П. И. РУБАН и Е. Е. ГАРМАШ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

«ВЫСШАЯ ШКОЛА» — 1963

П. И. РУБАН и Е. Е. ГАРМАШ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1963

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие ставит своей целью помочь студентам-вечерникам и студентам-заочникам в приобретении и закреплении навыков самостоятельного решения задач по аналитической геометрии, а также помочь им ознакомиться с имеющимися способами их решения.

Каждая глава этого пособия построена следующим образом: в начале дается справочный материал — формулы и определения, необходимые для решения задач рассматриваемой главы, затем следуют подробные решения с объяснениями типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения с необходимыми указаниями и графической иллюстрацией.

В конце каждой главы помещены задачи для упражнений с ответами.

Большинство задач, помещенных в пособии, составлены авторами. При составлении пособия использована следующая литература:

И. И. Привалов. Аналитическая геометрия. Гостехиздат, 1954—1960.

Н. В. Ефимов. Краткий курс аналитической геометрии. Гостехиздат, 1954—1960.

В. Б. Гуревич и В. П. Минорский. Учебник

аналитической геометрии для втузов. Физматгиз, 1958—1961.

О. Н. Цубербиллер. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Гостехиздат, 1953—1961.

Д. В. Клеттеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Гостехиздат, 1954—1958.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава I

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

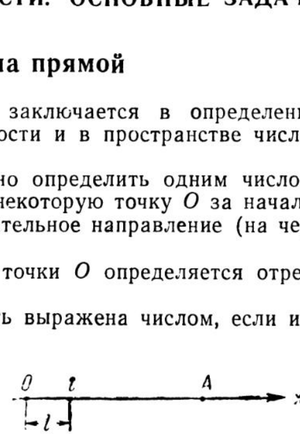
§ 1. Координаты на прямой

Основная идея метода координат заключается в определении положения точки на прямой, на плоскости и в пространстве числами — ее координатами.

Положение точки на прямой можно определить одним числом. Для этого возьмем на данной прямой некоторую точку O за начальную и выберем на этой прямой положительное направление (на чертеже указано стрелкой, черт. 1).

Положение точки A относительно точки O определяется отрезком OA.

Величина этого отрезка может быть выражена числом, если измерить его какой-либо единицей меры, например отрезком $OE=l$, а направление, в котором этот отрезок OA откладывается от начала O, определяется знаком этого числа.



Черт. 1.

Полученное таким образом положительное или отрицательное число $x=\frac{OA}{l}$ называется координатой точки A. Отсюда система координат на прямой представляет совокупность данных: 1) прямая, на которой лежит данная точка, 2) начальная точка O этой прямой, 3) единица меры e и 4) выбранное положительное направление на этой прямой.

Если даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то величина направленного отрезка M_1M_2 определяется по формуле:

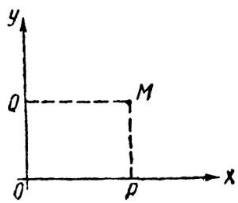
$$\text{вел. } M_1M_2 = x_2 - x_1, \tag{1}$$

а расстояние между двумя точками — по формуле:

$$M_1M_2 = |x_2 - x_1|. \tag{2}$$

§ 2. Координаты на плоскости

Для определения положения точки на плоскости пользуются прямоугольной или декартовой системой координат, которая состоит из двух взаимно перпендикулярных направленных прямых, называемых *осями координат*. Прямая Ox называется осью *абсцисс*, Oy — осью *ординат*. Точка их пересечения O называется *началом координат*. Единица меры e.



Черт. 2.

Положение точки M относительно прямоугольных осей координат определяется двумя числами: координатами точек P и Q (черт. 2). Эти два числа x и y называются *координатами точки* M и записываются так: $M\ (x;\ y)$. Оси координат делят всю плоскость на четыре четверти. Числа x и y будут положительны или отрицательны в зависимости от положения точки в той или иной четверти.

Четверть	Абсциссы	Ординаты
I	+	+
II	—	+
III	—	—
IV	+	—

§ 3. Основные задачи

1) Расстояние между двумя точками. Расстояние между двумя точками $M_1\ (x_1,\ y_1)$, и $M_2\ (x_2,\ y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

В частном случае, расстояние точки $M(x, y)$ от начала координат равно:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Угол φ, образованный отрезком M_1M_2 с положительным направлением оси Ox, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{5}$$

2) Деление отрезка в данном отношении. Если точка $M(x, y)$ делит отрезок, определяемый точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, в отношении $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, то координаты точки M определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

В частности, если точка M — середина отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и формулы (6) принимают вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (7)$$

3) Площадь треугольника и многоугольника. А. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1y_1)$, $B(x_2y_2)$ и $C(x_3y_3)$ вычисляется по формуле:

$$S = \pm \frac{1}{2}[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)]. \qquad (8)$$

Раскрыв круглые скобки в формуле (8), приведем ее к виду:

$$S = \pm \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \qquad (8')$$

Причем, знак плюс берется, если обход вершин A, B, C, производится против часовой стрелки, и знак минус, если обход производится по часовой стрелке.

Б. Условием, при котором три данные точки лежат на одной прямой, служит равенство нулю площади соответствующего треугольника, т. е.

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0. \qquad (9)$$

В. Площадь многоугольника с вершинами $A(x_1y_1)$, $B(x_2y_2)$, ..., $F(x_ny_n)$ равна половине суммы произведений абсцисс каждой из вершин на разность ординат следующей вершины и предыдущей.

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} x_k(y_{k+1} - y_{k-1}). \qquad (10)$$

Г. Координаты центра тяжести площади однородного треугольника через координат его вершин $A(x_1y_1)$, $B(x_2y_2)$ и $C(x_3y_3)$ определяются по формулам:

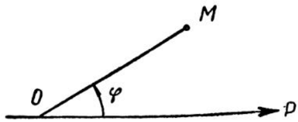
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \qquad (11)$$

§ 4. Полярные координаты

Для определения положения точки на плоскости, кроме прямоугольной системы координат, часто употребляется полярная система координат.

Элементами полярной системы координат являются точка O, называемая *полюсом*, луч OP, называемый *полярной осью*, и единица меры e (черт. 3).

Положение точки M на плоскости определяется расстоянием этой точки до полюса полярным радиусом ρ и углом между радиусом и полярной осью — полярным углом φ . Эти два числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M и записываются так: $M(\rho, \varphi)$. Что же касается значений, принимаемых полярными координатами, то достаточно рассматривать значения ρ от 0 до $\infty (0 \leqslant \rho < +\infty)$ и значения φ от 0 до 2π $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, при этом угол φ отсчитывается от полярной оси против движения часовой стрелки. Однако в некоторых вопросах приходится рассматривать углы, больше 2π, а также отрицательные углы, т. е. углы, отсчитываемые от полярной оси по направлению движения часовой стрелки.



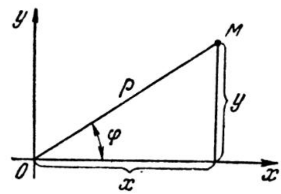
Черт. 3.

Если полярную ось OP взять за ось абсцисс прямоугольной системы координат, а полюс за начало координат, то связь между полярными и прямоугольными координатами точки устанавливается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

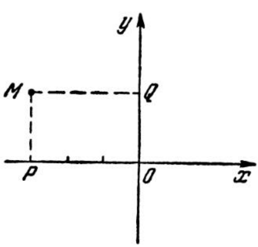


Черт. 4.

Примеры решения задач

№ 1. Построить точку $M(-3; 2)$.

Решение: На оси Ox отложим отрезок $\overline{OP}$, величина которого равна -3, а на оси Oy — отрезок $\overline{OQ}$, по величине равный 2.



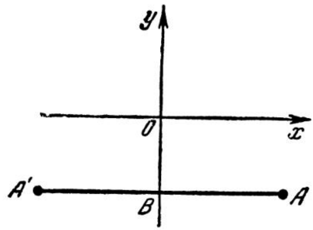
Черт. 5.

Через точку P проведем прямую, параллельную оси Oy, а через точку Q — прямую, параллельную оси Ox. Точка пересечения этих двух прямых и есть искомая точка M (черт. 5).

Другой способ построения точки M. На прямой, проведенной через точку P параллельно оси Oy, откладываем отрезок $\overline{PM}$, величина которого равна ординате точки M.

№ 2. Построить точку, симметричную точке $A(5; -3)$ относительно оси Oy.

Решение. Если две точки симметричны относительно какой-либо оси, то они лежат на одном перпендикуляре к этой прямой, по разные стороны и на одном расстоянии от нее. Поэтому через точку A проведем перпендикуляр AB к оси Oy и отложим отрезок BA', равный по длине отрезку BA (черт. 6).

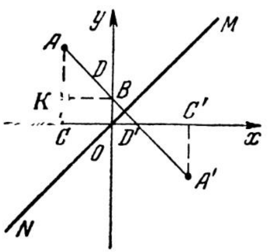


Черт. 6.

Так как отрезок BA' откладываем в отрицательном направлении оси Ox, то $BA' = -BA = -5$. Следовательно, координаты точки A' $(-5; -3)$.

Ответ: A' $(-5; -3)$.

№ 3. Найти точку, симметричную точке A $(-2; 3)$ относительно биссектрисы I координатного угла.



Черт. 7.

Решение. Проведем биссектрису MN I и III координатного угла. На нее, как на ось симметрии, опустим перпендикуляр AB и на его продолжении отложим отрезок BA', равный по длине отрезку AB (черт. 7).

Треугольник ADK — равнобедренный, так как $\angle KAD = \angle ADK = \frac{1}{4}\pi$. Следовательно, $AK = DK = 2$, треугольник $A'C'D'$ равен треугольнику AKD как прямоугольные равнобедренные с равными гипотенузами AD и $A'D'$. Отсюда отрезок $C'A'$ равен по длине отрезку AK, но так как он откладывается в отрицательном направлении оси Oy, то $C'A' = -2$.

Отрезок $OC' = D'C' + OD' = D'C' + OD = -DK + CK = -(-2) + 1 = 3$ (так как $CK = CA - KA = 3 - 2 = 1$), $OC' = 3$.

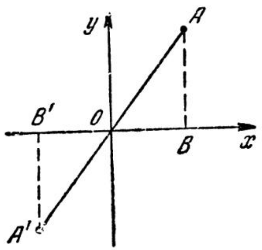
Следовательно, координаты точки A' будут $x = 3$, $y = -2$.

Ответ: A' $(3; -2)$.

№ 4. Найти точку, симметричную точке A (3; 4) относительно начала координат.

Решение. Через точки A и O проведем прямую и на ней отложим отрезок OA', равный по длине отрезку OA (черт. 8). Треугольники AOB и $A'OB'$ равны по гипотенузе и углу ($\angle AOB = \angle A'OB'$), поэтому отрезки OB и OB', BA и BA' равны по длине, но противоположны по направлению. Следовательно, координаты точки A' будут $x = -3$, $y = -4$.

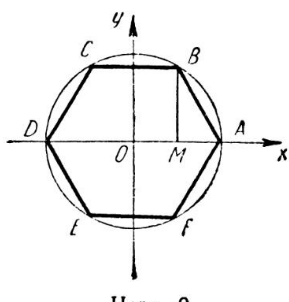
Ответ: A' $(-3; -4)$.



Черт. 8.

№ 5. Найти координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна a, зная, что начало координат помещено в центре шестиугольника, а ось абсцисс проходит через две противоположные вершины.

Решение. $OA = AB = a$; точка A $(a; 0)$. Симметрич-



Черт. 9.

на ей относительно оси Oy точка D $(-a; 0)$. Рассмотрим треугольник ABM: в нем $\angle MAB = 60°$, $\angle ABM = 30°$.

По свойству катета, лежащего против угла в 30°, имеем $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$, $OM = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$.

Абсцисса точки B равна $\frac{a}{2}$. В треугольнике AMB

$MB = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ордината точки B равна $MB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $B\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Точка C симметрична точке B относительно оси Oy, поэтому $C\left(-\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Точка E симметрична точке C относительно оси Ox, поэтому $E\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Точка F симметрична точке B относительно оси Ox, поэтому $F\left(\frac{a}{2};\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

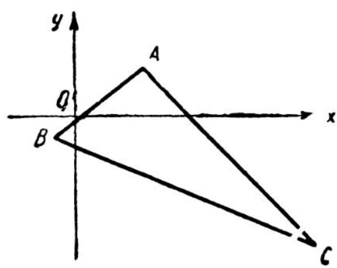
Ответ:

$$A(a;\ 0);\ B\left(\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right);\quad C\left(-\frac{a}{2};\ \frac{a\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$D(-a;\ 0);\ E\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right);\quad F\left(\frac{a}{2};\ -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

№ 6. Узнать, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $A\ (3;\ 2)$, $B\ (-1;\ -1)$ и $C\ (11;\ -6)$ тупой угол.

Решение. Определим длины сторон треугольника



Черт. 10.

ABC, для чего используем формулу расстояния между двумя точками: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Тогда

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5;$$

$$BC=\sqrt{(11+1)^2+(-6+1)^2}=13;$$

$$AC=\sqrt{(11-3)^2+(-6-2)^2}=8\sqrt{2}.$$

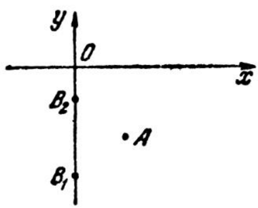
Рассмотрим соотношение между квадратами сторон треугольника ABC: $AB^2=25$, $BC^2=169$, $AC^2=128$, $AB^2+AC^2=153$, $169>153$, $BC^2>AB^2+AC^2$.

Так как квадрат большей стороны (BC) больше суммы квадратов двух меньших сторон (AB и AC), то эта большая сторона лежит против тупого угла. Следовательно, $\angle BAC$ — тупой.

Ответ: $\angle BAC$ — тупой.

№ 7. На оси ординат найти точку, отстоящую от точки A $(4; -6)$ на расстоянии 5 единиц.

Решение. Так как искомая точка B лежит на оси



Черт. 11.

ординат, то ее абсцисса равна 0, следовательно, координаты точки B будут $(0; y)$. Тогда расстояние между точками A $(4; -6)$ и B $(0; y)$ равно:

$$AB=\sqrt{(-4)^2+(y+6)^2},$$

но $AB=5$, поэтому получаем уравнение:

$$\sqrt{(-4)^2+(y+6)^2}=5, \quad 16+y^2+12y+36=25,$$

$$y^2+12y+27=0, \; y_{1,2}=-6\pm\sqrt{36-27}=-6\pm3,$$

$$y_1=-9, \; y_2=-3.$$

Это показывает, что существуют две точки, лежащие на оси Oy и отстоящие от точки A на расстоянии 5 ед. Эти точки B_1 $(0; -9)$ и B_2 $(0; -3)$.

Ответ: B_1 $(0; -9)$, B_2 $(0; -3)$.

№ 8. Точка, двигаясь прямолинейно, переместилась из A $(-1; -3)$ в B $(4; 2)$. Как велик пройденный путь и под каким углом к оси наклонена траектория точки?

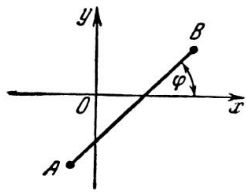
Решение. $AB = \sqrt{(4+1)^2 + (2+3)^2} =$

$$= \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2+3}{4+1} = 1; \quad \operatorname{tg}\varphi = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $AB = 5\sqrt{2}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$.

№ 9. Прямая линия проходит через точку A $(-1; -3)$



Черт. 12.

и образует с осью Ox угол 45°. На этой прямой найти точку, ордината которой равна 2.

Решение. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $\operatorname{tg} 45° = \frac{2+3}{x+1}$, $\quad 1 = \frac{5}{x+1}$, $x + 1 = 5$, $x = 4$

Ответ: B (4; 2).

№ 10. Определить положение точки, которая, выйдя из A (3; 0), переместилась на 8 единиц длины по прямой, образующей угол 30° с осью Ox.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся формулами:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Обозначаем искомую точку B (x, y), тогда

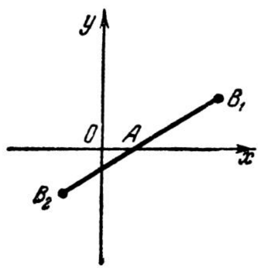
$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} 30° = \dfrac{y}{x-3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 8, \\ \dfrac{y}{x-3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Решим полученную систему, предварительно упростив каждое уравнение,

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 = 55, \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} x - \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$x^2-6x+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}\right)^2=55, \quad 4x^2-24x-156=0,$$
$$x^2-6x-39=0,$$
$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+39}=3\pm4\sqrt{3}, \quad x_1=3+4\sqrt{3},$$
$$x_2=3-4\sqrt{3},$$
$$y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(3+4\sqrt{3})-\sqrt{3}=\sqrt{3}+\frac{4\cdot3}{3}-\sqrt{3}=4,$$
$$y_1=4.$$
$$y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}(3-4\sqrt{3})-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\frac{4\cdot3}{3}-\sqrt{3}=-4, \; y_2=$$
$$=-4.$$

Следовательно, существуют две точки, удовлетворяющие условию задачи (черт. 13).



Черт. 13.

Ответ: $B_1[3+4\sqrt{3};\ 4]$, $B_2[3-4\sqrt{3};\ -4]$.

№ 11. Дан треугольник $A\ (5;\ -4)$, $B\ (-1;\ 2)$, $C\ (5;\ 1)$. Найти точки, в которых медианы его делятся на три равные части.

Решение. Координаты точки K (черт. 14), как центра тяжести треугольника, определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \qquad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

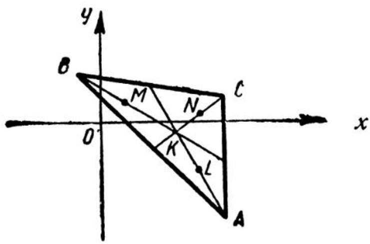
$$x=\frac{5-1+5}{3}=3, \quad y=\frac{-4+2+1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

$$K\left(3;\ -\frac{1}{3}\right).$$

Координаты точек L, M и N, которые являются соответственно серединами отрезков AK, BK и CK, определяются по формулам деления отрезка пополам

$$x_L = \frac{x_A + x_K}{2} = \frac{5+3}{2} = 4; \quad y_L = \frac{y_A + y_K}{2} =$$

$$= \frac{-4 - \frac{1}{3}}{2} = -\frac{13}{6}; \quad L\left(-4;\ -\frac{13}{6}\right).$$



Черт. 14.

$$x_M = \frac{x_B + x_K}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1; \ y_M = \frac{y_B + y_K}{2} =$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{6}; \quad M\left(1;\ \frac{5}{6}\right).$$

$$x_N = \frac{x_C + x_K}{2} = \frac{5+3}{2} = 4; \quad y_N = \frac{y_C + y_K}{2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}; \quad N\left(4;\ \frac{1}{3}\right).$$

Решите эту задачу другим способом — путем непосредственного нахождения координат искомых точек, воспользовавшись отрицательным значением λ.

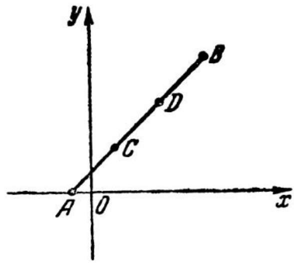
Ответ: $K\left(3; -\frac{1}{3}\right)$; $L\left(-4; -\frac{13}{6}\right)$; $M\left(1; \frac{5}{6}\right)$; $N\left(4; \frac{1}{3}\right)$.

№ 12. Отрезок AB точками $C\ (1;\ 2)$ и $D\ (3;\ 4)$ разделен на три равные части. Найти точки A и B.

Решение. Пусть координаты $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ (черт. 15). Для отрезка AD точка C является серединой:

$$x_C = \frac{x_1 + x_D}{2},\quad x_1 = 2x_C - x_D,\quad x_1 = 2\cdot 1 - 3 = -1;$$

$$y_C = \frac{y_1 + y_D}{2},\ y_1 = 2y_C - y_D,\ y_1 = 2\cdot 2 - 4 = 0;\ A(-1;\ 0).$$



Черт. 15.

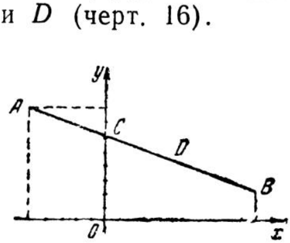
Для отрезка CB точка D является серединой:

$$x_D = \frac{x_C + x_2}{2};\quad x_2 = 2x_D - x_C,\quad x_2 = 2\cdot 3 - 1 = 5;$$

$$y_D = \frac{y_C + y_2}{2};\quad y_2 = 2y_D - y_C,\quad y_2 = 2\cdot 4 - 2 = 6;\ B(5;\ 6).$$

Ответ: $A(-1;\ 0)$, $B(5;\ 6)$.

№ 13. Отрезок, соединяющий точки $A(-5;\ 8)$ и $B(10;\ 2)$ точками C и D, делится на три равные части. Найти точки C и D (черт. 16).



Черт. 16.

Решение. Точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda_1 = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{2}$, а точка D — в отношении $\lambda_2 = \dfrac{AD}{DB} = 2$.

Тогда по формулам деления отрезка в данном отношении получим:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda_1 x_B}{1+\lambda_1}; \quad x_C = \frac{-5 + \frac{1}{2}\cdot 10}{1+\frac{1}{2}} = 0, \quad x_C = 0.$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda_1 y_B}{1+\lambda_1}; \quad y_C = \frac{8 + \frac{1}{2}\cdot 2}{1+\frac{1}{2}} = 6; \ y_C = 6; \ C\,(0;\ 6).$$

$$x_D = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1+\lambda_2}; \quad x_D = 5; \quad y_D = \frac{y_A + \lambda_2 y_B}{1+\lambda_2};$$

$$y_D = 4; \quad D\,(5;\ 4).$$

Ответ: $C\,(0;\ 6)$, $D\,(5;\ 4)$.

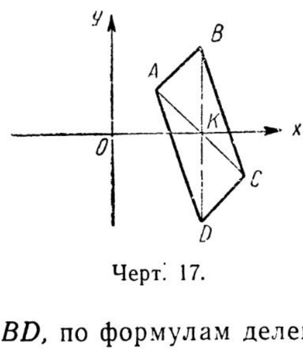
№ 14. Даны три последовательные вершины параллелограмма:

$$A\,(1;\ 1),\ B\,(2;\ 2),\ C\,(3;\ -1).$$

Найти его четвертую вершину D.

Решение. Диагоналями этого параллелограмма являются AC и BD (черт. 17).

Находим координаты точки K, которая является



Черт. 17.

серединой AC и BD, по формулам деления отрезка пополам:

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad x_K = \frac{1+3}{2} = 2;$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{2}; \quad y_K = \frac{1-1}{2} = 0; \quad K(2;\ 0).$$

С другой стороны:

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_K = \frac{y_B + y_D}{2},$$

откуда

$$x_D = 2x_K - x_B, \quad y_D = 2y_K - y_B.$$

Подставляя в последние формулы координаты точек B и K, получим:

$$x_D = 2\cdot 2 - 2 = 2; \quad y_D = 2\cdot 0 - 2 = -2.$$

Другой способ. Для нахождения координат точки D с целью проверки можно воспользоваться отрицательным значением

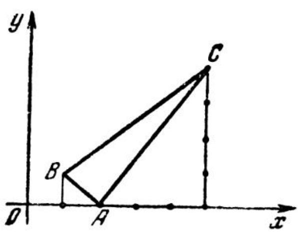
$$\lambda = -2\left(\text{или } -\frac{1}{2}\right): \qquad x_D = \frac{2 + (-2)\cdot 2}{1 + (-2)} = 2.$$

Ответ: $D\ (2;\ -2)$.

№ 15. Найти площадь треугольника $A\ (2;\ 0)$, $B\ (1;\ 4)$, $C\ (5;\ 4)$.

Решение. Площадь треугольника находим по формуле:

$$S = \pm\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right].$$



Черт. 18.

$$S = -\frac{1}{2}\left[2\cdot(1-4) + 1\cdot(4-0) + 5\cdot(0-1)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(-7) = \frac{7}{2}.$$

Так как обход вершин треугольника ABC производится по ходу часовой стрелки, то перед $\frac{1}{2}$ нужно взять знак минус (—), чтобы площадь треугольника выражалась положительным числом.

Ответ: $S=\frac{7}{2}$ кв. ед.

№ 16. Две вершины треугольника находятся в точках (5; 1), (—2; 2), третья вершина—на оси Ox. Зная, что площадь треугольника равна 10, найти третью вершину.

Решение. Обозначим третью вершину, лежащую на оси Ox, через $C(x; 0)$. По формуле, определяющей площадь треугольника по координатам его вершин, получим:

$$10=-\pm\frac{1}{2}[x(2-1)+(-2)(1-0)+5(0-2)],$$

или

$$10=\pm\frac{1}{2}(x-12).$$

Если в полученном уравнении в правой части перед скобками взять знак плюс, т. е. $10=\frac{1}{2}(x-12)$, то получим: $x_1=10\cdot 2+12=32$. Если же взять знак минус, т. е. $10=-\frac{1}{2}(x-12)$, то получим: $x_2=2(-10)+12=-8$.

Таким образом, третья вершина треугольника находится в точке $C_1(32; 0)$ или в точке $C_2(-8; 0)$.

Ответ: $C_1(32; 0)$, $C_2(-8; 0)$.

№ 17. Площадь треугольника $S=3$, две его вершины суть точки $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$, центр тяжести этого треугольника лежит на оси Ox. Определить координаты третьей вершины C.

Решение. Пусть центр тяжести треугольника находится в точке $D(x; 0)$. Пользуясь формулой определения ординаты центра тяжести, найдем:

$$y_D=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\quad 0=\frac{1-3+y_C}{3},$$

$$-2+y_C=0,\quad y_C=2.$$

Для нахождения абсциссы точки C воспользуемся формулой площади треугольника:

$$3 = \pm \frac{1}{2}[3\cdot(-3-2)+(2-1)+x(1+3)]$$

или
$$3 = \pm \frac{1}{2}(4x-14),$$

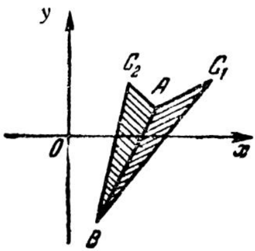
или
$$3 = \pm(2x-7).$$

Взяв знак плюс перед скобками в правой части, т. е. $3 = 2x-7$, находим:

$$x_1 = \frac{3+7}{2} = 5.$$

Взяв знак минус в правой части, т. е. $3 = -2x+7$, находим:

$$x_2 = \frac{3-7}{-2} = 2.$$



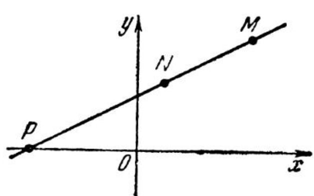
Черт. 19.

Таким образом, третья вершина треугольника находится в точке C_1 (5; 2) или в точке C_2 (2; 2) (черт. 19).

Ответ: C_1 (5; 2), C_2 (2; 2).

№ 18. Точка, двигаясь прямолинейно, прошла через точки M (5; 5) и N (1; 3). Определить точку, в которой она пересечет ось Ox.

Решение. Обозначим искомую точку P (x; 0) (так



Черт. 20.

как она лежит на оси Ox, то ее ордината равна 0) (черт. 20).

Точки M, N и P лежат на одной прямой, поэтому должно выполняться условие:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0,$$

где $(x_1; y_1)$ — координаты точки M,
$(x_2; y_2)$ — координаты точки N,
$(x_3; y_3)$ — координаты точки P.

Подставим их значения:

$$5(3-0) + 1\cdot(0-5) + x(5-3) = 0,$$

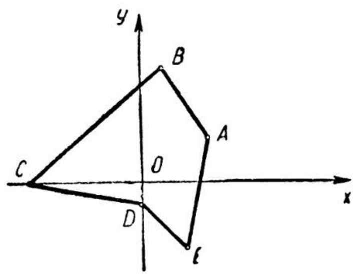
$$15-5+2x=0,\ 2x=-10,\ x=-5.$$

Следовательно, точка P имеет координаты $x=-5$, $y=0$.

Ответ: $P(-5;\ 0)$.

№ 19. *Решить самостоятельно.* Найти площадь пятиугольника с вершинами в точках $A(3;\ 2)$, $B(1;\ 5)$, $C(-5;\ 0)$, $D(0;\ -1)$, $E(2;\ -3)$.

Указания. Площадь пятиугольника $ABCDE$ нахо-



Черт. 21.

дим по формуле (10), предварительно развернув ее применительно к заданному пятиугольнику:

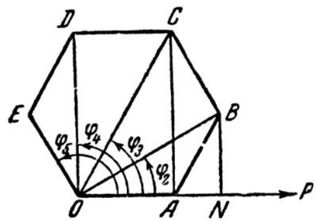
$$S = \frac{1}{2}[x_A(y_B - y_E) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_D - y_B) +$$

$$+ x_D(y_E - y_C) + x_E(y_A - y_D)].$$

Ответ: $S=29$ кв. ед.

№ 20. *Решить самостоятельно.* Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Приняв за полюс одну из его вершин, а за полярную ось — сторону, через нее проходящую, определить полярные координаты остальных пяти вершин.

Указания. Целесообразно для решения задачи



Черт. 22.

воспользоваться свойствами правильного шестиугольника, известными из элементарной геометрии.

Ответ: $A(a;\ 0)$; $B\left(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$;

$$C\left(2a;\ \frac{\pi}{3}\right);\quad D\left(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{2}\right);\quad E\left(a;\ \frac{2}{3}\pi\right).$$

№ 21. *Решить самостоятельно.* Вывести формулу расстояния между двумя точками, заданными полярными координатами.

Указания. Пусть заданы точки $A(\rho_1,\ \varphi_1)$ и $B(\rho_2,\ \varphi_2)$.

В формулу расстояния между двумя точками (в прямоугольных координатах) $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ подставьте значения:

$$x_1=\rho_1\cos\varphi_1,\ \ y_1=\rho_1\sin\varphi_1,\ \ x_2=\rho_2\cos\varphi_2,\ \ y_2=\rho_2\sin\varphi_2.$$

Ответ: $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

№ 22. *Решить самостоятельно.* В полярной системе координат даны две противоположные вершины квадрата $P\left(6;\ -\frac{7}{12}\pi\right)$ и $Q\left(4;\ \frac{1}{6}\pi\right)$.

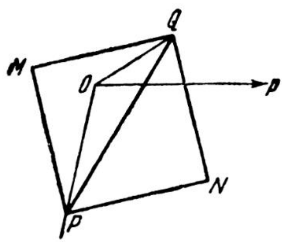
Определить его площадь.

Указание. Так как площадь квадрата равна $\frac{1}{2}d^2$, где d — диагональ квадрата, то определим расстояние между точками P и Q, являющимися концами диагонали данного квадрата.

Воспользуйтесь формулами

$$PQ = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \text{ и } S = \frac{1}{2}(PQ)^2.$$

Ответ: $S = 2(13 + 6\sqrt{2})$ кв. ед.



Черт. 23.

Задачи для самостоятельного решения

1. Установить, какие координаты имеет точка, симметричная точке $(-3;\ 5)$:

а) относительно оси Ox;

б) относительно оси Oy;

в) относительно начала координат;

г) относительно биссектрисы I и III координатных углов;

д) относительно биссектрисы II и IV координатных углов.

2. Найти координаты вершин равностороннего треугольника, сторона которого равна 4, если ось Ox проходит через одну из сторон треугольника, а ось Oy проходит через середину этой стороны.

3. На каком расстоянии от начала координат находятся точки $M(3;\ 4)$, $N(12;\ -5)$, $P(7;\ -24)$, $Q(-6;\ -8)$?

4. Точка, двигаясь равномерно и прямолинейно, за 4 секунды переместилась из положения $A(6;\ -7)$ в положение $B(-4;\ 5)$. Где находилась точка в момент времени $t=2$ *сек*?

5. Отрезок AB точкой $C(3;\ 1)$ разделен пополам:

а) найти точку B, если A (0, 4);

б) какой угол образует отрезок AB с осью Ox?

6. В прямоугольной системе точка имеет координаты $x=1$, $y=1$.

Каковы полярные координаты этой точки?

Ответы:

1. а) $(-3; -5)$; б) $(3; 5)$; в) $(3; -5)$;

   г) $(5; -3)$; д) $(-5; -3)$.

2. $(2; 0)$; $(0; 2\sqrt{3})$; $(-2; 0)$.

3. 5; 13; 25; 10.

4. $(1; -1)$.

5. $B(6; -2)$; 135°.

6. $\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Глава II

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Уравнением прямой называется *такое уравнение первой степени с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой прямой.*

Уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

называется *общим уравнением прямой.*

Уравнение прямой, разрешенное относительно переменной y, т. е. уравнение вида

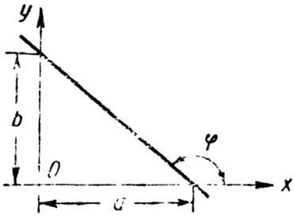
$$y=kx+b, \qquad (2)$$

называется уравнением с *угловым коэффициентом.* Параметр k называется *угловым коэффициентом* и равен тангенсу угла φ наклона прямой к оси Ox, $k=\operatorname{tg}\varphi$.

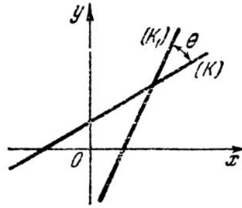
Параметр b — величина отрезка, отсекаемая прямой (2) на оси Oy, считая от начала координат.

Уравнение вида $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (3)$$

где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат (черт. 24), называется *уравнением прямой в отрезках.* Углом между двумя прямыми $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ называется *угол, на который надо повернуть прямую (с угловым коэффициентом k) до*



Черт. 24.



Черт. 25.

совпадения ее со второй прямой (с угловым коэффициентом k_1), против часовой стрелки (черт. 25).

Этот угол вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{k_1-k}{1+kk_1}. \tag{4}$$

Условие параллельности двух прямых

$$k=k_1. \tag{5}$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k\cdot k_1=-1, \quad \text{или} \quad k=-\frac{1}{k_1}. \tag{6}$$

Если прямые даны уравнениями в общем виде

$$Ax+By+C=0, \quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

то условием параллельности будет равенство

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}, \tag{5}$$

а перпендикулярности

$$A\cdot A_1+B\cdot B_1=0. \tag{6}$$

Если прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через данную точку (x_1, y_1), то ее уравнение имеет вид:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{7}$$

Если в этом уравнении параметру k давать различные значения, то будем получать всевозможные прямые, проходящие через данную точку (x_1, y_1). Тогда уравнение (7) дает пучок прямых с центром в точке (x_1, y_1).

Если прямая проходит через две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то уравнение

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{8}$$

называется *уравнением прямой, проходящей через две данные точки.*

Условием того, что три данные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) лежат на одной прямой, служит равенство:

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}. \tag{9}$$

Если две прямые даны общими уравнениями:

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad A_1x+B_1y+C_1=0,$$

то координаты точки пересечения их определяются путем совместного решения этих уравнений:

$$x=\frac{BC_1-B_1C}{AB_1-A_1B}, \qquad y=\frac{CA_1-C_1A}{AB_1-A_1B}. \tag{10}$$

Если $\dfrac{A}{A_1}\neq\dfrac{B}{B_1}$, то прямые имеют точку пересечения.

Если $\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{B}{B_1}\neq\dfrac{C}{C_1}$, то прямые параллельны и не имеют точки пересечения.

Если $\dfrac{A}{A_1}=\dfrac{B}{B_1}=\dfrac{C}{C_1}$, то прямые совпадают и точка их пересечения становится неопределенной.

Уравнение вида

$$Ax+By+C+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0 \tag{11}$$

называется *уравнением пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых:*

$$Ax+By+C=0 \quad \text{и} \quad A_1x+B_1y+C_1=0.$$

Уравнение вида

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{12}$$

называется *нормальным уравнением прямой.*

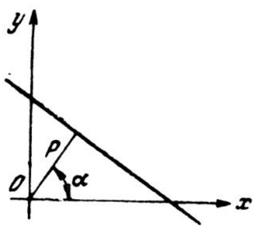
p — длина перпендикуляра (нормали), опущенного из начала координат на прямую, α — угол наклона этого перпендикуляра к оси Ox (черт. 26).

Всякое уравнение прямой общего вида $Ax+By+C=0$ можно привести к нормальному виду, умножая все его члены на нормирующий множитель.

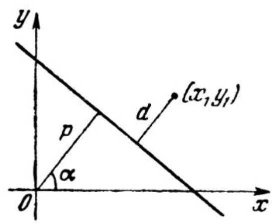
$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (13)$$

взятый со знаком, противоположным знаку свободного члена C.

Отклонение δ данной точки от данной прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, взятая со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от прямой.



Черт. 26.



Черт. 27.

Чтобы найти отклонение точки $M(x_1, y_1)$ от данной прямой, нужно в левую часть нормального уравнения этой прямой вместо текущих координат подставить координаты точки x_1 и y_1:

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p, \qquad (14)$$

или

$$\delta = \frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (14')$$

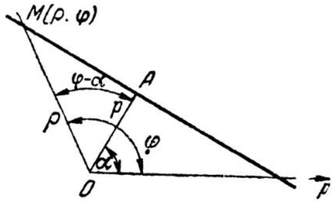
Для точек, лежащих на прямой, отклонение равно нулю. Расстояние d от точки до прямой есть абсолютная величина отклонения этой точки от прямой:

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|, \qquad (15)$$

или

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (15')$$

Положение прямой в полярной системе координат определяется длиною перпендикуляра p, опущенного из полюса на прямую, и углом α, образованным этим перпендикуляром и полярной осью OP (черт. 28).



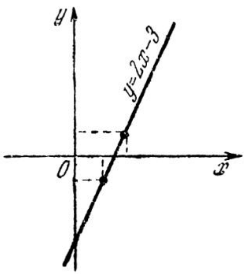
Черт. 28.

Уравнение прямой в полярных координатах имеет вид

$$p = \rho \cos (\varphi - \alpha). \qquad (16)$$

Примеры решения задач

№ 23. Построить прямую $y=2x-3$.



Черт. 29.

Общий метод построения прямой. Положение прямой на плоскости определяется двумя точками, принадлежащими этой прямой. Для построения прямой достаточно знать координаты двух произвольных точек прямой. Для этого вычисляем значения y по данному равенству $y=2x-3$ при произвольных значениях x.

Пусть для значения $x=1$ соответствует $y=2\cdot1-3=-1$ и пусть для $x=2$ значение y примет $y=2\cdot2-3=1$.

Составляется следующая таблица:

x	1	2
y	-1	1

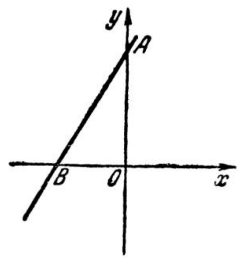
Таким образом, через полученные две точки, координаты которых $(1; -1)$ и $(2; 1)$, строим прямую.

Другой способ. Уравнение может быть приведено к виду $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{-3}=1$ (уравнение прямой в отрезках).

По оси Ox следует отложить отрезок, по величине равный $\frac{3}{2}$ (единиц длины), а по оси Oy отрезок, по величине равный -3 (единиц длины). Через две точки (полученных концов) на осях координат провести прямую.

№ 24. Построить прямую $5x-3y+15=0$.

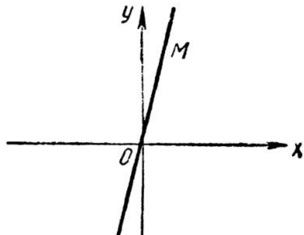
Построение. Если уравнение прямой содержит свободный член, то такая прямая пересекает координатные оси, а так как две точки определяют положение прямой, то достаточно найти точки пересечения прямой с координатными осями. Чтобы найти точку пересечения прямой с осью Oy, в данном уравнении положим $x=0$ (всякая точка, лежащая на оси Oy, имеет абсциссу, равную 0). Тогда $-3y+15=0$, откуда $y=5$. Обозначим эту точку A (0; 5). Положив $y=0$, мы найдем точку пересечения прямой с осью Ox: $5x+15=0$, $x=-3$. Обозначим эту точку B $(-3;\ 0)$. Строим точки A и B и проводим искомую прямую.



Черт. 30.

№ 25. Построить прямую $4x-y=0$.

Построение. Так как свободный член уравнения равен 0, то прямая проходит через начало координат. Если

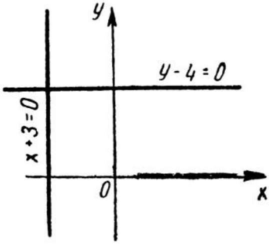


Черт. 31.

мы зададим произвольное значение x и вычислим соответствующее значение y из данного уравнения, то найдем еще одну точку, принадлежащую прямой. Если $x=1$, то $y=4$. Через точки O (0; 0) и M (1; 4) проводим прямую, уравнение которой $4x-y=0$.

№ 26. Построить прямые $x+3=0$ и $y-4=0$.

Построение. 1) Рассмотрим уравнение $x+3=0$. Запишем его в виде $x=-3$. Это значит, что любая точка прямой имеет постоянную абсциссу, т. е. прямая проходит слева от оси Oy на расстоянии 3 единиц масштаба от нее. Следовательно, прямая $x+3=0$ параллельна оси Oy и отсекает на оси Ox отрезок, равный -3.

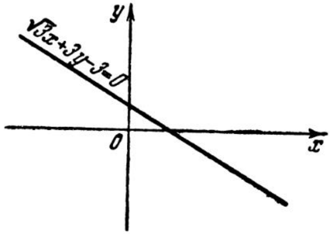


Черт. 32.

а) Аналогично, уравнение $y-4=0$ показывает, что все точки этой прямой имеют одну и ту же ординату, т. е. прямая $y=4$ параллельна оси Ox и отсекает на оси Oy отрезок, равный 4 (единиц масштаба).

№ 27. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок, равный 1 (единиц масштаба) и образующей с осью Ox угол в 150°.

Р е ш е н и е. Воспользуемся уравнением прямой с уг-



Черт. 33.

ловым коэффициентом $y=kx+b$. Согласно условию $b=1$;

$$\operatorname{tg} 150° = -\operatorname{tg} 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad k = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Искомое уравнение прямой будет

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 \quad \text{или} \quad x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} = 0.$$

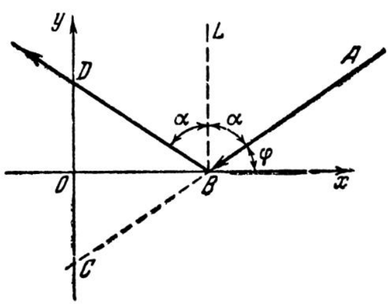
Ответ: $x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} = 0.$

№ 28. Луч света направлен по прямой $2x - 3y - 12 = 0$; дойдя до оси абсцисс, он от нее отразился. Определить точку встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча.

Решение. Сделаем чертеж (черт. 34).

Луч AB задан уравнением

$$2x - 3y - 12 = 0.$$



Черт. 34.

Так как точка B лежит на оси Ox, то, решив систему

$$\begin{cases} 2x - 3y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

найдем: $x = 6$. Следовательно, $B\ (6;\ 0)$.

Обозначим угол падения луча AB через α, т. е. $\angle ABL = \alpha$.

Так как угол отражения равен углу падения луча, то $\angle LBD = \alpha$. Обозначим угол наклона луча AB к оси Ox через φ_1, а угол наклона отраженного луча BD — через φ_2. Тогда $\angle DBO = \varphi_1$ и $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$. Угловой коэффициент падающего луча $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2}{3}$.

Найдем угловой коэффициент отраженного луча:

$$k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\pi - \varphi_1) = -\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2}{3}.$$

Если бы луч AB не отразился в точке B, то он пересек бы ось Oy в точке C, $OC=-4$. Отрезки OD и OC равны по величине, но противоположны по знаку, т. е. $OD=4$ (единиц масштаба). Воспользовавшись уравнением прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$, составим уравнение луча BD:

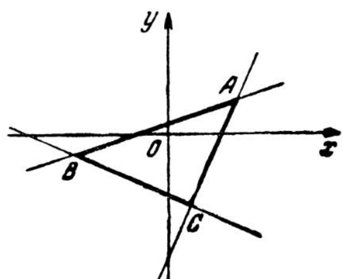
$$y = -\frac{2}{3}x + 4, \text{ или } 2x + 3y - 12 = 0.$$

Ответ: $2x+3y-12=0$; B (6; 0).

№ 29. Найти углы и площадь треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$5x-2y-11=0;\ x+2y+5=0;\ x-2y+1=0.$$

Решение. Построим заданный треугольник (черт.



Черт. 35.

35). Обозначим его вершины буквами A, B, C. Угловые коэффициенты прямых AC, BC и AB соответственно равны:

$$k_{AC} = \frac{5}{2}, \qquad k_{BC} = -\frac{1}{2}, \qquad k_{AB} = \frac{1}{2}.$$

Углы треугольника будем находить по формуле:

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\ ;\ \operatorname{tg}A=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}\cdot k_{AB}}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{2\cdot 4}{4+5}=\frac{8}{9};\qquad A=\operatorname{arctg}\frac{8}{9}.$$

$$\operatorname{tg}B=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}\cdot k_{BC}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1\cdot 4}{4-1}=\frac{4}{3};$$

$$B=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

$$\operatorname{tg}C=\frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{AC}\cdot k_{BC}}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{-3}{4-5}=3;$$

$$C=\operatorname{arctg}3.$$

Для того чтобы найти площадь треугольника, надо знать координаты его вершин. Точки A, B и C мы найдем совместным решением уравнений прямых, дающих эти точки в пересечении. Решая системы: 1), 2), 3), получим:

1) $$\begin{cases}5x-2y-11=0,\\ x+2y+5=0,\end{cases}$$

$$C(1;\ -3).$$

2) $$\begin{cases}5x-2y-11=0,\\ x-2y+1=0;\end{cases}$$

$$A(3;\ 2).$$

3) $$\begin{cases}x+2y+5=0,\\ x-2y+1=0;\end{cases}$$

$$B(-3;\ -1).$$

Теперь найдем площадь треугольника по формуле:

$$S=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right].$$

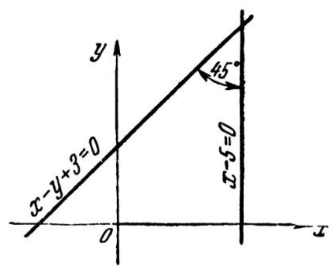
$$S=\frac{1}{2}\left[3(-1+3)-3(-3-2)+(2+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(6+15+3)=\frac{1}{2}\cdot 24=12.$$

Ответ: $\quad \operatorname{arctg}\frac{8}{9},\ \operatorname{arctg}\frac{4}{3},\ \operatorname{arctg} 3;\ S=12$ кв. ед.

№ 30. Найти угол между прямыми $x-5=0$ и $x-y+3=0$.

Решение Прямая $x-5=0$ параллельна оси Oy или перпендикулярна оси Ox. Следовательно, $\varphi_1=90°$.



Черт. 36.

Угловой коэффициент прямой $x-y+3=0$ равен $k_2=$ $=\frac{1}{1}=1$, $k_2=1$, значит $\varphi_2=45°$. Поэтому $\Theta=\varphi_1-\varphi_2=$ $=90°-45°=45°=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\Theta=\frac{\pi}{4}$.

№ 31. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок, равный 2 (единиц масштаба) и образующей с прямой $x-2y+3=0$, угол в 45°.

Решение. Уравнение этой прямой будем искать в виде $y=kx+2$ (где k следует найти).

Угловой коэффициент данной прямой равен $\frac{1}{2}$.

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}, \quad \text{где} \quad \operatorname{tg}\Theta=\operatorname{tg}45^\circ=1.$$

Пусть $k_1=\frac{1}{2}$, а $k_2=k$;

тогда $1=\dfrac{k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k}$, $\quad 1+\frac{1}{2}k=k-\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2}k=\frac{3}{2}$, $k=3$.

Следовательно, уравнением искомой прямой будет $y=3x+2$.

Пусть теперь $k_2=\frac{1}{2}$, а $k_1=k$;

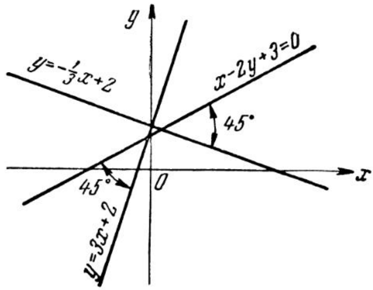
тогда $\quad 1=\dfrac{\frac{1}{2}-k}{1+\frac{1}{2}k}$, $\quad 1+\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}-k$,

$$\frac{3}{2}k=-\frac{1}{2}, \quad k=-\frac{1}{3}.$$

Следовательно, уравнение $y=-\frac{1}{3}x+2$ также будет уравнением искомой прямой.

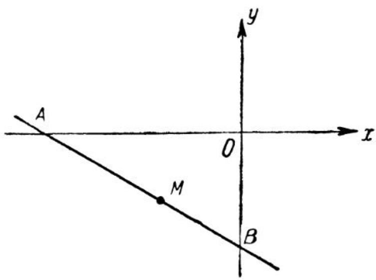
Таким образом, задача имеет два решения, причем найденные прямые являются взаимно перпендикулярными, так как выполняется условие перпендикулярности двух прямых: $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$. (черт. 37).

Ответ: $y=3x+2$; $\quad y=-\frac{1}{3}x+2$.



Черт. 37.

№ 32. *Решить самостоятельно.* Найти угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, если известно, что отрезок прямой расположен между осями координат и точка $M\left(-\frac{8}{3}; -3\right)$ делит этот отрезок в отношении $3:2$ (считая от оси абсцисс к оси ординат).



Черт. 38.

Указания. Использовать уравнение прямой в отрезках и формулы нахождения координат точек деления отрезка в данном отношении.

Ответ: $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$.

№ 33. При каких значениях m и n прямая

$$(m-3n-2)x+(2m+4n-1)y-3m+n-2=0$$

отсекает на оси Ox отрезок, равный 3 (единиц масштаба) *, а на оси Oy отрезок, равный -2?

Решение. Преобразуем уравнение данной прямой в уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1; \; a=3, \quad b=-2.$$

$$(m-3n-2)\,x+(2m+4n-1)y=3m-n+2;$$

$$\frac{(m-3n-2)x}{3m-n+2}+\frac{(2m+4n-1)y}{3m-n+2}=1,$$

$$\frac{x}{\dfrac{3m-n+2}{m-3n-2}}+\frac{y}{\dfrac{3m-n+2}{2m+4n-1}}=1.$$

Откуда $\dfrac{3m-n+2}{m-3n-2}=3, \quad \dfrac{3m-n+2}{2m+4n-1}=-2.$

Решим полученную систему уравнений:

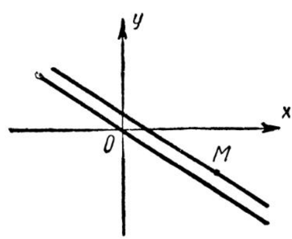
$$\begin{cases} 3m-n+2=3m-9n-6, \quad 8n=-8, \quad n=-1; \\ 3m-n+2=-4m-8n+2; \; 7m=-7n, \; m=-n, \; m=1. \end{cases}$$

Ответ: $m=1, \; n=-1.$

№ 34. Через точку $M\,(2; -1)$ провести прямую параллельно прямой $2x+3y=0$.

Решение. Угловой коэффициент искомой прямой согласно условию параллельности должен быть равным угловому коэффициенту данной прямой:

$$y=-\frac{2}{3}x, \;\; k=-\frac{2}{3}.$$



Черт. 39.

Составим уравнение искомой прямой по формуле:

$$y-y_1=k\,(x-x_1)$$

$$y+1=-\frac{2}{3}(x-2), \; 3y+3=-2x+4, \; 2x+3y-1=0.$$

Эту задачу можно решать и так.

* В дальнейшем слово «единиц масштаба» будет опущено.

Так как искомая прямая должна быть параллельна данной прямой, то $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}$, или $A:B=2:3$.

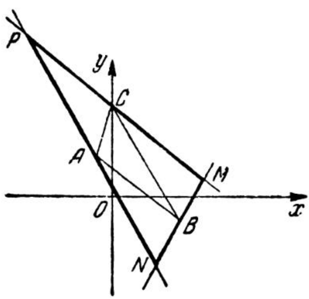
Уравнение прямой будем искать в виде: $2x+3y+C=0$. C определим из условия, что прямая проходит через точку $M\ (2;\ -1)$:

$$2\cdot 2+3\cdot(-1)+c=0,\ c=3-4=-1,\ c=-1\ .$$

Следовательно, уравнение прямой будет $2x+3y-1=0$.

Ответ: $2x+3y-1=0$.

№ 35. Составить уравнения сторон треугольника, для которого точки $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (3;\ -1)$ и $C\ (0;\ 4)$ являются серединами сторон.



Черт 40.

Решение. Обозначим искомый треугольник MNP (черт. 40). Стороны треугольника ABC являются средними линиями в треугольнике MNP, поэтому $MN\|AC$, $NP\|BC$, $MP\|AB$.

Найдем угловые коэффициенты сторон треугольника ABC по формуле:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ .$$

$$k_{AB}=\frac{-1-2}{3+1}=-\frac{3}{4}\ ;\qquad \kappa_{AC}=\frac{4-2}{0+1}=2;$$

$$k_{BC}=\frac{4+1}{0-3}=-\frac{5}{3}.$$

Согласно условию параллельности двух прямых имеем:

$$k_{MP}=k_{AB}=-\frac{3}{4},\ k_{MN}=k_{AC}=2,\quad k_{NP}=k_{BC}=-\frac{5}{3}.$$

Уравнения сторон треугольника MNP будем искать по формуле пучка прямых $y-y_1=k(x-x_1)$.

Прямая MN проходит через точку B (3; —1); ее уравнение:

$$y+1=2(x-3), \quad 2x-y-7=0.$$

Прямая NP проходит через точку $A(-1; 2)$ ее уравнение:

$$y-2=-\frac{5}{3}(x+1),\ 3y-6=-5x-5,\ 5x+3y-1=0.$$

Прямая MP проходит через точку C (0; 4); ее уравнение:

$$y-4=-\frac{3}{4}x, \quad 3x+4y-16=0.$$

Ответ: $2x-y-7=0, \quad 5x+3y-1=0,$

$$3x+4y-16=0.$$

№ 36. По какой линии должна двигаться точка, начальное положение которой определено координатами (3; 8), чтобы кратчайшим путем дойти до прямой $x-2y-2=0$? В какой точке она достигнет этой прямой и как велик будет пройденный путь?

Решение. Кратчайший путь от точки до прямой осуществляется по перпендикуляру, опущенному из данной точки на заданную прямую (черт. 41). Составим уравнение перпендикуляра. Угловой коэффициент его находим из условия перпендикулярности MN с данной прямой:

$$k_1 \cdot k_2=-1, \quad k_2=-\frac{1}{k_1},$$

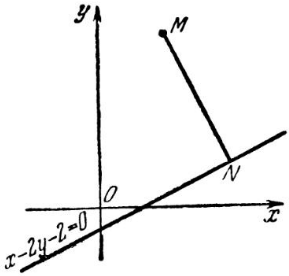
но $k_1=\frac{1}{2}$, следовательно, $k_2=-2$.

Теперь напишем уравнение прямой MN как прямой, проходящей через точку (3; 8) с угловым коэффициентом -2:

$$y-8=-2(x-3), \quad \text{или} \quad 2x+y-14=0.$$

Уравнение перпендикуляра MN можно найти еще и так.

Из условия перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2=0$ находим, что $\frac{A_2}{B_1}=\frac{-B_2}{A_1}$, т. е. коэффициенты при x и y соответственно второй и первой прямых равны, а коэффициент при y второй прямой равен коэффициенту при x первой прямой, но с противоположным знаком. Поэтому уравнение перпендикуляра будем искать в виде $-2x-y-c=0$ или $2x+y+c=0$.



Черт. 41.

Коэффициент C найдем, использовав точку (3; 8), через которую проходит перпендикуляр: $2\cdot 3+8+c=0$, $c=-14$. Следовательно, уравнение перпендикуляра MN будет $2x+y-14=0$. Найдем точку пересечения двух прямых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x-2y-2=0, \\ 2x+y-14=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y-2=0, \\ 4x+2y-28=0; \end{cases}$$

$$5x-30=0, \quad x=6;$$

$$y=14-2x, \quad y=14-12=2, \quad y=2.$$

Движущаяся точка достигнет данной прямой в точке N (6; 2).

Пройденный точкой путь определим по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d=\sqrt{(6-3)^2+(2-8)^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}.$$

Ответ: $N(6;\ 2)$; $d=3\sqrt{5}$.

