

СПРАВОЧНОЕ
ПОСОБИЕ
ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ
МАТЕРИАЛОВ

Москва, 1991

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	7
Введение (М. Н. Рудицын)	
1. Основные положения и допущения	9
2. Понятие о перемещениях и деформациях	11
3. Внешние и внутренние силы	13
4. Напряжения	15
Глава I. Центральное растяжение и сжатие (М. Н. Рудицын)	
1. Общие сведения	18
2. Механические характеристики	22
3. Расчет на растяжение-сжатие	35
4. Учет собственного веса	40
5. Гибкие нити	41
6. Статически неопределимые задачи	44
7. Температурные напряжения	46
Глава II. Напряженное состояние (М. Н. Рудицын)	
1. Компоненты напряжения	47
2. Линейное и напряженное состояние	49
3. Плоское и напряженное состояние	50
4. Объемное напряженное состояние	53
5. Теории прочности	59
Глава III. Сдвиг (М. Н. Рудицын)	
1. Напряжения и деформации при чистом сдвиге	63
2. Практические приемы расчета на сдвиг	65
а) Расчет заклепочных соединений	—
б) Расчет сварных соединений	67
в) Расчет деревянных врубок	71
Глава IV. Геометрические характеристики сечения (М. Н. Рудицын)	
1. Статические моменты плоских фигур	73
2. Центр тяжести	74

3. Моменты инерции плоских фигур	75
4. Секториальные характеристики сечения	106

Глава V. Кручение (М. И. Любошиц)

1. Сущность явления и основные допущения	117
2. Вычисление крутящих моментов	119
3. Напряжения при кручении	121
4. Определение деформаций при кручении. Потенциальная энергия .	125
5. Расчет валов на кручение	127
6. Кручение стержней некруглого поперечного сечения	129
7. Расчет винтовых пружин с малым шагом витков, нагруженных осевыми силами	141

Глава VI. Поперечный изгиб (П. Я. Артемов)

1. Сущность явления изгиба. Поперечные силы и изгибающие моменты	146
2. Напряжения при изгибе. Проверка прочности	150
3. Составные балки	157
4. Балки переменного сечения	162
5. Упругая линия	167

Глава VII. Балки на упругом основании (П. Я. Артемов) 197

Глава VIII. Неразрезные балки (М. И. Любошиц)

1. Основные положения и определения	219
2. Уравнение трех моментов	220
3. Определение опорных реакций в неразрезной балке	234
4. Определение изгибающих моментов и поперечных сил и построение эпюр	237
5. Учет осадки опор	242
6. Формулы опорных моментов для равнопролетных неразрезных балок постоянной жесткости при произвольном нагружении . .	247

Глава IX. Сложное сопротивление (М. Н. Рудицын)

1. Общий случай сложного сопротивления	248
2. Косой изгиб	249
3. Растяжение или сжатие с изгибом	252
4. Внецентренное растяжение или сжатие	253
5. Ядро сечения	257
6. Продольно-поперечный изгиб	260
7. Изгиб с кручением	261

Глава X. Расчет кривых брусьев (М. И. Любошиц)

1. Основные положения	266
2. Силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях бруса	267
3. Вычисление напряжений в поперечных сечениях кривого бруса . .	272

4. Определение положения нейтральной оси	275
5. Рациональная форма поперечного сечения кривого бруса при чистом изгибе	285
6. Деформация кривых брусьев	292

Глава XI. Толстостенные цилиндры. Контактные напряжения (П. Я. Артемов)

1. Толстостенные цилиндры	305
2. Контактные напряжения	308

Глава XII. Стесненное кручение тонкостенных стержней открытого профиля (П. Я. Артемов)

1. Основные понятия. Напряжения при стесненном кручении . . .	321
2. Изгибно-крутильные силовые факторы	324

Глава XIII. Устойчивость упругих систем (П. Я. Артемов)

1. Основные понятия	329
2. Однопролетные стойки постоянного сечения	330
3. Стойки постоянного сечения с промежуточными опорами	337
4. Однопролетные стойки с переменным сечением	342
5. Расчет на устойчивость за пределами пропорциональности . . .	348
6. Расчет по допускаемому напряжению на устойчивость	349
7. Устойчивость плоской формы изгиба	352
8. Устойчивость составных решетчатых стержней	358
9. Устойчивость тонкостенных стержней	361

Глава XIV. Продольно-поперечный изгиб (П. Я. Артемов)

1. Сжатие с поперечным изгибом	365
2. Растяжение с поперечным изгибом	372

Глава XV. Работа упругих сил и общие методы определения перемещений (М. Н. Рудицын)

1. Работа упругих сил. Потенциальная энергия	378
2. Определение перемещений	381
3. Правило Верещагина	385
4. Примеры определения перемещений	389

Глава XVI. Расчет статически неопределимых систем (М. Н. Рудицын)

1. Степень статической неопределимости. Основная система	398
2. Канонические уравнения метода сил	401
3. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил	405
4. Примеры расчета	409

Глава XVII. Расчет по предельным состояниям (М. Н. Рудицын)

1. Основные понятия	438
2. Упруго-пластический изгиб. Подбор сечения балок	442

3. Расчет статически неопределимых балок по несущей способности	445
4. Упруго-пластическое кручение	451
5. Расчет строительных конструкций по предельным состояниям . .	454

Глава XVIII. Расчеты на прочность при переменных напряжениях (М. И. Любошиц)

1. Основные понятия	456
2. Предел выносливости и опытное его определение	460
3. Влияние различных факторов на величину предела выносливости	466
4. Расчеты на прочность при одноосном напряженном состоянии и чистом сдвиге (кручении)	478
5. Определение коэффициента запаса при сложном напряженном состоянии	485

Глава XIX. Расчеты при динамической нагрузке (М. И. Любошиц)

1. Определение напряжений при заданных ускорениях	491
2. Определение напряжений и деформаций при ударе	494
3. Колебания упругих систем с одной степенью свободы	498
Приложение. Сортамент прокатной стали	508
Использованная литература	515

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель справочного пособия дать в небольшой по объему книжке наиболее важные сведения по сопротивлению материалов, которые могут понадобиться инженеру и технику при расчете машин и сооружений или решении тех или иных практических задач.

В производственных условиях не всегда удобно обращаться к подробным курсам, чтобы быстро найти необходимую формулу, и, кроме того, не всегда нужная книга оказывается под руками. В таких случаях очень полезным оказывается справочник.

В настоящей книге приводятся данные для расчета стержней на растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, для расчета статически определимых и статически неопределимых балок и рам на прочность и жесткость. Рассматривается работа стержней, находящихся в условиях сложного сопротивления, кривых брусьев, толстостенных труб, тонкостенных стержней.

В книге также освещаются приемы расчета на устойчивость, расчеты при контактных напряжениях, знакопеременных напряжениях, при динамических нагрузках. Приводятся основные положения нового метода расчета по предельным состояниям.

В каждом разделе справочника даются основные формулы, без выводов, но с необходимыми пояснениями, облегчающими практическое применение. Значительное место занимают справочные и расчетные таблицы и графики. Приводятся данные о механических свойствах материалов.

Порядок применения расчетных формул и таблиц иллюстрируется примерами.

Справочное пособие предназначается для инженеров и техников проектных организаций и производственных предприятий и для студентов технических учебных заведений.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность кандидату технических наук доценту А. Ф. Анищенко, взявшему на себя труд просмотра рукописи и сделавшему ряд ценных указаний и замечаний.

В настоящем, втором издании исправлены замеченные опечатки. Кроме того в приложении помещены таблицы нового сортамента прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8509-57, 8510-57, 8239-56 и 8240-56.

Отзывы о книге и пожелания просим направлять по адресу: Минск, проспект им. Сталина, 79, Госиздат БССР. Редакция научно-технической литературы.

ВВЕДЕНИЕ

1 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Сопротивление материалов — наука, занимающаяся разработкой принципов и методов расчета частей сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчет на прочность преследует цель подобрать наименьшие размеры элементов конструкции, исключая возможность разрушения под действием заданных нагрузок.

Расчет на жесткость связан с определением деформаций конструкции. Жесткость считается обеспеченной, если деформации не превосходят заданных величин, допустимых при эксплуатации конструкции.

Под устойчивостью элементов конструкции подразумевается способность сохранять при действии нагрузки свою первоначальную форму равновесия.

Основным расчетным объектом в курсе сопротивления материалов является стержень или брус, т. е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Стержни могут иметь постоянное или переменное сечение, а также могут быть прямыми или криволинейными.

Осью стержня называют линию, проходящую через центры тяжести всех последовательно проведенных поперечных сечений стержня.

Поперечное сечение получается при рассечении стержня плоскостью, перпендикулярной его оси.

Разнообразие структуры и физико-механических свойств реального тела крайне усложняет его исследование. Поэтому

сопротивление материалов пользуется рядом допущений, облегчающих решение вопросов инженерной практики с известной степенью приближения к действительности.

К числу таких допущений относится в первую очередь допущение об однородности и непрерывности материала. В сопротивлении материалов вместо реального тела рассматривается однородное тело, свойства которого не зависят от величины его объема.

При этом предполагается, что физико-механические свойства тела во всех его точках одинаковы и материал равномерно, без пустот заполняет весь объем тела.

Это допущение вполне приемлемо для таких материалов, как сталь, медь, чугун и т. д., и менее приемлемо для кирпича, бетона, древесины и других строительных материалов.

Однородные тела, у которых физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям, называются **и з о т р о п н ы м и**.

Изотропными материалами можно считать литую сталь, литую медь, стекло, хорошо приготовленный бетон и т. д.

Материалы, имеющие одинаковые физико-механические свойства только для определенных направлений волокон, расположенных параллельно осям какой-либо одной прямоугольной системы координат, называются **о р т о т р о п н ы м и**. Примером таких материалов могут служить прокатная сталь, котельное железо, стальная проволока, отчасти прямослойная древесина без сучков.

Материалы, не обладающие свойствами изотропности и ортотропности, называются **а н и з о т р о п н ы м и**. К таким материалам можно отнести косослойную древесину, стальную проволоку, закрученную в холодном состоянии.

В сопротивлении материалов обычно рассматриваются только изотропные и ортотропные материалы.

Допущение о малости деформаций

Любое реальное тело под действием на него внешних сил деформируется, т. е. его размеры и геометрическая форма соответствующим образом изменяются.

Деформации элементов инженерных конструкций под действием допускаемых нагрузок обычно невелики по сравнению с размерами самих элементов. Поэтому в сопротивлении материалов деформации считаются настолько малыми, что при составлении уравнений равновесия ими можно пренебрегать.

Допущение о малости деформаций делает возможным использование принципа независимости действия сил. Этот принцип в сопротивлении материалов формулируется следующим образом: упругая деформация, вызванная одновременным действием нескольких групп сил, есть результат геометрического сложения деформаций, вызываемых каждой группой сил в отдельности.

Гипотеза плоских сечений

При решении большинства задач сопротивления материалов используется гипотеза плоских сечений (Я. Бернулли), на основании которой предполагается, что плоские сечения, проведенные в теле до его деформации, остаются плоскими и после деформации.

2. ПОНЯТИЕ О ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

Внешние силы, приложенные к телу, вызывают различные изменения его геометрической формы, связанные с перемещениями точек, линий и плоскостей. Перемещения вдоль прямой линии называются **линейными**.

Перемещения, связанные с поворотом линий и плоскостей, называются **угловыми**.

Если в теле до деформации две точки находились на расстояниях dx одна от другой, а после деформации расстояние между ними изменилось на величину du (рис. 1), то величина du представляет собой **абсолютную линейную деформацию участка**, а величина $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ — **относительную линейную деформацию**.

Если в теле до деформации два отрезка dx и dy располагались под углом 90° , а после деформации этот угол становится равным $90 + \gamma$ или $90 - \gamma$, то величина γ будет представлять собою угловую деформацию.

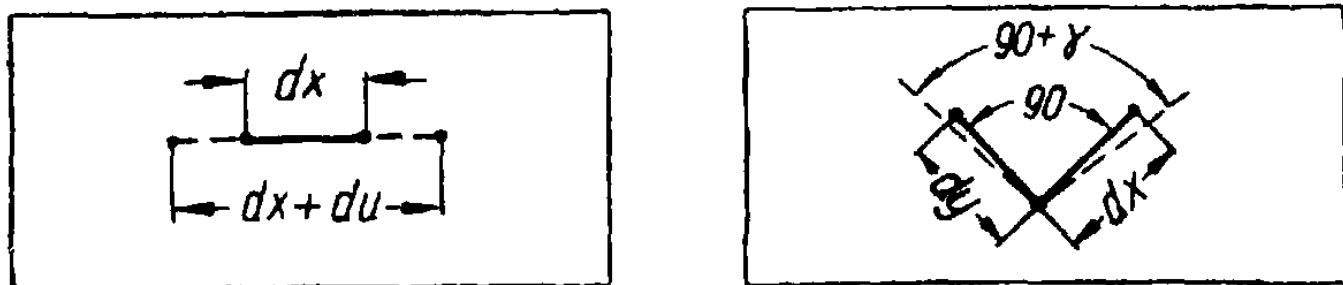


Рис. 1. Линейная и угловая деформации.

Любая деформация может быть разложена на линейные и угловые.

При деформации тела изменяется и его объем. Если элементарный объем dv изменяется на величину do , то эта величина do представляет собой абсолютное изменение объема, а отношение $\epsilon_0 = \frac{do}{dv}$ — относительное изменение объема, или объемную деформацию.

Тела принято считать совершенно упругими, если после снятия нагрузок полностью восстанавливается их первоначальная геометрическая форма, и частично упругими, если форма восстанавливается не полностью.

В первом случае имеют место только упругие деформации, т. е. исчезающие после удаления нагрузок, во втором случае, кроме упругих, возникают и неупругие — остаточные деформации, остающиеся в теле после снятия нагрузок. Последние называются пластическими деформациями.

Соответственно свойство тел возвращаться в первоначальное состояние при удалении нагрузок называется упругостью, а свойство сохранять остаточную деформацию, возникающую под действием внешних сил, называется пластичностью.

3. ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ ●

Внешними силами называются приложенные к телу силы, которые вызваны действием других тел. Внешние силы можно подразделить на:

а) поверхностные силы, т. е. приложенные к поверхности тела (нагрузка, лежащая на балке, опорные реакции, вес груза, подвешенного к тросу, и т. д.);

б) объемные силы, т. е. приложенные ко всем внутренним точкам тела (вес тела, силы инерции и т. д.).

Поверхностные силы (нагрузки) делятся на сосредоточенные и распределенные.

Сосредоточенными силами считаются действующие на весьма малые площадки тела.

Распределенными нагрузками являются приложенные непрерывно на протяжении некоторой длины или площади. Величина распределенной нагрузки, приходящейся на единицу длины или площади тела, называется интенсивностью нагрузки.

Нагрузки могут быть постоянные и временные. Постоянные действуют всегда или в течение достаточно длительного времени. Временные нагрузки действуют эпизодически.

Различают нагрузки статические и динамические.

Статические нагрузки нагружают конструкцию постепенно, нарастая от нуля до своего конечного значения достаточно медленно. По достижении конечного значения они не меняются или меняются незначительно.

Динамические нагрузки меняют свою величину в течение малого промежутка времени и сопровождаются появлением ускорений элементов конструкции. К динамическим относятся ударные, а также повторно-переменные нагрузки, периодически изменяющиеся во времени.

Внутренними силами называются силы, вызванные действием одних частей тела на другие.

Внутренние силы существуют в теле и при отсутствии внешних сил (силы взаимодействия между частицами тела).

При действии на тело внешних сил возникают допол-

п и т е л ь н ы е внутренние силы, сопровождающие деформацию. Эти силы сопротивляются стремлению внешних сил изменить форму тела, отделить одну его часть от другой. В сопротивлении материалов изучаются только дополнительные внутренние силы, возникающие в результате деформации, вызванной внешними силами.

Для определения внутренних сил, возникающих в стержне от действия внешних нагрузок, применяется метод сечений.

Изучаемый стержень мысленно рассекается плоскостью на две части. Каждая из частей предполагается находящейся в равновесии под действием внешних сил, приложенных к этой части, и внутренних сил, возникающих в сечении и представляющих собой силы взаимодействия между оставшейся и отброшенной частями.

Равнодействующая внутренних сил в сечении называется усилием, а величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади сечения, называется напряжением в данной точке сечения.

Усилие может быть выражено через напряжения.

При определении неизвестных усилий используются условия равновесия рассматриваемой части стержня:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 & \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 & \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned}$$

В зависимости от характера внешних сил, приложенных к стержню, возможны следующие случаи:

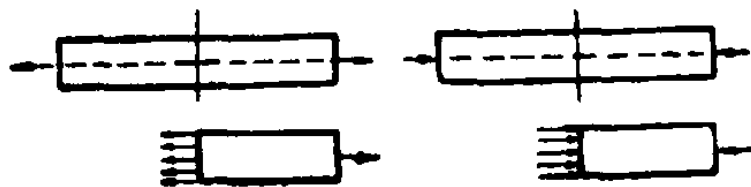


Рис. 2. Растяжение-сжатие.

1. Внешние силы приводятся к силе, направленной по оси стержня (рис. 2). В этом случае стержень испытывает растяжение или сжатие.

Растяжение имеет место, когда внутренние силы направлены по внешней нормали к сечению, а сжатие, когда эти силы направлены по внутренней нормали.

2. Внешние силы приводятся к паре сил, действующей в плоскости, перпендикулярной оси стержня (рис. 3).

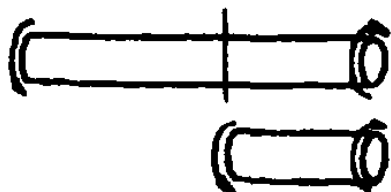


Рис. 3. Кручение.

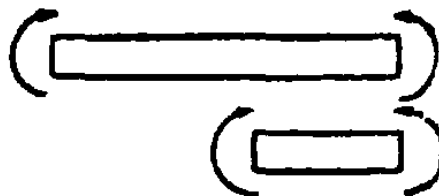


Рис. 4. Изгиб.

Очевидно, внутренние силы в сечении также приводятся к паре с моментом, равным по величине моменту внешней пары. В этом случае стержень испытывает **к р у ч е н и е**.

3. Внешние силы приводятся к паре, действующей в плоскости, совпадающей с осью стержня (рис. 4). В этом случае стержень подвергается **и з г и б у**, причем внутренние силы приводятся к паре, лежащей в той же плоскости, что и пара внешних сил, и момент внутренней пары равен моменту внешней.

4. НАПРЯЖЕНИЯ

Интенсивность внутренних сил измеряется **н а п р я ж е н и е м**.

Допустим, что около некоторой точки A сечения выделена элементарная площадка ΔF . Величина внутренней силы, действующей по данной площадке, равна ΔP (рис. 5).

Если площадка ΔF будет уменьшаться, стягиваясь около точки A , то предел отношения ΔP к ΔF будет представлять собою напряжение в рассматриваемой точке тела на данном сечении.

Следует иметь в виду, что напряжения различны не только в разных точках тела, но в одной и той же точке по различным наклоненным площадкам.

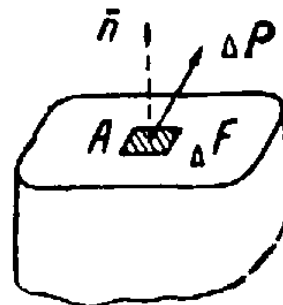


Рис. 5. Напряжение в точке.

Полное напряжение в точке A на площадке ΔF равно:

$$\rho = \text{пред} \left(\frac{\Delta P}{\Delta F} \right)_{\Delta F \rightarrow 0},$$

где ΔP — элементарная сила, передающаяся от отброшенной части тела на рассматриваемую часть.

Разлагая силу ΔP на составляющие: нормальную к сечению ΔN и касательную ΔT , можно определить составляющие полного напряжения.

Нормальное напряжение:

$$\sigma = \text{пред} \left(\frac{\Delta N}{\Delta F} \right)_{\Delta F \rightarrow 0}.$$

Оно представляет собою проекцию полного напряжения на нормаль (\bar{n}) к площадке:

$$\sigma = \rho \cos(\rho, n).$$

Касательное напряжение:

$$\tau = \text{пред} \left(\frac{\Delta T}{\Delta F} \right)_{\Delta F \rightarrow 0}$$

и равно проекции полного напряжения на плоскость площадки (рис. 6):

$$\tau = \rho \sin(\rho, n).$$

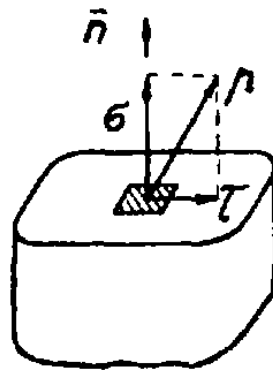


Рис. 6. Составляющие напряжения.

Между полным напряжением и его составляющими имеется следующая зависимость:

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Напряжение имеет размерность $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$ и обычно выражается в $\text{кг}/\text{см}^2$ или $\text{кг}/\text{мм}^2$.

Через каждую точку тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных площадок. Каждой площадке будут соответствовать определенные значения составляющих напряжения. Совокупность этих напряжений характеризует напряженное состояние в данной точке тела.

Между напряжениями и деформациями существует зависимость. В случае упругой деформации эта зависимость выражается законом Гука.

Закон Гука при линейной деформации (растяжение или сжатие) выражает прямолинейную зависимость между нормальными напряжениями и относительными деформациями (удлинением):

$$\sigma = \epsilon E.$$

При угловой деформации (сдвиг) существует прямолинейная зависимость между касательными напряжениями и углами сдвига:

$$\tau = \gamma G.$$

В этих выражениях E и G представляют собою коэффициенты пропорциональности, характеризующие упругие свойства материалов.

Глава I. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Центральное растяжение или сжатие прямолинейного стержня имеет место при действии двух равных, противоположно направленных сил, приложенных к концевым сечениям и действующих по оси стержня.

Продольной силой N в поперечном сечении стержня называется сумма проекций на нормаль к рассматриваемому сечению всех сил (нагрузок), действующих по одну сторону от сечения.

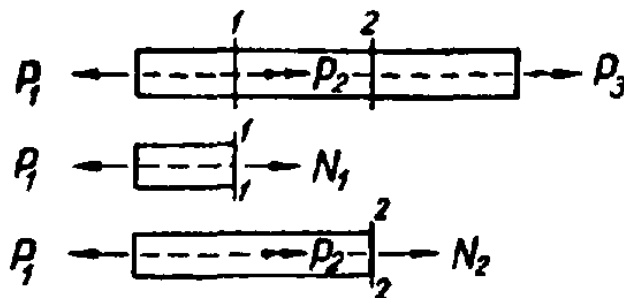


Рис. 7. Продольные силы в сечениях стержня.

Например, в первом сечении стержня, изображенного на рис. 7, продольная сила N_1 определяется из условий равновесия левой части:

$$N_1 = P_1.$$

Во втором сечении:

$$N_2 = P_1 - P_2 \text{ или } N_2 = P_3.$$

Эпюра продольных сил N представляет собою график величин этих усилий для всех поперечных сечений стержня.

На рис. 8 показана эпюра N для стержня, находящегося под действием заданной системы сил.

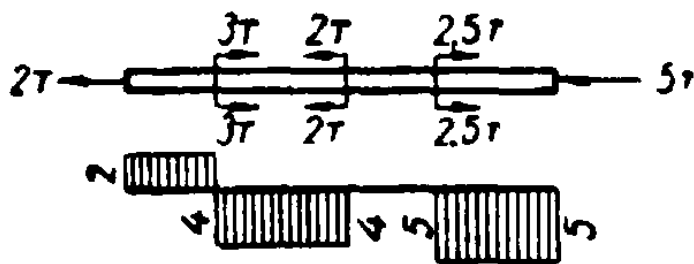


Рис. 8. Эпюра продольных сил.

Напряжение, возникающее в поперечном сечении, проведенном перпендикулярно оси стержня на достаточном расстоянии от места приложения нагрузки, равно:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (1)$$

где: N — продольная сила в сечении;

F — площадь поперечного сечения.

Формула (1) справедлива лишь для поперечных сечений, отстоящих от места приложения нагрузки на расстоянии не меньшем поперечного размера стержня (принцип Сен-Венана).

Вблизи места приложения нагрузки нормальные напряжения распределяются неравномерно — по сложному закону.

Продольная деформация стержня характеризуется следующими величинами (рис. 9):

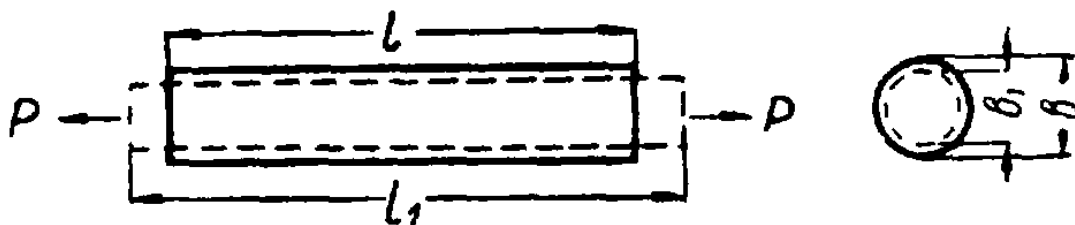


Рис. 9. Деформация растянутого стержня.

Абсолютная продольная деформация (удлинение при растяжении и укорочение при сжатии):

$$\Delta l = l_1 - l,$$

где: l — первоначальная длина стержня;
 l_1 — конечная длина.

Относительная продольная деформация (относительное удлинение):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2)$$

Поперечная деформация характеризуется величинами:

Абсолютная поперечная деформация:

$$\Delta b = b - b_1,$$

где: b — первоначальный поперечный размер;

b_1 — соответствующий размер деформированного стержня.

Относительная поперечная деформация:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b}. \quad (3)$$

Соотношение между относительной поперечной и относительной продольной деформациями для каждого материала является величиной постоянной. Это соотношение называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Величина коэффициента Пуассона для различных материалов колеблется в пределах от 0 до 0,5.

Объемная деформация стержня характеризуется относительным изменением объема:

$$\varepsilon_v = \varepsilon (1 - 2\mu). \quad (5)$$

Объем стержня при растяжении увеличивается, при сжатии уменьшается.

В случае, когда коэффициент Пуассона равен $\mu = 0,5$, объем стержня при растяжении или сжатии остается неизменным.

Зависимость между напряжениями и относительным удлинением выражается законом Гука:

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (6)$$

Модуль упругости E (кг/см^2) представляет собой коэффициент, характеризующий упругие свойства материала.

Модуль упругости имеет размерность напряжения:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Абсолютное удлинение стержня постоянного сечения:

$$\Delta l = \frac{N l}{E F}. \quad (8)$$

При переменной площади сечения F_x предыдущая формула приобретает следующий вид:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dx}{E F_x}. \quad (9)$$

Пример 1. Стальной стержень круглого поперечного сечения ($d = 32$ мм, $l = 35$ см) был растянут на испытательной машине усилием $13,5$ т. Было замерено уменьшение диаметра, равное $0,0064$ мм, и на длине 5 см удлинение, равное $0,040$ мм.

Определить модуль упругости и коэффициент поперечной деформации.
Решение. Относительное удлинение стержня:

$$\varepsilon = \frac{0,040}{50} = 0,0008.$$

Напряжение:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{13\,500}{8,04} = 1\,680 \text{ кг/см}^2,$$

где

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,2^2}{4} = 8,04 \text{ см}^2.$$

Модуль упругости:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1\,680}{0,0008} = 2,11 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Относительная поперечная деформация:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,0064}{32} = 0,0002.$$

Коэффициент Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{0,0002}{0,0008} = 0,25.$$

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Применяемые в инженерной практике материалы можно разделить на две группы: пластичные, которые разрушаются после появления значительных остаточных деформаций, и хрупкие, которые разрушаются при весьма малых остаточных деформациях.

Это деление является условным, ибо один и тот же материал в зависимости от характера напряженного состояния, температуры и скорости деформирования может вести себя как пластичный или как хрупкий.

Основные механические характеристики пластичного материала (например, мягкой стали) определяются при испытаниях на растяжение.

Диаграмма испытания мягкой стали, выражающая зависимость между напряжениями и относительными удлинениями, изображена на рис. 10.

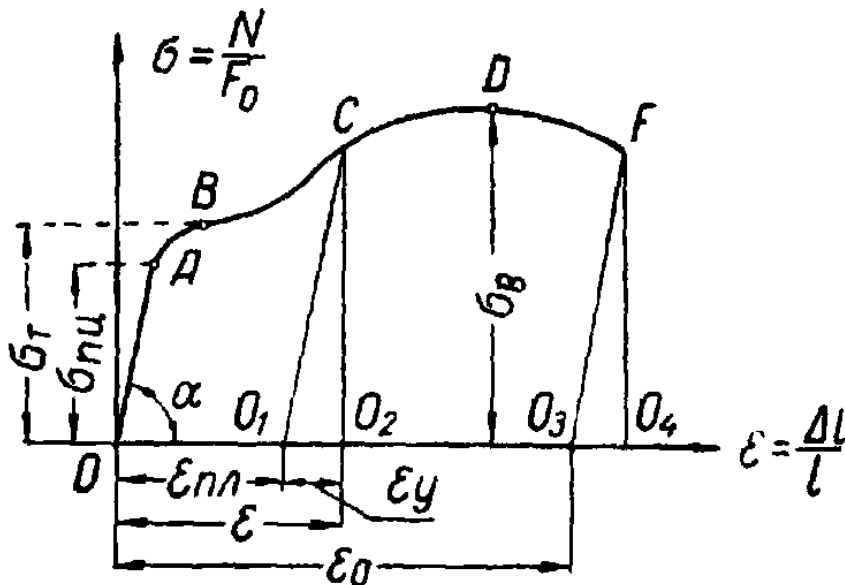


Рис. 10. Диаграмма растяжения пластичной стали.

На диаграмме показаны характерные пределы:

Предел пропорциональности ($\sigma_{пц}$), т. е. наибольшее напряжение, при котором сохраняется закон Гука.

Предел текучести (σ_t), т. е. напряжение, при котором наблюдается рост деформаций при постоянной нагрузке.

Некоторые сорта стали, медь, бронза не имеют площадки текучести на диаграмме. Для таких материалов за величину предела текучести условно принимают напряжение, при котором остаточное относительное удлинение образца достигает 0,2%.

Предел прочности или временное сопротивление (σ_B), т. е. напряжение, вызванное наибольшей нагрузкой.

На диаграмме показан закон разгрузки (линия CO_1 , параллельная OA). При повторной нагрузке (после разгрузки) диаграмма идет по линии O_1CDF , т. е. предел пропорциональности повышается (явление наклепа).

Таким образом, относительная продольная деформация образца (ϵ) состоит из двух частей: упругой деформации (ϵ_y), которая исчезает после разгрузки, и остаточной, или пластической, деформации ($\epsilon_{пл}$), которая сохраняется после разгрузки образца.

Предел упругости (σ_y) представляет собой напряжение, при котором имеют место незначительные остаточные деформации (не более 0,001—0,003%). Практически можно считать предел упругости совпадающим с пределом пропорциональности.

Диаграмма дает возможность определить модуль продольной упругости:

$$E = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона начального участка диаграммы.

В качестве характеристик пластичности материала принимаются:

Относительное остаточное удлинение (ϵ_0):

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta l_0}{l} 100 (\%), \quad (10)$$

где: Δl_0 — остаточное абсолютное удлинение;
 l — первоначальная длина образца.

Относительное остаточное сужение:

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} 100 (\%), \quad (11)$$

где: F_0 — первоначальная площадь сечения;
 F_1 — площадь сечения в месте разрыва.

Способность материала сопротивляться ударам характеризуется величиной удельной работы деформации.

Полная удельная работа деформации представляет собою работу, затраченную на разрыв образца, отнесенную к единице объема:

$$a = \frac{A}{F_0 l}, \quad (12)$$

где: A — работа, затраченная на разрушение образца;
 F_0 — первоначальная площадь сечения;
 l — первоначальная длина образца.

Величина удельной работы (a) равна площади диаграммы ($OABCDFO_4$).

Подобным образом может быть определена удельная работа упругой деформации:

$$a_y = \frac{A_y}{F_0 l}, \quad (13)$$

где a_y равна площади начальной части диаграммы (до точки A), т. е. площади треугольника:

$$a_y = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (14)$$

Обычная диаграмма растяжения дает условные характеристики свойств материала, поскольку напряжения определяются по отношению не к действительной площади сечения, а к первоначальной.

Более точно характеризует свойства материала диаграмма истинных напряжений.

Эта диаграмма строится путем отложения на оси абсцисс относительного сужения образца $\psi = \frac{F_0 - F_t}{F_0}$, а по оси ординат — истинных напряжений $\sigma_n = \frac{P_t}{F_t}$,

где F_t , P_t — соответственно площадь сечения и нагрузка в данный момент испытания.

На рис. 11 изображена диаграмма истинных напряжений для мягкой стали.

Абсциссы диаграммы характеризуют способность материала к пластической деформации.

Ординаты характеризуют способность материала сопротивляться пластической деформации.

Точки B , D и F разграничивают три стадии растяжения образца.

В первой стадии (участок OB) деформации упруги, следуют закону Гука и одинаковы по всей длине образца. Напряжение $\bar{\sigma}_1$ соответствует истинному пределу текучести $\bar{\sigma}_T$. Первую стадию можно считать стадией упругих деформаций.

Во второй стадии (участок BD), продолжающейся вплоть до образования шейки, происходят значительные пластические деформации, одинаковые по всей длине образца. Напряжение $\bar{\sigma}_2$ соответствует наибольшей нагрузке и представляет собою истинный предел прочности. Величина относительного сужения ψ_2 характеризует способность материала к общей деформации.

Вторую стадию можно считать стадией равномерной пластической деформации.

В третьей стадии (участок DF) происходит деформация материала около шейки, т. е. местная пластическая деформация.

Напряжение $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}_p$ представляет собою напряжение в момент разрыва. Разность $\psi_3 - \psi_2$ оценивает способность материала к местным деформациям.

Таким образом, третья стадия является стадией местной пластической деформации.

Крутизна диаграммы — величина производной $\frac{d\bar{\sigma}}{d\psi}$ характеризует способность материала к упрочнению.

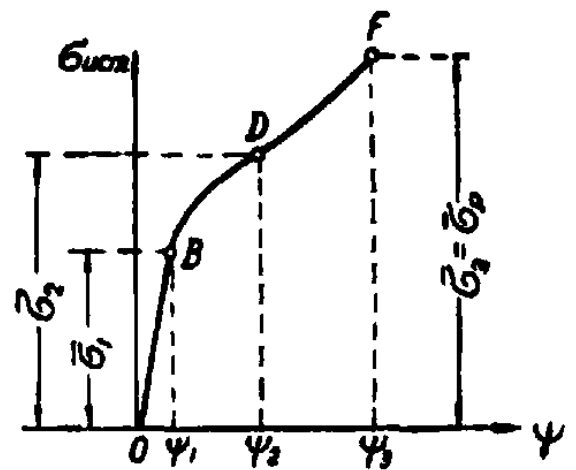


Рис. 11. Диаграмма истинных напряжений.

Форма истинной диаграммы напряжений, а следовательно, и величина сопротивления материала пластическим деформациям зависит от рода материала, температуры, скорости деформации и вида напряженного состояния.

По мере понижения температуры сопротивление пластическим деформациям возрастает. Увеличение скорости деформации также повышает это сопротивление.

Наличие резких переходов, изменений формы деталей, надрезов, трещин и т. д. создает объемное напряженное состояние и может значительно повысить сопротивление материала пластическим деформациям.

Для некоторых материалов (преимущественно хрупких) основным видом испытания является испытание на сжатие.

При сжатии образца из пластичной стали диаграмма сжатия имеет следующий вид (рис. 12).

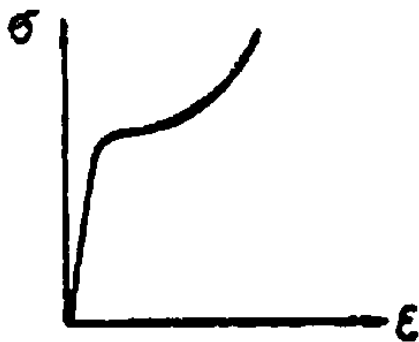


Рис. 12. Диаграмма сжатия пластичной стали.

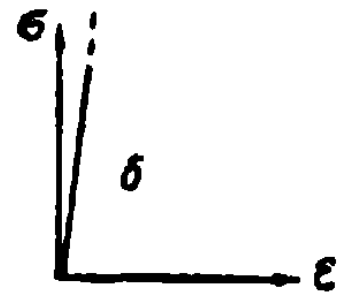
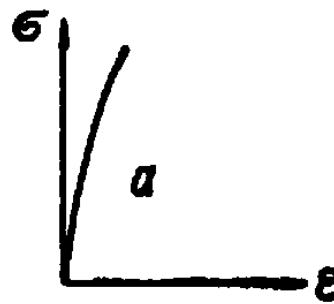


Рис. 13. Диаграммы сжатия чугуна и камня.

Поскольку начальная часть диаграммы сжатия почти совпадает с диаграммой растяжения, принято считать, что механические характеристики пластичной стали при растяжении (предел пропорциональности, упругости, текучести, прочности, модуль упругости) являются и характеристиками при сжатии.

У хрупких материалов эти характеристики различны. Как правило, сопротивление хрупких материалов сжатию значительно выше, чем растяжению.

На рис. 13 показаны диаграммы сжатия для чугуна (рис. 13, а) и камня (рис. 13, б).

Как видно из диаграмм, разрушение хрупких материалов происходит при очень малых деформациях.

Площади диаграмм для хрупких материалов значительно меньше, чем для пластичных. Удельная работа деформации

Таблица 1

Модули упругости и коэффициент Пуассона для металлов

Наименование материала	Модуль упругости E в $кг/см^2$	Модуль упругости G в $кг/см^2$	Коэффициент Пуассона μ
Чугун серый, белый	$1,15—1,60 \cdot 10^6$	$4,5 \cdot 10^5$	$0,23—0,27$
Ковкий чугун	$1,55 \cdot 10^6$	—	—
Углеродистые стали	$2,0—2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$0,24—0,28$
Легированные стали	$2,1 \cdot 10^6$	$8,1 \cdot 10^5$	$0,25—0,30$
Стальное литье	$1,75 \cdot 10^6$	—	—
Медь прокатанная	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	$0,31—0,34$
Медь холодноотянутая	$1,3 \cdot 10^6$	$4,9 \cdot 10^5$	—
Медь литье	$0,84 \cdot 10^6$	—	—
Фосфористая бронза катаная	$1,15 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	$0,32—0,35$
Марганцовистая бронза катаная	$1,1 \cdot 10^6$	$4,0 \cdot 10^5$	$0,35$
Алюминиевая бронза литье	$1,05 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^5$	—
Латунь холодноотянутая	$0,91—0,99 \cdot 10^6$	$3,5—3,7 \cdot 10^5$	$0,32—0,42$
Корабельная латунь катаная	$1,0 \cdot 10^6$	—	$0,36$
Алюминий катаный	$0,69 \cdot 10^6$	$2,6—2,7 \cdot 10^5$	$0,32—0,36$
Алюминиевая проволока тянутая	$0,7 \cdot 10^6$	—	—
Дюралюминий катаный	$0,71 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^5$	—
Цинк катаный	$0,84 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^5$	$0,27$
Свинец	$0,17 \cdot 10^6$	$0,70 \cdot 10^5$	$0,42$

хрупких материалов мала. Этим объясняется слабое сопротивление таких материалов ударам и вообще динамическим нагрузкам.

Таблица 2

Модули упругости и коэффициент Пуассона
для некоторых материалов

Наименование материала	Модуль упругости E в кг/см^2	Модуль упругости G в кг/см^2	Коэффициент Пуассона μ
Гранит	$0,49 \cdot 10^6$	—	—
Известняк	$0,42 \cdot 10^6$	—	—
Мрамор	$0,56 \cdot 10^6$	—	—
Песчаник	$0,18 \cdot 10^6$	—	—
Каменная кладка из:			
гранита	$0,09—0,1 \cdot 10^6$	—	—
известняка	$0,06 \cdot 10^6$	—	—
кирпича	$0,027—0,030 \cdot 10^6$	—	—
Бетон при пределе прочности:			
100 кг/см^2	$0,196—0,146 \cdot 10^6$	—	—
150 »	$0,214—0,164 \cdot 10^6$	—	—
200 »	$0,232—0,182 \cdot 10^6$	—	—
Дерево вдоль волокон	$0,10—0,12 \cdot 10^6$	$0,055 \cdot 10^6$	—
» поперек волокон	$0,005—0,01 \cdot 10^6$	—	—
Каучук	$0,00008 \cdot 10^6$	—	0,47
Бакелит	$0,02—0,03 \cdot 10^6$	—	—
Текстолит	$0,06—0,10 \cdot 10^6$	—	—
Гетинакс	$0,10—0,17 \cdot 10^6$	—	—
Стекло	$0,56 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^6$	0,25
Лед	$0,10 \cdot 10^6$	$0,28—0,3 \cdot 10^5$	—

Таблица 3

Механические характеристики некоторых сталей

Наименование	Марка	Основной химический состав	σ_T в кг/мм ²	Предел прочности σ_B в кг/мм ²	Относительное удлинение в % $l = 10d$	Относительное удлинение в % $l = 5d$	Относительное сужение в % ψ	Ударная вязкость в кгм/см ²	Область применения
Сталь углеродистая обыкновенного качества горячекатаная	Ст. ОС	C=0,14—0,23	19	32—47	18	—	—	—	Строительные конструкции
	Ст. 2	C=0,09—0,15 Mn=0,30—0,50	24	34—42	26	—	—	—	Строительные конструкции
	Ст. 3	C=0,12—0,22 Mn=0,35—0,55 Si=0,12—0,30	22	38—47	21	—	—	—	Основная для строительных конструкций
	Ст. 4	C=0,18—0,27 Mn=0,40—0,60 Si=0,12—0,30	24	42—52	21—19	25—23	—	—	Машины
	Ст. 5	C=0,28—0,37 Mn=0,45—0,70 Si=0,15—0,30	27	50—62	17—15	21—19	—	—	Валы, оси
	Ст. 6	C=0,38—0,50 Mn=0,45—0,70 Si=0,15—0,30	30	60—72	13—11	15—13	—	—	То же

Наименование	Марка	Основной химический состав	Предел текучести σ_T в кг/мм ²	Предел прочности σ_B в кг/мм ²	Относительное удлинение в % $l = 10d$	Относительное удлинение в % $l = 5d$	Относительное сужение в % ψ	Ударная вязкость в кгм/см ²	Область применения
Рельсовая 1А		C=0,53 Mn=0,60—0,90 Si=0,15—0,30	—	70	—	—	—	—	Рельсы ж. д.
Котельная		C=0,12—0,22	—	38—44	24—21	—	—	7—6	Паровые котлы
Мостовая листовая фасонная	Ст. 3 мост.	$\left\{ \begin{array}{l} S \leq 0,05 \\ P \leq 0,045 \end{array} \right.$	23	38—45	22	26	—	8	Мосты
Сталь углеродистая качественная	08	C=0,05—0,12 Mn=0,25—0,50	18	38—45	—	28	—	10	То же
	20	C=0,15—0,25 Mn=0,35—0,65 Si=0,17—0,37	24	40	—	33	60	—	Детали кузова автомобиля
	40	C=0,35—0,45 Mn=0,50—0,80 Si=0,17—0,37	32	57	—	25	55	—	Оси, валы, винты, гайки
	60	C=0,55—0,65 Mn=0,50—0,80 Si=0,17—0,37	37	65	—	17	45	—	Шатуны, шестерни, шпонки, фланцы
						10	35	—	Оси, шпиндели, пружины

Продолжение таблицы 3

Наименование	Марка	Основной химический состав	Предел текучести σ_T в кг/мм ²	Предел прочности σ_B в кг/мм ²	Относительное удлинение в % $l = 10d$	Относительное удлинение в % $l = 5d$	Относительное сужение в % ψ	Ударная вязкость в кгм/см ²	Область применения
Сталь легированная хромистая	20X	C=0,15—0,25 Mn=0,30—0,60 Si=0,17—0,37 Cr=0,70—1,00	60	80	—	12	50	—	Автомобильные детали
Хромоникелевая	20XН	C=0,15—0,25 Cr=0,45—0,75 Ni=1,0—1,5	60	80	—	10	50	—	Крупные автомобильные детали
Хромоникельмолибденовая	40XНМА	C=0,35—0,45 Ni=1,25—1,75 Cr=0,6—0,9 Mo=0,2—0,4	85	100	—	10	45	8	Ответственные детали крупных размеров
Хромоникельвольфрамовая	25XНВА	C=0,20—0,30 Ni=4,0—4,6 Cr=1,3—1,7 W=0,8—1,2	95	100	—	10	50	9	Высоконагруженные коленчатые вальцы
Кремнистая пружинная	50C2	C=0,45—0,55 Mn=0,6—1,2 Si=1,2—1,8	120	130	—	6	30	—	Пружинные рессоры

Механические характеристики некоторых цветных металлов

Наименование	Марка	Основной химический состав	Предел текучести σ_T в кг/мм ²	Предел прочности σ_B в кг/мм ²	Относительное удлинение в %	Область применения
Медные сплавы						
Латунь	Л-68	Zn=23—30	—	30—60	1—45	Трубы, проволока, листы
Латунь алюминиевая	ЛА-77-2	Zn=18—27 Al=1,75—2,5	—	38	23	Трубы
Латунь марганцовистая	ЛМц-58-2	Zn=36—39 Mn=1,0—2,0	—	39—60	3—30	Прутки, листы
Бронзы						
Оловянистые	Бр О-10	Sn=9—11	—	20	2	Арматура
»	Бр ОФ-10-1	Sn=9—11 P=0,8	—	26	3	Шестерни, подшипники
Алюминиевая	Бр А-5	Al=5	—	60	3,5	Ленты
Кремнистая	Бр К-3	Si=3	—	25	10—20	Литье

Остальное — Cu

Продолжение таблицы 4

Наименование	Марка	Основной химический состав	Предел текучести σ_T в кг/мм ²	Предел прочности σ_B в кг/мм ²	Относительное удлинение в %	Область применения
Алюминиевые сплавы	Д-1	Cu=3,8—4,8 Mn=0,4—0,8 Mg=0,4—0,8 Fe=0,8 Si=0,8	5—25	18—42	15—22	Трубы, прессованные профили
Дюралюминий повышенной прочности	Д-6	Cu=4,6—5,2 Mn=0,6—0,8 Mg=0,65—1,0 Fe=0,7 Si=0,7	5—38	18—50	8—20	Трубы, профили
Алюминомагнийевый сплав	АМг	Cu=0,2 Mn=0,15—0,4 Mg=2,0—2,8 Fe=0,5	10—21	18—25	6—23	Трубы, листы

Пределы прочности некоторых материалов

Наименование материала	Предел прочности в кг/см ²	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый обыкновенный	1 400—1 800	6 000—10 000
Чугун серый мелкозернистый	2 100—2 500	до 14 000
Пластмассы		
Бакелит	200—300	800—1 000
Целлулоид	500—700	—
Текстолит	850—1 000	1 300—2 500
Гетинакс	1 500—1 700	1 500—1 800
Бакелизованная фанера	1 300	1 150
Дерево (при 15% влажности):		
Сосна вдоль волокон	800	400
» поперек волокон	—	50
Ель вдоль волокон	650	350
» поперек волокон	—	40
Дуб вдоль волокон	950	500
» поперек волокон	—	150
Камни		
Гранит	30	1 200—2 600
Песчанник	20	400—1 500
Известняк	—	500—1 500
Кирпич	—	74—300
Бетон	—	50—600
Каменная кладка на растворе	2—5	25—90

3 РАСЧЕТ НА РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Условие прочности для растянутого или сжатого стержня записывается следующим образом:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (15)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

Из условия прочности может быть определена необходимая площадь поперечного сечения стержня по заданной осевой нагрузке:

$$F = \frac{N}{[\sigma]}. \quad (16)$$

Допустимая нагрузка на стержень при заданных размерах поперечного сечения:

$$N_{доп} = F [\sigma]. \quad (17)$$

Величина допускаемого напряжения устанавливается в зависимости от качества материала (его механических характеристик), вида деформации, условий работы конструкции, характера действующих нагрузок и т. д.

Допускаемое напряжение можно выразить в зависимости от предела прочности:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{k}, \quad (18)$$

где k — коэффициент запаса прочности.

Коэффициент запаса прочности выбирается так, чтобы исключить возможность появления опасного состояния материала, нарушающего нормальную работу конструкции.

Для элементов конструкций, выполненных из пластичных материалов, опасное состояние характеризуется появлением больших остаточных деформаций, и опасным напряжением можно считать предел текучести $\sigma_0 = \sigma_T$.

Для элементов конструкций, выполненных из хрупкого материала, опасное состояние характеризуется появлением трещин (разрушением материала). За опасное напряжение следует принимать предел прочности $\sigma_0 = \sigma_B$.

При повторно-переменных нагрузках опасное состояние

характеризуется появлением трещин усталости. За опасное напряжение принимается предел выносливости $\sigma_0 = \sigma_r$.

Примерные значения коэффициентов запаса прочности приведены в таблице 6.

Таблица 6

Коэффициенты запаса прочности

Характер нагрузки	Состояние материала	Коэффициент запаса
Статическая нагрузка	Пластичный материал	2,4— 2,6
	Хрупкий материал	3,0— 9,0
Ударная нагрузка	Пластичный материал	2,8— 5,0
Повторно-переменная нагрузка	Пластичный материал	5,0—15,0

Пример 2. Определить наибольшую величину груза Q , который может быть поднят краном (рис. 14). Сечения элементов крана $F_1 = 4 \text{ см}^2$, $F_2 = 6 \text{ см}^2$. Допускаемые напряжения: на растяжение $[\sigma]_p = 1600 \text{ кг/см}^2$; на сжатие $[\sigma]_c = 1000 \text{ кг/см}^2$.

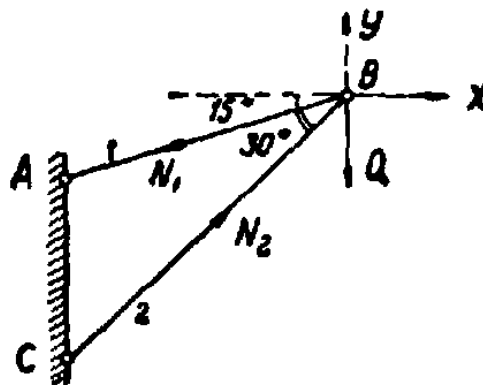


Рис. 14. К примеру 2.

Решение. Из условий равновесия узла B имеем:

$$1) \Sigma X = -N_1 \cos 15^\circ + N_2 \cos 45^\circ = 0,$$

откуда

$$N_2 = N_1 \frac{\cos 15^\circ}{\cos 45^\circ} = N_1 \frac{0,966}{0,707} = 1,37 N_1$$

Ориентировочные значения основных допускаемых напряжений

Наименование материала	Допускаемое напряжение в кг/см ²	
	на растяжение	на сжатие
Чугун серый в отливках	280—800	1 200—1 500
Сталь ОС и Ст. 2	1 400	
Сталь Ст. 3	1 600	
Сталь Ст. 3 в мостах	1 400	
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	600—2 500	
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	1 000—4 000 и выше	
Медь	300—1 200	
Латунь	700—1 400	
Бронза	600—1 200	
Алюминий	300—800	
Дюралюминий	800—1 500	
Текстолит	300—400	
Гетинакс	500—700	
Бакелизированная фанера	400—500	
Сосна вдоль волокон	70—100	100—120
Сосна поперек волокон	—	15—20
Дуб вдоль волокон	90—130	130—150
Дуб поперек волокон	—	20—35
Каменная кладка	До 3	4—40
Кирпичная кладка	До 2	6—25
Бетон	2—14	20—240

или

$$N_1 = N_2 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 15^\circ} = N_2 \frac{0,707}{0,966} = 0,733 N_2.$$

$$2) \Sigma Y = -N_1 \sin 15^\circ + N_2 \sin 45^\circ - Q = 0,$$

откуда

$$Q = N_2 \sin 45^\circ - N_1 \sin 15^\circ = 0,707 \cdot 1,37 N_1 - 0,259 N_1 = 0,71 N_1$$

или

$$Q = 0,707 N_2 - 0,259 \cdot 0,733 N_2 = 0,68 N_2.$$

Допускаемые значения усилий в стержнях:

$$\text{доп } N_1 = F_1 \cdot [\sigma]_p = 4 \cdot 1600 = 6400 \text{ кг};$$

$$\text{доп } N_2 = F_2 \cdot [\sigma]_c = 6 \cdot 1000 = 6000 \text{ кг}.$$

Возможные значения груза Q :

а) по условию прочности стержня AB

$$Q_1 = 0,71 \cdot N_1 = 0,71 \cdot 6400 = 4544 \text{ кг};$$

б) по условию прочности стержня BC

$$Q_2 = 0,68 \cdot N_2 = 0,68 \cdot 6000 = 4080 \text{ кг}.$$

Наибольшая допустимая величина груза Q определяется прочностью стержня BC :

$$Q_{\text{доп}} = 4080 \text{ кг}.$$

Пример 3. Определить вертикальную и горизонтальную составляющие перемещения узла A системы, состоящей из двух стальных стержней (рис. 15). Сечения стержней F_1 и F_2 ; длины l_1 и l_2 . В узле прикреплен груз Q .

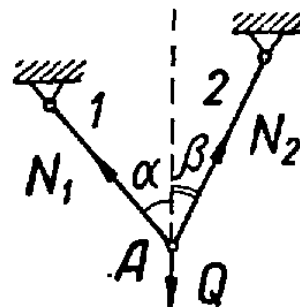


Рис. 15. К примеру 3.

Решение. Усилия в стержнях определяются из условий равновесия узла A :

$$\Sigma X = -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta = 0;$$

$$\Sigma Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta - Q = 0;$$

$$N_1 \sin \alpha = N_2 \sin \beta; \quad N_2 = N_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$

$$N_1 \cos \alpha + N_1 \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} = Q;$$

$$N_1 = \frac{Q}{\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}} = \frac{Q \sin \beta}{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta} = \frac{Q \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)};$$

$$N_2 = N_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{Q \sin \beta \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta) \sin \beta} = \frac{Q \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2}.$$

- При определении перемещения узла A на продолжении 1-го стержня откладывается его удлинение Δl_1 , а на продолжении 2-го стержня — удлинение Δl_2 . Из концов полученных отрезков восстанавливаются перпендикуляры, пересечение которых определит положение узла после деформации системы (рис. 16).

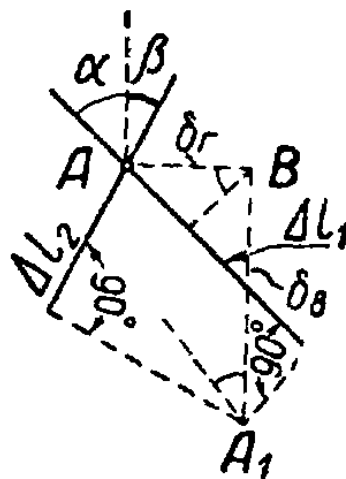


Рис. 16. Диаграмма перемещений.

Проектируя ломаную ABA_1 на направления стержней, получим:

$$\Delta l_1 = \delta_\Gamma \sin \alpha + \delta_B \cos \alpha;$$

$$\Delta l_2 = -\delta_\Gamma \sin \beta + \delta_B \cos \beta.$$

Отсюда определяются перемещения узла:

$$\delta_\Gamma = \frac{\Delta l_1 \cos \beta - \Delta l_2 \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta)};$$

$$\delta_B = \frac{\Delta l_1 \sin \beta + \Delta l_2 \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

4. УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Если стержень постоянного сечения несет осевую нагрузку P (рис. 17), то напряжение в сечении на расстоянии x от свободного конца будет равно:

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma x, \quad (19)$$

где γ — вес единицы объема стержня.

Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]. \quad (20)$$



Рис. 17. Призматический стержень.

Необходимая площадь поперечного сечения при заданном допуске напряжении $[\sigma]$:

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (21)$$

Удлинение стержня:

$$\Delta l = \frac{(P + 0,5 \gamma Fl) l}{EF}. \quad (22)$$

Удлинение стержня только от собственного веса:

$$\Delta l = \frac{0,5 \gamma Fl^2}{EF} = \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (23)$$

Стержень равного сопротивления имеет переменную площадь сечения, подобранную так, что напряжения во всех сечениях одинаковы (рис. 18).

Площадь сечения на расстоянии x от свободного конца

$$F_x = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}, \quad (24)$$

где: F_0 — площадь концевое сечения;
 e — основание натуральных логарифмов.

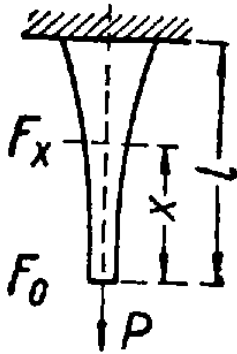


Рис. 18. Стержень равного сопротивления.

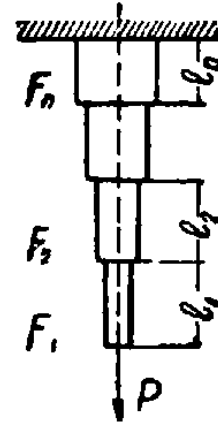


Рис. 19. Ступенчатый стержень.

Практически вместо стержней равного сопротивления применяются ступенчатые стержни (рис. 19).

Поперечное сечение n -й ступени, считая от свободного конца, определяется по формуле:

$$F_n = \frac{P [\sigma]^{n-1}}{([\sigma] - \gamma l_1)([\sigma] - \gamma l_2) \dots ([\sigma] - \gamma l_n)}. \quad (25)$$

5. ГИБКИЕ НИТИ

Гибкие нити представляют собой гибкие элементы линий электропередач, канатных дорог, висячих мостов, кабель-кранов и т. д.

В каждом сечении нити (рис. 20) возникает только растягивающая сила N по касательной к нити; H — горизонтальное натяжение (распор); f_1 и f_2 — высота точек подвеса над низшей точкой провеса нити; F — расчетная площадь поперечного сечения нити; l — пролет; L — полная длина нити; y — провес нити на расстоянии x от низшей точки; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

1. Стрела провеса мала по сравнению с пролетом нити
 ($f \ll \frac{1}{5} l$).

Погонная нагрузка q нити принимается постоянной на единицу длины пролета.

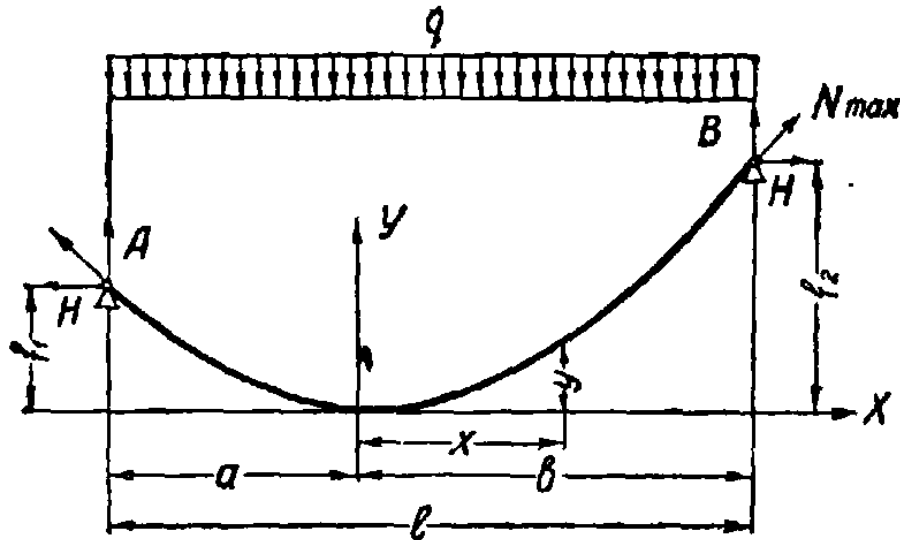


Рис. 20. Гибкая нить.

Нить располагается по квадратной параболе.

Расчетные формулы приведены в таблице 8.

При понижении температуры на Δt° длина нити изменяется из-за 1) температурного удлинения нити и 2) в связи с изменением натяжения нити.

Если точки подвеса нити расположены на одном уровне и H — натяжение при начальной температуре, то натяжение H_1 при пониженной температуре можно определить из уравнения:

$$H_1^3 + H_1^2 \left[\frac{EFq^2 l^2}{24H^2} - \alpha \Delta t EF - H \right] - \frac{EFq^2 l^2}{24} = 0, \quad (26)$$

где α — коэффициент температурного удлинения.

Если задано наибольшее допустимое натяжение нити H_1 , то начальное натяжение H в момент подвешивания нити определится из уравнения:

$$H^3 + H^2 \left[\frac{EFq^2 l^2}{24H_1^2} + \alpha \Delta t EF - H_1 \right] - \frac{EFq^2 l^2}{24} = 0. \quad (27)$$

Формулы для расчета гибких нитей

При точках подвеса на одном уровне $f_1 = f_2 = f$	При точках подвеса на разных уровнях $f_2 - f_1 = h$
$y = \frac{qx^2}{2H}$	$y = \frac{qx^2}{2H}$
$H = \frac{ql^2}{8f}$	$H = \frac{qa^2}{2f_1} = \frac{qb^2}{2f_2}$
$f = \frac{ql^2}{8H}$	$f_1 = \frac{qa^2}{2H} = \frac{q}{2H} \left(\frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql} \right)^2$
	$f_2 = \frac{qb^2}{2H} = \frac{q}{2H} \left(\frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql} \right)^2$
$A = B = \frac{ql}{2}$	$A = \frac{ql}{2} - \frac{Hh}{l}$
	$B = \frac{ql}{2} + \frac{Hh}{l}$
$N_{max} = \sqrt{A^2 + H^2} = \frac{ql}{2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}}$	$N_{max} = \sqrt{H^2 + B^2}$
$\sigma_{max} = \frac{ql}{2F} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}} \leq [\sigma]$	$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]$
$L = l + \frac{8f^2}{3l}$	$L = l + \frac{2}{3} \left(\frac{f_1^2}{a} + \frac{f_2^2}{b} \right)$

Зная H , легко определить необходимую (монтажную) стрелу провисания:

$$f = \frac{ql^2}{8H}. \quad (28)$$

2. Стрела провеса f велика по сравнению с пролетом l ($f > \frac{1}{5} l$).

Опоры на одном уровне ($f_1 = f_2 = f$).

Нагрузка q рассматривается как постоянная на единицу длины нити. Нить располагается по цепной линии:

$$y = \frac{H}{q} \operatorname{ch} \frac{qx}{H}, \quad (29)$$

где распор

$$H \approx \frac{ql^2}{8f}. \quad (30)$$

Наибольшее натяжение

$$N_{max} = H + qf. \quad (31)$$

Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]. \quad (32)$$

Если нить с опорами на одном уровне нагружена посредине пролета сосредоточенной силой P и погонной нагрузкой нити можно пренебречь, то наибольшее натяжение нити можно определить по формуле:

$$N_{max} = \frac{P}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{16}{3} \left(\frac{f}{l}\right)^2 \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f}{l}\right)^2\right]}}. \quad (33)$$

6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

Статически неопределимые задачи решаются добавлением к уравнениям статики абсолютно твердого тела недостающих уравнений, получаемых из рассмотрения упругих деформаций.

Пример 4. Требуется подобрать поперечные сечения стержней, с помощью которых подвешена жесткая балка AB , шарнирно закрепленная в точке A и несущая груз $P=18 \text{ т}$ (рис. 21). Сечения стержней $F_2=1,5 F_1$. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$.

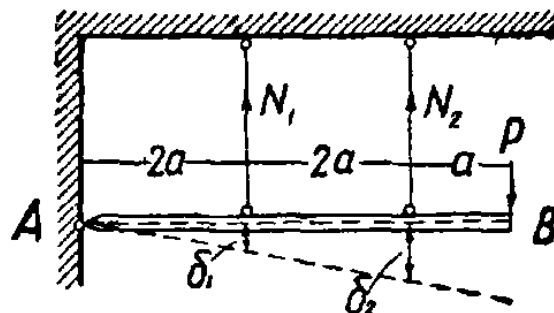


Рис. 21. К примеру 4.

Решение. Уравнения статики:

$$\Sigma M_A = 0; \quad N_1 2a + N_2 4a - P 5a = 0,$$

откуда

$$2N_1 + 4N_2 = 5P.$$

Уравнение совместности деформаций:

$$\delta_2 = 2\delta_1; \quad \frac{N_2 l}{EF_2} = \frac{2N_1 l}{EF_1},$$

откуда при $F_2 = 1,5 F_1$ $N_2 = 3 N_1$.

Решая совместно полученные уравнения, находим:

$$N_1 = \frac{5P}{14} = 6,43 \text{ т}; \quad N_2 = \frac{15P}{14} = 19,3 \text{ т}.$$

Сечения стержней:

$$F_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{19300}{1600} \approx 12 \text{ см}^2; \quad F_1 = \frac{F_2}{1,5} = 8 \text{ см}^2.$$

Пример 5. Определить напряжения, возникающие в стальном болте и охватывающей его медной трубке (рис. 22) при повороте гайки на $\frac{1}{4}$ оборота, если длина болта $l = 75 \text{ см}$, шаг нарезки болта $h = 0,3 \text{ см}$, площадь сечения болта $F_c = 6 \text{ см}^2$, трубки $F_m = 12 \text{ см}^2$, модули упругости $E_c = 2 \cdot 10^6$, $E_m = 1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

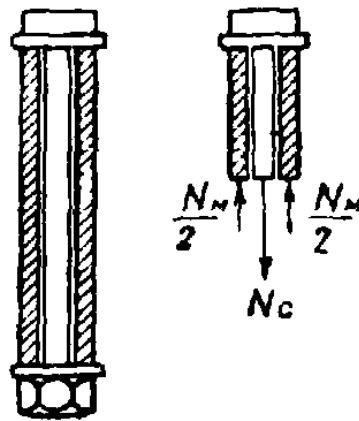


Рис. 22. К примеру 5.

Решение. При заворачивании гайки в болте появится растягивающее усилие N_c , а в трубке сжимающее усилие N_m .

Уравнение статики получается путем проектирования сил на ось болта:

$$N_c - 2 \frac{N_m}{2} = 0,$$

откуда $N_c = N_m = N$.

Уравнение совместности деформаций получается из условия, что удлинение болта, сложенное с укорочением трубки, должно равняться перемещению гайки:

$$\frac{Nl}{E_c F_c} + \frac{Nl}{E_m F_m} = \frac{h}{4},$$

откуда

$$N = \frac{h F_c E_c}{4l \left(1 + \frac{E_c F_c}{E_m F_m}\right)} = \frac{0,3 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 75 \cdot (1 + 1)} = 6000 \text{ кг.}$$

Напряжения в болте и трубке:

$$\sigma_c = \frac{6000}{6} = 1000 \text{ кг/см}^2; \quad \sigma_m = -\frac{6000}{12} = -500 \text{ кг/см}^2.$$

7. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Сжимающие (растягивающие) напряжения при равномерном нагревании (охлаждении) стержня, закрепленного на концах, определяются по формуле:

$$\sigma = E \alpha \Delta t, \quad (34)$$

где: α — коэффициент линейного температурного расширения;
 Δt — изменение температуры против начального значения;
 E — модуль упругости.

Таблица 9

Коэффициенты линейного расширения на 1°C	
Материал	α
Сталь	$10 \cdot 10^{-6} - 13 \cdot 10^{-6}$
Медь	$16,7 \cdot 10^{-6}$
Бронза, латунь	$17 \cdot 10^{-6} - 22 \cdot 10^{-6}$
Алюминий	$25,5 \cdot 10^{-6}$
Бетон	$10 \cdot 10^{-6} - 14 \cdot 10^{-6}$
Дерево	$2 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-6}$

Глава II. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

1. КОМПОНЕНТЫ НАПРЯЖЕНИЯ

Напряжение на любой площадке в рассматриваемой точке тела может быть определено, если известны напряжения в данной точке на каких-либо трех взаимно перпендикулярных площадках.

Пусть около данной точки (А) напряженного тела выделен взаимно перпендикулярными площадками элементарный кубик (рис. 23).

Проекции на координатные оси X , Y , Z напряжений, действующих на площадки, обозначаются так:

$$\begin{array}{l} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz} \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \end{array}$$

Первый индекс показывает, какой оси перпендикулярна площадка действия напряжения, второй — какой оси параллельно напряжение.

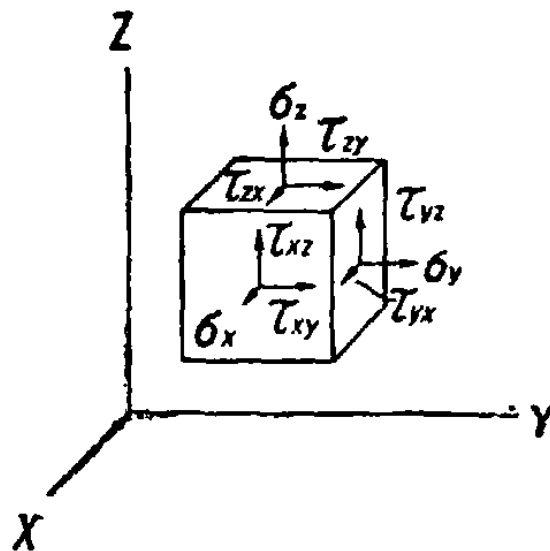


Рис. 23. Компоненты напряжения.

Величины $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \dots, \tau_{zy}$ называются компонентами напряжения в точке А.

Нормальное напряжение σ считается положительным, если оно направлено по внешней нормали к площадке, т. е. является растягивающим.

За положительные направления касательных напряжений принимаются направления осей координат, если растягивающее напряжение по этой же грани кубика имеет направление, совпадающее с положительным направлением соответствующей оси. Если же растягивающее напряжение имеет направление, противоположное положительному направлению оси, то положительные касательные напряжения направлены обратно направлению осей.

Свойство парности касательных напряжений

Касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным бесконечно малым площадкам равны между собой по величине и направлены или оба к линии пересечения площадок, или оба от линии пересечения площадок. Например, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Главные напряжения

Через каждую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Эти площадки называются главными площадками и в рассматриваемой точке, а направления нормалей к ним — главными направлениями.

Действующие на главных площадках нормальные напряжения называются главными напряжениями и обозначаются $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Нормальные напряжения в данной точке достигают на главных площадках экстремальных значений.

Существует три вида напряженного состояния:

1. Линейное — когда два главных напряжения равны нулю (растяжение или сжатие в одном направлении).

2. Плоское — когда одно из главных напряжений равно нулю (например, растяжение или сжатие в двух направлениях).

3. Объемное — когда все три главные напряжения отличны от нуля.

2. ЛИНЕЙНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Допустим, что $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (рис. 24). Главное напряжение предполагаем известным $\sigma_1 = \frac{N}{F}$. Тогда полное напря-

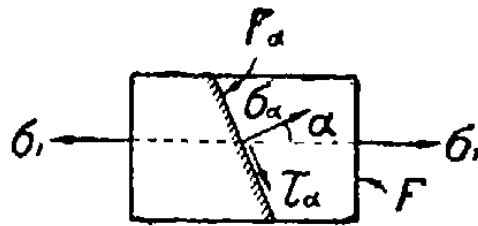


Рис. 24. Напряжения по наклонному сечению.

жение по наклонному сечению с площадью $F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha}$ равно:

$$\rho_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos \alpha = \sigma_1 \cos \alpha. \quad (1)$$

Нормальная и касательная составляющие полного напряжения:

$$\sigma_\alpha = \rho_\alpha \cos \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (2)$$

$$\tau_\alpha = \rho_\alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha. \quad (3)$$

Экстремальные значения нормального напряжения:

$\max \sigma_\alpha = \sigma_1$ при $\alpha = 0$ (главная площадка, перпендикулярная оси элемента); $\min \sigma_\alpha = 0$ при $\alpha = 90^\circ$ (главная площадка, параллельная оси элемента).

Экстремальные значения касательного напряжения:

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \text{ при } \alpha = 45^\circ;$$

$$\min \tau_\alpha = 0 \text{ при } \alpha = 0^\circ \text{ и } \alpha = 90^\circ \text{ (главные площадки).}$$

3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

В случае плоского напряженного состояния одно из трех главных напряжений равно нулю.

Пусть $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$ (рис. 25).

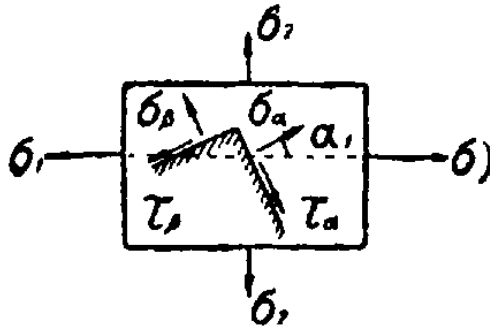


Рис. 25. Напряжения по взаимно перпендикулярным площадкам.

1) При заданных значениях σ_1 и σ_2 напряжения по площадке с нормалью, составляющей угол α_1 с направлением главного напряжения σ_1 , определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1; \quad (4)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1. \quad (5)$$

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_1 \text{ при } \alpha_1 = 0;$$

$$\min \sigma_\alpha = \sigma_2 \text{ при } \alpha_1 = 90^\circ;$$

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ при } \alpha_1 = 45^\circ;$$

$$\min \tau_\alpha = 0 \text{ при } \alpha_1 = 0 \text{ и } \alpha_1 = 90^\circ.$$

В случае, когда $\sigma_2 > 0$, наибольшее и наименьшее из всех касательных напряжений будут иметь место на площадках, наклоненных под углом в 45° к плоскости напряжений, и равны:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2}.$$

Напряжения, действующие по взаимно перпендикулярным площадкам, связаны между собой следующей зависимостью:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2; \quad \tau_\beta = -\tau_\alpha.$$

Круг напряжений

Напряжения по площадкам, наклоненным к главным на углы α и $\beta = \alpha + 90^\circ$, могут быть найдены путем построения круга напряжений (рис. 26).

Порядок построения следующий:

От начала координат откладываются отрезки $OA = \sigma_1$ и $OB = \sigma_2$.

На отрезке AB , как на диаметре, строится круг с центром в точке C .

Координаты точек круга равны нормальному и касательному напряжениям.

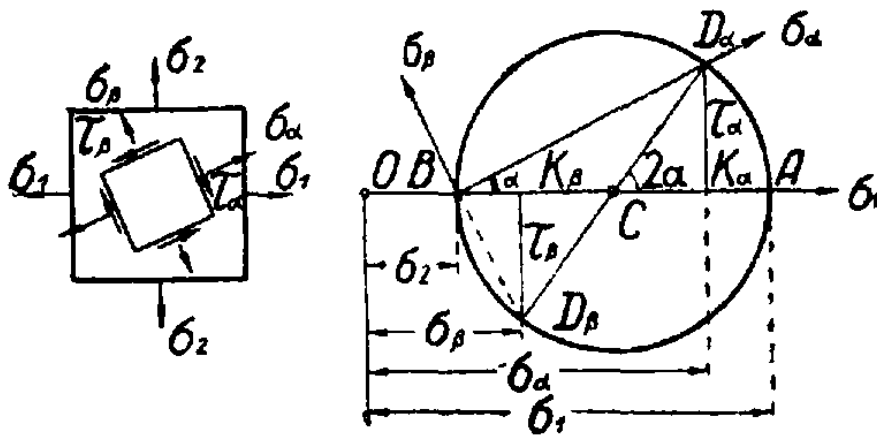


Рис. 26. Круг напряжений.

