3178 | 3092 | 3006 | 2919 | 2831 | 2742 | 2653 | 2563 | 2472 |
| 0,9 | 2380 | 2288 | 2196 | 2103 | 2009 | 1915 | 1820 | 1724 | 1628 | 1532 |
| 1,0 | 1434 | 1336 | 1238 | 1140 | 1040 | 0940 | 0840 | 0739 | 0638 | 0537 |
| 1,1 | 0435 | 0332 | 0229 | 0126 | 0022 | 9918* | 9813* | 9708* | 9603* | 9498* |
| 1,2 | 0,19392 | 9286 | 9180 | 9074 | 8967 | 8860 | 8753 | 8645 | 8537 | 8429 |
| 1,3 | 8321 | 8213 | 8104 | 7995 | 7886 | 7776 | 7667 | 7558 | 7449 | 7339 |
| 1,4 | 7229 | 7120 | 7010 | 6900 | 6790 | 6680 | 6570 | 6460 | 6350 | 6240 |
| 1,5 | 6130 | 6020 | 5910 | 5800 | 5690 | 5580 | 5470 | 5360 | 5250 | 5140 |
| 1,6 | 5031 | 4922 | 4813 | 4704 | 4595 | 4486 | 4377 | 4268 | 4160 | 4052 |
| 1,7 | 3944 | 3836 | 3728 | 3621 | 3514 | 3407 | 3301 | 3195 | 3089 | 2988 |
| 1,8 | 2877 | 2772 | 2667 | 2562 | 2457 | 2353 | 2249 | 2146 | 2043 | 1940 |
| 1,9 | 1838 | 1736 | 1634 | 1532 | 1431 | 1330 | 1230 | 1130 | 1031 | 0932 |
| 2,0 | 0833 | 0734 | 0636 | 0539 | 0442 | 0345 | 0249 | 0153 | 0057 | 9962* |
| 2,1 | 0,09868 | 9774 | 9680 | 9587 | 9495 | 9403 | 9311 | 9220 | 9129 | 9039 |
| 2,2 | 8949 | 8860 | 8771 | 8683 | 8594 | 8507 | 8420 | 8334 | 8248 | 8163 |
| 2,3 | 8078 | 7994 | 7910 | 7827 | 7744 | 7662 | 7580 | 7499 | 7418 | 7338 |
| 2,4 | 7259 | 7180 | 7102 | 7024 | 6946 | 6869 | 6793 | 6717 | 6642 | 6567 |

| •x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,5 | 0,06493 | 6420 | 6347 | 6274 | 6202 | 6131 | 6060 | 5990 | 5920 | 5851 |
| 2,6 | 5782 | 5714 | 5646 | 5579 | 5513 | 5447 | 5382 | 5317 | 5252 | 5188 |
| 2,7 | 5125 | 5062 | 5000 | 4939 | 4878 | 4817 | 4557 | 4698 | 4639 | 4580 |
| 2,8 | 4522 | 4465 | 4408 | 4352 | 4296 | 4241 | 4186 | 4132 | 4078 | 4025 |
| 2,9 | 3973 | 3921 | 3869 | 3818 | 3767 | 3717 | 3667 | 3618 | 3570 | 3522 |
| 3,0 | 3474 | 3426 | 3379 | 3333 | 3288 | 3243 | 3198 | 3154 | 3110 | 3066 |
| 3,1 | 3023 | 2981 | 2939 | 2898 | 2857 | 2816 | 2776 | 2736 | 2697 | 2658 |
| 3,2 | 2620 | 2582 | 2545 | 2508 | 2471 | 2435 | 2399 | 2363 | 2338 | 2294 |
| 3,3 | 2260 | 2226 | 2193 | 2160 | 2128 | 2096 | 2064 | 2032 | 2000 | 1971 |
| 3,4 | 1941 | 1911 | 1881 | 1852 | 1825 | 1795 | 1767 | 1739 | 1712 | 1685 |
| 3,5 | 1658 | 1632 | 1606 | 1581 | 1556 | 1531 | 1506 | 1482 | 1458 | 1434 |
| 3,6 | 1411 | 1388 | 1365 | 1343 | 1321 | 1299 | 1278 | 1257 | 1236 | 1215 |
| 3,7 | 1195 | 1175 | 1155 | 1136 | 1117 | 1098 | 1079 | 1061 | 1043 | 1025 |
| 3,8 | 1008 | 0991 | 0974 | 0957 | 0940 | 0924 | 0908 | 0892 | 0876 | 0861 |
| 3,9 | 0846 | 831 | 816 | 802 | 788 | 774 | 750 | 746 | 733 | 720 |
| 4,0 | 707 | 694 | 681 | 669 | 657 | 645 | 633 | 621 | 610 | 599 |
| 4,1 | 588 | 577 | 566 | 555 | 545 | 535 | 525 | 515 | 505 | 496 |
| 4,2 | 487 | 478 | 469 | 460 | 451 | 442 | 433 | 425 | 417 | 409 |
| 4,3 | 401 | 393 | 385 | 378 | 371 | 364 | 357 | 350 | 343 | 336 |
| 4,4 | 329 | 323 | 316 | 310 | 304 | 298 | 292 | 286 | 280 | 274 |
| 4,5 | 268 | 263 | 258 | 253 | 248 | 243 | 238 | 233 | 228 | 223 |
| 4,6 | 218 | 213 | 209 | 205 | 201 | 197 | 193 | 189 | 185 | 181 |
| 4,7 | 177 | 173 | 169 | 165 | 162 | 159 | 155 | 152 | 149 | 146 |
| 4,8 | 143 | 140 | 137 | 134 | 131 | 128 | 125 | 122 | 119 | 116 |
| 4,9 | 114 | 111 | 108 | 106 | 103 | 101 | 099 | 097 | 095 | 093 |
| 5 | 0091 | 74 | 57 | 45 | 35 | 28 | 22 | 17 | 13 | 10 |
| 6 | 0,00008 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины $x$ (в последних двух строках — только целые), а в верхней строке — ее сотые доли (для последних двух строк —десятые).

Звездочка у числа означает, что первые цифры числа следует взять из следующей строки.

*ПРИЛОЖЕНИЕ 9*

## Закон распределения Стьюдента

$$P(t,\ k)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}dx$$

| $t$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 |
| 0,1 | 532 | 535 | 537 | 537 | 538 | 538 | 538 | 539 | 539 | 539 |
| 0,2 | 563 | 570 | 573 | 574 | 575 | 576 | 576 | 577 | 577 | 577 |
| 0,3 | 593 | 604 | 608 | 610 | 612 | 613 | 614 | 614 | 614 | 615 |
| 0,4 | 621 | 636 | 642 | 645 | 647 | 648 | 650 | 650 | 651 | 651 |
| 0,5 | 648 | 667 | 674 | 678 | 681 | 683 | 684 | 685 | 686 | 686 |
| 0,6 | 672 | 695 | 705 | 710 | 713 | 715 | 716 | 717 | 718 | 719 |
| 0,7 | 694 | 722 | 733 | 739 | 742 | 745 | 747 | 748 | 749 | 750 |
| 0,8 | 715 | 746 | 759 | 766 | 770 | 773 | 775 | 777 | 778 | 779 |
| 0,9 | 733 | 768 | 783 | 790 | 795 | 799 | 801 | 803 | 804 | 805 |
| 1,0 | 750 | 789 | 804 | 813 | 818 | 822 | 825 | 827 | 828 | 830 |
| 1,1 | 765 | 807 | 824 | 834 | 839 | 843 | 846 | 848 | 850 | 851 |
| 1,2 | 779 | 824 | 842 | 852 | 858 | 862 | 865 | 868 | 870 | 871 |
| 1,3 | 791 | 838 | 858 | 868 | 875 | 879 | 883 | 885 | 887 | 889 |
| 1,4 | 803 | 852 | 872 | 883 | 890 | 894 | 898 | 900 | 902 | 904 |
| 1,5 | 813 | 864 | 885 | 896 | 903 | 908 | 911 | 914 | 916 | 918 |
| 1,6 | 822 | 875 | 896 | 908 | 915 | 920 | 923 | 926 | 928 | 930 |
| 1,7 | 831 | 884 | 906 | 918 | 925 | 930 | 934 | 936 | 938 | 940 |
| 1,8 | 839 | 893 | 915 | 927 | 934 | 939 | 943 | 945 | 947 | 949 |
| 1,9 | 846 | 901 | 923 | 935 | 942 | 947 | 950 | 953 | 955 | 957 |
| 2,0 | 852 | 908 | 930 | 942 | 949 | 954 | 957 | 960 | 962 | 963 |
| 2,1 | 864 | 921 | 942 | 954 | 960 | 965 | 968 | 970 | 972 | 974 |
| 2,4 | 874 | 931 | 952 | 963 | 969 | 973 | 976 | 978 | 980 | 981 |
| 2,6 | 883 | 938 | 960 | 970 | 976 | 980 | 982 | 984 | 986 | 987 |
| 2,8 | 891 | 946 | 966 | 976 | 981 | 984 | 987 | 988 | 990 | 991 |
| 3,0 | 898 | 952 | 971 | 980 | 985 | 988 | 990 | 991 | 992 | 993 |
| 3,2 | 904 | 957 | 975 | 984 | 988 | 991 | 992 | 994 | 995 | 995 |
| 3,4 | 909 | 961 | 979 | 986 | 990 | 993 | 994 | 995 | 996 | 997 |
| 3,6 | 914 | 965 | 982 | 989 | 992 | 994 | 996 | 996 | 997 | 998 |
| 3,8 | 918 | 969 | 984 | 990 | 994 | 996 | 997 | 997 | 998 | 998 |
| 4,0 | 922 | 971 | 986 | 992 | 995 | 996 | 997 | 998 | 998 | 999 |
| 4,2 | 926 | 974 | 988 | 993 | 996 | 997 | 998 | 998 | 999 | 999 |
| 4,4 | 929 | 976 | 989 | 994 | 996 | 998 | 998 | 999 | 999 | 999 |
| 4,6 | 932 | 978 | 990 | 995 | 997 | 998 | 999 | 999 | 999 | 1,000 |
| 4,8 | 935 | 980 | 991 | 996 | 998 | 998 | 999 | 999 | 1,000 | |
| 5,0 | 937 | 981 | 992 | 996 | 998 | 999 | 999 | 1,000 | | |
| 5,2 | 940 | 982 | 993 | 997 | 998 | 999 | 999 | | | |
| 5,4 | 942 | 984 | 994 | 997 | 998 | 999 | 1,000 | | | |
| 5,6 | 944 | 985 | 994 | 998 | 999 | 999 | | | | |
| 5,8 | 946 | 986 | 995 | 998 | 999 | 999 | | | | |
| 6,0 | 0,947 | 0,987 | 0,995 | 0,998 | 0,999 | 1,000 | | | | |