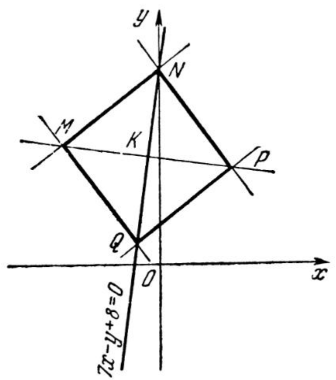
№ 37. Точка M $(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

Решение. Сделаем чертеж (черт. 42). Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, то для написания уравнения диагонали MP используем условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Угловой коэффициент прямой NQ $k_1 = 7$, угловой коэффициент прямой MP $k_2 = -\frac{1}{7}$. Прямая MP проходит через точку $M(-4; 5)$, поэтому ее уравнение:

$$y - 5 = -\frac{1}{7}(x + 4),\ 7y - 35 = -x - 4,\ x + 7y - 31 = 0.$$

Для написания уравнения диагонали MP можно использовать условие перпендикулярности двух прямых в виде: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, или $\frac{A_2}{B_1} = \frac{-B_2}{A_1}$, т. е. коэффициент при x второй прямой равен коэффициенту при y первой прямой, а коэффициент при y второй прямой равен коэффициенту при x первой прямой, но с противоположным знаком. Поэтому уравнение прямой MP будем искать в виде $-x - 7y - C = 0$, или $x + 7y + C = 0$.



Черт. 42.

Коэффициент C определим из условия, что прямая MP проходит через точку $M(-4; 5)$: $-4 + 7 \cdot 5 + c = 0$, $c = -31$.

Уравнение диагонали MP будет $x + 7y - 31 = 0$.

Найдем координаты точки K совместным решением уравнений MP и NQ.

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} 49x - 7y + 56 = 0, \\ \quad x + 7y - 31 = 0; \end{cases} \\ \hline 50x + 25 \qquad\quad = 0 \end{array}$$

$$x = -\frac{1}{2}; \quad y = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 8 = \frac{9}{2}; \quad K\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

Найдем координаты точки P, исходя из того, что точка K является серединой отрезка MP.

$$x_K = \frac{x_M + x_P}{2}, \quad x_P = 2x_K - x_M, \quad x_P = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 3, \quad x_P = 3;$$

$$y_K = \frac{y_M + y_P}{2}, \quad y_P = 2y_K - y_M, \quad y_P = 2\cdot\frac{9}{2} - 5 = 4; \quad P(3;\ 4).$$

Далее, стороны квадрата образуют с диагональю углы в 45°, следовательно, $\operatorname{tg}\Theta = 1$. Найдем угловые коэффициенты сторон квадрата, использовав формулу

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}.$$

Угловой коэффициент MP равен $-\frac{1}{7}$. Положим $k_1 = -\frac{1}{7}$, получим $1 - \frac{1}{7}k_2 = k_2 + \frac{1}{7}$, откуда $k_2 = \frac{3}{4}$.

Угловой коэффициент сторон MN и PQ равен $\frac{3}{4}$. А так как стороны квадрата взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент сторон NP и QM равен $-\frac{4}{3}$. Уравнения сторон будем находить по формуле пучка прямых.

Уравнение MN:

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x + 4), \quad 4y - 20 = 3x + 12,$$

$$3x - 4y + 32 = 0.$$

Уравнение PQ:

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x - 3), \quad 3x - 4y + 7 = 0.$$

Уравнение NP:

$$y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 3), \quad 4x + 3y - 24 = 0.$$

Уравнение MQ:

$$y - 5 = -\frac{4}{3}(x + 4), \quad 4x + 3y + 1 = 0.$$

Уравнения сторон можно найти еще и так. Стороны квадрата образуют с диагональю углы в 45°, поэтому можем найти угловые коэффициенты сторон квадрата. Угловой коэффициент данной диагонали равен 7, $\operatorname{tg}45° = 1$.

Положив $k_1 = 7$, $k_2 = k$, получим: $1 = \frac{k-7}{1+7k}$, $1 + 7k = k - 7$, $6k = -3$, $k = -\frac{4}{3}$.

Положив $k_2 = 7$, $k_1 = k$, получим: $1 = \frac{7-k}{1+7k}$, $1 + 7k = 7 - k$, $8k = 6$, $k = \frac{3}{4}$.

Теперь можем написать уравнения сторон квадрата, проходящих через точку M по формуле $y - y_1 = k\ (x - x_1)$.

$$y - 5 = -\frac{4}{3}(x + 4), \quad \text{или} \quad 4x + 3y + 1 = 0;$$

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x + 4), \quad \text{или} \quad 3x - 4y + 32 = 0.$$

Для написания уравнений двух других сторон квадрата нужно найти точки пересечения заданной диагонали с найденными сторонами.

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0, \\ 4x + 3y + 1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \left\{\begin{array}{l} 21x - 3y + 24 = 0, \\ \ \ 4x + 3y + 1 = 0 \end{array}\right. \\ \hline 25x = -25, \end{array}$$

$$x = -1; \quad y = 7x + 8, \quad y = -7 + 8 = 1, \quad y = 1.$$

Точка пересечения $(-1; 1)$. Сторона, проходящая через нее, имеет уравнение $y - 1 = \frac{3}{4}(x + 1)$, $3x - 4y + 7 = 0$.

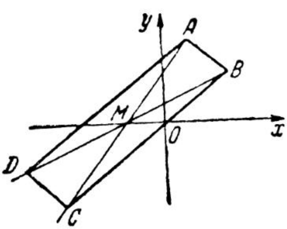
$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0, \\ 3x - 4y + 32 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 28x - 4y + 32 = 0, \\ 3x - 4y + 32 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 25x = 0, & x = 0; \\ y = 7x + 8, & y = 8. \end{array}$$

Точка пересечения (0; 8). Уравнение стороны, проходящей через нее, будет $y-8=-\frac{4}{3}x$, $4x+3y-24=0$.

Ответ: стороны: $3x-4y+32=0$, $3x-4y+7=0$, $4x+3y-24=0$, $4x+3y+1=0$; диагональ $x+7y-31=0$.

№ 38. Даны две смежные вершины $A\ (2;\ 5)$ и $B\ (5;\ 3)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M\ (-2;\ 0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.



Черт. 43.

Решение. Для вершины A противоположной является вершина C, для B — вершина D. Точка M делит отрезки AC и BD пополам. Поэтому координаты точек C и D можно найти, воспользовавшись формулами деления отрезка пополам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

С одной стороны: $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}$; $-2=\frac{2+x_C}{2}$, $-4=2+x_C$, откуда $x_C=-6$. $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}$, $0=\frac{5+y_C}{2}$, откуда $y_C=-5$; $C(-6;-5)$.

С другой стороны, $x_M=\frac{x_B+x_D}{2}$, откуда $-2=\frac{5+x_D}{2}$, $-4=5+x_D$, $x_D=-9$; $y_M=\frac{y_B+y_D}{2}$, откуда $0=\frac{3+y_D}{2}$, $y_D=-3$; $D=(-9;\ -3)$.

Зная теперь все вершины параллелограмма и воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две данные точки $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, можем составить уравнения сторон параллелограмма.

Уравнение AB: $\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-5}{2-5}$, $2x+3y-19=0$.

Уравнение BC: $\frac{y+5}{3+5}=\frac{x+6}{5+6}$, $8x-11y-7=0$.

Уравнение CD: $\frac{y+5}{-3+5}=\frac{x+6}{-9+6}$, $2x+3y+27=0$.

Уравнение AD: $\frac{y-5}{-3-5}=\frac{x-2}{-9-2}$, $8x-11y+$

$+39=0$.

Ответ: $2x+3y-19=0$; $8x-11y-7=0$; $2x+3y+27=0$; $8x-11y+39=0$.

№ 39. Найти проекцию точки P $(-8;\ 12)$ на прямую, проходящую через точки A $(2;\ -3)$ и B $(-5;\ 1)$.

Решение. Уравнение прямой AB найдем по формуле

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

$$\frac{y+3}{1+3}=\frac{x-2}{-5-2}, \quad -7y-21=4x-8, \quad 4x+7y+13=0.$$

Проекцией точки P на прямую AB будет основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую AB.

Уравнение перпендикуляра PQ можно найти по формуле $y-y_1=k(x-x_1)$, так как координаты точки P даны, а угловой коэффициент найдем из условия перпендикулярности.

$$k=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{-\frac{4}{7}}=\frac{7}{4}; \quad y-12=\frac{7}{4}(x+8),$$

$$7x-4y+104=0.$$

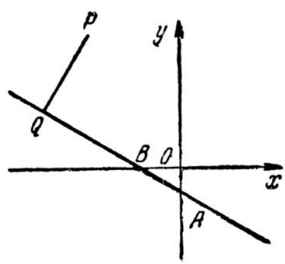
Таким образом, уравнением перпендикуляра PQ является уравнение

$$7x - 4y + 104 = 0.$$

Решив систему уравнений PQ и AB, найдем проекцию точки P на прямую AB

$$\begin{cases} 7x - 4y + 104 = 0, \\ 4x + 7y + 13 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 49x - 28y + 728 = 0, \\ 16x + 28y + 52 = 0; \end{cases}$$

$$65x + 780 = 0,$$



Черт. 44.

$$\left| \begin{aligned} & x = -\frac{780}{65} = -12, \\ & x = -12; \end{aligned} \right.$$

$$4 \cdot (-12) + 7y + 13 = 0, \quad -48 + 7y + 13 = 0,$$

$$7y = 35, \quad y = 5.$$

Ответ: $Q(-12; 5)$.

№ 40. Через точку $M(-1; 1)$ провести прямую так, чтобы середина отрезка ее между параллельными прямыми $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$ лежала на прямой $x-y-1=0$.

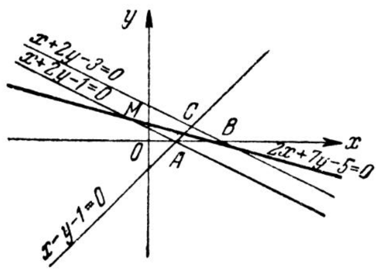
Решение. Сделаем чертеж (черт. 45).

Если середина отрезка искомой прямой, заключенного между параллельными прямыми, должна лежать на прямой $x-y-1=0$, то и середина отрезка AB прямой $x-y-1=0$, заключенного между теми же параллельными прямыми, должна лежать на искомой прямой.

Найдем точки пересечения прямой $x-y-1=0$ с первыми двумя прямыми:

$$\begin{cases} x+2y-1=0, \\ x-y-1=0; \end{cases} \qquad y=0;$$

$$3y=0, \qquad x=1; \qquad A(1;\ 0).$$



Черт. 45.

$$\begin{cases} x+2y-3=0, \\ x-y-1=0; \end{cases} \qquad y=\frac{2}{3};$$

$$3y-2=0 \qquad x=\frac{5}{3};$$

$$B\left(\frac{5}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

Найдем середину отрезка AB.

$$x=\frac{1+\frac{5}{3}}{2}=\frac{4}{3}, \quad y=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}, \quad C\left(\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right).$$

Искомая прямая будет проходить через точки M и C

$$\frac{y-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{x+1}{\frac{4}{3}+1}, \quad \frac{y-1}{-\frac{2}{3}}=\frac{x+1}{\frac{7}{3}}, \quad 2x+7y-5=0.$$

Ответ: $2x+7y-5=0$.

№ 41. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками $A(-8;\ -6)$ и $B(-3;\ -1)$ и имеющая абсциссу $x=5$?

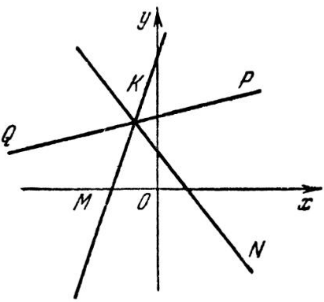
Решение. Воспользуемся условием того, что три точки лежат на одной прямой:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}.$$

$$\frac{5+8}{-3+8}=\frac{y+6}{-1+6},\quad \frac{13}{5}=\frac{y+6}{5},\quad 13=y+6,\quad y=7.$$

Ответ: $C(5;\ 7)$.

№ 42. Через точку $M(-2;\ 0)$ провести прямую, отсекающую на оси Oy отрезок, равный 6; через точку $N(2;\ -1)$ провести вторую прямую, отсекающую на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{3}$.



Черт. 46.

Узнать, лежит ли точка пересечения этих прямых на одной прямой с точками $P(3;\ 4)$ и $Q(-5;\ 2)$.

Решение. Для составления уравнений прямых, проходящих через точки M и N, воспользуемся формулой пучка прямых

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Уравнение первой прямой будет: $y=k(x+2)$, или $y=kx+2k$.

Так как отрезок, отсекаемый этой прямой на оси Oy, равен 6, то положим $2k=6$, откуда $k=3$; следовательно, уравнение прямой есть: $y=3x+6$.

Уравнение второй прямой: $y+1=k(x-2)$, или $y=kx-2k-1$. Вторая прямая отсекает на оси Oy отрезок, равный $\frac{5}{3}$, поэтому

$$-2k-1=\frac{5}{3},\quad k=-\frac{4}{3}.$$

Следовательно, уравнение второй прямой будет: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

Найдем точку пересечения этих прямых.

$$\begin{cases} y = 3x + 6, \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 3x + 6 = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}; \\ y = 3\cdot(-1) + 6 = 3, \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 13x + 13 = 0, \quad x = -1; \\ y = 3. \end{array} \right.$$

Точка пересечения прямых $K(-1; 3)$.

Теперь проверим, лежит ли точка K на одной прямой с точками P и Q:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Подсчитаем левую часть этого равенства:

$$\frac{3-4}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Правая часть равенства: $\frac{-1-3}{-5-3} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$.

Точки P, Q и K лежат на одной прямой.

№ 43. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -1)$ и точку пересечения прямых $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка прямых в виде

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

$$x - 2y + 1 + \lambda(y - 1) = 0.$$

Так как искомая прямая проходит через $M(4; -1)$, то параметр λ определим, использовав эту точку:

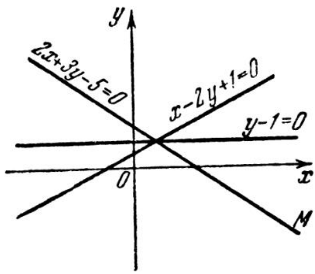
$4 - 2(-1) + 1 + \lambda(-1 - 1) = 0$, $7 - 2\lambda = 0$, $\lambda = \frac{7}{2}$.

Искомое уравнение прямой будет

$$x-2y+1+\frac{7}{2}(y-1)=0, \quad 2x-4y+2+7y-7=0,$$

$$2x+3y-5=0.$$

Ответ: $2x+3y-5=0$.



Черт. 47.

№ 44. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x-y+5=0$ и $2x+3y+1=0$ и параллельной прямой $7x-3y+5=0$.

Решение. Воспользуемся уравнением пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух данных прямых:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Имеем

$$3x-y+5+\lambda(2x+3y+1)=0,$$

или

$$(3+2\lambda)x+(3\lambda-1)y+5+\lambda=0.$$

Для определения λ используем условие параллельности прямых $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}$. Имеем $\frac{7}{3+2\lambda}=\frac{-3}{3\lambda-1}$, откуда

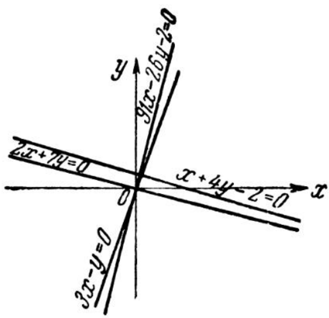
$$21\lambda-7=-9-6\lambda, \quad 27\lambda=-2, \quad \lambda=-\frac{2}{27}.$$

Подставив найденное значение λ в пучок прямых, мы выделим из него единственную прямую:

$$\left(3-\frac{4}{27}\right)x+\left(-\frac{6}{27}-1\right)y+5-\frac{2}{27}=0,$$
$$77x-33y+133=0.$$

Ответ: $77x-33y+133=0$.

№ 45. Через точку пересечения прямых $3x-y=0$ и $x+4y-2=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+7y=0$.



Черт. 48.

Решение. Через точку пересечения данных прямых проведем пучок прямых

$$3x-y+\lambda(x+4y-2)=0.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$(3+\lambda)x+(4\lambda-1)y-2\lambda=0.$$

Воспользуемся условием перпендикулярности двух прямых

$$A_1A_2+B_1B_2=0,$$

т. е.

$$2(3+\lambda)+7(4\lambda-1)=0.$$

Из последнего уравнения найдем значение λ:

$$6+2\lambda+28\lambda-7=0, \quad 30\lambda=1, \quad \lambda=\frac{1}{30}.$$

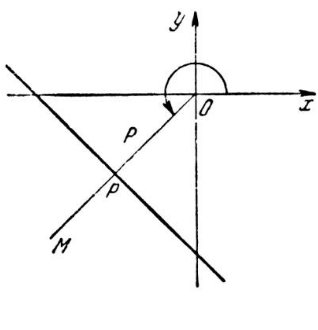
Подставим значение λ в уравнение пучка, получим искомое уравнение прямой:

$$3x-y+\frac{1}{30}(x+4y-2)=0, \quad 90x-30y+x+4y-2=0,$$

$$91x-26y-2=0.$$

Ответ: $91x-26y-2=0$.

№ 46. Составить уравнение прямой, если известно, что ее расстояние от начала координат равно 13, а угол,



Черт. 49.

образованный перпендикуляром, опущенным с начала координат на прямую, и осью Ox, равен 225°.

Решение. Сделаем чертеж (черт. 49). Для этого проведем луч OM под углом $\alpha=225°$ к оси Ox, на нем отложим 13 единиц масштаба, $OP=13$ и через точку P проведем прямую, перпендикулярную OM. Это и есть искомая прямая. Составим ее уравнение.

Воспользуемся нормальным уравнением прямой-

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0.$$

Согласно условию $p=13$, $\alpha=225°$, получаем:

$$x\cos 225° + y\sin 225° - 13 = 0.$$

$$x\cos(180°+45°) + y\sin(180°+45°) - 13 = 0, \ -x\cos 45° -$$

$$- y\sin 45° - 13 = 0, \quad -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - 13 = 0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 13 = 0, \quad x + y + 13\sqrt{2} = 0.$$

Ответ: $x+y+13\sqrt{2}=0$.

№ 47. Провести прямую через точку $P(3; -4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую.

Решение. Возьмем формулу нормального уравнения прямой:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Параметр p найдем по формуле расстояния точки от начала координат

$$d = \sqrt{x^2+y^2}; \quad p = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5.$$

Для нахождения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ используем формулы

$$x_1 = p\cos\alpha, \quad y_1 = p\sin\alpha, \quad \text{откуда} \quad \cos\alpha = \frac{x_1}{p},$$

$$\sin\alpha = \frac{y_1}{p},$$

таким образом, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Искомое уравнение прямой будет:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5 = 0,$$

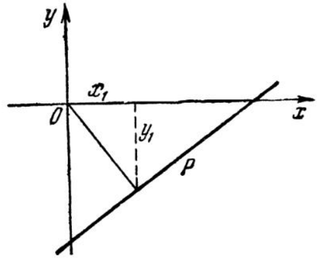
или

$$3x - 4y - 25 = 0.$$

С целью проверки рекомендуется решить эту задачу другим способом, используя уравнение прямой

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Ответ: $3x-4y-25=0$.



Черт. 50.

№ 48. Найти геометрическое место точек, отклонение которых от прямой $6x-8y+5=0$, равно 5.

Решение. Пусть $M(x, y)$ есть точка, отклонение которой от данной прямой равно -5. Воспользуемся формулой

$$\delta=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Так как в уравнении данной прямой свободный член $C=5$ положительный, то нормирующий множитель нужно брать со знаком минус.

$$-5=\frac{6x-8y+5}{-\sqrt{36+64}};$$

$$5\cdot 10=6x-8y+5, \quad 6x-8y-45=0.$$

Геометрическим местом точек, отклонение которых от данной прямой равно -5, есть прямая $6x-8y-45=0$, параллельная данной прямой.

Ответ: $6x-8y-45=0$.

№ 49. Найти геометрическое место точек, расстояние которых от прямой $5x-12y-13=0$ равно 3.

Решение. Пусть $M(x; y)$ есть точка, отстоящая от прямой $5x-12y-13=0$ на расстоянии $d=3$.

Воспользуемся формулой

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$3=\frac{|5x-12y-13|}{\sqrt{25+144}}, \quad 3=\frac{|5x-12y-13|}{13},$$

$$|5x-12y-13|=39.$$

Получаем два уравнения $5x-12y-13=39$, или $5x-12y-52=0$ и $-5x+12y+13=39$, или $5x-12y+26=0$.

Таким образом, геометрическим местом точек, отстоящих от прямой $5x-12y-13=0$ на расстоянии, равном 3, есть две прямые, параллельные этой прямой и расположенные по обе стороны от нее.

Ответ: $5x-12y-52=0$; $5x-12y+26=0$.

№ 50. Две стороны квадрата лежат на прямых $4x-3y+15=0$ и $8x-6y+25=0$. Вычислить его площадь

Решение. Так как выполняется условие параллельности данных прямых $\frac{4}{8}=\frac{-3}{-6}$, то на этих прямых лежат противоположные стороны квадрата. Длина стороны квадрата будет равна расстоянию между заданными прямыми.

Возьмем на одной из заданных прямых, например на второй, произвольную точку. Положим $x=0$, тогда $y=4\frac{1}{6}$, и найдем расстояние точки $(0;\ 4\frac{1}{6})$ к первой прямой по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}};\ d=\frac{\left|4\cdot 0-3\cdot\frac{25}{6}+15\right|}{\sqrt{16+9}}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=$$

$$=\frac{1}{2},\quad d=\frac{1}{2}.$$

Площадь квадрата равна $S=d^2=\frac{1}{4}$.

Ответ: $S=\frac{1}{4}$ кв. ед.

№ 51. Доказать, что через точку $P\ (2;\ 7)$ можно провести две прямые так, чтобы их расстояния от точки $Q\ (1;\ 2)$ были равны 5. Составить уравнения этих прямых.

Решение. Уравнения прямых, проходящих через точку $P\ (2;\ 7)$, будут

$$y-7-k(x-2),\quad \text{или}\quad kx-y+7-2k=0. \qquad (1)$$

Расстояния этих прямых от точки Q (1; 2) будут

$$d = \frac{k\cdot 1 - 1\cdot 2 + 7 - 2k}{\pm\sqrt{k^2+1}},$$

что по условию равно 5, т. е.

$$\frac{k-2+7-2k}{\pm\sqrt{k^2+1}} = 5$$

или
$$5-k = \pm 5\sqrt{k^2+1}.$$

Решим полученное уравнение с неизвестным k:

$$(5-k)^2 = 25(k^2+1), \quad 25-10k+k^2 = 25k^2+25,$$

$$24k^2+10k=0,$$

$$2k(12k+5)=0, \quad k_1=0; \quad 12k+5=0, \quad k_2=-\frac{5}{12}.$$

Подставив в уравнение (1) значения k_1 и k_2, получим уравнения искомых прямых $y-7=0$:

$$-\frac{5}{12}x - y + 7 + \frac{10}{12} = 0, \quad -5x-12y+84+10=0,$$

$$5x+12y-94=0.$$

Ответ: $y-7=0$; $5x+12y-94=0$.

№ 52. Составить уравнения прямых, перпендикулярных к прямой $2x+6y-3=0$ и отстоящих от точки (5; 4) на расстоянии $\sqrt{10}$ ед.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой

$$k_1 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Согласно условию перпендикулярности угловой коэффициент искомых прямых будет $k_2=3$. Уравнения искомых прямых примут вид:

$$y-y_1 = 3(x-x_1), \text{ или } 3x-y+(y_1-3x_1)=0,$$

где (y_1-3x_1) — свободный член уравнения подлежит определению.

Определим расстояние точки (5; 4) до искомых прямых по формуле

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \quad \pm\sqrt{10}=\frac{3\cdot5-1\cdot4+(y_1-3x_1)}{\sqrt{9+1}},$$

$$\pm 10=11+(y_1-3x_1); \quad (y_1-3x_1)_1=10-11=-1;$$

$$(y_1-3x_1)_2=-10-11=-21.$$

Таким образом, уравнения перпендикуляров следующие:

$$3x-y-1=0 \quad \text{и} \quad 3x-y-21=0.$$

С целью проверки рекомендуем второй способ решения задачи. Уравнения прямых, перпендикулярных данной прямой, будут $6x-2y+C=0$ (1), где C подлежит определению. Определим расстояния прямых (1) от точки (5; 4);

$$d=\frac{6\cdot5-2\cdot4+C}{\pm\sqrt{36+4}}.$$

По условию $d=\sqrt{10}$, получим уравнения

$$\sqrt{10}=\frac{22+C}{\pm\sqrt{40}}, \quad \pm\sqrt{400}=22+C, \quad \pm 20=22+C,$$

$$C_1=20-22=-2; \quad C_2=-20-22=-42.$$

Уравнениями искомых прямых будут уравнения

$$6x-2y-2=0, \quad 3x-y-1=0 \quad \text{и} \quad 6x-2y-42=0$$

$$3x-y-21=0.$$

Ответ: $3x-y-1=0$, $3x-y-21=0$.

№ 53. На прямой $x+y-8=0$ найти точки, равноудаленные от точки (2; 8) и от прямой $x-3y+2=0$.

Решение. Пусть искомая точка M $(x;\ y)$. Ее расстояние до точки (2; 8) $d_1=\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2}$, а до прямой

$$d_2=\pm\frac{x-3y+2}{-\sqrt{10}}.$$

По условию расстояния d_1 и d_2 равны. Имеем уравнение:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2} = \mp \frac{x-3y+2}{\sqrt{10}}.$$

Упростим его.

$$10(x^2-4x+4+y^2-16y+64) = x^2+9y^2+$$

$$+4-6xy+4x-12y,$$

$$10x^2-40x+10y^2-160y+680 = x^2+9y^2-$$

$$-6xy+4x-12y+4,$$

$$9x^2+y^2+6xy-44x-148y+676=0.$$

Так как точка M лежит на прямой $x+y-8=0$, то решив совместно полученное уравнение с уравнением данной прямой, получим искомые точки.

$$\begin{cases} y=8-x, \\ 9x^2+y^2+6xy-44x-148y+676=0, \end{cases}$$

$$9x^2+(8-x)^2+6x(8-x)-44x-$$

$$-148(8-x)+676=0,$$

$$9x^2+64-16x+x^2+48x-6x^2-44x-1184+$$

$$+148x+676=0.$$

$$4x^2+136x-444=0, \quad x^2+34x-111=0;$$

$$x_{1,2} = -17 \pm \sqrt{289+111} = -17 \pm \sqrt{400} = -17 \pm 20;$$

$$x_1 = -17+20=3, \quad x_2 = -17-20 = -37;$$

$$y_1 = 8-3=5; \quad y_2 = 8+37 = 45.$$

Ответ: $M_1(3;\ 5)$, $M_2(-37;\ 45)$.

№ 54. Найти биссектрисы углов между прямыми

$$3x+4y-1=0 \quad \text{и} \quad 4x-3y+5=0,$$

Решение. Возьмем на биссектрисе произвольную точку $M\ (x;\ y)$ и определим ее расстояние до каждой из данных прямых по формуле:

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$d_1=\frac{3x+4y-1}{\sqrt{9+16}},\quad d_1=\frac{3x+4y-1}{5},\quad d_2=\frac{4x-3y+5}{-\sqrt{16+9}}.$$

$$d_2=\frac{4x-3y+5}{-5}.$$

Так как биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от данных сторон угла, то $|d_1|=|d_2|$, или $d_1=\pm d_2$. Взяв одинаковые знаки d_1 и d_2, получим уравнение первой из биссектрис:

$$\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{4x-3y+5}{-5},$$

$$3x+4y-1=3y-4x-5,\quad 7x+y+4=0.$$

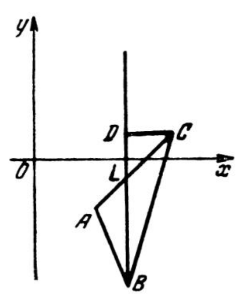
При различных знаках d_1 и d_2 получим уравнение второй биссектрисы:

$$\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{4x-3y+5}{5},$$

$$3x+4y-1=4x-3y+5,\quad x-7y+6=0.$$

Ответ: $7x+y+4=0$; $x-7y+6=0$.

№ 55. Даны вершины треугольника $A\ (2;\ -2)$, $B\ (3;\ -5)$ и $C\ (5;\ 1)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине B.



Черт. 51.

Решение. Чтобы составить уравнение перпендикуляра CD (черт. 51), опущенного на биссектрису BD, необходимо знать угловой коэффициент BD. Для этого достаточно найти координаты точки L, которая согласно свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника делит сторону AC в отношении

$$\lambda=\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}.$$

Для определения λ необходимо найти длины сторон AB и BC, которые находим по формуле расстояния между двумя точками.

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(-5+2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10};$$

$$BC=\sqrt{(5-3)^2+(1+5)^2}=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}.$$

Таким образом, $\lambda=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{1}{2}.$

Координаты точки L найдем по формулам деления отрезка в заданном отношении:

$$x_L=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}}=3;\quad y_L=\frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda}=$$

$$=\frac{-2+\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{3}{2}}=-1;\quad L(3;\ -1).$$

Угловой коэффициент BD найдем по формуле

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};$$

$$k=\frac{-5+1}{3-3}=\infty.$$

Следовательно, биссектриса BD перпендикулярна к оси Ox.

В таком случае прямая CD будет параллельна оси Ox, ее уравнение $y=b$, где b — ордината точки, через которую проходит прямая. $b=1$.

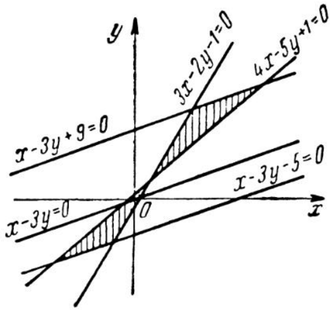
Таким образом, уравнением перпендикуляра CD будет уравнение $y=1$, или $y-1=0$.

Ответ: $y-1=0$.

№ 56. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $x-3y=0$ и отсекающих от двух пересекающихся прямых $3x-2y-1=0$, $4x-5y+1=0$ треугольник, площадь которого равна $\frac{7}{2}$.

Решение. Уравнения искомых прямых будут

$$x-3y+c=0.$$



Черт. 52.

Коэффициент c определим, использовав площадь треугольника.

Найдем координаты вершин треугольника, имеющего площадь $\frac{7}{2}$, для чего решим следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x-2y-1=0, \\ 4x-5y+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-2y-1=0, \\ x-3y+c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-5y+1=0, \\ x-3y+c=0. \end{cases}$$

Решаем первую, вторую и третью системы уравнений.

Получим координаты точек: A (1; 1),

$$B\left(\frac{2c+3}{7};\ \frac{3c+1}{7}\right),\ C\left(\frac{5c-3}{7};\ \frac{4c-1}{7}\right).$$

Подставив в эту формулу соответствующие значения

$$S = \pm \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right].$$

Подставив в эту формулу соответствующие значения x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, получим выражение площади

$$S = \pm \frac{1}{2\cdot 7}(c-2)^2.$$

По условию площадь этого треугольника равна $\frac{7}{2}$

т. е. $\mp \frac{1}{2\cdot 7}(c-2)^2 = \frac{7}{2}$,

или

$$(c-2)^2 = \mp 49.$$

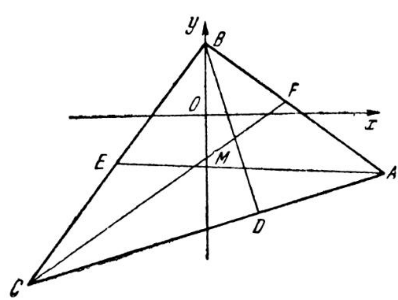
Так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным, то рассмотрим только уравнение $(c-2)^2 = 49$. Решим его: $c-2 = \pm 7$, $c_1 = 2+7 = 9$, $c_2 = 2-7 = -5$.

Таким образом, уравнениями искомых прямых будут уравнения: $x-3y+9=0$ и $x-3y-5=0$. (черт. 52).

Ответ: $x-3y+9=0$, $x-3y-5=0$.

№ 57. *Решить самостоятельно.* Даны вершины треугольника A $(12;\ -4)$, B $(0;\ 5)$, C $(-12;\ -11)$.

Найти: 1) длины сторон, 2) уравнения сторон, 3) уравнение высоты, проведенной из точки B, 4) длину этой высоты, 5) уравнение медианы, проведенной из точки A, 6) длину этой медианы, 7) уравнение биссектрисы



Черт. 53.

угла C, 8) центр тяжести треугольника, 9) площадь треугольника, 10) угол C.

Указания. 1) Длины сторон треугольника определяем по формуле расстояния между двумя точками

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Ответ: $AB=15$, $AC=25$, $BC=20$.

2) Каждая сторона треугольника проходит через две точки, поэтому для составления уравнений сторон воспользуйтесь формулой

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Ответ: Уравнение AB: $3x+4y-20=0$.

Уравнение AC: $7x-24y-180=0$.

Уравнение BC: $4x-3y+15=0$.

3) Чтобы составить уравнение высоты, проведенной из точки B на сторону AC, необходимо знать угловой коэффициент этой высоты.

Прежде определите угловой коэффициент AC и из условия перпендикулярности: $k_1\cdot k_2=-1$. Определите k_1 — угловой коэффициент стороны BD. Затем составьте уравнение высоты, пользуясь формулой $y-y_1=k(x-x_1)$.

Ответ: $3x+4y-20=0$.

4) Высоту BD мы рассматриваем как перпендикуляр, по которому определяется отклонение точки B от прямой AC. Поэтому для определения длины высоты BD воспользуемся формулой

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ответ: $BD=-12$.

Так как точка B и начало координат расположены по одну сторону от прямой AC, то расстояние точки B до прямой AC выразилось отрицательным числом.

5) Прежде чем составить уравнение медианы, проведенной из точки A, найдите координаты точки, в которой медиана пересекает противоположную сторону BC. Согласно определению медианы, она сторону BC разделит пополам.

Ответ: E $(-6; -3)$.

Через точки A и E проведите прямую (уравнение прямой через две точки).

Ответ: $x+18y+60=0$ — уравнение медианы.

6) Длину медианы определите по формуле расстояния между точками A и E.

Ответ: $AE=5\cdot\sqrt{13}$.

7) Для составления уравнения биссектрисы угла C используйте определение биссектрисы как геометрического места точек, равноудаленных от сторон треугольника, т. е. $|d_1| = |d_2|$.

Ответ: $9x-13y-35=0$.

8) Центр тяжести треугольника определите по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Ответ: $M\left(0; -3\frac{1}{3}\right)$.

9) Для вычисления площади треугольника используйте формулу

$$S=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)].$$

Ответ: $S_{ABC}=150$ кв. единиц.

10) Чтобы определить угол C, необходимо знать угловые коэффициенты сторон BC и AC, которые образуют этот угол:

$$k_{BC}=\frac{4}{3}, \quad k_{AC}=\frac{7}{24},$$

$$\operatorname{tg} C=\frac{\frac{4}{3}-\frac{7}{24}}{1+\frac{4\cdot 7}{3\cdot 24}}=\frac{32-7}{72+28}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}; \quad C=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}.$$

№ 58. Найти полярное уравнение прямой, если:

1) Угол наклона прямой к полярной оси равен $\frac{1}{6}\pi$, а длина перпендикуляра, опущенного из полюса на эту прямую, равна 3.

Решение. Воспользуемся полярным уравнением прямой $p=\rho\cos(\varphi-\alpha)$, получим:

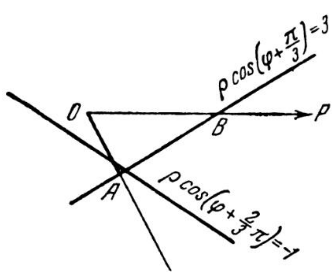
$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3-6+1}{6}\ \pi=-\frac{2}{6}\ \pi=-\frac{\pi}{3},$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{3}.$$

Уравнение прямой будет

$$\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=3.$$

2) Отрезок, отсекаемый прямой на полярной оси,



Черт. 54.

равен 2, а полярный угол нормали этой прямой равен $-\frac{2}{3}\pi$.

Решение. Из предыдущего чертежа видно, что $p=a\cos\alpha$, поэтому

$$p=2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=2\cos\frac{2}{3}\ \pi=2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-2\cos\frac{\pi}{3}=-2\cdot\frac{1}{2}=-1.$$

Следовательно, уравнение прямой будет:

$$\rho\cos\left(\varphi+\frac{2}{3}\ \pi\right)=-1.$$

3) Угол наклона прямой к полярной оси равен $\frac{1}{6}\pi$

и отрезок, который отсекает прямая на полярной оси, равен 6.

Решение.

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3-6+1}{6}\pi=-\frac{\pi}{3},\quad \alpha=-\frac{\pi}{3};$$

$$p=a\cos\alpha,\quad p=6\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=6\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=6\cdot\frac{1}{2}=3,\quad p=3.$$

Уравнение прямой $\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=3$.

№ 59. Составить полярное уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(4;\frac{1}{6}\pi\right)$ и наклоненной к полярной оси под углом $\frac{5}{6}\pi$.

Решение.

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\left(\pi-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{3-6+5}{6}\pi=\frac{\pi}{3},\quad \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

Найдем p:

$$p=\rho\cos(\varphi-\alpha);\quad p=4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=4\cos\frac{\pi}{6}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

Уравнение прямой будет $\rho\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$.

Ответ: $\rho\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$.

№ 60. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$ и $N(4;0)$.

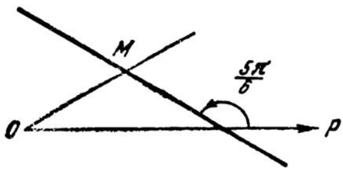
Решение. Так как прямая проходит через точки M и N, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению прямой, т. е. получим систему уравнений:

$$p = 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 4\cos(-\alpha) = 0,$$

$$p = 4\cos(0 - \alpha);$$

$$4\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0,\ \sin\alpha - \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = \cos\alpha,\ \alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$p = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$



Черт. 55.

Уравнение прямой будет $\rho\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить прямые: а) $x+y-1=0$; б) $x-1=0$; в) $y-1=0$; г) $x+y=0$.

2. Проверить, лежат ли на прямой $2x-3y+6=0$ следующие точки: A (0; 2); B (3; —4); C (3; 4); D (5; 1); E (—3; 0).

3. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат следующими прямыми:

$$\text{а) } 5x - y - 10 = 0; \quad \text{б) } 2x + 7y + 28 = 0;$$
$$\text{в) } 3x - 2 = 0; \quad \text{г) } 2y + 5 = 0.$$

4. Найти площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой. $3x+4y-12=0$.

5. Какой угол с осью Ox образуют прямые:

$$\text{а) } x + y + 3 = 0; \quad \text{б) } x - y - 5 = 0;$$

$$\text{в) } \sqrt{3}\,x - y = 0; \quad \text{г) } x + \sqrt{3}\,y + 1 = 0?$$

6. Какие углы образует каждая пара прямых:

$$\text{а) } y = x \quad \text{и} \quad y = -x;$$

$$\text{б) } 2x + y - 5 = 0 \quad \text{и} \quad x - 2y + 3 = 0;$$

$$\text{в) } x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x - 1 = 0;$$

$$\text{г) } 3x + 2y - 5 = 0 \quad \text{и} \quad 6x + 4y + 9 = 0;$$

$$\text{д) } x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad y - 1 = 0.$$

7. Какие из уравнений прямых являются нормальными уравнениями:

$$\text{а) } x + y + 3 = 0; \quad \text{б) } y + 5 = 0; \quad \text{в) } x - 2 = 0;$$

$$\text{г) } \frac{3}{8}x + \frac{4}{13}y - 3 = 0;$$

$$\text{д) } \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 1 = 0; \quad \text{е) } \frac{7}{25}x - \frac{24}{25}y - 1 = 0;$$

$$\text{ж) } \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

8. На каком расстоянии от начала координат находятся прямые

$$\text{а) } \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0; \quad \text{б) } 6x + 8y - 25 = 0?$$

9. Через точку $(3;\ -2)$ провести прямую: а) параллельную оси Ox; б) параллельную оси Oy.

10. Узнать, лежат ли на прямой $\rho\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 3$ следующие точки:

$$A\left(-3;\ \frac{3}{4}\pi\right); \quad B\left(6;\ \frac{\pi}{12}\right); \quad C\left(3;\ -\frac{\pi}{4}\right);$$

$$D\left(2\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right); \quad E\left(-3\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right).$$

11. Какой отрезок на полярной оси OP отсекают прямые

а) $\rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=3$; б) $\rho\cos\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right)=-1$;

$$\text{в) } \rho\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=6.$$

Ответы: 3. а) $a=2, b=-10$; б) $a=-14$, $b=-4$;

$$\text{в) } a=\frac{2}{3}; \quad \text{г) } b=-\frac{5}{2}.$$

4. 6 кв. ед. **5.** а) 135°; б) 45°; в) 60°; г) 150°.

6. *а*) 90°; б) 90°; в) 0; г) 0; д) 90°.

7. $\frac{7}{25}x-\frac{24}{25}y-1=0$, $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-2=0$ и $x-2=0$

8. а) 2 ед; б) 2,5 ед.

9. а) $y+2=0$; б) $x-3=0$.

11. а) 6; б) 2; в) $4\sqrt{3}$.

Глава III

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Линия может быть определена как некоторое геометрическое место точек, т. е. может быть дано геометрическое свойство, присущее только точкам этой линии. В таком случае возникает вопрос о нахождении уравнения линии.

Задача нахождения уравнения линии сводится к тому, чтобы выразить аналитически тот факт, что все точки линии обладают определенным свойством. Но нет необходимости рассматривать все точки линии. Мы можем представить себе, что эта линия описана подвижной точкой $M(x, y)$.

Поэтому для составления уравнения берут произвольную точку, принадлежащую данному геометрическому месту, и связывают ее координаты x и y с данными величинами.

Получив искомое уравнение, доказывают, что это и есть уравнение данного геометрического места, что координаты точек, не принадлежащих данному геометрическому месту, не удовлетворяют найденному уравнению.

Решение задач на геометрические места значительно упрощается, если удачно подобрать соответствующую систему осей координат.

Примерами на составление уравнений геометрических мест могут служить выводы канонических уравнений окружности, эллипса, гиперболы и параболы.

Примеры решения задач

№ 60. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки A (—5; 3).

Решение. Пусть точка M (x, y) лежит на искомом геометрическом месте (черт. 56). Тогда, согласно условию, $MA=MO$, т. е. расстояния точки $M(x,y)$ до точки A $(-5;\ 3)$ и начала координат O равны между собой:

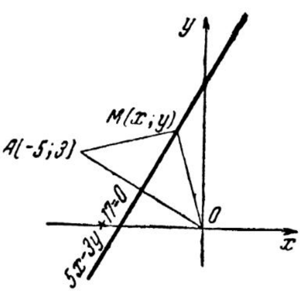
$$MA=\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}, \quad MO=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Тогда в силу равенства $MA=MO$, имеем

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+y^2},$$

или $x^2+10x+25+y^2-6y+9=x^2+y^2$, и окончательно $5x-3y+17=0$.

Итак, искомое геометрическое место точек есть прямая, перпендикулярная AO и делящая этот отрезок пополам. Покажем теперь, что координаты точек, не принадлежащих прямой, перпендикулярной к AO и делящей отрезок AO пополам, не удовлетворяют найденному уравнению $5x-3y+$ $+17=0$.



Черт. 56.

Пусть точка $M(x, y)$ не принадлежит найденному геометрическому месту точек. Тогда либо $MA>MO$, либо $MA<MO$.

Если $MA>MO$, тогда $\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}>$ $>\sqrt{x^2+y^2}$, или $x^2+10x+25+y^2-6y+9>x^2+y^2$, и окончательно $5x-3y+17>0$.

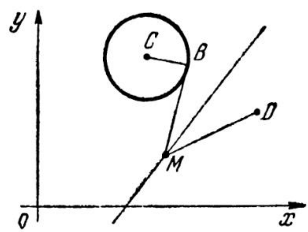
Следовательно, точка M (x, y) не удовлетворяет уравнению геометрического места $5x-3y+17=0$.

Для случая $MA<MO$ доказательство аналогично.

№ 61. Даны: точка D (4; 3) и окружность радиуса $r=1$ с центром в точке C (2; 4).

Требуется найти такую точку M, чтобы длина касательной, проведенной из нее к окружности, была равна расстоянию точки M до точки D (черт. 57).

Решение. Пусть искомая точка есть M (x, y)



Черт. 57.

(черт. 57). Согласно условия $MB=MD$, где точка B есть точка касания прямой к окружности. Тогда треугольник MBC прямоугольный, из которого находим, что $MB=$ $=\sqrt{MC^2-BC^2}$, но $MC^2=(x-2)^2+(y-4)^3$, а $BC=$ $=r=1$.

Имеем

$$MB=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2-1}.$$

Расстояние точки M от точки D равно:

$$MD=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}.$$

Имеем уравнение

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2-1}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения, найдем

$$(x-2)^2+(y-4)^2-1=(x-4)^2+(y-3)^2.$$

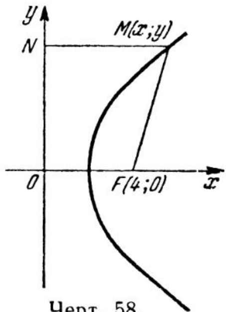
После преобразования получим: $2x-y-3=0$.

Следовательно, точек, удовлетворяющих заданному условию, будет бесчисленное множество. Они образуют прямую, уравнение которой найдено.

№ 62. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Oy и от точки F (4; 0).

Решение. Пусть точка M (x, y) лежит на искомом геометрическом месте точек. (черт. 58). Тогда согласно условию задачи $MF = MN$,

$$MF = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}, \quad MN = x.$$



Черт. 58.

В силу равенства

$$MF = MN$$

имеем:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = x,$$

или

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2,$$

и окончательно

$$y^2 = 8x - 16.$$

Искомое геометрическое место точек есть парабола, симметричная относительно оси Ox и с фокусом в точке (4; 0).

Покажем, что координаты точки, не принадлежащей нашему геометрическому месту, т. е. параболе, не удовлетворяют найденному уравнению $y^2 = 8x - 16$.

Предположим, что точка M (x, y) не принадлежит искомому геометрическому месту. Тогда либо $MF > MN$, либо $MF < MN$.

Пусть, например, $MF > MN$. Тогда $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} > x$. После возведения в квадрат, раскрытия скобок и переноса всех членов влево, получим: $y^2 - 8x + 16 > 0$.

Следовательно, точка M (x, y) не удовлетворяет уравнению геометрического места $y^2 = 8x - 16$.

Для случая $MF < MN$ доказательство аналогично.

№ 63. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки A (4; 0) остается вдвое меньше расстояния от точки B $(-8; 0)$.

Решение. Пусть точка M (x, y) лежит на искомой траектории. Тогда, согласно условию $2MA = MB$.

Расстояние $MA = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$,

расстояние $MB=\sqrt{(x+8)^2+y^2}$.
В силу равенства $2MA=MB$, имеем:

$$2\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{(x+8)^2+y^2}.$$

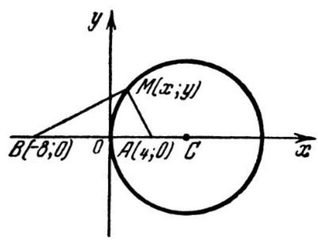
Возводим правую и левую часть равенства в квадрат, получаем

$$4[(x-4)^2+y^2]=(x+8)^2+y^2.$$

После преобразования получим

$$x^2+y^2-16x=0.$$

Искомая траектория точки M—окружность (черт. 59).



Черт. 59.

№ 64. *Решить самостоятельно.* Составить уравнение геометрического места точек, сумма расстояний которых от точек $F(2;0)$ и $F_1(-2;0)$ равна $2\sqrt{5}$.

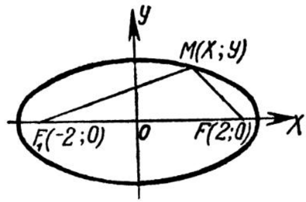
Указания. Пусть точка M с координатами x и y лежит на искомом геометрическом месте точек. Тогда, согласно условию задачи,

$$MF+MF_1=2\sqrt{5},$$

но

$$MF=\sqrt{(x-2)^2+y^2}, \quad \text{а} \quad MF_1=\sqrt{(x+2)^2+y^2}.$$

Ответ: $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$ — эллипс (черт. 60).



Черт. 60.

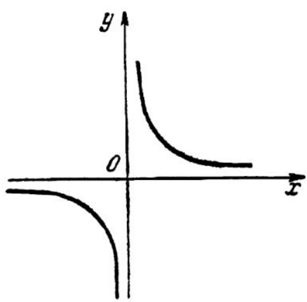
№ 65. *Решить самостоятельно.* Составить уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых от точек $F_1(-2;\ -2)$ и $F(2;\ 2)$ равна 4.

Указания. Пусть точка $M\ (x,\ y)$ лежит на искомом геометрическом месте. Тогда, согласно условию задачи, $MF_1 - MF = 4$, где

$$MF_1 = \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2},$$

$$MF = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}.$$

Ответ: $xy=2$ (равносторонняя гипербола) (черт. 61)



Черт. 61.

№ 66. *Решить самостоятельно.* Составить уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек $F\ (a;\ 0)$ и $F_1\ (-a;\ 0)$ есть постоянная величина a^2.

Указания. Пусть точка $M\ (x,\ y)$ лежит на искомом геометрическом месте.

Согласно условию задачи $MF \cdot MF_1 = a^2$, где $MF = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$, $MF_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$.

Тогда

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2+y^2} = a^2.$$

После алгебраических преобразований получите следующее уравнение

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$

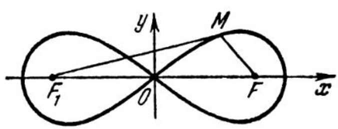
Чтобы перейти к полярным координатам, используйте формулы

$$x = \rho \cdot \cos\varphi \quad \text{и} \quad y = \rho \cdot \sin\varphi.$$

После преобразований получается окончательный ответ

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

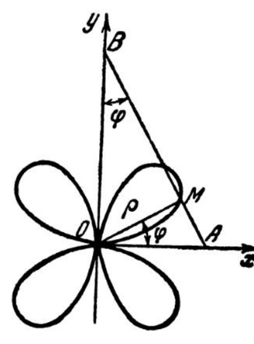
Кривая называется *лемнискатой* (черт. 62).



Черт. 62.

№ 67. *Решить самостоятельно.* Отрезок AB постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины прямого угла O на этот отрезок опущен перпендикуляр OM. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров.

Указания. Пусть отрезок $AB = 2a$. Точка M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла O на отрезок AB (черт. 63).



Черт. 63.

Составьте уравнение этого геометрического места в полярных координатах. Для этого поместите полюс в вершине прямого угла, а полярную ось направьте по одной из его сторон OA. Из треугольника AOM $\rho = OM = OA \cos\varphi$, где

$$OA = AB \sin\varphi = 2a \sin\varphi.$$

Ответ. Точка M описывает кривую $\rho = a\sin^2\varphi$, называемую *четырехлепестковой розой.*

№ 68. *Решить самостоятельно*. Составить уравнение геометрического места оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, отсекающие от координатного угла треугольники постоянной площади S.

Указания. Составьте уравнение геометрического места сначала в полярных координатах, совмещая полюс с началом прямоугольных координат и полярную ось с положительной полуосью OX. Согласно условию задачи

$$\frac{OA \cdot OB}{2} = S,$$

где из треугольника OAM

$$OA = \frac{OM}{\cos\varphi} = \frac{\rho}{\cos\varphi},$$

из треугольника OBM

$$OB = \frac{OM}{\sin\varphi} = \frac{\rho}{\sin\varphi}$$

и окончательно

$$\rho^2 = S \sin 2\varphi.$$

Составьте уравнение геометрического места в прямоугольных координатах

$$\rho^2 = 2S \sin\varphi \cos\varphi,$$

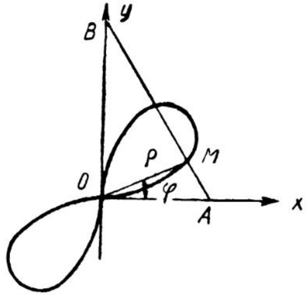
где

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho}.$$

и

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ответ: $(x^2+y^2)^2 = 2Sxy$ — лемниската (черт. 64).



Черт. 64.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек A $(1;\ -1)$ и B $(3;\ 4)$.

2. Написать уравнение геометрического места точек, для которых расстояние от точки A $(12;\ 0)$ вдвое больше расстояния от точки B $(3;\ 0)$.

3. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Oy и точки F $(3;\ 0)$.

4. Написать уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых от точек F_1 $(-2;\ -2)$ и F $(2;\ 2)$ равна 4.

5. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси OX и от точки F $(0;\ 3)$.

Ответы: 1. $4x+10y-23=0$; 2. $x^2+y^2=36$;

3. $y^2=6x-9$;

4. $xy=2$;

5. $x^2=6y-9$.

Глава IV

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Окружность. *Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки этой плоскости* (черт. 65).

Уравнение окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом r имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

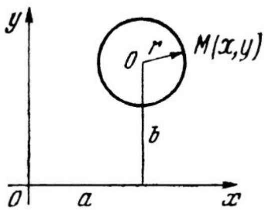
В частном случае, когда центр окружности лежит в начале координат, ее уравнением является

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (2)$$

Общее уравнение кривой второго порядка

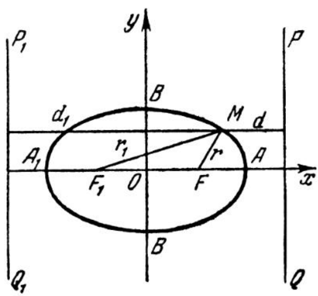
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

представляет окружность, если коэффициенты при квадратах координат равны между собой, $A = C$, и если отсутствует член с произведением координат xy, т. е. $B = 0$.



Черт. 65.

2. Эллипс. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная 2a.*



Черт. 66.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = a^2 - c^2). \qquad (3)$$

Координаты фокусов эллипса $F\ (c;\ 0)$ и $F_1\ (-c;\ 0)$.

Расстояние между фокусами эллипса равно $2c$. Точки пересечения эллипса с осями координат

$A(a;\ 0)$, $A_1(-a;\ 0)$, $B(0;\ b)$, $B_1(0;\ -b)$ — называются *вершинами*.

Отрезки $AA_1=2a$, $BB_1=2b$ называются *осями эллипса.*
Эксцентриситет эллипса

$$e = \frac{c}{a} < 1 \tag{4}$$

Расстояния r и r_1 точки $M\ (x;\ y)$ эллипса до его фокусов называются *фокальными радиусами* этой точки и определяются формулами

$$\begin{aligned} r &= a - ex, \\ r_1 &= a + ex. \end{aligned} \tag{5}$$

Две прямые PQ и P_1Q_1, параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{e}$, называются *директрисами эллипса.* Их уравнения:

$$x = \frac{a}{e}, \quad x = -\frac{a}{e}, \tag{6}$$

или

$$x = \frac{a^2}{c}, \qquad x = -\frac{a^2}{c}.$$

Отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r}{d} = e \quad \text{и} \quad \frac{r_1}{d_1} = e. \tag{7}$$

Уравнение эллипса с осями, параллельными координатным осям, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{8}$$

где $(x_0,\ y_0)$ — координаты центра эллипса.

3. Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$* (черт. 67).

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = c^2 - a^2).$$

Координаты фокусов гиперболы:

$$F(c;\ 0) \quad \text{и} \quad F_1(-c;\ 0).$$

Расстояние между фокусами равно $2c$.

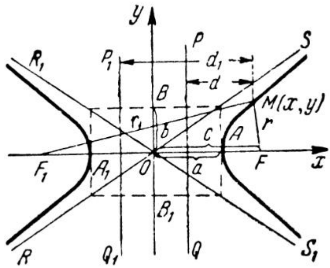
Точки пересечения гиперболы с осью абсцисс $A\ (a;\ 0)$ и $A_1(-a;\ 0)$ называются *действительными вершинами*.

Отрезок $AA_1=2a$ называется *действительной осью гиперболы*.

Точки $B\ (0;\ b)$ и $B_1\ (0;\ -b)$ называются *мнимыми вершинами* гиперболы, а отрезок $BB_1=2b$ называется *мнимой осью гиперболы*.