Например,

$$\sigma_\alpha = OK_\alpha; \quad \tau_\alpha = D_\alpha K_\alpha;$$

$$\sigma_\beta = OK_\beta; \quad \tau_\beta = D_\beta K_\beta.$$

2) При заданных значениях нормальных ($\sigma_\alpha, \sigma_\beta$) и касательных (τ_α, τ_β) напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам элемента (рис. 27) напряжения по площадке с нормалью, составляющей угол φ с направлением σ_α , определяются по формулам:

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \frac{1}{2} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \cos 2\varphi + \tau_\alpha \sin 2\varphi; \quad (6)$$

$$\tau_\varphi = \frac{1}{2} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \sin 2\varphi - \tau_\alpha \cos 2\varphi. \quad (7)$$

Главные напряжения в этом случае равны:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}. \quad (8)$$

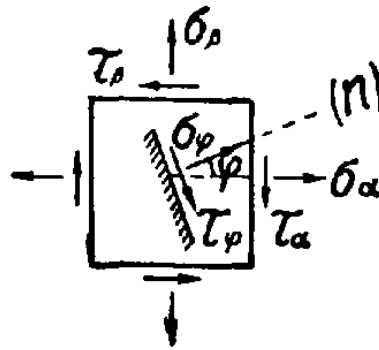


Рис. 27. Напряжения по заданной площадке.

Угол α_1 для главной площадки определяется по одной из следующих формул:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_\beta} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_2}. \quad (9)$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \quad (10)$$

действуют на площадках, расположенных под углом 45° к главным площадкам.

В случае, если $\sigma_2 > 0$, наибольшее из всех касательное напряжение будет иметь место на площадках, наклоненных под углом 45° к плоскости напряжений, и равно:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

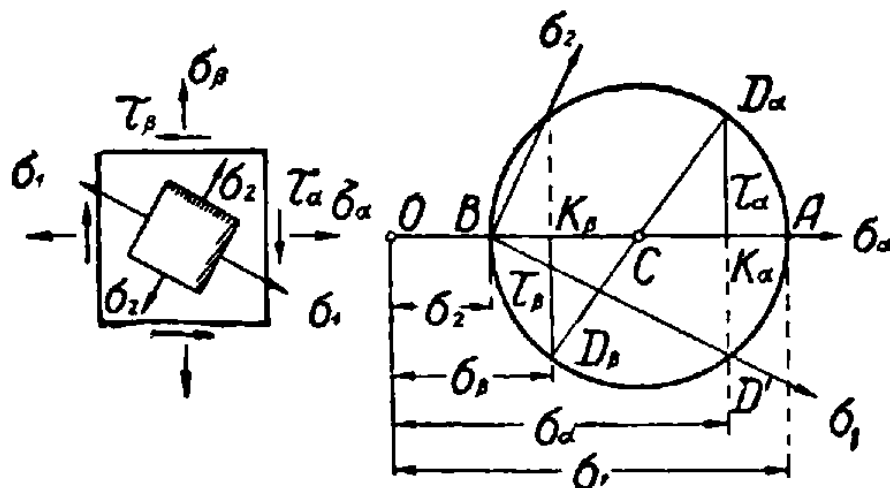
Определение главных напряжений с помощью круга напряжений

Зная напряжения по взаимно перпендикулярным площадкам, можно с помощью круга напряжений определить главные напряжения и положение главных площадок (рис. 28).

В этом случае порядок построения следующий:

На оси, параллельной σ_α , откладываются отрезки $OK_\alpha = \sigma_\alpha$ и $OK_\beta = \sigma_\beta$.

На перпендикулярах, восставленных из концов этих отрезков, откладываются $K_\alpha D_\alpha = \tau_\alpha$ и $K_\beta D_\beta = \tau_\beta$.



• Рис. 28. Определение главных напряжений.

Из точки C пересечения прямой $D_\alpha D_\beta$ с осью абсцисс описывается окружность радиусом CD .

Искомые главные напряжения равны: $\sigma_1 = OA$; $\sigma_2 = OB$.

Направление σ_1 получится, если прямую $D_\alpha K_\alpha$ продолжить до пересечения с окружностью и полученную точку D' соединить прямой с точкой B .

4. ОБЪЕМНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ .

При наличии трех главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 29) нормальное и касательное напряжения по площадке с нормалью (n), составляющей углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ с направлениями соответствующих главных напряжений, определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (11)$$

$$\tau_\alpha = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2}. \quad (12)$$

На площадке, равнонаклоненной к трем главным напряжениям, нормальное и касательное напряжения равны:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (13)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}. \quad (14)$$

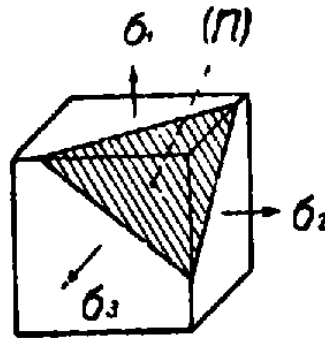


Рис. 29. Напряжения по площадке, наклоненной к главным.

Эти напряжения называются октаэдрическими.

Напряжения на площадках, параллельных одному из главных напряжений определяются без учета этого главного напряжения, т. е. как при плоском напряженном состоянии.

Например, если площадка параллельна σ_3 , то напряжения, возникающие на этой площадке, зависят только от σ_1 и σ_2 и определяются по формулам предыдущего раздела.

В общем случае напряженного состояния наибольшее и наименьшее нормальные напряжения равны соответственно наибольшему и наименьшему главным напряжениям:

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_1; \quad \min \sigma_\alpha = \sigma_3.$$

Наибольшее касательное напряжение возникает на площадке, наклоненной под углом в 45° к направлениям σ_1 и σ_3 и параллельной σ_2 :

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (15)$$

Касательные напряжения по площадкам, параллельным σ_1

или σ_3 и наклоненным под углом в 45° к остальным двум главным напряжениям, соответственно равны:

$$\tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Построение круга напряжений

Напряжения по площадке с нормалью, составляющей углы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ с главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, определяются координатами точки M (рис. 30).

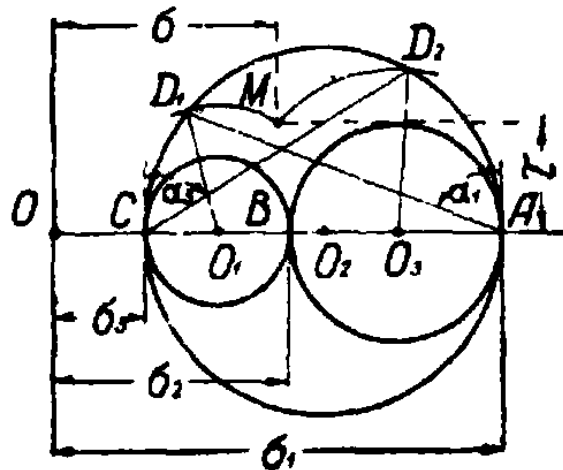


Рис. 30. Круги напряжений при объемном напряженном состоянии.

Порядок построения:

От начала координат откладываются отрезки, равные $OA = \sigma_1$; $OB = \sigma_2$; $OC = \sigma_3$.

На отрезках AB, BC и CA строятся окружности.

В точках A и C восставляются перпендикуляры и от них откладываются углы α_1 и α_3 . Стороны этих углов пересекаются с большой окружностью в точках D_1 и D_2 .

Радиусами O_1D_1 и O_3D_2 проводятся дуги. Точка M пересечения этих дуг имеет координаты σ и τ .

При заданных компонентах напряжения в рассматриваемой точке $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются, как три корня уравнения:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \sigma^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \sigma - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0. \quad (16)$$

Направляющие косинусы нормали каждой из главных площадок определяются из системы следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) &= 0; \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + (\sigma_y - \sigma) \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) &= 0; \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + (\sigma_z - \sigma) \cos(n, z) &= 0; \\ \cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Инварианты напряженного состояния представляют собой постоянные зависимости между компонентами напряжений в рассматриваемой точке при любых положениях осей X, Y, Z :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Интенсивностью напряжений в данной точке называется величина:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Эллипсоид напряжений применяется для изображения напряженного состояния в рассматриваемой точке; уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (20)$$

Величины полных напряжений по наклонным площадкам представляются радиусами-векторами, концы которых лежат на поверхности эллипсоида; полуоси эллипсоида напряжений равны величинам $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Эллипсоид напряжений может быть в виде шара ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), эллипсоида вращения (два главных напряжения равны между собой) и может переходить в плоский эллипс (плоское напряженное состояние), отрезок прямой (линейное напряженное состояние).

Деформации при объемном напряженном состоянии

Компонентами упругой деформации являются:

а) линейные деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)]; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

б) угловые деформации:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (22)$$

где: μ — коэффициент Пуассона;

E — модуль продольной упругости;

G — модуль сдвига.

Главными деформациями называются относительные линейные деформации по направлению главных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_2 + \sigma_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Угловые деформации по главным направлениям равны нулю.

Между главными деформациями и линейными деформациями по любым трем взаимно перпендикулярным осям X, Y, Z в рассматриваемой точке имеется следующая зависимость:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \Theta.$$

Относительное изменение объема равно:

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (24)$$

Изменение объема зависит лишь от суммы главных напряжений, а не от их соотношения. Поэтому такое же изменение объема получит кубик, по всем граням которого будут действовать одинаковые напряжения:

$$\sigma_{\Pi} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

В этом случае

$$\Theta = \frac{3(1-2\mu)}{E} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_{\Pi}}{K}, \quad (25)$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ — модуль объемной деформации. (26)

Угловая деформация между линией, составляющей равные углы с направлениями главных напряжений, и линией действия октаэдрического касательного напряжения называется октаэдрическим сдвигом и равна:

$$\gamma = \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}. \quad (27)$$

Интенсивностью деформации называется величина ϵ_i , пропорциональная октаэдрическому сдвигу:

$$\epsilon_i = \sqrt{2} \gamma. \quad (28)$$

Для простого одноосного растяжения (при $\epsilon_x \neq 0$; $\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu\epsilon_x$):

$$\epsilon_i = \frac{2}{3} (1 + \mu) \epsilon_x. \quad (29)$$

Для чистого сдвига (при $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$; $\gamma_{xy} \neq 0$):

$$\epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{xy}. \quad (30)$$

Энергия упругой деформации

Потенциальной энергией деформации называется энергия, накапливаемая в теле при его деформации, вызванной действием внешних сил.

Энергия упругой деформации, отнесенная к единице объема (удельная энергия), равна:

$$U = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \epsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \epsilon_3}{2} = \\ = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (31)$$

Эта энергия состоит из двух частей: 1) энергии, затрачиваемой на изменение объема, и 2) энергии, затрачиваемой на изменение формы.

Энергия изменения объема:

$$U_v = \frac{\sigma_{II}^2}{2K} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (32)$$

Энергия формоизменения:

$$U_\Phi = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3). \quad (33)$$

При линейном напряженном состоянии (простое растяжение) $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_3 = 0$ и выражения энергии получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\sigma^2}{2E}; \\ U_v &= \frac{(1-2\mu)\sigma^2}{6E}; \\ U_\Phi &= \frac{1+\mu}{3E}\sigma^2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

5 ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Теории прочности стремятся установить критерий прочности для материала, находящегося в сложном напряженном состоянии (объемном или плоском). При этом исследуемое напряженное состояние рассчитываемой детали (с главными напряжениями в опасной точке $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) сравнивается с линейным напряженным состоянием — растяжением или сжатием.

За предельное состояние пластичных материалов (материалов, находящихся в пластичном состоянии) принимается такое

состояние, при котором начинают появляться остаточные (пластические) деформации.

Для материалов, находящихся в хрупком состоянии, предельным состоянием считается такое, при котором материал находится на границе появления первых трещин, т. е. на границе нарушения целостности материала.

Условие прочности при объемном напряженном состоянии может быть записано так:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma], \quad (35)$$

где: $\sigma_{\text{пр}}$ — расчетное или приведенное напряжение;

$[\sigma]$ — допускаемое напряжение при простом растяжении или сжатии.

Расчетное напряжение $\sigma_{\text{пр}}$ можно рассматривать как растягивающее напряжение при линейном напряженном состоянии, эквивалентном рассматриваемому объемному в отношении опасности для прочности материала.

Формулы для расчетного напряжения устанавливаются теориями прочности в зависимости от принятой каждой теорией гипотезы прочности.

Теорий прочности существует несколько.

Первая теория, или теория наибольших нормальных напряжений, основана на предположении, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

Расчетное напряжение по этой теории:

$$\sigma_{\text{пр1}} = \sigma_1 \text{ или } \sigma_{\text{пр1}} = |\sigma_3|. \quad (36)$$

Первая теория совершенно непригодна для пластичных материалов, а также в тех случаях, когда все три главных напряжения однозначны и близки друг к другу по величине.

Вторая теория, или теория наибольших линейных деформаций, основана на предположении, что опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшая по абсолютной величине относительная линейная деформация

достигает значения, соответствующего опасному состоянию при простом растяжении или сжатии.

За расчетное напряжение принимается наибольшая из следующих величин:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}2} &= \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3); \\ \sigma_{\text{пр}2} &= \sigma_3 - \mu (\sigma_2 + \sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Эта теория дает удовлетворительные результаты при хрупком состоянии материала. Для материалов в пластичном состоянии она дает неверные результаты.

Третья теория, или теория наибольших касательных напряжений, предполагает, что появление опасного состояния обусловлено наибольшими касательными напряжениями.

Расчетное напряжение:

$$\sigma_{\text{пр}3} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (38)$$

Эта теория дает удовлетворительные результаты для пластичных материалов, одинаково хорошо сопротивляющихся растяжению и сжатию, и при условии, что главные напряжения разных знаков.

Обобщение этой теории на случай материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, сделано Мором в 1882 г.

Расчетное напряжение по обобщенной теории Мора равно:

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_1 - m\sigma_3, \quad (39)$$

где:

$$m = \frac{\sigma_{\text{T}(+)}}{\sigma_{\text{T}(-)}} \text{ для пластичных материалов;}$$

$$m = \frac{\sigma_{\text{В}(+)}}{\sigma_{\text{В}(-)}} \text{ для хрупких;}$$

$\sigma_{\text{T}(+)}$, $\sigma_{\text{T}(-)}$ — пределы текучести соответственно при растяжении и сжатии;

$\sigma_{\text{В}(+)}$, $\sigma_{\text{В}(-)}$ — пределы прочности при растяжении и сжатии.

Четвертая, или энергетическая теория прочности, основана на предположении, что опасная для прочности пластическая деформация (текучесть) при объемном напряженном состоянии наступает тогда, когда энергия формоизменения достигает величины, соответствующей появлению текучести при простом растяжении.

Расчетное напряжение по этой теории может быть записано в двух вариантах:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{пр4} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}; \\ \sigma_{пр4} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \end{aligned} \right\} (40)$$

Опыты хорошо подтверждают результаты, получаемые по этой теории для пластичных материалов, и она может быть рекомендована для практического применения.

В последнее время Н. Н. Давиденковым и Я. Б. Фридманом предложена новая объединённая теория прочности, обобщающая современные воззрения на прочность при хрупком и пластичном состояниях материала.

В соответствии с этой теорией состояние, в котором находится материал, а следовательно, и характер вероятного разрушения определяется отношением:

$$n = \frac{\tau_{max}}{max \sigma_{пр}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)]}. \quad (41)$$

Если $n < \frac{\tau_p}{\sigma_p}$, материал находится в хрупком состоянии, разрушение произойдет путем отрыва, и расчет на прочность надо вести по теории наибольших линейных деформаций.

Если же $n > \frac{\tau_p}{\sigma_p}$, материал находится в пластичном состоянии, разрушение произойдет путем среза, и расчет на прочность надо вести по теории наибольших касательных напряжений.

Здесь: σ_p — сопротивление отрыву;

τ_p — сопротивление срезу.

При отсутствии опытных данных об этих величинах можно отношение $\frac{\tau_p}{\sigma_p}$ приближенно заменить отношением $\frac{[\tau]}{[\sigma_+]}$, где: $[\tau]$ — допускаемое напряжение на срез; $[\sigma_+]$ — допускаемое напряжение на растяжение.

Глава III. СДВИГ

1. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

Чистый сдвиг представляет собою частный случай плоского напряженного состояния. В этом случае по граням элемента действуют только касательные напряжения (рис. 31).

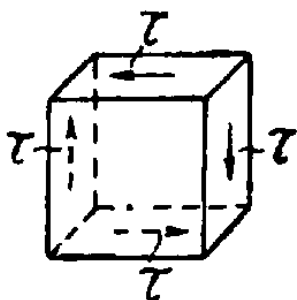


Рис. 31. Чистый сдвиг.

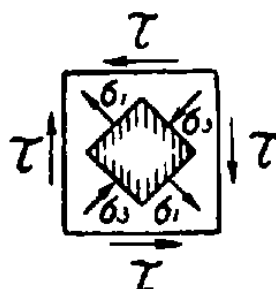


Рис. 32. Главные напряжения при чистом сдвиге.

Касательное напряжение при чистом сдвиге определяется по формуле:

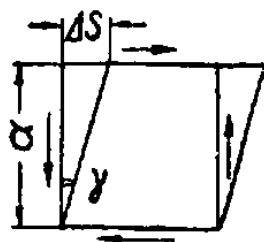
$$\tau = \frac{Q}{F}, \quad (1)$$

где: Q — сдвигающая сила;
 F — площадка сдвига.

Главные напряжения при чистом сдвиге действуют по площадкам, составляющим углы в 45° с площадками сдвига (рис. 32), и равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= +\tau; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Деформации при чистом сдвиге характеризуются следующими величинами (рис. 33):



Абсолютный сдвиг Δs — величина смещения площадки сдвига.

Относительный сдвиг (или угол сдвига):

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

Рис. 33. Деформации при чистом сдвиге.

Закон Гука при сдвиге:

$$\tau = \gamma G. \quad (3)$$

Модуль сдвига:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (4)$$

Энергия деформации:

$$U = \frac{Q^2 a}{2GF} = \frac{\tau^2 a F}{2G}. \quad (5)$$

Удельная энергия деформации:

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \quad (6)$$

Условие прочности при сдвиге:

$$\tau_{max} \leq [\tau]. \quad (7)$$

Величина допускаемого напряжения $[\tau]$ определяется в зависимости от принятой теории прочности.

По второй теории прочности (теории наибольших линейных деформаций):

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (8)$$

Для стали при $\mu = 0,3$ $[\tau] = (0,7 \div 0,8) [\sigma]$.

По третьей теории прочности (теории наибольших касательных напряжений):

$$[\tau] = 0,5 [\sigma]. \quad (9)$$

По четвертой (энергетической теории):

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6 [\sigma]. \quad (10)$$

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИГМЫ РАСЧЕТА НА СДВИГ

В инженерной практике на сдвиг рассчитываются крепежные детали и соединительные элементы частей машин и строительных конструкций: заклепки, болты, шпонки, сварные швы, врубки и т. д.

Эти детали или не являются стержнями вообще, или длина их имеет тот же порядок, что и поперечные размеры.

Теоретическое решение подобных расчетных задач весьма сложно, и поэтому прибегают к условным приемам расчета.

При такого рода расчетах исходят из крайне упрощенных схем, определяют условные напряжения по простым формулам и сравнивают их с допускаемыми напряжениями, найденными из опыта.

Основные условные схемы, положенные в основу этих расчетов, следующие: а) разрыв, б) срез (сдвиг), в) смятие.

Напряжения при рассмотрении каждой расчетной схемы условно принимаются равномерно распределенными по опасному сечению.

Вследствие большого числа условностей, лежащих в основе расчета заклепочных соединений, сварных швов и других подобных им элементов конструкций, практика выработала ряд рекомендаций, которые сообщаются в специальных курсах деталей машин, строительных конструкций и т. д.

Ниже приводятся только некоторые типичные примеры условных расчетов.

а. Расчет заклепочных соединений

Заклепочные соединения рассчитываются на срез (сдвиг) и смятие стержня заклепки. Кроме того, производится проверка склепываемых элементов на разрыв по ослабленному сечению.

Расчет на срез

Условие прочности на срез:

$$\tau = \frac{P}{m \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau].$$

Откуда число срезов:

$$m = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]}$$

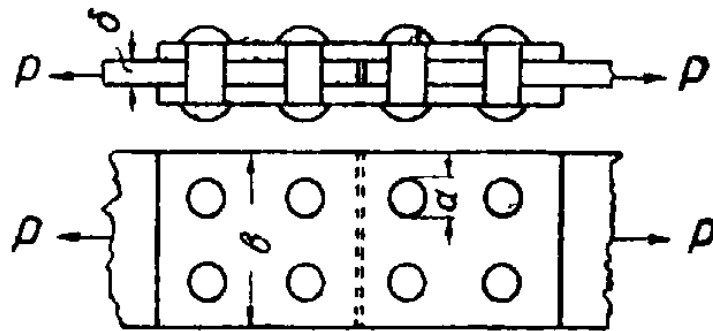


Рис. 34. Заклепочное соединение.

Число заклепок определяется по числу срезов:

а) при односрезных заклепках $n = m$;

б) при двухсрезных заклепках $n = \frac{m}{2}$.

Расчет на смятие

Условие прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{P}{nd\delta} \leq [\sigma_{см}].$$

За площадь смятия условно принимается площадь диаметрального сечения стержня заклепки.

Необходимое число заклепок из расчета на смятие:

$$n = \frac{P}{d\delta [\sigma_{см}]}.$$

Проверка листа на разрыв

Условие прочности на разрыв листа в сечении, ослабленном заклепочными отверстиями:

$$\sigma = \frac{P}{\delta(b - n_1 d)} \leq [\sigma],$$

где: δ — толщина листа;

b — ширина листа;

d — диаметр стержня заклепки;

n_1 — число заклепок в том шве, по которому возможен разрыв.

Значения допускаемых напряжений для стали марки Ст. 3 в заклепочных соединениях строительных конструкций ориентировочно могут быть приняты следующие:

Основные элементы	$\left\{ \begin{array}{l} [\sigma] = 1\,600 \text{ кг/см}^2 \\ [\tau] = 1\,000 \text{ »} \end{array} \right.$
Заклепки в рассверленных отверстиях	$\left\{ \begin{array}{l} [\tau] = 1\,400 \text{ »} \\ [\sigma_{см}] = 3\,200 \text{ »} \end{array} \right.$
Заклепки в продавленных отверстиях	$\left\{ \begin{array}{l} [\tau] = 1\,000 \text{ »} \\ [\sigma_{см}] = 2\,800 \text{ »} \end{array} \right.$

Расчетные сопротивления, принятые при расчете по предельным состояниям:

Основные элементы	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Нормальные } R = 2\,100 \text{ кг/см}^2 \\ \text{Срезающие } R_{ср} = 1\,300 \text{ »} \end{array} \right.$
Заклепки в рассверленных отверстиях	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Срез } R_{ср}^{зак} = 1\,800 \text{ »} \\ \text{Смятие } R_{см}^{зак} = 4\,200 \text{ »} \end{array} \right.$
Заклепки в продавленных отверстиях	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Срез } R_{ср}^{зак} = 1\,400 \text{ »} \\ \text{Смятие } R_{см}^{зак} = 3\,400 \text{ »} \end{array} \right.$

При размещении заклепок в плане руководствуются требованиями прочности, плотности и производственными соображениями.

б. Расчет сварных соединений

Соединение встык (рис. 35) рассчитывается на растяжение или сжатие по формуле:

$$\sigma = \frac{P}{l\delta} \leq [\sigma_с],$$

где: $l = b - 10$ мм — расчетная длина сварного шва;
 δ — расчетная высота шва;
 $[\sigma_с]$ — допускаемое напряжение для сварного шва.

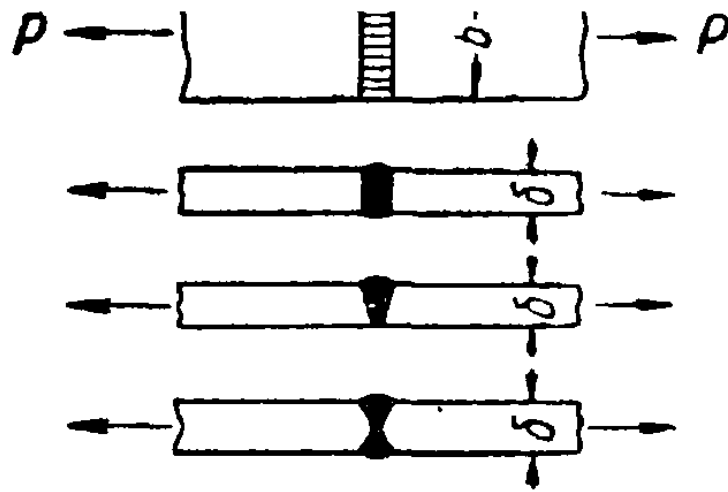


Рис 35. Сварное соединение встык.

Соединение встык с косым швом (рис. 36) проверяется на действие нормальных и касательных напряжений по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{P \sin \alpha}{l \delta} \leq [\sigma_{\alpha}];$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{P \cos \alpha}{l \delta} \leq [\tau_{\alpha}].$$

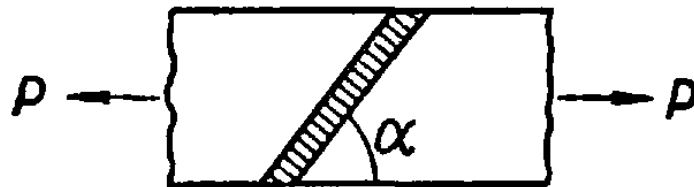


Рис. 36. Сварное соединение с косым швом.

Здесь расчетная длина шва $l = \frac{b}{\sin \alpha} - 10$ мм, а $[\tau_{\alpha}]$ — допускаемое напряжение на срез.

Расчет лобовых швов (рис. 37) условно производится на срез по наиболее слабому (наклонному) сечению.

$$\tau = \frac{P}{0,7 \delta \Sigma l} \leq [\tau_{\alpha}],$$

где Σl — суммарная длина швов.

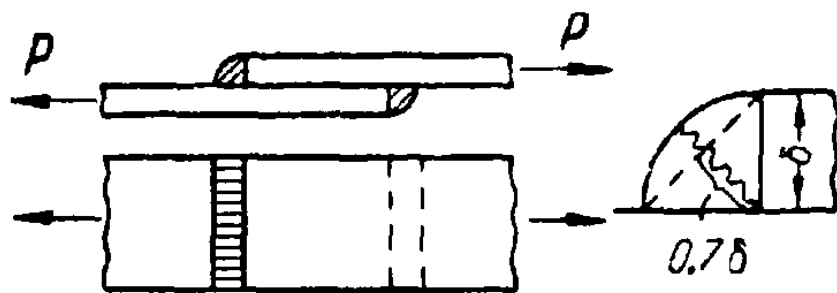


Рис. 37. Сварное соединение с лобовыми швами.

Расчет фланговых швов (рис. 38) производится по той же формуле, что и лобовых:

$$\tau = \frac{P}{0,7 \delta \Sigma l} \leq [\tau_{\text{э}}].$$

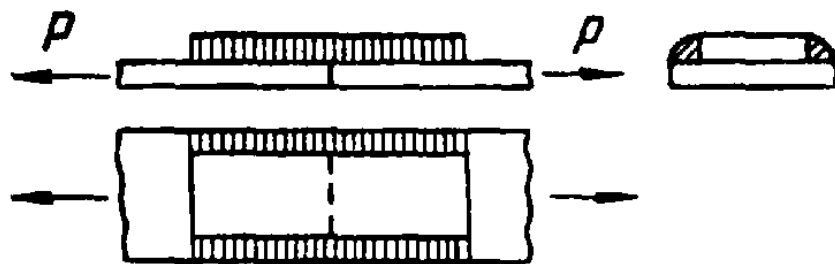


Рис. 38. Сварное соединение с фланговыми швами.

В случае приварки элементов с несимметричным сечением, например угольников (рис. 39), длина швов с каждой стороны определяется по формулам:

$$l_a = \frac{P_c}{0,7 \delta [\tau_{\text{э}}] (a + c)};$$

$$l_c = \frac{P_a}{0,7 \delta [\tau_{\text{э}}] (a + c)}.$$

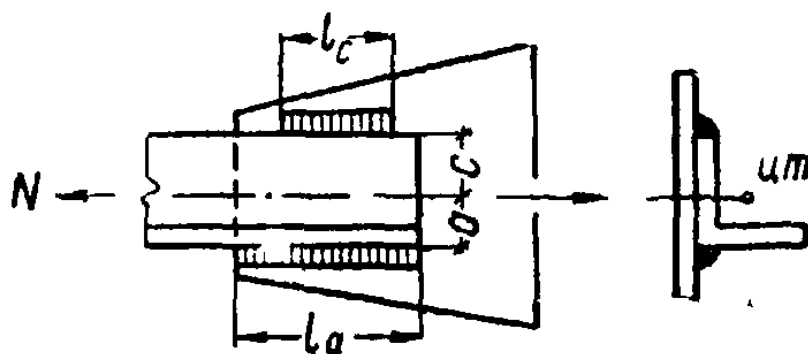


Рис. 39. Присоединение угольника к фасонному листу.

Допускаемые напряжения для сварных швов в конструкциях из стали марки Ст. 3 по существующим нормам (ГОСТ 960-46) приведены в следующей таблице:

Таблица 10

Допускаемые напряжения при сварке в $кг/см^2$

Вид напряжения	Обозначение	Ручная сварка		Автоматическая сварка
		электроды с тонкой обмазкой	электроды с толстой обмазкой	
Растяжение	$[\sigma_a]$	1 000	1 300	1 300
Сжатие	$[\sigma_a]$	1 100	1 450	1 450
Срез	$[\tau_a]$	800	1 100	1 100

Значения расчетных сопротивлений (R), принятые при расчете строительных конструкций по предельным состояниям, даны в таблице 11.

Таблица 11

Расчетные сопротивления для сварных соединений в $кг/см^2$

Вид сварного соединения	Вид напряженного состояния	Обозначение	Ручная сварка		Автоматическая сварка
			электроды с тонкой обмазкой	электроды с толстой обмазкой	
Встык	Растяжение	$R_p^{св}$	1 200	1 800	1 800
	Сжатие	$R_c^{св}$	1 300	2 100	2 100
	Срез	$R_{ср}^{св}$	800	1 300	1 300
Угловыми швами	Растяжение	$R_p^{св}$	} 900	1 500	1 500
	Сжатие	$R_c^{св}$			
	Срез	$R_{ср}^{св}$			

в. Расчет деревянных врубок

Расчет деревянных врубок производится на скалывание и смятие. Допускаемые напряжения или расчетные сопротивления устанавливаются в зависимости от направления действующих сил по отношению к волокнам деревянных элементов.

Значения допускаемых напряжений и расчетных сопротивлений для сосны и ели приведены в следующей таблице:

Таблица 12

Допускаемые напряжения и расчетные сопротивления для древесины сосны и ели

Вид сопротивления	Допускаемые напряжения		Расчетные сопротивления	
	Обозначение	Величина в кг/см ²	Обозначение	Величина в кг/см ²
Изгиб	[σ _и]	100	R _и	130
Растяжение вдоль волокон . .	[σ _р]	70	R _р	100
Сжатие и смятие вдоль волокон	[σ _с], [σ _{см}]	100	R _с , R _{см}	130
Смятие поперек волокон (на длине не менее 10 см) . . .	[σ _{см}] ₉₀	25	R _{см90}	30
Скалывание вдоль волокон при изгибе	[τ _и]	20	R _{ск}	24
Скалывание вдоль волокон во врубках	[τ]	10	R _{ск}	12—24
Скалывание во врубках поперек волокон	[τ] ₉₀	5	R _{ск90}	6—12

При смятии (или скалывании) под углом α к направлению волокон допускаемое напряжение (расчетное сопротивление) определяется по формуле:

$$[\sigma_{\alpha}] = \frac{[\sigma_{см}]}{1 + \left\{ \frac{[\sigma_{см}]}{[\sigma_{см}]_{90}} - 1 \right\} \sin^3 \alpha}$$

В случае применения других древесных пород значения напряжений, приведенные в таблице, умножаются на поправочный коэффициент.

Величина этого коэффициента для древесины дуба:

- 1) при изгибе, растяжении, сжатии и смятии вдоль волокон 1,3
- 2) при сжатии и смятии поперек волокон 2,0
- 3) при скалывании 1,3

Пример. Проверить прочность врубки стропильной ноги в затяжку (рис. 40).

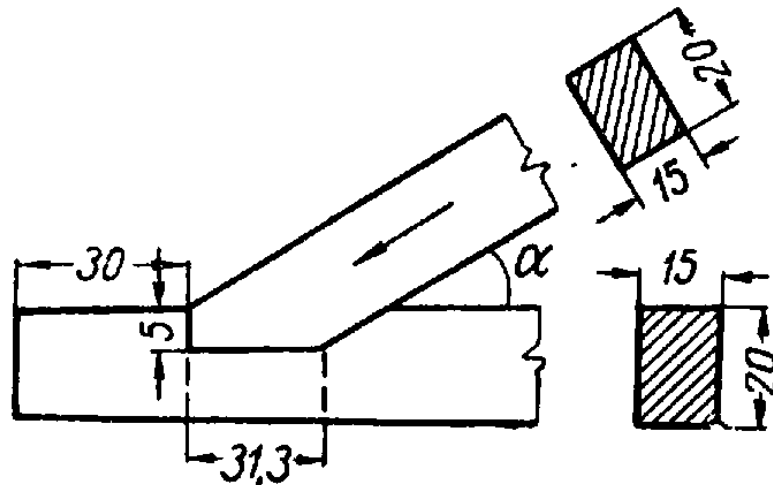


Рис. 40. Врубка стропильной ноги в затяжку.

Угол наклона стропильной ноги $\alpha = 30^\circ$. Усилие в ноге $N = 6 \text{ т}$.
Материал — сосна.

Решение: 1. Проверка на скалывание выступающей части затяжки:

$$N_{\text{ск}} = N \cos \alpha = 6 \cdot 0,866 = 5,196 \text{ т};$$

$$\tau = \frac{N_{\text{ск}}}{F_{\text{ск}}} = \frac{5\,196}{30 \cdot 15} = 9,6 \text{ кг/см}^2 < [\tau] = 10 \text{ кг/см}^2.$$

2. Проверка на смятие ноги по вертикальной площадке (под углом $\alpha = 30^\circ$ к волокнам):

$$[\sigma_\alpha] = \frac{[\sigma_{\text{см}}]}{1 + \left\{ \frac{[\sigma_{\text{см}}]}{[\sigma_{\text{см}}]_{90}} - 1 \right\} \sin^3 \alpha} = \frac{100}{1 + \left\{ \frac{100}{25} - 1 \right\} \sin^3 30^\circ} = 72,7 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_{\text{см}}}{F_{\text{см}}} = \frac{5\,196}{5 \cdot 15} = 69,2 \text{ кг/см}^2 < [\sigma_\alpha].$$

3. Проверка на смятие по горизонтальной площадке поперек волокон:

$$N_2 = N \sin \alpha = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ т};$$

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{N_2}{F'_{\text{ем}}} = \frac{2500}{31,3 \cdot 15} = 5,3 \text{ кг/см}^2 < [\sigma_{\text{см}}]_{90} = 25 \text{ кг/см}^2.$$

Глава IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ

Геометрическими характеристиками сечения, определяющими способность стержня сопротивляться деформации, являются: площадь, положение центра тяжести, статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления.

1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОСКИХ ФИГУР

Статические моменты площади сечения относительно осей X и Y (рис. 41) определяются выражениями:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF \text{ (см}^3\text{)}. \quad (1)$$

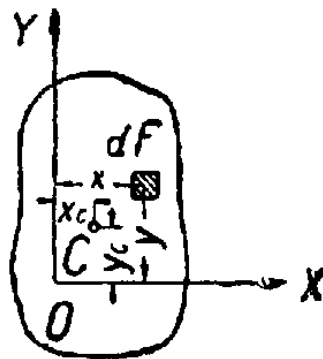


Рис. 41. Сечение стержня.

Если известно положение центра тяжести (С) сечения, то статические моменты определяются проще:

$$S_x = F y_c; \quad S_y = F x_c \quad (2)$$

где F — площадь сечения.

Статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю.

Статический момент сложной фигуры равен сумме статических моментов ее частей (рис. 42):

$$\left. \begin{aligned} S_x &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \Sigma F_i y_i; \\ S_y &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \Sigma F_i x_i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

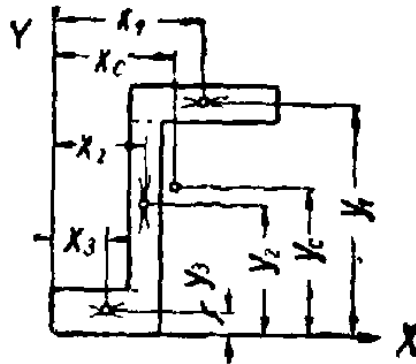


Рис. 42. Сложная фигура.

2. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Координаты центра тяжести сечения по отношению к выбранным осям X и Y определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_x}{F} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \\ x_c &= \frac{S_y}{F} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где: S_x и S_y — статические моменты площади сечения относительно осей X и Y ;

F_1, F_2, \dots, F_n — площади отдельных частей, на которые разбивается сечение;

y_1, y_2, \dots, y_n и x_1, x_2, \dots, x_n — координаты центров тяжести частей сечения по отношению к осям X и Y .

Графический способ (рис. 43)

Для нахождения центра тяжести графическим путем следует сечение разбить на такие части, центры тяжести которых известны или могут быть легко определены.

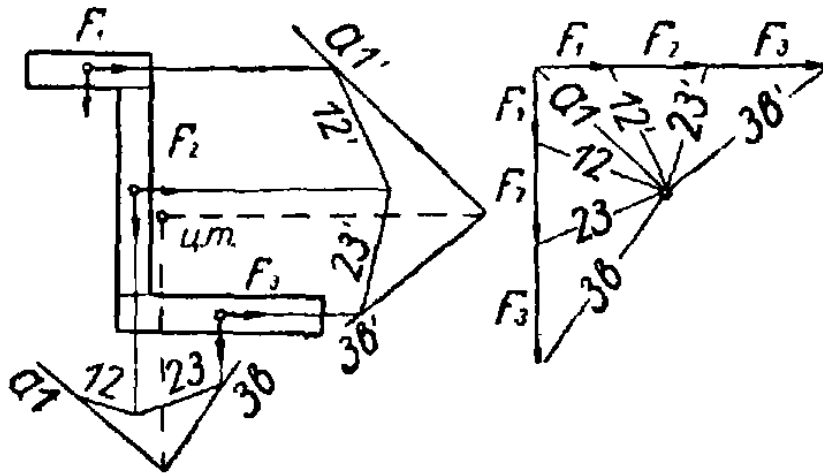


Рис. 43. Определение положения центра тяжести.

Приложив в центрах тяжести этих отдельных частей систему параллельных векторов, соответственно пропорциональных их площадям, следует построить для этой системы веревочный многоугольник и через точку пересечения его крайних сторон провести линию действия равнодействующей. Повернув все векторы на 90° , следует построить другой веревочный многоугольник и найти новое направление равнодействующей.

Точка пересечения обоих найденных направлений определит положение искомого центра тяжести данной фигуры.

3. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Осевые (экваториальные) моменты инерции площади сечения относительно осей X и Y , лежащих в ее плоскости, представляют собой интегралы следующего вида:

$$J_x = \int_F y^2 dF; J_y = \int_F x^2 dF \quad (\text{см}^4), \quad (5)$$

где x и y — координаты элементарной площадки dF (рис. 44).

Центробежный момент инерции относительно осей X и Y :

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (\text{см}^4). \quad (6)$$

Центробежный момент инерции относительно осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю.

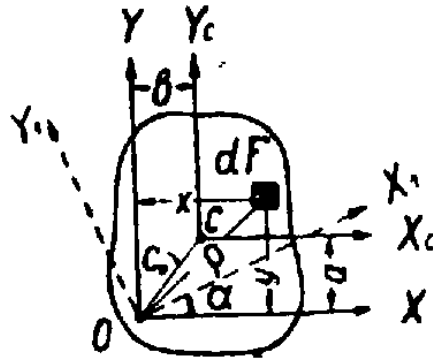


Рис. 44. Определенне моментов инерции.

Полярный момент инерции площади относительно точки (полюса), лежащей в ее плоскости:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \quad (\text{см}^4), \quad (7)$$

где ρ — расстояние от точки O (полюса) до элементарной площадки dF .

Радиусы инерции плоской фигуры относительно осей X и Y представляют собой величины:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \quad (8)$$

и измеряются в линейных единицах (см).

Зависимость между полярным и осевыми моментами инерции выражается равенством:

$$J_p = J_x + J_y, \quad (9)$$

где X и Y — взаимно перпендикулярные оси, проходящие через полюс, относительно которого определяется J_p .

Зависимость между осевыми моментами инерции относительно параллельных осей:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{x_c} + a^2 F; \\ J_y &= J_{y_c} + b^2 F, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где: J_{x_c} , J_{y_c} — моменты инерции относительно центральных осей X_c и Y_c , соответственно параллельных осям X и Y ;

a — расстояние между осями X_c и X ;

b — расстояние между осями Y_c и Y ;

F — площадь сечения.

Зависимость между центробежными моментами инерции относительно параллельных осей:

$$J_{xy} = J_{x_c y_c} + abF, \quad (11)$$

где: $J_{x_c y_c}$ — центробежный момент инерции относительно центральных осей X_c и Y_c , параллельных осям X и Y ;

a и b — координаты центра тяжести фигуры по отношению к осям X и Y ; они берутся с их знаками.

Зависимость между полярными моментами инерции относительно двух точек O и C :

$$J_\rho = (J_\rho)_c + c_0^2 F, \quad (12)$$

где: $(J_\rho)_c$ — полярный момент инерции относительно центра тяжести C сечения;

c_0 — расстояние между точками C и O .

Зависимость между моментами инерции при повороте осей:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где: $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{x_1y_1}$ — моменты инерции относительно осей X_1 и Y_1 , повернутых на угол α против часовой стрелки по отношению к осям X и Y ;

J_x, J_y, J_{xy} — моменты инерции относительно первоначальных осей X и Y .

Момент инерции сечения сложной формы определяется как сумма моментов инерции отдельных составляющих площадок.

Осевой момент инерции всего сечения относительно оси X :

$$J_x = (J_{xc})_1 + (J_{xc})_2 + \dots + (J_{xc})_n + a_1^2 F_1 + \dots + a_2^2 F_2 + \dots + a_n^2 F_n, \quad (14)$$

где: $(J_{xc})_1, (J_{xc})_2, \dots, (J_{xc})_n$ — моменты инерции площадок F_1, F_2, \dots, F_n , составляющих сечение по отношению к осям X_c , каждая из которых проходит через центр тяжести соответствующей площадки, параллельно оси X ;

a_1, a_2, \dots, a_n — расстояния между осью X и параллельными ей осями X_c ;

F_1, F_2, \dots, F_n — величины площадок.

Центробежный момент инерции всего сечения относительно осей X и Y :

$$J_{xy} = (J_{xcyc})_1 + (J_{xcyc})_2 + \dots + (J_{xcyc})_n + a_1 b_1 F_1 + \dots + a_2 b_2 F_2 + \dots + a_n b_n F_n, \quad (15)$$

где: $(J_{xcyc})_1, (J_{xcyc})_2, \dots, (J_{xcyc})_n$ — моменты инерции площадок $1, 2, \dots, n$ относительно центральных осей $X_c Y_c$ этих площадок;

a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n — координаты центров тяжести площадок по отношению к осям X и Y .

Если одна из осей X_c или Y_c каждой составляющей площадки является для нее осью симметрии, то

$$J_{xy} = a_1 b_1 F_1 + a_2 b_2 F_2 + \dots + a_n b_n F_n = \sum_1^n a_i b_i F_i. \quad (16)$$

Графическое определение момента инерции

Заданное сечение вычерчивается в определенном масштабе $\left(\frac{1}{n}\right)$ и разбивается на ряд площадок. В центре тяжести каждой площадки параллельно заданной оси прикладываются условные силы F_1, F_2, \dots, F_n , равные по величине площадям соответствующих частей сечения.

Строится в удобном масштабе $\left(\frac{1}{f}\right)$ силовой многоугольник и веревочный многоугольник при произвольном полюсном расстоянии H (рис. 45).

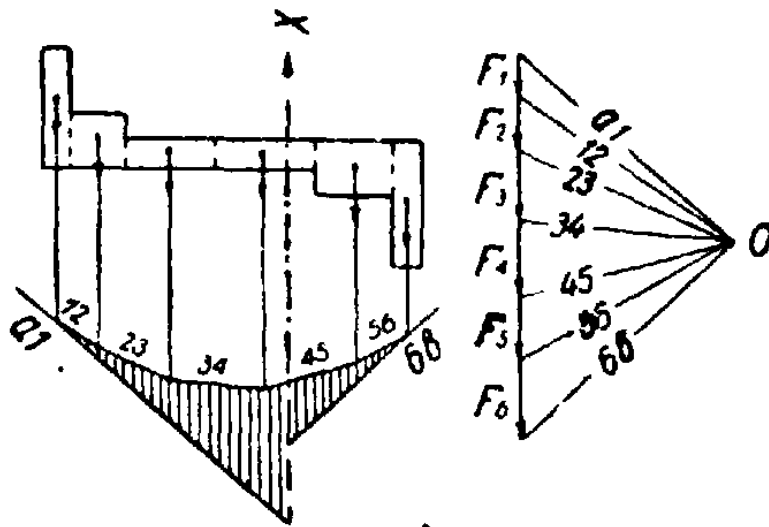


Рис. 45. Графическое определение момента инерции.

Момент инерции сечения относительно оси X определяется по формуле:

$$J_x = 2 \omega H n^2 f, \quad (17)$$

где: ω — площадь фигуры, ограниченной веревочным многоугольником, продолжениями его крайних сторон и осью инерции. Эта площадь, заштрихованная на чертеже, измеряется в $см^2$;

- H — полюсное расстояние, измеренное на чертеже в $см$;
 n — масштаб длин, в котором вычерчено сечение (1 $см$ чертежа равен n $см$ соответствующего размера сечения);
 f — масштаб сил — площадей (1 $см$ чертежа многоугольника сил равен f $см^2$).

Главные моменты инерции

Главными осями инерции являются две взаимно перпендикулярные оси U и V , проходящие через данную точку, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Ось симметрии и перпендикулярная к ней ось являются главными осями.

Моменты инерции относительно главных осей:

$$J_u = \int_F v^2 dF; J_v = \int_F u^2 dF \quad (18)$$

называются главными моментами инерции.

Главный момент инерции относительно одной из осей является наибольшим ($J_u = J_{max}$), относительно другой — наименьшим ($J_v = J_{min}$) по сравнению с моментами инерции этого же сечения относительно других осей, проходящих через данную точку.

Если известны моменты инерции J_x , J_y , J_{xy} относительно взаимно перпендикулярных осей X и Y , то величины главных моментов инерции можно определить по формуле:

$$J_{\begin{matrix} max \\ min \end{matrix}} = \frac{1}{2} [(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}]. \quad (19)$$

Знак плюс перед радикалом берется при определении J_{max} , а знак минус при определении J_{min} .

Положение главных осей определяется углом α_u , составляемым главной осью U с осью X .

Угол α_u может быть определен по одной из следующих формул:

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{J_{xy}}{J_x - J_{min}}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha_u = \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (20)$$

При положительном значении $\operatorname{tg} \alpha_u$ (или, иными словами, при положительном J_{xy}) угол α_u отсчитывается от оси X по ходу часовой стрелки, в противном случае — против часовой стрелки.

Ось с J_{min} (ось V) «тяготеет» к площади сечения, т. е. располагается вдоль площади — пересекает ее по наибольшему протяжению, а ось с J_{max} (ось U) «уклоняется» от площади, т. е. располагается поперек площади — пересекает ее по наименьшему протяжению.

Зависимость между моментами инерции относительно осей X и Y и главными моментами инерции относительно осей, проходящих через данную точку, выражается формулами:

$$J_x = J_u \cos^2 \alpha + J_v \sin^2 \alpha; \quad (21)$$

$$J_y = J_u \sin^2 \alpha + J_v \cos^2 \alpha;$$

$$J_{xy} = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha; \quad (22)$$

$$J_x + J_y = J_u + J_v, \quad (23)$$

где: J_u, J_v — главные моменты инерции;
 α — угол, составляемый осями X и Y с главными осями U и V .

При вычислении центробежного момента инерции часто бывает удобнее пользоваться следующей формулой:

$$J_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{min})(J_y - J_{min})}, \quad (24)$$

где $J_{min} = J_v$ — наименьший главный момент инерции.

Знак устанавливается по следующему правилу:

Положительное значение J_{xy} имеет в том случае, когда главная ось V повернута по отношению к оси Y по ходу часовой стрелки. В противном случае J_{xy} оказывается отрицательным (перед корнем берется знак минус).

Пример. Требуется определить главные центральные моменты инерции сечения, составленного из швеллера № 20а и листа размерами 12×2 см (рис. 46).

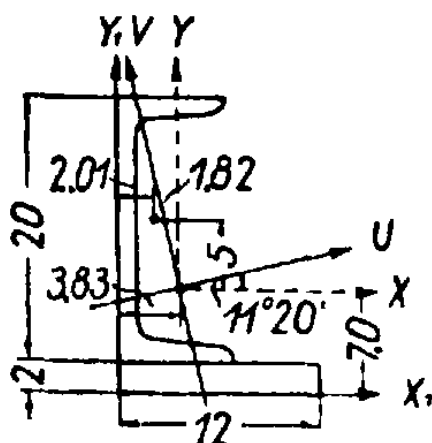


Рис. 46. К примеру.

Решение. Площадь швеллера по таблицам сортамента:

$$F_1 = 28,83 \text{ см}^2.$$

Расстояние его центра тяжести от длинной грани:

$$x_0 = 2,01 \text{ см.}$$

Площадь листа:

$$F_2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2.$$

Координаты центра тяжести сечения относительно осей X_1Y_1 :

$$x_c = \frac{\Sigma F_x}{\Sigma F} = \frac{28,83 \cdot 2,01 + 24 \cdot 6}{28,83 + 24} = 3,83 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F} = \frac{28,83 \cdot 12 + 24 \cdot 1}{28,83 + 24} = 7,00 \text{ см.}$$

Моменты инерции швеллера относительно его центральных осей, параллельных осям X и Y , берутся из таблицы 17:

$$(J_{x_c})_1 = 1780,4 \text{ см}^4; (J_{y_c})_1 = 128,0 \text{ см}^4; (J_{x_c y_c})_1 = 0.$$

Координаты центра тяжести швеллера относительно осей X и Y :

$$a_1 = (2 + 10) - 7 = 5 \text{ см};$$

$$b_1 = 2,01 - 3,83 = -1,82 \text{ см.}$$

Моменты инерции прямоугольника относительно его центральных осей:

$$(J_{x_c})_2 = \frac{12 \cdot 2^3}{12} = 8 \text{ см}^4; (J_{y_c})_2 = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288 \text{ см}^4; (J_{x_c y_c})_2 = 0.$$

Координаты центра тяжести прямоугольника:

$$a_2 = 1,0 - 7,0 = -6,0 \text{ см};$$

$$b_2 = 6,0 - 3,83 = 2,17 \text{ см}.$$

Моменты инерции всего сечения относительно осей X и Y :

$$\begin{aligned} J_x &= \Sigma (J_{x_c} + F_i a_i^2) = [1\,780,4 + 28,83 \cdot 5^2] + [8,0 + 24 \cdot (-6)^2] = \\ &= 2\,501 + 872 = 3\,373 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \Sigma (J_{y_c} + F_i b_i^2) = [128,0 + 28,83 \cdot (-1,82)^2] + [288 + 24 \cdot 2,17^2] = \\ &= 223,4 + 401,0 = 624 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \Sigma (J_{x_c y_c} + F_i a_i b_i) = 28,83 \cdot 5,0 \cdot (-1,82) + 24 \cdot (-6) \cdot 2,17 = \\ &= -262,4 - 312,5 = -575,0 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Главные моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_{\max} &= \frac{1}{2} [(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}] = \\ J_{\min} &= \frac{1}{2} [(3\,373 + 624) \pm \sqrt{(3\,373 - 624)^2 + 4 \cdot 575^2}] = \\ &= \frac{1}{2} (3\,997 \pm 2\,980); \end{aligned}$$

$$J_{\max} = 3\,488 \text{ см}^4; \quad J_{\min} = 509 \text{ см}^4.$$

Проверка правильности подсчета:

$$J_{\max} + J_{\min} = 3\,488 + 509 = 3\,997;$$

$$J_x + J_y = 3\,373 + 624 = 3\,997.$$

Положение главных осей:

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{J_{xy}}{J_x - J_{\min}} = \frac{-575}{3\,373 - 509} = -0,201.$$

Этому значению тангенса соответствует угол $\alpha_u = 11^\circ 20'$, который при отсчете от оси X против часовой стрелки определяет положение главной оси U .

Круг инерции

Круг инерции дает зависимость между моментами инерции рассматриваемого сечения по отношению к различным осям, проходящим через данную точку, и вычерчивается по осевым

и центробежному моментам инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей.

Каждая точка окружности дает осевой (по горизонтальной оси координат) и центробежный (по вертикальной оси координат) моменты инерции сечения относительно оси, параллельной прямой, соединяющей эту точку окружности с левой ее точкой, и перпендикулярной к ней оси сечения. Круг моментов инерции аналогичен кругу напряжений.

На рис. 47 показано построение круга инерции по найденным в предыдущем примере значениям: $J_x = 3373 \text{ см}^4$; $J_y = 624 \text{ см}^4$; $J_{xy} = -575 \text{ см}^4$.

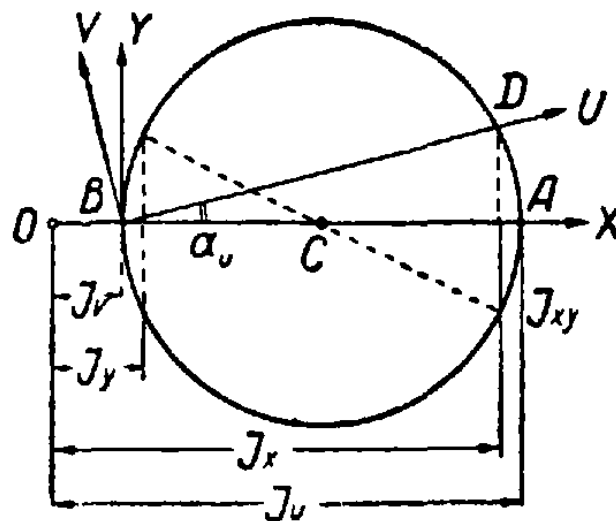


Рис. 47. Круг инерции.

Положение центра круга определяется величиной:

$$\frac{J_x + J_y}{2} = 1999 \text{ см}^4.$$

При отложении от конца отрезка J_x величины J_{xy} , взятой с обратным знаком, получается точка D .

Прямая, соединяющая эту точку с левой точкой B окружности, дает положение главной оси U .

Определение изменения моментов инерции при повороте осей можно производить при помощи прибора «Треугольник инерции и напряжений», предложенного проф. А. А. Кравцовым.

Эллипс инерции

Эллипс инерции применяется для наглядного изображения моментов инерции сечения по отношению к различным осям, проходящим через заданную точку (центр эллипса).

Уравнение эллипса инерции:

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1, \quad (25)$$

где: u и v — координаты точек эллипса;

i_u и i_v — главные радиусы инерции сечения.

Главные радиусы инерции сечения подсчитываются по главным моментам инерции J_u и J_v сечения для осей, проходящих через заданную точку:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}. \quad (26)$$

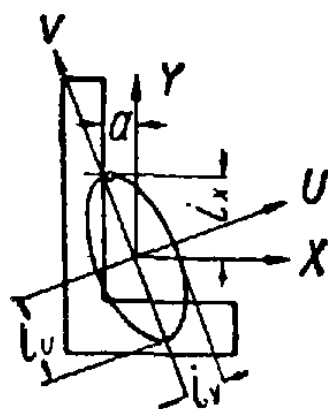


Рис. 48. Эллипс инерции.

При вычерчивании эллипса инерции (рис. 48) величины i_u и i_v откладываются в масштабе сечения по перпендикулярам соответственно к осям V и U .

При определении с помощью эллипса момента инерции относительно какой-либо оси X , проходящей через центр эллипса, проводится касательная к эллипсу, параллельная оси X , и измеряется расстояние i_x :

$$J_x = i_x^2 F, \quad (27)$$

где F — площадь сечения.

Центробежный момент инерции относительно взаимно перпендикулярных осей X и Y :

$$J_{xy} = i_x a F, \quad (28)$$

где a — расстояние от точки касания до оси Y .

Моменты сопротивления

Полярным моментом сопротивления сечения называется отношение:

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}, \quad (29)$$

где ρ_{max} — расстояние от центра до крайней точки сечения.

Осевым моментом сопротивления называется отношение:

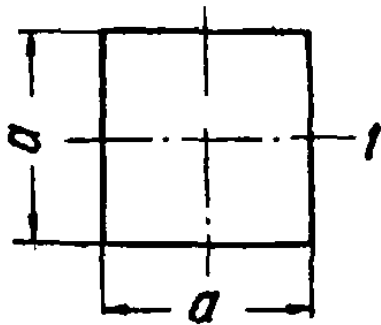
$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}, \quad (30)$$

где y_{max} — расстояние от нейтральной оси сечения (оси X) до крайнего волокна.

Моменты сопротивления измеряются в линейных единицах 3-й степени ($см^3$, $мм^3$).

Площади F , координаты центров тяжести y_c , осевые моменты инерции J , моменты сопротивления W и радиусы инерции i для основных форм сечений

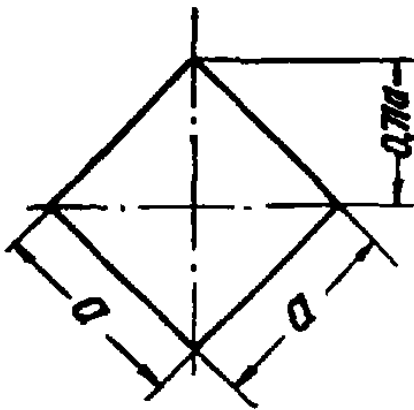
Квадрат



$$F = a^2; \quad J_1 = \frac{a^4}{12}$$

$$W = \frac{a^3}{6}; \quad i = 0,289 a$$

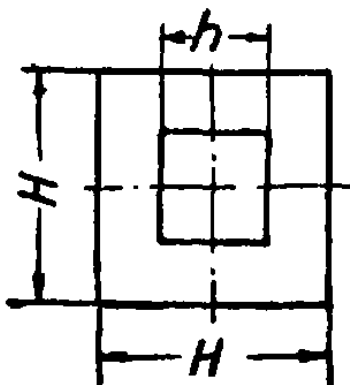
Квадрат на ребро



$$F = a^2; \quad J_1 = \frac{a^4}{12}$$

$$W_1 = W_2 = 0,118 a^3$$

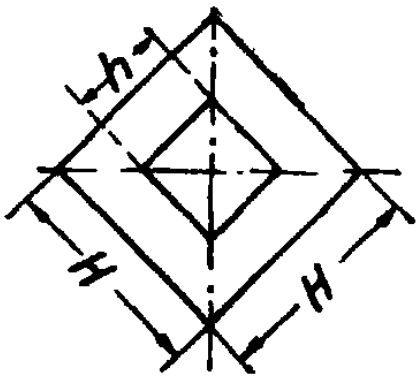
Квадрат с квадратным отверстием



$$F = H^2 - h^2; \quad J = \frac{H^4 - h^4}{12}$$

$$W = \frac{H^4 - h^4}{6H}; \quad i = 0,289 \sqrt{H^2 + h^2}$$

Квадрат с квадратным отверстием, на ребро

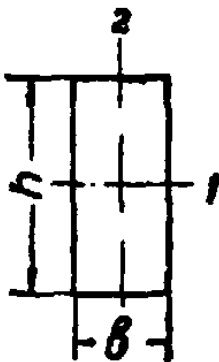


$$F = H^2 - h^2; \quad J = \frac{H^4 - h^4}{12}$$

$$W = 0,118 \frac{H^4 - h^4}{H}$$

$$i = 0,289 \sqrt{H^2 + h^2}$$

Прямоугольник



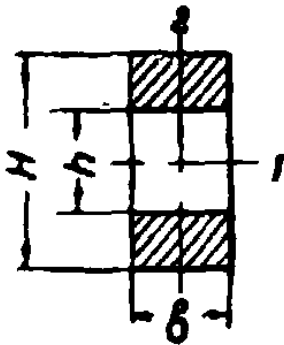
$$F = bh$$

$$J_1 = \frac{bh^3}{12}; \quad J_2 = \frac{hb^3}{12}$$

$$W_1 = \frac{bh^2}{6}; \quad W_2 = \frac{hb^2}{6}$$

$$i_1 = 0,289h; \quad i_2 = 0,289b$$

Прямоугольник с отверстием



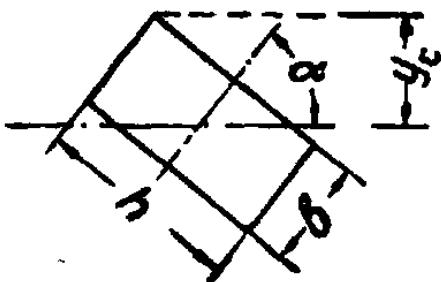
$$F = b(H - h)$$

$$J_1 = \frac{b}{12} (H^3 - h^3); \quad J_2 = \frac{H-h}{12} b^3$$

$$W_1 = \frac{b}{6H} (H^3 - h^3); \quad W_2 = \frac{H-h}{6} b^2$$

$$i_1 = 0,289 \sqrt{H^2 + Hh + h^2}; \quad i_2 = 0,289b$$

Прямоугольник повернутый

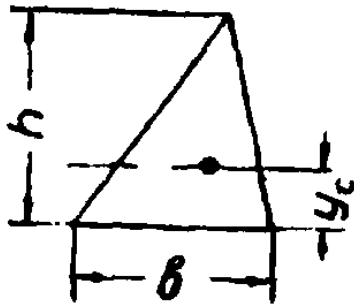


$$F = bh; \quad y_c = \frac{h \cos \alpha + b \sin \alpha}{2}$$

$$J = \frac{bh}{12} (h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha)$$

$$i = 0,289 \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}$$

Треугольник



$$F = \frac{bh}{2}$$

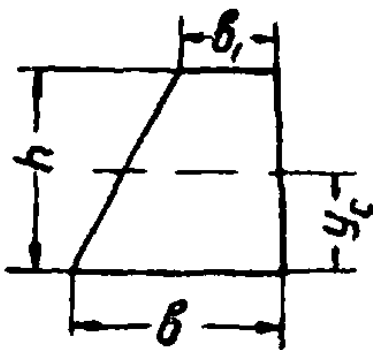
$$y_c = \frac{h}{3}; \quad J = \frac{bh^3}{36}$$

$$W_1 = \frac{bh^2}{12} \text{ (для нижних волокон)}$$

$$W_2 = \frac{bh^2}{24} \text{ (для верхних волокон)}$$

$$i = 0,236h$$

Трапеция



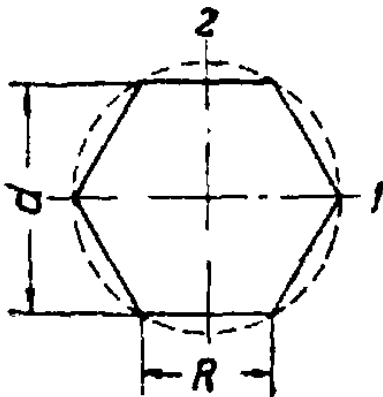
$$F = \frac{b + b_1}{2} h$$

$$y_c = \frac{h + 2b_1}{3(b + b_1)} h$$

$$J = \frac{h^3(h^2 + 4bb_1 - b_1^2)}{36(b + b_1)}$$

$$i = \frac{h}{6(b + b_1)} \sqrt{2(b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}$$

Правильный шестиугольник



$$F = 0,866d^2$$

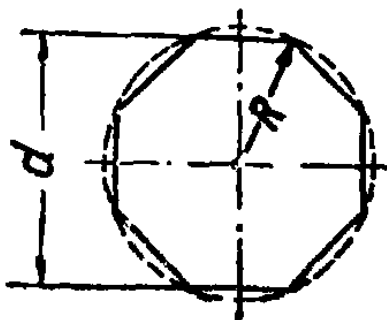
$$J_1 = J_2 = 0,541R^4 = 0,06d^4$$

$$W_1 = 0,625R^3 = 0,12d^3$$

$$W_2 = 0,541R^3$$

$$i = 0,456R = 0,263d$$

Правильный восьмиугольник



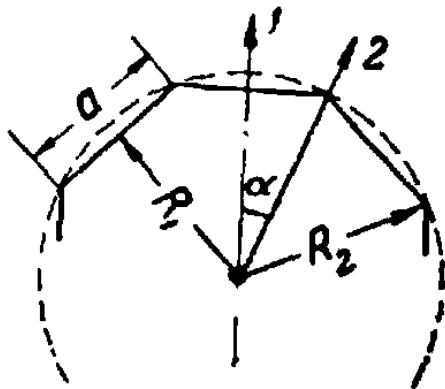
$$F = 0,828d^2$$

$$J_1 = 0,638 R^4 = 0,0547d^4$$

$$W_1 = 0,690R^3 = 0,1095d^3$$

$$i = 0,257d$$

Правильный многоугольник
с n сторонами

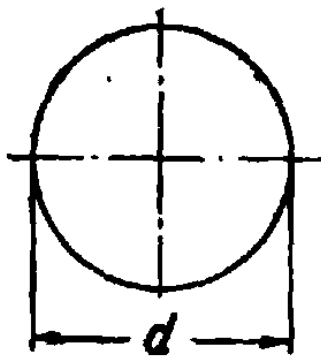


$$F = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

$$R_1 = \frac{a}{2 \sin \alpha}; \quad R_2 = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$J_1 = \frac{F(6R_1^2 - a^2)}{24}; \quad J_2 = \frac{F(12R_2^2 + a^2)}{48}$$

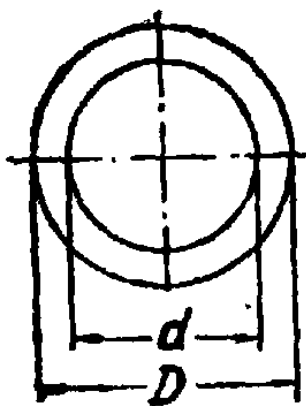
Круг



$$F = \frac{\pi d^2}{4}; \quad J = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05 d^4$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3; \quad i = \frac{d}{4}$$

Круг с круговым отверстием .