| $t \backslash k$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,500 | 0,50000 |
| 0,1 | 539 | 539 | 539 | 539 | 539 | 539 | 539 | 539 | 539 | 53983 |
| 0,2 | 577 | 578 | 578 | 578 | 578 | 578 | 578 | 578 | 578 | 57926 |
| 0,3 | 615 | 615 | 616 | 616 | 616 | 616 | 616 | 616 | 616 | 61791 |
| 0,4 | 652 | 652 | 652 | 652 | 653 | 653 | 653 | 653 | 653 | 65542 |
| 0,5 | 686 | 687 | 687 | 688 | 688 | 688 | 688 | 688 | 689 | 69146 |
| 0,6 | 720 | 720 | 721 | 721 | 721 | 722 | 722 | 722 | 722 | 72575 |
| 0,7 | 751 | 751 | 752 | 752 | 753 | 753 | 753 | 754 | 754 | 75804 |
| 0,8 | 780 | 780 | 781 | 782 | 782 | 782 | 783 | 783 | 783 | 78814 |
| 0,9 | 806 | 807 | 808 | 808 | 809 | 809 | 810 | 810 | 810 | 81594 |
| 1,0 | 831 | 832 | 832 | 833 | 833 | 834 | 834 | 835 | 835 | 84134 |
| 1,1 | 853 | 854 | 854 | 855 | 856 | 856 | 857 | 857 | 858 | 86433 |
| 1,2 | 872 | 873 | 874 | 875 | 876 | 876 | 877 | 877 | 878 | 88493 |
| 1,3 | 890 | 891 | 892 | 893 | 893 | 894 | 894 | 895 | 895 | 90320 |
| 1,4 | 906 | 907 | 908 | 908 | 909 | 910 | 910 | 911 | 911 | 91924 |
| 1,5 | 919 | 920 | 921 | 922 | 923 | 924 | 924 | 924 | 925 | 93319 |
| 1,6 | 931 | 932 | 933 | 934 | 935 | 935 | 936 | 936 | 937 | 94520 |
| 1,7 | 941 | 943 | 944 | 945 | 945 | 946 | 946 | 947 | 947 | 95543 |
| 1,8 | 950 | 952 | 952 | 953 | 954 | 955 | 955 | 956 | 956 | 96407 |
| 1,9 | 958 | 959 | 960 | 961 | 962 | 962 | 963 | 963 | 964 | 97128 |
| 2,0 | 965 | 967 | 967 | 966 | 968 | 969 | 969 | 970 | 970 | 97725 |
| 2,2 | 975 | 976 | 977 | 977 | 978 | 979 | 979 | 979 | 980 | 98610 |
| 2,4 | 982 | 983 | 984 | 985 | 985 | 986 | 986 | 986 | 987 | 99180 |
| 2,6 | 988 | 988 | 989 | 990 | 990 | 990 | 991 | 991 | 991 | 99534 |
| 2,8 | 991 | 992 | 992 | 993 | 993 | 994 | 994 | 994 | 994 | 99744 |
| 3,0 | 994 | 994 | 995 | 995 | 996 | 996 | 996 | 996 | 996 | 99865 |
| 3,2 | 996 | 996 | 996 | 997 | 997 | 997 | 997 | 998 | 998 | 99931 |
| 3,4 | 997 | 997 | 998 | 998 | 998 | 998 | 998 | 998 | 998 | 99966 |
| 3,6 | 998 | 998 | 998 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 99984 |
| 3,8 | 998 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 99993 |
| 4,0 | 999 | 999 | 999 | 999 | 999 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 99997 |
| 4,2 | 999 | 999 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | | | | | 99999 |
| 4,4 | 1,000 | 1,000 | | | | | | | | 0,99999 |

**Значения $\gamma$ для доверительного интервала $-\gamma < t < \gamma$, где величина $t$ имеет распределение Стьюдента, в зависимости от доверительной вероятности $\alpha$ и числа степеней свободы $k$** [1]

| $k$ \ $\alpha$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 |
| 2 | 142 | 289 | 445 | 617 | 0,816 | 1,061 | 1,336 |
| 3 | 137 | 277 | 424 | 584 | 765 | 0,978 | 1,250 |
| 4 | 134 | 271 | 414 | 569 | 741 | 941 | 1,190 |
| 5 | 132 | 267 | 408 | 559 | 727 | 920 | 1,156 |
| 6 | 131 | 265 | 404 | 553 | 718 | 906 | 1,134 |
| 7 | 130 | 263 | 402 | 549 | 711 | 896 | 1,119 |
| 8 | 130 | 262 | 399 | 546 | 706 | 889 | 1,108 |
| 9 | 129 | 261 | 398 | 543 | 703 | 883 | 1,100 |
| 10 | 129 | 260 | 397 | 542 | 700 | 879 | 1,093 |
| 11 | 129 | 260 | 396 | 540 | 697 | 876 | 1,088 |
| 12 | 128 | 259 | 395 | 539 | 695 | 873 | 1,083 |
| 13 | 128 | 259 | 394 | 538 | 694 | 870 | 1,079 |
| 14 | 128 | 258 | 393 | 537 | 692 | 868 | 1,076 |
| 15 | 128 | 258 | 393 | 536 | 691 | 866 | 1,074 |
| 16 | 128 | 258 | 392 | 535 | 690 | 865 | 1,071 |
| 17 | 128 | 257 | 392 | 534 | 689 | 863 | 1,069 |
| 18 | 127 | 257 | 392 | 534 | 688 | 862 | 1,067 |
| 19 | 127 | 257 | 391 | 533 | 688 | 861 | 1,066 |
| 20 | 127 | 257 | 391 | 533 | 687 | 860 | 1,064 |
| 21 | 127 | 257 | 391 | 532 | 686 | 859 | 1,063 |
| 22 | 127 | 256 | 390 | 532 | 686 | 858 | 1,061 |
| 23 | 127 | 256 | 390 | 532 | 685 | 858 | 1,060 |
| 24 | 127 | 256 | 390 | 531 | 685 | 857 | 1,059 |
| 25 | 127 | 256 | 390 | 531 | 684 | 856 | 1,058 |
| 26 | 127 | 256 | 390 | 531 | 684 | 856 | 1,058 |
| 27 | 127 | 256 | 389 | 531 | 684 | 855 | 1,057 |
| 28 | 127 | 256 | 389 | 530 | 683 | 855 | 1,056 |
| 29 | 127 | 256 | 389 | 530 | 683 | 854 | 1,055 |
| 30 | 127 | 256 | 389 | 530 | 683 | 854 | 1,055 |
| 40 | 126 | 255 | 388 | 529 | 681 | 851 | 1,050 |
| 60 | 126 | 254 | 387 | 527 | 679 | 848 | 1,046 |
| 120 | 126 | 254 | 386 | 526 | 677 | 845 | 1,041 |
| $\infty$ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 |

[1] В § 31 вместо $\gamma$ используется обозначение $t_\alpha$.