Эксцентриситет гиперболы $\quad e=\dfrac{c}{a}>1. \qquad (10)$

Расстояния r и r_1 точки $M\ (x;\ y)$ гиперболы до ее фокусов на-



Черт. 67.

зываются *фокальными радиусами* этой точки и определяются формулами.

$$
\begin{aligned}
r &= ex-a,\\
r_1 &= ex+a,
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

если точка M лежит на правой ветви;

$$
\begin{aligned}
r &= -(ex-a),\\
r_1 &= -(ex+a),
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

если точка M лежит на левой ветви.

Две прямые PQ и P_1Q_1, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстоянии $\dfrac{a}{e}$, называются *директрисами гиперболы*. Их уравнения:

$$x=\frac{a}{e},\quad x=-\frac{a}{e} \qquad (13)$$

или

$$x=\frac{a^2}{c},\quad x=-\frac{a^2}{c}.$$

Отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы

$$\frac{r}{d} = e, \qquad \frac{r_1}{d_1} = e. \tag{14}$$

Прямые RS и R_1S_1, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x, \tag{15}$$

называются *асимптотами гиперболы.*

Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным осям, имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{16}$$

где x_0, y_0—координаты центра гиперболы Две гиперболы, выраженные уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{17}$$

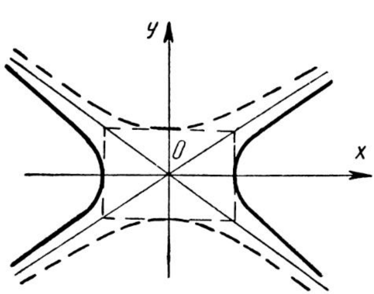
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

называются *сопряженными* (черт. 68). Они имеют общие асимптоты.

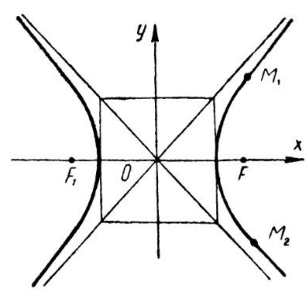
Если оси гиперболы равны, т. е. $a=b$, то гипербола называется *равнобочной* или *равносторонней* (черт. 69). Ее уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2; \tag{18}$$

ее асимптотами служат биссектрисы координатных углов. Если за



Черт. 68.



Черт. 69.

оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы, то ее уравнение примет вид

$$xy = k \quad \left(\text{где } k = \frac{a^2}{2}\right). \tag{19}$$

4. П а р а б о л а. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки—фокуса и данной прямой — директрисы* (черт 70).

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{20}$$

где P — есть расстояние от фокуса до директрисы. Вершина параболы находится в начале координат, осью симметрии служит ось абсцисс.

Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$.

Уравнение директрисы PQ параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{21}$$

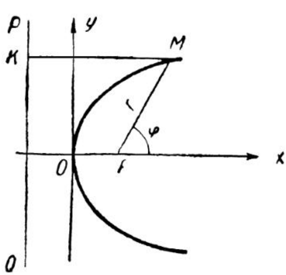
Фокальный радиус точки M $(x;\ y)$ параболы равен:

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{22}$$

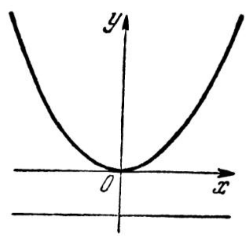
Эксцентриситет параболы считается равным единице, $e = 1$.

Если осью симметрии параболы служит ось ординат (черт. 71), то уравнение параболы имеет вид:

$$x^2 = 2py. \tag{23}$$



Черт. 70.



Черт. 71.

Уравнение директрисы в этом случае

$$y = -\frac{p}{2}. \qquad (24)$$

Уравнение параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, имеет вид:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \qquad (25)$$

или

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \qquad (26)$$

где $(x_0;\ y_0)$—координаты вершины параболы.

5. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах.

Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах имеют один и тот же вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad (27)$$

где e — эксцентриситет кривой.

Если $e<1$, то кривая, определяемая уравнением (27), есть эллипс;

если $e>1$, то кривая — гипербола

и если $e=1$, то кривая — парабола.

p — фокальный параметр для эллипса и гиперболы находится по формуле $p = \frac{b^2}{a}$. (28)

Для параболы p имеет то же значение, что и в уравнении

$$y^2 = 2px.$$

При этом полюс расположен для эллипса в левом фокусе, для гиперболы — в правом фокусе.

Примеры решения задач

№ 69. Определить центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.

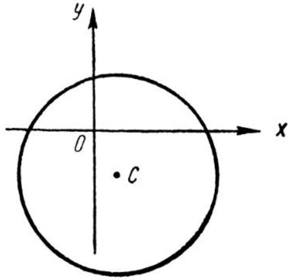
Решение. Так как в заданном уравнении коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой и отсутствует член с произведением координат, го заданное уравнение действительно представляет собой уравнение окружности. Чтобы определить координаты центра и радиус окружности, необходимо уравнение привести к каноническому виду:

$$(x^2-2x)+(y^2+4y)=20,$$

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4x+4)=25,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25.$$

Координаты центра и радиус окружности можно найти, не приводя данное уравнение к каноническому виду,



Черт. 72.

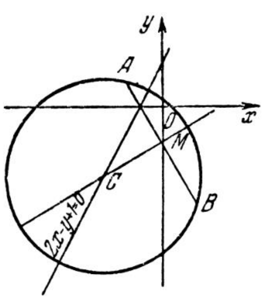
достаточно сравнить данное уравнение с уравнением окружности в общем виде:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-20=0 \\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \end{cases}$$

$$-2a=-2,\quad a=1. \quad \Big| \quad -2b=4,\quad b=-2. \quad \Big| \quad a^2+b^2-R^2=-20,\quad R^2=25,\quad R=5.$$

Ответ: $(1,\ -2)\quad R=5$.

№ 70. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(-1;\ 1)$ и $B\,(1;\ -3)$, если центр ее лежит на прямой $2x-y+1=0$.



Черт. 73.

Решение. Каноническое уравнение окружности:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Так как окружность проходит через точки A и B, то координаты этих точек должны удовлетворять уравнению окружности. Имеем два уравнения:

$$(-1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\quad (1-a)^2+(-3-b)^2=r^2.$$

Если центр окружности лежит на прямой $2x-y+1=0$, то координаты центра также должны удовлетворить уравнению прямой.

Имеем третье уравнение: $2a-b+1=0$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (-1-a)^2+(1-b)^2=r^2, \\ (1-a)^2+(-3-b)^2=r^2, \\ 2a-b+1=0; \end{cases} \quad \Bigg| \quad b=2a+1;$$

$$\begin{cases} 1+2a+a^2+4a^2=r^2, \\ 1-2a+a^2+16a+16+4a^2=r^2; \end{cases}$$

$$1+2a+5a^2=17+14a+5a^2, \quad -12a=16,$$

$$a=-\frac{4}{3}; \quad b=-\frac{8}{3}+1=-\frac{5}{3}.$$

Таким образом, координаты центра окружности найдены:

$$C\left(-\frac{4}{3}; \ -\frac{5}{3}\right).$$

Чтобы определить r^2, получим: $r^2=1+2a+5a^2$,

$$r^2=1-\frac{8}{3}+\frac{80}{9}=\frac{65}{9}.$$

Уравнение окружности: $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=$ $=\frac{65}{9}$.

Второй способ решения задачи. Проведем через середину хорды AB прямую, для чего определим координаты середины M отрезка AB

$$x=\frac{-1+1}{2}=0; \quad y=\frac{1-3}{2}=-1; \quad M(0; -1).$$

Искомая прямая выражается уравнением

$$y+1=kx, \quad \text{или} \quad kx-y-1=0.$$

Угловой коэффициент k найдем из условия перпендикулярности искомой прямой и прямой AB:

$$k_{AB}=\frac{1+3}{-1-1}=\frac{4}{-2}=-2; \quad k=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение прямой будет:

$$\frac{1}{2}x - y - 1 = 0, \quad \text{или} \quad x - 2y - 2 = 0.$$

Центр окружности будет лежать на пересечении прямых

$$2x - y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x - 2y - 2 = 0.$$

Решим совместно эти два уравнения:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0; \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 2x - y + 1 = 0, \\ -2x + 4y + 4 = 0 \\ \hline 3y + 5 = 0, \end{array} \right.$$

$$y = -\frac{5}{3}, \quad b = -\frac{5}{3}, \quad 2x + \frac{5}{3} + 1 = 0,$$

$$x = -\frac{4}{3}, \quad a = -\frac{4}{3}, \quad C\left(-\frac{4}{3};\ -\frac{5}{3}\right).$$

Радиус определим по формуле расстояния между точками A и C:

$$r^2 = \left(-1 + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{64}{9} = \frac{65}{9},$$

$$r^2 = \frac{65}{9}.$$

Уравнение окружности:

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{65}{9},$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{9} = \frac{65}{9},$$

$$9x^2 + 24x + 9y^2 + 30y - 31 = 0.$$

Ответ: $9x^2 + 9y^2 + 24x + 30y - 31 = 0$.

№ 71. Составить уравнение окружности, если ее центр находится в точке C (5; 4) и окружность отсекает от прямой $x+2y-3=0$ хорду, длина которой равна 8.

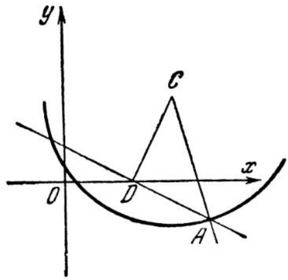
Решение. Искомое уравнение будет иметь вид:

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = r^2.$$

Определим расстояние центра C от данной прямой:

$$CD = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 4 - 3}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Так как радиус, перпендикулярный к хорде, делит ее



Черт. 74

пополам, то половина хорды будет равна 4 единицам. По теореме Пифагора имеем:

$$r^2 = 4^2 + CD^2 = 16 + 20 = 36, \quad r^2 = 36, \quad r = 6.$$

Уравнение окружности: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$.

Ответ: $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$.

№ 72. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной из них—в точке A (2; 1).

Решение. Определим диаметр окружности, для чего используем формулу расстояния точки от прямой

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Уравнение прямой $2x+y+15=0$, точка A (2; 1)

$$d = \frac{|2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 15|}{\sqrt{4+1}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}; \quad r = 2\sqrt{5}.$$

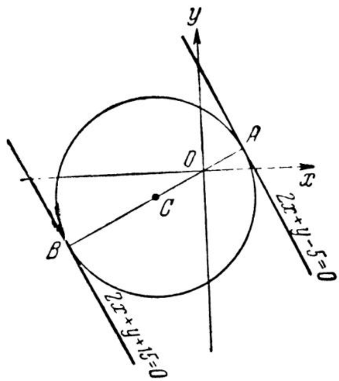
Воспользовавшись координатами точки A, можем составить такое уравнение:

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = 20.$$

Второе уравнение с неизвестными a и b получим, определив расстояние точки C от первой прямой

$$-2\sqrt{5} = \frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку точка C лежит по одну сторону от прямой



Черт. 75

вместе с началом координат, то расстояние $AC<0$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (2-a^2)+(1-b^2)=20, \\ -2\sqrt{5} = \dfrac{2a+b-5}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем $a=-2$; $b=-1$.

Эту задачу рекомендуем решить самостоятельно другим способом.

Указания. Составить уравнение перпендикуляра AB к данным прямым и найти координаты точки B.

Ответ: $(x+2)^2+(y+1)^2=20$.

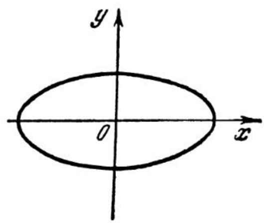
№ 73. *Решить самостоятельно.* Оси эллипса совпадают с осями координат. Эллипс проходит через точки

$P(4;\ 1,8)$ и $Q\left(\frac{5\sqrt{5}}{3};\ -2\right)$. Составить уравнение эллипса.

Указание. Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как эллипс проходит через точки P и Q, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению эллипса.



Черт. 76

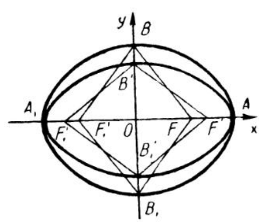
Решите систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b.

Ответ: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

№ 74. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две противолежащие его вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

Решение. Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Черт. 77

Согласно условию $BF=B'F'=5$, из треугольника BOF (черт. 77)

$$BF^2=OF^2+OB^2,$$

но

$$OF=c,\ OB=b,$$

следовательно, $BF=a$.

Таким образом, $b^2+c^2=25$.

Найдем площадь ромба: $S=5\cdot 4{,}8=24$ (кв. ед.).

Площадь треугольника BOF составляет четвертую часть площади ромба, т. е. $S_{BOF}=6$ кв. ед.

Но с другой стороны $S_{BOF}=\frac{1}{2}\,OF\cdot OB=\frac{1}{2}\,c\cdot b$; откуда $bc=12$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} b^2+c^2=25, \\ bc=12; \end{cases}$$

$$c=\frac{12}{b},\quad b^2+\frac{144}{b^2}=25,\quad b^4-25b^2+144=0,$$

$$b^2{}_1=16,\quad b^2{}_2=9;\quad b_1=4,\quad b_2=3.$$

Следовательно, имеем два эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

№ 75. *Решить самостоятельно*. На эллипсе

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$$

найти точки, расстояния которых от левого фокуса больше расстояний от правого фокуса в три раза.

Указания. Фокальные радиусы—векторы точки эллипса связаны с абсциссой этой точки уравнениями:

$r'=a-ex$ — правый радиус—вектор,

$r'=a+ex$ — левый радиус—вектор.

Так как по условию $r'=3r$, то получим уравнение, из которого определите абсциссу x.

Ординаты точек определите, подставив в уравнение эллипса найденную абсциссу.

Искомыми точками будут: $M_1\left(\frac{18}{5};\ \frac{4}{5}\sqrt{11}\right)$ и $M_2\left(\frac{18}{5};\ -\frac{4}{5}\sqrt{11}\right)$.

№ 76. Большая ось эллипса равна 12, а директрисами этого эллипса служат прямые $x=\pm 12$. Найти уравнение эллипса. Чему равен его эксцентриситет?

Решение. Для составления уравнения эллипса необходимо знать его полуоси a и b.

По условию $2a=12$, $a=6$.

Полуось b находим из соотношения $b^2=a^2-c^2$; а c можно найти, использовав уравнения директрис эллипса $x = \pm \dfrac{a^2}{c}$.

Взяв правую директрису, получим $\dfrac{a^2}{c}=12$, откуда

$$c=\frac{a^2}{12}, \quad c=\frac{36}{12}=3, \quad c=3;$$

$$b^2=36-9=27, \quad b^2=27.$$

Имеем уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$.

Эксцентриситет эллипса $e=\dfrac{c}{a}$, $e=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$, $e=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$, $e=\dfrac{1}{2}$.

№ 77. Расстояние между директрисами эллипса в два раза больше расстояния между его фокусами. Определить эксцентриситет эллипса.

Решение. Уравнения директрис эллипса $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$.

Расстояние между фокусами $2c$.

Согласно условию $2x=4c$, $x=2c$; но $x=\dfrac{a^2}{c}$, имеем

$\dfrac{a^2}{c}=2c$, $\dfrac{a^2}{c^2}=2$, $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$; но $\dfrac{c}{a}=e$, поэтому $e^2=\dfrac{1}{2}$, $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

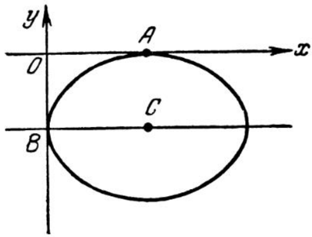
Ответ: $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

№ 78. Эллипс касается оси абсцисс в точке A (4; 0) и оси ординат в точке B (0; -3). Составить уравнение этого эллипса, если его оси симметрии параллельны осям координат (черт. 78).

Решение. Уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Так как точки A и B являются точками касания



Черт. 78

эллипса к координатным осям, то $a=4$, $b=3$, а центр эллипса находится в точке C (4; -3).

Следовательно, уравнение эллипса будет:

$$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1.$$

Ответ: $\dfrac{(x-4)^2}{16}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1.$

№ 79. Эллипс касается оси Oy в точке A (0; 5) и пересекает ось Ox в точках B (5; 0) и C (11; 0). Зная, что оси эллипса параллельны координатным осям, составить уравнение этого эллипса.

Решение. Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

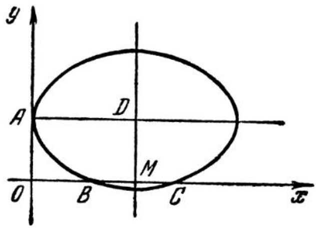
$x_0=a$ потому, что эллипс касается оси Oy; $y_0=5$, так как ось AD параллельна оси Ox и отсекает на оси Oy $OA=5$.

Уравнение эллипса принимает вид:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-5)^2}{b^2}=1.$$

Полуось $a = OM = \frac{x_B + x_C}{2}$, $a = \frac{5+11}{2} = 8$.

Уравнение эллипса $\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1$.



Черт. 79

Точка B лежит на эллипсе, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса

$$\frac{(5-8)^2}{64} + \frac{25}{b^2} = 1, \quad \frac{9}{64} + \frac{25}{b^2} = 1,$$

$$\frac{25}{b^2} = 1 - \frac{9}{64}; \quad \frac{25}{b^2} = \frac{55}{64};$$

$$b^2 = \frac{64 \cdot 25}{55} = \frac{64 \cdot 5}{11} = \frac{320}{11}.$$

Искомое уравнение эллипса будет:

$$\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{320/11} = 1.$$

№ 80. Составить простейшее уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 20; действительная ось гиперболы равна 16.

Решение. Уравнение гиперболы в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

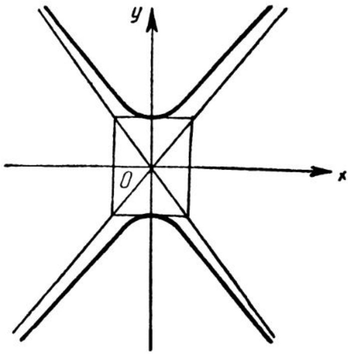
где b — действительная, а a — мнимая полуось гиперболы.

Согласно условию $2c = 20$, $c = 10$; $2b = 16$, $b = 8$. Мнимую полуось a найдем из соотношения:

$$c^2 = a^2 + b^2;\ a^2 = c^2 - b^2,\ a^2 = 100 - 64 = 36,\ a = 6.$$

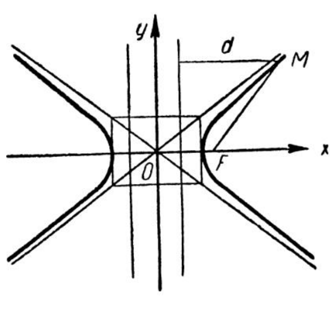
Уравнение гиперболы будет:

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1.$$



Черт. 80

№ 81. Эксцентриситет гиперболы равен 1,5, фокальный радиус ее точки M, проведенный из некоторого фокуса, равен 12. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.



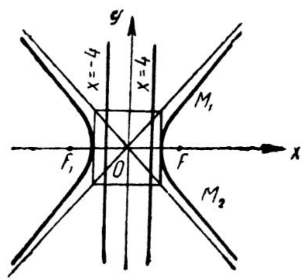
Черт. 81

Решение. Если r — фокальный радиус точки M, а d — расстояние от точки M до односторонней с взятым фокусом директрисы, то $\frac{r}{d}=e$.

Откуда $d=\frac{r}{e}$, $d=\frac{12}{1,5}=8$.

Ответ: $d=8$.

№ 82. Прямые $x=\pm 4$ служат директрисами гиперболы, эксцентриситет которой равен 1,5. Найти на гиперболе точки, фокальные радиусы которых, проведенные из правого фокуса, равны 9.



Черт. 82

Решение. Уравнение гиперболы будем искать в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение директрис $x=\pm\frac{a}{e}$, т. е. $\frac{a}{e}=4$,

$$a=4e,\quad a=4\cdot 1,5=6,\quad a=6.$$

Эксцентриситет $e=\frac{c}{a}$,

откуда

$$\frac{c}{6}=1,5;\quad c=6\cdot 1,5=9.$$

Полуось b найдем из соотношения $b^2=c^2-a^2$:

$$b^2=81-36=45,\quad b=\sqrt{45}=3\sqrt{5},\quad b=3\sqrt{5}.$$

Таким образом, уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1.$$

Предположим, что искомые точки лежат на правой ветви гиперболы.

Тогда их фокальные радиусы определятся по формуле: $r = ex - a$.

Имеем: $9 = 1{,}5x - 6,\quad x = \dfrac{15}{1{,}5} = 10,\quad x = 10.$

Ординаты точек найдем из уравнения гиперболы:

$$\frac{10^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1,$$

$$y^2 = \frac{45}{36} \cdot 64 = 16 \cdot 5;\quad y_{1,2} = \pm 4\sqrt{5};$$

$$M_1(10;\ 4\sqrt{5}),\quad M_2(10;\ -4\sqrt{5}).$$

Так как полуфокусное расстояние равно 9, то искомые точки не могут лежать на левой ветви гиперболы, потому что в этом случае их фокальные радиусы, проведенные из правого фокуса, должны быть больше 15, т. е. должны быть $r \geqslant 15$ $(r \geqslant c + a)$.

Ответ: $M_1(10;\ 4\sqrt{5}),\quad M_2(10;\ -4\sqrt{5})$.

№ 83. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ и прямой $4x - 3y - 8 = 0$.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы

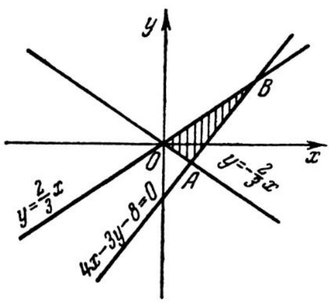
$$y = \pm \frac{b}{a} x;\quad a = 3,\quad b = 2,\quad y = \pm \frac{2}{3} x.$$

Найдем точки пересечения прямых

$$y = \pm \frac{2}{3} x \quad \text{и} \quad 4x - 3y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x, \\ 4x - 3y - 8 = 0; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 4x + 2x - 8 = 0, \\ y = -\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{3} = -\dfrac{8}{9}; \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{4}{3}; \\ A\left(\dfrac{4}{3}; -\dfrac{8}{9}\right). \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x, \\ 4x - 3y - 8 = 0; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 4x - 2x - 8 = 0, \\ y = \dfrac{2}{3} \cdot 4 = \dfrac{8}{3}; \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = 4; \\ B\left(4; \dfrac{8}{3}\right). \end{array} \right.$$



Черт. 83

Площадь полученного треугольника найдем по формуле:

$$S = \pm \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Возьмем точки в последовательности A, B, O:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{9} + \frac{32}{9}\right) = \frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}.$$

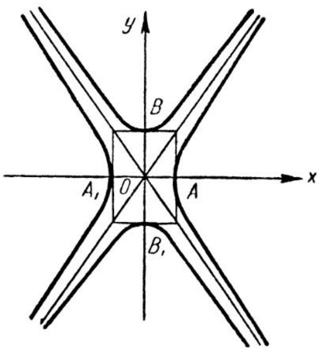
Ответ: $S = 3\dfrac{5}{9}$ кв. ед.

№ 84. *Решить самостоятельно.* Найти каноническое уравнение гиперболы, если угол между ее асимптотами равен 120° и расстояние между фокусами равно $8\sqrt{3}$.

Указания. Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Уравнения асимптот $y = \pm \frac{b}{a} x$, где $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, φ — угол наклона асимптоты к оси Ox.

Так как угол между асимптотами равен 120°, то $\varphi = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.



Черт. 84

Определить $\frac{b}{a}$.

Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ получите второе уравнение:

Решите систему уравнений относительно a и b.

Ответ: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{36} = 1$.

№ 85. Написать уравнения двух сопряженных гипербол, зная, что расстояние между директрисами первой из них равно 3,6 и расстояние между директрисами второй равно 6, 4 (черт. 84).

Решение. Уравнения сопряженных гипербол имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Первая имеет действительной осью AA_1, вторая—ось BB_1.

Уравнения директрис первой гиперболы $x = \pm \frac{a^2}{c}$.

Уравнения директрис сопряженной ей гиперболы $y = \pm \frac{b^2}{c}$.

Согласно условию, $2x = 3{,}6$; $2y = 6{,}4$.

Воспользовавшись также соотношением $a^2 + b^2 = c^2$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} = 1{,}8; \\ \frac{b^2}{c} = 3{,}2; \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

Решив эту систему: $a^2 = 1{,}8c$; $b^2 = 3{,}2c$; $1{,}8c + 3{,}2c = c^2$; $5c = c^2$; $c = 5$, получим:

$$a^2 = 1{,}8 \cdot 5 = 9; \quad b^2 = 3{,}2 \cdot 5 = 16.$$

Следовательно, уравнения сопряженных гипербол будут:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = \pm 1$.

№ 86. Составить уравнение гиперболы, зная, что расстояние между ее вершинами равно 8 и фокусы ее находятся в точках (—3; 3) и (7; 3).

Решение. Фокусы гиперболы лежат на прямой $y = 3$ (ординаты фокусов равны 3).

Следовательно, центр гиперболы лежит не в начале координат, но оси ее параллельны координатным осям (прямая $y = 3$ параллельна оси Ox).

В этом случае уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

где (x_0, y_0) — координаты центра гиперболы.

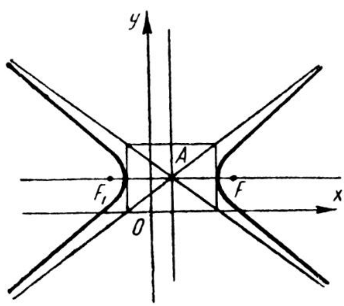
Центр гиперболы будет лежать на прямой $y=3$ и делить расстояние между фокусами пополам.

Таким образом,

$$x_0 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 3. \quad A(2;\ 3).$$

Далее, согласно условию $2a=8$, $a=4$ и расстояние между фокусами

$$2c = \sqrt{(7+3)^2 + (3-3)^2} = 10, \quad c = 5.$$



Черт. 85

Использовав соотношение $b^2 = c^2 - a^2$, найдем $b=3$. Теперь можно написать уравнение гиперболы

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

Ответ: $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$

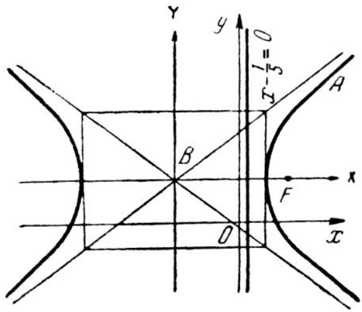
№ 87. Правый фокус гиперболы лежит в точке $F\ (2;\ 2)$, и соответствующая директриса имеет уравнение $x - \frac{1}{5} = 0$.

Составить уравнение гиперболы, если точка $A\left(3\frac{2}{3};\ 6\right)$ лежит на гиперболе.

Решение. Так как директриса параллельна оси Oy $\left(x=\frac{1}{5}\right)$, то оси гиперболы параллельны координатным осям; поэтому уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\frac{x-x_0}{a^2}-\frac{y-y_0}{b^2}=1.$$

Фокусы этой гиперболы лежат на прямой $y=2$; следовательно, и ордината центра гиперболы $y_0=2$.



Черт. 86

Поскольку центр гиперболы смещен в точку B (x_0, y_0), то уравнение правой директрисы имеет вид: $x=\frac{a^2}{c}+x_0$.

Но $x=\frac{1}{5}$; имеем уравнение:

$$\frac{a^2}{c}+x_0=\frac{1}{5}. \qquad (1)$$

Далее, найдем эксцентриситет гиперболы: $e=\frac{r}{d}$.

$$r=AF=\sqrt{\left(3\frac{2}{3}-2\right)^2+(6-2)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+16}=\frac{13}{3}.$$

Определим расстояние точки A до директрисы $x-\frac{1}{5}=0$

$$d=3\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=3\frac{7}{15};$$

таким образом, $e = \frac{13}{3} : \frac{52}{15} = \frac{5}{4}$.

Но с другой стороны $e = \frac{c}{a}$, имеем второе уравнение:

$$\frac{c}{a} = \frac{5}{4} \qquad (2)$$

Из него найдем, что $c = \frac{5}{4} a$.

Подставим это значение c в уравнение (1)

$$\frac{a^2}{\frac{5}{4} a} + x_0 = \frac{1}{5},$$

откуда

$$x_0 = -\frac{4}{5} a + \frac{1}{5}. \qquad (3)$$

Из соотношения $b^2 = c^2 - a^2$ находим, что

$$b^2 = \frac{25}{16} a^2 - a^2 = \frac{9}{16} a^2; \quad b^2 = \frac{9}{16} a^2. \quad (4)$$

Точка A $(3\frac{2}{3}; 6)$ лежит на гиперболе, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Подставив координаты точки A в уравнение гиперболы, а также $y_0 = 2$ и значения x_0 и b^2 из (3) и (4), получим уравнение:

$$\frac{\left(3\frac{2}{3} + \frac{4}{5} a - \frac{1}{5}\right)^2}{a^2} - \frac{(6-2)^2}{\frac{9}{16} a^2} = 1,$$

содержащее одно неизвестное a.

Решим его:

$$\left(\frac{52}{15} + \frac{4}{5} a\right)^2 - \frac{16}{9} \cdot 16 = a^2, \quad \frac{16}{225}(13 + 3a)^2 - \frac{256}{9} = a^2,$$

$$16(169 + 78a + 9a^2) - 256 \cdot 25 = 225a^2,$$

$$2704 + 1248a + 144a^2 - 6400 - 225a^2 = 0,$$

$$-81a^2+1248a-3696=0, \quad 27a^2-416a+1232=0;$$

$$a_{1,2}=\frac{208\pm\sqrt{43264-33264}}{27}=\frac{208\pm 100}{27};$$

$$a_1=4, \quad a_2=11\frac{11}{27}.$$

1) $a=4$; из (3) находим

$$x_0=\frac{1}{5}-\frac{16}{5}=-3, \quad x_0=-3,$$

а из (4)

$$b^2=\frac{9}{16}\cdot 16=9, \quad b^2=9, \quad b=3.$$

Подставив эти значения a, b, x_0 и y_0 в формулу (*), получим уравнение гиперболы $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1.$

2) $a=\frac{308}{27}$; $\quad x_0=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{308}{27}=-\frac{241}{27}$;

$$b^2=\frac{9}{16}\cdot\frac{308.308}{27\cdot 27}=\frac{77^2}{9^2}.$$

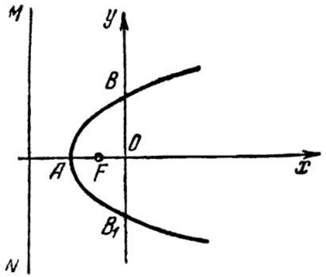
Уравнение гиперболы

$$\frac{\left(x+\frac{241}{27}\right)^2}{\left(\frac{308}{27}\right)^2}-\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{77}{9}\right)^2}=1.$$

Ответ: $\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{9}=1,$

$$\frac{\left(x+\frac{241}{27}\right)^2}{\left(\frac{308}{27}\right)^2}-\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{77}{9}\right)^2}=1.$$

№ 88. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F\ (-2;\ 0)$ и от прямой $x+6=0$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат.



Черт. 87

Решение. Обозначим произвольную точку искомой кривой через $P\ (x;\ y)$, ее расстояние до точки F равно:

$$PF = \sqrt{(x+2)^2 + y^2},$$

а до прямой MN равно: $d = x + 6$.

Так как PF и d по условию равны, то приравняв их, получим уравнение:

$$x + 6 = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}.$$

Упростим его:

$$(x+6)^2 = (x+2)^2 + y^2, \quad x^2 + 12x + 36 =$$

$$= x^2 + 4x + 4 + y^2, \quad y^2 = 8x + 32.$$

Полученное уравнение есть уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox. Вершина ее находится в точке $A\ (-4;\ 0)$. (В уравнении параболы положив $y=0$, найдем $x=-4$.)

Точки пересечения параболы с осью Oy найдем, положив в уравнении $x=0$; $y^2=32$, $y=\pm 4\sqrt{2}$, таким образом, имеем $B(0;\ 4\sqrt{2})$, $B_1(0;\ -4\sqrt{2})$.

Ответ:

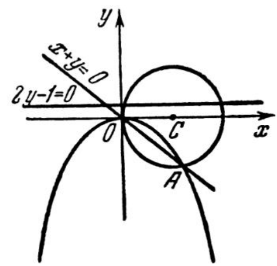
$$y^2 = 8x + 32; \quad A(-4;\ 0); \quad B(0;\ 4\sqrt{2}); \quad B_1(0; -4\sqrt{2}).$$

№ 89. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси Oy.

Решение. Найдем точки пересечения заданных линий, решив совместно уравнения:

$$\begin{cases} y=-x, \\ x^2+y^2-4x=0; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{ll} x_1=0, & x_2=2, \\ y_1=0, & y_2=-2. \end{array} \right.$$

Точки пересечения O (0; 0) и A (2; −2). Так как парабола проходит через точку O (0; 0) и симметрична относительно оси Oy, то в этой точке будет находиться вершина параболы.



Черт. 88

Поэтому уравнение параболы имеет вид:

$$x^2=2py.$$

Так как парабола проходит через точку A (2; −2), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы:

$$2^2=2p(-2); \quad -4p=4, \quad p=-1.$$

Таким образом, уравнением параболы будет: $x^2=-2y$.

Уравнение директрисы $\quad y=-\frac{p}{2}.$

Подставив значение p, получим $\quad y=\frac{1}{2}, \quad$ или $2y-1=0$.

Ответ: $x^2=-2y$; $2y-1=0$.

№ 90. Струя воды фонтана достигает наибольшей высоты 4 *м* на расстоянии 0,5 *м* от вертикали, проходящей через точку O выхода струи. Найти высоту струи над горизонталью Ox на расстоянии 0,75 *м* от точки O.

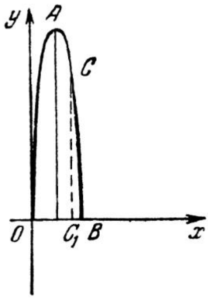
Решение. Струя воды фонтана имеет форму параболы, вершина которой находится в точке A (0,5; 4). Ось симметрии параболы параллельна оси Oy, поэтому уравнение параболы имеет вид:

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0).$$

Подставив значения x_0 и y_0, получим:

$$(x-0{,}5)^2=2p(y-4).$$

Для определения p мы можем в уравнение подставить вместо текущих координат координаты точки O $(0; 0)$



Черт. 89

(так как струя фонтана выходит из точки O)

$$(-0{,}5)^2=2p(-4),$$

$$0{,}25=-8p, \quad p=-\frac{0{,}25}{8}.$$

Таким образом, уравнение параболы имеет вид:

$$(x-0{,}5)^2=-\frac{0{,}25}{4}(y-4),$$

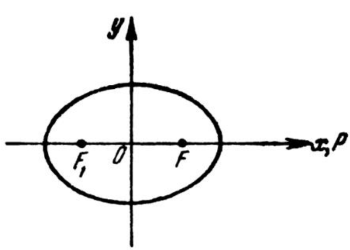
или после преобразований $y=$ $=16(x-x^2)$.

Абсцисса точки C равна 0,75. Ординату высоты струи над точкой C найдем, использовав уравнение параболы:

$$y=16(0{,}75-0{,}75^2)=16\cdot0{,}75(1-0{,}75)=12\cdot0{,}25=3.$$

Ответ: $h=3$ *м*.

№ 91. *Решить самостоятельно*. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$. Составить его полярное уравнение, если направление полярной оси совпадает с положи-



Черт. 90

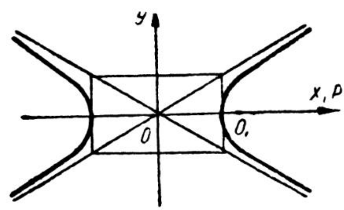
тельным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе эллипса.

Указание. Полярное уравнение эллипса

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad \text{где } p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{25}{6 - \sqrt{11}\cos\varphi}$.

№ 92. *Решить самостоятельно.* Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. Составить полярное уравнение ее правой ветви, если направление полярной оси совпадает



Черт. 91

с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в правом фокусе гиперболы.

Указания. Полярное уравнение гиперболы

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad \text{где} \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}.$$

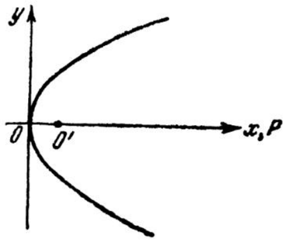
Ответ: $\rho = \dfrac{25}{12 - 13\cos\varphi}$.

№ 93. *Решить самостоятельно.* Дано уравнение параболы $y^2 = 8x$. Составить ее полярное уравнение, если направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсциссы, а полюс находится в фокусе параболы.

Указания. Полярное уравнение параболы

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{4}{1 - \cos\varphi}$.

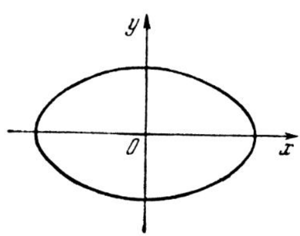


Черт. 92

№ 94. Написать канонические уравнения кривых второго порядка:

а) $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}$; б) $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}$;

в) $\rho = \dfrac{1}{2 - 2\cos\varphi}$.



Черт. 93

Решение.

а) $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}$, или $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi}$,

откуда $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Следовательно, данное уравнение есть уравнение эллипса.

Имеем систему уравнений:

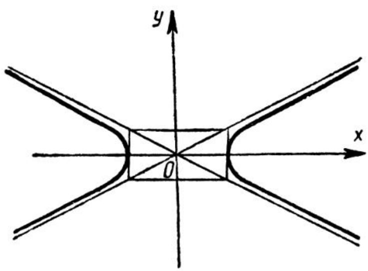
$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{1}{2}, \\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

Решив эту систему:

$$b^2 = \frac{a}{2}, \quad c = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad a^2 = \frac{a}{2} + \frac{3a^2}{4},$$

$$4a^2 = 2a + 3a^2, \quad a^2 = 2a,$$

получим: $a = 2$, $b = 1$.



Черт. 94

Каноническим уравнением эллипса будет:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

б) $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}$, или $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\cos\varphi}$,

откуда $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1.$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение гиперболы (черт. 94).

Имеем систему уравнений:

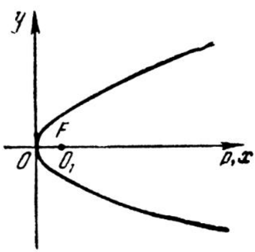
$$\begin{cases} \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \\ c^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Решив эту систему:

$$b^2 = \frac{a}{2}, \quad c = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$5a^2 = 4a^2 + 2a, \ a^2 = 2a,$$

получим: $a = 2$, $b^2 = 1$, $b = 1$.



Черт. 95

Каноническим уравнением гиперболы будет:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

в) $\rho = \dfrac{1}{2 - 2\cos\varphi}$, или $\rho = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \cos\varphi}$, откуда $e = 1$.

Следовательно, данное уравнение есть уравнение параболы (черт. 95).

Имеем $p = \dfrac{1}{2}$.

Каноническим уравнением параболы будет: $y^2 = 2px$, $y^2 = x$.

Ответ:

а) $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$; б) $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$; в) $y^2 = x$.

№ 95. Вычислить длину полуосей и расстояние между фокусами эллипса

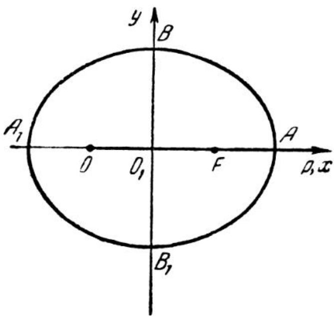
$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение

$$\rho = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi},$$

откуда

$$p = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad e = \frac{1}{2}.$$



Черт. 96

Но

$$p = \frac{b^2}{a}, e = \frac{c}{a}.$$

Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ b^2 = a^2 - c^2. \end{cases}$$

Решив ее, найдем

$$a = 2\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{6}, \quad c = \sqrt{2}, \quad 2c = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $2c = 2\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Проходит ли окружность $2x^2+2y^2+x+2y=0$ через начало координат?

2. На какой из координатных осей расположены центры окружностей:

$$\text{а)}\quad x^2+2x+y^2-8=0,\quad \text{б)}\quad x^2+y^2-3y+2=0?$$

3. Имеют ли прямая $x=3$ и окружность $(x+1)^2+y^2=16$ общую точку?

4. Определить, на какой оси находятся фокусы эллипсов:

$$\text{а)}\ 16x^2+25y^2=400,\quad \text{б)}\ 49x^2+4y^2=196.$$

5. Определить, на какой из координатных осей находятся фокусы гиперболы:

$$\text{а)}\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,\quad \text{б)}\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1.$$

6. Проходит ли гипербола $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y+6)^2}{12}=1$ через начало координат?

7. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $x^2-y^2=1$ и прямой $x=1$.

8. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2=-4y$.

9. Каково будет уравнение параболы $y^2=2x$, если ее ось симметрии повернуть на 90°; на 180°; на —90°?

10. Каково будет уравнение параболы $y^2=2x$, если, сохранив направление оси симметрии, вершину ее перенести в точку $(2; 0)$; $(0; 2)$; $(-2; 0)$; $(0; -2)$?

11. Установить, какую кривую определяет уравнение:

$$\text{а)}\quad \rho=\frac{15}{3-7\cos\varphi};\quad \text{б)}\quad \rho=\frac{7}{5-2\cos\varphi};$$

$$\text{в)}\quad \rho=\frac{3}{4-4\cos\varphi}.$$

Ответы: 2. а) на оси Ox; б) на оси Oy.
4. а) на оси Ox; б) на оси Oy.
5. а) на оси Ox; б) на оси Oy.
7. $S = 1$. 8. $(0; -1)$, $y = 1$.
9. $x^2 = 2y$; $y^2 = -2x$; $x^2 = -2y$.
10. $y^2 = 2(x-2)$; $(y-2)^2 = 2x$;
$y^2 = 2(x+2)$; $(y+2)^2 = 2x$.

11. а) гипербола; б) эллипс; в) парабола.

Глава V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Основной задачей преобразования координат является упрощение уравнения кривой.

Уравнение одной и той же кривой может иметь различный вид в зависимости от того, как будет расположена система осей координат, к которой отнесена кривая. Удачным выбором расположения осей координат можно добиться простейшего вида уравнения кривой.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Задача упрощения этого уравнения состоит в том, чтобы в преобразованном уравнении исчезли: член с произведением текущих координат и члены первого измерения.

По упрощенному уравнению легко установить тип кривой и схематически построить эту кривую.

Если в уравнении (1) отсутствует член с произведением координат xy, т. е. уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2)$$

то оно преобразуется к каноническому виду параллельным переносом осей координат по формулам

$$x = x_1 + x_0, \qquad (3)$$
$$y = y_1 + y_0$$

или

$$x_1 = x - x_0 \qquad (4)$$
$$y_1 = y - y_0,$$

где x_0, y_0—координаты нового начала O_1, а x_1, y_1—новые координаты.

Цель переноса — уничтожение членов первого измерения.

Упрощение выполняется методом выделения полных квадратов.

Если в уравнении (1) отсутствуют члены первого измерения, т. е. уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + F = 0, \tag{5}$$

то оно преобразуется к каноническому виду поворотом осей координат по формулам:

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \tag{6}$$

$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha,$$

где x_1 и y_1 — новые координаты, α — угол поворота.

Цель этого поворота — уничтожение члена с произведением координат в уравнении кривой.

В общем случае, когда уравнение кривой второго порядка содержит член с произведением координат и члены первого измерения, упрощение следует начинать с поворота осей, без изменения начала координат.

Примеры решения задач

№ 96. Привести уравнение кривой

$$5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$$

к простейшему виду и построить эту кривую:

Решение. Группируем члены уравнения, содержащие одноименные координаты:

$$(5x^2 - 30x) + (9y^2 + 18\,y) + 9 = 0,$$

или

$$5\,(x^2 - 6x) + 9\,(y^2 + 2y) + 9 = 0.$$

Дополняем члены в скобках до полных квадратов:

$$5\,(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9\,(y^2 + 2y + 1 - 1) + 9 = 0,$$

или

$$5\,(x-3)^2 + 9\,(y+1)^2 - 45 = 0. \tag{a}$$

Обозначаем $x_1 = x - 3$ и $y_1 = y + 1$.

Произведенная замена представляет собой параллельное пересечение осей координат.

Сравнивая последние соотношения с формулами (4), находим координаты нового начала: $x_0 = 3$, $y_0 = -1$, т. е.

новое начало координат O_1 помещается в точке (3; -1).

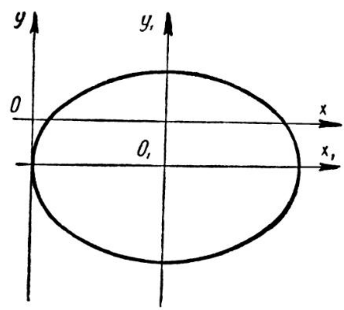
Уравнение (а) в новой системе осей координат принимает вид:

$$5x^2_1 + 9y^2_1 = 45.$$

Делим обе части этого уравнения на 45, получаем каноническое уравнение данной кривой

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{5} = 1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=3$, $b=\sqrt{5}$ и центром, находящимся в первоначальной системе координат, в точке O_1 (3; -1) (черт. 97).



Черт. 97

№ 97. Упростить уравнение кривой

$$2x^2 + 4x - y - 1 = 0$$

и схематически построить эту кривую.

Решение. Группируем члены с одноименными координатами:

$$(2x^2 + 4x) - y - 1 = 0, \quad \text{или} \quad 2(x^2 + 2x) - y - 1 = 0.$$

Дополняем член в скобках до полного квадрата

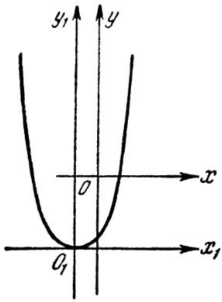
$$2(x^2 + 2x + 1 - 1) - y - 1 = 0,$$

или

$$2(x+1)^2 - (y+3) = 0. \qquad \text{(a)}$$

Обозначаем: $x_1=x+1$, $y_1=y+3$.

Сравнивая последние соотношения с формулами (4), находим координаты нового начала: $x_0=-1$, $y_0=-3$, т. е. новое начало координат помещается в точке O_1 $(-1;\ -3)$.



Черт. 98

Уравнение (а) в новой системе координат принимает вид:

$$2x_1^2-y_1=0,$$

или

$$x_1^2=\frac{1}{2}y_1.$$

Заданное уравнение определяет параболу с вершиной в точке O_1 $(-1;\ -3)$, осью симметрии O_1y_1 параллельной оси ординат и параметром $p=\frac{1}{4}$ (черт. 98).

№ 98. Дано уравнение $32x^2+52xy-7y^2+180=0$.

Преобразовать его так, чтобы оно не содержало члена с произведением xy.

Решение. Чтобы уничтожить член с xy, повернем систему координат на угол α.

Берем формулы поворота:

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,$$

$$y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha.$$

Подставляя в данное уравнение эти значения x и y, получим:

$$32(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)^2+52(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)\times$$

$$\times(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)-7(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)^2+180=0.$$

Раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов:

$$(32\cos^2\alpha+52\sin\alpha\cos\alpha-7\sin^2\alpha)x_1^2+(52\cos^2\alpha-$$

$$-78\sin\alpha\cos\alpha-52\sin^2\alpha)x_1y_1+(32\sin^2\alpha-52\sin\alpha\cos\alpha-$$

$$-7\cos^2\alpha)y_1^2+180=0. \qquad \text{(a)}$$

Приравниваем коэффициент при $x_1 y_1$ к нулю, получим:

$$52\cos^2\alpha - 78\sin\alpha\cos\alpha - 52\sin^2\alpha = 0,$$

или

$$26\,\mathrm{tg}^2\alpha + 39\,\mathrm{tg}\,\alpha - 26 = 0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = -2.$$

Двум значениям тангенса соответствуют два взаимно перпендикулярных направления, так как их произведение равно минус единице.

Положительному значению тангенса соответствует угол поворота в первой и третьей четверти, а отрицательному значению тангенса — во второй и четвертой.

Из двух возможных значений тангенса берем одно из них, например $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, а угол α в первой четверти и определяем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам:

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

Подставляя значение тангенса, получим:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Подставляем значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в уравнение (a)

$$\left(32\cdot\frac{4}{5} + 52\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - 7\,\frac{1}{5}\right)x_1^2 +$$

$$+\left(32\cdot\frac{1}{5} - 52\,\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - 7\cdot\frac{4}{5}\right)y_1^2 + 180 = 0,$$

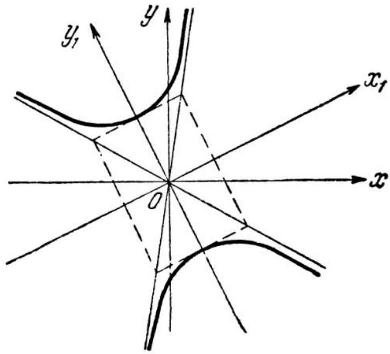
или

$$45x_1^2 - 20y_1^2 = -180.$$

Делим обе части уравнения на —180, найдем:

$$\frac{y_1^2}{9} - \frac{x_1^2}{4} = 1.$$

Итак, данное уравнение определяет гиперболу с действительной полуосью $b=3$ и мнимой полуосью $a=2$. Причем новые оси координат являются осями симметрии (черт. 99).



Черт. 99

№ 99. Дано уравнение кривой

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0.$$

Преобразовать его так, чтобы оно не содержало ни члена с произведением xy, ни членов первого измерения.

Решение. Преобразование общего уравнения кривой к простейшему виду начинаем с поворота осей координат.

Цель этого поворота — уничтожение члена с произведением xy в уравнении кривой.

Берем формулы поворота

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$

$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

Подставляем в данное уравнение вместо x и y их выражения через x_1 и y_1; найдем:

$$8(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)^2 + 4(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)(x_1 \sin\alpha +$$

$$+y_1\cos\alpha)+5(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)^2+16\ (x_1\cos\alpha-$$
$$-y_1\sin\alpha)+4(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)-28=0.$$

Раскрывая скобки, делаем приведение подобных членов:

$$(8\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+5\sin^2\alpha)x_1^2+(4\cos^2\alpha-$$
$$-6\sin\alpha\cos\alpha-4\sin^2\alpha)x_1y_1+(8\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+$$
$$+5\cos^2\alpha)y_1^2+(16\cos\alpha+4\sin\alpha)x_1+(4\cos\alpha-$$
$$-16\sin\alpha)y_1-28=0. \qquad \text{(a)}$$

Приравнивая коэффициент при произведении x_1y_1 к нулю, получим:

$$4\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha-4\sin^2\alpha=0,$$

или

$$2\operatorname{tg}^2\alpha+3\operatorname{tg}\alpha-2=0.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\alpha_2=-2.$$

Два значения тангенса соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, беря $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ вместо $\operatorname{tg}\alpha=-2$, мы только меняем ролями оси x_1 и y_1.

Возьмем $\operatorname{tg}\alpha=-2$ и определим $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Так как тангенс имеет отрицательное значение, а угол поворота α берем в четвертой четверти, то

$$\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставляя значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в уравнение (a), получим:

$$\left[8\cdot\frac{1}{5}+4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+5\cdot\frac{4}{5}\right]x_1^2+\left[8\cdot\frac{4}{5}-\right.$$
$$\left.-4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+5\cdot\frac{1}{5}\right]y_1^2+\left[16\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\right.$$
$$\left.+4\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]x_1+\left[4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-16\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]y_1-28=0,$$

или

$$4x_1^2+9y_1^2+\frac{8}{\sqrt{5}}x_1+\frac{36}{\sqrt{5}}y_1-28=0.$$

Группируем члены с одноименными координатами:

$$\left(4x_1^2+\frac{8}{\sqrt{5}}x_1\right)+\left(9y_1^2+\frac{36}{\sqrt{5}}y_1\right)-28=0.$$

Выносим за скобки коэффициенты при x_1^2 и y_1^2.

$$4\left(x_1^2+\frac{2}{\sqrt{5}}x_1\right)+9\left(y_1^2+\frac{4}{\sqrt{5}}y_1\right)-28=0.$$

Дополняем члены в скобках до полных квадратов:

$$4\left[\left(x_1^2+\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\right]+9\left[\left(y_1^2+\frac{4}{\sqrt{5}}y_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4}{5}\right)-\frac{4}{5}\right]-28=0,$$

или

$$4\left(x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}-\frac{36}{5}-28=0,$$

откуда

$$4\left(x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=36. \quad (6)$$

Обозначаем

$$x_2=x_1+\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$y_2=y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Сравниваем последние соотношения с формулами (4); находим координаты нового начала

$$x_0=-\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad y_0=-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

т. е. новое начало координат помещается в точке

$$O_1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

относительно повернутой системы координат x_1Oy_1.

Уравнение (6) в новой системе координат примет вид:

$$4x_2^2+9y_2^2=36.$$

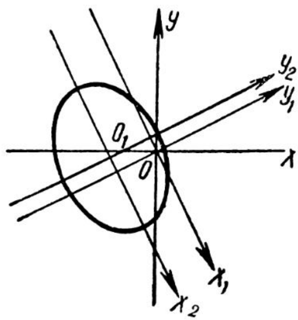
Делим обе части этого уравнения на 36, найдем каноническое уравнение данной кривой

$$\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1.$$

Итак, данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=3$, $b=2$ и центром в точке

$$O_1\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\quad -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

относительно повернутой системы координат x_1Oy_1 (черт. 100).



Черт. 100

№ 100. *Решить самостоятельно.* Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$16x^2-24xy+9y^2+25x-50y+50=0.$$

Указания. Для поворота осей координат используйте формулы

$$x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha,\quad y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha.$$

Значения x и y надо подставить в уравнение кривой.

Приравняйте коэффициент при произведении координат x_1, y_1 к нулю; должно быть

$$24\sin^2\alpha-14\sin\alpha\cos\alpha-24\cos^2\alpha=0,$$

или

$$12\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-7\,\mathrm{tg}\,\alpha-12=0.$$

Решая это уравнение, найдите $\operatorname{tg}\alpha_1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2$.

Для значения $\operatorname{tg}\alpha_1$ угол поворота α_1 находится в первой четверти.

Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по тангенсу. Подставьте значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в уравнение (а).

Группируйте члены с одноименными координатами, затем дополните члены до полного квадрата и приведите к виду (4).

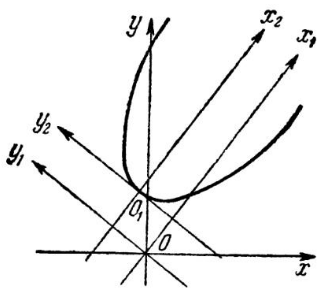
Найдите координаты нового начала x_0 и y_0.

Ответ: Новое начало координат помещается в точке O_1 (1; 1).

Уравнение (б) принимает вид:

$$y_2^2 = x_2.$$

Итак, данное уравнение определяет параболу с вершиной в точке O_1 (1; 1) в повернутой системе осей координат x_1Oy_1 (черт. 101).



Черт. 101

№ 101. Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$xy + 3x - 3y - 9 = 0.$$

Решение. Делаем поворот осей координат. Берем формулы поворота

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \quad y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha$$

и, подставляя значение x и y в заданное уравнение, будем иметь:

$$(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha)(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) +$$

$$+3(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) - 3(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) - 9 = 0,$$
или
$$\sin\alpha\cos\alpha\, x_1^2 + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\, x_1 y_1 - \sin\alpha\cos\alpha\cdot y_1^2 +$$
$$+3(\cos\alpha - \sin\alpha)\, x_1 - 3(\sin\alpha + \cos\alpha)\, y_1 - 9 = 0. \qquad (а)$$
Положив $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$, найдем $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1$.

Берем $\operatorname{tg}\alpha = 1$, тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Подставляем значение $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в уравнение (а), получим:
$$x_1^2 - y_1^2 - 6\sqrt{2}\, y_1 - 18 = 0.$$
Группируем члены, содержащие одноименные координаты,
$$x_1^2 - (y_1^2 + 6\sqrt{2}\, y_1) - 18 = 0.$$
Дополняя члены в скобке до полного квадрата, будем иметь:
$$x_1^2 - [(y_1^2 + 6\sqrt{2}\, y_1 + 18) - 18] - 18 = 0,$$
или
$$x_1^2 - (y_1 + 3\sqrt{2})^2 = 0. \qquad (б)$$
Обозначаем $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + 3\sqrt{2}$ и сравниваем эти выражения с формулами (4); находим координаты нового начала координат $x_0 = 0$ и $y_0 = -3\sqrt{2}$.

