В. ЛИТЦМАН

ВЕСЕЛОЕ и ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ о ЧИСЛАХ и ФИГУРАХ

В. ЛИТЦМАН

ВЕСЕЛОЕ И ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ О ЧИСЛАХ И ФИГУРАХ

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ВСЯКОГО РОДА, О ЧИСЛАХ, О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

Перевод с восьмого
немецкого издания
и редакция
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

51
Л 64
УДК 510

DR. WALTHER LIETZMANN

LUSTIGES UND MERKWÜRDIGES VON ZAHLEN UND FORMEN

ALLERLEI
UNTERHALTUNGSMATHEMATIK
VON DEN ZAHLEH
VON DEN GEOMETRISCHEN FORMEN

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О ЧИСЛАХ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Едва ли надо оправдывать выбор книги выдающегося педагога и популяризатора математики В. Литцмана (1880—1956) для перевода на русский язык.

В обширной библиотеке занимательной математики она занимает особое и почетное место. Являясь одной из наиболее полных по охвату материала, она вместе с тем предъявляет самые скромные требования к подготовке читателя. Написана книга просто. Автор нигде не прибегает к упрощенчеству и не грешит против математической точности. В отличие от других произведений такого рода в книге приведено много откликов на математические темы, откликов шутливых и серьезных из нематематической литературы, показаны связи математики с различными видами искусства. Автор не теряет из виду и возможности применения занимательной математики в преподавании: читатель с педагогическим уклоном найдет в ней ряд ценных замечаний методического характера.

Уже первые два издания, говорившие и о литературном даровании Литцмана, хорошо были встречены читателем, хотя и не были столь удачными, как последующие. (Со второго издания был сделан в двадцатых годах первый русский перевод.)

Продолжая работать над книгой и улучшая ее, автор с 4-го издания уже почти не менял объема книги и лишь в отдельных случаях шел на замену одних разделов другими.

При подготовке к изданию настоящего перевода мы не считали себя связанными последними решениями автора и исходили не только из последнего, 8-го, но и привлекали материал из 4-го немецкого издания.

Другим отличием от 8-го немецкого издания является введение в первую часть книги небольшого по объему материала из литературы на русском языке. Он не выделен особо в тексте, но до сведения читателя доводится, что ответственность за этот материал целиком ложится на нижеподписавшегося.

Отметим, что кое-что «специфически немецкое», требовавшее непропорционально много пояснений или связанное с непереводимой игрой слов, опущено; взамен кое-где даны вставки из сходного русского материала.

За ряд полезных замечаний при подготовке этого издания к печати считаю своим приятным долгом поблагодарить редактора издательства С. А. Широкову и аспирантку И. З. Дьякову.

И. Погребысский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ И ВТОРОМУ ИЗДАНИЯМ

Эта книга возникла из курса лекций, которые я читал по одному часу в неделю в Геттингенском университете в весеннем семестре 1921 года. Задачей курса было собрать воедино те разделы занимательной математики, которые могут быть использованы в преподавании, а также привлечь больше внимания к таким задачам в школе. Как эти лекции, так и настоящая доработанная и несколько большего охвата книга никак не могут претендовать хотя бы на относительную полноту. Поэтому в тексте даны многочисленные ссылки на наиболее известные монографии по занимательной математике, где можно найти и желательные дополнения собственно математического и исторического характера, и более широкий охват самого предмета.

Значительная часть того, что изложено,— я мог бы смело сказать, бóльшая часть рассмотренных вопросов,— не требует никакой особой математической подготовки. Впрочем, давая пояснения, я охотно пользовался математическим языком. Надеюсь, что именно поэтому мои предложения будут хорошо приняты как в начальной, так и в средней школе.

Однако, издавая эту книгу, я имел в виду не только школу, но и многочисленных друзей математики, больших и малых, помоложе и постарше — тех, кто в часы досуга охотно размышляет над занятной задачей, радуется математическим шуткам и старается порадовать тем, что они узнали, других любителей таких удовольствий. Я сам из числа этих людей. Самым первым вкладом в эту книжку я обязан незнакомому попутчику в тюрингских лесах,— я тогда учился в предпоследнем классе гимназии,— и с тех пор в течение 25 лет мне доводилось много слышать, видеть, читать, и я воспроизвожу это, кое-что в старом, кое-что в измененном оформлении, с сердечной благодарностью веселым дарителям.

(1921, 1923)

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ТРЕТЬЕМУ И ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЯМ

За то время, что прошло после появления второго издания, я получил немало дополнений от друзей этого сборника, в котором серьезное и шуточное дано вперемежку. Многое удалось и мне самому найти в разных местах. А так как мне хотелось сообщить читателям побольше таких даров и находок, чтобы и они могли им порадоваться, то на этот раз надо было пойти на значительное увеличение объема. Заодно это дало желанный повод включить в общий план некоторые области, которые до сих пор я оставлял в стороне. Таким образом, эта книжка стала достаточно полной.

(1928, 1929)

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ И ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЯМ

Я рад тому, что, наконец, удалось снова издать появившуюся последний раз в 1943 году и давно разошедшуюся книгу. Тем самым я выполню многочисленные доходившие до меня в течение этого времени пожелания. Все содержание тщательно просмотрено и пополнено. Снова добавлено многое, зато иное опущено, чтобы не увеличивать чрезмерно объем и, следовательно, цену. Ибо для меня очень важно, чтобы эта книга, как и раньше, доставила удовольствие возможно большему числу молодых и пожилых читателей.

При восьмом издании я ограничился исправлением опечаток.

(1950, 1955)

ВВЕДЕНИЕ

Такие шуточные примеры часто имеют больше значения, чем полезные.

Штифель, 1553 г.

«Забавляясь не учатся»,— вполне определенно заявляет в одном из романов Анатоля Франса старая учительница, но автор возражает: «Только забавляясь и учатся». Мы безусловно не склонны признать верным первое замечание, но вместе с тем нам представляется сомнительной справедливость и второго. Обучая арифметике, не следует заниматься лишь занятными вещами. Но, с другой стороны, при любом обучении стремятся возбудить «интерес» у учеников — именно в этом таится секрет многих успехов. Впрочем, уже однажды вполне серьезно предлагалось систематически вводить при обучении математике, наряду с обычным учебным материалом, «занимательную математику»[1]).

Я полагаю, однако, что при этом теряется самое эффектное и действенное. Именно тогда, когда примеры из занимательной математики вкрапливаются преподавателем к а к б ы с л у ч а й н о, когда они дают как бы кульминацию урока или приносят разрядку, когда случайные дополнительные занятия или уроки в порядке

[1]) На Пятом международном математическом конгрессе 1912 г. в Кэмбридже греческий математик Н. Хатцидакис (N. Hatzidakis) выступил с докладом «Систематическая занимательная математика в средней школе» (см. Proceedings of the fifth International Congress of Mathematics, Cambridge, University Press, 1913, т. II, 569). Подводя итоги в конце доклада, он говорил: «Было бы желательно, чтобы при всех разъяснениях и рассмотрениях и вообще во всем движении за реформу начальной и средней школы фактор «ребенок» не рассматривался как математически бесконечно малое». И далее: «Было бы желательно основательно изучить вопрос, следует ли и как, и в каком объеме вводить в школах занимательную математику».

подмены позволяют обратиться к какому-либо обширному разделу занимательной математики, это имеет свое особое значение. «Как часто в любом преподавании попутное замечание лучше усваивается и сильнее действует, чем то, что преподносится в обязательном порядке»,— прочел я в свое время в одном из рассказов. Так бывает и в преподавании, и при штудировании, и в содержательной беседе. Пирог, начиненный только изюмом, не подходит для желудка и быстро приедается.

А в этом — опасность, которой нам в нашем изложении не легко избежать. Здесь читателям предлагается как раз пирог с изюмом, и для того чтобы сделать его усваиваемым, у меня нет иного средства, как добавить миндаль в скорлупе, который надо разгрызть, прежде чем съесть, и таким образом заставить медленнее кушать. В дни молодости мы называли такую смесь изюма и миндаля в скорлупе студенческой едой и любили ее.

Занимательная, или развлекательная, математика, именуемая также занятной или забавной математикой, восходит к древним временам. Уже в древнеегипетской арифметической книге Ахмеса встречаются занимательно оформленные задачи, и отсюда нить тянется через греческие эпиграммы с уравнениями, о которых еще будет речь впереди, и через Алкуина вплоть до первого большого сборника, появившегося в 1612 г., «Приятных и занимательных задач, решаемых с помощью чисел» Клода-Гаспара Баше (Claude-Gaspar B a c h e t, Sieur de Méziriac, Problèmes plaisants et de'lectables qui se font par les nombres) [1]). Широкое распространение имел второй подобный сборник «Математические и физические развлечения» Озанама (O z a n a m, Recréations mathématiques et physiques, 1694). Правда, арифметика и геометрия занимают у Озанама только одну часть первого тома в издании 1741 г., когда сборник разросся до четырех толстых томов; физика, музыка и так далее вплоть до пиротехники пользуются там не меньшим вниманием, чем математика.

---

[1]) Французские издания книги Баше (1581—1638): 1612, 1624, 1874, 1879, 1884, последние три под редакцией и в переработке А. Лабона (Labosne). Недавно появилось 5-е издание — фототипическое воспроизведение изд. 1884 г. Русский перевод: К. Г. Б а ш е, Игры и задачи, основанные на математике, СПб., 1877. (*Ред.*).

С тех пор появилось немало книг по занимательной математике, и многие из них должны были позабавить уже названием, хотя по содержанию они иной раз бывали достаточно сухи. Впрочем, и до недавнего времени продолжали появляться книги, одно название которых уже представляет собою математическую шутку. Нет надобности идти назад вплоть до Иоганна Хемерлинга с его «Арифметическими воронками», изданными в Ганновере в 1677 г. (Joh. Hemerling, Arithmetische Trichter) с таким подзаголовком: «Благородное искусство счета, с краткими, но основательными пояснениями, так составленное и описанное, что даже в величайшей спешке его можно, как сквозь воронку, влить, преподать и выучить». В 1890 г. в том же Ганновере появилось небольшое сочинение землемера-инспектора Ф. Мора (F. Mohr) под заглавием «Раскрытая тайна пифии, или искусство, не зная латинского языка, математическим путем составлять латинские гексаметры [1]), которые заодно дают, как ясновидец, ответ на поставленный вопрос».

Теперь мы приведем несколько произведений, которые в наши дни надо считать наиболее известными и полными изложениями занимательной математики. На некоторые из них мы будем неоднократно ссылаться.

Из книг на английском языке самой важной является: W. W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Essays. В 1938 г. она вышла одиннадцатым изданием; имеется французский перевод (цитируется: Болл). Кроме нее, укажем еще две английские книги: H. E. Dudeney, Amusements in Mathematics, 1917; E. P. Northrop, Riddles in Mathematics, a book of Paradoxes, 1945.

Наиболее обширная французская работа — книга E. Lucas, Recréations mathématiques, в 4-х томах, 1883—1894, в 1960 г. переиздана фототипически (цитируется: Люка I, II, III, IV). Кроме того, на французском языке имеются: E. Lucas, L'Arithmétique amusante (1895 г.; цитируется: Люка); E. Fourrey, Recrêations arithmétiques, 4-е изд.; E. Fourrey, Curiosités géométriques, 2-е изд.

Из немецких книг укажем: W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, в двух томах, 2-е изд.,

[1]) Стихотворный размер — шестистопный. (*Ред.*)

1910—1919 (цитируется: Аренс I, II); W. Ahrens, Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik, 1918 (цитируется: Аренс 2); W. Ahrens, Mathematische Spiele, 1-е изд., 1907, 3-е изд., 1916, 4-е изд., 1919 (цитируется: Аренс 3^1, 3^3, 3^4; есть русский перевод: В. Аренс, Математические игры и развлечения, 1924); H. Schubert, Mathematische Mußestunden, 2-е изд. в трех томах, 1900; 4-е изд. в одном томе, 1924; 6-е, 1940 (цитируется: Шуберт I, II, III; есть русский перевод: Г. Шуберт, Математические игры и развлечения, 1923, с ценными дополнениями С. О. Шатуновского); G. Kowalewski, Alte und neue mathematische Spiele, 1930 (цитируется: Ковалевский).

На итальянском языке есть интересный сборник: J. Ghersi, Mathematica dilettevole e curiosa, 3-е изд., 1929 (цитируется: Герси).

Из книг на русском языке наиболее обширной является: Е. И. Игнатьев, В царстве смекалки (последнее издание в 1924 г. в трех книгах). Целую библиотеку можно составить из книг известного популяризатора Я. И. Перельмана. Прежде всего назовем следующие: «Занимательная арифметика» (9-е изд. с дополнениями А. З. Рывкина, 1959); «Занимательная алгебра» (10-е изд. под ред. и с дополнениями В. Г. Болтянского, 1959); «Занимательная геометрия» (11-е изд. под ред. и с дополнениями Б. А. Кордемского, 1959); «Занимательная математика в рассказах», изд. 3-е, 1929. Им же написаны: «Геометрические головоломки со спичками» (1941), «Арифметические фокусы» (1941), «Для юных математиков» (1925), «Алгебра на клетчатой бумаге» (1940) и др. Большой и интересный материал собран в книгах: Б. А. Кордемский, Математическая смекалка, 7-е изд., 1963; А. П. Доморяд, Математические игры и развлечения, 1961.

Автору настоящей книги принадлежат еще три книжки из этой же области (первые две изданы в русских переводах): Литцман В., Великаны и карлики в мире чисел, 1959 (цитируется: Литцман I); В. Литцман и Ф. Трир, Где ошибка? 1932 (цитируется: Литцман II); W. Lietzmann, Sonderlinge im Reiche der Zahlen, 3-е изд., 1962 (цитируется: Литцман III).

На вопрос, что же, собственно, значит занимательная математика, трудно ответить настолько определенно, чтобы можно было однозначно решить в каждом отдельном случае, охватывается ли он этим понятием или нет. Главную роль играет здесь «тон». Например, перелистывая сборник Герси, мы находим в нем многое (доказательства пифагоровой теоремы разложением, пояснения относительно кривых линий и т. п.), что, по мнению немецких авторов, не относится к занимательной математике. И даже если мы ограничимся таким материалом, который связан со школьными программами, как мы и делаем в настоящей книге, то все еще трудно указать, где проходят разграничительные линии. В нашей книге есть ряд глав, которые отсутствуют в других немецких сборниках. Вместе с тем мы не заходим так далеко, как многие американцы, которые, впрочем, являются большими приверженцами занимательной математики: те относят к ней решительно все, что не входит в обычный учебный материал. Например, один из американских авторов включает в это понятие такие «дополнительные разделы» математики: история математики, основы геометрии, теорема Эйлера о многогранниках, топология, теория иррациональных и комплексных чисел, задачи теории вероятностей, кривые всевозможных видов, математические инструменты. Мы не можем отнести все это к занимательной математике, хотя, разумеется, из всех этих областей можно извлечь немало для наших целей.

В нашей книге можно выделить следующие части. Сначала на подходящих примерах мы показываем, в каком виде может быть представлена занимательная математика, и это составляет содержание первой части. Далее мы как бы пересматриваем различные вопросы школьной программы, с тем чтобы и здесь, как в первой части, привести возможно больше конкретных — я рискнул бы сказать подготовленных для использования в преподавании — примеров. Этот материал разбит на две части: арифметическую и геометрическую, но, конечно, вполне четкую границу провести между ними нельзя.

При отборе материала для этих частей предпочтение отдавалось тем вопросам, которые не выходят за рамки элементарного преподавания, но такое ограничение не рассматривалось как необходимое. При объяснениях мы исходили из того, что любой прием, который пользуется успехом при обучении арифметике в младших классах, уместен и позже, когда он становится вполне прозрачным.

Автор надеется, что все это будет хорошим стимулом не только для учеников младших классов, но и для старшеклассников и учителей; а тем, кто сохранил интерес к числам и формам, к тому, что в них есть занятного и замечательного, эта книга, надеюсь, поможет весело провести несколько часов. Но мы хотим доставить не только кратковременное удовольствие — ведь за шуткой кроется серьезное. Многие из великих математиков занимались подобными задачами: Кеплер, Паскаль, Ферма́, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, Гамильтон и другие, вплоть до ныне здравствующих исследователей. Истоки теории уравнений, учения о вероятностях, современного исчисления бесконечно малых и теории множеств находятся в области занимательной математики [1]). Это в достаточной мере доказывает то, что мы имеем здесь дело не с чем-то вроде забавы, а с драгоценными плодами работы научной мысли.

---

[1]) Это заявление Литцмана нельзя, конечно, признать обоснованным: истоки названных им важных математических дисциплин — в запросах общественной практики и в закономерностях развития математики в целом. Верно то, что и на задачах типа занимательных есть отпечаток своего времени и они не раз давали повод к разработке важных научных методов. (*Ред.*)

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ВСЯКОГО РОДА

1. ОСТРОТЫ И ШУТКИ

Можно различать преднамеренные и невольные остроты. Первый вид в основном в распоряжении учителя, второй — главным образом удел ученика, но бывают и замечательные исключения. В качестве примера — несколько маленьких историй.

1. Автору довелось как-то присутствовать вместе с инспектором на уроке арифметики в начальной школе. Инспектор вмешался в педагогический процесс, чтобы лично убедиться, понимают ли ученики суть сокращения дробей. Он спросил ученика: «Я кладу на одну тарелку 3/5 колбаски, на другую 9/15. Какую тарелку ты возьмешь? Последовал ответ: «Тарелку с 9/15 колбаски». Недовольный инспектор обращается к другому ученику: «А ты?» — «Обе тарелки».

2. «Итак, мы переходим теперь к вопросу о приведении корней»,— заявляет профессор. «Скажите мне, пожалуйста, можно ли в выражении $\sqrt{2}\cdot 3$ ввести множитель 3 под знак корня». Экзаменуемый молчит, затем, продолжая молчать, записывает $\sqrt{2\cdot 3}$, ограничившись тем, что несколько продлил верхнюю черту знака корня. «Так ... Ну, а если вместо того выражения я запишу $3\sqrt{2}$». Тогда экзаменуемый продлевает верхнюю черту в другую сторону и пишет $\overline{3\sqrt{2}}$.

3. Учитель написал на доске уравнение

$$\frac{2}{3}\left(3\cdot\left(\frac{15}{x}+\frac{1}{2}\right)-8\right)-1=5$$

и спрашивает одного из самых слабых учеников: «Ну, Петя, ты должен отыскать x». Петя выходит к доске, смотрит туда, сюда, наконец, он прикладывает указательный палец к букве x в уравнении и восклицает в радостном сознании того, что на этот раз ему удалось добиться верного результата: «Вот он!»

4. В восьмом классе, после того как был изложен вводный курс геометрии, весьма педантичный преподаватель начал с простейшей геометрической фигуры — с точки. Затем он хотел перейти к фигуре, образованной двумя точками, и затем к отрезку. «Так какую фигуру мы рассмотрим сейчас?» — обращается он к классу.— «Запятую».

5. Пациент лежит на туго сбившемся матраце. «Разве вы не переворачиваете свой матрац ежедневно?» — «Нет. Для меня это слишком хлопотно — каждый день. Раз в два дня я переворачиваю свой матрац дважды».

6. В музее гид объясняет: «Этой мумии 5007 лет».— «Откуда вам это так точно известно?» — «Видите ли, когда меня сюда приняли на работу, мумии было пять тысяч лет, а с тех пор прошло как раз семь лет».

В том же музее. «Это шестнадцатилетняя дочь фараона. Мумии 4000 лет».— «Разрешите спросить: ей 4000 лет с учетом 16 лет или без этого?»

7. Жигулев: «До ближайшего села по воздуху будет 5 *км*». Простаков: «Хорошо, но посмотрите, мой друг, нет ли туда более короткой дороги полем». Те же собеседники — на берегу реки. Простаков молча наблюдает за колесом движущегося судна. Долго, очень долго следит он за тем, как движутся лопатки колеса. Затем он заявляет: «Скажите, пожалуйста, любезный Жигулев, сколько таких штук имеет эта машина? Я уже насчитал 312».

8. В одном из юношеских писем французского писателя Флобера его сестре Каролине (письмо от 16 мая 1841 г.) мы находим такое забавное место: «Так как ты занимаешься геометрией и тригонометрией, то я хочу задать тебе задачу: по морю плывет судно, оно вышло с грузом шерсти из Бостона, его водоизмещение двести тонн. Судно держит курс на Гавр, главная мачта сломана, на баке корабельный юнга, на борту судна двенадцать пассажиров, ветер дует с северо-востока, время — три с четвертью пополудни, все это происходит в мае... Сколько лет капитану?».

9. Некто купил палку. Он возвращается в магазин: палка ему не совсем подходит, она слишком длинная. Продавец хочет подрезать палку снизу. «Нет, зачем же, снизу палка, собственно, вполне меня устраивает; вот сверху, тут она для меня слишком длинная».

Мы улыбаемся, читая такое рассуждение. Однако чисто логически вовсе не является само собою понятным то, что получается одно и то же, когда от данного нам отрезка отнимаем меньший отрезок один раз с одного конца, а второй раз — с другого конца, сколь бы очевидным это ни казалось.

10. Я встречаю человека: он, в состоянии сильного опьянения, упорно ходит вокруг колонны для афиш, ощупывая ее. Таким образом он обходит ее несколько раз. Наконец, он говорит: «Бесполезно: меня замуровали».

Рассмотрим эту проблему чисто математически. Перед нами окружность. Поскольку линия не имеет ширины, то, в самом деле, разве у нее внешнее и внутреннее не одно и то же? Как мы можем различить у нее внутреннее от внешнего?

11. «Я не верю в то, что земля круглая,— сказал мне портной, которому я как-то говорил об антиподах.— У меня есть коллега в Сиднее, так он мне писал, что и ему нужны пуговицы для тех, кто носит брюки».

12. Шульце как-то «отхватил» крупный выигрыш в лотерее. Мюллер: «Ну, поздравляю: на какой номер ты ставил?»

Шульце: «72».

Мюллер: «А почему именно 72?»

Шульце: «А знаешь, недавно во сне мне привиделись одни восьмерки, так я подумал — сыграю-ка на восемью восемь=72, и действительно, этот номер выиграл».

13. Знаменитостям многократно приходится ссужать свои имена для рекламирования всевозможных предприятий. Когда автор впервые спросил своих четырехклассников в Геттингене, слыхали ли они уже что-либо о Гауссе, они ему сразу назвали аптеку Гаусса — Вебера.

Но пальму первенства надо отдать берлинскому обществу «Пифагор». Мясное и рыбное желе, изготовление деликатесов и майонезов — вот что мы читаем о нем в служебном справочнике. Бедный Пифагор!

14. Из Рейнских острот.

Учитель: «Сколько будет 2+3.» Ученик: «?».

Учитель: «Смотри же, мама дает тебе два бутерброда, а потом еще три. Сколько всего бутербродов?» Ученик: «Мама так не делает». Учитель: «Но если бы она все же сделала так?» Ученик: «О, тогда я был бы совсем сыт».

Учитель: «Если я поделю кусок мяса на две равные части, что я получу?» Ученик: «Половину». Учитель: «А если я каждую половинку мяса снова разделю на две равные части?» Ученик: «Четверть». Учитель продолжает таким же образом и доходит до тридцать второй части. «Ну, а если я каждую тридцать вторую разделю на две равные части, что получится?» Ученик: «Фарш».

Жена: «Скажи-ка Питер, в газете пишут, что каждый третий ребенок на земле — это китайчонок. Вот хорошо, что у нас только двое детей».

Муж: «А вот тут в газете пишут, что в Лондоне каждые двадцать минут человека сшибает автомобиль». Жена: «О, боже, бедные люди, и за что их так».

Но теперь вернемся к самым маленьким. На уроке арифметики учитель хочет разъяснить, что $2\times2=4$. Он говорит: «Вот, если я снесу два яйца в этот угол, да два яйца снесу...» Тут его перебивает один из учеников: «Но, господин учитель, вы же совсем не можете нести яйца».

15. Общепринято решать уравнения с помощью неизвестной, которую называют x. «Что касается меня,— признался автору один из его знакомых,— то я всегда решал уравнения с помощью хорошо известной мне (особы), которую звали Анной».

16. Угол есть мера вращения. Чтобы связать это определение с движением, я заставляю ученика седьмого класса маршировать перед классом. «Направо. На какой угол ты повернулся?» — «На правый».— «Налево. На какой ты угол повернулся?» — «На левый».

17. «Не понимаю,— говорит A,— как почта сводит концы с концами. За марку в 4 копейки она берет 4 копейки, за марку в 6 копеек она берет 6 копеек, и так со всеми марками». «Да,— замечает B,— это, вероятно, потому, что не каждое простое письмо весит 20 граммов и не каждое письмо с доплатой имеет наибольший разрешенный вес. Стало быть, почта в большинстве случаев все-таки в выигрыше».

2. АНЕКДОТЫ

Есть немало анекдотов, которыми можно сдобрить, собственно, уроки физики: о деяниях Архимеда при осаде Сиракуз и о его смерти, о Галилее, Ньютоне, Эйлере, Гауссе — чтобы назвать только самых больших ученых — и так до наших дней. Правда, лишь немногие из самых эффектных рассказов заслуживают доверия, многие из них не подтверждаются историей. Впрочем, это не должно лишать нас удовольствия их использовать: ведь иной раз именно в анекдоте особенно наглядно выступает нечто существенное и характерное. Хотелось бы напомнить о некоторых общеизвестных анекдотах, приведя их в стихотворной форме,— в этом виде они появились несколько десятилетий тому назад в одном из выпусков шуточной студенческой газеты:

Ньютон в своем саду сидел над интегралом,
Но тут на рукопись вдруг яблоко упало,
И к интегралам он остыл,
Чтобы предаться новым размышленьям —
Очки на нос надел Ньютон и всем на удивленье
Он тяготение открыл.

Как тяжко было Галилею перед трибуналом,
Ведь инквизитор требовал немало —
Сказать о чистой правде: Ложь.
Да, перед страшной пыткой отступил ученый,
Но про себя он шепчет озлобленно:
«Она вертится все ж».

Смотрел прилежно Гершель в телескопы
И опытным увидел оком
Он новую звезду в созвездьи Близнецов.
За два-три дня звезда сместилась эта,—
И элегантный вывод был готов:
Да это ведь Уран — планета.

У Гюйгенса был попугай любимый,
Который целый день неутомимо
Раскачиваться влево, вправо был готов.

Для Гюйгенса то было вдохновеньем:
Занялся сразу он изобретеньем,
И маятник он сделал для часов.

Небольшое собрание заслуживающих доверия анекдотов принадлежит Аренсу (W. Ahrens, Mathematiker-Anekdoten, 2 Aufl., 1920). Из этого собрания я приведу один рассказ, который можно использовать и на уроке арифметики в младших классах, и при ознакомлении с арифметической прогрессией в старших классах средней школы.

Гаусс, будучи мальчиком, учился в начальной школе в Брауншвейге. Единственному учителю приходилось одновременно что-то объяснять одной группе учеников и чем-то занять на это время остальных. Поэтому на уроках арифметики учитель обычно давал задачи с длинной цепью действий, и тот из учеников, кто выполнил задание, клал свою аспидную доску с решением на стол учителя. На столе постепенно вырастала целая гора досок, и учитель потом мог не только проверить поданные ему решения, но и установить, кто раньше справился с задачей. На том уроке, о котором пойдет речь, задание гласило: найти сумму всех чисел от 1 до 100. Вскоре после того, как учитель дал эту задачу, маленький Гаусс положил свою доску на стол и сказал: «Посмотрите». Учитель уже предвкушал удовольствие от того, что он выведет на чистую воду слишком бойкого мальчугана. Но что же оказалось? Результат был верен. Гаусс сложил 1 и 100, 2 и 99, 3 и 98 и т. д., получив таким образом 50 пар чисел с суммой для каждой пары 101, так что он мог сразу выписать итог 5050.

А вот кое-что в противоположность рассказанному. Часто говорят, что большие математики отличаются тем, как плохо они считают (в лице Гаусса мы видим исключение; впрочем, можно было бы назвать и многих других замечательных математиков, которые были отличными вычислителями, например Эйлера). Конечно, отсюда не следует, что если школьник плохо считает, то он обещает в будущем стать выдающимся математиком. Но вот что рассказывают об известном берлинском математике Куммере. Во время лекции он столкнулся с трудной задачей: вычислить $7 \cdot 9$. Куммер явно замешкался. Один из слушателей, потехи ради, подсказал ему: 61, другой 65. И тут Куммер воскликнул: «Но, господа, это ведь невозможно, $7 \cdot 9$ должно быть равно либо 61, либо 65». Впрочем, известно, что этот анекдот в основном представляет вымысел. Но поводом для его создания, вероятно, было то, что Куммеру на лекции действительно надо было произвести какое-то простенькое арифметическое вычисление, оно явно было для него обременительным, и этот выдающийся математик обратился к слушателям со словами: «Ну, господа, так помогите же мне».

3. СТИХИ

Стихотворные поучения

В былые времена и в науке были более привержены к стихам, хотя, конечно, излагая учебный материал в рифмованном виде, часто действовали по принципу: изувечим, но срифмуем. Правила арифметики тоже излагали в стихотворных строках, подобно тому как в стихах излагали различные правила латинской грамматики,— последнее можно увидеть в учебниках недавнего времени. В одной старой немецкой арифметике Тобиаса Бойтеля (Beutel) мы читаем:

Составить сумму, значит выполнить сложенье;
Словечко «и» найдет здесь примененье.

Как мы одной рукой другую вытираем,
Так действием одним другое проверяем.

В другом давнем учебнике читаем:

Ведь дробь делить — пустяк.
Делители перевернет ведь всяк,

А дальше действуй, как при умноженьи,
И результат готов в одно мгновенье.

В книге некоего Бирмана (Biermann), изданной в 1795 г. и озаглавленной «Введение в устный счет», мы находим такое «поэтическое» прославление вычислений в уме, которое, пожалуй, стоит довести до сведения наших школьниц:

Доску мою вы отложили,
Меня вы этим не смутили.
К чему теперь доска моя,
Когда в уме считаю я.

Как быть мне, девушке веселой,
С доской большою и тяжелой?
Везде она помехой будет,
Пускай я дома, пусть на людях.
Но прежде без доски не раз
Могли обсчитывать ведь нас,
Теперь же я в уме считаю,
Все незаметно проверяю.
И как-то проще думать мне,
Яснее стало в голове,
Науки легче постигать.
Как хорошо в уме считать!

В старинной русской арифметической рукописи (Библиотека имени Ленина, рукопись Чертк. 372) имеется следующее прославление науки счета:

Сия наука сама о себе сказует
И подобие же свое нам показует.
Зрите бо мене всегда зело велегласну
И иже из древле в мудрости моей красну.

Мою то наука тем же людям угодна,
И всей людие мене желают свободно.
Мною же бо купчины богати бывают
И моим же все счетом товары меняют.

Хощу же я вас охотно учати,
Токмо изволте острым разумом внимати.

. . . .

Аз же сама ко отроку юну глаголю;
Токмо, отроче, внимай же бо тя молю.

. . . .

Отроче юный, от детства мене учися,
В мудрости бо моей всем разумом потщися.
И не возленися трудов бо положити;
Иметь бо тебе всем полза многа быти.

В наши дни от всей этой дидактической поэзии осталось весьма немного. Еще в ходу в разных странах стихи, облегчающие запоминание первых десятичных знаков числа π, так сказать «π-поэзия». Все здесь основано на том, что число букв в каждом слове мнемонического стихотворения дает соответствующую цифру в десятичном представлении числа π. Например,

Кто и шутя и скоро пожелает(ъ)
3 1 4 1 5 9

Пи узнать число, уж(ъ) знает(ъ)
2 6 5 3 6

(π=3,1415926536).

В этом старом русском двустишии надо придерживаться при счете букв старой орфографии — с твердым знаком на конце слов. В одной из московских школ появилось для той же цели двустишие, не требующее никаких дополнительных указаний:

Это я знаю и помню прекрасно:
3 1 4 1 5 9

Пи многие знаки мне лишни, напрасны
2 6 5 3 5 8

(π=3,14159265358; в этом приближении последний знак не округлен — следующая цифра 9).

Кажется, первым произведением π-поэзии были следующие достаточно неуклюжие французские стихи:

Que j'aime à faire apprendre un nombre
3 1 4 1 5 9 2 6

utile aux sages!
5 3 5

Immortel Archimède, artiste ingènieur,
8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur?
3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

(«Как мне нравится сообщать число, полезное мудрецам! Бессмертный Архимед, художник-инженер, кто возьмется оценить силу твоего суждения? Но и для меня твоя задача столь же удобна...») Эти плохие французские стихи в переводе на немецкий превратились в еще худшие:

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie!
3 1 4 1 5 9 2 6 5

Wie viele Tausende bewundern Geister,
3 5 8 9 7

Himmlisch wie du und göttlich! —
9 3 2 3 8

Noch	reiner	in	Aeonen	
4	6	2	6	
Wird	das	uns	strahlen,	
4	3	3	8	
Wie	im	lichten		Morgenrot!
3	2	7		9

(Сколь многие тысячи умов, божественно небесных, как и ты, восхищаются тобою, о герой, о древний философ, о гений-колосс! Это будет сиять нам в эонах еще чище, чем на яркой утренней заре.)

Другая важная постоянная не пользуется таким вниманием, как π, мы имеем в виду основание натуральных логарифмов e. Можно привести лишь один французский мнемонический стих:

Tu	aideras	à	rappeler	ta	quantité	à
2	7	1	8	2	8	1
beaucoup	de	docteurs	amis.			
8	2	8	4			

(«Ты поможешь напомнить свою величину многим друзьям-докторам»; $e=2{,}7182818284\ldots$)

Впрочем, на экзамене некий студент на вопрос преподавателя, каково примерно значение e, сразу ответил: 2,718281828. Когда ему заметили, что не стоит обременять свою память таким количеством знаков,— на практике редко приходится идти дальше третьего, четвертого,— студент заявил, что запомнить все это очень легко: достаточно помнить, что $e=2{,}7$, а дальше — «дважды Лев Толстой» (!).

Действительно, 1828 — год рождения великого писателя.

Поэзия уравнений

Другим видом старой дидактической поэзии является поэзия уравнений, или уравнения в стихах. Сначала напомним несколько греческих эпиграмм [1]).

[1]) Эти эпиграммы входят в состав так называемой «Греческой антологии» — стихотворного сборника из 47 арифметических задач, который был в большом ходу в 10—14 вв. «Греческая антология» — несомненный предшественник современных книг по занимательной математике. Время ее составления неизвестно.

1. Было четыре фонтана, и первый наполнит цистерну
За день, но за два — второй, за три — третий, в четыре — четвертый.
Срок укажи ты теперь заполненья цистерны всем вместе.

Это одна из так называемых задач на бассейны — со времен Герона Александрийского популярный математический сюжет, занимательный и по методике решения. Однако сборники задач нового времени с их бесконечным числом повторений такого сюжета при самых незначительных видоизменениях фабулы, видимо, навсегда «похоронили» интерес к этому виду задач.

2. С ношей немалой мешков осел вместе с мулом шагали.
Тяжко под ношей своей осел вздыхал и стонал.
Мул то заметил, и так к ослу он тогда обратился:

«Что ты кряхтишь, старина, словно девица, плакать готов? Дай мне одну только меру — вдвое буду нагружен, чем ты, я; Дам же тебе я одну — лишь тогда будем с ношей мы равной».

О, геометр, скажи, какова их на деле поклажа.

3. О, Пифагор благородный, муз геликонских ты отпрыск,
Ты мне ответь на вопрос, юных сколько же в доме твоем,
К высшей награде стремясь, в изученье наук погрузилось».
«Не утаю, Поликрат, от тебя их числа.— Половина
Математикой занята; изученьем природы — лишь четверть,
Тайны бессмертной постичь стараются; часть же седьмая
В полном молчанье сидит, в уме закрепляя ученье.
Трех к ним добавь еще женщин, средь них я отличу Теано.
Столько жрецов я веду на служение музам бессмертным».

4. «Время ты меришь отменно,— поведай, от дня что осталось».
— «Вдвое осталося нам, чем имеем в двух третьих утраты».

5. Крез шесть чаш преподнес, шесть мин было весу в тех чашах,
Каждая же была на драхму тяжеле соседней.
(1 мина=100 драхм).

6. Ты, кирпичей обжигатель, возрадуйся солнца сиянью.
Дом свой хочу я закончить, и днесь благосклонно к нам небо,
А кирпичей мне теперь не хватает немного — три сотни.
Ты и один мне за день кирпичей ведь готовил не меньше,
Мальчик же твой управлялся за день изготовить две сотни,
Столько же да пятьдесят в день сумеет сработать и зять твой.
Сколько ж вам нужно часов, чтобы вместе все сделать, что нужно?

В заключение — еще одна эпиграмма. Ее мы помещаем потому, что она допускает два толкования:

7. Вот Диофанта надгробье. И диву дивися, прохожий,—
Возраст усопшего ты его же искусством сочтешь:
Жизни шестая лишь часть пришлась на счастливое детство;
К детству двенадцатую добавь, чтобы отроком стал.
Снова седьмую добавь — узнаешь срок свадьбы веселой.
Ждали супруги пять лет, и дарован богами был сын.
Горе, увы, стерегло: тот сын был похищен судьбою,
Лишь половину годов отцовских успел он прожить.
Горькую старость свою, четыре безрадостных года,
Сына в земле схоронив, должен был влачить Диофант.

Здесь остается неясным, прожил ли сын вдвое меньше лет, чем отец, или вдвое меньше лет, чем было отцу, когда сын умер. Мы получаем два различных решения.

Совсем другого рода была «поэзия уравнений» в Индии. В наших школьных учебниках иной раз попадаются ее образцы. Тут мы приведем два примера из «Лилавати» Бхаскары (около 1150 г.).

1. Из множества чистейших цветков лотоса
третья часть была принесена в дар Шиве,
пятая часть — Вишну, шестая часть — Солнцу;
одну четвертую всех цветков получил Бхавани,
а оставшиеся шесть цветков были даны высокочтимому учителю.

2. Из некоего роя пчел одна пятая опустилась на цветы кадамба, одна треть — на цветы шилиндха. Утроенная

разность этих двух чисел полетела, чтобы сесть на цветы кутайи, и осталась одна пчела, которая носилась в воздухе, привлекаемая одновременно очаровательным благоуханием и жасмина, и пандануса. Скажи мне, сколько было пчел.

В книге Иоганна Хемелинга «Арифметико-поэтические и исторические часы развлечения» (J o h a n n H e m e l i n g, Arithmetisch-Poetisch- und Historisch-Erqwick-Stund), изданной в 1600 г., мы находим такую задачу.

Пятая задача

Когда Гераклом Герион
Был в жаркой битве сокрушен,
То победителю в награду
Быков отличных было стадо;
Быков на луг отправил он
И погрузился в крепкий сон.

Но сын Вулкана Какус смелый
К быкам, как вор, подполз умело
И сделал все, что он хотел:
Он отобрать себе успел
Одну шестнадцатую стада;
Теперь добычу спрятать надо.

В пещеру он быков загнал,
Куда свет дня не проникал,
И вход туда прикрыл надежно:
Найти быков здесь невозможно!

Когда Геракл пришел на луг,
Он насчитал сто двадцать штук
И не осталось в нем сомненья,
Что состоялось похищенье.
В нем сердце закипело злобой,
Быков он ищет, смотрит в оба,
И вдруг как бы из-под земли
Услышал, что ревут они.

К пещере бросился он в гневе,
Все разметал он в этом хлеве
И Какуса убил в мгновенье;
Быков добыл из заточенья.

И стадо он угнал скорей,—
Все получил царь Эвристей.

Теперь скажи мне, вычислитель,
Скольких быков злой похититель
Из стада увести сумел,
И сколько всех быков имел
Геракл могучий и отважный,—
Все это знать нам очень важно.

Ответ. 128 быков имел (Геракл), 8 быков были похищены.

Как ни скрывай проделок след,
А правда все ж увидит свет.

Стихотворения на случай

Во всех приведенных примерах главную роль играет дидактический элемент, поэтический же в преобладающем большинстве случаев отступает на последний план. На пути от таких произведений к произведениям иного характера переходным этапом послужит подборка «стихотворений на случай». Такие стихотворения попадаются в шуточных газетах, сборниках песен и других эпизодических изданиях, возникающих иной раз в связи со съездами математиков или выпускаемых студенческими кружками. Многие из этих произведений написаны как тексты на популярные мелодии. Правда, их тематика частично выходит за рамки элементарной математики.

1. Да, есть уравнение в Крелля журнале —

Один интеграл на другом интеграле!
Тому, кто его хитроумно решит,
Во все академии доступ открыт,
И будет прославлен он средь поколений
Как математический гениев гений.

2. Планета вкруг солнца извечно кружится,

В ней всех аномалий разгадка таится.
Тому, кто расчислит ее и найдет,
Окажут везде небывалый почет.
Ему телескоп величайший построят
И будут его прославлять как героя.

3. Есть в физике принцип, простой без сомненья,

Но всех неувязок лишь в нем разрешенье.
Дойди до него ты усильем ума —
Тебе покорится природа сама,
Студенты тебе будут верить на слово,
В тебе все увидят Ньютона второго.

4. Есть чистое сердце, в нем нежность и вера,

Но крепко закрыты в нем окна и двери.
Когда бы туда постучать я посмел,
Когда бы «Войдите» услышать сумел,
Планету я отдал бы в то же мгновенье,
Да принцип в придачу и с ним — уравненье!

(Из «Праздничной газеты», выпущенной к балу Матем. о-ва при Берлинском ун-те 19 декабря 1896 г.)

Печальная баллада о резнивых конусах

1. Два брата, два конуса жили, и жили в братской любви;
И ось была у них общей, в вершине сомкнулись они.
Но мимо плоскость летела, был вид ее очень мил
И тотчас ее в объятья один из братьев схватил.

2. Одному из лучей параллельно так нежно плоскость легла!
Парабола пересеченья счастливому брату мила.
Но конус другой, за вершиной, печально и мрачно глядел:
Остаться без пересеченья — весьма плачевный удел.

3. И к плоскости он обратился: «Приди и в объятья мои!
Полою я мягкой и теплой укрою тебя на груди!»
Признаться, немного кокеткой та нежная плоскость была —
Подумала: «Что же, в гиперболе я тоже не вижу ведь зла...».

4. Теперь оба брата с сеченьем, но длилось то малый срок:
Никто из ревнивцев со страстью своей совладать не смог.

На ось они нажимают, вершина — взад и вперед,
И бедную плоскость каждый под полость свою влечет.

5. А плоскость кричит: «Не вращайте меня, я слезно молю,—
В сеченьи получится эллипс, конечного ж я не терплю!»
Но конусы слепы и глухи, каждый яростью обуян;
Сеченье все меньше и меньше, и кровь сочится из ран.

6. И вот из грудей трех сразу исторгся вдруг дикий крик:
Прошла чрез вершину плоскость, сеченье исчезло вмиг!
Навек разошлися братья, хоть горько тут каждый рыдал,
Сеченье же — жалкая точка! Таков был ужасный финал.

(Курд Лассвитц, 1880 г.)

Нуль

Внимай! Кому? Ты в удивленьи?
Доступен слуху я — не зренью.
Я бестелесен, невесом,
А кто я, я скажу потом.
Без «Некто» я остался б нем,
И «Некто» возвещает всем,
Что нет меня. И правда, я —
Лишь отрицанье бытия.
Меня кружочком очертили,
Нулем кружочек окрестили,
Понять же людям мудрено
То, что во мне воплощено.
Они запомнили названье
И видят только начертанье —
Для них всего лишь цифра я;
Подвергли действиям меня
И всем прямым, и всем обратным...
Мне умноженье лишь приятно,
Ведь при сложеньи, вычитаньи
Меня оставят без вниманья,
О том же, чтоб на нуль делить,
Не стоит даже говорить...

А то, что ты на нуль помножишь,
В одно мгновенье уничтожишь.
Так берегись же ты нуля,
Чтоб он к нулю не свел тебя!

(Напечатано в одной из австрийских газет в 1932 г.)

Аналитическая геометрия

1. Вот предо мной кривая: абсциссы — это даты;
И следует запомнить, что деньги — ординаты.
2. Когда звенит в кармане, кривая — на подъем;
Когда карман пустеет — по ней мы вниз идем.
3. Когда-то при получке был ход кривой высок,
Конечно, от получки мы шли под изволок.
4. Все это — в милом прошлом, а нынче — тяжело!
Под ось абсцисс кривую, к несчастью, увлекло.
5. Конечно, в этой песне не новые слова:
И жизнь дороже стала, и денег-то едва!
6. Но вам моя кривая поможет затвердить:
Не трать ты больше денег, чем можешь получить!

(Из сборника песен Бременского союза архитекторов и инженеров, 1895 г.; автор — Фр. Граф.)

Следующее стихотворение посвящено не раз уже воспетой математической теореме (авторство приписывается некоему Г. Веберу) и представляет пародию на известное стихотворение Г. Гейне.

Пифагорова теорема

1. Не знаю, чем кончу поэму
И как мне печаль избыть:
Древнейшую теорему
Никак я не в силах забыть.

Стоит треугольник, как ментор,
И угол прямой в нем есть,
И всем его элементам
Повсюду почет и честь.

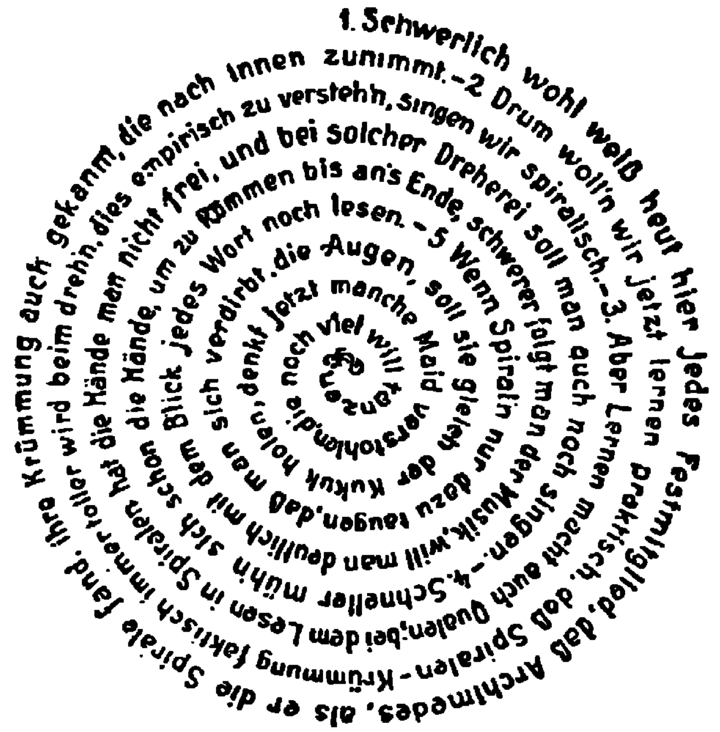
Прелестная гипотенуза
Взнеслася так смело ввысь!
И с нею в вечном союзе
Два катета тоже взвились.

Она царит на квадратах,
И песню поет она;
Та песня влечет куда-то —
Геометров древних волна.

3. И все на торжищах света,
Как в огненном кольце,
И все повторяют это:
Ах, a^2, b^2, c!

И даже в холодной медузе
Огонь эта песня зажгла,
И все это гипотенузы
И катетов двух дела!

Стихотворение, которое напечатано ниже по спирали,— забавная шутка и для глаз, и для ушей. Его надо петь на подходящий мотив, причем певцы вращают лист бумаги с текстом, что при наблюдении со стороны выглядит комично. (В русском переводе это стихотворение напечатано обычным образом. На рисунке показано, как размещен немецкий текст.)



1. Может быть, не все здесь знают,
Что, спираль изобретая,
Архимед знал, как и мы,
Возрастанье кривизны
При движении вовнутрь.

2. Чтоб на опыте наглядно
Показать гостям нарядным
Кривизны увеличенье
При стремительном вращеньи,
Мы поем спирально. Все же

3. Нет учения без муки:
Заняты у нас и руки,
Так как нужно текст вращать,
И должны мы подпевать,
Кто во что горазд. Быстрее

4. Рады мы уже трудиться,
Лишь бы до конца пробиться:
Трудно ритмы соблюдать,
Если хочешь и читать
Текст нелегкий. Если

5. От спиралей только проку,
Что глаза нам раньше срока
Портят всем, тогда пусть черт
Их скорее заберет!
И пойдем мы танцевать...

Теперь мы приведем два стихотворения, которые, конечно, не были задуманы как тексты для пения; они взяты из газеты, выпущенной на общегерманском съезде преподавателей математики и естествознания 1914 г.

1614—1914

Да, триста миновало лет
С тех пор, как был открыт ты,
И школьникам немало бед
Сумел уж причинить ты.

И кто же будет рад тебе?
Как часто старшеклассник
Из-за тебя был не в себе,
Из-за тебя весь трясся.

Кто средь твоих таблиц столбцов,
Как утлый челн средь рифов,
Тебе проклятья слать готов,
Свирепый логарифм!

* * *

Конечно, капало с нас вниз
Немало слез горючих —
Характеристик и мантисс
Нас донимали тучи.

Но ныне ропот жалоб сник,
Хоть чисел столь же много;
Свободно дышит ученик,
Ясна пред ним дорога.

Линейка ныне создана
Графической методой,
И избавляет нас она
От горя и невзгоды.

Ее всегда оберегай
И при себе имей ты:
Движок туда-сюда гоняй —
Готовы все ответы.

И кто же этих дел герой?
То — математик прикладной!

В 1927 г. Берлинское математическое общество издало весьма забавную книжку «Точка накопления. Рифмованный математический салат для учащейся молодежи 3—17-го семестров доктора h. c. N^2». Сюжеты в этом сборнике — преимущественно из высшей математики, и для того, кто знаком с предметом и лицами, сборник является кладезем отличных юморесок. Приводим оттуда балладу о гиперболе:

Гипербола наша была щеголихой,
Фокстроты под джаз танцевала лихо,
И, чтобы казаться прекрасной,
Она шнуровалась ужасно.

Родители, конус и плоскость, не раз
Пытались ее удержать от проказ
И всячески ей разъясняли
Всю вредность осиной талии.

Но глупая юность для мудрых глуха
И бойко шагает тропою греха —
Гипербола так шнуровалась,
Что на пару прямых распалась.

В той же «Точке накопления» есть большое стихотворение — его можно назвать и небольшой поэмой, — предметом которого является известный парадокс Зенона об Ахиллесе и черепахе (см. ниже, стр. 83). Вот его начало:

Зенон, как знают повсеместно,
В Элее был доцент известный.
Касаясь разных важных тем,
Писал он бойко и красиво.

Хотя не преуспел совсем
Он в математике строптивой,
О ней издал он ряд томов
На удивленье мудрецов.
Он раз в отменном настроеньи
В халате завтрак уплетал
И уж глазами пробежал
Газет афинских измышленья,
Воззванье партии «Г.С.» [1])
И рубрику под шапкой «Смесь».
«Чем этим публику кормить,
Уж лучше ей софизм влепить»,
Зёнон с ухмылкой пробурчал
И тотчас же взялся за дело;
Строчил он быстро и умело
И все в газету он послал.

Дальше в той же юмористической форме рассказывается о состязании Ахиллеса с черепахой (по Зенону!) и как посрамленный герой проигрывает, а черепаху награждают орденом; редакция же мифической газеты за интересный материал выплачивает Зенону гонорар — целую драхму. Затем начинается критическая часть поэмы: Зенону бросается упрек — он не знает учебников Ковалевского и Мангольдта [2]), мы же хорошо знаем, что ряд из положительных слагаемых

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$$

(бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с коэффициентом 0,1; согласно опущенной нами части поэмы Ахиллес давал черепахе фору в 10 *м*) сходится, и мы можем вычислить его предел, поэтому пусть Зенон дурачит неискушенную в математике публику, но не нас, слушавших лекции у профессора ... ау! [3])

Собранный в «Точке накопления» своеобразный фольклор немецких студентов-математиков не единственный

[1]) Допустим, «Греческий Союз».

[2]) Авторы популярных в Германии в первой четверти 20 в. курсов математического анализа.

[3]) По-видимому, известный ученый Э. Ландау, читавший в 20-х годах в Берлинском университете курс математического анализа.

в своем роде,— подобные литературные шутки известны на французском, английском и других языках. Приведем здесь в отрывках описание лектора и лекции (по теории функций комплексного переменного), вдохновленное, повидимому, одним из выдающихся советских аналитиков:

... Он не был алгебры служитель,
Игривых матриц искуситель;
Венок из групп, колец, полей
Не украшал его речей;
Он не геометр ретивый,
Интерпретаций ряд красивый
Всегда готовый показать,—
Он признавал лишь интегралы,
Комплексных переменных рать
И с помощью факториалов
Мог все на свете доказать...
Мог доказать аналитичность,
Рукою разложив привычной,
Ты хочешь — верь, ты хочешь — нет,
Любую функцию от z.

. . . .

...Когда рвалась суждений нить,
Он мог себя дробно-линейно
На плоскость вдруг отобразить...

А потом

На помощь тень Коши призвав,
Опять трехмерным становился...

. . . .

В конце же читаем:

Путь доказательства был строг,
И каждый убедиться мог,
Что равномерно ряд сходился,
Покуда за коварный круг
Не убегал аргумент вдруг.

Из литературы

Обратимся теперь к литературе настоящей и к старающейся быть таковой. Начнем с того, что заглянем в прошлое. Что бы в наши дни сказали о такой эпитафии некоему вычислителю?

Пресыщен счетом, я улегся в гроб,—
Ведь там, вверху, я превращался в дробь.
Но, если правильно сумел я рассчитать,
Надеюсь снова из могилы встать.

Из классиков немецкой литературы процитируем Лессинга. Мало кому известно, что он занимался и математикой. Вот его эпиграмма

На господина Меркеля, который в Швабии открыл квадратуру круга

Наш математик и теолог
Герр Меркель в комнате своей
Сидел один меж книжных полок
И становился все мрачней.
Он уж напал на верный след,
Казалось, квадратуры круга
И множил смело друг на друга
Он z на x, x-ы на z,
А нет по-прежнему решенья!
Но постепенно самомненье
Его сильней, сильней пьянит,
И он, как мальчик, что кружит
Себя же сам до одуренья,
Дошел до головокруженья,
И все вокруг него летит:
И стол, и стул, и полок ряд,
И четырехугольник пола,
В окружность перешел квадрат!
И, видя цель трудов тяжелых,
Кричит наш Меркель: «О, Натура!
Нашел я круга квадратуру!»

Вспомним теперь остроумное стихотворение Шамиссо о теореме Пифагора:

Суть истины вся в том, что нам она — навечно,
Когда хоть раз в прозрении ее увидим свет,
И теорема Пифагора через столько лет
Для нас, как для него, бесспорна, безупречна.
На радостях богам был Пифагором дан обет:
За то, что мудрости коснулся бесконечной,
Он сто быков заклал, благодаря предвечных;
Моленья и хвалы вознес он жертве вслед.

С тех пор быки, когда они учуят, тужась,
Что к новой истине людей опять подводит след,
Ревут остервенело, так что слушать мочи нет,—
Такой в них Пифагор вселил навеки ужас.
Быкам, бессильным новой правде противостоять,
Что остается? — Лишь, глаза закрыв, реветь, дрожать.

Обратимся к поэзии более близкого к нам времени. Сначала дадим слово И. Трояну. Второе из приводимых ниже двух его стихотворений было популярно в Германии, первое менее известно.

Квадрат

Присмотритесь-ка к квадрату —
Он здоровый, тароватый,
Он надежнее как друг,
Чем уж слишком круглый круг.

Каждый может быть свидетель,
Что в нем дышит добродетель;
В нем четыре стороны,
И все стороны равны.

Без обмана перед нами
На бумаге он с углами,
Честен каждою чертой,
Каждый угол в нем прямой.

Тем еще квадрат отличен,
Что вполне он симметричен;
Треугольников всех рать
Вам того не может дать.

Ничего нет несомненней,
Ничего нет неизменней;
Каждый должен быть здесь рад,
Что на свете есть квадрат.

Неизвестная

Вот пред вами математик,
Чей должны хвалить вы ум.
«Неизвестной», как фанатик,
Одержим, он стал угрюм.

Видно, сложны вычисленья:
Все искусство в ход пустил,
Но в томленьях и мученьях
Неизвестной не открыл.

Дело раньше шло удачней:
Мы привыкли, что всегда
Даже трудные задачи
Разрешал он без труда.

Но теперь он тщетно бьется,
И напрасен мысли труд:
Неизвестной остается
Та, что так ее зовут.

А причина нам известна:
Ведь теперь не прежний он,
И другою «неизвестной»
В нем ход мыслей возмущен,—

Той, которой и в расчетах
Он не в силах позабыть,
О которой все заботы,
Без которой трудно жить.

Пусть ему судьба поможет
Отыскать их поскорей,
Но сперва ту, что тревожит
И что всех ему милей.

А вот два стихотворения Христиана Моргенштерна:

Параллели

Вот двинулись две параллели
И на бесконечность пошли,
Они были явно не в теле,
Но самой прямой души.

До гроба не пересекаться,
Как то должна параллель,
Они не хотели признаться,
Что в этом их гордая цель.
Когда ж позади остался
Десяток лет световых,

Им странным уже казался
Весь строй их мыслей земных,

Еще ли они параллели?
Сомненье росло все сильней,
А в них проникали и пели
Потоки вечных лучей.

Пронизаны вечным светом,
Они сливалися в нем,
И так их укрыла вечность
Под легким своим крылом.

Куб

И куб заговорил с собой:
«Выходит, что не весь я — свой:
Как ни садись, а часть шестая,
Пускай с одним очком она,
В слепую землю упираясь,
На темноту обречена!»

Когда Земля то услыхала,
Она разгневалась немало:
«Так я слепа, темна? Дубина!
Когда б седалищем меня
Ты не скрывал от света дня,
Сверкала б ярче я рубина!»

Куб глубочайше оскорбился,
Но возражать ей не решился.

Наряду с такими шутливыми творениями приведем несколько стихотворений, представляющих серьезную попытку отобразить математику в поэзии. Первое из них принадлежит Эрнсту Лиссауэру, остальные четыре опубликованы Францем Карлом Гинскеем под общим заголовком «Геометрия» в 1908 г.

Круг

Я кругу говорил: Ты в странствии живешь
И в поступи твоей есть сдержанная мощь;
Твой путь весь состоит из путеобращений,
Начало и конец в любом твоем движеньи.

А круг ответил мне: Верь, жизни я не рад.
Мой путь — не путь вперед, а лишь всегда возврат.
Есть в мире уголок один, где все мне мило,
Его я обхожу: ступить туда — не в силах.

Точка

Я — невидимка. В том вся суть моя,
Что в представлении дана лишь я.
Как смысл и душу мертвый прах вбирает?
Ответ в творящем слове: представляю.

Представишь ты себе меня — я вот!
И без меня ничто здесь не пройдет.
Во всех вещах могу я воплотиться,
И все, что есть, все для меня — граница.

Квадрат

Четыре верных брата крепкою рукой
Мне очертили и оформили мир мой.
В ограниченьи строгом я дышу свободно,—
В нем соразмерность гармоничная природна.

В переплетеньи верных четырех тех сил
Я радость жесткой мощи до конца вкусил,
Той мощи, что дает не щедро, но за дело.
А закругленность кажется мне мягкотелой.

Вот почему с усмешкой я гляжу, мой друг,
На слишком округленное — на полный круг.
Ко мне стремится он. Но я один останусь;
У нас с ним общего ведь нету и на малость.

Касательная

Я изначальна. И мой путь далек —
На бесконечности мой огонек.
Но к своему привязана я кругу,
Хоть мы противоречье друг для друга.

Он счастлив в завершенности своей,
Не зная беспредельности путей;
Не знает дальней цели он томленья
И бесконечность для него — в мгновеньи.

А для меня далёко, как звезда,
Горит та цель, что к ней стремлюсь всегда,
И пусть мой путь меня уводит в вечность,
Пока в круг не сомкнется бесконечность!

Шар

В моей первичной форме — благородство.
Я все права имею первородства.
Мне совершенство щедрое дано.
Что создано, во мне завершено.

Кто через оболочку видит верно,
Тот из меня впивает соразмерность.
Кто глубь пространства знает лишь на слух,
Во мне увидит круг и только круг.

Земному только малым я обязан:
Я в равновесье с ним лишь точкой связан.
И если б эту косность я избыл,
Я в тот же миг вознесся б и уплыл.

Но оставим на время геометрию. Отзвуки преклонения перед числами, восходящего к пифагорейцам, а скорее всего еще более древнего, слышны в стихотворении Валерия Брюсова (по сути мы имеем здесь, пока что в мистической оболочке, смелое обобщение первых успехов в познании количественных закономерностей природы)

Числа

Мечтатели, сибиллы и пророки
Дорогами, запретными для мысли,
Проникли — вне сознания — далеко,
Туда, где светят царственные числа.

Предчувствие разоблачает тайны,
Проводником нелицемерным светит;
Едва откроется намек случайный,
Объемлет нас непересказный трепет.

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные, как тени,
Вы радугой связующей повисли
К раздумиям с вершины вдохновений.

(Валерий Брюсов, Избранные стихотворения. Гослитиздат, 1945, стр. 51—52).

Многое нам говорит мимоходом оброненный образ в «Скифах» Александра Блока: «... жар холодных числ...».

В научно-фантастической литературе последних десятилетий не раз была использована (совершенно антинаучная) идея о существовании миров с бо́льшим числом измерений, идея, навеянная неправильным истолкованием успехов многомерной геометрии. У Валерия Брюсова это нашло отражение в стихотворении

Мир N измерений

Высь, ширь, глубь. Лишь три координаты.
Мимо них где путь? Засов закрыт.
С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.

Путь по числам? — Приведет нас в Рим он.
(Все пути ума ведут туда!)
То же в новом — Лобачевский, Риман,—
Та же в зубы узкая узда.

Но живут, живут в N измереньях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим детским зреньем,
С нашим шагом по одной черте!

Наши солнца, звезды, все в пространстве,
Вся безгранность, где и свет бескрыл,—
Лишь фестон в том праздничном убранстве,
Чем их мир свой гордый облик скрыл.

Наше время — им чертеж на плане;
Вкось глядя, как мы скользим во тьме,
Боги те тщету земных желаний
Метят снисходительно в уме.

(Цит. сочинение, стр. 363).

Но нам пора вернуться в область шутки, и в этом нам помогут еще два стихотворения. Автор первого из них — Е. Паин, оно напечатано в журнале «Затейник» (1935 г., № 12).

Треугольник и квадрат

Жили-были два брата:
Треугольник с квадратом.
Старший — квадратный,
Добродушный, приятный.
Младший — треугольный,
Вечно недовольный.
Стал расспрашивать квадрат:
«Почему ты злишься, брат?»
Тот кричит ему: «Смотри,
Ты полней меня и шире.
У меня углов лишь три,
У тебя их все четыре».
Но квадрат ответил: «Брат!
Я же старше, я — квадрат».
И сказал еще нежней:
«Неизвестно, кто нужней!»
Но настала ночь, и к брату,
Натыкаясь на столы,
Младший лезет воровато
Срезать старшему углы.
Уходя, сказал: «Приятных
Я тебе желаю снов!
Спать ложился — был квадратом,
А проснешься без углов!»
Но наутро младший брат
Страшной мести был не рад:
Поглядел он — нет квадрата...
Онемел... стоял без слов...
Вот так месть! Теперь у брата
Восемь новеньких углов!

Второе стихотворение (автор его неизвестен, мы даем это стихотворение в переводе с немецкого) нуждается в пояснении. В нем речь идет об одной из спиралей, а именно о той кривой, которой тщательно занимался один из братьев Бернулли — знаменитых швейцарских математиков. Он (Яков Бернулли, 1654—1705) высказал пожелание, чтобы на его надмогильном камне была изображена такая спираль. Как сообщает Цицерон, и на памятнике Архимеду одно из самых замечательных его открытий было наглядно изображено чертежом, на котором были показаны цилиндр и шар. Подобно этому и на надгробии Ньютона в Вестминстерском аббатстве в Лондоне был высечен биномиальный ряд,— ныне этого, правда, уже нельзя заметить. И если не на надгробии, то по крайней мере на памятнике Гауссу в Брауншвейге имеется, правда в неясном оформлении и в самом незаметном месте, звездчатый 17-угольник как напоминание об одном из достижений Гаусса — построении 17-угольника циркулем и линейкой. Обо всем этом мы вспоминаем в связи со спиралью на надгробии Якова Бернулли (см. табл. I в конце книги). Это, собственно, не настоящая спираль. Камнерез расположил ее витки на равных расстояниях, и при этом не выявляется ни то, что эта кривая все время обвивается вокруг центра и, стало быть, не имеет вовсе начальной точки, ни то, что она и вовне делает сколько угодно витков, уходя на бесконечность. Вместо этого резчик смело округлил ее чуть не в окружность. Автор же приводимого стихотворения гораздо точнее в математической части.

Бедная спираль

Какой-то спирали раз захотелось
Свой хвост укусить, и взялась за дело,
Но тут убедиться ей довелось,
Что на бесконечность уходит хвост.

И заодно ей неясно стало,
Чем, собственно, ей кусать надлежало:
Ведь скрыть не могла от себя самой,
Что ее начало не с головой.

Итак, на путях самопознанья,
Ей стала ясна вся тщетность желанья.
Вздохнула спираль от сердца от самого:
«Вот в этом вся геометрии драма!»

Мы заканчиваем этот раздел произведением на весьма популярную тему (оно подписано псевдонимом).

Принцип относительности

Что видит средний человек,
Тому он абсолютно верит,
И даже в наш двадцатый век
Он по Евклиду только мерит.

Но ныне все должны признать —
Все относительно в вселенной;
Одно другому приравнять
Мы можем только приближенно.

Альберт Эйнштейн — наук кумир —
Заставил в этом убедиться
Почти что весь ученый мир,
И мы должны пред ним склониться.

Его система напугать,
Конечно, может малодушных,
Но доказательств мощных рать
Ее принять велит послушно.

Понять все это нелегко,
И сам Эйнштейн ведь нам признался,
Что очень мало чудаков,
Кто в этом деле разобрался.

Хвалиться подвигом таким
Мы им охотно предоставим —
Всем, кто тщеславием томим,
Мы ж результаты будем славить.

Важнейший результат гласит:
Не абсолют пространство, время;
У них как бы особый вид
Для каждой мировой системы.

Того, что мы зовем прямой,
Нет в относительном пространстве —
Всегда пространство с кривизной
На траекториях всех странствий.

И времени низвергнут трон:
Оно — одно из измерений;
Часов отсчитывает звон
По разному его мгновенья,

Когда не вместе все часы,
И относительны, конечно,
Все «раньше», «позже» — то, что мы
Доныне говорим беспечно.

Средой для света был эфир,
Эфир — энергии носитель;
Теперь он — свергнутый кумир,
Пространства бывший заполнитель.

Теперь сквозь темное «ничто»
От солнца свет к земле несется
И сквозь такое же «ничто»
Энергия передается.

И косность массы, масса, вес —
Все относительно, не боле;
Размеры тел, их форма, цвет
Такой же не избегли доли.

Все мирозданье целиком
Ведь относительней, чем прежде,
Под новым смотрим мы углом
И в новой видим все одежде.

Не каждый все это поймет,
Не каждому оно по вкусу,
Но тот, кто к правде ищет ход,
Не должен праздновать тут труса.

Войдя в науки строгой дом,
Учиться надо нам примерно!
Есть относительность во всем —
Лишь это абсолютно верно.

4. ИЗ РОМАНОВ, НОВЕЛЛ, СТАТЕЙ, БИОГРАФИЙ И Т. П.

Романы и новеллы

В бесчисленных «романах развития» нашего времени математике обычно отводится весьма незавидная роль. Упомянем здесь произведение «Друг Хейн» достаточно тонкого писателя немецкого романиста Эмиля

Штрауса. Это — трагедия ученика, лишенного способностей к математике. Из отдельных замечаний можно сделать вывод, что автор и сам не имеет представления о вещах, относящихся к математике: он путает параллелограмм с параллелепипедом; он полагает, что изучение математики требует зубрежки таблицы логарифмов. Иной сочинитель романов считает, что его читатели не справятся с самым простым арифметическим расчетом. Вот что мы читаем в одной французской книге: «Четыре тысячи арабов босиком бежали вслед за верблюдом, оживленно жестикулируя и смеясь, и на солнце поблескивали 600 000 их белых зубов». Итак, в среднем на одного араба приходится 150 зубов,— воистину, это народ, щедро одаренный природой!

И все-таки есть романы, в которых звучит математическое слово, например «Борьба за пирамиду Хеопса» Макса Эйта. Конечно, различные числовые домыслы относительно пирамид, хотя они занимали многих, можно не считать серьезным делом, но для юношества в этом много привлекательного. Или же вспомним еще такое место в романе «Леберехт Курочка» Генриха Зейделя: один из героев следующим образом оценивает размеры своих владений: «Все мое, насколько можно охватить взором,— гордо сказал я себе, и я имел на то право, ибо, позволю себе напомнить, я лежал на спине. Конечно, вокруг меня, а также подо мною, мой участок был ограничен, и в глубину он доходил до центра Земли, где он исчезал, стягиваясь в точку. Впрочем, это была та точка, в которой и все королевства сего мира обращаются в нуль. Но если из этой точки провести прямые к границе моей половинки моргена [1]) и продлить их до бесконечности, то станет ясно, что мой участок конусообразно простирается в мироздание и становится тем больше, чем на большее расстояние мы удаляемся. Дьявол арифметики начал терзать меня, я достал свою записную книжку и прежде всего определил площадь моего участка на удалении, равном расстоянию от Земли до Солнца.

Здесь на Земле он составляет 1300 квадратных метров. Если, округляя, считать, что расстояние до Солнца составляет 24 000 радиусов Земли, то, согласно теореме о том, что площадь поперечного сечения конуса увели-

---

[1]) Земельная мера в Германии. (*Ред.*)

чивается пропорционально квадрату расстояния от вершины, на удалении Солнца получается площадь, равная $24\,000 \cdot 24\,000 \cdot 1300 = 748\,800\,000\,000$ квадратных метров или же 748 800 квадратных километров.

Это более чем на 200 000 квадратных километров превышает размеры Германии. Но какое значение при таком богатстве имеют для меня 200 000 квадратных километров? Отбросим их! Итак, мы получили, что на удалении Солнца мой участок по величине равен всей площади Германии. Возвышающее чувство, не правда ли? Но получается еще сильнее. Одна из ближайших к нам неподвижных звезд — Сириус, его расстояние от Земли примерно в миллион раз больше расстояния от Солнца до Земли. Стало быть, для моего участка на удалении Сириуса получается величина, равная триллиону Германий. Триллион — это страшное, ужасное, зловещее число, которое записывается двенадцатью нулями и величину которого ни один человек не может ясно себе представить. Дальше я не пошел в подсчетах, так как я уже чувствовал, что безумие величин начинает проникать в мой мозг».