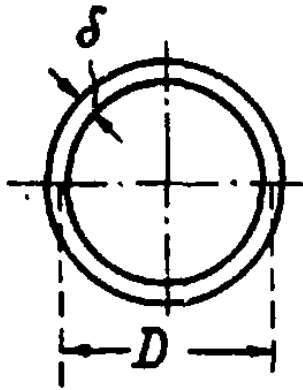
$$F = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$J = \frac{\pi D^4}{64} (1 - a^4) \approx 0,05 D^4 (1 - a^4)$$

$$a = \frac{d}{D}; \quad W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - a^4) \approx 0,1 D^3 (1 - a^4)$$

$$i = \frac{1}{4} \sqrt{D^2 + d^2}$$

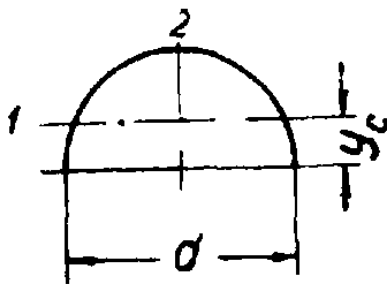
Тонкое кольцо



$$F = \pi D \delta; \quad J = \frac{\pi D^3}{8} \delta$$

$$W = \frac{\pi D^2}{4} \delta; \quad i = 0,353D$$

Полукруг



$$F = \frac{\pi d^2}{8}; \quad y_c = 0,2122d$$

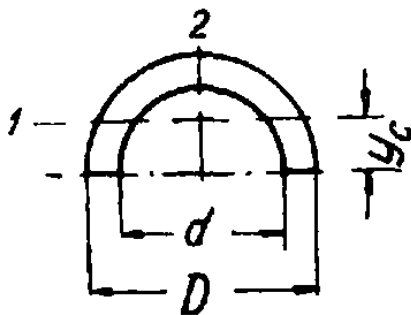
$$J_1 = 0,00686d^4; \quad J_2 = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025d^4$$

$$W_1 = 0,2587r^3 \text{ (для нижних волокон)}$$

$$W_2 = 0,1908r^3 \text{ (для верхних волокон)}$$

$$i = 0,1323d$$

Половина полого круглого сечения



$$F = \frac{\pi}{8} (D^2 - d^2)$$

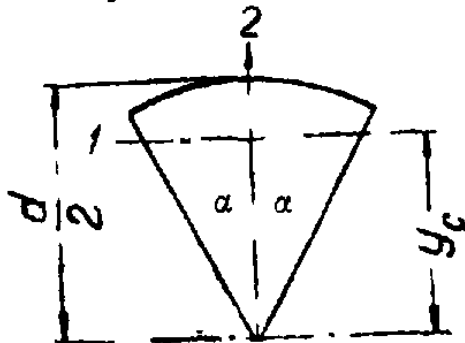
$$y_c = \frac{2}{3\pi} \frac{D^2 + dD + d^2}{D + d}$$

$$J_1 = 0,00686 (D^4 - d^4) - \frac{0,0177d^2 D^2 (D - d)}{D + d}$$

$$J_1 \approx 0,038 \delta \left(\frac{D + d}{2} \right)^3$$

При малой толщине стенки

Круговой сектор

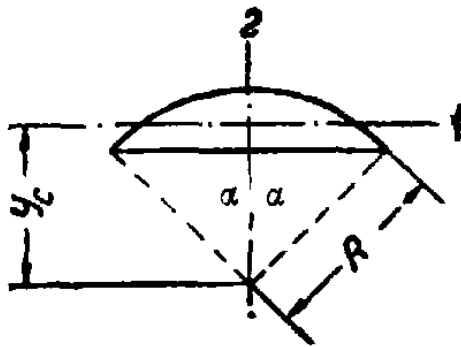


$$F = \alpha \frac{d^2}{4}; \quad y_c = d \frac{\sin \alpha}{2\alpha}$$

$$J_1 = \frac{d^4}{64} \left[\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{16 \sin^2 \alpha}{9\alpha} \right]$$

$$J_2 = \frac{d^4}{64} \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

Круговой сегмент



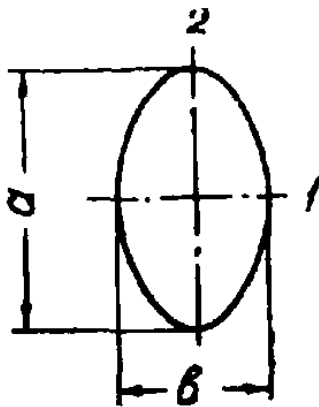
$$F = \frac{R^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$y_c = \frac{4}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$

$$J_1 = \frac{FR^2}{4} \left[1 + \frac{2\sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

$$J_2 = \frac{FR^2}{4} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$$

Эллипс



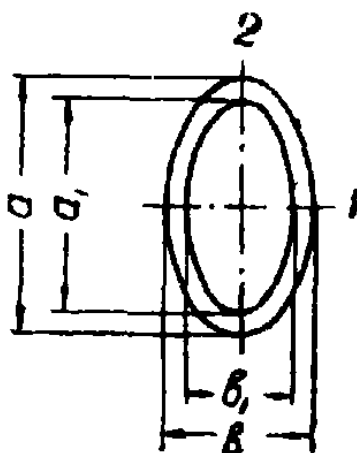
$$F = \frac{\pi}{4} ab$$

$$J_1 = \frac{\pi a^3 b}{64}; \quad J_2 = \frac{\pi ab^3}{64}$$

$$W_1 = \frac{\pi a^2 b}{32}; \quad W_2 = \frac{\pi ab^2}{32}$$

$$i_1 = \frac{a}{4}; \quad i_2 = \frac{b}{4}$$

Полый эллипс



$$F = \frac{\pi}{4} (ab - a_1 b_1)$$

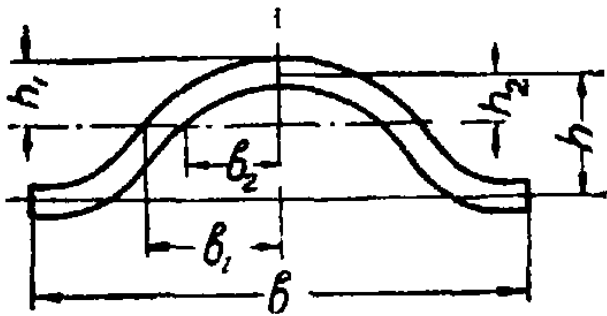
$$J_1 = \frac{\pi}{64} (a^3 b - a_1^3 b_1)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{64} (ab^3 - a_1 b_1^3)$$

$$W_1 = \frac{\pi}{32a} (a^3 b - a_1^3 b_1)$$

$$W_2 = \frac{\pi}{32b} (ab^3 - a_1 b_1^3)$$

Сечение волнистого железа



F, J, W на 100 см ширины

$$F \approx \frac{1}{3} \delta (2b + 5,2h)$$

$$J = \frac{64}{105} (b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3).$$

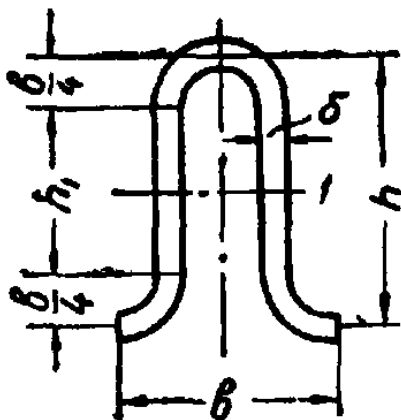
где: $b_1 = \frac{1}{4} (b + 2,6\delta)$

$$b_2 = \frac{1}{4} (b - 2,6\delta)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} (h + \delta); \quad h_2 = \frac{1}{2} (h - \delta)$$

$$W_1 \approx \frac{2J_1}{h + \delta}$$

Сечение балочного волнистого железа F, J, W на 100 см ширины



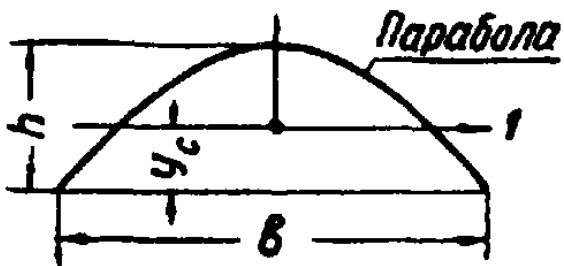
$$F = 2 \left(\frac{\pi b}{4} + h_1 \right) \delta$$

$$J_1 = \frac{\delta}{4} \left(\frac{\pi b^3}{16} + b^2 h_1 + \frac{\pi b h_1^2}{2} + \frac{2}{3} h_1^3 \right),$$

где $h_1 = h - 0,5b$

$$W_1 \approx \frac{2J_1}{h + \delta}$$

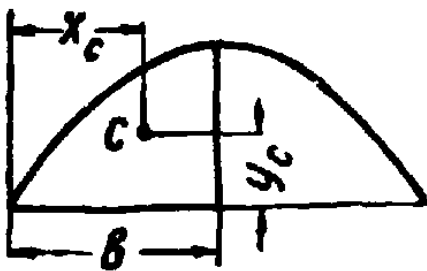
Параболический сегмент



$$F = \frac{2}{3} hb; \quad y_c = 0,4h$$

$$J_1 = \frac{8}{175} bh^3$$

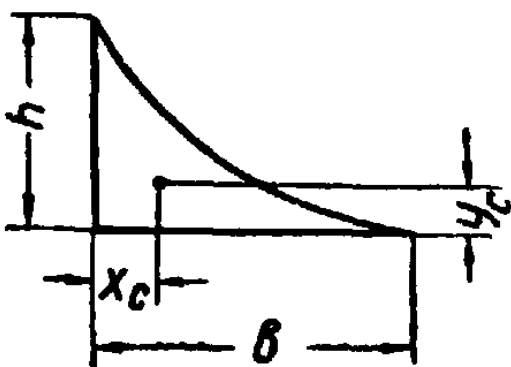
Параболический полусегмент



$$F = \frac{2}{3} hb$$

$$x_c = \frac{5}{8} b; \quad y_c = \frac{2}{5} h$$

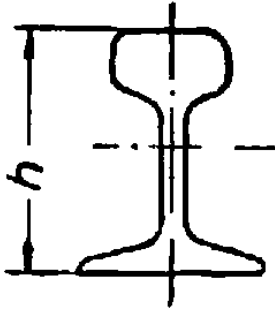
Параболический треугольник



$$F = \frac{1}{3} hb$$

$$x_c = \frac{b}{4}; \quad y_c = \frac{3}{10} h$$

Сечение железнодорожного рельса с обычным отношением между размерами сечения

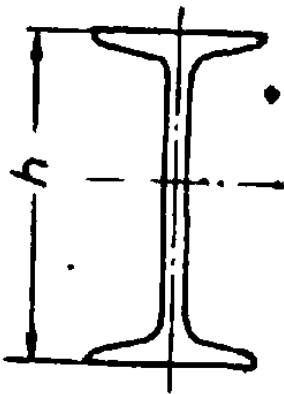


Приближенные формулы:

$$F \approx 0,238 h^2; \quad \max J \approx 0,032 h^4$$

$$\max W \approx 0,064 h^3$$

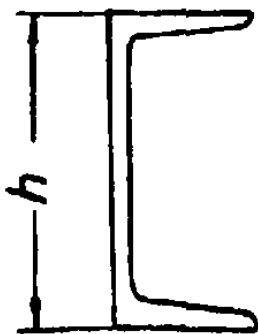
Сечение прокатного двутавра стандартных размеров



Приближенная формула:

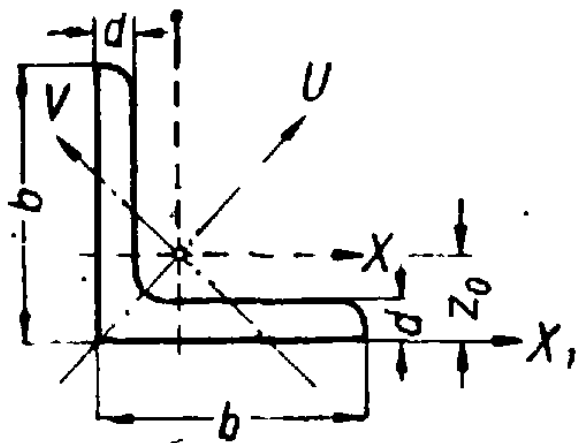
$$W \approx \frac{(h + 2)^3}{51} \text{ см}^3$$

Прокатный корытный профиль стандартных размеров



Приближенная формула:

$$W \approx \frac{(h + 5)^3}{81} \text{ см}^3$$



СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ
(ОСТ 10014-39—10017-39)

Таблица 14

Угольники равнобокие

№, № профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм		Площадь про- филя F в $см^2$	Ось XX J_x в $см^4$	Ось UU		Ось VV		Ось X_1X_1 J_{x_1} в $см^4$	Расстояние центра тяжести Z_0 в см
		b	d			$J_u(max)$ в $см^4$	i_u в см	$J_v(min)$ в $см^4$	i_v в см		
2	0,89	20	3	1,13	0,40	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
	1,15		4	1,46	0,49	0,78	0,73	0,21	0,38	1,09	0,64
2,5	1,12	25	3	1,43	0,80	1,28	0,95	0,32	0,47	1,56	0,73
	1,46		4	1,86	1,02	1,63	0,94	0,41	0,47	2,12	0,77
3	1,78	30	4	2,27	1,82	2,90	1,13	0,75	0,58	3,62	0,89
	2,18		5	2,78	2,20	3,47	1,12	0,93	0,58	4,58	0,93
3,5	2,10	35	4	2,67	3,02	4,47	1,34	1,27	0,69	5,74	1,01
	2,57		5	3,28	3,61	5,71	1,32	1,51	0,68	7,23	1,05
4	2,42	40	4	3,08	4,60	7,26	1,53	1,93	0,79	8,53	1,13
	2,97		5	3,79	5,54	8,75	1,52	2,34	0,78	10,7	1,17
	3,52		6	4,48	6,41	10,1	1,50	2,70	0,78	13,0	1,21
4,5	2,73	45	4	3,48	6,60	10,5	1,74	2,68	0,88	12,1	1,26
	3,37		5	4,29	8,00	12,7	1,72	3,26	0,87	15,3	1,30
	3,99		6	5,08	9,29	14,8	1,71	3,78	0,86	18,4	1,34
5	3,77	50	5	4,80	11,2	17,8	1,92	4,61	0,98	20,9	1,42
	4,47		6	5,69	13,1	20,7	1,91	5,39	0,97	25,2	1,46

№№ профилей	Вес I пог.м в кг	Размеры в мм		Площадь про- филя F в $см^2$	Ось	Ось UU		Ось VV		Ось	Расстояние центра тяжести II z_0 в см
		b	d		XX	$J_u(max)$ в $см^4$	i_u в см	$J_v(min)$ в $см^4$	i_v в см	X_1, X_1	
					J_x в $см^4$					J_{x_1} в $см^4$	
6	4,57	60	5	5,82	19,9	51,4	2,32	8,29	1,19	35,9	1,66
	5,42		6	6,91	23,3	36,8	2,31	9,76	1,19	43,3	1,70
	7,09		8	9,03	29,6	46,8	2,28	12,4	1,17	58,2	1,78
6,5	5,93	65	6	7,55	29,8	47,2	2,50	12,3	1,28	54,8	1,82
	7,75		8	9,87	38,1	60,3	2,48	15,8	1,27	73,7	1,90
	9,51		10	12,1	45,4	72,0	2,44	18,8	1,25	92,9	1,98
7,5	6,89	75	6	8,78	46,7	73,3	2,89	20,1	1,51	83,9	2,06
	9,03		8	11,5	60,1	94,9	2,87	25,3	1,48	113	2,14
	11,1		10	14,1	72,2	114	2,84	30,3	1,47	142	2,22
	13,1		12	16,7	83,3	132	2,81	34,9	1,45	172	2,30
8	7,36	80	6	9,38	57,0	90	3,11	23,5	1,58	102	2,19
	9,66		8	12,3	73,3	116	3,07	30,3	1,57	137	2,27
	11,9		10	15,1	88,4	140	3,05	36,5	1,56	172	2,35
9	11,0	90	8	14,0	106	168	3,46	43,6	1,77	194	2,51
	13,5		10	17,2	128	204	3,44	53,1	1,76	244	2,59
	16,0		12	20,4	149	237	3,41	61,7	1,75	294	2,67
	18,4		14	23,4	169	267	3,38	71,9	1,75	345	2,74
10	12,3	100	8	15,6	147	233	3,87	61,0	1,98	265	2,75
	15,1		10	19,2	179	284	3,85	74,9	1,97	333	2,83
	17,9		12	22,8	209	331	3,81	87,6	1,96	402	2,91
	20,6		14	26,3	237	375	3,78	99,1	1,95	472	2,99
	23,3		16	29,7	265	416	3,75	113	1,95	542	3,06
12	18,3	120	10	23,3	316	503	4,64	130	2,36	575	3,33
	21,7		12	27,6	371	590	4,62	153	2,35	693	3,41
	25,1		14	31,9	423	671	4,59	174	2,34	811	3,49
	28,4		16	36,1	474	749	4,56	199	2,34	931	3,56
	31,6		18	40,3	520	822	4,54	219	2,33	1052	3,64

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм		Площадь про- филя F в $см^2$	Ось	Ось UU		Ось VV		Ось	Расстояние центра тяжести z_0 в см
		b	d		XX	$J_u(max)$ в $см^4$	i_u в см	$J_v(min)$ в $см^4$	i_v в см	X_1, X_1	
					J_x в $см^4$					J_{x1} в $см^4$	
13	19,8	130	10	25,3	406	646	5,05	166	2,56	730	3,58
	23,6		12	30,0	477	759	5,03	196	2,55	880	3,66
	27,3		14	34,7	545	866	5,00	223	2,54	1 030	3,74
	30,9		16	39,3	608	967	4,96	249	2,52	1 182	3,82
15	27,4	150	12	34,9	745	1 186	5,83	305	2,95	1 347	4,15
	31,7		14	40,4	857	1 358	5,80	356	2,97	1 577	4,22
	36,0		16	45,8	961	1 522	5,77	399	2,95	1 808	4,30
	40,1		18	51,1	1 060	1 679	5,73	440	2,94	2 041	4,38
	44,3		20	56,4	1 154	1 830	5,70	478	2,91	2 275	4,46
18	38,3	180	14	48,8	1 515	2 405	7,03	625	3,58	2 721	4,97
	43,5		16	55,4	1 704	2 705	7,00	703	3,56	3 117	5,05
	48,6		18	61,9	1 885	2 994	6,94	775	3,54	3 515	5,13
20	48,7	200	16	62,0	2 355	3 755	7,79	954	3,93	4 264	5,55
	54,4		18	69,3	2 619	4 165	7,77	1 074	3,93	4 808	5,62
	60,1		20	76,5	2 868	4 560	7,74	1 175	3,92	5 355	5,70
	71,3		24	90,8	3 349	5 313	7,66	1 384	3,90	6 456	5,85
	88,3		30	111,5	3 999	6 373	7,49	1 685	3,87	8 093	6,03
22	53,7	220	16	68,4	3 168	5 046	8,59	1 307	4,37	5 661	6,04
	66,4		20	84,5	3 859	6 120	8,51	1 592	4,34	7 003	6,20
	78,8		24	100,4	4 514	7 148	8,44	1 870	4,32	8 560	6,35
	91,0		28	115,9	5 135	8 130	8,37	2 141	4,30	10 029	6,50
23	82,6	230	24	105,3	5 207	8 266	8,86	2 144	4,51	9 780	6,59

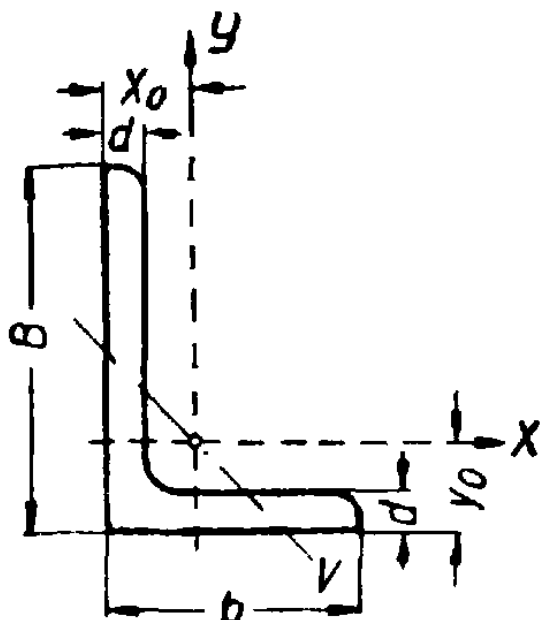


Таблица 15

Угольники неравнобокие

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм			Площадь профиля F в $см^2$	Ось XX J_x в $см^4$	Ось YY J_y в $см^4$	Ось VV		Расстояние центра тяжести	
		B	b	d				J_v (min) в $см^4$	i_v в $см$	Y_0 в $см$	X_0 в $см$
$\frac{3}{2}$	1,12	30	20	3	1,43	1,27	0,45	0,26	0,43	1,00	0,51
	1,46			4	1,86	1,61	0,56	0,34	0,43	1,04	0,55
$\frac{3,5}{2}$	1,62	35	20	4	2,06	2,48	0,53	0,37	0,42	1,25	0,51
	1,98			5	2,52	2,98	0,70	0,45	0,42	1,29	0,55
$\frac{4,5}{3}$	2,26	45	30	4	2,88	5,81	2,06	1,21	0,65	1,48	0,72
	3,28			6	4,18	8,15	2,85	1,69	0,64	1,56	0,82
$\frac{6}{4}$	3,79	60	40	5	4,83	17,4	6,19	3,62	0,87	1,95	0,97
	4,49			6	5,72	20,3	7,20	4,20	0,86	2,00	1,01
	5,84			8	7,44	25,8	9,04	5,39	0,85	2,08	1,09

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм			Площадь профиля F в $см^2$	Ось XX		Ось YY		Ось VV		Расстояние центра тяжести	
		B	b	d		J_x в $см^4$	J_y в $см^4$	J_v (min) в $см^4$	i_v в $см$	y_0 в $см$	x_0 в $см$		
$\frac{7,5}{5}$	4,80	75	50	5	6,11	34,9	12,5	7,24	1,07	2,39	1,17		
	5,69			6	7,25	41,0	14,6	8,48	1,08	2,44	1,21		
	7,43			8	9,47	52,4	18,6	10,9	1,07	2,52	1,29		
	9,11			10	11,6	63,0	22,1	13,2	1,07	2,60	1,36		
$\frac{8}{5,5}$	6,16	80	55	6	7,85	50,6	19,6	11,1	1,19	2,56	1,33		
	8,06			8	10,3	64,9	24,9	14,3	1,19	2,64	1,41		
	9,90			10	12,6	78,2	29,8	17,4	1,18	2,72	1,48		
$\frac{9}{6}$	6,90	90	60	6	8,78	72,4	26,0	14,7	1,30	2,88	1,41		
	9,08			8	11,5	93,2	33,2	19,3	1,29	2,96	1,49		
	11,1			10	14,1	113,0	39,8	23,5	1,29	3,05	1,56		
$\frac{10}{7,5}$	10,6	100	75	8	13,5	135	65,0	35,4	1,62	3,11	1,88		
	13,1			10	16,7	163	78,5	42,6	1,60	3,20	1,96		
	15,5			12	19,7	190	91,1	49,8	1,59	3,27	2,04		
$\frac{12}{8}$	12,2	120	80	8	15,6	229	82,3	47,6	1,75	3,85	1,88		
	15,1			10	19,2	279	99,6	57,7	1,73	3,93	1,96		
	17,9			12	22,8	326	116	66,6	1,71	4,01	2,04		

Продолжение таблицы 15

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм			Площадь профиля F в $см^2$	Ось XX		Ось YY		Ось VV		Расстояние центра тяжести	
		B	b	d		J_x в $см^4$	J_y в $см^4$	J_v (min) в $см^4$	i_v в $см$	y_0 в $см$	x_0 в $см$		
$\frac{13}{9}$	13,5	130	90	8	17,2	297	118	66,5	1,97	4,08	2,11		
	16,7			10	21,3	362	143	81,4	1,95	4,16	2,19		
	19,8			12	25,2	424	167	94,8	1,94	4,25	2,27		
	22,8			14	29,1	484	189	109	1,93	4,33	2,35		
$\frac{15}{10}$	19,1	150	100	10	24,3	557	201	115	2,18	4,81	2,35		
	22,6			12	28,8	695	235	137	2,18	4,90	2,43		
	26,2			14	33,3	749	267	156	2,16	4,98	2,51		
	29,6			16	37,7	839	297	175	2,15	5,06	2,59		
$\frac{18}{12}$	27,4	180	120	12	34,9	1 156	417	240	2,62	5,79	2,82		
	31,7			14	40,4	1 326	476	279	2,62	5,87	2,90		
	35,9			16	45,8	1 490	532	309	2,60	5,95	2,98		
$\frac{20}{12}$	29,2	200	120	12	37,3	1 546	428	259	2,64	6,64	2,68		
	33,9			14	43,2	1 776	489	295	2,61	6,72	2,76		
	38,4			16	49,0	1 997	547	331	2,60	6,80	2,84		
$\frac{20}{15}$	32,2	200	150	12	41,0	1 666	810	436	3,26	6,08	3,62		
	42,3			16	53,9	2 155	1 043	562	3,23	6,27	3,78		
	47,3			18	60,3	2 388	1 153	623	3,21	6,33	3,85		
	52,2			20	66,5	2 614	1 258	683	3,21	6,41	3,93		

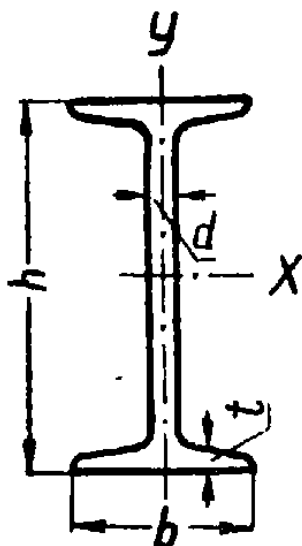


Таблица 16

Балки двутавровые

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм				Площадь сечения F в см ²	Для осей					
		h	b	d	t		XX			yy		
							J_x в см ⁴	W_x в см ³	$J_x \cdot S_x$	J_y в см ⁴	W_y в см ³	
10	11,2	100	68	4,5	7,6	14,3	245	49	8,59	33,0	9,72	
12	14,0	120	74	5,0	8,4	17,8	436	72,7	10,3	46,9	12,7	
14	16,9	140	80	5,5	9,1	21,5	712	102	12,0	64,4	16,1	
16	20,5	160	88	6,0	9,9	26,1	1 130	141	13,8	93,1	21,2	
18	24,1	180	94	6,5	10,7	30,6	1 660	185	15,4	122	26,0	
20	a	27,9	200	100	7,0	11,4	35,5	2 370	237	17,2	158	31,5
	b	31,1	200	102	9,0	11,4	39,5	2 500	250	16,9	169	33,1
22	a	33,0	220	110	7,5	12,3	42,0	3 400	309	18,9	225	40,9
	b	36,4	220	112	9,5	12,3	46,4	3 570	325	18,7	230	42,7
24	a	37,4	240	116	8,0	13,0	47,7	4 570	381	20,7	280	48,4
	b	41,2	240	118	10,0	13,0	52,6	4 800	400	20,4	297	50,4
27	a	42,8	270	122	8,5	13,7	54,6	6 550	485	23,3	345	56,6
	b	47,1	270	124	10,5	13,7	60,0	6 870	509	22,9	366	58,9
30	a	48,0	300	126	9,0	14,4	61,2	8 950	597	25,7	400	63,5
	b	52,7	300	128	11,0	14,4	67,2	9 400	627	25,4	422	65,9
	c	57,4	300	130	13,0	14,4	73,4	9 850	657	25,0	445	68,5

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм				Площадь сечения F в $см^2$	Для осей					
		h	b	d	t		ХХ			УУ		
							J_x в $см^4$	W_x в $см^3$	$J_{x:5x}$	J_y в $см^4$	W_y в $см^3$	
33	a	53,4	330	130	9,5	15,0	68,1	11 900	721	28,3	460	70,7
	b	58,6	330	132	11,5	15,0	74,7	12 500	757	27,9	484	73,4
	c	63,8	330	134	13,5	15,0	81,3	13 100	794	27,5	510	76,1
36	a	59,5	360	136	10,0	15,8	76,3	15 760	875	30,7	552	81,2
	b	65,6	360	138	12,0	15,8	83,5	16 530	919	30,3	582	84,3
	c	71,2	360	140	14,0	15,8	90,7	17 310	962	29,9	612	87,4
40	a	67,6	400	142	10,5	16,5	86,1	21 720	1 090	34,1	660	93,2
	b	73,8	400	144	12,4	16,5	94,1	22 780	1 140	33,6	692	96,2
	c	80,1	400	146	14,5	16,5	102	23 850	1 190	33,2	727	99,6
45	a	80,4	450	150	11,5	18	102	32 240	1 420	38,6	855	114
	b	87,4	450	152	13,5	18	111	33 760	1 500	38,0	894	118
	c	94,5	450	154	15,5	18	120	35 280	1 570	37,6	938	122
50	a	93,6	500	158	12	20	119	46 470	1 860	42,8	1 120	142
	b	101	500	160	14	20	129	48 560	1 940	42,4	1 170	146
	c	109	500	162	16	20	139	50 640	2 030	41,8	1 220	151
55	a	105	550	166	12,5	21	134	62 870	2 290	46,9	1 370	164
	b	114	550	168	14,5	21	145	65 610	2 390	46,4	1 420	170
	c	123	550	170	16,5	21	156	68 410	2 490	45,8	1 480	175
60	a	118	600	176	13	22	151	83 860	2 800	51,8	1 700	193
	b	128	600	178	15	22	163	87 460	2 920	50,7	1 770	199
	c	137	600	180	17	22	175	91 060	3 040	50,2	1 840	205

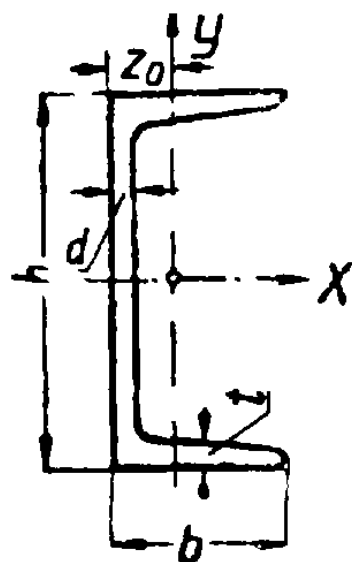


Таблица 17

Швеллеры

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм				Площадь сечения F в $см^2$	Для осей				Координата центра тяжести z_0 см
		h	b	d	t		XX		YY		
							J_x в $см^4$	W_x в $см^3$	J_y в $см^4$	W_y в $см^3$	
5	5,44	50	37	4,5	7,0	6,93	26,0	10,4	8,3	3,55	1,35
6,5	6,70	65	40	4,8	7,5	8,54	55,2	17,0	12,0	4,59	1,38
8	8,04	80	43	5,0	8,0	10,24	101,3	25,3	16,6	5,79	1,43
10	10,0	100	48	5,3	8,5	12,74	198,3	39,7	25,6	7,80	1,52
12	12,06	120	53	5,5	9,0	15,36	346,3	57,7	37,4	10,17	1,62
14	a	140	58	6,0	9,5	18,51	563,7	80,5	53,2	13,01	1,71
	b	140	60	8,0	9,5	21,31	609,4	87,1	61,1	14,12	1,67
16	a	160	63	6,5	10,0	21,95	866,2	108,3	73,3	16,10	1,80
	b	160	65	8,5	10,0	25,15	934,5	116,8	83,4	17,55	1,75
18	a	180	68	7,0	10,5	25,69	1272,7	141,4	98,6	20,03	1,88
	b	180	70	9,0	10,5	29,29	1369,9	152,2	111,0	21,52	1,84
20	a	200	73	7,0	11,0	28,83	1780,4	178,0	128,0	24,20	2,01
	b	200	75	9,0	11,0	32,83	1913,7	191,4	143,6	25,88	1,95
22	a	220	77	7,0	11,5	31,84	2393,9	217,6	157,8	28,17	2,10
	b	220	79	9,0	11,5	36,24	2571,1	233,8	176,4	30,05	2,03

№№ профилей	Вес 1 пог. м в кг	Размеры в мм				Площадь сече- ния F в $см^2$	Для осей				Координата центра тяже- сти Z_0 см	
		h	b	d	t		XX		YY			
							J_x в $см^4$	W_x в $см^3$	J_y в $см^4$	W_y в $см^3$		
24	a	26,55	240	78	7,0	12,0	34,21	3052,2	254,3	173,8	30,47	2,10
	b	30,62	240	80	9,0	12,0	39,00	3282,6	273,5	194,1	32,51	2,03
	c	34,39	240	82	11,0	12,0	43,81	3513,0	292,7	213,4	34,42	2,00
27	a	30,83	270	82	7,5	12,5	39,27	4362,0	323,1	215,6	35,52	2,13
	b	35,07	270	84	9,5	12,5	44,67	4690,1	347,4	239,2	37,72	2,06
	c	39,30	270	86	11,5	12,5	50,07	5018,1	371,7	264,4	39,79	2,03
30	a	34,45	300	85	7,5	13,5	43,89	6047,9	403,2	259,5	41,10	2,17
	b	39,16	300	87	9,5	13,5	49,59	6497,9	433,2	289,2	44,03	2,13
	c	43,87	300	89	11,5	13,5	55,89	6947,9	463,2	315,8	46,38	2,09
33	a	38,70	330	88	8,0	14,0	49,50	8076,8	489,5	307,5	46,65	2,21
	b	43,88	330	90	10,0	14,0	55,90	8675,7	525,8	338,4	49,32	2,14
	c	49,06	330	92	12,0	14,0	62,50	9274,7	562,1	367,9	51,81	2,10
36	a	47,80	360	96	9,0	16,0	60,89	11874,2	659,7	455,0	63,54	2,44
	b	53,45	360	98	11,0	16,0	68,09	12651,8	702,9	496,7	66,85	2,37
	c	59,10	360	100	13,0	16,0	75,29	13429,4	746,1	536,4	70,02	2,34
40	a	58,91	400	100	10,5	18,0	75,05	17577,9	878,9	592,0	78,83	2,49
	b	65,19	400	102	12,5	18,0	83,05	18611,5	932,2	640,0	82,52	2,44
	c	71,47	400	104	14,5	18,0	91,05	19711,2	985,6	687,8	86,19	2,42

4. СЕКТОРИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЯ

При расчете тонкостенных стержней открытого профиля, кроме обычных геометрических характеристик плоского сечения, применяются дополнительные характеристики, связанные с деформацией сечения, так называемые секториальные характеристики.

К секториальным характеристикам сечения относятся: секториальные площади, или координаты, секториальные статические моменты, секториальные линейные статические моменты, секториальные моменты инерции и секториальные моменты сопротивления.

Секториальная площадь

Секториальной площадью называется удвоенная площадь сектора, ограниченного участком срединной линии сечения и двумя прямыми (радиусами-векторами), соединяющими концы участка с центром отсчета (полюсом A).

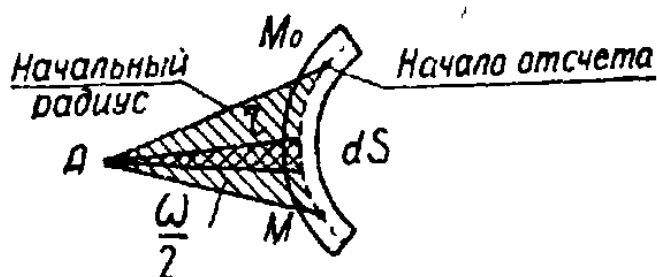


Рис. 49. Секториальная площадь.

Секториальная площадь выражается интегралом.

$$\omega = \int_s r ds \text{ см}^2, \quad (31)$$

где s — длина дуги $M_0 M$.

Она представляет собою секториальную координату, характеризующую каждую точку (M) срединной линии сечения тонкостенного стержня.

Точка M_0 , принимаемая за начало отсчетов, называется секториальной нулевой точкой (секториальная координата этой точки равна нулю).

Радиус AM_0 называется начальным радиусом.

За центр отсчета (полюс A) обычно принимается центр изгиба.

Секториальная площадь считается положительной, если она образуется поворотом радиуса-вектора из начального положения по ходу часовой стрелки.

Если радиус-вектор точки M пересекает контур сечения (рис. 50), то ω определяется как алгебраическая сумма площадей разных знаков.

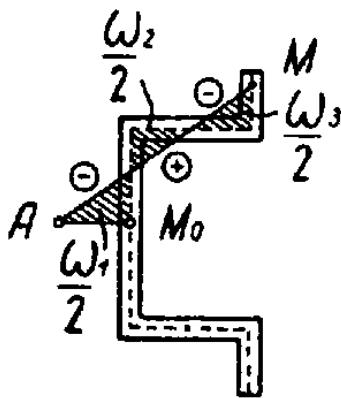


Рис 50. Секториальная координата точки M .

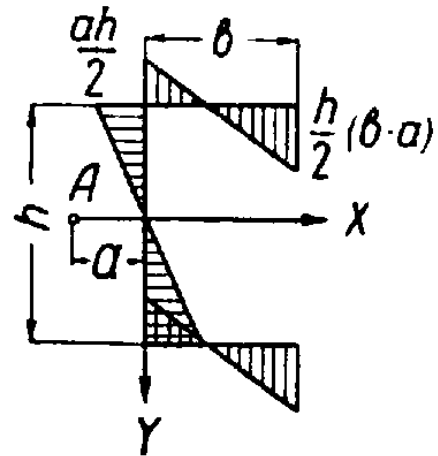


Рис. 51. Эюра секториальных координат.

Секториальная координата точки M :

$$\omega_M = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3.$$

Наглядное представление об изменении секториальных координат точек контура сечения дает эюра секториальных координат.

На рис. 51 показана эюра секториальных координат для швеллерного сечения при полюсе A и начале отсчетов M_0 .

Эта эюра построена путем отложения от точек контура их секториальных координат.

Стенка швеллера:

$$\omega_M = \pm ay.$$

Полки швеллера:

$$\omega_M = \pm \frac{ah}{2} + \frac{hx}{2}.$$

Секториальный статический момент

Секториальным статическим моментом площади сечения называется сумма произведений элементарных площадок на соответствующие секториальные координаты:

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF \text{ см}^4. \quad (32)$$

При постоянной толщине (δ) профиля стержня на протяжении каждого участка профиля значение S_{ω} можно определять по формуле:

$$S_{\omega} = \Sigma \delta_i \Omega_i, \quad (33)$$

где Ω_i — площадь эпюры секториальных координат участка i .

Эпора секториальных статических моментов может быть построена при помощи эпюры секториальных площадей.

На рис. 52 показаны эпюры ω и S_{ω} для швеллерного профиля с толщиной полков и стенки, равной δ .

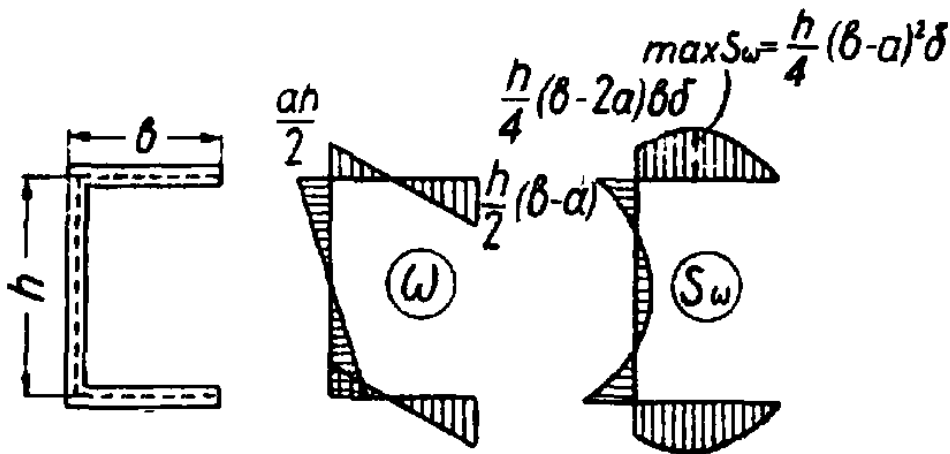


Рис. 52. Эпюры секториальных координат и секториальных статических моментов.

Секториально-линейные статические моменты

Секториально-линейным статическим моментом сечения называется сумма произведений элементарных площадок на линейную и секториальную координаты:

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega x} &= \int_F \omega y dF \text{ см}^5; \\ S_{\omega y} &= \int_F \omega x dF \text{ см}^5, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где x и y — координаты точек средней линии сечения в системе центральных осей.

Величина секториально-линейного статического момента наиболее просто определяется путем перемножения эпюр по правилу Верещагина. Например, для швеллера с плюсом в точке A значения $S_{\omega x}$ и $S_{\omega y}$ определяются следующим образом:

Строится эпюра секториальных координат ω с полюсом в точке A на центральной оси Y (рис. 53); строятся эпюры линейных координат (x, y) путем отложения расстояний точек срединной линии сечения от центральных осей OY (эпюра x) и OX (эпюра y).

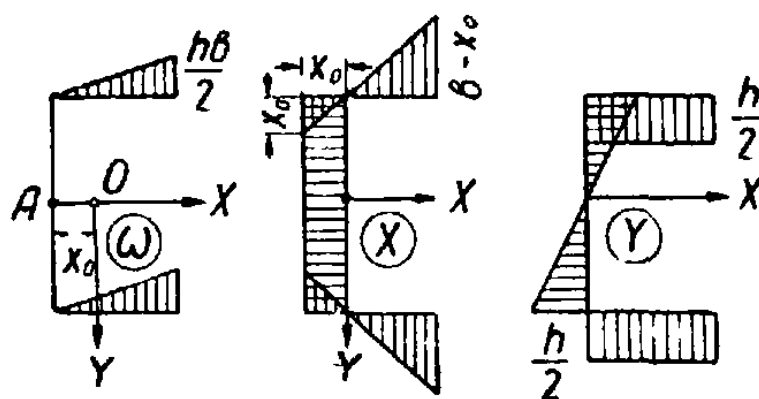


Рис. 53. Эпюры секториальных и линейных координат.

Интегралы $\int_F \omega x dF$ и $\int_F \omega y dF$ вычисляются по правилу Верещагина путем умножения площадей эпюры ω на ординаты эпюр x или y , лежащие против центров тяжести соответствующих площадей ω :

$$S_{\omega y} = \int_F \omega x dF = \frac{1}{2} \frac{hb}{2} b \frac{2}{3} (b - 2x_0) \delta - \frac{1}{2} \frac{hb}{2} b \frac{2}{3} (b - 2x_0) \delta = 0;$$

$$S_{\omega x} = \int_F \omega y dF = - \left(\frac{1}{2} \frac{hb}{2} h \frac{h}{2} \right) 2\delta = - \frac{h^2 b^2 \delta}{4}.$$

Центр изгиба

В любом стержне существует такая ось, параллельная оси стержня, что силы, действующие в любой, проходящей

через эту ось, плоскости, не вызывают кручения. Точку пересечения этой оси с плоскостью сечения называют центром изгиба.

Центр изгиба характерен тем, что при совмещении с ним полюса секториальных площадей, секториально-линейные статические моменты сечения обращаются в нуль: $S_{\omega x} = S_{\omega y} = 0$.

Координаты центра изгиба определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \frac{S_{\omega x}}{J_x} = \frac{\int_F \omega y dF}{\int_F y^2 dF}; \\ y_A &= \frac{S_{\omega y}}{J_y} = \frac{\int_F \omega x dF}{\int_F x^2 dF}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где: оси X и Y — главные центральные оси инерции сечения;
 J_x и J_y — моменты инерции относительно этих осей.

Если сечение имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси.

Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба лежит на пересечении этих осей, т. е. совпадает с центром тяжести.

Центр изгиба любого профиля, состоящего из пучка пластинок, находится в точке пересечения осей этих пластинок.

Координаты центра изгиба для сплошных незамкнутых тонкостенных профилей, сечения которых имеют ось симметрии и могут быть разложены на элементы с осями симметрии, совмещенными с осью симметрии всего сечения, можно определить аналогично нахождению центра параллельных сил.

С этой целью моменты инерции отдельных элементов сечения J_1, J_2, \dots, J_n следует представить в виде взаимно перпендикулярных векторов, проходящих через центры изгиба соответствующих элементов сечения. Тогда линия действия равнодействующего вектора будет проходить через центр изгиба составного профиля.

Секториальные моменты инерции

Секториальным моментом инерции сечения называется сумма произведений элементарных площадок на квадраты их секториальных координат:

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF \text{ см}^6. \quad (36)$$

Главным секториальным моментом инерции называется секториальный момент инерции профиля, взятый относительно его центра изгиба и главной секториальной точки контура.

Главной секториальной называется точка, находящаяся на кратчайшем расстоянии от центра изгиба, для которой секториальная координата равна нулю.

Вычисление секториального момента инерции для сечений, имеющих ломаное очертание, удобнее всего производить по способу Верещагина, построив предварительно эпюру секториальных координат с полюсом в центре изгиба и с начальной точкой в главной секториальной точке сечения.

Например, для швеллерного сечения с центром изгиба в точке A и главной секториальной точкой M_0 эпюра главных секториальных координат имеет вид, показанный на рис. 54.

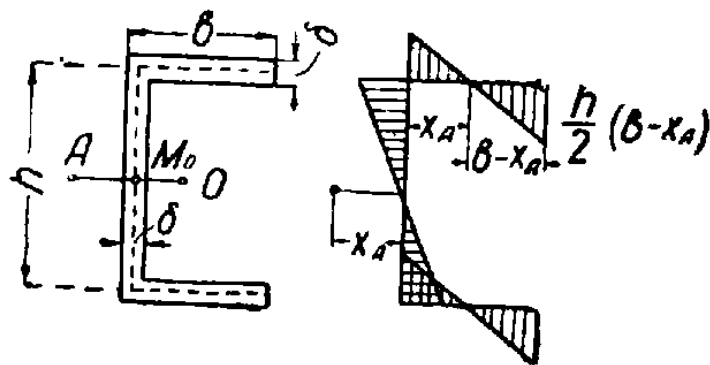


Рис. 54. Эпюра главных секториальных координат.

Секториальный момент инерции определяется путем перемножения площадей эпюры ω на соответствующие им ординаты этой же эпюры:

$$\begin{aligned}
 J_{\omega} &= \int_F \omega^2 dF = \int_S \omega \omega \delta ds = 2\delta \left[\frac{h}{2}(b-x_A) \frac{b-x_A}{2} \frac{h}{3} \frac{h}{2}(b-x_A) + \right. \\
 &+ x_A \frac{h}{2} \frac{x_A}{2} \frac{2}{3} x_A \frac{h}{2} + x_A \frac{h}{2} \frac{h}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} x_A \frac{h}{2} \left. \right] = \\
 &= \frac{\delta h^2}{12} [2(b-x_A)^3 + 2x_A^3 + hx_A^2].
 \end{aligned}$$

Секториальный момент инерции составного сечения равен сумме собственных секториальных моментов инерции (относительно своих центров изгиба) отдельных элементов плюс сумма произведений осевых моментов инерции этих элементов, взятых попарно, на квадраты расстояний между их центрами изгиба, деленная на осевой момент инерции относительно оси симметрии всего составного сечения.

Например, для сечения, изображенного на рис. 55, координата центра изгиба A , отсчитываемая от центра изгиба элемента (3), вычисляется по формуле:

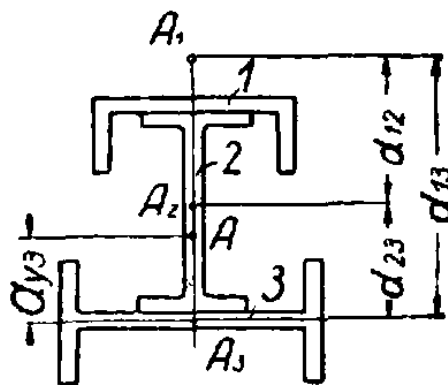


Рис. 55. Составное сечение.

$$a_{y3} = \frac{J_{1y} d_{13} + J_{2y} d_{23}}{J_y}. \quad (37)$$

Секториальный момент инерции сечения определяется по формуле:

$$J_{\omega} = J_{1\omega} + J_{2\omega} + J_{3\omega} + \frac{J_{1y} J_{2y} d_{12}^2 + J_{1y} J_{3y} d_{13}^2 + J_{2y} J_{3y} d_{23}^2}{J_y}, \quad (38)$$

где: J_{1y} , J_{2y} , J_{3y} — осевые моменты инерции отдельных элементов;

J_y — осевой момент инерции всего сечения;

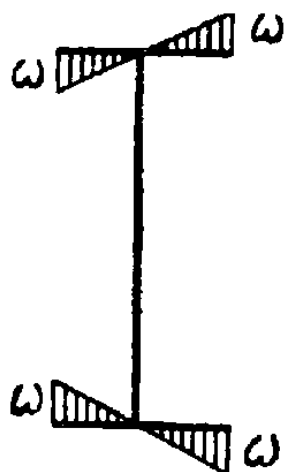


Таблица 18

Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров

№№ профилей	Секториальный момент инерции J_{ω} в $см^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля ω_{max} в $см^2$	Секториальный момент сопротивления W_{ω} в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении J_K в $см^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$
10	641,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1 353	20,10	67,33	4,243	0,03457
14	2 560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4 879	32,25	151,30	8,406	0,02562
18	8 219	38,90	211,28	11,37	0,02295
20 a	13 121	46,15	284,31	14,81	0,02074
b	13 857	47,05	294,50	17,85	0,02215
22 a	22 773	55,91	407,33	20,32	0,01844
b	23 930	56,90	420,55	24,08	0,01958
24 a	33 799	64,48	524,15	25,57	0,01698
b	35 426	65,57	540,25	30,12	0,01800
27 a	52 987	76,68	690,99	31,93	0,01515
b	55 414	77,92	711,21	37,60	0,01608

№№ про- филей	Секториаль- ный момент инерции J_{ω} в $см^6$	Секторналь- ная площадь для крайней точки про- филя ω_{max} в $см^2$	Секториаль- ный момент сопротивле- ния W_{ω} в $см^4$	Момент инерции при чистом кручении J_K в $см^4$	Упругая из- гибно-кру- тильная характери- стика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$
30 a	76 704	88,38	867,93	38,83	0,01389
b	80 114	89,75	892,60	45,78	0,01475
c	83 612	91,13	917,50	55,23	0,01587
33 a	107 160	100,69	1064,3	46,19	0,01281
b	111 780	102,21	1093,6	54,49	0,01363
c	116 520	103,73	1123,3	65,74	0,01466
36 a	154 820	115,19	1344,0	56,85	0,01183
b	161 210	116,85	1379,6	66,72	0,01256
c	167 760	118,51	1415,6	79,99	0,01348
40 a	228 900	134,13	1706,6	68,75	0,01070
b	237 950	136,00	1749,6	80,68	0,01137
c	247 210	137,85	1793,3	96,55	0,01220
45 a	376 630	159,75	2357,6	95,31	0,009819
b	390 770	161,86	2414,4	111,3	0,01041
c	405 220	163,96	2471,5	131,8	0,01113
50 a	611 990	187,70	3270,9	131,2	0,009038
b	633 900	189,44	3346,2	150,3	0,009504
c	656 270	191,79	3421,8	174,9	0,01007
55 a	906 350	216,79	4180,8	159,9	0,008198
b	937 220	219,36	4272,5	182,7	0,008617
c	968 720	221,94	4364,8	211,5	0,009119
60 a	1 349 900	251,22	5373,4	195,5	0,007427
b	1 393 200	254,04	5484,2	221,9	0,007790
c	1 437 300	256,86	5595,7	255,3	0,008226

Примечание. При вычислении α приняты $G = 800\,000$ кг/см²,
 $E = 2\,100\,000$ кг/см²

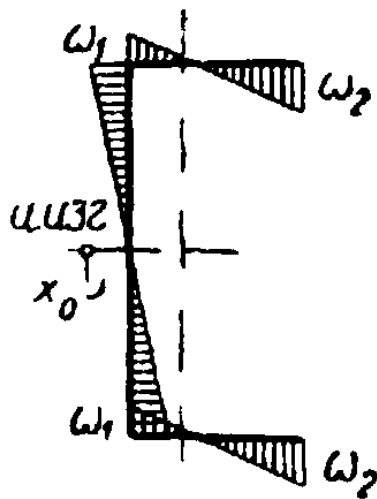


Таблица 19

Секториальные геометрические характеристики прокатных швеллеров (ОСТ 10017-39)

№№ профилей	Координаты центра изгиба x_0 в см	Секториальный момент инерции J_ω в см ⁶	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении J_K в см ⁴	Изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_\omega}}$ в см ⁻¹
			ω_1 в см ²	ω_2 в см ²	$W_{\omega 1}$ в см ⁴	$W_{\omega 2}$ в см ⁴		
5	1,08	24,91	2,70	4,26	9,22	5,85	1,350	0,1437
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,80	10,21	1,497	0,09375
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,20	1,940	0,07219
10	1,34	354,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245
14 a	1,58	1 512	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483
b	1,39	1 711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,03730
16 a	1,68	2 760	14,74	28,63	187,23	96,40	6,306	0,02950
b	1,48	3 099	14,03	30,09	220,87	103,00	8,227	0,03180
18 a	1,83	4 745	17,68	35,32	268,41	134,34	8,128	0,02555
b	1,57	5 292	16,83	37,02	314,50	142,95	10,50	0,02749
20 a	1,94	7 698	21,27	42,46	361,95	181,28	9,84	0,02207
b	1,73	8 560	20,24	44,45	422,87	192,57	12,50	0,02359
22 a	2,07	11 593	24,84	49,60	466,69	233,73	11,66	0,01958
b	1,86	12 863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,60	0,02079

№№ профилей	Координаты центра изгиба x_0 в см	Секториальный момент инерции J_{ω} в см ⁶	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Момент инерции при чистом кручении J_K в см ⁴	Изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_c}}$ в см ⁻¹
			ω_1 в см ²	ω_2 в см ²	$W_{\omega 1}$ в см ⁴	$W_{\omega 2}$ в см ⁴		
24 a	2,10	15 326	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
b	1,88	17 007	26,10	57,75	651,56	294,50	16,47	0,01921
c	1,67	18 640	24,91	60,09	748,35	310,21	21,31	0,02087
27 a	2,14	24 337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01595
b	1,91	26 883	30,23	69,39	889,34	387,42	20,34	0,01698
c	1,70	29 355	23,82	72,10	1018,6	407,14	26,34	0,01848
30 a	2,26	36 645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
b	2,03	40 436	35,23	79,98	1147,8	505,61	25,01	0,01535
c	1,80	44 104	33,59	83,06	1313,0	530,97	31,75	0,01656
33 a	2,25	52 630	41,39	88,54	1271,7	594,43	24,29	0,01326
b	2,02	57 844	39,27	92,27	1473,2	626,93	29,92	0,01404
c	1,80	62 890	37,44	95,69	1679,8	657,23	38,04	0,01518
36 a	2,47	92 189	49,50	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
b	2,24	100 430	47,30	108,51	2123,4	925,54	46,56	0,01329
c	2,02	108 420	45,36	112,18	2390,2	966,48	57,18	0,01417
40 a	2,43	148 100	55,78	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,01240
b	2,21	160 100	53,51	125,86	2991,7	1272,1	70,78	0,01298
c	2,00	171 870	51,51	129,80	3336,4	1324,0	85,72	0,01378

Примечание. При вычислении α приняты $G = 800\,000$ кг/см²,
 $E = 2\,100\,000$ кг/см².

$J_{1\omega}, J_{2\omega}, J_{3\omega}$ — собственные секториальные моменты инерции отдельных элементов относительно своих центров изгиба и своих главных секториальных точек;

d_{12}, d_{13}, d_{23} — расстояния между центрами изгиба соответствующих элементов.

Секториальный момент сопротивления

Секториальный момент сопротивления сечения определяется по формуле:

$$W_{\omega} = \frac{J_{\omega}}{\omega_{max}} \text{ см}^4, \quad (39)$$

где ω_{max} — секториальная координата, соответствующая одной из крайних точек контура сечения.

Глава V. КРУЧЕНИЕ

1. СУЩНОСТЬ ЯВЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Кручением называется деформация стержня, возникающая под действием внешних пар сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси стержня. Простейший случай кручения имеет место под действием двух равных и противоположных пар сил, приложенных к торцам стержня (рис. 56). Момент внешней пары называют крутящим моментом, не делая в термине различия между нагрузкой и усилием в сечении.

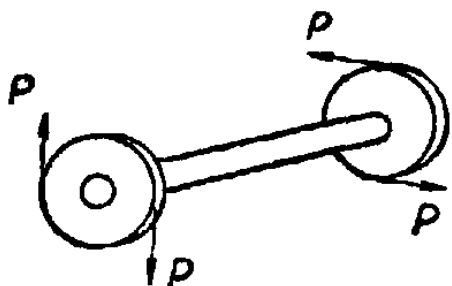


Рис. 56. Простейший случай кручения.

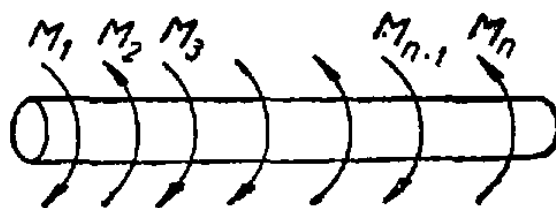


Рис. 57. Брус загружен несколькими крутящими моментами.

В общем случае на стержень могут действовать несколько крутящих моментов, приложенных в различных сечениях и взаимно уравновешивающихся (рис. 57).

Напряжения и деформации при кручении в отличие от растяжения-сжатия существенно зависят от формы поперечного сечения стержня и могут быть определены элементарным путем только для стержней с поперечным сечением в виде круга или круглого кольца. Для всех остальных сечений решение возможно только при помощи методов, излагаемых в теории упругости.

Стержень, работающий на кручение, часто называют валом.

Опыты, произведенные при скручивании стержня круглого профиля в пределах упругого состояния материала, показали следующее (рис. 58):

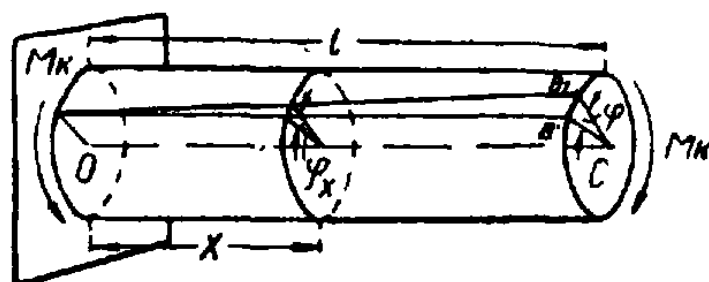


Рис. 58. Деформация бруса круглого профиля при кручении.

1. Ось стержня OC после деформации остается прямой линией.

2. Поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации.

3. Длина стержня заметно не изменяется, т. е. продольные удлинения волокон отсутствуют.

4. Радиусы поперечных сечений, поворачиваясь на определенный угол, остаются прямыми. Например, радиус CB займет положение CB_1 .

Угол $BCB_1 = \varphi$ называется углом закручивания сечения C относительно сечения O .

Опытные данные позволяют в основу теории кручения круглого стержня принять следующие допущения:

1. В поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения.

2. Поперечные сечения поворачиваются без искажения и искривления радиусов.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Для расчета вала на кручение необходимо знать величину крутящего момента в любом поперечном сечении вала и уметь строить эпюру крутящих моментов.

При установившемся движении, пренебрегая моментом трения в подшипниках и другими вредными сопротивлениями, будем иметь (рис. 59):

$$\Sigma M = 0. \quad (1)$$

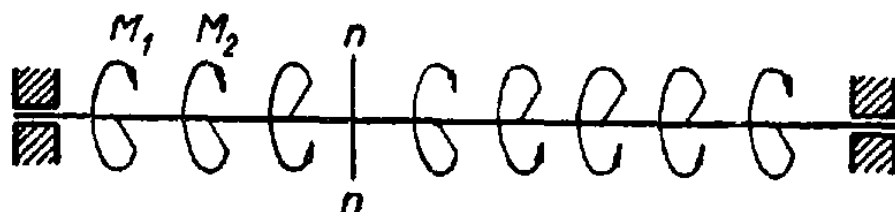


Рис. 59. Определение крутящего момента в поперечном сечении бруса.

Крутящий момент в данном ($n-n$) сечении численно равен алгебраической сумме моментов, действующих на часть вала по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$M_k = \Sigma M_{\text{лев}} = \Sigma M_{\text{прав}}. \quad (2)$$

Правило знаков для M_k

Знак крутящего момента принципиального значения не имеет и общепринятого правила знаков для него не существует. Правило знаков примем по схемам, показанным на рис. 60, а и 60, б.

Момент, действующий на вал по часовой стрелке, если смотреть со стороны разреза, считается положительным, а против — отрицательным.

Диаграмма, дающая графическое изображение крутящего момента по длине вала, называется эпюрой крутящих моментов.

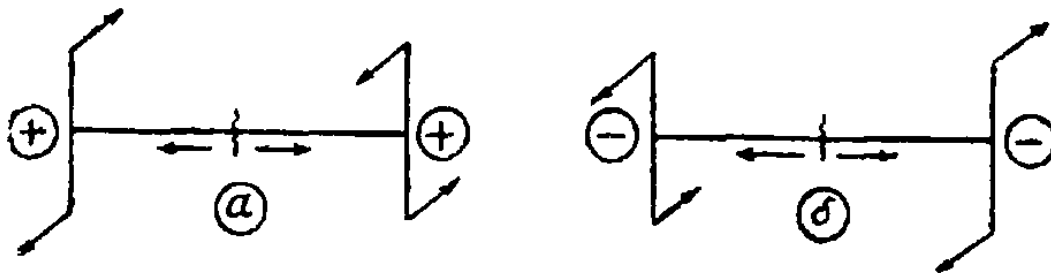


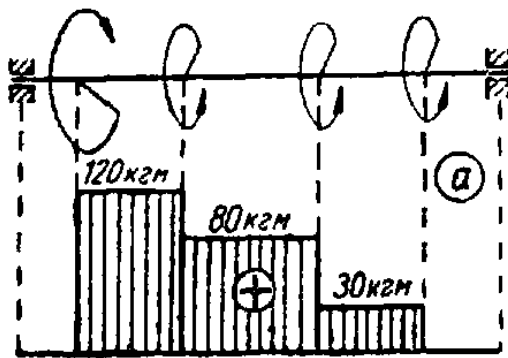
Рис. 60. Правило знаков для крутящего момента.

Величины крутящих моментов при построении эпюры откладываются перпендикулярно оси вала.

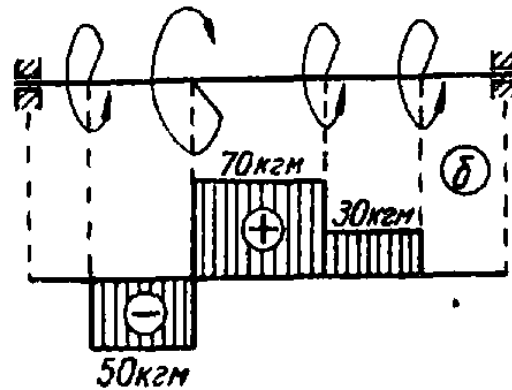
На рис. 61 показано построение эпюры крутящих моментов для случаев, когда ведущий шкив, передающий крутящий момент M_1 , расположен в конце вала (рис. 61, а) и в средней части вала (рис. 61, б).

$$M_1 = 120 \text{ кгм}, M_2 = 40 \text{ кгм}, M_3 = 50 \text{ кгм}, M_4 = 30 \text{ кгм}$$

$$M_3 = 50 \text{ кгм}, M_1 = 120 \text{ кгм}, M_2 = 40 \text{ кгм}, M_4 = 30 \text{ кгм}$$



$$\max M_k = 120 \text{ кгм}$$



$$\max M_k = 70 \text{ кгм}$$

Рис. 61. Примеры построения эпюр крутящих моментов.

Ординаты эпюры в любом сечении дают величину M_k в этом сечении. В точках приложения скручивающих моментов эпюра дает скачки на величину этого момента.

Сравнение построенных эпюр M_k показывает, что рациональным расположением крутящей нагрузки можно значительно

уменьшить величину максимального момента и тем самым получить существенную экономию в материале, не нарушая прочности конструкции. Ведущий шкив выгоднее расположить в средней части вала, чтобы раздача моментов происходила по обе стороны, по возможности поровну.

Зависимость крутящего момента от числа оборотов и мощности

При расчете вала часто задается не непосредственно крутящий момент, а мощность, передаваемая на вал в данном сечении в лошадиных силах (N), и число оборотов вала в минуту (n). В этом случае крутящий момент M_k определяется по формуле:

$$M_k = \frac{225\,000}{\pi} \frac{N}{n} \approx 71\,620 \frac{N}{n} \text{ кгсм.} \quad (3)$$

3. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Касательные напряжения в поперечных сечениях

В поперечных сечениях круглого и трубчатого стержней при кручении возникают только касательные напряжения τ_ρ , которые определяются по формуле:

$$\tau_\rho = \frac{M_k \rho}{J_\rho}, \quad (4)$$

где: τ_ρ — касательное напряжение в произвольной точке рассматриваемого поперечного сечения стержня;

M_k — крутящий момент в исследуемом поперечном сечении;

ρ — расстояние от исследуемой точки до оси стержня;

J_ρ — полярный момент инерции сечения стержня.

Для круга:

$$J_\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (5)$$

Для круглого кольца:

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4), \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}.$$

Касательные напряжения в поперечном сечении стержня, будучи перпендикулярны к радиусам, распределяются по линейному закону.

На рис. 62, а изображена эпюра касательных напряжений в поперечном сечении стержня для круглого профиля, а на рис. 62, б — для стержня трубчатого профиля (круглого кольца).

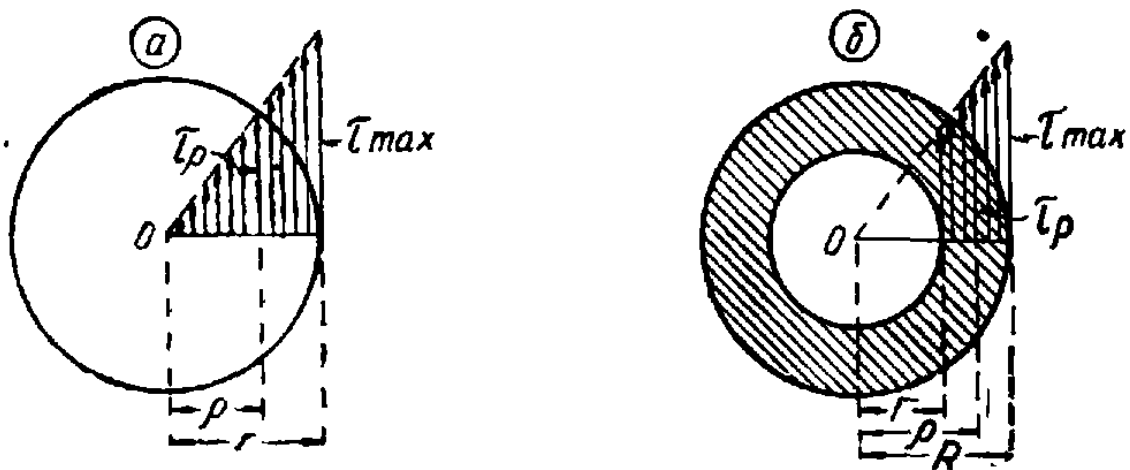


Рис. 62. Эпюры касательных напряжений в поперечных сечениях для круглого и трубчатого профилей.

Наибольшей величины касательные напряжения достигают в крайних точках сечения, наиболее отдаленных от оси вала, т. е. у его поверхности, для которых $\rho = \rho_{max}$ и, следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{M_k \rho_{max}}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (7)$$

где W_p — полярный момент сопротивления.

Для круга:

$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (8)$$

Для круглого кольца:

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4). \quad (9)$$

Касательные напряжения в продольных сечениях

Вследствие закона парности касательные напряжения возникают и в продольных радиальных сечениях вала (рис. 63). Они представляют собой силы взаимодействия между вырезанным сектором и оставшейся частью вала и равны рассмотренным напряжениям τ_p в поперечных сечениях:

$$\tau_p' = \tau_p = \frac{M_k \rho}{J_p}. \quad (10)$$

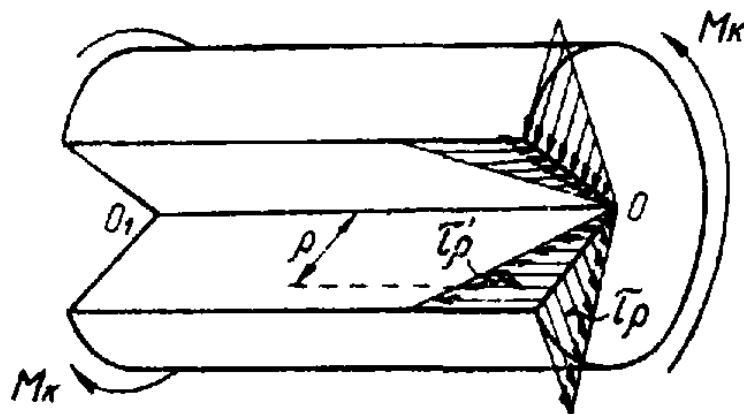


Рис. 63. Касательные напряжения в поперечных и продольных сечениях.

Этими напряжениями объясняется, почему у стержней волокнистого строения, обладающих меньшим сопротивлением сдвигу в продольном направлении, чем в поперечном, разрушение начинается с появления продольных трещин на поверхности.

Главные напряжения при кручении

Разобьем вал на соосные тонкостенные полые цилиндры. По боковым граням прямоугольного элемента, вырезанного из стенки цилиндра двумя диаметрными и двумя поперечными сечениями, будут действовать только касательные напряже-

ния τ_{max} и τ'_{max} , равные по величине (рис. 64, а). На рис. 64, б вырезанный элемент показан в увеличенном масштабе. Он находится в условиях чистого сдвига. Как известно, при чистом сдвиге в наклонных площадках возникают нормальные напряжения. Наибольшие из них, т. е. главные напряжения, дейст-

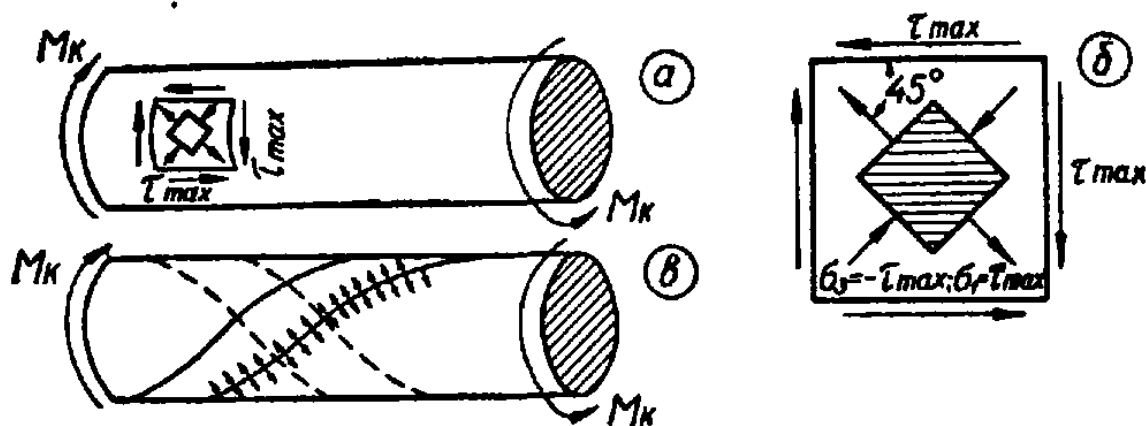


Рис. 64. Главные напряжения и линии главных напряжений при кручении.

вуют по площадкам, наклоненным под углом 45° к граням элемента.

Главные напряжения имеют разные знаки и численно равны касательным напряжениям на гранях элемента, т. е.

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{max} = \frac{M_k}{W_p}; \quad \sigma_2 = 0. \quad (11)$$

Траектории главных напряжений представляют собой винтовые линии, составляющие с любой образующей вала угол 45° . На рис. 64, в сплошными линиями показаны некоторые из траекторий главных растягивающих напряжений, а пунктирными — некоторые из траекторий главных сжимающих напряжений.

Разрушение стержней при кручении

Разрушение круглых стержней при кручении начинается всегда с поверхности, у которой действуют наибольшие напряжения. Характер разрушения стержней из различного материала различен.

Стальной стержень (рис. 65, а) срезается по поперечному сечению от действия в нем касательных напряжений.

Деревянный стержень (рис. 65, б) скалывается вдоль продольных волокон от действия касательных напряжений в продольных сечениях стержня.

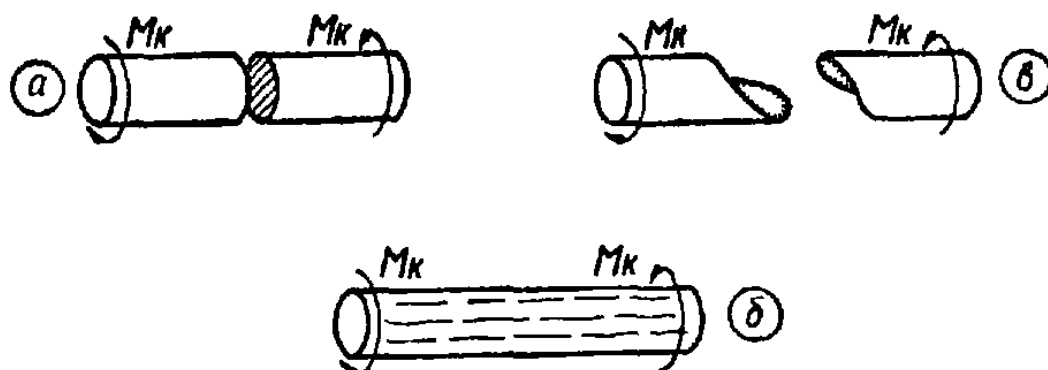


Рис. 65. Разрушение вала при кручении:
а—стального; б—деревянного; в—чугунного.

Чугунный стержень (рис. 65, в) разламывается по винтовой поверхности от действия главных растягивающих напряжений.

Расчет валов, изготовленных из вязких материалов, следует вести по касательным напряжениям, а из хрупких — по нормальным напряжениям.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Если на участке вала крутящий момент и площадь поперечного сечения постоянные, то взаимный угол закручивания концевых сечений этого участка определяется так:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_p}, \quad (12)$$

где: l — длина рассматриваемого участка;

GJ_p — жесткость при кручении.

Если вал ступенчатый и крутящий момент скачкообразно изменяется по длине вала, то полный угол закручивания вала, т. е. взаимный угол поворота его концевых сечений, может

быть определен суммированием по участкам, на которых M_k и J_p постоянные, по формуле:

$$\varphi = \frac{1}{G} \sum \frac{M_k l}{J_p}. \quad (13)$$

Вычисление углов закручивания необходимо для:

- а) решения статически неопределимых задач на кручение;
- б) проверки жесткости вала.

Потенциальная энергия при кручении

Если откладывать по оси абсцисс угол закручивания φ , а по оси ординат соответствующее значение крутящего момента M_k , то в пределах упругих деформаций зависимость M_k от φ представится прямой линией OA (рис. 66).

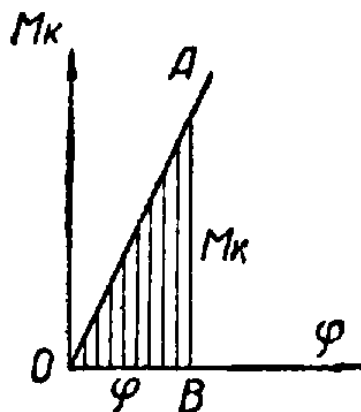


Рис. 66. Зависимость между крутящим моментом и углом закручивания в пределах упругости.

Так как потенциальная энергия деформации U численно равна работе внешних сил A , которая выражается площадью $\triangle OAB$, то получим:

$$U = \frac{M_k \varphi}{2} = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p}, \quad (14)$$

а при переменных значениях M_k и J_p

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_k^2}{GJ_p} dx. \quad (15)$$

5. РАСЧЕТ ВАЛОВ НА КРУЧЕНИЕ

Расчет на прочность

Условие прочности вала требует, чтобы наибольшее касательное напряжение не превышало допускаемого касательного напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad (16)$$

где $[\tau]$ — допускаемое напряжение при кручении, устанавливаемое техническими нормами в зависимости от материала, характера работы конструкции и других условий.

При проектировании вала, зная наибольший крутящий момент и допускаемое напряжение, легко определить по формуле (16) необходимый момент сопротивления:

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau]}. \quad (17)$$

Подставляя в полученное выражение значение W_p из формул (8) и (9), определяем диаметр вала по условию прочности:

1) для сплошного вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi[\tau]}}; \quad (18)$$

2) для полого вала:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi [\tau] (1 - \alpha^4)}}; \quad d = \alpha D. \quad (19)$$

Допускаемый крутящий момент определяется по формуле:

$$[M_k] = [\tau] W_p. \quad (20)$$

На практике величина $[\tau]$ колеблется для мягкой стали от 200 до 1 000 кг/см², для твердой — от 300 до 1 200 кг/см², в зависимости от характера нагрузки (постоянная, переменная, ударная) и величины местных напряжений, возникающих в тех местах вала, где в нем имеются гнезда для шпонок, выкружки и другие изменения формы сечения, вызывающие концентрацию напряжений.

Расчет на жесткость

Условие жесткости:

$$\varphi = \frac{M_{\kappa} l}{G J_p} \leq [\varphi], \quad (21)$$

где $[\varphi]$ — допускаемый угол закручивания.

Из формулы (21) имеем:

$$J_p \geq \frac{M_{\kappa} l}{G [\varphi]}. \quad (22)$$

Подставляя в выражение (22) значение J_p из формул (5) и (6), определим диаметры вала по условию жесткости:

1) для сплошного вала:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\kappa} l}{\pi G [\varphi]}}, \quad (23)$$

2) для полого вала:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\kappa} l}{\pi G [\varphi] (1 - \alpha^4)}}; \quad d = \alpha D. \quad (24)$$

Допускаемый угол закручивания устанавливается техническими нормами для различных режимов работы вала.

Практикой выработаны следующие наибольшие допускаемые углы закручивания в общем машиностроении:

при спокойной работе вала

$$[\varphi] = 0,3^\circ \text{ на каждый метр длины вала,}$$

при переменных нагрузках

$$[\varphi] = 0,25^\circ \text{ на каждый метр длины вала,}$$

при внезапных (ударных) нагрузках

$$[\varphi] = 0,15^\circ \text{ на каждый метр длины вала.}$$

В последнее время в советском машиностроении допускаемый угол закручивания $[\varphi]$ принимается до 2° на 1 пог. м длины вала.

Для того чтобы вал одновременно удовлетворял обоим требованиям — прочности и жесткости, из двух найденных

значений диаметра большее округляется в сторону увеличения в соответствии с ОСТ, ВКС 6270 (таблица 20).

Таблица 20

Нормальные диаметры общего назначения в мм

0,5	3,0	11	21	35	52	78	105	155	210	310	410
0,8	3,5	12	22	36	55	80	110	160	220	320	420
1,0	4,0	13	23	38	58	82	115	165	230	330	430
1,2	4,5	14	24	40	60	85	120	170	240	340	440
1,5	5,0	15	25	42	62	88	125	175	250	350	450
1,8	6,0	16	26	44	65	90	130	180	260	360	460
2,0	7,0	17	28	45	68	92	135	185	270	370	470
2,2	8,0	18	30	46	70	95	140	190	280	380	480
2,5	9,0	19	32	48	72	98	145	195	290	390	490
2,8	10,0	20	34	50	75	100	150	200	300	400	500

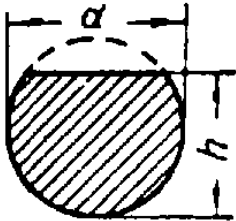
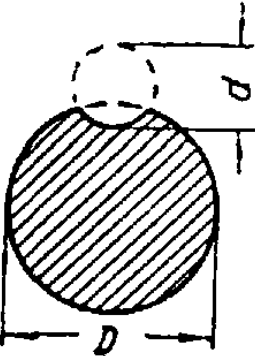
Примечание. Рекомендуется применять в первую очередь диаметры, оканчивающиеся на 0, во вторую — на 0 и 5, в третью — на 0, 2, 5 и 8.

6. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Сечения стержней некруглого профиля, плоские до деформации, перестают быть плоскими после нее. Теория кручения в этом случае становится весьма сложной и в элементарном курсе сопротивления материалов не излагается.

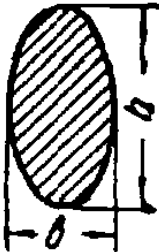
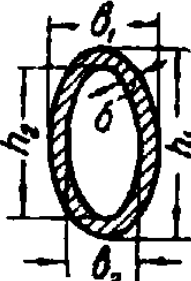

Ниже приведены окончательные результаты исследований, полученные методами теории упругости.

Вычисление наибольших касательных напряжений и углов закручивания можно производить по формулам, аналогичным

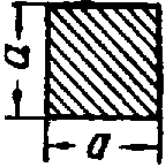

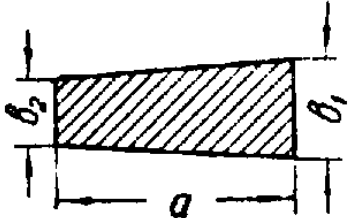
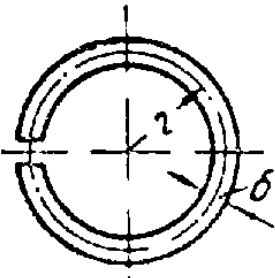
<p>Форма сечения</p>	<p>Момент инерции сечения при кручении J_k в $см^4$</p>	<p>Момент сопротивления при кручении W_k в $см^3$</p>
<p>Сечение вала с лыской</p> 	$J_k = \frac{d^4}{16} \left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$W_k = \frac{d^3}{8} \frac{\left(2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)}{\left(0,3 \frac{h}{d} + 0,7 \right)}$
<p>Круглое сечение с круговым вырезом</p> 	$J_k = \alpha \frac{D^4}{16}$ <p>α и β — по таблице в зависимости от отношения $\frac{d}{D}$</p>	$W_k = \beta \frac{D^3}{8}$

некруглых профилей

<p>Точки с наибольшими касательными напряжениями</p> $\max \tau = \frac{M_K}{W_K}$	<p>Примечания</p>																														
<p>В середине плоского среза</p> $\max \tau = \frac{M_K}{W_K}$	$\frac{h}{d} > 0,5$																														
<p>По дну канавки</p> $\max \tau = \frac{M_K}{W_K}$	<p style="text-align: center;">Значения коэффициентов α и β</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="border: none;">d/D</th> <th>0</th> <th>0,05</th> <th>0,10</th> <th>0,20</th> <th>0,40</th> <th>0,60</th> <th>0,80</th> <th>1,00</th> <th>1,50</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th style="border: none;">α</th> <td>1,57</td> <td>0,80</td> <td>0,81</td> <td>0,82</td> <td>0,76</td> <td>0,66</td> <td>0,52</td> <td>0,38</td> <td>0,142</td> </tr> <tr> <th style="border: none;">β</th> <td>1,57</td> <td>1,56</td> <td>1,56</td> <td>1,46</td> <td>1,22</td> <td>0,92</td> <td>0,63</td> <td>0,38</td> <td>0,07</td> </tr> </tbody> </table>	d/D	0	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,50	α	1,57	0,80	0,81	0,82	0,76	0,66	0,52	0,38	0,142	β	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07
d/D	0	0,05	0,10	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,50																						
α	1,57	0,80	0,81	0,82	0,76	0,66	0,52	0,38	0,142																						
β	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07																						

<p>Форма сечения</p>	<p>Момент инерции сечения при кручении J_k в $см^4$</p>	<p>Момент сопротивления при кручении W_k в $см^3$</p>
<p>Сплошное эллиптическое сечение</p> 	$J_k = \frac{\pi}{16} \frac{m^3}{m^2 + 1} b^4 =$ $= \frac{16 F^4}{\pi^3 b h (b^2 + h^2)}$	$W_k = \frac{\pi b^3}{16} m =$ $= \frac{\pi b^2 h}{16}$
<p>Полое эллиптическое сечение</p> 	$J_k = \frac{\pi m^3}{16(m^2 + 1)} b_1^4 (1 - \alpha^4)$	$W_k = \frac{\pi b_1^3}{16} (1 - \alpha^4) m$
<p>Равносторонний треугольник</p> 	$J_k = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$	$W_k = \frac{a^3}{24}$

<p>Точки с наибольшими касательными напряжениями</p> $\max \tau = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}$	<p>Примечания</p>
<p>В конце малой полуоси</p> $\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}$ <p>В конце большой полуоси</p> $\tau = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h}{b} = m > 1$ <p>F — площадь сечения</p>
<p>В конце малой полуоси</p> $\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}$ <p>В конце большой полуоси</p> $\tau = \frac{\tau_{\max}}{m}$	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$ <p>При малой толщине δ можно принять равномерное распределение напряжений по сечению</p> $\tau = \frac{M_{\kappa}}{2F\delta}$
<p>В серединах сторон</p> $\tau_{\max} = \frac{20M_{\kappa}}{a^3}$ <p>В углах касательное напряжение равно нулю</p>	

<p>Форма сечения</p>	<p>Момент инерции сечения при кручении J_k в $см^4$</p>	<p>Момент сопротивления при кручении W_k в $см^3$</p>
<p>Квадратное сечение</p> 	$J_k = 0,1406a^4$	$W_k = 0,208a^3$
<p>Правильный шести- или восьмиугольник</p>  <p>d — диаметр вписанного круга</p>	$J_k = k' a^2 F$ <p>Для шестиугольника $k' = 0,133$; для восьмиугольника $k' = 0,130$ F — площадь сечения</p>	$W_k = k a F$ <p>Для шестиугольника $k = 0,217$; для восьмиугольника $k = 0,223$</p>
<p>Сечение в форме клина $a > 4b_1$</p> 	$J_k = \frac{a(b_1^4 - b_2^4)}{12(b_1 - b_2)} - 0,105(b_1^4 + b_2^4)$	$W_k = \frac{a(b_1^4 - b_2^4)}{12b_1(b_1 - b_2)} - 0,105 \frac{b_1^4 + b_2^4}{b_1}$
<p>Круговое незамкнутое кольцо постоянной толщины; δ мало по сравнению с r (средний радиус)</p> 	$J_k = \frac{2}{3} \pi r \delta^3$	$W_k = \frac{(2\pi r \delta)^2}{6\pi r + 1,8\delta}$

<p>Точки с наибольшими касательными напряжениями</p> $\max \tau = \frac{M_k}{W_k}$	Примечания
<p>В серединах сторон</p> $\tau_{max} = \frac{M_k}{0,208a^3}$ <p>В углах касательное напряжение равно нулю</p>	
<p>В серединах сторон</p> $\tau_{max} = \frac{M_k}{kdF}$ <p>Непосредственно в самих углах касательное напряжение равно нулю</p>	
<p>В точках длинных сторон ближе к широкому основанию</p> $\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$	
<p>В точках внутреннего и наружного круговых контуров сечения</p> $\tau_{max} = \frac{6\pi r + 1,8\delta}{(2\pi r\delta)^2} M_k$	

по своей структуре формулам (7) и (12) для круглого стержня, но с заменой J_p и W_p через J_k и W_k :

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}; \quad (25)$$

$$\varphi = \frac{M_k l}{GJ_k}, \quad (26)$$

где: J_k — момент инерции при кручении, измеряемый единицами длины в 4-й степени,

W_k — момент сопротивления при кручении, измеряемый единицами длины в 3-й степени.