Новое начало координат находится в точке O_1 $(0; -3\sqrt{2})$.

В результате уравнение (б) принимает вид:
$$x_2^2 - y_2^2 = 0, \quad \text{или} \quad (x_2 - y_2)(x_2 + y_2) = 0.$$
Очевидно, уравнение $x_2^2 - y_2^2 = 0$, а значит и данное уравнение определяет пару пересекающихся прямых.

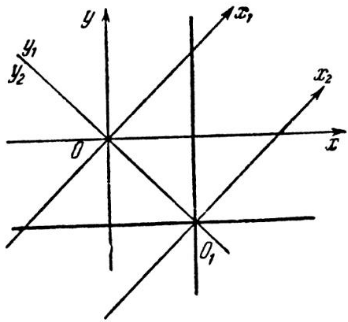
Замечание. То, что данная линия второго порядка распадается на пару пересекающихся прямых, следует из таких соображений: левая часть данного уравнения
$$xy + 3x - 3y - 9 = 0$$

разлагается на линейные множители:

$$xy+3x-3y-9=x(y+3)-3(y+3)=(x-3)(y+3),$$
$$(x-3)(y+3)=0.$$

Отсюда получаем пару прямых: $x-3=0$ и $y+3=0$ (черт. 102).

Этот метод можно применять и к другим задачам.



Черт. 102

№ 102. Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$4x^2-4xy+y^2-1=0.$$

Решение. Разлагая левую часть этого уравнения на линейные множители, будем иметь:

$$4x^2-4xy+y^2-1=(4x^2-4xy+y^2)-1=$$
$$=(2x-y)^2-1,\quad (2x-y)^2-1=0,$$

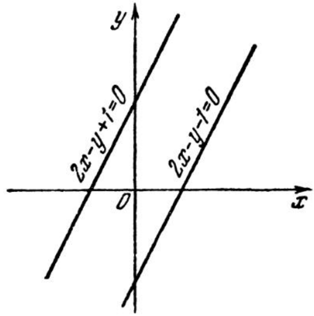
или

$$(2x-y-1)(2x-y+1)=0.$$

Следовательно, заданная кривая второго порядка распадается на пару параллельных прямых

$$2x-y-1=0 \quad \text{и} \quad 2x-y+1=0$$

(черт. 103).



Черт 103

№ 103. Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$x^2+y^2+4x+2y+6=0.$$

Решение. Данное уравнение не содержит члена с произведением координат.

Собираем в этом уравнении члены, содержащие одноименные координаты

$$(x^2+4x)+(y^2+2y)+6=0.$$

Дополняем выражения в скобках до полных квадратов:

$$(x^2+4x+4)-4+(y^2+2y+1)-1+6=0,$$

или

$$(x+2)^2+(y+1)^2+1=0.$$

Это уравнение не может иметь места при действительных значениях x и y. Поэтому данное уравнение не определяет никакой линии на плоскости.

№ 104. Привести к простейшему виду уравнение

$$x^2+y^2+4y+4=0.$$

Решение. Данное уравнение может быть записано так:

$$x^2+(y^2+4y+4)=0, \quad \text{или} \quad x^2+(y+2)^2=0.$$

Это равенство имеет место только при $x=0$ и $y=-2$. Поэтому данное уравнение определяет на плоскости одну точку $(0; \ -2)$.

Задачи для самостоятельного решения

Упростить уравнение кривой:

1. $3x^2+4y^2-18x-8y-5=0$;
2. $5x^2-4y^2+16y-36=0$;
3. $y^2-2x+4y+2=0$;
4. $5x^2-6xy+5y^2-32=0$;
5. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

Ответы: 1. $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{9}=1$;

2. $\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{5}=1$;

3. $y_1^2=2x_1$;

4. $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1$;

5. $y_2^2=4\sqrt{2}\,x_2$.

Глава VI

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

§ 1. Определители второго порядка

Рассмотрим систему двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \quad (1)$$

Решив эту систему, получим:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \quad (2)$$

Числители и знаменатель полученных выражений (2) называются определителями второго порядка.

Четыре числа, расположенные в виде квадратной таблицы,

$$\begin{matrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{matrix}$$

называют определителем второго порядка или разностью произведений чисел A_1 на B_2 и A_2 на B_1, т. е.

$$A_1 B_2 - A_2 B_1.$$

Для обозначения определителя принимают символ:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

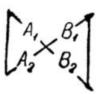
Числа A_1, A_2, B_1, B_2 называются *элементами определителя*.

Горизонтальные ряды называются строками, а вертикальные — столбцами определителя.

Значок указывает номер строки, а алфавитный порядок буквы — номер столбца, на пересечении которых находится рассматриваемый элемент.

Элементы A_1, B_2 образуют главную диагональ определителя, а элементы A_2, B_1 — побочную.

побочная диагональ



главная диагональ

Чтобы вычислить определитель второго порядка, нужно из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Пример $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 8 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 50.$

Пользуясь новыми обозначениями, мы можем записать найденные выражения (2) x и y так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & \text{в}_1 \\ c_2 & \text{в}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \text{в}_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \text{в}_1 \\ a_2 & \text{в}_2 \end{vmatrix}} \qquad (4)$$

Определитель, стоящий в знаменателе, составлен из коэффициентов при неизвестных системы (1), взятых в том же порядке, в каком они стоят в уравнениях, и называется *определителем системы*.

Определители, стоящие в числителях формул (4), получаются из определителя системы путем замены соответственно первого и второго столбцов свободными членами этой системы.

Иногда определитель системы обозначают значком Δ, а определители, стоящие в числителях, соответственно Δx и Δy. Тогда формулы (4) запишутся так:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}.$$

§ 2. Определители третьего порядка

Рассмотрим систему трех уравнений 1-й степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_8z = d_3. \end{cases} \tag{5}$$

Решая ее, получим:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}, \\ y &= \frac{a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}, \\ z &= \frac{a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для выражений, стоящих в числителях и знаменателях этих дробей, вводим символы, похожие на те, какие мы ввели для определителей второго порядка. Обозначим знаменатель так:

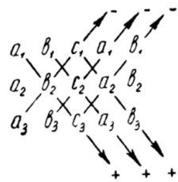
$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_8 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Выражение (7) называется *определителем третьего порядка.*

Определитель третьего порядка имеет девять элементов, три строки, три столбца, две диагонали — главную и побочную.

Формула (7) показывает, что в раскрытом виде определитель содержит шесть членов. Для их написания можно указать простой способ, который называется правилом Саррюса.

Для этого выписываем все элементы определителя в том же порядке, как они расположены в определителе, и приписываем справа первые два столбца определителя.



(8)

Возьмем со знаком плюс произведение элементов, стоящих на главной диагонали определителя, а также произведения элементов, стоящих на двух параллельных к ней линиях, содержащих по три элемента.

Произведения же элементов, стоящих на побочной диагонали и на двух параллельных к ней линиях, содержащих по три элемента, возьмем со знаком минус.

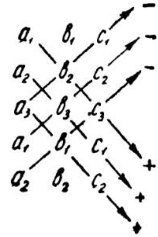
Алгебраическая сумма этих шести произведений дает значение определителя третьего порядка.

Смотря на схему (8), пишем:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

Правило Сарруса можно облечь и в другую форму. При составлении схемы вместо того, чтобы приписывать справа два первых столбца, можно приписать снизу две первых строки. Получится схема:



(9)

Смотря на схему (9), пишем:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

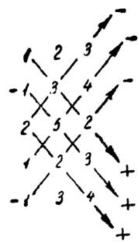
Пример. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot3\cdot2 + (-1)\cdot5\cdot3 + 2\cdot2\cdot4 - 2\cdot3\cdot3 - 1\cdot5\cdot4 - (-1)\cdot2\cdot2 = -27.$$



Разложение определителя третьего порядка по элементам какой-либо строки или столбца.

Если в определителе третьего порядка вычеркнуть одну строку и один столбец, на пересечении которых стоит некоторый элемент, то оставшиеся элементы образуют определитель второго порядка, который называется *минором определителя* $\triangle$, *соответствующим этому элементу*. Например, минором определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

соответствующим элементу b_3, будет определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрыв определитель третьего порядка и сгруппировав члены, содержащие один и тот же элемент первого столбца, получим:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 =$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1 + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Замечаем, что определитель, на который умножается a_1, есть минор элемента a_1; точно так же элементы a_2 и a_3 умножаются на свои миноры.

Следовательно, можно записать:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Разложения определителя по элементам какой-либо строки или столбца.

Чтобы вычислить определитель третьего порядка, нужно каждый элемент строки или столбца, по которым разлагается определитель, умножить на его минор, взятый со знаком плюс или минус в зависимости от того, будет ли сумма номеров зачеркнутых строки и столбца четным или нечетным числом.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4. & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 + 25 - 16 = 11.$$

Определитель разложен по элементам второй строки.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 + 60 + 32 - 5 = 87.$$

Определитель разложен по элементам второго столбца.

Точно так же вычисляются и определители четвертого, пятого и т. д. порядка.

Вычисление каждого из них сводится к вычислению нескольких определителей на единицу низшего порядка.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} - 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} - 0 =$$
$$= 2[3(15 - 18 + 12 - 15) - 2(5 - 6 + 4 - 15) - 5 + 6 + 12 - 4 + 15 - 6| = 48.$$

Определитель разложен по элементам третьей строки. Пользуясь определителями выражения (6), можно записать так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta z}{\Delta}. \tag{11}$$

Основные свойства определителей третьего порядка

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если записать столбцы вместо строк, а строки вместо столбцов.

Свойство 2. При перестановке двух столбцов или строк определитель меняет знак.

Свойство 3. Чтобы умножить определитель на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число все элементы какой-нибудь одной строки или какого-нибудь одного столбца.

Свойство 4. Если в определителе имеются две одинаковых строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

Свойство 5. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого ряда прибавить элементы параллельного ряда, предварительно умножив их на постоянный множитель.

Некоторые приложения определителей к аналитической геометрии

1. Площадь треугольника с вершинами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Условие, при котором три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) лежат на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2).

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Условие, при котором три прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x\,B_2y+C_2=0 \quad \text{и} \quad A_3x+B_3y+C_3=0,$$

пересекаются в одной точке.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры решения задач

№ 105. Решить следующие системы двух линейных уравнений.

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-5y=-2. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5-6=-11;$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15+4=-11;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-9=-11;$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-11}{-11}=1,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-11}{-11}=1;\quad x=1,\quad y=1.$$

№ 106. Решить систему.

$$\begin{cases} a^2x+b^2y=2abc, \\ abx-bcy=b^2c-ac^2. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 \\ ab & -bc \end{vmatrix} = -a^2bc-ab^3=-ab(ac+b^2);$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2abc & b^2 \\ b^2c-ac^2 & -bc \end{vmatrix} = -2ab^2c^2-b^4c+ab^2c^2=$$

$$=-b^2c(ac+b^2);$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a^2 & 2abc \\ ab & b^2c - ac^2 \end{vmatrix} = a^2b^2c - a^3c^2 - 2a^2b^2c =$$

$$= -a^2c(ac + b^2);$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-bc(ac+b^2)}{-ab(ac+b^2)} = \frac{bc}{a}, \quad x = \frac{bc}{a};$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-a^2c(ac+b^2)}{-ab(ac+b^2)} = \frac{ac}{b}, \quad y = \frac{ac}{b}.$$

№ 107. Решить системы трех линейных уравнений.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 12 + 24 - 27 - 8 - 20 = -58;$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -90 + 48 - 120 - 54 - 48 -$$

$$-200 = -464;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -100 - 72 + 36 - 180 + 24 + 60 =$$

$$= -232;$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 120 - 24 - 54 + 24 + 40 = -116$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = 4;$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2;$$

№ 108. Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{3}{2}z = -1, \\ \frac{5}{12}y - 0{,}5z = -1. \\ 5(y+1) - 4x = -1. \end{cases}$$

Решение. Упростим данную систему, освободившись в ней от дробных членов и приведя подобные в последнем уравнении

$$\begin{cases} 5x + 2y - 9z = -6, \\ \quad 5y - 6z = -12, \\ 4x - 5y = 6. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 0 & 5 & -6 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 48 + 180 - 150 = -18;$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -6 & 2 & -9 \\ -12 & 5 & -6 \\ 6 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ -2 & 5 & -6 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 6(-90 -$$

$$-12 + 45 + 30) = -162;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -9 \\ 0 & -12 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 18(8 - 24 + 10) =$$

$$= -108.$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & -12 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 6(25 - 16 + 20 -$$

$$-50) = -126.$$

$$x = \frac{-162}{-18} = 9, \quad y = \frac{-108}{-18} = 6 \quad z = \frac{-126}{-18} = 7;$$

$$x = 9;\ y = 6;\ z = 7.$$

№ 109. Решить *самостоятельно* систему четырех линейных уравнений.

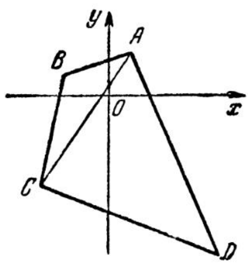
$$\begin{cases} x - y + 2z - 3u = -6, \\ 3x - y + z - 2u = -3, \\ x - 2y + 3z - u = -4, \\ 2x - 3y + z - u = -8. \end{cases}$$

Указания. Вычислите

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

а затем Δx, Δy, Δz, и Δu.
Ответ: $x = 1$; $y = 3$; $z = 1$; $u = 2$.

№ 110. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках A (1; 2), B (—2; 1) C (—3; —4), D (5; —7).



Черт. 104

Решение. Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников ABC и ACD.

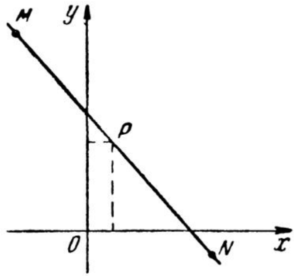
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1 + 8 - 6 + 3 + 4 + 4) = 7;$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-4 + 15 + 10 + 20 +$$

$$+ 5 + 6) = 26;$$

$$S_{ABCD} = 7 + 26 = 33; \quad S_{ABCД} = 33 \text{ кв. ед.}$$

№ 111. На прямой, проходящей через точку $M(-3;\ 8)$ и $N(5;\ -1)$, найти точку, абсцисса которой равнялась бы 1.



Черт. 105

Решение. Воспользуемся условием того, что три точки лежат на одной прямой.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Координаты искомой точки $P\ (1;\ y)$.

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3 + 5y + 8 + 1 + 3y - 40 = 0,$$

$$8y - 28 = 0, \quad y = 3{,}5. \qquad P(1;\ 3{,}5).$$

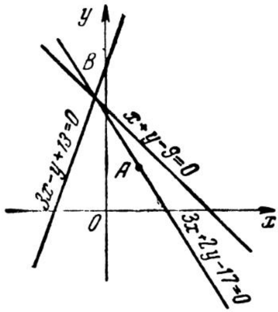
№ 112. *Решить самостоятельно.* Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - y + 13 = 0$ и $x + y - 9 = 0$ и точку $A\ (3;\ 4)$.

Указания. Для нахождения точки пересечения данных прямых надо решить систему

$$\begin{cases} 3x - y + 13 = 0, \\ x + y - 9 = 0. \end{cases}$$

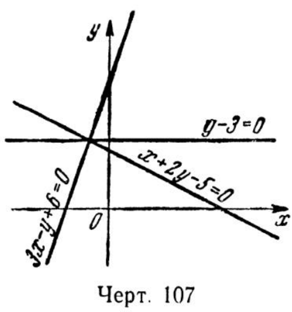
Уравнение искомой прямой найдите с помощью определителя.

Ответ: $3x+2y-17=0$.



Черт. 106

№ 113. *Решить самостоятельно.* Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-5=0$ и $3x-y+6=0$ перпендикулярно к оси Oy.



Черт. 107

Указания. Уравнение искомой прямой будет иметь вид: $y=b$ или $y-b=0$.

Используйте условие, при котором три прямые пересекаются в одной точке

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: $y-3=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Не вычисляя, определить величину определителя

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ д) $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & -2 & 6 \end{vmatrix}$ е) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -1 \\ 7 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

ж) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}$ з) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ и) $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \end{vmatrix}$

к) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ л) $\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -11 & \frac{1}{2} \\ 7 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & 5 & 0 \end{vmatrix}$ м) $\begin{vmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}3 \\ 1 & 2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 8 & -7 & 6 & 5 \\ 13 & 0 & 10 & 0 \\ -16 & 11 & -12 & 15 \end{vmatrix}$$

а) по элементам четвертого столбца,
б) по элементам третьей строки.

4. Решить при помощи определителей систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 17, \\ 5x + y - 3z = -2, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$$

5. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках A (0, 1), B (1, 0), C (2, 2).

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точки (3, 5) и (2, —4).

Ответы: **2**. а) 14; б) —6; в) —9; г) —9; д) —302; е) 302; ж) 302; з) 302; и) 302; к) 0; л) $\frac{373}{16}$; м) —3,18.

4. $x = 3$; $y = -2$; $z = 5$. 5. $\frac{3}{2}$ кв. ед.

6. $9x - y - 22 = 0$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Глава I

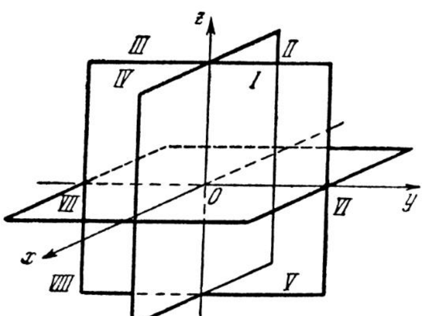
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Прямоугольные координаты в пространстве

Прямоугольная система координат в пространстве состоит из трех взаимно перпендикулярных пересекающихся в одной точке осей, называемых осями координат. Точка пересечения осей называется началом координат и обозначается буквой O. Координатные оси обозначаются через Ox, Oy и Oz и соответственно называются осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат.

На каждой оси выбирается положительное направление, указанное стрелкой, и единица меры (e).

Координатные оси Ox, Oy и Oz попарно определяют в пространстве три координатные плоскости xOy, xOz и yOz, пересекающиеся в одной точке O (черт. 108).



Черт. 108

Положение точки M относительно взятых осей определяется отрезками OA, OB, OC (черт. 109), соответственно равными расстояниям точки M от координатных плоскостей. Величины этих отрезков выражаются числами, если измерить их какой-либо единицей меры *(e)*.

Число $x = \frac{OA}{e}$ — называется *абсциссой точки М.*

Число $y = \frac{OB}{e}$ — называется *ординатой точки М.*

Число $z = \frac{OC}{e}$ — называется *аппликатой точки М.*

Таким образом, положение любой точки в пространстве определяется тройкой чисел (x, y, z), называемых ее координатами.

Координатные плоскости xOy, xOz и yOz делят пространство на восемь частей, называемых октантами (черт. 108).

Координаты точек, расположенных в различных частях, имеют следующие знаки:

Координаты	Октанты							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Абсцисса . .	+	−	−	+	+	−	−	+
Ордината . . .	+	+	−	−	+	+	−	−
Аппликата . .	+	+	+	+	−	−	−	−

Точки, лежащие на координатных плоскостях, имеют одну из координат, равную 0.

Точки, лежащие на осях координат, имеют две координаты, равные 0.

Начало координат имеет все три координаты, равные 0.

Между тремя числами *(x, y, z)* и точками пространства устанавливается взаимно однозначное соответствие. Каждой тройке чисел соответствует одна и только одна точка пространства и, наоборот, каждой точке пространства соответствует единственная тройка чисел.

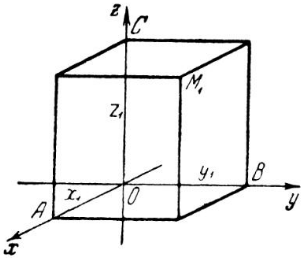
§ 2. Основные задачи

1. Расстояние между двумя точками. Расстояние между двумя точками M_1 (x_1, y_1, z_1) и M_2 (x_2, y_2, z_2) определяется по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1)$$

В частном случае, расстояние точки M_1 (x_1, y_1, z_1) от начала координат равно:

$$d = \sqrt{x^2_1 + y^2_1 + z^2_1}. \qquad (2)$$



Черт. 109

2. Деление отрезка в данном отношении. Если точка $M(x, y, z)$ делит отрезок, определяемый точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$, то ее координаты определяются по формулам:

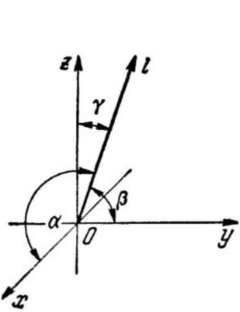
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

В частности, координаты середины отрезка M_1M_2 получаются при $\lambda = 1$, т. е.

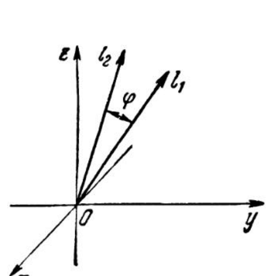
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4}$$

3. Определение направлений в пространстве. Пусть ось l образует с положительными направлениями осей координат Ox, Oy и Oz соответственно углы α, β и γ (черт. 110). Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами оси l. Между направляющими косинусами существует следующая основная зависимость:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{5}$$



Черт. 110



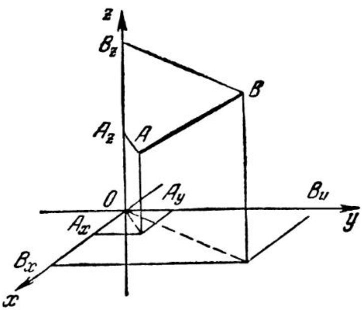
Черт. 111

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов любого направления равна единице.

Пусть l_1 и l_2 суть две оси, проходящие через начало координат (черт. 111). $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ — направляющие косинусы l_1 $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$ и $\cos\gamma_2$ — направляющие косинусы l_2. Тогда косинус угла φ между этими осями вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (6)$$

Пусть отрезок AB (черт. 112) задан своим началом A (x_1, y_1, z_1) и концом B (x_2, y_2, z_2). Тогда проекции этого отрезка на оси координат выражаются через координаты точек A и B следующими формулами:



Черт. 112

$$\text{Пр}_x AB = A_x B_x = x_2 - x_1,$$

$$\text{Пр}_y AB = A_y B_y = y_2 - y_1,$$

$$\text{Пр}_z AB = A_z B_z = z_2 - z_1.$$

Длина отрезка AB вычисляется по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Тогда направляющие косинусы отрезка AB равны:

$$\cos\alpha = \frac{z_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \qquad (7)$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

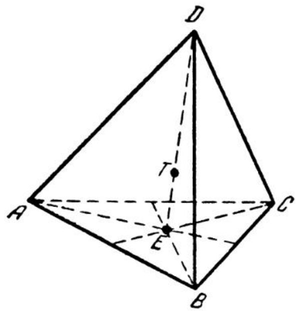
В частном случае, если начало отрезка находится в начале координат, а конец — в точке M (x_1, y_1, z_1), то направляющие косинусы отрезка OM равны:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x^2_1 + y^2_1 + z^2_1}}, \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x^2_1 + y^2_1 + z^2_1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x^2_1 + y^2_1 + z^2_1}}. \tag{8}$$

4. Нахождение центра тяжести пирамиды. Пусть задана пирамида своими вершинами A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3), D (x_4, y_4, z_4) (черт. 113).

Центр тяжести пирамиды T (x, y, z) лежит на прямой, соеди-



Черт. 113

няющей любую из ее вершин с центром тяжести противолежащей грани. Находим координаты точки E:

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y' = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

$$z' = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Искомая точка T (x, y, z) делит отрезок DE в отношении $DT : TE = 3 : 1$, т. е. $\lambda = 3$.

Воспользуемся формулами (3); имеем:

$$x = \frac{x_4 + 3\cdot \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}{1+3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4};$$

$$y = \frac{y_4 + 3\cdot \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}{4} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}; \tag{9}$$

$$z = \frac{z_4 + 3 \cdot \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}}{4} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Итак,

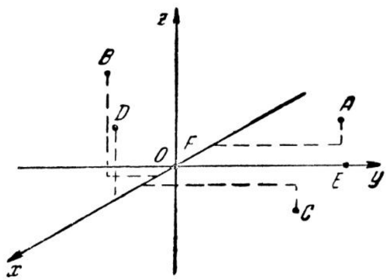
$$/\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}\right].$$

Примеры решения задач

№ 1. Построить точки $A(-3; 5; 1)$, $B(1; -2; 4)$, $C(2; 6; -1)$, $D(4; 0; 3)$, $E(0; 7; 0)$, $F(0; 0; 0)$.

Объяснить расположение точек.

Построение. На оси Ox в отрицательном направ-



Черт. 114

лении откладываем 3 единицы выбранного масштаба. Из конца третьего отрезка проводим полупрямую вправо параллельно оси Oy и откладываем на ней 5 единиц выбранного масштаба. Из конца пятого отрезка проведем полупрямую вверх параллельно оси Oz и на ней отложим отрезок, равный 1. Конец этого отрезка и дает искомую точку A.

Аналогично строим остальные точки.

Точка A находится во втором октанте, точка B — в IV октанте, точка C — в V октанте; точка D лежит в плоскости xOz, точка E лежит на оси Oy, а точка F в начале координат.

№ 2. Дана точка $A(3; 5; 2)$.

Найти координаты точки, симметричной с точкой A:

а) относительно начала координат,

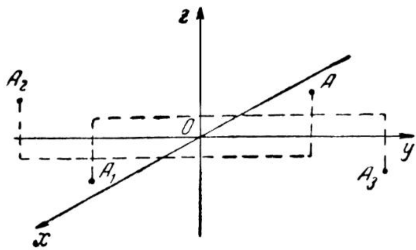
б) относительно плоскости xOz,

в) относительно оси Oy.

Построить ее.

Решение. а) Точка A лежит в I октанте, симметричная ей точка относительно начала координат A_1 будет находиться в VII октанте. Ее координаты $A_1(-3; -5; -2)$.

б) Точка A_2, симметричная точке A относительно



Черт. 115

плоскости xOz, будет находиться в IV октанте, следовательно, ее координаты $A_2(3; -5; 2)$.

в) Точка A_3, симметричная точке A относительно оси Oy, будет находиться в VI октанте, следовательно, ее координаты $A_3(-3; 5; -2)$.

№ 3. Показать, что один из внутренних углов треугольника $A(3; 5; 3)$, $B(2; -1; 4)$ и $C(0; -2; 1)$ тупой.

Решение. Найдем длины сторон треугольника по

формуле $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

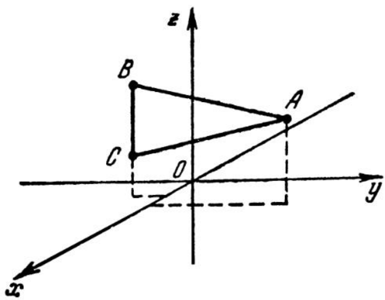
$$AB=\sqrt{(2-3)^2+(-1-5)^2+(4-3)^2}=$$
$$=\sqrt{1+36+1}=\sqrt{38};$$
$$AC=\sqrt{(0-3)^2+(-2-5)^2+(1-3)^2}=$$
$$=\sqrt{9+49+4}=\sqrt{62};$$
$$BC=\sqrt{(0-2)^2+(-2+1)^2+(1-4)^2}=$$
$$=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}.$$

Рассмотрим соотношение между числами, выражающими квадраты сторон данного треугольника:

$38+14=52,\ 62>52,\ 62>38+14$, т. е. $AC^2>AB^2+BC^2$.

Следовательно, сторона AC лежит против тупого угла B.

Ответ: угол B — тупой.



Черт. 116

№ 4. На оси Oz найти точку, равноудаленную от двух точек $A\ (-2;\ 1;\ 4)$ и $B\ (3;\ 0;\ 1)$.

Решение. Точка, лежащая на оси Oz, имеет координаты $M\ (0;\ 0;\ z)$. Найдем расстояния AM и BM:

$$AM=\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(z-4)^2}=$$

$$=\sqrt{4+1+(z-4)^2}=\sqrt{5+z^2-8z+16}=\sqrt{z^2-8z+21};$$

$$BM=\sqrt{(0-3)^2+0+(z-1)^2}=\sqrt{9+z^2-2z+1}=$$

$$=\sqrt{z^2-2z+10}.$$

Согласно условию, что $AM=BM$, получите

$$\sqrt{z^2-8z+21}=\sqrt{z^2-2z+10}.$$

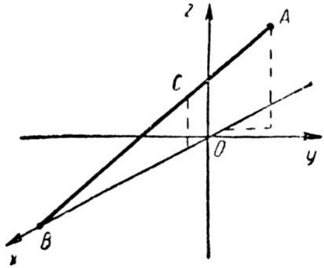
Решив полученное уравнение, найдем аппликату точки M:

$$z^2-8z+21=z^2-2z+10,\qquad -6z=-11,\qquad z=\frac{11}{6}.$$

Ответ: $M\ (0;\ 0;\ \frac{11}{6})$.

№ 5. Определить координаты конца отрезка AB, если известно, что его начало находится в точке $A\ (-1;\ 2;\ 4)$ и точка $C\ (2;\ 0;\ 2)$ отсекает от него третью часть.

Решение. Точка C, отсекая от отрезка AB третью часть его длины, делит его в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$.



Черт. 117

Воспользуемся формулами деления отрезка в данном отношении:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Подставив в эти формулы координаты данных точек A и C

$$2 = \frac{-1 + \frac{1}{2}\ x_B}{1 + \frac{1}{2}}, \quad 0 = \frac{2 + \frac{1}{2}\ y_B}{\frac{3}{2}},$$

$$2 = \frac{4 + \frac{1}{2}\ z_B}{\frac{3}{2}}$$

и решив полученные уравнения, найдем:

$$2 \cdot \frac{3}{2} = -1 + \frac{1}{2} x_B, \quad \frac{1}{2} x_B = 4, \quad x_B = 8;$$

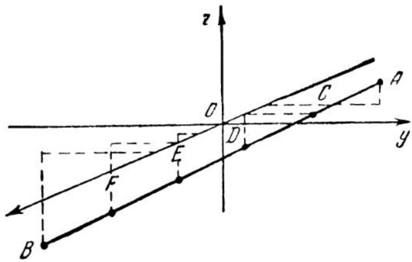
$$2 + \frac{1}{2} y_B = 0, \quad y_B = -4; \quad 2 \cdot \frac{3}{2} = 4 + \frac{1}{2} z_B,$$

$$\frac{1}{2} z_B = -1, \quad z_B = -2.$$

Ответ: $B\ (8;\ -4;\ -2)$.

№ 6. *Решить самостоятельно.* Отрезок AB разделен на 5 равных частей; первая точка деления $C(-2;\ 3;\ 0)$ и третья $E(2;\ -1;\ -2)$. Найти координаты концов отрезка и остальных точек деления.

Указания. Обозначьте точки деления в следующем порядке: C, D, E, F. Так как согласно условию отрезки



Черт. 118

AC, CD, DE равны, то точка C делит отрезок AE в отношении $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись формулами деления отрезка в данном отношении, определите координаты точки A.

$$x_C = \frac{x_A + \lambda_1 x_E}{1+\lambda_1}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda_1 y_E}{1+\lambda_1}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda_1 z_E}{1+\lambda_1}.$$

Решая каждую из этих формул, определите x_A, y_A, z_A.

Отрезок AB делится точкой C в отношении $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.

$$x_C = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1+\lambda_2},$$

откуда вы получите x_B, аналогично

$$y_B = \frac{y_C\,(1+\lambda_2) - y_A}{\lambda_2}, \quad z_B = \frac{z_C\,(1+\lambda_2) + z_A}{\lambda_2}.$$

Найдите x_B, y_B и z_B.

Тогда D делит отрезок CE пополам:

$$x_Д = \frac{x_C + x_E}{2}; \quad y_Д = \frac{y_C + y_E}{2},$$

$$z_Д = \frac{z_C + z_E}{2};$$

найдите $x_Д$, $y_Д$ и $z_Д$.

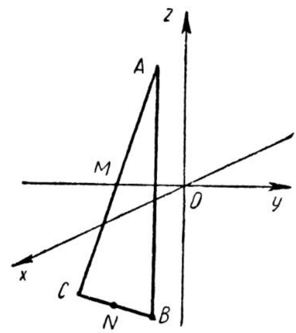
Точка F делит отрезок BE пополам:

$$x_F = \frac{x_B + x_E}{2}, \quad y_F = \frac{y_B + y_E}{2}, \quad z_F = \frac{z_B + z_E}{2};$$

Найдите x_F, y_F и z_F.

Ответ: $A(-4; 5; 1)$, $B(6; -5; -4)$, $D(0; 1; -1)$ и $E(4; -3; -3)$.

№ 7. Даны две вершины треугольника: $A(-3; -2; 2)$, $B(4; 1; -2)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC — на плоскости xOz.



Черт. 119

Решение. Обозначим середину стороны AC буквой M. Так как она лежит на оси Oy, то ее координаты $M(0; y; 0)$. Середина стороны BC, точка N, лежит на плоскости xOz; значит, ее координаты $N(x_2\ 0; z_2)$.

Воспользовавшись формулами деления отрезка пополам, найдем:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad 0 = \frac{-3 + x_C}{2}; \quad x_C = 3;$$

$$z_M = \frac{z_A + z_C}{2}; \quad 0 = \frac{2 + z_C}{2}, \quad z_C = -2.$$

Следовательно,

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2}; \quad 0 = \frac{1 + y_C}{2}, \quad y_C = -1.$$

Ответ: $C(3; -1; -2)$.

№ 8. Вычислить координаты точки M, если луч OM наклонен к оси Ox под углом в 60°, а к оси Oy — под углом в 45° и что длина его равна 12.

Решение. Согласно условию $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$.

Воспользовавшись соотношением между квадратами направляющих косинусов, найдем угол α:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \cos^2\gamma = 1, \qquad \cos^2\gamma = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{2};$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = 60°; \quad \cos\gamma_2 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = 120°.$$

Координаты точки M определим по формулам:

$$x = d\cos\alpha, \quad y = d\cos\beta, \quad z = d\cos\gamma.$$

$$x = 12\cos 60° = 12\cdot\frac{1}{2} = 6; \quad y = 12\cos 45° = 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2};$$

$$z = 12\cos\gamma = 12\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \pm 6.$$

Ответ: $M_1(6;\ 6\sqrt{2};\ 6)$; $M_2(6;\ 6\sqrt{2};\ -6)$.

№ 9. Начало отрезка находится в точке A (3; 2; 7). Найти его конец, зная, что длина отрезка AB равна 15, а углы между этим отрезком и осями координат удовлетворяют соотношению

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5.$$

Решение. Конец отрезка имеет координаты B (x_1, y_1, z_1). Воспользовавшись формулами для определения направляющих косинусов отрезка по его длине и координатам его начала и конца

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d},$$

найдем

$$x = 3 + 15\cos\alpha, \quad y = 2 + 15\cos\beta, \quad z = 7 + 15\cos\gamma.$$

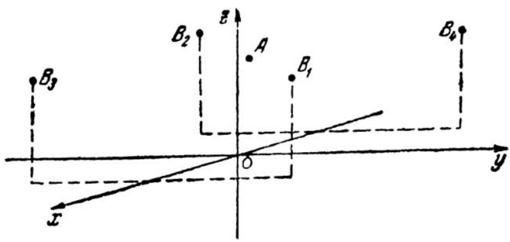
Задача сводится к нахождению направляющих косинусов отрезка AB.

Обозначив коэффициент пропорциональности буквой k, можем записать

$$\sin\alpha = 3k, \quad \sin\beta = 4k, \quad \sin\gamma = 5k.$$

Тогда

$$\cos^2\alpha = 1 - 9k^2, \quad \cos^2\beta = 1 - 16k^2, \quad \cos^2\gamma = 1 - 25k^2.$$



Черт. 120

Воспользовавшись формулой

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

найдем

$$1 - 9k^2 + 1 - 16k^2 + 1 - 25k^2 = 1, \quad 50k^2 = 2, \quad k^2 = \frac{1}{25}.$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}; \quad \cos\alpha = \pm\frac{4}{5};$$

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}; \quad \cos\beta = \pm\frac{3}{5};$$

$$\cos^2\gamma = 1 - \frac{25}{25} = 0; \quad \cos\gamma = 0;$$

Возможны 4 случая.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = 0.$$

$$x = 3 + 15 \cdot \frac{4}{5} = 3 + 12 = 15; \quad y = 2 + 15 \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= 2 + 9 = 11; \quad z = 7; \quad B_1(15;\ 11;\ 7).$$

II. $$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = 0.$$

$$x = 3 + 15\left(-\frac{4}{5}\right) = 3 - 12 = -9;$$

$$y = 2 + 15 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 2 - 9 = -7;$$

$$z = 7; \quad B_2(-9;\ -7;\ 7).$$

III. $$\cos\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = -\frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = 0.$$

$$x = 3 + 15 \cdot \frac{4}{5} = 15; \qquad y = 2 + 15\left(-\frac{3}{5}\right) = -7;$$

$$z = 7; \quad B_3(15;\ -7;\ 7).$$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{3}{5}, \quad \cos\gamma = 0,$$

$$x = 3 + 15 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -9; \quad y = 2 + 15 \cdot \frac{3}{5} = 11;$$

$$z = 7; \quad B_4(-9;\ 11;\ 7).$$

Ответ: B_1 (15; 11; 7), B_2 (−9; −7; 7), B_3 (15, −7; 7), B_4 (−9; 11; 7).

№ 10. Вершины треугольника находятся в точках A (5; 3; −10), B (0; 1; 4), C (−1; 3; 2). Найти направляющие косинусы биссектрисы угла B.

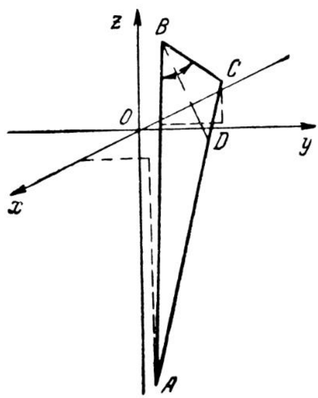
Решение. Направляющие косинусы биссектрисы BD мы сможем легко найти, если будут известны координаты точки D. Точку D мы можем определить как результат пересечения биссектрисы с противоположной стороной треугольника.

Согласно свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника точка D будет делить сторону AC в отношении $\lambda = \frac{CD}{DA} = \frac{CB}{BA}$.

Найдем длины сторон CB и BA.

$$CB = \sqrt{(0+1)^2 + (3-1)^2 + (2-4)^2} =$$

$$= \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3;$$



Черт. 121

$$BA = \sqrt{5^2 + (3-1)^2 + (-10-4)^2} =$$

$$= \sqrt{25+4+196} = \sqrt{225} = 15.$$

Следовательно, $\lambda = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Координаты точки D найдем по формулам:

$$x = \frac{x_C + \lambda x_A}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_C + \lambda y_A}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_C + \lambda z_A}{1+\lambda};$$

$$x = \frac{-1 + \frac{1}{5} \cdot 5}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{6}(-1+1) = 0;$$

$$y=\frac{5}{6}\left(3+\frac{1}{5}\cdot 3\right)=\frac{5}{6}\cdot\frac{18}{5}=3;$$

$$z=\frac{5}{6}\left[2+\frac{1}{5}\cdot(-10)\right]=0;\quad D(0;\ 3;\ 0).$$

Найдем длину биссектрисы BD:

$$BD=\sqrt{(3-1)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

Направляющие косинусы биссектрисы BD найдем следующим образом:

$$\cos\alpha=\frac{x_Д-x_B}{BD},\quad \cos\alpha=\frac{0}{2\sqrt{5}}=0;$$

$$\cos\beta=\frac{y_Д-y_B}{BD},\quad \cos\beta=\frac{3-1}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos\gamma=\frac{z_Д-z_B}{BD},\quad \cos\gamma=\frac{0-4}{2\sqrt{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Ответ: $\cos\alpha=0,\quad \cos\beta=\frac{1}{5}\sqrt{5},$

$$\cos\gamma=-\frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

№ 11. Найти угол между лучом, лежащим в плоскости yOz и образующим с осью Oz угол $60°$ и лучом, лежащим в плоскости xOz и образующим с осью Oz угол $30°$.

Решение. Если луч лежит в плоскости yOz, то угол $\alpha_1=90°$, $\cos\alpha_1=0$. По условию $\gamma_1=60°$; следовательно, $\beta_1=30°$; значит

$$\cos\beta_1=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\gamma_1=\cos 60°=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\cos\alpha_1=0,\quad \cos\beta_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\gamma_1=\frac{1}{2}.$$

Второй луч лежит в плоскости xOz, следовательно, $\beta_2=90°$, $\cos\beta_2=0$.

По условию $\gamma_2=30°$, то $\alpha_2=60°$;

$$\cos\alpha_2=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma_2=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Угол между двумя данными лучами находим по формуле:

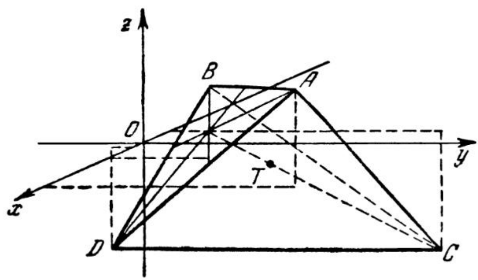
$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2;$$

$$\cos\varphi = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

№ 12. Найти центр тяжести пирамиды, вершины которой находятся в точках: $A\ (8;\ 10;\ 4)$, $B\ (3;\ 4;\ 3)$, $C\ (-2;\ 11;\ -5)$, $D\ (1;\ -1;\ -4)$.

Решение. Центр тяжести пирамиды находим как



Черт. 122

среднее арифметическое координат вершин пирамиды.

$$x = \frac{8+3-2+1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5;$$

$$y = \frac{10+4+11-1}{4} = \frac{24}{4} = 6;$$

$$z = \frac{4+3-5-4}{4} = \frac{-2}{4} = 0{,}5.$$

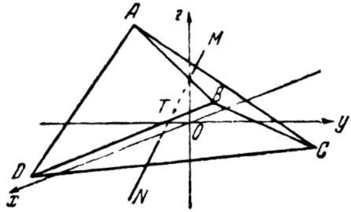
Ответ: $T\ (2{,}5;\ 6;\ -0{,}5)$.

№ 13. Найти отношение, в котором делится отрезок, соединяющий точки $M\ (2;\ 2;\ 5)$ и $N\ (2;\ -3;\ -5)$, центром тяжести пирамиды с вершинами в точках $A\ (3;\ -2;\ 7)$, $B\ (3;\ 3;\ 2)$, $C\ (-7;\ 5;\ -3)$, $D\ (9;\ -6;\ -2)$.

Решение. Найдем центр тяжести пирамиды:

$$x = \frac{3+3-7+9}{4} = 2; \quad y = \frac{-2+3+5-6}{4} = 0,$$

$$z = \frac{7+2-3-2}{4} = 1; \quad T(2;\ 0;\ 1).$$



Черт. 123

Воспользовавшись одной из формул деления отрезка в данном отношении $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$,

получим:

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2, \quad \lambda(x - x_2) = x_1 - x,$$

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x - x_2}, \quad \lambda = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}.$$

Так как абсциссы всех точек M, T, N одинаковы, то первая формула дает неопределенность.

Из второй формулы

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

найдем:

$$\lambda = \frac{y_1 - y}{y - y_2}, \quad \lambda = \frac{2-0}{0+3} = \frac{2}{3}, \quad \lambda = \frac{2}{3}.$$

Проверим по третьей формуле: $\lambda = \dfrac{z_1 - z}{z - z_2}$,

$$\lambda=\frac{5-1}{1+5}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\lambda=\frac{2}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить точки $A\ (2;\ -3;\ 5)$, $B\ (1;\ 0;\ 4)$, $C\ (0;\ 2;\ -1)$, $D\ (4;\ 3;\ 0)$, $E\ (0;\ 0;\ 7)$. Каковы особенности их расположения?

2. Найти длину отрезка, начало которого помещено в начале координат, а конец — в точке $(6;\ -2;\ 3)$.

3. Даны вершины треугольника $A\ (3;\ 2;\ -1)$, $B\ (5;\ -4;\ 7)$ и $C\ (-1;\ 1;\ 2)$. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C.

4. Луч образует с двумя осями координат углы в 45°. Под каким углом наклонен он к третьей оси?

5. Найти длину и направляющие косинусы отрезка, соединяющего точки $A\ (2;\ 0;\ -1)$ и $B\ (3;\ -2;\ 1)$.

Ответы: **2**. 7. **3**. $\sqrt{30}$. **4**. 90°. **5**. 3; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

$$\cos\beta=-\frac{2}{3},\quad \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Векторы и скаляры

Величины, с которыми приходится встречаться в физике, механике и других прикладных дисциплинах, бывают двоякого рода: скалярные и векторные.

Скалярными величинами, или скалярами, называются *величины, которые определяются только числовым значением.*

Например: время, масса, плотность, длина отрезка, площадь, объем и т. д

Векторными величинами, или векторами, называются величины, которые определяются не только численным значением, но направлением и точкой приложения.

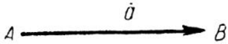
Например: сила, скорость, ускорение и т. д.

Векторные величины геометрически изображаются в виде отрезков, снабженных стрелками. Стрелка указывает направление, а длина отрезка изображает численные значения вектора и называется длиною, или модулем, или абсолютной величиной вектора.

Векторы обычно обозначаются либо буквой и черточкой над ней $\overline{a}$, либо двумя буквами и черточкой над ними $\overline{AB}$, причем в этом случае первая буква указывает начало вектора, а вторая — его конец (черт. 124).

Длина, или модуль, вектора $\overline{a}$ обозначается символом $|\overline{a}|$, либо символом a.

Два вектора называются равными, если они имеют одинаковые длины, лежат на параллельных прямых, либо на одной прямой, и направлены в одну сторону. Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любой точке пространства. Выбрав некоторое начало — точку O, — удобно считать все векторы исходящими из этой точки. В таком случае мы будем говорить, что векторы приведены к общему началу O.



Черт. 124

Если начало вектора совпадает с его концом, то вектор называется *нулевым*. Направление нулевого вектора неопределенно. Все нулевые векторы считаются равными друг другу.

Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*.

Векторы, параллельные одной плоскости, называются компланарными.

§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на скаляр

1. С л о ж е н и е в е к т о р о в. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма или многоугольника.

Правило параллелограмма. Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют такой третий вектор $\overline{c}$, выходящий из их общего начала, который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются сами векторы (черт. 125) и обозначают так: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{c}$.

Правило многоугольника. Чтобы построить сумму любого конечного числа векторов, нужно в конце первого слагаемого вектора построить второй, в конце второго построить третий и т. д. Вектор, замыкающий полученную ломаную линию, представляет собой искомую сумму. Начало его совпадает с началом первого слагаемого вектора, а конец — с концом последнего.

Например, сумма векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ получается так (черт. 126). Строим векторы

$$\overline{OA}=\overline{a},\ \overline{AB}=\overline{b},\ \overline{BC}=\overline{c},\ \overline{CD}=\overline{d}.$$

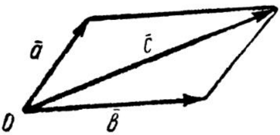
Тогда вектор суммы

$$\overline{OD}=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}.$$

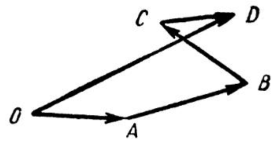
Два вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OA_1}$, имеющие равные длины, но противоположные направления, называются противоположными векторами (черт. 127).

Если вектор $\overline{OA_1}$ противоположен вектору $\overline{OA}$, то можно записать:

$$\overline{OA_1} = -\overline{OA}.$$

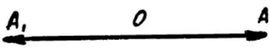


Черт. 125



Черт. 126

Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору:



Черт. 127

$$\overline{OA} + \overline{OA_1} = \overline{OA} + (-\overline{OA}) = 0.$$

Сумма векторов удостоверяет:

а) закону переместительности

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a};$$

б) закону сочетательности

$$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}.$$

2. В ы ч и т а н и е в е к т о р о в. Вычитание двух векторов определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой третий вектор $\overline{c}$, который нужно сложить с вектором $\overline{b}$, чтобы получить вектор $\overline{a}$, т. е.

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}, \text{ если } \overline{c} + \overline{b} = \overline{a}.$$

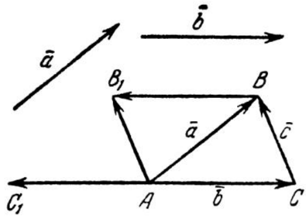
Чтобы из вектора $\overline{a}$ вычесть вектор $\overline{b}$, нужно отнести их к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора-вычитаемого $\overline{b}$ конечную точку вектора-уменьшаемого $\overline{a}$ (черт. 128).

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB} = \overline{c}.$$

То же действие вычитания двух векторов можно произвести иначе.

Чтобы вычесть из вектора $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$, надо прибавить к вектору $\overline{a}$ равный и противоположно направленный вектору $\overline{b}$ вектор $(-\overline{b})$.

Построим вектор $\overline{AC_1}$, длина которого равна длине вектора $\overline{AC}$, а направление его противоположно направлению вектора $\overline{AC}$.



Черт. 128

Кроме того, дополним треугольник ABC до параллелограмма $ACBB_1$.

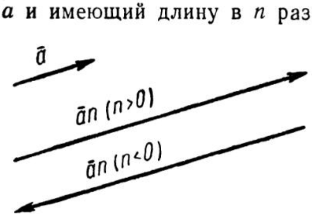
Очевидно $\overline{BB_1}$ равно $\overline{CA}$. Следовательно, $\overline{BB_1}=\overline{AB_1}$ (черт. 128). Искомая разность

$$\overline{a}-\overline{b}=\overline{CB}=\overline{AB}_1.$$

Мы получим следующее равенство:

$$\overline{AB}_1=\overline{AB}+\overline{BB}_1=\overline{AB}+\overline{AC}_1=\overline{a}+(-\overline{b}).$$

3. Умножение вектора на скаляр. При умножении вектора $\overline{a}$ на скаляр n получим вектор $\overline{b}$, коллинеарный с вектором $\overline{a}$ и имеющий длину в n раз больше, чем $|\overline{a}|$. Этот новый вектор $\overline{b}$ имеет одинаковое направление с вектором $\overline{a}$, если $n>0$, и противоположное с ним направление, если $n<0$ (черт. 129).



Черт. 129

Если обозначить одноименной буквой с нуликом вверху $\overline{a^0}$ вектор длины, равной 1, и того же направления, что и вектор $\overline{a}$, то из определения умножения вектора на скаляр следует

$$\overline{a}=\overline{a^0}\,a.$$

Единичный вектор $\overline{a^0}$ направления вектора $\overline{a}$ называется *его ортом.*

§ 3. Проекции вектора

1. Проекции вектора. Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось $\overline{l}$ называется *число, равное длине отрезка A_1B_1, взятое со знаком плюс, если направление отрезка A_1B_1 совпадает с направлением оси $\overline{l}$, и со знаком минус, если эти направления противоположны* (черт. 130).

Проекция вектора $\overline{AB}=\overline{a}$ на ось $\overline{l}$ обозначается формулой $\text{Пр}_{\overline{l}}\overline{AB}$ или $\text{Пр}_{\overline{l}}\overline{a}$.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось $\overline{l}$ выражается формулой

$$\text{Пр}_{\overline{l}}\overline{AB} = AB\cos\varphi \quad \text{или} \quad \text{Пр}_{\overline{l}}\overline{a} = a\cos\varphi,$$

где $AB=a$ — модуль вектора $\overline{AB}=\overline{a}$, φ — угол наклона вектора к оси $\overline{l}$.

Проекция суммы векторов на ось $\overline{l}$ равна сумме их проекций на ту же ось:

$$\text{Пр}_{\overline{l}}(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}) = \text{Пр}_{\overline{l}}\overline{a} + \text{Пр}_{\overline{l}}\overline{b} + \text{Пр}_{\overline{l}}\overline{c}.$$

При умножении вектора на скаляр его проекция умножается на этот скаляр:

$$\text{Пр}_{\overline{l}}\, n\overline{a} = n\,\text{Пр}_{\overline{l}}\overline{a}.$$

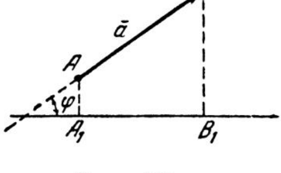
Рассмотрим прямоугольную систему координат и произвольный вектор OM (черт. 131).

Очевидно, будем иметь:

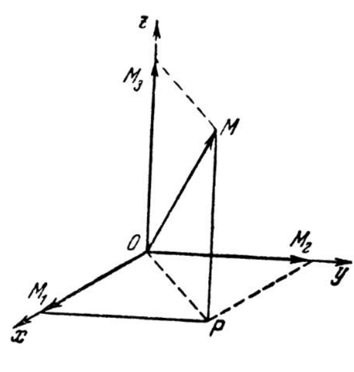
$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM_2} + \overline{OM}_3,$$

или иначе.

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M_2} + M_3, \qquad (1)$$



Черт. 130



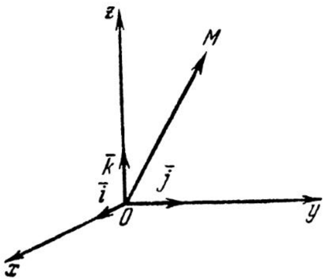
Черт. 131

где

$$\overline{OM} = \overline{M}, \quad \overline{OM_1} = \overline{M}_1, \quad \overline{OM}_2 = \overline{M}_2, \quad \overline{OM}_3 = \overline{M}_3.$$

Равенство (1) показывает, что всякий вектор можно разложить на три слагаемых вектора, лежащих на осях координат. Слагаемые векторы $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ и $\overline{M}_3$ называются *составляющими вектора $\overline{M}$ относительно системы осей координат $Oxyz$* или его компонентами.

От точки O в положительном направлении каждой оси координат откладываем вектор, длина которого равна 1. Эти векторы называются единичными векторами или ортами и обозначаются соответственно через $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$ (черт. 132).



Черт. 132

Возвращаясь к равенству (1), заметим, что вектор $\overline{M}_1$ как и вектор $\overline{i}$, расположены на оси абсцисс, а потому имеем $\overline{M}_1 = x\overline{i}$, где x есть длина вектора $\overline{M}_1$, взятая со знаком плюс, если направления векторов $\overline{M}_1$ и $\overline{i}$ совпадают, и со знаком минус, если направления их противоположны.

Другими словами, x есть число, являющееся проекцией вектора $\overline{M}$ на ось абсцисс.

Аналогично получим: $\overline{M}_2 = y\overline{j}$ и $\overline{M}_3 = z\overline{k}$, где y и z — проекции вектора $\overline{M}$ соответственно на оси ординат и аппликат.

Тогда равенство (1) перепишется так:

$$\overline{M} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}. \qquad (2)$$

Равенство (2) дает разложение вектора по основным единичным векторам или по ортам $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$.

Вместо полной записи $\overline{M} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ часто пользуются сокращенной $\overline{M} = \{x, y, z\}$ или $\overline{M}\{x, y, z\}$.

Здесь x, y, z обозначают проекции вектора $\overline{M}$, или координаты точки M, являющейся концом радиуса-вектора $\overline{M}$.

Длина вектора $\overline{OM}$ определяется по формуле:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Если даны две точки A $(x_1; y_1; z_1)$ и B $(x_2; y_2; z_2)$, являющиеся соответственно началом и концом вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, то его проекции на оси координат соответственно равны:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1,$$

а сам вектор в этом случае может быть записан в виде:

$$\overline{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\overline{i} + (y_2 - y_1)\,\overline{j} + (z_2 - z_1)\,\overline{k}.$$

Его длина определяется по формуле:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (4)$$

Обозначив через α, β, и γ углы вектора $\overline{a}$ с осями координат, получим:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{a}, \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{a}, \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{a}, \qquad (5)$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$.

Из формул (4) и (5) следует:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \qquad (6)$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

2. Действия над векторами, заданными своими проекциями.

а) При сложении векторов одноименные их проекции складываются. Если даны векторы

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}, \quad \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k},$$

то

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2)\overline{i} + (y_1 + y_2)\overline{j} + (z_1 + z_2)\overline{k}.$$

б) При вычитании векторов одноименные их проекции вычитаются:

$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2)\overline{i} + (y_1 - y_2)\overline{j} + (z_1 - z_2)\overline{k}.$$

в) При умножении вектора на скаляр проекции вектора умножаются на этот скаляр:

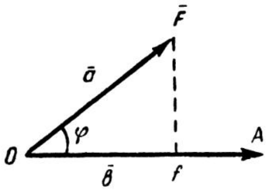
$$\overline{a}\lambda = \lambda x_1\overline{i} + \lambda y_1\overline{j} + \lambda z_1\overline{k}.$$

Равенство (2) устанавливает связь между геометрической и алгебраической частями теории векторов.