Все мы с детства знаем те или иные части появившегося в начале 18-го века английского романа «Путешествия в различные отдаленные страны, в четырех частях, Лемюэля Гулливера, сперва хирурга, затем капитана многих кораблей». Полные издания этого романа Свифта сравнительно мало распространены, а известные детские издания дают только небольшую часть этого объемистого произведения. Мы позаимствуем некоторые подробности из его третьей части, путешествия в Лапутию, Балнибарби, Луггнагг, Глуббдубдриб и Японию.

Как обычно в утопиях, рассказчик попадает на неизвестный остров. Проснувшись, он видит другой остров, парящий над ним в воздухе, и этот остров приближается к нему. На канатах сверху спускают сидение, рассказчика поднимают с помощью полиспастов и доставляют к королю этой своеобразной страны. Как и полагается таким путешественникам-открывателям, он чрезвычайно быстро овладевает совершенно непонятным ему языком. Его приглашают к королю на трапезу. «Первое блюдо состояло из бараньей вырезки в форме равностороннего треугольника, куска говядины в виде ромбоида и пудинга, имевшего форму циклоиды. Второе блюдо состояло из двух уток, поданных в виде скрипок, из колбасок и клецок, которые напоминали флейты и гобои, и из телячьей грудинки, имевшей вид арфы. Слуги нарезали нам хлеб конусами, цилиндрами, параллелограммами и многими другими математическими фигурами».

На следующий день Гулливеру готовят новую одежду. «Портной определил сначала мою высоту с помощью квадранта, затем нашел с помощью линейки и циркулей размеры и очертания всего моего тела, спроектировал все на лист бумаги и через шесть дней доставил мне мои костюмы; они были плохо изготовлены и вовсе не по мне, потому что при вычислениях портной ошибся в одной цифре».

Так как туземцы увлекаются чистой математикой и музыкой, питая отвращение к прикладной математике, они неуклюжи и неумелы и в самых простых действиях, и в управлении своей страной. Их дома перекошены, и ни в одной комнате не увидишь прямого угла. Существует большая Академия, в которой культивируется чистая наука, прикладная же строго запрещена. В одном из залов Гулливер застает профессора с его 41 учеником, занятыми тем, что они механически перетряхивают маленькие деревянные кубики, на которых написаны различные слова и символы, и записывают случайно получающиеся при этом предложения,— все это в надежде систематически получать таким образом новые истины.

В математической школе преподавание ведется по весьма примечательному методу: «Теорема и доказательство записываются на тонкой облатке, притом чернилами, изготовленными из красящих веществ мозга. Ученик должен принимать такие облатки натощак, и в течение трех суток после этого он не должен ничего вкушать, кроме воды и хлеба. Когда облатка переварится, краска должна попасть в голову и заодно доставить туда теорему. Однако до сих пор эффективность остается недоказанной».

То соображение, которое приводит Свифт, а именно, что можно было бы всю мудрость мира заключить в книги, систематически перебирая во всех возможных комбинациях буквы и, пожалуй, еще другие различные печатные знаки,— а число таких комбинаций конечно, хотя и очень велико! — было использовано в литературе и другими. И Свифт тут не первый. Уже Цицерон однажды высказал сходное соображение, хотя он формулировал его отрицательным образом: «Если рассыпать на земле 21 букву, из золота или другого материала, в огромном количестве, то они ведь никогда не расположатся в таком порядке, что можно будет прочесть Анналы Энния.» Такую же идею использовал в одной из своих новелл Курд Лассвитц. Он предлагает некую «Универсальную библиотеку», которая, правда, должна насчитывать $10^{2\,000\,000}$ томов. В ином оформлении использовал эту идею известный математик Борель в своих популярных книгах по теории вероятностей (рекомендуем его «Вероятность и достоверность», М., 1961).

Вообще фантастические романы во многих отношениях подходят для занимательной подачи математического материала; как не вспомнить произведения Жюля Верна, скажем «Путешествие на Луну и вокруг Луны», «Вокруг Земли за 80 дней» и др.

Оригинальный рассказ «Сон Эдуарда» написан Вильгельмом Бушем. Его Эдуард, обладающий исключительной способностью перевоплощаться, приспосабливаться, чрезвычайно наблюдательный, во сне совершает путешествие, отдельные этапы которого вместе с наблюдениями путешественника мы приведем. На своем пути Эдуард застает во время праздника «народец точек» и сталкивается при этом с «чисто математическими точками». «Удачливые существа — такие точки! Старый Фокусугол, мой учитель математики, имел обыкновение говорить: «Кто не может представить себе точки, тот попросту ленится это сделать». И я не раз пробовал это делать. Но именно тогда, когда мне казалось, что вот-вот получится, именно тогда все ускользало. И вообще, друзья мои! Разве не так же получается у нас со всем тем, до самой изнанки чего мы хотим добраться,— как раз тогда, когда мы могли бы это уловить наиболее тонкими средствами нашего ума, оно коварно прячется в самый потаенный уголок непостижимости и бесследно исчезает, как тот заколдованный заяц, в которого охотник никак не может попасть? Вы киваете головой в знак согласия, я — тоже».

Но наш Эдуард продолжает путешествовать.

«Я услышал, чуть не рядом со мной, чье-то жалкое покашливание. То была та математическая точка, которую я перед этим пытался зафиксировать. Шепотом она стала мне жаловаться, что у себя на родине у нее ничего не получается, а теперь она хочет выяснить, не найдется ли для нее какого-либо дела там, внизу, на геометрической плоскости.

И вот она перед нами, эта горизонтальная плоскость, в отблесках заходящего солнца. Ничто не возвышалось над нею — не было ни дерева, ни куста, ни фабричной трубы. Все было плоско, как блин, даже в десять тысяч раз более плоско; и все-таки мы находились у входа в оживленный городок, который ровно и гладко расположился рядом с нами».

Эдуард проходит в ворота, «которые имели ширину, но вовсе были лишены высоты», ищет постоялый двор и сводит знакомство с оберкельнером в образе настоящей математической прямой линии. «На следующее утро я осматривал город. Само собою разумеется, при этом приходилось двигаться ползком, распластавшись на животе. Было очень трудно сразу, с первого взгляда, отличать знатных от малозначительных, ...так как там ничто не имеет высоты, и стало быть, вовсе не отбрасывает тени, отчего каждый встречный, даже наиболее площáдный и угловатый, кажется обыкновеннейшим штрихом».

«Что же касается этого вечного ползания, то один из туземцев, судя по внешности вполне чистосердечный и полностью заслуживающий доверия, усиленно уверял меня в том, что хотя здесь каждый сразу является бесконечно тонким, но есть такие письмоноши, которые со временем настолько стираются, что становятся под старость еще вдвое тоньше, чем это возможно.

Это показалось мне заслуживающим внимания в связи с конгруэнцией [1]). Ибо, если такие сведения окажутся верными, то фактическое наложение вполне равных фигур, которое казалось мне невозможным в столь стесненных обстоятельствах, при определенных условиях уже не исключается».

Эдуард обращается в бюро конгруэнций,— нечто, соответствующее бюро записи актов гражданского состояния,— но ему отказывают в справке относительно симметричных фигур,— «пусть он соблаговолит обратиться в третье измерение».

«Однако, как везде, и здесь, к сожалению, были исключения. Как раз в этот момент возле бюро конгруэнций, раскрасневшись, появилась пара сферических тре-

---

[1]) Конгруэнция здесь — учение о равенстве фигур. (*Ред.*)

угольников, один из них — обожаемое зеркальное отображение другого; им там отказали. Она была одета в изящно изогнутый отглаженный платочек из бесконечно прозрачного батиста и плакала самыми обычными здесь слезами, напоминавшими очаровательные мыльные пузырьки, и их уносил ветерок. Пара бесконечно тонких перчаток, левая и правая, шаферы жениха и невесты, всячески старались ее утешить и говорили, что и с ними так получилось и что, на худой конец, всегда можно улепетнуть в четвертое измерение, где уже нет ничего невозможного». Но здесь мы покинем Эдуарда, поскольку в дальнейшем ходе путешествия он мало посещает математические области.

Рассказ Вильгельма Буша имеет кое-что общее с небольшой английской книжкой «Плоскоземелье, роман нескольких измерений» (Flatland, A Romance of many dimensions). Автор называет себя *А-квадратом*, так как в стране двумерных существ, где разыгрывается действие, люди — это треугольники, четырехугольники и т. д. Настоящее имя автора — А. Эббот (A. A b b o t t). Книга переведена на голландский и, в сокращенном виде, на немецкий язык. Мы знакомимся там с тем, какой вид имеет все в стране двух измерений, как один из ее великих ученых фантазирует о существовании трехмерных образов и т. д. В Англии и в Соединенных Штатах эту книжку использовали в школьном преподавании, известны инсценировки ее сюжета на школьных спектаклях.

Как представляет себе художник сло́ва математическую рукопись? Королевское Высочество — в одноименном романе Томаса Манна — рассматривает страницу в тетради с записями лекций по алгебре, сделанными изучающей математику дочерью миллиардера:

«Греческие буквы стояли вперемежку с латинскими и с цифрами разных размеров, перемежаясь с крестиками и черточками, громоздясь в виде дробей над и под горизонтальными линиями, шатрообразно накрываемые другими линиями, приравниваемые друг другу с помощью двух черточек, объединяемые круглыми скобками в крупные блоки формул. Выдвинутые вперед отдельные буквы, как часовые, стояли справа сверху этих взятых в скобки групп. Каббалистические знаки, совершенно непонятные для непосвященных, охватывали своими щупальцами буквы и числа, перед этими знаками стояли числовые дроби, а под ними и над ними роились снова числа и буквы. Везде были разбросаны странные слоги, сокращения таинственных слов, а между магическими столбцами находились записи теорем и отдельные замечания на обычном языке, но и их смысл настолько возносился над обычными общечеловеческими вещами, что вы могли их читать, понимая в них не больше, чем в бормотании заклинаний».

Статьи и очерки

В статьях и очерках, по крайней мере в литературных статьях и очерках газет и журналов, математические темы затрагиваются редко, но мы позволим себе привести здесь один пример: Г. Т. Фехнер однажды занялся темой «Почему колбасу нарезают косо?» [1]). Такой вопрос ставится перед собранием лейпцигских профессоров, и они дают самые различные ответы. Один высказывает мнение, что среди бесчисленного множества косых разрезов прямой разрез может встретиться только один раз; другой отвечает: потому что из-за округленной формы при прямой нарезке кусочек колбасы мог бы откатиться; третий видит причину в том, что эллиптическая форма сечения более привлекательна; четвертый — в том, что эллиптическая форма сечения больше подходит к удлиненной форме колбасы; пятый считает, что ломтики колбасы эллиптической формы получаются бóльшими; шестой — что при обычных соотношениях размеров колбасы и захвата кисти механически легче нарезать колбасу косо, чем прямо; седьмой же говорит: потому что при косо нарезанных ломтиках шкварки жира не так легко вываливаются, как при нарезанных прямо; а сверх этого приводится еще восемь ответов. Фехнер с немалым остроумием обосновывает эти различные мнения, воздавая должное учету целесообразности и эстетическим соображениям.

Автор настоящей книги не раз обсуждал со своими учениками этот очерк. Еще более ценным, чем само чтение, являлось возникающее при этом желание поразмыслить самому. Не раз предлагались и другие, новые пояснения,

---

[1]) G. Th. Fechner, Warum wird die Wurst schief durchschnitten? Это небольшое произведение переиздано под № 16 в серии «Из больших мастеров естествознания» (Aus grossen Meistern der Naturwissenschaften), изд. J. A. Barth, Leipzig.

часто — спустя дни и недели. Такого же характера был опыт и ряда коллег. В одной из наиболее распространенных немецких газет была помещена статья К. Кюхлера на ту же тему. В ней забавно излагаются собственные исследования автора — один из весьма редких случаев, когда остроумная трактовка математического вопроса появляется в газетном «подвале». Согласно Кюхлеру, истинная причина косой нарезки колбасы—«врожденная косность». Мы избегаем излишнего напряжения мускулатуры, отводя при косой нарезке локоть так, что он не задевает живота и плавно проходит мимо бедра. К удобству в качестве основной причины сводится и то решение, которое дал Луккей[1]). Он указывает, что число ломтиков при косой нарезке относится к числу ломтиков при прямой нарезке, как ширина косого сечения к его длине. Это легко усмотреть на приводимом рис. 1. Следовательно, чем более косо режет колбасник, тем меньше надо ему проделать режущих движений, чтобы нарезать колбасу.

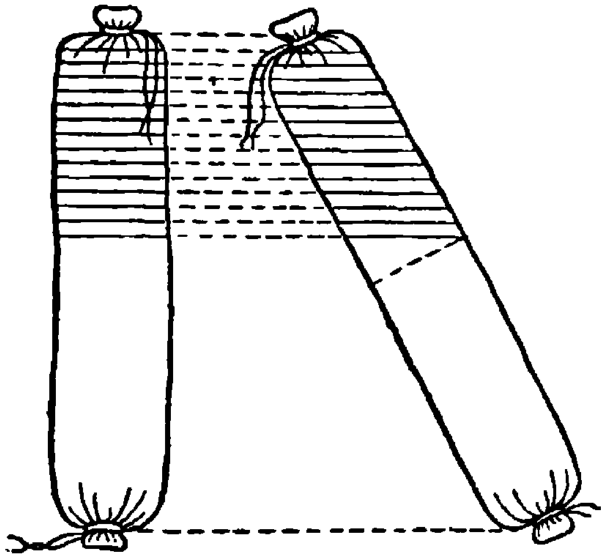


Рис. 1.

Р. Болл в своих Mathematical Recreations, указанных выше, поместил среди прочего материала ряд статей и очерков; из них мы отметим «Сверхпространство», что представляет собой увлекательное введение в четырехмерную геометрию.

Из биографий

В биографических произведениях часто встречаются высказывания если не о математике, то о ее преподавании,— правда, это редко связано с чувством признательности. Как у Газенклевера «Сын» споткнулся

---

[1]) Luckey, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 49 (1918), 185.

на усеченном конусе, так другой юноша не может одолеть уравнения параболы,— я имею в виду то, что сказано «Зеркальном человеке» Верфеля:

Здесь ты стоял с сердцебиеньем.
И ты старался уловить,
Как для парабол уравненье
В координатах выводить.

Не видишь смысла построений
И слова вымолвить невмочь.
Он на тебя глядит с презреньем
И молча отсылает прочь.

Если примесь юмора несколько оживляет унылый тон рассказа, то этому надо уже радоваться. Вот что говорит о своем детстве Эдвард Григ («Мой первый успех», напечатано в 1905 г.): «Как живо представляю я себе урок арифметики тех лет. Всем нам задавали одну и ту же задачу на умножение, и тот, кто первый с ней справлялся и таким образом оказывался наиболее преуспевающим, должен был быть отмечен наградой. Тут мое честолюбие разыгралось: ага, думал я, вот здесь стоит блеснуть смекалкой. И мне пришла в голову гениальная мысль: чтобы возможно быстрее управиться с задачей, я опущу все нули, потому что они, как я себе представлял, не имеют никакого значения. Да, этот успех был, конечно, сомнительным успехом, или, чтобы выразиться точнее, это было полное фиаско. Но зато, умудренный опытом, я с тех пор научился принимать в расчет нули. И то, чему я тогда научился, в конечном счете было внутренним успехом».

После этого выдающегося норвежца обратимся к не менее известному шведу. В своем произведении «Сын служанки» Стриндберг рассказывает о детстве героя: «Арифметику он легко усваивал, но геометрию он ненавидел. Он не мог примириться с этой наукой о несуществующем; только позже, когда у него оказался учебник землемерия, у него появилась склонность к этому предмету, и он измерял деревья и дома, промерял шагами сады и аллеи, строил фигуры из картона...»

Впрочем, проникнуть в дух математики Стриндбергу безусловно не удалось. Позже он высказывал самые нелепые суждения об арифметике, и даже самые простые и наглядные вещи оказывались для него головоломкой. В его «Третьей голубой книге» мы читаем:

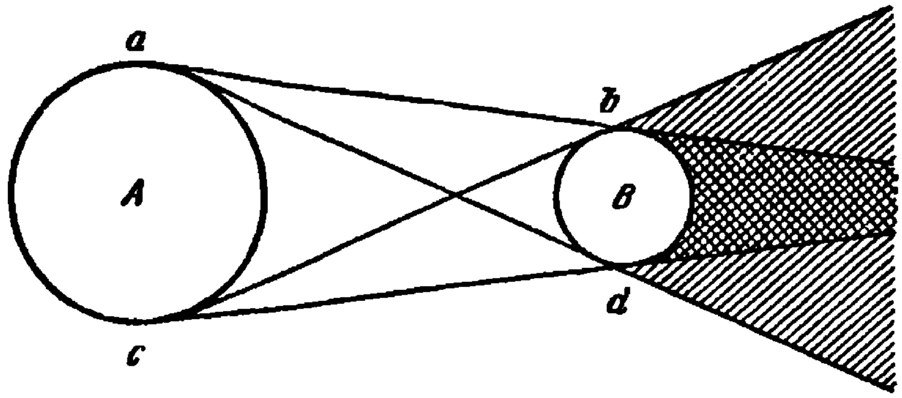


Рис. 2.

«*A* изображает Солнце, а *B* — Землю, которая во время лунного затмения скрывает в своей тени месяц. Но я не могу понять, как получается полутень и откуда берутся линии *ad* и *cb*. Ведь от шара, излучающего свет,

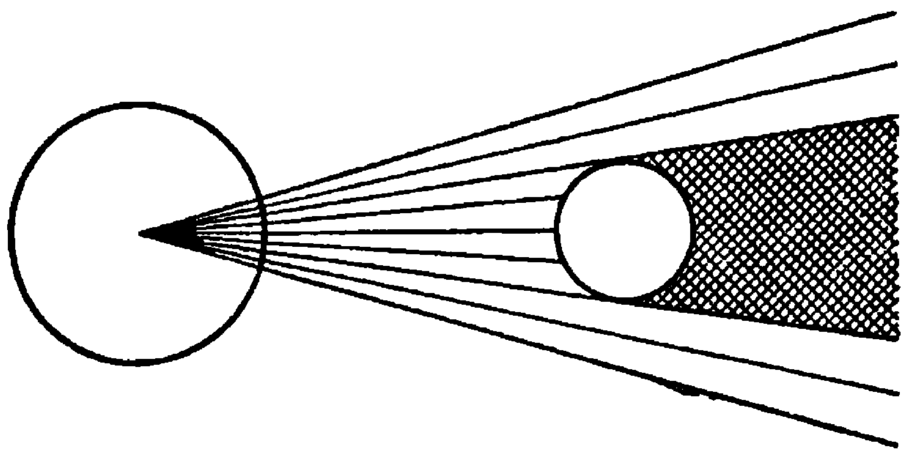


Рис. 3.

лучи должны были бы расходиться в виде продолженных радиусов. Тогда не может возникнуть полутень. Либо же лучи представляют параллельные прямые, как это указывается в физике. Но и при этом не может возникнуть полутень.

Рисунок 2 непонятен и противоречит тому, чему учат в физике; рисунки 3 и 4 понятны, но в физике их нет».

Тому, что приведено выше, мы можем кое-что противопоставить. Напомним, что математика была одним из юношеских увлечений Льва Толстого; он, правда, довольно сдержанно рассказывает об этом в повести «Юность», в значительной мере автобиографической, где описано его поступление в Казанский университет на математическое отделение. Эмиль Золя, поступая в высшую школу, гораздо лучше сдал экзамены по физико-математическому циклу, чем по гуманитарному. Поэт Валерий Брюсов в автобиографической заметке, составленной в пятидесятилетнем возрасте, писал: «В гимназии всего охотнее занимался я математикой — пристрастие, сохранившееся

Рис. 4.

у меня и поныне». Наконец, приведем отрывок из воспоминаний С. В. Ковалевской, сочетавшей в себе замечательный математический талант с незаурядным литературным дарованием («Воспоминания детства», глава «Мой дядя Петр Васильевич»; цит. по книге: С. В. Ковалевская, Воспоминания и письма, изд. АН СССР, М., 1954, стр. 52—53).

«Хотя он [дядя Петр Васильевич] математике никогда не обучался, он питал к этой науке глубочайшее уважение. Из разных книг набрался он кое-каких математических сведений и любил пофилософствовать по их поводу, причем ему часто случалось размышлять вслух в моем присутствии. От него услышала я, например, в первый раз о квадратуре круга, об асимптотах, к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, о многих других вещах подобного же рода, смысла которых я, разумеется, понять еще не могла, но которые действовали на мою фантазию, внушая мне благоговение к математике, как к науке высшей и таинственной, открывающей перед посвященными в нее новый чудесный мир, недоступный простым смертным.

Говоря об этих первых моих соприкосновениях с областью математики, я не могу не упомянуть об одном очень курьезном обстоятельстве, тоже возбудившем во мне интерес к этой науке. Когда мы переезжали на житье в деревню, весь дом пришлось отделать заново и все комнаты оклеить новыми обоями. Но так как комнат было много, то на одну из наших детских комнат обоев не хватило, а выписывать-то обои приходилось из Петербурга; это было целой историей, и для одной комнаты выписывать решительно не стоило. Все ждали случая, и в ожидании его эта обиженная комната так и простояла много лет с одной стороны оклеенная простой бумагой. Но по счастливой случайности на эту предварительную оклейку пошли именно листы литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении, приобретенные моим отцом в молодости.

Листы эти, испещренные странными, непонятными формулами, скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны были следовать друг за другом. От долгого ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным.

Когда много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я охватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной, «точно я наперед их знала». Я помню, он именно так и выразился. И дело действительно было в том, что в ту минуту, когда он объяснял мне эти понятия, мне вдруг живо припомнилось, что все это стояло на памятных мне листах Остроградского, и самое понятие о пределе показалось мне давно знакомым».

Здесь стоит добавить, что яркая личность и необычный жизненный путь С. В. Ковалевской делают интересным чтение не только ее собственных воспоминаний, но и ее произведений автобиографического характера (повесть «Нигилистка» и др.); книги, написанные о ней ее биографами, тоже читаются, как художественные произведения [1]).

Непосредственно к жанру романизированной биографии, весьма популярному в последние десятилетия, относится книга о другом замечательном математике и революционере — об убитом на дуэли двадцатилетнем Эваристе Галуа,— написанная польским физиком Леопольдом Инфельдом («Эварист Галуа. Избранник богов». Перевод с английского М. Кан, 2-е изд., М., 1960; есть и немецкий перевод). Вот как там описывается первое знакомство пятнадцатилетнего Галуа с серьезной математической книгой («Началами геометрии» Лежандра):

«Он читал страницу за страницей, и перед ним, простое и прекрасное, как греческий храм, вставало здание геометрии. Читая быстро, он видел не только частные теоремы, но их взаимосвязь, планировку целого, величие самой структуры геометрии. Он поймал себя на том, что угадывает, знает заранее, что будет сказано дальше. Он увидел, как здание растет у него на глазах. Вскоре все окружающее: класс, товарищи, надзиратели, звуки, запахи — исчезло. Абстрактные геометрические теоремы, стали более осязаемыми, чем мир вещей. Здание геометрии все росло у него в голове. Читая теоремы, он почти всегда молниеносно видел, как их можно доказать, и тут же, в подтверждение своих мыслей, просматривал текст и рисунки. Скоро он мог пропускать доказательства: многие теоремы он предвидел. У него было такое чувство, как будто он знает геометрию очень, очень давно, но знание было скрыто от него темной пеленой. Чтение книги Лежандра сорвало пелену и открыло ему греческий храм» [2]).

Драматическая поэзия

Мы переходим к драматическим произведениям в стихах, но, к сожалению, здесь мы не можем привести примеры из большой литературы. Тем охотнее мы обра-

---

[1]) Сошлемся на следующие книги: Леффлер ди Каянелло, Софья Ковалевская. Воспоминания, перев. с шведского М. Лучицкой, СПб., 1893; С. Я. Штрайх, Сестры Корвин-Круковские, М., 1935; Л. А. Воронцова, Софья Ковалевская, М., 1959.

[2]) Рекомендуем еще книгу А. Дальма, Эварист Галуа, революционер и математик, перев. с франц. Ю. С. Родман, Физматгиз, М., 1960.

щаем внимание на пребывающий в полном пренебрежении у историков литературы вид произведений — на так называемую «литературу капустников» (Biermimik). Такие шуточные творения — однодневки — быстро забываются после празднеств, ради которых они создавались. Кому доводилось весело отмечать праздники в каком-либо математическом кружке немецких вузов, тому вспомнятся иной раз более тонкие, иной раз грубоватые произведения и отдельные остроты. Автору известно одно произведение этого жанра, сохраненное нам благосклонной судьбой. Оно называется «Прост![1]) Трагедии Фауст (n)-я часть. Господином фон-Гёте, его превосходительством, собственноручно вписанная с помощью астрофизических средств из четвертого измерения в заклеенную со всех сторон книгу. Взрезана и издана по спиртуозному поручению Бреславльского математического союза». Принадлежит это произведение Курду Лассвитцу; оно перепечатано в журнале Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, т. 14 (1883), стр. 312 и далее. И позже оно перепечатывалось неоднократно.

Эта драматическая поэма начинается большим монологом Прост-Фауста: «Я геометрию всю тут, анализ, алгебру учил, и числ теории вкусил, а это все — нелегкий труд! И вот теперь я кандидат, но как совету был бы рад...» Появляется дух dx, а за ним Мефистофель. Когда Прост удаляется, приходит новичок — первокурсник, и теперь, примыкая к диалогу в «Фаусте» Гёте, развертывается характеристика различных областей математики. Кое-что, сюда относящееся, хочется привести:

«Вы могли бы попробовать свои силы на аналитической геометрии. Пространство там вовсю муштруют, в координаты все шнуруют; нужна немалая удача, чтоб с чертежом была задача, и день за днем твердят вам так: необходимо уравненье, чтобы найти то построенье, которое совсем пустяк. И пусть естественней в пространстве все представлять, что видим мы, как раньше лучшие умы; — с весьма унылым постоянством заставят при любой задаче вас действовать совсем иначе: вам уравнение укажут и все увидеть в нем обяжут. А если невозможно

[1]) По-немецки Prost (=prosit) значит *на здоровье*.

построенье, то дело лишь в другом определенье, раз все, что числовым законам можно подчинить, геометрически нам надлежит осуществить. Вот почему на бесконечности в двух мнимых точках окружности должны все пересечься точно. И параллели встретиться должны, и кривизной пространство наделили: раз наши формулы красивы и верны, то нужно, чтоб они геометричны были. Теперь повсюду хвалят всем прямой в кривую превращенье и неевклидовых рожденье всех геометрий; но это все зачем?!»

Мефистофель высказывается и о теории функций, и об астрономии, а затем переходит к новой алгебре:

«Хотел бы вас предостеречь я в отношеньи сей науки — то вовсе не простая штука себя с разгону не вовлечь в пустые преобразованья: не разобравшись в основаньях, тут даже индексы непросто различать. Но добрый вам совет могу я дать — лишь одного учителя держаться и все его лишь формулами оправдать стараться. А в общем символ — вот что важно! Владея символами, можете отважно пускаться в изысканья в мире формул новых». «Но символ должен содержать и результат готовый»,— трезво замечает новичок. В ответ Мефистофель продолжает:

«Отлично! Но не надо лишних мук! Как раз где не хватает результатов, на выручку приходит символ вдруг. И лучше символов ведь нету аппарата, чтоб в самом общем виде все писать. Деталей только надо избегать. Вы уравненье это разрешить не в силах? В детерминантном виде запишите — будет все премило. Писать ведь что угодно можно,— лишь вычислений избегайте осторожно. А с символами действовать нетрудно: какой-нибудь штришок введешь, посмотришь — чудно, как дело все прилично обошлось!»

А в заключение еще крепкое словечко, адресованное математической физике: «Матфизику теперь нетрудно всем понять: лишь в бесконечно малом изучать вам деформации отныне надо, а это эмпиризму не преграда. Искать гипотезы совсем не нужно,— берите из того, что вам предложат дружно, но только тот дошел до зрелости своей, кто избегает высших степеней: скорей отбрасывайте все, что сложно, и лишь когда негоден результат, берите высших членов новый ряд. Когда уже и это не поможет, тогда скажите бодро, смело: в ошибках наблюдения все дело! И с постоянными тут важно смелым быть — с кем не случалося порой подбором постоянненькой одной неясность всей задачи устранить. И вероятности здесь можно применить, придать значеньям средним важный смысл, используя закон больших тут чисел. Не нужно только интегралов трудных и вычислений всяких нудных — бумаги лист делите на квадраты, возьмитесь за абсциссы, ординаты,— все это вам сказать поможет: иной кривая быть не может!»

В Соединенных Штатах встречается другой вид математических пьес: небольшие произведения с математическим фоном, рассчитанные на сценическое воплощение. Выше мы уже упоминали об инсценировке английского романа «Плоскоземелье». Приведем здесь хотя бы список действующих лиц двухактной комедии с танцами под названием «Влюбился в Плани Метрию» [1]):

Плани Метрия	героиня
Анна Литическая Геометрия . . .	старшая сестра героини
Ал Гебра	двоюродный брат геометрических девушек
ФилОсоф и Анна Л. Из	студенты
Гим Назий	герой
Мисс Терия	камень преткновения
Прямой Угол	друг семьи
Физика, Химия, Биология, Тригонометрия, География, История, Англ, Нем . . .	8 девушек; верноподанные Учебного Плана

Афоризмы

Пусть завершением нашего странствия по многим областям литературы будет справка о «крылатых и некрылатых словах». Наилучшим их собранием является книга В. Аренса «Шутка и серьезное в математике» [2]).

---

[1]) Это произведение напечатано в журнале Mathematics Teacher, т. 20 (1927), 389 и далее. Список действующих лиц не требует пояснений.

[2]) W. Ahrens, Scherz und Ernst in der Mathematik, Leipzig, 1904.

У этого автора нашелся последователь в Америке в лице Р. Морица [1]).

Действительно, весьма заманчиво сдобрить при случае изложение того или иного математического вопроса словечком, всерьез или в шутку сказанным в свое время. В школе мы особенно охотно цитируем великих поэтов. Например, у Гёте, который, правда, был не очень сведущ в математических науках [2]), мы находим немало превосходных замечаний. Так, вряд ли можно лучше выразить дух нашего современного критического исчисления бесконечно малых, чем его словами (которые следовало бы вписать в свой альбом для стихов многим любителям метафизики из числа приверженцев бесконечно большого и бесконечно малого):

«Если ты хочешь уйти в бесконечность, только в конечном иди во всех направлениях».

А теперь мы приведем ряд изречений другого немецкого поэта — Новалиса:

«Вся математика — это, собственно, одно большое уравнение для других наук.

Что для математики логарифмы, то она для других наук.

Понятие математики — это понятие науки вообще. Поэтому все науки должны стать математикой.

Нынешняя математика является подстановкой для удобства приведений, вспомогательным средством мышления.

Ее полная применимость является необходимым постулатом самого ее понятия.

Внутренняя связность, солидарность мироздания составляет ее основу.

---

[1]) R. E. Moritz, Memorabilia mathematica or the Philomath's Quatation-book, New York, 1914.

[2]) У автора есть книга йенского профессора математики Шталя «Основы комбинаторики вместе с ее приложением к анализу» (Stahl, Grundriß der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis), появившаяся в 1800 г. и «посвященная, с глубочайшим почтением, Его высокоблагородию Иоганну Вольфгангу фон-Гёте (!), Саксонско-Веймарскому действительному тайному советнику, почитателю и поощрителю всего истинного, прекрасного и доброго». Книга Шталя — набор символически записанных абстрактных формул колоссальной длины. Можно вполне понять, что такого рода математика не была в состоянии привлечь Гёте.

Настоящий математик — это энтузиаст как таковой. Без энтузиазма — никакой математики.

Только математики счастливы. Математик знает все. Он мог бы знать все, если бы он всего не знал.

Тот, кто не берет с благоговением математическую книгу и не читает ее как откровение, тот не понимает ее».

Нельзя с бо́льшим энтузиазмом вознести хвалы математике, чем сделано в этих высказываниях. Жаль только, что не все так думают, и прежде всего — не все наши ученики. Чтобы дать слово другим мнениям, приведу стишок, вписанный одним английским школьником в своего Евклида:

Когда придет потоп второй,
Не жди ковчега — чушь!
Весь мир пусть будет под водой —
В сей книге будет сушь.

А шведский песенник Карл Михаэль Беллман как-то в подобном же настроении разразился такой жалобой:

В сердце до сих пор обида,
Когда вспомню я Евклида.
Вспомню я о старой песне,
ABC и *ABD*,
Мир становится мне тесен,
И дрожу я, как в беде.

5. КАРТИНЫ И РИСУНКИ

Геометрические фигуры как символы

Напомним сначала о той культурно-исторической роли, которую играли, да еще и сейчас играют в жизни некоторых народов совсем простые геометрические фигуры, например крест, полумесяц и т. п.

Звездчатый пятиугольник напоминает о так называемом «знаке ведьмы», о пентаграмме и ее мистическом смысле, о чем упоминается в «Фаусте» Гёте. Менее известна в наши дни связь звездчатого семиугольника с днями недели и с созвездиями, еще менее известна постоянно встречающаяся в астрологии фигура двенадцати жилищ, то есть неба с двенадцатью созвездиями, из чего исходят при составлении гороскопов.

Теодор Фехнер как-то предложил такую забавную символизацию, использующую конические сечения:

Окружность: Себялюбие, Эгоизм.

Эллипс: Любовь к ближним.

Парабола: Любовь к бесконечности.

Гипербола: Ненависть.

Моргенштерн как-то заметил: «Я» — это вершина конуса, в основании которого «все».

Галилео Галилей нарисовал в альбоме для стихов некоего доктора медицины Вейсса из Кобурга гиперболу с ее асимптотами и дал к рисунку такую подпись:

«Сближаясь, не совпадаю».

Рис. 5.

Напомним еще о символах, которые принято было изображать в ложах; тут мы встречаемся с разнообразными математическими фигурами и инструментами. Воспроизводим (рис. 5) непритязательный рисунок, предназначенный для одной из лож театра в Веймаре — принадлежит он всего лишь Гёте. И Гёте подписал под ним:

Чтоб начать и все отметить —
Карандаш, угольник, циркуль;
Но в руках нет цепкой силы,
Если дню звезда не светит.

Оставляя теперь в стороне символику, укажем еще, что простым пространственным фигурам приписывали решающее значение в системе мира. С этим связаны попытки Кеплера получить соотношения между расстояниями в нашей планетной системе, определяя радиусы орбит с помощью последовательного построения правильных многогранников (см. об этом подробнее в III части книги). Теперь подобные соображения мы считаем проявлением антинаучной мистики, но в истории науки надо соблюдать меру в таких оценках: ведь с таким умозрением непосредственно связано открытие законов Кеплера, да и в числовых законах музыкальных гармоний есть нечто подобное.

Математика в изобразительном искусстве

От символики простых геометрических фигур до символических изображений математики путь недалек. Вспомним прежде всего об известной гравюре Дюрера, названной им Меланхолия I (см. табл. II в конце книги).

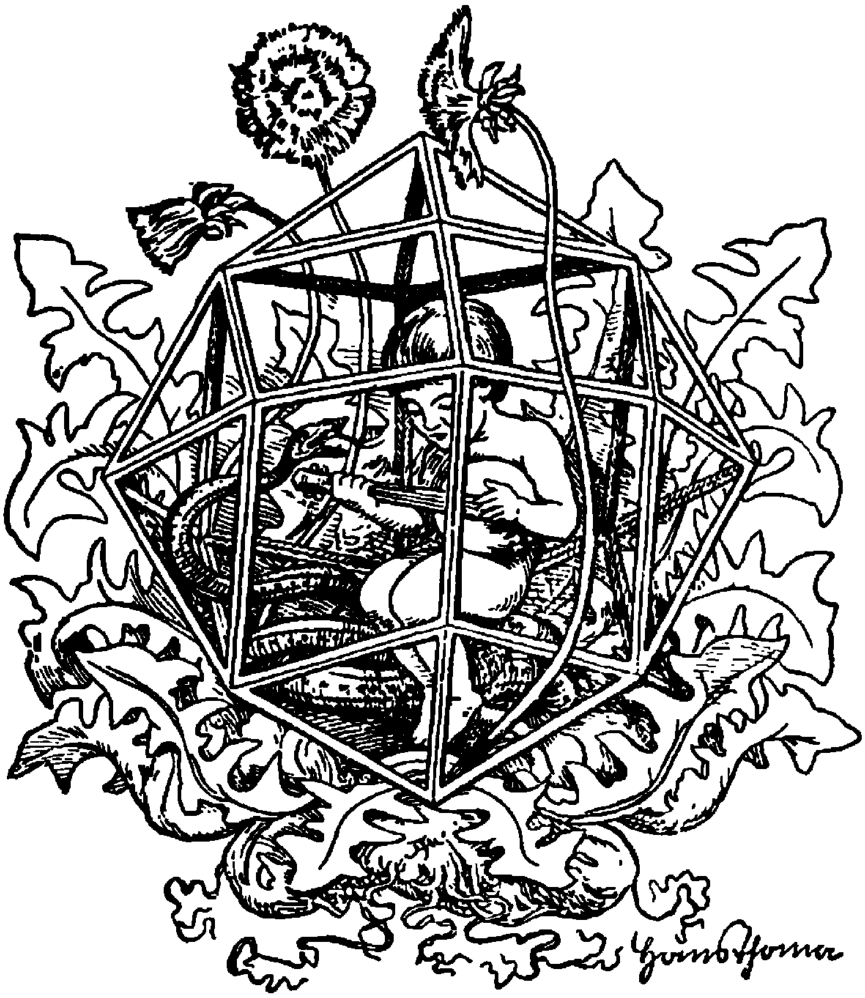


Рис. 6.

Смысл ее толкуют по-разному. Аренс считает, что изображенная на переднем плане женская фигура, погруженная в раздумье, является аллегорическим воплощением математических и технических изысканий, тогда как своеобразное тело и шар указывают на геометрию, магический квадрат, которым мы еще займемся позже,— на арифметику, рубанок, пила, жернов и прочее снаряжение — на технику.

Для сопоставления на табл. III (в конце книги) показана близкая нам по времени картина Ганса Тома (Hans Thoma), которую он назвал Триумфом геометрии. Добавим к этому еще один рисунок, принадлежащий тому же поэту-живописцу (рис. 6) и, впрочем, не единственный у него в таком роде. Этот рисунок — как изображение прикладной геометрии — можно противопоставить картине как изображению чистой геометрии (хотя автор дал ему другое название).

Противопоставление чистой и прикладной математики на одном из собраний геттингенских математиков весьма забавным образом было объявлено темой картины Тициана, которая известна под названием «Земная и небесная любовь» и толкование которой дало повод к спорам (см. табл. IV в конце книги): «Женская фигура слева представляет прикладную математику, потому что к ней кое-что приложено (одежда); справа же мы видим чистую математику, так как она сидит у колодца, а в руке держит губку, чтобы вытирать ею доску [1]). На заднем плане мы видим прикладную механику, она плещется в воде. На колодце изображен прогресс техники и школьного дела: слева лошадь и автомобиль (последний скрыт от нас платьем прикладной математики), а справа школьная реформа: наказание».

Вместе с изображением математики дадим несколько примеров того, как изображали математиков. Памятники знаменитых математиков имеются в немалом числе. Удостоился красивого памятника (см. табл. V в конце книги) не только такой человек, как

Nicolaus Copernicus
Thorunensis
Terrae motor
Solis caelique stator,

который, стало быть, согласно этой надписи привел в движение Землю и сделал неподвижными Солнце и небо, или творец неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевский, бюст которого установлен на площади перед Казанским университетом (см. табл. VI в конце книги), где он был студентом, профессором и ректором. Впечатление, производимое бюстом Лобачевского, передают следу-

[1]) В действительности эта женская фигура в руке держит какой-то сосуд.

ющие стихи В. Фирсова, напечатанные в газете «Красная Татария» (18.I—1948, № 13 (8791):

Высокий лоб, нахмуренные брови.
В холодной бронзе — отраженный луч...
Но даже неподвижный и суровый,
Он, как живой, спокоен и могуч.

Когда-то здесь, на площади широкой,
На этой вот казанской мостовой,
Задумчивый, неторопливый, строгий,
Он шел на лекции — великий и живой.

Пусть новых линий не начертят руки,—
Он здесь стоит, вознесенный высоко,
Как утверждение бессмертья своего,
Как вечный символ торжества науки.

Памятниками почтены и такие математики, которые известны только более узкому кругу специалистов. Среди таких памятников есть немало своеобразных работ, например высящаяся на мощном пьедестале статуя норвежского математика Абеля перед королевским дворцом в Осло. Там юный исследователь изображен победно одолевающим двух противников — две старческие фигуры. Та или иная математическая нотка не раз пробивается в такого рода произведениях — выше мы уже говорили об этом по поводу надгробий и памятников Архимеду, Ньютону, Гауссу. Да и народное остроумие, уделяющее немало внимания разным памятникам, не прошло мимо математиков и здесь. В Геттингене воздвигнут общий памятник (см. табл. VII в конце книги) физику Вильгельму Веберу и математику Карлу Фридриху Гауссу. На нем Вебер в энергичном движении обращается к спокойно сидящему Гауссу. Что же он ему говорит? Согласно народной молве: «Теперь я хотел бы, наконец, посидеть. Я ведь достаточно долго стоял». Кстати, рассказывали, что семья Веберов была несколько смущена, что их знаменитый предок изображен стоящим, тогда как Гаусс сидит. Не лучше ли было бы посадить обоих на двухместную кушетку?

Часто чеканились монеты с изображением знаменитых математиков, начиная с Пифагора; известно несколько монет, на которых он изображен, конечно, не с портретной точностью.

Необозримо множество созданных в разные времена портретов математиков. Разумеется, выяснение личности весьма часто сталкивается с непреодолимыми трудностями. Следует полагать, что бюсты, например, великих математиков времен расцвета греческой науки, как и бюсты великих философов, имелись во многих библиотеках и школах. Но как среди сохранившихся портретных бюстов есть несколько бюстов Аристотеля, однако мы не знаем определенно, какие именно, так дело обстоит и с бюстами математиков.

В таком же положении мы находимся и по отношению ко многим картинам Возрождения. Мы не знаем, кто изображен на превосходной картине — она висит в Лондонской национальной галерее — в виде поучающего математика с большим, роскошно отделанным циркулем в левой руке, тогда как правая рука поднята в ораторском жесте (см. табл. VIII в конце книги); все, что мы знаем о картине, — это имя художника: Джентиле Беллини. Так же обстоит дело и с тем математиком, которого испанец Рибера нарисовал держащим в руке лист со многими геометрическими фигурами; эта картина находится во владении Королевской галереи в Эдинбурге. В некоторых случаях мы можем хотя бы высказать те или иные предположения, как, например, по поводу картины Якобо де Барберини, на которой изображены двое мужчин, причем указанием на математику являются учебная доска и указка, угольник и циркуль, додекаэдр и замечательный правильный кристалл. Считают, что изображенный на картине поучающий монах — Фра Лука Пачоли.

В иных случаях портреты выдающихся математиков были плодом чистой фантазии: вспомним хотя бы группу математиков на большой фреске Рафаэля «Афинская школа». Начиная опять-таки с древности (мы располагаем мозаичной картиной из Геркуланума) и вплоть до наших дней было предметом художественного изображения полулегендарное происшествие: Архимед склонился над своими геометрическими фигурами — врывается римский солдат — noli disturbare circulos meos (не уничтожай мои круги) — Архимед падает под ударами меча.

Добавим еще, что имеются и почтовые марки с портретами математиков: немецкая марка с изображением Лейбница, голландская благотворительная марка, посвященная Христиану Гюйгенсу, несколько норвежских с Нильсом Абелем; в Советском Союзе были выпущены почтовые марки с портретами Н. И. Лобачевского, П. Л. Чебышева, С. В. Ковалевской (см. табл. IX в конце книги), М. В. Остроградского.

Математика и прикладное искусство

Вряд ли можно разграничить искусство чистое и искусство прикладное. Многие исключают из области чистого искусства монеты, амулеты и тому подобное. Другие, наоборот, пожалуй, отнесут к чистому искусству те орнаменты, которыми украшены показанные на табл. X (в конце книги) математические инструменты: уровень и прибор для измерения углов. Кто видел в музеях давние математические инструменты (они есть, например, в Ленинградской кунсткамере, в Эрмитаже, в некоторых немецких музеях и др.), того, наверное, поразила их художественная отделка и использование дорогих материалов; вызывает восхищение как материал — благородный металл или слоновая кость,— так и само искусство.

Эти художники достигли вершин в своем деле при выполнении тонких прецизионных работ, например при изготовлении солнечных часов любого размера и назначения или больших демонстрационных аппаратов, например «армиллярных [1]) сфер» (см. табл. XI в конце книги). Такая пространственная модель небесной сферы и движения по ней светил была отличительным признаком астрономов, подобно тому как в давние времена для всякого святого была своя примета, с которой он изображался на картинах. Такую армиллярную сферу мы видим на памятнике Копернику (см. табл. V).

Подобная орнаментальная обработка математических предметов сейчас совсем не принята, однако мы можем ее оценить с художественной стороны.

Но совсем странное впечатление производят на нас художественно оформленные рисунки старых математических учебников. Конечно, это прежде всего — заглавные листы. Достаточно одного примера (см. табл. XII

---

[1]) От лат. armilla — крупный браслет в несколько витков.

в конце книги). На таких листах изображали не только автора, но и его родной город, его духовных отцов, например Евклида и Пифагора, и сверх того очень многое. Конечно, не очень существенно то, что при этом допускают исторические ошибки, давая древнему греку Евклиду в качестве атрибута его науки магический квадрат, а Пифагору — даже схему биномиальных коэффициентов. Вообще стремились дать читателю возможно более живое изображение древних математиков — в таком окружении, которое было для них особенно характерным,— конечно, в соответствии с представлениями авторов учебников,

Рис. 7.

а не на основе настоящего исследования. Так, на рис. 7 Пифагор изображен музыкантом (этот рисунок взят из появившейся в 1492 г. в Милане книги Ф. Гафариуса «Теория музыки» — F. Gafarius, Theoria Musical).

Особенно часто встречается введение математических фигур в изображения пейзажей, строений, групп людей и т. п., в книгах по практической геометрии, в этих многочисленных, особенно в 16 и 17 вв., руководствах по землемерию, замеру высот и т. п. Впрочем, в книгах по чистой геометрии тоже не чурались художественно выполненных гравюр на меди или на дереве. Когда рассматривают такие иллюстрации, всегда пытаются найти какую-нибудь связь между математической фигурой и сопровождающим ее рисунком, но безуспешно. Автору известна книга, в которой на великолепных гравюрах евклидовы построения сочетаются с изображениями венгерских замков. Впрочем, во многих других случаях были скромнее: в греко-латинском издании Евклида, появившемся впервые в 1557 г. в Париже, каждая геометрическая фигура украшена только орнаментом в виде скромного листочка или усиков ползучего растения и т. п.

Шуточные рисунки

Шуточные рисунки учеников, сделанные в связи с геометрическими теоремами или построениями,— нередкое явление, и это не удивительно при большой живости художественного воображения молодежи. Вероятно, каждый преподаватель математики знает «пифагоровского

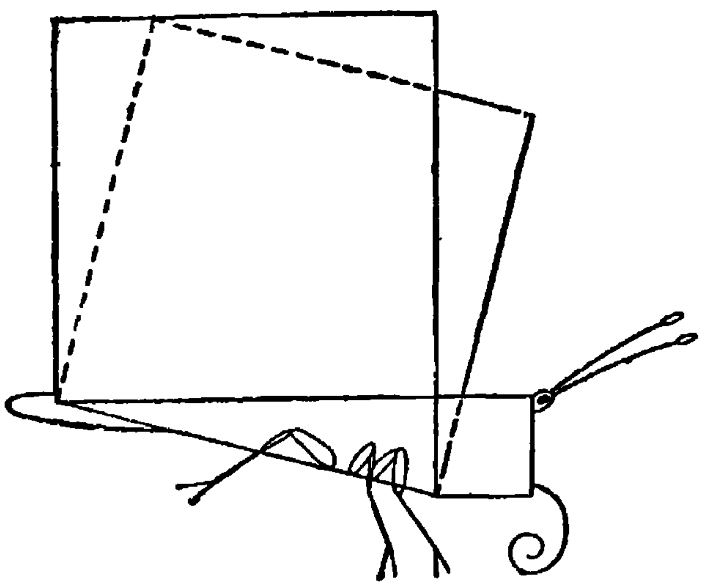


Рис. 8.

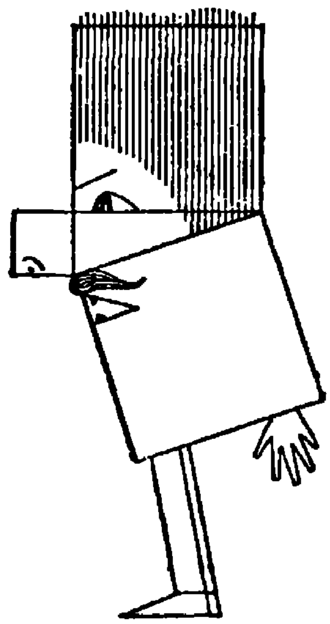


Рис. 9.

человечка», а здесь мы приводим еще несколько примеров (рис. 8, 9, 10). Кроме того, советуем как-нибудь проверить, какие занятные идеи могут возникнуть у школьников,— автор при случае давал ученикам задание: следуя примеру больших художников, сделать собственные рисунки на листе чертежной бумаги, поставив при этом свою подпись.

Еще один пример, заимствованный у одного из школьников,— вид свиньи сбоку, сверху и сзади — говорит

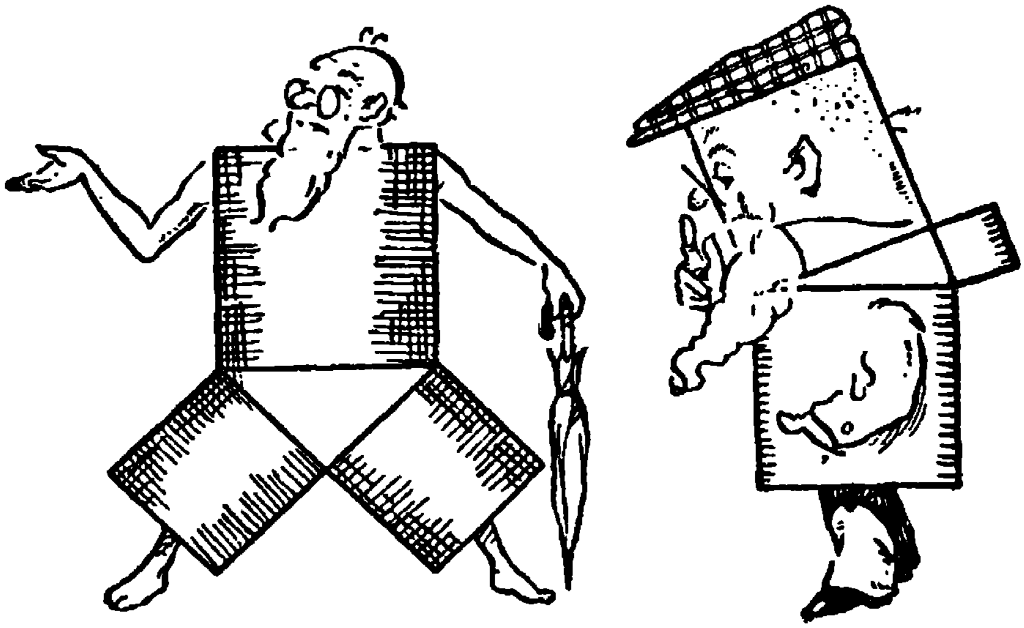


Рис. 10.

сам за себя (рис. 11). Впрочем, у нас есть просьба к читателю — проверить, все ли в порядке на этом рисунке.

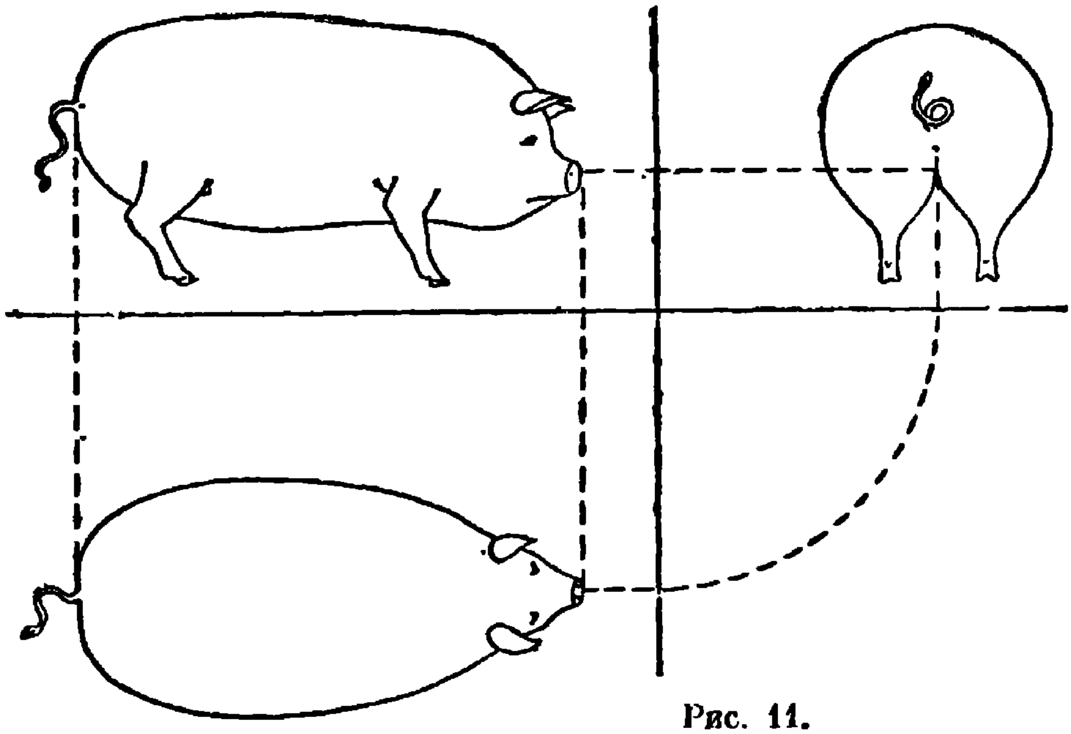


Рис. 11.

Наконец, напомним о рисунках-загадках. Так, например, два куска цепи изображают цепную дробь.

6. ИГРЫ

Большое воспитательное и вообще культурно-историческое значение игр было признано за ними сравнительно поздно, да и сейчас следует считать, что играм, в которых мы имеем дело с числами и простыми геометрическими фигурами, не уделяют еще достаточного внимания в литературе. О весьма давних играх такого рода мы сможем кое-что сказать в связи со «считалками», о которых речь пойдет во второй части книги. Здесь мы хотели бы привести только один пример такой старой игры, она известна у детей разных стран под разными названиями (в Советском Союзе это игра «в классы», в Германии — игра «в рай и ад») и с незначительными видоизменениями. В одном из ее вариантов используется приводимая здесь схема (рис. 12). Играющие бросают камушек сначала на поле 1, потом на поле 2 и т. д., не имея права при этом становиться на какое-либо из полей, затем вприпрыжку должны добраться до камушка и поднять его, чтобы сделать следующий бросок.

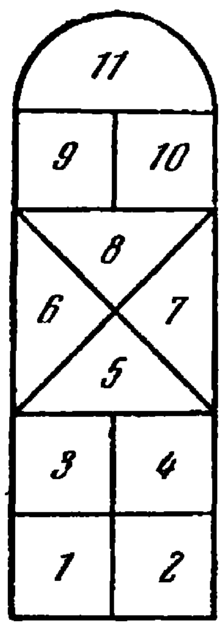


Рис. 12.

Теперь же мы перейдем к более или менее искусственно созданным играм; будем различать игры с одним участником (одиночные), с двумя (парные) и с бо́льшим числом участников (общие игры).

Игра в пятнадцать

Из большого числа одиночных игр (с некоторыми мы встретимся позже) выберем для примера игру в пятнадцать[1]). Она была изобретена в 1878 г. в Соединенных Штатах[2]) и быстро распространилась по всем странам. В нее играли везде; в дороге и дома, в конторах и даже, как рассказывают, на скучных заседаниях

---

[1]) См., например, Аренс II, Аренс 3, где дана полная теория этой игры. Рассматривается эта игра и в книге А. П. Доморяда, Математические игры и развлечения, М., 1961.

[2]) Изобретатель — знаменитый составитель шахматных задач С. Лойд.

немецкого рейхстага. Назначались премии за то, чтобы достичь необходимого конечного положения, исходя из определенных начальных. Лишь после того как была разработана математическая теория этой игры, на основе которой сразу выясняется, можно ли решить ту или иную задачу или нельзя, интерес к этой игре пошел на убыль, и теперь она является только детской игрой.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	0

Рис. 13.

Игровое поле представляет собою большой квадрат, разделенный на 16 одинаковых малых квадратов. Из этих 16 полей 15 покрыты квадратными фишками, помеченными числами от 1 до 15 включительно. Одно поле свободно, и мы дадим ему обозначение 0. На рис. 13 показано то конечное положение, которого надо всегда добиваться, но, как будет доказано, это не всегда осуществимо. Мы будем записывать положения, располагая соответствующие числа так, как буквы в книге, то есть беря их в каждой строке слева направо, а строки перебирая сверху вниз. Чтобы избежать путаницы и повысить наглядность, мы будем отделять числа запятыми, а строки — точкой с запятой. Стало быть, конечное положение, показанное на рисунке, запишется так:

1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12; 13, 14, 15, 0.

Возьмем теперь какое-либо начальное положение, например:

5, 2, 7, 3; 9, 8, 12, 15; 6. 1, 14, 11; 10, 4, 13, 0.

Теперь не представляет никаких трудностей поместить 1 в отведенное ей поле, делая подходящие ходы. Но при этих ходах мы будем все время следить за некоторой величиной, которую назовем числом инверсий. А именно, мы устанавливаем, что по сравнению с конечным положением 5 стоит перед 1, перед 2, перед 3 и перед 4, поэтому для этой первой фишки (5) мы насчитываем 4 инверсии, то есть 4 нарушения «правильной» последовательности.

Фишка 2 поставлена перед 1, следовательно, здесь мы имеем одно нарушение порядка. 7 поставлено перед 1, 3, 4, 6, поэтому получаем здесь 4 нарушения порядка. Четвертая фишка (3) дает одно нарушение. Подобно этому получаем 4 нарушения для 9, 3 — для 8, 5 — для 12, наконец, 7 нарушений порядка для 15. В третьей строке 6 дает два нарушения, так как эта фишка находится перед 1 и 4; 1, естественно, не дает ни одного нарушения, 14 дает их 4, а 11 дает 2. Наконец, четвертая строка дает нам последовательно 1, 0, 0 нарушений. Таким образом, общее число всех инверсий составляет

$$4+1+4+1+4+3+5+7+2+0+4+2+1+0+0=38.$$

Теперь мы сперва передвинем фишку 13 на одно поле вправо, что не изменяет числа инверсий. Не изменится это число и при смещении вправо 4 и затем 10, так что новым положением будет

5, 2, 7, 3; 9, 8, 12, 15; 6, 1, 14, 11; 0, 10, 4, 13.

Вообще мы можем высказать теорему 1:

Число инверсий не изменяется, когда мы смещаем положение 0 *по горизонталям.*

Теперь мы передвинем фишку 6 на одно поле вниз (то есть из третьего ряда в четвертый). Стало быть, имеем положение

5, 2, 7, 3; 9, 8, 12, 15; 0, 1, 14, 11; 6, 10, 4, 13.

Как теперь обстоит дело с суммой инверсий? Первые две строки остались без изменений. Число инверсий в третьей строке теперь 0, 0, 5, 3, а в четвертой — 1, 1, 0, 0. Всего получаем инверсий 39, то есть число инверсий изменилось на 1.

Далее, мы передвигаем теперь 9 на одно поле вниз, то есть из второй строки в третью. Рассмотрим, что теперь изменяется в сумме инверсий. Первая строка не изменилась. Число 4, с которого начинался подсчет инверсий во второй строке, отпало. Количество инверсий, связанных с числом 8 во второй строке, не изменилось, а количество инверсий, связанных с числом 12, вследствие передвижки 9 уменьшилось на 1, и то же самое произошло с инверсиями для числа 15. Итак, во второй строке стало меньше на 2 инверсии. В начале третьей строки теперь стоит 9. По сравнению с предыдущим числом инверсий (0) это дает увеличение 3. Следовательно, общее число инверсий увеличилось на 1. Если таким же образом рассмотреть все возможные случаи, мы получим доказательство теоремы 2:

Число инверсий изменяется на нечетное число, а именно на 1 или на 3, когда мы 0 смещаем на одно поле по вертикали.

Например, если мы теперь сместим 5 на одно поле вниз, число инверсий уменьшится на 1.

Из двух выше сформулированных теорем мы можем вывести такое заключение: каким бы путем мы ни переходили из любого начального положения к такому конечному, в котором 0 тоже занимает нижнее правое место, нам всегда придется выполнить четное число перемещений «0-фишки» по вертикали, а именно столько же раз передвигать ее вверх, сколько вниз. Отсюда следует теорема 3:

Любое начальное положение нельзя преобразовать в другое начальное положение, если соответствующие числа инверсий не отличаются на четное число.

Но ведь конечное положение обладает числом инверсий 0. Следовательно, получаем теорему 4:

Никакое начальное положение, которому соответствует нечетное число инверсий, нельзя перевести в конечное.

Выбранное нами начальное положение обладает четным числом инверсий. Стало быть, переход от него к конечному не является невозможным. Но можно задать вопрос: существуют ли вообще положения с нечетным числом инверсий? Дать на него ответ нетрудно, приведя пример. Поменяем в конечном положении местами две соседние фишки, хотя бы 6 и 7, и будем считать его теперь начальным положением. Для него число инверсий уже равно не 0, а 1. Согласно нашей теореме 4 такое начальное положение нельзя перевести в конечное.

Нам остается еще разъяснить вопрос, всегда ли можно при четном числе инверсий в начальном положении перейти из него в конечное положение. Ответить надо утвердительно, но здесь мы не можем привести подробное доказательство. Тот, кто приобрел известный опыт в этой игре, легко вырабатывает в себе навыки перемещать на нужное место сначала 1, затем 2 и т. д.

Парные игры — самые распространенные; они, вероятно, того же возраста, что и человечество. Например, игра «в чет и нечет» безусловно была известна древним грекам и римлянам — о ней упоминают Платон и другие авторы, равно как и Гораций.

Собственно говоря, сюда относятся и те случаи, когда одно лицо предлагает другому решить какую-то задачу, стало быть, и отгадывание задуманного числа, решение «замаскированных уравнений» и т. п. Как пример игр другого рода, когда оба игрока выполняют одинаковые действия для достижения некоторой заранее определенной цели, укажем игры на доске. Всем известны шахматы, шашки русские и стоклеточные, многие, вероятно, слышали о китайско-японской игре «го» и т. п. В этих случаях прежде всего возникает вопрос, может ли игрок при заданном начальном положении достичь требуемого конечного, иными словами, в состоянии ли он с помощью подходящих действий заведомо добиться выигрыша. Мы рассмотрим такую проблему для упрощенной формы так называемой игры в мельницу.

Простая мельница

Это — игра на девяти полях вида, показанного на рис. 14. Каждый из двух игроков располагает тремя фишками. Сначала эти фишки надо по очереди класть на любое из полей, обозначенных числами от 1 до 9 включительно. После этого каждый игрок поочередно может передвигать фишку на свободное соседнее поле по направлениям, указанным на рис. 14. Выигрывает тот, кто либо при первоначальном занятии полей, либо при последующем передвижении фишек первым построит мельницу. Мельницей же называют такое размещение, когда все три фишки игрока находятся на одной прямой.

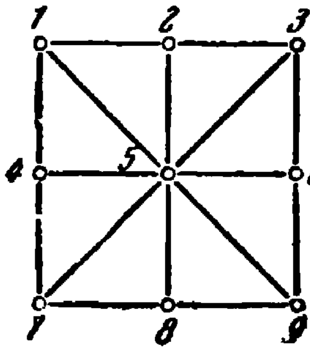


Рис. 14.

Будем обозначать фишки игрока A знаком $+$, игрока B знаком $-$. Мы хотим доказать, что начинающий игру (A) всегда может выиграть. Он ставит первую фишку на поле 5, которое, очевидно, занимает особое положение. Теперь следует различать два случая. Либо B ставит на угловое поле, то есть на 1, 3, 7 или 9, либо он ставит на «среднее» поле: 2, 4, 6 или 8. Рассмотрим сначала первый случай и будем считать поля обозначенными так (иными словами, повернем доску так), что на нашем рисунке оказывается занятым поле 1 — слева вверху. Тогда A ставит на 8, и тем создается положение $\begin{matrix} - & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 \end{matrix}$, где 0 обозначает пустое поле, а + и — обозначают поля, занятые соответственно первым и вторым игроками. Чтобы A не получил мельницы, B обязан ставить на 2. Теперь игра выглядит так: $\begin{matrix} - & - & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 \end{matrix}$. Следовательно, ход A вынужден: он ставит на 3, и мы приходим к положению $\begin{matrix} - & - & + \\ 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 \end{matrix}$. Но так как мельницу можно построить и по диагонали, B вынужден ставить на 7, и теперь, когда в игру вошли все фишки, мы имеем положение $\begin{matrix} - & - & + \\ 0 & + & 0 \\ - & + & 0 \end{matrix}$. В этом положении первое перемещение производит A, и он передвигает свою фишку с 5 на 6. Тогда у него получается то, что называется открытой мельницей: $\begin{matrix} - & - & + \\ 0 & 0 & + \\ - & + & 0 \end{matrix}$, то есть он заведомо может одним ходом (с 8 на 9) построить мельницу. В то же время B не может его опередить, не имея такой открытой мельницы. Итак, в рассматриваемом случае A всегда побеждает.— Подумайте, как развивалась бы игра, если бы A поставил свою вторую фишку не на 8, а на 6, и покажите, что при этом получилась бы партия, не отличающаяся существенно от разобранной!

Второй случай: если B ставит первую фишку на одно из средних полей, то всегда можно так обозначить поля (иными словами, всегда можно так повернуть доску), чтобы таким полем было 2. Тогда A ставит на 7, и тем самым B вынужден ставить на 3, так что приходим к положению $\begin{matrix} 0 & - & - \\ 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 \end{matrix}$. Теперь A должен ставить на 1, а B на 4, и доска принимает вид[1]) $\begin{matrix} + & - & - \\ - & + & 0 \\ + & 0 & 0 \end{matrix}$. Если бы в распоря-

[1]) Почему B не поставит на 9?

жении *А* была еще одна фишка, он мог бы получить мельницу, поставив фишку на 9. Но он может достичь этого двумя ходами, переместив фишку с 7 на 8 и получая таким образом открытую мельницу. В то же время *В* не может его опередить, какой бы ход он ни сделал. Следовательно, *А* ближайшим ходом построит свою мельницу.

Разыграйте партию, в которой *В* своим первым ходом ставит на 6!

7. ЛОЖНЫЕ ВЫВОДЫ И ДРУГИЕ ОШИБКИ

В зависимости от того, допущена ли ошибка сознательно или невольно, можно различать выводы ложные и выводы ошибочные. Глава об ошибках — печальный предмет для школы и школьников, и естественно усомниться, можно ли найти в ней занятную или даже веселую страницу. Во всяком случае учителю не следует вызывать веселье за счет присутствующего, а то даже называемого по имени товарища. С другой стороны, и здесь, как и в других областях, ошибки поучительны, если как следует в них разобраться. Более того, многие ложные и ошибочные выводы были даже исходным пунктом для весьма важных научных исследований и открытий. Напомним хотя бы о парадоксе Зенона: Ахиллес и черепаха.

Ахиллес и черепаха бегут наперегонки. Черепаха получает фору, скажем, 100 *м*. Мы примем, что Ахиллес бежит в десять раз быстрее черепахи. Когда он пробежит 100 *м* форы, черепаха будет в 10 *м* впереди него. Когда Ахиллес пробежит эти 10 *м*, черепаха будет от него в 1 *м*. Когда Ахиллес оставит за собою этот метр, черепаха уйдет вперед на 10 *см*. И так далее. Черепаха будет впереди на 1 *см*, на 1 *мм* и т. д., но будет все же впереди на расстоянии, превышающем нуль. Ахиллес никогда не догонит черепаху!

Анализ этого парадокса связан с основами теории бесконечных рядов, он непосредственно приводит к понятию предела числовой последовательности и к исследованию сходимости рядов — тем самым, к одному из плодотворнейших средств современной математики.

Ложные математические выводы

Начнем с наиболее известного ложного геометрического вывода, чтобы на этом примере разъяснить, в чем состоит ошибка [1]). Мы будем доказывать, что всякий треугольник является равнобедренным. Пусть ABC — какой-либо треугольник (рис. 15); мы проводим в нем биссектрису угла A и восставляем перпендикуляр к стороне BC в ее середине D. Эти две линии пересекаются в точке O, которую мы соединяем отрезками прямой с B и C, а также опускаем из O перпендикуляры OF и OE на AB и на AC соответственно. Теперь имеем

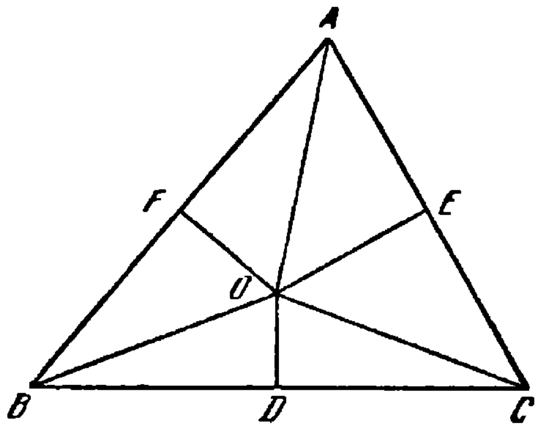


Рис. 15.

$$\triangle AFO \cong \triangle AEO,$$
$$\triangle ODB \cong \triangle ODC,$$

причем конгруэнтность первой пары треугольников следует из второго признака конгруэнтности, а конгруэнтность второй пары — из первого признака конгруэнтности треугольников. Отсюда получаем, что $OF=OE$ и $OB=OC$, следовательно,

$$\triangle OBF \cong \triangle OCE$$

согласно четвертому признаку конгруэнтности треугольников, и при этом можно непосредственно убедиться, что использованный тут угол действительно лежит против большей стороны — ведь мы имеем дело с прямым углом. На основании доказанного имеем

$$AF = AE, \qquad FB = EC,$$

откуда путем сложения получаем требуемый результат:

$$AB = AC.$$

Теперь давайте присмотримся к тому, как мы смогли получить этот ошибочный результат. С теоремами о конгруэнтности треугольников, очевидно, все в порядке. Первое возражение, которое можно было бы выдвинуть:

---

[1]) Коллекцию таких ложных выводов см. Литцман II.