| k \ p | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,08 | 6,31 | 12,71 | 31,8 | 63,7 | 637 |
| 2 | 1,886 | 2,92 | 4,30 | 6,96 | 9,92 | 31,6 |
| 3 | 1,638 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 12,94 |
| 4 | 1,533 | 2,13 | 2,77 | 3,75 | 4,60 | 8,61 |
| 5 | 1,476 | 2,02 | 2,57 | 3,36 | 4,03 | 6,86 |
| 6 | 1,440 | 1,943 | 2,45 | 3,14 | 4,71 | 5,96 |
| 7 | 1,415 | 1,895 | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 5,40 |
| 8 | 1,397 | 1,860 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 5,04 |
| 9 | 1,383 | 1,833 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,78 |
| 10 | 1,372 | 1,812 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,59 |
| 11 | 1,363 | 1,796 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,49 |
| 12 | 1,356 | 1,782 | 2,18 | 2,68 | 3,06 | 4,32 |
| 13 | 1,350 | 1,771 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 4,22 |
| 14 | 1,345 | 1,761 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 4,14 |
| 15 | 1,341 | 1,753 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 4,07 |
| 16 | 1,337 | 1,746 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 4,02 |
| 17 | 1,333 | 1,740 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,96 |
| 18 | 1,330 | 1,734 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,92 |
| 19 | 1,328 | 1,729 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,88 |
| 20 | 1,325 | 1,725 | 2,09 | 2,53 | 2,84 | 3,85 |
| 21 | 1,323 | 1,721 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,82 |
| 22 | 1,321 | 1,717 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,79 |
| 23 | 1,319 | 1,714 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,77 |
| 24 | 1,318 | 1,711 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,74 |
| 25 | 1,316 | 1,708 | 2,06 | 2,48 | 2,79 | 3,72 |
| 26 | 1,315 | 1,706 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,71 |
| 27 | 1,314 | 1,703 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,69 |
| 28 | 1,313 | 1,701 | 2,05 | 2,47 | 2,76 | 3,67 |
| 29 | 1,311 | 1,699 | 2,04 | 2,46 | 2,76 | 3,66 |
| 30 | 1,310 | 1,697 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,65 |
| 40 | 1,303 | 1,684 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,55 |
| 60 | 1,296 | 1,671 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3,46 |
| 120 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,36 | 2,62 | 3,37 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,33 | 2,58 | 3,29 |

## Закон распределения $\chi^2$

$$P\left(\chi^2 \geqslant \chi_q^2\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\cdot 2^{\frac{k}{2}}} \int\limits_{\chi_q^2}^{\infty} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

| $\chi_q^2$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,3173 | 0,6065 | 0,8013 | 0,9098 | 0,9626 | 0,9856 | 0,9948 | 0,9982 |
| 2 | 1574 | 3679 | 5724 | 7358 | 8491 | 9197 | 9598 | 9810 |
| 3 | 0833 | 2231 | 3916 | 5578 | 7000 | 8088 | 8850 | 9344 |
| 4 | 0455 | 1353 | 2615 | 4060 | 5494 | 6767 | 7798 | 8571 |
| 5 | 0254 | 0821 | 1718 | 2873 | 4159 | 5438 | 6600 | 7576 |
| 6 | 0143 | 0498 | 1116 | 1991 | 3062 | 4232 | 5398 | 6472 |
| 7 | 0081 | 0302 | 0719 | 1359 | 2206 | 3208 | 4289 | 5366 |
| 8 | 0047 | 0183 | 0460 | 0916 | 1562 | 2381 | 3326 | 4335 |
| 9 | 0027 | 0111 | 0293 | 0611 | 1091 | 1736 | 2527 | 3423 |
| 10 | 0016 | 0067 | 0186 | 0404 | 0752 | 1247 | 1886 | 2650 |
| 11 | 0009 | 0041 | 0117 | 0266 | 0514 | 0884 | 1386 | 2017 |
| 12 | 0005 | 0025 | 0074 | 0174 | 0348 | 0620 | 1006 | 1512 |
| 13 | 0003 | 0015 | 0046 | 0113 | 0234 | 0430 | 0721 | 1119 |
| 14 | 0002 | 0009 | 0029 | 0073 | 0146 | 0296 | 0512 | 0818 |
| 15 | 0001 | 0006 | 0018 | 0047 | 0104 | 0203 | 0360 | 0591 |
| 16 | 0001 | 0003 | 0011 | 0030 | 0068 | 0138 | 0251 | 0424 |
| 17 | 0,0000 | 0002 | 0007 | 0019 | 0045 | 0093 | 0174 | 0301 |
| 18 | | 0001 | 0004 | 0012 | 0029 | 0062 | 0120 | 0212 |
| 19 | | 0001 | 0003 | 0008 | 0019 | 0042 | 0082 | 0149 |
| 20 | | 0,0000 | 0002 | 0005 | 0013 | 0028 | 0056 | 0103 |
| 21 | | | 0001 | 0003 | 0008 | 0018 | 0038 | 0071 |
| 22 | | | 0001 | 0002 | 0005 | 0012 | 0025 | 0049 |
| 23 | | | 0,0000 | 0001 | 0003 | 0008 | 0017 | 0034 |
| 24 | | | | 0001 | 0002 | 0005 | 0011 | 0023 |
| 25 | | | | 0001 | 0001 | 0003 | 0008 | 0016 |
| 26 | | | | 0,0000 | 0001 | 0002 | 0005 | 0010 |
| 27 | | | | | 0001 | 0001 | 0003 | 0007 |
| 28 | | | | | 0,0000 | 0001 | 0002 | 0005 |
| 29 | | | | | | 0001 | 0001 | 0003 |
| 30 | | | | | | 0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |

| $\chi_q^2$ \ $k$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9994 | 0,9998 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 9915 | 9963 | 9985 | 0,9994 | 0,9998 | 0,9999 | 1,0000 |
| 3 | 9643 | 9814 | 9907 | 9955 | 9979 | 9991 | 0,9996 |
| 4 | 9114 | 9473 | 9699 | 9834 | 9912 | 9955 | 9977 |
| 5 | 0,8343 | 0,8912 | 0,9312 | 0,9580 | 0,9752 | 0,9858 | 0,9921 |

| $\chi_q^2$ \ $k$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0,7399 | 0,8153 | 0,8734 | 0,9161 | 0,9462 | 0,9665 | 0,9797 |
| 7 | 6371 | 7254 | 7991 | 8576 | 9022 | 9347 | 9576 |
| 8 | 5341 | 6288 | 7133 | 7851 | 8436 | 8893 | 9238 |
| 9 | 4373 | 5321 | 6219 | 7029 | 7729 | 8311 | 8775 |
| 10 | 3505 | 4405 | 5304 | 6160 | 6939 | 7622 | 8197 |
| 11 | 2757 | 3575 | 4433 | 5289 | 6108 | 6860 | 7526 |
| 12 | 2133 | 2851 | 3626 | 4457 | 5276 | 6063 | 6790 |
| 13 | 1626 | 2237 | 2933 | 3690 | 4478 | 5265 | 6023 |
| 14 | 1223 | 1730 | 2330 | 3007 | 3738 | 4497 | 5255 |
| 15 | 0909 | 1321 | 1825 | 2414 | 3074 | 3782 | 4514 |
| 16 | 0669 | 0996 | 1411 | 1912 | 2491 | 3134 | 3821 |
| 17 | 0487 | 0744 | 1079 | 1496 | 1993 | 2562 | 3189 |
| 18 | 0352 | 0550 | 0816 | 1157 | 1575 | 2068 | 2627 |
| 19 | 0252 | 0403 | 0611 | 0885 | 1231 | 1649 | 2137 |
| 20 | 0179 | 0293 | 0453 | 0671 | 0952 | 1301 | 1719 |
| 21 | 0126 | 0211 | 0334 | 0504 | 0729 | 1016 | 1368 |
| 22 | 0089 | 0151 | 0244 | 0375 | 0554 | 0786 | 1078 |
| 23 | 0062 | 0107 | 0177 | 0277 | 0417 | 0603 | 0841 |
| 24 | 0043 | 0076 | 0127 | 0203 | 0311 | 0458 | 0651 |
| 25 | 0030 | 0053 | 0091 | 0148 | 0231 | 0346 | 0499 |
| 26 | 0020 | 0037 | 0065 | 0107 | 0170 | 0259 | 0380 |
| 27 | 0014 | 0026 | 0046 | 0077 | 0124 | 0193 | 0287 |
| 28 | 0010 | 0018 | 0032 | 0055 | 0090 | 0142 | 0216 |
| 29 | 0006 | 0012 | 0023 | 0039 | 0065 | 0104 | 0161 |
| 30 | 0,0004 | 0,0009 | 0,0016 | 0,0028 | 0,0047 | 0,0076 | 0,0119 |

| $\chi_q^2$ \ $k$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 3 | 0,9998 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4 | 9989 | 9995 | 0,9998 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 5 | 9958 | 9978 | 9989 | 9994 | 0,9997 | 0,9999 | 0,9999 |
| 6 | 9881 | 9932 | 9962 | 9979 | 9989 | 9994 | 9997 |
| 7 | 9783 | 9835 | 9901 | 9942 | 9967 | 9981 | 9990 |
| 8 | 9489 | 9665 | 9786 | 9867 | 9919 | 9951 | 9972 |
| 9 | 9134 | 9403 | 9597 | 9735 | 9829 | 9892 | 9933 |
| 10 | 8666 | 9036 | 9319 | 9539 | 9682 | 9789 | 9863 |
| 11 | 8095 | 8566 | 8944 | 9238 | 9462 | 9628 | 9747 |
| 12 | 7440 | 8001 | 8472 | 8856 | 9161 | 9396 | 9574 |
| 13 | 6728 | 7362 | 7916 | 8386 | 8774 | 9086 | 9332 |
| 14 | 5987 | 6671 | 7291 | 7837 | 8305 | 8696 | 9015 |
| 15 | 5246 | 5955 | 6620 | 7226 | 7764 | 8230 | 8622 |
| 16 | 4330 | 5238 | 5925 | 6573 | 7166 | 7696 | 8159 |
| 17 | 0,3856 | 0,4544 | 0,5231 | 0,5899 | 0,6530 | 0,7111 | 0,7634 |