Значения величин J_k и W_k для различных сечений приведены в таблице 21.

Для прямоугольного сечения со сторонами a и b при $b > a$:

$$W_k = \alpha ba^2; \quad (27)$$

$$J_k = \beta ba^3. \quad (28)$$

Напряжение посредине коротких сторон:

$$\tau = \gamma \tau_{max}. \quad (29)$$

Безразмерные коэффициенты α , β и γ зависят только от отношения $\frac{b}{a}$, величины их даются бесконечными рядами. В таблице 22 приведены приближенные значения этих коэффициентов. Если при расчете встретится какое-либо промежуточное значение отношения $\frac{b}{a}$, то следует прибегнуть к интерполированию.

На рис. 67, а и 67, б показано распределение касательных напряжений для прямоугольного и эллиптического сечений.

Наибольшее касательное напряжение τ_{max} в случае односвязного сечения обычного (не тонкостенного) типа возникает в самой близкой к центру тяжести сечения точке контура и направлено (как и все касательные напряжения в площадках контура) по касательной к контуру. В углах касательные напряжения равны нулю.

Из таблицы 22 видно, что с увеличением $\frac{b}{a}$ коэффициенты α и β приближаются к 0,333. Поэтому для узких прямоугольных сечений, когда $\frac{b}{a} \geq 10$, можно в практических расчетах принять $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ и тогда

$$W_k = \frac{ba^2}{3} \quad \text{и} \quad J_k = \frac{ba^3}{3}$$

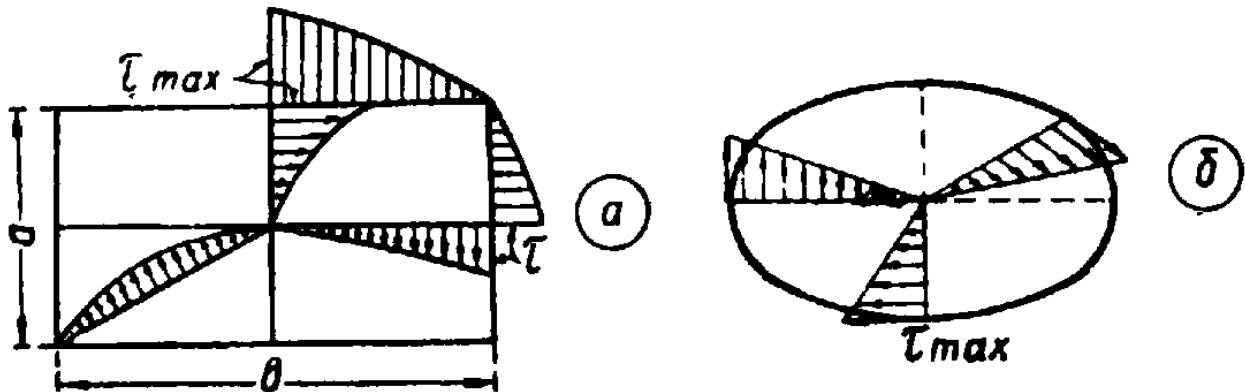


Рис. 67. Распределение касательных напряжений для прямоугольного и эллиптического сечений.

и равенства (25) и (26) примут следующий вид:

$$\tau_{max} = \frac{3M_k}{bu^2}; \quad (30)$$

$$\varphi = \frac{3M_k l}{ba^3 G}. \quad (31)$$

В расчетах, не требующих большой точности, часто принимают $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ при $\frac{b}{a} \geq 4$.

В узком прямоугольнике (рис. 68) касательные напряжения в поперечных сечениях направлены параллельно длинной стороне, почти постоянны и равны τ_{max} в точках длинной стороны, снижаясь к нулю только вблизи угловых точек. Вдоль средней линии касательные напряжения равны нулю и вдоль толщины a изменяются по линейному закону.

Значения коэффициентов α , β и γ для прямоугольных сечений

$\frac{b}{a}$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	∞
α	0,208	0,219	0,228	0,234	0,240	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,140	0,166	0,187	0,204	0,217	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	—	0,865	0,845	—	0,796	—	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

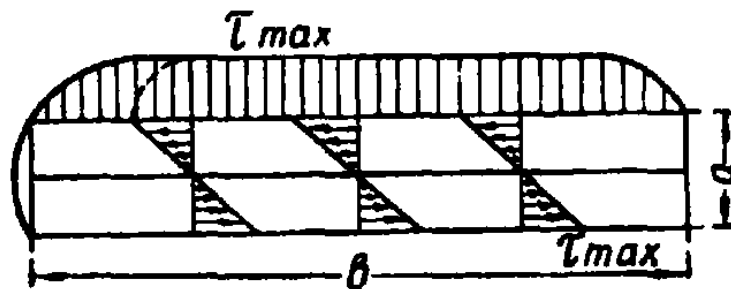


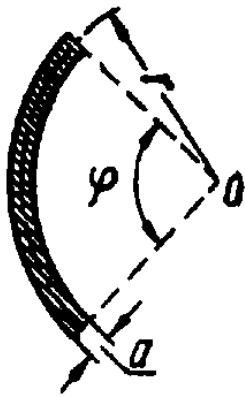
Рис. 68. Распределение касательных напряжений в поперечном сечении узкого прямоугольника.

Кручение тонкостенных стержней открытого профиля

Формулами (30) и (31) можно с достаточной точностью пользоваться для тонкостенных незамкнутых профилей постоянной толщины, если вместо b подставить длину развернутой осевой линии сечения. Например, для сечения в виде части кольца (рис. 69) следует подставить $b = r\varphi$

Для открытых профилей, составленных из нескольких узких прямоугольников — прокатные профили (рис. 70), величину полного момента инерции при кручении находят при-

близительно как сумму J_k отдельных входящих в его состав прямоугольников:



$$J_k = \Sigma \frac{ba^3}{3}. \quad (32)$$

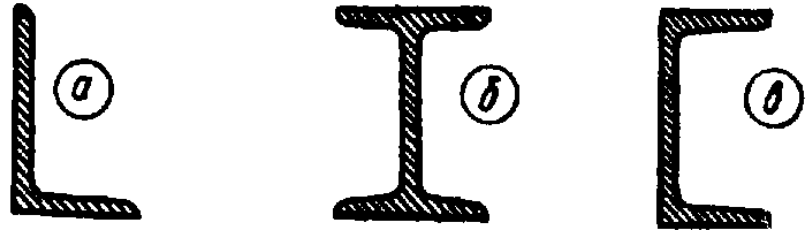


Рис. 69. Тонкостенный незамкнутый профиль постоянной толщины.

Рис. 70. Прокатные профили.

Опыты с кручением прокатных профилей показали, что действительная их жесткость несколько больше вычисленной по формуле (32). Более точная формула для определения J_k , учитывающая влияние закруглений во входящих углах, переменность толщины полок и другие факторы, имеет вид:

$$J_k = \eta \Sigma \frac{ba^3}{3}. \quad (33)$$

Поправочный коэффициент η зависит от формы профиля и, по опытным данным, округленно равен:

для уголка	1,10
» швеллера	1,12
» тавра	1,15
» двутавра	1,20

Наибольшее напряжение, как правило, имеет место в самом широком прямоугольнике. Если обозначить его ширину a_{max} , то

$$W_k = \frac{J_k}{a_{max}}. \quad (34)$$

Кручение замкнутых тонкостенных профилей

Расчет замкнутых тонкостенных профилей (рис. 71) опирается на допущение Бредта, что касательные напряжения в поперечном сечении постоянны по толщине стенки. Напряжение в любой точке замкнутого профиля произвольной формы с переменной толщиной стенки определяется по формуле:

$$\tau = \frac{M_k}{2\delta f}, \quad (35)$$

где f — площадь, ограниченная средней линией профиля.

Наибольшее напряжение имеет место в участке с наименьшей толщиной δ_{min} .

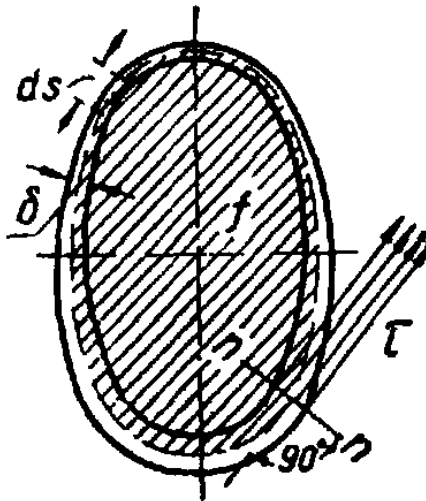


Рис. 71. Замкнутый тонкостенный профиль.

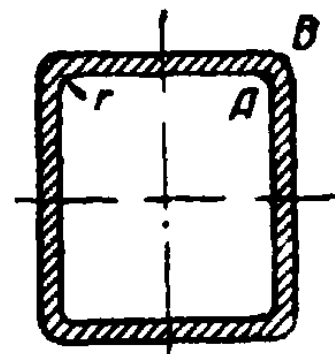


Рис. 72. Замкнутый профиль с углами.

Угол закручивания выражается формулой:

$$\varphi = \frac{M_k l}{4f^2 G} \int \frac{dS}{\delta}, \quad (36)$$

где интеграл берется по длине контура трубы. В случае, если $\delta = \text{const}$, то

$$\varphi = \frac{M_k l S}{4f^2 G \delta}. \quad (37)$$

Если стержень имеет тонкостенное сечение, подобное изображенному на рис. 72 (замкнутый профиль с углами), то

можно применять приведенные выше формулы, однако следует иметь в виду, что в точках A напряжения выше расчетных. Чем меньше радиус r , тем оно больше. В точках B напряжения малы и в случае, если внешние углы не скруглены, то $\tau_B = 0$.

7. РАСЧЕТ ВИНТОВЫХ ПРУЖИН С МАЛЫМ ШАГОМ ВИТКОВ, НАГРУЖЕННЫХ ОСЕВЫМИ СИЛАМИ

На рис. 73 схематически изображена цилиндрическая винтовая пружина круглого поперечного сечения, растягиваемая силами P .

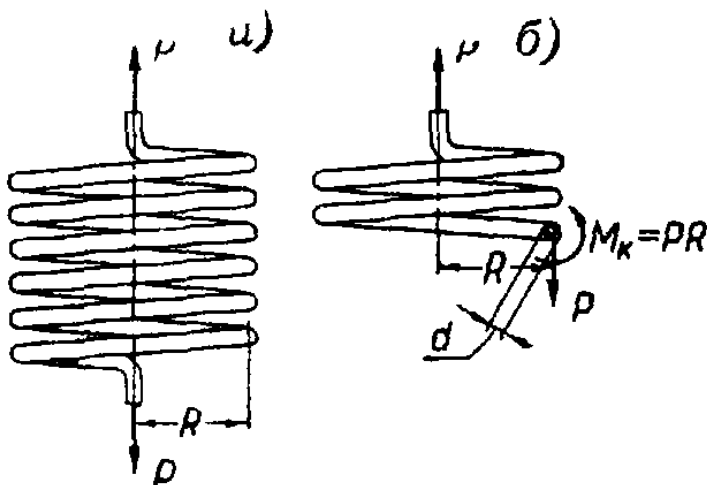


Рис. 73. Винтовая пружина.



Рис. 74. Развертка винтовой пружины.

В зависимости от величины угла подъема α витка (рис. 74) пружины делятся на малоподъемистые и пружины с большим шагом. Малоподъемистыми называются пружины, у которых угол подъема витков не превышает $12\text{--}15^\circ$. Здесь мы рассмотрим работу только простейших малоподъемистых винтовых пружин.

Задача расчета пружины на прочность и жесткость заключается в определении напряжений и осадки пружины под действием силы P .

Обозначим (рис. 73):

R и D — радиус и диаметр винтовой оси пружины;

r и d — радиус и диаметр поперечного сечения стержня пружины;

n — число витков;
 G — модуль сдвига.

Расстояние между осями проволоки двух смежных витков называется шагом.

Для малоподъемистых пружин можно принять допущение, что сечение пружины плоскостью, проходящей через ее ось, совпадает с поперечным сечением витка. В таком случае при рассмотрении равновесия верхней части пружины (см. рис. 73, б) получим, что в любом поперечном сечении каждого витка действует поперечная сила $Q=P$ и крутящий момент $M_k=PR$, т. е. пружина работает на срез и кручение. Условно принимают, что касательные напряжения от поперечной силы равномерно распределены по поперечному сечению пружины.

Эпюры распределения напряжений от поперечной силы и крутящего момента показаны на рис. 75, а и б.

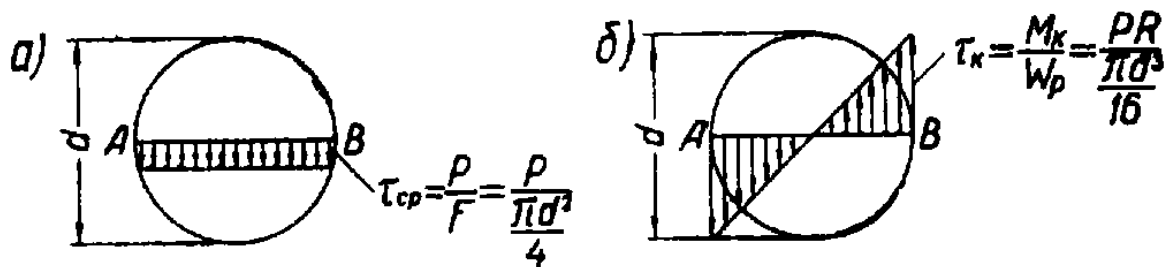


Рис. 75. Распределение напряжений в поперечном сечении пружины от поперечной силы и крутящего момента.

На внутренней поверхности пружины в точке A направления τ_k и τ_{cp} совпадают, так что здесь получается наибольшее касательное напряжение, имеющее величину:

$$\tau_{max} = \tau_k + \tau_{cp} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (38)$$

При малом отношении $\frac{d}{R}$ второе слагаемое в скобках достаточно мало по сравнению с единицей и им можно пренебречь. В этом случае формула (38) принимает вид:

$$\tau_{max} = \tau_k = \frac{16PR}{\pi d^3}, \quad (39)$$

т. е. такие пружины рассчитываются только на одно кручение. Условие прочности в этом случае будет:

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \leq [\tau]. \quad (40)$$

По этой формуле можно подобрать диаметр витка пружины, если задаться диаметром пружины, или диаметр пружины, если задаться диаметром витка.

В случае, если сечение стержня пружины квадратное или иной формы, необходимо в формуле (7) заменить W_p на W_k (см. таблицу 21) и соответственно преобразовать последующие формулы.

Винтовые пружины должны сочетать прочность с большой деформативностью, поэтому они изготавливаются из лучших сортов закаленной стали, для которых допускаемое напряжение $[\tau]$ достигает 4 000—5 000 кг/см² и выше. При переменной нагрузке допускаемое напряжение значительно снижается (на 30—65%).

Осадка или удлинение винтовой цилиндрической пружины из стержня круглого профиля определяется формулой:

$$\lambda = \frac{2PRn}{Gr^2} \left(\frac{2R^2}{r^2} + 1 \right). \quad (41)$$

Второй член в скобках, зависящий от деформации сдвига, очень мал по сравнению с первым, зависящим от деформации кручения, поэтому обычно им пренебрегают и осадку пружины находят только под действием крутящего момента M_k по формуле:

$$\lambda = \frac{4PR^3n}{Gr^4}. \quad (42)$$

При других формах поперечного сечения осадка пружины:

$$\lambda = \frac{2\pi PR^3n}{GJ_k}, \quad (43)$$

где J_k — момент инерции при кручении берется из таблицы 21.

Более точный расчет пружин с учетом кривизны витков, изгиба стержня пружины, продольных деформаций и т. д.

можно вести по тем же формулам (39) и (42), но с поправкой, зависящей от отношения $\frac{D}{d}$.

Итак, уточненные формулы расчета пружин имеют вид:

$$\tau_{max} = k_1 \frac{16PR}{\pi d^3}; \quad (44)$$

$$\lambda = k_2 \frac{4PR^3n}{Gr^4}. \quad (45)$$

Значения поправочных коэффициентов приведены в таблице 23.

Таблица 23

Поправочные коэффициенты k_1 и k_2

D/d	3	4	5	6	8	10
k_1	1,58	1,40	1,31	1,25	1,18	1,14
k_2	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05

Из таблицы видно, что поправки наиболее существенны для пружин из толстой проволоки.

Коническая круглая винтовая пружина

На практике (в приборостроении) иногда применяются конические винтовые пружины. Схема этой пружины приведена на рис. 76. Такая пружина обладает большей устойчивостью, чем соответствующая цилиндрическая, и если подобную пружину навивать таким образом, чтобы при сжатии витки ее входили один в другой, то она может быть сжата до толщины проволоки, что иногда является крайне существенным.

Винтовая линия конической пружины в плане имеет вид спирали (рис. 77), уравнение которой:

$$R = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{2\pi n} \alpha, \quad (46)$$

где: n — число витков; α — текущий угол; R — текущий радиус; R_1 и R_2 — радиусы верхнего и нижнего витков.

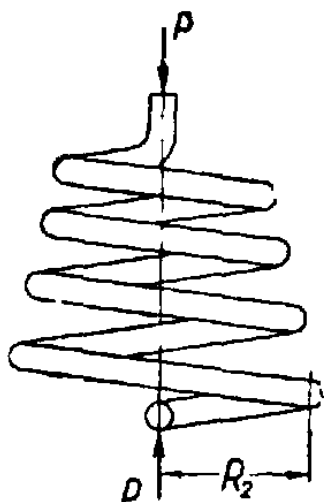


Рис. 76. Коническая круглая винтовая пружина.

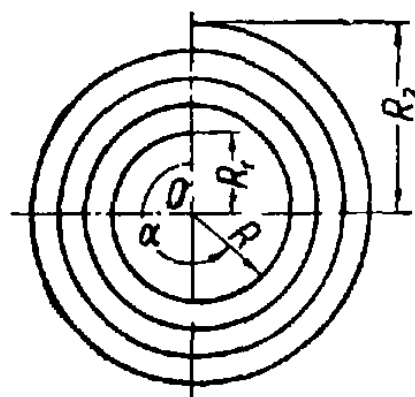


Рис. 77. Вид конической пружины в плане.

Крутящий момент в произвольном сечении стержня пружины $M_k = PR$. Наибольший крутящий момент $\max M_k = PR_2$. Наибольшие касательные напряжения определяются формулой:

$$\tau = \frac{M_k}{W_p}; \quad \tau_{\max} = \frac{\max M_k}{W_p} = \frac{16PR_2}{\pi d^3}. \quad (47)$$

Полная осадка конической винтовой пружины равна:

$$\lambda = \frac{16Pn}{d^4G} (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1). \quad (48)$$

Расчет конических винтовых пружин некруглого сечения будет отличаться только тем, что напряжения τ и угол закручивания φ должны быть выражены по формулам кручения, соответствующим данному профилю.

Глава VI. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

1. СУЩНОСТЬ ЯВЛЕНИЯ ИЗГИБА. ПОПЕРЕЧНЫЕ СИЛЫ И ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ

Явление изгиба характеризуется тем, что поперечные сечения стержня, первоначально параллельные, при деформации наклоняются друг к другу. При этом волокна стержня с выпуклой стороны удлиняются, с вогнутой — укорачиваются, а ось стержня искривляется.

Слой, волокна которого не изменяют своей длины, называется нейтральным слоем. Пересечение этого слоя с поперечным сечением называется нейтральной осью поперечного сечения. Нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Поперечный изгиб происходит тогда, когда изгибающие силы, параллельные друг другу, перпендикулярны оси стержня и лежат в плоскости, совпадающей с его осью и с одной из главных осей. Стержень, находящийся в таких условиях, обычно называется балкой.

Чистым изгибом называется такое состояние изгибаемого стержня, когда все внешние силы приводятся к одному изгибающему моменту.

Поперечные силы и изгибающие моменты

Поперечной силой в сечении балки называется алгебраическая сумма проекций на плоскость сечения сил, расположенных по одну сторону сечения

Поперечная сила считается положительной, если она стремится сдвинуть левую часть балки относительно правой вверх или правую часть балки относительно левой вниз. На рис 78 изображен характер деформаций в сечении *mn* при действии положительной и отрицательной поперечных сил.

Изгибающим моментом в данном сечении называется сумма моментов сил, лежащих по одну сторону сечения, относительно нейтральной оси сечения.

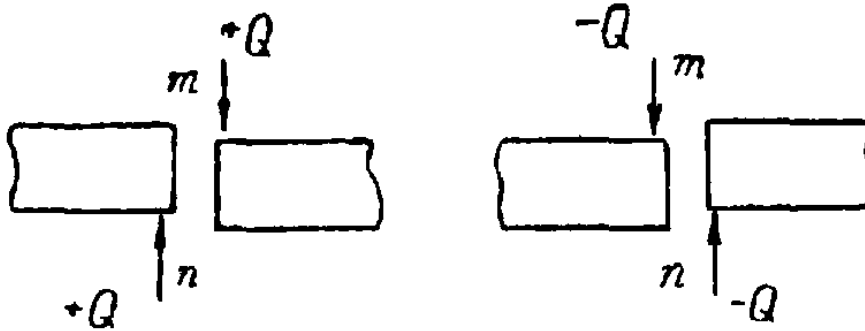


Рис. 78. Характер деформации в сечении mn при действии положительной и отрицательной поперечных сил.

Изгибающий момент принято считать положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз или стремится повернуть левую часть балки по направлению часовой стрелки, а правую часть — против часовой стрелки (рис. 79).

Зависимости между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью сплошной нагрузки q получены Д. И. Журавским в следующем виде:

$$\frac{dM}{dx} = Q; \quad \frac{dQ}{dx} = q$$

или

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q.$$

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M представляют собой графики, изображающие изменение Q или M по длине балки. При построении этих эпюр необходимо иметь в виду следующие положения:

1. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в тех сечениях, где поперечная сила равна нулю.

2. Под точкой приложения сосредоточенной силы в эпюре поперечных сил должен быть скачок на величину этой силы, а в эпюре изгибающих моментов должен быть перелом.



Рис. 79. Действие положительного изгибающего момента.

3. В местах, где приложены сосредоточенные моменты, эпюра поперечных сил не меняется, а в эпюре изгибающих моментов должен быть скачок на величину этого момента.

Пример 1. Для балки, изображенной на рис. 80, требуется построить эпюры Q и M . Величина реакции указана на рис. 80.

Решение. Переходя к построению эпюры Q , заметим, что в 1-м, 2-м и 4-м участках $q = 0$ и, следовательно, $Q = \text{const}$. Проведя сечения в этих участках, находим:

$$Q_1 = -1 \text{ т}; \quad Q_2 = -1 + 5,6 = 4,6 \text{ т};$$

$$Q_4 = -3,6 \text{ т (по правым силам)}.$$

В 3-м участке $q = \text{const}$, а поэтому Q имеет вид наклонной прямой. Найдем ординаты для граничных сечений 3-го участка.

Для сечения под силой 3 т (справа):

$$Q = 4,6 - 3 = 1,6 \text{ т}.$$

Для сечения под силой 2 т (слева):

$$Q = 1,6 - 0,8 \cdot 4 = -1,6 \text{ т}.$$

По вычисленным данным построена эпюра поперечных сил, изображенная на рис. 80.

Для построения эпюры M найдем сначала ординаты для граничных сечений всех участков. В сечении у левой опоры:

$$M_A = -1 \cdot 2 = -2 \text{ тм};$$

под грузом 3 т (на бесконечно малом расстоянии слева от груза):

$$M = -1 \cdot 4 + 5,6 \cdot 2 = 7,2 \text{ тм};$$

под грузом 3 т (на бесконечно малом расстоянии справа от груза):

$$M = -1 \cdot 4 + 5,6 \cdot 2 + 2 = 9,2 \text{ тм};$$

под грузом 2 т (справа от груза):

$$M = 3,6 \cdot 2 = 7,2 \text{ тм};$$

под грузом 2 т (слева от груза):

$$M = 3,6 \cdot 2 + 2 = 9,2 \text{ тм}.$$

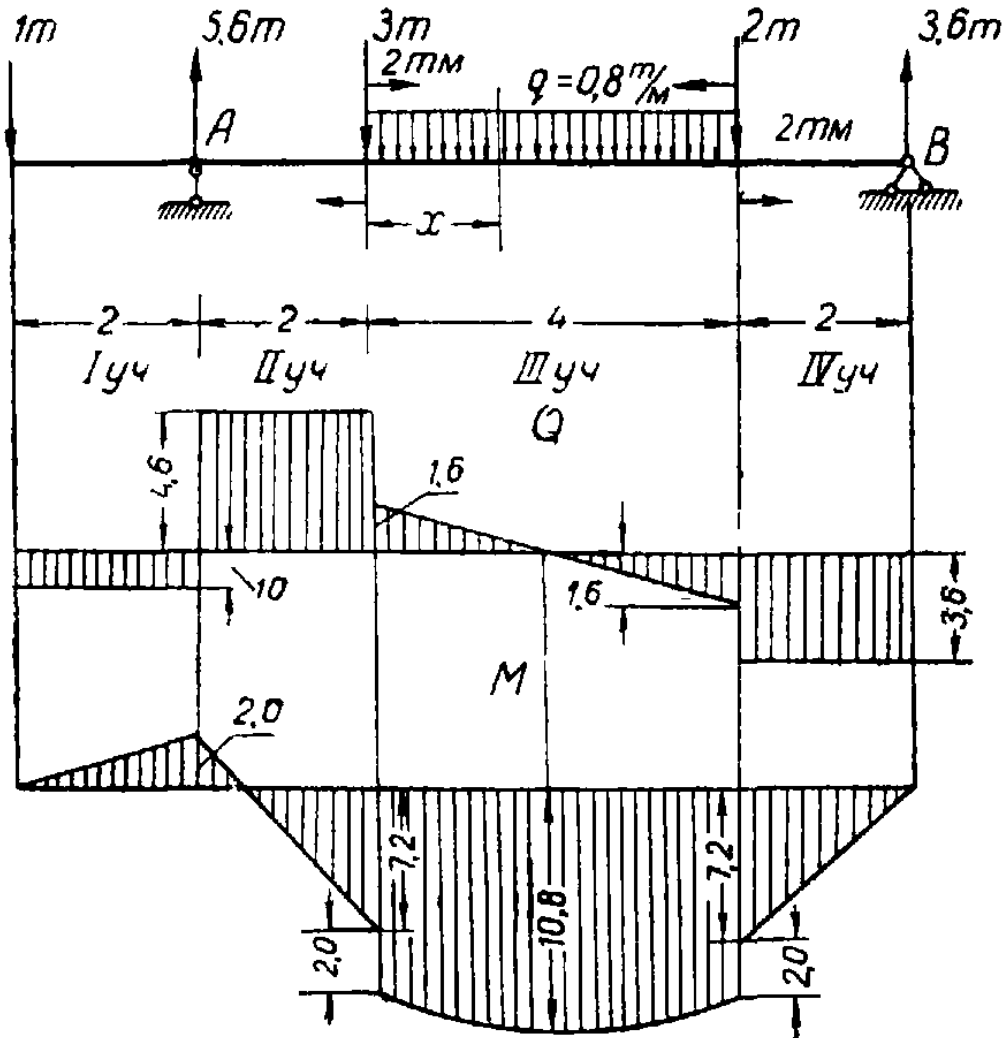


Рис. 80. Построение эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

На 3-м участке изгибающий момент изменяется по параболическому закону.

Уравнение в сечении на расстоянии x от левой границы 3-го участка:

$$\begin{aligned} M(x) &= -1(4+x) + 5,6(2+x) - 3x - 0,8 \frac{x^2}{2} + 2 = \\ &= 9,2 + 1,6x - 0,4x^2. \end{aligned}$$

По найденным значениям построена эпюра изгибающих моментов (рис. 80).

2. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ

Нормальные напряжения

При выводе уравнения нормальных напряжений принимаются следующие допущения:

1. При чистом изгибе поперечные сечения, бывшие плоскими до деформации, остаются плоскими и во время деформации (гипотеза плоских сечений).

2. Продольные волокна не давят друг на друга.

3. Деформации волокон не зависят от их положения по ширине сечения.

Помимо этих допущений, вводят еще следующие ограничения:

1. Балка должна иметь хотя бы одну плоскость симметрии, и все внешние силы должны лежать в этой плоскости.

2. Материал балки подчиняется закону Гука, причем модуль упругости при растяжении и сжатии одинаков.

3. Соотношения между размерами балки таковы, что она работает в условиях плоского изгиба без коробления или скручивания.

При отношении $\frac{h}{l} > \frac{1}{5}$ она работает не как балка, а как пластинка, и условия расчета изменяются.

Нормальные напряжения в поперечном сечении определяются по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad (1)$$

где: J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси сечения;

y — расстояние от нейтральной оси до точки, в которой определяются напряжения.

Наибольшие нормальные напряжения в сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{J} y_{max}. \quad (2)$$

В зависимости от формы сечения могут быть два случая:

а) нейтральная ось, проходящая через центр тяжести, не

лежит в середине высоты сечения. Расстояние от нейтральной оси до крайних сжатых и растянутых волокон не равны между собой. Расчет в этом случае ведется отдельно для растянутых и сжатых волокон:

$$\sigma_{1max} = \frac{M}{J} y_{1max} = \frac{M}{W_1}; \quad (3)$$

$$\sigma_{2max} = \frac{M}{J} y_{2max} = \frac{M}{W_2}, \quad (4)$$

где $W = \frac{J}{y_{max}}$ — момент сопротивления сечения;

б) центр тяжести расположен в середине высоты сечения. В этом случае

$$W_1 = W_2 = \frac{J}{\left(\frac{h}{2}\right)} = W,$$

поэтому $\sigma_{max} = \frac{M}{W}$. (5)

Значения моментов инерции J и моментов сопротивления W даны в таблице 13.

Расчетное уравнение на прочность (по крайним волокнам в опасном сечении балки) имеет следующий вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma]. \quad (6)$$

Подбор сечения балки производится по максимальному изгибающему моменту путем вычисления необходимого момента сопротивления:

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (7)$$

Частные случаи сечений

а) Сечение круглое сплошное. Диаметр сечения:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{M_{max}}{[\sigma]}} \cong 2,17 \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{[\sigma]}}. \quad (8)$$

б) Сечение круглое полое. Внешний диаметр:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32}{\pi} \frac{M_{max}}{[\sigma](1-\alpha^4)}} \cong 2,17 \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{(1-\alpha^4)[\sigma]}}, \quad (9)$$

где $\alpha = \frac{d}{D}$.

в) Сечение прямоугольное. Высота сечения (размер сечения в плоскости изгиба):

$$h = \sqrt[3]{\frac{6M_{max}}{\alpha[\sigma]}} \cong 1,82 \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{\alpha[\sigma]}}, \quad (10)$$

где $\alpha = \frac{b}{h}$.

г) При подборе сечений прокатных профилей по необходимому моменту сопротивления в таблицах сортамента подбирается номер профиля (см. таблицы в главе IV).

Если размеры сечения известны, допускаемый изгибающий момент можно определить по формуле:

$$M = W [\sigma]. \quad (11)$$

Величина допускаемой нагрузки определяется через M_{max} по эпюре изгибающих моментов путем сравнения M_{max} с полученным допускаемым моментом по формуле (11).

Формулы (1—11) применимы и для сечений, не имеющих оси симметрии, если плоскость действия сил совпадает с главной центральной осью инерции сечения.

Касательные напряжения

Касательные напряжения τ при изгибе балки возникают в тех сечениях, в которых поперечная сила не равна нулю.

При определении касательных напряжений изгиба: 1) пренебрегают искривлениями сечений; 2) предполагают, что по ширине сечения напряжения распределяются равномерно.

Касательные напряжения при изгибе определяются по формуле:

$$\tau = \frac{QS_y}{Jb_y}, \quad (12)$$

где: Q — поперечная сила в сечении;
 J — момент инерции сечения относительно его нейтральной оси;
 b_y — ширина поперечного сечения на расстоянии y от нейтральной оси;
 S_y — статический момент относительно нейтральной оси части сечения, лежащей выше (или ниже) уровня, на котором определяется напряжение.

А Прямоугольное сечение. Поперечная сила совпадает с осью симметрии сечения. В этом случае касательные напряжения на расстоянии y от нейтральной оси вычисляются по формуле:

$$\tau = \frac{QS_y}{Jb_y} = \frac{3Q}{2bh} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Распределение касательных напряжений по высоте бруса изображено на рис. 81.

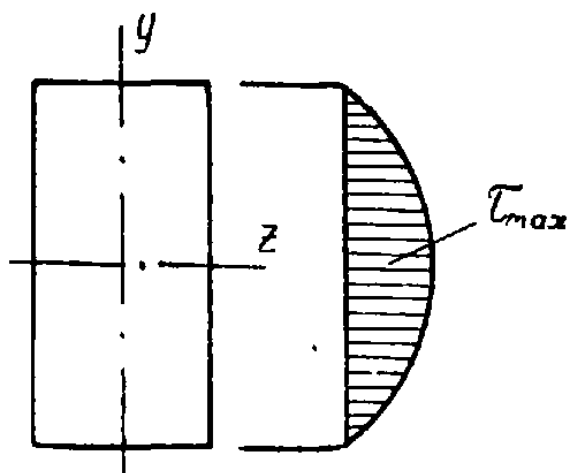


Рис. 81. Распределение касательных напряжений по высоте бруса для прямоугольного и поперечного сечений.

Максимальное касательное напряжение равно:

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2F}. \quad (14)$$

Б. Круглое сечение. Напряжения в точках контура направлены по касательным к контуру.

Напряжение в промежуточной точке слоя mn определяется по формуле:

$$\tau = \frac{QS}{Jb_y \cos \alpha}, \quad (15)$$

где: α — угол, образуемый осью симметрии и направлением касательного напряжения (рис. 82), а $b_y = mn$.

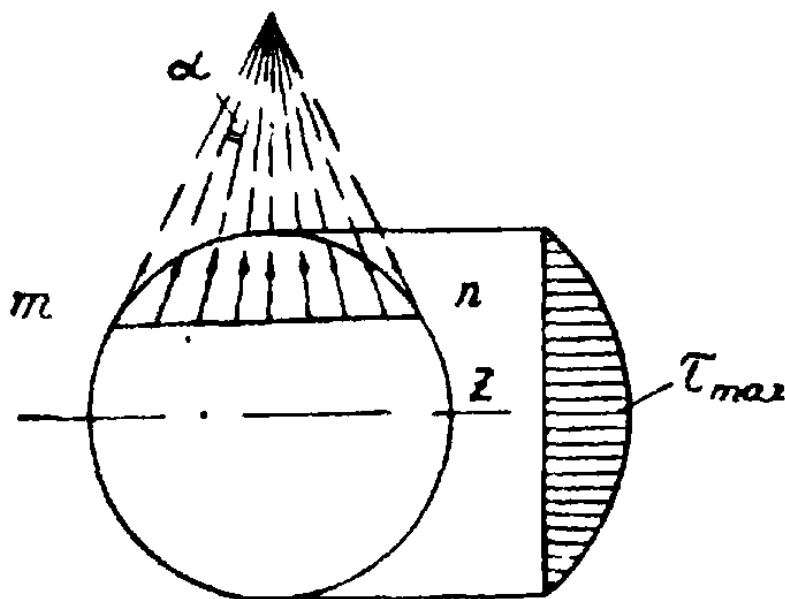


Рис. 82 Распределение касательных напряжений по высоте бруса для круглого сечения.

Составляющая касательного напряжения, параллельная поперечной силе Q :

$$\tau = \frac{QS}{Jb_y} = \frac{Q(r^2 - y^2)}{3J}. \quad (16)$$

Максимальное напряжение:

$$\tau_{max} = \frac{4Q}{3F}. \quad (17)$$

В. Двутавровое сечение (рис. 83). Напряжение определяется по обычной формуле:

$$\tau = \frac{QS_y}{Jb_y}. \quad (18)$$

Характер изменения касательных напряжений по высоте сечения показан на рис. 83.

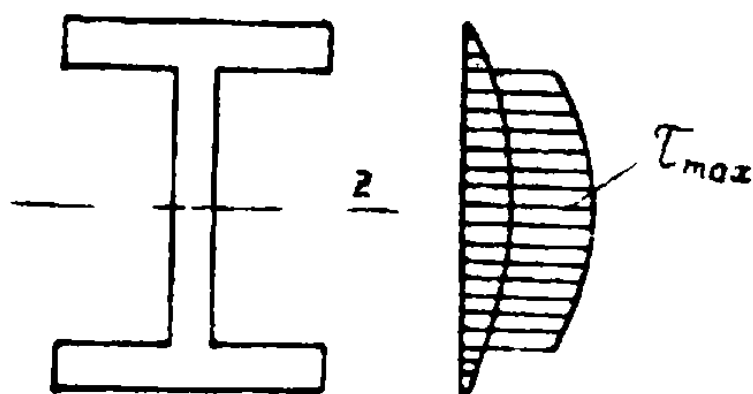


Рис. 83 Распределение касательных напряжений по высоте бруса для двутаврового сечения.

Максимальное напряжение можно найти по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{Q}{b_{ст}m},$$

где: $b_{ст}$ — ширина стенки;

$m = \frac{J}{S_0}$ — плечо внутренней пары, которое дается в таблицах нормального сортамента.

Проверка прочности балки на касательные напряжения производится по условию:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_0}{J b_0} \leq [\tau]; \quad (19)$$

где: S_0 — статический момент части сечения, лежащей выше нейтральной оси;

b_0 — ширина сечения на нейтральной оси;

$[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение.

Главные напряжения при изгибе

Формулы главных нормальных и наибольших касательных напряжений, а также угла, составленного главными площадками с осью балки, имеют следующий вид:

$$\sigma_{\min}^{max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (20)$$

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (21)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\sigma_{min}^{max}}{\tau}. \quad (22)$$

При проверке прочности балки по главным напряжениям следует:

а) найти сечение балки, в котором одновременно M и Q достигают большой величины;

б) найти в этом сечении точку, где одновременно σ и τ достигают большой величины;

в) проверить, соблюдены ли для данной точки условия прочности, которые имеют следующий вид:

По третьей теории прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (23)$$

По четвертой теории прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (24)$$

Пример 2. Требуется подобрать двутавровое сечение для балки, несущей два сосредоточенных груза по 20 т (рис. 84), и проверить прочность в месте перехода от полки к стенке. Материал Ст. 3. $[\sigma] = 1600 \text{ кг/см}^2$; $M_{max} = 8,4 \text{ тм}$; $Q_{max} = 20 \text{ т}$. Эпюры показаны на рис. 84.

Решение. Подбираем сечение. Момент сопротивления равен:

$$W = \frac{840\,000}{1\,600} = 525 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 27 *б*, у которого $W = 509 \text{ см}^3$.

$$\sigma_{max} = \frac{840\,000}{509} = 1\,650 \text{ кг/см}^2.$$

Перенапряжение составляет $3,1\% < 5\%$.

Касательные напряжения у нейтральной осн:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{b_{ст} t} = \frac{20\,000}{1,05 \cdot 22,9} = 833 \text{ кг/см}^2 < 1\,050.$$

Переходим к проверке прочности в месте примыкания полки к стенке. Как видно из эпюр M и Q , это следует сделать для сечения под одним из грузов, например левым. Размеры сечения показаны на рис. 85.

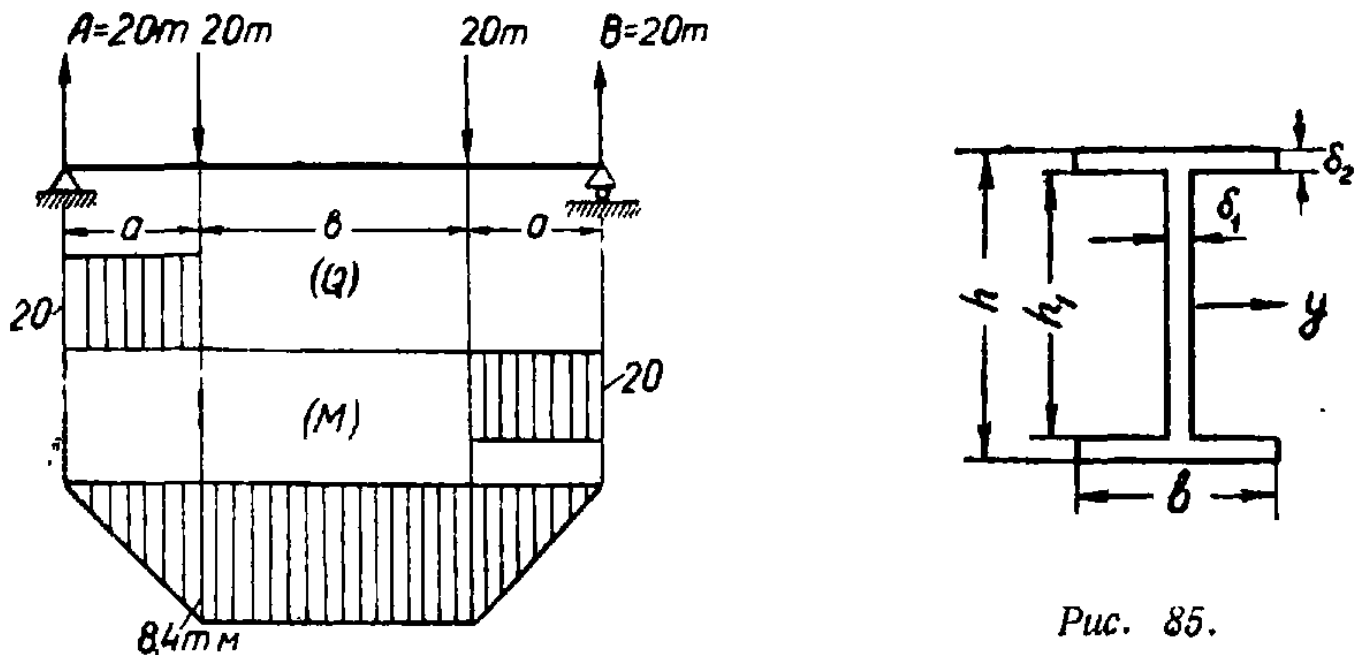


Рис. 85.

Рис. 84. Схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Статический момент полки относительно нейтральной оси:

$$S = 12,4 \cdot 1,37 \cdot 12,81 = 218 \text{ см}^3.$$

Нормальные и касательные напряжения у примыкания полки к стенке равны:

$$\sigma = \pm \frac{840\,000 \cdot 12,1}{6\,870} = \pm 1\,480 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau = \frac{20\,000 \cdot 218}{6\,870 \cdot 1,05} = 605 \text{ кг/см}^2.$$

Приведенное напряжение по четвертой теории прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{1\,480^2 + 3 \cdot 605^2} = 1\,813 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. на 13,3% превосходит допускаемое. Таким образом, двутавр № 27 *b* не соответствует условию прочности.

3. СОСТАВНЫЕ БАЛКИ

При расчете составных балок предполагается, что соединительные элементы (заклепки, шпонки и т. п.) обеспечивают жесткую связь отдельных частей, вследствие чего балки рабо-

тают, как одно целое. Ослабление сечения отверстиями и вырезами учитывается путем вычитания из полного момента инерции моментов инерции площадей отверстий и вырезов.

Для деревянных балок на шпонках момент $W_{\text{нетто}}$ составного сечения уменьшается на 10% при балке из двух брусьев и на 20% — при балке из трех брусьев.

При расчете применяются те же формулы напряжений, что и в сплошных балках. Расчет составных балок показан на примерах.

Пример 3. Сварная балка пролетом 6 м, несущая сплошную равномерную нагрузку, состоит из вертикальной стенки и двух пар горизонтальных листов, сваренных между собой и приваренных к стенке фланговыми швами. Все размеры в мм показаны на рис. 86. Требуется рассчитать размеры швов, исходя из наибольшей допустимой нагрузки q . Материал Ст. 3.

$$[\sigma] = 1\,600 \text{ кг/см}^2; \quad [\tau] = 1\,050 \text{ кг/см}^2.$$

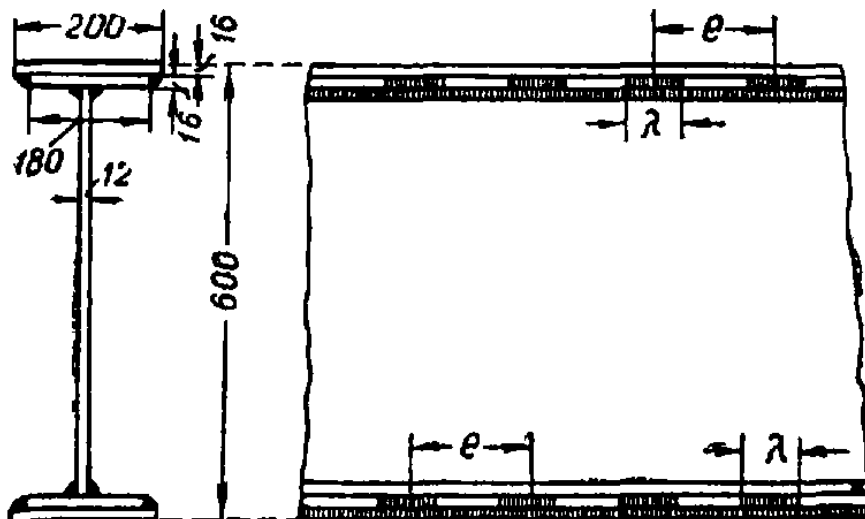


Рис. 86.

Для наплавленного металла шва $[\tau] = 1\,100 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Определим сначала наибольшую интенсивность q сплошной нагрузки, допустимой для балки.

Момент инерции сечения:

$$J = \frac{1,2 \cdot 53,6^3}{12} + 2 \cdot (18 \cdot 1,6 \cdot 27,6^2 + 20 \cdot 1,6 \cdot 29,2^2) = 113\,901 \text{ см}^4.$$

Мы здесь пренебрегаем моментом инерции каждого листа относительно его центральной оси.

Момент сопротивления:

$$W = \frac{113\,901}{30} = 3\,797 \text{ см}^3.$$

Наибольший изгибающий момент:

$$M_{max} = 3\,797 \cdot 1\,600 = 6\,075\,000 \text{ кгсм} = 60,8 \text{ тм}.$$

Интенсивность нагрузки определим из равенства:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = 60,8 \text{ тм},$$

откуда $q = 13,5 \text{ тм}$.

Наибольшая поперечная сила (в сечениях у опор):

$$Q_{max} = \frac{ql}{2} = 40,5 \text{ т}.$$

При изгибе балки листы будут стремиться сдвинуться относительно стенки, вследствие чего по плоскостям ab и cd соединения швов со стенкой (рис. 87) возникнут касательные напряжения, которые могут быть определены по формуле:

$$\tau = \frac{QS}{Jb},$$

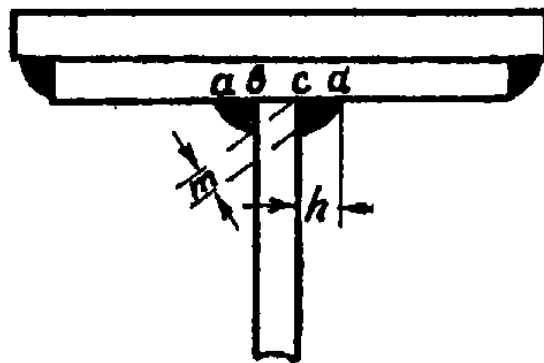


Рис. 87. Сварная балка.

где: S — статический момент сечения горизонтальных листов относительно нейтральной оси;

b — расчетная ширина сечения, т. е. сумма отрезков ab и cd или сумма толщин обоих швов.

Расчетная толщина шва $m = 0,7 h$, где h — толщина шва (рис. 87). Поэтому вместо b следует подставить:

$$2 \cdot 0,7 h = 1,4 h.$$

Приравняв напряжение τ допускаемому значению $[\tau]_в = 1\,100 \text{ кг/см}^2$, определим необходимую толщину шва.

Статический момент двух листов:

$$20 \cdot 1,6 \cdot 29,2 + 18 \cdot 1,6 \cdot 27,6 = 935 + 795 = 1730 \text{ см}^3,$$

$$\tau = \frac{35100 \cdot 1730}{98800 \cdot 1,4 h} \leq 1100,$$

откуда $h = 0,4 \text{ см}$.

Принимаем $h = 4 \text{ мм}$. Подобным же образом определим толщину швов, соединяющих между собой горизонтальные листы, вводя в расчет статический момент верхнего листа:

$$\tau = \frac{35100 \cdot 935}{98800 \cdot 1,4 h_1} \leq 1100,$$

откуда $h_1 = 0,22 \text{ см}$.

Полученная толщина менее допускаемой нормами минимальной толщины — 4 мм. Поэтому переходим к прерывистому (шпоночному) шву большей толщины. На практике длина шпонки λ принимается обычно 6 см и шаг шпонок e около 3 λ (см. рис. 86). Задаваясь $\lambda = 6 \text{ см}$ и $e = 20 \text{ см}$, найдем сдвигающее усилие, которое должно быть воспринято парой шпонок, считая для упрощения, что касательные напряжения остаются постоянными по длине балки:

$$T = \frac{QS}{J} e = \frac{40500 \cdot 935}{113901} \cdot 20 = 6643 \text{ кг}.$$

Приравнивая усилие T сопротивлению пары шпонок срезу, найдем толщину шва:

$$1,4 h \cdot 6 \cdot 1100 = 6643; \quad h = 0,7 \text{ см}.$$

Принимаем $h = 0,7 \text{ см}$. Действительную длину шпонки берем 7 см, добавляя 1 см на усадочные раковины.

Проверим касательные напряжения в стенке балки. Статический момент полусечения:

$$S_0 = 1730 + 26,8 \cdot 1,2 \cdot 13,4 = 2160 \text{ см}^3.$$

Плечо внутренней пары:

$$m = \frac{J}{S_0} = \frac{113901}{2160} = 42,7 \text{ см};$$

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{b_{ст} m} = \frac{40500}{1,2 \cdot 42,7} = 790 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. значительно ниже допускаемого.

Принятый шаг шпонок e может быть увеличен к середине пролета в соответствии с уменьшением поперечной силы, однако часто принимают шаг шпонок одинаковым по всей длине балки,

Пример 4. Рассчитать составную сосновую балку из двух брусьев пролетом $l = 8$ м, нагруженную тремя грузами $P = 1,5$ т (рис. 88).

Решение. Опорные реакции $A = B = 1,5 P = 2\ 250$ кг. Под средним грузом $M_{max} = 2\ 250 \cdot 4 - 1\ 500 \cdot 2 = 6\ 000$ кгм. В крайних участках балки

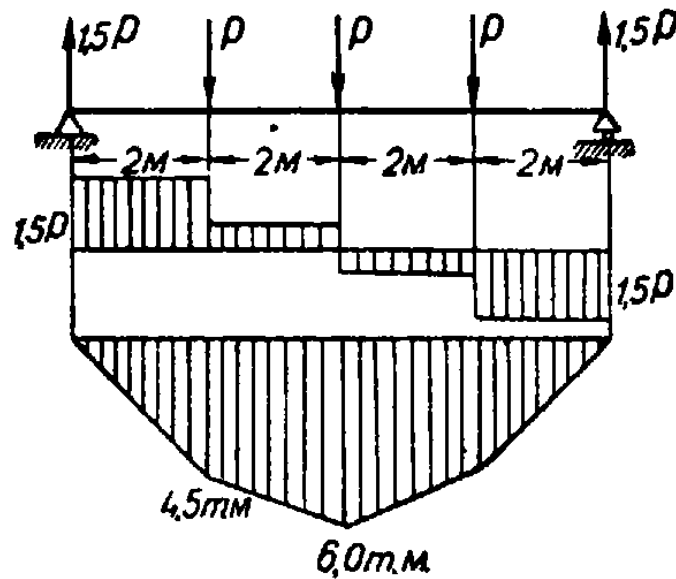


Рис. 88. Схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

$Q_{max} = 1,5 P = 2\ 250$ кг. При допуске напряжении $[\sigma] = 100$ кг/см² необходимый момент сопротивления:

$$W = \frac{600\ 000}{100} = 6\ 000 \text{ см}^3.$$

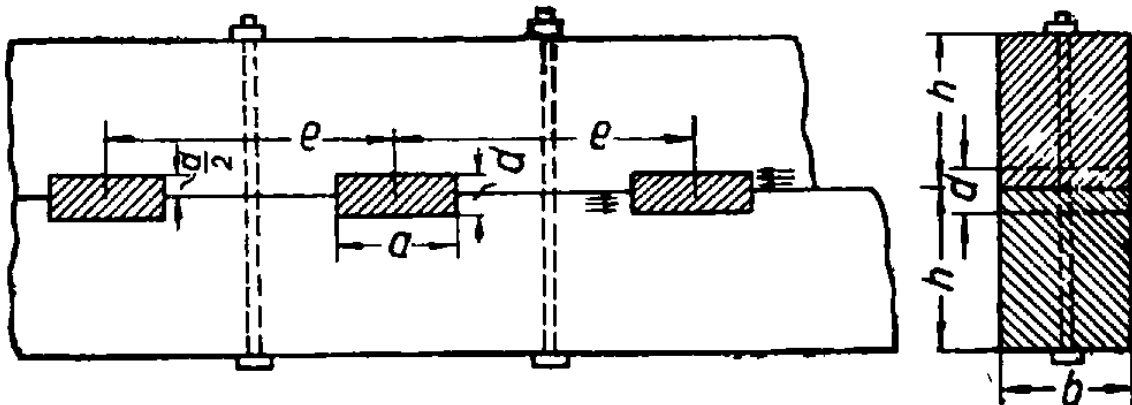


Рис. 89. Составная деревянная балка из двух брусьев.

Принимаем сечение из двух брусьев 20×24 см (рис. 89).

Учитывая ослабления отверстием для болта диаметром 20 мм, в расчет вводим ширину сечения $b = 20 - 2 = 18$ см:

$$W_{\text{нетто}} = \frac{b(2h)^2}{6} = \frac{18 \cdot 48^2}{6} = 6\ 900 \text{ см}^3.$$

Расчетный момент сопротивления:

$$W_{\text{расч}} = 0,9 \cdot 6900 = 6200 \text{ см}^3 > 6000 \text{ см}^3.$$

Обозначим через e расстояние между осями шпонок. В крайних участках балки при постоянной поперечной силе сдвигающее усилие на одну шпонку будет:

$$T = \frac{3 Q e}{2 (2h)} = \frac{3 \cdot 2250 e}{2,48} = 70,5e.$$

Это усилие не должно превышать сопротивления шпонки скалыванию и смятию.

Примем глубину врезки $\frac{d}{2} = 3 \text{ см}$ (рис. 89).

При допускаемом напряжении на смятие дуба поперек волокон $[\sigma]_{\text{см}} = 50 \text{ кг/см}^2$ имеем условие:

$$T \leq [\sigma]_{\text{см}} b \frac{d}{2}$$

или $70,5 e \leq 50 \cdot 20 \cdot 3$,
откуда $e = 42,5 \text{ см}$. Принимаем $e = 40 \text{ см}$.

Ширина шпонки a определяется из условия равной прочности ее на смятие и скалывание. При допускаемом напряжении на скалывание дуба поперек волокон $[\tau] = 10 \text{ кг/см}^2$ отношение $\frac{a}{d} = 2,5$:

$$a = 6 \cdot 2,5 = 15 \text{ см}.$$

Расстояние между шпонками в свету:

$$e - a = 40 - 15 = 25 \text{ см},$$

что обеспечивает прочность на скалывание выступающих частей соснового бруса.

4. БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Балки равного сопротивления изгибу

Форма балки равного сопротивления определяется условием:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M(x)}{W(x)} = \text{const}, \quad (25)$$

где $M(x)$ и $W(x)$ — изгибающий момент и момент сопротивления в любом сечении балки.

Момент сопротивления в любом сечении:

$$W_{(x)} = W_{max} \frac{M(x)}{M_{max}}, \quad (26)$$

$$\text{а } W_{max} = \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (27)$$

Наименьший размер сечения у концов балки, где изгибающие моменты приближаются к нулю, определяется из условия прочности по касательным напряжениям:

а) для прямоугольного сечения с размерами b и h

$$b_0 h_0 = \frac{3 Q_{max}}{2 [\tau]}; \quad (28)$$

б) для балки круглого сечения

$$d_0 = 4 \sqrt[3]{\frac{Q_{max}}{3\pi [\tau]}}. \quad (29)$$

В таблице 24 приводятся наиболее употребительные формы таких балок.

Линии, проведенные пунктиром, изображают близкую к действительности форму этих балок, ограниченную касательными.

Балки со ступенчатым изменением сечения

Балки равного сопротивления на практике обычно заменяются ступенчатыми балками.

Наименьший диаметр балки круглого сечения определяется по формуле (29).

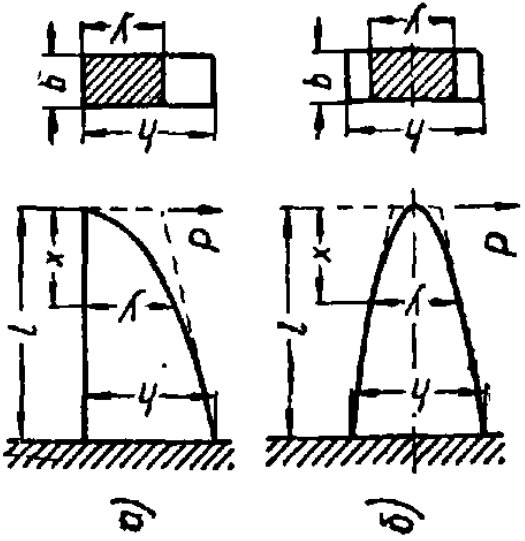
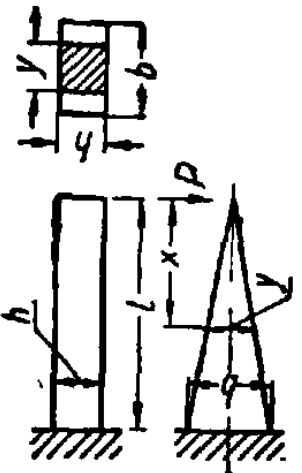
Наибольший диаметр:

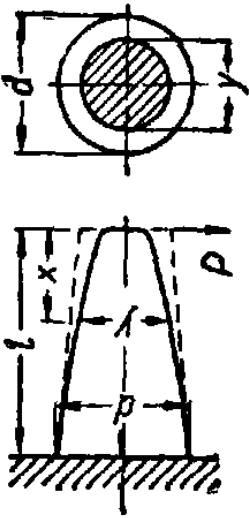
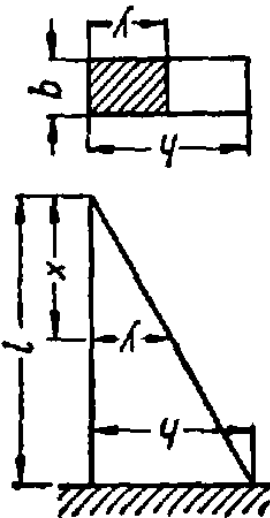
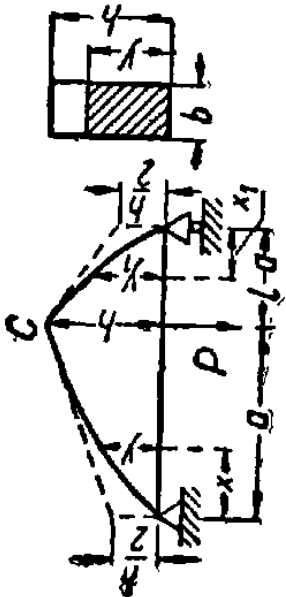
$$d_{max} = \sqrt[3]{\frac{32 M_{max}}{\pi [\tau]}}. \quad (30)$$

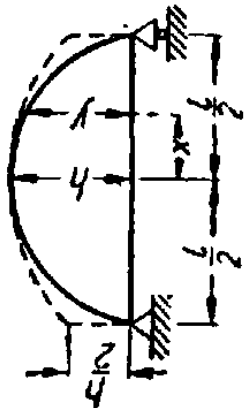

Промежуток между сечениями с диаметром d_0 и d_{max} разбивается еще на ряд участков с диаметрами d_1 , d_2 и d_3 . Определяются моменты сопротивления сечений, соответствующие каждому диаметру. Умножив последние на допускаемое напряжение, получим допускаемые изгибающие моменты для каждого участка.

Балки равного сопротивления изгибу

[σ] — допускаемые напряжения на изгиб; f — стрела прогиба

Продольный разрез и поперечное сечение балки	Изменение поперечного сечения	Форма контура продольного разреза	Формула для расчета размеров поперечных сечений
I. Балка закреплена одним концом. Сосредоточенная сила P на конце балки			
	<p>Прямоугольники одинаковой ширины b и переменной высоты y</p>	<p>1 а) Верхнее очертание — прямая, нижнее — квадратная парабола</p> <p>1 б) Квадратная парабола</p>	$y^2 = \frac{6P x}{b [\sigma]}$ $h = \sqrt{\frac{6Pl}{b [\sigma]}}$ $f = \frac{8P}{Eb} \left(\frac{l}{h} \right)^3$
	<p>Прямоугольник одинаковой высоты h и переменной ширины y</p>	<p>Прямые линии</p>	$y = \frac{6P}{h^2 [\sigma]} x$ $b = \frac{6Pl}{h^2 [\sigma]}$ $f = \frac{6P}{Eb} \left(\frac{l}{h} \right)^3$

<p>Продольный разрез и поперечное сечение балки</p>		<p>Изменение поперечного сечения</p>	<p>Круги диаметром y</p>	<p>Форма контура продольного разреза</p>	<p>Кубическая парабола</p>	<p>Формула для расчета размеров поперечных сечений</p>
<p>II. Балка закреплена одним концом. Нагрузка q, равномерно распределенная по длине балки</p> 		<p>Прямоугольники одинаковой ширины и переменной высоты y</p>	<p>Прямые линии</p>	$y^3 = \frac{32P}{\pi [\sigma]} x$ $d = \sqrt[3]{\frac{32Pl}{\pi [\sigma]}}$ $y = x \sqrt{\frac{3q}{b [\sigma]}}$ $h = l \sqrt{\frac{3q}{b [\sigma]}}$		
<p>III. Балка на двух опорах. Сосредоточенная сила P в точке C</p> 		<p>Прямоугольники одинаковой ширины b и переменной высоты y</p>	<p>Верхнее очертание — две квадратные параболы</p>	$y^2 = \frac{6P(l-a)}{bl [\sigma]} x$ $y_1^2 = \frac{6Pa}{bl [\sigma]} x_1$ $h = \sqrt{\frac{6P(l-a)a}{bl [\sigma]}}$		

Продольный разрез и поперечное сечение балки	Изменение поперечного сечения	Форма контура продольного разреза	Формула для расчета размеров поперечных сечений
	<p>IV. Балка на двух опорах. Нагрузка q, равномерно распределенная по длине балки</p> <p>Прямоугольники одинаковой ширины b и переменной высоты y</p>	<p>Верхнее очертание — эллипс</p>	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{3ql^2} = 1$ $h = \sqrt{\frac{3ql^2}{4b[\sigma]}}$ $f = \frac{1}{64} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$
	<p>V. Подвижная сосредоточенная сила P</p> <p>Прямоугольники одинаковой ширины b и переменной высоты y</p>	<p>Верхнее очертание — эллипс</p>	$\frac{x^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{3Pl} = 1$ $h = \sqrt{\frac{3Pl}{2b[\sigma]}}$

5. УПРУГАЯ ЛИНИЯ

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному к оси балки, называется прогибом балки в этом сечении.

Кривая, в которую обращается ось балки после приложения нагрузки, называется упругой линией, при условии, если напряжения балки не больше предела упругости.

Угол θ , на который каждое сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Уравнение упругой линии в общей форме имеет следующий вид:

$$y = \varphi(x). \quad (31)$$

По своей физической сущности упругая линия должна быть кривой непрерывной и плавной.

Так как на практике прогибы балки обычно малы, то θ бывают очень малыми углами, обычно не больше 1° . В этом случае:

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \quad (32)$$

т. е. угол поворота сечения равен первой производной по x от прогиба y в этом сечении.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси

Кривизна изогнутой оси балки определяется по формуле:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (33)$$

где ρ — радиус кривизны участка изогнутой оси балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси или упругой линии при направлении оси y вверх имеет следующий вид:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}} = \frac{M(x)}{EJ}, \quad (34)$$

Для большинства практических задач в уравнении (34) членом $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ввиду его малости по сравнению с единицей пренебрегают. При этом получается приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M(x). \quad (35)$$

Последовательным интегрированием дифференциального уравнения изогнутой оси находят уравнение углов поворота:

$$EJ \frac{dy}{dx} = EJ\theta = \int M(x) dx + C$$

и уравнение прогибов:

$$EJy = \int dx \int M(x) dx + Cx + D, \quad (36)$$

где C и D — постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий балки и граничных условий ее участков.

Определение деформации методом начальных параметров

Этот метод является развитием предыдущего и отличается от него тем, что постоянные интегрирования определяются в зависимости от условия в начальном сечении балки.

Уравнение упругой линии, выраженное через начальные параметры, принимает следующий вид:

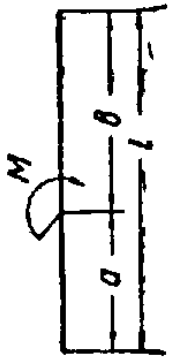
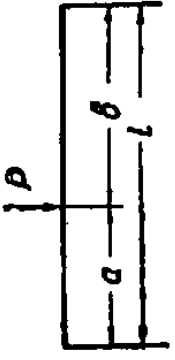
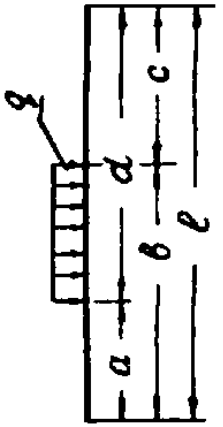
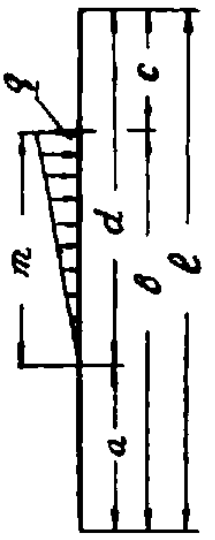
$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{Q_0 x^3}{6} + f(x), \quad (37)$$

где: y_0 , θ_0 , Q_0 и M_0 — соответственно прогиб, угол поворота, поперечная сила и изгибающий момент в начале отсчета;

$f(x)$ — влияние всех типов нагрузок, которые расположены правее начального сечения.

В таблице 25 приводятся значения $f(x)$ и ее производных для различных случаев загрузки.

$f(x)$ и ее производные

Виды нагрузок			
			
$f(x)$	$\frac{M(x-a)^2}{2}$ —	$\frac{P(x-a)^3}{6}$ —	$-\frac{q(x-a)^4}{24}$ $-\frac{q(x-a)^4}{24}$ $+\frac{q(x-b)^4}{24}$
$f'(x)$	$M(x-a)$ —	$\frac{P(x-a)^2}{2}$ —	$-\frac{q(x-a)^3}{6}$ $-\frac{q(x-a)^3}{6}$ $+\frac{q(x-b)^3}{6}$
			$-\frac{q(x-a)^2}{24m}$ $-\frac{q(x-a)^4}{24m}$ $+\frac{q(x-b)^4}{24m}$

	M	$-P(x-a)$	$-\frac{q(x-a)^4}{2}$	$-\frac{q(x-a)^3}{6m}$	$-\frac{q(x-a)^2}{2m}$
$f''(x)$	—	—	$-\frac{q(x-a)^2}{2} + \frac{q(x-b)^2}{2}$	$-\frac{q(x-a)^2}{6m} + \frac{q(x-b)^2}{2} + \frac{q(x-b)^3}{6m}$	
	O	$-P$	$-q(x-a)$		$-\frac{q(x-a)^2}{2m}$
$f'''(x)$	—	—	$-q(x-a) + q(x-b)$		$-\frac{q(x-a)^2}{2m} + q(x-b) +$

В таблице 26 приводятся формулы начальных параметров для частных случаев загрузки.

Имея начальные параметры для простейших схем загрузки и пользуясь принципом независимости действия сил, находим начальные параметры для любого общего случая путем суммирования отдельных влияний.

За начальное сечение следует принимать сечение, для которого $y_0 = 0$. Если балка имеет две консоли, то начало координат необходимо принять на левой опоре. При написании уравнения для правой части за Q_0 надо принять поперечную силу, соответствующую правой части, а за M_0 — момент на опоре от сил, действующих на консоли.

Для отыскания углов поворота, изгибающего момента и поперечной силы в сечении надо продифференцировать уравнение упругой линии, т. е.

$$EJy = \varphi(x); \quad (38)$$

$$EJy' = EJ\theta = \varphi'(x); \quad (39)$$

$$EJy'' = M(x) = \varphi''(x); \quad (40)$$

$$EJy''' = Q(x) = \varphi'''(x). \quad (41)$$

В таблице 27 приводятся значения наибольших углов поворота и прогибов для наиболее часто встречающихся случаев.

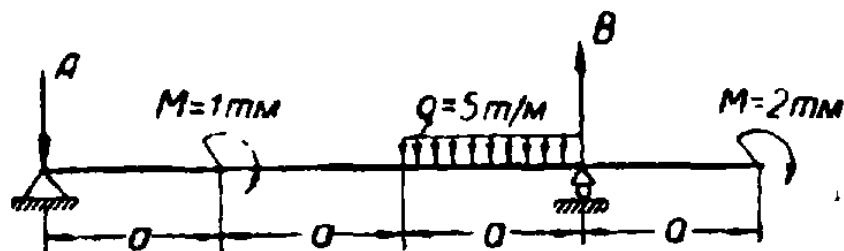


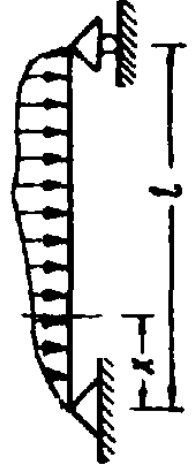
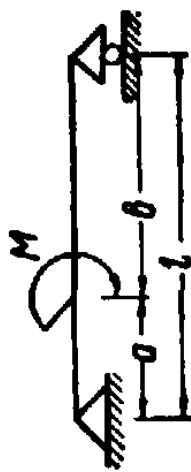

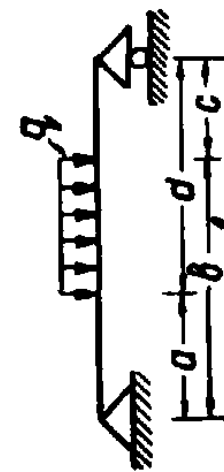
Рис. 90. Схема балки и расположение нагрузки.

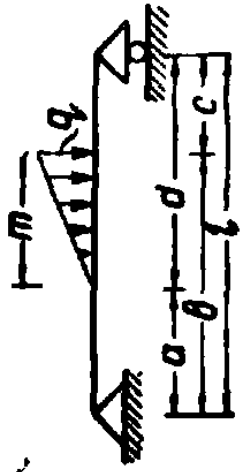
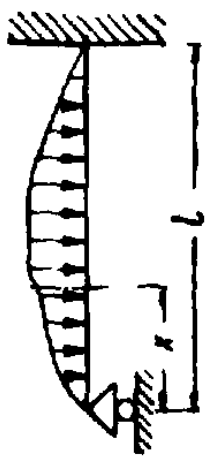
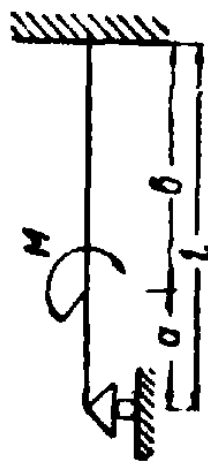
Пример 5. Для балки постоянного сечения, изображенной на рис. 90, требуется составить уравнения: упругой линии, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил.