пересекаются ли вообще биссектриса и перпендикуляр, восставленный в середине одной из сторон? Но это действительно так, ибо, если допустить, что они параллельны, то биссектриса окажется перпендикулярной к BC, что возможно только тогда, когда $AB=AC$, и мы докажем равнобедренность еще скорее. Итак, мы можем допустить, что точка пересечения O существует. Но она вовсе не должна лежать внутри треугольника, как это принято на нашем рисунке, она может находиться и вне его. И теперь мы даже докажем, что она **д о л ж н а** находиться вне.

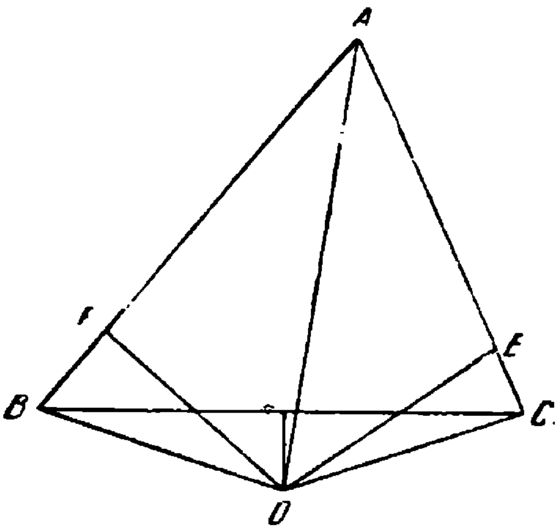


Рис. 16.

А именно, если мы представим себе, что вокруг треугольника ABC описана окружность, то дугу, стягиваемую стороной BC, должна делить пополам биссектриса угла A, должен делить пополам эту дугу и перпендикуляр к BC, восставленный в ее середине. Итак, эти две прямые пересекаются в точке описанной окружности, следовательно, заведомо вне треугольника. Стало быть, наш рисунок неверен и нам надо сделать новый.

На рис. 16 обозначения выбраны так, чтобы наше доказательство можно было провести сразу и для этого чертежа. Мы снова получаем, складывая равенства $FB=EC$ и $AF=AE$, желаемый результат

$$AB = AC.$$

Итак, нам все еще надо искать ошибку. Снова рассмотрим описанную окружность. $ABOC$ представляет четырехугольник, составленный из хорд. В нем сумма противоположных углов равна двум прямым. Следовательно, из двух противолежащих углов ABO и ACO один должен быть острым, другой — тупым. В крайнем случае оба угла могли бы быть прямыми, но тогда точка F совпала бы с B, E с C, а это возможно лишь тогда, когда $AF=AB=AE=AC$, то есть когда треугольник уже равнобедренный. Поэтому из двух перпендикуляров в треугольниках OAB и OAC один опущен на сторону треугольника, а другой — на продолжение стороны за вершину. Итак, правильный чертеж имеет вид, показанный на рис. 17. Но это лишает нас возможности провести доказательство. Ибо, с одной стороны, мы должны складывать, чтобы получить AB, а с другой стороны, мы должны вычитать, чтобы получить AC.

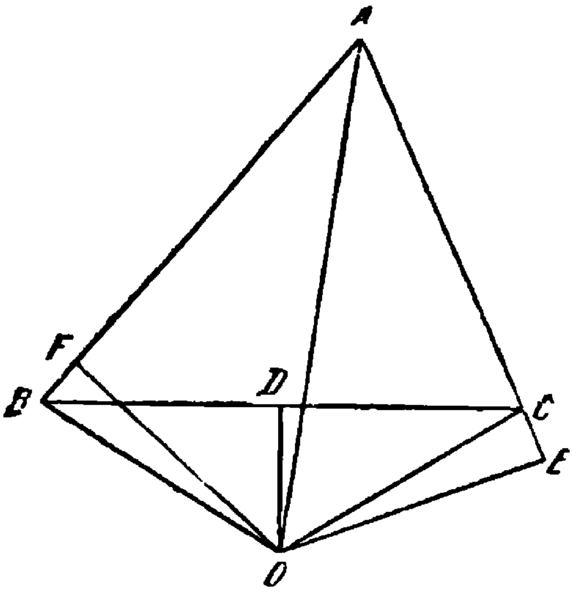


Рис. 17.

Итак, основной причиной нашего ошибочного вывода было то, что мы пренебрегли необходимостью при тщательном проведении доказательства всякий раз учитывать все возможные положения геометрических образов. Все то, что мы определяем словами «внутри» и «вне», «между» и «на продолжении», надлежит находить не по чертежам, которые, возможно, и ошибочны, а получать в ходе логически развиваемых выводов. Впрочем, если бы мы уже при первой попытке точно построили биссектрису и перпендикуляр, восставленный из середины стороны треугольника, мы сэкономили бы немало труда.

Элементарные ложные выводы в арифметике во многих случаях основаны либо на незаконном делении уравнения на 0, либо на том, что не учитываются оба знака квадратного корня. Докажем, используя как то, так и другое, что $2=3$.

Пусть $a=b+c$; умножим это равенство на $a-b$, что дает

$$a^2-ab=ab+ac-b^2-bc,$$

или

$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc,$$

или же

$$a(a-b-c)=b(a-b-c),$$

откуда, сокращая на общий множитель, получаем

$$a=b.$$

Если мы в эту выкладку, которая верна для любых чисел a и b, подставим $a=3$, $b=2$, то получим желаемый результат.

С другой стороны, имеем

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

следовательно,

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2.$$

Вычтем из обеих частей равенства $n(2n+1)$ и получим

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1);$$

добавим слева и справа $\frac{1}{4}(2n+1)^2$, чтобы получить

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2 =$$

$$= n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4}(2n+1)^2.$$

Теперь с обеих сторон мы имеем точные квадраты, а именно:

$$\left[(n+1) - \frac{1}{2}(2n+1)\right]^2 = \left[n - \frac{1}{2}(2n+1)\right]^2.$$

Если извлечь квадратный корень, получим

$$n+1-\frac{1}{2}(2n+1) = n - \frac{1}{2}(2n+1),$$

откуда следует, что

$$n = n+1,$$

и если подставить здесь 2 вместо n, получим нужное нам равенство.

В учении об уравнениях основным источником ложных выводов является допущение противоречий, естественно, по возможности замаскированных. Достаточно будет привести один пример:

Пусть дана система двух уравнений

$$x^2 - 9y^2 = 7, \qquad (1)$$

$$x = 3y. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$9y^2 - 9y^2 = 7,$$

то есть оказывается, что $7=0$.

Ложные умозаключения

Математика существенно опирается на логику. Основы же логики кажутся непоколебимо прочными. О логике не спорят, и, как обычно говорят, для того, кто нарушает законы логики, есть только один исход — изгнание из общества разумных людей. Однако и в логике можно натолкнуться на затруднения. Мы имеем в виду не очевидно ложные выводы, вроде доказательства, что кошка имеет семь ног, потому что ни у одной кошки нет трех ног, а одна кошка имеет четыре ноги, откуда указанный сомнительный результат получается почленным сложением соответствующих равенств, или доказательства, что

пустой = полный,

поскольку

полупустой = полуполный.

Не будем останавливаться и на очевидных, хотя и весьма распространенных ошибках при разных сравнительных суждениях («Мининг и Штининг так похожи друг на друга, особенно Мининг»; у писателя Генриха Зейделя где-то сказано, что «тетя Эмма, она так же мала, как мой дядя высок»). Но мы приведем несколько противоречивых утверждений другого рода.

1. «Нет правила без исключений». Это, разумеется, правило. Но это правило, следовательно, не без исключений. Стало быть, есть правила без исключений. Иными словами, из утверждения «Нет правила без исключений» следует ему противоположное. С этим ложным выводом находится в родстве так называемый «критянин» греческих софистов: утверждение критянина «Все критяне — лжецы» ведет к противоречию. Сходным образом оказывается внутренне противоречивым утверждение Шпенглера «Нет никаких универсальных законов», и подобное же противоречие содержит в себе часто приводимый шуточный совет: «Никогда не надо говорить никогда».

2. Вход в парк некоего могущественного князя был запрещен. Если ловили какого-либо нарушителя, его ожидала смерть, но ему предоставлялось выбирать между виселицей и обезглавливанием, а именно: он должен был что-то заявить, и если его утверждение было верно, его обезглавливали, а если ложно, то вешали.

Однако кто-то особенно хитрый заявил: «Меня повесят. А теперь,— сказал он,— вы можете либо меня обезглавить, но тогда это нарушит ваше правило, либо вы можете меня повесить, но и это будет нарушением вашего правила!»

Греческим софистам было известно вполне аналогичное рассуждение, только там речь шла о крокодиле и о женщине, ребенка которой похитило это чудовище.

3. Деревенский парикмахер — это тот житель деревни, который бреет всех ее жителей, что не бреются сами. Ставится вопрос: бреется ли этот парикмахер сам? Допустим, что он бреется сам,— тогда он не тот деревенский парикмахер, который бреет таких людей, что не бреются сами. Итак, остается принять, что он сам не бреется. Но если это так, то тогда как раз в силу заранее принятого определения, кто такой деревенский парикмахер, он должен себя брить. Следовательно, и в этом случае мы приходим к противоречию.

Пожалуй, нам могут заметить, что эти логические тонкости ничего общего не имеют с математикой. Однако ведь вполне возможно, что и в математике встретятся такие рассуждения, утверждения и выводы, которые таят в себе противоречие, и что тогда осталось бы от хваленой абсолютной истинности математических фактов. Но на деле еще хуже! В большой математической дисциплине, в теории множеств, подобные «парадоксы» действительно играют весьма неприятную роль. Мы это покажем хотя бы на одном примере. Но в силу абстрактности понятий читатель должен весьма тщательно проследить за рассуждениями.

4. Мы будем рассматривать множества. Предметами или элементами, образующими множество, могут быть какие-либо вещи, числа, точки, любые геометрические фигуры или же множества, составленные из других элементов.

Но множества могут быть двух родов. Первый род образован такими множествами, которые сами себя содержат в качестве элемента. К этому роду относится, например, множество всех абстрактных понятий. Ибо это множество само является абстрактным понятием. Ко второму роду относятся такие множества, которые сами себя не содержат в качестве элемента. Например, множество, состоящее из элементов 1, 2, 3, не содержит множества

(1, 2, 3) в качестве элемента. Любое множество будет либо первого рода, либо второго.

Рассмотрим теперь множество, элементами которого являются все множества второго рода, и только такие множества; обозначим его M. Принадлежит ли M к первому или ко второму роду?

Допустим, что M первого рода, тогда M есть элемент в M, но это противоречит указанному для построения M правилу. Итак, остается допустить, что M не принадлежит как элемент к M. Но тогда, опять-таки по правилу для построения M, M должно входить в M в качестве элемента, и мы снова наталкиваемся на противоречие.

Обманчивая наглядность

Мы не хотим так сузить понятие ложного вывода, чтобы понимать под этим только логические ошибки: ведь выше как раз на геометрическом примере мы видели, что и наглядность может иной раз свести на нет весь расчет. В том случае это было связано с действительно неверно начерченной фигурой. Но наше наглядное представление можно обмануть и при правильном рисунке. Этому учит нас глава о геометрически-оптических заблуждениях. Нам достаточно будет привести две известные простые геометрические фигуры с параллельными линиями. Первая (рис. 18) представляет квадрат, в котором проведены диагональ и несколько ей параллельных линий. На эти параллели нанесена штриховка так, что на соседних линиях штрихи взаимно перпендикулярны. Вследствие этого нашему глазу параллели уже не кажутся одинаково направленными — все выглядит так, как если бы они были наклонены друг к другу и пересекались при про-

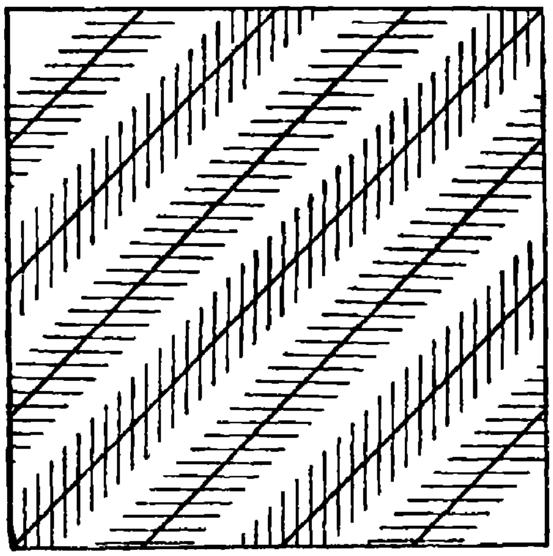


Рис. 18.

должении. В том, что действительно этот своеобразный обман зрения вызывается штриховкой, можно убедиться с помощью кино, когда такую фигуру показывают постепенно: параллели испытывают как бы толчок, когда их внезапно покрывают штрихами.

Тесно связана с этим звездная фигура, показанная на рис. 19, и ее антагонист — псевдоскопическая звездная фигура (рис. 20). Обе параллели на этих рисунках, пересекаемые пучком прямых, кажутся в первом случае вогнутыми наружу, во втором — вогнутыми внутрь.

Как в наших примерах создаются ошибочные представления о направлениях, так в других получаются ошибочные представления о длинах и площадях. Иногда такие

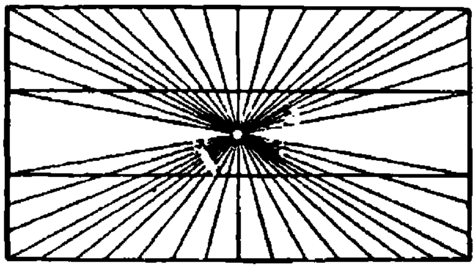


Рис. 19.

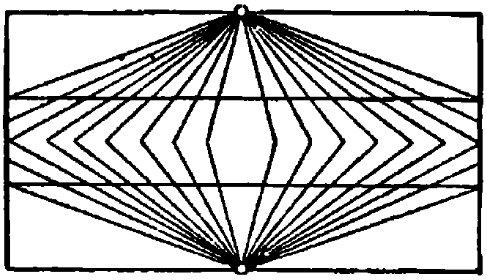


Рис. 20.

систематические ошибки наглядного представления используются в целях рекламы. На всех рис. 21—23 отношение зачерненной площади к светлой равно 1 : 3. Страховое общество, которое желало представить в возможно большем виде число смертей в ближайшие десять лет, конечно выбрало для диаграммы рис. 21. С рис. 22 оно имело бы куда меньше успеха. Действительно объективной диаграммой был бы рис. 23.

Не всегда геометрически-оптические обманы составляют неприятное приложение — во многих случаях мы используем их систематически. Например, при плоском изображении пространственных предметов. На рис. 24 представлен куб. Я убежден, что эту фигуру, действительно, гораздо труднее представить себе как плоский образ, чем как пространственный. Но и здесь наблюдаются занятные явления. Если сосредоточить внимание при рассмотрении рисунка на ребре куба, направленном по AB, куб кажется расположенным иначе, чем если сосредоточиться на ребре, направленном по CD. Эти два положения куба отличаются тем, как нам представляется расположенным на переднем плане фиксируемое нами ребро.

При таких ошибках решающую роль играет своеобразная смесь наглядных представлений и рассуждений, что приводит к существенным отклонениям в оценке порядка рассматриваемых величин. Приведем здесь один известный пример.

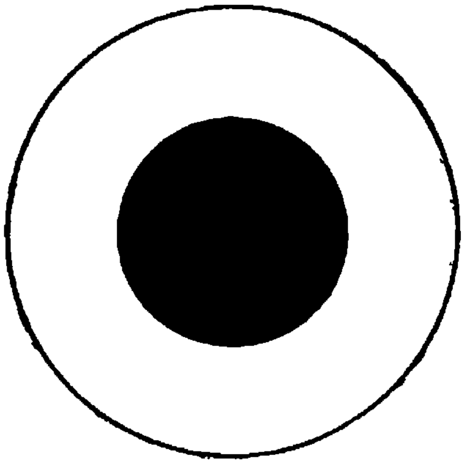


Рис. 21.

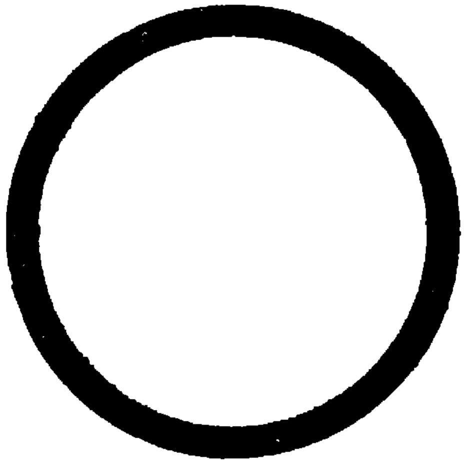


Рис. 22.

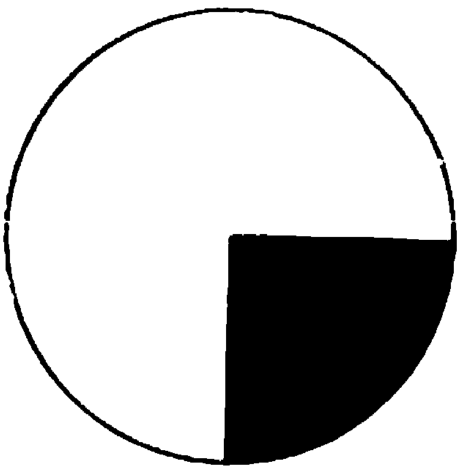


Рис. 23.

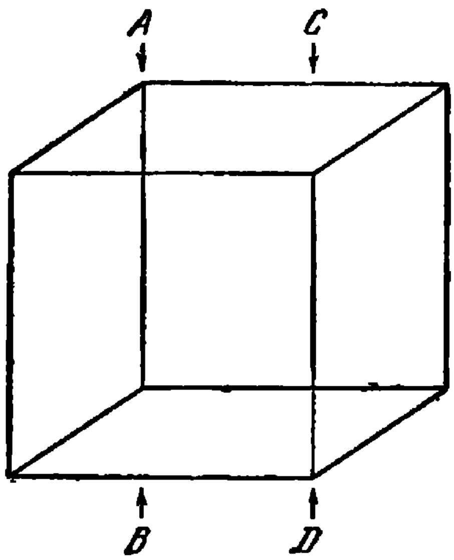


Рис. 24.

Представим себе Землю опоясанной по экватору канатом. Он оказался на 10 *м* длиннее, чем нужно, и поэтому несколько отходит от поверхности Земли (равномерно). Спрашивается, может ли мышь пролезть между этим расслабленным канатом и Землей. Обычно ошеломляющим кажется ответ, что не только мышь, а даже взрослый человек сможет пройти под таким канатом, не особенно сгибаясь. Действительно, пусть R — радиус Земли, x — расстояние, на которое канат повсюду отходит от Земли, тогда разность длин экватора и большего круга (с радиусом $R+x$) должна быть равна 10 *м*, и мы, считая, что все измеряется в метрах, получаем уравнение

$$2\pi (R + x) - 2\pi R = 10,$$

откуда

$$2\pi x = 10.$$

Итак, x приблизительно составляет 1,5 *м*.

Погрешности против здравого смысла

Иной раз в математической постановке задачи все может быть в порядке, а все-таки по сути не все в порядке. Что мы под этим понимаем, пояснит небольшой рассказ. Это — письмо измученного отца в одну из немецких газет.

«Мой сын принес домой из школы задачу на тройное правило: если 10 каменщиков, работая по 10 часов в день, могут выстроить дом за 150 дней, то сколько каменщиков смогут выстроить такой дом за 30 дней, работая каждый день по часу? Мой сын уселся и согласно правилу подсчитал:

$$\frac{10 \cdot 150 \cdot 10}{30 \cdot 1} = 500.$$

«Папа, у меня получилось,— закричал мальчик,— 500 каменщиков могут построить дом за 30 дней».

«Гм,— сказал я в сомненьи,— это надо было бы проверить». Мой сын, разумеется, сообщил о моих сомнениях учителю. Ну, а тот тем же способом передал, чтобы я был настолько любезен сообщить, что мне не по душе в этом примере.

«Ровно ничего, г-н учитель,— писал я ему,— я хотел бы только заметить, что тогда 15 000 каменщиков выстроят этот дом за 1 день, предполагая, что они при этом не будут наступать друг другу на мозоли. И известно ли Вам, г-н учитель, что если один учитель должен учить парня 7 лет, чтобы сделать из него порядочного человека, то сколько учителей выполнят эту работу за 1 день? Примерно, 2100 учителей, г-н учитель...»

Что же случилось? Учитель за оскорбление хочет подать на меня жалобу. А я ничем не располагаю, кроме тройного правила...»

В 1926 г. на экзамене в одном из учебных заведений — где именно, автор не намерен указать, но задачу можно прочесть в одном из математических журналов — речь шла о круговом конусе весом в 1 *кг* при высоте в 50 *см* и радиусе основания в 25 *см*. Предлагаем вычислить удельный вес материала, из которого состоит конус.

Мы видим, что математически и логически верным может быть многое такое, от чего шарахается человеческий здравый смысл.

Разные другие виды ошибок

Прежде всего обратимся к опечаткам, опечаткам в книгах, журналах и других изданиях. Есть всякие опечатки, простые просмотры и ошибки, порожденные незнанием.

Просмотры возможны. Кто хочет бросить камень, ибо он того мнения, что просмотров быть не должно, пусть сам напишет книгу — тогда он перейдет в другую веру. Иной раз получаются весьма забавные опечатки, когда космическая физика превращается в комическую физику, неевклидова геометрия — даже в неевропейскую геометрию.

Хуже обстоит дело с ошибками тех, кто должен быть основательно знаком с предметом. Некий составитель учебников заявил в 1922 г., что все прямоугольные треугольники подобны. Один довольно популярный автор обнаружил, что два числа играют важную роль в жизни человека, 23 и 28. Оказывается, что все важные периоды и события в жизни человека можно выразить с помощью кратных этих чисел. Но тут на сцену выходит математик и заявляет: это тривиально! Действительно, любое целое число можно представить в виде $x \cdot 23 + y \cdot 28$, если только подобрать подходящие целые значения для x и y. И увы! это верно не только для двух таинственных чисел 23 и 28, но и для любых чисел без общего делителя, как, скажем, 2 и 3 или 22 и 29 и т. д.

Известная, впрочем, вполне зарекомендовавшая себя фабрика резинок выпускает на рынок два новых сорта. Объявление гласит: «Мы выпускаем наши резинки, зеленого и красного цвета, как четырехугольной формы, так и удлиненной, скошенной формы». Хорошо еще, что при этом был дан рисунок (рис. 25), который мы здесь воспроизводим, опустив подтекст.

Когда говорят о четырехугольной печке, с этим можно мириться, так как углы у пола при этом не считают. Но в случае с резинками ни от одного из восьми углов ведь

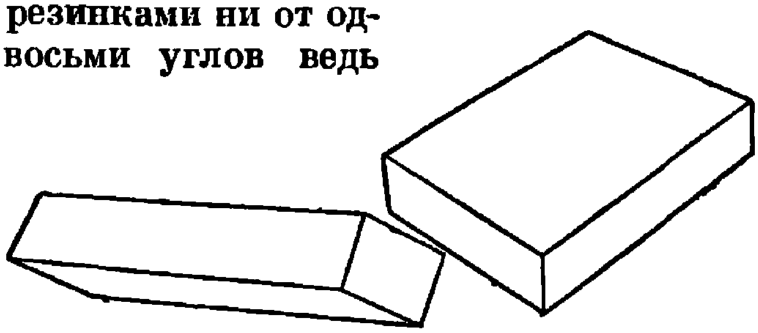


Рис. 25.

нельзя отказаться. Впрочем, наша фирма — не в плохой компании. В свое время немецкое законодательство предписывало при выборах в рейхстаг пользоваться четырехугольной урной. Рассказывают, что профессор математики, оказавшийся председателем избирательной комиссии, занес — конечно, в шутку — протест в протокол: урна, которая была ему предоставлена для проведения выборов, имеет восемь углов, а не четыре, как предписано!

Математики большей частью весьма плохого мнения об определенного рода авторах, ибо делать ошибки легче, чем их находить, особенно в увесистых и неясно изложенных работах; но еще тяжелее обычно растолковать автору, в чем состоит обнаруженная у него ошибка. Тот, кто имел дело с «решившими» задачу о трисекции угла, с «нашедшими» квадратуру круга, с «ферматистами», найдет, что рассказать по этому поводу.

Но мы не хотим быть односторонними. После такой критики в адрес авторов отдадим должное и читателям! Незадолго до солнечного затмения 29 июня 1927 г. некий господин написал в редакции многих газет, что он возмущен тем, как, видимо сговорившись заранее, хотят ввести в заблуждение публику. Но он-то не даст себя обмануть в связи с солнечным затмением 29 сего месяца — он посмотрел в календарь. Оказалось, что на этот день приходится новолуние. А если луны вовсе нет, то как она может затмить Солнце!

Разбирать ошибки школьников — неприятная задача для каждого учителя, но когда он имеет дело с письменными работами, то ошибки эти, представ перед ним черным по белому, могут остаться у него в руках. Тем более странно, что во всей литературе, насколько нам известно, пока имеется лишь один небольшой сборник математических ошибок школьников (см. Литцман II). Во всяком случае, ошибки школьников могут быть поучительными, они могут коечто дать — больше, чем гладкое механически подсчитанное правильное решение. Но ошибки школьников могут быть забавны, даже просто комичны, как, например, тогда, когда совершенно ошибочное вычисление дает все же правильный результат. Так, однажды некий школьник следующим образом решал задачу «вывести уравнение окружности». «Соединим (рис. 26) точку окружности, имеющую координаты x и y, с началом координат; тогда, если r есть расстояние точки от начала координат,

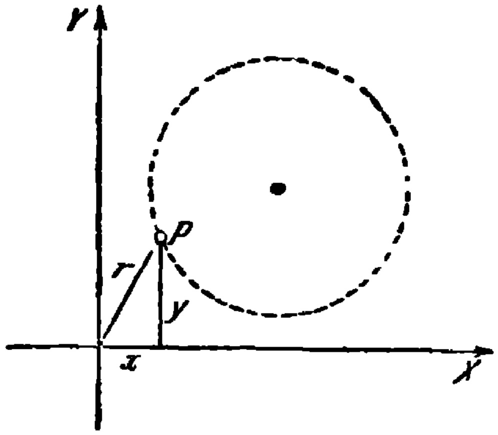


Рис. 26.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Это справедливо для каждой точки окружности». Когда это читаешь, можно подписаться под каждым словом и думать, что писавший правильно понял и изложил вывод уравнения окружности. Но одного взгляда на прилагаемый чертеж достаточно, чтобы выявить полную ошибочность всего изложенного. Метод автора этого решения имеет, правда, то преимущество, что для л ю б о й кривой он дает то же самое уравнение, что и для окружности.

8. АЛЛОТРИОН

Этим словом мы будем обозначать все то, что не относится к преподаваемому предмету в собственном смысле этого слова, все непривычное, необычное, даже чуждое. Именно необычное, которое как-то связывается с привычным, скорее всего будет живо воспринято и надолго закреплено в памяти.

Итак, к аллотриону мы отнесем все экскурсы из предписанного программой материала в интересные области научного и с с л е д о в а н и я, как то: неевклидова геометрия, многомерная геометрия, топология, математические инструменты, патологические кривые и функции, построения с помощью приспособлений, отличных от принятых у Евклида, и т. д. Все это — весьма серьезные области научных исследований, но когда, по тому или иному поводу, мы встречаемся с ними в элементарном преподавании, надо пренебречь строгостью выводов, порою даже самими выводами: самое важное — изложить результаты в увлекательной, а то и в забавной форме, связывая их с учебным материалом.

При этом особое внимание надо обратить на связь с практическими п р и м е н е н и я м и. Соответствующее оформление задач, скажем, на уравнения, на построение, дает достаточно поводов для введения «аллотриона». Например, как суха такая задача: «Дан круг радиуса r; около круга надо построить последовательность круговых колец, которые все должны иметь такую же площадь, как и круг; как растут радиусы их внешних окружностей?» И насколько живее получается эта задача, если в центре круга мы забиваем кол, привязываем к нему на веревке длины r козу и спрашиваем, насколько придется удлинять каждый день веревку, если козе для выпаса надо ежедневно предоставлять одну и ту же площадь.

Так даже довольно абстрактные вещи оказываются в занятном облачении довольно «близкими к жизни». Обратимся еще к весьма чуждому для ученика младшего класса понятию наименьшего общего кратного. Вот два примера оформления.

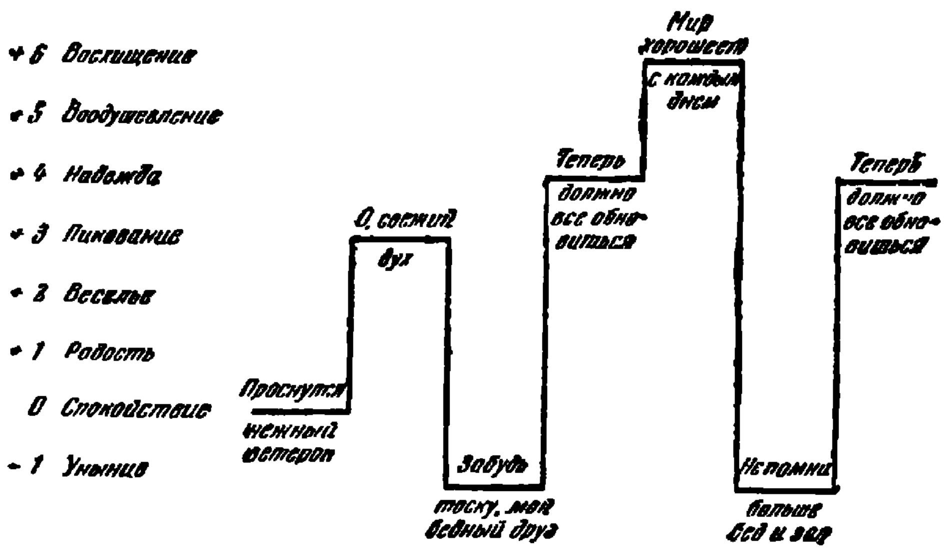
В птичнике 4 курицы. Одна сносит яйцо каждый четвертый день, вторая — каждый пятый, третья — каждый седьмой, четвертая — каждый девятый день. Когда в первый раз счастливый обладатель четырех куриц найдет сразу четыре яйца?

В одном классе было три ленивых ученика. Чтобы их праздность не бросалась в глаза, самый ленивый решил не делать задач каждый третий день, второй — каждый пятый день, третий — каждый шестой день. Когда они в первый раз появились все трое, не решив задач, терпение учителя лопнуло и... На какой день наступила катастрофа?

Следующую группу образуют **исторические**, а точнее культурно-исторические **замечания**. Выше мы уже говорили о том, что некоторые простые геометрические фигуры играли роль символов. Сюда же относится символическое значение чисел в музыке и в поверьях, например 3, 7, 12, 13, арифметика египетских пирамид, действительная и мнимая философия пифагорейцев, геометрия архитектурных форм разных стилей, поиски скрытых пропорций человеческого тела и многие подобные вещи.

Но и сверх этого имеется большое число аллотрионов, которые не следует классифицировать — ведь не все нужно разбивать на классы. К этому только один пример.

В немецкие хрестоматии вошло следующее симпатичное стихотворение Уланда: «Проснулся нежный ветерок, Ему шуршать и веять срок, Везде ласкать, повсюду влиться. О, свежий дух, о, новый звук! Забудь тоску, мой бедный друг, Теперь должно все обновиться. Мир хорошеет с каждым днем. Как знать, что ждет еще потом,— Цветенье может длиться, длиться. Расцвел и дальний, темный дол. Не помни больше бед и зол. Теперь должно все обновиться.» Но представьте себе, что некто пытается «донести» это стихотворение до детей таким образом: вместо того чтобы напеть или сыграть им мелодию Шуберта, он идет к доске и преподносит диаграмму:



Разве нам не стоит иной раз, при подходящем случае, в ходе преподавания математики посмеяться над таким смелым новшеством с тем, чтобы ученики более отчетливо представляли себе границы возможного, пусть при графическом изображении, и чтобы, пожалуй, вместе с ними сделать вывод, что много чего есть на свете, кроме чисел и фигур.

9. НЕОБХОДИМАЯ ПРЕДПОСЫЛКА

Мы подошли к концу первой части, хотя еще многое можно было бы сказать. Но в конечном счете при всем этом самое главное — учитель и рассказчик. Как он преподнесет шутку, стихотворение, как он применит иллюстрацию — к этому все сводится. Что такое юмор? Конечно, можно определить, что такое юмор, но это мало поможет тем, кто им не обладает. Большей частью дело сводится к тому, чтобы как-то создать напряжение внимания, а затем неожиданным образом вызвать разрядку. Есть учителя, которые сами оживляются, преподнося свои шутки, и смеются еще больше, чем все их слушатели, а смеющийся учитель среди смеющихся учеников тоже коечего стоит, другие же невозмутимо серьезны и ведут себя так, будто сами не заметили, что у них получилось. Но и те, и другие в равной мере ценят шутку. Однако есть и такие, что могут «угробить» любую остроту, и пошутить они могут лишь помимо своей воли. На уроке речь шла о стереоскопическом зрении, и учитель решил для пояснения прибегнуть к аллотриону: он напоминает ученикам, что, «как известно», Полифем не попал в Одиссея и его товарищей, и так получилось, надо полагать, потому, что, будучи одноглазым, он не мог правильно определить расстояние. Но тут один из учеников замечает, что «ведь глаз у него уже был выжжен». «Ну да, это тоже имело свое значение»,— отвечает учитель, которого ничто не может вывести из равновесия.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

О ЧИСЛАХ

1. СЧИТАЛКИ

Когда дети приходят в школу, они большей частью уже знают первые члены числового ряда. Где они с этими числами познакомились? Тут и там, на улице и дома. Особенно помогают усвоению чисел, очевидно, так называемые считалки — рифмованный счет, которым дети пользуются, когда надо выделить кого-то из них при игре в пятнашки, в прятки или в «жмурки», а на добровольное согласие рассчитывать не приходится. Такие считалки в ходу, конечно, во всех странах. В одной и той же стране они несколько видоизменяются от области к области, но при этом обычно сохраняются некоторые характерные рифмы, порою и не очень благозвучные. Среди считалок имеются самые разнообразные: от стихов, в которых слова подобраны только по созвучию, без учета их смысла, так что их последовательность предопределена только тем, что они рифмуются с названиями чисел, до строф, в которых видно стремление оформить все в нечто связное и имеющее смысл. Многие методисты обращали внимание на дидактическую ценность считалок для обучения детей в течение первого школьного года. И действительно, при более свободном подходе к этому вступительному этапу обучения (а основные установки для начальной школы предусматривают ведь для первого года «общее обучение», что вполне отвечает такой тенденции) можно не только попутно использовать такие стихи, но и планомерно вводить их в учебный материал.

Для примера приведем здесь такие русские и немецкие считалки:

1. Раз, два, три,
Взапуски беги!

2. Раз, два три,
У мамы пироги.
Раз, два, три, четыре, пять,
Ты ушел гулять.

3. Раз, два, три, четыре, пять,
Ты ушел гулять,
Шесть, семь, восемь, девять, десять,
Ты ушел на целый месяц.

4. Eins, zwei, drei,
Butter auf den Brei,
Salz auf den Speck,
Du mußt weg.

(Буквально: Раз, два, три, Масло в кашу, Соль на сало, Ты должен выйти.)

5. Eins, zwei, drei, vier,
Was bringst du mir?
Kuchen oder Wein?
Du mußt es sein.

(Буквально: Раз, два, три, четыре, Что ты мне принес? Пирог или вино? Выпало на тебя.)

6. Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben,
Meine Mutter kocht Rüben,
Meine Mutter kocht Brei,
Du bist frei.

(Буквально: Раз, два, три, четыре, пять, шесть, семь, Моя мама варит репу, Моя мама варит кашу, Ты свободен.)

Английская считалка, сделанная «под таблицу умножения»:

Three times one are three,
My darling, come to me.
Three times two are six,
The man has bought some bricks.
Three times three are nine,
This boy's a friend of mine.
Three times four are twelve,
I find no rhyme but delve.
Three times five are fifteen,
Lead the donkey on the green.

(Буквально: Трижды один — три, Милый мой, приходи ко мне. Трижды два — шесть,— этот человек купил несколько кирпичей. Трижды три — девять, этот мальчик — мой друг. Трижды четыре — двенадцать, Я не нашел рифмы кроме «копать». Трижды пять — пятнадцать, Веди осла на лужайку.)

2. ИГРЫ НА СЧЕТ

Отгадывание числа карт — один из самых простых фокусов, и все же большей частью оно вызывает сначала немалое удивление, особенно если обставляется достаточно таинственно. Но тому, кто хоть раз уяснил себе соответствующий прием, все представляется вполне очевидным.

Для простоты обозначим карты числами 0, 1, 2, 3 и т. д., и взяв, к примеру, одиннадцать карт, разложим их на столе в ряд, лицевыми сторонами вниз. Стало быть, они находятся в таком положении

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Затем мы несколько раз перекладываем первую карту на последнее место, то есть получаем сначала

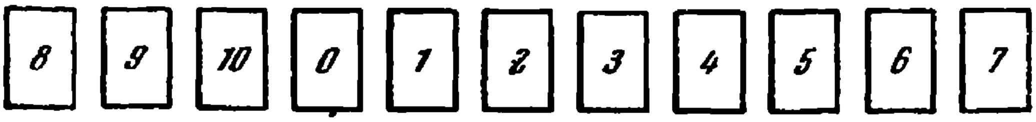
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0

а затем, после ряда повторений, например,

5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4

Теперь мы удаляемся, с тем чтобы в наше отсутствие другие участники проделали несколько раз такое же перекладывание. Затем мы возвращаемся, открываем только одну карту и (по числу на ней) сразу указываем, сколько раз в нашем отсутствии карты перекладывались с первого места на последнее. Как это можно сделать?

Пусть мы по возвращении застали карты в положении



Тогда фокусник отсчитывает с конца четыре карты (так как перед его уходом на последнем месте лежала карта с номером 4) и берет пятую. Ее номер 3 показывает, что карты перекладывались три раза [1]). Если бы переложили только две карты, то есть придали картам расположение

то опять-таки тем же способом, взяв $(4+1)$-ю карту с конца, мы получили бы число перекладываний, а именно 2. А если при повторении фокуса какой-нибудь хитрец вовсе не перекладывал карт, чтобы сбить чародея с толку, тот же прием все равно проходит. Действительно, мы знаем, что карты были оставлены в таком положении, когда на последнем месте 6. Поэтому открываем седьмую карту с конца, что и дает 0.

Нетрудное обоснование этой сперва ошеломляющей игры предоставляем читателю. Конечно, играть можно не с одиннадцатью, а с любым иным числом карт. Если их n и перед уходом фокусника на последнем месте была m-я карта, то ему надо брать $(m+1)$-ю с конца. Понятно, что обозначение одной из карт числом 0 — обстоятельство второстепенное. Если нумерация карт начата с 1, то как выявляется, что ни одна карта не была переложена?

Еще сильнее действует эта игра на зрителей, когда вместо перенумерованных берутся игральные карты, но тогда надо точно помнить исходное размещение, чтобы по виду карты узнать соответствующее ей число.

Из игр на счет приведем сначала такую, для которой требуются два игрока. Выигрывает тот, кто первый достигнет числа 100. При счете можно продвигаться не более

---

[1]) Или, как легко понять, $3+11$, или $3+22$ $(2\cdot 11)$,... раз, но такое количество перекладываний маловероятно, и сначала надо указать наименьшее число их, о чем и идет речь в тексте.

чем на 9 и не менее, чем на 1. Скажем, A сперва считает до 5, затем B до 13, затем A до 22 и т. д. Понятно что A для верного выигрыша, перед тем как достичь 100, должен получить 90. Ведь при этом B никак не может одним приемом получить 100, так как продвигаться можно не больше чем на 9; вместе с тем любую прибавку B можно дополнить так, чтобы достичь 100. Далее, мы видим, что A может достичь 90, если перед этим он назвал 80, а 80 он получит, если перед этим имел 70, 60 и т. д., следовательно, если он первым досчитал до 10. Итак, A всегда может добиться победы, если он предоставляет начать партнеру и затем доходит до 10.

Конечно, то, что A предпочитает кратные десяти, сразу бросится в глаза. Поэтому игру обычно несколько разнообразят с тем, чтобы выгодные ходы были менее заметны. Иной раз допускают продвижение не на 9, как выше, а на 10. При таких условиях A, если идти назад, должен располагать числами 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1. Стало быть, если он начинает с 1, он всегда может добиться победы.

Легко видоизменить эту игру при любом конечном числе n и при любой максимальной величине «прыжка» s, что предоставляем читателю. Другой вариант игры — тот, в котором достигающий первым ста проигрывает. Тогда нужно первым достичь 99, чтобы заставить противника дойти до ста. Такая игра, следовательно, совпадает с рассмотренной, если в качестве последнего числа взято 99.

У детей для «расчета» есть два способа. Они всегда становятся в кружок, так что за последним снова идет первый, и производят расчет с помощью считалки. При этом жребий падает либо на того, на кого первого пришлось последнее слово или последнее число считалки, либо же, напротив, этот ребенок «выбыл» — он выходит из кружка и расчет повторяется, при этом выбывает еще один, и так продолжается, пока применение считалки в последний раз не решает вопроса, кому из двух последних «водить». Нередко маленький хитрец, отлично знающий свою считалку, знает и с кого, при данном числе детей, ему надо начинать, чтобы избежать нежелательного исхода. Он мог бы добыть этот опыт не только длительной практикой, но и с помощью проб на бумаге в домашних условиях.

Как раз расчетом по второму способу является так называемая и г р а И о с и ф а, имеющая длинную историю [1]). На корабле 30 человек, собственно, две группы по 15. Эти группы то христиане и иудеи, то черные и белые, то дети законные и побочные и т. д. Корабль в крайней опасности, и спасение возможно только при условии, что половина пассажиров отправится за борт. Несчастных, которых ждет эта участь, укажет расчет. Капитан, расставив нужным образом всех людей в круг, устраивает так, что, выбирая каждый раз девятого, он отделяет именно тех 15, которых он ценит меньше. Расположение 30 человек, начиная с того, с кого ведется отсчет, дает следующая руническая запись:

XXXXIIIIIXXIXXXIXIIXXIIIXIIXXI.

Здесь лица каждой из групп обозначены как X и I соответственно. При расчете выбывают один за другим все те, кто обозначен I. Эта запись находится в руническом календаре, но сама задача там не приведена — доказательство того, насколько она была известна, и того, насколько трудно было запомнить правильную расстановку. И действительно, известно большое число мнемонических приемов для запоминания нужной расстановки. Приведем здесь только латинское двустишие:

Quattuor et pentas, duo monas tres monas unus,
Hinc dias ambo trias unus duo et duo monas [2]).

Согласованность рунической записи и двустишия выявляется сразу.

Разумеется, ту же задачу можно решать при любом другом числе лиц и при другом разбиении на две группы. Популярно, например, такое оформление: за круглым столом сидят пять студентов, хозяин и хозяйка, и с помощью расчета устанавливается, кто те два сотрапезника, которым надо платить за пиршество.

Хотелось бы здесь упомянуть о своеобразном обычае делать добавки к круглым числам. Например, мы читаем «Сказки 1001 ночи», при салюте дают 101 или 21 залп. Почему здесь счет идет на 1 дальше круглых чисел 1000,

---

[1]) Наиболее полное изложение — в книге А р е н с 2, 118—169. Об истории см. также С м и т, О происхождении некоторых типичных задач (E. S m i t h, On the origin of certain typical problems, American Mathematical Monthly 24 (1917)).

[2]) Четыре да пять, два, один, три, один да один, а затем дважды два, три, один, два; два и один. (Латынь средневековая.— *Ред.*)

100, 20? В том ли дело, что по-дружески добавляют единицу на случай просчета? Во всяком случае, нам не удалось пока найти ответ на этот вопрос.

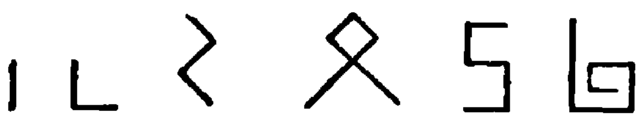
3. НАЗВАНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЕЛ

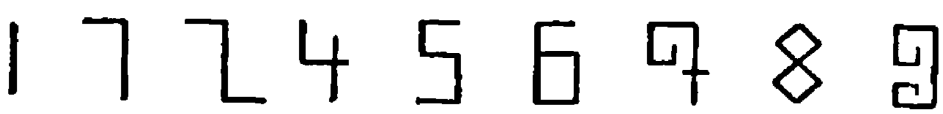
С тем, как читать и записывать числа, дети знакомятся значительно позже, чем с числовым рядом. В истории педагогики рассказывают о том, как Базедов применял печенье в виде букв и цифр, чтобы усластить трудную науку, да и теперь иные дети проделывают первые арифметические упражнения с цифрами из шоколада. Еще в древности детям давали пироги в виде букв, а также и цифр, и к этому древнему обычаю, наверно, восходит нарезка лапши для супа в виде простых геометрических фигур, что и сейчас в ходу.

Не раз пытались дать простое истолкование формы наших цифр. Люка приводит старую легенду о том, что на драгоценном камне в кольце Соломона был вырезан знак, из которого образованы цифры. Тот же Люка приводит фигуру  , из которой последовательно получаются цифры:

Как уже давно замечено, такое предположение более остроумно, чем вероятно.

Другие авторы стараются обнаружить, что цифра 1 образована одной черточкой, цифра 2 — двумя черточками, цифра 3 — тремя и т. д. Воспроизводим два таких построения [1]);





[1]) См. H. von J a c o b s, Das Volk der Siebener-Zähler, Berlin, 1876, M. S t e r n e r, Geschichte der Rechenkunst, München, 1891.

второе особенно искусственно. Были попытки использовать не черточки, а точки. Пусть это послужит стимулом к тому, чтобы познакомиться с древними числовыми знаками и с отличиями в них у разных народов.

И в школе гораздо больше успеха обещает ознакомление с надежными результатами исторических изысканий, но с этим стоит обождать, пока ученики не станут постарше. Хорошим руководителем является книга Леффлера «Цифры и цифровые системы» [E. L ö f f l e r, Ziffern und Ziffernsysteme, Bd. 1, 3 Aufl., 1928; Bd. 2, 2Aufl., 1918 [1]]. Назовем еще хорошую книгу для детей, к сожалению, на английском языке: С м и т, Рассказы о числах давних времен (D. E. S m i t h, Number stories of Long Ago, Boston, Ginn, 1919). У домашнего очага сидит «сказитель» и рассказывает детям историю числовых знаков и приемов счета у древних народов. Как мальчишки к своим товарищам, приходят Ахмес из Египта и Лугал из Вавилона, Гиппий из Греции и Тит из Рима, Даниил из Иудеи, Леонардо из Пизы, Михаил Штифель, Иоганн Видманн и многие другие и задают друг другу числовые загадки, из которых немалое число вы найдете в нашей книге. Замечательные картинки украшают и делают наглядным все это.

Позволим себе привести остроумную игру слов, связанную с древнегреческой записью чисел буквами. Так, $\alpha=1$, $\beta=2$ и т. д. Числа 7, 8, 9 и 10 обозначаются буквами ζ, η, ϑ и ι. И вот, в одном греческом стихотворении говорится, что шесть часов в день для работы, а часы с седьмого по десятый — для удовольствий: действительно, греческое слово ζῆθι означает «наслаждайся жизнью!»

В заключение этого раздела приведем еще несколько шуток; некоторые из них народные.

1. Напиши 11 тысяч 11 сотен и 11.

2. Как получить 20, отнимая 1 от 19?

3. Как показать, что половина от 12 равна 7, а половина от 11 равна 6?

4. Какие из записанных двумя цифрами целых чисел становятся больше, когда опускают стоящую слева цифру?

---

[1] Имеется русский перевод: Эуген Л е ф ф л е р, Цифры и цифровые системы, Одесса, 1913. Укажем еще новую книгу, содержащую обширный материал по этому вопросу: K. M e n n i n g e r, Zahlwort und Ziffer, 1957.

5. Как показать, что двадцать минус двадцать два равно восьмидесяти восьми?

6. Как можно превратить число 66, ничего к нему не прибавляя, в другое число, которое в полтора раза больше?

7. Какая неравная единице дробь дает при обращении равную себе дробь?

Ответы. *1.* 12111. — *2.* Отнимите 1 от XIX. — *3.* Разделите XII и XI на две равные части горизонтальной чертой. — *4.* IV, IX, XC и т. д. — *5.* $\frac{\begin{array}{r}-\text{XX}\\ 22\end{array}}{88}$. — *6.* Число переворачивают, получая 99.— *7.* $\frac{6}{9}$.

4. ЧИСЛА ВЕЛИКАНЫ

Кроме прочего, важным достоинством нашей числовой системы является то, что она дает возможность наглядно изображать даже очень большие числа. Числа великаны всегда были чем-то привлекательны и для школьника, и для взрослого, для ученого и для простого человека. Здесь мы ограничимся совсем немногим, так как в другом месте мы подробно говорили о великанах и карликах в мире чисел [1]).

Теперь мы считаем чем-то само собою разумеющимся, что числовая система позволяет представлять большие числа. Не всегда дело так обстояло. Архимед в легко доступной работе, так называемом «Исчислении песчинок» [2]), поставил задачу указать число песчинок, могущих поместиться в шаре размером со Вселенную. Стало быть, ему надо было сперва установить, какой величины песчинка и какой величины Вселенная, а затем произвести некоторые вычисления, при которых он мог использовать известную ему формулу для объема шара. Он принял, что 10 000 песчинок составляют маковое зернышко, а если положить рядом 40 маковых зерен, то получится ширина пальца. Как видно, его песчинки очень малы, и следовало бы скорее говорить об «исчислении пыли», а не об исчислении

[1]) В русском переводе: В. Литцман, Великаны и карлики в мире чисел, М., 1959. (*Ред.*)

[2]) В русском переводе: Архимед, Исчисление песчинок (Псаммит), М.—Л., 1932 или Архимед, Сочинения, М., 1962, стр. 358—368. (*Ред.*)

песчинок. В качестве радиуса Вселенной он принял, в соответствии с представлениями того времени, расстояние до неподвижных звезд. После этого он мог приступить к расчетам, но ему было не так легко, как нам.

Наибольшим числом, имевшим особое название, у древних греков было 10 000 — мириада. Поэтому Архимед создает новые названия чисел, и эта числовая система и есть настоящий предмет его работы, тогда как ответ на поставленный сначала вопрос — только «оформление» задачи. Греки могли еще назвать мириаду мириад — $10\,000 \cdot 10\,000 = 100\,000\,000$. Все числа до этого числá Архимед называет числами первого порядка. Числа от 100 000 000 до $100\,000\,000 \cdot 100\,000\,000$ он называет числами второго порядка, числа отсюда и до $100\,000\,000 \times \times 100\,000\,000 \cdot 100\,000\,000$ — числами третьего порядка, и так он продолжает вплоть до чисел 100 000 000-го порядка. Числом, которое в нашей системе записывается единицей с 800 000 000 нулей, Архимед заканчивает первый период. Затем во втором периоде он строит первый, второй и дальнейшие порядки, причем каждый порядок заканчивается 100 000 000-кратным предыдущего. Так он получает второй период, третий период и т. д.; он заканчивает 100 000 000-м периодом. В нашей системе это 1 с 80 000 триллионов нулей. И где же число песчинок, могущих заполнить Вселенную? Оно относится еще к первому периоду, да и там оно находится всего лишь в восьмом порядке — настоящий карлик по сравнению с великанами Архимедовой системы!

Математики имеют в своем обиходе действия, которые очень быстро приводят к гигантским числам. Таково возвышение в степень. Так, под 3^5 понимают произведение из 5 множителей равных 3, то есть $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Такая степень, как 2^{64}, выглядит совсем невинно, но мы знаем, как туго пришлось тому королю, который, по старой легенде, хотел наградить изобретателя шахмат, а тот просил дать на первое поле доски два зерна, на второе 2^2 зерен, на третье 2^3 и т. д., на последнее, 64-е, 2^{64}.

Не раз задавали вопрос, каково наибольшее число, которое можно записать тремя цифрами, допуская при этом и возвышение в степень. Сначала на ум приходит 9^{99} или 99^9. Легко убедиться, что первое число значительно больше второго. Но можно получить еще значительно большее число, если допустить возведение в степень в показателе. Если применить возведение в степень в основании, то есть образовать число $(9^9)^9$, мы получим по известным правилам 9^{81}, что меньше 9^{99}. Напротив, $9^{(9^9)}$ дает нам новое огромное число, которое можно записать так: $9^{387\ 420\ 489}$ $(9^9=387\ 420\ 489)$. Это — число с 369 693 100 — свыше трети миллиарда — цифрами. Первые и последние цифры этого числа определены с помощью методов теории чисел. Здесь укажем только на то, что в печатном виде для него потребовалось бы 33 тома по 800 страниц каждый и с 14 000 цифр на странице, а на ленте оно протянулось бы на 1200—1800 *км*.

После этого наибольшего из чисел, записываемых тремя цифрами, некоторые совсем отчаянные вычислители перешли к наибольшему числу из четырех цифр

$$9^{9^{9^{9}}} = 9^{\left[9^{\left(9^{9}\right)}\right]}$$

— числу, названному однажды Гауссом «измеримой бесконечностью». Представим себе, что это число записано обычным образом: сколько понадобится для него цифр? Чтобы указать их количество, нужно число, которое само содержит свыше трети миллиарда цифр. На отрезке от Земли до Солнца можно записать около 120 триллионов цифр, то есть всего 15-значное число их. Насколько же длиннее должна быть цифровая лента, вмещающая столько цифр, что для записи их числа требуются не жалкие 15 цифр, а свыше трети миллиарда!

Другой способ образования больших чисел дают ф а к т о р и а л ы (заметим, что изобретены они не для этой цели). Под 5! понимают произведение всех целых чисел от 1 до 5 включительно, то есть $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Нетрудно показать, что количество начальных положений при игре в пятнадцать равно 15!, а если учитывать и такие положения, при которых 0-жетон находится не на обычном, а на любом месте, то их будет 16! Это дает 1 307 674 365 000 — больше триллиона положений.

При игре в преферанс 32 карты колоды раздают так, что каждый из трех игроков получает по 10 карт, а две остаются «в прикупе». Таким образом, число различных возможных сдач составляет

$$\frac{32!}{10!\ 10!\ 10!\ 2!}.$$

Если подсчитать это число, оно окажется значительно больше только что приведенного. Кто хочет позабавиться, может прикинуть, сколько времени нужно, чтобы последовательно сыграть все возможные игры в преферанс.

Опытом доказано, что игра может длительное время, даже столетия и тысячелетия, оставаться привлекательной только при условии, что число возможных в ней комбинаций значительно больше числа практически доступных. Изобретатели новых игр должны это учитывать.

Образовать большие числа само по себе не трудное дело — наши примеры это показывают. Труднее определить, как составлено заданное нам в цифровом виде число. Как известно, простыми числами называются такие, которые не имеют целых множителей кроме себя и единицы. Очень трудно бывает решить, является ли то или иное большое число простым, и разложить число на множители, если оно составное. Наибольшим простым числом до недавнего времени считалось число

$$2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727.$$

Это очень длинное, но по сравнению с приведенными ранее великанами довольно скромное число. Сейчас с помощью электронных вычислительных машин установлено, что простым является гораздо большее число: $2^{2281}—1$. В разложении на множители числа

$$10^{31} + 1 = 11 \cdot 909090909090909090909090909091$$

оба сомножителя — простые числа.

Одной из самых «объемистых» задач на деление было доказательство того, что $2^{1092}—1$ делится без остатка на 1093. Заметим попутно, дабы избежать недоразумений, что эти длинные вычисления интересовали математиков не сами по себе, а как проверка некоторых утверждений в теории чисел.

5. ШУТОЧНЫЕ ПРИМЕРЫ НА ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ АРИФМЕТИКИ

В этом параграфе собраны некоторые шуточные арифметические задачи. Среди них немало известных, но что в ходу в одной местности, может оказаться новым в другой. Есть тут и шутки, о которых говорят, что они «с подвохом». Что до использования в преподавании, то тут заведомо в силе правило — класть приправы умеренно, а не то испортишь желудок!

1. Между пятью людьми надо разделить пять яблок, и все-таки одно яблоко должно остаться в корзинке. Как это можно сделать?

2. Четырех кроликов надо разделить между тремя лицами так, чтобы никто не получил больше, чем остальные.

3. Когда получается $2 \cdot 2=5$?

4. Половина плодов, висевших на яблоне, упала и была съедена мальчиком. А когда мальчик стал осматривать затем дерево в поисках новой добычи, он увидел, что на дереве больше нет яблок. Как это случилось?

5. Трое велели зажарить себе трех цыплят. Всяк съел своего цыпленка, и двое цыплят осталось. Как это объяснить?

6. Мишенька рассказывал своей сестрице: «Мама дала мне пять груш. Две я съел, и у меня еще две осталось». Как это получилось?

7. Двое отцов и двое сыновей застрелили трех зайцев, каждый — по одному. Как это возможно?

8. Пять ворохов и семь ворохов сена свезли вместе. Сколько получилось ворохов сена?

9. Одно яйцо варят 4 минуты. Сколько минут надо варить 6 яиц?

10. На крыше сидят семь воробьев. Отец стреляет и попадает в двоих. Сколько воробьев осталось на крыше?

11. У остановки такси стоят 9 машин; три передние отъезжают. Сколько машин осталось на месте?

12. В семье пять сыновей, и у каждого есть сестра. Сколько детей в семье?

13. Человек шел в Белую Церковь и повстречал 9 старух, каждая несла 9 мешков, в каждом мешке — по 9 кошек, у каждой кошки — по 9 котят. Сколько всего шло в Белую Церковь?

14. В оснабрюкской [1]) книге загадок Брунка (Brunk) есть такая задача:

Было у крестьянина семь лошадей,
На каждую лошадь — по семь батраков.
Каждый батрак имел семь жен.
Что ни жена, то семь детей.

---

[1]) Оснабрюк — город в ФРГ.

Что ни дитя, то нянек семь.
Сколько же вместе ног у всех?

15. Сколько будет трижды сорок и пять?

16. Трое друзей шли из Ленинграда в Пушкин. Каждому на дорогу нужно 7 часов. Сколько времени нужно для этого перехода всем вместе?

17. На глобусе начерчены экватор и все параллели (т. е. через градус). Сколько всего этих окружностей на глобусе?

18. Некто доказывал, что 45—45=45, следующим образом:

$$\begin{array}{r} 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 \\ \hline 8+6+4+1+9+7+5+3+2=45 \end{array}$$

Я вычитаю вторую строку из первой, начиная с последней цифры. 9 от 1 не отнять, занимаю 1 у 2 и получаю 2. 8 от 1 опять же не отнять, занимаю 1 у 3 и получаю 11 — 8=3. Точно так же 12 — 7 дает мне следующее число 5, 13 — —6 дает 7, 14 — 5 дает 9, а дальше можно вычитать, не занимая, и я получаю последовательно 1, 4, 6, 8. В итоге я действительно имею снова 45.

19. «В моей местности,— писал мне один из читателей этой книги,— рассказывают такое. В одном селе 7 крестьян сговорились совместно выписать картофельные очистки для своих свиней. Фабрика прислала 28 центнеров. Надо было их разделить. Но в устном счете они не были сильны, и вот Генрих Паге берет кусок мела и пишет на широкой двери сарая 28 : 7. Считает он как будто так, как его учил старый сельский учитель Зегебиль: 8 делить на 7 будет 1 и 1 в остатке; теперь снесу 2, 21 на 7 делить дает 3, итак, каждый получает по 13 центнеров. Но Христиану Беку деление кажется странным. Он заявляет: «Если каждый получит по 13 центнеров, то нам не хватит; дайте-ка мне мел!» Он подсчитывает 13·7 и говорит: «3 на 7 это 21, 1 на 7 это 7, 21 и 7 это 28. Генрих прав!» Но Людвиг Мейер всему этому не доверяет. Он говорит: «Вы можете, конечно, множить и делить, а мы, давайте, сосчитаем все центнеры!» Теперь он берет мел и каждому записывает 13 центнеров:

Генрих Паге — 13,	Теодор Ланге — 13,
Христиан Бек — 13,	Вильгельм Бас — 13,
Людвиг Мейер — 13,	Отто Шмидт — 13,
Густав Шульце — 13,	

потом складывает: $3+3+\ldots$ составляет 21; $1+1+\ldots$ составляет 7; 21 да 7 все-таки 28. «Ну, теперь все в порядке,— заявляет он,— мы делили, перемножали и складывали,— каждому по 13 центнеров!»

20. Как называется то целое, от которого остается одна пятая после отнятия двух седьмых?

21. 4 яблока надо поровну разделить между 13 детьми. Как лучше всего это сделать?

22. Сколько это будет: один да один да полтора да два и два и два с половиной?

23. Как сказать: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ равно $1\frac{7}{12}$ или равны $1\frac{7}{12}$?

24. Насколько разнятся 0 запятая 9 и 0 запятая 10?

25. Следующий вопрос построен по английскому образцу: «Возьми сто и единицу, пусть их делит пятьдесят, и добавь еще нуль, тогда получишь» one from nine (одну из девяти)».

26. Некто имел ореховое дерево. Собрав свой урожай, он позвал трех сыновей и сказал им: «Вот сто пятьдесят орехов, и вам надо их продать. Но все вы должны продавать их по одной цене». И он дал одному 15, другому 50, третьему 85 орехов, но добавил: «Я хочу, чтобы каждый из вас получил за орехи одинаково». Это казалось почти невозможным, но сыновья были смышленные малые и справились с головоломкой. Как?

27. Все женатые люди отличаются тем, что возраст, год рождения, год бракосочетания и число лет семейной жизни в сумме дают у мужа и жены одно и то же число. Например, некто в 1960 г. производит следующий подсчет: ему 47 лет, родился он в 1913 г., год женитьбы — 1938, женат 22 года, сумма всех четырех чисел равна 3920. Такой же подсчет для его жены даст тот же результат! Но не только у нее — у любой замужней женщины, которая в том же году проведет такой же подсчет, итог будет такой же. В чем дело?

28. Некто имел в сберкассе 500 рублей. Он последовательно изымает:

сначала	200 р.	остается	300 р.
затем	150	»	150
»	90	»	60
накопец	60	»	0
всего	500 р.	всего	510 р.

Таким образом, в его пользу осталось 10 р. Так нетрудно увеличить свой взнос... В чем дело?

29. Удивительный цветок распустился посреди круглого пруда радиусом в 10 метров. Каждый день цветок удваивает свой диаметр и на 20-й день закрывает весь пруд. На какой день он закроет половину пруда?

30. Для Вани, Володи и Миши есть три пирога: с рисом, с горохом и с бобами. Двое из них едят пирог с рисом, двое — с горохом, двое — с бобами. Один из них, не вынося пирога с бобами, не ест и пирога с горохом, а Ваня не любит гороха и не ест также пирогов с рисом. Кто что ест?

31. Полторы курицы за полтора дня сносят полтора яйца. Сколько яиц снесут 4 курицы за 9 дней?

Ответы.—*1*. Одному дают корзинку с яблоком. —*2*. Один получает двух кроликов, остальные два — по одному. Никто не получил больше, чем остальные (вместе!). Как ни тривиален пример, он показывает, что надо обращать внимание на формулировку вопроса.—*3*. Никогда.—*4*. Мальчик съел одно яблоко. Теперь на дереве уже висели не яблоки, а яблоко.—*5*.Человека,который съел цыпленка, звали Всяк.—*6*. Мишенька сплутовал или же не смог сосчитать.—*7*. Это были дед, отец и сын.—*8*. Один.—*9*. Те же 4 минуты, если варить одновременно: быть может, чуточку дольше.—*10*. Ни одного (остальные улетели!).—*11*. Ни одной: ведь все оставшиеся подтягиваются.—*12*. 6 детей. *13*. Только один — все остальные шли в противоположную сторону.— *14*. Только две ноги были вместе (у каждого); конечно, слабым местом в этой загадке является наличие лошадей[1]).—*15*. Тут расчет на то, что вопрос ставится устно, и можно сослаться на вторую из двух возможностей, если отвечающий указывает только одну из них: $3 \cdot 40 + 5$ и $3 \cdot 45$. — *16*. 7 часов.—*17*. 179 окружностей.—*18*. Так делать вычитание нельзя! — *20*. *Запятая*. —*21*. Лучше всего сделать яблочный сок.—*22*. $1 + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} = 10$.—*23*. Ни

[1]) Для истории культуры представляет интерес появление в этой и подобных ей задачах числа 7. В старейшей из известных нам арифметик — папирусе, написанном египтянином Ахмесом около 1700 г. до н. э.,— уже есть такая задача: у 7 человек по 7 кошек, каждая кошка уничтожает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, каждый колос дает при посеве 7 мер ячменных зерен. Сколько мер зерен сберегается благодаря кошкам?

то, ни другое неверно.—*24*. На 0,8.— *25*. CI; CLI; CLIO (Клио) — одна из девяти муз.— *26*. Сыновья встретили первого покупателя, который платил им по гривеннику за дюжину. Первый продал 1 дюжину, получил гривенник, и у него осталось 3 ореха. Второй продал 4 дюжины, получил 40 коп., и у него осталось два ореха. Третий сын продал 7 дюжин, получил 70 коп., остался же у него 1 орех. Появился новый покупатель, которому пришлось платить по три гривенника за каждый орех. Так каждый из сыновей выручил по рублю.— *27*. Обратите внимание, что сумма года рождения и числа лет для всех людей в одном и том же году (если не принимать в расчет месяцы) одна и та же: кто родился в 1960 г., тому в 1961 г. 1 год, а кто родился в 1959 г., тому в 1961 г. 2 года, и т. д. —*28*. В двух столбцах подсчитываются разные суммы: в первом — изъятые суммы d_1, d_2, d_3, d_4, и они в сумме дают весь вклад N : $N = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$ (1), во втором столбце — последовательные остатки, т. е. $N - d_1, N - d_1 - d_2$, $N - d_1 - d_2 - d_3$ и $N - d_1 - d_2 - d_3 - d_4$, а последнее число равно, конечно, нулю. Итак, во втором столбце имеем: $3N - 3d_1 - 2d_2 - d_3$, что с учетом (1) дает $d_2 + 2d_3 + 3d_4$ — число, в общем случае, конечно, отличное от $N = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$. Разность в буквенном выражении составляет $d_3 + 2d_4 - d_1$, стало быть, $90 + 2 \cdot 60 - 200 = 10$, и вообще может быть любым числом: положительным, отрицательным, нулем. Обобщите этот расчет на случай n изъятий! — *29*. На девятнадцатый. — *30*. Володя и Миша едят все три пирога, Ваня ни одного — *31*. 24.

6. ПОЖЕЛТЕВШИЕ РУКОПИСИ

В старой пожелтевшей рукописи со следами мышиных зубов были приведены арифметические задачи, но не все числа можно было прочесть. Надо восполнить недостающие цифры. Неразборчивые цифры обозначены звездочкой.

Сложение:

1. *72*	*2*. 3*86	*3*. 213
3**1	*2*7	8*4
5989	804*	28*
		*46
		*870

Вычитание:

```
1.  8**2        2.  6*37
    *35*            *82*
    ----            ----
    4121            14*8
```

Недостающие числа в этих задачах найти можно очень быстро, и они имеют значение лишь как упражнение на обратные арифметические операции. Сколько-нибудь значительное комбинаторное дарование тут не требуется. Несколько иначе обстоит дело со следующими задачами на умножение и деление:

```
1. ***·538      2. ***7·***      3. ****** : *** = **5*
   -------         --------         ***
   ****             *37**           ----
                                    312*
    2202             **203          *920
     ****             ****6         ----
   ------          -------           **80
   ******          *******           1*2*
                                     ----
                                      2*5*
                                      ****
                                      ----
```

Первую из этих задач можно решить сразу, так как частичное произведение немедленно дает отсутствующий множитель, но в остальных двух (5467·898 и 677 805 : : 365) продвигаться можно только шаг за шагом.

В этом же направлении можно пойти значительно дальше. Приведем из американских и английских журналов [1]) «задачу четырех четверок» и «задачу семи семерок»:

```
1. ******4 : *** = *4**     2. **7******* : ****7* = **7**
   ***                         ******
   ----                        -------
   **4*                        *****7*
   ****                        *******
   ----                        -------
    ****                         *7****
     *4*                         *7****
    ----                         -------
     ****                        *******
     ****                        ****7**
     ----                        -------
                                  ******
                                  ******
                                  ------
```

[1]) The American Mathematical Monthly 38 (1921), 37; The Mathematical Gazette, 1920, 43; The Observatory, 1920, 274, 372; The School World 8 (1906), 280, 320.

Первая задача имеет четыре решения, а именно: 1 337 174 : :943 = 1418, 1 343 784 : 949 = 1416, 1 200 474 : 846 = = 1419 и 1 202 464 : 848 = 1418. Вторая задача имеет только одно решение: 7 375 428 413 : 125 473 = 58 781.

Приведем еще несколько задач на уравнения с неизвестными коэффициентами; получить их решения нетрудно:

$$1.\ 5x - 5 = *x - 3;\ x = 2.\quad 2.\ \frac{1}{2}x + 3 = *x + 2;\ x = 6.$$

$$3.\ *x + 3 = 2x + 5;\ x = 1.\quad 4.\ x^2 - 4x = *;\ x_1 = 7,\ x_2 = *.$$

$$5.\ x^2 + *x = 15;\ x_1 = 3,\ x_2 = *.$$

В американских учебниках арифметики встречаются задачи на арифметические действия и в другом облачении. Приводим их без всяких изменений:

$$1.\ \begin{array}{r} ICC \cdot IN \\ \hline NTT \\ ICC\ \ \\ \hline IANT \end{array} \qquad 2.\ \begin{array}{r} INU \cdot NU \\ \hline LNU \\ NUS\ \ \\ \hline OINU \end{array} \qquad 3.\ \begin{array}{l} UEMA : MA = EMA \\ MA \\ \hline \ \ TM \\ \ \ AS \\ \hline \ \ \ EMA \\ \ \ \ EMA \end{array}$$

Буквы обозначают цифры. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры (в одной и той же задаче, не в разных). Решения таковы: *1*. 144·12 = 1728; *2*. 125·25 = 3125; *3*. 3125 : 25 = 125.