| $\chi_q^2$ \ k | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 0,3239 | 0,3888 | 0,4557 | 0,5224 | 0,5874 | 0,6490 | 0,7060 |
| 19 | 2687 | 3285 | 3918 | 4568 | 5218 | 5851 | 6453 |
| 20 | 2202 | 2742 | 3328 | 3946 | 4579 | 5213 | 5830 |
| 21 | 1785 | 2263 | 2794 | 3368 | 3971 | 4589 | 5207 |
| 22 | 1432 | 1847 | 2320 | 2843 | 3405 | 3995 | 4599 |
| 23 | 1137 | 1493 | 1906 | 2373 | 2888 | 3440 | 4017 |
| 24 | 0895 | 1194 | 1550 | 1962 | 2424 | 2931 | 3472 |
| 25 | 0698 | 0947 | 1249 | 1605 | 2014 | 2472 | 2971 |
| 26 | 0540 | 0745 | 0998 | 1302 | 1658 | 2064 | 2517 |
| 27 | 0415 | 0581 | 0790 | 1047 | 1353 | 1709 | 2112 |
| 28 | 0316 | 0449 | 0621 | 0834 | 1094 | 1402 | 1757 |
| 29 | 0239 | 0345 | 0484 | 0660 | 0878 | 1140 | 1449 |
| 30 | 0,0180 | 0,0263 | 0,0374 | 0,0518 | 0,0699 | 0,0920 | 0,1185 |

| $\chi_q^2$ \ k | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 2 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 3 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 4 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 5 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 6 | 0,9999 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 7 | 9995 | 9997 | 0,9999 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 8 | 9984 | 9991 | 9995 | 9997 | 0,9999 | 0,9999 | 1,0000 |
| 9 | 9960 | 9976 | 9986 | 9992 | 9995 | 9997 | 0,9999 |
| 10 | 9913 | 9945 | 9967 | 9980 | 9988 | 9993 | 9996 |
| 11 | 9832 | 9890 | 9929 | 9955 | 9972 | 9983 | 9990 |
| 12 | 9705 | 9799 | 9866 | 9912 | 9943 | 9964 | 9977 |
| 13 | 9520 | 9661 | 9765 | 9840 | 9892 | 9929 | 9954 |
| 14 | 9269 | 9466 | 9617 | 9730 | 9813 | 9872 | 9914 |
| 15 | 8946 | 9208 | 9414 | 9573 | 9694 | 9784 | 9850 |
| 16 | 8553 | 8881 | 9148 | 9362 | 9529 | 9658 | 9755 |
| 17 | 8093 | 8487 | 8818 | 9091 | 9311 | 9486 | 9622 |
| 18 | 7575 | 8030 | 8429 | 8758 | 9035 | 9261 | 9443 |
| 19 | 7012 | 7520 | 7971 | 8364 | 8700 | 8981 | 9213 |
| 20 | 6419 | 6968 | 7468 | 7916 | 8308 | 8645 | 8929 |
| 21 | 5811 | 6387 | 6926 | 7420 | 7863 | 8253 | 8591 |
| 22 | 5203 | 5793 | 6357 | 6887 | 7374 | 7813 | 8202 |
| 23 | 4608 | 5198 | 5776 | 6329 | 6850 | 7330 | 7765 |
| 24 | 4038 | 4616 | 5194 | 5760 | 6303 | 6815 | 7289 |
| 25 | 3503 | 4058 | 4624 | 5190 | 5745 | 6278 | 6782 |
| 26 | 3009 | 3532 | 4076 | 4631 | 5186 | 5730 | 6255 |
| 27 | 2560 | 3045 | 3559 | 4093 | 4638 | 5182 | 5717 |
| 28 | 2158 | 2600 | 3079 | 3585 | 4110 | 4644 | 5179 |
| 29 | 1803 | 2201 | 2639 | 3111 | 3609 | 4125 | 4651 |
| 30 | 0,1494 | 0,1848 | 0,2243 | 0,2676 | 0,3142 | 0,3632 | 0,4140 |

**Нижняя $\gamma_1$ и верхняя $\gamma_2$ границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения $\sigma$: $\gamma_1\tilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\tilde{\sigma}$**

$$\left(\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

**в зависимости от доверительной вероятности $\alpha$ и числа степеней свободы $k$**

| $k$ \ $\alpha$ | 0,99 | | 0,98 | | 0,95 | | 0,90 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ |
| 1 | 0,356 | 159 | 0,388 | 79,8 | 0,446 | 31,9 | 0,510 | 15,9 |
| 2 | 0,434 | 14,1 | 0,466 | 9,97 | 0,521 | 6,28 | 0,578 | 4,40 |
| 3 | 0,483 | 6,47 | 0,514 | 5,11 | 0,566 | 3,73 | 0,620 | 2,92 |
| 4 | 0,519 | 4,39 | 0,549 | 3,67 | 0,599 | 2,87 | 0,649 | 2,37 |
| 5 | 0,546 | 3,48 | 0,576 | 3,00 | 0,624 | 2,45 | 0,672 | 2,090 |
| 6 | 0,569 | 2,98 | 0,597 | 2,62 | 0,644 | 2,202 | 0,690 | 1,916 |
| 7 | 0,588 | 2,66 | 0,616 | 2,377 | 0,661 | 2,035 | 0,705 | 1,797 |
| 8 | 0,604 | 2,440 | 0,631 | 2,205 | 0,675 | 1,916 | 0,718 | 1,711 |
| 9 | 0,618 | 2,277 | 0,644 | 2,076 | 0,688 | 1,826 | 0,729 | 1,645 |
| 10 | 0,630 | 2,154 | 0,656 | 1,977 | 0,699 | 1,755 | 0,739 | 1,593 |
| 11 | 0,641 | 2,056 | 0,667 | 1,898 | 0,708 | 1,698 | 0,748 | 1,550 |
| 12 | 0,651 | 1,976 | 0,677 | 1,833 | 0,717 | 1,651 | 0,755 | 1,515 |
| 13 | 0,660 | 1,910 | 0,685 | 1,779 | 0,725 | 1,611 | 0,762 | 1,485 |
| 14 | 0,669 | 1,854 | 0,693 | 1,733 | 0,732 | 1,577 | 0,769 | 1,460 |
| 15 | 0,676 | 1,806 | 0,700 | 1,694 | 0,739 | 1,548 | 0,775 | 1,437 |
| 16 | 0,683 | 1,764 | 0,707 | 1,659 | 0,745 | 1,522 | 0,780 | 1,418 |
| 17 | 0,690 | 1,727 | 0,713 | 1,629 | 0,750 | 1,499 | 0,785 | 1,400 |
| 18 | 0,696 | 1,695 | 0,719 | 1,602 | 0,756 | 1,479 | 0,790 | 1,385 |
| 19 | 0,702 | 1,666 | 0,725 | 1,578 | 0,760 | 1,460 | 0,794 | 1,370 |
| 20 | 0,707 | 1,640 | 0,730 | 1,556 | 0,765 | 1,444 | 0,798 | 1,358 |
| 21 | 0,712 | 1,617 | 0,734 | 1,536 | 0,769 | 1,429 | 0,802 | 1,346 |
| 22 | 0,717 | 1,595 | 0,739 | 1,519 | 0,773 | 1,416 | 0,805 | 1,335 |
| 23 | 0,722 | 1,576 | 0,743 | 1,502 | 0,777 | 1,402 | 0,809 | 1,326 |
| 24 | 0,726 | 1,558 | 0,747 | 1,487 | 0,781 | 1,391 | 0,812 | 1,316 |
| 25 | 0,730 | 1,541 | 0,751 | 1,473 | 0,784 | 1,380 | 0,815 | 1,308 |
| 26 | 0,734 | 1,526 | 0,755 | 1,460 | 0,788 | 1,371 | 0,818 | 1,300 |
| 27 | 0,737 | 1,512 | 0,758 | 1,448 | 0,791 | 1,361 | 0,820 | 1,293 |
| 28 | 0,741 | 1,499 | 0,762 | 1,436 | 0,794 | 1,352 | 0,823 | 1,286 |
| 29 | 0,744 | 1,487 | 0,765 | 1,426 | 0,796 | 1,344 | 0,825 | 1,279 |
| 30 | 0,748 | 1,475 | 0,768 | 1,417 | 0,799 | 1,337 | 0,828 | 1,274 |
| 40 | 0,774 | 1,390 | 0,792 | 1,344 | 0,821 | 1,279 | 0,847 | 1,228 |
| 50 | 0,793 | 1,336 | 0,810 | 1,297 | 0,837 | 1,243 | 0,861 | 1,199 |
| 60 | 0,808 | 1,299 | 0,824 | 1,265 | 0,849 | 1,217 | 0,871 | 1,179 |
| 70 | 0,820 | 1,272 | 0,835 | 1,241 | 0,858 | 1,198 | 0,879 | 1,163 |
| 80 | 0,829 | 1,250 | 0,844 | 1,222 | 0,866 | 1,183 | 0,886 | 1,151 |
| 90 | 0,838 | 1,233 | 0,852 | 1,207 | 0,873 | 1,171 | 0,892 | 1,141 |
| 100 | 0,845 | 1,219 | 0,858 | 1,195 | 0,878 | 1,161 | 0,897 | 1,133 |
| 120 | 0,887 | 1,150 | 0,897 | 1,130 | 0,912 | 1,110 | 0,925 | 1,106 |