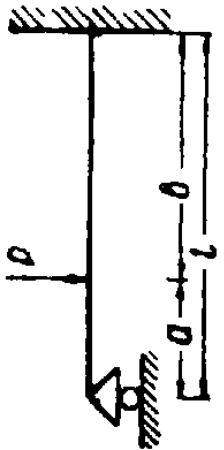
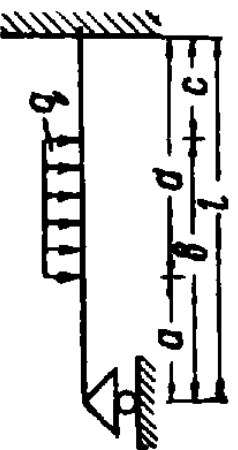
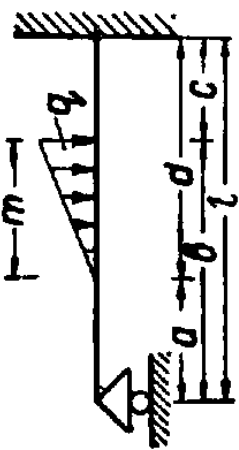
Решение. Из таблицы находим:

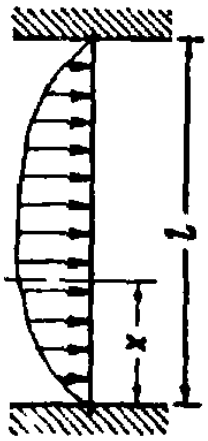


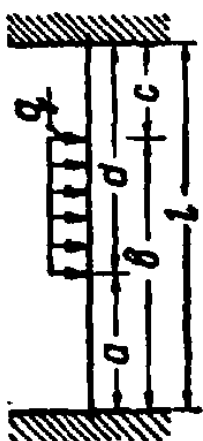
$$Q_0 = -\frac{M_1}{l} - \frac{M_2}{l} + \frac{ql}{2}(a^2 - a_1^2).$$

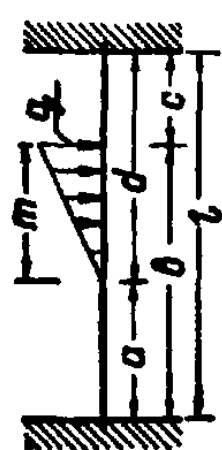
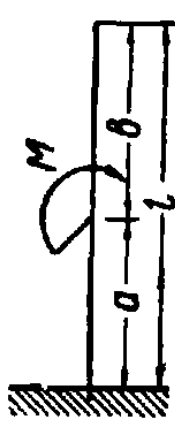
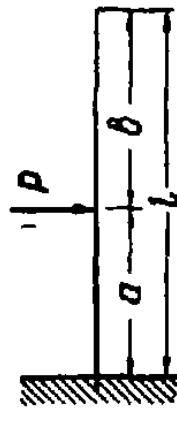
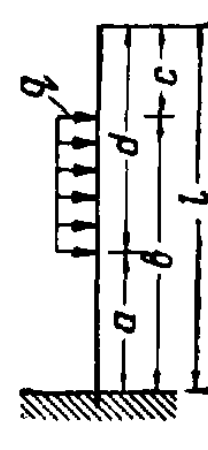
Таблица начальных параметров при различных схемах закрепления и загрузки

№ схем	Схемы балок	y_0	$EJ\theta_0$	M_0	Q_0
1		0	$\frac{l}{6} f''(0) - \frac{1}{l} f(l)$	0	$-\frac{f''(l)}{l}$
1		0	$\frac{Ml}{6} (1 - 3\alpha^2)$ $\alpha = \frac{b}{l}$	0	$-\frac{M}{l}$
2			$-\frac{Pl^2}{6} (\alpha - \alpha^3)$ $\alpha = \frac{b}{l}$	0	Pa $\alpha = \frac{b}{l}$
3		0	$-\frac{ql^3}{24} [(2\alpha^2 - \alpha^4) - (2\alpha_1^2 - \alpha_1^4)] =$ $= -\frac{ql^3}{24} (\omega - \omega_1)$	0	$\frac{ql}{2} (\alpha^2 - \alpha_1^2)$ $\alpha = \frac{d}{l}; \alpha_1 = \frac{c}{l}$

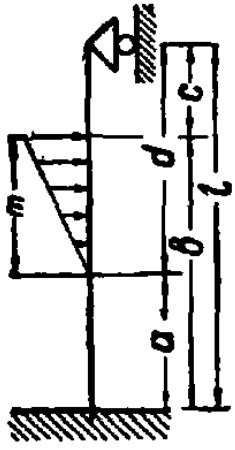
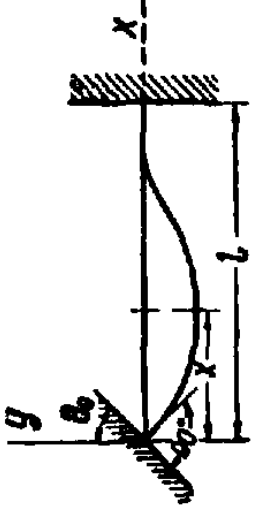
№ схем	Схемы балок	y_0	$EJ \theta_0$	M_0	Q_0
4		0	$\frac{ql^4}{360m} \left[(-10a^3 + 3a^6) - (-10a_1^3 + 3a_1^6) + 15 \frac{m}{l} (2a_1^2 - a_1^4) \right] =$ $= \frac{ql^4}{360m} \left(\omega - \omega_1 + 15 \frac{m}{l} \omega_2 \right)$	0	$\frac{ql^2}{6m} \left[(a^3 - a_1^3) - 3 \frac{m}{l} a_1^2 \right]$ $a = \frac{d}{l}; a_1 = \frac{c}{l}$
II		0	$\frac{3}{2l} \left[\frac{l}{3} f'(l) - f(l) \right]$	0	$\frac{3}{l^3} [f(l) - l f'(l)]$
5		0	$\frac{Ml}{4} (2a - 3a^2)$	0	$-\frac{3M}{2l} (2a - a^2)$

№№ схем	Схемы балок	y_0	$EJ \Theta_0$	M_0	Q_0
6		0	$-\frac{Pl^2}{4} (a^2 - a^3)$	0	$\frac{P}{2} (3a^2 - a^3)$
7		0	$-\frac{ql^3}{48} [(4a^3 - 3a^4) - (4a_1^3 - 3a_1^4)] = -\frac{ql^3}{48} (\omega - \omega_1)$	0	$\frac{ql}{8} [(4a^3 - a^4) - (4a_1^3 - a_1^4)] = \frac{ql}{8} (\omega - \omega_1)$
8		0	$\frac{ql^4}{240m} [(-5a^4 + 3a^5) - (-5a_1^4 + 3a_1^5)] + 5\frac{m}{l} (4a_1^3 - 3a_1^4)] = \frac{ql^4}{240m} (\omega - \omega_1 + 5\frac{m}{l}\omega_2)$	0	$\frac{ql^2}{40m} [(5a^4 - a^5) - (5a_1^4 - a_1^5)] + 5\frac{m}{l} (a_1^4 - 4a_1^3)] = \frac{ql^2}{40m} (\omega - \omega_1 + 5\frac{m}{l}\omega_2)$


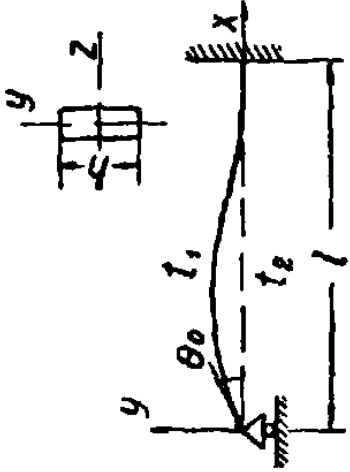
№ чер.	Схемы балок	y_0	θ_0	M_0	Q_0
III		0	0	$\frac{6}{l^2} \left[\frac{l}{3} f'(0) - f(0) \right]$	$\frac{12}{l^3} \left[f(l) - \frac{l}{2} f'(l) \right]$
9		0	0	$M(2a - 3a^2)$	$-\frac{6M}{l}(a - a^2)$
10		0	0	$-Pl(a^2 - a^3)$	$P(3a^2 - 2a^3)$
11		0	0	$-\frac{ql^2}{12} [(4a^3 - 3a^4) - (4a_1^3 - 3a_1^4)] = -\frac{ql^2}{12} (\omega - \omega_1)$	$\frac{ql}{2} [(2a^3 - a^4) - (2a_1^3 - a_1^4)] = \frac{ql}{2} (\omega - \omega_1)$

№ схем	Схемы балок	y_0	θ_0	M_0	Q_0
12				$\frac{ql^3}{60m} \left[(3a^5 - 5a^4) - (3a_1^5 - 5a_1^4) + 5 \frac{m}{l} (4a_1^3 - 3a_1^4) \right] =$ $\frac{ql^3}{60m} \left(\omega - \omega_1 + 5 \frac{m}{l} \omega_2 \right)$	$\frac{ql^2}{10m} \left[(2,5a^4 - a^5) - (2,5a_1^4 - a_1^5) + 5 \frac{m}{l} (a_1^4 - 2a_1^3) \right] =$ $\frac{ql^2}{10m} \left(\omega - \omega_1 + 5 \frac{m}{l} \omega_2 \right)$
13		0	0	-M	0
14		0	0	P · a	P
15		0	0	$\frac{q}{2} (a^2 - b^2)$	q (b - a)

№ схем	Схемы балок	y_0	θ_0	M_0	Q_0
16		0	0	$\frac{q}{6} (b - a)(2b + a)$	$\frac{q}{2} (b - a)$
17				$\frac{M}{2} (1 - 3\alpha^2)$	$-\frac{3M}{2l} (1 - \alpha^2)$
18				$-\frac{Pl}{2} (a - \alpha^3)$	$\frac{P}{2} (3a - \alpha^3)$
19				$-\frac{ql^2}{8} [(2\alpha^2 - \alpha^4) - (2\alpha_1^2 - \alpha_1^4)]$	$\frac{ql}{8} [(6\alpha^2 - \alpha^4) - (6\alpha_1^2 - \alpha_1^4)]$


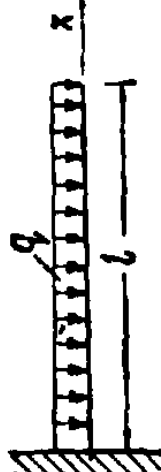
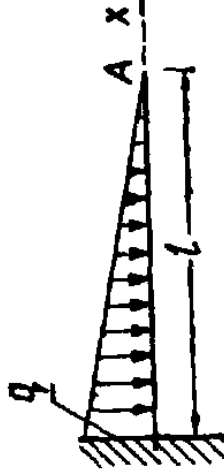
№№ схем	Схемы балок	y_0	θ_0	M_0	Q_0
20		0	0	$-\frac{ql^3}{120m} \left[(10\alpha^3 - 3\alpha^5) - \right.$ $-\left. (10\alpha_1^3 - 3\alpha_1^5) - \right.$ $-\left. 15 \frac{m}{l} (2\alpha_1^2 - \alpha_1^4) \right]$	$\frac{ql^2}{40m} \left[(10\alpha^3 - \alpha^5) - \right.$ $-\left. (10\alpha_1^3 - \alpha_1^5) - \right.$ $-\left. 5 \frac{m}{l} (6\alpha_1^2 - \alpha_1^4) \right]$
21		0	θ_0	$\frac{4EJ}{l} \theta_0$	$-\frac{6EJ}{l^2} \theta_0$

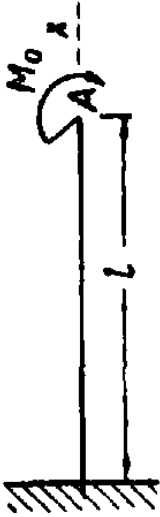
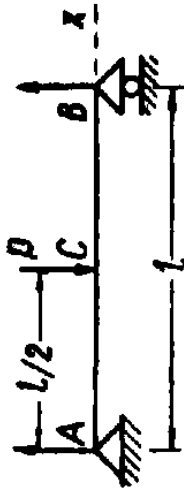
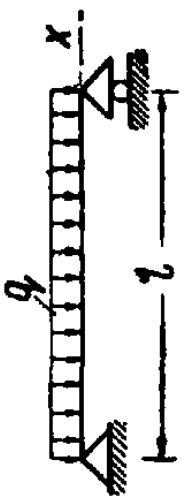
№ схем	Схемы балок	y_0	Θ_0	M_0	Q_0
22		y_0	0	$\frac{6EJ}{l^2} y_0$	$-\frac{12EJ}{l^3} y_0$
23		0	0	$\frac{\alpha(t_1 - t_2) EJ}{h}$	0
24		y_0	$\frac{3}{2} \frac{y_0}{l}$	0	$-\frac{3EJ}{l^2} y_0$

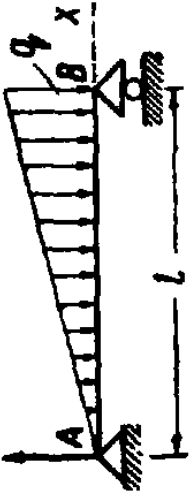
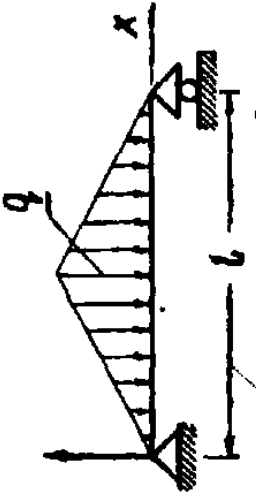
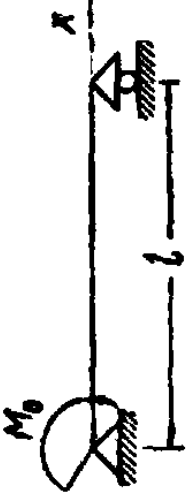
№ схем	Схемы балок	y_0	θ_0	M_0	Q_0
25		0	θ_0	$\frac{3EJ}{l} \theta_0$	$-\frac{3EJ}{l^2} \theta_0$
26		0	$-\frac{a(t_1 - t_2)l}{4h}$	0	$\frac{3a(t_1 - t_2)EJ}{2hl}$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 x + \frac{M_0 x^2}{2} + \frac{Q_0 x^3}{6} + f(x)$$

Значения прогибов и углов поворота

№№ п/п	Схема балки и нагрузки	Стрела прогиба	Угол поворота концов балки
1		$f_A = \frac{Pl^3}{3EJ}$	$\theta_A = -\frac{Pl^2}{2EJ}$
2		$f_A = \frac{ql^4}{8EJ}$	$\theta_A = -\frac{ql^3}{6EJ}$
3		$f_A = \frac{ql^4}{15EJ}$	$\theta = -\frac{ql^3}{12EJ}$

№№ п/п	Схема балки и нагрузки	Стрела прогиба	Угол поворота концов балки
4		$f_A = \frac{M_0 l^2}{2EJ}$	$\Theta = -\frac{M_0 l}{EJ}$
5		$f_C = \frac{Pl^3}{48EJ}$	$\Theta_A = -\frac{Pl^2}{16EJ}; \Theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$
6		$f = \frac{5ql^4}{384EJ}$	$\Theta_A = -\frac{ql^3}{24EJ}; \Theta_B = \frac{ql^3}{24EJ}$

№№ п/п	Схема балки и нагрузки	Стрела прогиба	Угол поворота концов балки
7		$f = 0,00652 \frac{ql^4}{EJ}$ <p>при $x = 0,519l$</p>	$\theta_A = -\frac{7}{360} \frac{ql^3}{EJ}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{45}$
8		$f = \frac{ql^4}{120EJ}$	$\theta_A = -\frac{5ql^3}{192EJ}$ $\theta_B = \frac{5ql^3}{192EJ}$
9		$f = 0,0642 \frac{M_0 l^2}{EJ}$ <p>при $x = 0,422l$</p>	$\theta_A = -\frac{M_0 l}{3EJ}$ $\theta_B = \frac{M_0 l}{6EJ}$

Подставив данные задачи и полагая $a = 1$ м, получим:

$$Q_0 = -\frac{0,5}{3} \text{ т.}$$

Согласно таблице 26 (строки 1 и 3) получаем:

$$EJ\theta_0 = \frac{Ml}{6} (1 - 3\alpha_m^2) + \frac{Ml}{6} - \frac{ql^3}{24} [(2\alpha_q^2 - \alpha_q^4) - (2\alpha_{1q}^2 - \alpha_{1q}^4)],$$

где:

$$\alpha_m = \frac{2}{3}; \alpha_q = \frac{1}{3}; \alpha_{1q} = 0.$$

Подставив данные задачи, найдем: $EJ\theta_0 = -0,348 \text{ тм}^2$. Уравнения упругой линии, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы по всей длине балки принимают вид:

$$EJy = -0,348x - \frac{0,5x^3}{18} + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{5(x-2)^4}{24} + \\ + \frac{5(x-3)^4}{24} + \frac{15,5(x-3)^3}{18};$$

$$EJy' = -0,348 - \frac{0,5x^2}{6} + (x-1) - \frac{5(x-2)^3}{6} + \\ + \frac{5(x-3)^3}{6} + \frac{15,5(x-3)^2}{6};$$

$$EJy'' = M(x) = -\frac{0,5x}{3} + 1 - \frac{5(x-2)^2}{2} + \frac{5(x-3)^2}{2} + \frac{15,5(x-3)}{3};$$

$$EJy''' = Q(x) = -\frac{0,5}{3} - 5(x-2) + 5(x-3) + \frac{15,5}{3}.$$

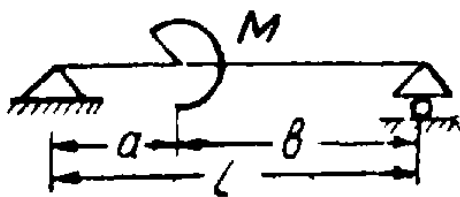
В таблицах 28—31 приводятся числовые значения для функции влияния в зависимости от места расположения силового фактора.

В таблице 26 формулы выведены для начальных параметров левой стороны балки. Если же потребуется найти начальные параметры для правой стороны, то в формулах для балки на двух опорах и балки, защемленной обоими концами при сосредоточенных силовых факторах, надо вместо α подставить значение β и для равномерно распределенной нагрузки вместо α — β_1 , а вместо α_1 — β .

При составлении уравнений трех моментов надо помнить, что фиктивные реакции $A_\phi = EJ\theta_0$ и $B_\phi = EJ\theta_l$.

Числовые значения функции влияния ω

$10^{\alpha-2}$	ω	$10^{\alpha-2}$	ω	$10^{\alpha-2}$	ω	$10^{\alpha-2}$	ω	$10^{\alpha-2}$	ω
0	10 000	20	8 800	40	5 200	60	— 800	80	— 9 200
1	9 997	21	8 677	41	4 957	61	—1163	81	— 9 683
2	9 988	22	8 548	42	4 708	62	—1532	82	—10 172
3	9 973	23	8 413	43	4 453	63	—1897	83	—10 667
4	9 952	24	8 272	44	4 192	64	—2288	84	—11 168
5	9 925	25	8 125	45	3 925	65	—2675	85	—11 675
6	9 892	26	7 972	46	3 652	66	—3068	86	—12 188
7	9 853	27	7 813	47	3 373	67	—3467	87	—12 707
8	9 828	28	7 648	48	3 088	68	—3872	88	—13 232
9	9 757	29	7 477	49	2 797	69	—4283	89	—13 763
10	9 700	30	7 300	50	2 500	70	—4700	90	—14 300
11	9 637	31	7 117	51	2 197	71	—5123	91	—14 843
12	9 568	32	6 928	52	1 888	72	—5552	92	—15 392
13	9 493	33	6 733	53	1 573	73	—5987	93	—15 947
14	9 412	34	6 532	54	1 252	74	—6428	94	—16 508
15	9 325	35	6 325	55	925	75	—6875	95	—17 075
16	9 232	36	6 112	56	592	76	—7328	96	—17 648
17	9 133	37	5 893	57	253	77	—7787	97	—18 227
18	9 028	38	5 668	58	—92	78	—8252	98	—18 812
19	8 917	39	5 437	59	—443	79	—8723	99	—19 403
								100	—20 000

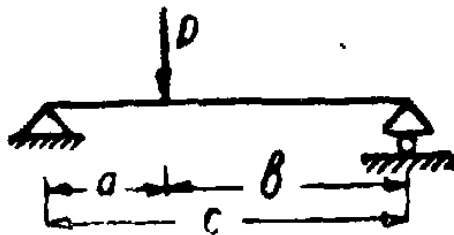


$$EJ\theta_0 = \frac{Ml}{6} \omega \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha = \frac{b}{l};$$

Числовые значения функции влияния ω

$\frac{\alpha-2}{10}$	ω	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω
0	—	20	1 920	40	3 360	60	3 840	80	2 880
1	99	21	2 007	41	3 411	61	3 830	81	2 786
2	199	22	2 094	42	3 459	62	3 817	82	2 686
3	299	23	2 178	43	3 505	63	3 800	83	2 582
4	399	24	2 262	44	3 548	64	3 779	84	2 473
5	499	25	2 344	45	3 589	65	3 754	85	2 359
6	598	26	2 424	46	3 627	66	3 725	86	2 239
7	697	27	2 503	47	3 662	67	3 692	87	2 115
8	795	28	2 580	48	3 694	68	3 656	88	1 985
9	893	29	2 656	49	3 724	69	3 615	89	1 850
10	990	30	2 730	50	3 750	70	3 570	90	1 710
11	1 087	31	2 802	51	3 773	71	3 521	91	1 564
12	1 183	32	2 872	52	3 794	72	3 468	92	1 413
13	1 278	33	2 941	53	3 811	73	3 410	93	1 256
14	1 373	34	3 007	54	3 825	74	3 348	94	1 094
15	1 466	35	3 071	55	3 836	75	3 281	95	926
16	1 559	36	3 133	56	3 844	76	3 210	96	753
17	1 651	37	3 193	57	3 848	77	3 135	97	573
18	1 742	38	3 251	58	3 849	78	3 055	98	388
19	1 831	39	3 307	59	3 846	79	2 970	99	197
								100	0

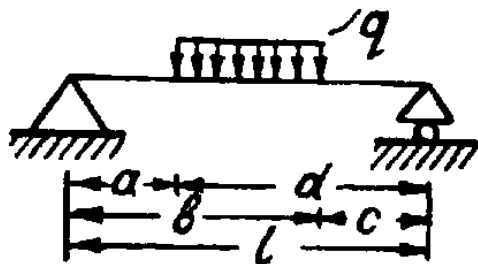


$$EJ\theta_0 = -\frac{Pl^2}{6}\omega \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha = \frac{b}{l}$$

Числовые значения функции влияния

$10^{-2} \alpha$	ω	$10^{-2} \alpha$	ω	$10^{-2} \alpha$	ω	$10^{-2} \alpha$	ω	$10^{-2} \alpha$	ω
0	—	20	784	40	2 954	60	5 904	80	8 704
1	2	21	863	41	3 079	61	6 057	81	8 817
2	8	22	939	42	3 217	62	6 210	82	8 927
3	18	23	1 030	43	3 356	63	6 353	83	9 032
4	32	24	1 119	44	3 497	64	6 514	84	9 133
5	50	25	1 211	45	3 640	65	6 665	85	9 230
6	72	26	1 306	46	3 784	66	6 815	86	9 322
7	98	27	1 405	47	3 930	67	6 963	87	9 409
8	128	28	1 507	48	4 077	68	7 110	88	9 491
9	161	29	1 611	49	4 226	69	7 255	89	9 568
10	199	30	1 719	50	4 375	70	7 399	90	9 639
11	240	31	1 830	51	4 525	71	7 540	91	9 704
12	286	32	1 943	52	4 677	72	7 681	92	9 758
13	325	33	2 060	53	4 829	73	7 818	93	9 817
14	388	34	2 178	54	4 981	74	7 953	94	9 865
15	445	35	2 300	55	5 135	75	8 086	95	9 905
16	505	36	2 424	56	5 289	76	8 216	96	9 939
17	570	37	2 551	57	5 442	77	8 343	97	9 965
18	638	38	2 679	58	5 596	78	8 466	98	9 984
19	709	39	2 811	59	5 750	79	8 587	99	9 996
								100	10 000



$$EJ\theta_0 = -\frac{ql^3}{24}(\omega - \omega_1) \cdot 10^{-4}$$

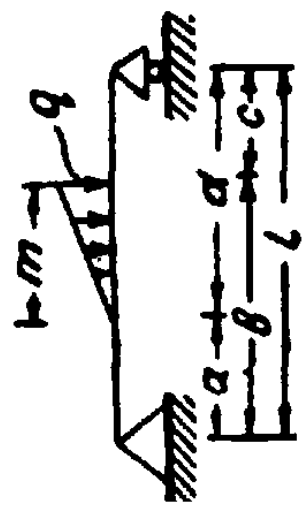
$$\alpha = \frac{d}{l}; \quad x_1 = \frac{c}{l}$$

Числовые значения функций влнения

$\frac{\alpha}{10}$	ω	ω_2	$\frac{\alpha}{10}-2$	ω	ω_2	$\frac{\alpha}{10}-2$	ω	ω_2	$\frac{\alpha}{10}-2$	ω	ω_2	$\frac{\alpha}{10}-2$	ω	ω_2
1	—	2	14	273	388	27	1 926	1 405	40	6 094	2 944	53	13 634	4 829
2	—	8	15	336	445	28	2 144	1 507	41	6 547	3 080	54	14 369	4 982
3	3	18	16	407	506	29	2 378	1 612	42	7 069	3 217	55	15 129	5 135
4	6	32	17	487	570	30	2 628	1 719	43	7 510	3 356	56	15 912	5 289
5	13	50	18	577	638	31	2 895	1 830	44	8 023	3 498	57	16 716	5 442
6	22	72	19	679	709	32	3 177	1 944	45	8 561	3 640	58	17 543	5 597
7	34	98	20	790	784	33	3 487	2 060	46	9 115	3 784	59	18 396	5 750
8	51	128	21	914	863	34	3 795	2 179	47	9 695	3 930	60	19 269	5 904
9	73	162	22	1 050	945	35	4 131	2 300	48	10 284	4 077	61	20 163	6 057
10	100	199	23	1 198	1 031	36	4 485	2 424	49	10 919	4 226	62	21 085	6 210
11	133	241	24	1 358	1 119	37	4 858	2 551	50	11 564	4 375	63	22 024	6 353
12	173	286	25	1 534	1 211	38	5 250	2 680	51	12 230	4 526	64	22 995	6 514
13	220	336	26	1 723	1 306	39	5 662	2 811	52	12 921	4 677	65	23 983	6 665

Продолжение таблицы 31

$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2	$\frac{\alpha-2}{10}$	ω_2
66	24 994	6 815	73	32 683	7 818	80	41 372	8 704	87	50 898	9 409	94	61 041	9 865					
67	26 026	6 963	74	33 865	7 953	81	42 683	8 817	88	52 316	9 491	95	62 524	9 905					
68	27 084	7 110	75	35 069	8 086	82	44 016	8 927	89	53 745	9 568	96	64 012	9 934					
69	28 159	7 255	76	36 293	8 216	83	45 362	9 032	90	55 185	9 639	97	65 505	9 965					
70	29 260	7 399	77	37 535	8 343	84	46 724	9 133	91	56 637	9 705	98	67 002	9 986					
71	30 379	7 541	78	38 794	8 466	85	48 102	9 230	92	58 096	9 758	99	68 503	9 996					
72	31 520	7 681	79	40 073	8 587	86	49 494	9 322	93	59 565	9 817	100	70 000	10 000					



$$EJ\theta_0 = -\frac{ql^4}{360m} \left(\omega - \omega_1 - 15 \frac{m}{l} \omega_2 \right) \cdot 10^{-4}$$

$$a = \frac{d}{l}; \quad \alpha_1 = \frac{c}{l}$$

На рис. 91 кривые показывают изменение функций влияния, входящих в уравнения начальных параметров (см. таблицу 26). Номера кривых соответствуют табличному порядковому номеру. Например, балка, защемленная обоими концами с моментом в пролете, имеет порядковый номер 9, поэтому для функции влияния

$$\omega = 2\alpha - 3\alpha^2$$

соответствует кривая 9, а для функции влияния

$$\omega_1 = \alpha - \alpha^2$$

соответствует кривая 9'.

При пользовании графиками надо значения, взятые из графика, умножить на 10^{-4} .

Кривые 3, 7, 7', 11, 11' изображают изменение функции влияния, когда в пролете находится равномерно распределенная нагрузка. Каждая кривая одновременно показывает изменение ω и ω_1 для различных значений α и α_1 . При желании воспользоваться этими кривыми для определения функции начальных параметров следует найти значение функции для α и вычесть из нее значение функции для α_1 .

Определение деформаций балок переменного сечения

Если балку постоянного сечения с моментом инерции J_1 заменить балкой с моментом инерции $J_0 = kJ_1$ и изменить при этом все нагрузки и реакции в $k = \frac{J_0}{J_1}$ раз, то упругие линии этих балок полностью совпадут.

Это положение и используется для определения прогибов балок переменного сечения путем преобразования ступенчатой балки в эквивалентную балку постоянного сечения.

Ход решения задачи следующий:

а) определяем коэффициент приведения для каждого участка балки:

$$k_n = \frac{J_0}{J_n}; \quad (42)$$

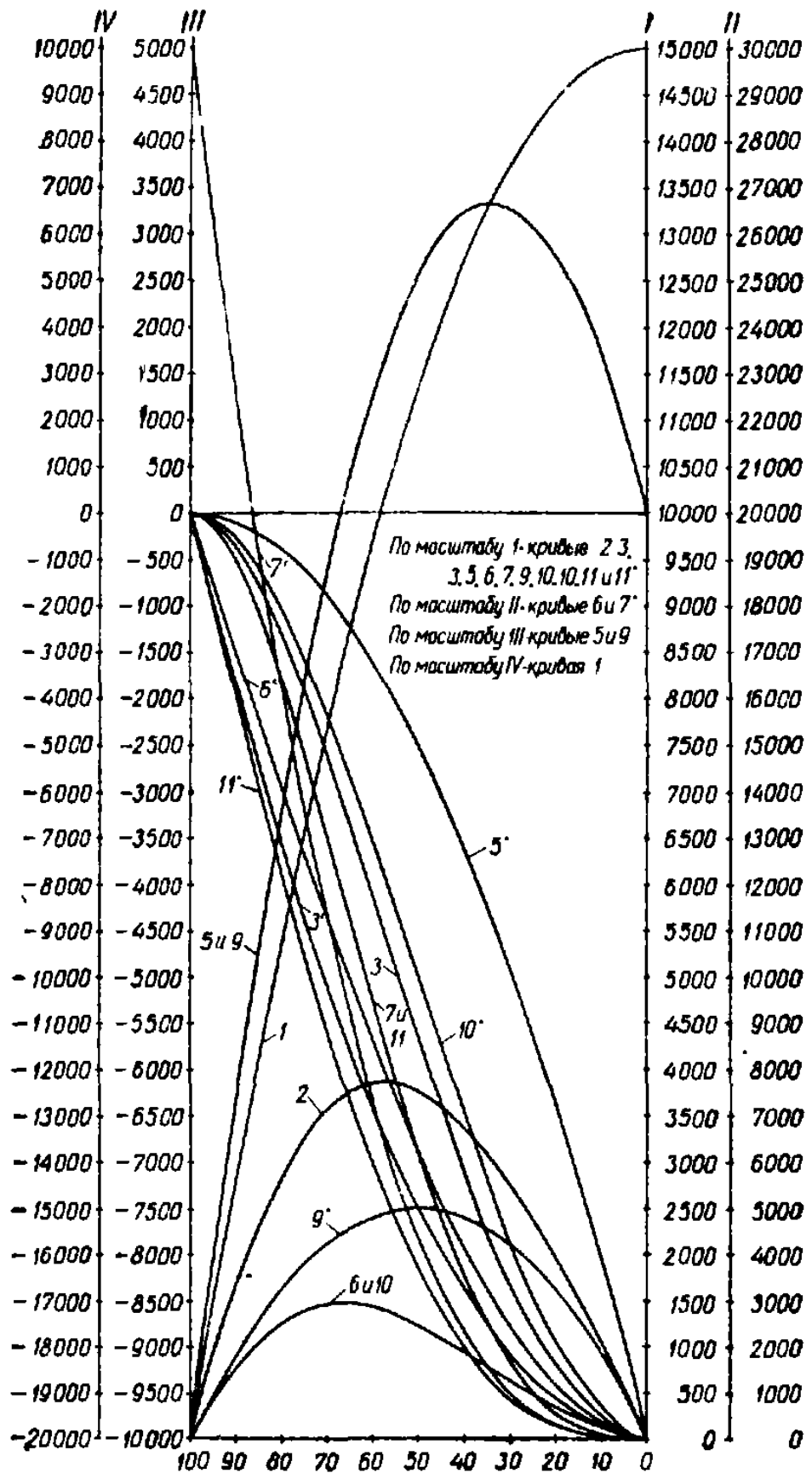


Рис. 91. Кривые изменения функций влияния, входящих в уравнения начальных параметров.

Номера кривых соответствуют табличному порядковому номеру (см. пояснение в тексте).

б) умножаем все силы и моменты, приложенные к каждой части, на соответствующий этой части коэффициент k_n ;

в) в местах сопряжения участков прикладываем разности ΔQ_i и ΔM_i , равные:

$$\Delta Q_i = (k_{i+1} - k_i) Q_i; \quad (43)$$

$$\Delta M_i = (k_{i+1} - k_i) M_i; \quad (44)$$

г) строим эквивалентную балку, для которой определяем реакции опор.

Пишем уравнение упругой линии и определяем линейные и угловые перемещения.

Пример 6. Требуется написать уравнение упругой линии для трехступенчатой балки, лежащей на двух опорах (рис. 92). Соотношение между моментами инерции сечений участков дано:

$$J_1 : J_2 : J_3 = 1 : 2 : 3.$$

Решение. Находим коэффициенты приведения, полагая, что момент инерции J_0 эквивалентной балки равен моменту инерции J_2 средней части балки; тогда коэффициенты приведения будут равны:

$$k_1 = \frac{J_0}{J_1} = 2; \quad k_2 = \frac{J_0}{J_2} = 1 \quad \text{и} \quad k_3 = \frac{J_0}{J_3} = \frac{2}{3}.$$

Определяем дополнительные внешние силы ΔQ_i и момент ΔM_i :

$$\Delta Q_1 = (k_2 - k_1) \frac{P}{2} = (1 - 2) \frac{P}{2} = -\frac{P}{2};$$

$$\Delta Q_2 = (k_3 - k_2) \left(-\frac{P}{2} \right) = \left(\frac{2}{3} - 1 \right) \left(-\frac{P}{2} \right) = \frac{1}{6} P;$$

$$\Delta M_1 = (k_2 - k_1) 2Pa = (1 - 2) 2Pa = -2Pa;$$

$$\Delta M_2 = (k_3 - k_2) 2Pa = \left(\frac{2}{3} - 1 \right) 2Pa = -\frac{2}{3} Pa.$$

Умножаем все силы на соответствующие коэффициенты:

$$k_1 P = 2P; \quad k_2 P = P; \quad k_3 P = \frac{2}{3} P.$$

Строим эквивалентную балку (рис. 92).

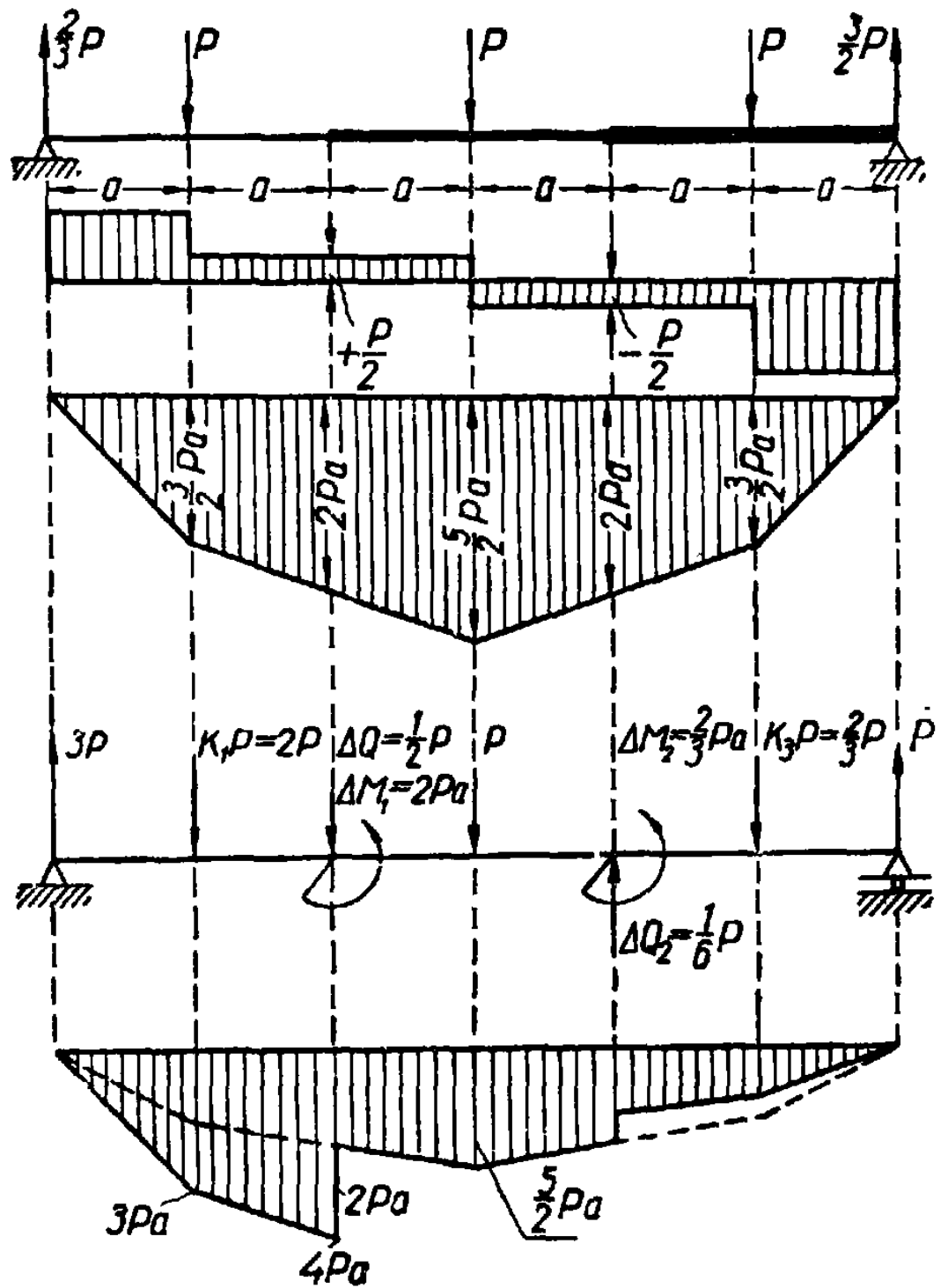


Рис. 92. Действительная и эквивалентная балки.

Пишем уравнение упругой линии, как и для обычной балки:

$$EJy = EJy_0 + FJ\theta_0x + \frac{3Px^3}{6} - \frac{2P(x-a)^3}{6} - \frac{2Pa(x-2a)^2}{2} - \\ - \frac{P(x-2a)^3}{12} - \frac{P(x-3a)^3}{6} - \frac{2Pa(x-4a)^2}{6} + \\ + \frac{P(x-4a)^3}{36} - \frac{2P(x-5a)^3}{18}.$$

Начальные параметры рекомендуется определять методом, рассмотренным выше.

Графоаналитический метод определения перемещений

В основе метода лежит аналогия между изгибающим моментом, перерезывающей силой и интенсивностью сплошной нагрузки, с одной стороны, и прогибом, углом поворота и кривизной — с другой. На этом основании можно написать, что:

$$y = \frac{M_{\text{ф}}}{EJ} (A); \quad \theta = \frac{Q_{\text{ф}}}{EJ} (B),$$

где $Q_{\text{ф}}$ и $M_{\text{ф}}$ — фиктивная поперечная сила и фиктивный изгибающий момент от загрузки фиктивной балки эпюрой изгибающих моментов от заданной нагрузки и для заданной балки.

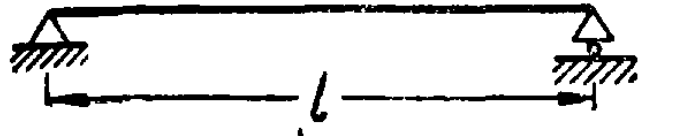
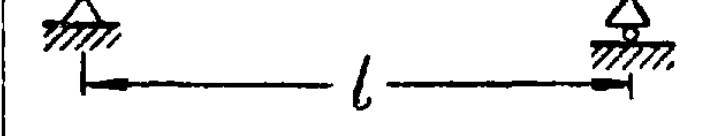
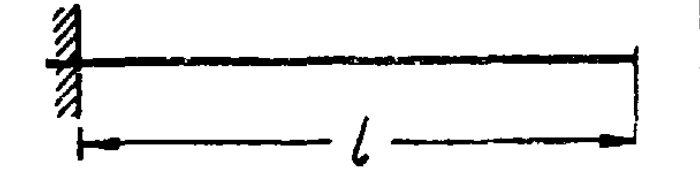
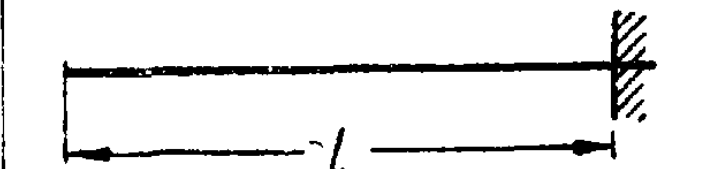
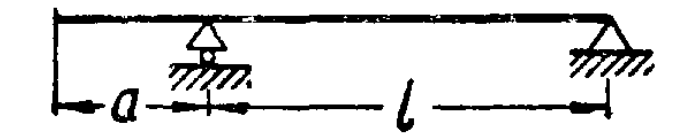

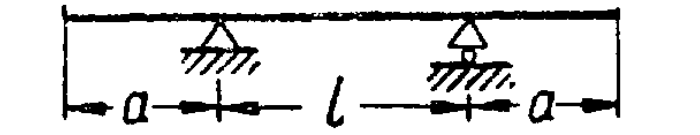

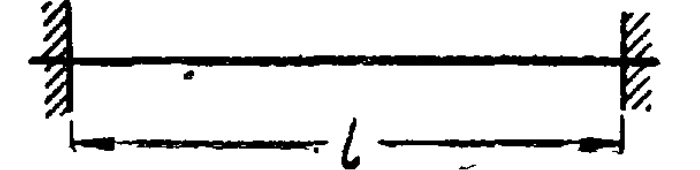
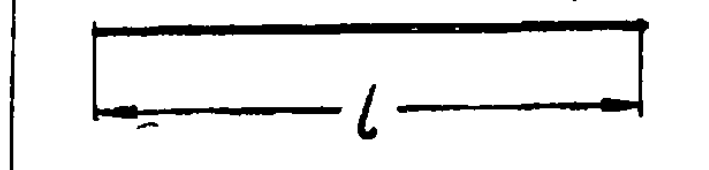
При пользовании графоаналитическим методом следует иметь в виду, что длины участков фиктивных балок те же, что и действительных, но опоры и сопряжения участков фиктивных балок выбираются так, чтобы были удовлетворены условия A и B , т. е. соответствовали деформациям действительных балок.

Схемы действительных и соответствующих им фиктивных балок приведены в таблице 32.

Пример 7 Определить прогиб и угол поворота на правом конце консоли, изображенной на рис. 93.

Решение. В соответствии с таблицей 32 фиктивная балка будет иметь свободный левый конец и защемленный правый. За фиктивную

Схемы действительных и соответствующих им фиктивных балок

Схемы действительных балок	Схемы фиктивных балок
	
	
	
	
	

нагрузку примем эпюру изгибающих моментов действительной балки (рис. 93).

Для определения угла поворота в точке B надо найти в этом сечении Q_{ϕ} ; Q_{ϕ} численно равна фиктивной опорной реакции B_{ϕ} :

$$Q_{\phi} = B_{\phi} = \frac{Pl^2}{8}.$$

Следовательно, угол поворота:

$$\theta_B = \frac{Pl^2}{8EJ}.$$

Прогиб найдем, если M_{ϕ} в точке B разделим на EJ :

$$M_{\phi B} = -\frac{Pl^2}{8} \frac{5}{6} l = -\frac{5Pl^3}{48}; \quad y_B = -\frac{5Pl^3}{48EJ}.$$

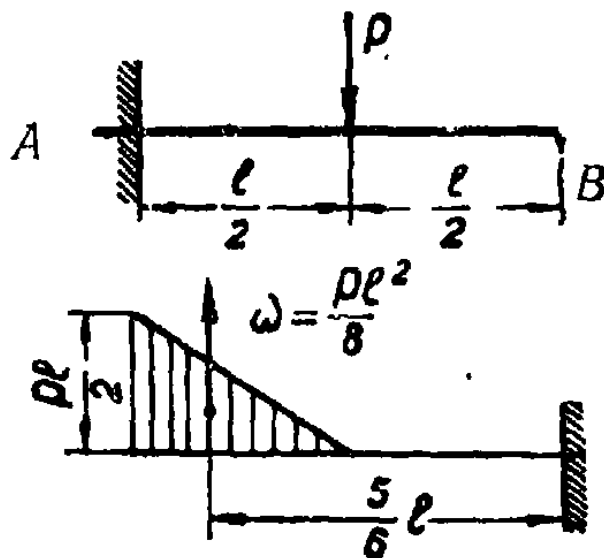


Рис. 93. Схема действительной и фиктивной балок.

Определение прогибов балки переменного сечения графоаналитическим методом приводится к тем же операциям, что и для балки постоянной жесткости, но с преобразованной умножением на $k_n = \frac{J_0}{J_n}$ эпюрой моментов.

Преобразование эпюры моментов указано на рис. 92.

Глава VII. БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматриваемые в настоящей главе методы расчета балок, лежащих на упругом основании, построены на гипотезе, что реакция (отпор) упругого основания в данной точке пропорциональна величине ее просадки и не зависит от величины просадок соседних точек.

При расчете балок на упругом основании балки разделяют на абсолютно жесткие и упругие.

Под абсолютно жесткими балками подразумеваются балки, жесткость которых настолько велика сравнительно с податливостью основания, что эпюру осадок без большой погрешности можно считать прямолинейной, пренебрегая ординатами упругой линии самой балки (и обусловленной ею реакцией и внутренними силами) по сравнению с ординатами прямой, соединяющей осадки концов.

Балку со свободными концами можно считать абсолютно жесткой, если соблюдено неравенство:

$$l \leq \frac{1,2}{k} \text{ метров,}$$

где:

$$k = \sqrt[4]{\frac{\alpha_0 b}{4EJ}};$$

b — ширина балки;

α_0 — коэффициент податливости основания, значение которого приводится в таблице 33.

Практически наиболее важным является случай балки со свободными концами, нагруженной только силами (т. е. при отсутствии наперед заданной деформации). В этом случае эпюра напряжений по подошве основания представляет прямую линию, которая может быть построена по формуле внецентренного сжатия.

Таблица 33

Ориентировочные значения коэффициентов упругой податливости оснований

Материал основания	α_0 в кг/см ³
Песок свеженаасыпанный	0,1—0,5
Глина мокрая, размягченная	
Песок слежавшийся	0,5—5
Гравий насыпной	
Глина влажная	
Песок и гравий плотно слежавшиеся	5—10
Щебень	
Глина малой влажности	
Грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный	10—20
Глина твердая	
Известняк, песчаник, мерзлота	20—100
Твердая скала	100—1 500
Кирпич	400—500
Бутовая кладка	500—600
Бетон и железобетон	800—1 500

Ордината напряжения в центре тяжести подошвы (рис. 94):

и уклон эпюры:
$$\sigma_0 = \frac{\Sigma P}{F}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_0 - \sigma_a}{C_a}$$

Имея эпюру напряжений, строят эпюру реактивных сил (погонной нагрузки), умножив в каждом сечении ординаты σ

на ширину подошвы, а затем уже находят обычным путем поперечные силы и изгибающие моменты.

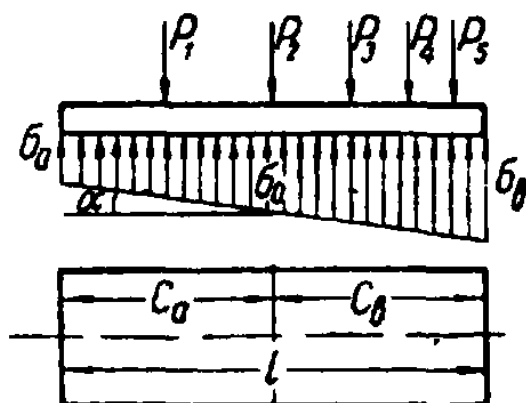


Рис. 94. Эпюра напряжений для абсолютно жесткой балки.

Упругая балка

Для упругой балки, лежащей на упругом основании, когда реакция (отпор) упругого основания в данной точке пропорциональна величине просадки и не зависит от величины просадок соседних точек, уравнение упругой линии имеет следующий вид:

$$y = y_0 A_x + \frac{1}{k} \Theta_0 B_x + \frac{4k^2}{\alpha} M_0 C_x + \frac{4k}{\alpha} Q_0 D_x + f(x), \quad (1)$$

где. y_0 , Θ_0 , M_0 и Q_0 — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале отсчета;

$$A_x = chkx \cos kx; \quad (2)$$

$$B_x = \frac{1}{2} (chkx \sin kx + shkx \cos kx); \quad (3)$$

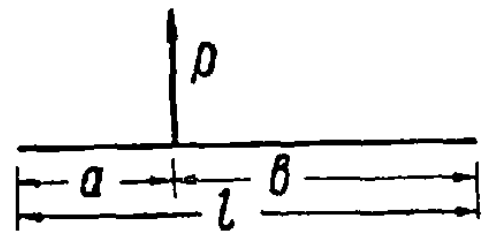
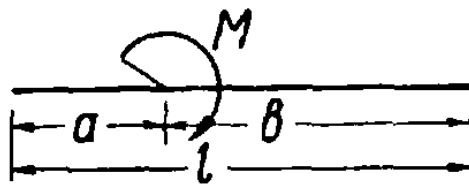
$$C_x = \frac{1}{2} shkx \sin kx; \quad (4)$$

$$D_x = \frac{1}{4} (chkx \sin kx - shkx \cos kx); \quad (5)$$

$$\alpha = a_0 b;$$

$f(x)$ — влияние нагрузок, расположенных в пролете балки. Значения $f(x)$ и ее производных для ряда типов нагрузок приведены в таблице 34.

Входящие в уравнение функции A_x , B_x , C_x , D_x и их производные приведены в таблице 35.



$$f(x) \quad \frac{4k^2}{\alpha} MC_{x-a}$$

$$\frac{4k}{\alpha} PD_{x-a}$$

$$f'(x) \quad \frac{4k^3}{\alpha} MB_{x-a}$$

$$\frac{4k^2}{\alpha} PC_{x-a}$$

$$f''(x) \quad \frac{4k^4}{\alpha} MA_{x-a}$$

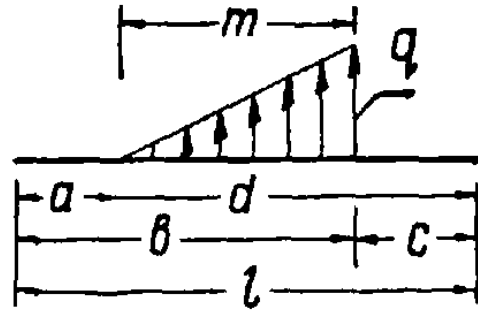
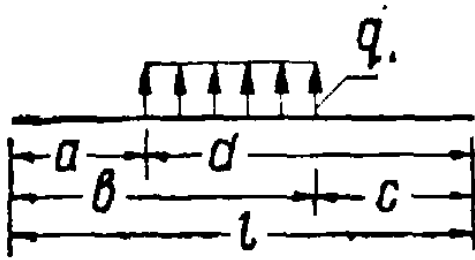
$$\frac{4k^3}{\alpha} PB_{x-a}$$

$$f'''(x) \quad -\frac{16k^5}{\alpha} MD_{x-a}$$

$$\frac{4k^4}{\alpha} PA_{x-a}$$

производные

п а г р у з к и



Второй участок

$$-\frac{q}{\alpha} [A_{x-a} - 1]$$
 Третий участок

$$-\frac{q}{\alpha} [A_{x-a} - A_{x-b}]$$

Второй участок

$$\frac{q'}{\alpha} \left[(x-a) - \frac{1}{k} B_{x-a} \right]$$
 Третий участок

$$\frac{q}{\alpha m} \left[(x-a) - \frac{1}{k} B_{x-a} - (x-b) + \frac{1}{k} B_{x-b} \right] + \frac{q}{\alpha} (A_{x-b} - 1)$$

Второй участок

$$\frac{4k}{\alpha} q D_{x-a}$$
 Третий участок

$$\frac{4k}{\alpha} q [D_{x-a} - D_{x-b}]$$

Второй участок

$$\frac{q'}{\alpha} [1 - A_{x-a}]$$
 Третий участок

$$\frac{q}{\alpha m} (A_{x-b} - A_{x-a}) - \frac{4kq}{\alpha} D_{x-b}$$

Второй участок

$$\frac{4k^2}{\alpha} q C_{x-a}$$
 Третий участок

$$\frac{4k^2}{\alpha} q [C_{x-a} - C_{x-b}]$$

Второй участок

$$\frac{4q'k}{\alpha} D_{x-a}$$
 Третий участок

$$\frac{4kq}{\alpha m} (D_{x-a} - D_{x-b}) + \frac{4k^2q}{\alpha} C_{x-b}$$

Второй участок

$$\frac{4k^3}{\alpha} q B_{x-a}$$
 Третий участок

$$\frac{4k^3}{\alpha} q [B_{x-a} - B_{x-b}]$$

Второй участок

$$\frac{4q'k^3}{\alpha} C_{x-a}$$
 Третий участок

$$\frac{4k^2q}{\alpha m} (C_{x-a} - C_{x-b}) + \frac{4k^3q}{\alpha} B_{x-b}$$

Функции	Производные			
	первая	вторая	третья	четвертая
A_x	$-4kD_x$	$-4k^2C_x$	$-4k^3B_x$	$-4k^4A_x$
B_x	kA_x	$-4k^2D_x$	$-4k^3C_x$	$-4k^4B_x$
C_x	kB_x	k^2A_x	$-4k^3D_x$	$-4k^4C_x$
D_x	kC_x	k^2B_x	k^3A_x	$-4k^4D_x$

В таблице 36 даны начальные параметры для ряда схем закрепления и любого типа загрузки.

В таблице 37 даны значения начальных параметров для ряда схем закрепления и частных случаев загрузки.

Для определения начальных параметров в случае сложного нагружения пользуются принципом независимости действия сил.

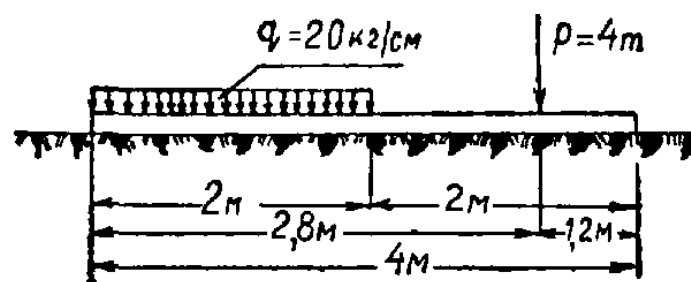
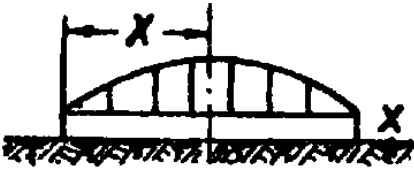


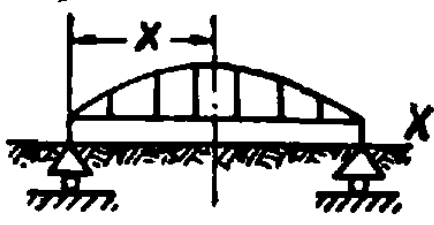
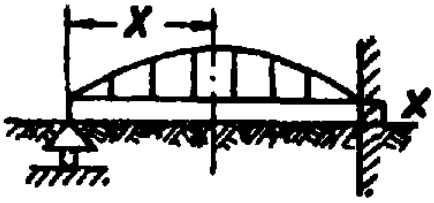



Рис. 95. Схема балки и ее загрузки.

Пример 1. Найти общие уравнения y , M и Q для деревянной балки (рис. 95) при следующих данных: $l = 4$ м; $E = 10^5$ кг/см², коэффициент постели основания балки $\alpha_0 = 4$ кг/см³, поперечное сечение $b \times h = 20 \times 20$ см²; $q = 20$ кг/см; $P = 4000$ кг.

Таблица начальных параметров для любого типа нагрузки, выраженной через $f(x)$

№№ п/п	Тип закрепления концов балки	Начальные параметры
1		$y_0 = \frac{k C_l f''(l) - D_l f'''(l)}{4 k^3 (C_l^2 - B_l D_l)}$ $\theta_0 = \frac{C_l f'''(l) - k B_l f''(l)}{4 k^2 (C_l^2 - B_l D_l)}$ $M_0 = 0; Q_0 = 0$
2		$y_0 = \frac{1}{4 k^2} \frac{4 k^2 D_l f(l) + B_l f''(l)}{B_l C_l - A_l D_l}$ $\theta_0 = \frac{1}{4 k} \frac{4 k^2 C_l f(l) + A_l f''(l)}{A_l D_l - C_l B_l}$ $M_0 = 0; Q_0 = 0$
3		$y_0 = \frac{1}{k} \frac{B_l f'(l) - k A_l f(l)}{A_l^2 + 4 B_l D_l}$ $\theta_0 = - \frac{4 k D_l f(l) + A_l f'(l)}{A_l^2 + 4 B_l D_l}$ $M_0 = 0; Q_0 = 0$

№№ п/п	Тип закрепления концов балки	Начальные параметры
4		$y_0 = 0$ $\theta_0 = \frac{1}{k} \frac{D_l f''(l) - k^2 B_l f(l)}{4 D_l^2 + B_l^2}$ $M_0 = 0$ $Q_0 = -\frac{\alpha}{4 k^3} \frac{4 k^2 D_l f(l) + B_l f''(l)}{4 D_l^2 + B_l^2}$
5		$y_0 = 0$ $\theta_0 = \frac{k C_l f(l) - D_l f'(l)}{A_l D_l - B_l C_l}$ $M_0 = 0$ $Q_0 = \frac{\alpha}{4 k^2} \frac{B_l f'(l) - k A_l f(l)}{A_l D_l - C_l B_l}$
6		$y_0 = 0; \theta_0 = 0$ $M_0 = \frac{\alpha}{4 k^3} \frac{k C_l f(l) - D_l f'(l)}{B_l D_l - C_l^2}$ $Q_0 = \frac{\alpha}{4 k^2} \frac{C_l f'(l) - k B_l f(l)}{B_l D_l - C_l^2}$

Решение. $\alpha = \alpha_0 b = 4 \cdot 20 = 80 \text{ кг/см}^2$;

$$k = \sqrt[4]{\frac{\alpha_0 b}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{80 \cdot 3}{10^5 \cdot 20^4}} = 0,011 \text{ 1/см};$$

$$kl = 0,011 \cdot 400 = 4,4.$$

По данным таблицы 37, строки 1б и 1в, напишем общие уравнения начальных параметров y_0 и θ_0 :

$$y_0 = -\frac{k}{\alpha} P \frac{C_l B_{0,3l} - D_l A_{0,3l}}{C_l^2 - D_l B_l} + \frac{q}{\alpha} \frac{D_l (B_l - B_{0,5l}) - (C_l - C_{0,5l}) C_l}{C_l^2 - D_l B_l};$$

$$\theta_0 = -\frac{k^2}{\alpha} P \frac{C_l A_{0,3l} - B_l B_{0,3l}}{C_l^2 - D_l B_l} + \frac{qk}{\alpha} \frac{B_l (C_l - C_{0,5l}) - C_l (B_l - B_{0,5l})}{C_l^2 - D_l B_l}.$$

Подставив данные задачи в эти уравнения, найдем:

$$y_0 = -0,2355 \text{ см}; \quad \frac{\theta_0}{k} = -0,0119 \text{ см}.$$

Имея значения y_0 и $\frac{\theta_0}{k}$, можно написать уравнение упругой линии:

1-й участок

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$y = -0,2355 A_x - 0,0119 B_x - \frac{q}{\alpha} (1 - A_x).$$

2-й участок

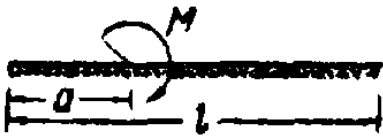
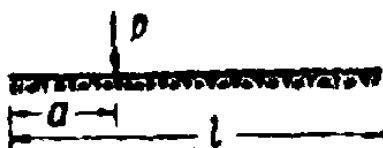
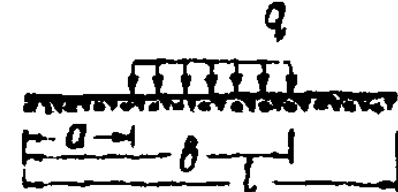
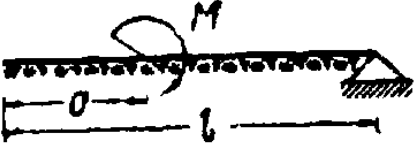
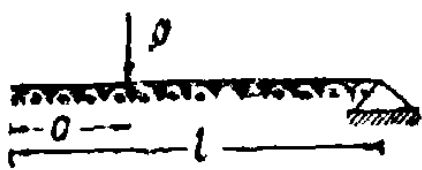
$$\frac{l}{2} \leq x \leq 0,7l;$$

$$y = -0,2355 A_x - 0,0119 B_x - \frac{q}{\alpha} (A_{x-\frac{l}{2}} - A_x).$$

3-й участок

$$0,7l \leq x \leq l;$$

$$y = -0,2355 A_x - 0,0119 B_x - \frac{q}{\alpha} (A_{x-\frac{l}{2}} - A_x) - \frac{4k}{\alpha} P D_{x-0,7l}.$$

Схема балки	y_0
<p>1a</p> 	$\frac{k^2}{a} M \frac{C_l A_{l-a} + 4D_l D_{l-a}}{C_l^2 - D_l B_l}$
<p>1б</p> 	$-\frac{k}{a} P \frac{C_l B_{l-a} - D_l A_{l-a}}{C_l^2 - D_l B_l}$
<p>1г</p> 	$\frac{q}{a} \frac{D_l (B_{l-a} - B_{l-b}) - (C_{l-a} - C_{l-b}) C_l}{C_l^2 - D_l B_l}$
<p>2a</p> 	$\frac{k^2}{a} M \frac{4D_l C_{l-a} + B_l A_{l-a}}{B_l C_l - D_l A_l}$
<p>2б</p> 	$-\frac{k}{a} P \frac{4D_l D_{l-a} + B_l B_{l-a}}{B_l C_l - A_l D_l}$

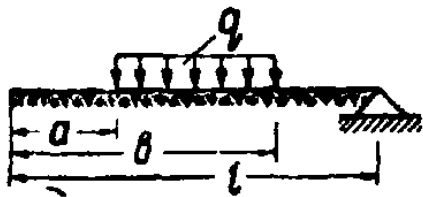
балок на упругом основании

θ_0	M_0	Q_0
$\frac{k^3}{a} M \frac{B_l A_{l-a} + 4C_l D_{l-a}}{D_l B_l - C_l^2}$	0	0
$-\frac{Pk^2}{a} \frac{B_l B_{l-a} - C_l A_{l-a}}{D_l B_l - C_l^2}$	0	0
$\frac{qk}{a} \frac{C_l (B_{l-a} - B_{l-b}) - B_l (C_{l-a} - C_{l-b})}{D_l B_l - C_l^2}$	0	0
$\frac{k^3}{a} M \frac{4C_l C_{l-a} + A_{l-a} A_l}{D_l A_l - B_l C_l}$	0	0
$-\frac{k^2}{a} P \frac{4C_l D_{l-a} + B_{l-a} A_l}{D_l A_l - B_l C_l}$)	0

• Схема балки

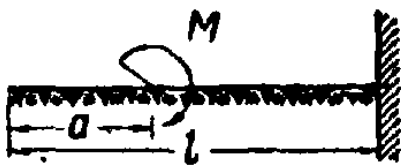
y_0

2B



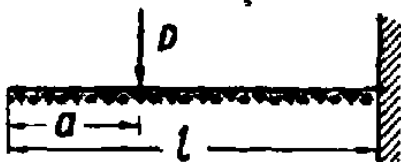
$$\frac{q}{a} \frac{D_l (A_{l-a} - A_{l-b}) - B_l (C_{l-a} - C_{l-b})}{B_l C_l - A_l D_l}$$

3A



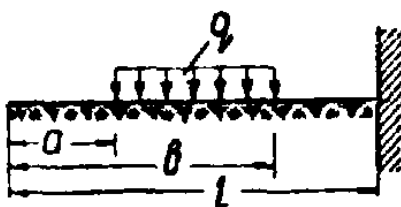
$$\frac{4k^2}{a} M \frac{B_l B_{l-a} - A_l C_{l-a}}{A_l^2 + 4B_l D_l}$$

3C



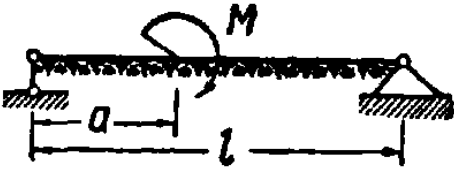
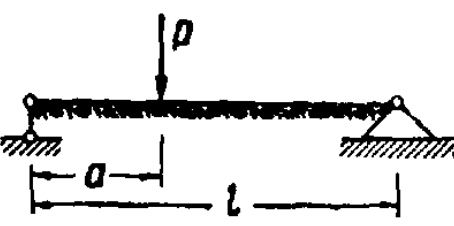
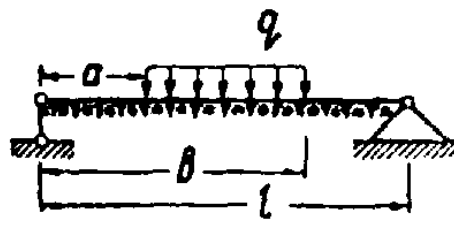
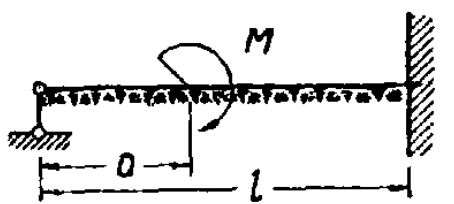
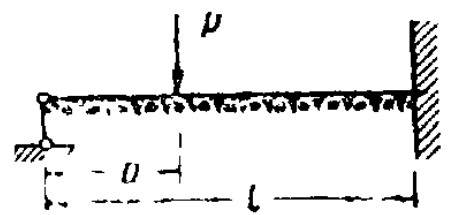
$$-\frac{4k}{a} P \frac{B_l C_{l-a} - A_l D_{l-a}}{A_l^2 + 4B_l D_l}$$

3B

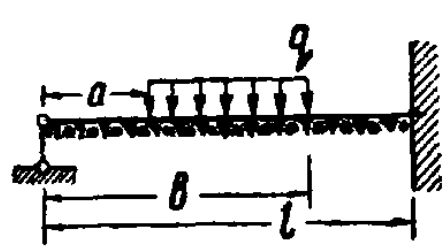
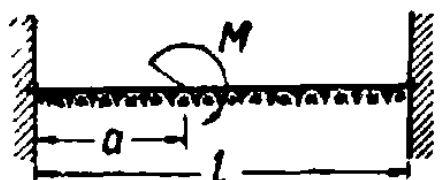
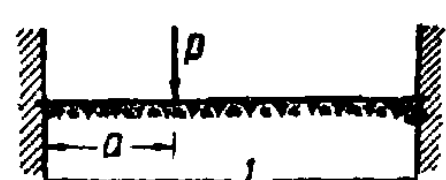
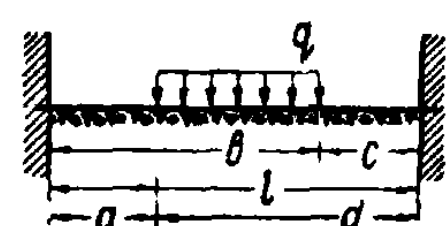


$$-\frac{q}{a} \frac{4B_l (D_{l-a} - D_{l-b}) + A_l (A_{l-a} - A_{l-b})}{A_l^2 + 4B_l D_l}$$

Θ_0	M_0	Q_0
$\frac{qk}{\alpha} \frac{C_l (A_{l-a} - A_{l-b}) - A_l (C_{l-a} - C_{l-b})}{D_l A_l - C_l B_l}$	0	0
$-\frac{4k^3}{\alpha} M \frac{4D_l C_{l-a} + A_l B_{l-a}}{A_l^2 + 4B_l D_l}$	0	0
$\frac{4k^2}{\alpha} P \frac{4D_l D_{l-a} + A_l C_{l-a}}{A_l^2 + 4B_l D_l}$	0	0
$\frac{4k}{\alpha} q \frac{A_l (D_{l-a} - D_{l-b}) - D_l (A_{l-a} - A_{l-b})}{A_l^2 + 4B_l D_l}$	0	0

Схема балки	y_0	θ_0
<p>4a</p> 	0	$\frac{4k^3}{a} M \frac{D_l A_{l-a} - B_l C_{l-a}}{4D_l^2 + B_l^2}$
<p>4б</p> 	0	$-\frac{4k^2}{a} P \frac{D_l B_{l-a} - B_l D_{l-a}}{4D_l^2 + B_l^2}$
<p>4в</p> 	0	$-\frac{k}{a^2} q \frac{4D_l(C_{l-a} - C_{l-a-b}) + (A_{l-a} - A_{l-a-b})B_l}{4D_l^2 + B_l^2}$
<p>5a</p> 	0	$\frac{4k^3}{a} M \frac{C_l C_{l-a} - D_l B_{l-a}}{A_l D_l - B_l C_l}$
<p>5б</p> 	0	$-\frac{4k^2}{a} P \frac{C_l D_{l-a} - D_l C_{l-a}}{A_l D_l - B_l C_l}$

M_0	Q_0
0	$-kM \frac{4D_l C_{l-a} + B_l A_{l-a}}{4D_l^2 + B_l^2}$
0	$P \frac{4D_l D_{l-a} + B_l B_{l-a}}{4D_l^2 + B_l^2}$
0	$\frac{q}{k} \frac{B_l (C_{l-a} - C_{l-b}) - D_l (A_{l-a} - A_{l-b})}{4D_l^2 + B_l^2}$
0	$kM \frac{B_l B_{l-a} - A_l C_{l-a}}{A_l D_l - C_l B_l}$
0	$-P \frac{B_l C_{l-a} - A_l D_{l-a}}{A_l D_l - B_l C_l}$

Схема балки	y_0	θ_0
5B 	0	$\frac{kq}{\alpha} \frac{C_l (A_{l-a} - A_{l-\alpha}) + 4D_l (D_{l-a} - D_{l-\alpha})}{A_l D_l - B_l C_l}$
6a 	y_0	M_0 $M \frac{C_l C_{l-a} - D_l B_{l-a}}{B_l D_l - C_l^2}$
6б 	0	$-\frac{P}{k} \frac{C_l D_{l-a} - D_l C_{l-a}}{B_l D_l - C_l^2}$
6B 	0	$\frac{q}{4k^2} \frac{C_l (A_{l-a} - A_{l-\alpha}) + 4D_l (D_{l-a} - D_{l-\alpha})}{B_l D_l - C_l^2}$

M_0	Q_0
O	$-\frac{q}{4k} \frac{4B_l(D_{l-a} - D_{l-s}) + A_l(A_{l-a} - A_{l-s})}{A_l D_l - B_l C_l}$
	Q_0
	$kM \frac{C_l B_{l-a} - B_l C_{l-a}}{B_l D_l - C_l^2}$
	$P \frac{C_l C_{l-a} - B_l D_{l-a}}{B_l D_l - C_l^2}$
	$-\frac{q}{4k} \frac{4C_l(D_{l-a} - D_{l-s}) + B_l(A_{l-a} - A_{l-s})}{B_l D_l - C_l^2}$

Уравнение изгибающего момента получим, взяв вторую производную от уравнения упругой линии и умножив ее на EJ :

$$M(x) = EJy'' = 4k^2EJ \left[0,2355 C_x + 0,0119 D_x + \right. \\ \left. + \frac{q}{a} (Cl - 0,5l - C_x) - \frac{k}{a} Bx - 0,7l \right].$$

Уравнение поперечной силы получим, взяв первую производную от изгибающего момента:

$$Q(x) = 4k^3EJ \left[0,2355 B_x + 0,0119 C_x + \right. \\ \left. + \frac{q}{a} (B_x - 0,5l - B_x) - \frac{k}{a} P A_x - 0,7l \right].$$

Эпюры изгибающих моментов поперечных сил можно построить, давая значения x через принятые интервалы.

Расчет бесконечно длинной балки на упругом основании, загруженной одной силой

Если расстояние от края нагрузки до ближайшего конца балки превосходит $\frac{3}{2} \frac{\pi}{k}$ м, то расчет такой балки можно вести в предположении, что балка продолжается до бесконечности в обе стороны.

В случае бесконечно длинной балки на упругом основании, загруженной одной силой P (рис. 96), получаем следующие уравнения:

$$y = - \frac{P}{8EJk^3} e^{-kx} (\sin kx + \cos kx) = - \frac{P}{8EJk^3} \eta; \quad (6)$$

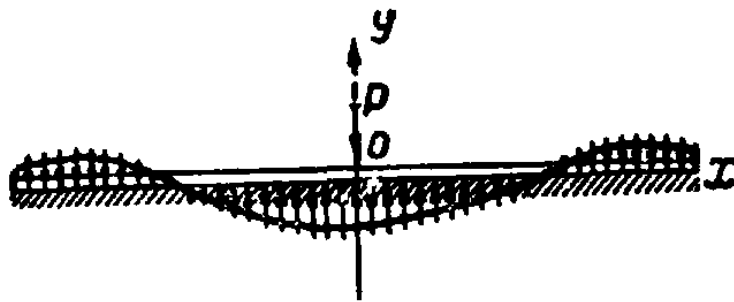


Рис. 96. Схема прогиба балки и отпора грунта.

$$\theta = \frac{P}{4EJk^2} e^{-kx} \sin kx = \frac{P}{4EJk^2} \eta_3; \quad (7)$$

$$M_{(x)} = \frac{P}{4k} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) = \frac{P}{4k} \eta_1; \quad (8)$$

$$Q_{(x)} = \frac{P}{2} e^{-kx} \cos kx = -\frac{P}{2} \eta_2. \quad (9)$$

Таким образом, напряженное состояние и деформации балки на упругом основании всецело определяются нагрузкой и коэффициентом k , зависящим от жесткости балки и упругого основания.

Значение величин η , η_1 , η_2 и η_3 в функции аргумента kx приведены в таблице 38.

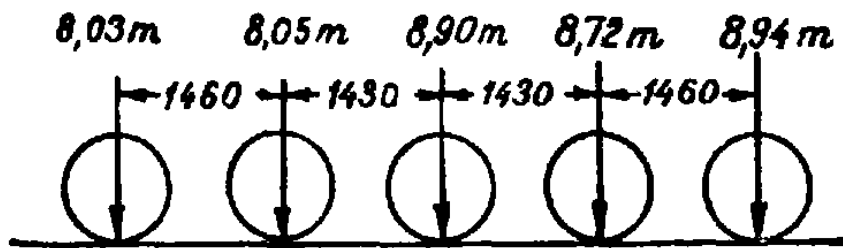


Рис. 97. Схема колесных пар паровоза.

Пример 2. Определить напряжение σ в железнодорожном рельсе типа 11 А от статической нагрузки паровозом Э^М. Схема нагрузки дана на рис. 97.

Решение. Определим изгибающий момент в сечении под средним колесом как сумму моментов от действия отдельных грузов. Для того чтобы воспользоваться формулой (8), необходимо при учете влияния каждого колеса располагать начало координат под ним, а за абсциссу x принимать расстояние от этого колеса до того сечения, где вычисляется момент.