В заключение еще одна группа задач на восстановление арифметических вычислений. При вычислении допускается ошибка; она указывается, исходя из чего надо восстановить задачу.

1. Учитель задал ученику задачу на деление. Ученик получил в частном 57 при остатке 52. Делая проверку (умножением делителя на частное и прибавлением к их произведению остатка), он получил 17 380, что неверно. Ошибка вызвана тем, что при умножении ученик прочел в делителе на втором месте справа вместо шестерки нуль. Каково было условие задачи?

2. Учитель задал двум ученикам перемножить два числа и для проверки велел разделить произведение на меньший сомножитель. Ни у одного не сошлось: первый ученик получил 575 и в остатке 227, второй получил

572 и в остатке 308. Оба при умножении забыли прибавить единицу, но в разных местах, так что первый получил в произведении меньше на 100, а второй — на 1000. Указать заданные учителем числа.

Ответы. Задача на деление 20 800 : 364; задача на умножение 576 · 327.

7. СПОСОБЫ БЫСТРОГО СЧЕТА

Чтобы быстро считать, можно пользоваться таблицами и машинами. При начислении процентов в сберкассах обращаются к таблицам. При расчете зарплаты надо многократно выполнять умножения, и для этого тоже пользуются специальными таблицами.

Во многих странах в ходу простые счетные машины и приспособления. В России, а также в Финляндии пользуются проволочной решеткой с кружочками, а те счеты,

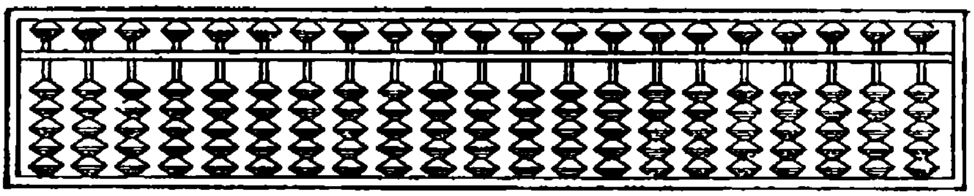


Рис. 27.

что применяются у нас (т. е. в Германии.— *Пер.*) в начальной школе под названием русских,— это только неудачное подражание. Китайцы имеют свой суан-пан, японцы — свой соробан (рис. 27). В Японии детей уже с первых лет учат считать с помощью соробана, и им пользуются в обыденной жизни всюду: на рынке, в конторах и т. д. [1]). На многих японских картинах мы видим это счетное приспособление как предмет обихода (рис. 28, 29).

На рис. 28, 29 перед нами счетная доска, сходная с той, которой пользовались в античном мире и вплоть до позднего средневековья,— с «абаком».

Немецкие «мастера счета» пользовались просто начерченными прямыми и так называемыми счетными

[1]) R. Fusijawa, Summary Report on the Teaching in Japan, Tokio, 1912; G. Wolff, Der Mathematische Unterricht in Japan, Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht 45 (1914), 341.

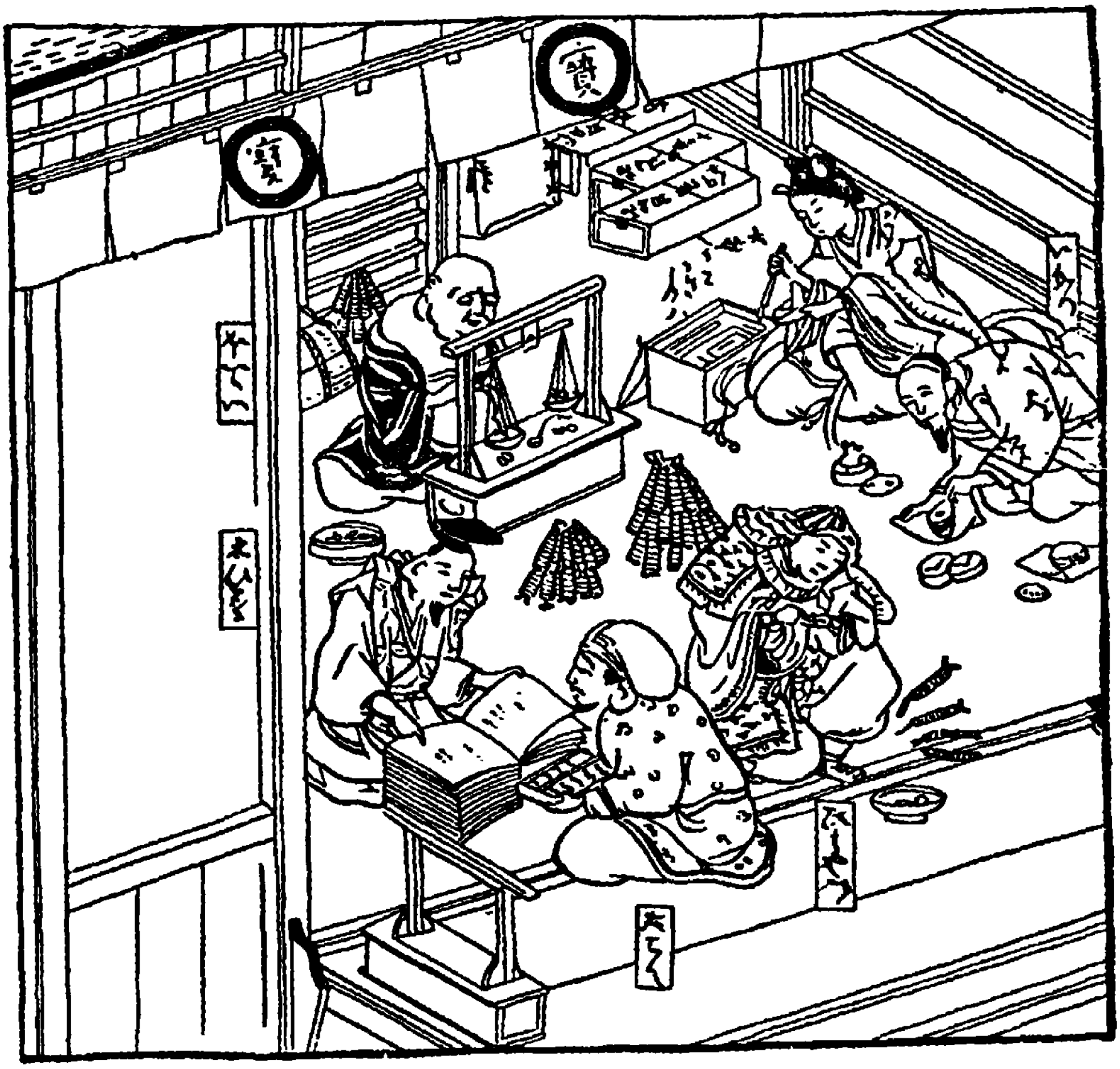


Рис. 28.

Рис. 29.

пфеннигами. Одна из таких монет показана на рис. 30. Современные машины, от обычных счетных до гигантских новых установок, работают с иными скоростями. В электронных вычислительных машинах сложение двух десятизначных чисел может быть выполнено за 2—5 микросекунд, а на их умножение уйдет около миллисекунды [1]). Такие машины используются и при решении самых сложных задач высшей математики, например для интегрирования дифференциальных уравнений. Но здесь мы не можем говорить об

Рис. 30.

этом подробнее, равно как и о логарифмических вычислениях с помощью таблиц или линейки. Скажем только вкратце о некоторых приемах счета, заменяющих наш обычный способ умножения.

Начнем со старинного способа, который теперь часто величают молниеносным — это умножение «per crocetta», что по-итальянски значит накрест. Пусть, к примеру, надо перемножить два трехзначных числа — $213 \cdot 241$. Единицы произведения получаем, перемножая единицы сомножителей, т. е. $3 \cdot 1$. Десятки найдем, умножая десятки каждого множителя на единицы другого множителя, что даст $1 \cdot 1$ и $3 \cdot 4$, всего 13 десятков. Сотни получаются: умножением единиц на сотни, десятков на десятки и сотен на единицы, стало быть, $3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 12$. Тысячи получаются умножением десятков на сотни и сотен на десятки: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$, а десятки тысяч дает умножение сотен на сотни. Сводя все в схему, с

[1]) Миллисекунда = 0,001 *сек*, микросекунда = 0,000001 *сек*.

одновременным учетом необходимых переносов из разряда в разряд, получаем:

Единицы: 2 1 3
2 4 1
$\boxed{3}$

Десятки: 2 1 3
2 4 1
$\boxed{1\ 3}$ 3

Сотни: 2 1 3
2 4 1
$\boxed{1\ 3}$ 3 3

Тысячи: 2 1 3
2 4 1
$\boxed{1\ 1}$ 3 3 3

Десятки тысяч: 2 1 3
2 4 1
$\boxed{5}$ 1 3 3 3

Если числа не столь просты, то необходимость при устном счете запоминать некоторые цифры не является все-таки серьезным усложнением. Вот пример:

Единицы: 7 5 9
8 6 4
$\boxed{3\ 6}$

Десятки: 7 5 9
8 6 4
$\boxed{7\ 7}$ 6

Сотни: 7 5 9
8 6 4
$\boxed{1\ 3\ 7}$ 7 6

Тысячи: 7 5 9
8 6 4
$\boxed{9\ 5}$ 7 7 6

Десятки тысяч: 7 5 9
8 6 4
$\boxed{6\ 5}$ 5 7 7 6

Не так давно был предложен более целесообразный порядок действий, который можно легко применить и в случае многоцифровых множителей. Этот способ легко пояснить на последнем примере, что даст и сравнение с предыдущим способом:

```
операция:  7  5  9          2 операция:  7  5  9
           |  |  |
           8  6  4                       8  6  4
          ---------                     --------
          56 30 36                       82 74

3 операция: 7  5  9

                            итог:     56 30 36
                                    + 8 27 4
            8  6  4                   1 00
           --------                 ----------
             100                      65 57 76
```

К тому же приему, что и умножение накрест, сводится, по внешности совершенно отличный от него, способ сдвигов. В последнем второй множитель записывают в обратном порядке, а затем множат так, как показано на следующей схеме:

```
              ←                   ←                 ←
           |1 4 2|             |1 4 2|           |1 4 2|
                |                 | |             | | |
Единицы:  2 1 3     Десятки:   2 1 3   Сотни:   2 1 3
          ---------           -------          -------
              |3|             |1 3|3          |1 3|3 3

              ←                                ←
           |1 4 2|                          |1 4 2|
              | |                               |
Тысячи:      2 1 3     Десятки тысяч:       2 1 3
           --------                      ----------
       |1 1| 3 3 3                      |5| 1 3 3 3
```

Вычислители-феномены обычно с триумфом заканчивают свои выступления извлечением корней. Это выглядит гораздо сложнее, чем происходит на самом деле. Большей частью речь идет о корнях, извлекаемых точно. Составим таблицу третьих и пятых степеней чисел от 1 до 10.

x	x^3	x^5	x	x^3	x^5
1	1	1	6	216	7776
2	8	32	7	343	16807
3	27	243	8	512	32768
4	64	1024	9	729	59049
5	125	3125	10	1000	100000

Она дает возможность без сколько-нибудь обширных вычислений извлекать кубические корни из чисел до 1 000 000, корни 5-й степени — из чисел до 10 миллиардов, при условии, что корень извлекается точно.

$$\text{а) } \sqrt[3]{389\,017}.$$

Так как последняя цифра под корнем 7, то последняя цифра результата согласно нашей таблице должна быть 3. Число же тысяч под корнем (389) показывает, поскольку оно находится между 343 и 512, что число десятков в корне равно 7. Итак, корень равен 73. Так же находим, что:

$$\text{б) } \sqrt[3]{132\,561}=51; \quad \text{в) } \sqrt[3]{912\,673}=97; \quad \text{г) } \sqrt[5]{1\,419\,857}$$

Для корней пятой степени последнюю цифру найти особенно легко. Как видно при взгляде на нашу таблицу, она совпадает с последней цифрой подкоренного числа. Так как число сотен тысяч 14, корень находится между 10 и 20, стало быть, он равен 17. Точно так же находим, например:

$$\text{д) } \sqrt[5]{20\,511\,149}=29$$ [1]).

8. МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

В арифметических учебниках иной раз приводятся так называемые магические квадраты, однако подробное изложение связанного с ними круга вопросов, насколько нам известно, в учебной литературе отсутствует.

---

[1]) Для тех, кто желает ближе познакомиться с этими вопросами, укажем дополнительную литературу: J. Bojko, Lehrbuch der Rechenvorteile; Schnellrechnen und Rechenkunst, Leipzig, 1920; P. Maennchen, Geheimnisse der Rechenkünstler, Leipzig, 1924; P. Werkmeister, Praktisches Zahlenrechen, Berlin, 1929. Вторая из этих книг имеется в русском переводе: Ф. Менхен, Некоторые тайны артистов-вычислителей, 1923. (*Ред.*)

Зато в книгах по занимательной математике этому предмету часто отводят место. Назовем здесь, кроме Аренс II, еще W. S. Andrews, Magic Squares and Cubes, Chicago, 1908, а также статью W. Ahrens, Über magische Quadrate..., Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht 45(1914), 525 и след. Здесь же мы должны ограничиться немногими замечаниями.

Самым старым магическим квадратом считается трехчленный квадрат, обнаруженный в весьма древней, хотя и не датируемой точно китайской рукописи. Он записан с помощью не цифр, а точек. Сумма трех чисел на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали всякий раз дает 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Если разместить числа от 1 до 9 на девяти полях этого квадрата обычным образом, то этим само собою определится характерное для него число 15, так как во всех трех горизонталях имеем

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

так что на одну горизонталь приходится третья часть, т. е. действительно 15.

Этот трехчленный квадрат встречается довольно часто. Например, на титульном листе арифметической книги 1625 года, Arithmetica historica Георга Мейхснера (Georg Meichsner) среди прочего изображен Евклид, держащий циркуль и доску с указанным здесь магическим квадратом:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Сразу видно, что этот квадрат по сути не отличается от предыдущего: он получается из того перестановкой верхней и нижней горизонталей.

В качестве примера четырехчленного магического квадрата укажем на тот, что изображен на гравюре Дюрера «Меланхолия». Он имеет такой вид:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Обращаем внимание на то, что в нижнем ряду имеется год создания гравюры — 1514. Характерная для этого четырехчленного квадрата сумма есть 34, так как $1 + 2 + + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + + 15 + 16 = 136$, а $136 : 4 = = 34$. И действительно, не только горизонтали и вертикали, но и диагонали дают сумму 34. Магический квадрат, обнаруженный в индийской рукописи 12-го или 13-го столетия, имеет такой же вид. Теперь коснемся вопроса о построении магических квадратов, но ограничимся квадратами с нечетным числом членов. Сначала укажем способ Мануэля Мосхопулоса (Византия, около 1300 г.), применимый ко всем нечетным квадратам; мы поясним его на примере семистрочного квадрата (рис. 31). Начальное число 1, обведенное квадратом, находится точно под центральным числом, которое приходится на пересечение диагоналей. Движемся от 1 по направлению диагонали направо вниз. Стрелки показывают, как приходим к 2 и 3. Всякий раз, когда доходим до правого или нижнего края, надо считать левую,

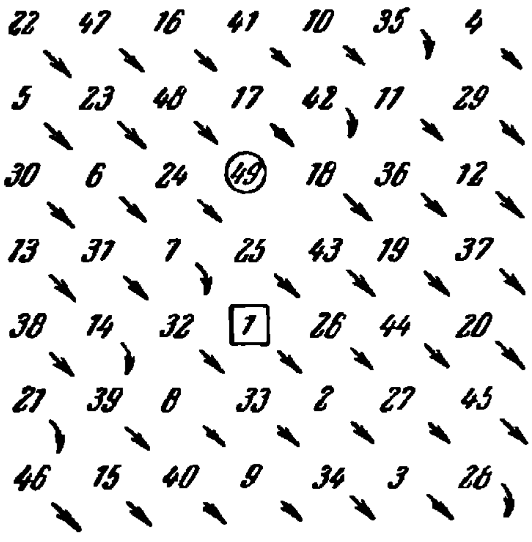


Рис. 31.

соответственно верхнюю сторону циклически примыкающей к правой, соответственно нижней стороне. Так мы переходим от 3 к 4 вверх направо, оттуда к 5 слева, затем по направлению диагонали к 6 и 7. Теперь первая диагональ заполнена. Тогда от 7 спускаемся на два ряда ниже и получаем, применяя указанное правило, места́ для чисел от 8 до 14; затем снова спускаемся на два ряда вниз. Так заполняется весь квадрат, и, как можно убедиться на

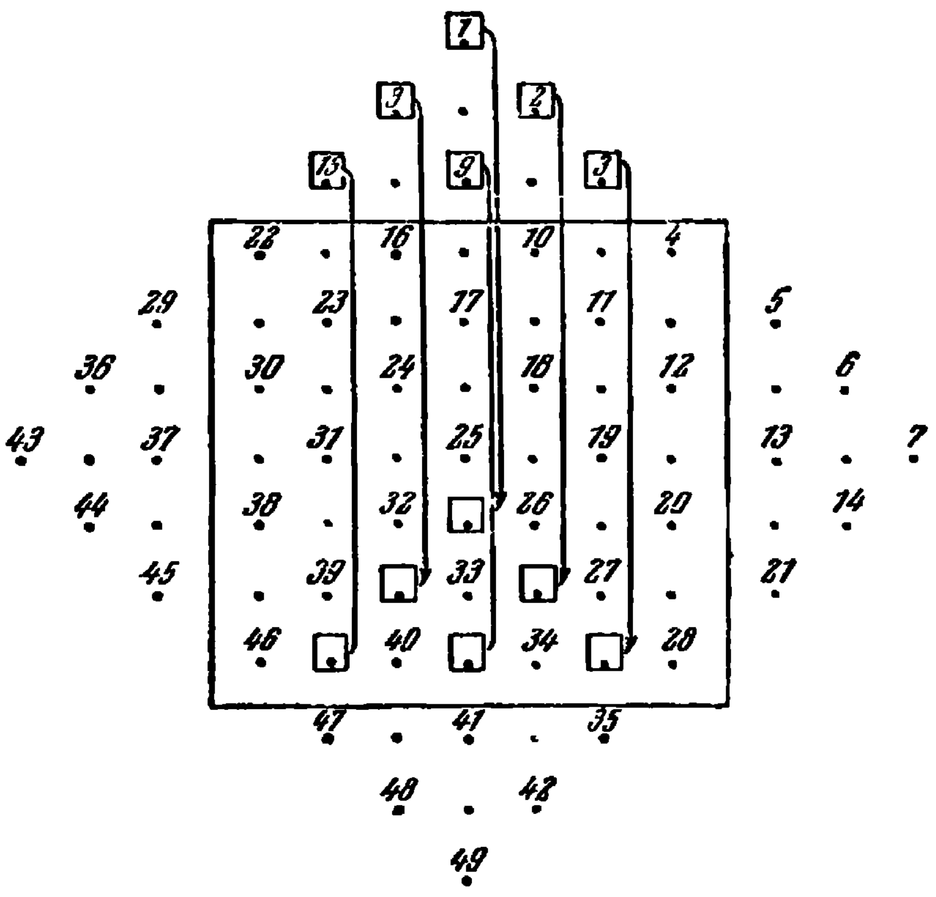


Рис. 32.

нашем примере, получается магический квадрат. Доказательство для общего случая нечетного квадрата мы опустим.

Баше́ указал другой способ — так называемый способ выступов. Он строит — мы это показываем снова на примере семичленного квадрата — ступенеобразные выступы на четырех сторонах квадрата и выписывает числа от 1 до 49 по направлению диагонали, как видно на рис. 32. Затем он сдвигает выступы параллельно самим себе вплоть до противоположной стороны квадрата, как указано на рисунке. Легко убедиться, что способ Баше́ дает то же, что способ Мосхопулоса.

Третий способ показан на рис. 33. Мы снова движемся по направлению диагонали, на этот раз — направо вверх. После заполнения диагонали, когда попадаем на верхнюю или левую сторону квадрата, надо переходить на следующую диагональ согласно уже указанным правилам.

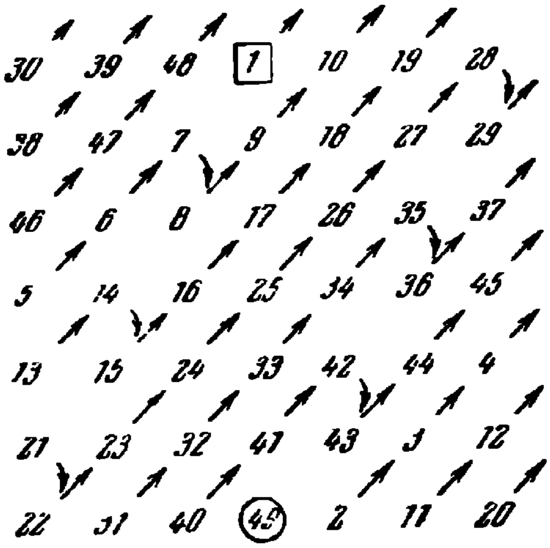


Рис. 33.

Теперь о числе магических квадратов. Начнем с трехчленных. В них на центральном поле скрещиваются четыре прямые —две диагонали, средняя вертикаль и средняя горизонталь, и на каждой из них сумма чисел дает 15. На этих четырех прямых находятся все вписанные в квадрат числа и притом по одному разу, за исключением центрального числа, которое входит четырежды. Все числа от 1 до 9 в сумме дают 45, и если к ним прибавить еще трижды центральное число, которое пока обозначим через x, то, поскольку в итоге мы должны получить $4\cdot 15$, приходим к уравнению

$$45+3x=60.$$

Отсюда находим, что

$$x=5,$$

стало быть, на центральном поле должно стоять 5.

Рассмотрим теперь верхнюю строку. Допустим, что она состоит только из нечетных чисел. Так как сумма чисел на диагонали нечетна (15), то в нижних углах квадрата тоже должны стоять нечетные числа, а так как те же соображения в силе и для средней вертикали, то оказывается, что вся нижняя строка должна состоять из нечетных чисел. Но это невозможно, ибо кроме центрального числа 5 в нашем распоряжении только четыре нечетных числа. Однако допустить, что в верхней строке два нечетных числа, тоже нельзя, потому что тогда сумма всех трех чисел в ней была бы четной. Итак, допустим, что там лишь одно нечетное число, и пусть оно находится в углу, скажем, в левом. Тогда расстановка чисел обязательно должна быть такой: $\begin{matrix} н & ч & ч \\ н & & \\ ч & ч & н \end{matrix}$, где «н» обозначает нечетное, «ч» — четное число. Незаполненные места должны быть заняты нечетными числами, потому что таких чисел пять. Но тогда сумма чисел на первой и на последней вертикалях не может быть нечетной, и мы снова приходим к противоречию. Поэтому остается лишь допущение, что углы магического квадрата заняты четными числами 2, 4, 6 и 8.

Но мы всегда можем поместить магический квадрат так, чтобы в верхнем левом углу стояло 2. Тогда, чтобы получить на соответствующей диагонали 15, в правом нижнем углу надо поместить 8. Без ограничения общности можно поставить теперь в верхнем правом углу 4, следовательно, в левом нижнем 6. Ведь квадрат, в котором два последних числа поменялись местами, получается из нашего зеркальным отражением относительно диагонали 2, 5, 8. Но когда таким образом расставлены все четные числа, места остальных чисел определены однозначно. Итак, доказано, что, с точностью до вращений и зеркальных отражений, существует только один трехчленный магический квадрат [1]). Относительно четырехчленных квадратов известно, что их 880, как лишь недавно доказал Фиттинг, и все эти 880 квадратов построены. Мало что известно о более сложных случаях, а число магических квадратов быстро растет с числом членов.

В связи с магическими квадратами были исследованы различные другие р а с с т а н о в к и, как размещение чисел по схеме равностороннего треугольника и вообще правильного многоугольника, затем числовые кубы, в которых числа размещаются в трех измерениях, и многое другое подобное. С большой тщательностью были рассмотрены и магические квадраты, обладающие особыми

[1]) Мы полагаем, разумеется, что читатель не нуждается в очевидной оговорке, что при этом имеется в виду квадрат, образованный числами от 1 до 9. Так как все требования к магическому квадрату остаются соблюденными, если ко всем его числам прибавить одно и то же число, то из одного квадрата можно получить сколько угодно новых такими прибавлениями. И при удвоении всех чисел магический квадрат остается таковым и т. д.

свойствами[1]). На рис. 34 показан так называемый квадрат Штифеля. Его особенность в том, что трехчленный квадрат внутри пятичленного опять-таки магический. Правда, он содержит не первые девять чисел, а числа от 9 до 17.

Родственны магическим квадратам, многоугольникам и кубам различные другие геометрические фигуры, например звездные многоугольники, в углах которых проставлены числа так, что вдоль определенных ломаных получается одна и та же сумма, и т. п. Приведем только два примера: а) Углы куба надо занумеровать числами от 1 до 8 так, чтобы во всех шести квадратах, образующих поверхность куба, сумма чисел, стоящих в их вершинах, была одна и та же. б) Во всех девяти углах известной «пифагоровой фигуры» надо проставить числа от 1 до 9 так, чтобы квадрат их суммы для квадрата, построенного на гипотенузе, был равен сумме квадратов аналогичных сумм для катетов. Пусть читатель сам решит обе задачи! Во второй надо использовать то, что

1	18	21	22	3
20	14	9	16	6
19	15	13	11	7
2	10	17	12	24
23	8	5	4	25

Рис. 34.

$$(1+8+9+7)^2=(6+4+2+8)^2+(5+3+6+1)^2.$$

9. РАЗНЫЕ ЗАНЯТНЫЕ ПРИЕМЫ СЧЕТА

Какой-то американец сказал, что счет — только одежда, наброшенная на тело мысли. Следует не забывать об этом изречении при изучении следующих ниже подсчетов.

1. У многих народов имеются приемы счета на пальцах, сводящие умножение чисел от 5 до 10 к умножению чисел, меньших 5. Если, скажем, надо помножить 7 на 9, то на каждой руке поднимают столько пальцев, сколько составляет превышение множителей над 5, в данном случае, значит, на одной руке 2, на другой 4. Сумма поднятых пальцев дает десятки произведения, что в нашем примере

[1]) Сошлемся тут на две книги: G. Kowalewski, Magische Quadrate und magische Parkette, Leipzig, 1937; F. Fitting, Panmagische Quadrate und magische Sternvielecke, Leipzig, 1939.

равно 6, а произведение согнутых пальцев дает единицы — тут это $3 \cdot 1 = 3$. Получилось правильно — 63. Доказательство в общем случае предоставляем читателю.

2. Как доказывают, что ученики или учителя (по выбору) ничего не должны делать? По ночам занятий нет, значит, половина суток свободна. Итак, в году остается не больше 183 суток. Но в большинстве школ занятия происходят лишь в одну смену и вторая половина дня тоже свободна. Поэтому рабочее время снова сокращается вдвое, остается только 92 рабочих суток. Однако отпадают и все воскресенья, а их 52 в году,— осталось всего 40. Ну, а отпускное время — оно заведомо превышает 6 недель. Вот так для занятий совсем не остается времени — легко было бы даже получить отрицательные дни!

3. Некто заходит в магазин, чтобы купить нож. Особенно понравились ему два ножа; один стоит 1,50 марки, другой — 3 марки. Из-за цены он выбирает более дешевый, расплачивается и уходит. Назавтра он сожалеет о покупке: следовало бы скорее выбрать лучший нож. Он возвращается в магазин, обменивает нож и направляется к выходу. Продавец его задерживает — ведь надо доплатить. Покупатель возражает: «Вчера я дал вам 1,50 марки наличными, сегодня я даю вам нож, который стоит 1,50 марки. Вы же мне дали нож стоимостью в 3 марки, стало быть, мы квиты». И с этим ушел. Прав ли он?

4. Некто зашел в лавку, чтобы купить нож. Он выбирает нож за 3 марки и расплачивается бумажкой в 5 марок. Так как у хозяина нет мелких денег, он разменивает 5 марок у соседа и дает покупателю 2 марки. Того уже и след простыл, когда прибегает сосед: 5 марок оказались фальшивыми и ему надо вернуть 5 марок. Итак, владелец лавки потерял всего 7 марок, не так ли? — Если угодно точно знать его убыток, можем доверительно сообщить, что нож был куплен владельцем лавки за 2,50 марки.

5. И в Колумбии, и в Венесуэле денежная единица именуется долларом, и в обеих странах доллары эти котировались одинаково. Однажды правительство Колумбии постановило впредь приравнять венесуэльский доллар девяноста колумбийским центам. На следующий день подобный же курс был введен для колумбийского доллара в Венесуэле.

5*

В Колумбии вблизи границы живет человек, который приходит в трактир выпить кружку пива за 10 центов. Любитель пива уплачивает колумбийский доллар и получает в сдачу венесуэльский. Теперь он переходит границу, снова покупает кружку пива, расплачивается венесуэльским долларом и получает колумбийский. Вернувшись домой, он оказывается при своих деньгах. Кто же оплатил две — а если наш герой продолжает свои пивные походы, то и все следующие — кружки пива?

6. Четверо отправились в экскурсию. Трое из них захватили с собою еду: первый — 4, второй — 3, третий — 1 бутерброд. Бутерброды разделили между всеми поровну. Четвертый должен был возместить 1,20 марки, и он дал первому 60 пфеннигов (1 марка = 100 пфеннигов), второму — 45, третьему — 15 пфеннигов. Но первый стал возражать. Прав ли он?

7. Расходы на освещение лестницы в одном из домов за год равны 200 маркам. В доме, кроме цокольного, четыре этажа. На каждой из четырех лестничных площадок горит по лампе. Домовладелец, который сам в доме не живет, распределяет расходы среди всех жильцов равномерно. Жильцы цокольного этажа с этим не согласны — они вовсе не пользуются лестницей, значит, они не должны оплачивать ее освещение. Тогда домовладелец произвел раскладку 200 марок на четыре остальных этажа в равных долях. Теперь запротестовал первый этаж — ему нужна лампа только на первой площадке. Как правильно распределить расходы?

8. У старого араба было 17 верблюдов и 3 сына. Умирая, он завещал младшему сыну половину, среднему — треть, старшему — одну девятую своего имущества. Но когда приступили к дележу верблюдов, оказались поначалу в растерянности. Тогда один из сыновей предложил: пойдем к соседу, одолжим у него верблюда и сможем разделиться. Так у них оказалось 18 верблюдов, и младший получил 9, средний 6, старший 2 верблюда, да еще один остался, и его с благодарностью вернули соседу. Как это объяснить?

9. Девушка принесла на рынок яблоки двух сортов, каждого по 60 штук. За 50 пфеннигов она дает два яблока лучшего сорта и три яблока худшего сорта. Выручку она подсчитывает так: яблок обоих сортов было одинаково. Так как я отдавала за 50 пфеннигов 2 штуки лучшего сорта и за столько же пфеннигов — 3 штуки худшего сорта, то за 1 марку я отдавала 5 штук. Всего было 120 яблок. За каждые 5 я получала по 1 марке, значит, я 24 раза получала 1 марку, то есть выручила 24 марки. Верен ли подсчет?

10. В «Фаусте» Гёте читаем: «Из пяти и шести — Так сказала ведьма — Сделай семь и восемь, Тогда готово. Девять же — один, десять — ничто. Вот так множат ведьмы».— Что это за счет?

11. Часы отбивают 6 ударов за 6 секунд. Сколько времени уходит на 12 ударов?

12. 12 рабочих должны отнести 12 центнеров картофеля из деревни в город. Каждый может нести только один центнер, и им понадобится для переноски один час. За какое время выполнят эту работу 6 рабочих?

13. Есть два литровых сосуда, и оба заполнены вином точно до мерной черты, один — красным, второй — белым. Из первого сосуда берут чайную ложку вина, переливают ее во второй, тщательно размешивают и затем вливают чайную ложку смеси из второго сосуда в первый. Чего больше — красного ли вина в белом или белого в красном?

14. Какое число, будучи уменьшено на некоторое число a и потом разделено на другое число b, дает тот же результат, что и при уменьшении его на b с последующим делением на a? И что при этом получается?

15. Несколько посетителей съели в ресторане на 30 шиллингов. При расчете выяснилось, что у двоих нет денег. Тогда каждый из остальных добавил к своей доле 9 пенсов. Сколько было едоков?

16. Финансовое ведомство удержало лишних 1021 р. Эту сумму надо вернуть по почте с вычетом почтовых расходов. Бухгалтер перевел 1021 р.—21 р. за пересылку, итого 1000 р. Ревизор указал на то, что на перевод 1000 р. требуется только 20 р. Тогда бухгалтер выписал перевод на 1021 р.—20 р. = 1001 р. Это снова вызвало возражения, потому что на перевод 1001 р. требуется 21 р. Кто прав?

17. Из 8 шаров, на вид совершенно одинаковых, один весит чуть меньше остальных. Сколько нужно взвешиваний, чтобы выявить более легкий шар?

18. Что выгоднее: очистить сосуд прополаскиванием, использовав сразу 100 $см^3$ воды, или прополоскать сначала 50 $см^3$, а потом снова 50 $см^3$?

Указания.— *8*. Заметить, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$. —*9*. Подсчет неверен, выручка должна быть равна 25. Число 3 не содержится в 60 столько раз, сколько 2. —*10*. Тут счет идет не с числами, а с остатками от деления на 2, на языке теории чисел — с числами mod 2. —*11*. Между 6 ударами имеется 5 пауз, между 12 ударами 11 пауз, стало быть, более чем удвоенное число.—*12*. Обратный путь за вторым центнером тоже требует времени! —*13*. Здесь приводить решение не будем. Одному крупному математику приписывают заявление, что тот, кто даст быстрый ответ на этот вопрос с кратким обоснованием одной фразой, имеет задатки крепкого математика.— *14*. $(a+b)$. — *15*. 10. —*17*. 2.—*18*. Допустим, что при выливании на стенках остается 1 $см^3$. Тогда в первом случае имеем 1/100 первоначального загрязнения, тогда как во втором случае после первого прополаскивания останется 1/50 загрязнения, после второго 1/2500.

10. ЧУДЕСА С ЧИСЛАМИ

Начнем с нескольких замечательных фактов, объяснение которых — в теоремах об остатках при делении на 9. Основные факты приведем без доказательства.

а) Всякое число при делении на 9 дает тот же остаток, что и сумма его цифр.

б) Остаток при делении на 9 суммы двух чисел равен сумме таких же остатков для слагаемых.

в) Остаток от деления на 9 разности двух чисел равен разности таких же остатков для уменьшаемого и вычитаемого.

г) Остаток от деления на 9 произведения двух чисел равен произведению таких же остатков для сомножителей.

Этих фактов достаточно для объяснения следующих «чудес», но они пригодятся нам и позже.

1. Сумма цифр у чисел таблицы умножения на 9 одна и та же; для чисел таблицы умножения на 10 она возрастает на 1 от числа к числу, для чисел таблицы умножения на 8 — убывает на 1 от числа к числу.

2. Из числа вычитают сумму его цифр. Разность всегда делится на 9.

3. Дано любое двузначное число. Перестановкой цифр образуем второе число и из большего числа вычитаем меньшее. Разность всегда будет числом из таблицы умножения на 9.

4. Дано произвольное трехзначное число. Берем второе число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. В разности этих двух чисел средняя цифра 9, сумма первой и последней цифр тоже 9. Примеры: $815 - 518 = 297$; $756 - 657 = 099$.

Своеобразные сочетания цифр

Другую группу «чудес» дают такие выражения, в которые цифры входят каким-либо примечательным образом. Вот ряд примеров. Систематизации они, насколько нам известно, не подвергались.

5. а) $7 = 2 + \frac{2}{2} + 2^2$; б) $28 = 2 + 2 + 2 + 22$;

в) $23 = 22 + \frac{2}{2}$.

6. 100 можно изобразить: а) четырьмя девятками ($99\frac{9}{9}$); б) шестью девятками ($99 + \frac{99}{99}$); в) пятью единицами ($111 - 11$); г) пятью тройками ($3 \cdot 33 + \frac{3}{3}$); д) пятью пятерками ($5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$); еще раз пятью пятерками ($(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$).

Периоды десятичных дробей и пр.

Теперь мы приведем такие соотношения между числами, которые находят простое объяснение в теории периодических десятичных дробей. Тут достаточно указания, что в задаче 7 решающую роль играет обращение в десятичную дробь $\frac{1}{7}$, в нескольких следующих задачах — дроби $\frac{1}{81}$.

7. Образуем последовательно произведения числа 142 857 на 2, 3, 4, 5, 6. Получаем 285 714; 428 571; 571 428;

714 285; 857 142; на этом, впрочем, все великолепие заканчивается, так как при умножении на 7 получаем 999 999. Итак, число 142 857 и указанные его кратные обладают следующей особенностью. Они записаны одними и теми же цифрами, притом в том же порядке, если считать, что за последней цифрой «циклически» следует первая и т. д. Отличие только в том, с какой цифры начинаем.

8. При умножении числа 12 345 679 на 9 получаем 111 111 111. Итак, если помножить это число на 18, то получим только цифры 2, если помножим на 27,— только цифры 3 и т. д.

9. Если помножить 12 345 679 на кратное трех, получается число с трижды повторяющейся последовательностью цифр. Пример: $12\,345\,679 \cdot 24 = 296\,296\,296$. До каких кратных тройки можно здесь идти?

10. Имеем:

$$
\begin{aligned}
9\cdot 1 + 2 &= 11,\\
9\cdot 12 + 3 &= 111,\\
9\cdot 123 + 4 &= 1111,\\
9\cdot 1234 + 5 &= 11111,\\
9\cdot 12345 + 6 &= 111111,\\
9\cdot 123456 + 7 &= 1111111,\\
9\cdot 1234567 + 8 &= 11111111,\\
9\cdot 12345678 + 9 &= 111111111.
\end{aligned}
$$

11. Имеем:

$$
\begin{aligned}
8\cdot 12 + 2 &= 98,\\
8\cdot 123 + 3 &= 987,\\
8\cdot 1234 + 4 &= 9876,\\
8\cdot 12345 + 5 &= 98765,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

12. Имеем:

$$
\begin{aligned}
0\cdot 9 + 8 &= 8,\\
9\cdot 9 + 7 &= 88,\\
98\cdot 9 + 6 &= 888,\\
987\cdot 9 + 5 &= 8888,\\
9876\cdot 9 + 4 &= 88888,\\
98765\cdot 9 + 3 &= 888888,\\
987654\cdot 9 + 2 &= 8888888,\\
9876543\cdot 9 + 1 &= 88888888,\\
98765432\cdot 9 + 0 &= 888888888,\\
987654321\cdot 9 - 1 &= 8888888888.
\end{aligned}
$$

Разложение некоторых чисел на простые множители

Чтобы получить в результате умножения на соответствующее число последовательность одинаковых цифр, можно исходить из подходящего кратного числа 111, или 1111, или вообще любого иного числа, записанного только единицами. Этот способ был применен в предыдущих примерах. При этом надо использовать разложение указанных чисел на простые множители:

$$\begin{aligned} 111 &= 3 \cdot 37, \\ 1111 &= 11 \cdot 101, \\ 111111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37, \\ 111111111 &= 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 333667, \\ 111111111111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901. \end{aligned}$$

Например, третья строка дает такие разложения:

$$\begin{aligned} 111111 &= 3 \cdot 37037, \\ &= 11 \cdot 10101, \\ &= 33 \cdot 3367, \\ &= 111 \cdot 1001, \\ &= 143 \cdot 777. \end{aligned}$$

Впрочем, любое нечетное простое число p (кроме 3 и 5) входит множителем в число, состоящее из $p-1$ цифр 1. Это подтверждается и приведенными разложениями.

13. Дано трехзначное число, например 225. Берется его дополнение до 999 и приписывается сзади, так что получаем в данном случае шестизначное число 225 774. Это число делится на 37 без остатка. Оно делится и на 27, давая в частном 226, то есть число, на единицу большее первоначального. Действительно, если a — исходное число, то построено новое число

$$1000a + (999 - a) = 999a + 999 = 999\,(a + 1).$$

А так как $37 \cdot 3 = 111$, то отсюда получается все остальное.

14. Назовем числа, которые записываются двумя одинаковыми последовательностями цифр, например

357 357

или

24 812 481,

симметричными. Получим симметричные числа, умножая

а)	77	на первые	999	кратных	числа	13,
б)	91	» »	999	»	»	11,
в)	143	» »	999	»	»	7,
г)	137	» »	9999	»	»	73.

Обоснование: $1001 = 77\cdot 13 = 91\cdot 11 = 143\cdot 7$ и $10\,001 = 73\cdot 137$.

Теорема о биноме и пр.

В следующих задачах мы имеем дело с применением теоремы о биноме, а в некоторых случаях — и теоремы о многочлене, то есть обобщения теоремы о биноме. Заканчивая написанную выше группу задач, укажем еще несколько замечательных произведений.

15.
$$13^2 = 169, \text{ а } 31^2 = 961;$$
$$12^2 = 144, \text{ а } 21^2 = 441.$$

Итак, если в числе, возводимом в квадрат, переставлены цифры, то их надо переставить и в результате...

16. То же самое верно для таких трехзначных чисел:

$$102^2 = 10\,404 \text{ и } 201^2 = 40\,401,$$
$$103^2 = 10\,609 \text{ » } 301^2 = 90\,601,$$
$$112^2 = 12\,544 \text{ » } 211^2 = 44\,521,$$
$$113^2 = 12\,769 \text{ » } 311^2 = 96\,721,$$
$$112^2 = 14\,884 \text{ » } 221^2 = 48\,841.$$

17. Замечательное расположение цифр наблюдается в следующих квадратах:

$$11^2 = 121,$$
$$111^2 = 12\,321,$$
$$1111^2 = 1\,234\,321,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$111111111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321.$$

18. Образуя степени числа 11, получаем

$$11^2 = 121,$$
$$11^3 = 1331,$$
$$11^4 = 14641;$$

при этом появляются первые биномиальные коэффициенты. Конечно, суммы цифр полученных чисел равны $2^2=4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$.

19. Имеем:

$$9^2 = 81,$$
$$99^2 = 9801,$$
$$999^2 = 998001,$$
$$9999^2 = 99980001,$$
$$99999^2 = 9999800001,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

20. Подобного же вида следующие квадраты:

$$4^2 = 16,$$
$$34^2 = 1156,$$
$$334^2 = 111556,$$
$$3334^2 = 11115556,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$33334^2 = 1111155556,$$

21. В виде приложения укажем еще два ряда произведений, где налицо подобное расположение цифр:

$$9\cdot 7 = 63,$$
$$99\cdot 77 = 7623,$$
$$999\cdot 777 = 776223,$$
$$9999\cdot 7777 = 77762223,$$
$$99999\cdot 77777 = 7777622223,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$9\cdot 8 = 72,$$
$$99\cdot 88 = 8712,$$
$$999\cdot 888 = 887112,$$
$$9999\cdot 8888 = 88871112,$$
$$99999\cdot 88888 = 8888711112,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Предоставляем читателю построить самому подобные ряды.

22. Своеобразную закономерность выявляют следующие ряды квадратов:

$$5^2 = 25,$$
$$25^2 = 625,$$
$$625^2 = 390\ 625,$$
$$90\ 625^2 = 8\ 212\ 890\ 625,$$
$$890\ 625^2 = 793\ 212\ 890\ 625,$$
$$2\ 890\ 625^2 = 8\ 355\ 712\ 890\ 625,$$
$$12\ 890\ 625^2 = 166\ 168\ 212\ 890\ 625,$$
$$212\ 890\ 625^2 = 45\ 322\ 418\ 212\ 890\ 625,$$
$$8\ 212\ 890\ 625^2 = 67\ 451\ 572\ 418\ 212\ 890\ 625,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
6^2 &= 36,\\
76^2 &= 5776,\\
376^2 &= 141\ 376,\\
9\ 376^2 &= 87\ 909\ 376,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
1\ 787\ 109\ 376^2 &= 3\ 193\ 759\ 921\ 787\ 109\ 376,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Суммы степеней и т. п.

В этой группе чудесных чисел перед нами зависимости между рядами степеней натуральных чисел. Ограничимся двумя примерами:

23.

$$
\begin{aligned}
1 + 3 &= 4 = 2^2,\\
1 + 3 + 5 &= 9 = 3^2,\\
1 + 3 + 5 + 7 &= 16 = 4^2,\\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 = 5^2,\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

24.

$$
\begin{aligned}
1 + 2 &= 3 \text{ и } 1^3 + 2^3 = 3^2,\\
1 + 2 + 3 &= 6 \text{ » } 1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2,\\
1 + 2 + 3 + 4 &= 10 \text{ » } 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2,\\
1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15 \text{ » } 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

25. Имеем

$$
\begin{aligned}
3^3 + 4^3 + 5^3 &= 6^3,\\
11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 &= 20^3.
\end{aligned}
$$

26. Замечательное соотношение

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555.$$

Из действий с дробями и из извлечений корня

27. В дробях $\frac{26}{65}$ и $\frac{16}{64}$ можно устранить в числителе и знаменателе цифру 6 (на 6 «сократить»). Есть и другие такие дроби с числителями и знаменателями из двух цифр. Укажите их!

28. К двум дробям, указанным в задаче *27*, примыкают дроби такого вида:

$$\frac{26}{65}=\frac{2}{5},\quad \frac{266}{665}=\frac{2}{5},\quad \frac{2666}{6665}=\frac{2}{5},\ \ldots$$

$$\frac{16}{64}=\frac{1}{4},\quad \frac{166}{664}=\frac{1}{4},\quad \frac{1666}{6664}=\frac{1}{4},\ \ldots$$

Как обстоит дело с другими дробями из задачи *27*?

29. Имеем

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}};\quad \sqrt{12\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}};$$

$$\sqrt{20\frac{20}{399}}=20\sqrt{\frac{20}{399}};\quad \sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}};$$

$$\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}};\quad \sqrt[4]{4\frac{4}{255}}=4\sqrt[4]{\frac{4}{255}};$$

$$\sqrt[5]{2\frac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}.$$

Легко добавить другие примеры, исходя из зависимости

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}.$$

11. ОТГАДЫВАНИЕ ЦИФРЫ В ИТОГЕ ДЕЙСТВИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ЧИСЛАМИ

Нижеследующие различные виды «отгадывания» цифры в итоге действий с неизвестными числами все сводятся к указанным в разделе 9 операциям над «остатками девятки». Там, где метод не усматривается сразу, для объяснения достаточно нескольких слов. Ход дела надо представлять себе в виде диалога и подсчетов в уме двух лиц А и В. Их беседа приводится в сокращенном виде, а подсчеты, производимые в уме А (А предполагается знающим секрет) и В, указываются в скобках.

1. А: Запомни число, умножь его на 9, выбрось из него одну цифру, только, прошу, не 9 и не 0, и скажи мне медленно, цифру за цифрой, результат; мне безразлично, читаешь ли ты его справа налево или слева направо. В: (217; 1953; 19.3) 3,9, 1. А: (3+9 + 1 = 13, до ближайшего кратного девяти не хватает) 5. Выброшенная цифра — это 5.

2. А. Задумай число, допиши к нему сзади нуль, вычти из того, что получилось, задуманное число, добавь 54 (или любое другое кратное девяти), отбрось одну цифру и назови цифры оставшегося числа в порядке их величины. В: (526; 5260; 4734; 4788; 788) 7, 8, 8. А: (7 + 8 + 8 = 23; до ближайшего кратного девяти не хватает) 4.

3. А: Задумай число, найди сумму его цифр и вычти ее из задуманного числа, переставь цифры в получившемся числе как угодно, добавь затем 31 (или любое другое число, остаток которого при делении на девять, равный тут 4, А замечает), опусти затем одну цифру, но не 9, и скажи мне сумму цифр полученного числа. В: (5599; 5 + 5 +9 + + 9 = 28; 5571; 5175; 5206; 52·6; сумма цифр) 13. А: (13— — 4 = 9; до ближайшего кратного девяти) 0.

4. А: Задумай число, найди сумму его цифр, умножь ее на 80 и добавь к числу. Назови цифры суммы, опустив одну из них, но не 9. В: (344; сумма цифр 11; 11·80 = =880; 344 + 880 = 1224; 12·4) 1, 2, 4. А: (1 + 2 + 4 = 7; до ближайшего кратного девяти) 2.

5. А: Задумай число, образуй из него другое число перестановкой цифр, найди разность этих двух чисел и помножь ее на 215 (или любое другое целое число). Теперь опусти одну цифру, но не 9, и назови мне оставшиеся цифры в порядке величины. В: (7529; 9527; 1898; 408070; 4080.0) 0,0,0,4,8. А: (4 + 8 = 12, до ближайшего кратного девяти остается) 6. В: Неверно! А: Ну, тогда ты ошибся в счете! В: Действительно, надо подсчитать еще раз (9527—7529 = 1998; 1998 215 = 429 570; 4295·0). Теперь мои цифры таковы: 0, 2, 4, 5, 9. А: (0 + 2 + 4 + 5 + 9= =20; до ближайшего кратного девяти остается) 7.

6. А: Возьми трехзначное число, составь число из тех же цифр в обратном порядке, найди разность этих двух чисел и скажи мне ее первую цифру, а я скажу тебе две остальные. В: (518; 815; 297) 2. А: 9 и 7.

Примечание. См. в предыдущем разделе задачу *4*.

7. А: Возьми любое число, образуй из него два других числа, меняя порядок цифр, сложи все три числа и возведи сумму в квадрат; опусти в результате какую угодно цифру, но не 9, и скажи мне остальные. В: (214; 142; 124; $214 + 142 + 124 = 480$; $480^2 = 230\,400$; 230.00) 0, 0, 0, 2, 3. А: ($2 + 3 = 5$; до девяти не хватает) 4.

Примечание. Если первое число вида $9n_1 + r$, то два остальные должны быть вида $9n_2 + r$ и $9n_3 + r$, так как остаток при делении на 9 для всех трех чисел одинаков. Следовательно, сумма составляет $9(n_1 + n_2 + n_3) + 3r$, значит, делится на 3. Поэтому ее квадрат делится на 9, т. е. его остаток при делении на 9 есть 0.

8. А: Возьми любое число, а также непосредственно ему предшествующее и следующее за ним, перемножь все три числа и возведи произведение в квадрат. Опусти в произведении одну из цифр, но не 9, и назови мне остальные. В: ($185 \cdot 186 \cdot 184 = 6\,331\,440$; $40\,087\,132\,473\,600$; 400.7 132 473 600). А: Имеются в результате нули? Если да, можешь их опустить, равно как и девятки. В: 4, 7, 1, 3, 2, 4, 7, 3, 6. А: ($4 + 7 + 1 + 3 + 2 + 4 + 7 + 3 + 6 = 37$; до ближайшего кратного девяти недостает) 8.

Примечание. Из трех последовательных чисел одно всегда делится на 3, поэтому на 3 делится и их произведение, а его квадрат — на 9.

Заключительное замечание к этому разделу. В различных способах для определения опущенной цифры мы постоянно пользовались правилами об «остатках девятки». Совершенно так же можно использовать и правила об «остатках одиннадцати», только вычисления становятся сложнее. Другие примеры на приемы, рассмотренные в этом и следующих разделах, имеются в книге Деланса «Задачи занимательной арифметики» (P. Delens, Problémes d'Arithmétique amusante, Paris, Vuibert, 1914).

12. ОТГАДЫВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТА ДЕЙСТВИЙ НАД НЕИЗВЕСТНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Задумай число, добавь к нему 11, сумму помножь на 2 и вычти из произведения 20. То, что получилось, умножь на 5 и вычти удесятеренное задуманное число. Тогда получишь 10.

П р и м е р. 7; 18; 36; 16; 80; 70; 10.

В о б щ е м в и д е: $[(n+11)\cdot 2-20]\cdot 5-10n = (2n+2)\cdot 5-10n=10$.

2. Возьми любое простое число, большее трех. Возведи его в квадрат, добавь 17, раздели сумму на 12, в остатке получишь 6.

П р и м е р. 7; 49; 66; остаток 6.

В о б щ е м в и д е: Простое число, бо́льшее трех, представимо в виде $6n \pm 1$, значит, его квадрат будет вида $36n^2 \pm 12\,n + 1$. Это число при делении на 12 дает остаток 1. Так как предварительно к нему добавили $17 = 12 + 5$, то остатком будет 6. Если прибавлено произвольное число, например 87 или вообще $12p + q$, то остатком будет 4, или соответственно $q + 1$.

3. Задумай трехзначное число, в котором первая и последняя цифры не одинаковы и отличаются больше чем на 1. Возьми число с теми же цифрами, но в обратном порядке, и найди разность этих двух чисел. К этой разности добавь то число, которое получается из нее при обратном порядке цифр. Тогда получишь 1089.

П р и м е р. 215; 512; разность 297; 792; сумма 1089.

В о б щ е м в и д е: Составляется разность числа

$$a\cdot 100 + b\cdot 10 + c$$

и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке,

$$c\cdot 100 + b\cdot 10 + a.$$

Эта разность равна, при $a > c$,

$$(a-c)\,100 + (c-a),$$

но так как $c-a$ отрицательно, то ее надо записать в виде

$$(a-c-1)\cdot 100 + 9\cdot 10 + (10-a+c).$$

Теперь в этом числе снова надо изменить порядок цифр на обратный; получаем

$$(10-a+c)\cdot 100 + 9\cdot 10 + (a-c-1).$$

Сумма последних двух чисел равна

$$9\cdot 100 + 2\cdot 9\cdot 10 + 9 = 1089.$$

Замечательно в этом результате то, что из него выпали произвольные числа a и c, как уже раньше выпало произвольное число b.

4. Задумай число; умножь его на 37; добавь к произведению 17 (вообще a); умножь сумму на 27; теперь добавь 7 (вообще b); раздели получившееся число на 999. Тогда в остатке получишь при делении 466 (вообще $27a + b$, причем a и b надо выбрать так, чтобы $27a + b$ оказалось меньше, чем 999).

Мы образуем: $(37n + a) \cdot 27 + b = 999n + 27a + b$, где n — задуманное число. В нашем примере $27a + b = 466$.

5. Задумай число, умножь его на 15 (вообще на a), добавь к результату 63 (вообще b) и раздели сумму на 3 (вообще на c). Затем умножь задуманное число на 5 (вообще на $\frac{a}{c}$) и вычти это произведение из ранее полученного числа. В итоге будешь иметь 21 $\left(\text{вообще } \frac{b}{c}\right)$.

Действительно,

$$\frac{na + b}{c} - \frac{na}{c} = \frac{b}{c}.$$

Чтобы избежать действий с дробями, выбирают a, b и c так, что a и b делятся на c.

6. Можно позволить **В** проделать над задуманным числом любые действия, целесообразно лишь сохранить за собою право вето, чтобы не допустить, например, появления квадратичных относительно задуманного числа членов или иных осложнений. При этом ведут подсчет с неизвестной x, а в конце указывают такое действие, которым эта неизвестная исключается.

П р и м е р. Я добавляю к задуманному числу 4, умножаю сумму на 5, затем вычитаю 12, добавляю 27. До сих пор **В**, исходя из числа 10, подсчитывал: $10 + 4 = 14$; $14 \cdot 5 = 70$; $70 - 12 = 58$; $58 + 27 = 85$. **А** же считал: $x + 4$; $5x + 20$; $5x + 8$; $5x + 35$. Теперь он заявляет: «Вычти пятикратное задуманное тобою число, и ты получишь 35». И в самом деле, у **В** выходит: $85 - 50 = 35$.

7. Задумай два трехзначных числа и составь из них два шестизначных, дописав одно к другому слева и справа. Найди разность последних двух чисел и раздели ее на разность исходных трехзначных чисел. Ты получишь 999.

П р и м е р. Мы выбрали 226 и 871, их разность 645. Затем получаем

$$\begin{array}{r} 871\,226 \\ -\;226\,871 \\ \hline 644\,355 \end{array}$$

и находим, что

$$644\,355 : 645 = 999.$$

В о б щ е м в и д е: Пусть p и q — два исходных числа, из которых больше p, так что их разность есть $p - q$. Два шестизначных числа — это $1000\,p + q$ и $1000\,q + p$, значит, их разность будет $1000\,(p - q) - (p - q)$. При делении этого выражения на $p - q$ получаем $1000 - 1 = 999$.

8. Задумай три различных цифры. Образуй все шесть чисел, которые можно получить из них, выписывая их по две (без повторений!), и найди сумму этих шести чисел. Ее раздели на сумму исходных трех. Ты получишь 22.

П р и м е р. Из 2, 5 и 7 я образую шесть чисел 25, 27, 52, 57, 72, 75. Их сумма 308. Ее делим на $2 + 5 + 7 = 14$. Действительно, частное равно 22.

В о б щ е м в и д е: Если три цифры суть p, q и r, то сумма наших шести чисел составляет

$$10p + q + 10p + r + 10q + p + 10q + r + 10r + p + 10r + q = 22\,(p + q + r).$$

9. В выписывает произвольное, скажем, четырехзначное число 5687. А заявляет В, что последний может добавить еще два любых четырехзначных числа, а затем он, А, добавит еще два таких числа, и сумма всех чисел составит 25 685. В этом не было бы ничего поразительного, если бы А за какое-то время подсчитал бы в уме сумму первых трех чисел и затем «подогнал» бы остальные два. Но дело обстоит не так. А пишет свои числа сразу. Итак:

$$\begin{array}{lr} \text{B:} & 5687 \\ \text{B:} & 3825 \\ & 8481 \\ \text{A:} & 6174 \\ & 1518 \\ \hline & 25685 \end{array}$$

Объяснение. А называет в качестве конечной суммы такое число, которое получается из указанного В числа приписыванием спереди 2 и вычитанием 2, и в нашем примере это 25 685. Затем он пишет свое первое число так, чтобы оно дополняло второе из написанных В чисел до 9999, а второе число А дополняет до 9999 третье число В. Таким образом, всего к первому числу добавлено $2 \times 9999 = 20\,000 - 2$, и $5687 + 20\,000 - 2$ дает 25 685.

13. ОТГАДЫВАНИЕ ЗАДУМАННОГО ЧИСЛА

Существует немалое число способов отгадывать задуманное число, предлагая выполнить над последним определенные действия и находя его по сообщенному результату этих действий. Некоторые из таких способов являются народными и у детей передаются от поколения к поколению. Часть из них будет приведена в этом разделе.

1. Задумай число, возьми его дважды, добавь к этому 4 и раздели то, что получилось, на 2; теперь прибавь 7, помножь результат на 8 и вычти из произведения 12; затем раздели на 4 и вычти потом 11.

В считает: 7; 14; 18; 9; 16; 128; 116; 29; 18. А вычитает 4 и делит разность на 2. Тогда получается исходное число В, то есть 7.

Доказательство. Было образовано число

$$\left[\left(\frac{2n+4}{2}+7\right)\cdot 8-12\right]:4-11=\left[(n+9)\cdot 8-12\right]:4-$$

$$-11=(n+9)\cdot 2-3-11,$$

что равно $2n+4$.

2. Задумай число, умножь его на 3, возьми половину произведения, а то, что получилось, помножь на 6.

В считает 22; 66; 33; 198. Последний результат он называет. А делит это число на 9 и получает 22. На деле число было помножено на $\frac{3}{2}\cdot 6=9$, и оно восстанавливается делением.

3. Задумай число, удвой его и прибавь затем какое-либо четное число. Возьми половину суммы и то, что получилось, умножь на 4; прибавленное ранее четное число удвой и вычти из произведения. В считал так: 16; 32; он добавил четное число 12, получил 44; 22; 88; 64. А берет четвертую часть последнего числа и находит 16. Конечно, у В получилось $\frac{1}{2}(2n + 12)\cdot 4 - 2\cdot 12 = 4n$.

4. Ц и ф е р б л а т. Достаем часы; В замечает любую из 12 пометок на циферблате. А начинает постукивать карандашом по некоторым пометкам на циферблате, а В при каждом постукивании прибавляет про себя единицу к замеченному им числу. Когда он доходит до 20, А стучит карандашом по выбранному В числу.

П р и м е р. В замечает себе 4.

В считает: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

А отстукивает: 2, 7, 5, 12, 1, 7, 9, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4.

О б ъ я с н е н и е. Вместо того чтобы считать от 4 до 20, как В, можно отсчитывать от 20 до 4. Так поступает А. Он сначала стучит 7 раз по совершенно произвольным числам циферблата. На восьмой раз он стучит по 12, затем по 11 и т. д. и доходит до 4 как раз тогда, когда В доходит до 20. Впрочем, вместо конечного числа 20 можно взять любое другое подходящее число, изменив одновременно количество предварительных безразличных ударов.

5. Задумай число, умножь его на 2, добавь затем 1, умножь сумму на 5 и добавь 3.

В считает: 13; 26; 27; 135; 138; А опускает последнюю цифру: 13.

О б ъ я с н е н и е. Образуется число $(2n + 1)\cdot 5 + 3 = 10n + 8$, следовательно, остается только зачеркнуть последнюю цифру.

6. Задумай число, прибавь к нему 2, умножь на 3, вычти 4, умножь на 3, добавь первоначальное число.

В считает: 21; 23; 69; 65; 195; 216. А опускает последнюю цифру. Здесь образуется $[(n + 2)\cdot 3 - 4]\cdot 3 + n = 9n + 6 + n = 10n + 6$.

7. Задумай число, умножь его на 5, добавь 2, умножь на 4, добавь 3, умножь на 5, добавь 7.

В считает: 8; 40; 42; 168; 171; 855; 862. А опускает последние две цифры и называет 8. Здесь, как видно при подсчете, образуется число $100n + 62$.

8. Задумай число, меньшее чем 996, и советую тебе не брать слишком большое. Помножь его на 37, добавь 111, помножь на 27. То, что получилось, дополни до целых тысяч.

В считает: 10; 370; 481; 12 987; 13 000. А отнимает 3 от числа тысяч: 10.

Объяснение. Получаем $(37n+111)\cdot 27=999n+$ $+3\cdot 999=999\,(n+3)$. Если только $n+3$ меньше чем 999, то ближайшим числом целых тысяч будет $1000\,(n+3)$. Итак, чтобы получить n, надо взять число тысяч и отнять от него 3.

9. Задумай число, затем добавь к нему 2 и перемножь эти два числа, к произведению прибавь 5. В считает: 12; $12\cdot 14=168$; 173. А вычитает 4, извлекает из разности квадратный корень (13) и отнимает единицу: 12.

Объяснение. Мы образуем число

$$n\cdot(n+2)+5=n^2+2n+1+4=(n+1)^2+4.$$

Итак, надо сначала отнять 4, потом извлечь корень и, наконец, вычесть единицу...

10. Задумай четырехзначное число. Отбрось последнюю цифру, затем предпоследнюю, затем третью с конца и сложи три полученных таким образом числа. Умножь сумму на 9 и прибавь к произведению сумму цифр задуманного числа.

В считает, исходя из числа 4321; $432+43+4=479$; 4311; 4321. А: Это задуманное тобою число!

Объяснение. Если исходное число $1000a+$ $+100b+10c+d$, то сначала строятся числа $100a+$ $+10b+c$, $10a+b$, a. Их суммой будет

$100a+10b+c+10a+b+a=111a+11b+c.$

Умножение на 9 дает

$$999a+99b+9c,$$

и если теперь прибавить сумму цифр $a+b+c+d$, то действительно получим исходное число

$$1000a+100b+10c+d.$$

11. Задумай число; прибавь его половину. Если получилась дробь, возьми ближайшее бо́льшее целое. К полученному числу добавь его половину и, если получилась дробь, снова возьми ближайшее бо́льшее целое. Найденное число раздели на 9. Каков результат?

В считает: 16; 8; 24; 36; 4.

А считает: $4 \cdot 4 = 16$ и заявляет: «Ты все время получал целые числа!».

С считает: 18; 9; 27; $27 + \frac{27}{2} + \frac{1}{2} = 41$; частное 4, остаток 5.

А считает: $4 \cdot 4 = 16$, добавляет 2 и может сказать, что С пришлось один раз дополнять дробное число до целого.

D считает: 19; $19 + \frac{19}{2} + \frac{1}{2} = 29$; $29 + \frac{29}{2} + \frac{1}{2} = 44$; частное 4, остаток 8.

А считает, как и раньше, $4 \cdot 4 = 16$, добавляет 3 и может утверждать, что D пришлось дважды дополнять дробь до целого числа.

Объяснение. Различаем четыре случая.

а) Пусть задуманное число делится на 4, то есть оно вида $4n$. Тогда образуется число $4n + 2n + 2n + n = 9n$, и при делении на 9 получаем четвертую часть задуманного числа. Поэтому А должен только множить на 4, как в случае с В.

б) Если исходное число вида $4n + 1$, то образуется в итоге сумма $4n + 1 + 2n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3n + 1 = 9n + 3$. При делении на 9 получаем n и остаток 3. Чтобы получить исходное число $4n + 1$, надо множить n на 4 и, в соответствии с прибавкой из-за **первой** дроби, добавить 1.

в) При исходном числе вида $4n + 2$ получаем в итоге $4n + 2 + 2n + 1 + 3n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 9n + 5$. Итак, при делении остаток будет 5. Чтобы получить $4n + 2$, надо n умножить на 4 и затем прибавить, в соответствии с появлением второй дроби 2, как в случае с С.

г) Если же исходное число вида $4n + 3$, то образуется число $4n + 3 + 2n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 3n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 9n + 8$, то есть прибавка получается и из-за **первой**, и из-за **второй** дроби. В этом случае после умножения на 4 надо добавлять 3.

Старое правило для этого приема отгадывания гласит: «Справься о целой части частного, замени каждую единицу его четверкой и добавь единицу за первую и двойку за вторую дробь». Решить, были ли дроби и какие, можно с помощью остатков.

Заключительное замечание. Существует еще много других аналогичных приемов, с которыми можно познакомиться в книгах Деланса, Баше́ и Аренса (Аренс II).

14. ОТГАДЫВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

С помощью приемов предыдущего раздела можно отгадывать сразу несколько чисел,— для этого нужно только составить определенным образом из этих чисел одно число. Например, если надо отгадать числа 3, 6, 9, то отгадывают число 369. Некоторые из указанных ниже способов сводятся по сути к этой же мысли, только соответствующее число образуется не заранее, а в ходе вычислений.

1. Возьми в одну руку четное, в другую — нечетное число предметов (монет, спичек, камушков). Я скажу тебе, держишь ли ты в правой руке четное или нечетное количество.

В берет в левую руку 5 предметов, в правую — 2 предмета. А: Утрой число в правой руке, удвой число в левой и сложи. В считает: $10 + 6 = 16$. А заключает отсюда, что в правой руке было четное число (так как полученная сумма четна).

С берет в левую руку 2, в правую — 7 предметов, у него получается $4 + 21 = 25$. Так как сумма получилась нечетная, А заключает, что у С в правой руке было нечетное число предметов.

Объяснение. 1 случай. Слева нечетное число предметов $2p + 1$, справа четное $2q$, тогда $2\cdot(2p + 1) + 3\cdot 2q$ есть четное число.

2 случай. Слева четное число $2p$, справа нечетное $2q + 1$, тогда число $2\cdot 2p + 3(2q + 1)$ нечетно.

Можно множить не на 2, а на любое четное число, не на 3, а на любое нечетное число.

2. Возьми любой камень домино. Я отгадаю оба числа на его половинках.

В берет камень 2 — 5. А: Умножь первое число на 5, добавь 3, удвой сумму, добавь второе число.

В получил 31. А отнимает 6 и, получив 25, видит, что первым числом было 2, а вторым — 5.

Объяснение. Если первое число p, а второе q, то образуется число $(5p+3)\cdot 2+q=10p+q+6$. Итак, если отнять 6, то десятки дадут p, а единицы q. Поскольку имеем дело с домино, числа p и q меньше десяти.

3. В бросает три кости, на костях выпадают 2, 5, 3. А хочет отгадать выпавшие числа и предлагает число очков на первой кости помножить на 2, затем добавить 5, сумму умножить на 5, добавить число очков на второй кости и 10, затем умножить на 10 и прибавить третье число очков. В получает окончательно 603. А вычитает отсюда 350 и по разности 253 находит, что выпали 2, 5, 3.

Объяснение. Если обозначим числа очков через p, q, r, то В получает число

$$[(2p+5)\,5+q+10]\cdot 10+r=100p+10q+r+350.$$

4. Среди нескольких людей — их было меньше десяти — есть одно лицо с кольцом на пальце. Чтобы отгадать лицо, палец и сустав с кольцом, надо сначала установить определенную последовательность среди присутствующих, а также для пальцев — скажем, начиная с большого пальца левой руки — и, наконец, для пальцевых суставов, например, считая первым ближайший к ногтю. Теперь номер того лица, что носит кольцо, требуется удвоить, затем прибавить 5, сумму помножить на 5 и прибавить номер пальца, на котором кольцо. То, что получилось, множат на 10, добавляют число, соответствующее суставу, и, наконец, отнимают 350. В итоге получается трехзначное число, первая цифра которого определяет лицо, вторая — палец, третья — сустав с кольцом.

Объяснение. Все обстоит так же, как и в предыдущем случае.

Замечание. Мы находим этот прием уже у Леонардо Пизанского (1202 г.).

5. Определим твой день рождения. Умножь число дней в дате рождения на 20, добавь 3, сумму умножь на 5 и добавь номер месяца, затем умножай на 20 и добавь 3, умножай на 5 и добавь число, образованное двумя последними цифрами года рождения.

В, если он родился 7 августа 1924 г., считает так: 7; 140; 143; 715; 723; 14 460; 14 463; 72 315; 72 339. А вычитает 1515 и получает 7 08 24, то есть 7.VIII. 1924.

Объяснение. Если проделать вычисление в общем виде, получится выражение $10\,000p + 100q + r + 1515$, где p — число дней, q — номер месяца, а r определяет, как указано, год.

6. А хочет определить возраст В и номер дома, в котором тот живет. А: Удвой номер дома, прибавь 5, то, что получилось, умножь на 50, прибавь число твоих лет и 365, вычти 615. В, 28 лет и жилец дома № 18, считает: $(2\cdot18 + 5)\cdot50 + 28 + 365 - 615 = 41\cdot50 + 28 - 250 = 2050 - 250 + 28 = 18\,28$.

Объяснение. Пусть p — номер дома, q — число лет. В получил $(2p + 5)50 + q - 250 = 100\,p + q$.