§ 4. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов называется *число (скаляр), равное произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними* (черт. 133).

Скалярное произведение обозначается одним из трех способов



Черт. 133

$$\overline{a}\cdot b = \overline{a}\overline{b} = (\overline{a}b).$$

Если угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначить через φ, то согласно определению имеем:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = ab\cos\varphi. \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует, что скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно выразить также формулами:

$$\overline{a}\,\overline{b} = a\,\text{Пр}_{\overline{a}}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\overline{b} = b\,\text{Пр}_{\overline{b}}\,\overline{a}, \qquad (8)$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию другого вектора на направление первого.

Из формулы (7) следует также, что:

а) Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ненулевые векторы, то скалярное произведение равно нулю только в том случае, если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны.

б) Если φ — острый угол, то $\overline{a}\,\overline{b} > 0$.

в) Если φ — тупой угол, то $\overline{a}\,\overline{b} < 0$.

г) Скалярное произведение обладает свойством переместительности:

$$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a}.$$

д) Скалярное произведение обладает свойством распределительности

$$(\overline{a} + \overline{b})\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}.$$

е) Скалярное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя:

$$(\overline{a}\,\overline{b})\,\lambda = \overline{a}\,(\overline{b}\,\lambda).$$

С к а л я р н о е п р о и з в е д е н и е в е к т о р о в, з а д а н н ы х с в о и м и п р о е к ц и я м и. Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими проекциями:

$$\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k},\ \overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k},$$

то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений их одноименных проекций:

$$\bar{a}\,\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

При $\bar{b}=\bar{a}$
имеем

$$\bar{a}^2 = x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1. \qquad (9)$$

С другой стороны

$$\bar{a}^2 = aa\cos 0 = a^2.$$

Тогда

$$a = \sqrt{x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1}, \qquad (10)$$

т. е. длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его проекций.

Угол между двумя векторами.

Из формулы (7) следует:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{ab}, \qquad (11)$$

или в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x^2{}_1+y^2{}_1+z^2{}_1}\cdot\sqrt{x^2{}_2+y^2{}_2+z^2{}_2}}, \qquad (12)$$

т. е. косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение их длин.

Направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ с осями координат выражаются так:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x^2{}_1+y^2{}_1+z^2{}_1}}; \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x^2{}_1+y^2{}_1+z^2{}_1}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x^2{}_1+y^2{}_1+z^2{}_1}}. \qquad (13)$$

§ 5. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *новый вектор $\bar{c}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ вокруг полученного вектора $\bar{c}$ представлял-*

ся происходящим против часовой стрелки, для правой системы координат, если смотреть с конца вектора $\overline{c}$.

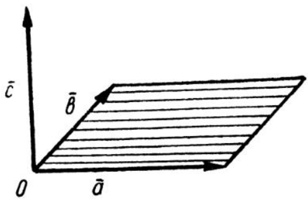
Векторное произведение обозначается символом

$$\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b} \quad \text{или} \quad \overline{c}=[\overline{a}\ \overline{b}].$$

Из определения следует, что длина вектора $\overline{c}$ равна:

$$c=|\overline{a}\times\overline{b}|=ab\sin\varphi, \tag{14}$$

т. е. произведению длин перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними, где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



Черт. 134

Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны (параллельны).

Таким образом, условие коллинеарности векторов:

$$[\overline{a}\ \overline{b}]=0. \tag{15}$$

В частности,

$$[\overline{a}\ \overline{a}]=0. \tag{16}$$

Основные свойства векторного произведения: 1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:

$$\overline{a}\times\overline{b}=-\overline{b}\times\overline{a}. \tag{17}$$

2. Векторное произведение обладает свойством сочетательности относительно числового множителя:

$$\lambda\ [\overline{a}\ \overline{b}]=[\ \lambda\overline{a}\ \overline{b}]=[\overline{a}\,\lambda\ \overline{b}], \tag{18}$$

т. е. чтобы умножить векторное произведение на число, достаточно умножить на это число один из сомножителей.

3. Векторное произведение подчиняется распределительному свойству:

$$[(\overline{a}+\overline{b})\,\overline{c}]=[\overline{a}\ \overline{c}]+[\overline{b}\ \overline{c}]. \tag{19}$$

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими проекциями

$$\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}, \quad \overline{b}=x_1\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k},$$

то

$$[\overline{a}\ \overline{b}]=(y_1z_2-y_2z_1)\ \overline{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\overline{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\overline{k}, \tag{20}$$

или

$$[\overline{a}\ \overline{b}]=\begin{vmatrix} y_1z_1 \\ y_2z_2 \end{vmatrix}\ \overline{i}-\begin{vmatrix} x_1z_1 \\ x_2z_2 \end{vmatrix}\ \overline{j}+\begin{vmatrix} x_1y_1 \\ x_2y_2 \end{vmatrix}\ \overline{k}. \tag{21}$$

Эти три определителя получаются из таблицы (матрицы) проекций данных векторов

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|$$

вычеркиванием по очереди 1-го, 2-го и 3-го столбцов.

Векторное произведение может быть записано в символической форме с помощью определителя третьего порядка:

$$[\overline{a}\ \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Условия коллинеарности (параллельности) двух векторов заданных проекциями, получаются из равенства (12) и (16):

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{23}$$

Площадь треугольника, построенного на двух заданных векторах, исходящих из одной точки, выражается

$$S = \frac{1}{2}\left|\ [\overline{a}\ \overline{b}]\ \right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2} \tag{24}$$

Угол между двумя векторами находится по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{\left|[\overline{a}\ \overline{b}]\right|}{ab} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1} \cdot \sqrt{x^2{}_2 + y^2{}_2 + z^2{}_2}}. \tag{25}$$

§ 6. Векторно-скалярное произведение

Векторно-скалярным (или смешанным) произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется *число, равное векторному произведению* $[\overline{a}\,\overline{b}]$, *умноженному скалярно на вектор* $\overline{c}$, т. е. $[\overline{a}\,\overline{b}]\,\overline{c}$.

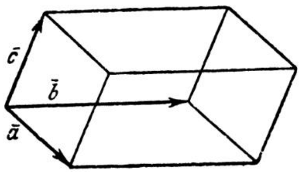
Векторно-скалярное произведение обозначается так:

$$[\overline{a}\ \overline{b}]\ \overline{c} = (\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}).$$

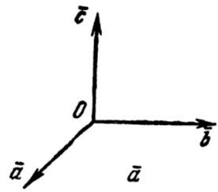
Векторно-скалярное произведение $(\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c})$ имеет простой геометрический смысл; оно есть число, выражающее объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, взятого со знаком плюс, если тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ правая, и со знаком минус, если эта тройка левая (черт. 135).

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку, если они расположены, как указано на чертеже 136, и левую тройку, если они расположены, как указано на чертеже 137. Круговая перестановка трех множителей векторно-скалярного произведения не меняет его величины. Перестановка двух соседних множителей меняет знак произведения:

$$(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})=(\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a})=(\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b})=-(\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c})=-(\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a})=-(\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{b}).$$



Черт. 135



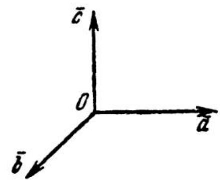
Черт. 136

Векторно-скалярное произведение равно нулю, если векторы компланарны Следовательно, равенство $(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})=0$ есть условие компланарности трех векторов. Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими проекциями:

$$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},$$

$$\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},$$

$$\bar{c}=x_3\bar{i}+y_3\bar{j}+z_3\bar{k},$$



Черт. 137

то векторно-скалярное произведение равно:

$$(\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (26)$$

Отсюда, объем v параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, вычисляется по формуле:

$$v=\left|\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{array}\right|. \qquad (27)$$

Условие, необходимое и достаточное для компланарности векторов, записывается так:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (28)$$

Объем треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ абсолютной величины векторно-скалярного произведения, составленного из трех векторов-ребер, выходящих из одной вершины, т. е:

$$v_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

§ 7. Двойное векторное произведение

Двойным векторным или векторно-векторным произведением трех векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется *выражение вида*

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} \quad \text{или} \quad \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Для двойного векторного произведения $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ надо сначала умножить векторно два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а затем полученное произведение еще раз умножают векторно на третий вектор $\bar{c}$.

Двойное векторное произведение выражается формулами

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{b}\,(\bar{a}\,\bar{c}) - \bar{a}\,(\bar{b}\,\bar{c}),$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}\,(\bar{a}\,\bar{c}) - \bar{c}\,(\bar{a}\,\bar{b}). \tag{30}$$

Правило: *Двойное векторное произведение равно произведению среднего вектора на скалярное произведение двух других, минус крайний вектор в скобке, умноженный на скалярное произведение двух других.*

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими проекциями

$$\bar{a} = x_1\,\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\,\bar{k},\quad \bar{b} = x_2\,\bar{i} + y_2\,\bar{j} + z_2\,\bar{k},\quad \bar{c} = x_3\,\bar{j} + y_3\,\bar{j} + z_3\,\bar{k},$$

то двойное векторное произведение $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ будет равно:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= [y_1\,(x_2y_3 - x_3y_2) - z_1(x_3z_2 - x_2z_3)]\,\bar{i} +$$
$$+ [z_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(x_2y_3 - x_3y_2)]\,\bar{j} +$$
$$+ [x_1(x_3z_2 - x_2z_3) - y_1(y_2z_3 - y_3z_2)]\,\bar{k}. \tag{31}$$

Примеры решения задач.
Линейные операции над векторами

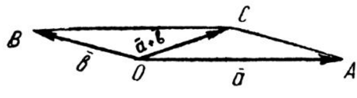
№ 14. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить каждый из следующих векторов:

$$1)\ \bar{a} + \bar{b};\quad 2)\ \bar{a} - \bar{b}.$$

Решение. Пусть даны такие два вектора:
1) $\overline{a}+\overline{b}$.

I способ. Помещаем начало векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в точку

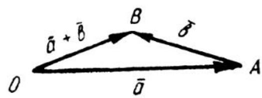
Черт. 138



Черт. 139

O и строим параллелограмм $OBCA$. Диагональ OC изображает сумму $\overline{a}+\overline{b}$.

II способ. Помещаем начало вектора $\overline{a}$ в точку O, начало вектора $\overline{b}$ совмещаем с концом вектора $\overline{a}$. Замы-

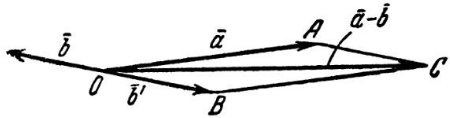


Черт. 140

кающий вектор есть $\overline{a}+\overline{b}$. Его начало — в точке O, а конец совпадает с концом вектора $\overline{b}$.

2) $\overline{a}-\overline{b}$.

I способ. Начало вектора $\overline{a}$ помещаем в точку O и строим вектор $\overline{b}'$, по длине равный вектору $\overline{b}$, но проти-

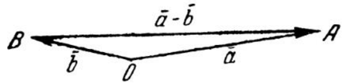


Черт. 141

воположного направления. Теперь находим сумму векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}'$ по правилу параллелограмма.

Искомый вектор $\overline{OC}=\overline{a}-\overline{b}$.

II способ. Начало векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ помещаем в одну точку O. Концы векторов соединяем. Замыкающий вектор есть $\overline{a}-\overline{b}$; его начало — в конце вектора $\overline{b}$, конец — в конце вектора $\overline{a}$.

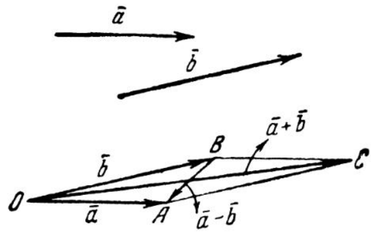


Черт. 142

№ 15. Даны: $|\overline{a}|=13$, $|\overline{b}|=19$, $|\overline{a}+\overline{b}|=24$.

Вычислить $|\overline{a}-\overline{b}|$.

Решение. Предположим, что нам даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Найдем векторы $\overline{a}+\overline{b}$ и $\overline{a}-\overline{b}$. Вектор $\overline{a}+\overline{b}$ есть одна из диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, вектор $\overline{a}-\overline{b}$ — вторая его диагональ (черт. 143).



Черт. 143

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

$$|\overline{a}+\overline{b}|^2+|\overline{a}-\overline{b}|^2=2|\overline{a}|^2+2|\overline{b}|^2,$$

откуда

$$|\overline{a}-\overline{b}|^2=2|\overline{a}|^2+2|\overline{b}|^2-|\overline{a}+\overline{b}|^2=$$
$$=2\cdot 13^2+2\cdot 19^2-24^2=2\cdot 169+2\cdot 361-576=$$
$$=338+722-576=1050-576=484;$$
$$|\overline{a}-\overline{b}|^2=484,\quad |\overline{a}-\overline{b}|=22.$$

Ответ: $|\overline{a}-\overline{b}|=22$.

№ 16. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB}=\overline{m}$ и вектор $\overline{AC}=\overline{n}$. Построить каждый из следующих векторов:

1) $\frac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$; 2) $\frac{\overline{m}-\overline{n}}{2}$; 3) $\frac{\overline{n}-\overline{m}}{2}$; 4) $-\frac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$.

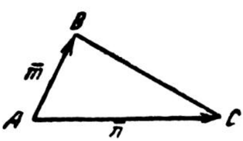
Решение. Пусть дан следующий треугольник (черт. 144). При нахождении суммы векторов будем пользоваться правилом параллелограмма.

1) $\frac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$.

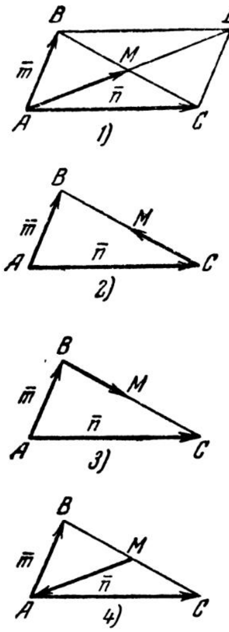
Длина искомого вектора будет равна половине диагонали параллелограмма, построенного на векторах m и n, или медиане треугольника ABC, проведенной из вершины A.

2) $\frac{\overline{m}-\overline{n}}{2}$.

Этот вектор будет рас-



Черт. 144



Черт. 145

положен на стороне BC заданного треугольника с началом в точке C и концом в точке M.

3) $\frac{\overline{n}-\overline{m}}{2}$. Этот вектор равен предыдущему (пункт 2) вектору по длине, но противоположно направлен. Его начало в точке B; а конец — в точке M.

4) $-\frac{\overline{m}+\overline{n}}{2}$. **Этот вектор будет равен по длине**

вектору, полученному в пункте 1, но противоположно направлен. Его начало в точке M, а конец — в точке A.

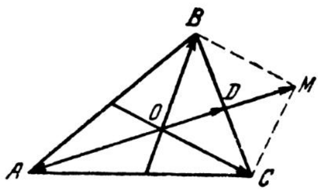
№ 17. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overline{AO}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$.

Доказательство:

$$\overline{OC}+\overline{OB}=\overline{OM}\ (1);\quad \overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{OM};\quad \overline{OM}=2\overline{OD}.$$

Так как

$$|\overline{OD}|=\frac{1}{3}|\overline{AD}|,\text{ то } \overline{OA}=-2\overline{OD}.$$



Черт. 146

Следовательно,

$$\overline{OA}=-\overline{OM},$$

откуда

$$\overline{OA}+\overline{OM}=0.$$

Подставив в последнее равенство значение $\overline{OM}$ из (1), получим: $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$, что и требовалось доказать (черт. 146).

№ 18. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы, совпадающие с его сторонами:

$$\overline{AB}=\overline{m},\quad \overline{BC}=\overline{n},\quad \overline{CD}=\overline{p},\quad \overline{DE}=\overline{q}\ \text{ и }\ \overline{EA}=\overline{r}.$$

Построить вектор:

$$2\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}+\overline{q}-\frac{1}{2}\overline{r}.$$

Построение. Пусть задан следующий правильный пятиугольник.

Так как сумма векторов удовлетворяет закону переместительности и закону сочетательности, то искомую сумму можно записать так:

$$2\overline{m}+\overline{n}-\overline{p}+\overline{q}-\frac{1}{2}\overline{r}=(2\overline{m}+\overline{n}+\overline{q})-(\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{r}).$$

Находим сумму $2\overline{m}+\overline{n}+\overline{q}$ по правилу многоугольника (черт. 148, а).

$$\overline{AL}=2\overline{m}+\overline{n}+\overline{q}.$$

Находим сумму $\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{r}$, пользуясь тем же правилом (черт. 148, *б*).

$$\overline{MP}=\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{r}.$$

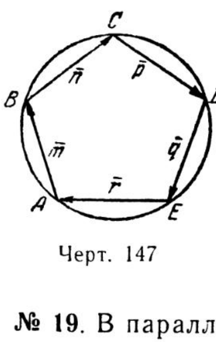
Теперь строим разность векторов $\overline{OS}=\overline{AL}$ и $\overline{OT}=$ $=\overline{MP}$.

$$\overline{OS}-\overline{OT}=\overline{AL}-\overline{MP}=(2\overline{m}+\overline{n}+\overline{q})-$$

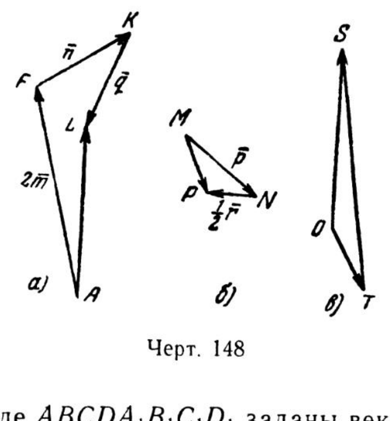
$$-\left(\overline{p}+\frac{1}{2}\overline{r}\right)=\overline{TS}.$$

(черт. 148, *в*)

Вектор $\overline{TS}$ — искомый вектор.



Черт. 147



Черт. 148

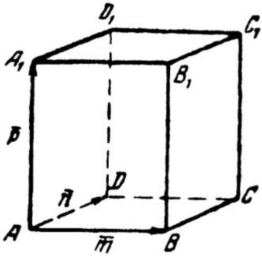
№ 19. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами:

$$\overline{AB}=\overline{m},\quad \overline{AD}=\overline{n}\quad \text{и}\quad \overline{AA_1}=\overline{p}.$$

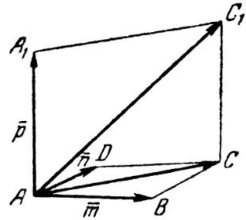
Построить каждый из следующих векторов:

1) $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$; 2) $\overline{m}-\overline{n}+\frac{1}{3}\overline{p}$; 3) $\frac{1}{2}\overline{m}+\frac{3}{2}\overline{n}-\overline{p}$.

Построение. Пусть задан следующий параллелепипед (черт. 149). Заданные векторы $\overline{m}, \overline{n}$ и $\overline{p}$ не лежат в одной плоскости. В этом случае при нахождении сум-



Черт. 149



Черт. 150

мы векторов удобнее будет пользоваться правилом параллелограмма.

1) $\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}$:

а) находим

$$\overline{m}+\overline{n}=\overline{AC};$$

б) находим

$$\overline{m}+\overline{n}+\overline{p}=\overline{AC}+\overline{AA_1}=\overline{AC_1}.$$

Это одна из диагоналей параллелепипеда (черт. 150).

$$2) \quad \overline{m}-\overline{n}+\frac{1}{3}\overline{p};$$

а) строим

$$\overline{AK}=-\overline{n}$$

и находим

$$\overline{m}-\overline{n}=\overline{AL};$$

б) строим

$$\frac{1}{3}\overline{p}=\overline{AM}$$

и находим

$$\overline{m} - \overline{n} + \frac{1}{3}\overline{p} = \overline{AN}$$

(черт. 151). 3) $\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{3}{2}\overline{n} - \overline{p}$;

а) строим

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{m}$$

и

$$\overline{AF} = \frac{3}{2}\overline{n};$$

и находим

$$\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{3}{2}\overline{n} = \overline{AG};$$

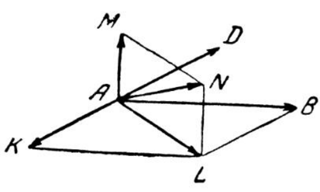
б) строим

$$\overline{AK} = -\overline{p}$$

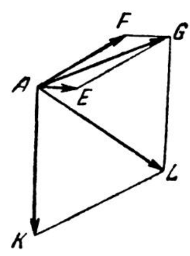
и находим

$$\frac{1}{2}\overline{m} + \frac{3}{2}\overline{n} - \overline{p} = \overline{AL}$$

(черт. 152).



Черт. 151



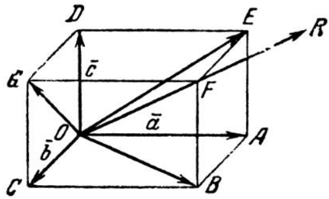
Черт. 152

№ 20. *Решить самостоятельно.* К вершине O прямоугольного параллелепипеда $OABCDEFG$ приложены три силы, изображаемые векторами OB, OE и OG. Найти величину и направление равнодействующей $\overline{R}$.

Указания. Равнодействующая сила $\overline{R}$ равна сумме трех составляющих сил $\overline{OB}$, $\overline{OE}$ и $\overline{OG}$, т.е.

$$\overline{R} = \overline{OB} + \overline{OE} + \overline{OG}. \qquad \text{(черт. 153).}$$

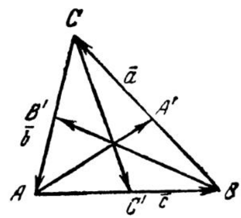
Ответ: Искомая равнодействующая изображается удвоенной диагональю от параллелепипеда.



Черт. 153

№ 21. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника ABC.

Решение. Обозначим середины сторон BC, CA и AB соответственно через A', B', C' (черт. 154). Выразим векторы, представляющие медианы треугольника ABC, через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (через стороны данного треугольника):



Черт. 154

$$\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{BA'} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a};$$

$$\overline{BB'} = \overline{BC} + \overline{CB'} = \overline{BC'} + \frac{1}{2}\overline{CA} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b};$$

$$\overline{CC'} = \overline{CA} + \overline{AC'} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}.$$

Составляем сумму медиан треугольника ABC:

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a} + \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \bar{b} + $$

$$+ \frac{1}{2}\bar{c} = \frac{3}{2}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}).$$

Но так как векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют данный треугольник ABC, то их сумма равна 0, следовательно, и $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = 0$. А это значит, что из векторов $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$ можно построить треугольник.

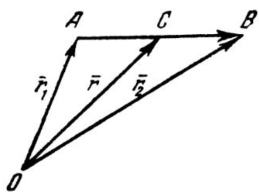
№ 22. *Решить самостоятельно.* Найти радиус-вектор $\overline{r}$ середины C отрезка AB, концы которого заданы соответственно радиусам-векторам $\overline{r_1}$ и $\overline{r_2}$.

Указания (черт. 155).

$$\overline{r} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + $$

$$+ \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}).$$

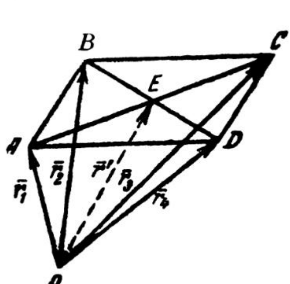
Ответ: $\overline{r} = \dfrac{\overline{r_1} + \overline{r_2}}{2}$.



Черт. 155

№ 23. Доказать, что если диагонали четырехугольника делят друг друга пополам, то четырехугольник есть параллелограмм.

Решение. Если радиусы-векторы четырех последовательных вершин четырехугольника $ABCD$ (черт. 156) обозначим через $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{r_3}$, и $\overline{r_4}$, то середина диагонали AC будет иметь радиус-вектор $\overline{r'} = \frac{1}{2}(\overline{r_1} + \overline{r_3})$, а середина диагонали BD будет иметь радиус-вектор



Черт. 156

$$\overline{r''} = \frac{1}{2}(\overline{r_2} + \overline{r_4}).$$

Но так как диагонали по условию делят друг друга пополам, то эти точки (середина AC и середина BD) совпадают, а поэтому:

$$\overline{r'} = \overline{r''},$$

т. е.

$$\frac{1}{2}(\overline{r_1} + \overline{r_3}) = \frac{1}{2}(\overline{r_2} + \overline{r_4}),$$

или

$$\overline{r}_2 - \overline{r}_1 = \overline{r}_3 - \overline{r}_4.$$

Но $\overline{r}_2 - \overline{r}_1$ есть вектор $\overline{AB}$, $\overline{r}_3 - \overline{r}_4$ есть вектор $\overline{DC}$, следовательно $\overline{AB} = \overline{DC}$, а поэтому четырехугольник $ABCD$ есть параллелограмм, что и требовалось доказать.

Действия над векторами, заданными своими проекциями

№ 24. а) Определить точку B, которая является концом вектора $a\{4; -3; 1\}$, если его начало совпадает с точкой A $(3; 1; -2)$.

б) Определить начало M вектора $\overline{b}\{5; 8; 7\}$, если его конец совпадает с точкой N $(-1; 3; 3)$.

Решение. а) Проекции вектора $\overline{a}$ равны

$$x = x_B - x_A, \quad y = y_B - y_A, \quad z = z_B - z_A,$$

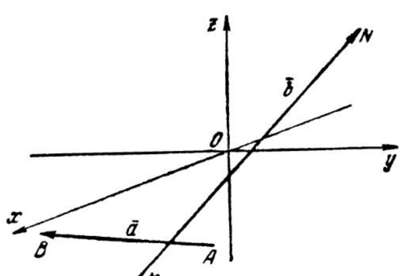
откуда

$$x_B = x_A + x, \quad y_B = y_A + y, \quad z_B = z_A + z,$$

или

$$x_B = 3 + 4 = 7, \quad y_B = 1 - 3 = -2, \quad z_B = -2 + 1 = -1; \quad B\ (7; -2; -1).$$

(черт. 157)



Черт. 157

б) $x = x_N - x_M, \quad y = y_N - y_M, \quad z = z_N - z_M,$

или

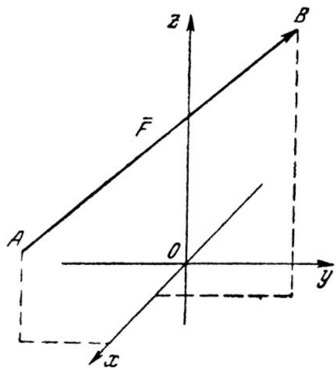
$$x_M = x_N - x, \quad y_M = y_N - y, \quad z_M = z_N - z,$$

откуда

$$x_M = -1-5=-6, \quad y_M = 3-8 = -5,$$
$$z_M = 3-7 = -4; \quad M(-6;\ 5;\ -4).$$

Ответ: B $(7;\ -2;\ -1)$; M $(-6;\ -5;\ -4)$.

№ 25. Сила F приложена в точке A $(5;\ -2;\ 2)$ и имеет проекции на оси координат $X=-3$ *кГ*, $Y=5$ *кГ*, $Z=4$ *кГ*. Определить компоненты вектора F на осях и координаты конца вектора $\overline{AB}=\overline{F}$ (черт. 158).



Черт 158

Решение. Компоненты вектора $\overline{F}$ равны

$$X\overline{i} = -3\overline{i}, \quad Y\overline{j} = 5\overline{j}, \quad Z\overline{k} = 4\overline{k}.$$

Далее по формулам

$$X = x_B - x_A, \quad Y = y_B - y_A, \quad Z = z_B - z_A$$

имеем:

$$-3 = x_B - 5, \quad x_B = 2; \quad 5 = y_B + 2, \quad y_B = 3;$$
$$4 = z_B - 2, \quad z_B = 6.$$

Ответ: B $(2;\ 3;\ 6)$.

№ 26. Вектор $\overline{a}$ составляет с координатными осями Oy и Oz углы $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$. Вычислить его координаты при условии, что $|\overline{a}| = 6$.

Решение. Сумма квадратов направляющих косинусов вектора равна 1, т. е.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos^2\alpha + \cos^2 120^\circ + \cos^2 45^\circ = 1.$$

Откуда

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{4}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{2}.$$

Теперь можем найти координаты вектора, использовав формулы:

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha, \quad y = |\overline{a}|\cos\beta, \quad z = |\overline{a}|\cos\gamma.$$

$$x_1 = 6\cdot\frac{1}{2} = 3; \quad x_2 = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3;$$

$$y = 6\cdot\cos 120^\circ = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3;$$

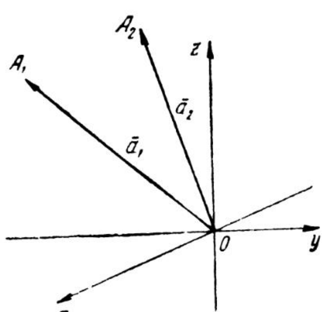
$$z = 6\cdot\cos 45^\circ = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, имеются два вектора, удовлетворяющие условию задачи:

$$\overline{a}_1\{3;\ -3;\ 3\sqrt{2}\}, \quad \overline{a}_2\{-3;\ -3;\ 3\sqrt{2}\}$$

(черт. 159)

Ответ: $\overline{a}_1\{3;\ -3;\ 3\sqrt{2}\}$, $\overline{a}_2\{-3;\ -3;\ 3\sqrt{2}\}$.



Черт. 159

№ 27. Проверить коллинеарность векторов $\overline{a}\{2,\ -1,\ 3\}$ и $\overline{b}\{-6;\ 3;\ -9\}$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну сторону или в противоположные стороны.

Решение. Условие коллинеарности двух векторов

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Проверим его:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}; \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

Векторы коллинеарны.

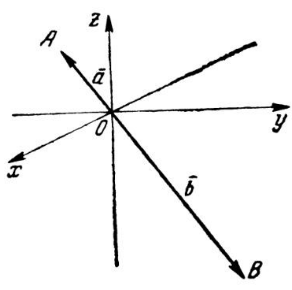
Длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдем по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}; \quad |\bar{b}| = \sqrt{36 + 9 + 81} = 3\sqrt{14};$$

$$|\bar{b}| : |\bar{a}| = 3\sqrt{14} : \sqrt{14} = 3.$$

Вектор $\bar{b}$ длиннее вектора $\bar{a}$ в три раза. Направлены векторы в противоположные стороны, так как одноименные проекции имеют противоположные знаки (черт. 160).



Черт. 160

№ 28. Проверить, являются ли точки $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(1; -3; -1)$ и $D(-5; 3; 3)$ вершинами трапеции.

Решение. Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$

по формуле:

$$\overline{a} = (x_2 - x_1)\,\overline{i} + (y_2 - y_1)\,\overline{j} + (z_2 - z_1)\,\overline{k}.$$

$$\overline{AB} = (2+1)\,\overline{i} + (-1-2)\,\overline{j} + (1-3)\,\overline{k} = 3\overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k};$$

$$\overline{AD} = (-5+1)\,\overline{i} + (3-2)\,\overline{j} + (3-3)\,\overline{k} = -4\overline{i} + \overline{j};$$

$$\overline{BC} = (1-2)\,\overline{i} + (-3+1)\,\overline{j} + (-1-1)\overline{k} = -\overline{i} - 2\overline{j} - 2\overline{k};$$

$$\overline{CD} = (-5-1)\,\overline{i} + (3+3)\overline{j} + (3+1)\,\overline{k} = 6\overline{i} + 6\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, так как выполняется условие коллинеарности векторов

$$\frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = \frac{-2}{4},$$

а векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны, так как

$$\frac{-4}{-1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{0}{-2}.$$

Следовательно, A, B, C, D — вершины трапеции, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ являются ее основаниями.

№ 29. Дан вектор $\overline{c} = 4\overline{i} + 7\overline{j} - 4\overline{k}$. Найдем вектор $\overline{d}$, параллельный вектору $\overline{c}$ и противоположного с ним направления, если $|\overline{d}| = 27$.

Решение. Найдем длину вектора, $\overline{c}$:

$$|\overline{c}| = \sqrt{16 + 49 + 16} = \sqrt{81} = 9.$$

Тогда отношение длин векторов $\overline{c}$ и $\overline{d}$ будет равно

$$\frac{|\overline{d}|}{|\overline{c}|} = \frac{27}{9} = 3.$$

Так как векторы $\overline{c}$ и $\overline{d}$ противоположно направлены, то отношение их одноименных проекций будет выражаться отрицательным числом, равным по абсолютной величине отношению длин векторов, т. е.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = -3,$$

откуда

$$x_2 = -3x_1 = -3\cdot 4 = -12; \quad y_2 = -3y_1 = -3\cdot 7 = -21$$

$$z_2 = -3z_1 = -3\cdot(-4) = 12.$$

Ответ: $\bar{d} = -12\bar{i} - 21\bar{j} + 12\bar{k}$.

№ 30. *Решить самостоятельно.* Векторы $\bar{a}$ $\{2; -1; -2\}$ и $\bar{b}$ $\{-3; -2; 6\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\bar{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, при условии, что

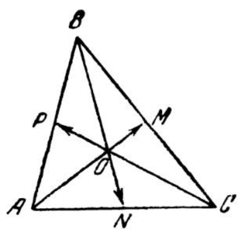
$$|\bar{c}| = 5\sqrt{42}.$$

Указания. Данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приложить к началу координат и найти координаты точки пересечения биссектрисы угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ со стороной треугольника, соединяющей концы данных векторов.

Ответ: $\bar{c} = 25\bar{i} - 5\bar{j} + 25\bar{k}$.

№ 31. Векторы $\overline{AB}$ $\{8; -3; 0\}$ и $\overline{AC}$ $\{-2; 5; 1\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Найти векторы, приложенные к вершинам треугольника и совпадающие с соответствующими медианами $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$.

Решение. Если вершину A принять за начало координат, то координаты вершин B и C будут следующими: B $(8; -3; 0)$, C $(-2; 5; 1)$ (черт. 161).



Черт. 161

Координаты точек M, N, P найдем по формулам деления отрезка пополам:

$$x_p = \frac{8}{2} = 4; \qquad y_p = \frac{-3}{2};$$

$$x_N = \frac{-2}{2} = -1; \qquad y_N = \frac{5}{2};$$

$$x_M = \frac{8-2}{2} = 3; \qquad y_M = \frac{-3+5}{2} = 1;$$

$$z_p = 0; \qquad P\left(4;\ -\frac{3}{2};\ 0\right);$$

$$z_N = \frac{1}{2}; \qquad N\left(-1;\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{2}\right);$$

$$z_M = \frac{1}{2}; \qquad M\left(3;\ 1;\ \frac{1}{2}\right).$$

Координаты векторов $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$ найдем по формуле

$$\overline{a} = (x_2 - x_1)\,\overline{i} + (y_2 - y_1)\,\overline{j} + (z_2 - z_1)\,\overline{k}.$$

$$\overline{AM} = 3\overline{i} + \overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}.$$

$$\overline{BN} = (-1-8)\,\overline{i} + \left(\frac{5}{2} + 3\right)\overline{j} + \left(\frac{1}{2} - 0\right)\overline{k} =$$

$$= -9\overline{i} + \frac{11}{2}\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k};$$

$$\overline{CP} = (4+2)\,\overline{i} + \left(-\frac{3}{2} - 5\right)\overline{j} + (0-1)\,\overline{k} =$$

$$= 6\overline{i} - \frac{13}{2}\overline{j} - \overline{k}.$$

Ответ:

$$\overline{AM} = 3\overline{i} + \overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}; \qquad \overline{BN} = -9\overline{i} + \frac{11}{2}\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k};$$

$$\overline{CP} = 6\overline{i} - \frac{13}{2}\overline{j} - \overline{k}.$$

Скалярное произведение векторов

№ 32. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\overline{a}| = 11$ и $|в| = 2$, вычислить:

$$1)\quad (2\overline{a} + 3\overline{b})(2\overline{a} - \overline{b}).$$

Решить самостоятельно:

$$2)\quad (2\overline{a} - 5\overline{b})^2.$$

Решение. Так как скалярное произведение двух векторов равно произведению их длин, умноженному на косинус угла между ними, и скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, будем иметь:

$$1)\ (2\overline{a} + 3\overline{b})(2\overline{a} - \overline{b}) = 4|\overline{a}|^2 - 2|\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{2}{3}\pi + 6|\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{2}{3}\pi - 3|\overline{b}|^2 = 4\cdot 121 - 2\cdot 11\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 6\cdot 11\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\cdot 4 = 484 + 22 - 66 - 12 =$$

$$= 506 - 78 = 428;$$

Указания:

$$2)\ (2\overline{a} - 5\overline{b})^2 = 4|\overline{a}|^2 - 20|\overline{a}||\overline{b}|\cos\frac{2}{3}\pi + 25|\overline{b}|^2.$$

Ответ: 1) 428; 2) 804.

№ 33. Определить, при каком значении α векторы $3\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - 2\overline{b}$ будут взаимно перпендикулярными, если $|\overline{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 4$ и $\widehat{\overline{a}\,\overline{b}} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Если два вектора взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0.

Возьмем скалярное произведение векторов $3\overline{a} + \alpha\overline{b}$ и $\overline{a} - 2\overline{b}$ и, приравняв его 0, найдем α

$$(3\overline{a} + \alpha\overline{b})(\overline{a} - 2\overline{b}) = 0,$$

$$3|\bar a|^2-6|\bar a||\bar b|\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\alpha|\bar a||b|\cos\frac{\pi}{4}-2\alpha|\bar b|^2=0,$$

$$3\cdot 49\cdot 2-6\cdot 7\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\alpha\cdot 7\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\alpha\cdot 16=0,$$

$$294-168+28\alpha-32\alpha=0,\quad 4\alpha=126,$$

$$\alpha=\frac{126}{4}=\frac{63}{2}=31{,}5.$$

Ответ: $\alpha=31{,}5$.

№ 34. Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

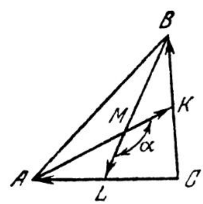
Решение. Пусть $\overline{CA}=\bar a$ и $\overline{CB}=\bar b$, согласно условию, $|\bar a|=|\bar b|$ (черт. 162). Вектор $\overline{AK}$ есть разность векторов $\overline{CK}$ и $\overline{CA}$, т. е.

$$\overline{AK}=\overline{CK}-\overline{CA}=\frac{1}{2}\bar b-\bar a$$

$$\left(\text{т. к. } \overline{CK}=\frac{1}{2}\overline{CB}\right).$$

Аналогично

$$\overline{BL}=\frac{1}{2}\overline{CA}-\overline{CB}=\frac{1}{2}\bar a-\bar b.$$



Черт. 162

Угол между векторами находится по формуле

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AK}\cdot\overline{BL}}{AK\cdot BL}.$$

$$\overline{AK}\cdot\overline{BL}=\left(\frac{1}{2}\bar b-\bar a\right)\left(\frac{1}{2}\bar a-\bar b\right)=$$

$$=\frac{1}{4}|\bar a||\bar b|\cdot\cos(\widehat{\bar a\,\bar b})-\frac{1}{2}|\bar b|^2-\frac{1}{2}|\bar a|^2+$$

$$+|\bar a||\bar b|\cos(\widehat{\bar a\,\bar b}),$$

но

$$\cos(\widehat{\bar a\,\bar b})=0,$$

так как $\bar{a} \perp \bar{b}$, следовательно,

$$\overline{AK} \cdot \overline{BL} = -\frac{1}{2}|\bar{b}|^2 - \frac{1}{2}|\bar{a}|^2 = -\frac{1}{2}|\bar{a}|^2 -$$

$$-\frac{1}{2}|\bar{a}|^2 = -|\bar{a}|^2.$$

Длины векторов $\overline{AK}$ и $\overline{BL}$ найдем по теореме Пифагора:

$$BL = AK = \sqrt{AC^2 + CK^2} = \sqrt{|\bar{a}|^2 + \frac{1}{4}|\bar{a}|^2} =$$

$$= \frac{1}{2}|\bar{a}|\sqrt{5}.$$

Таким образом, $\cos\alpha = \dfrac{-|\bar{a}|^2}{\frac{1}{4}|\bar{a}|^2 \cdot 5} = -\dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

№ 35. Зная одну из вершин треугольника $A(1; -6; -3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}\{0; 3; 5\}$ и $\overline{BC}\{4; 2; -1\}$, найти остальные вершины и сторону $\overline{CA}$.

Решение. Найдем координаты вершины B, исходя из формул, что проекции вектора равны:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

Откуда

$$x_2 = x + x_1, \quad y_2 = y + y_1, \quad z_2 = z + z_1.$$

Таким образом,

$$x_B = 0 + 1 = 1, \quad y_B = 3 - 6 = -3, \quad z_B = 5 - 3 = 2;$$

$$B(1; -3; 2).$$

Аналогично найдем координаты точки C:

$$x_C = 4 + 1 = 5; \quad y_C = 2 - 3 = -1; \quad z_C = -1 + 2 = 1;$$

$$C(5; -1; 1).$$

Теперь найдем вектор $\overline{CA}$:

$$\overline{CA} = (1-5)\,\overline{i} + (-6+1)\,\overline{j} + (-3-1)\,\overline{k} =$$

$$= -4\overline{i} - 5\overline{j} - 4\overline{k}; \quad \overline{CA}\{-4;\ -5;\ -4\}.$$

Ответ: $B\,(1;\ -3;\ 2)$, $C\,(5;\ -1;\ 1)$, $\overline{CA}\,\{-4;\ -5;\ -4\}$.

№ 36. В плоскости yOz найти вектор $\overline{M}$, перпендикулярный вектору $\overline{N}\{12;\ -3;\ 4\}$ и имеющий одинаковую с ним длину.

Решение. Так как вектор $\overline{M}$ лежит в плоскости yOz, то его координаты $\overline{M}\,\{O;\ y;\ z\}$.

Скалярное произведение векторов $\overline{M}$ и $\overline{N}$ в силу их перпендикулярности равно 0, т. е.

$$-3y + 4z = 0.$$

Длина вектора $\overline{M}$,

$$M = \sqrt{y^2 + z^2},$$

равна длине вектора $\overline{N}$,

$$N = \sqrt{144 + 9 + 16} = \sqrt{169} = 13,$$

т. е.

$$y^2 + z^2 = 169. \qquad (2)$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 4z = 0, \\ y^2 + z^2 = 169. \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$y = \frac{4}{3}z, \quad \frac{16}{9}z^2 + z^2 = 169, \quad 16z^2 + 9z^2 = 169\cdot 9,$$

$$25z^2 = 169\cdot 9, \quad z^2 = \frac{169\cdot 9}{25};$$

$$z_{1,2} = \pm\frac{13\cdot 3}{5} = \pm\frac{39}{5} = \pm 7{,}8;$$

$$y_{1,2} = \pm\frac{4}{3}\cdot\frac{39}{5} = \pm\frac{52}{5} = \pm 10{,}4.$$

Ответ: имеются два вектора, удовлетворяющие условию:

$$\overline{M}_1\{0;\ 10{,}4;\ 7{,}8\},\qquad \overline{M}_2\{0,\ -10{,}4;\ -7{,}8\}.$$

№ 37. Вычислить, какую работу производит сила $\overline{F}\{6;\ -2;\ 1\}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A\ (3;\ 4;\ -2)$ в положение $B\ (4;\ -2;\ -3)$.

Решение. Найдем проекции вектора $\overline{AB}$, по которому перемещается точка приложения силы $\overline{F}$, по формулам

$$x = x_2 - x_1,\quad y = y_2 - y_1,\quad z = z_2 - z_1,$$

т. е.

$$x = 4 - 3 = 1,\quad y = -2 - 4 = -6,\quad z = -3 + 2 = -1.$$

Следовательно, имеем

$$\overline{S} = \overline{AB}\{1;\ -6:\ -1\}.$$

Так как работа численно равна скалярному произведению производящей ее силы на пройденный путь, то найдем скалярное произведение векторов $\overline{F}$ и $\overline{S}$:

$$A = \overline{F}\cdot\overline{S} = (6\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k})(\overline{i} - 6\overline{j} - \overline{k}) =$$

$$= 6\cdot 1 - 2\cdot(-6) + 1\cdot(-1) = 6 + 12 - 1 = 17.$$

Ответ: $A = 17$ (единиц работы).

№ 38. Дан треугольник с вершинами $A\ (-2;\ 3;\ 1)$, $B\ (-2;\ -1;\ 4)$ и $C\ (-2;\ -4;\ 0)$. Определить его внутренний угол при вершине C.

Решение. Найдем векторы $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$ (черт. 163):

$$\overline{CA} = (-2 + 2)\,i + (3 + 4)j + (1 - 0)\,\overline{k} = 7\overline{j} + \overline{k},$$

$$\overline{CA}\,\{0;\ 7;\ 1\}$$

$$\overline{CB} = (-2 + 2)\,\overline{i} + (-1 + 4)\,\overline{j} + (4 - 0)\,\overline{k} =$$

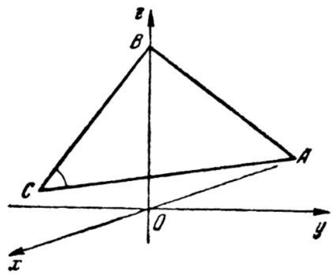
$$= 3\overline{j} + 4\,\overline{k},\quad \overline{CB}\,\{0;\ 3;\ 4\}.$$

Угол между ними найдем по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}};$$

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot7+1\cdot4}{\sqrt{49+1}\cdot\sqrt{9+16}}=\frac{25}{5\sqrt{2}\cdot5}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

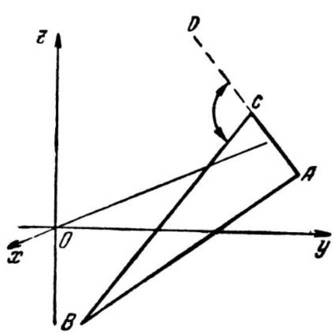
Ответ: угол $BCA=\frac{\pi}{4}$.



Черт. 163

№ 39. *Решить самостоятельно.* Дан треугольник с вершинами $A(-1;\ 5;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ -2)$ и $C(-3;\ 3;\ 2)$. Определить его внешний угол при вершине C.

Указания. Внешний угол при вершине C образуют векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ (черт. 164).



Черт. 164

Найдите векторы: $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ и $\cos\varphi$.

Ответ:

$\overline{AC}\{-2;\ -2;\ 1\}$; $\overline{CB}\{4;\ -2;\ -4\}$, $\cos\varphi = -\frac{4}{9}$.

№ 40. Даны три вектора

$\bar{a}\{1;\ -4;\ 8\}$, $\bar{b}\{4;\ 4;\ -2\}$, $\bar{c}\{2;\ 3;\ 6\}$.

Вычислить проекцию вектора $(\bar{b}+\bar{c})$ на вектор $\bar{a}$.

Решение. Найдем вектор

$$(\bar{b}+\bar{c}) = (4+2)\bar{i} + (4+3)\,\bar{j} + (-2+6)\bar{k} =$$
$$= 6\bar{i} + 7\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Длина его: $|\bar{b}+\bar{c}| = \sqrt{36+49+16} = \sqrt{101}$.

Найдем угол между векторами $\bar{a}$ и $(\bar{b}+\bar{c})$:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 6 + (-4)\cdot 7 + 8\cdot 4}{\sqrt{1+16+64}\cdot\sqrt{101}} = \frac{6-28+32}{9\sqrt{101}} = \frac{10}{9\sqrt{101}}.$$

$$\text{Пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = |\bar{b}+\bar{c}|\cdot\cos\varphi = \sqrt{101}\cdot\frac{10}{9\sqrt{101}} =$$
$$= \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}.$$

Для проверки решения задачи рекомендуется воспользоваться формулой:

$$\text{Пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = \frac{(\bar{b}+\bar{c})\,\bar{a}}{|\bar{a}|}.$$

Ответ: $\text{Пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) = 1\frac{1}{9}$.

Векторное произведение

№ 41. Даны модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $|\bar{a}|=8$, $|\bar{b}|=15$, и их скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}=96$.

Вычислить модуль векторного произведения $|[\bar{a}\bar{b}]|$.

Решение. Так как модуль векторного произведения двух векторов равен произведению модулей данных векторов, умноженному на синус угла между векторами, то необходимо знать синус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Воспользуемся скалярным произведением данных векторов:

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\cos(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}),$$

откуда

$$\cos(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} = \frac{96}{8 \cdot 15} = \frac{4}{5}.$$

Тогда

$$\sin(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$|[\bar{a}\,\bar{b}]| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\sin(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = 8 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 72.$$

Ответ: $|[\bar{a}\bar{b}]| = 72$.

№ 42. Какому условию должны удовлетворять векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы векторы $3\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-3\bar{b}$ были коллинеарны?

Решение. Чтобы ненулевые векторы $3\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-3\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо, чтобы модуль их векторного произведения был равен нулю, т. е.

$$|[(3\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-3\bar{b})]| = 0,$$

или

$$3|\bar{a}|^2 \cdot \sin 0 - 9|\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\sin(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) + |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{b} \cdot \bar{a}}) -$$

$$-9|\bar{b}|^2 \sin 0 = 0,$$

$$-9|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a}\bar{b}}) - |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = 0,$$

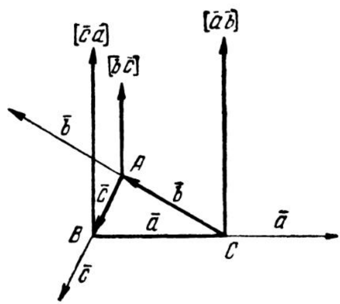
$$-10|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = 0;$$

но $|\bar{a}| \neq 0$ и $|\bar{b}| \neq 0$, следовательно, $\sin(\widehat{\bar{a}\bar{b}}) = 0$, откуда $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 0$ или $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = \pi$, т. е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ должны быть также коллинеарны.

Ответ: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ должны быть коллинеарны.

№ 43. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. Доказать, что $[\bar{a}\,\bar{b}]=[\bar{c}\,\bar{a}]=[\bar{b}\,\bar{c}]$.

Доказательство. Так как $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют треугольник. Согласно определению векторного произведения векторы $[\bar{a}\bar{b}]$, $[\bar{b}\bar{c}]$ и $[\bar{c}\bar{a}]$ перпендикулярны к плоскости треугольника и, как видно из чертежа 165, все они направлены в одну сторону.



Черт. 165

Найдем модули каждого из указанных выше векторов.

$$|[\bar{a}\,\bar{b}\,]| = |\bar{a}|\,|\bar{b}\,|\,\sin\,(\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = 2S_{ABC},$$

$$|[\bar{b}\,\bar{c}\,]| = |\bar{b}|\,|\bar{c}|\,\sin\,(\widehat{\bar{b}\,\bar{c}}) = 2S_{ABC},$$

$$|[\bar{c}\,\bar{a}]| = |\bar{c}\,|\,|\bar{a}|\,\sin\,(\widehat{\bar{c}\,\bar{a}}) = 2S_{ABC},$$

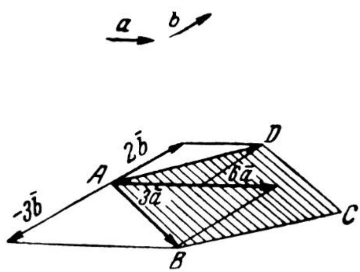
т. е. $|[\bar{a}\,\bar{b}\,]| = |[\bar{b}\,\bar{c}]| = |[\bar{c}\,\bar{a}]|$, так как каждое из выражений определяет двойную площадь треугольника ABC.

Таким образом, все три вектора $[\bar{a}\,\bar{b}]$, $[\bar{b}\,\bar{c}]$ и $[\bar{c}\,\bar{a}]$ одинаково направлены и имеют одинаковую длину, т. е. $[\bar{a}\,\bar{b}] = [\bar{b}\,\bar{c}] = [\bar{c}\,\bar{a}]$, что и требовалось доказать.

№ 44. Решить самостоятельно. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\overline{AB} = 6\bar{a} - 3\bar{b} \text{ и } \overline{AD} = 3\bar{a} + 2\bar{b},$$

$$\text{если } |\bar{a}| = 3, \quad |\bar{b}| = 5 \text{ и } (\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}) = \frac{\pi}{6} \text{ (черт. 166).}$$



Черт. 166

Указания. Площадь параллелограмма численно равна длине вектора, полученного в результате векторного умножения двух данных векторов, т. е.

$$S_{ABCD} = |\overline{AB} \times \overline{AD}| = |(6\bar{a} - 3\bar{b})(3\bar{a} + 2\bar{b})|.$$

Ответ: S параллелограмма $=$ 157,5 кв. ед.

№ 45. Зная стороны треугольника $\overline{AB} = \{-3;\ -2;\ +6\}$ и $\overline{BC} = \{-2;\ 4;\ 4\}$, вычислить длину высоты AD.

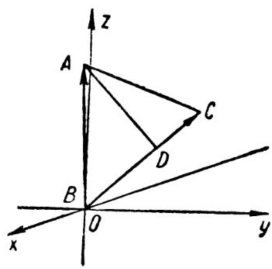
Решение. Построим заданный треугольник. Для этого поместим начало координат в точку B. Тогда точка A имеет координаты $(-3;\ -2;\ 6)$ и точка C — координаты $(-2;\ 4;\ 4)$.

Треугольник построим на векторах $\overline{BA} = \{-3;\ -2;\ 6\}$ и $\overline{BC} = \{-2;\ 4;\ 4\}$ (черт. 167). Вычислим площадь этого треугольника. Поскольку площадь треугольника составляет половину площади параллелограмма, построенного на тех же векторах, то найдем половину модуля векторного произведения заданных векторов BA и BC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(24+8)^2 + (-12+12)^2 + (4+12)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{32^2 + 16^2} = \frac{1}{2}\cdot 16\sqrt{4+1} = 8\sqrt{5};$$



Черт. 167

$$S_{ABC} = 8\sqrt{5} \text{ кв. ед.}$$

Далее, найдем длину вектора $\overline{BC}$ (основание треугольника ABC):

$$BC = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (ед. длины)}.$$

Зная площадь и основание треугольника, можем теперь найти высоту треугольника:

$$AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2\cdot 8\sqrt{5}}{6} = \frac{8}{3}\sqrt{5} \text{ (ед. длины)}.$$

Для проверки эту задачу рекомендуем решить другим способом.

Указания. Найти $\text{Пр}_{\overline{BO}}\overline{BA}$ и затем по теореме Пифагора вычислить высоту AD.

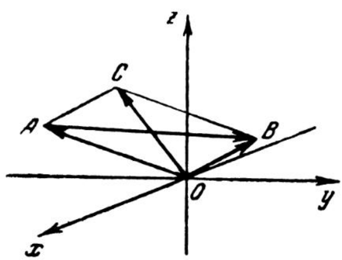
Ответ: $AD = \frac{8}{3}\sqrt{5}$ ед. длины.

№ 46. *Решить самостоятельно.* Вычислить длины диагоналей и площадь параллелограмма, построенного на векторах: $\bar{a}\{6; 0; 2\}$ и $\bar{b}\{1{,}5; 2; 1\}$.

Указания. Одна из диагоналей параллелограмма будет равна сумме векторов сторон, а другая — разности векторов сторон параллелограмма (черт. 168).

$$\overline{OC} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}. \quad S = |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Ответ: длины диагоналей $\frac{1}{2}\sqrt{277}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{101}$, площадь параллелограмма 13 кв. ед.



Черт. 168

№ 47. *Решить самостоятельно.* Зная, что векторы $\alpha\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + \beta\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны, вычислить коэффициенты α и β.

Указания. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю, $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, или

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha & 7 & 3 \\ 1 & \beta & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = \frac{14}{3}$.

Смешанное и двойное векторное произведение.

№ 48. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\overline{M}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}, \quad \overline{N}=\overline{a}-\overline{b}+\overline{c} \text{ и } \overline{P}=\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}.$$

Решение. Так как векторное скалярное произведение трех векторов численно равно объему параллелепипеда, построенного на данных векторах, как на ребрах, то для решения данной задачи необходимо найти векторно-скалярное произведение векторов $\overline{M}$, $\overline{N}$ и $\overline{P}$. При этом будем пользоваться следующим правилом.

Круговая перестановка трех сомножителей векторно-скалярного произведения не меняет его величины. Перестановка двух соседних множителей меняет знак произведения.