Коэффициент α может быть принят равным 300 кг/см^2 . Жесткость рельса $EJ = 2 \cdot 10^6 \cdot 1223 \text{ кгсм}^2$; тогда $k = \frac{1}{24} \text{ 1/см}$. Изгибающий момент в сечении рельса под третьим колесом равен:

$$M = \sum \frac{P}{4k} \eta_1.$$

kx	η	η_1	η_2	η_3	kx
0,0	1,00000	0,0000	1,0000	1,0000	0,0
0,1	0,9907	0,0903	0,8100	0,9003	0,1
0,2	0,9651	0,1627	0,6398	0,8024	0,2
0,3	0,9267	0,2189	0,4888	0,7077	0,3
0,4	0,8784	0,2610	0,3564	0,6174	0,4
0,5	0,8231	0,2908	0,2415	0,5323	0,5
0,6	0,7628	0,3099	0,1431	0,4530	0,6
0,7	0,6997	0,3199	0,0599	0,3708	0,7
$\frac{1}{4}\pi$	0,6448	0,3224	0,0000	0,3224	0,785
0,8	0,6354	0,3223	-0,0093	0,3131	0,8
0,9	0,5712	0,3185	-0,0657	0,2527	0,9
1,0	0,5083	0,3096	-0,1108	0,1988	1,0
1,1	0,4476	0,2967	-0,1457	0,1510	1,1
1,2	0,3899	0,2807	-0,1716	0,1091	1,2
1,3	0,3355	0,2626	-0,1897	0,0729	1,3
1,4	0,2849	0,2430	-0,2011	0,0419	1,4
1,5	0,2384	0,2226	-0,2068	0,0158	1,5
$\frac{1}{2}\pi$	0,2079	0,2079	-0,2079	0,0000	1,571
1,6	0,1959	0,2018	-0,2077	-0,0059	1,6
1,7	0,1576	0,1812	-0,2047	-0,0235	1,7
1,8	0,1234	0,1610	-0,1985	-0,0376	1,8
1,9	0,0932	0,1415	-0,1899	-0,0484	1,9
2,0	0,0667	0,1231	-0,1794	-0,0563	2,0
2,1	0,0439	0,1057	-0,1675	-0,0618	2,1
2,2	0,0244	0,0896	-0,1548	-0,0652	2,2
2,3	0,0080	0,0748	-0,1416	-0,0668	2,3
$\frac{3}{4}\pi$	0,0000	0,0670	-0,1340	-0,0670	2,356

kx	η	η_1	η_2	η_1	kx
2,4	-0,0056	0,0613	-0,1282	-0,0669	2,4
2,5	-0,0166	0,0491	-0,1149	-0,0658	2,5
2,6	-0,0254	0,0383	-0,1019	-0,0636	2,6
2,7	-0,0320	0,0287	-0,0895	-0,0608	2,7
2,8	-0,0369	0,0204	-0,0777	-0,0573	2,8
2,9	-0,0403	0,0132	-0,0666	-0,0534	2,9
3,0	-0,04226	0,00703	-0,05632	-0,04929	3,0
3,1	-0,04314	0,00187	-0,04688	-0,04501	3,1
3,2	-0,04321	0,00000	-0,04321	-0,04321	3,142
3,2	-0,04307	-0,00238	-0,03831	-0,04069	3,2
3,3	-0,04224	-0,00582	-0,03060	-0,03642	3,3
3,4	-0,04079	-0,00853	-0,02374	-0,03227	3,4
3,5	-0,03887	-0,01059	-0,01769	-0,02828	3,5
3,6	-0,03659	-0,01209	-0,01241	-0,02450	3,6
3,7	-0,03407	-0,01310	-0,00787	-0,02097	3,7
3,8	-0,03138	-0,01369	-0,00401	-0,01770	3,8
3,9	-0,02862	-0,01392	-0,00077	-0,01469	3,9
$5/4\pi$	-0,02786	-0,01393	0,00000	-0,01393	3,927
4,0	-0,02583	-0,01386	0,00189	-0,01197	4,0
4,1	-0,02309	-0,01356	0,00403	-0,00953	4,1
4,2	-0,02042	-0,01307	0,00572	-0,00735	4,2
4,3	-0,01787	-0,01243	0,00699	-0,00544	4,3
4,4	-0,01546	-0,01168	0,00791	-0,00377	4,4
4,5	-0,01320	-0,01086	0,00852	-0,00234	4,5
4,6	-0,01112	-0,00999	0,00786	-0,00113	4,6
4,7	-0,00921	-0,00909	0,00898	-0,00011	4,7
$6/4\pi$	-0,00898	-0,00898	0,00898	0,00000	4,712

kx	η	η_1	η_2	η_3	kx
4,8	-0,00748	-0,00820	0,00892	0,00072	4,8
4,9	-0,00593	-0,00732	0,00870	0,00139	4,9
5,0	-0,00455	-0,00646	0,00837	0,00191	5,0
5,1	-0,00334	-0,00564	0,00795	0,00230	5,1
5,2	-0,00229	-0,00487	0,00746	0,00259	5,2
5,3	-0,00139	-0,00415	0,00692	0,00277	5,3
5,4	-0,00063	-0,00349	0,00636	0,00287	5,4
$7/4\pi$	0,00000	-0,00290	0,00579	0,00290	5,498
5,5	0,00001	-0,00288	0,00578	0,00290	5,5
5,6	0,00053	-0,00233	0,00520	0,00287	5,6
5,7	0,00095	-0,00184	0,00464	0,00279	5,7
5,8	0,00127	-0,00141	0,00409	0,00268	5,8
5,9	0,00152	-0,00102	0,00356	0,00254	5,9
6,0	0,00169	-0,00069	0,00307	0,00238	6,0
6,1	0,00180	-0,00069	0,00261	0,00221	6,1
6,2	0,00185	-0,00017	0,00219	0,00202	6,2
$8/4\pi$	0,00187	0,00000	0,00187	0,00187	6,283
6,3	0,00187	0,00003	0,00181	0,00184	6,3
6,4	0,00184	0,00019	0,00146	0,00165	6,4
6,5	0,00179	0,00032	0,00115	0,00147	6,5
6,6	0,00172	0,00042	0,00087	0,00129	6,6
6,7	0,00162	0,00050	0,00063	0,00113	6,7
6,8	0,00152	0,00055	0,00042	0,00097	6,8
6,9	0,00141	0,00058	0,00024	0,00082	6,9
7,0	0,00129	0,00060	0,00009	0,00069	7,0
$9/4\pi$	0,00120	0,00060	0,00000	0,00060	7,069

Расстояния x от этого сечения до каждого колеса и соответственно величины kx равны:

$$x_1 = 289 \text{ см}; \quad x_2 = 143 \text{ см}; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 143 \text{ см};$$

$$x_5 = 289 \text{ см}; \quad kx_1 = \frac{289}{24} = 12,0; \quad kx_2 = \frac{143}{24} = 5,9;$$

$$kx_3 = 0; \quad kx_4 = 5,9; \quad kx_5 = 12,0.$$

При $kx > 7$ величинами η_1 практически можно пренебречь.

Таким образом, давление крайних колес не вызывает напряжений в рассматриваемом сечении. Влияние остальных колес характеризуется величинами:

$$\eta_1^{\text{II}} = 0,00356 = \eta_1^{\text{IV}}; \quad \eta_1^{\text{III}} = 1,0.$$

Таким образом,

$$M = \frac{24}{4} [(8\,720 + 8\,050) \cdot 0,00356 + 8\,900 \cdot 1] = 53\,800 \text{ кгсм.}$$

Наибольшее воздействие оказывает колесо, стоящее над рассматриваемым сечением; смежные колеса, даже сравнительно близко расположенные, оказывают ничтожное влияние на напряжение в этом сечении.

Так как $W = 180 \text{ см}^3$, то $\sigma = 299 \text{ кг/см}^2$.

Глава VIII. НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статически неопределимая балка, имеющая более двух опор, называется неразрезной балкой (рис. 98).

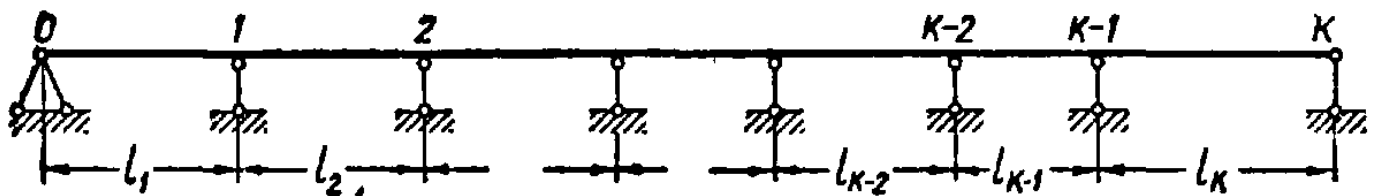


Рис. 98. Схема неразрезной балки.

Такие балки находят широкое применение в различных конструкциях благодаря своим экономическим достоинствам,

обусловленным более выгодным распределением изгибающих моментов по сравнению с разрезной балкой.

Одна из опор в неразрезной балке делается всегда неподвижной для обеспечения неподвижности балки в горизонтальном направлении, а все остальные опоры — подвижными, чтобы в балке не появлялись продольные усилия под влиянием изменения температуры.

Степень статической неопределимости неразрезной балки, у которой крайние опоры шарнирно опертые, равна числу промежуточных опор. Защемление какого-либо конца балки повышает степень ее статической неопределимости на единицу.

В дальнейшем при изучении неразрезной балки приняты следующие ограничения:

1. Все опоры неразрезной балки лежат на одной прямой линии.
2. Все опоры являются абсолютно жесткими, т. е. неподвижными в вертикальном направлении.
3. Балка имеет постоянную жесткость EJ по всей длине.

2. УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ

За лишние неизвестные в неразрезной балке целесообразнее всего принять внутренние силовые факторы, а именно опорные моменты, возникающие при нагружении балки в ее сечениях над промежуточными опорами.

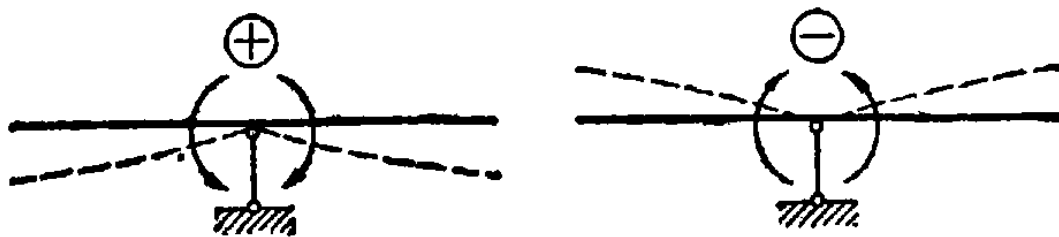


Рис. 99. Правило знаков для опорного момента.

Опорный момент примем положительным, если он изгибает примыкающие к опоре пролеты выпуклостью вниз, и отрицательным — выпуклостью вверх (рис. 99).

После определения опорных моментов расчет неразрезных балок сводится к расчету простых двухопорных балок с про-

летами l_1, l_2, l_3 и т. д. Так как направления опорных моментов заранее неизвестны, то считаем их положительными. Если после определения моментов некоторые из них или все получатся отрицательными, это будет означать, что в действительности они направлены в обратную сторону.

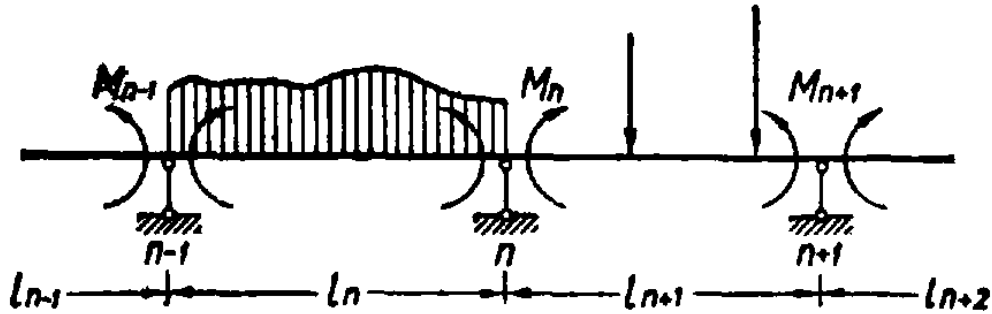


Рис. 100. К уравнению трех моментов.

Для балки с постоянной жесткостью зависимость между опорными моментами трех соседних опор неразрезной балки (рис. 100) выражается уравнением (1), которое называется уравнением трех моментов:

$$M_{n-1} l_n + 2M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} = -6R_n^\Phi, \quad (1)$$

где: M_{n-1}, M_n, M_{n+1} — моменты на опорах $n-1, n$ и $n+1$;
 l_n, l_{n+1} — длины двух последовательных пролетов;
 R_n^Φ — полная фиктивная реакция на опоре n от эпюр моментов, вызванных внешней нагрузкой, действующей на левом и правом пролетах от опоры n .

Неразрезные балки с различными моментами инерции в пролетах

Если момент инерции неразрезной балки меняется от пролета к пролету, оставаясь постоянным внутри каждого пролета, то уравнение трех моментов имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} M_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2M_n \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + M_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} = \\ = -6 \left(\frac{B_{n,n}^\Phi}{J_n} + \frac{A_{n,n+1}^\Phi}{J_{n+1}} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

где J_n и J_{n+1} — моменты инерции n и $n+1$ пролетов.
 Полная фиктивная реакция на опоре n (рис. 101):

$$R_n^\Phi = B_{n,n}^\Phi + A_{n,n+1}^\Phi. \quad (3)$$

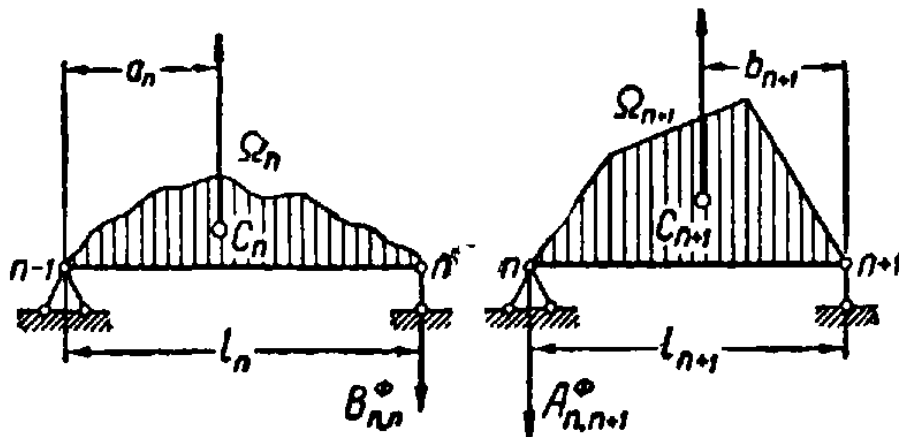


Рис. 101. Определение фиктивных опорных реакций.

Первый подстрочный индекс относится к опоре, а второй — к пролету. Таким образом:

$B_{n,n}^\Phi$ — фиктивная реакция на опоре n n -го пролета, рассматриваемого как простая балка на двух опорах;

$A_{n,n+1}^\Phi$ — фиктивная реакция на опоре n $n+1$ -го пролета, рассматриваемого таким же образом.

Фиктивные реакции $B_{n,n}^\Phi$ и $A_{n,n+1}^\Phi$ могут быть найдены из следующих выражений (рис. 101):

$$\left. \begin{aligned} B_{n,n}^\Phi &= \frac{\Omega_n a_n}{l_n}, \\ A_{n,n+1}^\Phi &= \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где: Ω_n — площадь эпюры моментов от заданной нагрузки в пролете n ;

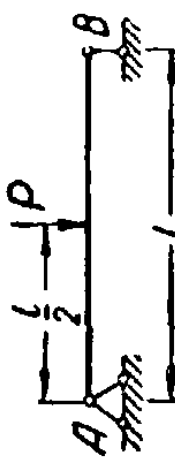
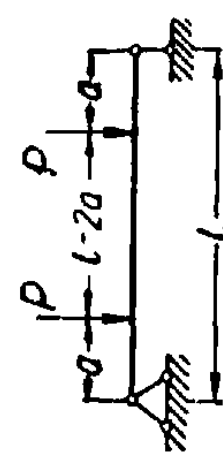

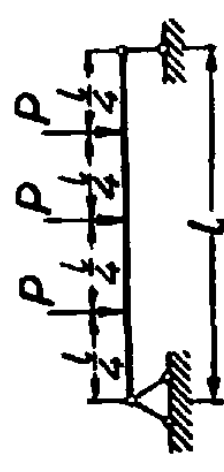
a_n — расстояние центра тяжести этой площади от левой опоры $n-1$;

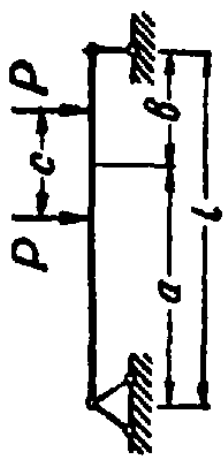
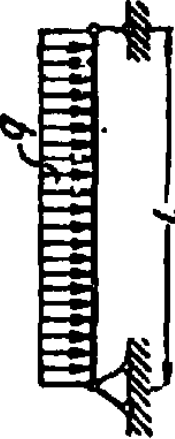
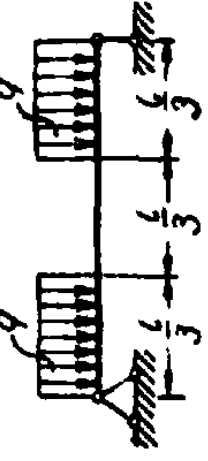
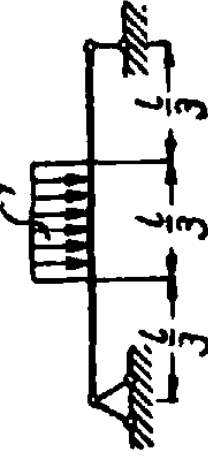
Ω_{n+1} — площадь эпюры моментов от заданной нагрузки, действующей в пролете $n+1$;

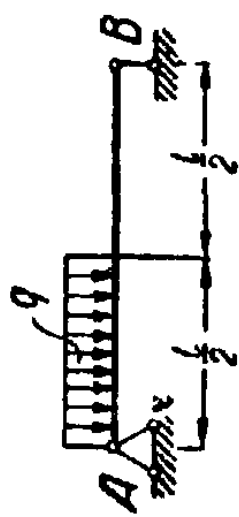
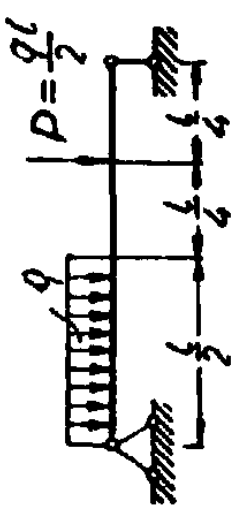
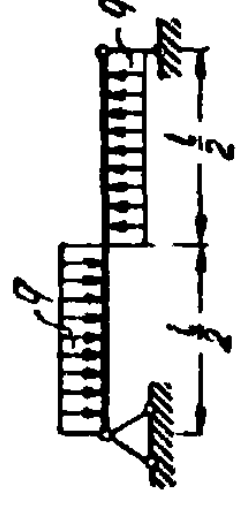
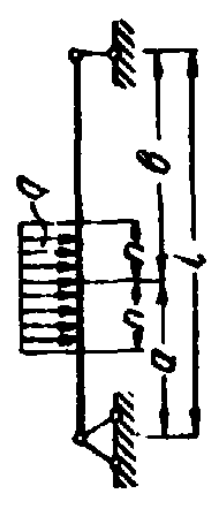
b_{n+1} — расстояние центра тяжести площади Ω_{n+1} от правой опоры $n+1$.

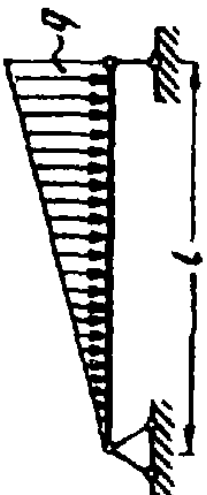
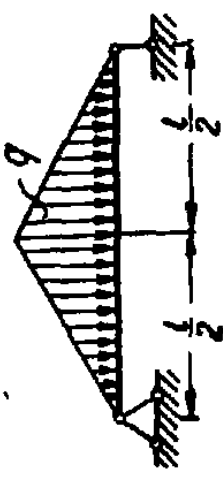
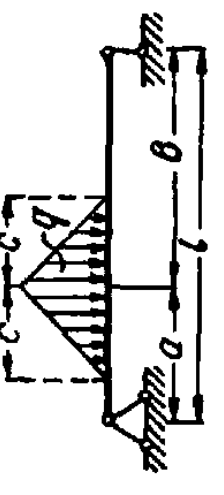
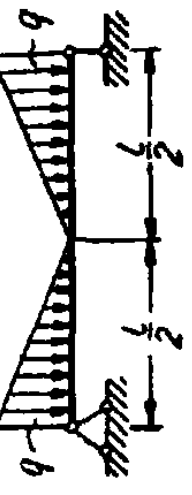
Значения фиктивных реакций левой и правой опор (A_Φ и B_Φ) для различных случаев нагружения приведены в таблице 39.

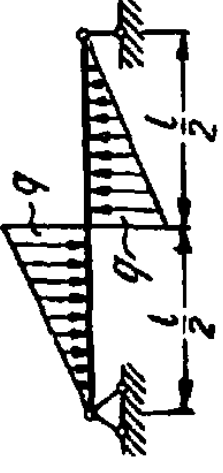
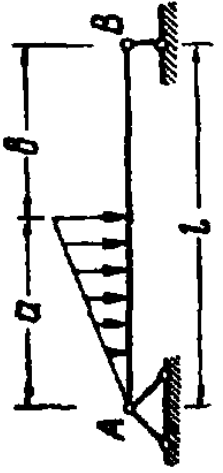
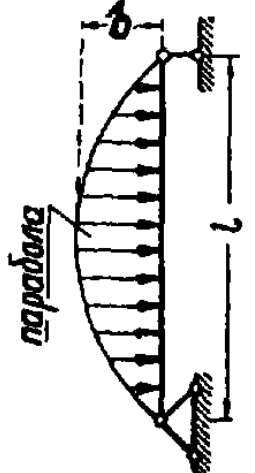

Фиктивные опорные реакции для различных случаев загрузки действительной балки

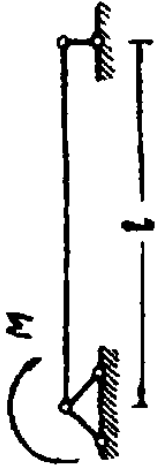

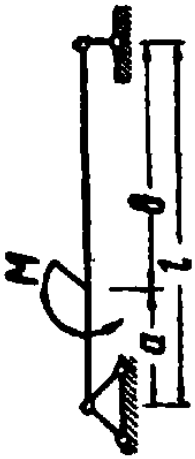
№ п/п	Схема нагрузки	Аф	Вф
1		$\frac{Pl^2}{16}$	$\frac{Pl^2}{16}$
2		$\frac{Pa(l-a)}{2}$	$\frac{Pa(l-a)}{2}$
3		$\frac{Pab(l+b)}{6l}$	$\frac{Pab(l+a)}{6l}$
4		$\frac{5}{32} Pl^2$	$\frac{5}{32} Pl^2$

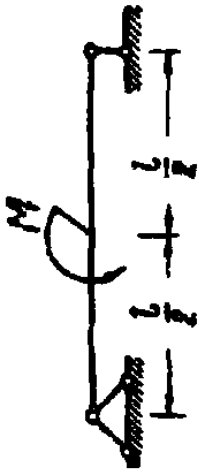
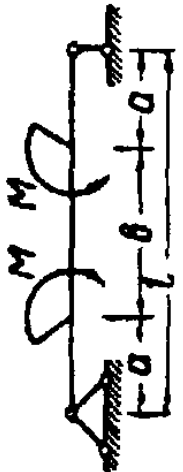
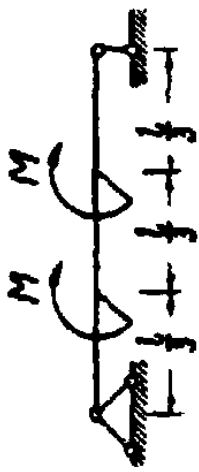
№ п/п	Схема нагрузки	Аф	Вф
5		$\frac{Pb}{6l} \left\{ 2a(l+b) - \frac{3c^2}{2} \right\}$	$\frac{Pa}{6l} \left\{ 2b(l+a) - \frac{3c^2}{2} \right\}$
6		$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$
7		$\frac{7}{324} ql^3$	$\frac{7}{324} ql^3$
8		$\frac{13}{648} ql^3$	$\frac{13}{648} ql^3$

№ п/п	Схема нагрузки	Aφ	Bφ
9		$\frac{9}{384} ql^3 = \frac{3}{128} ql^3$	$\frac{7}{384} ql^3$
10		$\frac{51}{768} ql^3 = \frac{17}{256} ql^3$	$\frac{35}{768} ql^3$
11		$\frac{ql^3}{192}$	$-\frac{ql^3}{192}$
12		$\frac{qnb(l^2 - b^2 - n^2)}{3l}$	$\frac{qna(l^2 - b^2 - n^2)}{3l}$

№ п/п	Схема нагрузки	Аф	Вф
13		$\frac{7}{360} ql^3$	$\frac{8}{360} ql^3 = \frac{ql^3}{45}$
14		$\frac{5}{192} ql^3$	$\frac{5}{192} ql^3$
15		$\frac{qc^2b}{12} [2\alpha(1+\beta) - \gamma^2]$ $\gamma = \frac{c}{l}; \beta = \frac{b}{l}; \alpha = \frac{a}{l}$	$\frac{qc^2a}{12} [2\beta(1+\alpha) - \gamma^2]$ $\gamma = \frac{c}{l}; \beta = \frac{b}{l}; \alpha = \frac{a}{l}$
16		$\frac{ql^3}{64}$	$\frac{ql^3}{64}$

№ п/п	Схема нагрузки	АФ	ВФ
17		$\frac{7}{2880} ql^3$	$-\frac{7}{2880} ql^3$
18		$\frac{qa^2l}{360} \left(12 \frac{a^2}{l^2} - 45 \frac{a}{l} + 40 \right)$	$\frac{qa^2l}{90} \left(5 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$
19		$\frac{ql^3}{20}$	$\frac{ql^3}{20}$
20		$\frac{Ml}{2}$	$\frac{Ml}{2}$

№ п/п	Схема нагрузки	A _φ	B _φ
21		$\frac{2Ml}{6} = \frac{Ml}{3}$	$\frac{Ml}{6}$
22		$\frac{(2M_1 + M_2)l}{6}$	$\frac{(M_1 + 2M_2)l}{6}$
23		$\frac{M}{6l} (l^3 - 3a^3)$	$\frac{M}{6l} (3a^3 - l^3)$

№ п/п	Схема нагрузки	Аф	Вф
24	 <p>A horizontal beam is supported by a pin support on the left and a roller support on the right. A downward-pointing curved arrow labeled 'M' is positioned at the center of the beam. Two vertical tick marks on the beam divide it into two equal segments, each labeled 'l/2'.</p>	$\frac{Ml}{24}$	$-\frac{Ml}{24}$
25	 <p>A horizontal beam is supported by a pin support on the left and a roller support on the right. Three downward-pointing curved arrows labeled 'M' are positioned along the beam. The beam is divided into three segments by vertical tick marks: the first segment on the left is labeled 'a', the middle segment is labeled 'l', and the final segment on the right is labeled 'a'.</p>	$\frac{Mb}{2}$	$\frac{Mb}{2}$
26	 <p>A horizontal beam is supported by a pin support on the left and a roller support on the right. Three downward-pointing curved arrows labeled 'M' are positioned along the beam. The beam is divided into three segments by vertical tick marks: the first segment on the left is labeled 'f', the middle segment is labeled 'l', and the final segment on the right is labeled 'f'.</p>	$-\frac{Ml}{18}$	$\frac{Ml}{18}$

Так как уравнение трех моментов может быть написано для каждой пары соседних пролетов (рис. 102), то очевидно, что число таких уравнений равно числу промежуточных опор ($k - 2$), т. е. числу лишних неизвестных.

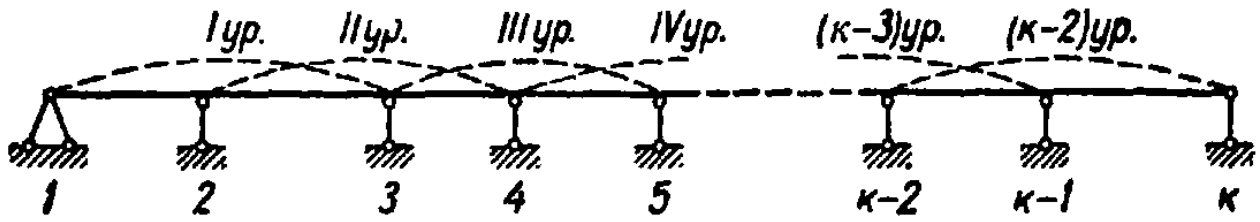


Рис. 102. Число уравнений трех моментов, которое можно написать для неразрезной балки.

Решив систему $k - 2$ уравнений с $k - 2$ неизвестными опорными моментами, определим моменты на всех промежуточных опорах, т. е. найдем все лишние неизвестные.

Применение теоремы трех моментов для определения опорных моментов покажем на примере.

Пример 1 На рис. 103 изображена схема неразрезной балки, опирающейся на пять опор, а также показаны нагрузки, действующие в пролетах, и длины пролетов. Требуется определить опорные моменты.

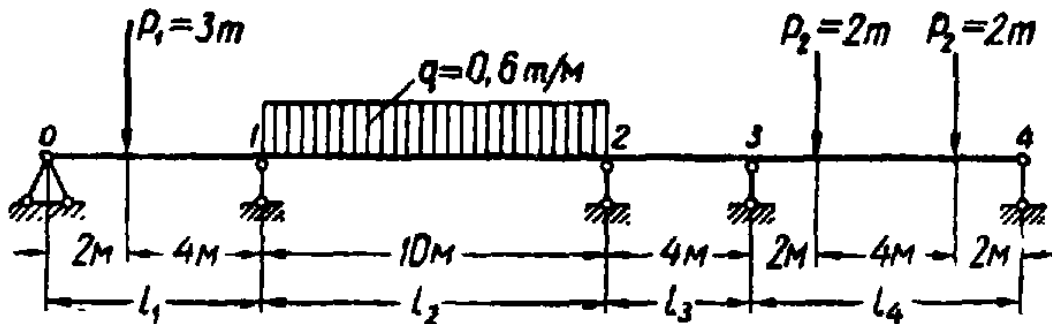


Рис. 103. К примеру 1.

Решение. Записываем в общем виде уравнения трех моментов для каждых двух последовательных пролетов:

$$\left. \begin{aligned} M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -6R_1^{\Phi}; \\ M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -6R_2^{\Phi}; \\ M_2 l_3 + 2M_3 (l_3 + l_4) + M_4 l_4 &= -6R_3^{\Phi}. \end{aligned} \right\} (a)$$

В нашем примере: $M_0 = 0$; $M_4 = 0$; $l_1 = 6$ м; $l_2 = 10$ м; $l_3 = 4$ м; $l_4 = 8$ м.

Полные фиктивные реакции находим по формуле (3), пользуясь таблицей 39.

$$\left. \begin{aligned} R_1^\Phi &= B_{1,1}^\Phi + A_{1,2}^\Phi = \frac{P_1 a_1}{6l_1} (l_1^2 - a_1^2) + \frac{ql_2^3}{24} = \\ &= \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 6} (6^2 - 2^2) + \frac{0,6 \cdot 10^3}{24} = \frac{182}{6}; \\ R_2^\Phi &= B_{2,2}^\Phi + A_{2,3}^\Phi = \frac{ql_2^3}{24} + 0 = \frac{0,6 \cdot 10^3}{24} = \frac{150}{6}; \\ R_3^\Phi &= B_{3,3}^\Phi + A_{3,4}^\Phi = 0 + \frac{P_2 a_4}{2} (l_4 - a_4) = \frac{2 \cdot 2}{2} (8 - 2) = 12. \end{aligned} \right\} (6)$$

После подстановки числовых значений и сокращения система уравнений (а) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} 16M_1 + 5M_2 &= -91; \\ 5M_1 + 14M_2 + 2M_3 &= -75; \\ M_2 + 6M_3 &= -18. \end{aligned} \right\} (в)$$

Решив полученную систему уравнений (в), определим неизвестные опорные моменты:

$$\begin{aligned} M_1 &= -4,640 \text{ тм}; \\ M_2 &= -3,351 \text{ тм}; \\ M_3 &= -2,441 \text{ тм}. \end{aligned}$$

После подстановки найденных значений опорных моментов во все уравнения (в) трех моментов получим:

$$\begin{aligned} 16 \cdot (-4,640) + 5(-3,351) &= -90,995. \\ 5 \cdot (-4,640) + 14 \cdot (-3,351) + 2(-2,441) &= -74,996. \\ -3,351 + 6(-2,441) &= -17,997. \end{aligned}$$

В пределах точности расчета можно считать, что система уравнений решена правильно.

Упрощенный прием решения системы уравнений трех моментов

Если неразрезная балка имеет большое число пролетов, то возникает необходимость решать систему совокупных уравнений со многими неизвестными, что связано с громоздкой вычислительной работой.

Примем $\alpha_1 = 1$, тогда, разрешая последовательно систему уравнений, (Б) получим:

$$\alpha_1 = 1;$$

$$\alpha_2 = -\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = -2\left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right);$$

$$\alpha_3 = -\frac{2(l_2 + l_3)}{l_3} \alpha_2 - \frac{l_2}{l_3} \alpha_1 = -2\left(\frac{l_2}{l_3} + 1\right) \alpha_2 - \frac{l_2}{l_3} \alpha_1;$$

$$\alpha_4 = -2\left(\frac{l_3}{l_4} + 1\right) \alpha_3 - \frac{l_3}{l_4} \alpha_2 \text{ и т. д.}$$

Это решение можно объединить общей формулой следующего вида:

$$\alpha_n = -2\left(\frac{l_{n-1}}{l_n} + 1\right) \alpha_{n-1} - \frac{l_{n-1}}{l_n} \alpha_{n-2}. \quad (5)$$

Вычислив таким образом все параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\kappa-1}$ переходим к определению опорных моментов. Уравнение (А) при принятых значениях параметров получает следующий вид:

$$\begin{aligned} & [l_{\kappa-1} \alpha_{\kappa-2} + 2(l_{\kappa-1} + l_{\kappa}) \alpha_{\kappa-1}] M_{\kappa-1} = \\ & = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_{\kappa-1} \alpha_{\kappa-1} = \sum_{i=1}^{\kappa-1} c_i \alpha_i. \end{aligned}$$

Из него непосредственно находим опорный момент $[\kappa-1]^{\text{й}}$ опоры:

$$M_{\kappa-1} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa-1} c_i \alpha_i}{l_{\kappa-1} \alpha_{\kappa-2} + 2(l_{\kappa-1} + l_{\kappa}) \alpha_{\kappa-1}}. \quad (6)$$

Зная $M_{\kappa-1}$, из последнего уравнения трех моментов (I) вычисляем $M_{\kappa-2}$, из предпоследнего находим $M_{\kappa-3}$ и т. д.; при этом каждый раз приходится решать уравнение с одним неизвестным.

Пример 2. Применение рассмотренного приема покажем на уже разобранным нами примере 1 (см. рис. 103). Перепишем систему уравнений трех моментов:

$$\begin{aligned} 16M_1 + 5M_2 &= -91; & l_1 &= 6 \text{ м. } l_2 = 10 \text{ м;} \\ 5M_1 + 14M_2 + 2M_3 &= -75; & (a) \quad l_3 &= 4 \text{ м; } l_4 = 8 \text{ м.} \\ M_2 + 6M_3 &= -18. \end{aligned}$$

$$c_1 = -6R_1^{\Phi} = -6 \cdot \frac{182}{6} = -182; \quad \alpha_1 = 1.$$

$$c_2 = -6R_2^{\Phi} = -6 \cdot \frac{150}{6} = -150; \quad \alpha_2 = -2\left(\frac{l_1}{l_2} + 1\right) = -2\left(\frac{6}{10} + 1\right) = -3,2.$$

$$c_3 = -6R_3^{\Phi} = -6 \cdot 12 = -72;$$

$$\alpha_3 = -2\left(\frac{l_2}{l_3} + 1\right)\alpha_2 - \frac{l_2}{l_3}\alpha_1 = -2\left(\frac{10}{4} + 1\right)(-3,2) - \frac{10}{4} \cdot 1 = 19,9.$$

Подставляя данные в уравнение (6), определим опорный момент третьей опоры:

$$\begin{aligned} M_3 &= \frac{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3}{l_3\alpha_2 + 2(l_3 + l_4)\alpha_3} = \frac{-182 \cdot 1 + 150 \cdot (-3,2) - 72 \cdot 19,9}{4(-3,2) + 2(4 + 8) \cdot 19,9} = - \\ &= -\frac{1134,8}{464,8} = -2,441 \text{ тм,} \end{aligned}$$

что совпадает с найденным ранее другим способом M_3 в предыдущем примере. Зная M_3 , подстановкой в уравнения трех моментов (а) определяем сначала M_2 , а затем M_1 .

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ В НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКЕ

Полная опорная реакция на n -й опоре неразрезной балки (рис. 104, а) определяется из рассмотрения двух смежных пролетов l_n и l_{n+1} , которые заменяются двумя простыми балками (рис. 104, б), нагруженными данными внешними силами и опорными моментами M_{n-1} , M_n и M_{n+1} , которые принимаем положительными.

В общем виде формула для определения полной действительной опорной реакции на n -й опоре пишется так:

$$R_n = R_n^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}, \quad (7)$$

где $R_n^0 = R_{n,n}^0 + R_{n,n+1}^0$ (рис. 104, в) — сумма правой реакции левой балки и левой реакции правой балки только от заданных нагрузок, а остальные члены — реакции от опорных моментов (рис. 104, г и д).

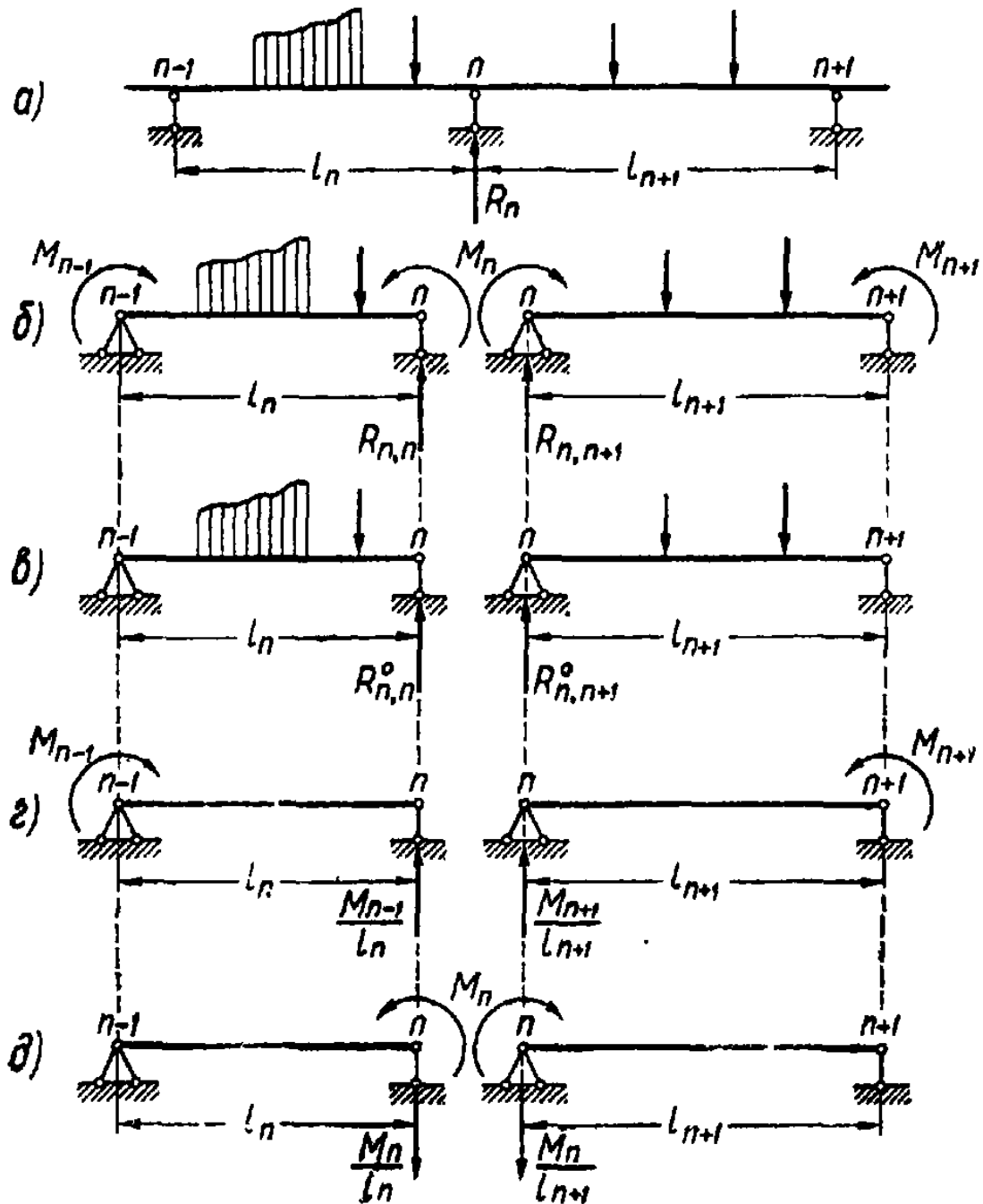


Рис. 104. Определение опорных реакций в неразрезной балке.

При пользовании формулой (7) опорные моменты берутся с полученными для них знаками.

При определении реакций для нулевой и последней k -й опор формула (7) получает более простой вид, так как слева от нулевой опоры и справа от последней k -й опоры пролетов нет и, кроме того, $M_0 = M_k = 0$ и в этом случае:

$$R_0 = R_0^0 + \frac{M_1}{l_1}. \quad (7') \quad R_k = R_k^0 + \frac{M_{k-1}}{l_k}. \quad (7'')$$

В качестве контроля правильности определения опорных реакций можно воспользоваться равенством:

$$\Sigma \text{ реакций} = - \Sigma \text{ нагрузок}. \quad (8)$$

Следует, однако, отметить, что удовлетворение этого равенства не гарантирует правильности определения опорных моментов.

Пример 3. Определить опорные реакции для балки, рассмотренной в примере 1 (см рис. 103).

Решение. Опорные моменты для этой балки уже определены, и они равны:

$$M_1 = -4,640 \text{ тм}; \quad M_2 = -3,351 \text{ тм} \text{ и } M_3 = -2,441 \text{ тм}.$$

Опорные реакции находим, пользуясь формулами (7), (7') и (7''):

$$R_0 = R_0^0 + \frac{M_1}{l_1} = 2 + \frac{-4,64}{6} = \underline{1,23 \text{ т}};$$

$$R_1 = R_1^0 + \frac{M_0 - M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = 4 + \frac{4,64}{6} + \frac{-3,351 + 4,640}{10} = \underline{4,90 \text{ т}};$$

$$R_2 = R_2^0 + \frac{M_1 - M_2}{l_2} + \frac{M_3 - M_2}{l_3} = 3 + \frac{-4,640 + 3,351}{10} + \frac{-2,441 + 3,351}{4} = \underline{3,10 \text{ т}};$$

$$R_3 = R_3^0 + \frac{M_2 - M_3}{l_3} + \frac{M_4 - M_3}{l_4} = 2 + \frac{-3,351 + 2,441}{4} + \frac{2,441}{8} = \underline{2,08 \text{ т}};$$

$$R_4 = R_4^0 + \frac{M_3}{l_4} = 2 + \frac{-2,441}{8} = \underline{1,69 \text{ т}}.$$

$$\text{Проверка. } 1,23 + 4,90 + 3,10 + 2,08 + 1,69 = -(-3 - 6 - 2 - 2) \\ \underline{13 = 13.}$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ И ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР

После определения опорных моментов изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении любого пролета (рис. 105) могут быть найдены по формулам (9) и (10):

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} x. \quad (9)$$

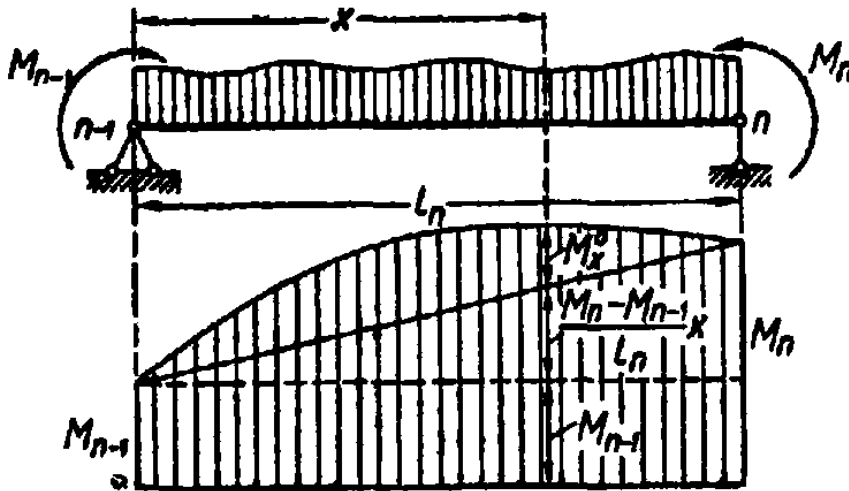


Рис. 105. Выражение для изгибающего момента в произвольном сечении.

По теореме Журавского:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \quad (10)$$

где M_x^0 и Q_x^0 — изгибающий момент и поперечная сила от внешней нагрузки, вычисленные как для простой балки.

Для нахождения сечения с наибольшим изгибающим моментом в пролете следует правую часть выражения (10) приравнять нулю и вычислить соответствующее значение x . Подставив полученное значение x в уравнение (9), определим M_{max} .

Расчетным значением момента будет наибольший по абсолютному значению момент из числа опорных или пролетных.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

После того как определены полные реакции всех опор, построение эпюры Q никаких трудностей не представляет и производится обычным порядком, как для статически определимых балок.

Эпюру изгибающих моментов удобнее всего построить путем алгебраического суммирования ординат двух эпюр для каждого пролета: одной от нагрузки на данном пролете и другой от опорных моментов.

Построение эпюр M и Q покажем на примере.

Пример 4. Для балки, показанной на рис. 103 (пример 1), построить эпюры M и Q и определить величину расчетного момента.

Решение. Для этой балки опорные моменты и опорные реакции уже вычислены:

$$R_0 = 1,23 \text{ т}; R_1 = 4,90 \text{ т}; R_2 = 3,10 \text{ т}; R_3 = 2,08 \text{ т}; R_4 = 1,69 \text{ т}.$$

$$M_0 = 0; M_1 = -4,640 \text{ тм}; M_2 = -3,351 \text{ тм}; M_3 = -2,441 \text{ тм}; M_4 = 0.$$

На рис. 106, б показана эпюра поперечных сил Q , построенная по тем же правилам, что и для простой балки, так как опорные реакции известны.

Для построения эпюры изгибающих моментов отложим на вертикалях (от выбранной горизонтальной оси $0' - 4'$), под каждой опорой ординаты, равные соответствующим опорным моментам с учетом их знаков (рис. 106) (отрицательные моменты условимся откладывать вверх, а положительные — вниз), и соединим концы полученных ординат пунктирными прямыми линиями. Полученная ломаная линия $0' - 1' - 2' - 3' - 4'$, соединяющая вершины опорных моментов, изображает эпюру изгибающих моментов, вызванных опорными моментами, и называется линией опорных моментов. Теперь необходимо на эпюру опорных моментов наложить эпюры моментов от нагрузки. Для этого от линии опорных моментов в каждом пролете откладываем ординаты эпюр моментов M_0 (для отдельных разрезных балок), вызванных заданной нагрузкой. Положительные изгибающие моменты откладываем вниз, а отрицательные — вверх. Так от точки a_1 на отрезке линии опорных моментов $0' - 1'$ (под силой P) откладываем вниз отрезок:

$$a_1 a_2 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l_1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{6} = 4,000 \text{ тм}.$$

Посредине второго пролета от точки b_1 на отрезке линии опорных моментов $1' - 2'$ откладываем вниз отрезок:

$$b_1 b_2 = \frac{q l_2^2}{8} = \frac{0,6 \cdot 10^2}{8} = 7,500 \text{ тм}.$$

От точек c_1 и d_1 на отрезке линии опорных моментов $3' - 4'$ откладываем вниз отрезки:

$$c_1c_2 = d_1d_2 = P_2a_4 = 2 \cdot 2 = 4.000 \text{ мм.}$$

Ординаты, заключенные между пролетными эпюрами от нагрузки и осью дают искомую окончательную спрямленную эпюру изгибающих моментов. На рис. 106, в суммарная эпюра изгибающих моментов с ординатами, отложенными от горизонтальной оси, заштрихована. При этом эпюра

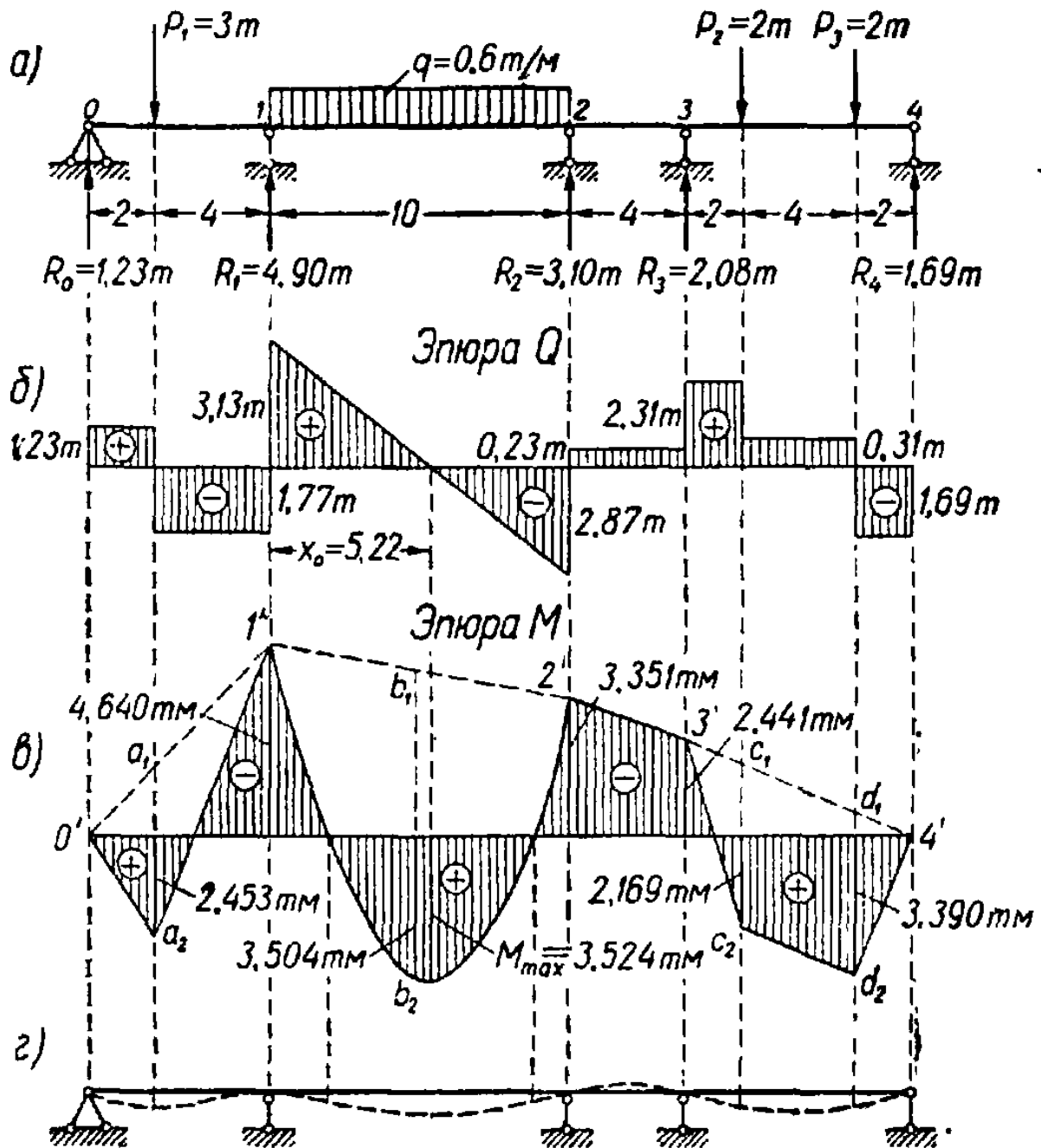


Рис. 106. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки.

оказывается расположенной со стороны растянутого волокна, т. е. с выпуклой стороны балки.

По эпюре моментов легко составить представление о характере изогнутой оси. При принятом правиле знаков для изгибающего момента упругая линия обращена выпуклостью в ту же сторону, в какую отложены ординаты эпюры M . Нулевые точки эпюры соответствуют точкам перегиба линии прогибов.

На рис. 106, *г* показан примерный вид изогнутой оси.

Для определения максимального изгибающего момента во втором пролете напишем выражение изгибающего момента в этом пролете в общем виде по формуле (9), приняв $n = 2$:

$$M_x = M_x^0 + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} x = \frac{ql_2}{2} x - \frac{qx^2}{2} + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} x.$$

Подставляя числовые данные примера, получим:

$$M_x = -0,3x^2 + 3,13x - 4,640; \quad (A)$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -0,6x + 3,13. \quad (B)$$

Значение x , при котором поперечная сила $Q_x = 0$, обозначим через x_0 , тогда:

$$-0,6x_0 + 3,13 = 0 \text{ и } x_0 = 5,22 \text{ м.}$$

Подставляя значение $x = x_0 = 5,22$ м в выражение (A), получим:

$$M_{max} = -0,3 \cdot 5,22^2 + 3,13 \cdot 5,22 - 4,64 = 3,524 \text{ тм;}$$

$$M_{расч} = M_1 = 4,640 \text{ тм.}$$

Так как рассматриваемая неразрезная балка (рис. 106) эквивалентна системе четырех однопролетных балок, нагруженных заданными пролетными нагрузками и найденными опорными моментами, то эпюра M и Q для неразрезной балки может быть получена как совокупность эпюр M и Q построенных для четырех простых однопролетных статически определимых балок.

Определение деформаций

После того как найдены опорные моменты, при определении деформаций (прогибов и углов поворота) в отдельном пролете неразрезной балки его можно рассматривать как простую балку, нагруженную заданной на этом пролете внешней нагрузкой, а также двумя моментами на концах балки, которые при этом из разряда внутренних сил превращаются как бы в силы внешние (рис. 107).

Отсюда следует вывод, что для определения деформаций можно пользоваться всеми теми методами, которые применяются для статически определимых балок.

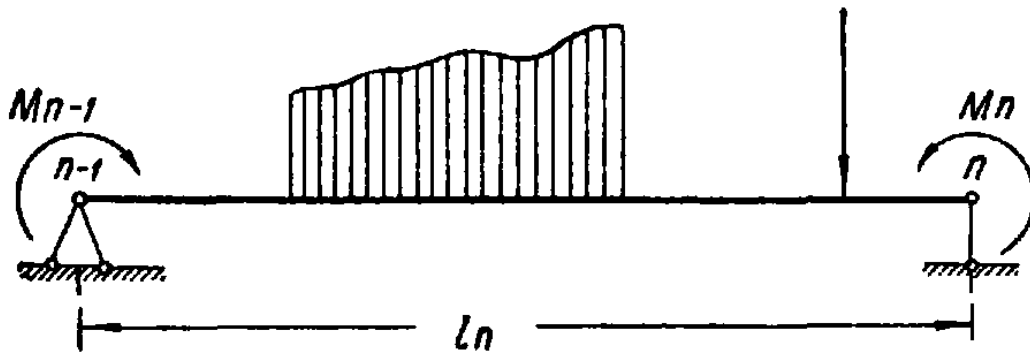


Рис. 107. Определение деформаций в любом сечении произвольного пролета неразрезной балки.

Балки с защемлением в крайнем пролете и с консолями

Для того чтобы воспользоваться уравнением трех моментов в случае защемленного конца (рис. 108, а), необходимо защемление заменить двумя опорами, расположенными на бесконечно малом расстоянии (рис. 108, б), т. е. ввести за защемлением фиктивный пролет, так называемый «нулевой» пролет. Нулевой пролет является воображаемым дополнительным пролетом, он не нагружен и его длина равна нулю.

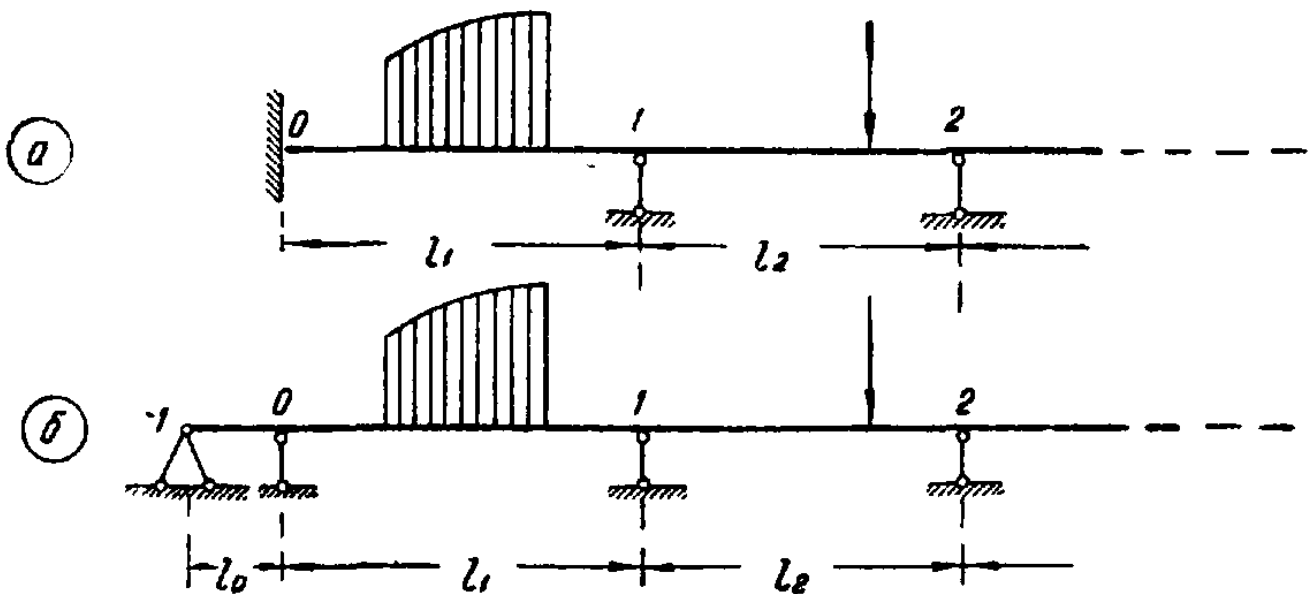


Рис. 108. Неразрезная балка с концевым защемлением.

Как известно, защемление создает лишнее закрепление и, следовательно, лишнюю неизвестную. Введя нулевой пролет, имеем возможность составить дополнительное уравнение трех моментов для нулевого и примыкающего к нему крайнего пролета:

$$M_{-1}l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1l_1 = -6R_0^{\Phi}.$$

Так как $M_{-1} = 0$ и $B_{0,0}^{\Phi} = 0$, то уравнение примет вид:

$$2M_0l_1 + M_1l_1 = -6A_{0,1}^{\Phi}.$$

Если конец балки свисает консолью, то опорный момент на крайней опоре определяется, как изгибающий момент в сечении опоры от нагрузки на консоли (рис. 109).

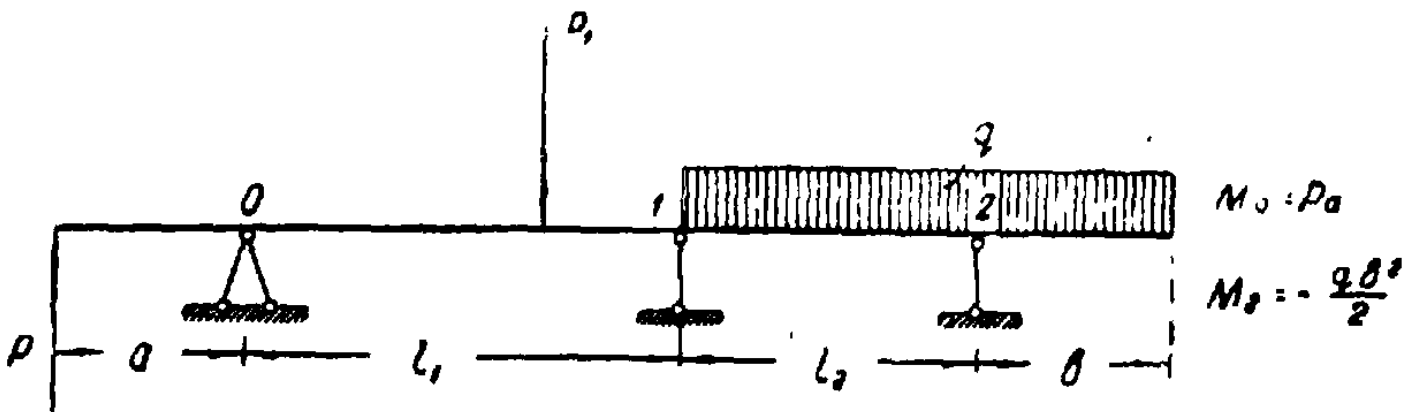


Рис. 109. Неразрезная балка с консолями.

Так, например, для балки, изображенной на рис. 109, уравнение трех моментов должно быть написано следующим образом:

$$Pal_1 + 2M_1(l_1 + l_2) - \frac{qb^2}{2}l_2 = -6R_1^{\Phi}.$$

5. УЧЕТ ОСАДКИ ОПОР

В неразрезных балках в отличие от простых балок осадка опор вызывает их изгиб и появление внутренних усилий. Чувствительность неразрезных балок к осадкам опор является их основным недостатком.

При учете осадок опор будем предполагать, что они настолько малы, что вызываемые ими напряжения не превышают предела пропорциональности, и закон Гука сохраняет силу.

При расчете на осадку опор незагруженной балки уравнение трех моментов имеет вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EJ(\Theta_{n,n} - \Theta_{n,n+1}), \quad (11)$$

где $\Theta_{n,n}$ и $\Theta_{n,n+1}$ (рис. 110) — углы наклона пролетов l_n и l_{n+1} , возникающие в основной системе от заданного смещения опор.

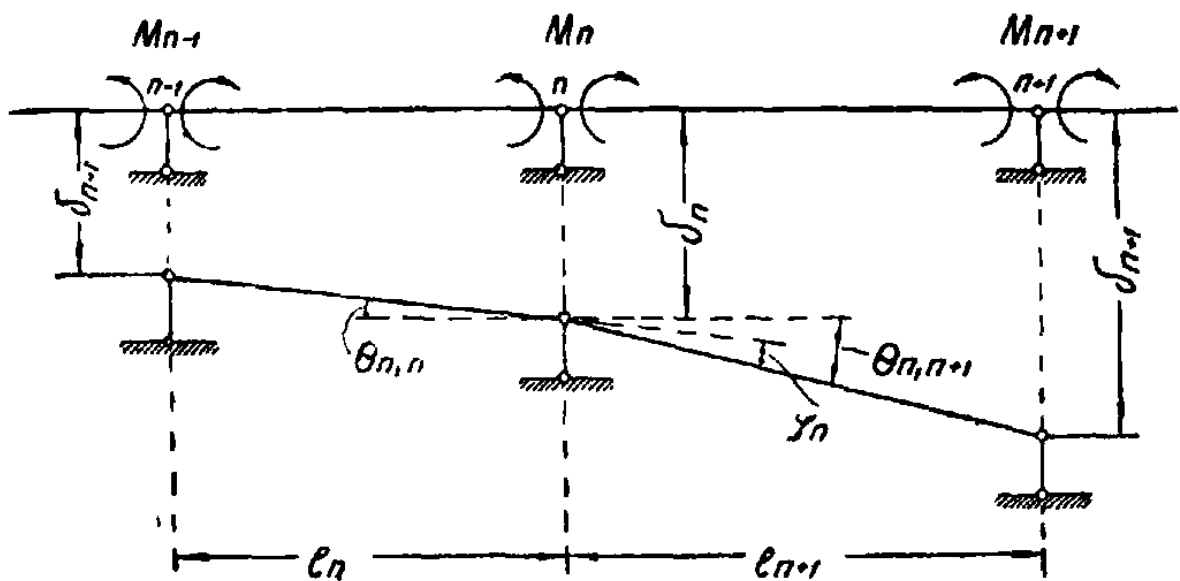


Рис. 110. Схема неразрезной балки с опорами на различных уровнях.

Углы $\Theta_{n,n}$ и $\Theta_{n,n+1}$ ввиду их малости можно заменить тангенсами углов и выразить через смещения опор:

$$\Theta_{n,n} = \frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{l_n}, \quad \Theta_{n,n+1} = \frac{\delta_n - \delta_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Угол перелома на опоре n , φ_n определится следующим образом:

$$\varphi_n = \Theta_{n,n} - \Theta_{n,n+1} = \frac{\delta_{n-1} - \delta_n}{l_n} - \frac{\delta_n - \delta_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (12)$$

Для загруженной балки с учетом осадки опор уравнение трех моментов напишется так:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6(B_{n,n}^\ominus + A_{n,n+1}^\oplus) - 6EJ(\Theta_{n,n} - \Theta_{n,n+1}). \quad (13)$$

Заранее предусмотренным рациональным смещением опор можно добиться выравнивания изгибающих моментов и напряжений. Такое смещение опор будет являться положительным фактором.

Пример 5. Построить эпюру M от осадки опоры 2 на величину Δ (рис. 111, а).

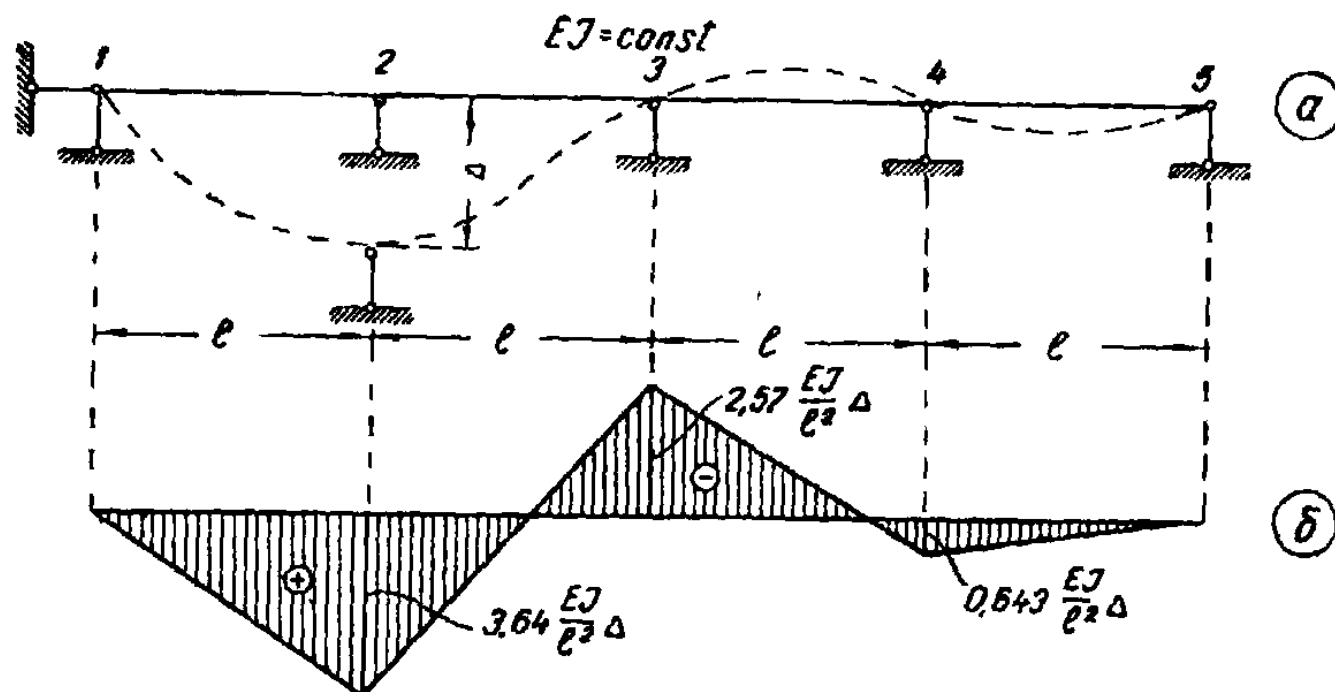


Рис. 111. К примеру 5.

Решение. Пишем уравнения трех моментов для каждого двух последовательных пролетов (см. формулу 11):

$$\left. \begin{aligned} M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -6EJ \varphi_2; \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 &= -6EJ \varphi_3; \\ M_3 l_4 + 2M_4(l_4 + l_5) + M_5 l_5 &= -6EJ \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$M_1 = M_5 = 0; \quad l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l; \quad \delta_1 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0; \quad \delta_2 = \Delta.$$

По формуле (12) находим углы перелома:

$$\varphi_2 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l_2} - \frac{\delta_2 - \delta_3}{l_3} = -\frac{2\Delta}{l}, \quad \varphi_3 = \frac{\delta_2 - \delta_3}{l_3} - \frac{\delta_3 - \delta_4}{l_4} = \frac{\Delta}{l},$$

$$\varphi_4 = \frac{\delta_3 - \delta_4}{l_4} - \frac{\delta_4 - \delta_5}{l_5} = 0.$$

Подставляя эти данные в уравнение (а), получим:

$$\left. \begin{aligned} 4M_2l + M_3l &= \frac{19EJl}{\Delta}; \\ M_2l + 4M_3l + M_4l &= -\frac{6EJl}{\Delta}, \\ M_3l + 4M_4l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Решая, найдем:

$$M_2 = 3,64 \frac{EJ}{l^2} \Delta; \quad M_3 = -2,57 \frac{EJ}{l^2} \Delta; \quad M_4 = 0,643 \frac{EJ}{l^2} \Delta.$$

Эпюра моментов от осадки опор построена на рис. 111, б.

Пример 6. На какую величину следует произвести осадку средней опоры, чтобы момент под грузом был равен моменту на опоре? (Рис. 112, б).

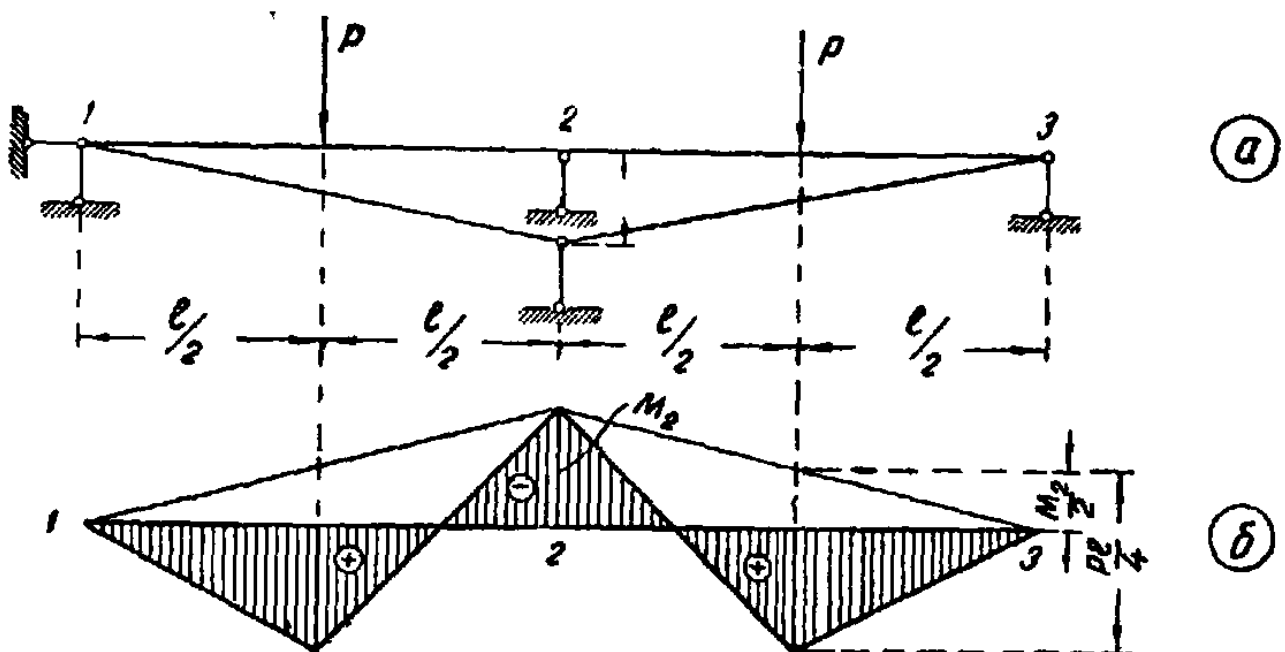


Рис. 112. К примеру 6.

Решение. На рис. 112, б дана суммарная эпюра моментов с учетом осадки средней опоры.

По условию задачи:

$$\frac{Pl}{4} - \frac{|M_2|}{2} = |M_2|.$$

Отсюда $|M_2| = \frac{Pl}{6}$; $M_1 = M_3 = 0$.

По формуле (12) угол перелома на опоре 2:

$$\varphi_2 = \theta_{2,2} - \theta_{2,3} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{l_1} - \frac{\delta_2 - \delta_3}{l_2} = -\frac{2\Delta}{l}.$$

Подставляя наши данные в формулу (13), получим:

$$2\left(-\frac{Pl}{6}\right)(l+l) = -6\left(\frac{Pl^2}{16} + \frac{Pl^2}{16}\right) - 6EJ\left(-\frac{2\Delta}{l}\right).$$

Откуда

$$\Delta = \frac{Pl^3}{144EJ}.$$

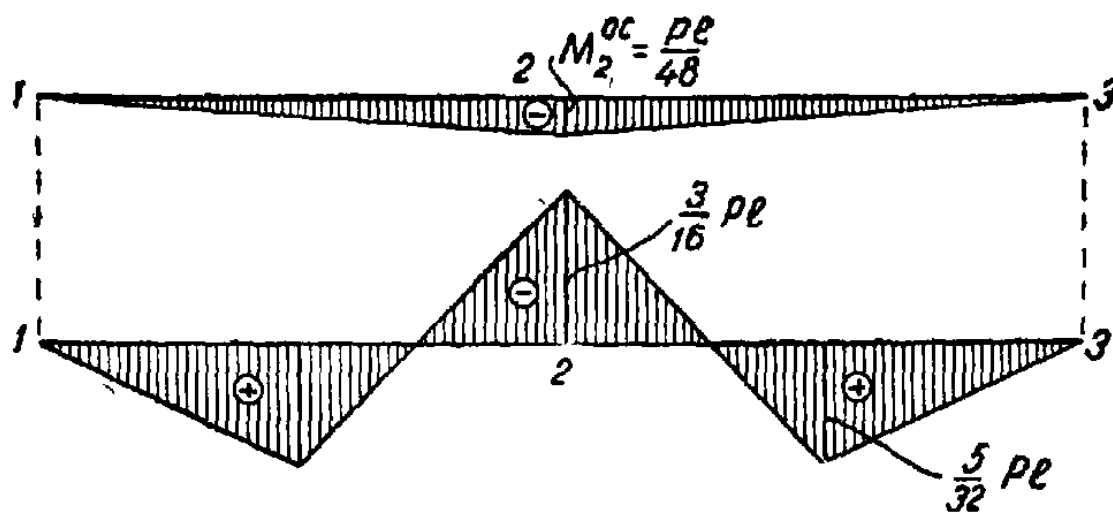


Рис. 113. Эпюры изгибающих моментов от осадки и нагрузки.

Из уравнения (11) находим опорный момент на средней опоре M_2^{oc} только от осадки:

$$4M_2^{oc}l = -6EJ\varphi_2 = -6EJ\left(-\frac{2\Delta}{l}\right); M_2^{oc} = \frac{3EJ}{l^2}\Delta = \frac{3EJ}{l^2} \frac{Pl^3}{144EJ} = \frac{Pl}{48}.$$

На рис. 113 показаны эпюры моментов от осадки и от нагрузки.

**6. ФОРМУЛЫ ОПОРНЫХ МОМЕНТОВ ДЛЯ РАВНОПРОЛЕТНЫХ
НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК ПОСТОЯННОЙ ЖЕСТКОСТИ
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАГРУЖЕНИИ**

A_Φ и B_Φ — фиктивные опорные реакции, зависящие от нагрузки (см. таблицу 39):

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l \text{ (рис. 114)}$$

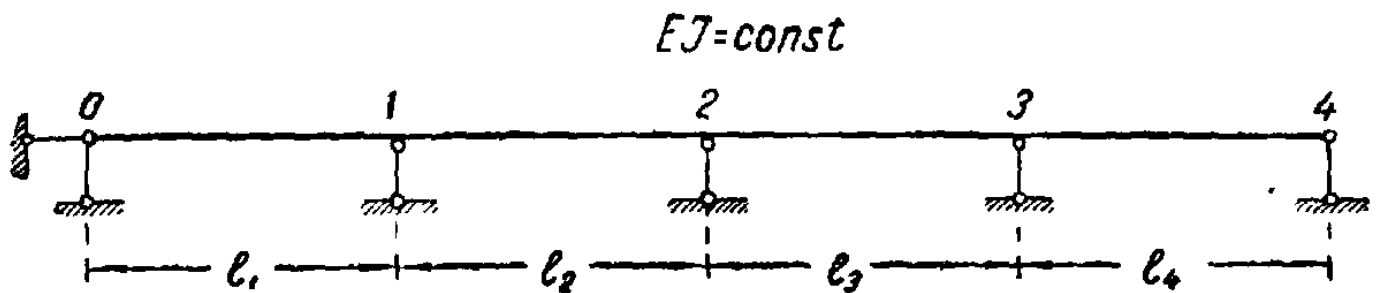


Рис. 114. К определению опорных моментов неразрезных балок при произвольном нагружении равнопролетных балок.