Однако присутствовавший при этом старик заявил: «Мне 102 года и я живу в доме № 3. Итак, я считаю: $(2\cdot3 + 5)\cdot50 + 102 + 365 - 615 = 11\cdot50 + 102 - 250 = 550 - 250 + 102 = 300 + 102 = 402$. Но мне не 2 года и я не живу в четвертом номере!» Итак, требуется осторожность... Легко усмотреть, в чем причина ошибки.

15. ОТГАДЫВАНИЕ ЧИСЛА ОЧКОВ НА КОСТЯХ

Известен следующий греческий гексаметр — его перевод сперва вызывал некоторые затруднения:

ἕξ, ἕν, πέντε, δύο, τρία, τέσσαρα
κῦβος ἐλαύνει.

Конечно, мы не ошибемся, предположив что в данном случае κῦβος [1]) означает игральную кость, и тогда перевод гласит: «На кости [игральной] имеем 6 и 1, 5 и 2, 3 и 4». Действительно, числа на костях расположены так, что сумма очков на противоположных гранях составляет 7. Теперь положим перед собою кость так, чтобы 6 было сверху, 1 — снизу. Если тогда спереди имеем 5, стало быть, сзади — 2, то 3 может быть или справа, или слева. Итак, можно разместить очки двумя различными способами. Проверьте на нескольких костях, действительно ли встречаются оба размещения.

[1]) Куб.

В дальнейшем используется то обстоятельство, что сумма очков на противоположных гранях равна семи. Само собою понятно, что для отгадывания числа очков можно применить методы предыдущего раздела, как это уже один раз было сделано (см. там задачу *3*).

1. Три кости кладут одну на другую. Всего закрыто 5 граней. Если на верхней грани имеем n очков, можно сразу указать сумму очков на закрытых гранях: $3 \cdot 7 - n = 21 - n$.

2. В отсутствие А бросают две кости. Затем переворачивают одну из них и называют А полученную сумму. Снова переворачивают кость (вторую!) и называют новую сумму. А «отгадывает», что выпало вначале.

Пример. Выброшены 2,5. Первая кость перевернута, получится $5 + 5 = 10$; переворачивают вторую кость, что даст сумму $5 + 2 = 7$. Числа 10 и 7 сообщают А. А складывает их (17), отнимает сумму от 21 (4) и находит половину разности (2), что дает число очков на первой кости. Очки на второй он находит, взяв дополнение до 7 к 2 (5) и вычтя его из первой сообщенной ему суммы: $10 - 5 = 5$.

Объяснение. Если результат бросания a, b, то сначала находят $7 - a + b$, а после переворачивания второй кости получают $7 - a + 7 - b$. Сумма обоих чисел даст $21 - 2a$. Итак, надо вычесть это число из 21 и взять половину разности, чтобы получить a. Тогда число b определяем из $7 - a + b$.

3. В отсутствие А бросают три кости. Сумма выпавших очков подсчитывается, потом две кости с меньшим числом очков переворачивают и добавляют два новых числа. Затем опять бросают две перевернутые кости, добавляют выпавшие очки и приглашают А. Взглянув на лежащие кости, он скажет, какова полученная вами окончательная сумма.

Пример. Сначала у вас выпали 5, 4, 2. Сумма равна 11. Перевернув кости с 2 и 4, вы получаете 5 и 3, и прибавление этих чисел дает 19. Теперь пусть бросание перевернутых костей дало 6 и 2. Эти очки тоже надо приплюсовать, и окончательно получается 27. А застает на костях 5, 6, 2 и, прибавив 14, находит вашу сумму.

Объяснение. Пусть a — наибольшее число очков при первом бросании, b и c — остальные очки. Тогда при сложении постепенно строится число $a + b + c +$

$+ (7 - b) + (7 - c) + x + y$, где x и y обозначают очки, выпавшие при втором бросании. Получается $14 + a + x + y$. Поэтому А остается только добавить к сумме очков $a + x + y$, которые он видит, 14, числа же b и c выпали из итога.

4. Чтобы отгадать результат бросания трех костей, предлагают взять другие три кости с такими же очками и, перевернув их, приставить к первым трем так, что образуется шестизначное число. Это число надо разделить на 3, затем на 37. Такое деление проходит без остатка. Частное сообщается отгадчику. Он вычитает из него 7 и делит разность на 9. Это дает трехзначное число, цифры которого определяют выброшенные вначале очки.

Пример. Выпали 3, 1, 5. При переворачивании получаются соответственно 4, 6, 2. Итак, имеем дело с числом 315 462. Деление на 3, потом на 37, т. е. на 111, дает 2842. Если вычтем 7, получим 2835, а $2835 : 9 = 315$.

Объяснение. Указанным образом получаем число $1000a + (777 - a)$ или $999a + 777$. Это число делится на 111 нацело и дает в частном $9a + 7$, откуда получается все остальное.

16. ОБЛАЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для поставленной здесь цели математическая суть задач имеет меньшее значение, чем их облачение — фабула. Уже в первой части шла речь о различных поэтических оформлениях задач. Здесь мы нанизываем ряд шуточных задач. Последовательность, в которой они появляются, не имеет значения.

1. Бутылка с пробкой стоит 11 коп.; бутылка стоит на 10 коп. дороже пробки. Сколько стоит пробка и сколько бутылка? Кто выслушал условие этой задачи, склонен сразу ответить: бутылка — 10 коп., пробка — 1 коп. Но это не верно, ибо бутылка оказывается дороже пробки не на 10 коп.!

2. В клетке заперты кролики и куры. Голов в клетке 35, ног 94. Сколько кроликов в клетке и сколько кур?

Для неискушенного по части «облаченных уравнений» в этой старой, кажется, китайской задаче, удивительным кажется то, что можно найти число животных обеих пород без дополнительных данных. Но число голов дает общее количество животных, и указание числа ног достаточно для полного ответа. В следующих пяти задачах речь идет о разбиении на части. Все они одного типа.

3. Крестьянка принесла в город яйца. Первому покупателю она продала половину всех яиц и еще одно яйцо. Второй купил у нее половину остатка и еще яйцо. Третий тоже взял половину остатка и еще яйцо. Тогда осталось у нее 10 штук. Сколько крестьянка принесла яиц?

4. Согласно преданию, чешская королева Любуша поставила трем притязавшим на ее руку условие разгадать такую загадку. Сколько слив в корзине, из которой она может дать одному претенденту половину и еще одну сливу, второму — половину остатка и еще сливу, третьему — половину нового остатка и еще три сливы, и тогда корзина будет пуста?

5. Есть анекдот о почтмейстере, которого кто-то спросил, сколько лошадей заказал «старый Фриц» [1]) на почтовой станции для замены. Почтмейстер ответил: «Король поедет на половине заказанных лошадей да еще на пол-лошади. На половине остатка и на пол-лошади поедет министр, на половине того, что останется, и на пол-лошади поедет слуга. Еще останется одна лошадь для форейтора».

6. Трое заказали в трактире картофельные клецки, но не сошлись за столом одновременно. Сначала пришел один, съел свою треть и удалился. Затем пришел второй, а так как он не знал, что кто-то его опередил, он съел треть того, что было перед ним, и ушел. Тогда явился третий. Он тоже съел только треть. Все трое встретились на улице и, вернувшись вместе, нашли в миске еще 8 клецок. Сколько съел каждый?

7. Среди группы детей раздают, скажем, яблоки или сливы, следуя такому правилу: первый получает одно яблоко и 1/10 остатка, второй получает два яблока и 1/10 остатка, третий — три яблока и 1/10 остатка и т. д. При этом оказалось, что все дети получили поровну.

8. Уже у Алкуина, жившего во времена Карла Великого, встречается задача, примыкающая, возможно, к известной истории об Ахиллесе и черепахе — парадоксу Зенона. Собака гонится за зайцем. Заяц впереди в 150 пядях. Заяц делает прыжки на 7 пядей, собака на 9. За сколь-

---

[1]) Прозвище прусского короля Фридриха II.

ко прыжков собака догонит зайца? Конечно, подразумевается, что собаке требуется на прыжок столько же времени, сколько зайцу.

9. Мы познакомились выше, среди греческих эпиграмм, с так называемой задачей на бассейны (или на трубы). Такие задачи встречаются у Герона и Диофанта, позже у Алкуина и у индусов [1]). Один из вариантов — впервые он встречается, по-видимому, у Иоганна Видмана в 1489 г.— таков: лев, пес и волк вместе пожирают овцу. Один лев справился бы с овцой за час, волк — за четыре часа, пес — за шесть. Когда закончится их пиршество, если они трудятся совместно?

10. Хлеб весит столько, сколько килограмм и полхлеба. Сколько весит хлеб?

11. Крестьянин шел полем и увидел большую стаю голубей. Он поздоровался с ними: «Добрый день, сотня». Один из голубей ответил: «Нас еще не сотня. Было бы нас еще столько, да полстолька, да четверть столька, да еще тебя, мужик, в придачу, то нас было бы сто!» Сколько голубей было на поле?[2]).

12. Многодетная семья.— У супругов Мюллер 15 детей, каждый ребенок на полтора года старше (моложе) ближайшего по возрасту. Старший отпрыск семейства в восемь раз старше младшего. Каков возраст детей?

13. Мария теперь вдвое старше Анны, четыре года назад она была старше Анны в шесть раз. Сколько лет каждой?

14. Следующая задача попала в Европу из Америки, в 1923—1924 гг. она прошла по Соединенным Штатам с быстротой молнии: Марии 24 года. Она вдвое старше, чем была Анна, когда Марии было столько лет, сколько Анне теперь. Сколько лет Анне?

15. Павел вдвое старше Петра. Когда Анне было столько лет, сколько теперь Петру, Павлу было столько, сколько Анне и Петру было вместе. Теперь же Павлу на 10 лет меньше, чем этим двум вместе. Когда Павел был в 8 раз

---

[1]) Об истории этих и других задач см. D. E. Smith, On the Origin of Certain Typical Problems, Amer. Math. Monthly 24 (1917), 64.

[2]) Эта задача, взятая из «Оснабрюкской книги загадок» Брунка (Brunk, Osnabrücker Rätselbuch), встречается в самых различных видах, в том числе и весьма древних, в которых речь идет о числе учеников, скажем, Пифагора.

старше Петра, Анна была втрое старше Петра. Сколько лет всем троим теперь? Все ли данные нужны? Какое из них, быть может, лишнее?

16. Какое число при делении на свою пятую часть дает ровно 5?

17. Математик де Морган в ответ на вопрос, сколько ему лет, сказал: «Мне было x лет в году x^2». Достаточно ли указать дополнительно, что де Морган жил в XIX столетии? О жившем в XVIII столетии пфальцском курфюрсте Карле Теодоре тоже рассказывают, что ему было x лет в году x^2. Начиная с какого столетия подобная задача не будет допускать подходящего решения?

18. При какой температуре термометры со шкалами Фаренгейта и Цельсия показывают одинаковое количество градусов?

19. Две свечи C_1 и C_2 зажжены одновременно. C_1 вдвое длиннее C_2. C_1 сгорает за 2 часа. C_2 толще и сгорает за 5 часов. Когда их длины станут равны?

Ответы.— *1.* Бутылка стоит 10,5 коп., пробка — 0,5 коп.— *2.* 12 кроликов и 23 курицы.— *3.* 94 яйца.— *4.* 30 слив.— *5.* 15 лошадей. — *6.* Из 27 поданых клецок первый съел 9, второй —6, третий — 4. — *7.* Детей — 9, яблок — 9^2; первый получает $1+\frac{80}{10}=9$, второй получает $2+\frac{70}{10}=9$ и т. д. Обобщение на случай n лиц, n^2 яблок, тогда первый получает $1+\frac{1}{n+1}$ целого и т. д.— *8.* 75.— *9.* За $\frac{12}{17}$ часа.— *10.* 2 *кг*.— *11.* 36.— *12.* Младшему ребенку 3, старшему из детей 24.— *13.* Марии 10, Анне 5 лет.— *14.* 18 лет — *15.* Павлу 70, Петру 35, Анне 45 лет. — *16.* Любое число! (Нуль исключается — на нуль делить нельзя!) — *17.* Де Морган родился в 1806 г. $1806+43=43^2$ и $1722+42=42^2$. — *18.* — 40. — *19.* Через 1,25 часа.

17. ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Где бы ни преподавалась арифметика, значение десятичной системы счисления для записи и упорядочения чисел, для выполнения арифметических действий, да и для разъяснения различных примечательных соотношений в мире чисел выявляется в той или иной мере. Для освоения сущности системы счисления целесообразно поближе познакомиться с какой-нибудь системой, отличной от десятичной. Подходящими для такой цели являются системы, имевшие историческое значение, как, скажем, шестидесятичная, но пригодна для этого и двоичная система, в которой многое получается особенно просто.

Эта двоичная система не лишена известного исторического значения. В одном весьма древнем китайском сочинении (относительно датировки, как почти всегда, мнения расходятся; само сочинение приписывается первому законодателю Китая, жившему якобы за 3000 лет до н. э.,

Рис. 35.

но действительный автор написал его много позже) содержится последовательность из 64 знаков. Каждый из них — это шесть горизонтальных линий, из которых некоторые разделены маленьким пробелом посередине на две части, тогда как остальные линии сплошные. На рис. 35 первый знак выбран произвольно, знаки от второго по шестой представляют первые пять, а на седьмом месте воспроизведен последний. Лейбниц истолковал эти знаки как числа от 0 до 63, выраженные в двоичной системе. Любое число, например 21, можно представить в виде суммы степеней двойки. Так

$$21 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0.$$

Если считать прерывные линии на рис. 35 нулями, а сплошные — единицами, и если нижняя черта представляет нулевую, вторая снизу — первую, третья снизу — вторую степень двойки и т. д., то первый символ изображает число 21. Второй символ представляет знак для нуля, следующий — для единицы и т. д. Впрочем, надо указать на то, что этим китайским знакам были даны и совсем иные толкования.

Так или иначе, любое число можно изобразить в двоичной системе с помощью только двух знаков — в рассмотренном только что случае это были сплошные и разрывные линии; один из этих знаков — нуль, другой — единица двоичной системы. Если + будет цифрой единиц, а — цифрой нуль, то, например, число 111 запишется так (мы начинаем с высшей степени 2):

$$111 = + + - + + + +.$$

Первый знак + обозначает 64, второй 32 и т. д. С таким же успехом можно использовать для записи чисел любые другие два знака, хотя бы лицевую и тыльную сторону монеты или лезвие и черенок ножа. Если хотят сообщить какое-нибудь число, его переводят в двоичную систему и передают соответствующим образом тому, кто должен отгадывать, либо раскладывая монеты на столе в ряд, одни лицевой стороной, другие — тыльной, так чтобы получилось в двоичной системе нужное число, либо загадочно постукивают по столу ножом — то режущей частью, то черенком — и так сообщают число. Нужно только заранее договориться, что обозначает единицу и что обозначает нуль. Можно, например, опускать руку то в правый, то в левый карман, и передать число таким образом.

Добавим к сказанному широко распространенный способ отгадывания чисел с помощью двоичной системы. Имеем 6 табличек с такими числами:

I				II				III			
1	17	33	49	2	18	34	50	4	20	36	52
3	19	35	51	3	19	35	51	5	21	37	53
5	21	37	53	6	22	38	54	6	22	38	54
7	23	39	55	7	23	39	55	7	23	39	55
9	25	41	57	10	26	42	58	12	28	44	60
11	27	43	59	11	27	43	59	13	29	45	61
13	29	45	61	14	30	46	62	14	30	46	62
15	31	47	63	15	31	47	63	15	31	47	63

IV				V				VI			
8	24	40	56	16	24	48	56	32	40	48	56
9	25	41	57	17	25	49	57	33	41	49	57
10	26	42	58	18	26	50	58	34	42	50	58
11	27	43	59	19	27	51	59	35	43	51	59
12	28	44	60	20	28	52	60	36	44	52	60
13	29	45	61	21	29	53	61	37	45	53	61
14	30	46	62	22	30	54	62	38	46	54	62
15	31	47	63	23	31	55	63	39	47	55	63

Теперь мы просим указать, в каких табличках находится задуманное число — при указанном их объеме оно должно быть меньше 64 — и в каких оно отсутствует. Так, число 21 имеется в первой, третьей и пятой табличках. «Кудесник» складывает числа, находящиеся в верхнем левом углу этих табличек, т. е. подсчитывает $1 + 4 + 16$, и получает задуманное число. Здесь использовано представление чисел в двоичной системе. Табличка 1 содержит все числа от 1 до 63, которые в двоичной системе имеют в разряде единиц единицу. Третья табличка содержит те из указанных чисел, у которых в двоичной системе имеется единица в разряде 2^2, а в пятой табличке — все такие числа, у которых единица в разряде 2^4. Если число не входит в табличку II, то у него в двоичной системе в разряде 2^1 стоит нуль, а отсутствие числа в табличках III, IV и VI означает, что у него нули в разрядах 2^3 и 2^5. Следовательно, число 21 действительно однозначно определяется теми табличками, в которых оно находится.

С помощью 7 таблиц, в которых надлежало бы разместить числа от 1 до 127 включительно, можно охватить все эти числа и т. д.

* * *

Не раз предлагалось следующее напрашивающееся применение двоичной системы. Поставим перед собою задачу получить все целочисленные веса от 1 *г* до, скажем, 63 *г* при возможно меньшем числе гирек. Получается, что достаточно иметь по одной гире в 1 *г*, 2 *г*, 4 *г*, 8 *г*, 16 *г*, 32 *г*. Если добавить к этому набору одну гирю в 64 *г*, то можно получить все веса, кончая 127 *г*, а если взять еще гирю в 128 *г*, то получатся все веса до 255 *г* включительно, и т. д. Естественно, аналогично обстоит дело с денежными единицами. И здесь все опять-таки основано на том обстоятельстве, что каждое целое число однозначно представимо в двоичной системе, причем мы имеем дело только с альтернативой: налицо ли та или иная степень двойки, или она отсутствует. Нет нужды распространяться о том, что такое преобразование нашей системы весов и денег не очень-то согласуется с нашей десятичной системой счисления. При этом нам следовало бы заодно менять и последнюю. Правда, такая замена имела бы то преимущество, что нашим освоителям азбуки довелось бы заучить в письме и речи только две цифры; зато числа, в противоположность наборам разновесок и монет, значительно усложнились бы в записи. Нам пришлось бы расходовать значительно больше бумаги и чернил. Кто этому не поверил, пусть запишет 999 в двоичной системе.

Впрочем, и столь полезное требование — обойтись возможно меньшим числом разновесок — не выполняется в двоичной системе. Если допустить, что гири можно класть и на ту чашку весов, на которую кладут товар, то можно обойтись меньшим набором, чем указано выше. Мы покажем, что при таких условиях достаточно иметь 1 *г*, 3 *г*, 9 *г*, 27 *г* и т. д. Пусть 0 обозначает, что такая-то гиря не используется, + обозначает, что гиря кладется на свою чашку, а — значит, что гирю кладут на чашку с товаром. Тогда я могу первые целые числа изобразить следующим образом: 1 = +; 2 = + — (это значит, что 3 *г* положены на свою чашку, 1 *г* — на противоположную); 3 = +0; 4 = ++; 5 = + — — (9 гр. на своей чашке, 3 *г* и 1 *г* на противоположной); 6 = + —0; 7 = + — +; 8 = + — 0; 9 = + 0 0, и т. д. Очевидно, что счет идет здесь с помощью отрицательных чисел. Впрочем, это можно нередко применять с успехом и при десятичной системе. Искусные вычислители пользуются этим приемом, применявшимся, между прочим, математиком Коши.

* * *

И все же двоичная система счисления приобрела немалое практическое значение за последние два десятилетия вследствие появления современных быстродействующих вычислительных машин. Огромная скорость счета достигается в этих устройствах благодаря применению не механических, а очень быстро срабатывающих электронных элементов — электронных ламп и полупроводниковых кристаллов. Для надежности результатов такие элементы применяют только в режиме работы «да — нет», то есть различают только два их состояния: когда они проводят и не проводят ток, и т. п. Одно из двух возможных состояний будем считать знаком для единицы, второе — знаком для нуля. Тем самым такой элемент может служить для представления одного разряда в числах, записанных в двоичной системе, и именно в такой системе. Поэтому оказалось целесообразным, даже ценой усложнений вычислительных устройств, преобразовывать для них числа из десятичной системы в двоичную, а потом, получив результат в двоичной системе, снова преобразовать его «для потребителя» в десятичную. Здесь не место входить в подробности, но уже сказанного достаточно для вывода, что и конструкторам электронных вычислительных машин, и тем, кто вообще имеет с ними дело, приходится применять двоичную систему счисления (а также некоторые комбинации ее с десятичной).

* * *

Впрочем, двоичная система и раньше имела, по-видимому, известное практическое значение у ряда народов. Еще в начале этого столетия в некоторых местностях России был в ходу способ умножения, имеющий связь с двоичной системой. Этот способ известен и в Германии, во Франции, Англии иной раз под именем русского. По сути он совпадает с тем, как выполняли умножение древние египтяне еще за две тысячи лет до н. э.— с помощью так называемого удвоения. Мы покажем этот способ сначала на примере. Пусть надо перемножить 37 и 42. Под числом 37 пишем его половину, четверть, восьмую и т. д., причем при этих делениях на 2 учитываем только целую часть частного. Под числом 42 с другой стороны пишем, удваивая, его двукратное, четырехкратное, восьмикратное и т. д. Затем из этого второго столбца чисел выбирают те, против которых в первом столбце стоят нечетные числа, и складывают их. Так получается произведение. Стало быть,

37	42...	42
18	84	
9	168...	168
4	336	
2	672	
1	1344...	1344
		1554

Вот еще один пример:

47	23...	23
23	46...	46
11	92...	92
5	184...	184
2	368	
1	736...	736
		1081

Если поближе присмотреться к этому способу, то видно, что перед нами двоичная система. Число, стоящее слева, разлагается по двоичной системе. Нечетное число 37 прежде всего указывает на то, что при его представлении в двоичной системе в конце получим $+$, если пользоваться, как выше, знаками $+$ и $-$ в качестве двоичных цифр. Теперь делим 37 на 2. Если в частном получилось четное число, то это значит, что на предпоследнем месте в записи числа 37 по двоичной системе стоит $-$, иначе говоря, множитель при 2^1 в этой записи есть 0. Так как деление на 4 дает нечетное число 9, то на третьем месте справа имеем $+$, т. е. степень 2^2 входит с множителем 1. Так получается, заменой в столбце слева нечетных чисел на $+$, четных на $-$, запись в двоичной системе

$$37 = + - - + - +,$$

а во втором примере тоже получаем сразу

$$47 = + - + + + +.$$

А вместо того чтобы множить на

$$37 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0,$$

нужно только, образуя справа для 42 двукратное, четырехкратное, восьмикратное и т. д., сложить однократное, четырехкратное, тридцатидвукратное; точно так же во втором примере, поскольку $47 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + = 1 \cdot 2^0$, надо сложить однократное, двукратное, четырехкратное, восьмикратное и тридцатидвукратное числа 23.

* * *

Познакомимся теперь с игрой, которая тесно связана с двоичной системой. Она придумана, по-видимому, Люка, придавшим ей несколько таинственный вид под названием «Ханойская башня». Здесь мы приведем эту игру в совсем простом оформлении.

Четыре монеты — в 5, 3, 2 и 1 копейку — положены одна на другую так, что наибольшая лежит внизу, а остальные над ней в порядке их величины. Требуется снести эту монетную башенку с места I и снова построить ее на месте II в том же порядке. При этом накладываются три условия:

1. В один прием с одного места на другое перекладывается только одна монета, притом верхняя.

2. При перемещении монет можно использовать только одно место III.

3. В каждом месте монеты должны лежать одна на другой в порядке их величины, причем наибольшая должна быть внизу.

Такая задача для четырех монет решена, если мы решили ее для трех монет и достигли того, что в I находится монета в 5 коп., а в III — башня из остальных трех. А именно, мне нужно тогда переместить 5 коп. в II и по способу, который предполагается известным, передвинуть башню из трех монет в II из III. Итак, если требуется S_3 перемещений, чтобы переставить трехмонетную башню из одного положения в другое, то для числа S_4 перемещений четырех монет имеем, поскольку нужно переместить трехмонетную башню из I в III, а потом из III в II,

$$S_4 = S_3 + 1 + S_3 = 2S_3 + 1.$$

Точно так же

$$S_3 = 2S_2 + 1$$

и

$$S_2 = 2S_1 + 1,$$

а так как $S_1 = 1$, то получаем, что

$$S_4 = 2(2S_2 + 1) + 1 = 2\,(2(2S_1 + 1) + 1) + 1 = 2(2(2\cdot 1 + 1) + 1) + 1 = 15.$$

Проведем тот же подсчет в обратном порядке, чтобы общий закон был лучше виден:

$$S_1 = 1 = 2^1 - 1 = 1,$$
$$S_2 = 2\cdot 1 + 1 = 2^2 - 1 = 3,$$
$$S_3 = (2^2 - 1)\cdot 2 + 1 = 2^3 - 2 + 1 = 2^3 - 1 = 7,$$
$$S_4 = (2^3 - 1)\cdot 2 + 1 = 2^4 - 2 + 1 = 2^4 - 1 = 15.$$

Предоставляем читателю взять добавочно монеты в 10,15 и 20 коп. и подсчитать число перемещений для семимонетной башни. Очевидной является формула для n монет

$$S_n = 2^n - 1,$$

которую пусть докажет математик.

Боюсь, что читатель скажет: «К чему мне все эти подсчеты? Я-то ведь хочу знать, как на деле выполнить эти перемещения». Скорее всего, если читатель не найдет решения сразу, он будет продвигаться шаг за шагом. Переместить одну монету из I в II совсем не хитро. Если нужно переместить две монеты (сверху A, снизу B) из I в II, то он положит A в III, потом B в II и вслед за этим A в II — действительно, потребовалось три перекладывания. Если теперь требуется переместить из I в II три монеты, то сначала две верхние монеты A и B перемещаем из I в III, используя II, для чего нужно три перемещения. Теперь монету C помещаем в II — это четвертое перемещение — и перестраиваем A и B из III в II, используя I, для чего опять потребуется три перемещения. Всего их семь.

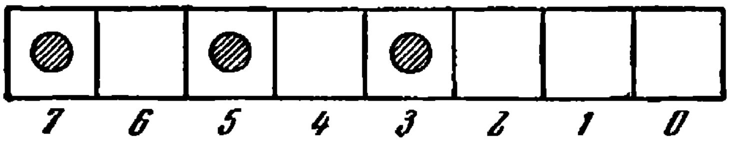


Рис. 36.

Относительно перемещений монет при этой игре можно высказать еще ряд утверждений, определяя, сколько странствий проделывает определенная монета и т. п. (ср. А р е н с I, 52 и след).

В заключение этого раздела обратимся еще к одной игре, связь которой с двоичной системой, впрочем, далеко не бросается в глаза. Начертим ряд из восьми следующих одно за другим, пусть квадратных, полей и обозначим их слева направо цифрами 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Кроме того, нам нужны три игральные кости. Эти кости мы любым образом размещаем на полях — на рис. 36 они находятся в 7, 5, 3. Играют двое. Игроки делают ходы по очереди, и каждый может и должен передвинуть одну кость в направлении к полю 0. При этом он может занимать поле, уже занятое другими костями, так что на одном поле могут оказаться две или все три кости, но можно и перепрыгивать через другие кости. Победит тот, кто первым достигнет положения, в котором все три кости находятся на поле 0.

Будем различать благоприятные и неблагоприятные положения, считая всякий раз, что очередь хода за противником. Положение будем называть неблагоприятным прежде всего тогда, когда противник может достичь победы следующим ходом. Ясно, например, что все положения

$00a$, где a обозначает любую из цифр от 1 до 7, неблагоприятны (три цифры здесь и дальше обозначают положение костей). Противник может во всех таких случаях выиграть следующим ходом; впрочем, противник может попасть из $00a$ в другое неблагоприятное положение $00b$, где $b<a$ и $a>1$ по допущению. Но это был бы уж очень нелепый ход.

Рассмотрим теперь I группу положений

(I) 011, 022, 033, 044, 055, 066, 077

и покажем, что они могут быть по праву названы благоприятными. Прежде всего, сразу видно, что противник не может добиться выигрыша одним ходом, то есть достичь положения 000, если я перед его ходом занял одно из положений (I). Он может либо занять положение $00a$, что для него неблагоприятно, как мы уже видели, либо избрать положение $0ab$, где a отлично от b. Но тогда я могу следующим ходом опять получить одно из положений (I). Это будет, если предположить, что b меньше a, положение $0bb$. Итак, если у меня одно из этих благоприятных положений, то противник может делать только такие ходы, после которых я могу либо достичь положения 000, либо получить другое благоприятное положение. Поэтому мы назовем положения вида $0ab$, где a отлично от b, неблагоприятными для противника. Кроме этого, отсюда следует, что если я занимал сначала положение $0aa$, то через ход я займу положение $0bb$, где b меньше, чем a, то есть приближусь к положению 000. В конце концов я приду к 011, тогда противник должен будет перейти в 001 и расчистить мне путь к 000.

Рассмотрим теперь II группу положений

(II) 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356.

Эти положения назовем благоприятными, равно как и все те, относительно которых заранее не установлено, что они неблагоприятны. Однако нам надо еще оправдать такое название. Для начала мы допустим, что наше исходное положение 357 неблагоприятно. Теперь докажем теорему:

1. *Из неблагоприятного положения всегда можно одним ходом перейти в благоприятное.*

Для того частного случая, когда одна из костей в положении 0, эта теорема уже доказана выше. Возьмем, скажем, наше исходное положение 357. Мы видим, что благоприятные положения составлены так, что среди них есть только одно с сочетанием полей 3 и 5, а именно 356; только одно с полями 3 и 7, а именно 347; только одно с полями 5 и 7, а именно 257. Итак, можно трояким образом достичь нашей цели — перейти от неблагоприятного положения в благоприятное: перемещая кость с 3 (из 357 в 257), либо перемещая кость с 7 (из 357 в 356).

Обратимся теперь к общему случаю. Сначала разберем тот вариант, когда все три кости или две из них находятся на одном поле. Тогда в один ход достигается положение $0aa$, которое уже отнесено к благоприятным. Поэтому в положении abc можно считать все три поля различными.

Но благоприятные положения построены так, что любому сочетанию ab, где a и b различны и пробегают числа от 1 до 7, соответствует только одно такое положение. Действительно 12 входит только в 123. 13 — только в 123, 14 — только в 145 и т. д., 67 — только в 167. Итак, если зафиксируем a и b, то я найду вполне определенное соответствующее благоприятное положение abc_1. При фиксированных a и c найдется определенное благоприятное положение ab_1c, а при фиксированных b и c — благоприятное положение a_1bc, и только одно такое. Следовательно, имеются, самое большее, три возможности прийти к благоприятному положению, и в нашем примере мы действительно указали такие три возможности. Однако этим не сказано, что все три пути на деле доступны. Последнее имеем лишь тогда, когда a_1 меньше a, b_1 меньше b, c_1 меньше c. Поэтому нам следовало бы еще доказать, что по крайней мере одно из этих трех неравенств всегда удовлетворяется. Но здесь мы не будем останавливаться на доказательстве этого положения: читатель сможет найти многочисленные примеры в его подтверждение, если будет упражняться в этой игре [1]). Хотелось бы здесь добавить только одно замечание, относящееся ко всем случаям. А именно из сказанного непосредственно следует, что из неблагоприятного положения можно перейти к другому неблагоприятному положению многими способами; тот,

---

[1]) Математическая теория этой игры и, в частности, полное доказательство этой теоремы, имеется у А р е н с а 3; там, правда, рассмотрена в первую очередь игра Ним, но она по сути тождественна с рассмотренной здесь игрой.

кто не сведущ в игре, как раз будет, вообще говоря, так поступать, делая свои случайные ходы.

Нашей первой теореме соответствует следующая теорема.

2. *Из благоприятного положения можно перейти только в неблагоприятное.*

Для первой группы благоприятных положений это уже было показано. Легко это усмотреть и для второй группы. Пусть abc — благоприятное положение, причем a, b и c все различны. Тогда нельзя достичь нового благоприятного положения, оставляя b и c на месте и продвигая a, ибо среди благоприятных положений находится только одно такое, что содержит числа b и c, и это как раз положение abc. Такие же соображения относятся и к попытке достичь нового благоприятного положения перемещением костей с b и c. После такой подготовки легко доказать теорему.

3. *Кто занимает вначале благоприятное положение, всегда может добиться победы.*

В самом деле, он вынуждает противника занять положение неблагоприятное (теорема 2), всегда может из такого положения перейти в благоприятное (теорема 1), тем самым снова вынуждая противника занять неблагоприятное положение, и т. д. Итак, он всегда в благоприятном, а противник — в неблагоприятном положении, так что игра должна закончиться его победой. Если исходное положение выбирается случайным образом, то начинающий выигрывает, когда оно благоприятно, и проигрывает в противном случае,— все это, конечно, при условии, что оба игрока знают теорию игры.

Сказанным интерес игроков к теории этой игры может удовлетвориться. Не так обстоит дело с математиком: тот поставит вопрос, как же были найдены благоприятные положения. Вот об этом мы скажем несколько слов, так как тем самым вернемся к исходному пункту, к двоичной системе счисления. Впрочем, мы ограничимся указанием результата, а за подробностями отсылаем к указанной в последней сноске книге. Представим встречающиеся у нас числа (до семи включительно) в двоичной системе. Тогда мы получаем такие представления для благоприятных положений:

1) $1=1$,	2) $1=1$,	3) $1=1$,	4) $2=2$,
$2=2$,	$4=4$,	$6=2+4$,	$4=4$,
$3=1+2$;	$5=1+4$;	$7=1+2+4$;	$6=2+4$;

$$\begin{array}{lll}
5)\ 2= \quad 2, & 6)\ 3=1+2, & 7)\ 3=1+2, \\
\ \ \ 5=1 \quad +4, & \ \ \ 4= \quad\quad 4, & \ \ \ 5=1 \quad +4, \\
\ \ \ 7=1+2+4; & \ \ \ 7=1+2+4; & \ \ \ 6= \quad 2+4.
\end{array}$$

Если присмотреться, мы обнаружим, что в представлении каждой из этих троек чисел единицы, двойки и четверки встречаются по два раза или же вовсе отсутствуют, и нигде они не встречаются по одному разу или трижды. Но если взять неблагоприятное положение, например

$$\begin{array}{lcl}
3 = 1 + 2, & \quad\text{или}\quad & 1 = 1, \\
5 = 1 \quad\quad + 4, & & 2 = \ 2, \\
7 = 1 + 2 + 4, & & 4 = \quad 4,
\end{array}$$

то тут наши основные числа 1, 2, 4 встречаются и нечетное число раз; так, в первом примере 1 встречается трижды, а во втором и 1, и 2, и 4 встречаются по разу. Если перебрать все возможные сочетания, то можно будет убедиться в том, что все благоприятные случаи, и только они, характеризуются наличием в их двоичном представлении степеней двойки — чисел 1, 2, 4 — четное число раз. Что это верно для указанных вначале благоприятных положений типа $0aa$, не нуждается в обосновании.

Мы уже познакомились раньше с игрой, в которой целью было достичь первым числа 100. Правда, мы при этом не пользовались костями, а просто считали. Но мы видим, что эти игры родственны, хотя первая и много проще. И тогда существенно было различать благоприятные и неблагоприятные положения, и представление чисел в некоторой системе счисления тоже имело значение. Предоставим читателю разобраться в подробностях. Последнюю игру можно еще обобщить. Вместо числа 7 можно взять какое-нибудь бóльшее число. Только придется самому определить благоприятные положения, обращая при этом внимание на соображения, связанные с применением двоичной системы. Кроме того, можно играть не с тремя костями, а с бóльшим их числом.

Вместо того чтобы передвигать по одному и тому же полю три кости, можно играть в ту же игру иначе: берут три кучки костей, спичек или других предметов и удаляют из каждой кучки предметы так, как это соответствует правилам нашей игры. В таком оформлении игру называют «Ним».

18. АНАГРАММЫ, ТАЙНОПИСЬ И Т. П.

Псевдонимы писателей весьма часто образованы путем составления из букв настоящей фамилии. Эрнст Краузе (Ernst Krause) звучит банально, Карус Штерне (Carus Sterne) кажется более привлекательным. Быть может, самый известный псевдоним, который большинство таковым не считает, это Вольтер (Voltaire) перестановка букв в Arouet, l. j.) (Аруэ́ младший); настоящее и полное имя Вольтера — François Marie Arouet le jeune.

Это — примеры перестановок ряда букв. Иной раз по этому способу переиначивали целые предложения. Гейс (Heis) приводит в своем сборнике задач некоторые из таких анаграмм, составленных после французской революции. Из букв слов Révolution Française (французская революция) была составлена фраза Un corse la finira (Корсиканец ее закончит). После падения Наполеона составили другую: La France veut son roi (Франция хочет своего короля). Другой автор приводит латинский стих

Tot tibi sunt dotes, quot sidera caelo

(Дева, имеешь ты столько талантов, сколько на небе есть звезд), в котором, по его словам, можно сделать 1022 перестановки так, что снова получится гексаметр, притом имеющий смысл.

Скажем вдобавок хотя бы несколько слов о примечательных сочетаниях слов. Вспомним сначала о полиндромах — словах или предложениях, которые читаются от начала к концу и от конца к началу одинаково.

«Знаешь ли ты это, Анна, знаешь ли ты уже это?

Можно читать тебя и с конца, и ты, самая чудесная.

Из всех, ты и с конца, как и с начала: А н — н а» —писал К. Швиттер (K. Schwitter) в своеобразной поэме «К Анне Блюме!». Ну, теперь-то Анна и Отто будут уже знать, что они «полиндромы». А вот латинский полиндром неизвестного автора:

In gyrum imus nocte et consumimur igni

(«ночью ведем хороводы, и нас пожирает огонь»); здесь допущена поэтическая вольность: приравнены *y* и *i*, слова эти произносятся мухами. Настоящей кухонной латынью является

Otto tenet mappam, madidam mappam tenet Otto.

(Отто держит салфетку, мокрую салфетку держит Отто). Передают, что на одной из купелей в Константинополе было написано:

νιψον ἀνομηματα μη μοναν ὀψιν

(смой свои грехи, не только обмой себя). Известные нам немецкие полиндромы не отличаются остроумием, а некоторые из них получены ценою грамматических ошибок:

Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie

(негр с газелью и в дождь не унывает);

Nie diese grose (!) Sorge sei dein

(«пусть никогда у тебя не будет этой большой заботы»; grose вместо правильного große).

Полиндромы использованы и в русской загадке, где речь идет о старом огороднике, которого спрашивают, кем он приходится работающей с ним девушке, как звать его и девушку, и что они садят. Отвечает же старик, что он девушке приходится тем, а зовут его и девушку так, и садят они то, что читается одинаково от начала к концу и от конца к началу (дед, Тит, Анна, боб). Замысловатой игре слов нередко придавалось большое значение в различных суевериях, и находилось немало охотников толковать подобные словесные загадки. Приведенное же рядом магическое слово послужило даже однажды «сюжетом»... балета на льду.

A b r a c a d a b r a
A b r a c a d a b r
A b r a c a d a b
A b r a c a d a
A b r a c a d
A b r a c a
A b r a c
A b r a
A b r
A b
A

При сочетаниях, подобных упомянутым выше, можно поставить вопрос, сколько есть способов правильно их прочесть. Приведем еще один пример. Это — четвертая часть надписи на надгробной плите князя Сило, находившейся в построенной Сило церкви Сан-Сальвадор в Овидео (в испанской провинции Астурия). Эта надпись показывает,

S i l o p r i n c e
i l o p r i n c e p
l o p r i n c e p s
o p r i n c e p s f
p r i n c e p s f e
r i n c e p s f e c
i n c e p s f e c i
n c e p s f e c i t

как надо писать слово и целое предложение, чтобы его можно было прочесть многими способами. Мы имеем здесь фразу Silo princeps fecit, то есть «Ее построил князь Сило». Читая ее так, что начинаем в левом верхнем и кончаем в нижнем правом углу, но идем при этом то направо, то вниз, получим множество различных способов чтения. Полная надпись была в четыре раза больше. Надо представить себе наш квадрат из букв, зеркально отображенных относительно первой горизонтали и первой вертикали, чтобы получить всю надпись.

Дети обычно живо интересуются тайнописью. Каждый из нас может припомнить некоторые засекреченные способы речи у детей. При случае в ходе преподавания с этим можно кое-что удачно связать. Если же школьник к тому же узнает, что зашифровка и расшифровка имеют исключительное значение для дипломатов и военных, что тут перед нами искусство, уходящее своими корнями в древнейшие времена, которому отдано много сил и изобретательности, то у него появится желание познакомиться хотя бы с некоторыми приемами.

Сначала несколько простых способов, применяемых иной раз и школьниками: слова или предложения, или целые сообщения записываются буквами в обратном порядке. Либо каждая буква заменяется непосредственно ей предшествующей или непосредственно за ней следующей, или же буквой, которая стоит за ней на 5-м, на 8-м, вообще на некотором условленном месте (при этом, конечно, буквы алфавита располагаются циклически, то есть за последней буквой снова идет первая). Можно упомянуть здесь и запись в азбуке Морзе, причем точка и тире могут быть заменены с тем же успехом любыми другими знаками, а также слуховыми или зрительными сигналами, как-то: звуки зуммера, взмахи флажка, миганье небольшого прожектора и т. п.

Такие средства маскировки, как разбивка предложения на части каким-нибудь отличным от обычного способом и вставка посторонних букв и слов, как, например, в секретной речи детей «у-бу-бу ко-ко-го э-то-то» (у кого это...), используются главным образом в качестве дополнительных. Но поступают и следующим образом. К какому-нибудь печатному произведению, находящемуся в распоряжении как отправителя, так и получателя, прикладывается шаблон, имеющийся у обоих. Этот шаблон оставляет открытыми те места, из которых составлен нужный текст. С этим сходен другой прием, когда определенным образом складывают бумагу, на которой пишут, или скатывают ее с помощью стержня и т. п. Получателю надлежит проделать такое же складывание или же раскатать полученное письмо с помощью стержня точно такой же толщины, прежде чем приступить к расшифровке. Наконец, можно расположить буквы текста в каком-либо необычном порядке, скажем, снизу вверх или справа налево, или по спирали, или

l	*h*	*i*	*f*	*d*
a	*c*	*s*	*f*	*e*
g	*s*	*t*	*i*	*r*
e	*e*	*a*	*r*	*a*
n	*g*	*b*	*g*	*n*

каким-то другим условленным образом. Так, например, помещенный здесь текст надо читать, начиная с последней колонки, сверху вниз, потом снизу вверх (в следующей колонке) и т. д. Получается немецкая фраза: Der Angriff ist abgeschlagen (атака отбита).

До сих пор мы ничего не сказали о том, как составляется текст, который затем должен быть подвергнут описанным выше перестановкам и т. п. Только в редких случаях такой текст берется в своем первоначальном виде. Обычно его переписывают, пользуясь каким-либо иностранным алфавитом или, в соответствии с заранее принятым соглашением, заменяют одни буквы другими буквами, числами и т. д. У коммерсантов в ходу замена цифр буквами, например, по такому ключу:

г	р	а	д	б	е	р	л	и	н
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0,

чтобы записывать продажную, иной раз покупную цену товаров непонятным для непосвященных образом.

Существует еще немало других способов зашифровки текста, к тому же более трудных. Но достаточно и наших примеров. А как же можно разгадать столь запутанные данные, как можно расшифровывать тексты без ключа к ним? Для этого, разумеется, нужны незаурядные комбинационные способности. Однако всегда есть некоторые намеки, указания, и тут мы опять возвращаемся к математике. Статистические исследования дают сведения о том, как часто в среднем встречаются те или иные буквы в немецком, французском, русском текстах. Например, известно, что *e* наиболее частая буква в немецком. Если зашифрованный текст достаточно велик, то можно на основании закона больших чисел предположительно указать, какая буква заменяет букву *e* и т. д. Конечно, можно опять-таки затруднить при зашифровке использование этой возможности, применяя для *e* разные знаки. Это заставит использовать другие приемы расшифровки, и так постоянно идет борьба между искусством шифровать и искусством расшифровывать. В последние десятилетия, благодаря изобретению и применению специальных шифровальных машин, она вступила в новый этап.

Криптограммы

Криптограмма — значит «тайная запись», но для нас это слово будет обозначать задачу, в условии которой вместо цифр проставлены буквы (одинаковые цифры обозначены, конечно, одинаковыми буквами, разные цифры — разными буквами). Такую задачу надо превратить в исходную задачу, записанную цифрами, и надо указать ее решение, соответствующее записи в буквах. Значительно более трудным вопросом является исследование, имеет ли такая задача одно или несколько решений.

Сначала приведем несколько легко решающихся задач:

1. $\begin{array}{r} \underline{abb\cdot ac} \\ cee \\ \underline{abb} \\ apce \end{array}$ 2. $\begin{array}{r} \underline{ipa\cdot pa} \\ epa \\ \underline{pas} \\ oipa \end{array}$ 3. $\begin{array}{l} bepa : pa = epa \\ \underline{pa} \\ tp \\ \underline{as} \\ cpa \\ \underline{epa} \end{array}$ 4. $(ab)^3 = cceb$.

Затем приведем ряд задач, в которых имеем по 3×3 числа, расположенных в виде квадрата. Знаки действий превращают каждую из трех строк и трех колонок в задачу.

$$5.\quad \begin{array}{ccccc} e & \cdot & k & = & be \\ + & & \cdot & & : \\ b & : & n & = & n \\ = & & = & & = \\ dn & + & dn & = & nb. \end{array} \qquad 6.\quad \begin{array}{ccccc} ab & \cdot & c & = & cd \\ - & & + & & : \\ e & : & b & = & f \\ = & & = & & = \\ f & + & g & = & h. \end{array} \qquad 7.\quad \begin{array}{ccccc} ab & \cdot & c & = & deb \\ + & & + & & - \\ ac & \cdot & b & = & fbb \\ = & & = & & = \\ ge & - & fe & = & ce. \end{array}$$

$$8.\quad \begin{array}{ccccc} ab & \cdot & b & = & cdd \\ : & & \cdot & & : \\ cb & : & b & = & e \\ = & & = & & = \\ e & \cdot & d & = & bd. \end{array} \qquad 9.\quad \begin{array}{ccccc} ab & \cdot & c & = & de \\ \cdot & & + & & - \\ f & \cdot & f & = & ac \\ = & & = & & = \\ gh & + & ai & = & ch. \end{array} \qquad 10.\quad \begin{array}{ccccc} abb & : & c & = & db \\ : & & \cdot & & : \\ e & \cdot & a & = & c \\ = & & = & & = \\ fc & : & ga & = & b. \end{array}$$

Ответы. — *1.* $144 \cdot 12 = 1728$. — *2.* $125 \cdot 25 = 3125$. — *3.* $3125 : 25 = 125$. — *4.* $15^3 = 3375$. —*5.* $b = 4$, $d = 1$, $e = 8$, $n = 2$, $k = 6$. — *6.* $a = 1$, $b = 2$, $b = 3$, $d = 6$, $e = 8$, $f = 4$, $g = 5$, $h = 9$. — *7.* $a = 3$, $c = 4$, $c = 6$, $d = 2$, $e = 0$, $f = 1$, $g = 7$. — *8.* $a = 7$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 4$, $e = 6$. — *9.* $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$, $b = 7$, $e = 8$, $f = 4$, $g = 5$, $h = 2$, $i = 0$. — *10.* $a = 2$, $d = 8$, $c = 6$, $d = 4$, $e = 3$, $f = 9$, $g = 1$.

19. ВЕЧНЫЙ КАЛЕНДАРЬ

«Каждый мыслящий человек, заглядывая в календарь и глядя на часы, вспомнит о том, кому он обязан этими благами»,— сказал Гёте. Так ли это? Верно ли это для большинства «мыслящих» людей нашего времени?

В прежние времена, когда каждое произведение печатного станка еще стоило дорого, в какой-нибудь маленькой мастерской, на стене или на дверях, выписывали мелом календарь на неделю или на месяц; да и Робинзон вел счет времени таким образом. Но этот простой способ не дает некоторых сведений, например, о днях, на которые приходятся церковные праздники, и он применим лишь для короткого отрезка времени. Напротив, вечный календарь позволяет заглянуть и в прошедшее, и в будущее. А кто хочет составить такой календарь, должен, естественно, познакомиться с календарем вообще, а вернее — с различными видами календаря. Но это дело не простое. Вот почему многие математики, чтобы помочь тем, кого интересует только практика, а не теория, составляли, применяя остроумные конструкции, удобные для пользования календари, таблицы полнолуний, пасхалии и т. п.

Мы позволим себе рассмотреть здесь только одну задачу (на основе общепринятого теперь Грегорианского календаря), впрочем, задачу, которую довольно часто ставят так: определить по заданной дате день недели, ей соответствующий. Мы приведем такое правило, при котором можно обойтись немногими вычислениями в уме.

При хронологических вычислениях рекомендуется пользоваться числовым рядом, начинающимся с нуля, а не с единицы. Нуль же января равен 31 декабря предыдущего года, а так как мы введем числовое обозначение дней недели и воскресенье запишем как 1, то предыдущий день, субботу, надо обозначить через 0. Итак, числовой ряд для дней недели таков:

Суббота — 0, воскресенье — 1, понедельник — 2, вторник — 3, среда — 4, четверг — 5, пятница — 6.

День недели j при Юлианском календаре («старый стиль») и день недели g при Грегорианском календаре («новый стиль») для 0 января года J получаем следующим образом:

$J:100=H$, остаток R,
$H:4$, остаток h,
$R:4$, остаток r (ниже см. исключение);
$(1000\,(H+2)+10(R-r)+r):7$, остаток j;
$(1000\cdot 2h+10\,(R-r)+r):7$, остаток g.

Исключение. Если $r=0$, то для дат от 1 марта до 31 декабря мы пользуемся $r=0$, но для дат от 0 января до последнего числа февраля берем $r=4$, а не $r=0$. Если же и $R=0$, то $h\neq 0$ и в правиле для нахождения g множитель $2h$ надо заменить на $2h-1$; но множитель $2h$ не изменяем (то есть оставляем равным нулю), если $h=0$.

Получающееся в этом случае отрицательное число делим на 7, как обычно, и если получается отрицательный остаток, то добавлением числа 7 превращаем его в положительное число — искомое g.

Если нам задано число T в M-м месяце, то соответствующий день недели w при Юлианском и Грегорианском календарях находим по формуле $(j+1000M+100k+T):7$, остаток w, причем поправка k для четных M равна

5, для нечетных до августа равна 3, то есть 5 — 2, а для нечетных месяцев после августа она равна 7, то есть 5+2. Но для дат, приходящихся на январь и февраль, и здесь надо сделать исключение, а именно для января и февраля $M = 0$, а для января имеем также $k = 0$.

Если мы хотим избавиться от исключений как для 0 января, так и при задании даты в месяце M, то надо рассматривать январь и февраль совместно как 13-й месяц предыдущего года и, например, превратить дату 20.2. 1923 в 51. 13. 1922.

Приведем один пример для Юлианского календаря. Кровавая резня, известная под названием Сицилийской вечерни, произошла 30-го марта 1282 года в пасхальный понедельник. И действительно, произведя подсчеты, получим

$$\begin{array}{r} 14\,802 \\ +\ \ 3\,330 \\ \hline 18\,132:7 \end{array}$$

остаток 2,
понедельник.

Для Грегорианского календаря приведем следующие три примера:

7.8. 1880; 20.2. 1923; 17.1. 1900.

Для этих дат получаем [1])

4 800	6 203	4 964		4 963
8 507	520	17	или	13 717
13 307:7	6723:7	4981:7		18 680:7
остаток 0, суббота.	остаток 3, вторник.	остаток 4, среда.		остаток 4, среда.

Когда Вы родились? Можно ошарашить человека, сказав ему сразу, после того как он сообщил дату дня своего рождения, в какой день недели он родился. При овладении этим искусством мы ограничимся сначала датами от 1 марта 1900 г. до 31 декабря 1999 г. Проще всего получается нужный результат, если для каждого месяца за-

[1]) Так как здесь нас не интересует, какой день недели был 31 декабря, а добавка кратного 7 не влияет на выводы, то мы не вычисляем здесь отдельно g, а число, дающее это g в остатке при делении на 7, сразу складываем с поправкой $1000\,M + 100\,k + T$. (*Ред.*)

метить себе число m, а именно: 0 для апреля и июля, 1 для января и октября, 2 для мая, 3 для августа, 4 для февраля, марта и ноября, 5 для июня, 6 для сентября и декабря. Кроме того, надо в уме подсчитать, согласно указанному выше $(10(R-r)+r):7$, остаток a, тогда искомый день недели w получается так:

$$(T+m+a):7, \text{ остаток } w.$$

Определяя a, надо иметь в виду, что для январских и февральских дат вместо остатка 0 берется остаток 4. Как можно быстро подсчитать a в уме, покажет такой пример. Пусть рассматривается год 1938. Отнимаем от 38 ближайшее меньшее кратное 4-х, то есть 36, и замечаем разность 2. Тогда $10(R-r)+r=362$. Затем находим остаток при делении $36:7$, он равен 1, умножаем его на 3 и добавляем к этому произведению разность 2, что дает $a=5$.

Для дат от 1 марта 1800 г. до 31 декабря 1899 г. прибавляем 2. Для двух месяцев, от 0 января 1900 г. (т. е. 31 декабря 1899 г.), кончая 28 февраля 1900 г. (этот год не високосный!), к результату надо добавлять не 2, а 1, причем для этих дат остаток a будет числом отрицательным.

Примеры. День недели для 20 февраля 1923 г. $(20+4+0):7$, остаток 3 — вторник, 7 августа 1880 $(7+3+2+2):7$, остаток 0 — суббота.

17 января 1900 г. Так как здесь надо брать остаток $r=4$, а $R=0$, то получаем, что $10(R-r)+r=-36$, откуда $a=-1$. Итак, $(17+1-1+1):7$, остаток 4 — среда.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

Геометрия есть познание всего сущего.

Платон

1. ВВЕДЕНИЕ

Для древних математика была прежде всего геометрией. Математики древнего мира в течение средневековья, вплоть до нового времени, изображались на картинах и гравюрах с циркулем (или каким-нибудь другим математическим инструментом) в руке. И на картине Джентиле Беллини (см. табл. VIII в конце книги) вдохновенный ученый, чье имя остается нам неизвестным, держит великолепно выполненный циркуль как знак своего искусства. Даже философ Даламбер не отвергал этого вещественного указания на то, чем занята его мысль.

Что касается математиков наших дней, то у них циркуль, линейка и тому подобные предметы не в ходу, и воистину времена изменились. На первом плане теперь анализ и теория чисел, теория вероятностей и математическая логика. Математик-исследователь не сидит уже за чертежной доской, он предоставляет это делать технику, землемеру и... школьному учителю.

И все же у Плутарха мы читаем:

Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν

(Платон сказал, что бог всегда действует геометрически), против чего мы не будем возражать, если под «богом» понимать природу.

Когда говорят о геометрических формах и образах, то на ум прежде всего приходят треугольники, квадраты, всевозможные тела, короче — вполне оформленные, большей частью со всех сторон ограниченные фигуры. В противоположность этому мы будем в дальнейшем рассматривать образы весьма общего вида, причем для нас совсем не будет иметь значения какая-то определенная форма, длина, поверхность, объем и т. д.— прежде всего, нас будут интересовать соотношения связности. К тому же не может быть речи о том, чтобы строго разграничить эту часть и предыдущую. В части, посвященной числам, нередко решающую роль играло их размещение в соответствии с определенной геометрической фигурой,— напомним хотя бы о магических квадратах. Здесь же, наоборот, при рассмотрении геометрических образов весьма часто существенную, иной раз решающую роль будут играть числа.

Автору, собственно, следовало бы и здесь начать с раздела о детских играх. В нем можно было бы напомнить о ящиках Фребеля — весьма распространенной учебной игре с применением различных деревянных кубиков, затем о «строительных ящиках» с набором предметов из дерева или камня, которые знакомят с параллелепипедами, чьи высоты находятся в определенных простых отношениях, и, сверх того, с призмами, цилиндрами, пирамидами и т. п. Можно было бы поговорить о вырезывании фигур из бумаги, о простейших приемах вышивания, о различных головоломках, подводящих иной раз к теоремам, например к теореме Пифагора, о так называемых листах для моделирования с чертежами различных деталей, из которых ученик должен составить пространственную конструкцию: дом, дирижабль и т. д.

Но приходится ограничиться только напоминанием обо всем этом, потому что здесь мы не можем предоставить в распоряжение читателя все эти иглы, вырезки и шаблоны.

2. ШУТОЧНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Мы начнем с ряда шуточных вопросов — ответов по геометрии, хотя мы рискуем при этом повторить вещи общеизвестные. Однако многие задачи этой группы достаточно серьезны в своей основе, и требуется определенная способность к пространственному представлению, чтобы дать на них ответ.

1. Что такое точка? — Угол, из которого вырваны стороны.

2. Что такое прямая? — Убежавшая точка.

3. Что такое угол? — Треугольник, из которого вынули одну сторону.

4. Что такое круг? — Раздувшаяся точка.

Конечно, лучше было бы определить шар как раздувшуюся точку. Другой распространенный среди детей ответ гласит: круг (точнее окружность) — это линия, которая без конца доходит до своего второго конца.

5. Можно ли нарисовать на доске точку? — Нельзя: то, что нарисовано, представляет собою тело.

6. Можно ли начертить на доске прямую? — Нельзя: мы не можем уйти в бесконечность.

7. Что такое кривая? — Кривую имеем тогда, когда из последнего вагона поезда виден локомотив.

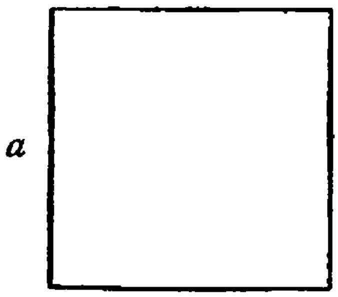


Рис. 37.

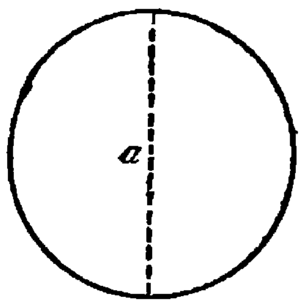


Рис. 38.

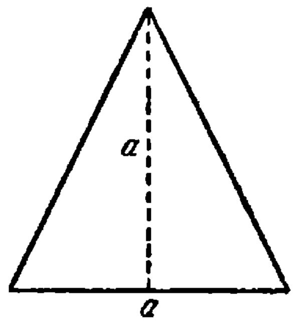


Рис. 39.

8. Надо начертить окружности различной величины, сохраняя неизменным раствор циркуля.— Мы вычерчиваем окружность сначала на плоскости, затем на шаре, затем на конусе, причем центром является вершина конуса. Можно положить на плоскость (лист бумаги) маленький брусок, затем утвердить на нем ножку циркуля и в таком положении начертить на бумаге окружность. Укажем и на то, что можно скрепить циркуль с иголкой, эту иголку загнать в крышку стола и получить таким образом еще одну, отличную от предыдущих окружность.

9. Требуется бросить пирамиду так, чтобы ее вершина оказалась внизу, а ее основание — сверху.— Для этого бросаем пирамиду в воду: предполагается, что пирамида плавает.

10. Из четырех монет надо составить крест.— Это не трудно.— А теперь требуется составить крест из трех монет.— Нужно все три монеты поставить на ребро и разместить их в виде креста.— Да, но как составить крест из двух монет? — Одну монету мы ставим на ребро, а вторую мы в таком же положении держим над первой так, что тому, кто сверху на них смотрит, оба ребра кажутся стоящими крестообразно — под прямым углом одно к другому.— Наконец, требуется сделать крест, используя только одну монету.— Берем монету и чертим ею на столе крест...

11. Нужно так поместить пять одинаковых монет, чтобы каждая монета касалась всех остальных.— Р е ш е н и е см. на рис. 42.

12. В куске картона вырезаны три отверстия: квадрат со стороною *a* (рис. 37), круг диаметра *a* (рис. 38) и равнобедренный треугольник с основанием *a* и высотой *a* (рис. 39). Надо построить такое тело, которое можно протолкнуть через эти три отверстия так, что оно при этом заполняет каждое из них целиком. — На рис. 43 такое тело показано эскизно; оно представляет собою клин, вырезанный из цилиндра с квадратным осевым сечением.

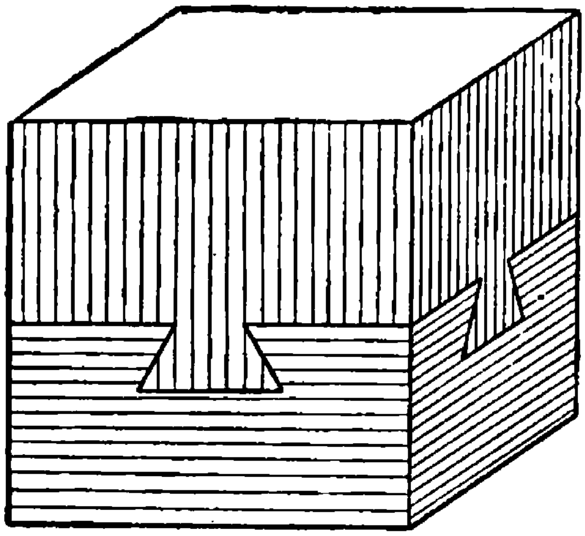


Рис. 40.

13. На рис. 40 показан куб, разрезанный на две части. На двух передних боковых гранях мы видим, как проходит по ним поверхность разреза. Такой же вид представится нам, если мы взглянем на две задние боковые грани.— Верхнюю часть куба можно отделить от нижней одним сдвигом. Как это можно сделать? — Р е ш е н и е показано на рис. 44.

14. Куб можно разрезать так, что разрез получится в виде правильного шестиугольника.— Р е ш е н и е: проследите, каково сечение, проходящее через центр куба и через середины двух соседних ребер.

15. На рис. 41 изображена часть русла Миссисипи. Как можно попасть из пункта *A* в пункт *G*, расположенный выше по реке, на гребной лодке, которая может идти лишь по течению.— Р е ш е н и е м является путь, показанный на рис. 41 пунктиром. При этом лодку нужно перенести по суше из *A* в *B*, из *C* в *D*, из *E* в *F*.

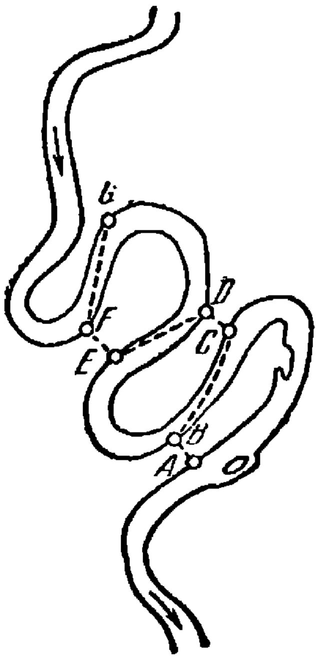


Рис. 41.

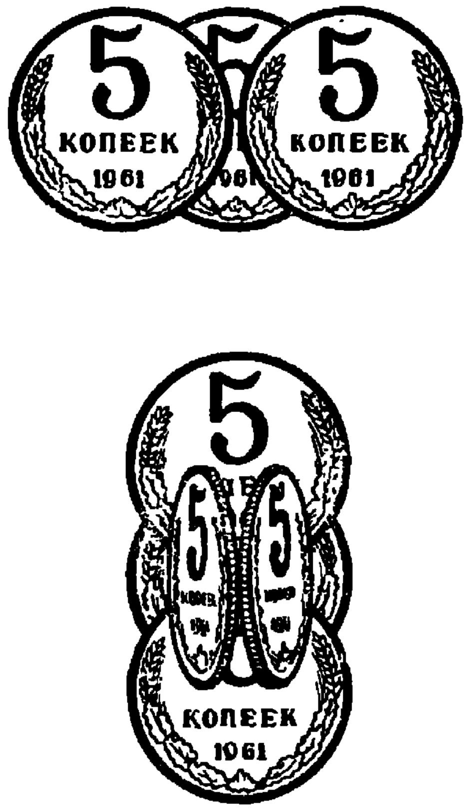


Рис. 42.

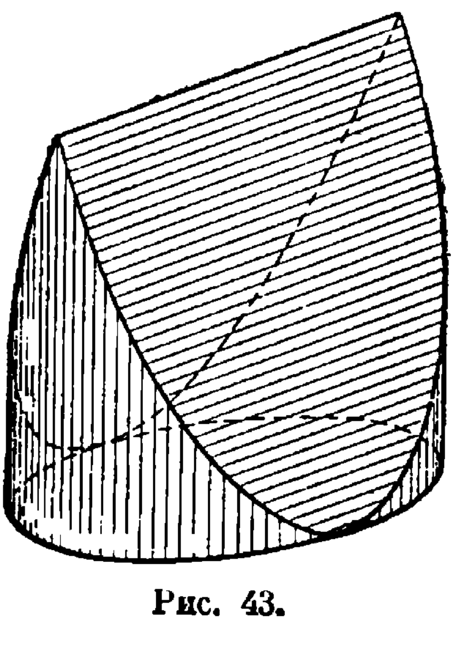


Рис. 43.

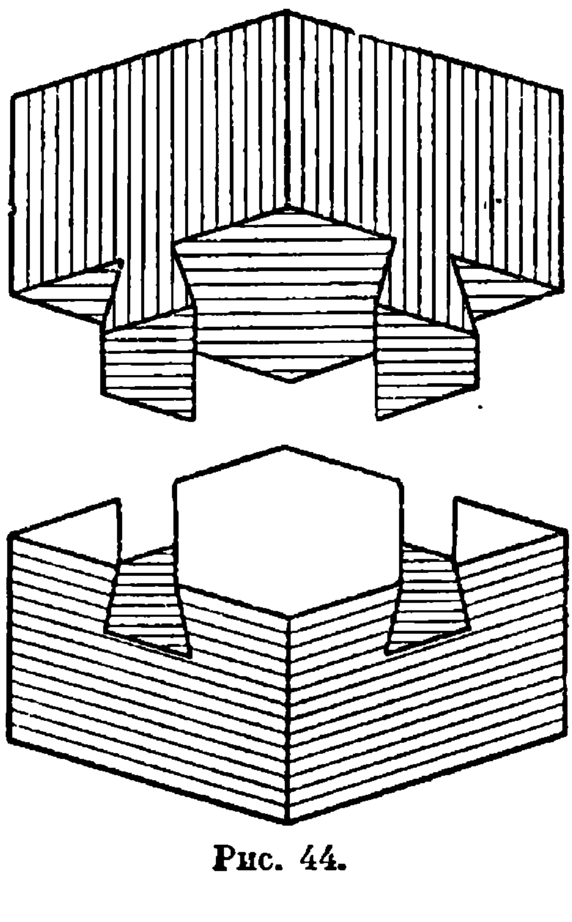


Рис. 44.

16. Два треугольника имеют 5 одинаковых элементов (сторон и углов) и все же они не конгруэнтны. Пример? — Конечно, отличаться такие два треугольника могут только сторонами. Пусть треугольник ABC имеет стороны $a = 9$, $b = 6$, $c = 4$, а треугольник $A_1B_1C_1$ пусть имеет стороны $a_1 = 9$, $b_1 = 6$, $c_1 = \frac{27}{2}$. Эти треугольники подобны, так как $c_1 : a = a_1 : b = b_1 : c = 3 : 2$, следовательно, углы у них соответственно равны. Каково общее решение?

3. РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПУТЕШЕСТВИЯ

О гусеницах, червях и прочей живности

Нижеследующие задачи читателю лучше всего решать с помощью графической схемы путешествия того или иного животного.

1. Гусеница каждый день проползает вверх 7 футов, а за ночь она сползает на четыре фута вниз. На какой день она вползет на стену высотой в 19 футов? — Опрометчивый решатель подсчитывает: ежесуточно гусеница поднимается на 3 фута. Стало быть, она взберется на стену высотой в 19 футов на седьмой день.— При этом он не учитывает, что вряд ли гусеница настолько глупа, что начнет ползти вниз, достигнув уже на пятые сутки верха стены, ибо она уже за 4 суток достигнет высоты в 12 футов, стало быть, как раз к исходу пятого дня взберется на стену.

Эти задачи с гусеницами стары. В качестве приложения приведем сначала еще два простых варианта, а затем задачу несколько посложнее — там роль гусеницы передана мышке и кошке.

2. Из «Искусства счета с цифрами и монетами» Христофа Рудольфа (Christoff R u d o l f f, Künstliche Rechnung mit der Ziffer und mit den Zahlpfennigen, Nürnberg, 1561):

Из колодца глубиною в 20 саженей выползает гусеница, каждый день взбираясь на 7 саженей, а ночью снова сползая на 2 сажени, так за сколько дней она выберется из колодца? — Получишь 3 дня $\frac{5}{7}$.

3. Из «Самоучителя счета» Иоганна Хемелинга (Joh. H e m e l i n g, Selbstlehrender Rechne-Schul, Frankfurt, 1678):

Роскошно липа расцветала.
Под ней червяк завелся малый,
Да вверх пополз во всю он мочь —
Четыре локтя делал в ночь,

Но днем сослепу полз обратно
Он на два локтя аккуратно.

Трудился наш червяк отважный,
И вот итог работы важной,
Награда девяти ночей:
Он на верхушке липы сей.

— Теперь, мой друг, поведай ты,
Какой та липа высоты.

О т в е т. 20 локтей.

4. Из Summa de Arithmetica (1494) Луки Пачуоло (Luca Paciuolo):

На верхушке дерева высотою в 60 локтей сидит мышка, а внизу на земле — кошка. Мышка каждый день сползает вниз на $\frac{1}{2}$ локтя, а ночью она поднимается на $\frac{1}{6}$ локтя. Кошка за день вползает вверх на 1 локоть, а за ночь она сползает на $\frac{1}{4}$ локтя вниз. Дерево же каждый день вырастает на $\frac{1}{4}$ локтя, а за ночь оно сокращается на $\frac{1}{8}$ локтя. Когда кошка настигнет мышку и какой высоты за это время достигнет дерево?

О т в е т. За 63 дня; дерево же будет тогда 68 локтей в высоту.

5. Мясник едет с базара домой. Всего ему надо проехать 4 *км*. В течение первой половины пути он едет в своей повозке со скоростью 200 *м* за 3 минуты, во второй половине пути он за каждые 3 минуты проезжает 300 *м*. Его пес все время убегает на 500 *м* вперед, а через 3 минуты снова возвращается к хозяину. Попадут ли хозяин и пес домой одновременно? А если нет, то на сколько минут раньше окажется дома пес?