**Вероятности того, что относительная ошибка в среднем квадратическом отклонении не превзойдет данной величины $q$:**

$$P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right)$$

| $k$ \ $q$ | 0,001 | 0,002 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,10 | 0,15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,001 | 0,002 | 0,005 | 0,010 | 0,019 | 0,039 | 0,058 | 0,077 | 0,097 | 0,145 |
| 2 | 001 | 003 | 007 | 015 | 029 | 059 | 088 | 118 | 147 | 219 |
| 3 | 002 | 004 | 009 | 019 | 037 | 074 | 111 | 147 | 184 | 273 |
| 4 | 002 | 004 | 011 | 022 | 043 | 086 | 129 | 172 | 214 | 317 |
| 5 | 002 | 005 | 012 | 024 | 049 | 097 | 146 | 194 | 241 | 355 |
| 6 | 003 | 005 | 013 | 027 | 054 | 107 | 160 | 213 | 264 | 388 |
| 7 | 003 | 006 | 015 | 029 | 058 | 116 | 174 | 230 | 286 | 417 |
| 8 | 003 | 006 | 016 | 031 | 062 | 125 | 186 | 246 | 305 | 444 |
| 9 | 003 | 007 | 017 | 033 | 066 | 132 | 197 | 261 | 323 | 469 |
| 10 | 004 | 007 | 018 | 035 | 070 | 140 | 208 | 275 | 340 | 491 |
| 12 | 004 | 008 | 019 | 039 | 077 | 155 | 228 | 301 | 371 | 532 |
| 14 | 004 | 008 | 021 | 042 | 083 | 166 | 246 | 325 | 399 | 567 |
| 16 | 004 | 009 | 022 | 045 | 089 | 177 | 263 | 346 | 425 | 599 |
| 18 | 005 | 009 | 024 | 047 | 095 | 188 | 279 | 366 | 448 | 627 |
| 20 | 005 | 010 | 025 | 060 | 100 | 198 | 293 | 384 | 470 | 652 |
| 25 | 006 | 011 | 028 | 056 | 112 | 221 | 327 | 426 | 518 | 706 |
| 30 | 006 | 012 | 031 | 061 | 122 | 242 | 356 | 462 | 559 | 749 |
| 35 | 007 | 013 | 033 | 067 | 133 | 262 | 384 | 497 | 597 | 787 |
| 40 | 007 | 014 | 036 | 072 | 142 | 279 | 408 | 525 | 628 | 815 |
| 45 | 008 | 015 | 038 | 076 | 150 | 295 | 431 | 552 | 657 | 840 |
| 50 | 008 | 016 | 040 | 080 | 158 | 303 | 452 | 576 | 682 | 860 |
| 60 | 009 | 017 | 044 | 087 | 173 | 339 | 489 | 619 | 726 | 893 |
| 70 | 009 | 019 | 047 | 094 | 187 | 364 | 522 | 656 | 762 | 917 |
| 80 | 010 | 020 | 050 | 101 | 200 | 387 | 552 | 688 | 792 | 935 |
| 90 | 011 | 021 | 053 | 107 | 211 | 408 | 579 | 716 | 818 | 949 |
| 100 | 011 | 022 | 056 | 112 | 222 | 428 | 604 | 741 | 840 | 959 |
| 150 | 014 | 028 | 069 | 137 | 271 | 500 | 701 | 833 | 914 | 986 |
| 200 | 016 | 032 | 080 | 158 | 311 | 576 | 769 | 888 | 951 | 995 |
| 250 | 018 | 036 | 089 | 177 | 345 | 629 | 815 | 924 | 972 | 0,998 |
| 500 | 025 | 050 | 126 | 248 | 473 | 794 | 941 | 987 | 0,998 | 1,000 |
| 1000 | 0,036 | 0,071 | 0,177 | 0,345 | 0,629 | 0,926 | 0,992 | 0,999 | 1,000 | |

| k \ q | 0,20 | 0,25 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 0,100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,193 | 0,241 | 0,289 | 0,379 | 0,458 | 0,520 | 0,556 | 0,579 | 0,599 | 0,617 |
| 2 | 290 | 358 | 423 | 538 | 623 | 675 | 707 | 734 | 759 | 779 |
| 3 | 359 | 440 | 515 | 636 | 714 | 759 | 792 | 819 | 842 | 861 |
| 4 | 414 | 504 | 583 | 703 | 774 | 815 | 847 | 872 | 893 | 910 |
| 5 | 461 | 556 | 637 | 752 | 816 | 856 | 885 | 908 | 926 | 940 |
| 6 | 501 | 599 | 681 | 791 | 849 | 886 | 913 | 933 | 948 | 959 |
| 7 | 536 | 636 | 717 | 821 | 874 | 908 | 932 | 950 | 963 | 972 |
| 8 | 567 | 669 | 748 | 845 | 895 | 926 | 948 | 963 | 974 | 981 |
| 9 | 595 | 697 | 774 | 865 | 911 | 940 | 960 | 972 | 981 | 987 |
| 10 | 620 | 722 | 797 | 882 | 925 | 951 | 968 | 979 | 986 | 991 |
| 12 | 664 | 764 | 833 | 909 | 946 | 968 | 980 | 988 | 993 | 996 |
| 14 | 701 | 798 | 862 | 929 | 960 | 978 | 988 | 993 | 996 | 998 |
| 16 | 733 | 826 | 885 | 944 | 971 | 985 | 992 | 996 | 998 | 999 |
| 18 | 760 | 849 | 903 | 955 | 980 | 990 | 995 | 998 | 999 | 0,999 |
| 20 | 784 | 868 | 918 | 964 | 984 | 993 | 997 | 0,999 | 0,999 | 1,000 |
| 25 | 832 | 905 | 944 | 979 | 992 | 997 | 0,999 | 1,000 | 1,000 | |
| 30 | 867 | 930 | 962 | 988 | 996 | 998 | 1,000 | | | |
| 35 | 893 | 944 | 969 | 990 | 997 | 0,999 | | | | |
| 40 | 913 | 957 | 978 | 998 | 998 | 1,000 | | | | |
| 45 | 929 | 967 | 984 | 996 | 999 | | | | | |
| 50 | 942 | 974 | 988 | 998 | 0,999 | | | | | |
| 60 | 960 | 984 | 993 | 0,999 | 1,000 | | | | | |
| 70 | 972 | 990 | 996 | 1,000 | | | | | | |
| 80 | 980 | 994 | 998 | | | | | | | |
| 90 | 986 | 996 | 999 | | | | | | | |
| 100 | 990 | 0,997 | 0,999 | | | | | | | |
| 150 | 0,998 | 1,000 | 1,000 | | | | | | | |
| 200 | 1,000 | | | | | | | | | |
| 250 | | | | | | | | | | |
| 500 | | | | | | | | | | |
| 1000 | | | | | | | | | | |

**Вероятности $P(\lambda) = 1 - K(\lambda)$ распределения Колмогорова**

| $\lambda$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 0,99999 | 99998 | 99995 | 99991 | 99983 | 99970 | 99949 | 99917 | 99872 | 99807 |
| 0,4 | 99719 | 99603 | 99452 | 99262 | 99027 | 98741 | 98400 | 97998 | 97532 | 96998 |
| 0,5 | 96394 | 95719 | 94969 | 94147 | 93250 | 92282 | 91242 | 90134 | 88960 | 87724 |
| 0,6 | 86428 | 85077 | 83678 | 82225 | 80732 | 79201 | 77636 | 76042 | 74422 | 72781 |
| 0,7 | 71124 | 69453 | 67774 | 66089 | 64402 | 62717 | 61036 | 59367 | 57700 | 56050 |
| 0,8 | 54414 | 52796 | 51197 | 49619 | 48063 | 46532 | 45026 | 43545 | 42093 | 40668 |
| 0,9 | 39273 | 37907 | 36571 | 35266 | 33992 | 32748 | 31536 | 30356 | 39206 | 28087 |
| 1,0 | 27000 | 25943 | 24917 | 23922 | 22957 | 22021 | 21114 | 20236 | 19387 | 18566 |
| 1,1 | 17772 | 17005 | 16264 | 15550 | 14861 | 14196 | 13556 | 12939 | 12355 | 11774 |
| 1,2 | 11225 | 10797 | 10190 | 09703 | 09235 | 08787 | 08357 | 07944 | 07550 | 07171 |
| 1,3 | 0,06809 | 6463 | 6132 | 5815 | 5513 | 5224 | 4949 | 4686 | 4435 | 4196 |
| 1,4 | 3968 | 3751 | 3545 | 3348 | 3162 | 2984 | 2815 | 2655 | 2503 | 2359 |
| 1,5 | 2222 | 2092 | 1969 | 1852 | 1742 | 1638 | 1539 | 1446 | 1357 | 1274 |
| 1,6 | 1195 | 1121 | 1051 | 0985 | 0922 | 0864 | 0808 | 0756 | 0707 | 0661 |
| 1,7 | 0,00618 | 577 | 539 | 503 | 469 | 438 | 408 | 380 | 354 | 330 |
| 1,8 | 307 | 285 | 265 | 247 | 229 | 213 | 198 | 186 | 170 | 158 |
| 1,9 | 146 | 136 | 126 | 115 | 107 | 100 | 092 | 085 | 079 | 073 |
| 2,0 | 0,00067 | 62 | 57 | 53 | 48 | 45 | 41 | 38 | 35 | 32 |
| 2,1 | 30 | 27 | 25 | 23 | 21 | 19 | 18 | 16 | 15 | 14 |
| 2,2 | 13 | 11 | 10 | 10 | 09 | 08 | 07 | 07 | 06 | 06 |
| 2,3 | 0,00005 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 2,4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2,5 | 0,00001 | 0 | | | | | | | | |

При $\lambda < 0{,}30$ $\quad P(\lambda) = 1;$

$\lambda > 2{,}50$ $\quad P(\lambda) = 0.$

В крайнем левом столбце указаны целые и десятые доли величины $\lambda$, а в верхней строке — ее сотые доли.