Примем еще во внимание, что векторно-скалярное произведение равно 0, если векторы компланарны.

$$v=(\overline{M}\,\overline{N}\,\overline{P})=(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})=$$
$$=[(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})](\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})=(\overline{a}\times\overline{a}+$$
$$+\overline{b}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{a}-\overline{a}\times\overline{b}-\overline{b}\times\overline{b}-\overline{c}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}+$$
$$+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{c})(\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})=(0-\overline{a}\times\overline{b}-$$
$$-\overline{a}\times\overline{c}-\overline{a}\times\overline{b}-0+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}+$$
$$+0)(\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})=(-2\overline{a}\times\overline{b}+2\overline{b}\times\overline{c})(\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})=$$
$$=2(\overline{b}\times\overline{c}-\overline{a}\times\overline{b})(\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})=2(\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a}-\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a}-$$
$$-\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}+\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{b}-\overline{в}\,\overline{c}\,\overline{c}+\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})=2(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}-0-0+$$
$$+0-0+\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})=4(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}).$$

Ответ: $v=4(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})$.

№ 49. Определить, какой является тройка $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ (правой или левой), если:

1) $\overline{a}=\overline{i}+\overline{k},\ \overline{b}=\overline{j},\ \overline{c}=\overline{k};$

2) $\overline{a}=\overline{i}-\overline{j},\ \overline{b}=\overline{j},\ \overline{c}=\overline{i}+\overline{j};$

3) $\overline{a}=\overline{j}+\overline{k},\ \overline{b}=\overline{j}-\overline{k},\ \overline{c}=\overline{i}.$

Решение. Найдем векторно-скалярное произведение трех заданных векторов. Если это произведение будет равно $\alpha\bar{i}\bar{j}\bar{k}\neq 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не компланарны. Если при этом α больше нуля, то тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая; если $\alpha<0$, то тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — левая.

$$1)\quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{i}+\bar{k})\bar{j}\bar{k}=\bar{i}\bar{j}\bar{k}+\bar{k}\bar{j}\bar{k}=\bar{i}\bar{j}\bar{k},$$

тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — правая;

$$2)\quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{i}-\bar{j})\bar{j}(\bar{i}+\bar{j})=(\bar{i}\bar{j}-\bar{j}^2)(\bar{i}+\bar{j})=$$

$$=\bar{i}\bar{j}(\bar{i}+\bar{j})=\bar{i}\bar{j}\bar{i}+\bar{i}\bar{j}^2=0,$$

векторы компланарны;

$$3)\quad \bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{j}+\bar{k})(\bar{j}-\bar{k})\bar{i}=(\bar{j}^2+\bar{k}\bar{j}-\bar{j}\bar{k}-$$

$$-\bar{k}^2)\bar{i}=(0-\bar{j}\bar{k}-\bar{j}\bar{k}-0)\bar{i}=-2\bar{i}\bar{j}\bar{k},$$

тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — левая.

№ 50. Доказать, что четыре точки $A\,(3;\,5;\,1)$, $B\,(2;\,4;\,7)$, $C\,(1;\,5;\,3)$ и $D\,(4;\,4;\,5)$ лежат в одной плоскости.

Доказательство. Мы докажем, что четыре точки лежат в одной плоскости, если докажем, что три вектора, имеющие начало в одной из данных точек (например, в точке A), а концы в остальных трех данных точках компланарны, т. е. что их векторно-скалярное произведение равно 0.

Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

$$\overline{AB}=(2-3)\,\bar{i}+(4-5)\,\bar{j}+(7-1)\,\bar{k}=-\bar{i}-$$

$$-\bar{j}+6\bar{k},\quad \overline{AB}\{-1;\,-1;\,6\};$$

$$\overline{AC}=(1-3)\,\bar{i}+(5-5)\,\bar{j}+(3-1)\,\bar{k}=-2\bar{i}+2\bar{k},$$

$$\overline{AC}\{-2;\;0;\;2\};$$

$$\overline{AD}=(4-3)\,\bar{i}+(4-5)\,\bar{j}+(5-1)\,\bar{k}=\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k},$$

$$\overline{AD}\{1;\;-1;\;4\}.$$

Найдем векторно-скалярное произведение

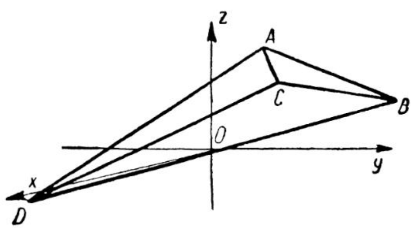
$$(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}):$$

$$(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 12 - 2 - 0 -$$

$$-2-8=0.$$

Следовательно, векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$ компланарны, а поэтому точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

№ 51. Дана пирамида с вершинами в точках A (1; 2; 3), B $(-2; 4; 1)$, C (7; 6; 3) и D $(4; -3; -1)$ (черт. 169). Найти: а) длину ребер $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$;



Черт. 169

б) площадь грани ABC;
в) угол между ребрами AD и AC;
г) объем пирамиды;
д) длину высоты, опущенной на грань ABC.

Решение. а) Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (-2-1)\bar{i} + (4-2)\bar{j} + (1-3)\bar{k} =$$

$$= -3\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k};$$

$$\overline{AC} = (7-1)\bar{i} + (6-2)\bar{j} + (3-3)\bar{k} = 6\bar{i} + 4\bar{j};$$

$$\overline{AD} = (4-1)\bar{i} + (-3-2)\bar{j} + (-1-3)\bar{k} = 3\bar{i} - 5\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Найдем длины этих векторов:

$$AB = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}; \quad AC = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} =$$

$$= 2\sqrt{13}; \quad AD = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

б) Площадь грани ABC будет равна половине модуля векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, на которых построена грань:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 12^2 + 24^2} = \sqrt{64 + 144 + 576}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{784} = \frac{1}{2}\cdot 28 = 14; \quad S_{ABC} = 14 \text{ кв. ед.}$$

в) Угол между ребрами $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$ найдем по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{AC}}{AC\cdot AC}.$$

$$\cos\varphi = \frac{18-20}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{-2}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{13}} = -\frac{1}{5\sqrt{26}},$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{26}}\right).$$

г) Объем пирамиды равен шестой части численного значения векторно-скалярного произведения векторов, исходящих из одной вершины пирамиды, например исходящих из вершины A.

$$v = \frac{1}{6}(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}(48 + 60 + 24 + 48) = \frac{1}{6}\cdot 180 = 30,$$

$$v = 30 \text{ куб. ед.}$$

д) Длину высоты h, опущенной на грань ABC, можно найти, исходя из формулы

$$v_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h,$$

откуда

$$h = \frac{3v}{S}.$$

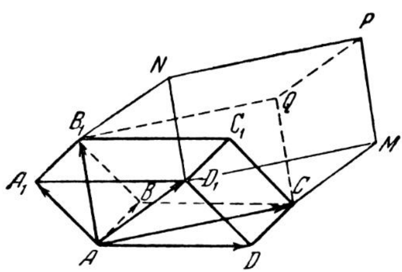
Таким образом,

$$h = \frac{3 \cdot 30}{14} = \frac{45}{7} = 6\,\frac{2}{7}\ ;\ h = 6\,\frac{2}{7}\ \text{ед. длины.}$$

№ 52. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

Решение. Пусть на чертеже (черт. 170) параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задан, его ребра

$$\overline{AD} = \bar{a},\ \overline{AB} = \bar{b},\ \overline{AA_1} = \bar{c}.$$



Черт. 170

Построим на диагоналях $\overline{AC}$, $\overline{AD_1}$ и $\overline{AB_1}$ новый параллелепипед AB_1QCD_1NpM. Его объем будет численно равен векторно-скалярному произведению векторов $\overline{AC}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AD_1}$.

Выразим эти векторы через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB} = \bar{a} + \bar{b}\ ;$$

$$\overline{AB_1} = \overline{AB} + \overline{AA_1} = \bar{b} + \bar{c};$$

$$\overline{AD_1} = \overline{AD} + \overline{AA_1} = \bar{a} + \bar{c}.$$

Объем данного параллелепипеда $v = (\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c})$.

Найдем объем построенного параллелепипеда:

$$v_1 = (\overline{AC} \cdot \overline{AB_1} \cdot \overline{AD_1}) = [(\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{c})](\bar{a} + \bar{c}) =$$

$$=(\bar a\times\bar b+\bar b\times\bar b+\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c)(\bar a+\bar c)=$$

$$=(\bar a\times\bar b+0+\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c)(\bar a+\bar c)=$$

$$=(\bar a\,\bar b\,\bar a+\bar a\,\bar c\,\bar a+\bar b\,\bar c\,\bar a+\bar a\,\bar b\,\bar c+\bar a\,\bar c\,\bar c+\bar b\,\bar c\,\bar c)=$$

$$=(0+0+\bar a\,\bar b\,\bar c+\bar a\,\bar b\,\bar c+0+0)=2\,(\bar a\,\bar b\,\bar c)=2v,$$

что и требовалось доказать.

№ 53. Даны вершины треугольника $A\,(2;\ 1;\ -4)$, $B\,(-1;\ 3;\ -2)$, $C\,(-1;\ 2;\ -3)$. Вычислить координаты вектора h, коллинеарного с его высотой, опущенной на сторону AB, при условии, что вектор h образует с осью Ox тупой угол и его модуль равен $2\sqrt{34}$.

Решение. Пусть $h\{x;\ y;\ z\}$. Его модуль равен $2\sqrt{34}$. Следовательно, можем составить первое уравнение:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{34}. \qquad (1)$$

Так как вектор $\bar h$ коллинеарен вектору $\overline{CD}$, то он перпендикулярен вектору $\overline{AB}$, поэтому $(\overline{AB}\cdot\bar h)=0$. Найдем вектор $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=(-1-2)\,\bar i+(3-1)\,\bar j+(-2+4)\,\bar k=$$

$$=-3\bar i+2\bar j+2\bar k,\quad \overline{AB}\,\{-3;\ 2;\ 2\}.$$

Имеем следующее уравнение:

$$-3x+2y+2z=0. \qquad (2)$$

Далее, так как вектор $\bar h$ коллинеарен высоте треугольника ABC, то он будет перпендикулярен вектору векторного произведения векторов $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Найдем эти векторы:

$$\overline{CA}=(2+1)\,\bar i+(1-2)\,\bar j+(-4+3)\,\bar k=3\,\bar i-\bar j-\bar k,$$

$$\overline{CA}\,\{3;\ -1;\ -1\};$$

$$\overline{CB}=(-1+1)\,\bar i+(3-2)\,\bar j+(-2+3)\,\bar k=\bar j+\bar k,$$

$$\overline{CB}\,\{0;\ 1;\ 1\}.$$

Найдем векторное произведение векторов CA и CB:

$$\overline{CA} \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 3\bar{k} + \bar{i} - 3\bar{j} =$$

$$= -3\bar{j} + 3\bar{k}.$$

Из перпендикулярности вектора $\bar{h}$ только что полученному вектору составляем третье уравнение:

$$-3y + 3z = 0. \qquad (3)$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{34}, \\ -3x + 2y + 2z = 0, \\ -3y + 3z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 136, \\ 3x - 2y - 2z = 0. \\ y - z = 0. \end{cases}$$

$$y = z, \qquad \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 136, \\ 3x - 4y = 0; \end{cases} \qquad y = \frac{3}{4}x;$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{9}{16}x^2 = 136, \; 17x^2 = 136 \cdot 8;$$

$$x^2 = \frac{136 \cdot 8}{17} = 8 \cdot 8; \quad x = \pm 8.$$

Так как вектор $\bar{h}$ с осью Ox образуют тупой угол, то проекция его на эту ось будет отрицательна.

Берем $x = -8$, находим

$$y = \frac{3}{4}(-8) = -6; \quad y = -6; \; z = -6.$$

Таким образом, $\bar{h} = -8\bar{i} - 6\bar{j} - 6\bar{k}$.

Высоту $\overline{CD}$ треугольника ABC можно также рассматривать как результат двойного векторного произведения векторов $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$.

$$\overline{CD} = (\overline{CA} \times \overline{CB}) \times \overline{BA} = \overline{CB}(\overline{CA} \cdot \overline{BA}) -$$

$$-\overline{CA}(\overline{CB} \cdot \overline{BA}) = \overline{CB}(3\bar{i} - \bar{j} - \bar{k})(3\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}) -$$

$$-\overline{CA}\,(\bar{j}+\bar{k})(3\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k})=\overline{CB}\,(9+2+2)-$$

$$-\overline{CA}\,(-2-2)=\overline{CB}\cdot 13+\overline{CA}\cdot 4=13(\bar{j}+\bar{k})+$$

$$+4(3\bar{i}-\bar{j}-\bar{k})=13j+13\bar{k}+12\bar{i}-4\bar{j}-4\bar{k}=$$

$$=12\bar{i}+9\bar{j}+9\bar{k};$$

$$\overline{CD}\,\{12;\ 9;\ 9\}.\qquad CD=\sqrt{144+81+81}=\sqrt{306}=$$

$$=\sqrt{9\cdot 34}=3\sqrt{34}.$$

Так как вектор $\bar{h}$ коллинеарен вектору $\overline{CD}$, то их проекции пропорциональны длине вектора. Учитывая условие, что $x<0$, а следовательно, $y<0$ и $z<0$, получим:

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{9}=\frac{z}{9}=-\frac{2\sqrt{34}}{3\sqrt{34}},\quad \text{т. е.}$$

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{9}=\frac{z}{9}=-\frac{2}{3}.$$

Откуда находим:

$$\frac{x}{12}=-\frac{2}{3},\quad x=-\frac{12\cdot 2}{3}=-8;$$

$$y=-\frac{9\cdot 2}{3}=-6;\quad z=-6.$$

Ответ: $\bar{h}\ \{-8;\ -6;\ -6\}$.

№ 54. *Решить самостоятельно.* Найти

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})-(\bar{m}\times\bar{n})\times\bar{p},\ \text{если}$$

$\bar{a}\{1;\ 2;\ -2\}$,

$\bar{b}\{-2;\ 3;\ 1\}$,

$\bar{c}\{2;\ -2;\ 2\}$,

Черт. 171

$\bar{m}\{-1;\ 3;\ 5\}$, $\bar{n}\{1;\ 0;\ -2\}$ и $\bar{p}\ \{3;\ -2;\ 2\}$.

Указания. По правилу двойного векторного умножения имеем:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}) \quad \text{и} \quad (\bar{m} \times \bar{n}) \times \bar{p} =$$
$$= \bar{n}(\bar{m}\bar{p}) - \bar{m}(\bar{n}\bar{p}).$$

Тогда

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) - (\bar{m} \times \bar{n}) \times \bar{p} = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}) -$$
$$- \bar{n}(\bar{m}\bar{p}) + \bar{m}(\bar{n}\bar{p}).$$

Ответ: $8\bar{i} - 17\bar{j} - 13\bar{k}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (черт. 171) построить каждый из следующих векторов:

$$1)\ 3\bar{a};\quad 2)\ -\frac{1}{2}\bar{b};\quad 3)\ 2\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b};$$
$$4)\ \frac{1}{2}\bar{a} - 3\bar{b}.$$

2. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник?

3. Вычислить направляющие косинусы вектора

$$\bar{a}\,\{16;\ -12;\ 15\}.$$

4. Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы:

а) $\alpha = 45°,\quad \beta = 60°,\quad \gamma = 120°;$

б) $\alpha = 45°,\quad \beta = 135°,\quad \gamma = 60°:$

в) $\alpha = 90°,\quad \beta = 150°,\quad \gamma = 60°?$

5. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 120°$, причем $|\bar{a}| = 8$, $|\bar{b}| = 5$. Определить $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{b} - \bar{a}|$.

6. Даны точки $A\ (3;\ 2;\ -1)$ и $B\ (-1;\ 3;\ 5)$. Найти разложение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ по основным векторам и вычислить длины этих векторов.

7. Даны два вектора $\bar{a}\{5;\ 8;\ 3\}$ и $\bar{b}\{-1;\ 2;\ 0\}$.

Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

$$а)\ \bar{a}-\bar{b};\quad б)\ 3\bar{a};\quad в)\ \bar{a}+2\bar{b}.$$

8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$. зная, что $|\bar{a}|=2;\ |\bar{b}|=1$, вычислить угол α между векторами

$$\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}\quad и\quad \bar{q}=\bar{a}-\bar{b}.$$

9. Даны векторы $\bar{a}\{8;\ 9;\ -15\}$ и $\bar{b}\{0;\ -3;\ -1\}$. Вычислить:

$$а)\ \bar{a}\,\bar{b};\quad б)\ (\bar{a}+\bar{b})^2;\quad в)\ (\bar{a}-\bar{b})^2.$$

10. Даны вершины четырехугольника $A\ (1;\ 1;\ -4)$, $B\ (-5;\ 3;\ -5)$, $C\ (-3;\ 1;\ 2)$ и $D\ (4;\ 0;\ 1)$. Доказать, что его диагонали $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ взаимно перпендикулярны.

11. Вектор $\bar{p}$, коллинеарный вектору $\bar{a}\{3;\ -4;\ -12\}$, образует с осью Oy острый угол. Найти координаты вектора $\bar{p}$, если $|\bar{p}|=39$.

12. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная что $|\bar{a}|=5,\ |\bar{b}|=2,$ вычислить $\left|\left[(3\bar{a}+2\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})\right]\right|$.

13. Даны точки $A\ (3;\ 1;\ 2)$, $B\ (2;\ 2;\ -1)$, $C\ (1;\ -1;\ 2)$ и $D\ (1;\ 5;\ 0)$. Вычислить $\text{Пр}_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

14. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах

$$\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}-3\bar{k},\qquad \bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}\ \text{и}\ \bar{c}=\bar{i}-3\bar{j}+\bar{k},$$

опущенную на грань, построенную на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

15. Даны три вектора

$$\bar{a}\{3;\ 5;\ -1\},\ \bar{b}\{0;\ -2;\ 1\}\ \text{и}\ \bar{c}\{-2;\ 2;\ 3\}.$$

Найти $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

Ответы:

2. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. 3. $\frac{16}{25}$, $-\frac{12}{25}$, $\frac{3}{5}$.

4. а) может; б) нет; в) может.

5. $|\bar{a}+\bar{b}|=7$, $|\bar{b}-\bar{a}|=\sqrt{129}$.

6. $\overline{AB} = -4\bar{i} + \bar{j} + 6\bar{k}$; $\overline{BA} = 4\bar{i} - \bar{j} - 6\bar{k}$;

$$AB = BA = \sqrt{53}.$$

7. а) $\{6;\ 6;\ 3\}$; б) $\{15;\ 24;\ 9\}$; в) $\{3;\ 12;\ 3\}$.

8. $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$. 9. а) -12; б) 356; в) 404.

11. $p\{-9;\ 12;\ 36\}$. 12. 50. 13. $0{,}6\sqrt{10}$.

14. $h = \frac{5}{2}\sqrt{2}$. 15. $\{3;\ 3;\ 0\}$.

Глава III

ПЛОСКОСТЬ

Всякое уравнение первой степени между тремя переменными определяет плоскость. Обратно, всякая плоскость определяется уравнением первой степени относительно текущих координат.

1. Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (1)$$

Особые случаи уравнения (1).

а) Пусть в уравнении (1) свободный член $D = 0$, тогда получим уравнение

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (2)$$

плоскости, проходящей через начало координат.

б) Пусть в уравнении (1) один из коэффициентов A, B и C равен 0.

Тогда получим уравнения плоскостей, параллельных соответствующим координатным осям:

$By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Ox; (3)

$Ax + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oy; (4)

$Ax + By + D = 0$ — уравнение плоскости, параллельной оси Oz. (5)

в) Пусть в уравнениях (3), (4), (5) свободный член $D = 0$. Тогда получим уравнения плоскостей, проходящих через соответствующие оси координат:

$By + Cz = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Ox; (6)

$Ax + Cz = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Oy; (7)

$Ax + By = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через ось Oz. (8)

г) Пусть в уравнении (1) два коэффициента $B = C = 0$ или $A = C = 0$, или $A = B = 0$. Тогда получим уравнения плоскостей, параллельных соответствующим координатным плоскостям:

$Ax + D = 0$, или $x = a$ — уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости yOz; (9)

$By + D = 0$, или $y = b$ — уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOz; (10)

$Cz+D=0$, или $z=c$ — уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости xOy. (11)

д) Пусть в уравнении (1) три коэффициента B, C и D или A, C и D, или A, B и D равны нулю. Тогда получим уравнения координатных плоскостей

$Ax=0$, или $x=0$ — уравнение плоскости yOz; (12)

$By=0$, или $y=0$ — уравнение плоскости xOz; (13)

$Cz=0$, или $z=0$ — уравнение плоскости xOy. (14)

2. Общее уравнение плоскости в векторной форме имеет вид:

$$\bar{n}\,\bar{r} + D = 0, \tag{15}$$

$\bar{n}\{A, B, C\}$ — вектор, перпендикулярный к данной плоскости;
$\bar{r}\{x, y, z\}$ — текущий радиус-вектор.

3. Нормальное уравнение плоскости.

а) Нормальное уравнение плоскости в координатной форме имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{16}$$

За параметры, определяющие плоскость, приняты: длина перпендикуляра (нормали) p, опущенного из начала координат на плоскость, и направляющие косинусы этого перпендикуляра $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

б) Нормальное уравнение плоскости в векторной форме имеет вид:

$$\bar{n}^\circ\,\bar{r} - p = 0, \tag{17}$$

$\bar{n}^\circ(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma) = \dfrac{\bar{n}}{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к данной плоскости;

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора;

p — расстояние плоскости от начала координат.

4. Для приведения общего уравнения плоскости (1) к нормальному виду (16), нужно умножить его на нормирующий множитель

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{18}$$

выбрав знак перед корнем, противоположный знаку свободного члена D в уравнении (1).

Направляющие косинусы и параметр p определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{19}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

При этом, если $D<0$, то берутся верхние знаки; если $D>0$, то берутся нижние знаки.

5. Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

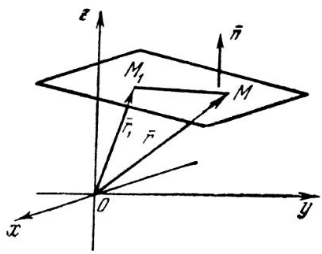
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad (20)$$

где за параметры, определяющие плоскость, приняты отрезки a, b и c, отсекаемые этой плоскостью на осях координат.

6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку.

а) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, в координатной форме имеет вид:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (21)$$



Черт. 172

б) Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, в векторной форме имеет вид:

$$\bar{n}\,(\bar{r}-r_1)=0. \qquad (22)$$

M_1 — данная точка, заданная радиусом-вектором

$$\bar{r}_1\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\};$$

$\bar{r}\{x,\ y,\ z\}$ — радиус-вектор любой точки плоскости;
$\bar{n}\{A,\ B,\ C\}$ — нормальный вектор (черт. 172)

7. Угол между двумя плоскостями.

а) Угол между двумя плоскостями, заданными уравнениями в координатной форме

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A^2{}_1+B^2{}_1+C^2{}_1}\cdot\sqrt{A^2{}_2+B^2{}_2+C^2{}_2}}. \qquad (23)$$

б) Угол между двумя плоскостями, заданными уравнениями в векторной форме

$$\bar{n}_1\bar{r}+D_1=0, \qquad \bar{n}_2\bar{r}+D_2=0, \qquad (24)$$

где $\overline{n_1}\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{n_2}\{A_2, B_2, C_2\}$, определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{n_1 \cdot n_2}. \tag{25}$$

8. Условие параллельности двух плоскостей имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{26}$$

9. Условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{27}$$

10. Расстояние от точки до плоскости.

Отклонением данной точки от данной плоскости называется число δ, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, взятое со знаком плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от этой плоскости, и со знаком минус, если они лежат по одну сторону от плоскости.

Отклонение δ получается в результате подстановки координат данной точки в нормальное уравнение данной плоскости

$$\delta = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p_1 \tag{28}$$

или в векторной форме

$$\delta = \overline{n^\circ}\,\overline{r_1} - p. \tag{29}$$

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно абсолютной величине отклонения:

$$d = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p|,$$

или

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \tag{30'}$$

в векторной форме:

$$d = |\overline{n^\circ}\,\overline{r_1} - p|. \tag{30''}$$

11. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \quad \text{и} \quad M_3(x_3, y_3, z_3),$$

не лежащие на одной прямой, имеет вид:

а) в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

б) в векторной форме:

$$(\overline{r} - \overline{r_1})(\overline{r_2} - \overline{r_1})(\overline{r_3} - \overline{r_1}) = 0. \tag{31'}$$

Примеры решения задач

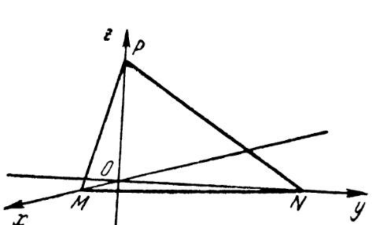
№ 55. Построить плоскости, заданные уравнениями:
а) $5x+2y+3z-15=0$, б) $3x+2y-6=0$, в) $3z-5=0$,
г) $x-4y+2z=0$, д) $3x-z=0$.

Построение. а) Чтобы построить плоскость, не проходящую через начало координат, необходимо найти отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат. Отрезок, отсекаемый плоскостью на оси Ox, мы найдем, если в уравнении плоскости положим $y=0$ и $z=0$; тогда $5x-15=0$, $a=x=3$; аналогично, если $x=0$ и $z=0$, то $b=y=7\frac{1}{2}$; если $x=0$; $y=0$, то $c=z=5$.

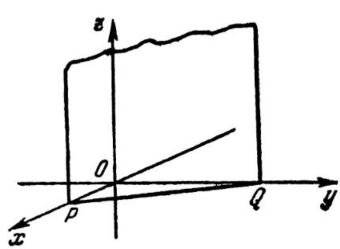
Отложив на координатных осях отрезки $a=3$, $b=7{,}5$ и $c=5$, соединяем полученные точки M, N, P прямыми линиями. Эти прямые — следы данной плоскости на координатных плоскостях (черт. 173).

б) Так как уравнение плоскости $3x+2y-6=0$ не содержит члена с координатой z ($c=0$), то плоскость параллельна оси Oz. Следовательно, плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b конечной величины, а на оси Oz — отрезок c бесконечно большой величины.

Найдем отрезки a и b вышеуказанным способом: $a=2$, $b=3$. Отложив эти отрезки на осях Ox и Oy, соединив их концы, получим след плоскости в плоскости xOy. Следы данной плоскости в координатных плоскостях xOz и yOz будут параллельны оси Oz (черт. 174).



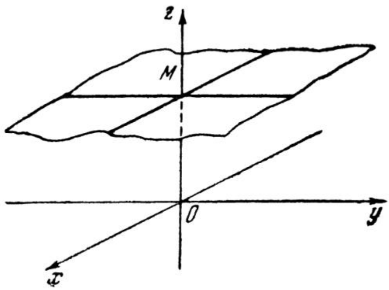
Черт. 173



Черт. 174

в) Так как в уравнении $3z-5=0$ коэффициенты $A=0$ и $B=0$, то плоскость, одновременно параллельная оси Ox и оси Oy, параллельна плоскости xOy. Она отсекает на оси Oz отрезок c, равный $^5/_3$. Следы данной плоскости в координатных плоскостях xOz и yOz параллельны соответственно осям Ox и Oy (черт. 175).

г) Плоскость, заданная уравнением $x-4y+2z=0$, проходит через начало координат, следовательно, она не отсекает отрезков на осях координат. Будем строить плоскость путем непосредственного нахождения следов плоскости на координатных плоскостях. Следами плоскости на координатных плоскостях являются прямые. Чтобы найти уравнения этих прямых, в уравнении плоскости



Черт. 175

будем последовательно полагать $x=0$, $y=0$, $z=0$. Получим след плоскости на yOz:

$$x=0, \quad -4y+2z=0, \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2y-z=0, \\ x=0; \end{cases}$$

на xOz:

$$\begin{cases} x+2z=0, \\ y=0; \end{cases}$$

на xOy:

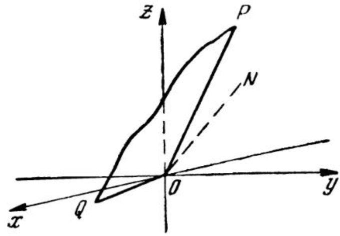
$$\begin{cases} x-4y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Строим полученные прямые в соответствующей координатной плоскости.

Следом данной плоскости в плоскости yOz является прямая OP; в плоскости xOz — прямая ON; в плоскости xOy — прямая OQ. Следы OP и OQ — видимые, а след

ON невидимый, так как его закрывает плоскость yOz (черт. 176).

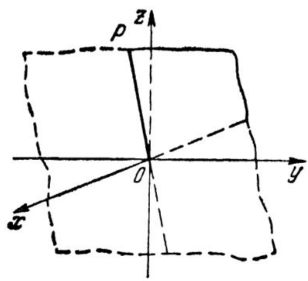
д) В уравнении $3x-z=0$ коэффициент $B=0$ и сво-



Черт. 176

бодный член $D=0$, следовательно, плоскость проходит через ось Oy.

Следом данной плоскости в плоскости xOz является прямая $3x-z=0$ (прямая OP). Следы в плоскостях xOy и yOz совпадают с осью Oy (черт. 177).



Черт. 177

№ 56. Даны точки M_1 (3; 0; 4) и M_2 (5; 6; 9). Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярно к вектору M_1M_2.

Р е ш е н и е. Уравнение связки плоскостей, проходящей через точку M_1, будет

$$A(x-3)+B(y-0)+C(z-4)=0.$$

Нормальный вектор

$$\overline{M_1M_2}=(5-3)\,\bar{i}+(6-0)\,\bar{j}+(9-4)\,\bar{k}=2\bar{i}+6\bar{j}+5\bar{k}.$$

Подставляем проекции 2, 6 и 5 вектора M_1M_2 на место A, B и C в уравнение связки, будем иметь:

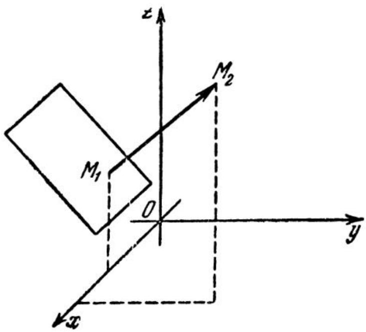
$$2(x-3)+6(y-0)+5(z-4)=0$$

или

$$2x+6y+5z-26=0.$$

Это и есть уравнение искомой плоскости (черт. 178).

Ответ: $2x+6y+5z-26=0$.



Черт. 178

№ 57. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (3; 0; 4), M_2 (5; 2; 6) и M_3 (2; 3; −3).

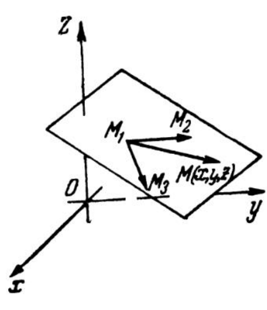
Решение. Пусть произвольная точка M (x, y, z) лежит на искомой плоскости (черт. 179). Тогда векторы

$$\overline{M_1M}\{x-3,\ y-0,\ z-4\},$$

$$\overline{M_1M_2}\{5-3,\ 2-0,\ 6-4\}$$

и

$$\overline{M_1M_3}\{2-3, 3-0,\ -3-4\}.$$



Черт. 179

принадлежат этой же плоскости. В силу компланарности смешанное произведение этих векторов равно нулю: $M_1M_2 \cdot M_1M_2 \cdot M_1M_3=0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-4 \\ 5-3 & 2-0 & 6-4 \\ 2-3 & 3-0 & -3-4 \end{vmatrix}=0, \text{ или } \begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получим:

$$-20(x-3)+12y+8(z-4)=0.$$

После упрощения искомое уравнение плоскости примет вид:

$$5x-3y-2z-7=0.$$

Для проверки эту задачу решим, не пользуясь векторами.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (3; 0; 4), будет:

$$A(x-3)+B(y-0)+C(z-4)=0. \qquad (1)$$

Условия прохождения этой плоскости через две другие точки M_2 (5; 2; 6), M_3 (2; 3; -3) и первую точку суть:

$$2A+2B+2C=0 \text{ и } -A+3B-7C=0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}+1=0, \\ -\dfrac{A}{C}+3\dfrac{B}{C}-7=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Складывая второе уравнение с первым, найдем:

$$4\frac{B}{C}-6=0, \text{ откуда } \frac{B}{C}=\frac{3}{2}.$$

Подставляя в первое уравнение системы (2)

$$\frac{B}{C}=\frac{3}{2},$$

получим

$$\frac{A}{C}=-\frac{5}{2}.$$

Итак,

$$A:B:C=-5:3:2.$$

Подставляя в уравнение (1) вместо A, B и C соответственно числа -5, 3 и 2, получим:

$$-5(x-3)+3(y-0)+2(z-4)=0 \text{ или } 5x-3y-2z-7=0.$$

Ответ: $5x-3y-2z-7=0$.

№ 58. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (3; 0; 4) и M_2 (5; 2; 6) и перпендикулярной к плоскости $2x+4y+6z-7=0$.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ произвольная точка искомой плоскости. Тогда векторы $\overline{M_1M}\{x-3, y-0, z-4\}$ и $\overline{M_1M_2}\{2, 2, 2\}$ принадлежат этой плоскости. Векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_1M_2}$ компланарны с нормальным вектором $\bar{n}\{2, 4, 6\}$ данной плоскости $2x+4y+6z-7=0$.

Поэтому смешанное произведение этих трех векторов равно нулю: $(\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \bar{n})=0$, или

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

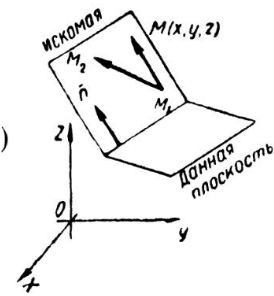
Раскрывая определитель, получаем искомое уравнение плоскости: $x-2y-z-7=0$.

С целью проверки приводится другое решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (3; 0; 4), будет:

$$A(x-3)+B(y-0)+C(z-4)=0. \quad (1)$$

Условия прохождения этой плоскости через точку M_2 (5; 2; 6) и перпендикулярно к данной плоскости $2x+4y+6z-7=0$ суть соответственно $2A+2B+2C=0$ и $2A+4B+6C=0$,



Черт. 180

или

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A+2B+3C=0. \end{cases}$$

Делим первое и второе уравнение на C:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}+1=0, \\ \dfrac{A}{C}+\dfrac{2B}{C}+3=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$\frac{A}{C}=1, \qquad \frac{B}{C}=-2.$$

Деля уравнение плоскости (1) на C и подставляя вместо $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ найденные значения, получим:

$$(x-3)-2(y-0)+(z-4)=0$$

или

$$x-2y+z-7=0.$$

Ответ: $x-2y+z-7=0.$

№ 59. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (1; 2; 3) и перпендикулярной к плоскостям

$$x-y+z-7=0,$$
$$3x+2y-12z+5=0.$$

Решение.

Нормальные векторы $\bar{n}_1$ $\{1; -1; 1\}$ и $\bar{n}_2$ $\{3; 2; -12\}$ данных плоскостей располагаем в искомой плоскости. Пусть точка M $(x; y; z)$ лежит на искомой плоскости.

Тогда в силу компланарности векторов $\overline{M_1M}\{x-1$ $y-2;$ $z-3\}$, $\bar{n}_1$ $\{1; -1; 1\}$ и $\bar{n}_2$ $\{3; 2; -12\}$ выполняется условие:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда уравнение искомой плоскости будет

$$2x+3y+z-11=0.$$

С целью проверки приводится второе решение.

Уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (1; 2; 3), будет:

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0. \qquad (1)$$

Условия перпендикулярности этой плоскости к данным плоскостям суть соответственно:

$$A-B+C=0 \text{ и } 3A+2B-12C=0.$$

Делим первое и второе уравнение на C:

$$\begin{cases} \frac{A}{C}-\frac{B}{C}+1=0, \\ 3\frac{A}{C}+2\frac{B}{C}-12=0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$\frac{A}{C}=2 \quad \text{и} \quad \frac{B}{C}=3.$$

Деля уравнение плоскости (1) на C и подставляя вместо $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ найденные значения, получим:

$2(x-1)+3(y-2)+(z-3)=0$, или $2x+3y+z-11=0$.

Ответ: $2x+3y+z-11=0$.

№ 60. Составить уравнение плоскости. если ее расстояние от начала координат равно 10 и вектор

$$\bar{n}\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$$

перпендикулярен к плоскости и направлен к ней от начала координат.

Решение. Вычисляем длину вектора $\bar{n}$:

$$|\bar{n}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=1.$$

Таким образом, вектор $\bar{n}=\bar{n}^0$ — единичный.

Тогда нормальное уравнение искомой плоскости в векторной форме будет: $\bar{n}^0\bar{r}-10=0$.

Нормальное уравнение этой же плоскости в координатной форме будет иметь вид:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-10=0.$$

Ответ:

$$\bar{n}^\circ\bar{r}-10=0,\qquad \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-10=0.$$

№ 61. Привести к нормальному виду уравнение плоскости: $(10\bar{i}+2\bar{j}-11\bar{k})\bar{r}+60=0$.

Решение. Дано общее уравнение плоскости в векторной форме

$$\bar{n}\bar{r}+D=0.$$

Нормальное уравнение плоскости в векторной форме $\bar{n}^0\bar{r}-p=0$,

где

$$\bar{n}^\circ\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}=\frac{\bar{n}}{n}$$

— единичный нормальный вектор, а p — расстояние плоскости от начала координат.

По условию задачи $\bar{n}\{A;\ B;\ C\} = \bar{n}\{10;\ 2;\ -11\}$.

Поэтому

$$n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{10^2+2^2+(-11)^2} = 15.$$

Так как $\bar{n} = n\bar{n}^0$ и $D = 60 > 0$, то обе части данного уравнения разделим на $-n = -15$. Тогда получим:

$$\left(-\frac{10}{15}\,\bar{i} - \frac{2}{15}\bar{j} + \frac{11}{15}\bar{k}\right)\bar{r} - 4 = 0$$

— нормальное уравнение данной плоскости в векторной форме.

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{15}\bar{j} + \frac{11}{15}\bar{k}\right)\bar{r} - 4 = 0.$

№ 62. Определить направляющие косинусы вектора, направленного из начала координат перпендикулярно к плоскости

$$x - 2y + 2z - 9 = 0.$$

Решение. Приводим уравнение плоскости к нормальному виду. Нормирующий множитель:

$$M = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}.$$

Умножая данное уравнение на $M = \frac{1}{3}$, получим нормальное уравнение плоскости:

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 3 = 0.$$

Здесь $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$

суть направляющие косинусы нормального вектора

$$\bar{n}\{A;\ B;\ C\} = \bar{n}\{1;\ -2;\ 2\}$$

данной плоскости.

Ответ: $\bar{n}\{1;\ -2;\ 2\}$.

№ 63. Найти расстояние плоскости $(6\bar{i} - 7\bar{j} - 6\bar{k})\bar{r} - 33 = 0$ от начала координат и углы, которые образует с осями координат перпендикуляр, опущенный из начала координат на плоскость.

Решение. По условию задачи

$$\bar{n}\{A;\ B;\ C\}=\bar{n}\{6;\ -7;\ -6\}.$$

Поэтому

$$n=\sqrt{6^2+(-7)^2+(-6)^2}=11.$$

Так как $\bar{n}=\bar{n}^0 n$ и $D=-33$, то делим обе части данного уравнения на 11, получим нормальное уравнение плоскости в векторной форме:

$$\left(\frac{6}{11}\bar{i}-\frac{7}{11}\bar{j}-\frac{6}{11}\bar{k}\right)\bar{r}-3=0.$$

Из полученного уравнения заключаем, что расстояние плоскости от начала координат $p=3$ и направляющие косинусы вектора $\bar{n}$ суть:

$$\cos\alpha=\frac{6}{11},\quad \cos\beta=-\frac{7}{11},\quad \cos\gamma=-\frac{6}{11},$$

так как перпендикуляр, опущенный из начала координат на плоскость, параллелен нормальному вектору плоскости:

Ответ: $p=3; \cos\alpha=\frac{6}{11}, \cos\beta=-\frac{7}{11}, \cos\gamma=$

$$=-\frac{6}{11}.$$

№ 64. Уравнение плоскости $11x-7y-9z+15=0$ написать в векторной форме в общем и в нормальном видах.

Решение. Общее уравнение плоскости в векторной форме $\bar{n}\bar{r}+D=0$, где $\bar{r}\{x;\ y;\ z\}$ — текущий радиус-вектор; $\bar{n}\{A;\ B;\ C\}$ — вектор, перпендикулярный к данной плоскости.

Согласно условию,

$$n\{A;\ B;\ C\}=\bar{n}\{11;\ -7;\ -9\} \text{ и } D=15.$$

Искомое общее уравнение плоскости в векторной форме будет

$$(11i-7j-9k)r+15=0.$$

Составим теперь нормальное уравнение этой плоскости в векторной форме.

Длина нормального вектора

$$n=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{11^2+(-7)^2+(-9)^2}=\sqrt{251}.$$

Так как $\bar{n}=n\bar{n}^0$ и $D=15>0$, то разделив обе части уравнения на $-n=-\sqrt{251}$, получим нормальное уравнение данной плоскости в векторной форме:

$$\left(-\frac{11}{\sqrt{251}}\bar{i}+\frac{7}{\sqrt{251}}\bar{j}+\frac{9}{\sqrt{251}}\bar{k}\right)\bar{r}-\frac{15}{\sqrt{251}}=0.$$

Ответ:

$$\left(-\frac{11}{\sqrt{251}}\bar{i}+\frac{7}{\sqrt{251}}\bar{j}+\frac{9}{\sqrt{251}}\bar{k}\right)\bar{r}-\frac{15}{\sqrt{251}}=0.$$

№ 65. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к вектору $\bar{n}\,\{3;\ 4;\ 12\}$ и отстоящей от начала координат на расстояние $p=3$.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной искомой и проходящей через начало координат, имеет вид:

$$3x+4y+12z=0.$$

Отклонение любой точки $M\,(x;\ y;\ z)$ искомой плоскости $3x+4y+12z=0$ равно ± 3.

Тогда, воспользовавшись формулой

$$\delta=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

будем иметь:

$$\pm 3=\frac{3x+4y+12z}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}},\qquad \pm 3=\frac{3x+4y+12z}{\sqrt{9+16+144}},$$

$$\pm 3=\frac{3x+4y+12z}{13}.$$

Откуда $3x+4y+12z\pm 39=0$ — искомые уравнения плоскости.

Ответ: $3x+4y+12z\pm 39=0$.

№ 66. Написать уравнение плоскости:

а) параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $N\,(3;\ -5;\ 4)$;

б) проходящей через ось Oz и через точку $P\,(2;\ -3;\ -2)$;

в) параллельной оси Oy и проходящей через точки $Q\,(1;\ 3;\ 4)$ и $R\,(2;\ 5;\ -6)$.

Решение. а) Уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy, имеет вид:

$$Cz+D=0. \qquad (1)$$

Так как плоскость проходит через точку $N\ (3;\ -5;\ 4)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению плоскости:

$$C\cdot 4+D=0,\ 4C+D=0.$$

Из последнего уравнения найдем отношение коэффициентов C и D:

$$4\frac{C}{D}+1=0,\quad 4\frac{C}{D}=-1,\quad \frac{C}{D}=-\frac{1}{4}.$$

Подставим в исходное уравнение (1) вместо C и D числа, им пропорциональные; получим:

$$z-4=0.$$

б) Уравнение плоскости, проходящей через ось Oz, имеет вид:

$$Ax+By=0. \tag{2}$$

Вместо x и y подставим абсциссу и ординату точки P:

$$2A-3B=0.$$

Из последнего уравнения найдем отношение коэффициентов A и B:

$$2\frac{A}{B}-3=0,\quad \frac{A}{B}=\frac{3}{2}.$$

Подставив в уравнение (2) вместо A и B числа, им пропорциональные, найдем уравнение искомой плоскости:

$$3x+2y=0.$$

в) Уравнение плоскости, параллельной оси Oy, имеет вид:

$$Ax+Cz+D=0. \tag{3}$$

Подставив в уравнение (3) координаты точек Q и R, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A+4C+D=0, \\ 5A-6C+D=0, \end{cases}$$

из которой найдем отношение коэффициентов A, C и D.

$$\left\{\begin{array}{l} 3\dfrac{A}{D}+4\dfrac{C}{D}+1=0, \\ 5\dfrac{A}{D}-6\dfrac{C}{D}+1=0; \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{l} 9\dfrac{A}{D}+12\dfrac{C}{D}+3=0, \\ 10\dfrac{A}{D}-12\dfrac{C}{D}+2=0; \end{array}\right.$$

$$19\frac{A}{D}=-5, \quad \frac{A}{D}=-\frac{5}{19};$$

$$3\left(-\frac{5}{19}\right)+4\frac{C}{D}+1=0,$$

$$4\frac{C}{D}=-\frac{4}{19}; \quad \frac{C}{D}=-\frac{1}{19}.$$

Таким образом, имеем

$$A:C:D=5:1:(-19).$$

Искомое уравнение плоскости:

$$5x+z-19=0.$$

Ответ: а) $z-4=0$; б) $3x+2y=0$; в) $5x+z-19=0$.

№ 67. Через точки M (3; −2; 1) и N (0; 3; 5) провести плоскость, которая отсекала бы на осях Ox и Oy равные положительные отрезки.

Решение. Возьмем уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Так как $a=b$, то уравнение примет более простой вид:

$$\frac{x+y}{a}+\frac{z}{c}=1.$$

Подставив в это уравнение координаты точек M и N.

получим следующую систему уравнений с неизвестными отрезками a и c:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=1, \\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{5}{c}=1;\end{array}\right. \left|\begin{array}{c}-5 \\ \\ \end{array}\right|\left|\,\left\{\begin{array}{r}-5\cdot\dfrac{1}{a}-5\cdot\dfrac{1}{c}=-5, \\ 3\cdot\dfrac{1}{a}+5\cdot\dfrac{1}{c}=1;\end{array}\right.\right.$$

$$-2\cdot\frac{1}{a}=-4; \quad \frac{1}{a}=2,$$

$$a=\frac{1}{2};$$

$$в=a=\frac{1}{2}; \quad 2+\frac{1}{c}=1, \quad \frac{1}{c}=-1; \quad c=-1.$$

Таким образом, искомым уравнением плоскости будет:

$$\frac{x+y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{-1}=1, \quad \text{или} \quad 2x+2y-z-1=0.$$

Ответ: $2x+2y-z-1=0$.

№ 68. *Решить самостоятельно.* Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $P(4; -7; -4)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость.

Указания. Уравнение плоскости в нормальном виде:

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0,$$

где

$$p=OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Направляющие косинусы отрезка OP

$$\cos\alpha=\frac{x}{p}, \quad \cos\beta=\frac{y}{p}, \quad \cos\gamma=\frac{z}{p};$$

подставив найденные значения p и направляющих косинусов в нормальное уравнение плоскости, вы найдете уравнение искомой плоскости.

Ответ: $4x-7y-4z-81=0$.

№ 69. Найти направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к плоскости, которая отсекает на осях координат отрезки $a=-18$, $b=-9$, $c=9$.

Решение. Воспользовавшись уравнением плоскости в отрезках $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

составим уравнение плоскости:

$$\frac{x}{-18}+\frac{y}{-9}+\frac{z}{9}=1,$$

или

$$x+2y-2z+18=0.$$

Приведем общее уравнение плоскости к нормальному виду: нормирующий множитель

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

берем со знаком минус, так как в уравнении плоскости $D=18>0$:

$$M=\frac{1}{-\sqrt{1+4+4}}=-\frac{1}{3}.$$

Теперь умножим уравнение (1) на $-\frac{1}{3}$. Получим:

$$-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-6=0.$$

Направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости имеют следующие значения:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3}, \quad \cos\beta=-\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

Ответ:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{3}, \quad \cos\beta=-\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma=\frac{2}{3}.$$

№ 70. Провести плоскость так, чтобы в пересечении с координатными плоскостями получился треугольник со сторонами: $AB=3\sqrt{2}$ (в плоскости xOy), $BC=AC=5$.

Решение. Возьмем уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Пусть вершины треугольника расположены в точках: A $(a; 0; 0)$, B $(0; b; 0)$ и C $(0; 0; c)$. Найдем длины сторон треугольника по формуле расстояния между двумя точками:

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}, \quad BC=\sqrt{b^2+c^2}, \quad AC=\sqrt{a^2+c^2}.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{2}, \\ \sqrt{b^2+c^2}=5, \\ \sqrt{a^2+c^2}=5; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^2+b^2=18, \\ b^2+c^2=25, \\ a^2+c^2=25; \end{cases}$$

$$b^2=18-a^2,$$

$$\begin{cases} 18-a^2+c^2=25, \\ a^2+c^2=25. \end{cases}$$

$$18+2c^2=50, \qquad 2c^2=32, \qquad c^2=16, \qquad c=\pm 4;$$

$$18+2a^2=0, \qquad 2a^2=18, \qquad b^2=9, \qquad a=\pm 3.$$

$$b^2=18-9=9, \quad b=\pm 3.$$

Таким образом, имеем 8 плоскостей, удовлетворяющих условию задачи:

$$\frac{x}{\pm 3}+\frac{y}{\pm 3}+\frac{z}{\pm 4}=1.$$

№ 71. *Решить самостоятельно.* Через две точки M_1 $(1; 1; -2)$ и M_2 $(-2; 4; 1)$ провести плоскость под углом 60° к плоскости $x-z=1$.

Указания. Плоскость, проходящая через точку M_1, будет иметь уравнение

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z+2)=0. \tag{1}$$

Но эта плоскость проходит и через точку M_2, поэтому координаты точки M_2 должны удовлетворить уравнению плоскости (1).

Плоскость (1) с плоскостью $x-z-1=0$ образует угол 60°.

Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A^2_1+B_1{}^2+C^2_1}\cdot\sqrt{A_2{}^2+B^2{}_2+C_2{}^2}}.$$

Вы получите систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \frac{B}{C}.$$

Ответ: $y-z-3=0$.

№ 72. Даны две параллельные плоскости

$$3x+4y-2z-1=0 \text{ и } 6x+8y-4z-3=0.$$

Найти среднюю плоскость (т. е. параллельную данным плоскостям и расположенную между ними на равных расстояниях от них).

Решение. Пусть точка $M(x;\ y;\ z)$ принадлежит искомой плоскости. Определим ее отклонение от каждой из данных плоскостей по формуле:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$\delta_1 = \frac{3x+4y-2z-1}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{3x+4y-2z-1}{\sqrt{29}}.$$

$$\delta_2 = \frac{6x+8y-4z-3}{\sqrt{36+64+16}} = \frac{6x+8y-4z-3}{\sqrt{116}} = \frac{6x+8y-4z-3}{2\sqrt{29}}.$$

Так как точка M лежит между данными плоскостями, а плоскости расположены по одну сторону от начала координат. $D_1=-1<0$, $D_2=-3<0$, то отклонения δ_1 и δ_2 будут противоположных знаков:

$$\delta_1 = -\delta_2, \frac{3x+4y-2z-1}{\sqrt{29}} = -\frac{6x+8y-4z-3}{2\sqrt{29}};$$

$6x+8y-4z-2=-6x-8y+4z+3$, $12x+16y-8z-5=0$ — искомое уравнение.

Ответ: $12x+16y-8z-5=0$.

№ 73. Найти плоскость, параллельную двум данным параллельным плоскостям

$$2x+3y-z-1=0 \text{ и } 4x+6y-2z+3=0$$

и делящую расстояние между ними в отношении $2:3$.

Решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости. Ее отклонение до первой плоскости:

$$\delta_1 = \frac{2x+3y-z-1}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{2x+3y-z-1}{\sqrt{14}};$$

до второй плоскости

$$\delta_2 = \frac{4x+6y-2z+3}{-\sqrt{16+36+4}} = -\frac{4x+6y-2z+3}{2\sqrt{14}}.$$

Так как данные плоскости расположены по разные стороны от начала координат ($D_1 = -1 < 0$, $D_2 = 3 > 0$, то δ_1 и δ_2 будут иметь одинаковые знаки. Согласно условию, $\delta_1 : \delta_2 = 2 : 3$,
или

$$\frac{2x+3y-z-1}{\sqrt{14}} : \frac{4x+6y-2z+3}{-2\sqrt{14}} = 2:3,$$

откуда

$$\frac{6x+9y-3z-3}{\sqrt{14}} = \frac{8x+12y-4z+6}{-2\sqrt{14}};$$

$$12x+18y-6z-6 = -8x-12y+4z-6,\ 20x+30y-10z=0.$$

Ответ: $2x+3y-z=0$.

№ 74. Найти плоскость, проходящую через точку $(2;\ -1;\ 1)$ перпендикулярно к линии пересечения двух плоскостей:

$$3x-y-z+1=0,\ x-y+2z+1=0.$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, следующее:

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-1)=0. \tag{1}$$

Если плоскость перпендикулярна к линии пересечения двух других плоскостей, то она перпендикулярна к каждой из этих двух плоскостей. Условие перпендикулярности искомой плоскости с первой данной плоскостью:

$$3A-B-C=0.$$

Условие перпендикулярности искомой плоскости со второй данной плоскостью:

$$A-B+2C=0.$$

Отношение коэффициентов A, B и C найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases}3A-B-C=0,\\ A-B+2C=0;\end{cases} \quad \begin{cases}3\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}-1=0,\\ \dfrac{-A}{C}\pm\dfrac{B}{C}\pm 2=0;\end{cases}$$

$$2\frac{A}{C}-3=0, \quad 2\frac{A}{C}=3, \quad \frac{A}{C}=\frac{3}{2};$$

$$\frac{3}{2} - \frac{B}{C} + 2 = 0, \quad \frac{B}{C} = \frac{7}{2};$$

$$A : B : C = 3 : 7 : 2.$$

Искомое уравнение плоскости:

$$3(x-2)+7(y+1)+2(z-1)=0,$$

$$3x+7y+2z-6+7-2=0, \; 3x+7y+2z-1=0.$$

Ответ: $3x+7y+2z-1=0$.

№ 75. *Решить самостоятельно.* Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P\ (0;\ 5;\ 2)$ и удаленной от точки $Q\ (-1;\ 6;\ 1)$ на расстояние 1 и от точки $N\ (4;\ 0;\ 5)$ на расстояние 3.

Указания. Найти еще одну точку, принадлежащую искомой плоскости.

Координаты этой точки

$$x = \frac{4+3(-1)}{1+3} = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{0+3\cdot 6}{1+3} = \frac{9}{2},$$

$$z = \frac{5+3\cdot 1}{1+3} = 2.$$

Ответ: $2x+y+2z-9=0, \; z-2=0$.

№ 76. *Решить самостоятельно.* Вычислить объем куба, две грани которого лежат на плоскостях

$$4x+3y-12z-10=0 \text{ и } 4x+3y-12z+3=0.$$

Указания. Так как коэффициенты при текущих координатах данных плокостей равны, то плоскости параллельны. Длина ребра куба равна расстоянию между данными плоскостями.

На первой плоскости возьмите точку:

$$y=0, \; z=0, \; x= \frac{5}{2}; \; M \quad \left(\frac{5}{2};\ 0;\ 0\right)$$

и определите ее расстояние до этой плоскости.

Ответ: $v=1$ куб. единиц.

№ 77. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $M\ (0;\ 1;\ -2)$ и от плоскости $6x+3y-2z-9=0$.

Решение. Точка, лежащая на оси Ox, имеет ординату и аппликату, равными 0. Таким образом, искомая точка $N\ (x;\ 0;\ 0)$. Ее расстояние до точки M:

$$d_1 = \sqrt{x^2+1+4} = \sqrt{x^2+5};$$

ее расстояние до плоскости:

$$d_2 = \frac{6x + 3\cdot 0 - 2\cdot 0 - 9}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{6x - 9}{7}.$$

Согласно условию $d_1 = d_2$. Имеем:

$$\sqrt{x^2 + 5} = \frac{6x - 9}{7}, \quad 49(x^2 + 5) = 36x^2 - 108x + 81,$$

$$13x^2 + 108x + 164 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-54 \pm \sqrt{2916 - 2132}}{13} = \frac{-54 \pm \sqrt{784}}{13} = \frac{-54 \pm 28}{13};$$

$$x_1 = \frac{-54 - 28}{13} = \frac{-82}{13} = -6\frac{4}{13};$$

$$x_2 = \frac{-54 + 28}{13} = -\frac{26}{13} = -2.$$

Условию удовлетворяют две точки:

Ответ: $N_1\left(-6\frac{4}{13};\ 0;\ 0\right)$ и $N_2(-2;\ 0;\ 0)$.