6. Книжному червю нужны сутки, чтобы прогрызть слой бумаги толщиною в 1 *мм*. На книжной полке поставлены рядом два тома, составляющие одно произведение. Каждый том толщиною в 4 *см*, да еще надо учесть переплет, толщина каждой корки которого 2 *мм*. Сколько пройдет времени, пока книжный червь доберется от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома?

Ответ. 4 дня.

Присмотритесь как следует, каким образом ставят эти два тома на книжной полке!

О железнодорожных поездах

7. Из Берлина в Кельн в среднем каждые два часа отправляется поезд, и то же самое происходит в противоположном направлении. Допустим, что все эти поезда движутся по одной дороге. Сколько поездов встретится в течение 24 часов?

Ответ. 24.

8. В полдень из Берлина в Кельн отправляется пассажирский поезд, средняя скорость которого — 80 *км* в час; в то же самое время из Кельна в Берлин выходит товарный состав, который движется со средней скоростью 40 *км* в час. Какой из этих поездов находится дальше от Берлина в момент их встречи?

Ответ. Оба поезда, конечно, находятся от Берлина на одинаковом отдалении. Эта задача — хороший пример того, как можно, при соответствующем изложении, направить внимание слушателя заведомо ложным образом, так что он упускает из виду вполне очевидную вещь.

Паук и муха

9. Паук хочет найти кратчайший путь из точки A на одной стене комнаты в точку B соседней стены той же комнаты. Какой путь надо избрать пауку? Известно, что кратчайший путь между двумя точками — прямая линия. А чтобы найти этот кратчайший путь по двум стенам, с которых ведь сойти паук не может, представим себе, что обе эти стены развернуты в одну плоскость и что наши точки соединены прямой линией. Тем самым найден и искомый кратчайший путь, так как он остается кратчайшим и тогда, когда обе стены возвращены в первоначальное положение.

10. Паук хочет добраться кратчайшим путем из точки A на стене комнаты в точку B противоположной стены. По какому пути он должен двигаться?

Пример. Пусть комната имеет 10 *м* в длину, 4 *м* в ширину и 4 *м* в высоту. Паук сидит на одной из квадратных

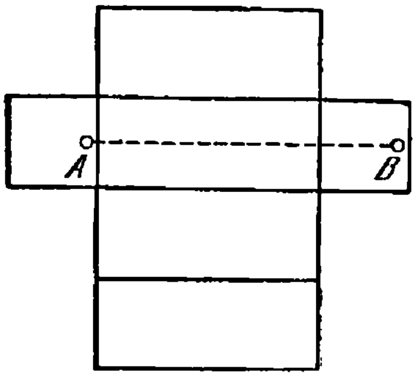


Рис. 45.

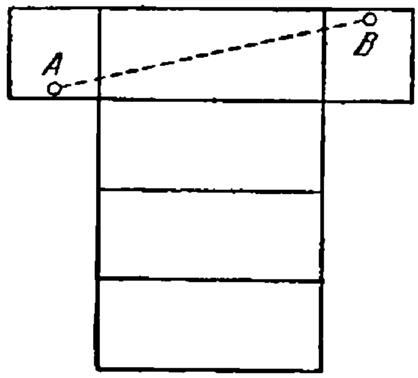


Рис. 46.

боковых стен, а именно на высоте $^1/_3$ *м* над полом на средней линии квадрата. Муха, к которой хочет подползти паук, сидит на противоположной стене, тоже на средней линии и на высоте $3^2/_3$ *м* над полом, то есть на расстоянии $^1/_3$ *м* от потолка. По какому пути должен двигаться паук и какой длины этот путь?

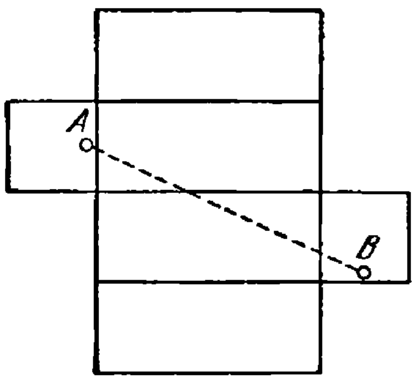


Рис. 47.

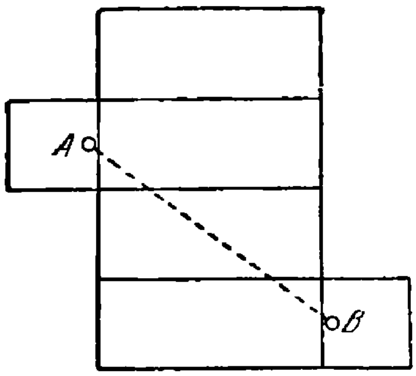


Рис. 48.

Ответ. Представим себе стену с пауком, стену с мухой и промежуточную стену, которой может быть либо пол (рис. 45), либо боковая стена (рис. 46), развернутыми на плоскость (на наших рисунках показаны в развертке и остальные стены, ограничивающие комнату). Затем мы соединяем A и B прямой линией и в любом случае получаем один из возможных путей. Но уже при беглом взгляде видно, что полученные на рис. 45 и 46 пути не одинаковой длины. Длина пути, показанного на рис. 45, равна 14 *м*, а путь на рис. 46 длиннее, так как он является гипотенузой прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 14 *м*. Если воспользоваться теоремой Пифагора, то получим длину этого пути: $\sqrt{14^2 + (3^1/_2)^2}$. Вычислить это предоставим читателю. Но имеется еще несколько возможностей провести по ограничивающим комнату плоскостям прямолинейные пути, соединяющие точки A и B. На рис. 47 и 48 показаны два примера. В случае, которому соответствует рис. 47, длина пути равна

$$\sqrt{\left(12\frac{1}{3}\right)^2 + \left(5\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{37^2 + 17^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1658}.$$

А в том случае, который представлен на рис. 48, длина пути получается равной

$$\sqrt{\left(10\frac{2}{3}\right)^2 + 8^2} = \frac{1}{3}\sqrt{32^2 + 24^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1600}.$$

Стало быть, этот последний путь короче, чем описанный выше. После извлечения корня получаем, что он равен $\frac{40}{3}$, то есть $13\frac{1}{3}$. Таким образом, и это самое замечательное, последний путь даже короче пути, представленного на рис. 45, который ведь равен 14 *м*.

Итак, после разбора всех возможных случаев мы приходим к выводу, что как раз по последнему пути должен двигаться паук из точки A, чтобы скорейшим образом добраться до точки B, хотя этот путь проходит не по одной, а по трем плоскостям (не считая исходной и конечной плоскостей).

4. ПЕРЕПРАВЫ

1. У Алкуина мы находим следующий рассказ. На берегу реки стоит человек, а с ним волк (*В*), коза (*Кз*) и кочан капусты (*К*). Человек обнаруживает маленький челнок, который не может поднять и его, и всех трех его «спутников»: кроме него, на челноке может поместиться только один из троих. Но человек не может оставить ни волка вместе с козой (волк съест козу), ни козу вместе с капустой (коза съест кочан). Отсюда следует, что при первой переправе он обязательно должен взять с собой козу, потому что волк капусте ничем не угрожает. Наш перевозчик оставляет козу на другом берегу и возвращается один. Теперь перед ним две возможности — либо взять с собою сперва волка, либо взять сперва кочан.

Проследим, что получается при первом выборе: перевозчик берет с собою волка. Тогда, при обратной поездке он не должен оставить вместе волка и козу. Не возьмет он обратно с собою волка, ибо в этом случае он вернулся бы в исходное положение. Итак, он берет с собою обратно козу. Ее он оставляет на прежнем месте, а захватывает с собою при следующей поездке кочан, который он может безопасно оставить вместе с волком, и возвращается, чтобы, наконец, прихватить козу. И только тогда все благополучно доставлено на противоположный берег.

Проследим теперь за тем, что получается при втором выборе, когда человек берет с собою при второй переправе не волка, а кочан капусты. И в этом случае он достигнет своей цели с помощью соответствующих переправ.

Нам нет необходимости входить здесь в подробности, потому что наша задача, как скажет математик, симметрична относительно волка и кочана капусты. Укажем оба решения в символической записи, понять которую можно без труда:

	1 Решение			2 Решение		
1	ВКзК			ВКзК		
2	ВК	Кз →	Кз	ВК	Кз →	Кз
3	ВК	←	Кз	ВК	←	Кз
4	К	В →	КзВ	В	К →	КзК
5	КзК	Кз ←	В	ВКз	Кз ←	К
6	Кз	К →	ВК	Кз	В →	ВК
7	Кз	←	ВК	Кз	←	ВК
8.		Кз →	ВКзК		Кз →	ВКзК

1 обозначает исходное положение, 8 обозначает конечное положение, достигнутое после семи поездок. Чтобы быть вполне точными, следовало бы каждый раз указывать на челноке в качестве пассажира и самого перевозчика.

2. В качестве второй задачи на переправу разберем тот случай, когда на одном из берегов появляется несколько толстяков + + + +, желающих попасть на другой берег. На реке они видят челнок, которым управляют двое детей оо. Челнок поднимает обоих детей, но только одного толстяка. Задача заключается в том, чтобы перевезти всех толстяков + + + + через реку. На схеме (рис. 49) ясно показано, как за четыре поездки можно переправить одного толстяка, затем с операции 5, соответствующей 1, начинается перевозка второй «туши». Всю эту процедуру надо повторить столько раз, сколько толстяков надлежит переправить.

1	++++	OO →	OO
2	++++O	O ←	O
3	+++O	+ →	+O
4	+++OO	O ←	+
5	+++	OO →	+OO

Рис. 49.

1	+++OOO		
2	+OOO	++ →	++
3	++OOO	+ ←	+
4	OOO	++ →	+++
5	+OOO	+ ←	++
6	+O	OO →	++OO
7	++OO	+O ←	+O
8	++	OO →	+OOO
9	+++	+ ←	OOO
10	+	++ →	++OOO
11	++	+ ←	+OOO
12		++ →	+++OOO

Рис. 50.

3. В третьей задаче ставится вопрос, как переправить через реку трех рабов и их трех хозяев. Лодка, которая находится в их распоряжении, поднимает только двух людей. При перевозке же необходимо проследить за тем, чтобы число рабов ни в коем случае не превышало числа находящихся с ними хозяев, иначе рабы смогут с успехом напасть на хозяев. Переправа осуществляется по приведенной здесь схеме (рис. 50); крестики на схеме обозначают рабов, кружки — хозяев [1]).

Как видите, организация переправы — дело несколько затяжное. Однако читателю не удастся найти более короткую серию переправ, чтобы решить нашу задачу. Напротив, другое более длинное решение вполне возможно.

Раньше с большой охотой занимались подобными задачами на переправу. Этот сюжет иной раз преподносился в виде рассказа о ревнивых супружеских парах, что, конечно, не является подходящим для школы. Самое задание усложняли тем, что вводили высадку на остров посреди реки и тому подобное [2]).

5. ПОЕЗДА

С задачами на переправу сходны задачи, в которых имеем дело с железнодорожными поездами, обгоняющими или встречающими друг друга, когда это происходит в трудных условиях.

1. Перед нами (рис. 51) главный путь с так называемым тупиком, то есть ответвлением от главного пути, которое заканчивается упором, не имея второго выхода на главный путь. По главному пути слева прибывают два поезда A и B, причем поезд A, пусть пассажирский, должен обогнать поезд B, скажем, товарный. Если поезд A или же поезд B настолько короток, что он может целиком поместиться на вспомогательном ответвлении, то решение такой задачи не связано с какими-либо трудностями. Но пусть оба поезда слишком велики для ответвления, и мы примем, что на последнем можно поместить 10 вагонов, тогда как в B имеем 15 вагонов. Как все-таки в таких условиях осуществить обгон? Соответствующий способ указан на прилагаемом схематическом рис. 51, содержание которого понять нетрудно. Для пояснения достаточно сказать следующее: поезд B мы делим на две части B_1 и B_2 таким образом, чтобы любая из них умещалась на ответвлении. Тогда мы можем B_1 загнать на ответвление, в то время как B_2 отъезжает далеко направо (2). Теперь A

---

1) Предполагается, что рабы не могут убежать от хозяев. (*Ред.*)
2) См. книги Аренса I и Люка I.

выезжает вперед, прицепляет к себе сзади B_1 и затем отъезжает за развилку назад настолько (3), чтобы B_2 мог выехать и поместиться на ответвлении. Теперь $B_1 + A$ проезжает вперед (4) и A может двигаться дальше направо беспрепятственно. И для поезда B тоже нет никаких трудностей: правда, локомотив сначала оказывается в середине поезда (5), но используя ответвление, мы можем без больших хлопот снова поместить его в голове состава.

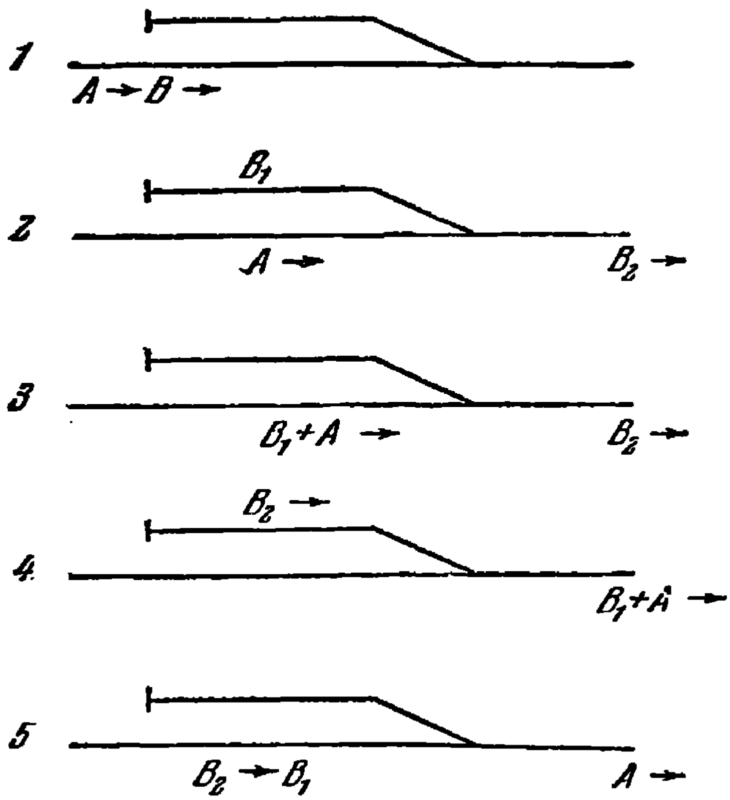


Рис. 51.

Попробуйте найти еще одно решение.

Дополнительный вопрос: *2*. Какой вид будет иметь решение, когда на две части мы делим поезд A?

3. Главный путь теперь имеет ответвление не тупиковое, а выводящее снова на главный путь. Встречаются два поезда: A, прибывающий слева, и B, прибывающий справа. Если поезд A или поезд B настолько короток, что целиком может въехать на ответвление, то пропуск этих встречных поездов не связан с какими-либо затруднениями. Поэтому мы принимаем, что ответвление слишком коротко для каждого из них. На схематическом рис. 52 показано, как в этом случае можно пропустить поезда. На этот раз поезд A разделен на две части A_1 и A_2 так, что для каждой из них ответвления достаточно. Тогда передняя часть поезда

A въезжает на ответвление, двигаясь направо (2); при этом поезд B должен находиться на достаточном удалении справа, а когда A_1 будет выезжать из ответвления, B должен быть на достаточном удалении слева. А затем таким же образом можно продвинуть через ответвление и часть поезда A_2.

4. Какой вид принимает решение, когда A прибывает справа, а B — слева?

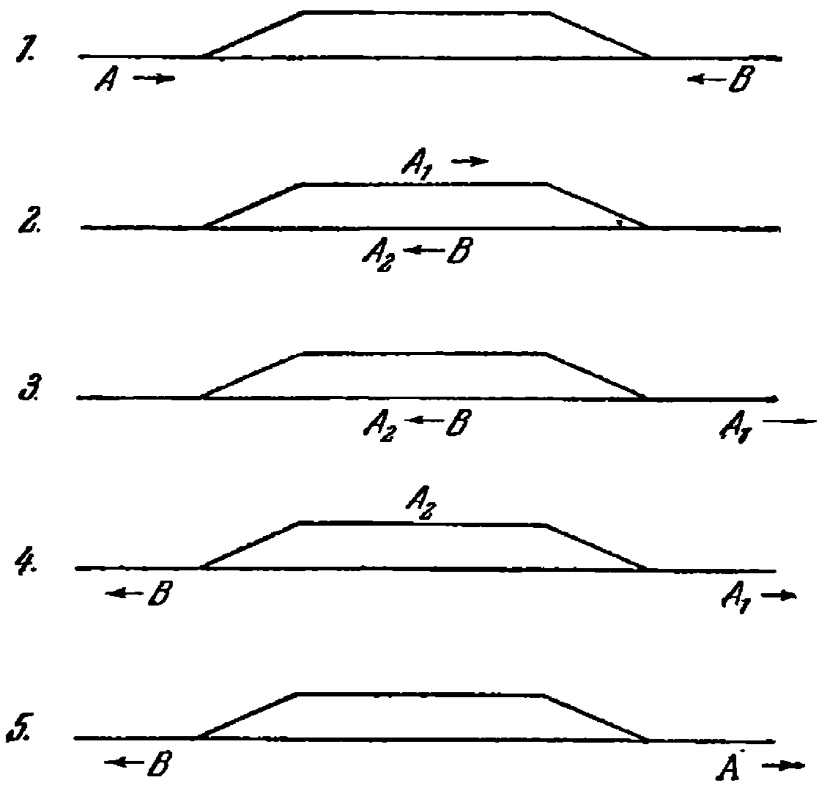


Рис. 52.

5. Какой вид принимает решение, если на части делить поезд B?

Дополнительные вопросы:

6. Еще раз проследите за пропуском встречных поездов, учитывая положение обоих локомотивов.

7. Как пропустить те же встречные поезда, если в нашем распоряжении ответвление в виде тупика, как в задаче *1*?

Эти задачи могут быть поставлены и в несколько другом оформлении — рассматривают обгон судов или пропуск встречных судов в канале, в котором они не могут разминуться, при наличии гавани или ответвлений канала; при этом речь идет о буксирах с баржами и пассажирских судах.

8. На рис. 53 показан участок железной дороги, причем в тупике A до разветвления места хватает только для одного вагона — такого, какой имеем в положении W_1 и W_2, но не для локомотива L, который несколько длиннее. Вагоны W_1 и W_2 требуется с помощью локомотива передвинуть так, чтобы они поменялись местами. Одно из решений таково: L едет влево, заталкивает W_1 в A, выезжает обратно и едет вправо, подталкивает W_2 к W_1 и

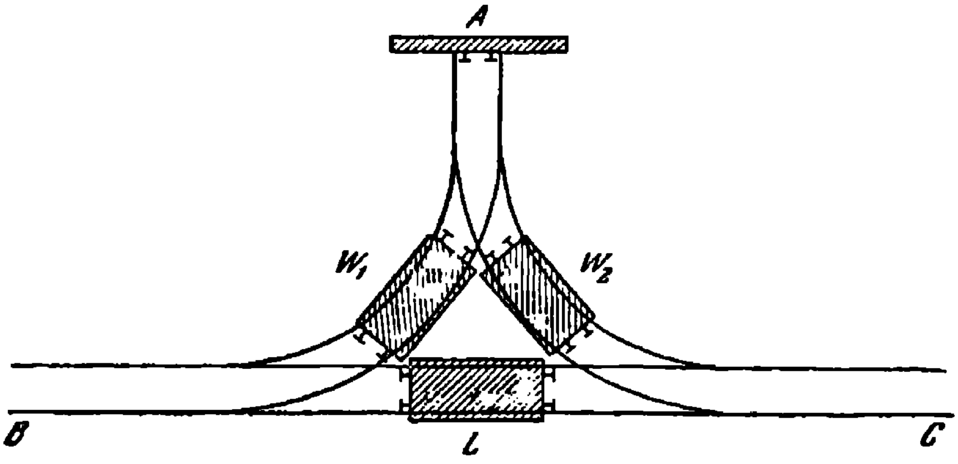


Рис. 53.

вывозит оба вагона. Размещение состава теперь LW_2W_1. Теперь локомотив отвозит W_1 влево и, оставив его там, едет вправо, чтобы затем затолкать W_2 в A. После этого L возвращается за W_1 и отвозит его на надлежащее место — где вначале стоял W_2. Остается локомотиву поехать влево и вывезти W_2 из A, чтобы поставить W_2 на то место, где вначале стоял W_1.

Дополнительный вопрос: *9*. Тупик A в последней задаче можно заменить поворотным кругом, на котором можно поместить W_1 или W_2, но не L. Еще раз продумайте с помощью схемы решение для такого случая.

6. ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЕ

1. Уже у Баше́ мы находим задачу: двое друзей должны поровну разделить 8 мер вина, но у них кроме сосуда, в котором находится вино и емкость которого в точности равна 8 мерам, есть только два других сосуда емкостью в 5 и 3 меры. Как разделить вино?

Чтобы наглядно изобразить последовательность переливаний, мы каждый раз будем указывать на первом месте содержимое сосуда в 8 мер, на втором месте — содержимое сосуда в 5 мер и, наконец, на третьем месте содержимое сосуда в 3 меры. Итак, распределение вина между тремя сосудами вначале таково:

(1) 8 0 0.

Теперь мы заполняем сосуд в 5 мер и получаем

(2) 3 5 0.

Из среднего сосуда наливаем до краев малый сосуд

(3) 3 2 3

и переливаем содержимое последнего в первый сосуд

(4) 6 2 0.

Теперь переливаем вино из среднего сосуда в малый, так что средний сосуд пуст

(5) 6 0 2.

После этого переливаем из большого сосуда вино в средний сосуд, пока он не наполнится

(6) 1 5 2,

и тогда нам нужно только отлить одну меру из среднего сосуда, чтобы наполнить сосуд в 3 меры, что дает нам

(7) 1 4 3,

и тем самым задача решена. Действительно, один из сосудов содержит нужную половину восьми мер, а второй друг может забрать вино, находящееся в двух других сосудах.

Эта задача имеет еще одно решение, которое, впрочем, не так коротко, как приведенное нами выше.

Указанное нами решение приводит к цели после семи операций, считая при этом и исходное положение, а при втором решении потребуется на одну операцию больше, Мы приводим это решение в схематической записи, чего вполне достаточно:

(1)	8	0	0
(2)	5	0	3
(3)	5	3	0
(4)	2	3	3
(5)	2	5	1
(6)	7	0	1
(7)	7	1	0
(8)	4	1	3

То решение, которое мы привели первым, является наиболее коротким среди всех возможных решений. Более длинные решения, чем оба указанные нами, можно, разумеется, придумать в неограниченном количестве.

2. Эту первую задачу на переливание можно видоизменять и усложнять различными способами. В качестве окончательного результата можно потребовать получения не 4-х мер, а (последовательно) 1, 2, 4, 6, 7 мер. Можно предположить, что три сосуда имеют емкости, отличные от указанных выше. Затем можно увеличить число сосудов, оставляя в силе указанные обобщения и вводя кроме них новые.

Мы ограничимся тем, что приведем только один пример такого рода и его решение, позаимствовав это у Р. Болла. Здесь приходится иметь дело с четырьмя сосудами.

Первый сосуд емкостью в 24 меры и только он вначале содержит жидкость и притом целиком заполнен. Три пустых сосуда (2-й, 3-й и 4-й) емкостью в 13, 11 и 5 мер соответственно. Требуется разделить содержимое первого сосуда на три равные части, так что в первых трех сосудах — четвертый тут, естественно, отпадает — должно находиться по восемь мер. Приведенная ниже схема делает вполне ясным ход переливаний:

(1)	24	0	0	0
(2)	13	0	11	0
(3)	8	0	11	5
(4)	0	8	11	5
(5)	11	8	0	5
(6)	16	8	0	0
(7)	16	0	8	0
(8)	3	13	8	0
(9)	3	8	8	5
(10)	8	8	8	0

7. ЗАДАЧИ НА СГИБАНИЕ

Задачи на сгибание листа бумаги являются одной из любимых развлекательных игр детей. Очень многие из числа тех, кто только начинает учиться грамоте, уже весьма ловко умеют сделать «птичку». Что это не так просто, обнаруживается, когда мы пытаемся точно описать все необходимые сгибы. Но и ребенок, конечно, был бы в немалом затруднении, если бы от него потребовали описать все отдельные этапы его действий полностью, то есть так, чтобы это описание однозначно определяло выполнение. Ребенок видит все эти действия в выполнении его товарища по игре и запоминает их благодаря наблюдению и немедленному подражанию. Здесь мы намереваемся по крайней мере вкратце описать один из способов, чтобы получить столь любимую упомянутую выше «птичку». Заранее стоит обратить внимание читателя на то, со сколькими простыми геометрическими образами знакомится при этом ребенок.

1. Исходной формой является вырезанный из бумаги к в а д р а т.

2. К н и г а. — Квадрат сгибается так, чтобы две противоположные стороны квадрата легли друг на друга. Мы получаем сгиб по средней линии. Эта конструкция из двух листков в воображении ребенка — книга.

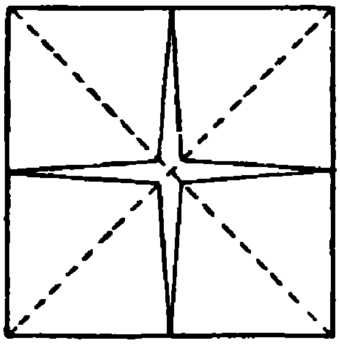
3. Н о с о в о й п л а т о к. — Прямоугольник, полученный в *2*, сгибается так, что совмещаются две короткие стороны. Тем самым мы получаем еще один сгиб по средней линии. Квадрат теперь разделен на четыре маленьких квадрата. Название носовой платок происходит от того, что мама обычно так складывает маленькие носовые платки, помещая их в бельевой шкаф.

4. К о с ы н к а.— Мы разворачиваем носовой платок и сгибаем его по диагонали большого квадрата. В итоге получается прямоугольный равнобедренный треугольник.

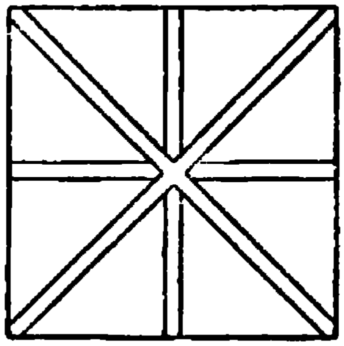
5. Ш л е м.— Мы делим равнобедренный треугольник, начиная от вершины, по его оси симметрии и снова получаем прямоугольный равнобедренный треугольник. Тем самым в первоначальном квадрате мы получаем теперь вторую диагональ.

6. К о н в е р т.— Квадратный лист раскрывается, после чего каждый из четырех уголков последовательно загибается так, чтобы вершина попала в центр квадрата. Таким образом, внутри исходного квадрата сложен новый квадрат, площадь которого составляет половину площади исходного квадрата, а его вершины находятся в серединах сторон первого квадрата. Если загнуты три уголка, то имеем открытый, а когда загнуты четыре уголка,— закрытый конверт.

7. П и с ь м е ц о.— Процедура, описанная в *6*, повторяется применительно к закрытому конверту: уголки маленького квадрата загибаются к его центру и «заглаживаются», так что его вершины соединены в центре. Передняя и задняя стороны имеют примерно такой вид, как это показано на рис. 54,*а*, *б*.



а)



б)

Рис. 54.

8. С т о л.— Сложенный лист бумаги берут в правую руку так, чтобы четыре квадрата (обозначенные на рис. 54 как передняя сторона) были обращены к вам. Левой рукой вы берете один из свободных маленьких квадратов за вершину, как бы расслабляете находящиеся на задней стороне треугольники и все в целом перевертываете вниз. Показанная пунктиром на рис. 54,*а* диагональ малого квадрата должна быть туго натянута.

То же самое надо проделать с остальными квадратами, и тогда получится стол о четырех ножках.

9. В е т р я н а я   м е л ь н и ц а.— Полученный стол мы кладем на его крышку и прижимаем треугольные ножки стола к этой крышке, соблюдая одно и то же направление обхода, тогда получаем ветряную мельницу (рис. 55).

10. П т и ч к а.— Из ветряной мельницы можно сложить птичку, выворачивая одно из крыльев мельницы (или же столовую ножку в *8*) наружу и заглаживая его должным образом (рис. 56).

7**

Построения со сгибанием бумажного листа стали вводить и в школьное преподавание. Путеводной книгой в этой области явилась книга Т. Сундара Роу (T. Sundara Row) «Геометрические упражнения с куском бумаги» [1]). Кое-что оттуда вошло в книгу А р е н с II. В этой геометрии сгибания квадрат играет в основном такую же роль, как и в первых операциях той детской забавы, с которой мы только что знакомились. Сначала напомним несколько основных построений.

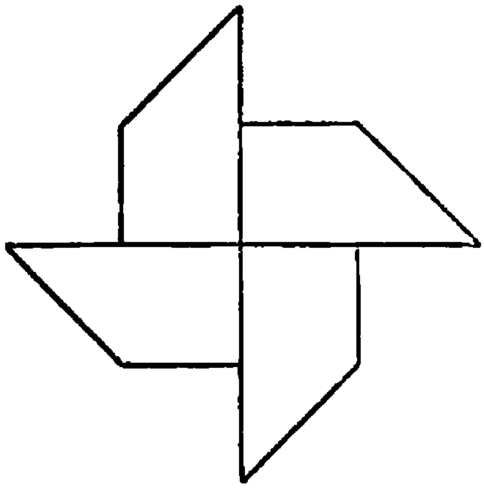


Рис. 55.

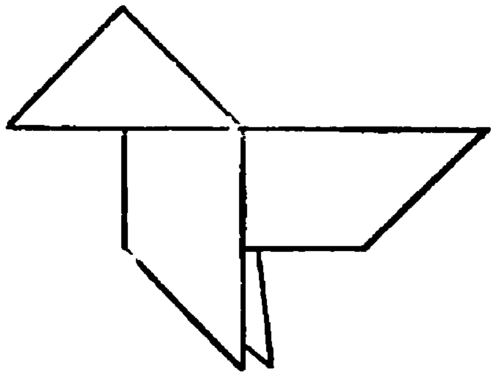


Рис. 56.

1. Чтобы получить п р я м о й у г о л, надо точно наложить одну на другую части согнутой прямой и затем раскрыть полученный сгиб.

2. Чтобы получить п а р у п а р а л л е л ь н ы х, надо, действуя, как в *1*, провести два перпендикуляра к одному и тому же отрезку.

3. Используя *1* и *2*, можно получить сгибанием п р я м о у г о л ь н и к.

4. Мы получим к в а д р а т, если разделим пополам один из прямых углов прямоугольника, построенного согласно *3*, и примем эту биссектрису за диагональ квадрата, который теперь легко получить сгибанием.

Теперь мы покажем на примере, что п о с т р о е н и я с г и б а н и е м не ограничиваются квадратами, прямоугольниками и производными от них фигурами.

5. Нам нужно построить на заданном отрезке AB, который мы будем одновременно рассматривать как сторону

[1]) Р о у С у н д а р а, Геометрические упражнения с куском бумаги, перев. с английского, изд. 2-е, Одесса, 1923.

квадрата, построенного сгибанием, равносторонний треугольник ABC (рис. 57). Мы делаем сгиб по перпендикуляру к заданной стороне треугольника, восставленному из ее середины, а затем расправленный лист перегибаем так,

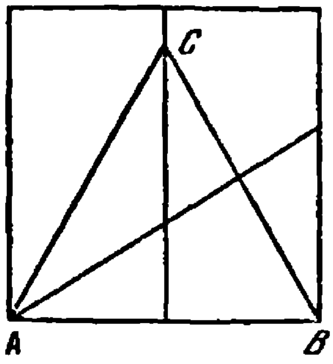


Рис. 57.

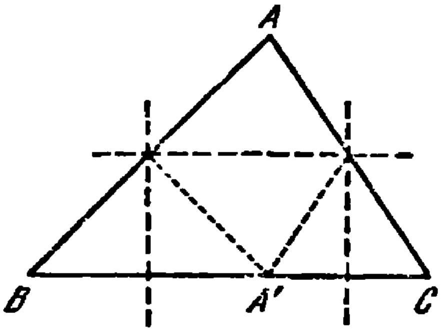


Рис. 58.

чтобы сгиб прошел через A в том направлении, при котором точка B попадает на восставленный в середине AB перпендикуляр, скажем в точку C. Полученный сгиб в пересечении с ранее полученным определяет C.

6. Пусть задан вырезанный из бумаги круг. Как с помощью сгибов определить его центр? (Решение настолько легко, что нет нужды приводить его здесь.)

Доказательства, использующие сгибание, часто применяются в обычном преподавании, в частности в связи со свойствами симметрии геометрических фигур.

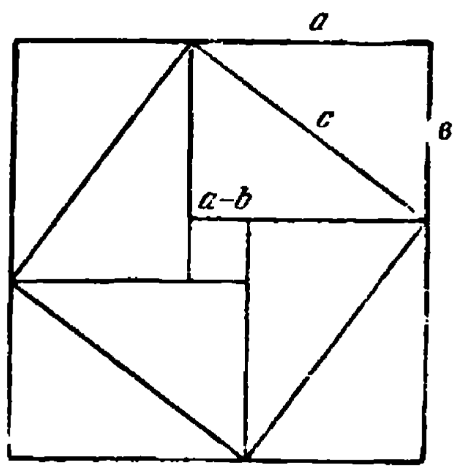


Рис. 59.

7. Напомним доказательство теоремы о сумме углов треугольника. Треугольник перегибают по линиям, показанным штрихами на рис. 58, и таким образом получают все три его угла у точки A'; там эти углы как раз образуют полный развернутый угол — два прямых.

8. Еще один пример дает нам рис. 59, который сравнительно легко построить с помощью сгибов. На этом рисунке показаны два доказательства теоремы Пифагора. Сперва рассмотрим большой квадрат. Его сторона имеет длину

$a+b$, стало быть, его площадь равна $(a+b)^2$, но мы можем подсчитать, чему она равна, добавив к внутреннему квадрату со стороной c четыре треугольника, каждый из которых имеет площадь $\frac{1}{2}ab$. Итак, мы получаем

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ab,$$

или же

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

откуда, наконец,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Другое доказательство получим, если будем исходить из меньшего квадрата со стороною c. Его площадь составляет c^2, а с другой стороны, эту площадь можно получить как сумму четырех прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и маленького квадрата со стороною, равной $a-b$. Итак,

$$c^2=(a-b)^2+4\cdot\frac{1}{2}ab,$$

то есть

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

В заключение произведем небольшой опыт со сгибанием, чтобы показать связь между правильным пятиугольником и обычным узлом. Из бумаги вырезают достаточно длинную полоску с параллельными краями и завязывают эту полоску простым узлом самым обычным образом. Затем с помощью сгибаний всю конструкцию делают плоской, так чтобы заузления сблизить друг с другом, как только возможно. Тогда получается правильный пятиугольник. На

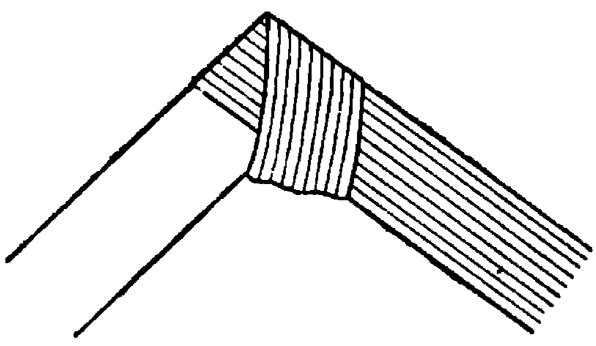


Рис. 60.

помещенном здесь рис. 60 это построение изображено эскизно сверху, чтобы показать все соотношения связности, причем одна сторона полоски заштрихована параллельно ее краям [1]).

8. ГЕОМЕТРИЯ НОЖНИЦ

В качестве вступления известная задача-шутка: У портного имеется кусок ткани длиною в 21 *м*. Каждый день он отрезает от него по 3 *м*. На какой день этот кусок будет окончательно разрезан на части? Геометрия ножниц может быть практически использована всякий раз, когда дело состоит в том, чтобы провести путем разложения доказательство равенства. Так, теорему Пифагора можно представить в следующем виде: квадрат, построенный на гипотенузе, нужно разрезать на части таким образом, чтобы из этих частей можно было составить оба квадрата, построенных на катетах. Простейшее и красивейшее доказательство путём разложения для «magister matheseos» — то, что дал Аннаирици [2]). Это доказательство можно дать в следующем виде:

1. Разрежь составленный из двух квадратов, построенных на катетах, «стул невесты» (рис. 61) двумя сечениями на три части так, чтобы из последних можно было составить квадрат, построенный на гипотенузе.

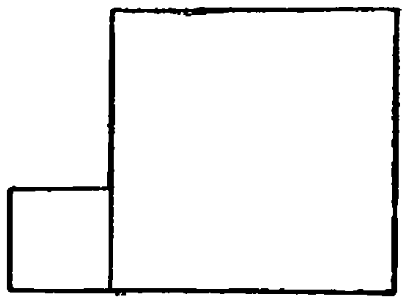


Рис. 61.

Не так давно геометрией ножниц занялись психологи, и различные ее задачи были использованы в качестве тестов при испытаниях способностей и профессиональной пригодности. То нужно снова соединить части, на которые разрезан прямоугольник (не путем проб, а в уме), то нужно так провести на заданной фигуре разрез, чтобы обе

---

1) Из узлов такой бумажной полоски можно получить и правильные узлы с более чем 5 (непрямолинейными!) сторонами. Об этом и о пространственных узлах см. статью: W. Bastine, Bandknoten, в журнале Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht 53 (1922), 172.

2) См. Л и т ц м а н, Теорема Пифагора...

части, на которые она распадается, можно было сложить в виде квадрата. Из многочисленной коллекции таких тестов приведем несколько примеров для «проверки умственного развития» читателей, к сему склонных.

2. На фигуре, изображенной на рис. 62, надо провести один разрез так, чтобы из получившихся двух частей можно было сложить квадрат. Этот разрез надо показать на рисунке.

3. То же задание для рис. 63.
4. » » » » » 64.
5. » » » » » 65.
6. » » » » » 66.
7. » » » » » 67.

8. Из трех фигур, показанных на рис. 68, надо составить квадрат. Начертите этот квадрат и покажите на нем составляющие его части.

9. Из трех фигур, показанных на рис. 69, надо составить круг.

10. Из трех фигур, показанных на рис. 70, надо составить равносторонний треугольник.

К этому же роду задач относятся и «головоломки», которые можно задавать детям для вырезывания из куска картона. Обычно задача состоит в том, чтобы построить обведенную контуром фигуру из частей головоломки. В связи с этим можно упомянуть и о том, что реклама тоже пользуется такими средствами: премия выдается тому, кто сумеет из частей заданной фигуры составить изображение или название некоторого фабриката.

Психологи не раз сочетали в своих тестах геометрию ножниц с геометрией сгиба. Излюбленным тестом, например, является такой: один раз сгибают лист бумаги, затем снова сгибают его, образуя прямой угол, и затем на одной из сторон угла вырезают равносторонний треугольник. От испытуемого требуется указать,— не проделывая этого фактически,— как будет выглядеть этот бумажный лист, если его разгладить.

Ниже мы приводим несколько таких задач, в которых геометрия ножниц сочетается с геометрией сгиба.

11. Квадрат надо разделить на части двумя разрезами так, чтобы из получившихся кусков можно было сложить два равновеликих квадрата.

12. Четырьмя разрезами надо разделить квадрат на 16 квадратов.

Рис. 62.

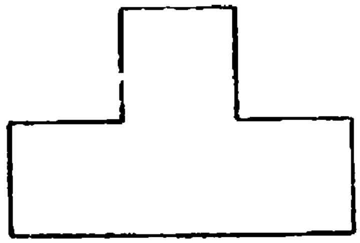


Рис. 63.

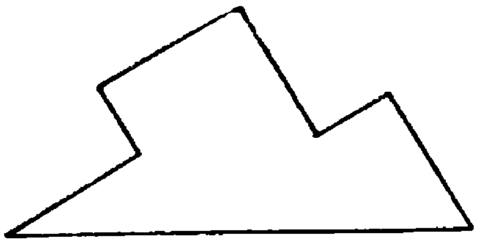


Рис. 64.

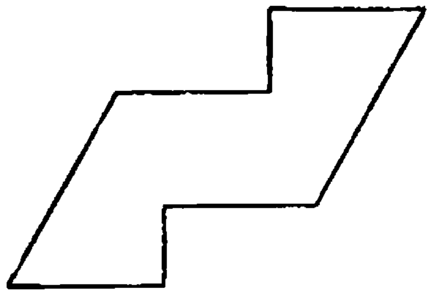


Рис. 65.

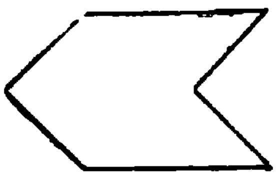


Рис. 66.

Рис. 67.

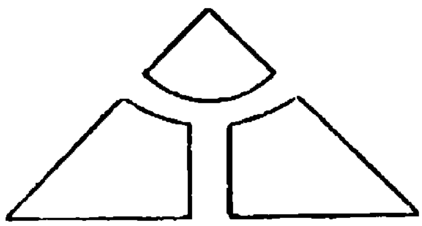


Рис. 68.

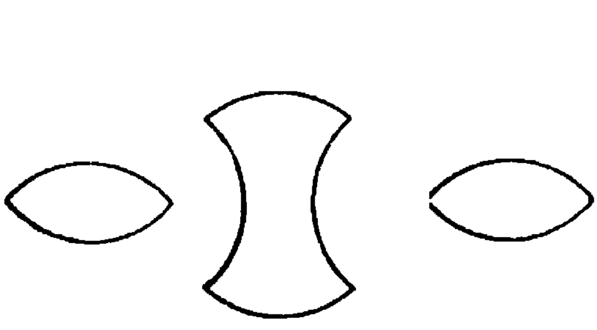


Рис. 69.

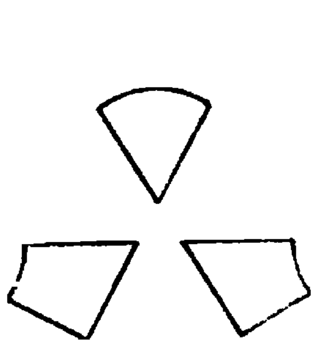


Рис. 70.

13. Одним разрезом надо разделить квадрат на четыре квадрата.

О т в е т ы.— *1.* Оба разреза показаны на рис. 71. Треугольники, отделенные этими разрезами от «стула невесты», можно перевести вращением на 270° соответственно вокруг точек, обозначенных P_1 и P_2, в такое положение, в котором они вместе с оставшейся частью «стула невесты» образуют квадрат, построенный на гипотенузе.

— *2—10.* Эти задачи настолько легки, что можно не приводить их решений.

— *11.* Квадрат разрезаем вдоль диагонали, накладываем один на другой полученные при этом прямоугольные равнобедренные треугольники и разрезаем их по оси симметрии. Любые два из четырех прямоугольных равнобедренных треугольников образуют новый квадрат.

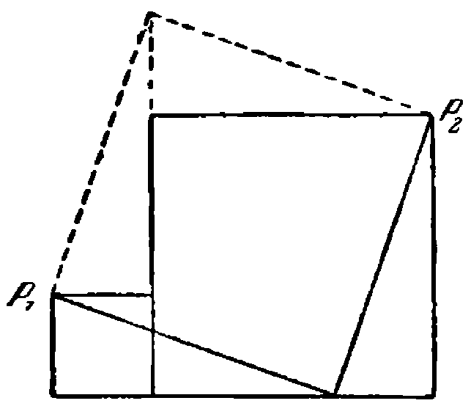


Рис. 71.

— *12.* Разделите пополам квадрат разрезом от середины одной из сторон к середине противоположной стороны и наложите одну половину на другую. Затем таким же образом разделите пополам эти половины, наложите их друг на друга и т. д.

— *13.* Мы делаем сгиб по диагонали квадрата, затем делаем новый сгиб по оси симметрии прямоугольного равнобедренного треугольника. После этого производится разрез по оси симметрии нового треугольника.

Если начать не с задачи *11* и произвести сначала ту операцию, которую мы только что указали, а затем развернуть листы, то почти каждому было бы крайне трудно определить, как получились эти отдельные части квадрата.

* * *

Если мы хотим определить величину площади некоторой неправильной фигуры, для чего весьма трудно или практически невозможно применить какие-либо формулы, либо если мы хотим определить отношение площадей двух фигур, то можно вырезать такие фигуры из бумаги, взвесить их на почтовых весах и сравнить их вес с весом единицы площади, скажем, квадратного дециметра, или, соответственно, друг с другом. Передают, что именно таким образом Александр Гумбольдт определил отношение поверхности суши к поверхности воды на Земле. Конечно, для этого ему нужна была карта, не искажающая масштаб площадей.

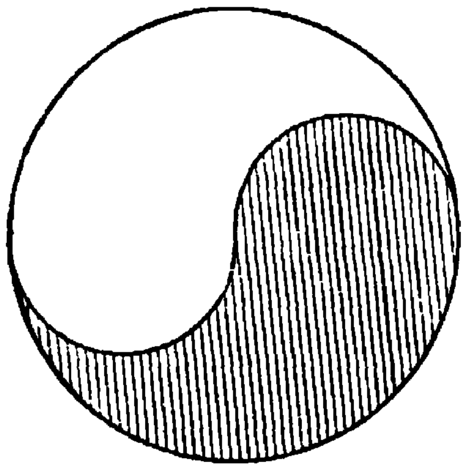


Рис. 72.

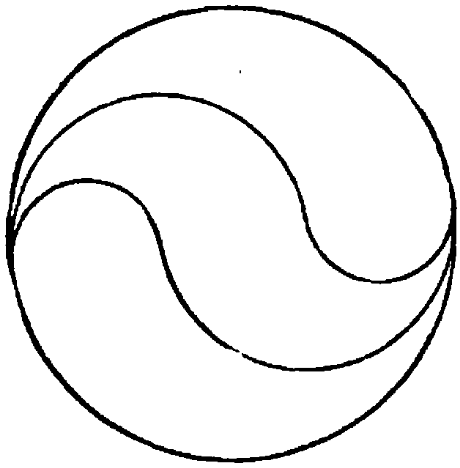


Рис. 73.

Здесь мы намереваемся предложить читателю испытать этот способ на таком примере, когда можно применить и подсчет. На рис. 72 изображен круг, разделенный на две части, причем оба участка поверхности имеют одинаковую площадь: они ведь налагаются один на другой. Но как будет обстоять дело, когда мы обобщим это построение, деля поверхность круга на три, на четыре, вообще на n частей. На рис. 73 и 74 показано деление на три и на четыре части. Пусть читатель сначала попробует проверить с помощью почтовых или аптечных весов, имеем ли мы здесь равенство площадей отдельных частей. Тот, кто знает, как вычислить площадь круга, может подсчитать площадь его частей. А как обстоит дело с длиной обвода этих фигур?

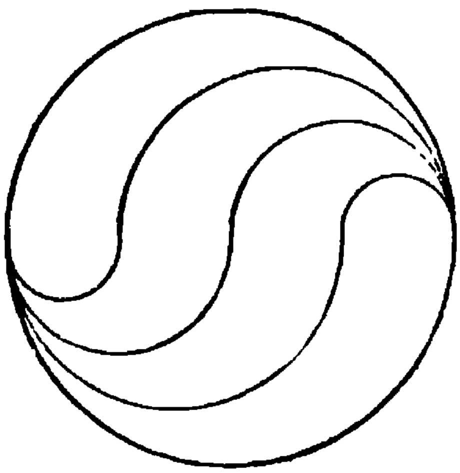


Рис. 74.

14. В заключение еще одна задача-шутка (мы находим ее уже в сборнике Швентера). Как превратить круг в квадрат? — Мы вырезаем круг, разрезаем его на четыре квадранта и складываем их так, чтобы они лежали прямыми углами наружу, а дугами окружности были обращены внутрь, то есть так, как показано на рис. 75.

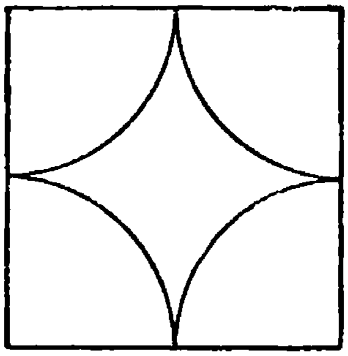


Рис. 75.

Лента Мёбиуса

Возьмем бумажную полоску с параллельными краями и соединим ее концы друг с другом, предварительно повернув полоску на 180°. Рис. 76 дает представление о получающейся при этом фигуре, которую называют лентой Мёбиуса или листом Мёбиуса, так как Мёбиус был первым, кто занялся такой фигурой.

1. Сколько краев у этой ленты? Сколько сторон у этой ленты?

В отличие от обычных известных нам листьев и лент, в отличие, например, от обыкновенной склеенной в кольцо полоски бумаги лист Мёбиуса имеет только один край и только одну сторону. Если вы захотите покрасить этот лист, например, в голубой цвет и начнете работать кисточкой с какого-либо места, хотя бы с того, где мы скрепили друг с другом два конца полоски, то в конце концов вы вернетесь к исходному месту, выкрасив в с ю поверхность; стало быть, она имеет только одну сторону.

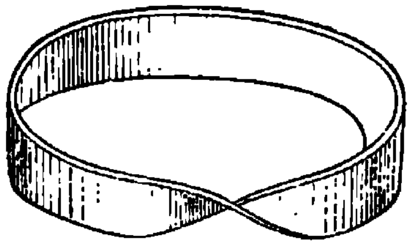


Рис. 76.

2. Пусть теперь лист Мёбиуса разрезается по всей его длине параллельно краю. Разрез при этом производится так, чтобы он проходил по середине, деля пополам ширину листа. Если все это проделать, то, сколь это ни удивительно, мы получим не два куска, как обычно, а связный лист. При этом мы увидим, что он отличается от своего прообраза тем, что закручен уже не на 180°, а на 360°.

3. Если мы продолжим наш опыт с новым листом, то есть разрежем его параллельно краю по всей его длине, то получается новая диковинка. На сей раз лента распадается на две отдельные ленты. Однако эти ленты заузлены друг с другом.

4. Предоставим самому читателю разобраться в том, что происходит в результате «взрезывания» («Rückerschnitt») с лентой Мёбиуса, которая получена закручиванием на $3 \cdot 180° = 540°$.

5. Теперь вернемся к нашей первой ленте, полученной закручиванием на $180°$. Будем производить не один разрез, делящий пополам ленту по ширине, а два таких разреза, чтобы по ширине разделить ленту на три части. Что при этом получится?

Если читатель уже достаточно поразмыслил, что при этом получится, то он возьмется за ножницы и, пожалуй, лишь тогда увидит, что для выполнения нашего требования нужен только о д и н разрез. Это сразу следует из того обстоятельства, что наша лента имеет только один край. Как выглядят при этом оба куска ленты, легко предвидеть — или это еще не так?

Вряд ли имеется лучший пример, чем эта лента Мёбиуса, того, насколько «внутреннее» представление человека может иной раз подвести и что нужно взяться за бумагу и ножницы, чтобы осязательно представить себе такие геометрические соотношения.

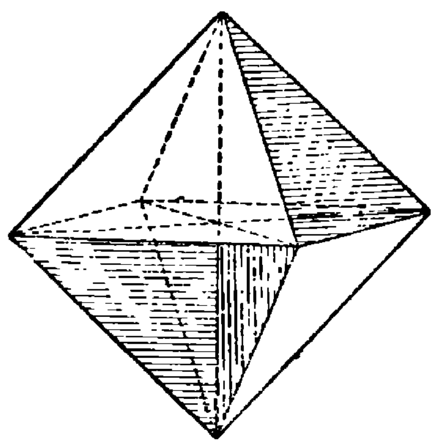


Рис. 77.

* * *

Теперь мы познакомимся с одним весьма замечательным односторонним телом. Исходным для нас будет один из правильных многогранников, октаэдр, изображенный на рис. 167. Октаэдр составлен из двух сложенных основаниями квадратных пирамид с одинаковыми боковыми гранями. Возьмем теперь три квадратных проходящих через октаэдр диагональных сечения и свяжем их в одно целое с помощью четырех соответствующим образом выбранных боковых граней, как указано на рис. 77 (если все это трудно себе представить, рекомендуем читателю изготовить для себя модель), мы получим составленную из этих семи граней одностороннюю фигуру, тептаэдр.

Действительно, путешествуя по этим граням, но не протыкая их, мы можем попасть на обе стороны, скажем, передней треугольной грани или любого из диагональных квадратов. Следовательно, гептаэдр односторонен.

9. ПАРКЕТОВКИ

Дана плоскость, которую надо покрыть многоугольниками (то есть треугольниками, четырехугольниками и т. д.), так, чтобы никакая ее часть не осталась непокрытой и чтобы никакая ее часть не была покрытой многократно. На пробелы же по краям плоскости мы не будем обращать внимания. В такой постановке задача рассматривается во всей ее общности. Решать же ее мы будем не в общем виде — это до сих пор не сделано,— а рассмотрим только некоторые частные случаи.

1 с л у ч а й. Многоугольники правильны и все они конгруэнтны. В одной точке, в которой сходятся по крайней мере три таких правильных многоугольника, будет вершина углов, сумма которых равна 360°. Но угол в правильном треугольнике равен 60°, в квадрате — 90°, в правильном пятиугольнике — 108°, в правильном шестиугольнике — 120°. Далее идти нам нет нужды, потому что 120° уже составляют одну треть от 360°, а углы с ростом числа сторон в многоугольнике растут, причем в одной вершине должны прилегать друг к другу по меньшей мере три многоугольника. Но из перечисленных многоугольников надо один исключить, а именно пятиугольник, потому что 108° не является делителем 360°. Итак, в качестве общеизвестных случаев решения нашей задачи остаются только правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. Что они действительно покрывают плоскость без пробелов и накладок, в этом легко убедиться.

2 с л у ч а й. Покрытие плоскости правильными многоугольниками различного рода дает уже немалое многообразие решений. Мы сошлемся здесь на А р е н с а I и др.

3 с л у ч а й. Вероятно, каждому с детства знаком небольшой занятный аппарат— калейдоскоп. Когда вы смотрите в небольшую трубку, вы видите звездообразные фигуры, изменяющиеся при медленном вращении трубки, и перед вами проходит великое множество самых разнообразных фигур. Внутри трубки волшебство творят два зеркала, наклоненные друг к другу под углом в 60°. Именно благодаря им несколько подвижных пестрых стеклышек кажутся образующими симметричную шестиконечную звезду. На Цейссовой фабрике в Иене Пульфрих значительно усовершенствовал этот аппарат, поместив вместо двух зеркалец стеклянную призму с зеркальными гранями, на которую и падают лучи света. При этом он применил не только призмы, имеющие основание в виде равностороннего треугольника или квадрата, но и призмы с основанием в виде половины равностороннего треугольника и в виде прямоугольного равнобедренного треугольника.

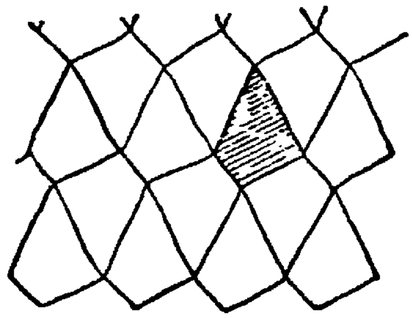


Рис. 78.

Тем самым увеличено число осей симметрии. Впрочем, в таком аппарате мы видим не простое отражение, как в калейдоскопе, а все время повторяющееся, так что здесь перед нами тоже покрытие целой плоскости, и лучше всего спроектировать всю эту картину на экран. Если вписать в образующий треугольник какую-либо фигуру, которая везде будет повторяться в симметричном или конгруэнтном виде, то получается почти бесконечное многообразие «паркетовок», что можно использовать в художественном ремесле в качестве узоров, например для ковров и обоев.

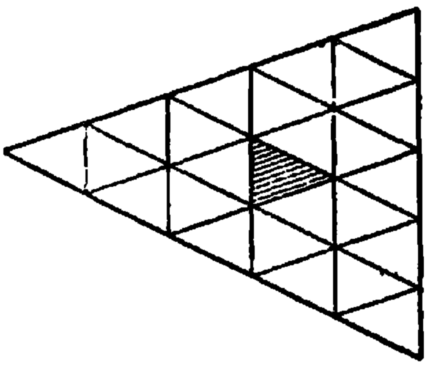


Рис. 79.

4 случай. Практически очень просто показать, что плоскость можно однократно и без пробелов покрыть любыми конгруэнтными между собою треугольниками, а также любыми конгруэнтными четырехугольниками. На рис. 79 показан пример покрытия произвольными треугольниками, на рис. 78 показано покрытие произвольными четырехугольниками, правда, две стороны в четырехугольнике равны. Помимо этого, четырехугольник может быть и вогнутым. Насколько известно автору, задача о покрытии плоскости, без пробелов и накладок, пятиугольниками, шестиугольниками и т. д. до сих пор полностью не решена [1]).

5 случай. Тем, что сказано выше, вопрос о паркетовках не исчерпан. Имеются паркетовки совсем другого типа, примером чего может быть прямоугольник в качестве основной фигуры при размещении «в елочку» (рис. 80), что и осуществляется в дереве, когда настилают настоящие паркетные полы, а также на линолеуме. Кроме того, и в разобранных выше паркетовках всякий раз, когда имеем прямые линии, можно сдвинуть одну часть плоскости вдоль проходящей по ней прямой. Так делают, например, при покрытии правильными многоугольниками в случае равностороннего треугольника и в случае квадрата, а также когда имеем произвольный треугольник (например, рис. 79) или трапецию; на рис. 81 показан сдвиг вдоль параллельных прямых в случае прямоугольника — образец стенной кладки.

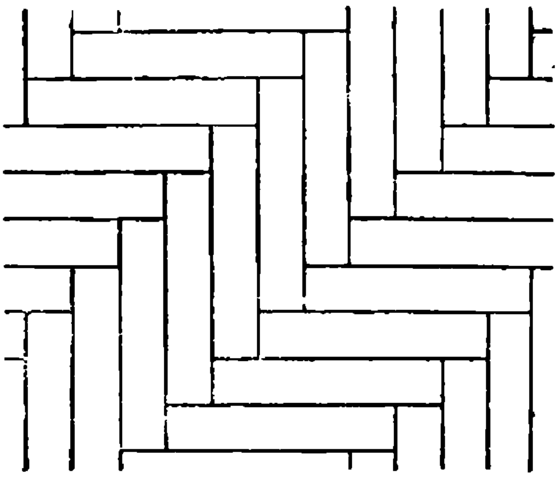


Рис. 80.

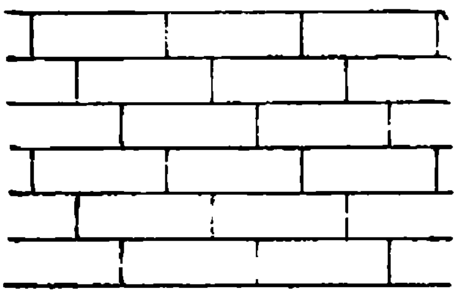


Рис. 81.

6 случай. До сих пор мы ограничивались многоугольниками. Но существуют паркетовки фигурами, которые ограничены, целиком или частично, кривыми линиями. Конечно, покрыть плоскость конгруэнтными кругами без накладок нельзя, потому что останутся пробелы. Но если (рис. 83) к каждому кругу соответствующим образом «добавить» один такой пробел, то, на первый взгляд, становится возможным покрыть плоскость такими кру-

[1]) Весьма поучительно покрытие плоскости «стульями невесты», с которыми мы познакомились выше (стр. 203). Оно показывает тесную связь между различными доказательствами теоремы Пифагора методом разложения. См. Литцман, Теорема Пифагора.

гами, снабженными каждый одним острием. Пусть читатель попробует это сделать, он убедится, что хотя сначала дело идет успешно — пока перед нами первый круг и шесть к нему прилегающих,— дальше так дело не пойдет. Если читатель рассмотрит бо́льший участок плоскости и подсчитает, с одной стороны, сколько на нем кругов, а с другой стороны — сколько на нем пробелов, то ему станет ясной причина неудачи: на каждый круг приходится два пробела. Полное обоснование этого предоставляем читателю.

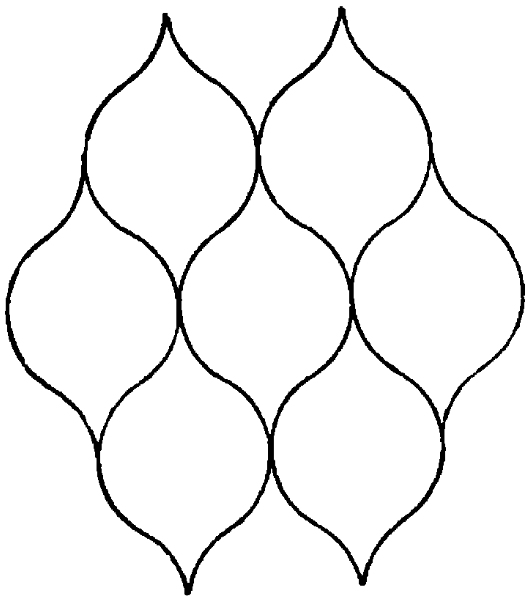


Рис. 82.

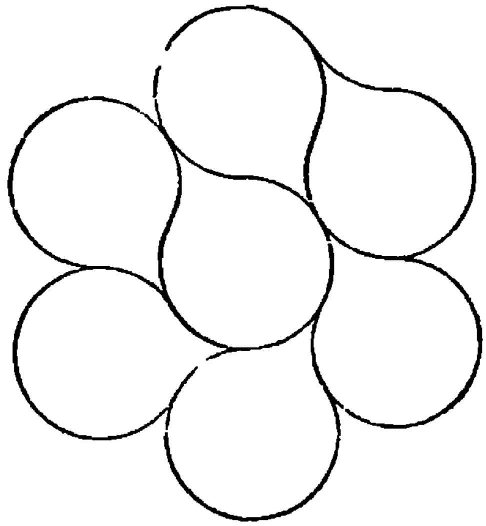


Рис. 83.

И действительно, легко осуществить паркетовку, выбрав в качестве основной фигуры для покрытия плоскости круг с двумя диаметрально противоположно насаженными треугольниками (криволинейными) для заполнения пробелов (рис. 82). Попробуйте теперь осуществить покрытие при таких основных фигурах: а) круг, на который насажены два смежных «треугольных пробела»; б) круг, на который эти два треугольника насажены так, что между ними один такой треугольник пропущен. Удастся ли паркетовка? Ср. рис. 84 и 85.

Естественно, подобные соображения применимы и в пространственном случае. Здесь задача состоит в заполнении пространства без пробелов и перекрытий многогранниками. Прежде всего на ум приходит куб, но можно брать и подходящие призмы и пирамиды; напомним также о геометрии пчел при постройке их сотов. Следует полагать, что решение общей задачи для пространства, которое может иметь значение в связи с вопросом о размещении атомов в молекуле, еще более многообразно, чем в случае

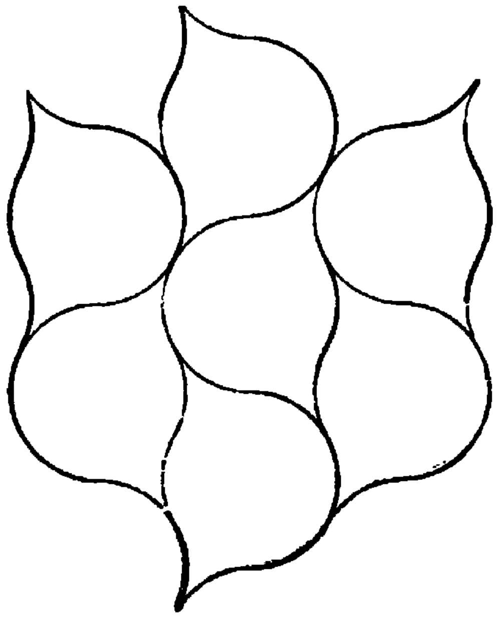


Рис. 84.

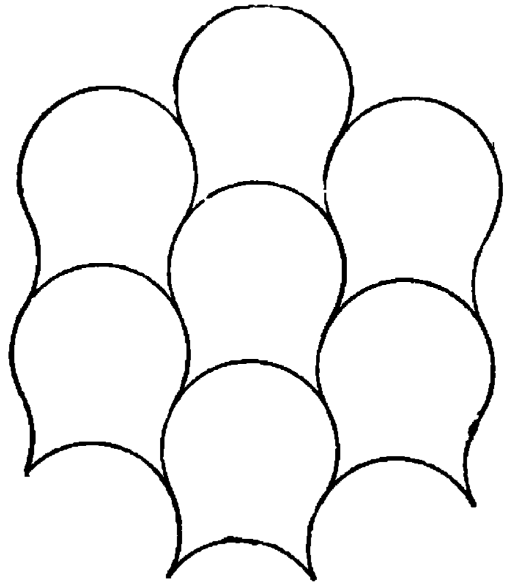


Рис. 85.

плоскости. Мы ограничимся здесь только одним указанием. Кого привлекают задачи, предъявляющие высокие требования к способности наглядного представления, тот пусть исследует вопрос о заполнении пространства конгруэнтными шарами. Тут возможны размещения с различной плотностью. Какого вида получаются здесь пробелы?

10. ЗАДАЧИ СО СПИЧКАМИ

При решении приведенных далее задач ни одну из используемых спичек нельзя надламывать, если только явно не оговорено противоположное. Немало таких задач имеется в соответствующей литературе, и мы даем здесь несколько примеров, достаточно простых. Стоит обратить особое внимание на то, допускает ли задача несколько решений. В конце этого раздела во всех случаях приводится только одно решение.

Первая группа

1. Три спички положены рядом. Надо добавить еще две спички так, чтобы получилось восемь.

2. Двадцать спичек расположили так, как показано на рис. 86. Надо отнять семь спичек так, чтобы осталось десять.

Рис. 86.

Рис. 87.

3. Девятнадцать спичек размещены так, как показано на рис. 87. Надо отнять шесть спичек и при этом должно остаться девять.

4. Семнадцать спичек размещены так, как показано на рис. 88. Надо так убрать семь спичек, чтобы осталось три.

5. С помощью спичек требуется показать французскую арифметическую задачу: Six et trois sont huit ($6 + 3 = 8$).

6. Имеем четыре ряда, в каждом из них по три спички. Требуется, ничего не добавляя, переложить спички так, чтобы в каждом ряду было по шесть.

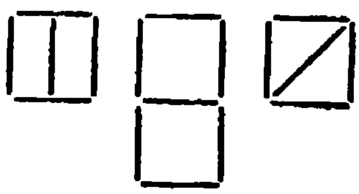


Рис. 88.

7. Из трех целых и одной надломанной спички выложено число 411. Требуется, перекладывая эти же спички один раз, второй, третий и четвертый раз, уменьшить это число.

8. Как из образованного четырьмя спичками числа VII получить единицу, переместив только одну спичку?

9. Три спички кладут рядом: | | |. Почему это означает 1?

Вторая группа

10. На рис. 89 показана фигура, образованная 12 спичками. Надо удалить две спички так, чтобы осталось два квадрата.

11. Из фигуры, показанной на рис. 89, получить три одинаковых квадрата, переместив четыре спички.

12. В задаче *11* три одинаковых квадрата сложены из 12 спичек. Сложите три одинаковых квадрата из 11 спичек.

13. Сложите три одинаковых квадрата из 10 спичек.

14. 17 спичек размещены так, что они образуют два ряда, в каждом из которых имеем три одинаковых квадрата, что показано на рис. 90. Надо так убрать пять спичек, чтобы остались три одинаковых квадрата.

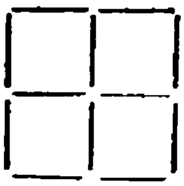


Рис. 89.

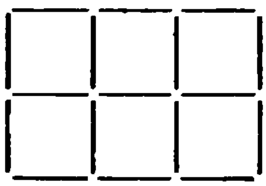


Рис. 90.

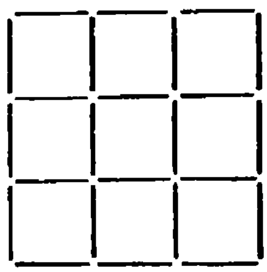


Рис. 91.

15. На рис. 91 имеем 24 спички, сложенных так, что получаются три ряда по три квадрата в каждом. Надо убрать восемь спичек так, чтобы осталось два квадрата.

16. Фигуру, показанную на рис. 91, надо превратить в два одинаковых квадрата, переложив восемь спичек.

17. 9 спичек размещены так, как показано на рис. 92. Надо убрать две спички так, чтобы остались два равносторонних треугольника.

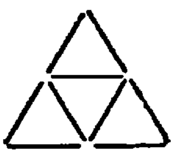


Рис. 92.

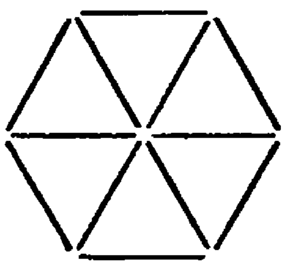


Рис. 93.

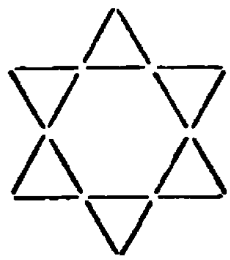


Рис. 94.

18. Из шести спичек образован равносторонний треугольник, по две спички в каждой стороне. Надо так переложить три спички, чтобы получился шестиугольник.

19. Шесть конгруэнтных равносторонних треугольников, показанных на рис. 93, требуется превратить в шесть конгруэнтных параллелограммов, переложив три спички.

20. Составленную из 18 спичек шестилучевую звездообразную фигуру (рис. 94) надо превратить в шесть конгруэнтных ромбов, переложив только шесть спичек.

Третья группа

21. На рис. 95 изображен остров, окруженный рвом. Через ров нужно перебраться на остров, но при этом мы располагаем только балками, длина которых равна ширине рва. Как все же переправиться?

22. Из шести спичек надо составить четыре равносторонних треугольника.

23. Из двенадцати спичек требуется сложить двенадцатиугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые.

24. Пятью спичками образовать восемь прямых углов.

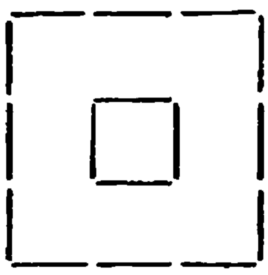


Рис. 95.