Дзухпролетная балка:

$$M_1 = -\frac{1,5}{l} (B_{1,1}^\Phi + A_{1,2}^\Phi). \quad (14)$$

Трехпролетная балка:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{2}{5l} [4(B_{1,1}^\Phi + A_{1,2}^\Phi) - B_{2,2}^\Phi - A_{2,3}^\Phi]; \\ M_2 &= -\frac{2}{5l} [-B_{1,1}^\Phi - A_{1,2}^\Phi + 4(B_{2,2}^\Phi + A_{2,3}^\Phi)]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Четырехпролетная балка:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{3}{28l} [15(B_{1,1}^\Phi + A_{1,2}^\Phi) - 4(B_{2,2}^\Phi + A_{2,3}^\Phi) + B_{3,3}^\Phi + A_{3,4}^\Phi]; \\ M_2 &= -\frac{3}{7l} [-B_{1,1}^\Phi + A_{1,2}^\Phi - 4(B_{2,2}^\Phi + A_{2,3}^\Phi) - B_{3,3}^\Phi - A_{3,4}^\Phi]; \\ M_3 &= -\frac{3}{28l} [B_{1,1}^\Phi + A_{1,2}^\Phi - 4(B_{2,2}^\Phi + A_{2,3}^\Phi) + 15(B_{3,3}^\Phi + A_{3,4}^\Phi)]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Глава IX. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Сложное сопротивление создается при сочетании нескольких простых видов деформаций: растяжения или сжатия, сдвига, кручения, изгиба.

1. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В общем случае действия внешних сил в поперечном сечении стержня могут возникнуть шесть внутренних усилий:

$N_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z$ (рис. 115).

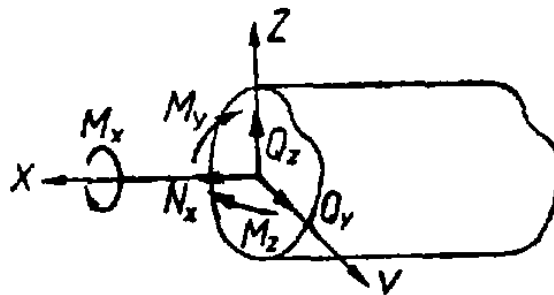


Рис. 115. Усилия в сечении стержня.

Для определения усилий проводят три оси сечения: главные центральные оси Y и Z и ось X , перпендикулярную плоскости сечения.

Продольная сила N_x , вызывающая равномерное растяжение или сжатие в сечении, равняется сумме проекций на ось X всех сил (нагрузок), приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Поперечные силы Q_y и Q_z равны проекциям соответственно на оси Y и Z сил (нагрузок), приложенных к стержню по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Крутящий момент M_x определяется как сумма моментов относительно оси X сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Изгибающие моменты M_y и M_z равны сумме моментов указанных сил (нагрузок) соответственно по отношению к осям Y и Z .

Усилие N_x и моменты M_y, M_z вызывают в сечении нормальные напряжения. Усилия Q_y, Q_z и момент M_x вызывают касательные напряжения.

Полное нормальное напряжение в какой-либо точке сечения с координатами y и z :

$$\sigma = \pm \frac{N_x}{F} \pm \frac{M_y z}{J_y} \pm \frac{M_z y}{J_z}, \quad (1)$$

где: F — площадь сечения;

J_y, J_z — моменты инерции сечения относительно осей Y и Z .

Полное касательное напряжение в точке сечения находится как геометрическая сумма касательных напряжений, возникающих от действия Q_y, Q_z и M_x в отдельности:

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}, \quad (2)$$

где τ_y, τ_z — суммы проекций составляющих напряжений на оси Y и Z .

В точках поперечного сечения создается плоское напряженное состояние.

Главные напряжения в общем случае определяются по формулам:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} [\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}]; \quad (3)$$

$$\sigma_3 = 0.$$

Расчет на прочность ведется по наибольшему приведенному (эквивалентному) напряжению:

$$\sigma_{пр} \leq [\sigma]. \quad (4)$$

Подсчет $\sigma_{пр}$ производится в зависимости от принятой теории прочности.

2. КОСЫЙ ИЗГИБ

Косой изгиб наблюдается в тех случаях, когда плоскость действия нагрузок не совпадает ни с одной из плоскостей, проведенных через ось стержня и главные оси инерции сечения.

Косой изгиб представляет собою частный случай сложного сопротивления (при $N_x = 0$ и $M_x = 0$), т. е. сочетание двух изгибов во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Плоскость действия полного изгибающего момента M пересекает плоскость поперечного сечения балки по прямой, проходящей через центр изгиба, но не совпадает с главными центральными осями (рис. 116).

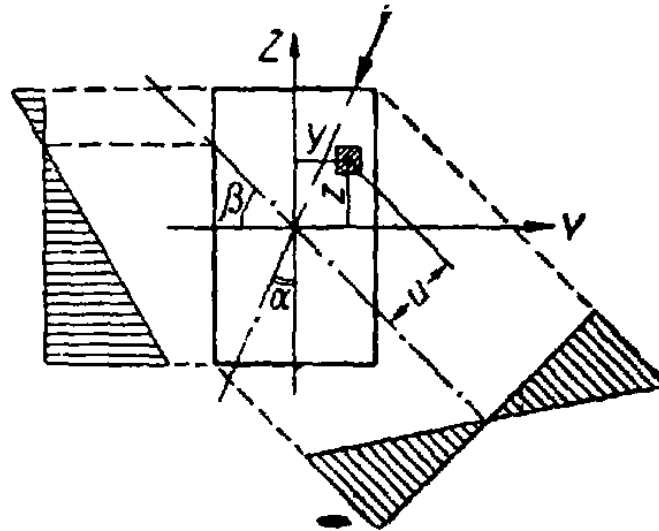


Рис 116 Косой изгиб.

Нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения, но не перпендикулярна плоскости действия изгибающего момента.

Положение ее определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha, \quad (5)$$

где: β — угол, образуемый нейтральной линией с главной центральной осью сечения Y ;

α — угол, образуемый плоскостью действия изгибающего момента и главной центральной осью сечения Z ;

J_y, J_z — главные центральные моменты инерции сечения.

Уравнение нейтральной линии:

$$\frac{y_0 \sin \alpha}{J_z} + \frac{z_0 \cos \alpha}{J_y} = 0, \quad (6)$$

где y_0, z_0 — координаты точек нейтральной линии по отношению к осям Y и Z .

Нормальные напряжения в сечении находятся как алгебраическая сумма напряжений в рассматриваемой точке, полученных отдельно от каждого составляющего момента M_y , M_z :

$$\sigma = \pm \frac{M_y z}{J_y} \pm \frac{M_z y}{J_z}, \quad (7)$$

где: $M_y = M \cos \alpha$, $M_z = M \sin \alpha$;

z , y — координаты рассматриваемой точки сечения.

Распределение суммарных нормальных напряжений в сечении подчинено плоскостному закону:

$$\sigma = \pm \frac{M}{\sqrt{J_y^2 \cos^2 \beta + J_z^2 \sin^2 \beta}} u, \quad (8)$$

где u — расстояние точки сечения от нейтральной линии.

Наибольшие напряжения возникают в точках A_1 и A_2 сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии, и определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \pm \left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \right), \quad (9)$$

где W_y , W_z — моменты сопротивления сечения.

Касательное напряжение определяется как геометрическая сумма составляющих касательных напряжений, полученных от поперечных сил Q_y и Q_z .

Проверка прочности производится по условию:

$$\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (10)$$

При разных значениях допускаемых напряжений на растяжение и сжатие проверка производится отдельно для растянутой и сжатой зон.

Подбор сечений производится следующим образом:

$$\frac{M_y + kM_z}{W_y} \leq [\sigma], \quad (11)$$

откуда необходимый момент сопротивления:

$$W_y = \frac{M_y + kM_z}{[\sigma]}, \quad (12)$$

где $k = \frac{W_y}{W_z}$ — величина, которой предварительно задаются.

Значения k :

для прямоугольного сечения $k = \frac{h}{b}$;

для прокатных двутавров $k \approx 8,7$;

для прокатных швеллеров $k \approx 6,5$.

Прогиб балки происходит в направлении, перпендикулярном к нейтральной линии. Полный прогиб определяется как геометрическая сумма прогибов f_y и f_z , вызываемых изгибающими моментами в главных плоскостях балки:

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}; \quad \frac{f_y}{f_z} = \operatorname{tg}\beta. \quad (13)$$

3. РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ С ИЗГИБОМ

Если внешние силы, действующие на стержень, пересекают его ось под различными углами, то стержень испытывает одновременно растяжение или сжатие и сложный изгиб.

Каждую из внешних сил P можно разложить на три составляющие: продольную P_x и две поперечные P_y и P_z , расположенные в главных плоскостях инерции.

Продольные составляющие будут вызывать растяжение или сжатие, поперечные — изгиб в двух главных плоскостях.

В поперечном сечении стержня при этом будут действовать усилия: продольная сила N_x , изгибающие моменты M_y и M_z и поперечные силы Q_y и Q_z .

Нормальное напряжение в любой точке сечения определяется общей формулой:

$$\sigma = \pm \frac{N}{F} \pm \frac{M_y z}{J_y} \pm \frac{M_z y}{J_z}. \quad (14)$$

Положение нулевой линии определяется угловым коэффициентом:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z}. \quad (15)$$

и отрезками, отсекаемыми ею на главных центральных осях Y и Z :

$$a = i_z^2 \frac{N}{M_z}; b = i_y^2 \frac{N}{M_y}, \quad (16)$$

где i_z, i_y — главные радиусы инерции сечения.

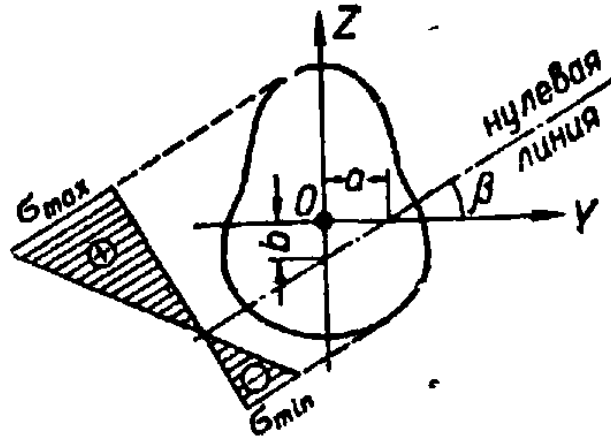


Рис. 117. Положение нулевой линии.

Проверка прочности производится в опасных сечениях, т. е. сечениях с наиболее невыгодным сочетанием изгибающих моментов M_y, M_z и продольной силы N_x .

Приведенные выше формулы справедливы в случае сжатия с изгибом только тогда, когда длина стержня невелика по сравнению с размерами его сечения и влиянием деформаций на величину моментов можно пренебречь.

4. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ИЛИ СЖАТИЕ

Изгибающие моменты M_y и M_z могут быть вызваны не только поперечной нагрузкой, но силами, параллельными оси стержня, приложенными внецентренно, т. е. на некотором расстоянии от оси.

Пусть продольная сила N пересекает поперечное сечение стержня в точке A с координатами y_N, z_N относительно главных центральных осей Y и Z сечения (рис. 118).

При переносе силы N в центр тяжести сечения O появляются изгибающие моменты:

$$M_y = Nz_N \text{ и } M_z = Ny_N.$$

Нормальное напряжение в точке сечения с координатами y, z равно:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z z}{J_z} \pm \frac{M_y y}{J_y} \quad (17)$$

или

$$\sigma = \frac{N}{F} \left(1 \pm \frac{z_N z}{i_y^2} \pm \frac{y_N y}{i_z^2} \right), \quad (18)$$

где $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$; $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$ — радиусы инерции сечения относительно главных осей Y и Z .

Уравнение нейтральной линии:

$$1 + \frac{y_N y_0}{i_z^2} + \frac{z_N z_0}{i_y^2} = 0, \quad (19)$$

где y_0 и z_0 — координаты точек нейтральной линии.

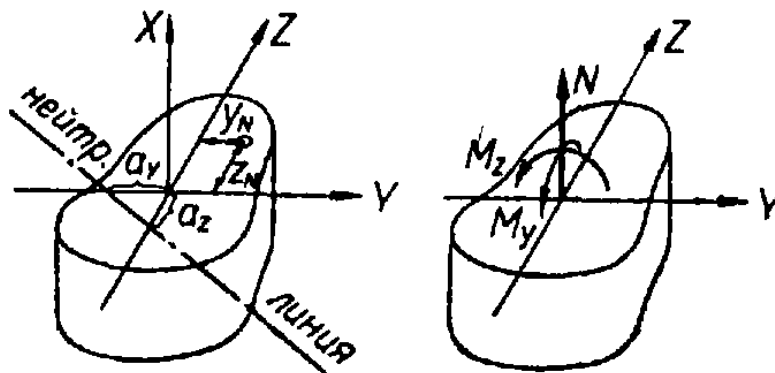


Рис. 118. Внецентренное растяжение.

Для построения нейтральной линии вычисляются отрезки a_y и a_z , отсекаемые ею на главных осях:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_N}; \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_N}. \quad (20)$$

Нейтральная линия расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка A , через которую проходит линия действия продольной силы.

Если точка приложения силы (A) приближается к центру тяжести, то нейтральная линия удаляется от него и наоборот.

Если точка приложения силы перемещается по некоторой прямой, то нейтральная линия вращается вокруг некоторой точки.

В том случае, когда точка приложения силы находится на главной оси сечения, нейтральная линия располагается перпендикулярно этой оси.

Касательные к контуру сечения, параллельные нейтральной линии, дают на контуре две точки, в которых возникают наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

В случае симметричного сечения и силы N , приложенной в точке, лежащей на главной оси и имеющей эксцентриситет e (рис. 119,а), напряжения в крайних точках сечения

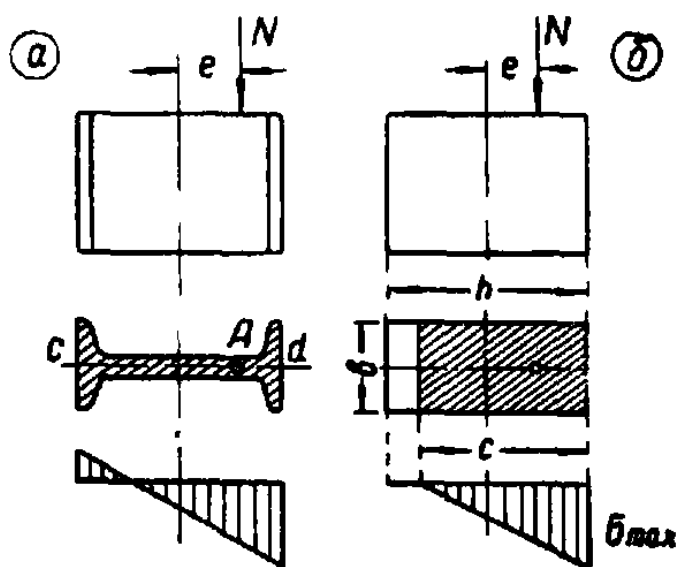


Рис. 119. Внецентренное сжатие при симметричном сечении.

c и d определяются по формуле (при сжимающей продольной силе):

$$\sigma_{c,d} = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W}, \quad (21)$$

где: $M = Ne$ — изгибающий момент;

W — момент сопротивления сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба.

В случае прямоугольного поперечного сечения, имеющего размер h , параллельный эксцентриситету e :

$$\sigma = \frac{N}{bh} \left(1 \pm \frac{6e}{h} \right). \quad (22)$$

Проверка на прочность при изгибе в двух главных плоскостях производится по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нт}}} + \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} \leq [\sigma]_{\text{н}}, \quad (23)$$

где y и z — расстояния рассматриваемой точки от осей Z и Y .

При изгибе в одной главной плоскости

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нт}}} + \frac{M}{W_{\text{нт}}} \leq [\sigma]_{\text{н}}, \quad (24)$$

где $F_{\text{нт}}$ и $W_{\text{нт}}$ — соответственно площадь и момент сопротивления сечения «нетто», т. е. за вычетом всякого рода ослаблений сечения (отверстий, врезок и т. д.).

Если допускаемое напряжение на изгиб $[\sigma]_{\text{н}}$ значительно отличается от допускаемого напряжения на растяжение $[\sigma]_{\text{р}}$ и на сжатие $[\sigma]_{\text{с}}$, то проверка прочности может быть произведена по формулам:

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нт}}} \frac{[\sigma]_{\text{н}}}{[\sigma]_{\text{р}}} + \frac{M}{W_{\text{нт}}} \leq [\sigma]_{\text{н}} \quad (\text{растяжение с изгибом}). \quad (25)$$

$$\sigma = \frac{N}{F_{\text{нт}}} \frac{[\sigma]_{\text{н}}}{[\sigma]_{\text{с}}} + \frac{M}{W_{\text{нт}}} \leq [\sigma]_{\text{н}} \quad (\text{сжатие с изгибом}). \quad (26)$$

При разных значениях $[\sigma]_{\text{р}}$ и $[\sigma]_{\text{с}}$ проверка прочности производится по наибольшим напряжениям для растянутой и сжатой зон в отдельности.

При расчете на внецентренное сжатие частей конструкций, выполненных из бетона или каменной кладки (фундаменты, колонны, опорные стены, арки и т. д.), растягивающие напряжения ограничиваются или вообще не допускаются.

Как следует из формулы (22), растягивающие напряжения в сечении будут отсутствовать при условии, что точка приложения сжимающей силы N не выйдет из средней трети высоты сечения, т. е.:

$$e \leq \frac{h}{6}.$$

Если это условие не выполнено, а материал конструкции не способен сопротивляться растяжению, то расчет ведется

в предположении, что часть сечения выбывает из работы, а остальная — рабочая часть испытывает сжимающие напряжения (рис. 119, б).

Длина рабочей части сечения определяется по формуле:

$$c = 3 \left(\frac{h}{2} - e \right), \quad (27)$$

где: h — высота сечения;

e — эксцентриситет приложения сжимающей силы.

Наибольшее напряжение сжатия, возникающее у края сечения, определяется по формуле (28) в предположении, что напряжения в пределах рабочей части сечения распределяются по линейному закону (эпюра напряжений — треугольник):

$$\sigma_{\max} = \frac{2N}{bc}, \quad (28)$$

где b — ширина сечения.

Б. ЯДРО СЕЧЕНИЯ

Ядром сечения называется область вокруг центра тяжести, внутри которой можно помещать продольную силу N , не вызывая в сечении напряжений разных знаков.

Точку, лежащую на границе ядра сечения, можно получить, проведя нейтральную линию касательно к сечению и вычисляя для этого случая координаты полюса (точки приложения силы):

$$y_N = - \frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_N = - \frac{i_y^2}{a_z}, \quad (29)$$

где a_y и a_z — отрезки, отсекаемые касательной к контуру на главных осях Y и Z .

В качестве примера приводится построение ядра сечения для тавра, изображенного на рис. 120.

Центр тяжести сечения находится в точке C .

Главные оси инерции сечения Y и Z .

Главные моменты инерции равны:

$$J_y = 25 \cdot 100^3 \text{ см}^4; \quad J_z = 275 \cdot 50^3 \text{ см}^4.$$

Площадь сечения:

$$F = 15 \cdot 10^3 \text{ см}^2.$$

Квадраты радиусов инерции:

$$i_y^2 = \frac{25 \cdot 100^3}{15 \cdot 10^3} = 1\,667 \text{ см}^2; \quad i_z^2 = \frac{275 \cdot 50^3}{15 \cdot 10^3} = 2\,298 \text{ см}^2$$

Нейтральная линия 1—1 отсекает отрезки на осях:

$$a_y = \infty; \quad a_z = -50 \text{ см.}$$

Координаты вершины ядра (точка 1):

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{a_y} = 0; \quad z_1 = -\frac{i_y^2}{a_z} = \frac{1\,667}{50} = 33,3 \text{ см.}$$

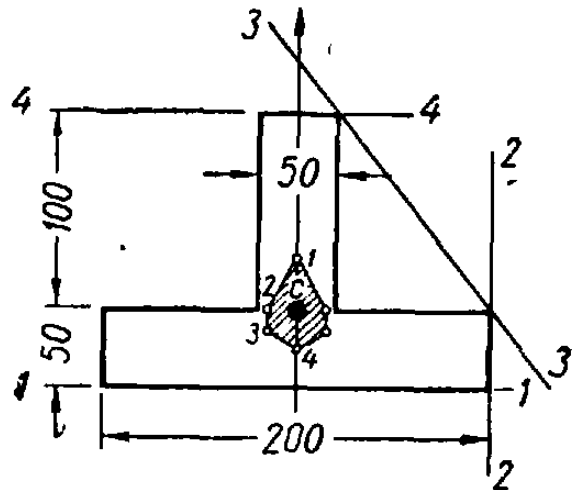


Рис. 120. Построение ядра сечения.

Нейтральная линия 2—2 отсекает отрезки:

$$a_y = 100; \quad a_z = \infty.$$

Координаты вершины ядра (точка 2):

$$y_2 = -\frac{2\,298}{100} = -22,98 \text{ см}; \quad z_2 = 0.$$

Нейтральная линия 3—3 отсекает отрезки:

$$a_y = 100 \text{ см}; \quad a_z = \frac{100^2}{75} = 133,3 \text{ см.}$$

Координаты вершины 3:

$$y_3 = -\frac{2\,298}{100} = -22,98 \text{ см}; \quad z_3 = -\frac{1\,667}{133,3} = -12,5 \text{ см}.$$

Нейтральная линия 4—4 отсекает отрезки:

$$a_y = \infty; \quad a_z = 100 \text{ см}.$$

Координаты вершины 4:

$$y_4 = 0; \quad z_4 = -\frac{1\,667}{100} = -16,67 \text{ см}.$$

Остальные вершины ядра сечения располагаются симметрично.

Соединяя точки 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и т. д. прямыми линиями, получаем контур ядра сечения. Оно заштриховано на чертеже.

Частные случаи

1. Прямоугольник имеет ядро сечения в виде ромба с диагоналями длиной $\frac{h}{3}$ и $\frac{b}{3}$ (рис. 121).

2. Круг имеет ядро сечения в виде круга с диаметром, равным $\frac{d}{4}$.

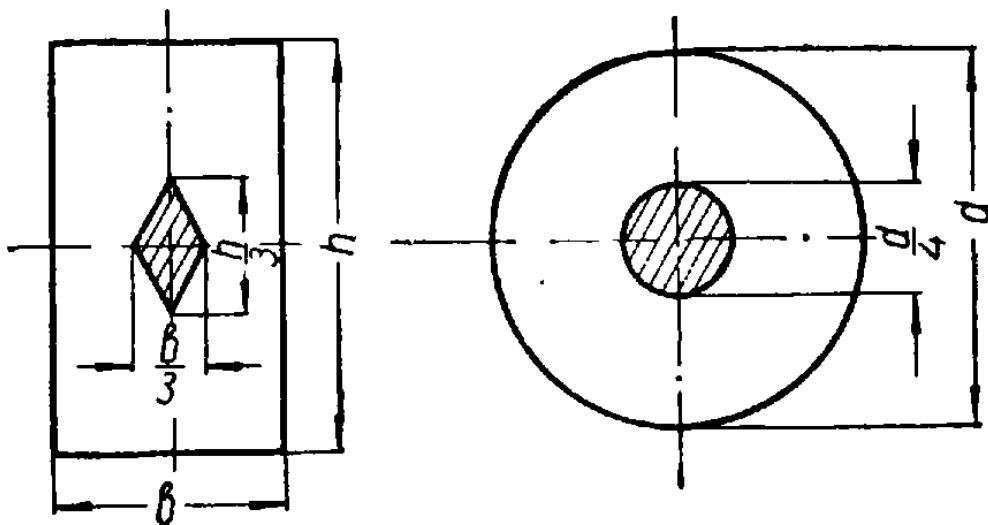


Рис. 121. Ядро сечения для прямоугольника и круга.

6. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

Стержень находится под действием поперечной нагрузки, вызывающей изгиб в главной плоскости, и продольной силы (рис. 122).

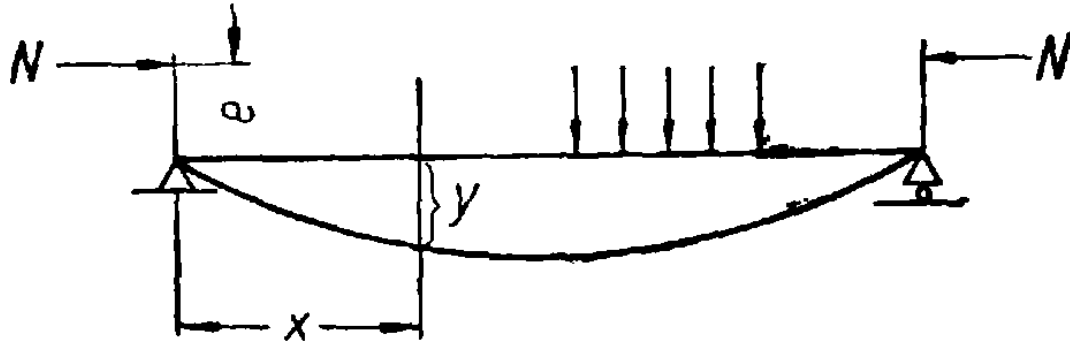


Рис. 122. Продольно-поперечный изгиб.

Полный изгибающий момент в сечении x складывается из момента от поперечной нагрузки M_0 и момента от продольной силы:

$$M = M_0 + N(e + y), \quad (30)$$

где e — начальный эксцентриситет силы N .

Нормальные напряжения в крайних волокнах в плоскости изгиба:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_0 + N(e + y)}{W}. \quad (31)$$

Наибольший изгибающий момент может быть найден по приближенной формуле:

$$M_{max} = \max M_0 + Ne + \frac{Nf_0}{1 - \alpha^2}. \quad (32)$$

Наибольший прогиб от одновременного действия поперечных и продольных нагрузок:

$$f = \frac{f_0}{1 - \alpha^2}, \quad (33)$$

где: f_0 — наибольший прогиб от поперечных нагрузок и момента Ne ;

$\alpha = \frac{N}{P_{кр}}$ — отношение продольной силы N к критической $P_{кр}$ для данного стержня:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

где J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

Примечание. Точное решение приводится в главе XIV.

7. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Изгиб с кручением представляет собою частный случай сложного сопротивления, когда стержень находится под действием изгибающего момента M и крутящего момента M_k .

1) Стержень с некруглым поперечным сечением.

Суммарный изгибающий момент и поперечная сила в сечении разлагаются на составляющие по главным осям сечения: M_y, M_z, Q_y, Q_z .

Нормальные напряжения определяются отдельно от каждого момента M_y и M_z :

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y z}{J_y}; \quad \sigma_{M_z} = \frac{M_z y}{J_z}.$$

Касательные напряжения определяются от крутящего момента:

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$$

и от действия каждой поперечной силы Q_y и Q_z по соответствующим формулам.

Для точек сечения, в которых напряжения от каждого из усилий достигают наибольшей величины, находятся алгебраические суммы нормальных напряжений σ и геометрические суммы касательных напряжений τ .

Для точек сечения, где σ и τ имеют наибольшие значения, определяются приведенные напряжения в соответствии с принятой теорией прочности.

Условие прочности в общем случае записывается так:

$$\sigma_{\text{пр}} \leq [\sigma].$$

2) Стержень с круглым поперечным сечением (сплошным или полым).

Суммарный изгибающий момент определяется по формуле:

$$M_{\text{н}} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}, \quad (34)$$

где M_1 и M_2 — изгибающие моменты по отношению к любым двум взаимно перпендикулярным центральным осям сечения.

Расчет обычно ведется по приведенному моменту $M_{\text{пр}}$, который определяется в зависимости от принятой теории прочности в тех сечениях, где суммарный изгибающий момент $M_{\text{н}}$ и крутящий момент $M_{\text{к}}$ достигают одновременно наибольших значений. Опасные сечения легко найти, построив эпюры $M_{\text{н}}$ и $M_{\text{к}}$ и сопоставив их.

Условие прочности можно записать так:

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma], \quad (35)$$

где $W = \frac{\pi d^3}{32}$ — осевой момент сопротивления круглого сечения.

Диаметр сплошного вала определяется по формуле:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{пр}}}{\pi [\sigma]}}. \quad (36)$$

Наружный диаметр D полого сечения:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{пр}}}{\pi (1 - \alpha^4) [\sigma]}}; \quad \alpha = \frac{d}{D}, \quad (37)$$

где d — внутренний диаметр сечения.

Значения приведенных напряжений $\sigma_{\text{пр}}$ и приведенных моментов $M_{\text{пр}}$

По первой теории прочности (наибольших нормальных напряжений):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}} &= 0,5\sigma + 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ M_{\text{пр}} &= 0,5 M_{\text{н}} + 0,5 \sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

По второй теории прочности (наибольших удлинений):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}} &= \frac{1-\mu}{2} \sigma + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ M_{\text{пр}} &= \frac{1-\mu}{2} M_{\text{н}} + \frac{1+\mu}{2} \sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

При $\mu = 0,3$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}} &= 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ M_{\text{пр}} &= 0,35 M_{\text{н}} + 0,65 \sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

По третьей теории (наибольших касательных напряжений):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ M_{\text{пр}} &= \sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

По четвертой теории — энергетической:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}; \\ M_{\text{пр}} &= \sqrt{M_{\text{н}}^2 + 0,75 M_{\text{к}}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

По теории Мора:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{пр}} &= (1-k) \sigma + k \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \\ M_{\text{пр}} &= (1-k) M_{\text{н}} + k \sqrt{M_{\text{н}}^2 + M_{\text{к}}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где для пластического состояния $k = \frac{\sigma_{\text{T}}}{2\tau_{\text{T}}}$

и для хрупкого $k = \frac{\sigma_{\text{в}}}{2\tau_{\text{в}}}$.

Во всех вышеприведенных формулах:

σ и τ — нормальное и касательное напряжения в поперечном сечении;

$M_{\text{н}}$ — суммарный изгибающий момент;

$M_{\text{к}}$ — крутящий момент в сечении;

μ — коэффициент Пуассона;

σ_{T} — предел текучести при растяжении;

τ_{T} — предел текучести при кручении;

$\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности при растяжении;

$\tau_{\text{в}}$ — предел прочности при кручении.

Пример. Вращающийся стальной вал AB (рис. 123) несет два зубчатых колеса C и D , радиусы венцов которых соответственно равны $r_1 = 5$ см и $r_2 = 10$ см. Радиусы, перпендикулярно которым действуют окружные усилия на венцах P_1 и P_2 , наклонены под углами $\alpha_1 = 45^\circ$ и $\alpha_2 = 30^\circ$. Определить диаметр вала, если $a = 10$ см, $b = 20$ см, $l = 30$ см, число оборотов $n = 100$ об/мин, передаваемая мощность $N = 100$ л. с., допустимое напряжение $[\sigma] = 1200$ кг/см².

Решение. Крутящий момент, передаваемый участком вала CD ,

$$M_k = 71\,620 \frac{N}{n} = 71\,620 \frac{100}{1000} = 7\,162 \text{ кгсм.}$$

Окружные усилия определяются из уравнения моментов:

$$M_k = P_1 r_1 = P_2 r_2,$$

откуда

$$P_1 = \frac{7\,162}{5} \approx 1\,432 \text{ кг; } P_2 = \frac{7\,162}{10} = 716,2 \text{ кг.}$$

Разложим окружные усилия на вертикальные и горизонтальные составляющие:

$$P_{1в} = P_1 \cos \alpha_1 = 1\,432 \cos 45^\circ = 1\,012 \text{ кг;}$$

$$P_{1г} = P_1 \sin \alpha_1 = 1\,432 \sin 45^\circ = 1\,012 \text{ кг;}$$

$$P_{2в} = P_2 \cos \alpha_2 = 716,2 \cos 30^\circ = 620 \text{ кг;}$$

$$P_{2г} = P_2 \sin \alpha_2 = 716,2 \sin 30^\circ = 358 \text{ кг.}$$

Перенесем составляющие силы на ось вала и построим эпюры изгибающих моментов отдельно от вертикальных и горизонтальных сил.

Опорные реакции и изгибающие моменты от вертикальных сил:

$$A_B = \frac{1\,012 \cdot 50 + 620 \cdot 20}{60} = 1\,050 \text{ кг;}$$

$$B_B = 1\,012 + 620 - 1\,050 = 582 \text{ кг;}$$

$$M_{C_B} = 1\,050 \cdot 10 = 10\,500 \text{ кгсм;}$$

$$M_{D_B} = 582 \cdot 20 = 11\,640 \text{ кгсм.}$$

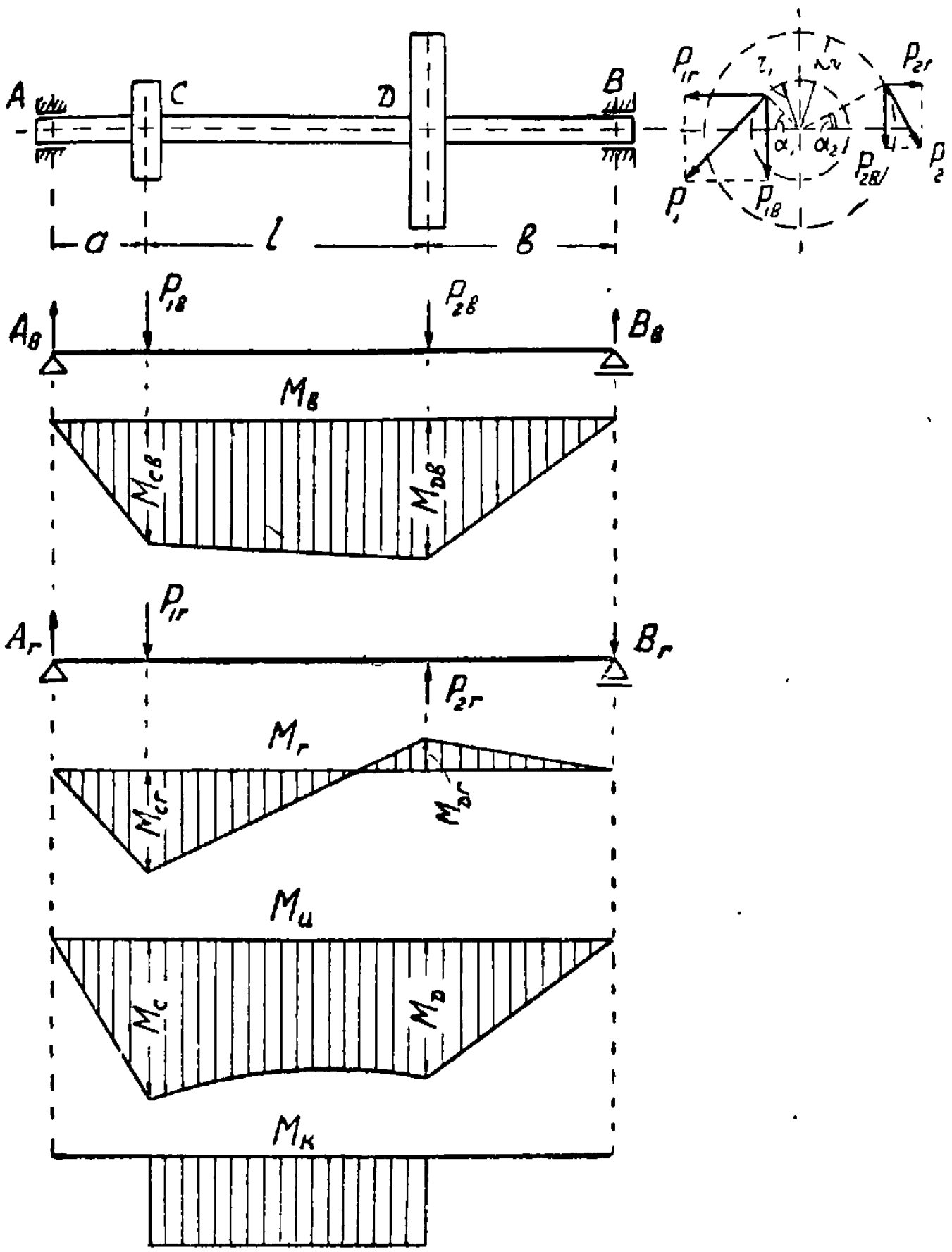


Рис. 123_а К примеру.

Опорные реакции и изгибающие моменты от горизонтальных сил:

$$A_r = \frac{1\,012 \cdot 50 - 358 \cdot 20}{60} = 707 \text{ кг};$$

$$B_r = 1\,012 - 358 - 707 = -53 \text{ кг};$$

$$M_{C_r} = 707 \cdot 10 = 7\,070 \text{ кгсм};$$

$$M_{D_r} = -53 \cdot 20 = -1\,060 \text{ кгсм}.$$

Эпюры M_B и M_r показаны на рис. 123.

Суммарные изгибающие моменты найдем в характерных сечениях как геометрические суммы моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$M_C = \sqrt{M_{C_B}^2 + M_{C_r}^2} = \sqrt{10\,500^2 + 7\,070^2} = 12\,660 \text{ кгсм};$$

$$M_D = \sqrt{M_{D_B}^2 + M_{D_r}^2} = \sqrt{11\,640^2 + 1\,060^2} = 11\,690 \text{ кгсм}.$$

Эпюра суммарных изгибающих моментов M_n показана на рис. 123.

Сопоставляя эту эпюру с эпюрой крутящих моментов M_k , находим опасное сечение вала в точке C .

Расчетный (приведенный) момент найдем по энергетической теории прочности:

$$M_{пр} = \sqrt{M_n^2 + 0,75 M_k^2} = \sqrt{12\,660^2 + 0,75 \cdot 7\,162^2} = 14\,100 \text{ кгсм}.$$

Необходимый диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{пр}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14\,100}{3,14 \cdot 1\,200}} = 4,9 \text{ см}.$$

Глава X. РАСЧЕТ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Кривым бруском называется брус с криволинейной осью.

Кривизна бруса характеризуется отношением радиуса кривизны его оси ρ к наибольшей высоте h бруса.

В дальнейшем условимся бруском большой кривизны считать брусок, для которого $\frac{\rho}{h} \leq 5$ (рис. 124,а), бруском малой кривизны, для которого $\frac{\rho}{h} > 5$ (рис. 124,б). Для прямого бруса радиус кривизны его оси очевидно равен бесконечности (рис. 124,в).

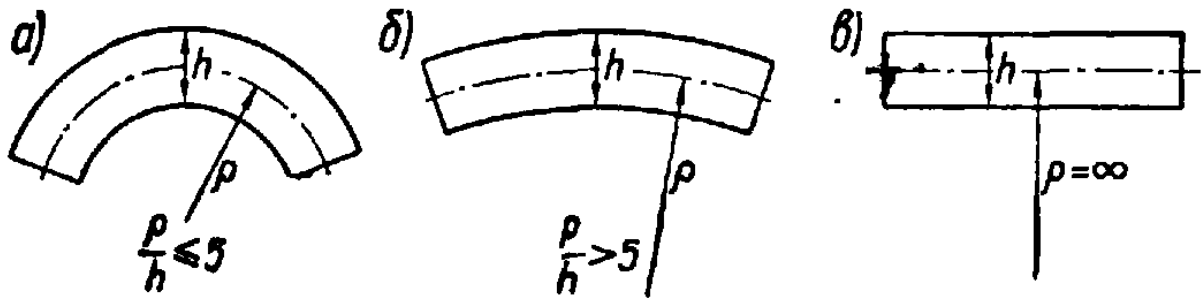


Рис. 124. Брусья различной кривизны.

Мы будем изучать кривой брусок при следующих ограничениях:

- 1) Поперечные сечения бруса имеют ось симметрии.
- 2) Ось бруса есть плоская кривая, лежащая в плоскости симметрии.
- 3) Все внешние нагрузки располагаются в этой же плоскости.

2. СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Пусть дан кривой брусок, нагруженный внешними силами $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, расположенными в плоскости симметрии бруса (рис. 125, а).

Рассечем брусок плоскостью $m - m$ нормальной к его оси и рассмотрим равновесие правой части (рис. 125, б). Все внешние силы, приложенные к правой части бруса, как лежащие в одной плоскости, могут быть заменены одной силой R , приложенной в центре тяжести сечения, равной главному вектору системы, и одной парой, момент которой M равен главному моменту данной системы сил относительно центра тяжести

сечения точки O . Эти силы уравниваются внутренними усилиями, распределенными по сечению $m - m$ и заменяющими действие отброшенной части бруса на оставленную.

Силу R можно разложить на две составляющие силы: поперечную силу Q , направленную по нормали к оси бруса, и продольную силу N , направленную по касательной к оси бруса.

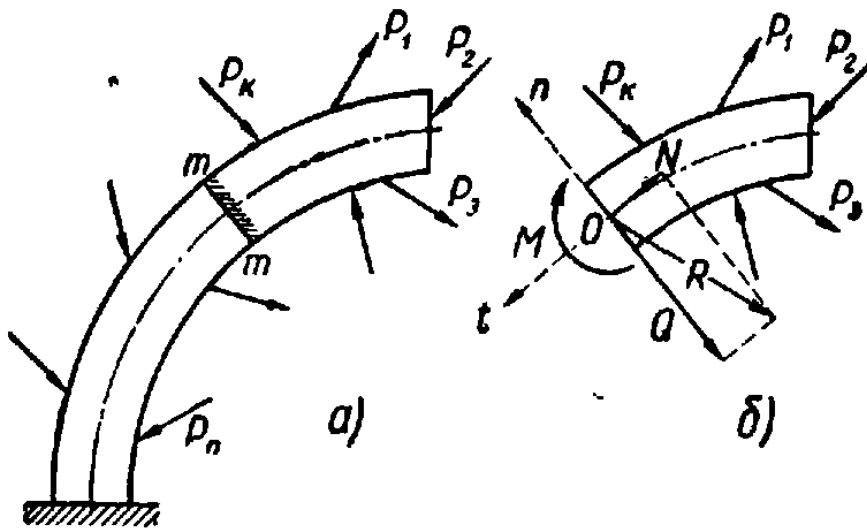


Рис. 125. Силовые факторы в поперечном сечении кривого бруса.

Таким образом, в общем случае в каждом поперечном сечении кривого бруса действуют три силовых фактора: продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент, величины которых равны:

$$N = \sum_{i=1}^k P_{it}; \quad Q = \sum_{i=1}^k P_{in}; \quad M = \sum_{i=1}^k t o t_0 (P_i), \quad (1)$$

где k — число сил, действующих на рассматриваемую отсеченную часть бруса.

Зависимость между силовыми факторами M , N и Q в поперечных сечениях бруса и построение эпюр M , N и Q

Изгибающий момент, поперечная и продольная силы связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями (рис. 126):

$$Q = \frac{dM}{ds}; \quad (2)$$

$$Q = -\frac{dN}{d\varphi}; \quad (3)$$

$$N = \frac{dQ}{d\varphi}, \quad (4)$$

где ds — дифференциал длины оси бруса. $ds = r d\varphi$.

Из соотношений (2) и (3) получаем:

$$\frac{1}{r} dM = -dN. \quad (5)$$

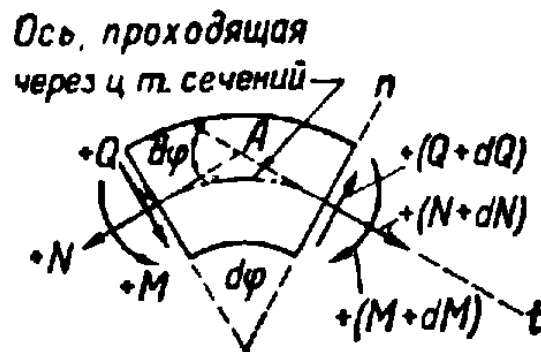


Рис. 126. Элемент кривого бруса.

Выражение (2), из которого следует, что производная от изгибающего момента по дуге равна поперечной силе, есть обобщение теоремы Журавского для кривых брусьев.

Полученные зависимости могут быть использованы при построении эпюр M , Q и N .

Изгибающий момент M условимся считать положительным, если он увеличивает кривизну оси бруса (рис. 126), а продольную силу N , если она является растягивающей.

Знак поперечной силы не имеет принципиального значения, он совпадает для левой части бруса со знаком изгибающего момента (рис. 126). Для правой части бруса знак поперечной силы противоположен знаку изгибающего момента, и если ось S (кривая) идет влево от начала координат, то, как и для прямых брусьев, $\frac{dM}{ds} = -Q$.

Продольная сила N и изгибающий момент M вызывают в поперечных сечениях бруса нормальные напряжения, а попе-

речная сила Q — касательные напряжения. Для определения нормальных и касательных напряжений в любой элементарной площадке произвольного поперечного сечения бруса необходимо знать величины M , N и Q в этом сечении. Наглядное представление об изменении величин изгибающего момента, поперечной и продольной сил в различных поперечных сечениях кривого бруса дают соответствующие эпюры M , N и Q , которые строятся для кривого бруса, подобно тому как они строились для брусьев с прямолинейной осью и рам.

Отрезки, характеризующие величины M , N и Q в данном сечении, откладываются в принятом масштабе по направлениям, нормальным оси бруса, т. е. по радиусам кривизны бруса.

Построение эпюр силовых факторов покажем на примере.

Пример 1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для бруса, изображенного на рис. 127 а.

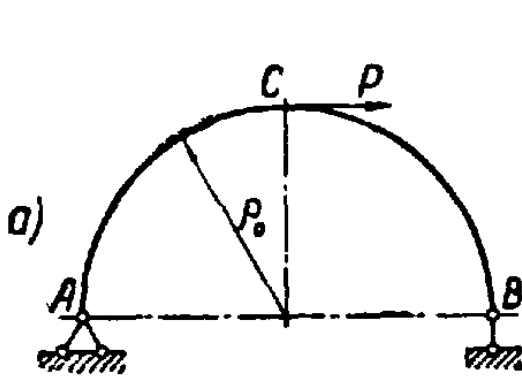


Рис. 127 а. К примеру 1.

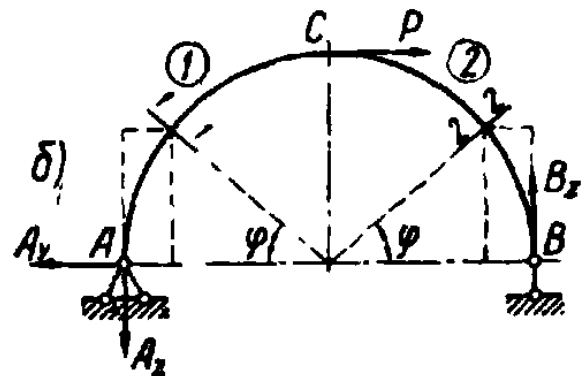


Рис. 127 б. Направление опорных реакций в кривом брус.

Решение. Опорные реакции, определяемые из уравнений статики равны:

$$A_y = P; \quad A_z = \frac{1}{2} P; \quad B_z = \frac{1}{2} P.$$

Разобьем брус на два участка AC (1-й участок) и CB (2-й участок), на каждом из которых силовые факторы могут быть выражены одной аналитической функцией (рис. 127 б).

Для текущего поперечного сечения 1—1 имеем:

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi &= -P\rho_0 \sin\varphi + \frac{P\rho_0}{2} (1 - \cos\varphi); & Q_\varphi &= -P\cos\varphi + \frac{P}{2} \sin\varphi; \\ N_\varphi &= P\sin\varphi + \frac{P}{2} \cos\varphi. \end{aligned} \right\} (A)$$

Выражениями (А) можно пользоваться в пределах $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Легко убедиться, что дифференциальные зависимости (2), (3) и (4) для них удовлетворяются.

Определим экстремальные значения M_φ и N_φ на 1-м участке бруса.

$$Q_\varphi = -P \cos \varphi + \frac{P}{2} \sin \varphi = 0; \quad \operatorname{tg} 2\varphi = 2; \quad \varphi = 63^\circ 26'; \quad \sin 63^\circ 26' = 0,894; \\ \cos 63^\circ 26' = 0,447.$$

$$M_{\varphi = 63^\circ 26'} = M_{\min} = -P\rho_0 \cdot 0,894 + \frac{P\rho_0}{2} (1 - 0,447) = -0,618 P\rho_0.$$

Из дифференциальной зависимости (5) следует:

$$N_{\varphi = 63^\circ 26'} = N_{\max} = P \cdot 0,894 + \frac{P}{2} \cdot 0,447 = 1,118 P.$$

Выражения силовых факторов для текущего сечения 2—2 2-го участка имеют вид:

$$M_\varphi = -\frac{P\rho_0}{2}(1 - \cos \varphi); \quad Q_\varphi = \frac{P}{2} \sin \varphi; \quad N_\varphi = -\frac{P}{2} \cos \varphi. \quad (B)$$

Значения M_φ , N_φ и Q_φ для 1-го участка, вычисленные для некоторых значений угла φ по формулам (А), приведены в таблице 40, а для 2-го участка — в таблице 41.

Таблица 40

φ	M_φ	N_φ	Q_φ
0	0	$\frac{P}{2}$	$-P$
45°	$-0,561P\rho_0$	$1,061P$	$-0,354P$
63°26'	$-0,618P\rho_0$	$1,118P$	0
90°	$-0,5P\rho_0$	P	$0,5P$

Таблица 41

φ	M_φ	N_φ	Q_φ
0	0	$-\frac{P}{2}$	0
45°	$-0,146P\rho_0$	$-0,354P$	$+0,354P$
90°	$-0,5P\rho_0$	0	$0,5P$

На основании полученных выражений (А) и (В) и табличных данных на рис. 128 построены эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

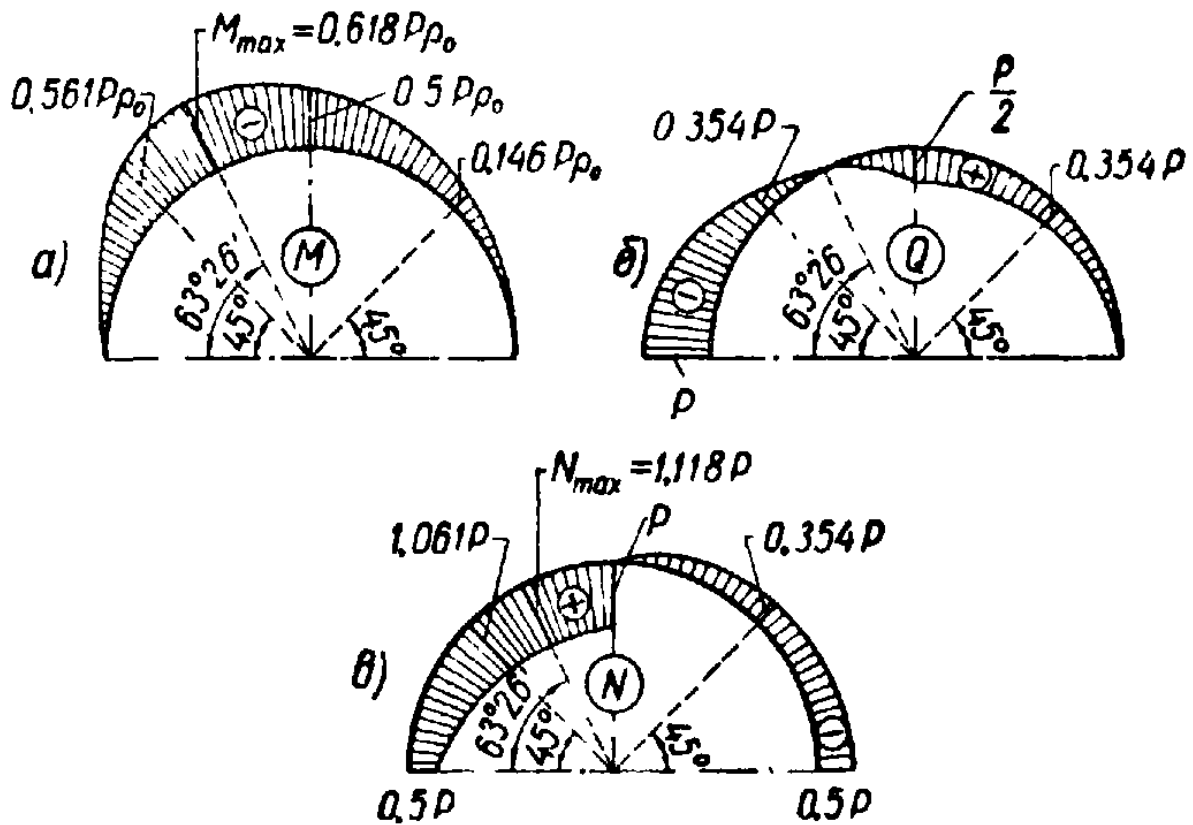


Рис. 128. Эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ КРИВОГО БРУСА

Напряжения, возникающие от продольной силы

Продольная сила N , приложенная в центре тяжести поперечного сечения бруса (рис. 129), вызывает равномерно распределенные по сечению нормальные напряжения растягивающие или сжимающие, которые определяются по той же формуле, что и для прямого бруса:

$$\sigma = \frac{N}{F} . \quad (6)$$

Напряжения, возникающие от поперечной силы

Поперечная сила вызывает касательные напряжения, роль которых при изгибе кривых брусьев, как и прямых, невелика, и большей частью в расчетах ими пренебрегают.

В тех случаях, когда хотят учесть касательные напряжения от силы Q , закон распределения их по плоскости попереч-

ного сечения принимают таким же, как и в случае прямого бруса, и они могут быть вычислены по известной формуле Журавского (глава VI):

$$\tau = \frac{QS_y}{bJ_v} \quad (7)$$

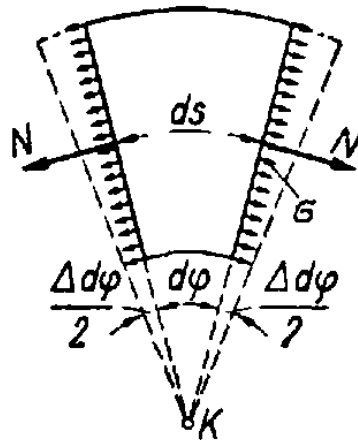


Рис. 129. Растяжение элемента кривого бруса.

Напряжения, вызываемые изгибающим моментом

При выводе формулы нормальных напряжений в поперечных сечениях кривого бруса при чистом изгибе ($M \neq 0$, $N = 0$ и $Q = 0$) исходят из тех же двух гипотез, которые были приняты в теории изгиба прямых брусьев, а именно:

- 1) сечения плоские и нормальные к оси бруса до деформации остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации;
- 2) продольные волокна бруса, изгибаясь, не давят друг на друга.

На рис. 130, а показан элемент кривого бруса, выделенный двумя бесконечно близкими поперечными сечениями 1—1 и 2—2, находящийся под действием одних только изгибающих моментов (чистый изгиб).

Примем следующие обозначения (рис. 130, а и б):

- ρ — радиус кривизны оси бруса;
- r — радиус кривизны нейтрального слоя;
- u — радиус кривизны произвольного волокна;
- u_1 — радиус кривизны наружных волокон;
- u_2 — радиус кривизны внутренних волокон;

точка C — центр тяжести поперечного сечения;
 точка K — центр кривизны;
 $e = \rho - r$ — расстояние от центра тяжести поперечного сечения бруса до нейтральной оси.

Нормальные напряжения от изгибающего момента M в любом волокне произвольного поперечного сечения кривого бруса определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{M}{Fe} \frac{z}{r+z} = \frac{Mz}{Su}, \quad (8)$$

где: z — расстояние от нейтральной оси до исследуемого волокна;

$S = Fe$ — статический момент площади всего поперечного сечения бруса (F) относительно нейтральной оси Y .

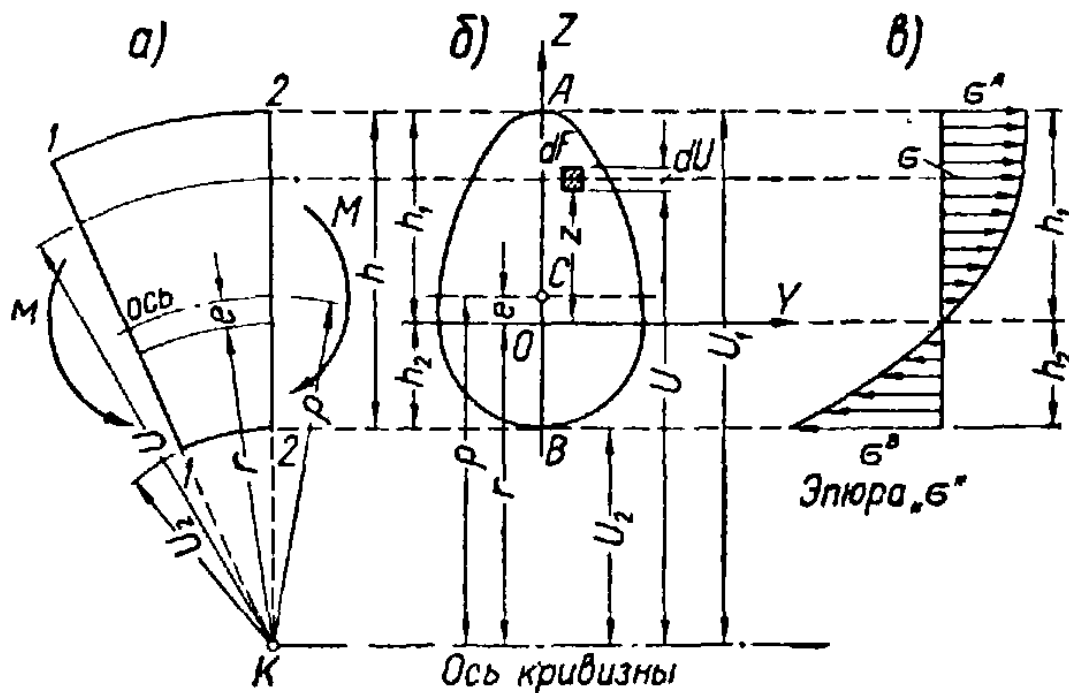


Рис. 130. Изгиб элемента кривого бруса.

В кривом бруске нейтральная ось Y не проходит через центр тяжести поперечного сечения C , а располагается между центром тяжести и центром кривизны.

Величину смещения нейтральной оси относительно центра тяжести называют эксцентриситетом нейтральной оси и обозначают через e .

По высоте сечения нормальные напряжения изменяются по гиперболическому закону, а не по линейному, как в брусе с прямолинейной осью.

Эпюра распределения напряжений по высоте сечения показана на рис. 130, в.

Если положительную полуось Z (рис. 130, б) направить от центра кривизны оси бруса и знак изгибающего момента принимать по установленному ранее правилу, то формула (8) дает не только величину нормального напряжения, но и его знак.

Напряжения в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах (A и B), являющиеся расчетными, получаются подстановкой в формулу (8) значений $z = h_1$, $u = u_1$ и $z = -h_2$, $u = u_2$:

$$\sigma^A = \frac{Mh_1}{Su_1}; \quad \sigma^B = -\frac{Mh_2}{Su_2}. \quad (9)$$

Если, кроме изгибающего момента, в поперечном сечении действует продольная сила, то полное нормальное напряжение в поперечном сечении от N и M на основании принципа независимости действия сил определяется по формуле:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{F} + \frac{Mz}{Su}. \quad (10)$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОЙ ОСИ

Для определения нормальных напряжений по формуле (8) надо знать положение нейтральной оси. Оно определяется величиной r или величиной $e = \rho - r$.

Радиус кривизны нейтральной оси для любого сечения вычисляется по формуле:

$$r = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}}. \quad (11)$$

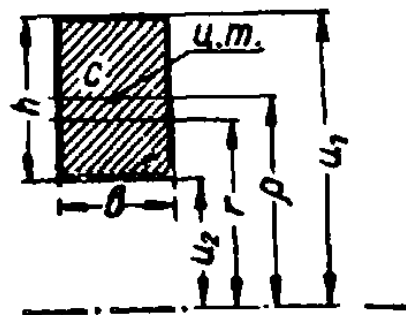
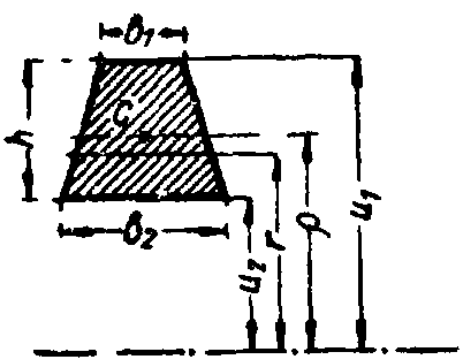
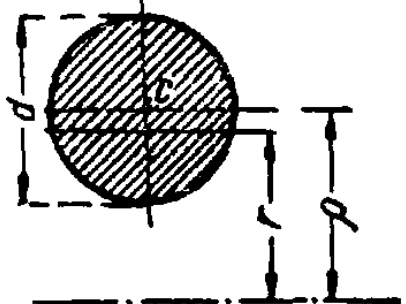
Из формулы (11) следует, что величина r зависит от формы сечения бруса, а величины и направления изгибающих моментов не влияют на положение нейтральной поверхности.

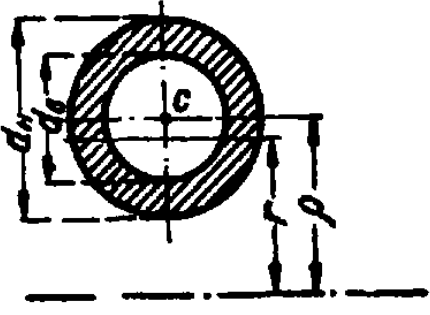
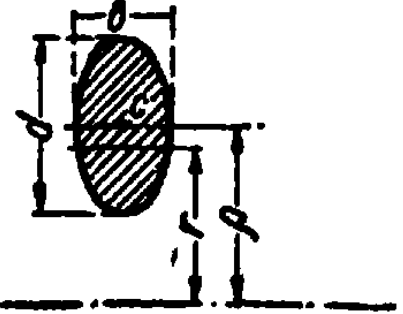
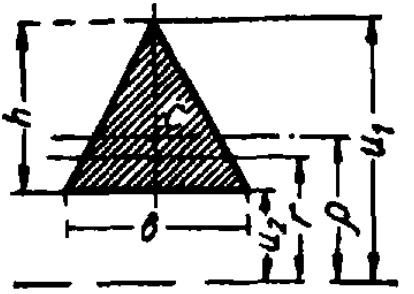
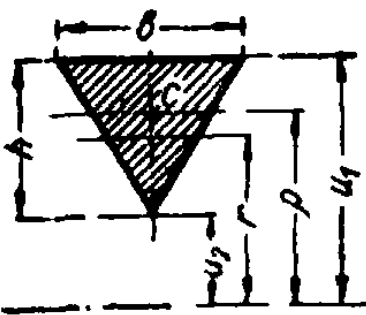
Интеграл $\int \frac{dF}{F u}$ должен быть найден для каждого вида сечения отдельно.

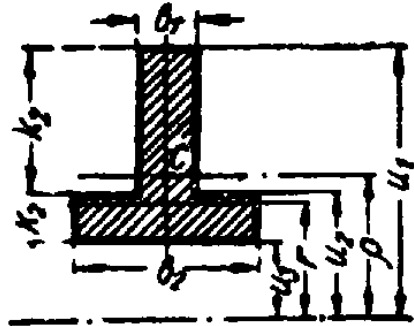
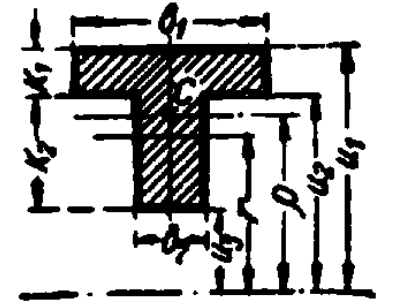
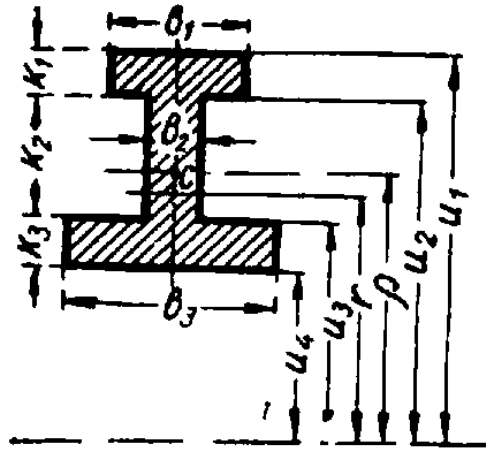
Так как ρ и r обычно мало отличаются друг от друга, то r надо вычислять с большой точностью, чтобы избежать грубой ошибки в определении $S = Fe = F(\rho - r)$. e должно выражаться числом, содержащим не менее 2—3 значащих цифр.

Значения r для часто встречающихся сечений различной формы приведены в таблице 42.

Таблица 42

№№ схем	Форма сечения и размеры	Радиус кривизны нейтрального слоя
1		$r = \frac{h}{\ln \frac{u_1}{u_2}}$ $\ln \frac{u_1}{u_2} = \frac{h}{\rho} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots \right]$
2		$r = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left[\frac{b_2 u_1 - b_1 u_2}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - (b_2 - b_1) \right]}$
3		$r = \frac{d^2}{4 [2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2}]}$

№№ схем	Форма сечения и размеры	Радиус кривизны нейтрального слоя
4		$r = \frac{d_H^2 - d_B^2}{4 [\sqrt{4\rho^2 - d_B^2} - \sqrt{4\rho^2 - d_H^2}]}$
5		$r = \frac{a^2}{4 [2\rho - \sqrt{4\rho^2 - a^2}]}$
6		$r = \frac{h}{2 \left[\frac{u_1}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - 1 \right]}$
7		$r = \frac{h}{2 \left[1 - \frac{u_2}{u_1} \ln \frac{u_1}{u_2} \right]}$

№№ схем	Форма сечения и размеры	Радиус кривизны нейтрального слоя
8		$r = \frac{b_1 k_1 + b_2 k_2}{b_1 \ln \frac{u_1}{u_2} + b_2 \ln \frac{u_2}{u_3}}$
9		$r = \frac{b_1 k_1 + b_2 k_2}{b_1 \ln \frac{u_1}{u_2} + b_2 \ln \frac{u_2}{u_3}}$
10		$r = \frac{b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3}{b_1 \ln \frac{u_1}{u_2} + b_2 \ln \frac{u_2}{u_3} + b_3 \ln \frac{u_3}{u_4}}$

Приближенные способы определения положения нейтральной оси

Определение радиуса кривизны нейтральной оси r по точной формуле (11) очень часто сопряжено с громоздкими вычислениями. Имеется ряд приближенных формул, определяющих положение нейтральной оси без большой погрешности.

Наиболее простая формула для определения эксцентриситета нейтральной оси для кривых брусьев небольшой кривизны, поперечные сечения которых имеют две оси симметрии, предложена Н. Н. Давиденковым. Эта формула имеет следующий вид:

$$e = \frac{J_{цo}}{F\rho}, \quad (12)$$

где: $J_{цo}$ — момент инерции сечения относительно его центральной оси, параллельной нейтральной линии, и ρ — радиус кривизны оси бруса в исследуемом сечении.

Формулу (12) с несколько меньшей, но достаточной для целей практики точностью применяют также и для сечений с одной осью симметрии.

Радиус кривизны нейтральной оси для сечения любой формы может быть найден приближенным способом путем замены интеграла $\int_F \frac{dF}{u}$ приближенным суммированием.

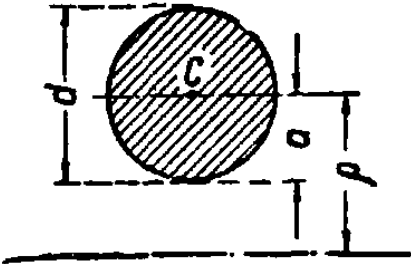
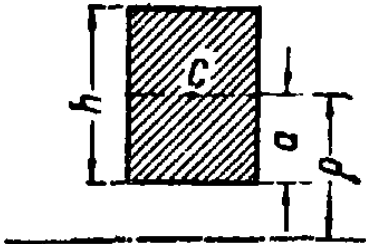
В этом случае площадь фигуры, изображенную строго в масштабе, разбивают линиями, параллельными нейтральной оси, на достаточное число полосок. Площади полосок $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3, \dots$ и их радиусы кривизны $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ могут быть измерены в масштабе чертежа.

Вычислив $\Sigma \frac{\Delta F}{u}$, приближенное значение радиуса кривизны найдем по формуле:

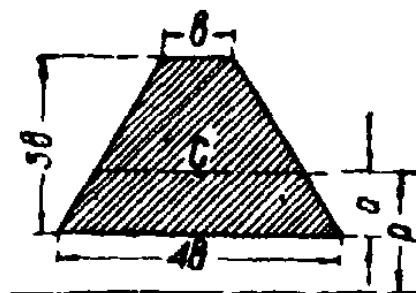
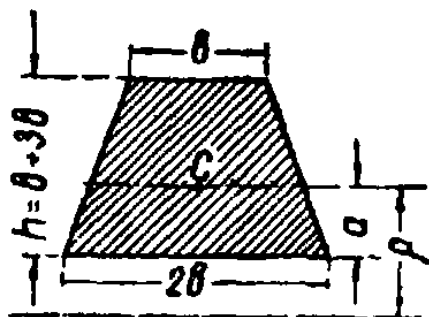
$$r = \frac{\Sigma \Delta F}{\Sigma \frac{\Delta F}{u}}. \quad (13)$$

В таблице 43 даны значения e в долях радиуса ρ для некоторых форм сечения в зависимости от отношения $\frac{\rho}{a}$, где a — расстояние от центра тяжести сечения до внутренних волокон. Для определения e достаточно соответствующее табличное число k умножить на ρ , т. е.

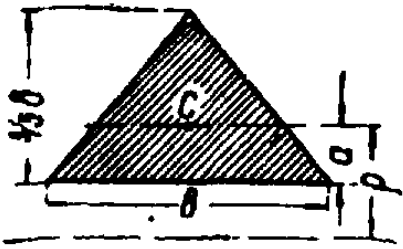
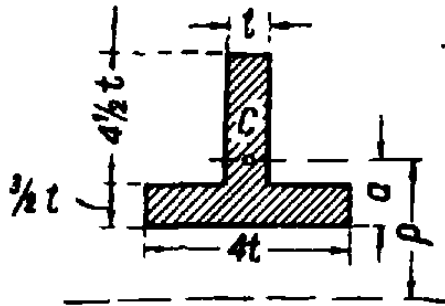
$$e = k\rho.$$

$\frac{p}{a}$		
1,2	0,224	0,305
1,4	0,151	0,204
1,6	0,108	0,149
1,8	0,084	0,112
2,0	0,069	0,090
2,2	0,058	0,077
2,4	0,049	0,065
2,6	0,042	0,055
2,8	0,036	0,047
3,0	0,030	0,041
3,5	0,022	0,028
4,0	0,016	0,021
6,0	0,0070	0,0093
8,0	0,0039	0,0052
10,0	0,0025	0,0033

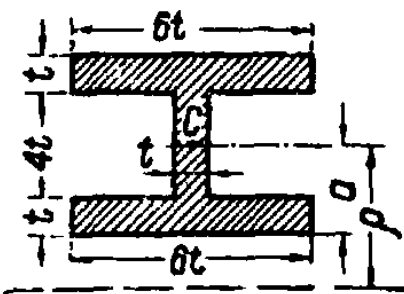
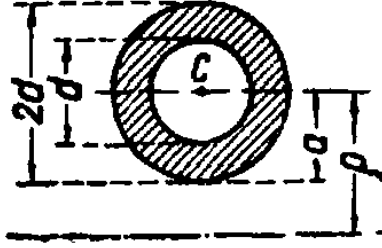
$\frac{p}{a}$



1,2	0,336	0,352
1,4	0,229	0,243
1,6	0,168	0,179
1,8	0,128	0,138
2,0	0,102	0,110
2,2	0,084	0,092
2,4	0,071	0,078
2,6	0,061	0,067
2,8	0,053	0,058
3,0	0,046	0,050
3,5	0,033	0,037
4,0	0,024	0,028
6,0	0,011	0,012
8,0	0,0060	0,0060
10,0	0,0039	0,0039

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,361	0,418
1,4	0,251	0,299
1,6	0,186	0,229
1,8	0,144	0,183
2,0	0,116	0,149
2,2	0,096	0,125
2,4	0,082	0,106
2,6	0,070	0,091
2,8	0,060	0,079
3,0	0,052	0,069
3,5	0,038	0,052
4,0	0,029	0,040
6,0	0,013	0,018
8,0	0,0060	0,010
10,0	0,0039	0,0065

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,409	0,408
1,4	0,292	0,285
1,6	0,224	0,208
1,8	0,178	0,160
2,0	0,144	0,127
2,2	0,120	0,104
2,4	0,103	0,088
2,6	0,089	0,077
2,8	0,077	0,067
3,0	0,067	0,058
3,5	0,049	0,041
4,0	0,038	0,030
6,0	0,018	0,013
8,0	0,010	0,0076
10,0	0,0065	0,0048

$\frac{p}{a}$		
1,2	0,453	0,269
1,4	0,319	0,182
1,6	0,236	0,134
1,8	0,183	0,104
2,0	0,147	0,083
2,2	0,122	0,068
2,4	0,104	0,057
2,6	0,090	0,049
2,8	0,078	0,043
3,0	0,067	0,038
3,5	0,048	0,028
4,0	0,036	0,020
6,0	0,016	0,0087
8,0	0,0089	0,0049
10,0	0,0057	0,0031

На рис. 131, а и б показаны эпюры нормальных напряжений при чистом изгибе кривого и прямого брусьев прямоугольного сечения.

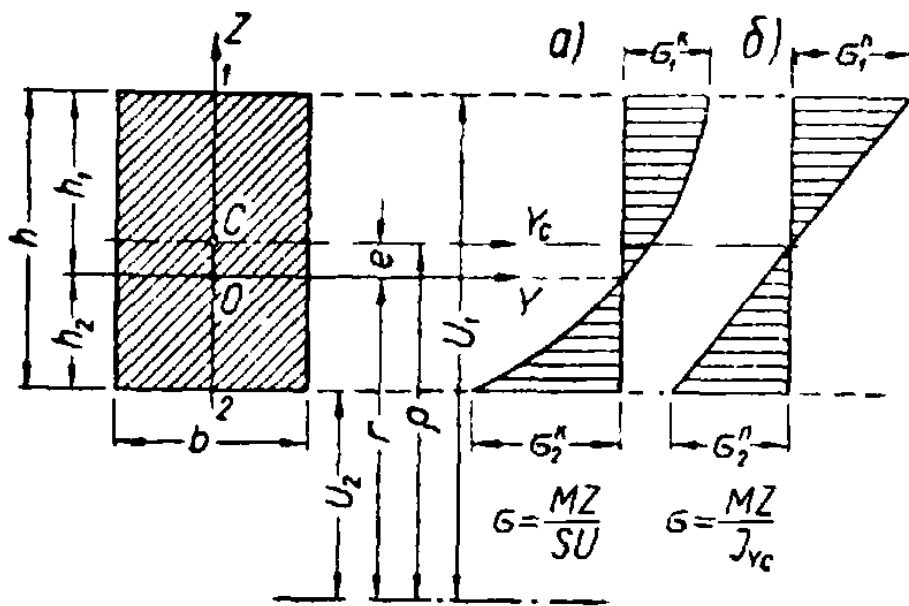


Рис. 131. Эпюры нормальных напряжений при чистом изгибе по высоте прямоугольного сечения для кривого и прямого брусьев.