№ 78. Найти геометрическое место точек, отклонения которых от плоскости $12x - 15y + 16z - 10 = 0$ равно ± 5.

Решение. Возьмем произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$ и определим ее отклонение до данной плоскости:

$$\delta = \frac{12x - 15y + 16z - 10}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 16^2}} = \frac{12x - 15y + 16z - 10}{25}.$$

Согласно условию это отклонение равно ± 5. Получим два уравнения:

$$\frac{12x - 15y + 16z - 10}{25} = 5 \quad \text{и} \quad \frac{12x - 15y + 16z - 10}{25} = -5,$$

или после упрощения

$$12x - 15y + 16z - 135 = 0 \text{ и}$$
$$12x - 15y + 16z + 115 = 0.$$

Мы получили две плоскости, параллельные данной плоскости и расположенные по разные стороны от нее на расстоянии 5 единиц.

Ответ:

$$12x - 15y + 16z - 135 = 0,$$
$$12x - 15y + 16z + 115 = 0.$$

№ 79. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей:

$$x-5y+3z+5=0 \text{ и } 2x-10y+6z+9=0.$$

Решение. Обе плоскости находятся по одну сторону от начала координат, так как свободные члены уравнений имеют одинаковые знаки. Первая плоскость дальше расположена от начала координат, чем вторая.

Определяя расстояние между плоскостями, возьмем точку на первой плоскости, чтобы это расстояние было положительным.

$$x-5y+3z+5=0;\ x=0,\ z=0,\ y=1;\ M\ (0;\ 1;\ 0).$$

$$d=\frac{2\cdot 0-10\cdot 1+6\cdot 0+9}{-\sqrt{4+100+36}}=\frac{-1}{-\sqrt{140}}=\frac{1}{2\sqrt{35}}.$$

Точки, равноудаленные от двух данных плоскостей, будут находиться между ними на расстоянии

$$\frac{d}{2}=\frac{1}{4\sqrt{35}}.$$

Найдем геометрическое место точек, находящихся на расстоянии $\frac{1}{4\sqrt{35}}$, например, от второй плоскости (в этом случае расстояние $\frac{d}{2}$ выразится положительным числом):

$$\frac{1}{4\sqrt{35}}=\frac{2x-10y+6z+9}{-2\sqrt{35}},$$

$$-1=4x-20y+12z+18,\quad 4x-20y+12z+19=0.$$

Ответ: $4x-20y+12z+19=0$.

№ 80. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями:

$$5x-2y+5z-3=0 \text{ и } 2x+y-7z+2=0.$$

Решение. Все точки плоскостей, делящих двугранные углы пополам, будут равноудалены от двух данных плоскостей. Возьмем произвольную точку $M\ (x;\ y;\ z)$, равноудаленную от двух данных плоскостей. Ее расстояние до первой плоскости:

$$d_1 = \frac{5x-2y+5z-3}{\sqrt{25+4+25}} = \frac{5x-2y+5z-3}{3\sqrt{6}},$$

до второй плоскости:

$$d_2 = \frac{2x+y-7z+2}{-\sqrt{4+1+49}} = \frac{2x+y-7z+2}{-3\sqrt{6}}.$$

Взяв

$$d_1 = d_2,$$

получим:

$$\frac{5x-2y+5z-3}{3\sqrt{6}} = -\frac{2x+y-7z+2}{3\sqrt{6}},$$

$$5x-2y+5z-3=-2x-y+7z-2, \quad 7x-y-2z-1=0.$$

Взяв

$$d_1 = -d_2,$$

получим уравнение второй плоскости:

$$\frac{5x-2y+5z-3}{3\sqrt{6}} = \frac{2x+y-7z+2}{3\sqrt{6}},$$

$$5x-2y+5z-3=2x+y-7z+2, \; 3x-3y+12z-5=0.$$

Ответ: $7x-y-2z-1=0$, $3x-3y+12z-5=0$.

№ 81. Определить, лежат ли точки $M(1; 2; -1)$ и $N(-3; 1; 2)$ в одном, в смежных или вертикальных двугранных углах, образованных при пересечении двух плоскостей:

$$1)\; 2x-3y+z-3=0, \qquad 2)\; 5x-2y+z-1=0,$$
$$x-y-2z+4=0; \qquad 6x-3y+2z-1=0;$$

$$3)\; 3x+y+11z-3=0,$$
$$4x+2y-5z+1=0.$$

Решение. 1) Определим отклонения точки M от каждой плоскости:

$$\delta_1 = \frac{2\cdot 1-3\cdot 2-1-3}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-8}{\sqrt{14}} < 0,$$

$$\delta_2 = \frac{1-2+2+4}{-\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{-\sqrt{6}} < 0.$$

Отклонение точки N от каждой плоскости:

$$\delta'_1 = \frac{2\cdot(-3)-3\cdot 1+2-3}{\sqrt{14}} = \frac{-10}{\sqrt{14}} < 0,$$

$$\delta'_2 = \frac{-3-1-4+4}{-\sqrt{6}} = \frac{-4}{-\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} > 0.$$

Так как отклонения δ_1 и δ_1' одинакового знака, то точки M и N расположены по одну сторону от первой плоскости; а так как отклонения δ_2 и δ_2' разных знаков, то точки M и N расположены по разные стороны от второй плоскости.

Поэтому точки M и N лежат в смежных двугранных углах.

2) Отклонения точки M от данных плоскостей:

$$\delta_1 = \frac{5\cdot 1-2\cdot 2+1(-1)-1}{\sqrt{25+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{30}} < 0,$$

$$\delta_2 = \frac{6\cdot 1-3\cdot 2+2\cdot(-1)-1}{\sqrt{39+9+4}} = \frac{-3}{7} < 0.$$

Отклонения точки N от плоскостей:

$$\delta'_1 = \frac{5\cdot(-3)-2\cdot 1+2-1}{\sqrt{30}} = \frac{-16}{\sqrt{30}} < 0,$$

$$\delta'_2 = \frac{6(-3)-3\cdot 1+2\cdot 2-1}{7} = \frac{-18}{7} < 0.$$

Точки M и N расположены по одну сторону от первой плоскости ($\delta_1<0$, $\delta_1'<0$) и по одну сторону от второй плоскости ($\delta_2<0$, $\delta_2'<0$). Следовательно, они лежат в одном двугранном угле.

3) *Отклонения точек M и N от данных плоскостей определить самостоятельно.*

Ответ: 1) Точки M и N расположены в смежных углах;

2) Точки M и N расположены в одном угле;

3) Точки M и N расположены в вертикальных углах.

№ 82. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $3x+y-5z-12=0$ и $2x+6z-3=0$;

2) $2x-3y+z+8=0$ и $4x-6y-3z-7=0$;

3) $5x+2y-3z-5=0$ и $10x+4y-6z+5=0$;

4) $3x+7y+z+4=0$ и $9x+21y+3z+12=0$.

Решение. 1) $3x+y-5z-12=0$ и $2x+6z-3=0$.

Эти две плоскости пересекаются, потому что коэффициенты при текущих координатах не равны и не пропорциональны.

$$2)\ 2x-3y+z+8=0$$

и

$$4x-6y-3z-7=0.$$

$A_1=2,\ B_1=-3,\ C_1=1;\ A_2=4,\ B_2=-6,\ C_2=-3.$

Хотя

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{1}{2},$$

но

$$\frac{C_1}{C_2}=-\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}.$$

Следовательно, и в этом случае плоскости пересекаются.

3) $5x+2y-3z-5=0$ и $10x+4y-6z+5=0$.

$A_1=5,\ B_1=2,\ C_1=-3;\ A_2=10,\ B_2=4,\ C_2=-6.$

В этом случае

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{2}.$$

Коэффициенты при текущих координатах в уравнениях плоскостей пропорциональны, следовательно плоскости параллельны.

4) $3x+7y+z+4=0$ и $9x+21y+3z+12=0$.

Все члены уравнения второй плоскости можно разделить на три. Тогда мы получим $3x+7y+z+4=0$, т. е. уравнение первой плоскости. Следовательно, эти две плоскости совпадают.

Ответ. Плоскости: 1) пересекаются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) совпадают.

№ 83. Даны уравнения трех граней параллелепипеда

$$x-3y+4z-12=0,\ y+2z-5=0,\ x+4=0,$$

и одна из его вершин $(4;\ -3;\ 2)$. Найти уравнения трех других граней параллелепипеда.

Решение. Данная точка не принадлежит ни одной из данных плоскостей, так как она не удовлетворяет их уравнениям. Заданные грани параллелепипеда не параллельны между собой, т. е. они имеют общую вершину. Остальные три грани будут соответственно параллельны данным плоскостям и проходить через точку $(4;\ -3;\ 2)$.

Напишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку:

$$A(x-4)+B(y+3)+C(z-2)=0.$$

Из этой связки выделим три плоскости, параллельные данным граням параллелепипеда, использовав условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}, \quad \text{или} \quad A:B:C=A_1:B_1:C_1.$$

Уравнение грани, параллельной первой заданной грани:

$$A:B:C=1:(-3):4;\quad x-4-3(y+3)+4(z-2)=0,\ \text{или}$$
$$x-3y+4z-21=0.$$

Уравнение грани, параллельной второй заданной грани:

$$A:B:C=0:1:2;\ y+3+2(z-2)=0$$

или

$$y+2z-1=0.$$

Уравнение грани, параллельной третьей заданной грани:

$$A:B:C=1:0:0;\ x-4=0.$$

Ответ: $x-3y+4z-21=0,\ y+2z-1=0,\ x-4=0.$

№ 84. *Решить самостоятельно*. Через начало координат провести плоскость, образующую с плоскостью

$x-4y-8z-3=0$ угол $\frac{\pi}{4}$ и перпендикулярную к плоскости $7x-z+3=0$.

Указания. Воспользуйтесь уравнением плоскости, проходящей через начало координат,

$$Ax+By+Cz=0,$$

формулой для нахождения угла между двумя плоскостями

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\pm\sqrt{A^2{}_1+B^2{}_1+C^2{}_1}\cdot\sqrt{A^2{}_2+B^2{}_2+C^2{}_2}}$$

и условием перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Ответ: $x+20y+7z=0$ и $49x-100y+343z=0$.

№ 85. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $3x+y+z-4=0$, $x+3z-5=0$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения двух данных плоскостей, имеет вид:

$$3x+y+z-4+\lambda(x+3z-5)=0,$$

или

$$(3+\lambda)x+y+(1+3\lambda)z-(4+5\lambda)=0.$$

Запишем это уравнение в виде уравнения в отрезках:

$$\frac{(3+\lambda)x}{4+5\lambda}+\frac{y}{4+5\lambda}+\frac{(1+3\lambda)z}{4+5\lambda}=1,$$

или

$$\frac{x}{\frac{4+5\lambda}{3+\lambda}}+\frac{y}{4+5\lambda}+\frac{z}{\frac{4+5\lambda}{1+3\lambda}}=1.$$

Согласно условию, отрезки, отсекаемые на осях Ox и Oy, равны, т. е.

$$\frac{4+5\lambda}{3+\lambda}=4+5\lambda,\quad 1=3+\lambda,\quad \lambda=-2.$$

Таким образом, искомым уравнением плоскости является уравнение:

$(3-2)x+y+(1-6)z-(4-10)=0,\ x+y-5z+6=0.$

Ответ: $x+y-5z+6=0.$

№ 86. Из пучка, определяемого плоскостями

$$3x+y-2z-6=0 \text{ и } x-2y+5z-1=0$$

выделить две взаимно перпендикулярные плоскости, из которых одна проходит через точку A (2; —3; 4).

Решение. Уравнение пучка плоскостей:

$$3x+y-2z-6+\lambda(x-2y+5z-1)=0,$$

или

$$(3+\lambda)x+(1-2\lambda)y+(-2+5\lambda)z+(-6-\lambda)=0.$$

Выделим из этого пучка плоскость, проходящую через данную точку:

$$(3+\lambda)\cdot 2+(1-2\lambda)\cdot(-3)+(-2+5\lambda)\cdot 4-(6+\lambda)=0,$$

$$6+2\lambda+6\lambda-3-8+20\lambda-6-\lambda=0,$$

$$27\lambda-11=0, \quad \lambda=\frac{11}{27}.$$

$$\left(3+\frac{11}{27}\right)x+\left(1-\frac{2\cdot 11}{27}\right)y+\left(-2+\frac{5\cdot 11}{27}\right)z-$$

$$-\left(6+\frac{11}{27}\right)=0,$$

$$92x+5y+z-173=0.$$

Теперь выделим из данного пучка плоскость, перпендикулярную уже выделенной плоскости:

$$92(3+\lambda)+5(1-2\lambda)+(-2+5\lambda)=0,$$

$$276+92\lambda+5-10\lambda-2+5\lambda=0,$$

$$87\lambda+279=0, \quad \lambda=-\frac{279}{87}=-\frac{93}{29};$$

$$\left(3-\frac{93}{29}\right)x+\left(1+\frac{2\cdot 93}{29}\right)y+\left(-2-\frac{5\cdot 93}{29}\right)z-$$
$$-\left(6-\frac{93}{29}\right)=0,$$

$$-6x+215y-523z-81=0, \quad 6x-215y+523z+81=0.$$

Ответ: $92x+5y+z-173=0$, $6x-215y+523z+81=0$.

№ 87. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения трех плоскостей

$$2x-y-z-1=0, \; x+2z-4=0, \; x-y=0,$$

через начало координат и через точку M (7; 1; 2).

Решение. Найдем точку пересечения трех данных плоскостей, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x-y-z-1=0, \\ x+2z-4=0, \\ x-y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y-z=1, \\ x+2z=4, \\ x-y=0. \end{cases}$$

Найдем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1-2+4=3.$$

Найдем Δx:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=4+2=6.$$

Таким образом,

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{6}{3}=2, \quad x=2.$$

Из третьего уравнения системы находим, что

$$y=x, \; y=2.$$

Из второго уравнения системы находим:

$$z=\frac{4-x}{2}, \quad z=\frac{4-2}{2}=1, \quad z=1.$$

Точка пересечения трех данных плоскостей N (2; 2; 1).

Уравнение плоскости, проходящей через начало координат, следующее:

$$Ax+By+Cz=0.$$

Условие прохождения плоскости через точку $M(7; 1; 2)$ дает уравнение:

$$7A+B+2C=0.$$

Условие прохождения плоскости через точку $N(2; 2; 1)$ дает еще одно уравнение:

$$2A+2B+C=0.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 7A+B+2C=0, \\ 2A+2B+C=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}+2=0, \\ 2\dfrac{A}{C}+2\dfrac{B}{C}+1=0; \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ \\ \end{matrix} \right|$$

$$\begin{cases} -14\dfrac{A}{C}-2\dfrac{B}{C}-4=0, \\ 2\dfrac{A}{C}+2\dfrac{B}{C}+1=0; \end{cases}$$

$$-12\frac{A}{C}-3=0;$$

$$\frac{A}{C}=-\frac{1}{4}; \quad 7\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{B}{C}+2=0,$$

$$\frac{B}{C}=\frac{7}{4}-2=-\frac{1}{4}; \quad \frac{B}{C}=-\frac{1}{4}.$$

Таким образом, $A:B:C=1:1:(-4)$.

Искомое уравнение плоскости:

$$x+y-4z=0.$$

Ответ: $x+y-4z=0$.

№ 88. На линии пересечения двух плоскостей

$$2x+y+z+8=0, \; x-4y-2z-5=0$$

найти точки, отстоящие от плоскости $3x-6y+2z-10=0$ на расстоянии 5 единиц.

Решение. Найдем геометрическое место точек, отстоящих от плоскости $3x-6y+2z-10=0$ на расстоянии 5 единиц

$$\pm 5=\frac{3x-6y+2z-10}{\sqrt{9+36+4}}, \quad \pm 5=\frac{3x-6y+2z-10}{7},$$

$$3x-6y+2z-10=\pm 35.$$

Имеем две новые плоскости:

$$3x-6y+2z-45=0 \text{ и } 3x-6y+2z+25=0,$$

параллельные данной третьей плоскости и расположенные от нее на расстоянии 5 единиц. На этих плоскостях лежат искомые точки. Но по условию искомые точки должны лежать на линии пересечения двух первых данных плоскостей.

Следовательно, искомые точки будут точками пересечения следующих троек плоскостей:

$$\begin{cases} 2x+y+z+8=0, \\ x-4y-2z-5=0, \\ 3x-6y+2z-45=0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x+y+z+8=0, \\ x-4y-2z-5=0, \\ 3x-6y+2z+25=0. \end{cases}$$

Решим первую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y+z=-8, \\ x-4y-2z=5, \\ 3x-6y+2z=45; \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=-16-6-6+12-24-2=-42;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ 45 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 64-30-90+180+96-10=210;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 45 & 2 \end{vmatrix} = 20+45+48-15+180+16=294;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{210}{-42}=-5; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{294}{-42}=-7;$$

$$z=-8-2x-y,$$

$$z=-8+10+7=9, \quad z=9; \quad M_1=(-5;\ -7;\ 9).$$

Решим вторую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y+z=-8, \\ x-4y-2z=5, \\ 3x-6y+2z=-25; \end{cases} \qquad \Delta=-42;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -25 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 64 - 30 + 50 - 100 + 96 - 10 = 70;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & -25 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 25 + 48 - 15 - 100 + 16 = -56;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{70}{-42} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}; \quad x = -\frac{5}{3};$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-56}{-42} = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{4}{3};$$

$$z = -8 - 2x - y, \quad z = -8 + \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = -6;$$

$$z = -6.$$

$$M_2 = \left(-\frac{5}{3}; \quad \frac{4}{3}; -6\right).$$

Ответ: $M_1 = (-5; \ -7; \ 9)$, $M_2 = \left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; -6\right)$.

№ 89. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам 2; 8; 1, и отстоящей от точки $A\ (1; \ -6; \ 0)$ на расстоянии 2 единиц.

Решение. Возьмем уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Обозначив коэффициент пропорциональности буквой k, можем записать:

$$a = 2k, \ b = 8k, \ c = k.$$

Уравнение плоскости примет вид:

$$\frac{x}{2k} + \frac{y}{8k} + \frac{z}{k} = 1, \quad \text{или} \quad 4x + y + 8z - 8k = 0.$$

Коэффициент k определим, использовав расстояние точки (1; −6; 0) от искомой плоскости:

$$\frac{4\cdot 1+1\cdot(-6)+8\cdot 0-8k}{\sqrt{16+1+64}}=\pm 2,$$

$$\frac{4-6-8k}{9}=\pm 2,\quad -2-8k=\pm 18,\quad -8k=\pm 18+2,$$

$$k=\frac{\pm 18+2}{-8};\quad k_1=\frac{18+2}{-8}=-\frac{20}{8}=-2{,}5;$$

$$k_2=\frac{-18+2}{-8}=2.$$

Искомых плоскостей будет две:

$$4x+y+8z+20=0 \text{ и } 4x+y+8z-16=0,$$

которые параллельны между собой.

Ответ: $4x+y+8z+20=0$, $4x+y+8z-16=0$.

№ 90. Установить, что три плоскости

$$2x-4y+5z-21=0,\ x-3z+18=0,\ 6x+y+z-30=0$$

имеют общую точку, и вычислить ее координаты.

Решение. Если определитель Δ системы

$$\begin{cases} 2x-4y+5z=21, \\ x-3z=-18, \\ 6x+y+z=30, \end{cases}$$

отличен от нуля, то три плоскости, выражаемые данными уравнениями, пересекаются в единственной точке:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0+5+72-0+6+4=87\neq 0.$$

Плоскости имеют общую точку. Найдем ее:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 21 & -4 & 5 \\ -18 & 0 & 8 \\ 30 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0-90+360-0+63-72=261;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{261}{87}=3,\ x=3;\quad z=\frac{x+18}{3},$$

$$z=\frac{3+18}{3}=7, \quad z=7; \quad y=30-6x-z,$$

$$y=30-18-7=5, \quad y=5.$$

Ответ: M (3; 5; 7).

№ 91. Проверить, имеют ли общую точку следующие четыре плоскости:

а) $2x+2y-3z-9=0, \quad 5x-y+8z-7=0,$

$x+3y+2z-1=0$ и $3x+5y-z-10=0;$

б) $2x-4y-z+5=0, \quad 3x+5y+4z-3=0,$

$2y+3z-1=0$ и $5x+2y-2=0.$

Решение. 1) Вычислим определитель системы первых трех уравнений:

$$\begin{cases} 2x+2y-3z=9, \\ 5x-y+8z=7, \\ x+3y+2z=1. \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot(-26)-$$

$$-2\cdot 2-3\cdot 16=-104\neq 0.$$

Первые три плоскости имеют общую точку. Найдем ее:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-18-63+16-3-216-28=$$

$$=-312, \quad x=\frac{-312}{-104}=3;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=28-15+72+21-16-90=0, \ y=0;$$

$$2x+2y-3z=9, \quad z=\frac{2x+2y-9}{3}, \ z=\frac{6-9}{3}=-1,$$

$$z=-1; \quad M_1=(3;\ 0;\ -1).$$

Проверим, лежит ли точка M_1 на четвертой плоскости $3x+5y-z-10=0$:

$$3\cdot 3+5\cdot 0-(-1)-10=9+1-10=0.$$

Таким образом, все четыре плоскости имеют общую точку M_1 (3; 0; -1).

2) Найдем определитель системы первых трех уравнений, и если он не равен 0, то решим систему:

$$\begin{cases} 2x-4y-z=-5, \\ 3x+5y+4z=3, \\ \quad\;\; 2y+3z=1; \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=30-6-16+36=44\neq 0.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-75-6-16+5+40+36=$$

$$=-16; \quad x=\frac{-16}{44}=-\frac{4}{11};$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=18-3-8+45=52;$$

$$y=\frac{52}{44}=\frac{13}{11};$$

$$z=\frac{1-2y}{3}, \quad z=\frac{1-\dfrac{26}{11}}{3}=-\frac{5}{11};$$

$$M_2\left(-\frac{4}{11};\ \frac{13}{11};\ -\frac{5}{11}\right).$$

Проверим, лежит ли точка M_2 на четвертой плоскости $5x+2y-2=0$.

$$5\cdot\left(-\frac{4}{11}\right)+2\cdot\frac{13}{11}-2=-\frac{20}{11}+\frac{26}{11}-2=$$

$$=\frac{6}{11}-2\neq 0.$$

Плоскости не имеют общей точки.

Ответ: 1) все четыре плоскости имеют общую точку; 2) плоскости не имеют общей точки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Как расположены следующие плоскости:

а) $2x+3y-5=0$, б) $3z+2=0$, в) $x+2y-3z=0$,

г) $y-5z=0$, д) $3x-2y+z-6=0$.

2. Зная единичный вектор

$$\bar{n}^{\circ}\left\{\frac{4}{13},\quad \frac{12}{13},\quad -\frac{3}{13}\right\},$$

направленный из начала координат перпендикулярно к плоскости, и расстояние плоскости от начала координат $p=7$, составить нормальное уравнение плоскости в векторной и координатной форме.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (1; -2; 10) и имеющей нормальный вектор $\bar{n}$ {5; 1; -3}.

4. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x+6y-3z-12=0$ и координатными плоскостями.

5. Определить, какие из следующих уравнений плоскостей являются нормальными:

а) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-1=0$;

б) $\frac{3}{4}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$;

в) $\frac{4}{5}y-\frac{3}{5}z-2=0$;

г) $x+y-1=0$;

д) $y-1=0$;

е) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-13=0$.

6. Провести плоскость через точку (2; -3; 5), параллельную плоскости $3x+y-4z+1=0$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через две данные точки M_1 (5; -2; 3) и M_2 (6; 1; 0) перпендикулярно к плоскости $3x-y+2z+15=0$. (Решить задачу средствами векторной алгебры.)

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки M (2; 1; 2) и N (1; -2; 3).

9. Какой угол образуют две плоскости

$$2x+3y-z+15=0 \text{ и } 3x-5y-9z+1=0?$$

10. Пересекаются ли плоскости

$$x+2y+3z-1=0,\ 3x-2y-2z+9=0,\ 8x+5y-z-7=0$$

в одной точке?

11. Через линию пересечения плоскостей

$$x+3y-5z+8=0 \text{ и } 5x-2y+3z-1=0$$

провести плоскость, проходящую через начало координат.

12. Доказать, что плоскость $2x-3y+6z-11=0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(-1;\ 1;\ -2)$ и $M_2(1;\ 0;\ 5)$.

13. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$3x-6y-2z+35=0 \text{ и } 3x-6y-2z-7=0.$$

Ответы: 1. а) параллельна оси Oz; б) параллельна плоскости xOy; в) проходит через начало координат; г) проходит через ось Ox; д) отсекает отрезки $a=2$ $b=-3$, $c=6$.

2. $\overline{n}^{\circ}\,\overline{r}-7=0$; $\quad \dfrac{4}{13}x+\dfrac{12}{13}y-\dfrac{3}{13}z-7=0.$

3. $5x+y-3z+27=0$; 4. $v=8$ куб. ед.

5. а) нормальное; б) нет; в) нормальное; г) нет; д) нормальное; е) нормальное.

6. $3x+y-4z+17=0$.

7. $3x-11y-10z-7=0$.

8. $7x-4y-5z=0$.

9. $90°$. 10. Да. 11. $41x-13y+19z=0$.

12. Указание: найти отклонения точек от плоскости.

13. 6 ед.

Глава IV

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§ 1. Прямая линия в пространстве

1. Общие уравнения прямой.

Прямая линия в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей. В этом случае она определяется системой двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

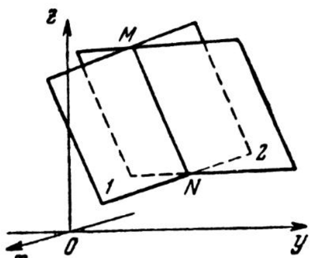
Уравнения (1), рассматриваемые совместно, называются общими уравнениями прямой (черт. 181).

2. Уравнения прямой в двух проектирующих плоскостях.

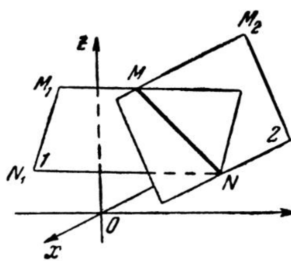
Уравнения прямой в проекциях на координатные плоскости, например, на плоскости xOz и yOz имеют вид:

$$\begin{cases} x = Mz + a \\ y = Nz + b. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) можно также назвать уравнениями прямой в двух проектирующих плоскостях, первая из которых перпендикулярна плоскости xOz, вторая перпендикулярна плоскости yOz (черт. 182).



Черт. 181



Черт. 182

3. Канонические уравнения прямой линии

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}, \quad (3)$$

где a; b; c — координаты точки M_0, лежащей на прямой линии;
x; y; z — текущие координаты точек прямой;
m; n; p — направляющие коэффициенты, пропорциональные направляющим косинусом прямой:

$$m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma.$$

Направляющие косинусы определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \tag{4}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

В формулах (4) можно брать знак плюс или минус соответственно двум противоположным направлениям прямой.

4. Параметрические уравнения прямой линии.

$$\begin{cases} x = mt + a, \\ y = nt + b, \\ z = pt + c, \end{cases} \tag{5}$$

где a; b; c — координаты точки M_0, лежащей на прямой;
x; y; z — текущие координаты точек прямой;
m; n; p — направляющие коэффициенты;
t — переменный параметр.

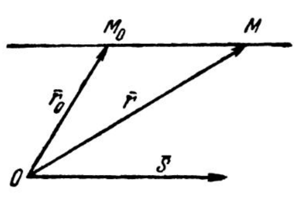
5. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{6}$$

6. Векторное уравнение прямой линии

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{S}t, \tag{7}$$

$\bar{r}\{x, y, z\}$ и $\bar{r}_0\{a;\ b;\ c\}$ — радиусы-векторы точек M $(x;\ y;\ z)$ и M_0 $(a;\ b;\ c)$ на прямой;
$\bar{S}\{m, n, p\}$ — направляющий вектор, параллельный данной прямой;
t — переменный параметр (черт. 183).



Черт. 183

Пусть прямая задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \tag{I}$$

тогда за ее направляющий вектор $\overline{S}$ можно принять векторное произведение $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$ векторов $\overline{n_1}$ (A_1, B_1, C_1) и $\overline{n_2}$ (A_2, B_2, C_2), так как каждый из них перпендикулярен этой прямой и, следовательно, вектор $\overline{n_1}\times\overline{n_2}$ параллелен ей.

Таким образом, направляющий вектор прямой (1) определяется:

$$\overline{S}=[\overline{n_1}\ \overline{n_2}]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

7. Угол между двумя прямыми

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m^2{}_1+n^2{}_1+p^2{}_1}\cdot\sqrt{m^2{}_2+n^2{}_2+p^2{}_2}}. \tag{9}$$

В формуле (9) можно взять любой знак, что соответствует выбору одного из двух смежных углов между данными прямыми.

8. Условие параллельности двух прямых имеет вид:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{10}$$

9. Условие перпендикулярности двух прямых имеет вид:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{11}$$

§ 2. Прямая и плоскость

1. Угол между прямой $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{1}$$

2. Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид:

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{2}$$

3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

4. Если даны две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то уравнение всякой плоскости, проходящей через линию пересечения заданных плоскостей, имеет вид:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad \textbf{(4)}$$

где λ — переменный параметр.

Уравнение (4) называется *уравнением пучка плоскостей.*

5. Условием, при котором две прямые

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{p_2}$$

лежат в одной плоскости, является равенство

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_2 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Если условие (5) выполняется, то прямые лежат в одной плоскости, т. е. они или параллельны, если направляющие коэффициенты пропорциональны, или пересекаются, если направляющие коэффициенты не пропорциональны.

Если же условие (5) не выполняется, то прямые скрещиваются.

6. Условием, при котором прямая

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

лежит в плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, являются следующие равенства:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Aa + Bb + Cc + D = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Примеры решения задач

№ 92. Построить прямую, заданную общими уравнениями

$$\begin{cases} x + 3y + 3z - 6 = 0, \\ 3x + 3y + 4z - 10 = 0. \end{cases}$$

Построение. I способ. Так как две данные плоскости, не параллельные между собой (не выполняется условие параллельности двух плоскостей), то в пересечении они дают прямую.

Построим каждую из данных плоскостей. Первая плоскость на осях координат отсекает отрезки $a=6$, $b=2$, $c=2$. Вторая плоскость отсекает отрезки

$$a_1 = 3\frac{1}{3}, \quad b_1 = 3\frac{1}{3}, \quad c_1 = 2\frac{1}{2}.$$

Линия MN пересечения данных плоскостей и есть искомая прямая.

II способ. Будем искать следы данной прямой на координатных плоскостях. Следом прямой на плоскости есть точка, если прямая не лежит в рассматриваемой плоскости. Чтобы найти след прямой на плоскости xOz, в уравнениях прямой полагаем $y=0$ и решаем полученную систему:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3z-6=0, \\ 3x+4z-10=0; \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 6 \\ -2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} 6x+18z-36=0, \\ -6x-8z+20=0; \\ \hline 10z-16=0; \end{array}$$

$$z=\frac{16}{10}=1{,}6; \quad x+4{,}8-6=0, \quad x=1{,}2.$$

Таким образом, $M\,(1{,}2;\ 0;\ 1{,}6)$ — точка пересечения прямой с плоскостью xOz.

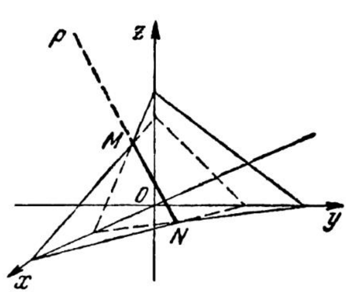
Ищем след прямой на плоскости xOy, полагая в уравнениях прямой $z=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-6=0, \\ 3x+3y-10=0; \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} -3 \\ \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} -3x-9y+18=0, \\ 3x+3y-10=0; \end{array}\right. \\ \hline -6y+8=0; \end{array}$$

$$y=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}; \quad x+4-6=0, \quad x=2.$$

$N\,\left(2;\ \frac{4}{3};\ 0\right)$ — след прямой на плоскости xOy.

Двух точек достаточно для построения прямой. След прямой на плоскости yOz есть точка $P\,(0;\ -2;\ 4)$. Она закрыта координатной плоскостью xOz (черт. 184).



Черт. 184

№ 93. Как расположены следующие прямые:

а) $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 3x-1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3=0, \\ y+5=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y+2z=0, \\ 2x+3y-z=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+5y-6=0, \\ x-2y+3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} y+2z=0, \\ 3y-z=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2y+z=0, \\ 3x-1=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-2y+5z-4=0, \\ x-4y+5z-4=0. \end{cases}$

Решение.

$$\text{а)} \begin{cases} x+y-z+2=0, \\ 3x-1=0. \end{cases}$$

Так как плоскость $3x-1=0$, или $x=\frac{1}{3}$, параллельна плоскости yOz, то и линия пересечения данных плоскостей параллельна этой плоскости (если прямая лежит в плоскости, параллельной другой плоскости, то прямая также параллельна этой плоскости).

$$\text{б)} \begin{cases} 2x-3=0, \\ y+5=0. \end{cases}$$

Плоскость $2x-3=0$, или $x=\frac{3}{2}$, параллельна плоскости yOz; плоскость $y+5=0$, или $y=-5$, параллельна плоскости xOz.

Следовательно, линия пересечения этих двух плоскостей перпендикулярна плоскости xOy, или параллельна координатной оси Oz.

$$\text{в)} \begin{cases} x-y+2z=0, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$$

Обе плоскости проходят через начало координат (в уравнениях плоскостей отсутствуют свободные члены), следовательно, линия их пересечения тоже пройдет через начало координат.

$$\text{г)} \begin{cases} 3x+5y-6=0, \\ x-2y+3=0. \end{cases}$$

Так как в уравнениях обеих плоскостей отсутствует член с координатой $z (C=0)$, то плоскости параллельны оси Oz, а следовательно, и линия их пересечения параллельна оси Oz, или перпендикулярна плоскости xOy.

$$\text{д)}\ \begin{cases} y + 2z = 0, \\ 3y - z = 0. \end{cases}$$

Обе плоскости проходят через ось Ox ($A_1=0$ и $A_2=0$). Линия пересечения этих плоскостей совпадает с осью Ox.

$$\text{е)}\ \begin{cases} 2y + z = 0, \\ 3x - 1 = 0. \end{cases}$$

Первая плоскость проходит через ось Ox, вторая — параллельна плоскости yOz. Следовательно, прямая параллельна плоскости yOz и пересекает ось Ox.

$$\text{ж)}\ \begin{cases} x - 2y + 5z - 4 = 0, \\ x - 4y + 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Обе плоскости отсекают на осях Ox и Oz одинаковые отрезки ($a=a_1=4$, $c=c_1={}^4/_5$), а на оси Oy — разные отрезки ($b_1=-2$, $b_2=-1$).

Следовательно, плоскости пересекаются по прямой, лежащей в плоскости xOz и отсекающей на оси Ox отрезок, равный 4, и на оси Oz отрезок, равный ${}^4/_5$.

№ 94. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку M (1; 2; 3), если направляющий вектор $\overline{S}$ прямой образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы соответственно

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. Проверим, что вектор $\overline{S}$ может составлять с осями координат данные углы:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \cos^2\frac{2}{3}\pi + \cos^2\frac{\pi}{3} +$$

$$+ \cos^2\frac{\pi}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Согласно условию задачи

$$a=1,\ b=2,\ c=3 \text{ и } m=-\frac{1}{2},\quad n=\frac{1}{2},\ p=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставляя данные a, b и c и найденные m, n и p в уравнение (3), будем иметь:

$$\frac{x-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-2}{\frac{1}{2}}=\frac{z-3}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{-1}=$$

$$=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}.$$

Обозначая эти отношения через t:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}=t,$$

получим параметрические уравнения этой прямой:

$$\begin{cases} x=-t+1, \\ y=t+2. \\ z=\sqrt{2t}+3. \end{cases}$$

Ответ:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{\sqrt{2}}; \quad \begin{cases} x=-t+1, \\ y=t+2, \\ z=\sqrt{2t}+3. \end{cases}$$

№ 95. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Для решения этой задачи мы должны знать какую-нибудь точку прямой и направляющий вектор $\bar{S}$.

Определяем координаты некоторой точки M на данной прямой. Для этого выберем произвольно одну из координат. Пусть, например, $x=0$. Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} -2y+3z=4, \\ 2y-5z=4. \end{cases}$$

откуда получаем: $y=-8$, $z=-4$.

Итак, M (0; —8; —4) — точка данной прямой.

Определяем направляющий вектор прямой:

$$\overline{S}=[\overline{n_1}\,\overline{n_2}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=$$

$$=4\overline{i}+14\overline{j}+8\overline{k}.$$

Итак: $\overline{S}=4\overline{i}+14\overline{j}+8\overline{k}.$

Тогда, согласно (3), искомыми каноническими уравнениями прямой будут:

$$\frac{x-0}{4}=\frac{y+8}{14}=\frac{z+4}{8}\quad \text{или}\quad \frac{x-0}{2}=\frac{y+8}{7}=\frac{z+4}{4}.$$

Второе решение приводим для проверки.

От общих уравнений прямой можно перейти к каноническим, и не прибегая к векторному методу.

Решая данные уравнения (1) относительно x и y, найдем уравнения в проекциях.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}z+2,\\[2mm] y=\dfrac{7}{4}z-1.\end{cases}$$

Выражаем из этих уравнений z:

$$z=\frac{x-2}{\frac{1}{2}},\quad z=\frac{y+1}{\frac{7}{4}}$$

и получаем канонические уравнения прямой

$$\frac{x-2}{\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{\frac{7}{4}}=\frac{z-0}{1}.$$

Умножив каждый из направляющих коэффициентов на 4, получим

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-0}{4}.$$

Ответ:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-0}{4}.$$

№ 96. Привести общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x-3y+2z+4=0, \\ 2x+y-3z-6=0 \end{cases}$$

к уравнениям в проекциях на координатные плоскости xOz и yOz.

Решение. Чтобы найти уравнение проекции прямой на координатную плоскость xOz, необходимо исключить из общих уравнений данной прямой y:

$$\begin{cases} x-3y+2z+4=0, \\ 2x+y-3z-6=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-3y+2z+4=0, \\ 6x+3y-9z-18=0. \end{cases}$$

$$\overline{7x-7z-14=0}$$

$$x-z-2=0, \quad z=x-2.$$

Ищем уравнение проекции прямой на плоскость yOz, исключая из общих уравнений прямой x:

$$\begin{cases} x-3y+2z+4=0, \\ 2x+y-3z-6=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-6y+4z+8=0, \\ -2x-y+3z+6=0; \end{cases}$$

$$\overline{-7y+7z+14=0;}$$

$$y-z-2=0, \quad z=y-2.$$

$$\begin{cases} z=x-2, \\ z=y-2, \end{cases} \text{— уравнения прямой в проекциях.}$$

№ 97. *Решить самостоятельно.* Привести общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 3x-5y+z-8=0, \\ 2x+y-z+2=0 \end{cases}$$

к каноническому виду.

Указания. Для приведения общих уравнений прямой к каноническому виду целесообразно пользоваться формулой

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Ответ:

$$\frac{x}{4}=\frac{y+\frac{1}{2}}{5}=\frac{z-\frac{1}{2}}{13} \quad \text{или}$$

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-7}{13}.$$

№ 98. Найти уравнение проекции прямой

$$\frac{x-1}{9}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-0}{-7}$$

на плоскость P, заданную уравнением $2x-y-3z+6=0$.

Решение. Проектирующая плоскость Q проходит через данную прямую и перпендикулярна к данной плоскости P.

Из уравнений прямой следует, что $M_1\ (1;\ -1;\ 0)$ — одна из точек прямой. Так как плоскость Q проходит через данную прямую, то она имеет с прямой общую точку $M_1\ (1;\ -1;\ 0)$ и параллельна этой прямой. Поэтому записываем уравнение плоскости Q в виде

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-0)=0$$

и по условию параллельности плоскости Q и данной прямой имеем:

$$9A-4B-7C=0. \qquad (1)$$

Так как плоскость Q перпендикулярна плоскости P, то

$$2A-B-3C=0. \qquad (2)$$

Решаем систему уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} 9\dfrac{A}{C}-4\dfrac{B}{C}-7=0, \\ 2\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}-3=0. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{A}{C}=-5 \quad \text{и} \quad \frac{B}{C}=-13.$$

Делим уравнение (Q) на C, получим:

$$\frac{A}{C}(x-1)+\frac{B}{C}(y+1)+(z-0)=0.$$

Подставляя значения $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, будем иметь:

$$-5(x-1)-13(y+1)+z=0, \text{ или } 5x+13y-z+8=0.$$

Искомая проекция есть линия пересечения плоскостей P и Q, следовательно, ее уравнениями будут:

$$\begin{cases} 2x-y-3z+6=0, \\ 5x+13y-z+8=0. \end{cases}$$

Второе решение приведено с целью проверки.

Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка проектирующей плоскости Q. Точка $M_1(1;\ -1;\ 0)$ лежит на данной прямой. Тогда вектор $\overline{M_1M}\{x-1;\ y+1;\ z-0\}$ лежит в плоскости Q, а направляющий вектор данной прямой $\overline{S}\{9;\ -4;\ -7\}$ и нормальный вектор $\overline{n}\{2;\ -1;\ -3\}$ плоскости P можно также расположить в плоскости Q. Условие компланарности векторов $\overline{M_1\ M}$, $\overline{S}$ и $\overline{n}$ даст уравнение плоскости Q:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 9 & -4 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$5x+13y-z+8=0.$$

Это уравнение в совокупности с уравнением $2x-y-3z+6=0$ плоскости P и определяют искомую проекцию, т. е.:

$$\begin{cases} 2x-y-3z+6=0, \\ 5x+13y-z+8=0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} 2x-y-3z+6=0, \\ 5x+13y-z+8=0. \end{cases}$

№ 99. Определить косинус угла между двумя прямыми:

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0, \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z-2=0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим направляющие векторы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ для данных прямых:

$$\overline{S}_1 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\overline{i} + 2\overline{j} + 11\overline{k};$$

$$\overline{S}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\,\overline{i} + 12\overline{j} + 4\overline{k}.$$

Итак,

$$m_1 = 10,\ n_1 = 2,\ p_1 = 11 \text{ и } m_2 = 3,\ n_2 = 12,\ p_2 = 4.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \pm \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m^2{}_1 + n^2{}_1 + p^2{}_1} \cdot \sqrt{m^2{}_2 + n^2{}_2 + p^2{}_2}} =$$

$$= \pm \frac{10\cdot 3 + 2\cdot 12 + 11\cdot 4}{\sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2} \cdot \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2}} = \pm \frac{98}{\sqrt{225}\cdot\sqrt{169}} =$$

$$= \pm \frac{98}{15\cdot 13} = \pm \frac{98}{195}.$$

Полученные два значения для $\cos\alpha$ соответствуют двум смежным углам.

Ответ: $\cos\alpha = \pm\frac{98}{195}$.

№ 100. *Решить самостоятельно.* Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} y = 3x - 5, \\ z = -2x + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = x, \\ z = 1. \end{cases}$$

Указания. Приведите уравнения прямых к каноническому виду.

Первая прямая. Из первого уравнения и из 2-го уравнения прямой выразите x.

Вы получите

$$\frac{x - 0}{1} = \frac{y + 5}{3} = \frac{z - 3}{-2}, \qquad (1)$$

отсюда найдете m_1, n_1 и p_1.

Вторая прямая. Таким же образом определяете m_2, n_2 и p_2 из уравнений II.

Угол между прямыми найдите по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m^2{}_1 + n^2{}_1 + p^2{}_1} \cdot \sqrt{m^2{}_2 + n^2{}_2 + p^2{}_2}}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos \frac{2}{7}\sqrt{7}.$

№ 101. Проверить, лежат ли прямые

а) $\begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0, \\ 2y - z - 6 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 12z + 49 = 0, \\ 4x - 37z + 148 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 3z - 1, \\ y = -5z + 7 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 2x - 5, \\ z = 7x + 2 \end{cases}$

в одной плоскости.

Решение. Мы должны проверить, выполняется ли условие

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & в_2 - в_1 & c_2 - c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (A)$$

для заданных пар прямых.

Сначала преобразуем уравнения к каноническому виду.

Первая прямая:

а) $\begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0, \\ 2y - z - 6 = 0; \end{cases}$ $3z = 2x + 2,$

$$z = \frac{2x+2}{3} = \frac{x+1}{\frac{3}{2}}; \qquad z = 2y - 6 = \frac{y-3}{\frac{1}{2}}.$$

Имеем канонические уравнения первой прямой:

$$\frac{x+1}{\frac{3}{2}} = \frac{y-3}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{1}, \text{ или } \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}. \quad (1)$$

Вторая прямая

$$\begin{cases} x - 12z + 49 = 0, \\ 4y - 37z + 148 = 0; \end{cases} \qquad z = \frac{x+49}{12},$$

$$z = \frac{4y+148}{37} = \frac{y+37}{\frac{37}{4}}.$$

Канонические уравнения второй прямой:

$$\frac{x+49}{12} = \frac{y+37}{\frac{37}{4}} = \frac{z}{1}, \quad \text{или} \quad \frac{x+49}{48} = \frac{y+37}{37} = \frac{z}{4}. \tag{2}$$

Проверим теперь, лежат ли прямые (1) и (2) в одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} -49+1 & -37-3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 48 & 37 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -48 & -40 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 48 & 37 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -48\cdot4 - 40\cdot2\cdot48 + 48\cdot37\cdot2 + 40\cdot4\cdot3 =$$

$$= -48\cdot2(2+40-37-5) = -96\cdot0 = 0.$$

Прямые (1) и (2) лежат в одной плоскости.

Первая прямая:

б) $\begin{cases} x = 3z - 1, \\ y = -5z + 7; \end{cases} \qquad z = \frac{x+1}{3}; \quad z = \frac{y-7}{-5};$

$\frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z-0}{1}$ — канонические уравнения прямой (3).

Вторая прямая:

$$\begin{cases} y = 2x - 5, \\ z = 7x + 2; \end{cases} \qquad x = \frac{y+5}{2}, \quad x = \frac{z-2}{7};$$

$\frac{x-0}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-2}{7}$ — канонические уравнения прямой (4).

Проверим, лежат ли прямые (3) и (4) в одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} 0+1 & -5-7 & 2-0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -35 + 12 - 12 + 10 - 2 + 252 = 225 \neq 0.$$

Прямые (3) и (4) не лежат в одной плоскости, т. е. они являются скрещивающимися прямыми.

Ответ: а) прямые (1) и (2) лежат в одной плоскости;

б) прямые (3) и (4) не лежат в одной плоскости.

№ 102. Найти уравнения прямой, пересекающей прямую

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{-2},$$

проходящей через точку A (2; —2; 0) и образующей с осью Oy угол в 60°.

Решение. Уравнения прямой будем искать по формуле:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \quad (1)$$

Подставив в последние уравнения координаты точки A, получим:

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-0}{p}. \quad (1')$$

Теперь задача заключается в том, чтобы найти направляющие коэффициенты m, n и p.

По условию $\beta = 60°$, следовательно, $\cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Так как направляющие коэффициенты пропорциональны направляющим косинусам, т. е. $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$, то уравнения (1′) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x-2}{\cos\alpha} = \frac{y+2}{\frac{1}{2}} = \frac{z-0}{\cos\gamma}. \quad (1)$$

Для нахождения направляющих косинусов используем соотношение между направляющими косинусами прямой в пространстве

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

и условие того, что искомая прямая (1″) лежит в одной плоскости с данной прямой

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m & n & p \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Составляем первое уравнение с неизвестными $\cos\alpha$ и $\cos\gamma$:

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1, \text{ или } \cos^2\alpha + \cos^2\gamma = \frac{3}{4}.$$

Составляем второе уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2+3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ \cos\alpha & \frac{1}{2} & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ \cos\alpha & \frac{1}{2} & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$-1 - 2\cos\alpha - \cos\gamma + 1 = 0, \text{ или } \cos\gamma = -2\cos\alpha.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\gamma = \dfrac{3}{4}, \\ \cos\gamma = -2\cos\alpha. \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha = \dfrac{3}{4}, \\ 5\cos^2\alpha = \dfrac{3}{4}, \ \cos^2\alpha = \dfrac{3}{4\cdot 5}, \end{array} \right.$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{10}, \ \cos\gamma = -2\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{10}\right) = \mp\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Подставим найденные значения в (1), получим:

$$\frac{x-2}{\pm\frac{\sqrt{15}}{10}} = \frac{y+2}{\frac{1}{2}} = \frac{z-0}{\mp\frac{\sqrt{15}}{5}},$$

или после упрощения:

$$\frac{x-2}{\pm\sqrt{15}}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-0}{\pm 2\sqrt{15}}, \quad \frac{x-2}{\pm 3}=\frac{y+2}{\sqrt{15}}=\frac{z-0}{\mp 6}.$$

Ответ: имеются две прямые, удовлетворяющие условию:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{\sqrt{15}}=\frac{z-0}{-6} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{\sqrt{15}}=\frac{z-0}{6}.$$

№ 103. Через точку A (3; —4; 6) провести прямую, параллельную биссектрисе координатного угла yOz.

Решение. Составим уравнения биссектрисы координатного угла yOz.

Прямая, лежащая в плоскости yOz, образует с осью Ox угол, равный 90°, поэтому $\cos\alpha = \cos 90° = 0$.

Биссектриса координатного угла yOz образует с осями Oy и Oz углы в 45°, поэтому $\cos\beta = \cos\gamma = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Напишем уравнения биссектрисы угла yOz как прямой, проходящей через начало координат, в следующем виде:

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}.$$

Подставив найденные значения направляющих косинусов, получим уравнения биссектрисы угла yOz:

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

или после сокращения направляющих коэффициентов на $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

Уравнения искомой прямой будем искать в виде:

$$\frac{x-3}{m}=\frac{y+4}{n}=\frac{z-6}{p}.$$

Использовав условие параллельности двух прямых, найдем:

$$\frac{m}{0}=\frac{n}{1}=\frac{p}{1}, \text{ или } m:n:p=0:1:1.$$

Таким образом, уравнения искомой прямой следующие:

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-6}{1}.$$

Ответ: $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-6}{1}$.

№ 104. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M_1 (2; —3; 4) и перпендикулярной прямым

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}; \quad \frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}.$$

Решение. Уравнение искомой прямой суть:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

Из условия перпендикулярности искомой прямой с данными имеем:

$$\begin{cases} m-n+p=0, \\ 2m+n+3p=0. \end{cases}$$

Из полученной системы найдем отношения направляющих коэффициентов

$$\begin{cases} \dfrac{m}{p}-\dfrac{n}{p}+1=0, \\ 2\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}+3=0, \end{cases}$$

откуда $\dfrac{m}{p}=-\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{n}{p}=-\dfrac{1}{3}$.

Следовательно, $m:n:p=4:1:(-3)$.

Уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}.$$

Второе решение приведено с целью проверки.

Данные прямые имеют направляющие векторы

$$\overline{S}_1\{1;\ -1;\ 1\} \text{ и } \overline{S}_2\{2;\ 1;\ 3\}.$$

Так как искомая прямая перпендикулярна данным прямым, то за ее направляющий вектор можно принять векторное произведение $[\overline{S}_1, \overline{S}_2]$:

$$\overline{S} = [\overline{S}_1\,\overline{S}_2\,] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k},$$

или $$\overline{S}\{m;\ n;\ p\} = \overline{S}\{-4;\ -1;\ 3\}.$$

Отсюда следует, что координаты направляющего вектора искомой прямой равны:

$$m = -4,\ n = -1,\ p = 3.$$

Искомая прямая имеет уравнения

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-3}{3}, \text{ или } \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-3}.$$

№ 105. Найти уравнения перпендикуляра, общего к двум прямым

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1} \text{ и } \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

Решение. Проверим, не пересекаются ли две данные прямые:

$$\begin{vmatrix} 0+5 & 0-3 & -2+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -15 - 1 - 6 - 2 - 5 + 9 = -20 \neq 0.$$

Данные прямые не пересекаются.

Уравнения перпендикуляра будем искать в виде:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}. \qquad (1)$$

Направляющие коэффициенты m, n и p мы найдем из условия перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Из перпендикулярности искомой прямой с первой из данных прямых имеем:

$$m-n+p=0.$$

Аналогично получаем второе уравнение:

$$2m+n+3p=0.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} m-n+p=0, \\ 2m+n+3p=0, \end{cases}$$

из которой найдем отношение направляющих коэффициентов.

$$\begin{cases} \dfrac{m}{p}-\dfrac{n}{p}+1=0, \\ 2\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}+3=0, \end{cases} \quad 3\frac{m}{p}+4=0,\ \frac{m}{p}=-\frac{4}{3}; \quad 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{n}{p}+3=0,$$

$$\frac{n}{p}=\frac{8}{3}-3=-\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $m:n:p=4:1:(-3)$.

Уравнения перпендикуляра принимают вид:

$$\frac{x-a}{4}=\frac{y-b}{1}=\frac{z-c}{-3}, \qquad (1)$$

где $(a;\ b;\ c)$ — точка, через которую проходит искомый перпендикуляр. Поскольку можно брать любую точку, но лежащую на перпендикуляре, то положим, например, $a=0$, а координаты b и c найдем из условия пересечения перпендикуляра с каждой из данных прямых:

$$\begin{vmatrix} 2 & b-3 & c+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 4 & b & c-4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Раскройте эти определители и решите полученную систему уравнений; в результате получается: $b=1$ и $c=1$.

Таким образом, уравнения искомого перпендикуляра следующие:

$$\frac{x-0}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-3}.$$

Ответ: $\dfrac{x-0}{4}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$.

№ 106. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (4; −3; 1) и параллельно прямым

$$\frac{x-0}{6}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-3} \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}. \quad (2)$$

Решение. Уравнение всякой плоскости, проходящей через данную точку M_1 (4; −3; 1), имеет вид:

$$A(x-4)+B(y+3)+C(z-1)=0. \qquad (3)$$

Искомая плоскость параллельна данным прямым (1) и (2), поэтому, применяя условие параллельности прямой и плоскости, будем иметь:

$$\begin{cases} 6A+2B-3C=0, \\ 5A+4B+2C=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6\dfrac{A}{C}+2\dfrac{B}{C}-3=0, \\ 5\dfrac{A}{C}+4\dfrac{B}{C}+2=0. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, найдем:

$$\frac{A}{C}=\frac{8}{7}, \quad \frac{B}{C}=-\frac{27}{14}.$$

Делим уравнение (3) на C и подставляем значения $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, получим:

$$\frac{8}{7}(x-4)-\frac{27}{14}(y+3)+z-1=0, \text{ или}$$

$$16x-27y+14z-159=0.$$

Второе решение приведено с целью проверки.

Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка искомой плоскости.

Тогда векторы

$$\overline{M_1M}\{x-4;\ y+3;\ z-1\},\ \overline{S_1}\{6;\ 2;\ -3\} \ \text{ и } \ \overline{S_2}\{5; 4; 2\}$$

компланарны.

Воспользовавшись условием компланарности, имеем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z-1 \\ 6 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Откуда имеем:

$$16x-27y+14z-159=0.$$

Ответ: $16x-27y+14z-159=0.$

№ 107. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0. \\ 6y + 1 = 0 \end{cases}$$

и пересекающей другую прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ под углом $45°$.

Решение. Напишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую в следующем виде:

$$x - y + 3 + \lambda(6y + 1) = 0,$$

или

$$x + (6\lambda - 1)y + 3 + \lambda = 0. \qquad (1)$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

$$\sin\varphi = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}; \ A = 1, \ B = 6\lambda - 1, \ C = 0;$$

$$m = 1, \ n = 1, \ p = 4.$$

Подставив эти данные, получим уравнение с неизвестным λ:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 6\lambda - 1}{\sqrt{1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 16}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6\lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda + 2} \cdot 3\sqrt{2}}, \quad \text{или} \quad \frac{2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda + 2}} = 1.$$

Решая это уравнение, найдем:

$$2\lambda = \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda + 2}, \quad 4\lambda^2 = 4\lambda^2 - 4\lambda + 2,$$

$$4\lambda = 2, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

Подставляя найденное значение λ в пучок плоскостей (1), найдем уравнение искомой плоскости:

$$x + \left(6 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)y + 3 + \frac{1}{2} = 0, \ x + 2y + \frac{7}{2} = 0.$$

$$2x + 4y + 7 = 0.$$

Ответ: $2x + 4y + 7 = 0$.