Ответы. — *1.* К первым трем спичкам III прикладываем две другие в виде V, так что перед нами VIII. — *2.* ZEHN (по-немецки — десять). —*3.* NEUN (по-немецки — девять).— *4.* ТРИ (три). —*5.* Сначала IIIII, затем HUIT (по -французски — восемь). — *6.* Сначала спички лежат в ряд так: III, затем так: VI.— *7.* 411; 141; 114; 4—1; $\frac{1}{4}$.—*8.* $\sqrt{\text{I}}$.— *9.* В математике принято обозначать через $|a|$ абсолютное значение a. В соответствии с этим III обозначает абсолютное значение числа 1, то есть I. — *10.* Рис. 96.— *11.* Рис. 97.— *12.* Рис. 98.— *13.* Рис. 99. — *14.* Рис. 100. — *15.* Рис. 101, *а* и 101, *б*, ср. также рис. 95.— *16.* Рис. 102.— *17.* Рис. 103.— *18.* Рис. 104. — *19.* Рис. 105.— *20.* Рис. 106.— *21.* Рис. 107. Мы берем две спички (балки) и кладем их так, как показано на рис. 107. Это возможно, так как $\sqrt{2}<1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$. —*22.* Из трех спичек мы выкладываем равносторонний треугольник, а из трех других пристраиваем над ним пирамиду, боковые грани которой образуют еще три равносторонних треугольника. Это — реберная модель тетраэдра.— *23.* Рис. 108.— *24.* Четыре спички нужно сложить крестом, пятую спичку поставить вертикально над центром креста.

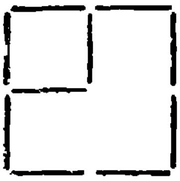


Рис. 96.

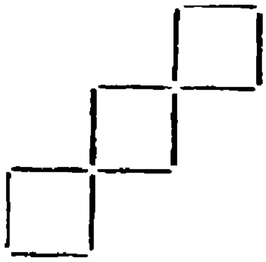


Рис. 97.

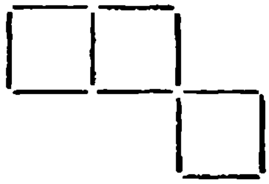


Рис. 98.

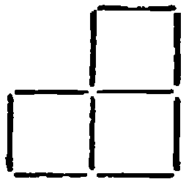


Рис. 99.

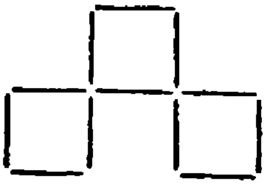
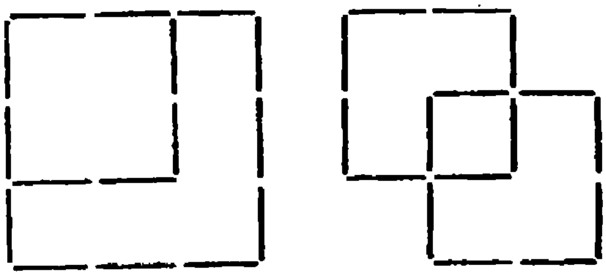


Рис. 100.



а) б)

Рис. 101.

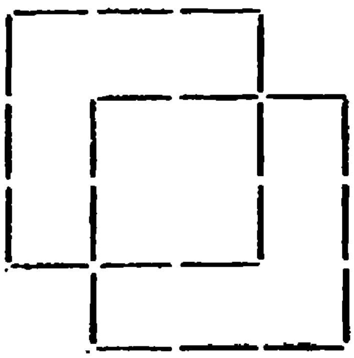


Рис. 102.

Рис. 103.

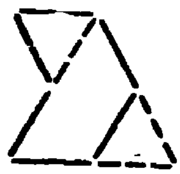


Рис. 104.

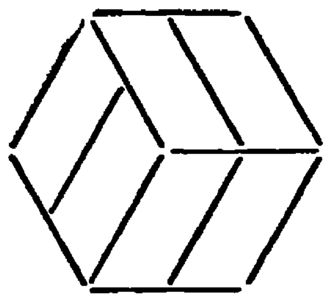


Рис. 105.

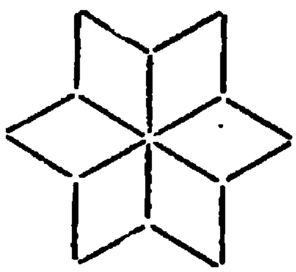


Рис. 106.

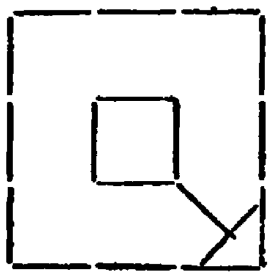


Рис. 107.

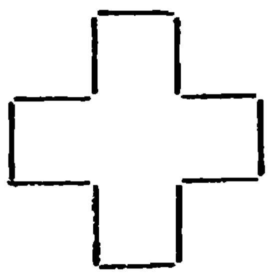


Рис. 108.

11. ЗАДАЧИ НА РАЗМЕЩЕНИЕ

I. Начертите себе квадратную доску с 3×3 полями (ср. рис. 91). С этим связана следующая история. Рассказывают, что некий слепой имел у себя в погребе винохранилище, изготовленное в форме такой квадратной доски. В центральном отделении помещались пустые бутылки. Всего же в хранилище было 68 полных бутылок вина, которые были расставлены по остальным восьми отделениям так, что в каждом ряду находилось по 21 бутылке. Такая расстановка бутылок показана на схеме:

4	13	4
13		13
4	13	4

Слепой хозяин как раз и запомнил, чтобы не обременять себя утомительным пересчетом всех бутылок, что в каждом вертикальном и в каждом горизонтальном ряду имеется по 21 бутылке. Но этим воспользовался его неверный слуга, который забрал четыре бутылки и переставил остальные так, что опять в каждом ряду оказалось по 21 бутылке.

1. Как слуга разместил бутылки?

2. Слуга продолжает воровать; сколько раз он может забирать таким образом по четыре бутылки?

3. Рассмотрите тот же вопрос, исходя из размещения:

1	7	1
7		7
1	7	1

и из размещения

8	8	8
8		8
8	8	8

II. Некто был обладателем креста, украшенного драгоценными камнями. На продольной полосе было насажено девять камней, на поперечной — семь (рис. 109). Понадобилось как-то отдать крест ювелиру в починку. Так как владелец не очень был силен в счете, то он заприметил, что у него всегда получалось девять камней, когда он начинал счет от одного из коротких концов и шел через середину книзу. А плутоватый ювелир, которому стала известна эта примета, воспользовался своими сведениями для того, чтобы придать кресту другую форму, однако с соблюдением известного владельцу правила. Но при этом ювелир имел возможность присвоить два камня так, что это осталось незамеченным.

4. Подумайте, как устроил это ювелир.

5. Поступите таким же образом с крестом, у которого на поперечной полосе пять, а на продольной — шесть драгоценных камней.

III. До нас дошел такой шотландский рассказ. Леди Литтлвуд имела рубиновую брошь, старинную семейную

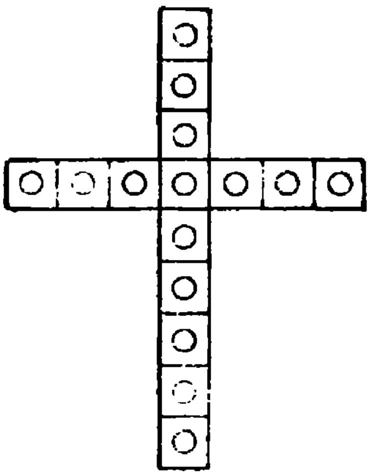


Рис. 109.

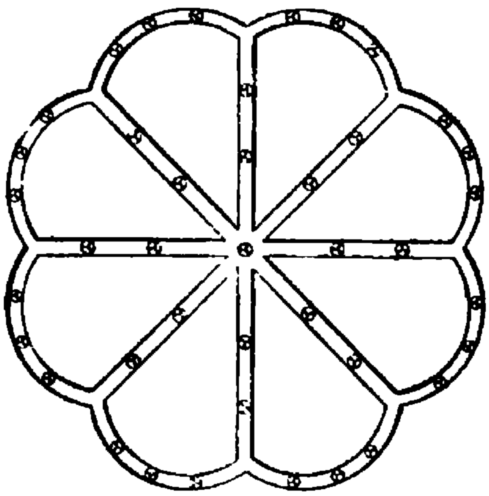


Рис. 110.

драгоценность. Ради небольшой починки она дала эту драгоценность ювелиру и при этом поступила весьма неосторожно, рассказав ему, что она ни разу не утрудила себя счетом камней, но ее мать сообщила ей легкую примету для проверки размещения и наличия камней. А именно, если пойти от центра по одному из лучей и вернуться в центр по соседнему лучу, то всегда насчитаешь при этом 8 камней. Леди Литтлвуд получила свою брошь обратно (на рис. 110 показано, как были насажены камни после починки). Так как проверка по правилу ее матери дала верный результат, то у леди не возникло никаких подозрений. Но когда спустя шесть месяцев ее брат случайно присмотрелся к семейному сокровищу, он обнаружил, что ювелир похитил четыре рубина.

6. Как были размещены камни на брошке до кражи ювелира?

О т в е т ы. — *1*. Новое размещение определяется схемой 5 11 5 для каждого горизонтального и вертикального ряда.— *2*. Надо поочередно использовать следующие размещения: 6 9 6; 7 7 7; 8 5 8; 9 3 9; 10 1 10; дальше дело не пойдет. Таким образом кражу можно было повторить

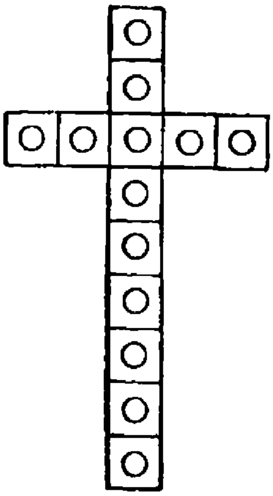


Рис. 111.

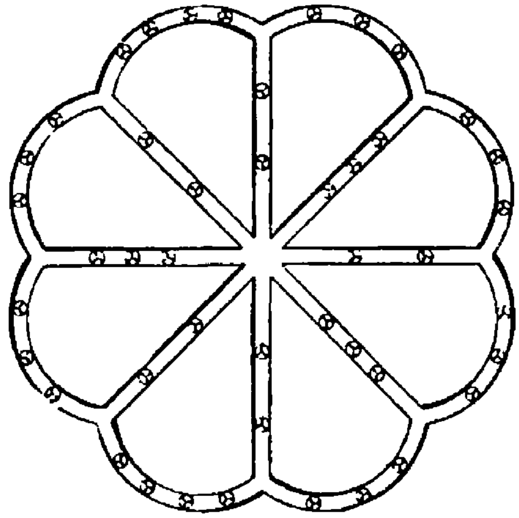


Рис. 112.

без разоблачения еще пять раз.— *3*. Ответ на эти два вопроса можно получить, исходя из тех же соображений, что и в предыдущей задаче [1]).— *4*. На рис. 111 изображен крест после переделки. Ювелир убрал по одному камню с каждого из трех коротких концов, добавив зато внизу продольной полосы один камень.— *6*. Размещение камней на брошке показано на рис. 112.

12. ГЕОМЕТРИЯ НИТЕЙ

Кольцо

Если целиком прорезать какое-нибудь тело так, чтобы линия разреза на его поверхности была замкнутой, то тело обычно распадается на две отдельные части. В том, что это имеет место не во всех случаях, мы могли убедиться на примере ленты Мёбиуса. Если соединить два конца нити (шнура, веревки), то мы получаем тело, которое

---

[1]) Математическую теорию см. у А р е н с а 2.

можно разрезать, и при этом оно все же останется связным. Того же строения, что и «бесконечные нити», кольцо. Можно взять также и корзинку с ручкой. На горшке с двумя ручками можно провести два разреза, проще всего через обе ручки, без того чтобы вся конструкция распалась на части.

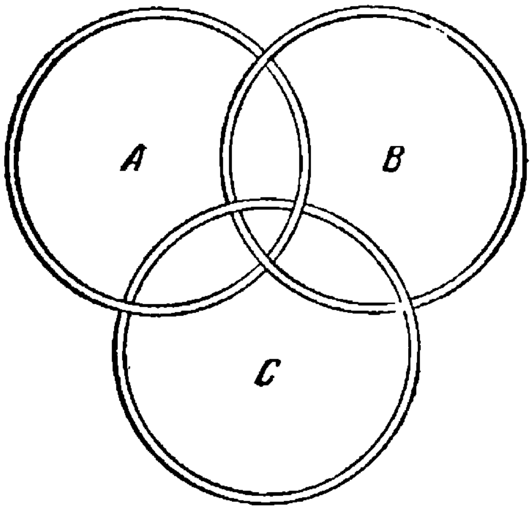


Рис. 113.

Наложите три кольцевидные нити одну на другую так, как показано на рис. 113, а именно сначала кольцо B на кольцо A так, чтобы они частично перекрывались, а затем кольцо C поместите так, чтобы оно проходило через кольца A и B согласно образцу, показанному на рисунке. Если разрезать кольцо C, то все построение, естественно, распадется на три части. Убедитесь в том, что тот же результат получается и тогда, когда разрезаем A или B. Покажите также, что ту же самую фигуру можно было бы получить, наложив сначала друг на друга кольца B и C и пропустив затем через них A, или же наложив сначала друг на друга кольца A и C и пропустив через них B.

Узел

Существуют многочисленные виды узлов. Здесь мы рассмотрим только самый простой узел, так называемую «сердечную петлю» — два таких узла показаны на рис. 114; в обоих случаях узел завязан в замкнутом кольце, а не в нити о двух концах.

После этого предварительного замечания мы можем поставить следующую задачу: возьмите двумя руками шнурок за его концы и завяжите шнурок узлом. В таком виде опыт не удастся, потому что шнурок и две руки образуют замкнутую кольцеобразную нить. Вот почему нельзя вывязать в шнурке узел по образцу «сердечной петли». Однако это становится вполне возможным, если узел сделать заранее — прежде чем взяться за концы шнурка. Конечно, это было бы нарушением уговора — заранее сделать узел в шнурке. Однако я могу заранее сделать узел с помощью двух моих рук, скрестив обычным образом руки на груди. Если я так поступлю и ухвачу затем концы шнурка, тогда я смогу сразу переместить на шнурок узел, который уже налицо в кольце из рук и шнурка.

Теперь обратим внимание на то, что на рис. 114 есть две «сердечные петли». Одну из них можно получить из другой зеркальным отражением относительно некоторой прямой, точнее — относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Теперь изготовьте обе «сердечные петли» и исследуйте, можно ли перевести одну из них в другую, не разрывая и не завязывая вновь

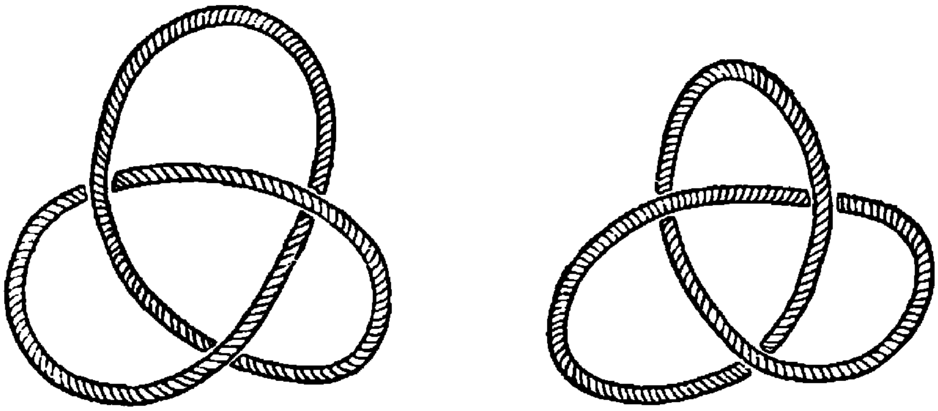


Рис 114.

нить. Вы увидите, что это невозможно. Строгое математическое доказательство этого экспериментального факта дано было только в нашем столетии (М. Деном).

Мы рассмотрели только один пример заузления однойединственной, притом кольцеобразно замкнутой нити.

В ткачестве и при вязке имеют дело с заузлением многих нитей. И это приводит к интересным и практически важным вопросам относительно связности, из которых мы напомним лишь об одном: как получается шов в швейной машине. Тут приходится иметь дело с двумя нитями и возникает серьезное затруднение, которое удалось преодолеть не сразу.

Первые швы на машинах получались такие, что можно было, перерезав нити только в одном месте, распшить швы простым вытягиванием нити. Так получалось потому, что обе нити не заузлялись, т. е. не связывались в узел. Присмотритесь как-нибудь, как работает нынешняя швейная машина. Вы увидите, что пропущенная через ее челнок нитка все время и весьма ловко заузляется с ниткой, которую ведет иголка.

Игры с нитями

Вернемся к простой кольцеобразной и не заузленной нити. Хотелось бы кое-что рассказать об игре с нитью, хорошо знакомой многим из нас с детства (эту игру называют кое-где колыбелькой, кроваткой, а также попросту игрой в снимание). Англичане называют первую фигуру — мы с нею сейчас познакомимся — Cat's Cradle, то есть кошачьей колыбелью.

Очень трудно описать отдельные фигуры этой игры настолько точно, чтобы по описанию можно было выполнить все захваты руками.

В дальнейшем изложении мы попытаемся полностью воспроизвести с помощью описания и рисунка хотя бы две первые фигуры (в таком виде, в каком они в ходу у нас). Речь будет идти о так называемом европейском или азиатском типе игры с нитью, при котором два лица «работают рука в руку» друг с другом. Один из играющих строит какую-то фигуру, а второй создает новую фигуру, снимая подходящим образом нить с пальцев партнера. Это повторяется многократно. Иначе обстоит дело при весьма распространенном в Полинезии океанском типе игры, когда, как правило, только одно лицо участвует в построении фигур. Сменяющие одна другую фигуры, создаваемые с большим искусством, поражают своим разнообразием. Но обратимся к примерам, которые мы имеем в виду.

Введем следующие неизменные обозначения. Внутреннюю сторону кисти будем называть ладонью, наружную сторону кисти будем называть тыльной. Пальцы будем обозначать цифрами от 1 до 5 в такой последовательности: большой, указательный, средний, безымянный, мизинец, причем пальцы левой руки будем обозначать арабскими цифрами, от 1 до 5, а пальцы правой руки — римскими, от I до V. Все указания, если иное не оговорено, относятся к тому лицу, которое держит фигуру. Часть нити, более близкую к телу, будем называть «передней», более удаленную — «задней».

Все рисунки даны так, как видит все происходящее то лицо, которое держит нить. Все фигуры образованы не слишком тонкой нитью длиною примерно от 1,5 до 2 *м*, причем концы нити связаны, так что она образует кольцо.

После каждой из указанных в дальнейшем операций руки разводятся настолько далеко, чтобы нить была туго натянута.

1. Руки подняты и обращены ладонями друг к другу так, что большие пальцы направлены к телу. Нить накладывается на обе кисти так, что она проходит по обеим тыльным сторонам и между большими пальцами и ладонями.

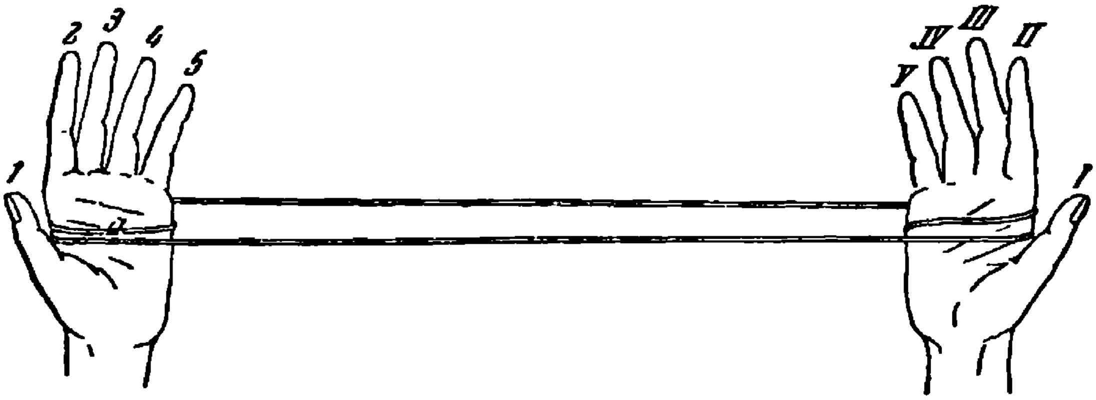


Рис. 115.

2. Нить еще раз обвивается вокруг кисти каждой руки, так что теперь она проходит по ладоням (рис. 115).

3. Палец III пропускается возле *a* (рис. 115) под нитью, которая лежит на ладони левой руки (рис. 116) и оттягивает нить. Так получается фигура, которая показана на следующем рисунке (рис. 117).

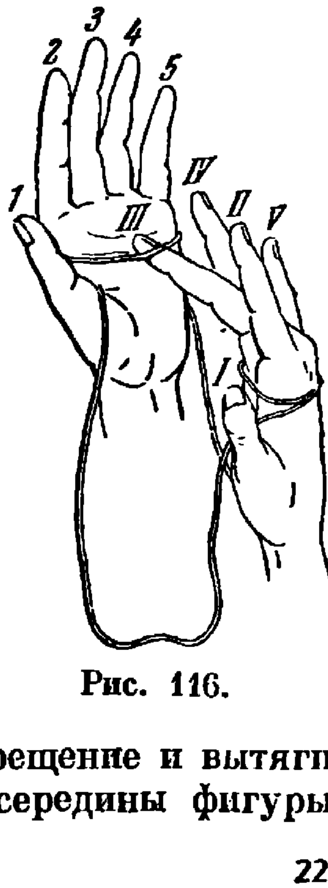


Рис. 116.

4. То же самое проделывает палец 3 у правой руки. Тогда получается колыбелька (рис. 118).

Из колыбельки мы получаем изображенную на последнем из этих рисунков (рис. 119) фигуру следующим образом:

Второе лицо *B* становится немного левее от первого лица *A*, лицом к *A*. *B* двумя руками берется за каждое из двух скрещений нити, образующих верхнюю часть колыбельки, причем палец I попадает в угол *a* (рис. 118), палец II — в угол *b*, 1 — в угол *c* и 2 — в угол *d*. Оба пальца каждой руки теперь крепко держат скрещение и вытягивают его затем наружу, то есть из середины фигуры,

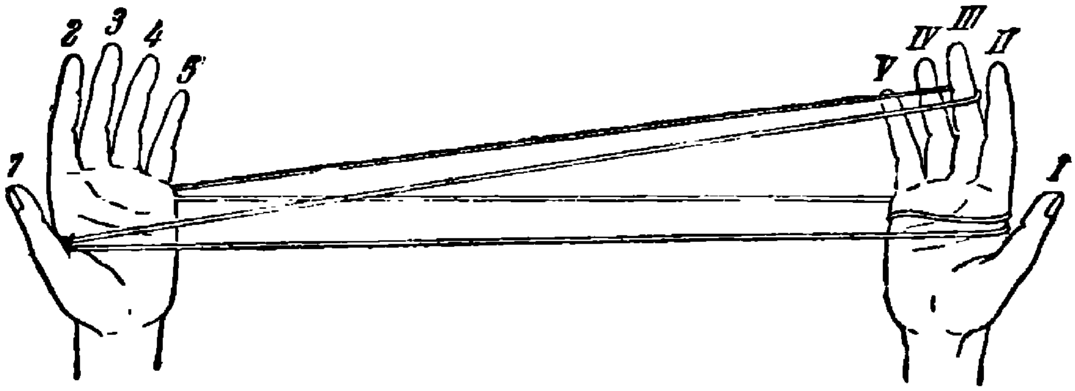


Рис. 117.

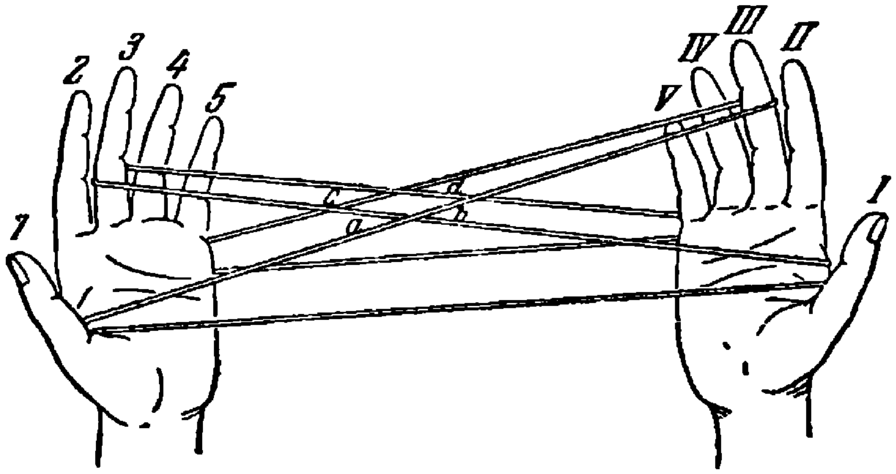


Рис. 118.

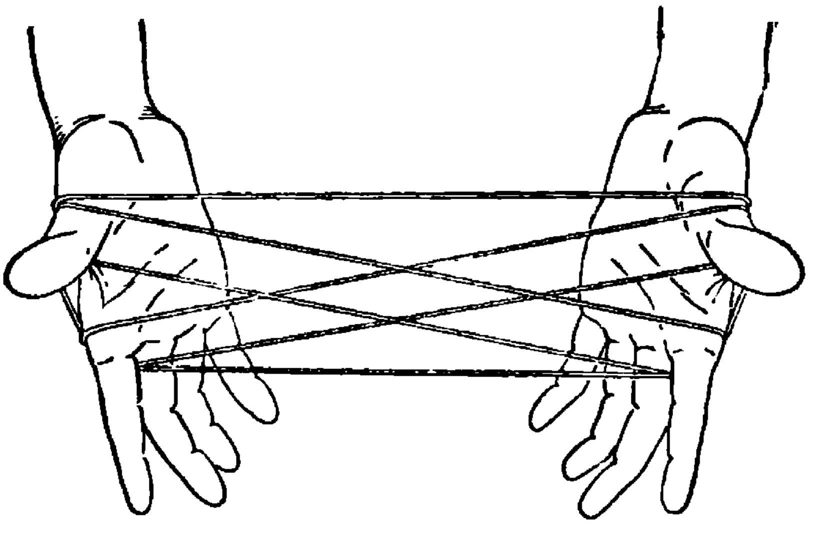


Рис. 119.

настолько, чтобы пальцы оказались над проходящими горизонтально нитями колыбельки. Затем пальцы растягивают крест книзу и вокруг горизонтальных нитей до тех пор, пока пальцы обеих рук не встретятся под фигурой. Тогда *B* поворачивает руки настолько, чтобы пальцы были обращены кверху и затем разводит руки вверх. В это же время *A* вытягивает свои руки из нитяной фигуры. Тогда *B* выпускает теперь скрещения,которые он до сих пор держал крепко, и растопыривает большие и указательные пальцы. Теперь получается фигура, показанная на рис. 119.

13. ВЫЧЕРЧИВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЛИНИЙ

Уникурсальные фигуры и т. п.

1. По окружности на равных расстояниях забиты пять гвоздей. Надо так натянуть на эти гвозди веревку, чтобы получились пятиконечная звезда (пентаграмма) и пятиугольник, но чтобы ни на одном отрезке, входящем в фигуру, веревка не была натянута дважды (рис. 120).

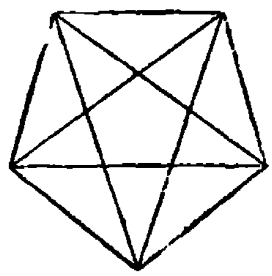


Рис. 120.

2. Начертите одним движением, не проводя дважды какой-либо из отрезков, правильный семиугольник с диагоналями — семиконечную звезду. Дело тут не в том, чтобы точно осуществить построение правильного многоугольника, достаточно и весьма приблизительного выполнения; решающим является выполнение требования, чтобы ни один отрезок не был пройден дважды или большее число раз.

3. Попробуйте начертить одним движением четырехугольник с его диагоналями.

4. Попробуйте начертить одним движением шестиконечную звезду, гексаграмму (рис. 121).

Как выполнить задание *1*, показывает рис. 122; задача *2* решается вполне аналогичным образом. Напротив, задача *3* неразрешима. Решение задачи *4* указано на рис.123.

Когда при вычерчивании одним движением подобных фигур — обычно их называют уникурсальными — мы попадаем в угловую точку (угловой мы называем такую точку, в которой сходятся два или большее число отрезков) и выходим из нее уже по другому отрезку,— что, разумеется, является обязательным при однократном использовании каждого отрезка,— то при этом не должен оставаться только один непройденный путь, попадающий в

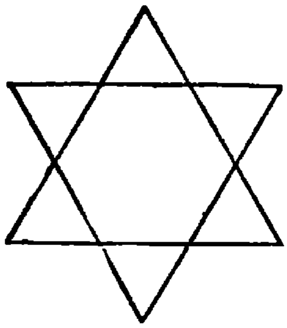


Рис. 121.

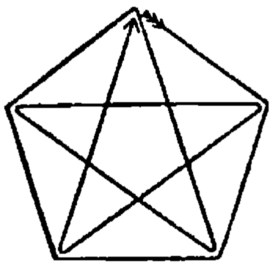


Рис. 122.

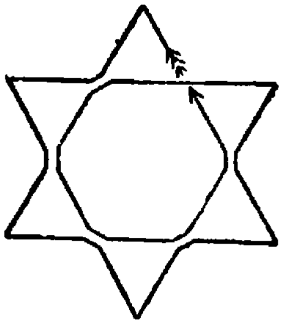


Рис. 123.

нашу угловую точку. Ведь если мы пойдем по этому пути к этой точке, то у нас не будет пути для выхода. Отсюда следует, что число выходящих из одной и той же угловой точки отрезков должно быть четным, если нашу фигуру требуется обойти одним движением. На рис. 124 показан еще несколько более сложный пример.

Однако имеется существенное исключение — его составляют начальная и

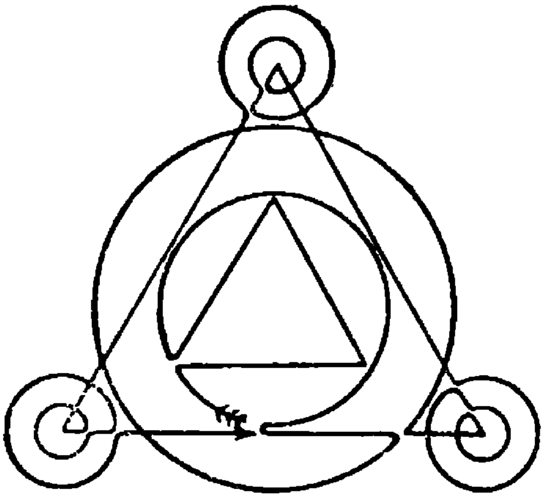


Рис. 124.

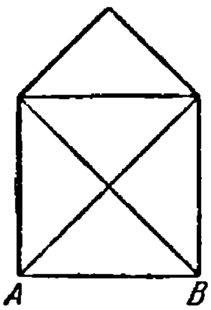


Рис. 125.

конечная точки обхода. Если они совпадают, то есть если рассматриваемая связная линия возвращается в свою исходную точку, мы и в этой точке получаем четное число отрезков. Но это условие не всегда соблюдается. Например, как показывает задача *3*, при обходе четырехугольника вместе с его двумя диагоналями налицо четыре угловые точки с тремя отрезками каждая.

Но если мы устраним две из этих угловых точек с нечетным числом отрезков с помощью подходящей линии, как это сделано на рис. 125, то такую фигуру можно вычертить одним движением, хотя на ней еще остались две точки, каждая с тремя отрезками,— точки A и B на рис. 125. Нам надо только позаботиться о том, чтобы одна из этих точек была начальной, а вторая — конечной точкой нашего пути.

Посылка

Познакомимся с одним практическим примером применения подобных соображений к пространственной задаче. Надо обвязать посылку, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда. Посылка лежит передо мною в подходящем положении. Требуется:

1. Обвязать ее веревкой слева направо и спереди назад так, чтобы веревка нигде не прошла дважды (рис. 126).

2. Посылку, чтобы ее укрепить по длине, требуется дважды обвязать веревкой спереди назад (рис. 127); опять-таки наша цельная веревка нигде не должна пройти дважды.

3. Посылку надо обвязать так, как в задаче *2*, но при этом она должна быть кругом обвязана и посередине по высоте, опять-таки цельной веревкой, которая нигде не должна пройти дважды (рис. 128).

4. Нужно обвязать посылку дважды не только спереди назад, но и слева направо (рис. 129); по-прежнему соблюдаются требования, чтобы веревка была цельной и нигде не была сложена вдвое.

— Решение первой задачи тривиально, можно сказать, что оно везде в ходу. Уже во втором случае (рис. 130 достаточно ясно показывает, как он решается [1]) — многие действуют менее ловко, а именно, либо у них средняя часть веревки вверху получается двойная, либо же они выполняют второе обвязывание спереди назад с помощью

---

[1]) Во всех случаях мы не принимаем в расчет тот узел, которым соединены (в «кольцо») два конца веревки,— можно считать его находящимся на противоположной для наблюдателя стороне посылки в любом месте. Впрочем, то, что обвязывание посылки обычно начинают с того, что делают петлю, вызывает лишь незначительные изменения в ходе решения.

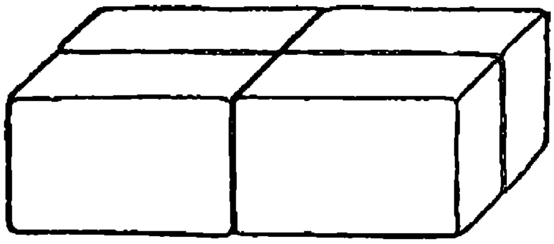


Рис. 126.

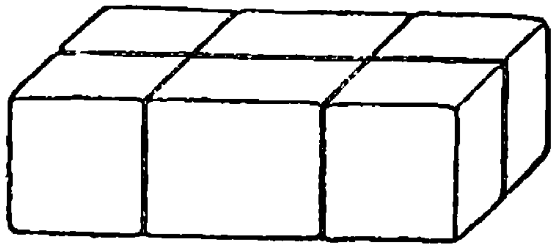


Рис. 127.

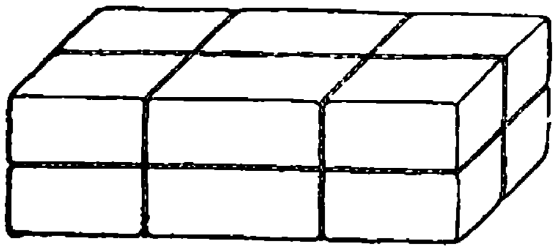


Рис. 128.

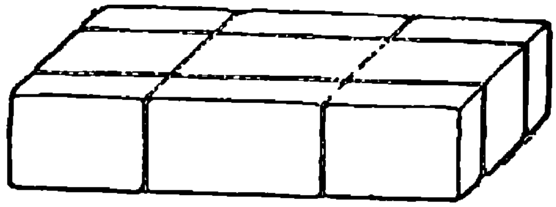


Рис. 129.

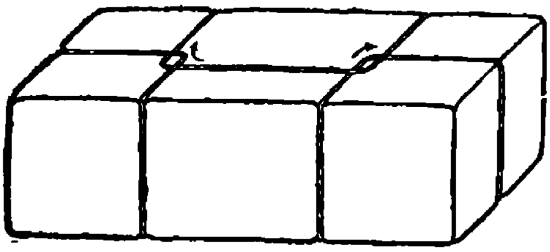


Рис. 130.

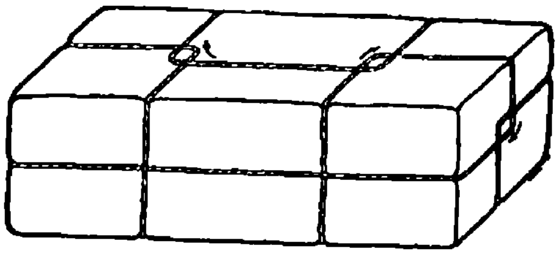


Рис. 131.

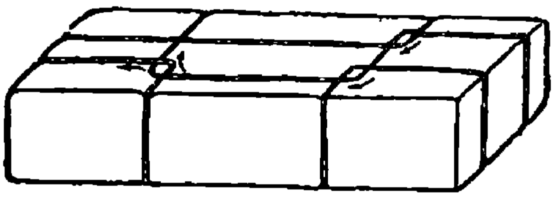


Рис. 132.

нового куска веревки, закрепленного в подходящем месте. При решении третьей задачи (оно указано на рис. 131) обычным способом является обвязывание на половине высоты опять-таки с помощью нового куска веревки. На рис. 132 дано одно из возможных решений последней задачи.

5. Зададим дополнительно еще такой вопрос: какие правильные тела (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр; см. рис. 166—169) можно обойти по их ребрам одним движением так, чтобы ни одно ребро не было пройдено дважды?

Неуникурсальные фигуры

Вернемся к случаю, который выше не был полностью рассмотрен,— когда имеются углы, в вершинах которых сходится нечетное число отрезков. Тот случай, когда таких углов два, мы уже разобрали. Что касается случая, когда налицо только один такой нечетный (так мы будем говорить для краткости) угол, то он получиться не может; вот это мы и докажем.

Если l_r — число углов, в вершинах которых сходится по r отрезков, то число s всех отрезков мы получим, образовав для всех наличных r произведения $l_r r$ и просуммировав их. Но так как при этом каждый отрезок был засчитан дважды, по обоим его концам, то эту сумму надо еще разделить на 2. Итак, запишем, что

$$s = \frac{1}{2} \sum_r l_r r.$$

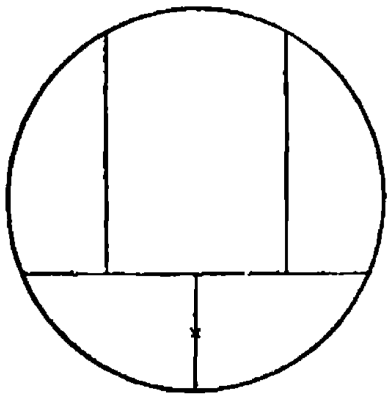


Рис. 133.

Пусть теперь все r, кроме одного из них,— числа четные, а единственному нечетному r_0 пусть отвечает лишь один угол, то есть $l_{r_0} = 1$. Тогда все члены суммы $l_r r$ делятся на 2, кроме одного, и для s мы не можем получить целочисленный ответ, как это требуется по сути дела. Итак, такой случай невозможен.

На рис. 133 мы видим фигуру с 8 нечетными углами. Гражданин Столовой ломал себе голову, как тремя движениями (вдоль линий) стереть такую фигуру (ее нарисовали мелом на столе в пивной). Так как у него ничего не получилось, он обратился за помощью в газету. То, что изложено выше, должно дать читателю средства для доказательства, что при этом требуют невозможного. Но какой вывод надо сделать, если будет удален отмеченный крестиком отрезок?

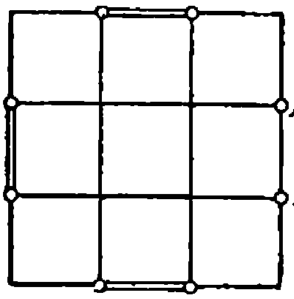


Рис. 134.

Теперь поразмыслим над схемой трехчленного магического квадрата (рис. 91). И здесь мы имеем восемь нечетных углов. Соединим каждые две соседние нечетные вершины кратчайшим отрезком — на рис. 134 эти отрезки нарисованы двойными. Так мы будем поступать до тех пор, пока не останутся без такого соединения две нечетные вершины *А* и *Б*. Их-то мы и выберем в качестве начальной и конечной точек нашего пути, считая, что при остальных нечетных вершинах в нашем распоряжении только по одному входу и выходу.

Тогда становится возможным (выбросив три вспомогательных пути) пройти нашу фигуру одним непрерывным движением.

З а д а ч а. Таким же образом исследуйте схему шахматной доски для 4-, 5- и т. д. до 8-членного магического квадрата!

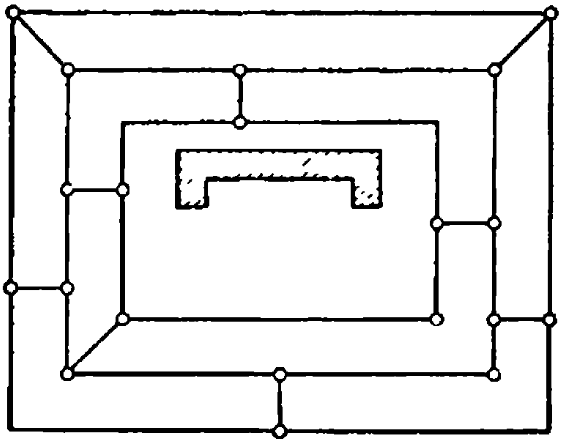


Рис. 135.

Приведем еще один встреченный нами в литературе пример такого рода. На плане, который изображен на рис. 135, показан сад с дорожками и двадцатью кустами роз на них.

Требуется пройти по дорожкам мимо каждого розового куста и только один раз. Решить эту задачу будет вовсе не трудно, если выделить затрудняющие решение излишние связующие дорожки и не обращать на них внимания при решении.

Задача Эйлера о мостах

На рис. 136 показана р. Прегель вблизи Калининграда (б. Кенигсберг). Сначала надо учитывать только семь из восьми мостов, указанных на рисунке. В начале восемнадцатого столетия, когда было только семь мостов, в Кенигсберге многие интересовались вопросом, можно

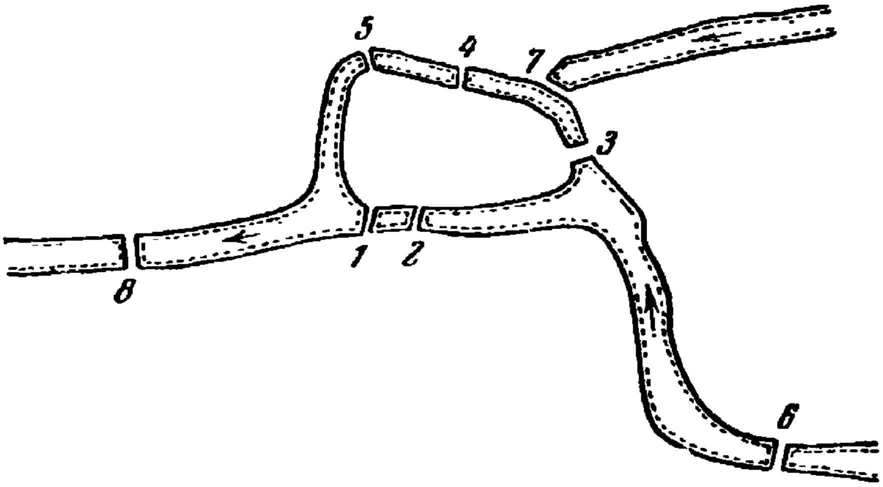


Рис. 136.

ли одним непрерывным обходом пройти по всем семи мостам, притом по каждому из них только по одному разу. Этим вопросом заинтересовался и знаменитый математик Эйлер, поэтому нашу задачу связывают с его именем.

Следующие соображения достаточны для того, чтобы убедиться в невозможности положительного ответа: возьмем одну точку на острове, вторую точку — справа, третью — слева от Прегеля и, наконец, четвертую — между двумя рукавами реки. Тогда наша задача сводится к тому, чтобы описать непрерывным движением без повторений линию, показанную на рис. 137. Согласно проведенному выше исследованию это невозможно, так как из всех четырех точек исходит нечетное число путей.

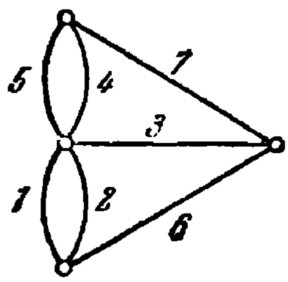


Рис. 137.

Много лет спустя на реке появился восьмой (железнодорожный) мост. Можно ли решить поставленную задачу, если разрешено пользоваться и железнодорожным мостом?

Если мы снова построим схему задачи, то она будет иметь примерно такой вид, как на рис. 138. Теперь уже две вершины стали четными, и только в двух вершинах сходится нечетное число путей. Последнее обстоятельство не должно нас смущать: надо только выбрать одну из нечетных вершин в качестве начальной, а вторую нечетную вершину — в качестве конечной точки нашего пути.

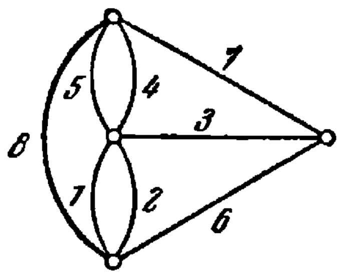


Рис. 138.

Если мы начинаем путешествие из точки, находящейся между двумя рукавами реки, то наш путь пройдет последовательно, скажем, по мостам 7, 4, 2, 1, 5, 8, 6, 3, и мы закончим путешествие на острове. Однако нельзя обойти все мосты так, чтобы вернуться в исходную точку.

Спустя еще некоторое время был построен новый, девятый мост между мостами 6 и 2, или 3 примерно там, где

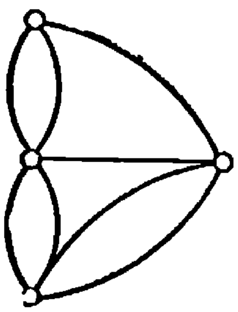


Рис. 139.

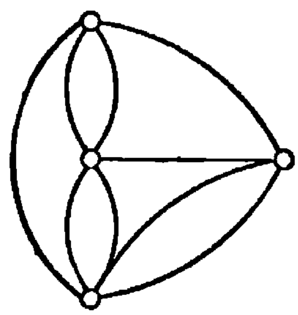


Рис. 140.

на рисунке имеется стрелка. Возможен ли: а) обход всех этих мостов, кроме моста 8, и б) обход всех девяти мостов.

Ответы на эти вопросы можно получить, рассмотрев схемы на рис. 139 и 140.

И в том, и в другом случаях мы убеждаемся, что обход возможен, а как именно осуществить его в этих случаях, мы предоставляем найти читателю[1]).

Самопересечения

Когда говорят о четырехугольнике, то обычно имеют в виду «выпуклые» четырехугольники, то есть такие, которые целиком лежат «по одну сторону от каждой стороны». Но существуют также и «вогнутые» четырехугольники (рис. 141), и самопересекающиеся четырехугольники

[1]) Математическую теорию эйлеровой задачи о мостах и предыдущих задач см. А р е н с II.

(рис. 142), которые, в противоположность выпуклым, лежат по обе стороны некоторых из сторон.

В связи с этим уже относительно пятиугольников возникает такой вопрос: каково наибольшее число возможных

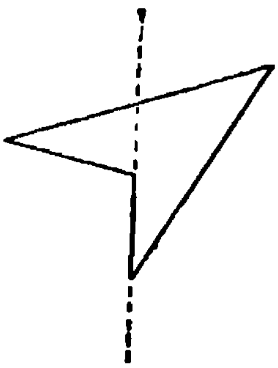


Рис. 141.

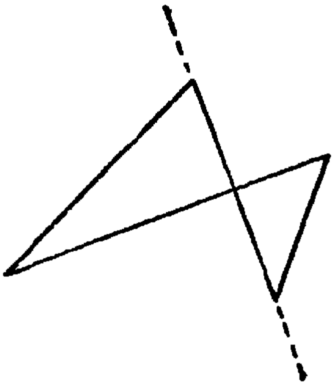


Рис. 142.

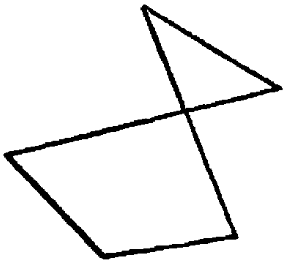


Рис. 143.

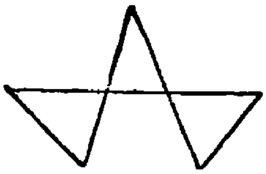


Рис. 144.

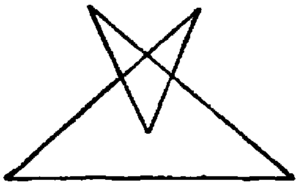


Рис. 145.

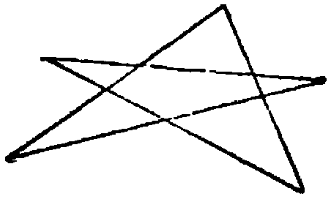


Рис. 146.

самопересечений и возможны ли самопересечения в любом числе, меньшем наибольшего. На рис. 143—146 представлены четыре возможных случая. Наибольшее число самопересечений равно пяти, наряду с этим имеем пятиугольники с 1, 2, 3, но не с 4 самопересечениями.

Пусть читатель испытает свои силы на шестиугольнике, сначала просто путем проб.

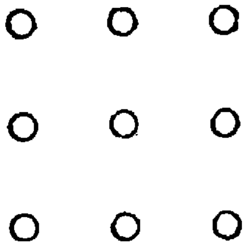


Рис. 147

Ответ на наш вопрос получен для любого n-угольника, но мы не будем здесь приводить общую формулу, быть может, некоторые читатели смогут найти ее самостоятельно.

В виде добавления укажем еще одну задачу, которая, собственно, не вполне относится к нашей теме.

На рис. 147 показано известное размещение девяти точек в виде квадрата, как это делают при игре в кегли и в других играх. Надо провести сплошную линию так, чтобы она состояла только из четырех отрезков и проходила через все девять точек нашего поля.

Лабиринты

Все знают рассказ о Минотавре и его лабиринте на о. Крите и о том, как нить Ариадны помогла найти выход. Мы приведем несколько примеров таких лабиринтов. Первый из них (рис. 148) находится вблизи Лондона

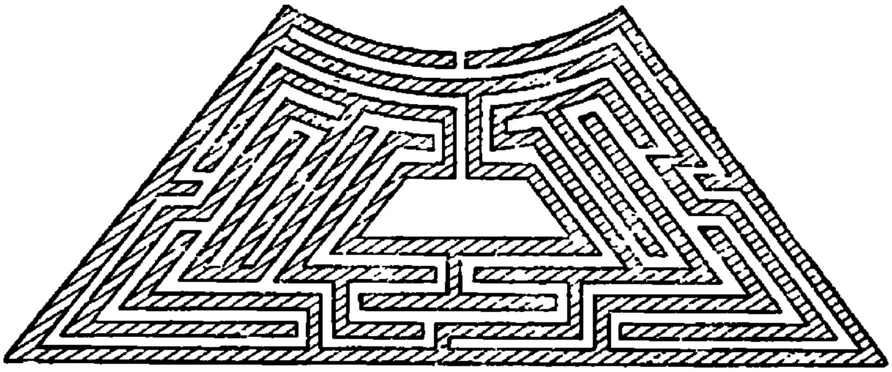


Рис. 148.

в саду Гэмптон-Корта (Hampton Court); заштрихованные полоски обозначают живые изгороди, а белые участки — дорожки.

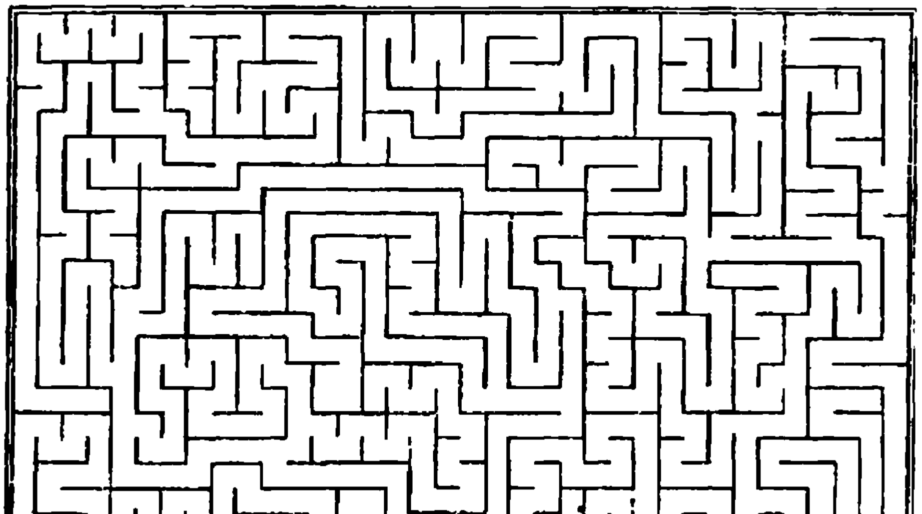
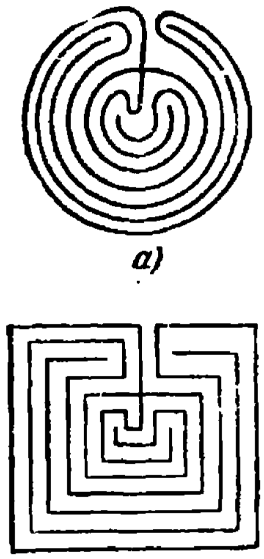


Рис. 149.

Второй лабиринт (рис. 149) устроил Раус Болл в своем саду.

Оба эти лабиринта родственны с историческим критским лабиринтом: на рис. 150 воспроизведены изображения, которые нанесены на старых монетах из Кносса. Дети греков и римлян находили развлечение в таких лабиринтах, как и молодежь наших дней. Это доказывает дошедший до нас от древности чертеж (рис. 151) [1]. И германским племенам не были чужды такие сады-ловушки. В заповеднике



а)

б)

Рис. 150.

Рис. 151.

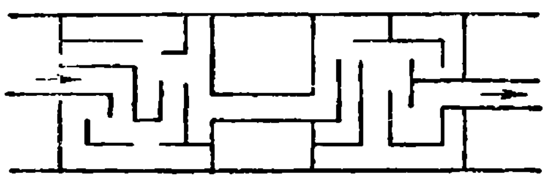


Рис. 152.

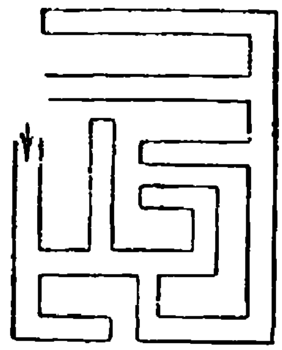


Рис 153.

Скансен вблизи Стокгольма можно наблюдать, как дети вышагивают по запутанным тропам обложенного камнем «Троеборга», что воспроизводит устройство, находящееся на острове Висби.

И сюда вмешались психологи: веселую игру в лабиринт они использовали для своих испытаний способностей.

---

[1]) Надпись гласит: Labyrinthus. Hic habitat Minotaurus (лат.), что значит: Лабиринт. Здесь живет Минотавр.

На рис. 152—155 мы приводим заимствованные из набора психологических тестов четыре сравнительно простых примера. Испытуемый должен начинать водить острием карандаша с места, обозначенного стрелкой, и достичь, в случае рис. 155, внутреннего ядра, а в остальных трех случаях — выхода.

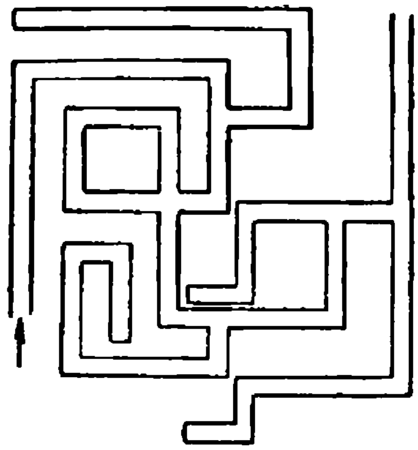


Рис. 154.

Решить задачу, как выйти из лабиринта, даже если он действительно необозрим и запутан, не так трудно, как это казалось древним. Разумеется, можно отметить пройденный путь, если не с помощью нити, то каким-либо другим способом, и пройти по этому пути обратно. Именно так хотели выбраться из лабиринта леса Гансик и Гретель, но птицы склевали хлебные крошки, рассыпанные детьми! Простой способ был указан в 1873 году Хр. Винером. При входе нужно выбрать одну из стенок, скажем, левую, и все время держаться этой стенки. Рекомендуем испытать этот способ на приведенных здесь лабиринтах. При этом предполагается, что имеется только один выход из лабиринта. Если есть несколько выходов, то можно снова двинуться в путь от того выхода, которого мы уже достигли, дойти затем до второго выхода и т. д.

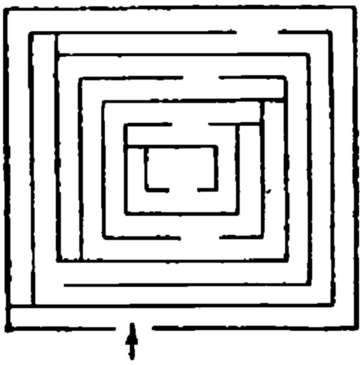


Рис. 155.

Впрочем, это решение не без изъяна. Если, скажем, в лабиринте Болла внимательно проследить за тем, каков пройденный нами путь, то окажется, что мы не прошли вдоль всех стенок. Действительно, способ Винера вполне хорош для того, чтобы заведомо найти выход из лабиринта, но он не гарантирует того, что будут пройдены все дороги лабиринта. Для этой цели надо применить другой способ, указанный в книге Люка. Нужно придерживаться следующих указаний.

1. Из исходного пункта идем любым путем. Этот путь либо имеет конец, то есть образует тупик, или же приводит к перекрестку, где сходятся несколько путей. Если мы попали в тупик, то надо вернуться тем же путем в исходное положение.

2. Если мы попали на узел дорог, то отмечаем путь, по которому мы пришли на перекресток и продолжаем двигаться по любому иному пути, который мы снова отмечаем. Так мы поступаем всякий раз, как попадаем на перекресток, на котором мы еще не были.

3. Если попадаем на перекресток, на котором мы уже были, то это, прежде всего, может случиться при движении по неиспользованному ранее и, следовательно, не отмеченному еще пути. Тогда мы возвращаемся назад по этому пути, но при этом мы отмечаем этот путь вторично.

4. Если же оказывается, что мы попали на этот перекресток по такому пути, который, как указывает пометка, был уже перед этим один раз использован, то либо мы избираем другой, еще не использованный путь, либо же, если такового в нашем распоряжении уже нет, мы возвращаемся по одному из уже использованных путей.

Это правило не очень просто, и весьма не просто доказательство того, что, следуя этому правилу, мы действительно пройдем по всем дорогам лабиринта. Тех, кого заинтересует это доказательство, отсылаем к книгам Л ю к а и А р е н с а.

14. ПРОБЛЕМА СОСЕДНИХ СТРАН

В одной из книг по занимательной математике приведено такое сказание. Жил некогда король, у которого было пять сыновей. Когда король почувствовал близость кончины, созвал он сыновей и повелел им после его смерти разделить между собою государство так, чтобы владения каждого граничили с владениями всех остальных братьев, притом чтобы владения эти сходились не в одном пункте, а имели общий участок границы. Вскоре после такого распоряжения король умер, и сыновья попытались разделить государство на части так, как повелел отец. Но сколько они ни пробовали и ни мудрили, сколько ни консультировались с самыми крупными в стране геометрами, им не удавалось произвести раздел так, как этого желал их отец. Государство осталось неразделенным, а так как оно благодаря этому процветало, то постепенно они пришли к мысли, что отец знал о невыполнимости своего предписания и, давая его, хотел сберечь единство государства.

Наверное читатель в свою очередь сделает несколько попыток добиться выполнения такого на вид столь простого требования. Расположить четыре соседние страны так, как требуется,— это пустяк. На рис. 156 показано одно из таких расположений.

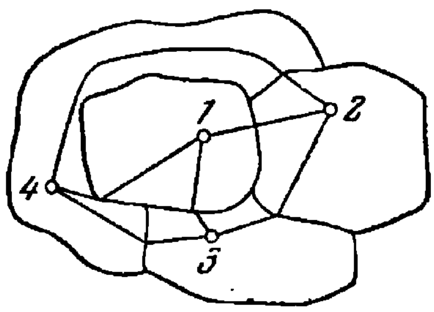


Рис. 156.

Представим себе, что в каждой стране выделена определенная точка, скажем, верхушка башни собора в столице государства. Тогда, как это видно на рис. 156, можно линиями соединить каждую из выделенных точек со всеми остальными так, чтобы не было ни одного пересечения. Можно представить себе эти пути проведенными так, чтобы они лучеобразно расходились из каждой точки к трем участкам границы и пересекали затем границу. Заметим еще, что эти пути не являются прямолинейными.

Наше утверждение сводится к тому, что невозможно, чтобы пятая страна так граничила с заданными четырьмя странами (как бы эти четыре страны ни были расположены), чтобы и эта пятая страна имела со всеми остальными общий участок границы.

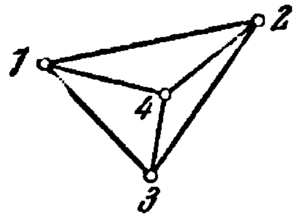


Рис. 157.

Сначала начертим схему точек и путей в случае четырех стран — все это напоминает нам метод, примененный при рассмотрении эйлеровой задачи о мостах. Три точки, допустим точки 1, 2, 3, всегда образуют треугольник. Четвертая точка лежит либо внутри, либо вне этого треугольника, а третья возможность исключается, потому что при наших допущениях четвертая точка не может попасть на сторону треугольника. Рассмотрим сначала первую возможность, и пусть 4 находится в треугольнике 1 2 3; тогда, если имеется еще пятая точка с исходящими из нее путями, то она должна находиться либо внутри, либо вне, тогда не может быть пути из 4 в 5, не пересекающего другие пути; стало быть, остается только вторая возможность. Рис. 157 дает схему в случае наличия четырех стран. Точка 5 должна лежать в одном из малых треугольников. В любом случае, мы имеем тогда одну точку вне этого малого треугольника и, следовательно, проложить к ней путь без пересечений нельзя.

Если 4 находится внутри треугольника 1 2 3, а 5 — вне, то невозможность построения также очевидна, стало быть, остается только исследовать тот случай, когда обе точки 4 и 5 находятся вне треугольника 1 2 3. Теперь расположение линий показано на рис. 158. Точка 5 либо расположена внутри одного из трех малых треугольников, имеющихся на этом рисунке, и тогда путь от нее к одной из остальных точек нельзя пройти без пересечения с другими путями; либо точка 5 находится вне всей системы путей, указанных на схеме, но тогда ее нельзя соединить с общей точкой всех малых треугольников (в данном случае с точкой 3) без пересечения с одним из уже проведенных путей.

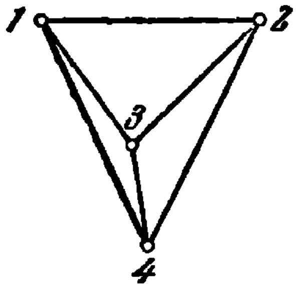


Рис. 158.

Итак, мы доказали, что искомое расположение путей во всех случаях не может быть осуществлено. Но перед этим было доказано, что будь задача пяти стран разрешима, такое расположение путей существовало бы. Следовательно, задача пяти стран неразрешима.

С нашей задачей тесно связана другая задача, имеющая известное практическое значение,— задача четырех красок. Достаточно четырех красок, чтобы раскрасить географическую карту с произвольным числом областей так, чтобы никакие две области, имеющие общую границу, не были одинаково окрашены. Конечно, можно указать сколько угодно разбиений на области, при которых в одной и той же точке сходится больше чем четыре области. Но в нашей формулировке речь идет о наличии общей границы в виде отрезка или дуги некоторой линии. Математическое доказательство указанного на практике проверенного утверждения до сих пор не найдено. Но во всяком случае ясно то, что если бы задача пяти стран допускала решение, то задача четырех красок была бы неразрешимой.

В связи с рассмотренной нами задачей дадим еще некоторые пояснения. Представим себе, что государство легендарного короля находится на кольце, пусть на кольце Сатурна. В этих условиях все ли остается по-прежнему? Легко видеть, что дело обстоит не так, как раньше. На рис. 159 показана полоса, разбитая на пять областей. Вообразим, что верхний край склеивается с нижним, так что получается удлиненная трубка. Затем склеим оба свободных конца трубки так, чтобы получилось кольцо; конечно,

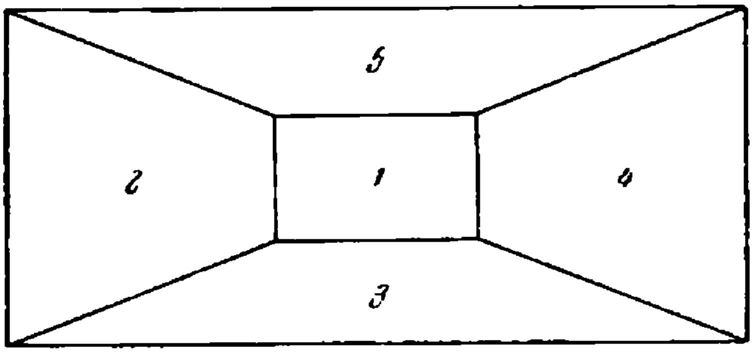


Рис. 159.

надо допустить, что трубка сделана из гнущегося материала, например из резины. Теперь на кольце не только область 1 граничит с 2, 3, 4 и 5, как на плоскости, но и 2 граничит с 1, 3, 4 и 5, и любая другая область граничит со всеми остальными. Таким образом, задача пяти стран разрешима на кольце.

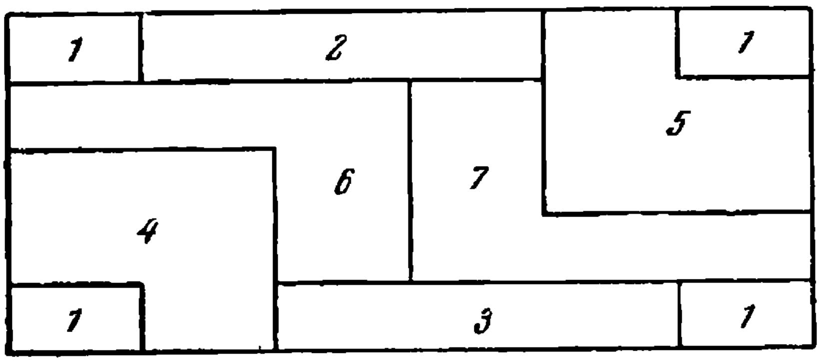


Рис. 160.

Более того, здесь мы можем пойти значительно дальше. Мы покажем сейчас на примере, что даже 7 областей можно разместить на кольце так, чтобы каждая область граничила со всеми остальными (рис. 160). Мы не рисуем кольца а изображаем соответствующий прямоугольник, из которого кольцо получается по тому же способу, что и выше Рекомендуем читателю тщательно проверить, что на получающемся кольце действительно каждая область граничит с каждой.

Кольцо дает нам пример того, что для геометрических соображений весьма существенно, с какими соотношениями связности мы имеем дело. В качестве упражнения можно рекомендовать проведение соответствующих рассуждений для ленты Мёбиуса. И в задаче раскрашивания карт в случае кольца, конечно, получаются иные выводы.

15. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМЫ В ИСКУССТВЕ И ПРИРОДЕ

С древних времен правильные фигуры вызывали интерес не только у математиков, но и у нематематиков всех родов. Для одних такие фигуры имели значение орнамента в произведениях искусства, то есть с эстетической точки зрения, для других они были окутаны мистическим ореолом, были связаны с тайнами мироздания. Впрочем, и в природе мы наблюдаем на каждом шагу, наряду с многообразием неправильных образов, стремление к созданию правильных геометрических форм.

На плоскости мы имеем правильные многоугольники с любым числом сторон, начиная с трех. Естественно, что особое внимание сначала привлекали также многоугольники с небольшим числом углов: равносторонний треугольник, квадрат, правильный пятиугольник, правильный шестиугольник. К тому же все эти фигуры могут быть построены с помощью циркуля и линейки, что безусловно было известно уже пифагорейцам.

О квадрате здесь ничего особенного мы не скажем (напомним лишь о стихотворении Трояна в первой части этой книги); это — геометрический образ, который постоянно используется как на практике, так и в искусстве. Равносторонний треугольник уже в древности поразительно часто встречается в художественных ремеслах, иной раз как подставка или треножник для разных целей. Что касается пяти- и шестиугольника, то тут на первом плане их звездообразные виды. Для геометра не очень много нового дает фигура из двух наложенных друг на друга равносторонних треугольников — так называемая «звезда Давида» (рис. 161).

Довольно рано стал известным математически интересный факт, что вокруг некоторого круга можно расположить шесть равных ему кругов так, чтобы каждый из них касался двух соседних и центрального круга. На рис. 162 мы видим золотую пластинку, относящуюся к микенской культуре, стало быть, второго тысячелетия до нашей эры; на пластинку нанесен орнамент, встречающийся на застежках у северных народов (точнее, у скандинавов и их соседей.— *Ред.*) и на других украшениях.

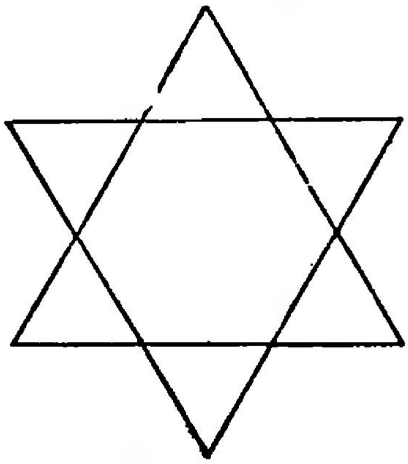


Рис. 161.

Рис. 162.

Больше интереса представляет пятиконечная звезда, у которой есть несколько имен: пентаграмма и др.

Пятиконечную звезду мы видим на рис. 163. Внутри мы замечаем правильный пятиугольник, а если соединить вершины звезды, тоже получается правильный пятиугольник. Займемся тем, что определим все имеющиеся в фигуре стороны и углы. Сперва возьмемся за углы. Так как сумма углов пятиугольника составляет 540°, то каждый его угол насчитывает 108°. А теперь вычислим все остальные. Все углы — трех родов. Кроме углов в 108°, есть еще углы в 72° и 36°. Углы этих трех родов обозначены на рисунке, соответственно знаками +, — и ○.

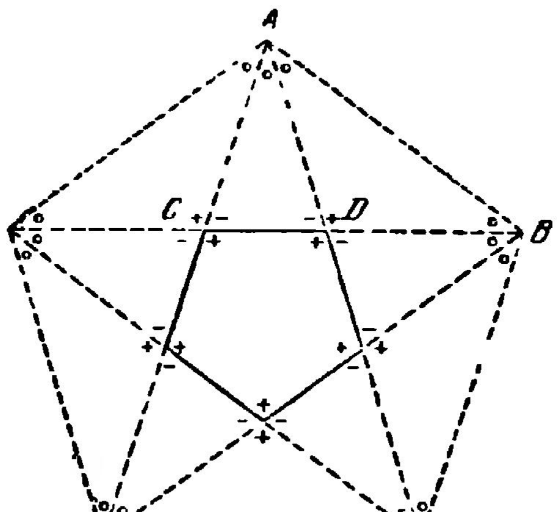


Рис. 163.