ПРИЛОЖЕНИЕ 15

$$P = 1 - e^{-\varrho^2 k^2}$$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0023 | 0091 | 0203 | 0357 | 0553 | 0786 | 1055 | 1355 | 1683 |
| 1 | 2034 | 2406 | 2793 | 3192 | 3597 | 4006 | 4414 | 4819 | 5215 | 5601 |
| 2 | 5975 | 6333 | 6675 | 6998 | 7303 | 7585 | 7852 | 8096 | 8320 | 8524 |
| 3 | 8709 | 8876 | 9026 | 9160 | 9279 | 9384 | 9476 | 9556 | 9626 | 9686 |
| 4 | 9737 | 9782 | 9819 | 9851 | 9878 | 9900 | 9919 | 9934 | 9947 | 9958 |
| 5 | 0,9966 | 9973 | 9979 | 9983 | 9987 | 9990 | 9992 | 9994 | 9995 | 9996 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 16

$$P = \frac{2\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_0^k e^{-\varrho^2 z^2}\, dz - 2k \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} e^{-\varrho^2 k^2}$$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0001 | 0007 | 0022 | 0051 | 0099 | 0168 | 0262 | 0383 | 0533 |
| 1 | 0713 | 0923 | 1163 | 1431 | 1726 | 2045 | 2385 | 2744 | 3117 | 3502 |
| 2 | 3894 | 4239 | 4684 | 5076 | 5461 | 5836 | 6199 | 6547 | 6878 | 7191 |
| 3 | 7486 | 7760 | 8014 | 8248 | 8462 | 8657 | 8832 | 8990 | 9130 | 9255 |
| 4 | 9365 | 9461 | 9545 | 9618 | 9680 | 9734 | 9780 | 9819 | 9851 | 9878 |
| 5 | 0,9901 | 9920 | 9936 | 9949 | 9959 | 9967 | 9974 | 9979 | 9984 | 9988 |

В крайнем левом столбце приложений 15 и 16 помещены целые, а в верхней строке —десятые доли входной величины $k$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 17

**Функция** $-p \log_2 p$

| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,000 | 066 | 113 | 152 | 186 | 216 | 244 | 269 | 292 | 313 |
| 0,1 | 332 | 350 | 367 | 383 | 397 | 410 | 423 | 435 | 445 | 455 |
| 0,2 | 464 | 473 | 481 | 488 | 494 | 500 | 505 | 510 | 514 | 518 |
| 0,3 | 521 | 524 | 526 | 528 | 529 | 530 | 531 | 531 | 530 | 530 |
| 0,4 | 529 | 527 | 526 | 524 | 521 | 518 | 515 | 512 | 508 | 504 |
| 0,5 | 500 | 495 | 490 | 485 | 480 | 474 | 468 | 462 | 456 | 449 |
| 0,6 | 442 | 435 | 428 | 420 | 412 | 404 | 396 | 387 | 378 | 369 |
| 0,7 | 360 | 351 | 341 | 331 | 321 | 311 | 301 | 290 | 280 | 269 |
| 0,8 | 258 | 246 | 235 | 223 | 211 | 199 | 187 | 175 | 162 | 150 |
| 0,9 | 137 | 124 | 111 | 097 | 084 | 070 | 056 | 043 | 029 | 014 |
| 1,0 | 0,000 | | | | | | | | | |

В крайнем левом столбце помещены десятые, а в верхней строке — сотые доли величины $p$.

## Ортогональные полиномы Чебышева

$n = 5$ (6 точек)

| $x$ | $P_{1,5}(x)$ | $P_{2,5}(x)$ | $P_{3,5}(x)$ | $P_{4,5}(x)$ | $P_{5,5}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 5 | 5 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | −1 | −7 | −3 | −5 |
| 2 | 1 | −4 | −4 | 2 | 10 |
| 3 | −1 | −4 | 4 | 2 | −10 |
| 4 | −3 | −1 | 7 | −3 | 5 |
| 5 | −5 | 5 | −5 | 1 | −1 |
| $S_m$ | 70 | 84 | 180 | 28 | 252 |

$n = 6$ (7 точек)

| $x$ | $P_{1,6}(x)$ | $P_{2,6}(x)$ | $P_{3,6}(x)$ | $P_{4,6}(x)$ | $P_{5,6}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 5 | 1 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | −1 | −7 | −4 |
| 2 | 1 | −3 | −1 | 1 | 5 |
| 3 | 0 | −4 | 0 | 6 | 0 |
| 4 | −1 | −3 | 1 | 1 | −5 |
| 5 | −2 | 0 | 1 | −7 | 4 |
| 6 | −3 | 5 | −1 | 3 | −1 |
| $S_m$ | 28 | 84 | 6 | 154 | 84 |

$n = 7$ (8 точек)

| $x$ | $P_{1,7}(x)$ | $P_{2,7}(x)$ | $P_{3,7}(x)$ | $P_{4,7}(x)$ | $P_{5,7}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 1 | 5 | 1 | −5 | −13 | −23 |
| 2 | 3 | −3 | −7 | −3 | 17 |
| 3 | 1 | −5 | −3 | 9 | 15 |
| 4 | −1 | −5 | 3 | 9 | −15 |
| 5 | −3 | −3 | 7 | −3 | −17 |
| 6 | −5 | 1 | 5 | −13 | 23 |
| 7 | −7 | 7 | −7 | 7 | −7 |
| $S_m$ | 168 | 168 | 264 | 616 | 2184 |

$n = 8$ (9 точек)

| $x$ | $P_{1,8}(x)$ | $P_{2,8}(x)$ | $P_{3,8}(x)$ | $P_{4,8}(x)$ | $P_{5,8}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 28 | 14 | 14 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | −7 | −21 | −11 |
| 2 | 2 | −8 | −13 | −11 | 4 |
| 3 | 1 | −17 | −9 | 9 | 9 |
| 4 | 0 | −20 | 0 | 18 | 0 |
| 5 | −1 | −17 | 9 | 9 | −9 |
| 6 | −2 | −8 | 13 | −11 | −4 |
| 7 | −3 | 7 | 7 | −21 | 11 |
| 8 | −4 | 28 | −14 | 14 | −4 |
| $S_m$ | 60 | 2772 | 990 | 2002 | 468 |

$n = 9$ (10 точек)

| $x$ | $P_{1,9}(x)$ | $P_{2,9}(x)$ | $P_{3,9}(x)$ | $P_{4,9}(x)$ | $P_{5,9}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9 | 6 | 42 | 18 | 6 |
| 1 | 7 | 2 | −14 | −22 | −14 |
| 2 | 5 | −1 | −35 | −17 | 1 |
| 3 | 3 | −3 | −31 | 3 | 11 |
| 4 | 1 | −4 | −12 | 18 | 6 |
| 5 | −1 | −4 | −12 | 18 | −6 |
| 6 | −3 | −3 | 31 | 3 | −11 |
| 7 | −5 | −1 | 35 | −17 | −1 |
| 8 | −7 | 2 | 14 | −22 | 14 |
| 9 | −9 | 6 | −42 | 18 | −6 |
| $S_m$ | 330 | 132 | 8580 | 2860 | 780 |

$n = 10$ (11 точек)

| $x$ | $P_{1,10}(x)$ | $P_{2,10}(x)$ | $P_{3,10}(x)$ | $P_{4,10}(x)$ | $P_{5,10}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 15 | 30 | 6 | 3 |
| 1 | 4 | 6 | −6 | −6 | −6 |
| 2 | 3 | −1 | −22 | −6 | −1 |
| 3 | 2 | −6 | −23 | −1 | 4 |
| 4 | 1 | −9 | −14 | 4 | 4 |
| 5 | 0 | −10 | 0 | 6 | 0 |
| 6 | −1 | −9 | 14 | 4 | −4 |
| 7 | −2 | −6 | 23 | −1 | −4 |
| 8 | −3 | −1 | 22 | −6 | 1 |
| 9 | −4 | 6 | 6 | −6 | 6 |
| 10 | −5 | 15 | −30 | 6 | −3 |
| $S_m$ | 110 | 858 | 4290 | 286 | 156 |