№ 108. Найти проекцию точки $A\ (1;\ -3;\ 2)$ на плоскость

$$6x+3y-z-41=0.$$

Решение. Проекцией данной точки на плоскость есть точка пересечения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости, с этой плоскостью.

Уравнения перпендикуляра будем искать в виде:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-2}{p}, \qquad (1)$$

где направляющие коэффициенты найдем из условия перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{m}{6}=\frac{n}{3}=\frac{p}{-1},$$

или

$$m:n:p=6:3:(-1).$$

Уравнения (1) принимают вид:

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{-1}. \qquad (2)$$

Чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью, уравнения (2) необходимо преобразовать в параметрические уравнения:

$$\frac{x-1}{6}=t,\ \frac{y+3}{3}=t,\ \frac{z-2}{-1}=t,$$

откуда:

$$x=6t+1,\ y=3t-3,\ z=-t+2. \qquad (3)$$

Подставив эти значения x, y и z в уравнение плоскости, найдем параметр t:

$$6(6t+1)+3(3t-3)-(-t+2)-41=0,$$

$$36t+6+9t-9+t-2-41=0,\ 46t-46=0,\ t=1.$$

Теперь по формулам (3) найдем проекцию данной точки на данную плоскость:

$$x=6+1=7,\ y=3-3=0,\ z=-1+2=1.$$

Искомая проекция точки будет $A_1\ (7;\ 0;\ 1)$.

№ 109. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее:

Прямая	Плоскость
а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$,	$3x-y+2z+5=0$;
б) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$,	$4x+2y+z+24=0$;
в) $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{2}$,	$4x+y-z=0$.

Решение. Условием того, что прямая лежит в плоскости, являются два равенства:

$$Am+Bn+Cp=0,\ Aa+Bb+Cc+D=0,$$

где A, B, C и D — коэффициенты общего уравнения плоскости;

a, b, c — координаты точки, через которую проходит прямая;

m, n, p — направляющие коэффициенты прямой.

Если $Aa+Bb+Cc+D\neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

Если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то прямая пересекает плоскость.

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ и $3x-y+2z+5=0$.

$$Am+Bn+Cp=3\cdot 2-1\cdot 1+2\cdot 1=6-1+2=7\neq 0,$$

прямая пересекает плоскость.

Найдем точку их пересечения. Для этого преобразуем канонические уравнения прямой в параметрические уравнения:

$$\frac{x-1}{2}=t,\ \frac{y+2}{1}=t,\ \frac{z-2}{1}=t;\ x=2t+1,\ y=t-2,$$

$$z=t+2.$$

Подставим эти значения x, y и z в уравнение плоскости:

$$3(2t+1)-(t-2)+2(t+2)+5=0,$$

$$6t+3-t+2+2t+4+5=0,$$
$$7t+14=0,\ t=-2;\ x=2\cdot(-2)+1=-3;$$
$$y=-2-2=-4;\quad z=-2+2=0.$$

Прямая пересекает плоскость в точке $(-3;\ -4;\ 0)$.

б) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ и $4x+2y+z+24=0$.

$$Am+Bn+Cp=4\cdot(-2)+2\cdot3+1\cdot2=-8+6+2=0;$$

$$Aa+Bb+Cc+D=4\cdot2+2\cdot3+1\cdot1+24=39\neq0,$$

прямая параллельна плоскости.

в) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+5}{2}$ и $4x+y-7=0$.

$$Am+Bn+Cp=4\cdot(-1)+1\cdot4+0\cdot2=-4+4=0,$$

$$Aa+Bb+Cc+D=4\cdot2+1\cdot(-1)+0\cdot(-5)-7=8-1-7=0,$$

прямая лежит в плоскости.

Ответ: а) прямая пересекает плоскость в точке $(-3;\ -4;\ 0)$; б) прямая параллельна плоскости; в) прямая лежит в плоскости.

№ 110. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости xOz, проходящей через начало координат и перпендикулярную к прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}. \qquad (1)$$

Решение. Согласно условию задачи прямая проходит через начало координат, поэтому ее канонические уравнения имеют вид:

$$\frac{x-0}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-0}{p}.$$

Так как прямая лежит в плоскости xOz, то направляющий вектор $\overline{S}\{m;\ n;\ p\}$ перпендикулярен к оси Oy, поэтому $n=0$.

Из условия перпендикулярности прямых (1) и (2), следует, что $3m+p=0$, откуда $p=-3m$.

Подставляя $p=-3m$ в уравнения (2) и сокращая на m, получаем искомые уравнения прямой:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{-3}.$$

Ответ: $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{-3}$.

№ 111. *Решить самостоятельно.* Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;\ -5;\ 3)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0. \end{cases}$$

Указания. Канонические уравнения всякой прямой, проходящей через данную точку $M(2;\ -5;\ 3)$, имеют вид:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+5}{n}=\frac{z-3}{p},$$

где m, n, p — проекции направляющего вектора $\overline{S}$ данной прямой.

Находите направляющий вектор $\overline{S}$:

$$\overline{S}=[\overline{n_1}\ \overline{n_2}],$$

и, следовательно, вы получите значения m, n и p.

Ответ: $\frac{x-2}{9}=\frac{y+5}{5}=\frac{z-3}{1}$.

№ 112. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $x+2y=0$ и пересекающей прямые

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$

Решение. Если прямая, лежащая в плоскости $x+2y=0$, пересекает две данные прямые, то и эти прямые пересекают данную плоскость в некоторых двух точках, через которые проходит искомая прямая. Поэтому найдем точки пересечения двух данных прямых с данной плоскостью.

Точка пересечения первой прямой с плоскостью:

$$x=t,\quad y=4t,\quad z=-t+1;\quad t+8t=0,\quad t=0.$$

$$x=0,\quad y=0,\quad z=1;\quad A(0;\ 0;\ 1).$$

Точка пересечения второй прямой с плоскостью:

$$x=2t+4,\ y=1,\ z=-t+2;\ 2t+4+2=0,\ t=-3;$$

$$x=-6+4=-2,\ y=1,\ z=3+2=5;\ B(-2;\ 1;\ 5).$$

Уравнения прямой будем искать по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5-1},\quad \frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{4}$.

№ 113. Через начало координат провести плоскость, параллельную к двум пересекающимся прямым

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{7}=\frac{z-3}{4}\quad \text{и}\quad \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}.$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид:

$$Ax+By+Cz=0. \tag{1}$$

Коэффициенты A, B и C найдем из условия параллельности прямой и плоскости:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Из параллельности плоскости к первой прямой составим первое уравнение:

$$2A+B+4C=0.$$

Из параллельности плоскости ко второй прямой получаем второе уравнение:

$$3A-2B+C=0.$$

Из системы

$$\begin{cases} 2A + B + 4C = 0, \\ 3A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

находим отношение коэффициентов A, B, C:

$$\begin{cases} 2\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + 4 = 0, \\ 3\frac{A}{C} - 2\frac{B}{C} + 1 = 0; \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ \\ \end{matrix} \right| \left| \begin{cases} 4\frac{A}{C} + 2\frac{B}{C} + 8 = 0, \\ 3\frac{A}{C} - 2\frac{B}{C} + 1 = 0; \end{cases} \right.$$

$$7\frac{A}{C} + 9 = 0,$$

$$\frac{A}{C} = -\frac{9}{7}; \quad \frac{B}{C} = -\frac{10}{7}.$$

Разделим уравнение (1) на коэффициент C:

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + z = 0. \qquad (1)$$

Подставим найденные значения $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$:

$$-\frac{9}{7}x - \frac{10}{7}y + z = 0, \quad \text{или} \quad 9x + 10y - 7z = 0.$$

Ответ: $9x+10y-7z=0$.

№ 114. Составить уравнение плоскости, содержащей пересекающиеся прямые

$$\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1} = \frac{z-1}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Решение. Напишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через первую прямую. Для этого запишем уравнения прямой в следующем виде:

$$\begin{cases} x = 2y - 3, \\ x = -z + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка:

$$x - 2y + 3 + \lambda(x + z - 1) = 0. \qquad (1)$$

Выделим из этого пучка плоскость, проходящую и через вторую прямую. Возьмем на второй прямой произвольную точку, например, положив $z=0$, найдем $x=-7$, $y=8$. Так как эта точка не удовлетворяет уравнениям первой прямой, то она не является точкой пересечения данных прямых.

Подставим в уравнение пучка (1) координаты точки $(-7;\ 8;\ 0)$:

$$-7-16+3+\lambda(-7+0-1)=0,\quad -20-8\lambda=0,$$
$$\lambda=-\frac{5}{2}.$$

Теперь, подставив значение λ в уравнение пучка (1). найдем искомую плоскость:

$$x-2y+3-\frac{5}{2}(x+z-1)=0,\quad 2x-4y+6-$$
$$-5x-5z+5=0,\ -3x-4y-5z+11=0.$$
$$3x+4y+5z-11=0.$$

Ответ: $3x+4y+5z-11=0$.

№ 115. Через точку пересечения плоскости $3x-y-$ $-2z-5=0$ с прямой $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ провести прямую, лежащую в этой плоскости и перпендикулярную к данной прямой.

Решение. Найдем точку пересечения данных плоскости и прямой:

$$\frac{x-7}{5}=t,\ \frac{y-4}{1}=t,\ \frac{z-5}{4}=t;\ x=5t+7,\ y=t+4,$$
$$z=4t+5.$$

Подставив значения x, y и z в уравнение плоскости, найдем параметр t:

$$3(5t+7)-(t+4)+2(4t+5)-5=0,$$
$$15t+21-t-4+8t+10-5=0, 22t+22=0,\ t=-1.$$

Точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты:

$$x=5\cdot(-1)+7=2,\ y=-1+4=3,\ z=4\cdot(-1)+5=1,$$

или $(2;\ 3;\ 1)$.

Уравнения прямой будем искать в виде:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y-3}{n}=\frac{z-1}{p}. \qquad (1)$$

Так как искомая прямая лежит в данной плоскости, то можно считать, что выполняется условие параллельности прямой и плоскости, которое имеет вид:

$$Am+Bn+Cp=0, \text{ т. е. } 3m-n+2p=0.$$

Воспользуемся также условием перпендикулярности искомой прямой к данной:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0, \text{ т. е. } 5m+n+4p=0.$$

Из системы уравнений $\begin{cases} 3m-n+2p=0, \\ 5m+n+4p=0 \end{cases}$

найдем отношение коэффициентов m, n и p:

$$\begin{cases} 3\dfrac{m}{p}-\dfrac{n}{p}+2=0, \\ 5\dfrac{m}{p}+\dfrac{n}{p}+4=0; \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{m}{p}=-\dfrac{3}{4};\ 3\left(-\dfrac{3}{4}-\dfrac{n}{p}+\right. \\ \left.+2\right)=0, \\ -\dfrac{9}{4}-\dfrac{n}{p}+2=0, \dfrac{n}{p}=-\dfrac{1}{4}. \end{array} \right.$$

$$8\frac{m}{p}+6=0.$$

Таким образом,

$$m:n:p=3:1:(-4).$$

Уравнения искомой прямой будут:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-4}.$$

О т в е т: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-4}.$

№ 116. Составить уравнения прямой, проходящей через точку пересечения прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{5}$ и плоскости $3x-4y+2z-1=0$ и точку $M\ (3;\ -3;\ 0)$.

Решение. Прежде чем составлять уравнения прямой, найдем точку пересечения данной прямой с данной плоскостью. Преобразуем канонические уравнения прямой в параметрические

$$\frac{x-3}{2}=t,\ \frac{y+1}{-1}=t,\ \frac{z-2}{5}=t;$$

$$x=2t+3,\quad y=-t-1,\quad z=5t+2.\quad (1)$$

Подставим эти значения x, y и z в уравнение плоскости:

$$3(2t+3)-4(-t-1)+2(5t+2)-1=0.$$

Решив последнее уравнение, найдем параметр t:

$$6t+9+4t+4+10t+4-1=0,\ 20t+16=0,$$

$$t=-\frac{4}{5}.$$

Подставив теперь значение параметра t в формулу (1), найдем вторую точку, через которую проходит искомая прямая:

$$x=2\left(-\frac{4}{5}\right)+3=-\frac{8}{5}+3=\frac{7}{5};$$

$$y=\frac{4}{5}-1=-\frac{1}{5};\ z=5\left(-\frac{4}{5}\right)+2=-4+2=-2.$$

Обозначим найденную точку $N\left(\frac{7}{5};-\frac{1}{5};\ -2\right)$.

Уравнения прямой будем искать по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

$$\frac{x-3}{\frac{7}{5}-3}=\frac{y+3}{-\frac{1}{5}+3}=\frac{z-0}{-2-0},$$

$$\frac{x-3}{-\frac{8}{5}}=\frac{y+3}{\frac{14}{5}}=\frac{z-0}{-2},\quad \frac{x-3}{-8}=\frac{y+3}{14}=\frac{z-0}{-10},$$

или окончательно: $\frac{x-3}{4}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-0}{5}$.

Ответ: $\frac{x-3}{4}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z-0}{5}$.

№ 117. Найти расстояние от точки A (1; 3; 5) до прямой

$$\frac{x+30}{6}=\frac{y-0}{2}=\frac{z+\frac{5}{2}}{-1}.$$

Решение. Чтобы найти кратчайшее расстояние от точки до прямой в пространстве, необходимо найти точку пересечения перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку, и взять расстояние между двумя точками. Точку пересечения перпендикуляра с данной прямой можно найти путем пересечения прямой с плоскостью, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой. (Если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через точку пересечения прямой и плоскости.)

Напишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку:

$$A(x-1)+B(y-3)+C(z-5)=0.$$

Коэффициенты A, B, C найдем из условия перпендикулярности прямой и плоскости:

$$A:B:C=m:n:p,$$

т. е.

$$A:B:C=6:2:(-1).$$

Уравнение плоскости будет:

$$6(x-1)+2(y-3)-(z-5)=0,$$

или

$$6x+2y-z-7=0.$$

Найдем точку пересечения данной прямой с найденной плоскостью:

$$\frac{x+30}{6}=t,\quad \frac{y}{2}=t,\quad \frac{z-\frac{5}{2}}{-1}=t;\ x=6t-30,$$

$$y=2t,\ z=-t-\frac{5}{2};$$

$$6(6t-30)+2\cdot 2t-\left(-t-\frac{5}{2}\right)-7=0,$$

$$36t-180+4t+t+\frac{5}{2}-7=0,$$

$$41t-\frac{362}{2}=0,\quad t=\frac{369}{2\cdot 41}=\frac{9}{2},\qquad t=\frac{9}{2}.$$

Точка пересечения:

$$x=6\cdot\frac{9}{2}-30=-3,\quad y=2\cdot\frac{9}{2}=9,$$

$$z=-\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=-7;\quad B(-3;\ 9;\ -7).$$

Найдем теперь расстояние между точками A и B по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2};$$

$$AB=\sqrt{(-3-1)^2+(9-3)^2+(-7-5)^2}=$$

$$=\sqrt{16+36+144}=\sqrt{196}=14.$$

Ответ: 14 ед. длины.

№ 118. Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{-2}\ (1)\quad \text{и}\quad \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{1}\ (2).$$

Решение. Прежде всего установим, что данные прямые не лежат в одной плоскости.

В нашем случае

$$a_1=2,\ b_1=-2,\ c_1=-1,\ a_2=0,\ b_2=0,\ c_2=1$$

и

$$m_1=1,\ n_1=-3,\ p_1=-2,\ m_2=1,\ n_2=1,\ p_2=1.$$

Применяя условие

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0-2 & 0+2 & 1+1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot(-1)-2\cdot 3+2\cdot 4=4\neq 0.$$

Итак, данные прямые не лежат в одной плоскости.

Искомое расстояние, очевидно, будет равно расстоянию между параллельными плоскостями P_1 и P_2, проведенными соответственно через эти прямые (1) и (2).

Направляющие векторы прямых (1) и (2) суть:

$$\overline{S_1}\{1;\ -3;\ -2\} \quad \text{и} \quad \overline{S_2}\{1;\ 1;\ 1\}.$$

Тогда вектор

$$\overline{n} = [\overline{S_2}\,\overline{S_1}] = -[\overline{S_1}\,\overline{S_2}] = -\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}$$

есть общая нормаль плоскостей P_1 и P_2.

Точки $M_1\,(2;\ -2;\ -1)$ и $M_2\,(0;\ 0;\ 1)$ являются точками прямых соответственно (1) и (2).

Искомое расстояние h равно абсолютной величине проекции вектора $\overline{M_2M_1}\,\{2;\ -2;\ -2\}$ на нормаль $\overline{n}$, т. е.

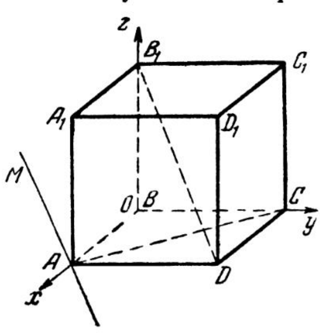
$$h = \left|\ \text{Пр}_{\overline{n}} - \overline{M_2M_1}\ \right|.$$

$$\text{Пр}_{\overline{n}}\,\overline{M_2M_1} = \frac{(\overline{M_2M_1}\cdot\overline{n})}{n} = \frac{2\cdot 1 - 2\cdot 3 - 4\,(-2)}{\sqrt{1 + 3^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{2 - 6 + 8}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}.$$

Ответ: $h = \dfrac{2\sqrt{26}}{13}$ ед. длины.

№ 119. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 1.



Черт. 185

Решение. Задача заключается в нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми B_1D и AC (черт. 185).

Для составления уравнений этих прямых поместим вершину куба в начало координат и оси координат направим по ребрам куба BA, BC и BB_1.

Прямая AC проходит через точки A (1; 0; 0) и C (0; 1; 0); прямая B_1D проходит через точки B_1 (0; 0; 1) и D (1; 1; 0).

Напишем уравнения этих прямых по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Уравнения AC:

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-0}{0}, \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{0}.$$

Уравнения B_1D:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{-1}.$$

Через точку, лежащую на прямой AC, проведем прямую, параллельную B_1D.

Пусть взятая на прямой AC точка будет точка A (1; 0; 0).

Прямая AM, проходящая через точку A параллельно прямой B_1D, будет иметь уравнения:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{-1}.$$

Теперь через прямые AC и AM проведем плоскость, параллельную прямой B_1D. Для этого сначала проведем пучок плоскостей через прямую AM, записав уравнение прямой AM в виде:

$$\begin{cases} x-1=-z, \\ y=-z, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+z-1=0, \\ y+z=0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей:

$$x+z-1+\lambda(y+z)=0, \text{ или } x+\lambda y+(1+\lambda)z-1=0.$$

Так как прямая AC лежит в искомой плоскости, то выполняется условие параллельности прямой AC с плоскостью:

$$1\cdot(-1)+\lambda\cdot 1+(1+\lambda)\cdot 0=0$$

или $-1+\lambda=0$, откуда $\lambda=1$.

Подставив значение λ в уравнение пучка плоскостей мы найдем плоскость, содержащую пересекающиеся примые AC и AM и параллельную прямой B_1D (потому, что B_1D параллельна AM):

$$x+y+(1+1)z-1=0, \text{ или } x+y+2z-1=0.$$

Возьмем теперь точку на прямой B_1D, например точку B_1 (0; 0; 1), и определим ее расстояние до найденной плоскости по формуле:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

т. е.

$$d=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1-1|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Ответ: $d=\frac{\sqrt{6}}{6}$ ед. длины.

Задачи для самостоятельного решения

1. Построить прямую, заданную общими уравнениями,

$$\begin{cases} x+2y+4z-4=0, \\ 10x+4y+5z-20=0. \end{cases}$$

2. Определить, лежат ли точки

а) (0; —2; 1); б) (4; 6; 1); в) (—3; 4; 2)

на прямой

$$\begin{cases} 2x-y+3z-5=0, \\ 4x+3y-2z+8=0. \end{cases}$$

3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M (3; —1; 2) и параллельной вектору $\bar{S}\{1;\ 0;\ -2\}$.

4. Преобразовать канонические уравнения прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{1}$$

к уравнениям в проекциях.

5. Привести уравнения прямой $y=3x+2$, $z=-x-5$ к каноническому виду.

6. Преобразовать общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x-y+3z-5=0, \\ 4x+3y-2z+8=0 \end{cases}$$

в канонические уравнения.

7. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x = -4z + 12, \\ y = -z + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = z + 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

8. Составить уравнения прямой, проходящей через точку M (2; —3; 4) и перпендикулярной прямым

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+5}{2}, \quad \frac{x-8}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

(Решить задачу средствами векторной алгебры.)

9. Проверить, лежат ли точки A (4; 0; 2), B $\left(3; 1; \frac{4}{3}\right)$ и C (1; 3; 0) на одной прямой.

10. Найти угол между прямой $\frac{x-0}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$ и плоскостью $4x+y+z-3=0$.

11. Из точки N (2; 0; -1) опустить перпендикуляр на плоскость $2x+3y-z+5=0$.

12. Через точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-12}{3} = \frac{z-9}{3}$$

и плоскости $x+3y-5z-2=0$ провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

13. Узнать, пересекаются ли прямые

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-6}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{4}.$$

14. Установить, какая из данных прямых

а) $\frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-8}{-1}$,

б) $\frac{x-0}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$,

в) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$

лежат в плоскости $x+2y-4z+1=0$, какая ей параллельна и какая пересекает ее.

Ответы: 2. а) лежит; б) нет; в) нет.

3. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{-2}$.

4. $\begin{cases} x = 2z - 5, \\ y = 3z - 7. \end{cases}$

5. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+5}{-1}$.

6. $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+2}{-16} = \dfrac{z-1}{-10}$.

7. 60°

8. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z-4}{1}$.

9. Да.

10. 45°.

11. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{1}$.

12. $x - 4y + 3z + 54 = 0$.

13. Да.

14. а) прямая пересекает плоскость в точке (3; 6; 4); б) прямая параллельна плоскости; в) прямая лежит в плоскости.

Глава V

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью называется *геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{или} \quad z = f(x, y). \tag{1}$$

Линия в пространстве определяется совокупностью двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(x; y; z) = 0 \\ F_2(x; y; z) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

каждое из которых определяет некоторую поверхность.

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью называется *поверхность, описываемая прямой (образующей), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (направляющую).*

Всякая цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz (соответственно Oy, Ox), может быть представлена уравнением

$$F(x;\ y)=0, \quad \text{или} \quad y=f(x), \tag{3}$$

(соответственно

$$F(x;\ z)=0, \text{ или } z=f(x);\ F(y;\ z)=0, \text{ или } z=f(y).$$

На плоскости xOy уравнение $F(x;\ y)=0$ или $y=f(x)$, определяет линию, которая является направляющей этой цилиндрической поверхности.

Если уравнения направляющей искомой цилиндрической поверхности заданы в виде

$$\left.\begin{aligned} F_1(x;\ y;\ z)=0 \\ F_2(x;\ y;\ z)=0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

то уравнения образующих этой поверхности будут

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}, \tag{5}$$

где $(x,\ y,\ z)$ — точка, принадлежащая направляющей (4);
$m,\ n,\ p$ — направляющие коэффициенты образующих;
$X,\ Y,\ Z$ — текущие координаты цилиндрической поверхности.

Исключая $x,\ y,\ z$ из четырех уравнений (4) и (5), получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Конические поверхности

Конической поверхностью называется *поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку — вершину конуса — и пересекающей данную линию — направляющую конуса.*

Если уравнения направляющей искомой конической поверхности заданы в виде

$$\left.\begin{aligned} F_1(x;\ y;\ z)=0 \\ F_2(x;\ y;\ z)=0 \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

то уравнения образующих этой поверхности будут:

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}, \tag{9}$$

где $(x;\ y;\ z)$ — точка, принадлежащая направляющей (8),
$(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — данная точка — вершина конуса;
$X;\ Y;\ Z$ — текущие координаты конической поверхности.

Исключая $x;\ y;\ z$ из четырех уравнений (8) и (9), получим искомое уравнение конической поверхности.

Поверхности вращения

Пусть в плоскости yOz дана линия L, имеющая уравнение $F(Y,\ Z)=0$. Тогда, чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz вокруг оси Oy, нужно в уравнении этой линии заменить Z на $\pm\sqrt{X^2+Z^2}$.

Искомое уравнение поверхности вращения будет:

$$F(Y;\ \sqrt{X^2+Z^2})=0. \tag{10}$$

Аналогичные правила будут иметь место и по отношению к поверхностям, полученным вращением плоских линий вокруг других координатных осей.

Поверхности второго порядка и их канонические уравнения.

1. Сфера. Сферой или шаровой поверхностью называется *геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки, называемой центром сферы.*

а) Уравнение сферы имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2, \tag{11}$$

где a, b и c — координаты центра сферы, а r — ее радиус.

б) Уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \tag{12}$$

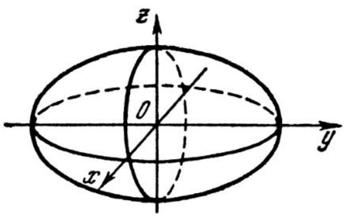
Уравнение второй степени изображает сферу, если коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а члены с произведением координат отсутствуют.

Координаты центра и радиус сферы находятся путем приведения уравнения сферы к виду (11).

2. Эллипсоид. Эллипсоидом называется *поверхность, каноническое (простейшее) уравнение которой имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{13}$$

(черт. 186). Центр эллипсоида лежит в начале координат.



Черт. 186

Отрезки a, b и c — называются полуосями эллипсоида.

Если $a=b\neq c$, то уравнение (13) определяет эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{13$'$}$$

3. Гиперболоиды

а) Однополостный гиперболоид.

Однополостным гиперболоидом называется *поверхность, каноническое (простейшее) уравнение которой имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(черт. 187).

При $a=b$ уравнение (14) определяет однополостный гиперболоид вращения.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (14')$$

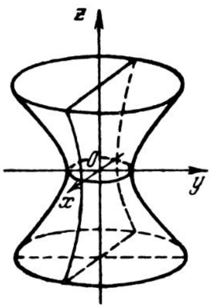
б) Двухполостный гиперболоид.

Двухполостным гиперболоидом называется *поверхность, каноническое (простейшее) уравнение которой имеет вид:*

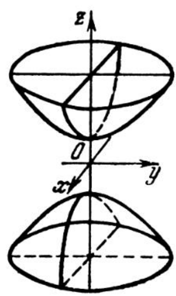
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (15)$$

(черт. 188). При $a=b$ уравнение (15) определяет двухполостный гиперболоид вращения.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (15')$$



Черт. 187



Черт. 188

4. Параболоиды

а) Эллиптическим параболоидом называется *поверхность, каноническое (простейшее) уравнение которой имеет вид:*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z. \qquad (16)$$

(черт. 189).

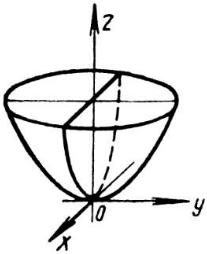
При $p=q$ уравнение (16) определяет параболоид вращения

$$x^2+y^2=2pz. \qquad (16')$$

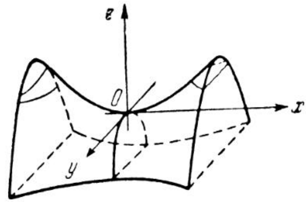
б) Гиперболическим параболоидом называется *поверхность, каноническое (простейшее) уравнение которой имеет вид:*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (17)$$

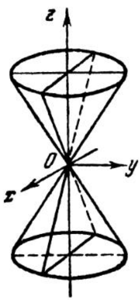
(черт. 190).



Черт. 189



Черт. 190



Черт. 191

5. Конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (18) \text{ (черт. 191).}$$

При $a=b$ уравнение (18) определяет круговой конус

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (18')$$

6. Цилиндры второго порядка

а) Эллиптическим цилиндром называется *поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (19) \text{ (черт. 192),}$$

При $a=b$ уравнение (19) определяет круговой цилиндр

$$x^2+y^2=a^2. \qquad (19')$$

б) Гиперболическим цилиндром называется *поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (20) \text{ (черт. 193).}$$

в) Параболическим цилиндром называется *поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:*

$$y^2=2px. \qquad (21) \text{ (черт. 194)}$$

Общий метод исследования поверхностей по их уравнениям заключается в следующем:

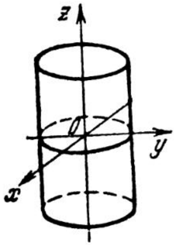
1) находят сечения поверхности с каждой из трех координатных плоскостей;

2) находят сечения поверхности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям;

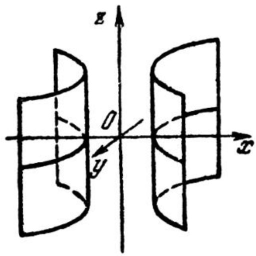
3) анализируют кривые, полученные в результате сечений, и делают общее представление об исследуемой поверхности;

4) делают чертеж поверхности.

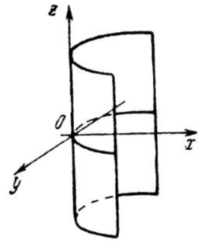
7. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.



Черт. 192



Черт. 193



Черт. 194

Прямолинейной образующей поверхности называется прямая линия, целиком лежащая на данной поверхности.

Например, прямолинейные образующие конической и цилиндрической поверхности.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(черт. 195 и 196)}$$

имеет два семейства прямолинейных образующих:

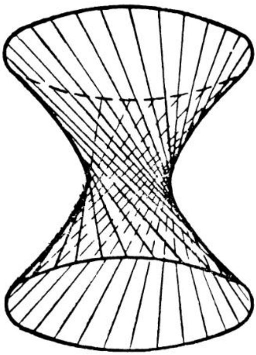
$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и

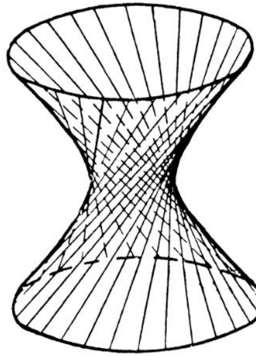
$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{l}\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где k и l — произвольные параметры, не зависящие от x, y и z.

Каждая из систем (1) и (2) при определенных значениях k и l определяет прямую линию.



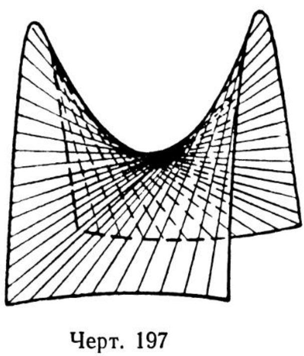
Черт. 195



Черт. 196

При произвольных k и l каждая система дает семейство прямых линий.

Гиперболический параболоид (черт. 197)



Черт. 197

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

имеет также два семейства прямолинейных образующих:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2kz, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{k} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и
$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{1}{l}, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= 2lz, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где k и l — произвольные параметры.

Примеры решения задач

№ 120. Найти геометрическое место точек, находящихся на расстоянии 4 единиц от плоскости xOz и на расстоянии 3 единиц от точки A $(2; 5; -1)$.

Решение. Пусть точка M $(x; y; z)$ принадлежит искомому геометрическому месту. Тогда ее расстояние от плоскости xOz, уравнение которой $y=0$, находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

т. е. $4 = |y|$ или $y = 4$ — это плоскость, параллельная плоскости xOz и находящаяся от нее на расстоянии 4 единиц.

Расстояние точки M до точки A находится по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\text{т. е.} \quad 3 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2},$$

или $(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 9$ — это уравнение сферы с центром в точке $(2; 5; -1)$ и радиусом, равным 3.

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 9, \\ y = 4 \end{cases}$$

определяет окружность, являющуюся результатом пересечения сферы, заданной первым уравнением системы и плоскостью $y=4$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 9, \\ y = 4. \end{cases}$$

№ 121. Составить уравнение сферической поверхности, проходящей через окружность

$$\begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=36. \\ x-2y-z+1=0 \end{cases}$$

и точку $(1;\ 1;\ -3)$, а также найти ее центр и радиус.

Решение. Через окружность в пространстве можно провести бесчисленное множество сфер, уравнение которых будет иметь вид:

$$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2-36+\lambda(x-2y-z+1)=0,$$

где λ подлежит определению.

Из этого пучка выделим сферу, проходящую через точку $(1;\ 1;\ -3)$:

$$1+(1-3)^2+(-3-4)^2-36+\lambda(1-2+3+1)=0,$$

$$1+4+49-36+\lambda\cdot 3=0, \quad 18+3\lambda=0, \quad \lambda=-6.$$

Уравнение искомой сферической поверхности будет иметь вид:

$$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2-36-6(x-2y-z+1)=0,$$

$$\text{или} \quad x^2+y^2+z^2-6x+6y-2z-17=0.$$

После алгебраических преобразований (дополнения до полных квадратов) получим следующее выражение: $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=36$.

Сравнивая с формулой $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, находим, что центр сферы имеет координаты $(3;\ -3;\ 1)$, радиус ее равен 6.

Ответ: уравнение сферы $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=36$, где центр $(3;\ -3;\ 1)$, радиус $R=6$.

№ 122. Составить уравнение цилиндра, направляющей которого служит гипербола

$$\begin{cases} x^2-y^2=25, \\ z=0, \end{cases}$$

а образующие параллельны биссектрисе угла yOz.

Решение. Найдем направляющие коэффициенты биссектрисы угла yOz. Эта прямая проходит через начало координат и образует с осями координат углы $\alpha=90°$, $\beta=\gamma=45°$; направляющие косинусы биссектрисы угла yOz будут равны:

$$\cos\alpha=\cos 90°=0, \quad \cos\beta=\cos\gamma=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

А так как направляющие коэффициенты прямой пропорциональны направляющим косинусам, то можно записать:

$$m:n:p=0:\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}=0:1:1 \quad \left(\text{после сокращения на } \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Таким образом, можем считать, что направление образующих цилиндра дано отношениями:

$$m:n:p=0:1:1.$$

Теперь можно написать уравнения образующих искомой цилиндрической поверхности. Они будут:

$$\frac{x-x'}{0}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{1},$$

где x; y; z — текущие координаты цилиндрической поверхности;

x'; y'; z' — координаты точки, лежащей на направляющей.

Имеем четыре уравнения:

$$\begin{cases} x'^2-y'^2=25, \\ z'=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-x'}{0}=\frac{y-y'}{1}=\frac{z-z'}{1}.$$

Исключив из этих уравнений x', y' и z', найдем уравнение цилиндрической поверхности.

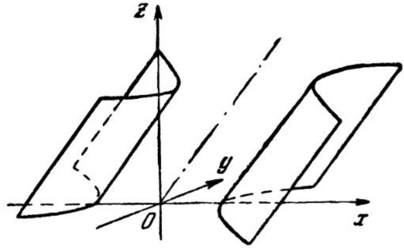
Подставив в уравнения образующих $z'=0$, найдем, что $x=x'$, или $x'=x$; $y-y'=z$, или $y'=y-z$.

Подставив эти значения x' и y' в первое уравнение направляющей, получим:

$$x^2-(y-z)^2=25, \text{ или } x^2-y^2-z^2+2yz-25=0$$

(черт. 198).

Ответ: $x^2-y^2-z^2+2yz-25=0$.



Черт. 198

№ 123. Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-0}{3},$$

направляющей служит линия $y^2=4x$, $z=0$.

Решение. Канонические уравнения образующих будут:

$$\frac{X-x}{1}=\frac{Y-y}{2}=\frac{Z-z}{3}.$$

Исключаем x, y и z из последних четырех уравнений. Обозначая через t величину каждого из последних отношений, найдем:

$$x=X-t,\ y=Y-2t,\ z=Z-3t.$$

Подставляя эти значения x, y и z в данные уравнения направляющей, получим:

$$\begin{cases}(Y-2t)^2=4(X-t),\\ Z-3t=0.\end{cases}$$

Исключаем t, найдем: $t=\frac{1}{3}Z$.

$$\left(Y-\frac{2}{3}Z\right)^2=4\left(X-\frac{1}{3}Z\right),$$

или $9Y^2-12YZ+4Z^2-36X+12Z=0$.

Ответ: $9Y^2-12YZ+4Z^2-36X+12Z=0$.

№ 124. *Решить самостоятельно*. Основанием круглого конуса служит круг радиуса 5; высота конуса равна 7. Составить уравнение этого конуса, принимая за плоскость xOy плоскость его основания, а за ось Oz его высоту.

Указания. Направляющей конуса является окружность, лежащая в плоскости xOy $(z=0)$ с центром в начале координат и радиусом, равным 5 (черт. 191). Уравнения ее будут:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Ответ: $\dfrac{x^2+y^2}{25} - \dfrac{(z-7)^2}{45} = 0.$

№ 125. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = c. \end{cases}$$

Решение. Канонические уравнения образующих, проходящих через вершину (0; 0; 0) конуса и точку $(x;\ y;\ z)$ направляющей, будут

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Исключим x; y; z из четырех данных уравнений. Заменяя z через c, определим x и y из последних двух уравнений:

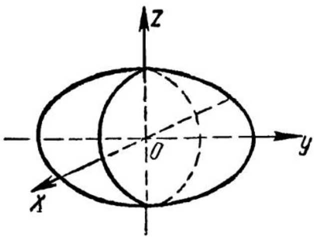
$$x = c\ \frac{X}{Z}, \qquad y = c\ \frac{Y}{Z}.$$

Подставляя эти значения x и y в первое уравнение направляющей, будем иметь:

$$\frac{c^2X^2}{Z^2} + \frac{c^2Y^2}{Z^2} = a^2, \quad \text{или} \quad \frac{X^2+Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0.$$

Ответ: $\dfrac{Z^2+Y^2}{a^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 0.$

№ 126. Эллипс с полуосями 5 и 3 вращается вокруг своей большей оси, совпадающей с осью Oy, центр эллипса совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, описываемой эллипсом при его вращении.



Черт. 199

Решение. Составим каноническое уравнение эллипса с вершиной в начале координат, лежащего в плоскости yOz: $a=5$, $b=3$.

$$\begin{cases} \frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1, \\ x=0 \end{cases} \quad \text{(черт. 199).}$$

Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса, лежащего в плоскости yOz вокруг оси Oy, необходимо в уравнении эллипса заменить

$$z \text{ на } \pm\sqrt{x^2+z^2}.$$

Получим эллипсоид вращения, вытянутый вдоль оси Oy:

$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2+z^2}{9}=1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1.$

№ 127. *Решить самостоятельно*. Гипербола с полуосями 3 и 4 вращается вокруг своей мнимой оси, совпадающей с осью Oz. Центр гиперболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности, получающейся при вращении гиперболы.

Указания. Каноническое уравнение гиперболы, лежащей в плоскости yOz:

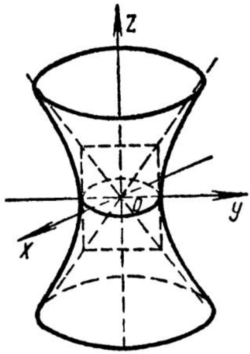
$$a=3, \quad b=4; \quad \begin{cases} \frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1, \\ x=0. \end{cases} \quad \text{(черт. 200).}$$

Чтобы составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы, лежащей в плоскости yOz

около оси Oz, необходимо в уравнении гиперболы вместо y поставить $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Получите однополостный гиперболоид вращения.

Ответ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1.$



Черт. 200

№ 128. Исследовать и построить поверхность, заданную уравнением

$$z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}.$$

Решение. Данное уравнение определяет эллиптический параболоид.

Рассмотрим сечения данной поверхности координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Пересечем данную поверхность плоскостью, например yOz. Решим систему уравнений данной поверхности и плоскости yOz:

$$\begin{cases} z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \\ x=0. \end{cases}$$

Подставив значение $x=0$ в первое уравнение системы, получим

$$z=\frac{y^2}{9}, \quad \text{или } y^2=9z.$$

Кривая $y^2=9z$ есть парабола, лежащая в плоскости yOz с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Аналогично найдем сечение поверхности плоскостью xOz:

$$\begin{cases} z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \quad z=\frac{x^2}{4}, \quad x^2=4z. \\ y=0. \end{cases}$$

Кривая $x^2=4z$, лежащая в плоскости xOz, есть также парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz.

Пересекая теперь поверхность плоскостью xOy, получим:

$$\begin{cases} z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0. \\ z=0. \end{cases}$$

Сумма двух неотрицательных чисел ($x^2>0$ и $y^2>0$) равна 0 только в том случае, если каждое из слагаемых равно 0.

Система уравнений $x=0$, $y=0$, $z=0$ дает начало координат. Следовательно, плоскость xOy касается поверхности в точке O $(0;\ 0;\ 0)$.

Пересечем поверхность плоскостью, параллельной плоскости xOy, уравнение которой возьмем $z=h$ $(h>0)$.

В сечении получим:

$$\begin{cases} z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}, \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=h, \text{ или } \frac{x^2}{4h}+\frac{y^2}{9h}=1. \\ z=h. \end{cases}$$

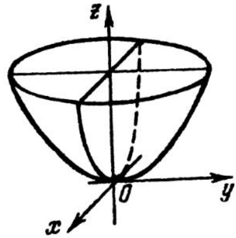
Эта линия, рассматриваемая в плоскости $z=h$, есть эллипс с полуосями $a=2\sqrt{h}$ и $b=3\sqrt{h}$.

Теперь данных уже достаточно для построения чертежа.

Соберем их вместе:

1) в плоскости yOz имеем параболу $y^2=9z$;
2) в плоскости xOz имеем параболу $x^2=4z$;
3) в плоскости xOy имеем точку O $(0;\ 0;\ 0)$;

4) в плоскости $z=h$ имеем эллипс $\frac{x^2}{4h}+\frac{y^2}{9h}=1$ (черт. 201).

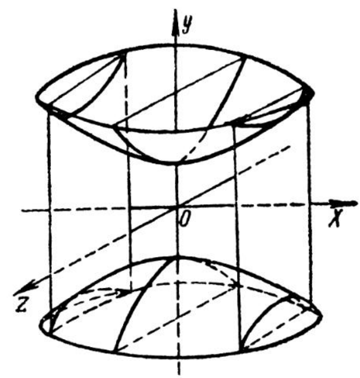


Черт. 201

№ 129. Найти плоскости, параллельные координатным плоскостям, пересекающие двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{9}=-1$$

по кривым, оси которых вдвое больше осей соответствующих главных сечений.



Черт. 202

Р е ш е н и е. Найдем главные сечения данной поверхности, т. е. найдем линии пересечения поверхности координатными плоскостями (черт. 202).

Пересекаем поверхность плоскостью yOz, $x=0$:

$$\frac{-y^2}{6}+\frac{z^2}{9}=-1 \text{ или } \frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{9}=1.$$

Следовательно, в плоскости yOz имеем гиперболу с осями $2b=2\sqrt{6}$ (действительная ось) и $2c=6$ (мнимая ось).

Пересекаем поверхность плоскостью xOz, $y=0$; получаем:

$$\frac{x^2}{12}+\frac{z^2}{9}=-1.$$

Следовательно, в плоскости xOz имеется мнимая окружность, т. е. линии пересечения нет.

Пересекаем поверхность плоскостью xOy, $z=0$; получаем:

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=-1, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{12}=1.$$

Следовательно, в плоскости xOy имеем гиперболу с осями $2b=2\sqrt{6}$ (действительная ось) и $2a=4\sqrt{3}$ (мнимая ось).

Таким образом, будем искать плоскости, параллельные координатным плоскостям xOy и yOz, дающим действительные главные сечения.

Пересечем данный двухполостный гиперболоид плоскостью, параллельной плоскости xOy, т. е. $z=h$. Получим:

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}+\frac{h^2}{9}=-1, \quad \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=-\frac{h^2}{9}-1,$$

$$\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{12}=\frac{h^2+9}{9}, \qquad \frac{y^2}{6\cdot\dfrac{h^2+9}{9}}-\frac{x^2}{12\cdot\dfrac{h^2+9}{9}}=1;$$

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{\dfrac{2}{3}(h^2+9)}-\dfrac{x^2}{\dfrac{4}{3}(h^2+9)}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

Полученная гипербола имеет оси:

$$b'=\sqrt{\frac{2}{3}(h^2+9)}, \quad a'=\sqrt{\frac{4}{3}(h^2+9)};$$

$$2b'=2\sqrt{\frac{2}{3}(h^2+9)}, \quad 2a'=2\sqrt{\frac{4}{3}(h^2+9)}.$$

Согласно условию задачи,

$$2b'=2(2b), \quad \text{или} \quad b'=2b; \quad 2a'=2(2a), \text{ или } a'=2a.$$

Подставив значение b' и b, найдем, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}(h^2+9)}=2\sqrt{6}\,.$$

Решив это уравнение, найдем h:

$$\frac{2}{3}(h^2+9)=24,\ h^2+9=36,\quad h^2=27,\quad h=\pm\ 3\sqrt{3}.$$

Убедимся, что найденное значение h удовлетворяет равенству $a'=2a$:

$$a'=\sqrt{\frac{4}{3}(h^2+9)}=\sqrt{\frac{4}{3}(27+9)}=\sqrt{\frac{4}{3}\cdot 36}=$$

$$=\sqrt{4\cdot 12}=\sqrt{4^2\cdot 3}=4\sqrt{3}=2a.$$

Таким образом, имеем две плоскости, параллельные плоскости xOy, уравнения которых $z=\pm\ 3\sqrt{3}$.

Пересечем теперь данный гиперболоид плоскостью, параллельной плоскости yOz, т. е. $x=l$. Получим:

$$\frac{l^2}{12}-\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{9}=-1,\quad \frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{9}=\frac{12+l^2}{12},$$

$$\frac{y^2}{6\cdot\dfrac{12\cdot l^2}{12}}-\frac{z^2}{9\cdot\dfrac{12\cdot l^2}{12}}=1;$$

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{\frac{1}{2}(12+l^2)}-\dfrac{z^2}{\frac{3}{4}(12+l^2)}=1,\\ x=l.\end{cases}$$

Полученная в сечении гипербола имеет оси:

$$2b''=2\sqrt{\frac{1}{2}(12+l^2)},\qquad 2c''=2\sqrt{\frac{3}{4}(12+l^2)}.$$

Согласно условию задачи,

$$2b''=2(2b),\ \text{или}\ b''=2b;\ \ 2c''=2(2c),\ \text{или}\ c''=2c.$$

Подставив значение b'' и b и решив полученное уравнение, найдем l:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(12+l^2)}=2\sqrt{6},\ \frac{1}{2}(12+l^2)=24,$$

$$12+l^2=48\quad l^2=36,\quad l=\pm\ 6.$$

Убедимся, что найденные значения l удовлетворяют и равенству $c''=2c$:

$$c''=\sqrt{\frac{3}{4}(12+36)}=\sqrt{\frac{3}{4}\cdot 48}=\sqrt{36}=6=2c.$$

Таким образом, имеем еще две плоскости, удовлетворяющие условию, уравнение которых $x=\pm 6$.

Ответ: $x=\pm 6$; $z=\pm 3\sqrt{3}$.

№ 130. Исследовать и построить поверхность, заданную уравнением

$$x^2-y^2=8z.$$

Решение. Поверхность, заданная уравнением $x^2-y^2=8z$, есть гиперболический параболоид. Как и в задаче № 128, применим метод сечений поверхности координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Пересечем данную поверхность плоскостью xOz, для чего решаем совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=8z, \\ y=0. \end{cases}$$

Подставив значение $y=0$ в первое уравнение системы, получим кривую $x^2=8z$ — параболу, лежащую в плоскости xOz и симметричную относительно оси Oz. Взяв оси, как указано на чертеже (черт. 203), строим в плоскости xOz параболу по ее уравнению.

Аналогично находим, что в плоскости yOz результатом сечения поверхности этой плоскостью является парабола $y^2=-8z$. Построим и эту параболу в указанной координатной плоскости.

Далее, пересечем поверхность плоскостью xOy, решив совместно систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=8z, \\ z=0. \end{cases}$$

В результате решения этой системы получим $x^2-y^2=0$ или $y=x$ и $y=-x$, т. е. две прямые, проходящие через начало координат. Это говорит о том, что рассматриваемая поверхность имеет прямолинейные образующие.

Теперь будем пересекать поверхность плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

В сечении поверхности плоскостью $x=\pm h$ (параллельной плоскости yOz), получаем:

$$\begin{cases} x^2-y^2=8z, & h^2-y^2=8z, \quad y^2=-8z+h^2. \\ x=\pm h \end{cases}$$

Полученные кривые есть параболы, имеющие тот же параметр, $(p=-4)$, что и парабола $y^2=-8z$, лежащая в плоскости yOz, а вершины их имеют аппликату, равную $\frac{h^2}{8}$, и расположены на параболе $x^2=8z$ (так как значение $z=\frac{h^2}{8}$ удовлетворяет уравнению параболы $x^2=8z$). Ветви параболы направлены вниз.

Пересечем поверхность плоскостью $z=\pm h$. (параллельной плоскости xOy). Возьмем сначала $z=h$ $(h>0)$, получим:

$$\begin{cases} x^2-y^2=8z, & x^2-y^2=8h, \\ z=h; \end{cases}$$

т. е. в плоскости $z=h$ имеем равностороннюю гиперболу с полуосями, равными $2\sqrt{2h}$, и действительной осью, параллельной оси Ox.

Если $z=-h$, то уравнение гиперболы, лежащей в этой плоскости, будет $y^2-x^2=8h$, т. е. гипербола действительной осью будет иметь прямую, параллельную оси Oy. Теперь мы можем сказать, что прямые $y=\pm x$ служат как бы переходом от одного семейства гипербол $(x^2-$ $-y^2=8h)$ к другому семейству $(y^2-x^2=8h)$.

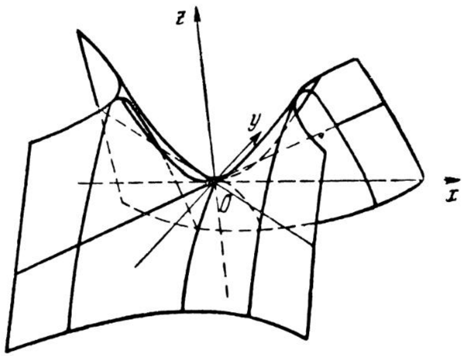
В сечении поверхности плоскостью $y=\pm h$ (параллельной плоскости xOz) получим параболы:

$$\begin{cases} x^2-y^2=2z, & x^2=2z+h^2, \\ y=\pm h; \end{cases}$$

имеющие оси симметрии, расположенные в плоскости yOz и ветви, направленные вверх.

Соберем данные для построения чертежа все вместе:

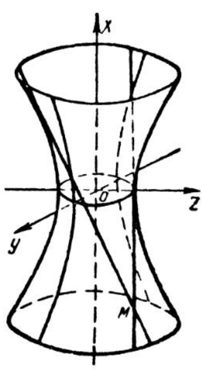
1) в плоскости xOz имеем параболу $x^2=8z$;
2) в плоскости yOz имеем параболу $y^2=-8z$;
3) в плоскости xOy имеем прямые $y=\pm x$;
4) в плоскостях $x=\pm h$ имеем параболы $y^2=-8z+h^2$;
5) в плоскостях $y=\pm h$ имеем параболы $x^2=8z+h^2$;
6) в плоскости $z=h$ имеем гиперболу $x^2-y^2=8h$;
7) в плоскости $z=-h$ имеем гиперболу $y^2-x^2=8h$.



Черт. 203

№ 131. Написать уравнения прямолинейных образующих гиперболоида

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1,$$



Черт. 204

проходящих через точку M $(-6;\ 2;\ 4)$.

Решение. Убедимся, что данная точка лежит на данной поверхности (черт. 204):

$$\frac{(-6)^2}{9}-\frac{2^2}{4}-\frac{4^2}{4}=$$

$$=4-1-4=-1.$$

Известно, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит две его прямолинейные образующие.

Уравнение гиперболоида можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{4}-1,\text{ или }\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{z}{2}+1\right)\left(\frac{z}{2}-1\right).$$

Можем теперь составить две системы прямых линий:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=k\left(\frac{z}{2}+1\right),\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{k}\left(\frac{z}{2}-1\right)\end{cases}\text{ и }\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=l\left(\frac{z}{2}-1\right),\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{l}\left(\frac{z}{2}+1\right).\end{cases}$$

Параметры k и l найдем из условия прохождения прямых через точку M. Найдем параметр k:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=k\left(\frac{z}{2}+1\right),\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{k}\left(\frac{z}{2}-1\right);\end{cases}\quad\left|\begin{array}{l}-\frac{6}{3}+\frac{2}{2}=k\left(\frac{4}{2}+1\right),\\ -2+1=3k,\ -1=3k,\\ k=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Проверим значение k по второму уравнению первой системы:

Левая часть: $\quad \frac{-6}{3}-\frac{2}{2}=-2-1=-3.$

Правая часть: $\quad -3\left(\frac{4}{2}-1\right)=-3\cdot 1=-3.$

Таким образом, уравнения первой прямой:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}+1\right),\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-3\left(\frac{z}{2}-1\right)\end{cases}\text{ или }\begin{cases}2x+3y+z+2=0,\\ 2x-3y+9z-18=0,\end{cases}$$

Найдем параметр l:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=l\left(\frac{z}{2}-1\right),\\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{l}\left(\frac{z}{2}+1\right);\end{cases}\quad\left|\begin{array}{l}\frac{-6}{3}+\frac{2}{2}=l\cdot\left(\frac{4}{2}-1\right),\\ -2+1=l,\\ l=-1.\end{array}\right.$$

Следовательно, уравнения второй прямой будут:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=-\left(\dfrac{z}{2}-1\right), \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=-\left(\dfrac{z}{2}+1\right), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x+3y+3z-6=0, \\ 2x-3y+3z+6=0. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} 2x+3y+z+2=0, \\ 2x-3y+9z-18=0 \end{cases}$$

$$\text{и} \quad \begin{cases} 2x+3y+3z-6=0, \\ 2x-3y+3z+6=0. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследовать, какие геометрические образы определяются в пространстве следующими уравнениями:

а) $x^2+y^2=25$;

б) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{z^2}{16}=1$;

в) $y^2=8x$;

г) $x^2-y^2=0$;

д) $x^2+y^2+4=0$.

2. Найти центр и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+8z+10=0.$$

3. Прямая, все время проходящая через точку $(0;\ 0;\ 2)$, скользит по гиперболе

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Составить уравнения конической поверхности, описанной этой прямой.

4. Составить уравнение поверхности, полученной от вращения прямой, лежащей в плоскости yOz на расстоянии 2 единиц от оси Oz, если вращение происходит около оси Oz.

5. Исследовать и построить поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1.$$

6. Найти главные сечения эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=z.$$

7. Найти главные сечения гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}=y.$$

8. Найти точку пересечения поверхности и прямой:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{9}=-1 \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{3}.$$

9. На гиперболическом параболоиде

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z.$$

Найти прямолинейные образующие, проходящие через точку $(6;\ -1;\ 2)$.

Ответы: 1. а) Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz, и имеющая направляющую окружность

$$x^2+y^2=25.$$

б) Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oy; направляющая — гипербола

$$\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=1.$$

в) Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Направляющая — парабола

$$y^2=8x.$$

г) Пара плоскостей: $x-y=0$, $x+y=0$.

д) Этому уравнению координаты ни одной точки пространства не удовлетворяют.

2. Центр $(-1;\ 3;\ -4)$; радиус$=4$.

$$3.\quad \frac{x^2+(z-2)^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0.$$

$$4.\quad \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=0. \end{cases}$$

5. Трехосный эллипсоид.

6. 1) $O\,(0;\ 0;\ 0;)$, 2) $x^2=4z$, 3) $y^2=2z$.

7. 1) $x^2=4y$, 2) $\begin{cases} x-z=0, \\ x+z=0 \end{cases}$ 3) $z^2=-4y$.

8. $(4;\ 2;\ 9)$.

$$9.\ \frac{x}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+4}{2};\quad \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1},$$

Павел Иванович Рубан,
Евдокия Евдокимовна Гармаш

РУКОВОДСТВО
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редактор ***Д. А. Тальский***
Художественный редактор *И. Ф. Муликова*
Технический редактор *В. А. Мурашова*
Корректор *В. А. Орлова*

Сдано в набор 12.V-1962 г. Подписано к печати 14.II-1963 г.
Бумага 84×108 1/32. 9,88 печ. л. 16,20 усл. печ. л. 11,39 уч.-изд. л.
Тираж 50 000 экз. Изд. № ФМХ/87 Цена 44 коп.

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 20.

Саратов. Типография № 1 Облполиграфиздата. Заказ 2213.