Отрезки имеем тоже трех родов: стороны малого пятиугольника — их мы обозначим через s, стороны звезды — их обозначим через t, и стороны большого пятиугольника.

Нетрудно усмотреть (хотя бы из равнобедренного треугольника ABC), что сторона большого пятиугольника равна $s + t$. Так как треугольники BAC и CAD подобны, то имеем также

$$s : t = t : (s + t).$$

Деление отрезка на две части s и t такие, что меньшая часть так относится к большей, как бóльшая относится ко всему отрезку, называют «непрерывным»; позже стали говорить в таких случаях, что это «золотое сечение».

В древности редко встречались правильные многоугольники с числом сторон, превышающим 6. Теперь мы знаем, что Архимед занимался семиугольником — последний нельзя точно построить с помощью циркуля и линейки. Семиконечная же звезда играла известную роль в астрологии.

В западных странах деление круга на равные части снова привлекло внимание математиков. Весьма тщательно изучал этот вопрос Дюрер, у которого были свои предшественники. Но только Гаусс исчерпывающим образом решил важную для науки задачу — определить те правильные многоугольники, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Между прочим, он показал, что к ним относится семнадцатиугольник, а также 257-угольник и 65537-угольник.

Рука об руку с человеком науки шел человек дела. Строители, особенно в эпоху готики, неустанно совершенствовали и утончали свою ажурную резьбу по камню. Им уже не хватало пространства над верхней линией окон, они делали в фасадных стенах добавочные «лепестковые» окна, сверкавшие подобно чудесным звездам всеми цветами своих стекол, вставленных в десять, двенадцать или шестнадцать секторов, на которые был разделен их круг. Камнерез того времени должен был быть одновременно и геометром. Первая написанная на немецком языке геометрия была наставлением для резчиков по камню.

Но применение звездчатых геометрических форм в качестве архитектурных украшений вовсе не было привилегией этих строителей соборов. Деление круга на равные части мы находим в орнаменте и северных стран, и столь своеобразного арабского искусства. На куполе одного из склепов в Каире имеется даже девятиконечная звезда. И мы знаем, что арабоязычные математики много занимались делением круга на девять равных частей.

Той «лучевой» симметрии, которая преобладает в правильных многоугольниках, можно противопоставить осевую симметрию. Использование симметрии в искусстве восходит к незапамятным временам. Фронтоны храмов, отделка окон и стен дома — все это оформляется симметрично. Даже при украшениях стен предпочитают соблюдать симметрию, и это так же заметно в стенных росписях Помпеи, как и в современных квартирах, где ревностно следят за тем, чтобы любой предмет имел своего «партнера». От древнейшего из известных нам культурных миров, от аккадов Двуречья, до нас дошли рельефные изображения, на которых каждый сюжет представлен дважды, в симметричной форме.

Рис. 164.

Подобные изображения нам известны и в древнем Египте. Пристрастие к фантастическим симметрическим фигурам, получаемым при так называемой «клексографии» — расплывании чернильных пятен на бумаге — (рис. 164), теперь считается детской забавой, а во времена не столь деловые, как наши, и взрослые не были чужды таких интересов.

Перейдем теперь из плоскости в пространство и начнем здесь сразу с пространственной симметрии. Уже тогда, когда перед нами симметрично расположенное здание, мы имеем дело с пространственной симметрией, точнее сказать — с симметрией относительно некоторой плоскости. Типичным примером является противопоставление предмета и его зеркального отображения. Как ни просто такое явление, как ни часто приходится с ним иметь дело, ясное представление об этих вещах встречается редко. Станем перед зеркалом. У моего визави левая и правая стороны поменялись,— когда я поднимаю правую руку, он поднимает левую. Но почему не поменялись местами верх и низ? Когда я держу зеркало над головой или когда я становлюсь на зеркало, так действительно получается, но поменялись ли при этом местами правая и левая стороны?

Здесь нам приходится установить глубокое различие между осевой симметрией на плоскости и пространственной симметрией. Две осесимметричные фигуры на плоскости можно совместить, не нарушая их формы,— для этого надобно только повернуть одну из фигур вокруг оси симметрии на 180°. С пространственными отображениями этого проделать уже нельзя. Мы не можем совместить с его зеркальным отображением пространственный триэдр, состоящий их трех взаимно перпендикулярных лучей (рис. 165), которые мы можем различать хотя бы с помощью окраски, скажем, в синий, желтый и красный цвета. Пусть читатель устроит себе такую фигуру, а затем ее зеркальное отображение и попытается их совместить. Мы не можем натянуть на левую руку правую перчатку (для этого ее надо было бы сначала вывернуть наизнанку).

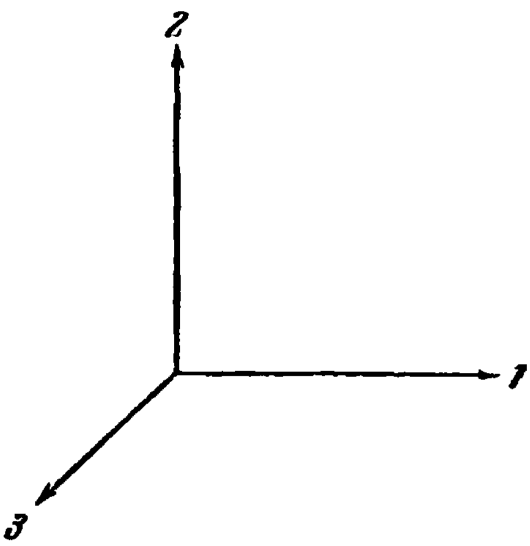


Рис. 165.

Многие связывают с пространственной симметрией то обстоятельство, что люди в большинстве недовольны своими портретами и даже своими фотографиями. Действительно, почти на каждом лице есть заметные отклонения от симметрии. Но каждому по его отображению в зеркале известен его симметричный образ, поэтому настоящее изображение кажется ему чуждым и «несходным».

Живописцы охотно рисуют автопортреты.Делают они это, стоя перед зеркалом и перенося на холст то, что они в зеркале видят. Поэтому, если судить по автопортретам, среди художников столько левшей. Только немногие сумели обратить свое изображение в зеркале.

· На плоскости мы можем строить правильные многоугольники с любым числом сторон, а верно ли соответствующее утверждение для пространства? От правильного многогранника мы требуем не только того, чтобы он состоял исключительно из конгруэнтных правильных граней, но и чтобы в каждой вершине сходилось одно и то же число граней, притом под одинаковыми углами. В этих условиях, в отличие от плоскости, получается, что возможны только пять правильных многогранников: тетраэдр (четырехгранник), октаэдр (восьмигранник), гексаэдр (куб, шестигранник), икосаэдр (двадцатигранник) и додекаэдр (двенадцатигранник). Эти тела, за исключением куба, везде нам привычного — в предметах обихода и в искусстве,— изображены на рис. 166—169. Они редко встречаются в архитектуре и в художественных ремеслах. Пирамиды египтян не представляют собою половины октаэдров. Иной раз какой-нибудь математик выберет для абажура или для пресс-папье форму икосаэдра, и это, пожалуй, все.

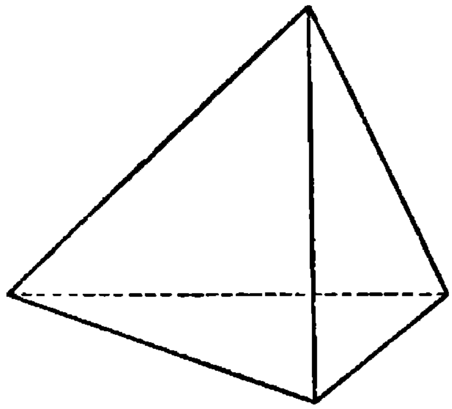


Рис. 166.

И все же эти правильные тела однажды сыграли значительную роль. Иоганн Кеплер, которому мы обязаны основными законами движения в нашей планетной системе, составил себе определенное представление о расстояниях различных планет от Солнца. В конце концов он пришел к такой теории: если вообразить себе шар с центром в Солнце, описанный радиусом, равным радиусу орбиты Сатурна, и вписать в этот шар куб, то орбита Юпитера будет находиться на шаре, вписанном в этот куб. Если вписать в этот последний шар тетраэдр, а в тетраэдр снова вписать шар, то на этом шаре будет находиться орбита Марса. Так и надо продолжать, описывая и вписывая шары и поместив между Марсом и Землей двенадцатигранник, между Землей и Венерой двадцатигранник, а между Венерой и Меркурием восьмигранник. На рис. 170 показана модель кеплеровского размещения планет, взятая из его собственных сочинений. Впрочем, Кеплер указывает, что числовые соотношения соблюдаются не вполне точно, и на его рисунках это заметно потому, что он придает своим шарам известную толщину, а ее размеры определяются с учетом наличия спутников у соответствующих планет. Но построение Кеплера рушится уже в силу того, что со временем были открыты планеты, более удаленные от Солнца, чем Сатурн (Уран, Нептун, Плутон), и для новых промежутков между планетами у нас уже нет новых правильных тел, так как все наличные пять тел уже использованы.

Не следует отделываться от построений, подобных тем, какие в данном случае мы находим у Кеплера, только усмешкой: разве строение музыкальных аккордов и распределение линий в спектре водорода, согласно формуле

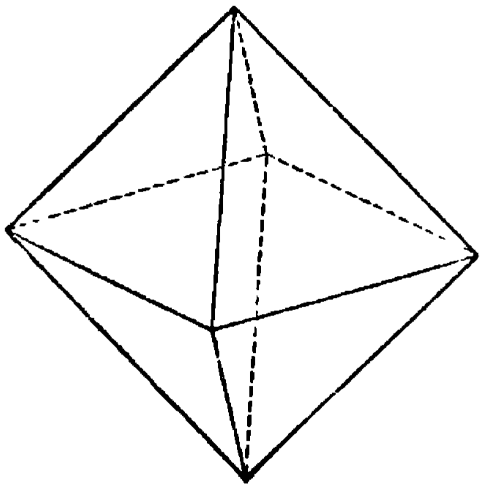


Рис. 167.

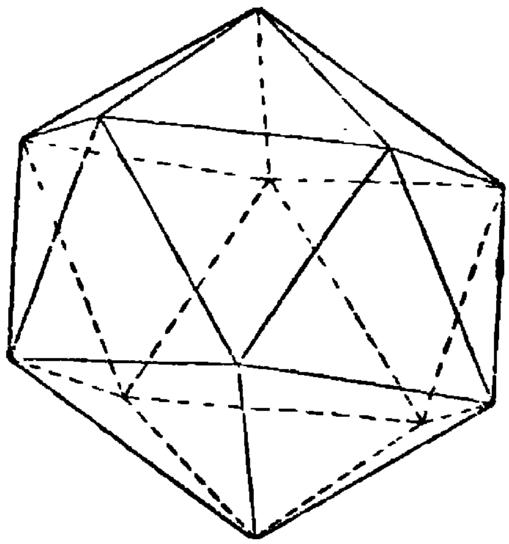


Рис. 168.

Бальмера, не столь же примечательны, разве менее удивительна та система структуры атомов, которая общепринята в современной физике? Что в последовательности средних расстояний планет от Солнца имеются удивительные, правда не совсем точно соблюдающиеся закономерности, было четко указано, кроме Кеплера, виттенбергским профессором Тициусом (1772). Приняв расстояние от Сатурна до Солнца за 100, Тициус получил для(среднего) расстояния Меркурия от Солнца 4, а соответствующие числа для других планет оказались равными: для Венеры 4+3 = 7, для Земли 4+6 = 10, для Марса 4+12 = = 16, для Юпитера 4 + 48 = 52, для Сатурна 4 + 96 = = 100. Они укладываются в формулу: $r_n = 4 + 2^{n-1} \cdot 3$, если начать с Венеры ($n = 1$) и считать, что между Марсом и

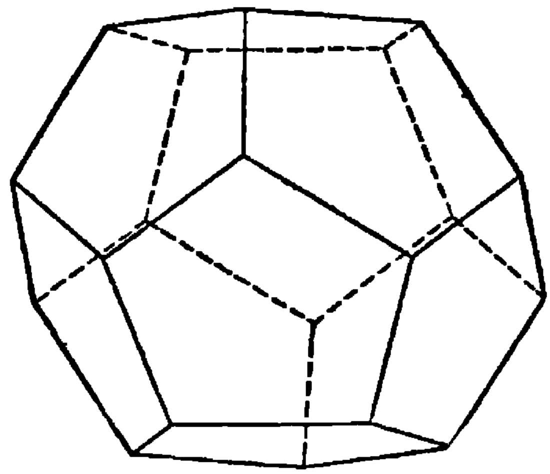


Рис. 169.

Юпитером есть пропуск. Эта же формула дает для Урана $4 + 64 \cdot 3 = 196$, что является неплохим приближением, но уже для Нептуна ($4 + 128 \cdot 3$) получается плохой результат. Тициус предсказал, веря в свою формулу, что между Марсом и Юпитером будет найдена планета — это

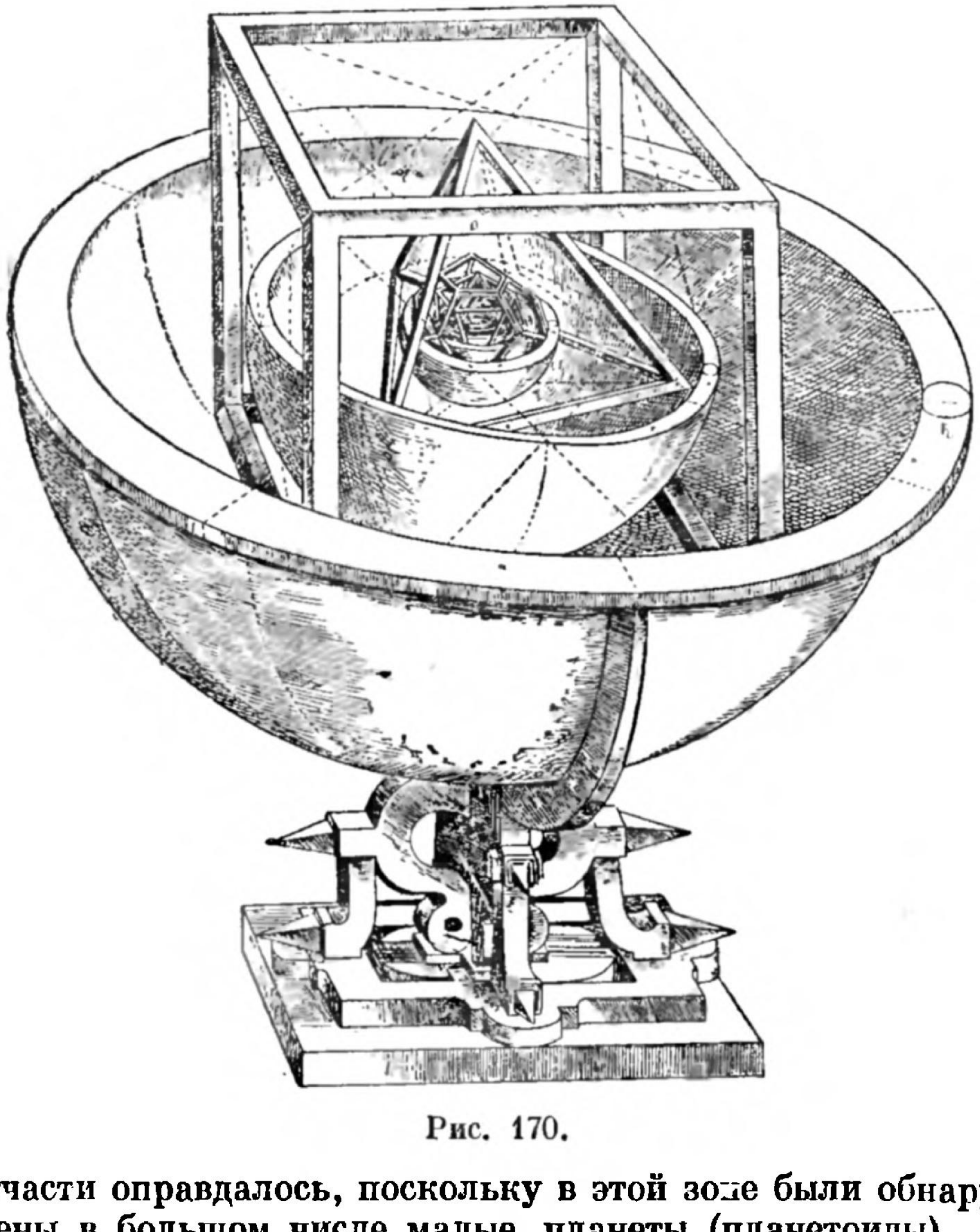


Рис. 170.

отчасти оправдалось, поскольку в этой зоне были обнаружены в большом числе малые планеты (планетоиды).

Говоря об умозрениях Кеплера, мы уже подошли к вопросу о геометрических формах в природе. Теперь мы еще раз оглянемся на пройденный нами путь, на этот раз с тем, чтобы рассмотреть правильные формы в природе.

Деление круга на равные части напоминает нам формы цветов, в частности деление на три и на шесть частей мы видим у большинства лилий и у одного из скромных водяных цветков (рис. 171); деление на четыре части — у крестоцветных, у роз и у многих других цветов, особенно красивым примером может служить обычная у нас Paris quadrifolius (рис. 172), деление на пять частей — у гвоздик и многих других цветков. В мире животных звездообразные формы встречаются реже, тут нам надо обратиться к низшим организмам — к медузам и иглокожим. Зато симметричное построение является правилом для животных — замечательные формы оно принимает у бабочек; в мире растений, среди цветков, мы его тоже встречаем на каждом шагу.

Рис. 171.

Художники пытались открыть как у людей, так и у животных определенные соотношения размеров; в более близкие к нам времена прежде всего обращались к золотому сечению. Уже египтяне в эпоху Древнего Царства

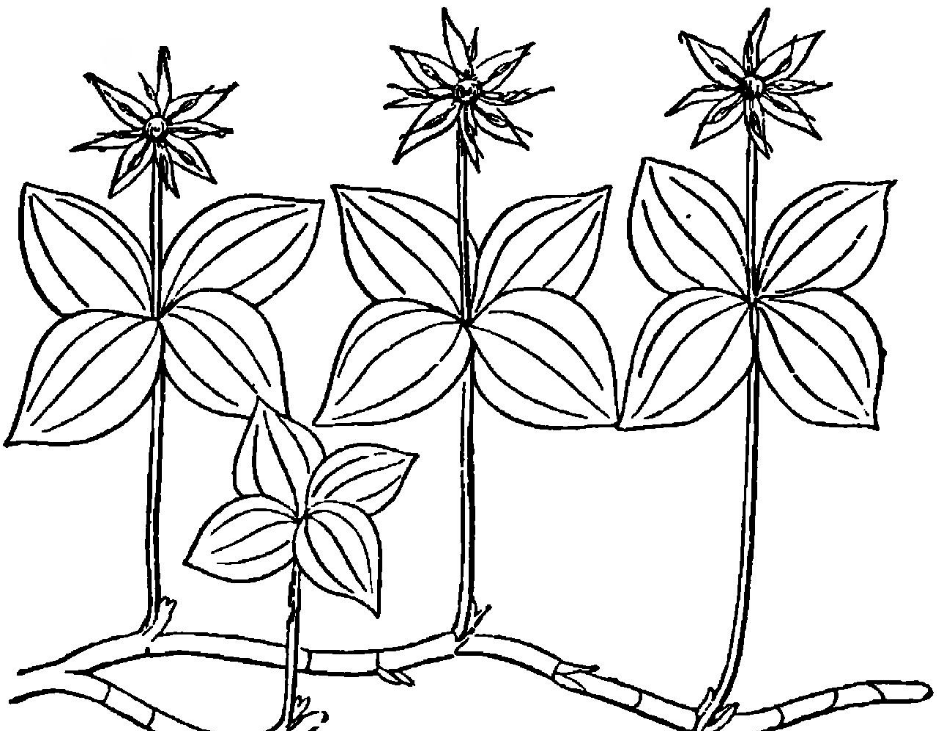


Рис. 172.

рисовали человеческие фигуры, применяя сетку вспомогательных линий, построенных согласно известным пропорциям. Что человек с распростертыми руками от кончиков пальцев одной руки до кончиков пальцев другой руки имеет длину такую же, каков его рост, известно

Рис. 173.

издавна. На рис. 173 воспроизведен набросок, принадлежащий, насколько нам известно, Рембрандту и изображающий человека в такой позе с описанным около него квадратом. Всеобщую известность приобрели неутомимые исследования Леонардо да Винчи и, прежде всего, Дюрера в изучении пропорций тела людей и животных.

Рис. 174.

Укажем в заключение по крайней мере на одну кривую, которая часто встречается в природе,—на спираль. Мы усматриваем ее в завитках улитки. Если мы хотим ограничиться плоской спиралью, то примеров есть достаточно как среди живых форм, так и среди окаменелостей. Прекрасные спирали получаются в сечении различных ракушек, аммонитов, оболочек многих ископаемых, монетообразных нуммулитов (рис. 174).

Почему в природе так часто получается эта замечательная линия? Она объединяет, если позволить себе такую наивную формулировку, вращательное движение вокруг центра и непрерывно идущий рост в длину. Если вращать равномерно луч вокруг его начальной точки и одновременно заставить некоторую точку двигаться по лучу с постоянной скоростью, удаляясь от начала, то эта точка опишет спираль (рис. 175). Если изменить закон движения точки, например, если скорость ее движения по лучу равномерно возрастает, то меняется и форма спирали.

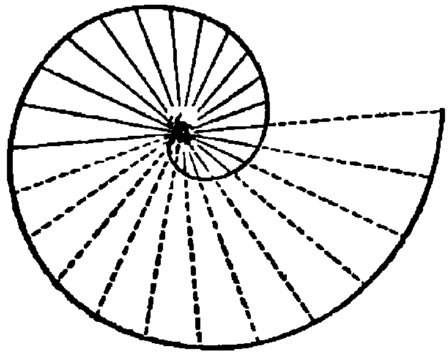


Рис. 175.

Такое наличие простых, красивых и правильных образов в царстве природы, из множества которых в большом и в малом мы привели лишь немногие, ставит перед нами новые задачи. Мы не можем удовлетворяться тем, что так оно есть,— мы хотели бы исследовать вопрос, почему это так, мы хотели бы познать закон образования этих форм в таком виде, чтобы замечательное и особенное стало необходимым и само собою понятным. Как в архитектуре, которая развивалась от математических форм пирамид, обелисков, колонн у древних египтян до подчеркнутых параллелепипедов современного железобетонного строительства, с бо́льшим или меньшим успехом исследуются те основания, которые определяли выбор форм, так и в природе мы хотели бы найти удовлетворение нашей потребности выявлять причины.

16. ГЕОМЕТРИЯ И ЖИВОПИСЬ

Задача живописца — дать плоское, стало быть, двумерное изображение пространственных, то есть трехмерных, предметов, притом изображение «наглядное», иначе говоря, такое, чтобы сразу можно было узнать, что изображено. Все различные подходы к этой задаче находятся между двумя крайностями. В одну эпоху идеалом является подражание настолько искусное, что живой голубь пытается клюнуть нарисованную ягоду, в другую эпоху плоскостной характер картины подчеркивается, старание создать иллюзию настоящего объявляется нехудожественным, иной раз даже заполняют плоскость картины «беспредметным» содержанием. Но указанная основная задача остается в силе всегда, когда речь идет о том, чтобы дать изображение предметов. Художники нового времени, начиная хотя бы с Возрождения, решали ее, по возможности точнее воспроизводя предметы так, как мы их видим. Лучи зрения сходятся в глазу (мы отвлекаемся здесь от «бинокулярного» зрения, то есть зрения двумя глазами), они обвертывают контуры изображаемого предмета и их след отмечается на плоскости изображения. Такой способ дает вполне определенные законы построения изображений. На табл. XIII (в конце книги), гравюре по дереву Дюрера, который самым драгоценным приобретением за время своего путешествия по Италии считал науку о перспективе, нанесенные дополнительно линии указывают на первый основной закон этой математической перспективы: лучи, параллельные в пространстве, пересекаются на картине в «точках схода»; если эти лучи горизонтальны, то их «точка схода» лежит на «горизонте» — вполне определенной горизонтальной прямой на картине; точка, в которой кажутся сходящимися лучи, перпендикулярные к картине, и которая, конечно, тоже лежит на «горизонте», называется «точкой зрения».

Таким образом, вполне верно то, что говорит живописец — действующее лицо одного из романов Оттомара Энкинга: «Ты думаешь, что книга — это четырехугольный предмет с параллельными краями. Так ли это? Положи ее перед собою, и что ты увидишь? Книзу все это сходится под острым углом, не так ли? И вот этот-то острый угол, заметь себе, и называется перспективой. Всегда надо рисовать не так, как есть на самом деле, и тогда будет получаться правильно».

Да, но действительно ли это будет правильно? Так вот, подтверждением может служить фотоизображение, получаемое чисто механическим путем. Фотографический аппарат заменяет здесь глаз. И на фотографии какого-либо здания действительно можно проверить, например, «закон точки зрения».

Многие частные задачи требуют особо трудных построений перспективы, и, пожалуй, наиболее интересна перспектива плафонов. Весьма своеобразное впечатление всегда производят такие картины, которые кажутся противоречащими самой надежной очевидности: человек, который всегда смотрит на вас, с какой бы стороны вы ни подошли к картине; обезьяна, прыгающая через обруч, нарисованная на потолке так, что где бы ни стоять в комнате, она обращена к зрителю.

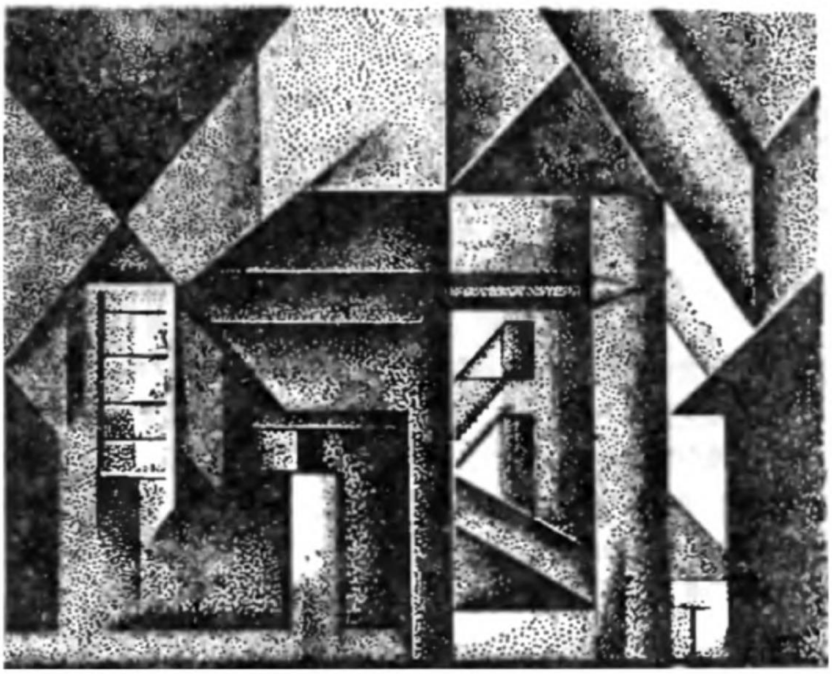


Рис. 176.

В Маннгеймском музее есть картина романтика Керстинга, на которой мы видим живописца Фридриха в его мастерской: простая комната, инвентаря живописца мало, но в глубине на стене висят угольник, рейсшина, линейка. Это говорит о том, какое значение романтики придавали перспективе. Импрессионисты не очень высоко ее ставили, а последовавшие за ними экспрессионисты — тем более; только сменившая их «новая предметность» вернулась к перспективе. Все же в некоторых течениях экспрессионизма, как в футуризме и кубизме, мы находим своеобразное и в математическом отношении интересное восприятие пространства, когда в одной и той же картине стремятся свести воедино различные зрительные впечатления. В качестве примера мы воспроизводим одну из картин Фейнингера (Feininger) (рис. 176).

Не всегда знали и применяли законы живописной перспективы. Вот несколько характерных примеров, выбранных при беглом просмотре истории культуры последних тысячелетий. Для древних египтян характерно смешение вертикальной, горизонтальной и боковой проекций, причем всякий раз выбирается изображение, более выразительное и простое. Пруд, окруженный деревьями, изображается так, что пруд дается в плане, волны — в вертикальной проекции, а деревья, в вертикальной и боковой проекциях, вставлены по кругу в плоскость рисунка. Так же рисует и ребенок. Человеческая фигура в течение тысячелетий трактовалась египтянами так, как мы это видим, например, на стенной росписи из Фив (рис. 177). Голова дана в профиль, верхняя часть туловища — в вертикальной проекции, нижняя часть туловища и ноги — в профиль.

Рис. 177.

Эллинистические росписи стен в Помпеях и других местах на первый взгляд вполне четко соблюдают перспективу. Но если присмотреться ближе, то оказывается, что в них не соблюден «закон точки зрения».

Рис. 178.

В искусстве народов Восточной Азии: у китайцев, японцев и индийцев мы находим систематическое изображение предметов в косой параллельной перспективе, то есть так, что лучи, параллельные в пространстве, передаются параллельными лучами на картине. На табл. XIV (в конце книги) воспроизводится картина, относящаяся примерно к 1500 г., в два метра высоты. По ней можно составить себе вполне отчетливое представление о способе изображения, кажущемся нам весьма своеобразным. При передаче архитектурных деталей почти исключительно используются два плана: горизонтальный и наклоненный к горизонтальному примерно на 45°. Да и современные живописцы Востока не раз и не два прибегают к этой, представляющейся нам удивительной, параллельной перспективе, вероятно, скорее в расчете на то, чтобы создать впечатление архаичности, а не потому, что они считают этот способ особенно наглядным.

В заключение хотелось бы указать на некоторые поучительные иллюзии при живописном изображении пространственных предметов. Мы воспринимаем картину не такой, какая она в действительности, а видим в ней многое из того, что имеется в нашем опыте, притом большей частью не сознавая этого. Иначе, собственно, было бы невозможно воспринимать плоские образы как пространственные изображения. В качестве поучительного доказательства этого тезиса можно привести рисунки с «изрезанным контуром».

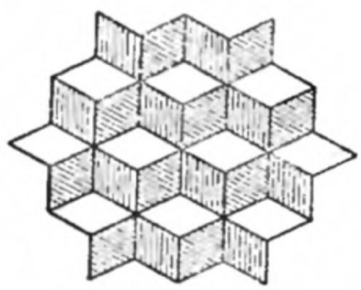


Рис. 179.

На рис. 178 воспроизведена простенькая рекламная картинка, взятая из какой-то газеты. Мы вполне ясно видим поднимающуюся над задним планом голову, хотя никакая линия их не разделяет: мы невольно добавляем ее от себя.

Другое своеобразное явление — многозначность некоторых изображений. Плоский, многократно использованный при укладке паркета и настиле метлахских плиток ромбовидный узор на рис. 179 может вызвать у нас представление пространственного нагромождения кубиков, притом в разных видах. Пусть читатель попробует установить, сколько различных расположений кубиков он может усмотреть на этом рисунке.

Большую роль при истолковании картины играет то, как падает свет. Если рассматривать сделанный с воздуха снимок местности, изрытой снарядами, или укрепления, то вырытые снарядами ямы и бетонированные огневые точки в зависимости от того, как падает свет, будут казаться либо воронками и окопами, либо холмиками и стенами. Подобная двузначность изображения — явление далеко не редкое.

Рис. 180 демонстрирует на первый взгляд поразительную иллюзию в оценке размеров. Мы уже настолько привыкли к перспективному восприятию изображения, что нам трудно примириться с необходимостью признать эти два круга равными. Значительно более необычным кажется тот же обман зрения, если вместо простых геометрических образов взять улицу с людьми (рис. 181). Именно этот обман зрения может служить хорошим доводом в пользу того, что центральная перспектива наилучшим образом сответствует нашему зрительному восприятию.

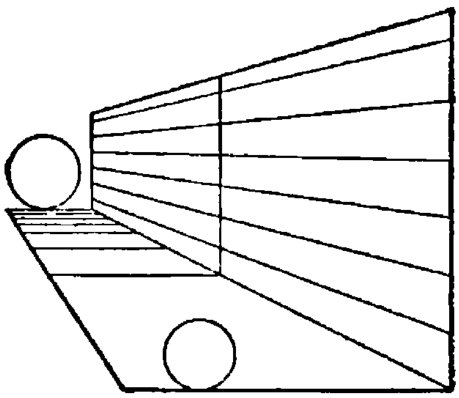


Рис. 180.

Рис. 181.

СЛОВАРЬ ИМЕН И ТЕРМИНОВ

Абель (Abel) Нильс-Хендрик (1802—1829) — норвежский математик, автор замечательных работ по математическому анализу и алгебре.

Адамс (Adams) Джон (1819—1892) — английский астроном. По неравномерности движения Урана одновременно с французским астрономом Леверрье указал на наличие в солнечной системе неизвестной ранее планеты (Нептун), благодаря этому открытой в 1846 г.

Аллотриа (греч.) — побочное, второстепенное.

Алкуин (Alcuinus, Alkuin; около 735—804), уроженец Йорка (Англия) — ученый монах, советник Карла Великого, автор сборника задач характера «занимательных».

Аммониты (Ammonoidea) — вымершая подгруппа головоногих, имевших известковый панцирь.

Аннариций — латинизированная форма имени персидского математика ан-Найризи, комментатора «Начал» Евклида; жил в конце 9 — начале 10 вв.

Архимед (Archimedes — 285—212 до н. э.) — величайший математик и механик Древней Греции.

Ахилл, Ахиллес (Achilleus) — герой греческих легенд, согласно «Илиаде» Гомера, самый красивый, храбрый и быстрый из вождей греческого войска, осаждавшего Трою.

Ахмес (точнее Ахмозе) — египетский писец, составитель (переписчик) математического папируса («папируса Райнда») 17 в. до н. э.

Базедов (Basedow) Иоганн-Бернгард (1723—1790) — немецкий педагог.

Бальмер (Balmer) Иоганн-Якоб (1825—1898) — швейцарский математик и физик, предложивший формулу для определенной серии линий водородного спектра (серия Бальмера).

Баше (Bachet, Sieur de Méziriac) Клод-Гаспар (1581—1638) — французский математик, автор сборника задач из области занимательной математики, относящихся к теории чисел. Издатель и комментатор работ Диофанта.

Беллини (Bellini) Джакомо (ок. 1400 — ок. 1470) — венецианский живописец, отец живописцев Б. Джентиле (ок. 1429—1507) и Джованни (ок. 1430—1516).

Беллман (Bellman) Карл Михаэль (1740—1795) — шведский поэт-лирик.

Бернулли — семья швейцарских ученых в области математики, механики, физики. Наиболее известны выдающиеся математики — братья Яков (1654—1705) и Иоганн (1667—1748) и сын последнего Даниил (1700—1782).

Боде (Bode) Иоганн-Элерт (1747—1826) — немецкий астроном.

Болл (Ball) Раус (1850—19?) — английский математик, автор книг по истории математики и по занимательной математике.

Борхардт (Borhardt) Карл Вильгельм (1817—1880) — немецкий математик, член Берлинской Академии наук.

Борель (Borel) Эмиль (1871—1956) — выдающийся французский математик.

Буш (Busch) Вильгельм (1832—1908) — немецкий поэт и прозаик, живописец, график. По характеру творчества — сатирик и юморист.

Бхаскара (Bhaskara) Ачария (1114—1185) — индийский математик, автор законченной около 1150 г. дидактической поэмы, в которой изложены сведения по алгебре, геометрии и астрономии; ему принадлежат выдающиеся результаты в теории чисел.

Вебер (Weber) Вильгельм Эдгард (1804—1891) — выдающийся немецкий физик, в течение ряда лет сотрудничал с Гауссом (см.).

Верфель (Werfel) Франц (1890—1945) — немецкий писатель (экспрессионист).

Видман (Wiedmann von Eger) Иоган — немецкий математик второй половины 15 в., профессор Лейпцигского у-та.

Винер (Wiener) Христиан (1826—1896) — австрийский физик и метеоролог, работал и в области занимательной математики.

Вольтер (Voltaire) — псевдоним Аруэ (Arouet) Франсуа-Мари (1694—1778) — знаменитый французский писатель и философ.

Вулкан — в древнем Риме бог огня, тождествен с Гефестом — богом-кузнецом греческой мифологии.

Газенклевер (Hasenklewer) Вальтер (1890—1940) — немецкий поэт и драматург. Его пьеса «Сын» написана в 1916 г.

Галилей (Galilei) Галилео (1564—1642) — знаменитый итальянский ученый, один из основателей классической механики.

Галуа (Galois) Эварист (1811—1832) — замечательный французский математик, уже в семнадцатилетнем возрасте сделавший выдающиеся открытия в области алгебры.

Гамильтон (Hamilton) Вильям Роуан (1805—1865) — знаменитый ирландский математик и механик.

Гаусс (Gauss) Карл-Фридрих (1777—1855) — знаменитый немецкий математик, также астроном, геодезист и физик. Вместе с физиком Вебером изучал магнетизм и сконструировал электромагнитный телеграф.

Гейне (Heine) Генрих (1797—1855) — знаменитый немецкий поэт. Его стихотворение «Лорелея» стало в Германии народной песней.

Геракл (или Геркулес) — легендарный богатырь древнегреческой мифологии. По одному из сказаний был отдан за нарушение воли богов царю Эвристею в услужение и, выполняя его приказ, одолел и убил трехтелого великана Гериона.

Герион — см. Геракл.

Герон (Heron) (2 в.) — математик Александрийской школы. Сохранился ряд его (или приписываемых ему) работ.

Гершель (Herschel) Вильям (1738—1822) — выдающийся английский астроном и оптик, немецкого происхождения.

Гёте (Goethe) Вольфганг-Иоганн (1749—1832) — великий немецкий поэт.

Гинцкей (Ginzkey) Франц-Карл (1871 г.— ?) — австрийский поэт и беллетрист.

Гиппий (Hippias) из Элиды (род. около 460 г. до н. э.) — греческий математик, о котором известно, что он осуществил трисекцию угла с помощью изобретенной им кривой (квадратриссы).

Гораций (Horatius) Флакк Квинт (65—8 до н. э.) — знаменитый древнеримский поэт.

Григ (Grieg) Эдвард (1843—1907) — выдающийся норвежский композитор.

Гумбольдт (Humboldt) Александр (1769—1859) — выдающийся немецкий естествоиспытатель и путешественник.

Гутцмер (Gutzmer) Август (1860—1924) — немецкий математик, работы преимущественно по математическому анализу.

Гюйгенс (Huygens) Христиан (1629—1695) — знаменитый голландский математик, механик и физик.

Ден (Dehn) Макс (1878—1952) — немецкий математик, работал в области геометрии, топологии, алгебры, истории математики.

Диофант (Diophantos) — александрийский математик 3-го века, автор «Арифметики» (в 13 книгах, из которых сохранилось 6) и сочинения о полигональных числах.

Драхма — древнегреческая монета (обычно серебряная) и весовая единица. Драхма по ценности равнялась 6 оболам, а обол был самой мелкой монетой. 100 драхм составляли мину.

Дюрер (Dürer) Альбрехт (1471—1528) — выдающийся немецкий живописец, график и теоретик искусства.

Зейдель (Seidel) Генрих (1842—1906) — немецкий писатель.

Зенон (Zenon) Элейский (490—430 до н. э.) — древнегреческий философ, известный своими «парадоксами», сыгравшими большую роль в развитии строгих методов рассуждения.

Золя (Zola) Эмиль (1840—1902) — знаменитый французский писатель.

Иосиф Флавий (36—105) — еврейский историк, писал по-гречески.

Какус — огнедышащий разбойник, сын бога Вулкана, убитый Гераклом.

Керстинг (Kersting) Георг-Фридрих (1785—1847) — немецкий живописец. Работал в манере К. Д. Фридриха (см.).

Ковалевская Софья Васильевна (1850—1891) — замечательный русский математик и автор нескольких беллетристических произведений.

Коши (Cauchy) Огюстен-Луи (1789—1857) — знаменитый французский математик, весьма разносторонний и плодовитый.

Крелле (Crelle) Аугуст-Леопольд (1780—1855) — немецкий инженер и математик, основатель издающегося поныне математического журнала, чаще всего называемого его именем (Journal für die reine und angewandte Mathematik; с 1826 г.).

Куммер (Kummer) Эрнст-Эдуард (1810—1893) — выдающийся немецкий математик, работал в области теории чисел, геометрии и дифференциальных уравнений.

Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик. Его и Эйлера считают крупнейшими математиками 18 в.

Лассвитц (Lasswitz) Курт (1848—1910) — немецкий писатель (прозван немецким Жюлем Верном) и философ, преподаватель математики по профессии, автор нескольких математических работ.

Лежандр (Legendre) Адриен Мари (1752—1833) — выдающийся французский математик.

Лейбниц (Leibniz) Готфрид-Вильгельм (1646—1716) — немецкий ученый-энциклопедист, гениальный математик.

Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci; 1456—1519) — гениальный итальянский художник и ученый.

Леонардо Фибоначчи (Leonardo Fibonacci) также Л. Пизанский (1180?—1250?) — выдающийся итальянский математик.

Лессинг (Lessing) Готхольд Эфраим (1729—1781) — немецкий писатель и философ, видный деятель немецкого просвещения.

Лиссауэр (Lissauer) Эрнст (1882—1937) — немецкий писатель.

Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) — гениальный русский математик, создатель гиперболической (неевклидовой) геометрии, профессор и ректор Казанского университета.

Лорелея см. Гейне.

Лука Паччоли см. Паччоли.

Люка (Lucas) Франсуа (1847—1891) — французский математик, работы преимущественно по теории чисел.

Манн (Mann) Томас (1875—1955) — выдающийся немецкий писатель.

Мёбиус (Möbius) Август Фердинанд (1790—1868) — немецкий математик; основные работы — по геометрии и теоретической механике.

Меркель (Merkel) — священник из Швабии, издавший в 1751 г. сочинение, в котором «доказывал», будто число π точно равно отношению двух целых чисел.

Мина — древнегреческая единица веса драгоценных металлов и денежная единица. См. драхма.

Морган де (de Morgan) Август (1806 — 1871) — английский математик; основные работы — по математическому анализу и математической логике.

Моргенштерн (Morgenstern) Христиан (1871—1914) — немецкий поэт.

Мосхопулос Мануэль — византийский математик конца 13 — начала 14 вв., автор трактата о магических квадратах.

Новалис (Novalis) — псевдоним Фридриха фон Гарденберга (1772—1801) — немецкий поэт.

Нуммулиты (от латинского nummus — монета) — семейство ископаемых — обладателей раковины с узором из многих витков.

Озанам (Ozanam) Жан (1640—1717) — французский математик, автор четырехтомного курса математики и сборника задач по занимательной математике.

Органон — общее название 6 трактатов Аристотеля по логике; в переносном смысле — свод принципов и правил научного мышления и исследования.

Остроградский Михаил Васильевич (1801—1862) — знаменитый русский математик и механик, член Петербургской Академии наук.

Паскаль (Pascal), Блэз (1623—1662) — знаменитый французский математик, физик, философ.

Пачоли (Pacioli) Лука (1445—1514) — итальянский математик, монах — отсюда прибавка к его имени слова фра — брат.

Пифагор (ок. 580 — ок. 500 до н. э.) — древнегреческий ученый и философ; его роль в развитии математики часто преувеличивают.

Плутарх (ок. 46—126) — древнегреческий писатель-моралист.

Поликрат — древнегреческое имя.

Понселе (Poncelet) Жан Виктор (1788—1867) — французский математик и механик, член Парижской Академии наук.

Пульфрих (Pulfrich) Карл (1858—1927) — немецкий физик-оптик.

Рафаэль (Rafaell) Санто (1483—1520) — знаменитый итальянский живописец и архитектор.

Рембрандт (Rembrandt) Харменс (1606—1669) — знаменитый голландский живописец и график.

Рибера (Ribera) Хусепе (1590—1652) — испанский живописец и гравер.

Риман (Riemann) Бернгард (1826—1866) — немецкий математик, один из крупнейших математиков 19 в.

Стриндберг (Strindberg) Йухен Август (1849—1912) — выдающийся шведский писатель.

Теано — древнегреческое имя.

Тициан (Tiziano) Вечелио (1477? 1488?—1576) — знаменитый итальянский живописец.

Тициус (Titius) Иоганн Даниэль (1729—1796) — немецкий математик и естествоиспытатель.

Тома (Thoma) Ганс (1839—1920) — немецкий живописец.

Троян (Trojan), Иоганн (1837—1915) — немецкий журналист и писатель, автор многих, преимущественно юмористических, рассказов и стихотворений.

Уланд (Uhland) Людвиг (1787—1862) — немецкий поэт.

Ферма (Fermat) Пьер (1605?—1665) — французский математик, один из крупнейших ученых 17 в.

Фейнингер (Feininger) Лионель (1871—?) — уроженец США, живописец, примыкал к кубизму.

Фехнер (Fechner) Густав Теодор (1801—1887) — немецкий философ и психолог, также автор юморесок (под псевдонимом — д-р Мизес).

Флобер (Flaubert) Гюстав (1821—1880) — выдающийся французский писатель.

Фребель (Frebel) Фридрих (1782—1852) — немецкий педагог.

Фридрих II (1712—1786) — прусский король.

Фридрих (Friedrich) Каспар Давид (1774—1840) — немецкий живописец.

Цицерон (Cicero) Марк Туллий (106—43 до н. э.) — знаменитый оратор, писатель и политический деятель Древнего Рима.

Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) — знаменитый русский математик, член Петербургской Академии наук.

Шамиссо (Chamisso) Адальберт (1781—1838) — немецкий поэт и естествоиспытатель (французского происхождения).

Швентер (Schwenter) Даниэль (1585—1636) — немецкий математик, автор ряда математических трактатов.

Штифель (Stiefel) Михаил (1487?—1567) — выдающийся немецкий математик.

Штраус (Strauss) Эмиль (1866—?) — немецкий писатель.

Шуберт (Schubert) Франц (1797—1828) — выдающийся австрийский композитор.

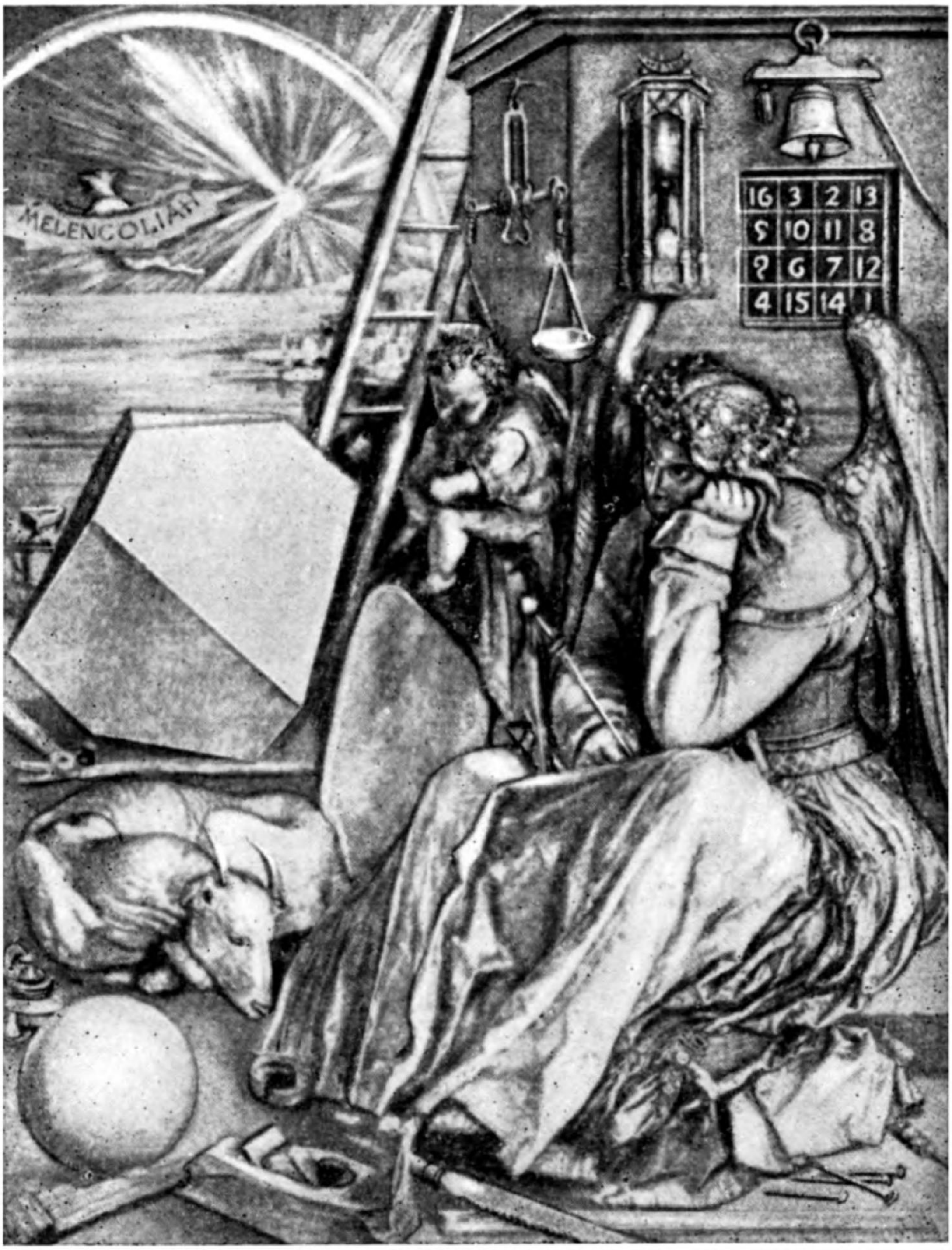
Эйлер (Euler) Леонард (1707—1783) — знаменитый математик и механик, родом из Швейцарии, петербургский академик, работал большую часть жизни в России.

Эйнштейн (Einstein) Альберт (1879—1955) — знаменитый физик, создатель теории относительности.

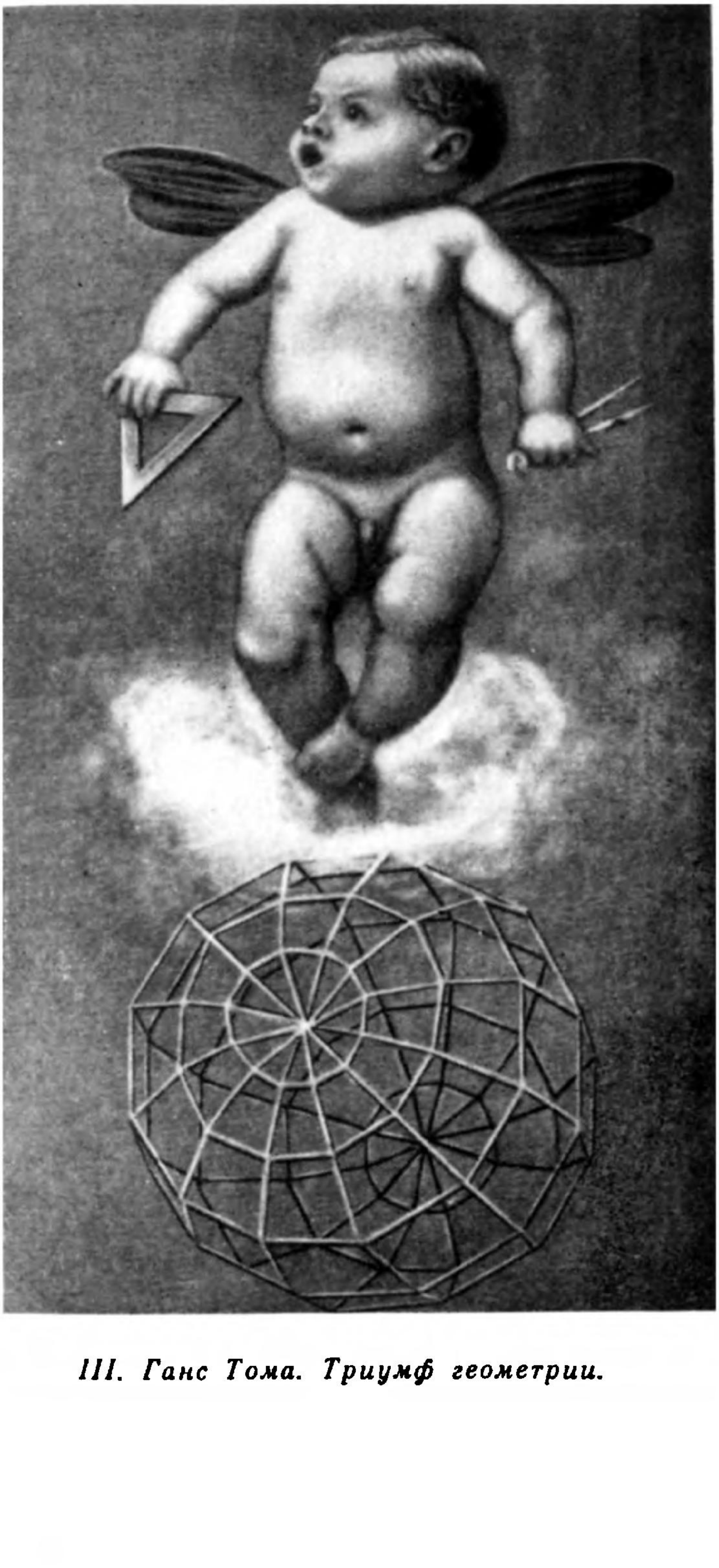
Эйт (Eyth) Макс (1836—1906) — немецкий инженер и писатель.

Энний (Ennius; 239—169 до н. э.) — древнеримский поэт. Его обширная поэма «Анналы» представляет изложение истории Рима от основания города до 2 в. до н. э.

I. Надгробный камень на могиле Якова Бернулли (кафедральный собор в Базеле).



II. Альбрехт Дюрер. Меланхолия. Гравюра.



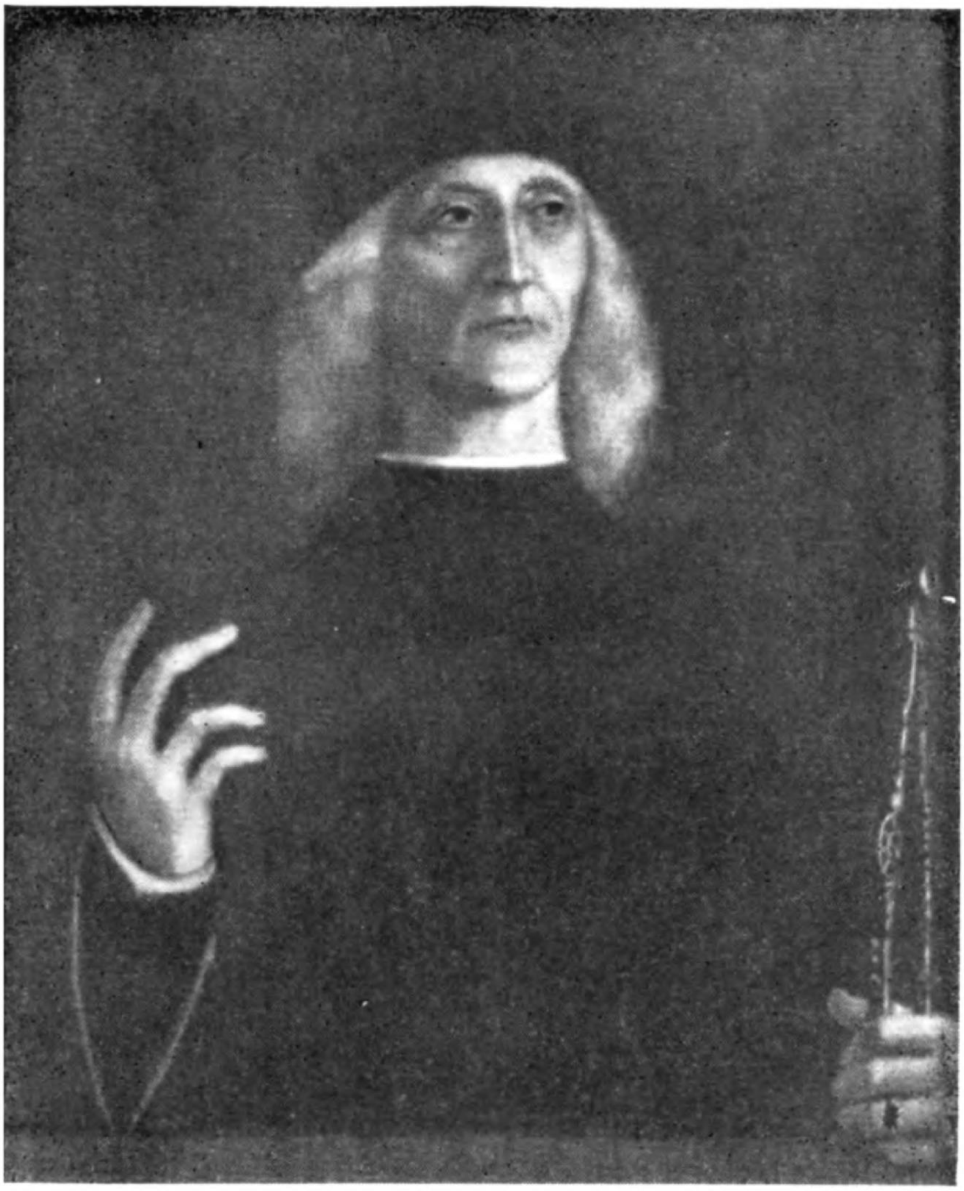
III. Ганс Тома. Триумф геометрии.

IV. Вечеллио Тициан. Земная и небесная любовь («Чистая и прикладная математика», см. стр. 70).

V. Памятник Николаю Копернику в г. Торунь.

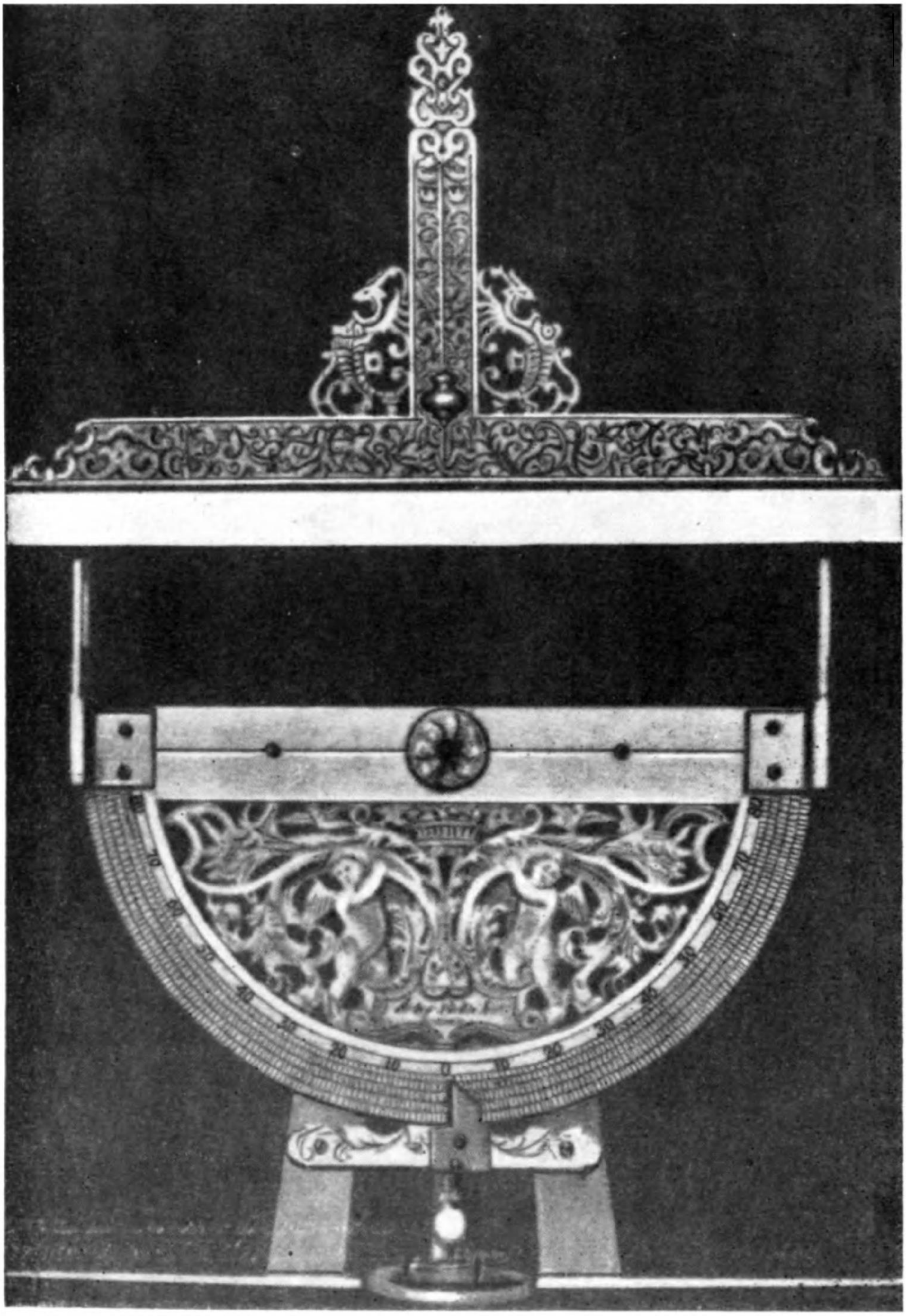
VI. Николай Иванович Лобачевский.
Бюст, установленный перед Казанским университетом.

VII. Памятник Карлу Фридриху Гауссу и Вильгельму Веберу в Геттингене.



VIII. Джентиле Беллини. Математик.

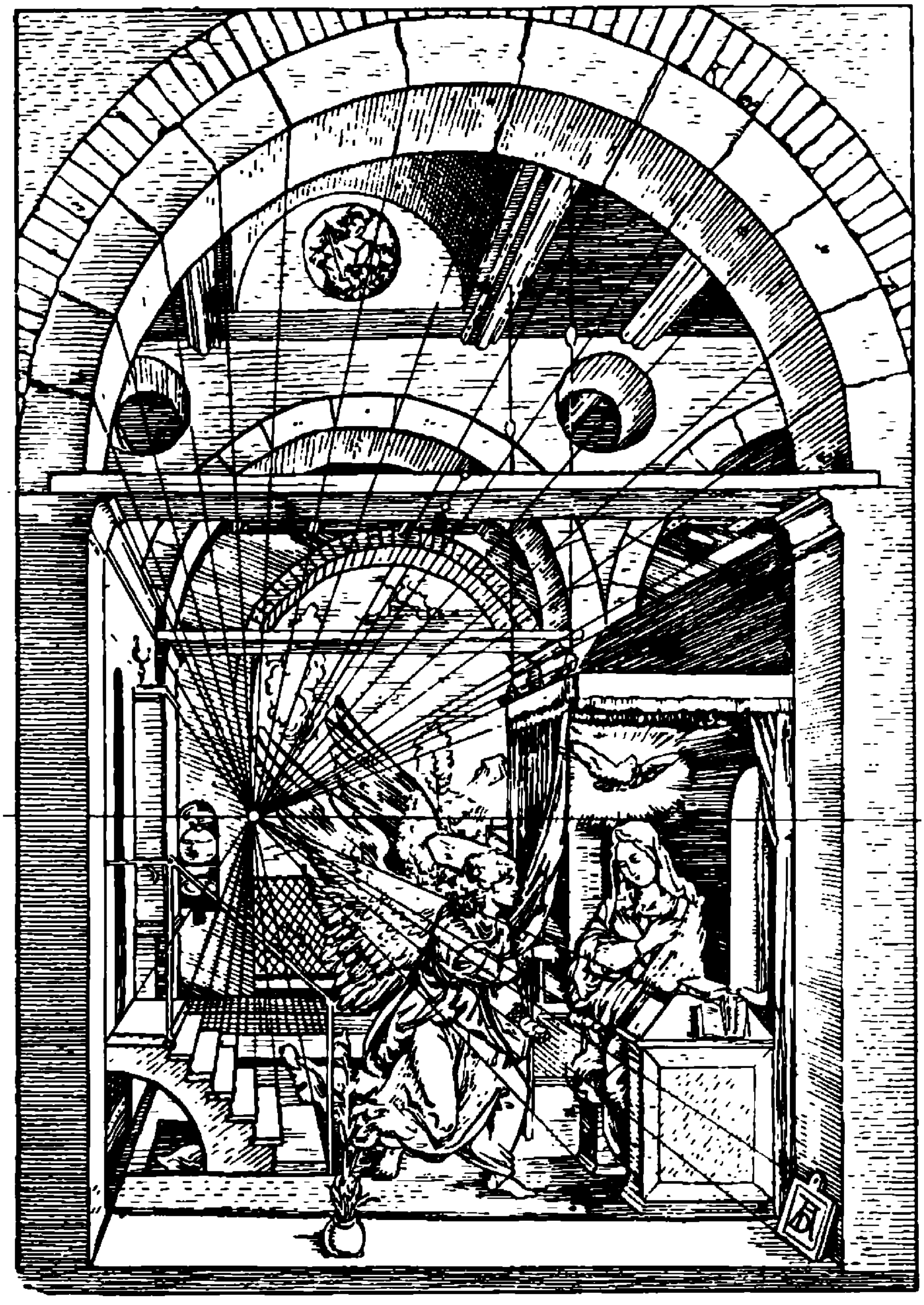
IX. Софья Васильевна Ковалевская.



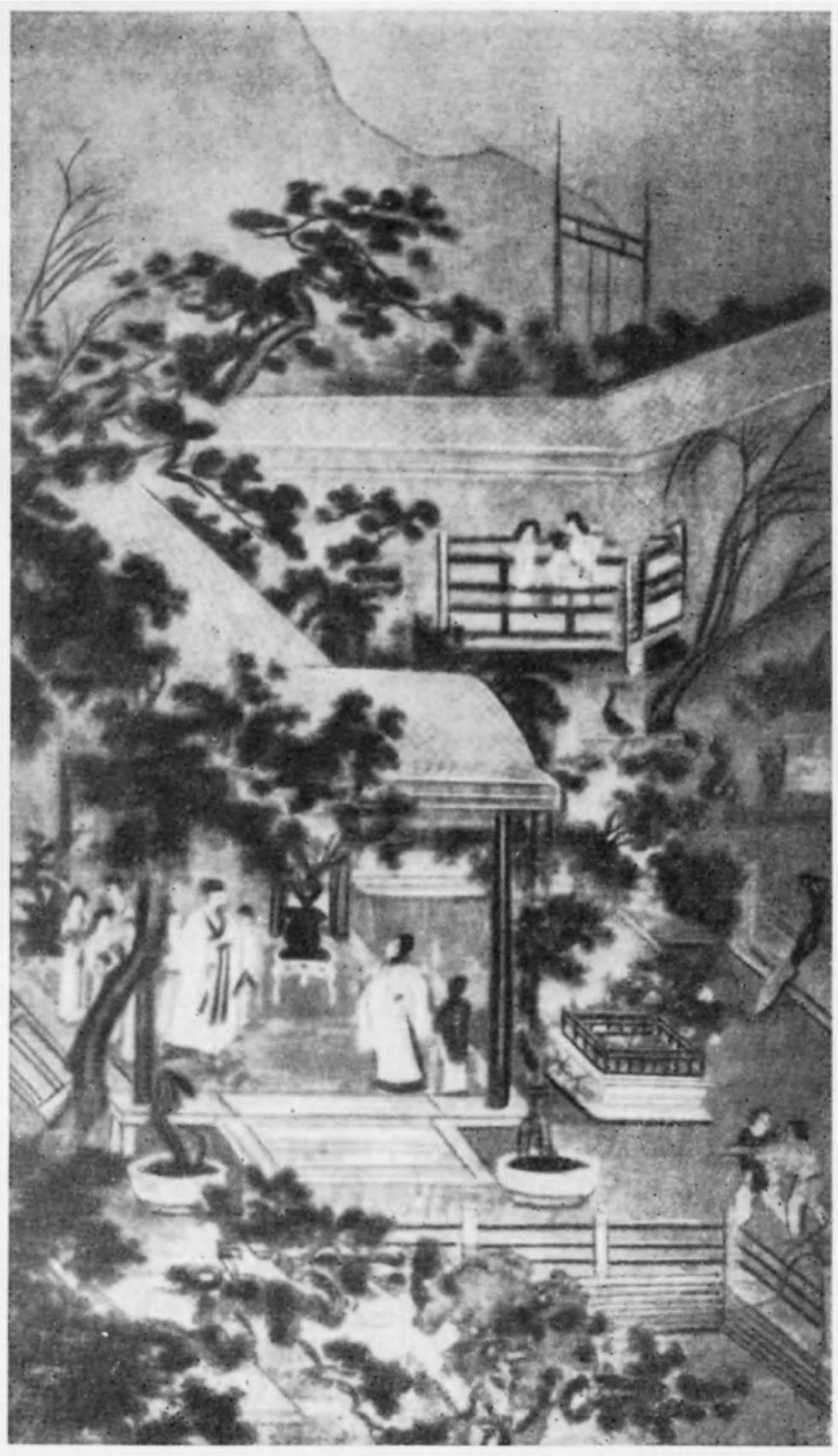
X. Математические инструменты: уровень (вверху) и прибор для измерения углов (внизу), 18 в.

XI. Армилярная сфера. Южная Германия, 16 в.

XII. Титульный лист «Практической арифметики» Георга Мейхснера, 1625 г.



XIII. Альбрехт Дюрер. Правосудие. Гравюра.



XIV. Сад Чжин Ку-юаня. Картина, ок. 1500 г.

XV. Математик.

Вальтер Лицман

**ВЕСЕЛОЕ И ЗАНИМАТЕЛЬНОЕ
О ЧИСЛАХ И ФИГУРАХ**

М., Физматгиз, 1963 г., 264 стр с илл

Редакторы *С А Широкова, В В Донченко*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректор *О. А. Сигал*

Сдано в набор 4/IX 1963 г. Подписано к печати 2/XI 1963 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 8,25+ +0,5 вкл. Условн печ. л. 14,35. Уч.-изд. л 13,40. Тираж 50 000 экз. Цена книги 40 коп. Заказ № 835.

Государственное издательство
физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А А. Жданова
Московского городского совнархоза.
Москва, Ж-54, Валовая, 28

Цена 40 коп.