$n = 11$ (12 точек)

| $x$ | $P_{1,11}(x)$ | $P_{2,11}(x)$ | $P_{3,11}(x)$ | $P_{4,11}(x)$ | $P_{5,11}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 11 | 55 | 33 | 33 | 33 |
| 1 | 9 | 25 | —3 | —27 | —57 |
| 2 | 7 | 1 | —21 | —33 | —21 |
| 3 | 5 | —17 | —25 | —13 | 29 |
| 4 | 3 | —29 | —19 | 12 | 44 |
| 5 | 1 | —35 | —7 | 28 | 20 |
| 6 | —1 | —35 | 7 | 28 | —20 |
| 7 | —3 | —29 | 19 | 12 | —44 |
| 8 | —5 | —17 | 25 | —13 | —29 |
| 9 | —7 | 1 | 21 | —33 | 21 |
| 10 | —9 | 25 | 3 | —27 | 57 |
| 11 | —11 | 55 | —33 | 33 | —33 |
| $S_m$ | 572 | 12012 | 5148 | 8008 | 15912 |

$n = 12$ (13 точек)

| $x$ | $P_{1,12}(x)$ | $P_{2,12}(x)$ | $P_{3,12}(x)$ | $P_{4,12}(x)$ | $P_{5,12}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 22 | 11 | 99 | 22 |
| 1 | 5 | 11 | 0 | —66 | —33 |
| 2 | 4 | 2 | —6 | —96 | —18 |
| 3 | 3 | —5 | —8 | —54 | 11 |
| 4 | 2 | —10 | —7 | 11 | 26 |
| 5 | 1 | —13 | —4 | 64 | 20 |
| 6 | 0 | —14 | 0 | 84 | 0 |
| 7 | —1 | —13 | 4 | 64 | —20 |
| 8 | —2 | —10 | 7 | 11 | —26 |
| 9 | —3 | —5 | 8 | —54 | —11 |
| 10 | —4 | 2 | 6 | —96 | 18 |
| 11 | —5 | 11 | 0 | —66 | 33 |
| 12 | —6 | 22 | —11 | 99 | —22 |
| $S_m$ | 182 | 2002 | 572 | 68068 | 6188 |

$n = 13$ (14 точек)

| $x$ | $P_{1,13}(x)$ | $P_{2,13}(x)$ | $P_{3,13}(x)$ | $P_{4,13}(x)$ | $P_{5,13}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 13 | 13 | 143 | 143 | 143 |
| 1 | 11 | 7 | 11 | —77 | —187 |
| 2 | 9 | 2 | —66 | —132 | —132 |
| 3 | 7 | —2 | —98 | —92 | 28 |
| 4 | 5 | —5 | —95 | —13 | 139 |
| 5 | 3 | —7 | —67 | 63 | 145 |
| 6 | 1 | —8 | —24 | 108 | 60 |
| 7 | —1 | —8 | 24 | 108 | —60 |
| 8 | —3 | —7 | 67 | 63 | —145 |
| 9 | —5 | —5 | 95 | —13 | —139 |
| 10 | —7 | —2 | 98 | —92 | —28 |
| 11 | —9 | 2 | 66 | —132 | 132 |
| 12 | —11 | 7 | —11 | —77 | 187 |
| 13 | —13 | 13 | —143 | 143 | —143 |
| $S_m$ | 910 | 728 | 97240 | 136136 | 235144 |

$n = 14$ (15 точек)

| $x$ | $P_{1,14}(x)$ | $P_{2,14}(x)$ | $P_{3,14}(x)$ | $P_{4,14}(x)$ | $P_{5,14}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 91 | 91 | 1001 | 1001 |
| 1 | 6 | 52 | 13 | —429 | —1144 |
| 2 | 5 | 19 | —35 | —869 | —979 |
| 3 | 4 | —8 | —58 | —704 | —44 |
| 4 | 3 | —29 | —61 | —249 | 751 |
| 5 | 2 | —44 | —49 | 251 | 1000 |
| 6 | 1 | —53 | —27 | 621 | 675 |
| 7 | 0 | —56 | 0 | 756 | 0 |
| 8 | —1 | —53 | 27 | 621 | —675 |
| 9 | —2 | —44 | 49 | 251 | —1000 |
| 10 | —3 | —29 | 61 | —249 | —751 |
| 11 | —4 | —8 | 58 | —704 | 44 |
| 12 | —5 | 19 | 35 | —869 | 979 |
| 13 | —6 | 52 | —13 | —429 | 1144 |
| 14 | —7 | 91 | —91 | 1001 | —1001 |
| $S_m$ | 280 | 37128 | 39780 | 6466460 | 10581480 |

$n = 15$ (16 точек)

| $x$ | $P_{1,15}(x)$ | $P_{2,15}(x)$ | $P_{3,15}(x)$ | $P_{4,15}(x)$ | $P_{5,15}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 15 | 35 | 455 | 273 | 143 |
| 1 | 13 | 21 | 91 | —91 | —143 |
| 2 | 11 | 9 | —143 | —221 | —143 |
| 3 | 9 | —1 | —267 | —201 | —33 |
| 4 | 7 | —9 | —301 | —101 | 77 |
| 5 | 5 | —15 | —265 | 23 | 131 |
| 6 | 3 | —19 | —179 | 129 | 115 |
| 7 | 1 | —21 | —63 | 189 | 45 |
| 8 | —1 | —21 | 63 | 189 | —45 |
| 9 | —3 | —19 | 179 | 129 | —115 |
| 10 | —5 | —15 | 265 | 23 | —131 |
| 11 | —7 | —9 | 301 | —101 | —77 |
| 12 | —9 | —1 | 267 | —201 | 33 |
| 13 | —11 | 9 | 143 | —221 | 143 |
| 14 | —13 | 21 | —91 | —91 | 143 |
| 15 | —15 | 35 | —455 | 273 | —143 |
| $S_m$ | 1360 | 5712 | 1007760 | 470288 | 201552 |

$n = 16$ (17 точек)

| $x$ | $P_{1,16}(x)$ | $P_{2,16}(x)$ | $P_{3,16}(x)$ | $P_{4,16}(x)$ | $P_{5,16}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 40 | 28 | 52 | 104 |
| 1 | 7 | 25 | 7 | —13 | — 91 |
| 2 | 6 | 12 | — 7 | —39 | —104 |
| 3 | 5 | 1 | —15 | —39 | — 39 |
| 4 | 4 | — 8 | —18 | —24 | 36 |
| 5 | 3 | —15 | —17 | — 3 | 83 |
| 6 | 2 | —20 | —13 | 17 | 88 |
| 7 | 1 | —23 | — 7 | 31 | 55 |
| 8 | 0 | —24 | 0 | 36 | 0 |
| 9 | —1 | —23 | 7 | 31 | — 55 |
| 10 | —2 | —20 | 13 | 17 | — 88 |
| 11 | —3 | —15 | 17 | — 3 | — 83 |
| 12 | —4 | 8 | 18 | —24 | — 36 |
| 13 | —5 | 1 | 15 | —39 | 39 |
| 14 | —6 | 12 | 7 | —39 | 104 |
| 15 | —7 | 25 | — 7 | —13 | 91 |
| 16 | —8 | 40 | —28 | 52 | —104 |
| $S_m$ | 408 | 7752 | 3876 | 16756 | 100776 |

$n = 18$ (19 точек)

| $x$ | $P_{1,18}(x)$ | $P_{2,18}(x)$ | $P_{3,18}(x)$ | $P_{4,18}(x)$ | $P_{5,18}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9 | 51 | 204 | 612 | 102 |
| 1 | 8 | 34 | 68 | — 68 | — 68 |
| 2 | 7 | 19 | — 28 | —388 | — 98 |
| 3 | 6 | 6 | — 89 | —453 | — 58 |
| 4 | 5 | — 5 | —120 | —354 | 3 |
| 5 | 4 | —14 | —126 | —168 | 54 |
| 6 | 3 | —21 | —112 | 42 | 79 |
| 7 | 2 | —26 | — 83 | 227 | 74 |
| 8 | 1 | —29 | — 44 | 352 | 44 |
| 9 | 0 | —30 | 0 | 396 | 0 |
| 10 | —1 | —29 | 44 | 352 | — 44 |
| 11 | —2 | —26 | 83 | 227 | — 74 |
| 12 | —3 | —21 | 112 | 42 | — 79 |
| 13 | —4 | —14 | 126 | —168 | — 54 |
| 14 | —5 | — 5 | 120 | —354 | — 3 |
| 15 | —6 | 6 | 89 | —453 | 58 |
| 16 | —7 | 19 | 28 | —388 | 98 |
| 17 | —8 | 34 | — 68 | — 68 | 68 |
| 18 | —9 | 51 | —204 | 612 | —102 |
| $S_m$ | 570 | 13566 | 213180 | 2288132 | 89143 |

$n = 17$ (18 точек)

| $x$ | $P_{1,17}(x)$ | $P_{2,17}(x)$ | $P_{3,17}(x)$ | $P_{4,17}(x)$ | $P_{5,17}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 17 | 68 | 68 | 68 | 884 |
| 1 | 15 | 44 | 20 | —12 | —676 |
| 2 | 13 | 23 | —13 | —47 | —871 |
| 3 | 11 | 5 | —33 | —51 | —429 |
| 4 | 9 | —10 | —42 | —36 | 156 |
| 5 | 7 | —22 | —42 | —12 | 588 |
| 6 | 5 | —31 | —35 | 13 | 733 |
| 7 | 3 | —37 | —23 | 33 | 583 |
| 8 | 1 | —40 | — 8 | 44 | 220 |
| 9 | — 1 | —40 | 8 | 44 | —220 |
| 10 | — 3 | —37 | 23 | 33 | —583 |
| 11 | — 5 | —31 | 35 | 13 | —733 |
| 12 | — 7 | —22 | 42 | —12 | —588 |
| 13 | — 9 | —10 | 42 | —36 | —156 |
| 14 | —11 | 5 | 33 | —51 | 429 |
| 15 | —13 | 23 | 13 | —47 | 871 |
| 16 | —15 | 44 | —20 | —12 | 676 |
| 17 | —17 | 68 | —68 | 68 | —884 |
| $S_m$ | 1938 | 23256 | 23256 | 28424 | 6953544 |

$n = 19$ (20 точек)

| $x$ | $P_{1,19}(x)$ | $P_{2,19}(x)$ | $P_{3,19}(x)$ | $P_{4,19}(x)$ | $P_{5,19}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 19 | 57 | 969 | 1938 | 1938 |
| 1 | 17 | 39 | 357 | — 102 | —1122 |
| 2 | 15 | 23 | — 85 | —1122 | —1802 |
| 3 | 13 | 9 | —377 | —1402 | —1222 |
| 4 | 11 | — 3 | —539 | —1187 | — 187 |
| 5 | 9 | —13 | —591 | — 687 | 771 |
| 6 | 7 | —21 | —553 | —77 | 1351 |
| 7 | 5 | —27 | —445 | 503 | 1441 |
| 8 | 3 | —31 | —287 | 948 | 1076 |
| 9 | 1 | —33 | — 99 | 1188 | 396 |
| 10 | —1 | —33 | 99 | 1188 | — 396 |
| 11 | —3 | —31 | 287 | 948 | —1076 |
| 12 | —5 | —27 | 445 | 503 | —1441 |
| 13 | —7 | —21 | 553 | —77 | —1351 |
| 14 | —9 | —13 | 591 | — 687 | — 771 |
| 15 | —11 | — 3 | 539 | —1187 | 187 |
| 16 | —13 | 9 | 377 | —1402 | 1222 |
| 17 | —15 | 23 | 85 | —1122 | 1802 |
| 18 | —17 | 39 | —357 | — 102 | 1122 |
| 19 | —19 | 57 | —969 | 1938 | —1938 |
| $S_m$ | 2660 | 17556 | 4903140 | 22881320 | 31201800 |

$n = 20$ (21 точка)

| $x$ | $P_{1,20}(x)$ | $P_{2,20}(x)$ | $P_{3,20}(x)$ | $P_{4,20}(x)$ | $P_{5,20}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 190 | 285 | 969 | 3876 |
| 1 | 9 | 135 | 114 | 0 | —1938 |
| 2 | 8 | 82 | — 12 | —510 | —3468 |
| 3 | 7 | 37 | — 98 | —680 | —2618 |
| 4 | 6 | — 2 | —149 | —615 | — 788 |
| 5 | 5 | — 35 | —170 | —406 | 1063 |
| 6 | 4 | — 62 | —166 | —130 | 2354 |
| 7 | 3 | — 83 | —142 | 150 | 2819 |
| 8 | 2 | — 98 | —103 | 385 | 2444 |
| 9 | 1 | —107 | — 54 | 540 | 1404 |
| 10 | 0 | —110 | 0 | 594 | 0 |
| 11 | —1 | —107 | 54 | 540 | —1404 |
| 12 | —2 | — 98 | 103 | 385 | —2444 |
| 13 | —3 | — 83 | 142 | 150 | —2819 |
| 14 | —4 | — 62 | 166 | —130 | —2354 |
| 15 | —5 | — 35 | 170 | —406 | —1063 |
| 16 | —6 | — 2 | 149 | —615 | 788 |
| 17 | —7 | 37 | 98 | —680 | 2618 |
| 18 | —8 | 82 | 12 | —510 | 3468 |
| 19 | —9 | 133 | —144 | 0 | 1938 |
| 20 | —10 | 190 | —285 | 969 | —3876 |
| $S_m$ | 770 | 201894 | 432630 | 5720330 | 121687020 |

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Арлей Н. и Бух К. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Изд-во иностр. лит., М., 1951.
2. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
3. Боев Г. П. Теория вероятностей. Гостехиздат, 1950.
4. Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Изд-во «Советское радио», М., 1951.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1958.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Гостехиздат, 1954.
7. Голдман С. Теория информации. ИЛ, М., 1957.
8. Гончаров В. Л. Теория вероятностей. Оборонгиз, 1939.
9. Гюнтер И. М. и Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике, ч. III, Техтеориздат, 1948.
10. Давенпорт В. Б. и Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. ИЛ, 1960.
11. Длин А. М. Математическая статистика в технике. Изд-во «Советская наука», М., 1958.
12. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Гостехиздат, 1955.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. ИЛ, М., 1948.
14. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, М., 1954.
15. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», М., 1957.
16. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений. Физматгиз, М., 1958.
17. Лэнинг Д. X. и Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического регулирования, ИЛ, М., 1958.
18. Месяцев П. П. Применение теории вероятностей и математической статистики при конструировании и производстве радиоаппаратуры, Оборонгиз, М., 1958.
19. Милн В. Э. Численный анализ. ИЛ, 1951.
20. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, ГИТТЛ, М., 1957.
21. Романовский В. И. Математическая статистика. ГОНТИ, 1938.
22. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
23. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Гостехиздат, 1952.
24. Унковский В. А. Теория вероятностей, Военно-морское изд-во, М., 1953.
25. Уорсинг А. и Геффнер Д. Методы обработки экспериментальных данных. ИЛ, М., 1953.
26. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. ИЛ, 1955.
27. Шерстобитов В. В. и Динер И. Я. Сборник задач по стрельбе зенитной артиллерии. М., Воениздат, 1948.
28. Яглом А. М. и Яглом И. М. Вероятность и информация. Физматгиз, 1960.
29. Яглом А. М. и Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Гостехиздат, М., 1954.
30. Bachelier L. Calcul des probabilités. Paris, 1942.
31. Bertrand I. Calcul des probabilités. Paris, 1897.
32. Borel E. Eléments de la théorie des probabilités. Paris, 1924.
33. Czuber E. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung. Statistik und Lebensversicherung. Leipzig und Berlin, 1910.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

*БОРИС ГРИГОРЬЕВИЧ ВОЛОДИН, МИХАИЛ ПАВЛОВИЧ ГАНИН, ИСАЙ ЯКОВЛЕВИЧ ДИНЕР, ЛАЗАРЬ БОРИСОВИЧ КОМАРОВ, АРАМ АРУТЮНОВИЧ СВЕШНИКОВ, КАЛМАН БЕРКОВИЧ СТАРОБИН*

РУКОВОДСТВО ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рецензенты: канд. техн. наук *Р. И. Гинзбург*
и канд. техн. наук *Н. Я. Чередниченко*

Редактор *И. А. Шайкевич*

Технический редактор *А. И. Конторович*
Корректоры: *М. П. Бушева* и *Э. В. Краснова*

Сдано в набор 27/XII 1961 г. Подписано к печати 14/V 1962 г.
Формат бумаги 70×108 1/16. Физ. п. л. 26,5 Усл. п. л. 36,3 Уч.-изд. л. 29,05
Изд. № 1133-61. М-03251. Тираж 14 300 экз. Цена 1 р. 60 к. Заказ 849

Судпромгиз, Ленинград, ул. Гоголя, 8

Типография № 6 УПП Ленсовнархоза, Ленинград, ул. Моисеенко, 10

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 34 | 16-я снизу | $P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(A)}=\cdots$ | $P(H_2/B)=\frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)}=\cdots$ |
| 75 | 12-я сверху | эксцентриситете. | эксцентриситет $e$. |
| 96 | 7-я сверху, числитель | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\ {}^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$ |
| 122 | 5 и 12-я снизу | $(at)$ | $(a_j t)$ |
| 135 | 3-я сверху | $X=\frac{1}{2}[+\Phi(Y)]$, | $X=\frac{1}{2}[1+\Phi(Y)]$, |
| 144 | 20-я сверху | $f_x(z)=\cdots$ | $f_z(z)=\cdots$ |
| 162 | 2-я снизу | $\cos\varphi=\frac{9q}{2\sqrt{-3p^3}}$. | $\cos\varphi=\frac{-9q}{2\sqrt{-3p^3}}$. |
| 170 | 11-я сверху | $H_{y,z}[X]=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\int\cdots$ | $H_{x,y}[Z]=-\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\cdots$ |
| 215 | Табл 39 | $\chi_q=13{,}049$ | $\chi_q^2=13{,}049$ |
| 261 | 14-я снизу | $\theta(t)=0$ | $\overline{\theta}(t)=0$. |
| 269 | 11-я снизу | Для стационарных функций | Для стационарных нормальных функций |
| 307 | 3-я сверху | $-\overline{x}^2=\frac{1}{T-\tau}\cdots$ | $-\overline{x}^2\approx\frac{1}{T-\tau}\cdots$ |
| 357 | 14-я снизу | $\cdots=\arcsin\left(\frac{b}{a}\sin\overline{\alpha}\right)$. | $\cdots=\arcsin\left(\frac{b}{\overline{a}}\sin\overline{\alpha}\right)$. |
| 405 | 13-я снизу, 3-я колонка слева | 967 | 960 |

А. А. Свешников и др.

1 р. 60 к.

СУДПРОМГИЗ
1962