Введем коэффициенты α_1 и α_2 , равные:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1^k}{\sigma_{\Pi}^k}; \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_2^k}{\sigma_{\Pi}^k}. \quad (14)$$

Значение коэффициентов α_1 и α_2 , вычисленные для брусьев прямоугольного и круглого сечений различной кривизны, приведены в таблице 44.

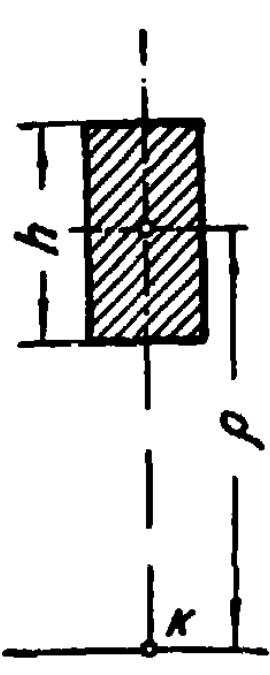
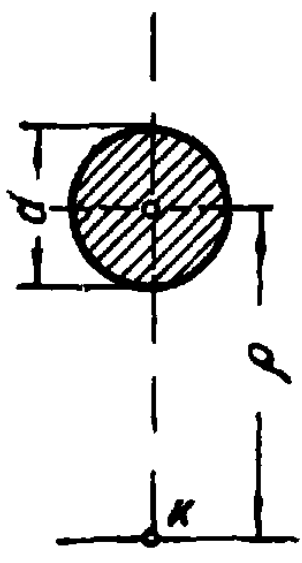
Из таблицы видно, что в том случае, когда можно мириться с погрешностью порядка (7 ÷ 8%), уже при $\frac{\rho}{h} = 5$ можно не учитывать начальную кривизну бруса и расчет кривого бруса вести по формулам для прямого бруса.

Б. РАЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ КРИВОГО БРУСА ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

А. Брус выполнен из материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие.

В этом случае $[\sigma_p] = [\sigma_c]$, и если придерживаться принципа равнопрочности, то рациональными будут такие сече-

Значения коэффициентов α_1 и α_2

	$\frac{\rho}{h}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2	3	4	5	
	α_1		0,57	0,63	0,67	0,70	0,73	0,81	0,85	0,90	0,92	0,94
			43%	37%	33%	30%	27%	19%	15%	10%	8%	6%
	α_2		2,89	2,13	1,79	1,63	1,52	1,30	1,20	1,12	1,09	1,07
		189%	113%	79%	63%	52%	30%	20%	12%	9%	7%	
	$\frac{\rho}{d}$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2	3	4	5	
	α_1		0,52	0,60	0,65	0,68	0,71	0,79	0,84	0,89	0,91	0,93
			48%	40%	35%	32%	29%	21%	16%	11%	9%	7%
	α_2		3,41	2,40	1,96	1,75	1,62	1,33	1,23	1,14	1,10	1,08
		241%	140%	96%	75%	62%	33%	23%	14%	10%	8%	

ния, для которых σ^A и σ^B (рис. 130) по абсолютной величине будут равны. Этого можно добиться для профилей 2, 6, 8, 10 (см. таблицу 42) соответствующим подбором соотношений между размерами сечения.

Сечения с двумя осями симметрии являются нерациональными, так как в этом случае $|\sigma^A| \neq |\sigma^B|$ и более напряженной будет крайняя точка на внутренней поверхности бруса.

Б. Брус выполнен из материала, хуже работающего на растяжение, чем на сжатие, т. е. $[\sigma_p] < [\sigma_c]$.

Для случая, показанного на рис. 132, а, рациональными будут сечения с двумя осями симметрии, но еще более рациональными будут профили 7, 9 при таком размещении материала, когда $\sigma_{\text{экв}}^A = \sigma_{\text{экв}}^B$.

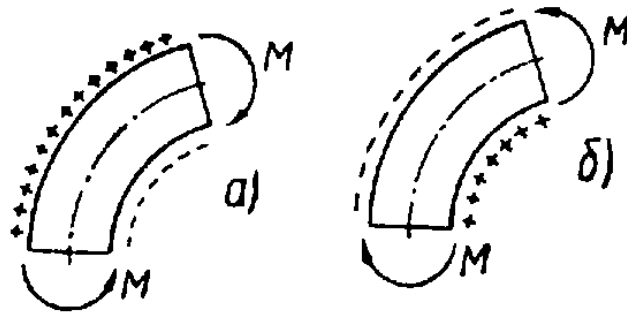


Рис. 132. Действие на элемент кривого бруса изгибающих моментов разных знаков.

Для случая, изображенного на рис. 132, б, наиболее рациональными будут сечения типа 2, 6, 8, 10.

Пример 2. Определить положение нейтрального слоя для кривого бруса треугольного поперечного сечения. Все размеры даны на рис. 133.

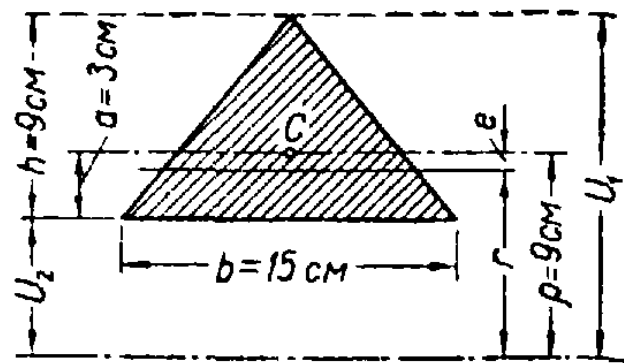


Рис. 133. К примеру 2.

Решение: 1. По точной формуле (см. таблицу 42, профиль б) имеем:

$$r = \frac{h}{2 \left[\frac{u_1}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - 1 \right]} = \frac{9}{2 \left[\frac{15}{9} \ln \frac{15}{6} - 1 \right]} = 8,536 \text{ см.}$$

$$e = \rho - r = 9 - 8,536 = 0,464 \text{ см.}$$

2. По таблице 43:

для $\frac{\rho}{a} = \frac{9}{3} = 3$; $\kappa = 0,052$ и $e = \kappa\rho = 0,052 \cdot 9 = \underline{0,468 \text{ см.}}$

3. По формуле Давиденкова:

$$e = \frac{J_{\text{цп}}}{F\rho} = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{bh}{2} \rho} = \frac{h^2}{18 \cdot \rho} = \frac{9^2}{18 \cdot 9} = \underline{0,5 \text{ см.}}$$

4. Приближенный способ. Для приближенного решения рассматриваемой задачи площадь треугольника разделим линиями, параллельными основанию, на 15 полосок высотой по 6 мм каждая (рис. 134).

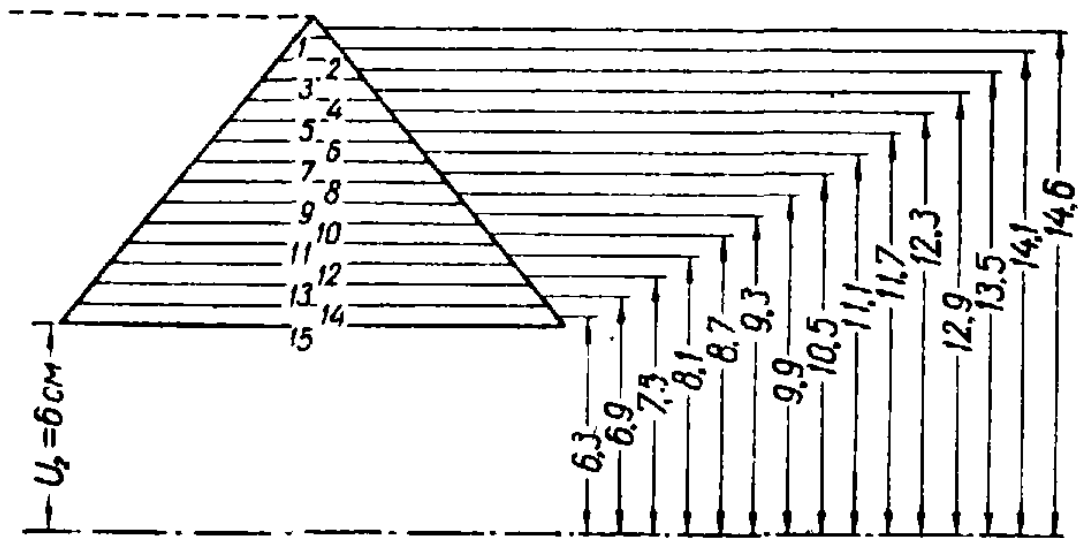


Рис. 134. Приближенный способ определения положения нейтрального слоя.

Значения ΔF , u и $\frac{\Delta F}{u}$ записаны в таблице 45.

Таблица 45

№№ п/п	ΔF в см ²	u в см	$\frac{\Delta F}{u}$ в см
1	8,7	6,3	1,3810
2	8,1	6,9	1,1739
3	7,5	7,5	1,0000
4	6,9	8,1	0,8519
5	6,3	8,7	0,7241

№№ п/п	ΔF в см ²	u в см	$\frac{\Delta F}{u}$ в см
6	5,7	9,3	0,6140
7	5,1	9,9	0,5152
8	4,5	10,5	0,4286
9	3,9	11,1	0,3514
10	3,3	11,7	0,2821
11	2,7	12,3	0,2195
12	2,1	12,9	0,1628
13	1,5	13,5	0,1111
14	0,9	14,1	0,0638
15	0,3	14,6	0,0205

$$\Sigma \frac{\Delta F}{u} = 7,8999 \text{ см.}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя:

$$r = \frac{\Sigma \Delta F}{\Sigma \frac{\Delta F}{u}} = \frac{67,5}{7,9} = 8,544 \text{ см; } e = \underline{0,456 \text{ см.}}$$

Пример 3. Определить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в опасном сечении подъемного крюка трапецеидального поперечного сечения грузоподъемностью 10 т. Все размеры даны на рис. 135 (закругления углов в сечении не показаны и при расчетах не учитываются).

Решение. Расстояние центра тяжести C от внутренних волокон:

$$a = \frac{h(2b_1 + b_2)}{3(b_1 + b_2)} = \frac{12(2 \cdot 3 + 8)}{3(3 + 8)} = 5,09 \text{ см.}$$

Радиус осевой линии:

$$r = u_2 + a = 8,00 + 5,09 = 13,09 \text{ см.}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя определим (см. таблицу 42, профиль 2) по формуле:

$$r = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \left[\frac{b_2 u_1 - b_1 u_2}{h} \ln \frac{u_1}{u_2} - (b_2 - b_1) \right]} =$$

$$= \frac{12(3 + 8)}{2 \left[\frac{8 \cdot 20 - 3 \cdot 8}{12} \ln \frac{20}{8} - (8 - 3) \right]} = 12,22 \text{ см.}$$

Эксцентриситет нейтральной оси:

$$e = \rho - r = 13,09 - 12,22 = 0,87 \text{ см.}$$

Статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной оси:

$$S = Fe = \frac{h}{2} (b_1 + b_2) e = 6 (3 + 8) 0,87 = 57,4 \text{ см}^3.$$

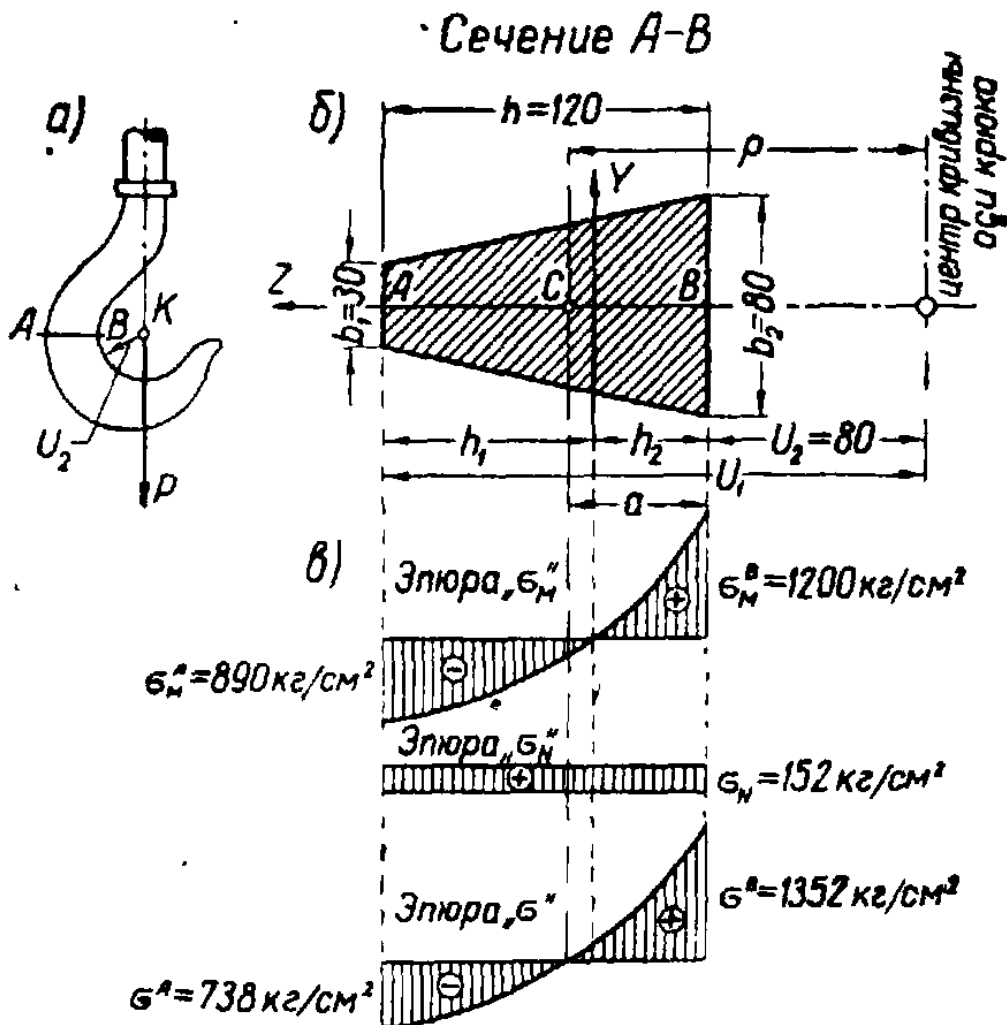


Рис. 135. К примеру 3.

Расстояния наиболее удаленных волокон:

$$h_2 = a - e = 5,09 - 0,87 = 4,22 \text{ см;}$$

$$h_1 = h - h_2 = 12,00 - 4,22 = 7,78 \text{ см.}$$

Опасным сечением будет сечение АВ, где изгибающий момент M и продольная сила N одновременно достигают наибольших значений:

$$M = -Pr = -10\,000 \cdot 13,09 = -130\,900 \text{ кгсм;}$$

$$N = P = 10\,000 \text{ кг.}$$

Напряжения от изгибающего момента в крайних волокнах указанного сечения определяются по формуле (9):

$$\sigma_M^A = \frac{Mh_1}{Su_1} = \frac{-130\,900 \cdot 7,78}{57,4 \cdot 20} = -890 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_M^B = -\frac{Mh_2}{Su_2} = -\frac{-130\,900 \cdot 4,22}{57,4 \cdot 8} = 1\,200 \text{ кг/см}^2.$$

Растягивающие напряжения от продольной силы:

$$\sigma_N^A = \sigma_N^B = \frac{N}{F} = \frac{10\,000}{66} = 152 \text{ кг/см}^2.$$

Полные напряжения в крайних точках:

$$\sigma^A = \sigma_N^A + \sigma_M^A = 152 - 890 = -738 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma^B = \sigma_N^B + \sigma_M^B = 152 + 1\,200 = 1\,352 \text{ кг/см}^2.$$

Эпюры нормальных напряжений σ_N , σ_M и $\sigma = \sigma_N + \sigma_M$ показаны на рис. 135, в.

Пример 4. Назначить размер b_2 таврового сечения (рис. 136) так, чтобы при чистом изгибе σ_{max} и σ_{min} по абсолютной величине равнялись друг другу:

$$k_2 = 2,5 \text{ см}; \quad k_1 = 7,5 \text{ см}, \quad b_1 = 2,5 \text{ см}; \quad u_3 = 7,5 \text{ см}.$$

Решение. Напряжения в крайних волокнах A и B сечения определяются по формулам (9):

$$\sigma^A = \frac{Mh_1}{Su_1};$$

$$\sigma^B = -\frac{Mh_2}{Su_3}.$$

По условию задачи:

$$|\sigma^A| = |\sigma^B|.$$

Отсюда

$$\frac{Mh_1}{Su_1} = \frac{Mh_2}{Su_3} \quad \text{или} \quad \frac{h_1}{u_1} = \frac{h_2}{u_3}.$$

Как видно из рисунка,

$$h_1 = u_1 - r; \quad h_2 = r - u_3 \quad \text{и} \quad \frac{u_1 - r}{u_1} = \frac{r - u_3}{u_3},$$

откуда радиус кривизны нейтрального слоя:

$$r = \frac{2u_1u_3}{u_1 + u_3} = \frac{2 \cdot 17,5 \cdot 7,5}{17,5 + 7,5} = 10,5 \text{ см}.$$

Подставляя найденное значение r в формулу, приведенную в таблице 42 для таврового профиля, получаем следующее уравнение:

$$r = \frac{b_1 \kappa_1 + b_2 \kappa_2}{b_2 \ln \frac{u_2}{u_3} + b_1 \ln \frac{u_1}{u_2}}$$

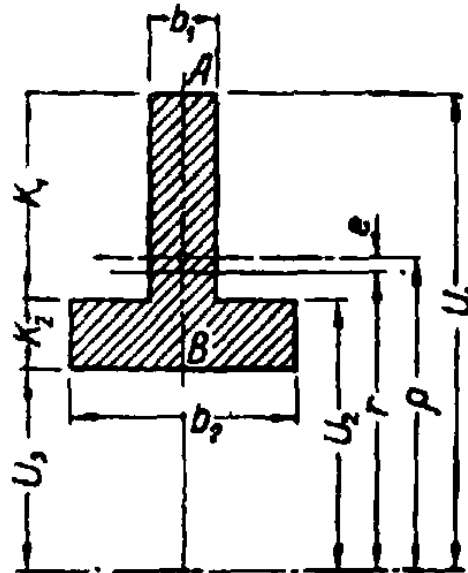


Рис. 136. К примеру 4.

Решая это уравнение относительно b_2 , найдем ее величину:

$$b_2 = b_1 \frac{\kappa_1 - r \ln \frac{u_1}{u_2}}{r \ln \frac{u_2}{u_3} - \kappa_2} = 2,5 \frac{7,5 - 10,5 \ln \frac{17,5}{10}}{10,5 \ln \frac{10}{7,5} - 2,5} = 7,8 \text{ см.}$$

6. ДЕФОРМАЦИЯ КРИВЫХ БРУСЬЕВ

Потенциальная энергия кривых брусьев

В общем случае, при плоском изгибе, когда $M \neq 0$, $N \neq 0$ и $Q \neq 0$, потенциальная энергия изогнутого кривого стержня, ось которого имеет длину s , определяется по формуле:

$$U = \int_s \frac{M^2 ds}{2EF\rho} + \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} + \int_s \frac{MN ds}{EF\rho} + k \int \frac{Q^2 ds}{2GF} \quad (15)$$

В формуле (15) интегрирование распространяется на всю длину бруса:

M , N и Q — текущие значения внутренних силовых факторов (функции абсциссы s) от заданной нагрузки;

k — отвлеченный коэффициент, учитывающий неравномерное распределение касательных напряжений по высоте сечения бруса.

Коэффициент k зависит от формы сечения и имеет то же значение, что и для прямых брусьев:

для прямоугольного сечения $k = 1,2$;

для круглого сечения $k = 1,185$;

для двутаврового профиля $k = \frac{F}{F_{ст}}$,

где F — площадь сечения двутавра, а $F_{ст}$ — площадь стенки.

В формулу (15) M и N входят со своими знаками.

Для брусьев малой кривизны $F_{ер} \approx J$. Как показывают численные подсчеты, без большой погрешности можно пренебречь последними тремя слагаемыми, и выражение потенциальной энергии бруса малой кривизны примет вид:

$$U = \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (16)$$

Если при вычислении M , N и Q приходится разбивать брус на участки, то соответственно этому каждый из интегралов в формулах (15) и (16) распадается на сумму интегралов с соответственно выбранными пределами.

Вычисление перемещений в кривых брусьях

Определение угловых и линейных перемещений в кривых брусьях лучше всего производить, используя энергетический метод Мора. Для плоского кривого бруса большой кривизны перемещение точки его оси равно:

$$\Delta = \int_s \frac{MM_1 ds}{EF_{ер}} + \int_s \frac{NN_1 ds}{EF} + \int_s \frac{(MN_1 + NM_1) ds}{EF_{р}} + k \int_s \frac{QQ_1 ds}{GF}, \quad (17)$$

Таблица интегралов, часто встречающихся

№№ п/п	Интеграл	Неопределенный интеграл	Определенный инте-
			от 0 до α
1	$\int \sin \varphi d\varphi$	$-\cos \varphi + C$	$1 - \cos \alpha$
2	$\int \cos \varphi d\varphi$	$\sin \varphi + C$	$\sin \alpha$
3	$\int \sin^2 \varphi d\varphi$	$-\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + C$	$-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$
4	$\int \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + C$	$\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$
5	$\int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^3 \varphi}{3} + C$	$\frac{\sin^3 \alpha}{3}$
6	$\int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$	$-\frac{\cos^3 \varphi}{3} + C$	$\frac{1 - \cos^3 \alpha}{3}$
7	$\int \sin 2\varphi d\varphi$	$-\frac{1}{2} \cos 2\varphi + C$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$
8	$\int \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin 2\varphi + C$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$
9	$\int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\frac{\sin^2 \varphi}{2} + C$	$\frac{\sin^2 \alpha}{2}$
10	$\int \varphi \sin \varphi d\varphi$	$\sin \varphi - \varphi \cos \varphi + C$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$

в расчетах деформаций кривого бруса

град в пределах		
от 0 до $\frac{\pi}{4}$	от 0 до $\frac{\pi}{2}$	от 0 до π
$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,293$	1	2
$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	1	0
$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{1}{4} = 0,143$	$\frac{\pi}{4} = 0,785$	$\frac{\pi}{2} = 1,571$
$\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \frac{1}{4} = 0,643$	$\frac{\pi}{4} = 0,785$	$\frac{\pi}{2} = 1,571$
$\frac{\sqrt{2}}{12} = 0,118$	$\frac{1}{3} = 0,333$	0
$\frac{4 - \sqrt{2}}{12} = 0,216$	$\frac{1}{3} = 0,333$	$\frac{2}{3} = 0,667$
$\frac{1}{2}$	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{2} = 0,5$	0
$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,152$	1	$\pi = 3,141$

№№ п/п	Интеграл	Неопределенный интеграл	Определенный инте-
			от 0 до α
11	$\int \varphi \cos \varphi d\varphi$	$\cos \varphi + \varphi \sin \varphi + C$	$\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1$
12	$\int \varphi \sin^2 \varphi d\varphi$	$\frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi \sin 2\varphi}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{8} + C$	$\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha \sin 2\alpha}{4} - \frac{\cos 2\alpha}{8} + \frac{1}{8}$
13	$\int \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$	$\frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi \sin 2\varphi}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{8} + C$	$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha \sin 2\alpha}{4} + \frac{\cos 2\alpha}{8} - \frac{1}{8}$
14	$\int \varphi \sin 2\varphi d\varphi$	$\frac{\sin 2\varphi}{4} - \frac{\varphi \cos 2\varphi}{2} + C$	$\frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha \cos 2\alpha}{2}$
15	$\int \varphi \cos 2\varphi d\varphi$	$\frac{\cos 2\varphi}{4} + \frac{\varphi \sin 2\varphi}{2} + C$	$\frac{\cos 2\alpha}{4} + \frac{\alpha \sin 2\alpha}{2} - \frac{1}{4}$
16	$\int \sin(\alpha - \varphi) \times \sin \varphi d\varphi$	$\frac{\sin \varphi \cos(\alpha - \varphi)}{2} - \frac{\varphi \cos \alpha}{2} + C$	$\frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\alpha \cos \alpha}{2}$
17	$\int \cos(\alpha - \varphi) \times \sin \varphi d\varphi$	$-\frac{\sin \varphi \sin(\alpha - \varphi)}{2} + \frac{\varphi \sin \alpha}{2} + C$	$\frac{\alpha \sin \alpha}{2}$

град в пределах

от 0 до $\frac{\pi}{4}$	от 0 до $\frac{\pi}{2}$	от 0 до π
$\left(1 + \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,262$	$\frac{\pi}{2} - 1 = 0,571$	-2
$\frac{\pi^2 - 4\pi + 8}{64} = 0,0833$	$\frac{\pi^2 + 4}{16} = 0,868$	$\frac{\pi^2}{4} = 2,47$
$\frac{\pi^2 + 4\pi - 8}{64} = 0,226$	$\frac{\pi^2 - 4}{16} = 0,368$	$\frac{\pi^2}{4} = 2,47$
$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{\pi}{4} = 0,785$	$-\frac{\pi}{2} = -1,571$
$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{1}{4} = 0,143$	$-\frac{1}{2} = -0,5$	0
$\frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0,076$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\pi}{2} = 1,571$
$\frac{\pi \sqrt{2}}{16} = 0,278$	$\frac{\pi}{4} = 0,785$	0

где: M , N и Q — текущие значения внутренних силовых факторов от заданной нагрузки;

M_1 , N_1 и Q_1 — текущие значения внутренних силовых факторов от единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения.

Для брусев малой кривизны формула (17) упрощается и принимает следующий вид:

$$\Delta = \int_s \frac{MM_1 ds}{EI} \quad (18)$$

Значения интегралов, часто встречающихся при определении деформаций кривого бруса, даны в таблице 46, а в таблице 47 приведены значения перемещений и значения наибольших изгибающих моментов для некоторых брусев малой кривизны.

Пример 5. Оценить в процентах влияние усилий M , N и Q на величину перемещения в направлении силы P для бруса большой кривизны при $\frac{p}{h} = 1$ и $\frac{p}{h} = 3$. Сечение бруса — прямоугольник (рис. 137). $G = 0,4E$.

При определении перемещений по формуле (17) третьим слагаемым можно пренебречь.

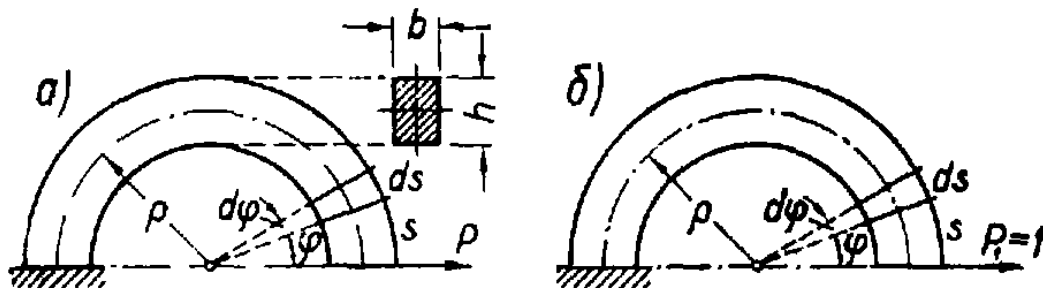


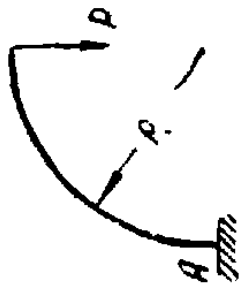
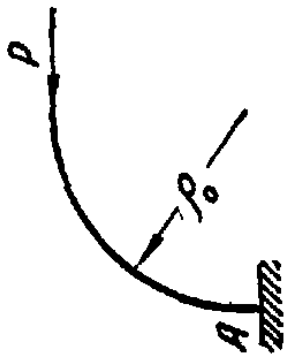

Рис. 137. К примеру 5.

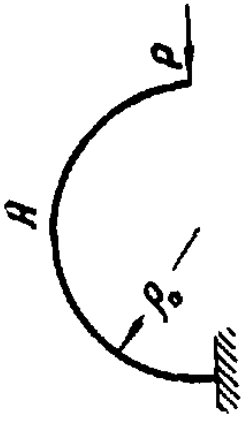
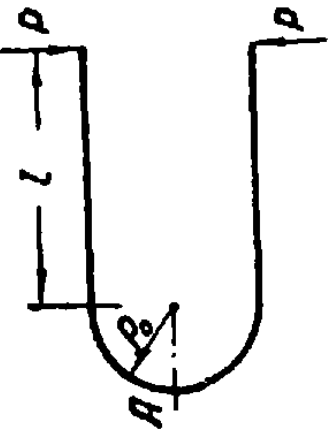
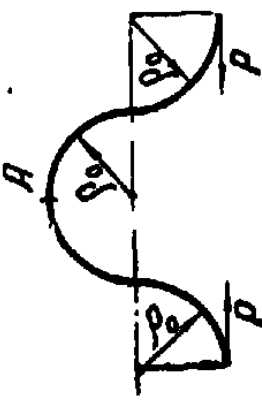
Решение. В качестве единичного состояния берем тот же брус, но нагруженный единичным грузом $P_1 = 1$, действующим в направлении искомого перемещения (см. рис. 137, б).

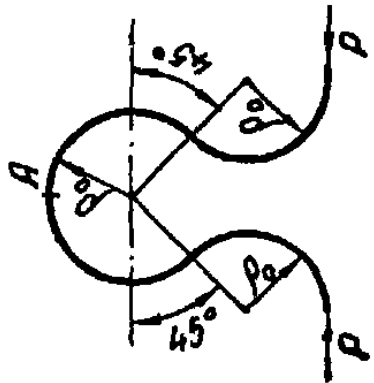

Проводим текущее сечение под углом φ и определяем усилия M , N и Q от заданной нагрузки (рис. 137, а) и усилия M_1 , N_1 и Q_1 от единичной нагрузки (рис. 137, б):

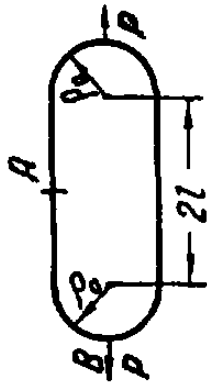
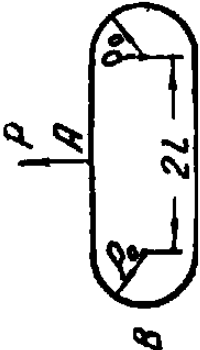
$$\begin{aligned} M &= -P\rho \sin \varphi; \quad N = P \sin \varphi; \quad Q = P \cos \varphi; \\ M_1 &= -P \sin \varphi; \quad N_1 = \sin \varphi; \quad Q_1 = \cos \varphi; \\ ds &= \rho d\varphi. \end{aligned}$$

Наибольшие изгибающие моменты и перемещения
для кривых брусьев

№№ схем	Вид кривого бруса	M_{max}	Перемещение Δ
1		$M_A = P \rho_0$	<p>Вертикальное перемещение концевого сечения $\Delta = 0,785 \frac{P \rho_0^3}{EJ}$</p> <p>Горизонтальное перемещение концевого сечения $\Delta = 0,5 \frac{P \rho_0^3}{EJ}$</p>
2		$M_A = P \rho_0$	<p>Горизонтальное перемещение концевого сечения $\Delta = 0,356 \frac{P \rho_0^3}{EJ}$</p>
3		$M_A = 2P \rho_0$	<p>Вертикальное перемещение концевого сечения $\Delta = 0,471 \frac{P \rho_0^3}{EJ}$</p>

№№ схем	Вид кривого бруса	M_{max}	Перемещение Δ
4		$M_A = P \rho_0$	<p>Горизонтальное перемещение концевого сечения</p> $\Delta = 1,571 \frac{P \rho_0^3}{EJ}$
5		$M_A = P (\rho_0 + l)$	<p>Сближение конечных сечений</p> $\Delta = \frac{2l}{EJ} \left[\frac{l^3}{3} + \rho_0 \left(\frac{\pi}{2} l^2 + \frac{\pi}{4} \rho_0^2 + 2l \rho_0 \right) \right]$
6		$M_A = 2P \rho_0$	<p>Сближение конечных сечений</p> $\Delta = 9,42 \frac{P \rho_0^3}{EJ}$

№№ схем	Вид кривого бруса	M_{max}	Перемещение Δ
7		$M_A = 2P r_0 (1 + \cos 45^\circ)$	<p>Сближение конечных сечений</p> $\Delta = 39,88 \frac{P r_0^3}{EJ}$
8		$M_A = 0,318 P r_0$ $M_B = -0,182 P r_0$	<p>Увеличение вертикального диаметра</p> $\Delta = 0,149 \frac{P r_0^3}{EJ}$ <p>Уменьшение горизонтального диаметра</p> $\Delta = 0,137 \frac{P r_0^3}{EJ}$

№№ схем	Вид кривого бруса	M_{max}	Перемещение Δ
9		$M_A = -0,507 \frac{P \rho_0^2}{2l + \pi \rho_0}$ $M_B = M_A + 0,5 P \rho_0$	<p>_____</p>
10		$M_B = -0,5 P \frac{h 14 \rho_0^2 + 2 \rho_0 l + l^2}{\pi \rho_0 + 2l}$ $M_A = M_B + 0,5 P (\rho_0 + l)$	<p>_____</p>

Подставив найденные выражения усилий M , N , Q и M_1 , N_1 , Q_1 в правую часть формулы (17) и интегрируя в пределах всего бруса, определим искомое перемещение:

$$\Delta_M = \int_s \frac{MM_1 ds}{EFe\rho} = \int_0^\pi \frac{P\rho \sin\varphi \rho \sin\varphi \rho d\varphi}{EFe\rho} = \frac{P\rho^2}{EFe} \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{P\rho^2}{EFe} \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta_N = \int_s \frac{NN_1 ds}{EF} = \int_0^\pi \frac{P \sin\varphi \sin\varphi \rho d\varphi}{EF} = \frac{P\rho}{EF} \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{P\rho}{EF} \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta_Q = k \int_s \frac{QQ_1 ds}{GF} = k \int_0^\pi \frac{P \cos\varphi \cos\varphi \rho d\varphi}{0,4 EF} = \frac{1,2 P\rho}{0,4 EF} \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{3P\rho}{EF} \frac{\pi}{2}.$$

Значения определенных интегралов взяты по таблице 46. k — для прямоугольного сечения равно 1,2 (см. стр. 293); Δ_M , Δ_N и Δ_Q — перемещения, вызванные действием изгибающего момента, продольной и поперечной сил.

Полное перемещение по направлению силы P :

$$\Delta = \Delta_M + \Delta_N + \Delta_Q.$$

$$\Delta = \frac{\pi P\rho}{2EF} \left(\frac{\rho}{e} + 1 + 3 \right). \quad (A)$$

При $\frac{\rho}{h} = 1$; $e = 0,0897 h$; $\frac{\rho}{e} = \frac{h}{e} = \frac{h}{0,0897 h} = 11,14$.

Подставляя значение $\frac{\rho}{e}$ в формулу (A) получим:

$$\Delta = \frac{\pi P\rho}{2EF} (11,4 + 1 + 3), \text{ т. е. } \underline{\Delta_M = 73,6\%}; \quad \underline{\Delta_N = 6,6\%} \text{ и } \underline{\Delta_Q = 19,8\%}$$

При $\frac{\rho}{h} = 3$; $e = 0,0283 h$; $\frac{\rho}{e} = \frac{3h}{0,0283 h} = 106$ и

$$\Delta = \frac{\pi P\rho}{2EF} (106 + 1 + 3), \text{ т. е. } \underline{\Delta_M = 96,4\%}; \quad \underline{\Delta_N = 0,9\%} \text{ и } \underline{\Delta_Q = 2,7\%}.$$

Пример 6. В ненапряженном состоянии пружина с круговой осью сомкнута. Какое должно быть предельное соотношение $\frac{d}{R}$, если желательно, чтобы при раздвижении концов пружины на расстояние d , равное диаметру пружины, напряжения не превосходили 2000 кг/см^2 . $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ (рис. 138, а).

Решение. При действии силы P (рис. 138, б) вертикальное перемещение конца B определим по формуле (18), полагая, что брус имеет малую кривизну.

Изгибающий момент M от заданной нагрузки (рис. 138, б) и M_1 от единичной нагрузки (рис. 138, в) найдутся по формулам:

$$M = PR(1 - \cos \varphi); \quad M_1 = R(1 - \cos \varphi) \text{ и } ds = R d\varphi.$$

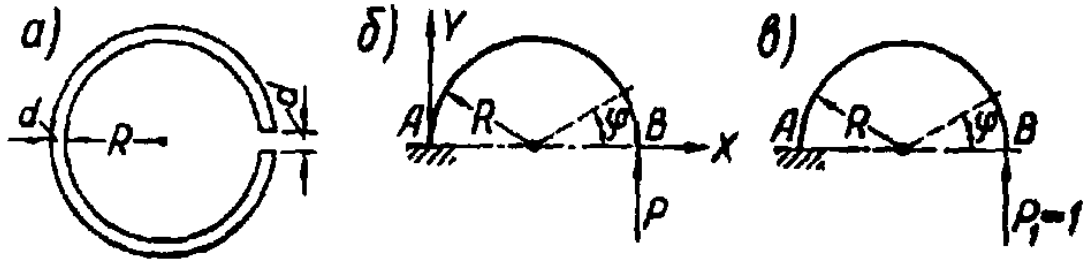


Рис. 138. К примеру 6.

Подставляя найденные значения M и M_1 в формулу (18), получим:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{PR^3}{EJ} \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{PR^3}{EJ} \left[\int_0^\pi d\varphi - 2 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{\pi R^3}{EJ} \left(\pi + 0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi PR^3}{2EJ}. \end{aligned}$$

Величину силы P найдем, полагая $2\Delta y = d$; $\frac{3\pi PR^3}{EJ} = d$, откуда

$$P = \frac{EJd}{3\pi R^3}.$$

Наибольший изгибающий момент и наибольшие напряжения будут на конце A :

$$M_{max} = P2R = \frac{2EJd}{3\pi R^2}.$$

Пренебрегая напряжениями от продольной силы, найдем:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{2EJd}{3\pi WR^2} = \frac{Ed^2}{3\pi R^2}, \text{ так как } \frac{J}{W} = \frac{d}{2}.$$

Приравнявая это заданному напряжению, найдем искомое значение отношения $\frac{d}{R}$:

$$\frac{E}{3\pi} \left(\frac{d}{R} \right)^2 = \sigma_{max}; \quad \frac{d}{R} = \sqrt{\frac{3\pi\sigma_{max}}{E}}.$$

По условию задачи $\sigma_{max} = 2000 \text{ кг/см}^2$;

$$\frac{d}{R} = \sqrt{\frac{3,3,14 \cdot 2000}{2 \cdot 10^6}} = \frac{1}{10,3}.$$

Так как $\frac{R}{d} = 10,3$, то предположение, что мы имеем брус малой кривизны, оказалось справедливым, и расчет можно вести по формулам для прямого бруса.

Глава XI. ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

1. ТОЛСТОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

**Круглый цилиндр, подверженный внутреннему и внешнему
равномерным радиальным давлениям**

Вследствие симметрии тела и нагрузки деформации цилиндра будут также симметричны относительно оси цилиндра и постоянны по его длине.

Формулы для определения напряжений:

$$\sigma_t = \frac{\rho_B r_1^2 - \rho_H r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(\rho_B - \rho_H) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) \rho^2}; \quad (1)$$

$$\sigma_r = \frac{\rho_B r_1^2 - \rho_H r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(\rho_B - \rho_H) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) \rho^2}, \quad (2)$$

$$\sigma_m = \frac{\rho_B r^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad (3)$$

где: ρ_B, ρ_H — внутреннее и наружное давления;

r_1, r_2 — внутренний и наружный радиусы;

ρ — текущий радиус;

σ_t — нормальное напряжение, действующее по граням mm_1 и nn_1 (рис. 139);

σ_r — нормальные радиальные напряжения, действующие по граням mn ;

σ_m — нормальное напряжение, действующее на плоскости mm_1m_1 (по направлению оси цилиндра).

Расчетные уравнения при действии одного внутреннего давления:

а) по третьей теории прочности

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p_B}}; \quad (4)$$

б) по четвертой теории прочности

$$r_2 = r_1 \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - \sqrt{3} p_B}}. \quad (5)$$

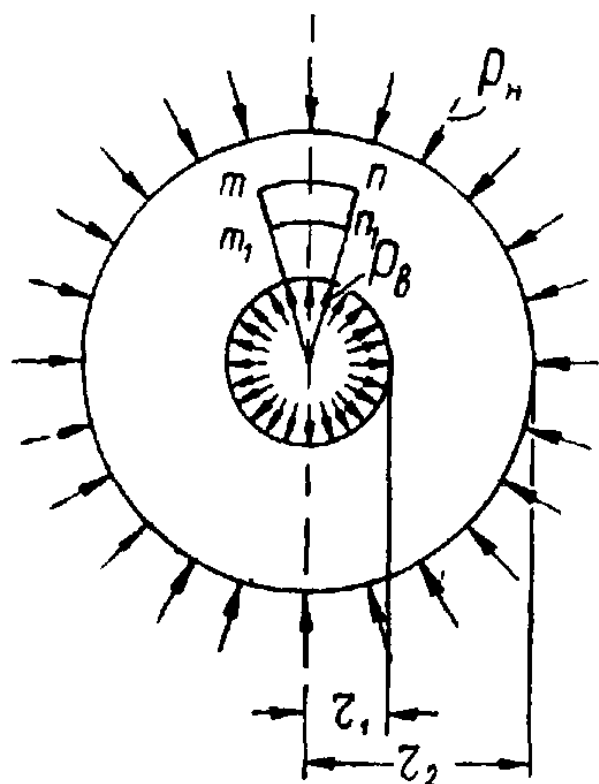


Рис. 139. Поперечное сечение цилиндра.

Радиальное перемещение u может быть определено по формуле:

$$u = \frac{1}{E} \left[(1 - \mu) \frac{p_B r_1^2 - p_H r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)} \rho + (1 + \mu) \frac{(p_B - p_H) r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) \rho} \right]. \quad (6)$$

Составные цилиндры

При работе цилиндрических труб, подвергнутых внутреннему давлению, опасными точками являются точки на внутренней поверхности. Для уменьшения напряжений в рабочем

состоянии в указанных точках создают предварительные напряжения, обратные по знаку рабочим. Достигается это путем изготовления труб из двух (рис. 140), трех и более цилиндров, которые насаживаются один на другой, причем внутренний диаметр внешнего цилиндра меньше наружного диаметра внутреннего цилиндра. Разность между этими диаметрами Δ называется величиной натяга, или просто натягом.

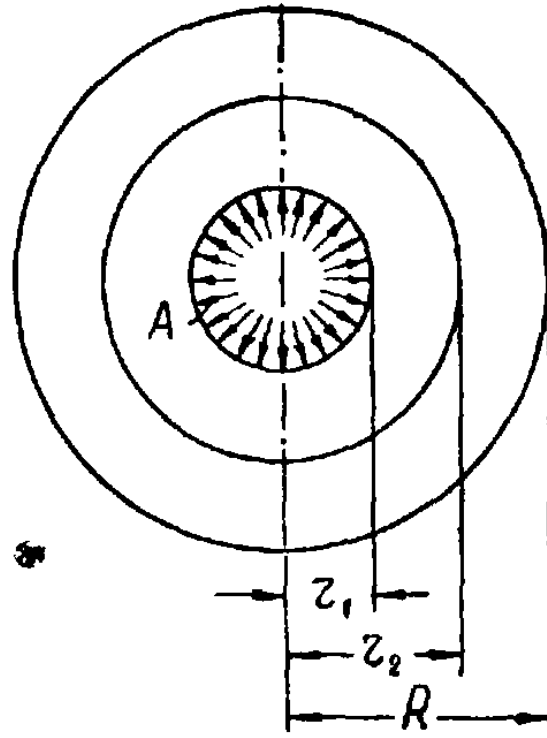


Рис. 140. Поперечное сечение составной трубы.

Давление, возникающее от насаживания на поверхности соприкосновения между внутренним и наружным цилиндрами, определяется по формуле:

$$p_0 = \frac{\Delta E_B E_H}{d_2 (B E_H + A E_B)} \text{ кг/см}^2, \quad (7)$$

где:

$$A = \frac{r_2^3 + R^2}{R^2 - r_2^2} + \mu;$$

$$B = \frac{r_1^3 + r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \mu;$$

E_v, E_n — модуль упругости при растяжении и сжатии внутренней и наружной труб;
 μ — коэффициент Пуассона.

Если трубы изготовлены из одного материала, то $E_v = E_n = E$ и формула для определения p_0 принимает следующий вид:

$$p_0 = \frac{\Delta E}{(A + B) d_2} \text{ кг/см}^2. \quad (8)$$

По вычисленному начальному давлению при помощи формул (1), (2) можно найти напряжения в любой точке составного цилиндра.

При наивыгоднейшем соотношении радиусов цилиндра r_1, r_2 и R и наивыгоднейшем натяге Δ наибольшее касательное напряжение в каждой трубе будет минимальным (расчетное по третьей теории прочности). Это напряжение:

$$\tau_{max} = \frac{p_v - p_n}{2(R - r_1)} R.$$

Соответствующее соотношение радиусов и радиальный натяг определяются по формулам:

$$r_2 = \sqrt{r_1 R};$$

$$\Delta = \frac{r_2}{E} (p_v - p_n).$$

2. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Передача давления от одной части конструкции на другую происходит обычно по очень небольшой по сравнению с размерами соприкасающихся тел площадке. Материал около этой площадки испытывает объемное напряженное состояние. Напряжения, возникающие при нажатии одной части конструкции на другую в пределах упругости (работа шариковых и роликовых подшипников, катков, зубчатых колес, колеса на рельсе и т. д.), называются контактными напряжениями.

Благодаря деформации тел первоначальное точечное касание их переходит в соприкосновение по некоторой площадке.

Теория упругих деформаций тел в местах контакта позволяет, зная главные радиусы кривизны поверхностей тел в точке касания, упругие постоянные материалов тел и величину приложенной нагрузки, установить:

1) форму и размеры площадки контакта тел после их деформации;

2) величину и распределение давления, оказываемого одним телом на другое и передаваемого через площадку контакта;

3) величину сближения тел, обусловленного их деформацией.

В основе всех выводов и заключений теории лежат следующие предположения:

1. Материалы соприкасающихся тел однородны и изотропны.

2. Нагрузки, приложенные к телам, создают в зоне контакта только упругие деформации, подчиненные закону Гука.

3. Площадка контакта весьма мала по сравнению с общими поверхностями соприкасающихся тел.

4. Силы давления нормальны к поверхности соприкасания (контакта) тел; силами трения по площадке контакта пренебрегают.

Применительно к подшипникам качения в нормальных эксплуатационных условиях из четырех предпосылок теории первая и вторая оправдываются почти полностью, а третью и особенно четвертую предпосылки нельзя считать полностью выдержанными.

В таблице 48 приведены формулы для определения размеров площадки контакта, величины наибольшего давления и сближения соприкасающихся тел в общем случае эллиптической площадки контакта для двух тел, ограниченных некоторыми криволинейными поверхностями и соприкасающихся до деформации в одной точке.

Формулы для определения коэффициентов, входящих в уравнения таблицы 48, имеют следующий вид:

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{B}{A}\right) D}; \quad (9)$$

Полуоси эллиптического контура площадки контакта	Величина наибольшего давления между соприкасающимися телами	Сближение соприкасающихся тел
$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta P}{\Sigma k}}$ $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta P}{\Sigma k}}$	$p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\Sigma k}{\vartheta}\right)^2 P}$	$a = n_a \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \vartheta^2 \Sigma k P^2}$

$$n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) (K - D) \sqrt{1 - e^2}}; \quad (10)$$

$$n_p = \frac{1}{n_a n_b}; \quad (11)$$

$$n_a = K \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \frac{1}{D}}. \quad (12)$$

Для круговой площадки $e = 0$ (эксцентриситет контурного эллипса), $A = B$ и $n_a = n_b = n_p = n_a = 1$.

Упругая постоянная соприкасающихся тел ϑ находится по уравнению:

$$\vartheta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}, \quad (13)$$

где: μ_1 и μ_2 — коэффициенты Пуассона для первого и второго тела;

E_1 и E_2 — модули продольной упругости для первого и второго тела.

Главные кривизны соприкасающихся тел в точке первоначального контакта: первое тело $k_{11} = \frac{1}{\rho_{11}}$ и $k_{21} = \frac{1}{\rho_{12}}$ (рис. 141) и второе тело $k_{21} = \frac{1}{\rho_{21}}$ и $k_{22} = \frac{1}{\rho_{22}}$.

Главные кривизны считаются отрицательными, если соответствующие центры кривизны лежат вне рассматриваемого тела.

Сумма главных кривизн соприкасающихся тел определя
по формуле:

$$\Sigma k = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}.$$

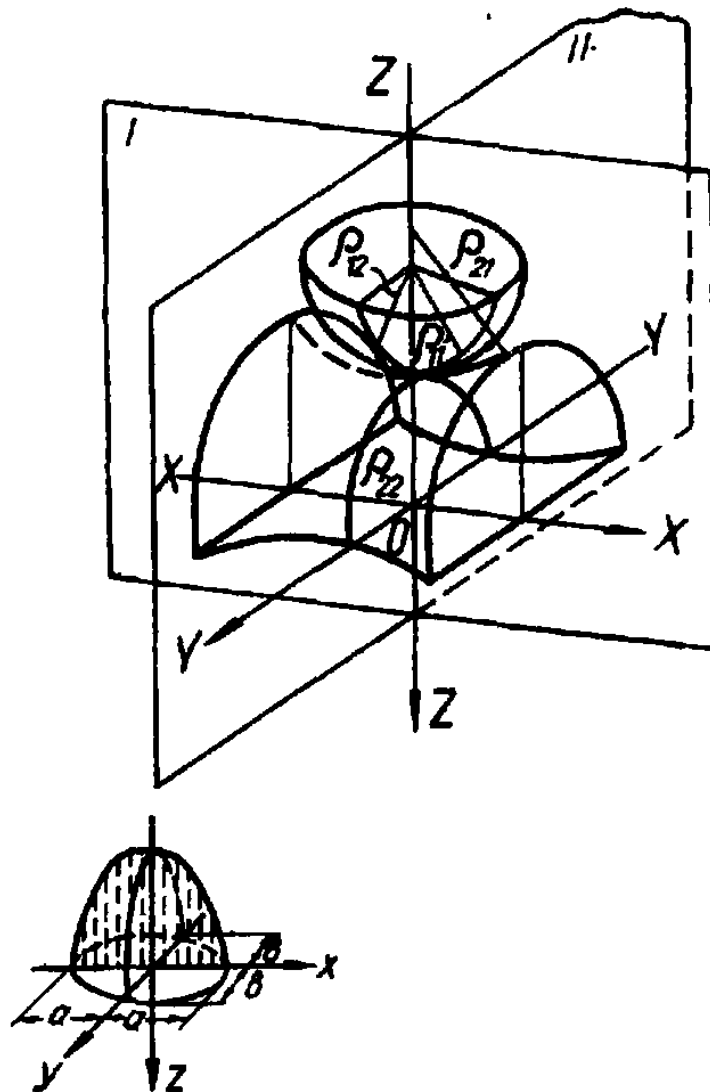


Рис. 141. Схема соприкасающихся тел и площадки контакта.

Геометрические параметры A и B соприкасающихся
находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} [\Sigma k + \\ &+ \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}] ; \\ B &= \frac{1}{4} [\Sigma k - \\ &- \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}] , \end{aligned} \right\}$$

где: ω — угол между плоскостями кривизн k_{11} и k_{21}
 (см. рис. 141);
 A и B — меньшая и большая из получаемых двух
 величин.

Эксцентриситет e контурного эллипса площадки контакта
 находится из уравнения:

$$\frac{A}{B} = (1 - e^2) \frac{D}{K - D}. \quad (15)$$

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)], \quad (16)$$

где:

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (17)$$

$$\text{и } L(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (18)$$

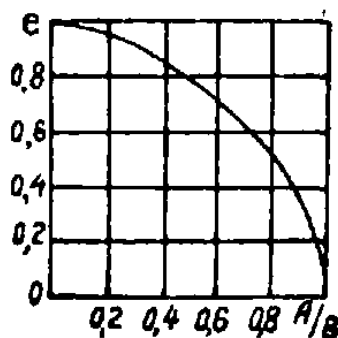


Рис. 142. Графическая зависимость.

$K(e)$ и $L(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и
 второго рода модуля (e) определяются по углу $\Theta = \arcsin e$
 по специально составленным таблицам (см. Ю. С. Сикорский,
 Элементы теории эллиптических функций с приложениями к
 механике. ОНТИ, 1936 г.).

Корни уравнения (15) в зависимости от величины отноше-
 ния $\frac{A}{B}$ изображены на графике (рис. 142).

Численные значения коэффициентов n_a , n_b , n_p

$\frac{B-A}{B+A}$	n_a	n_b	n_p	$\frac{B-A}{B+A}$	n_a	n_b	n_p
0,0000	1,000	1,0000	1,0000	0,8270	2,443	0,5247	0,7800
0,0466	1,032	0,9696	0,9990	0,8310	2,469	0,5217	0,7764
0,1075	1,076	0,9318	0,9970	0,8350	2,494	0,5186	0,7734
0,1974	1,148	0,8791	0,9921	0,8389	2,521	0,5155	0,7692
0,2545	1,198	0,8472	0,9852	0,8428	2,548	0,5124	0,7657
0,3204	1,262	0,8114	0,9756	0,8468	2,576	0,5093	0,7622
0,3954	1,345	0,7717	0,9633	0,8507	2,605	0,5061	0,7587
0,4795	1,456	0,7218	0,9434	0,8545	2,635	0,5029	0,7547
0,5342	1,540	0,6992	0,9276	0,8584	2,666	0,4996	0,7508
0,5819	1,607	0,6791	0,9158	0,8623	2,698	0,4963	0,7474
0,6113	1,684	0,6580	0,9025	0,8661	2,731	0,4930	0,7429
0,6521	1,775	0,6359	0,8865	0,8699	2,765	0,4897	0,7386
0,6716	1,826	0,6245	0,8772	0,8737	2,800	0,4863	0,7342
0,6920	1,882	0,6127	0,8673	0,8774	2,837	0,4828	0,7299
0,7126	1,943	0,6006	0,8561	0,8811	2,874	0,4794	0,7257
0,7332	2,011	0,5881	0,8460	0,8849	2,914	0,4759	0,7205
0,7538	2,087	0,5752	0,8333	0,8885	2,954	0,4723	0,7168
0,7579	2,103	0,5726	0,8306	0,8922	2,996	0,4687	0,7123
0,7620	2,119	0,5699	0,8278	0,8958	3,040	0,4650	0,7062
0,7661	2,136	0,5672	0,8264	0,8994	3,085	0,4613	0,7027
0,7702	2,153	0,5646	0,8230	0,9030	3,132	0,4576	0,6983
0,7743	2,171	0,5618	0,8197	0,9065	3,181	0,4538	0,6925
0,7784	2,189	0,5591	0,8177	0,9100	3,233	0,4499	0,6873
0,7825	2,207	0,5564	0,8143	0,9134	3,286	0,4460	0,6821
0,7866	2,226	0,5536	0,8117	0,9269	3,526	0,4297	0,6600
0,7907	2,245	0,5508	0,8084	0,9428	3,899	0,4076	0,6297
0,7948	2,265	0,5480	0,8065	0,9458	3,986	0,4029	0,6227
0,7988	2,286	0,5452	0,8026	0,9488	4,079	0,3981	0,6161
0,8029	2,306	0,5423	0,8000	0,9517	4,178	0,3932	0,6089
0,8069	2,323	0,5395	0,7962	0,9574	4,395	0,3830	0,5945
0,8110	2,350	0,5366	0,7937	0,9705	5,091	0,3551	0,5531
0,8150	2,372	0,5336	0,7899	0,9818	6,159	0,3223	0,5038
0,8190	2,395	0,5307	0,7874	0,9909	8,062	0,2814	0,4409
0,8230	2,419	0,5277	0,7831	0,9973	12,789	0,2232	0,3503

Коэффициенты n_a , n_b и n_p в зависимости от аргумента

$$\frac{B-A}{B+A} =$$

$$= \frac{1}{\Sigma k} \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}$$

приводятся в таблице 49.

Вычисление коэффициента n_a производится непосредственно по формуле (12) с помощью графика (рис. 142) и таблиц эллиптических интегралов.

На основе приведенных выше формул можно определить деформации и напряжения (давления) в месте взаимного касания двух тел любой кривизны.

В таблице 50 приводятся наиболее часто встречающиеся в практике случаи касания тел под нагрузкой.

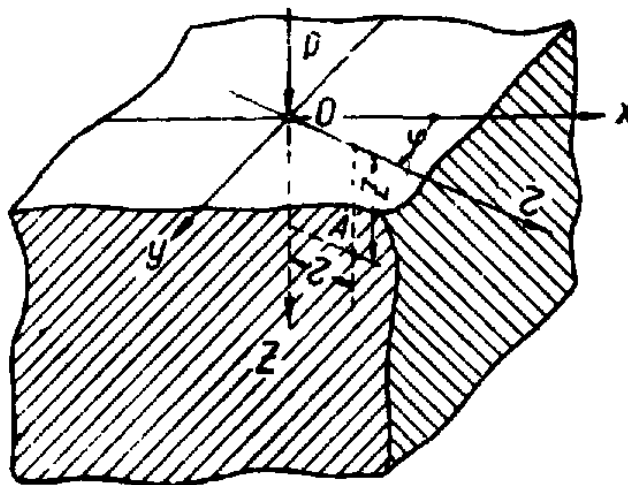


Рис. 143.

Формулы главных напряжений для точки А, лежащей на оси z , (рис. 143) соприкасающихся тел в общем случае эллиптической площадки контакта имеют следующий вид:

$$\sigma_x = -p_0 \left\{ \frac{\frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left[1 - \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} \right] - \right.$$

Размеры соприкасающихся тел	Схема касания	№ п/п	Радиусы кривизны соприкасающихся тел	Знач
				$B + A$
Два шара радиусов r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$)		I	$r_1 = r_1'$ $r_2 = r_2'$	$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
Шар радиуса r_1 и шаровая сфера радиуса r_2		II	$r_1 = r_1'$ $r_2 = r_2'$	$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$
Шар радиуса r и плоскость ($r_2 = \infty$)		III	$r_1 = r_1' = r$ $r_2 = r_2' = \infty$	$\frac{1}{r}$
Шар радиуса r_1 и цилиндр радиуса r_2 ($r_2 > r_1$)		IV	$r_1 = r_1'$ r_2 $r_2' = \infty$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
Два цилиндра накрест радиусов r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$)		V	r_1 $r_1' = \infty$ r_2 $r_2' = \infty$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
Два цилиндра с параллельными осями радиусов r_1 и r_2		VI	r_1 $r_1' = \infty$ r_2 $r_2' = \infty$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$
Цилиндр радиуса r и плоскость ($r_2 = \infty$)		VII	r_1 $r_1 = \infty$ $r_2 = r_2' = \infty$	$\frac{1}{2R}$
Шар радиуса r_1 и цилиндрический желоб радиуса r_2 ($r_2 > r_1$)		VIII	$r_1 = r_1'$ r_2 $r_2' = \infty$	$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
Шар радиуса r_1 и круговой желоб радиусов r_2 и r_2' (шариковый подшипник) ($r_2' > r_2$)		IX	$r_1 = r_1'$ r_2 r_2'	$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} \right)$
Роликовый подшипник радиусов r_1 и r_1' и круговой желоб радиусов r_2 и r_2'		X	r_1 r_1' r_2 r_2' $\psi = 0$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} \right)$

0	$n_a = n_b = 1;$ $a = b = \sqrt[3]{\frac{3\vartheta}{4} \frac{Pr_1 r_2}{(r_1 + r_2)}}$	$n_p = 1;$ $\frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{6}{(r_1 r_2)^2 \vartheta^2} P}$	$n_\alpha = 1;$ $\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \vartheta^2 \frac{(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} P^2}$
0	$n_a = n_b = 1;$ $a = b = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{\vartheta r_1 r_2}{(r_2 - r_1)} P}$	$n_p = 1;$ $\frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{6}{(r_1 r_2)^2 \vartheta^2} P}$	$n_\alpha = 1;$ $\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \vartheta^2 \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2} P^2}$
0	$n_a = n_b = 1;$ $a = b = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \vartheta r P}$	$n_p = 1;$ $\frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{6}{r^2 \vartheta^2} P}$	$n_\alpha = 1;$ $\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{2} \vartheta^2 \frac{1}{r} P^2}$
$\neq 0$	$n_a \neq 1; n_b \neq 1;$ $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta r_1 r_2}{(2r_2 + r_1)} P};$ $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta r_1 r_2}{(2r_2 + r_1)} P}$	$n_p \neq 1;$ $\frac{n^2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{(2r_2 + r_1)^2}{\vartheta^2 (r_1 r_2)} P}$	$n_\alpha \neq 1;$ $\frac{n_\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \vartheta^2 \frac{(2r_2 + r_1)}{r_1 r_2} P^2}$
$\neq 0$	$n_a \neq 1; n_b \neq 1;$ $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3\vartheta}{2} \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)} P};$ $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta r_1 r_2}{(r_1 + r_2)} P}$	$n_p \neq 1;$ $\frac{n^2}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{(r_1 + r_2)^2}{\vartheta^2 (r_1 r_2)} P}$	$n_\alpha \neq 1;$ $\frac{n_\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \vartheta^2 \frac{(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} P^2}$
1	$b = \sqrt{\frac{4\vartheta r_1 r_2}{\pi (r_1 + r_2)} \cdot \frac{P}{l}}$	$\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)}{\pi r_1 r_2 \vartheta} \cdot \frac{P}{l}}$	$\frac{2P}{\pi l} \left[\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{2r_1}{l} + 0,407 \right) + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{2r_2}{l} + 0,407 \right) \right]$
1	$b = \sqrt{\frac{4\vartheta r_1}{\pi} \cdot \frac{P}{l}}$	$\sqrt{\frac{1}{\pi r_1 \vartheta} \cdot \frac{P}{l}}$	—
$\neq 0$	$n_a \neq 1; n_b \neq 1;$ $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta r_1 r_2}{(2r_2 - r_1)} P};$ $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta r_1 r_2}{(2r_2 - r_1)} P}$	$n_p \neq 1;$ $\frac{n_p}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{(2r_2 - r_1)^2}{(r_1 r_2)^2 \vartheta^2} P}$	$n_\alpha \neq 1;$ $\frac{n_\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \vartheta^2 \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) P^2}$
$\neq 0$	$n_a \neq 1; n_b \neq 1;$ $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta P}{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}}};$ $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta P}{\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}}}$	$n_p \neq 1;$ $\frac{n_p}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} \right) P}{\vartheta^2}}$	$n_\alpha \neq 1;$ $\frac{n_\alpha}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \vartheta^2 \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} \right) P^2}$

$$\left. -2 \frac{z}{a} (K - L) \right] - 2\mu \frac{\frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left[1 - \frac{a^2}{b^2} \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} + \right. \\ \left. + \frac{z}{a} \left(\frac{a^2}{b^2} K - L \right) \right] \Bigg\};$$

$$\sigma_y = -\rho_0 \left\{ \frac{\frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left[\frac{1 + \frac{z^2}{a^2} \left(2 \frac{a^2}{b^2} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}}} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \frac{z}{a} \left(\frac{a^2}{b^2} L - K \right) - 1 \right] + 2\mu \frac{\frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}} - \frac{z}{a} (K - L) \right] \right\};$$

$$\sigma_z = -\rho_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}}.$$

Система координат по отношению к площадке соприкасания выбирается таким образом, что плоскость XU совпадает с плоскостью площадки, ось X совпадает с полуосью a , ось Y совпадает с полуосью b (рис. 141), а ось Z направлена нормально к плоскости XU .

Все три главных напряжения выражены как функции следующих величин: отношения полуосей b и a эллиптического контура площадки контакта, отношения глубины залегания z

рассматриваемой точки к большой a и малой b полуосям и давления p_0 в центре площадки контакта.

В выражения σ_x и σ_y входит коэффициент Пуассона μ . K и L представляют собой полные эллиптические интегралы.

Наибольшее значение максимального касательного напряжения $\tau_{max} \cong 0,325 p_0$. Для случая круговой площадки контакта, т. е. при $a = b$, $\tau_{max} = 0,310 p_0$.

Для расчета деталей необходимо знать наибольшие расчетные напряжения. В настоящее время для пластичных материалов наиболее применяемыми являются две теории: теория наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{пр3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

и энергетическая теория прочности:

$$\sigma_{пр4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Расчет на прочность производится по наибольшей величине расчетного (приведенного) напряжения.

В таблице 51 приведены величины наибольших расчетных напряжений $\sigma_{пр3}$ и $\sigma_{пр4}$ в зависимости от соотношений между полуосями a и b контурного эллипса площадки контакта.

Таблица 51

$\frac{b}{a}$	$\frac{\sigma_{пр3}}{p_0}$	$\frac{\sigma_{пр4}}{p_0}$
1,00 — круг	0,620	0,620
0,75 } эллипс	0,625	0,617
0,50 }	0,649	0,611
0,25 }	0,646	0,587
0,00 — полоса	0,600	0,557

Пример 1. Для радиального однорядного шарикоподшипника (рис. 144) требуется определить:

1) размеры полуосей a и b контурного эллипса площадки контакта наиболее нагруженного шарика с дорожками качения внутреннего и наружного колец и

2) величину наибольшего давления p_0 по площадке контакта.

Основные габаритные размеры подшипника: внутренний диаметр 85 мм, наружный диаметр 150 мм, ширина 28 мм.

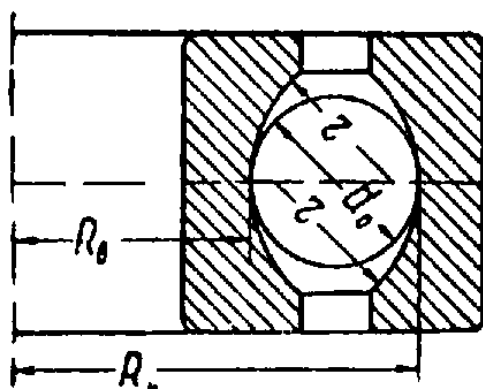


Рис. 144. Радиальный однорядный шарикоподшипник.

Внутренние размеры подшипника (рис. 144):

радиус наименьшей окружности дорожки качения внутреннего кольца $R_b = 4,89$ см;

радиус наибольшей окружности дорожки качения наружного кольца $R_n = 6,91$ см;

радиус поперечного профиля дорожки качения внутреннего и наружного колец $r = 1,06$ см;

диаметр шарика $d_0 = 2,02$ см;

число шариков $i = 10$ шт.

Подшипник находится под воздействием радиальной статической нагрузки $Q = 1635$ кг.

Решение. Главные кривизны шарика:

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0} = \frac{2}{2,02} = 0,990.$$

Главные кривизны наружной дорожки качения:

$$k_{21} = -\frac{1}{R_n} = -\frac{1}{6,91} = -0,145;$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,06} = -0,943.$$

Обе величины отрицательны, так как соответствующие центры кривизны лежат вне рассматриваемого тела, т. е. наружного кольца.

Главные кривизны внутренней дорожки качения:

$$k_{21} = \frac{1}{R_b} = \frac{1}{4,89} = 0,204;$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,06} = -0,943.$$

Геометрический параметр, характеризующий кривизну соприкасающихся тел:

$$\frac{B-A}{B+A} = \frac{\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}}{k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}}$$

В рассматриваемом случае $k_{11} = k_{12}$ и формула принимает вид:

$$\frac{B-A}{B+A} = \frac{k_{21} - k_{22}}{\Sigma k}$$

Для соприкасания шарика с наружной дорожкой качения:

$$\Sigma k = 2 \cdot 0,990 - 0,145 - 0,943 = 0,892;$$

$$\frac{B-A}{B+A} = \frac{-0,145 + 0,943}{0,892} = 0,894.$$

Для соприкасания шарика с внутренней дорожкой качения:

$$\Sigma k = 2 \cdot 0,990 + 0,204 - 0,943 = 1,24;$$

$$\frac{B-A}{B+A} = \frac{0,204 + 0,943}{1,24} = 0,927.$$

Коэффициенты n_a , n_b и n_p берутся из таблицы 49 в зависимости от величины параметра $\frac{B-A}{B+A}$. Для соприкасания шарика с наружной дорожкой качения:

$$n_a = 3,02; \quad n_b = 0,467; \quad n_p = 0,708.$$

Для соприкасания шарика с внутренней дорожкой качения:

$$n_a = 3,53; \quad n_b = 0,430; \quad n_p = 0,659.$$

Так как материал шариков и колец хромистая сталь с модулем упругости $E \approx 2,12 \cdot 10^6$ кг/см² и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$, то упругая постоянная, входящая в формулы,

$$\vartheta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} = 2 \frac{0,91}{2,12} 10^{-6} = 0,858 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

Радиальная нагрузка на подшипник $Q = 1\,635$ кг. Сила давления на наиболее нагруженный шарик:

$$P = 5 \frac{Q}{l} = 5 \frac{1\,635}{10} = 817,5 \text{ кг}.$$

Заметим, что эта формула основана на использовании выражения для сближения α шарика и кольца.

Применяя выражения для полуосей контурного эллипса, данные в таблице 48, имеем для площадки контакта между наиболее нагруженным шариком и наружной дорожкой качения:

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta P}{\Sigma k}} = 3,02 \sqrt[3]{\frac{3}{2} 0,858 \cdot 10^{-6} \frac{817,5}{0,892}} = 0,320 \text{ см};$$

$$b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\vartheta P}{\Sigma k}} = 0,467 \sqrt[3]{\frac{3}{2} 0,858 \cdot 10^{-6} \frac{817,5}{0,892}} = 0,0496 \text{ см}.$$

Аналогично для площадки контакта между наиболее нагруженным шариком и внутренней дорожкой качения:

$$a = 3,53 \sqrt[3]{\frac{3}{2} 0,858 \cdot 10^{-6} \frac{817,5}{1,24}} = 0,333 \text{ см};$$

$$b = 0,430 \sqrt[3]{\frac{3}{2} 0,858 \cdot 10^{-6} \frac{817,5}{1,24}} = 0,0409 \text{ см}.$$

Величина наибольшего давления по площадке контакта шарика с наружным кольцом:

$$p_0 = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\Sigma k}{\vartheta}\right)^2 p} = \frac{0,708}{3,14} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,892}{0,858}\right)^2 817,5 \cdot 10^4} = 24\,500 \text{ кг/см}^2.$$

Аналогично для площадки контакта между шариком и внутренним кольцом:

$$p_0 = \frac{0,661}{3,14} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{1,24}{0,858}\right)^2 817,5 \cdot 10^4} = 28\,400 \text{ кг/см}^2.$$

Итак, внутреннее кольцо испытывает несколько большее давление и, следовательно, менее стойко, чем наружное.

В специальной литературе в качестве допускаемого значения для шарикоподшипников приводится величина 30 000 кг/см² и выше.

Пример 2. Для упорного шарикоподшипника с плоскими кольцами без желобов (рис. 145) определить:

- 1) допускаемое значение осевой нагрузки Q ;
- 2) размеры площадки контакта между шариком и кольцом;
- 3) величину упругого сближения колец подшипника друг с другом.

Диаметр шарика $d_0 = 1 \text{ см}$. Число шариков $i = 20$. Материал шариков и колец — хромистая сталь. Допускаемая величина наибольшего давления на площадке контакта 30 000 кг/см².

Решение. По таблице 50 величина наибольшего давления p_0 между двумя сферическими телами радиусов R_1 и R_2 определяется следующим выражением:

$$p_0 = 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2}$$

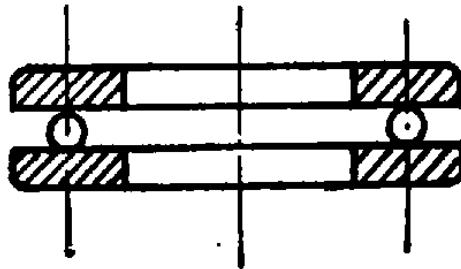


Рис. 145. Упорный шарикоподшипник с плоскими кольцами без желобов.

В рассматриваемом нами случае соприкосновения шарика с плоскостью:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{d_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_2} = 0.$$

Примем, что нагрузка на один шарик:

$$P = \frac{Q}{0,8i}$$

где 0,8 — коэффициент неравномерности распределения нагрузки на подшипник между отдельными шариками.

Представим приведенную выше формулу для наибольшего давления в виде:

$$Q = 3,42 \frac{p_0^3 id_0^2}{E^2},$$

тогда допускаемое значение статической осевой нагрузки на рассматриваемый упорный подшипник:

$$Q_0 = 3,42 \frac{30\,000^3 \cdot 20 \cdot 1}{(2,12 \cdot 10^6)^2} = 413 \text{ кг.}$$

Соответствующая нагрузка на один шарик:

$$P = \frac{Q_0}{0,8i} = \frac{413}{0,8 \cdot 20} = 26 \text{ кг.}$$

Радиус круговой площадки контакта:

$$a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{d}{2}} = 1,109 \sqrt[3]{\frac{26}{2,12 \cdot 10^6} \cdot \frac{1}{2}} = 0,0202 \text{ см.}$$

Упругое сближение шарика с кольцом:

$$a = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \frac{2}{d}} = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{26}{2,12 \cdot 10^6}\right)^2 2} = 0,00083 \text{ см.}$$

Сближение колец друг с другом:

$$2a = 0,00166 \text{ см.}$$

Глава XII. СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ СТЕСНЕННОМ КРУЧЕНИИ

Тонкостенным стержнем принято называть стержень призматической или цилиндрической формы, у которого три размера являются величинами разных порядков.

Под свободным, нестесненным кручением разумеется такой вид кручения, при котором элементы скручиваемого стержня не испытывают изгиба. В этом случае угол закручивания может быть найден по формуле:

$$\theta = \frac{M_{\text{к}} x}{GJ_{\text{к}}}. \quad (1)$$

Угол закручивания на единицу длины:

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta' = \frac{M_{\text{к}}}{GJ_{\text{к}}}, \quad (2)$$

откуда

$$M_{\text{к}} = GJ_{\text{к}} \theta'. \quad (3)$$

Если на тонкостенный стержень открытого профиля наложены связи, препятствующие свободному перемещению точек контура при действии крутящих моментов, то такой вид кручения носит название стесненного (изгибного) кручения.

Примером стесненного кручения может служить стержень двутаврового профиля с жестко защемленным концом, если к свободному концу приложена скручивающая пара (рис. 146).

Защемленное сечение остается плоским, не коробится и, следовательно, препятствует свободной деформации (т. е. упругим перемещениям вдоль оси стержня) смежного с ним сечения.

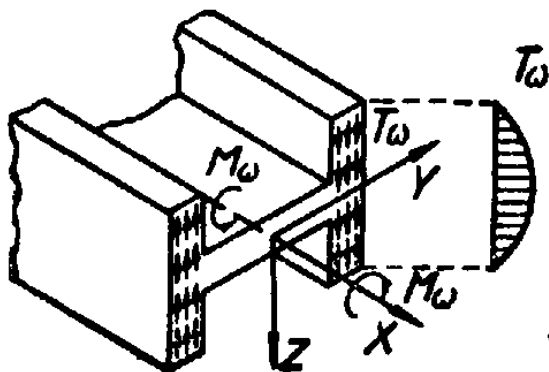
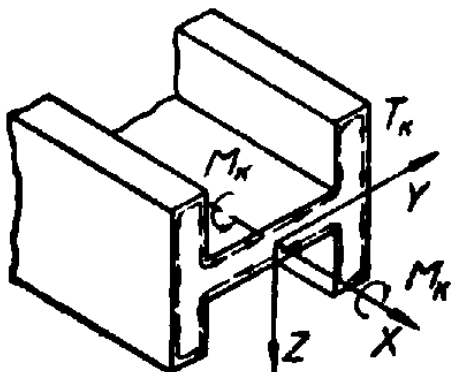
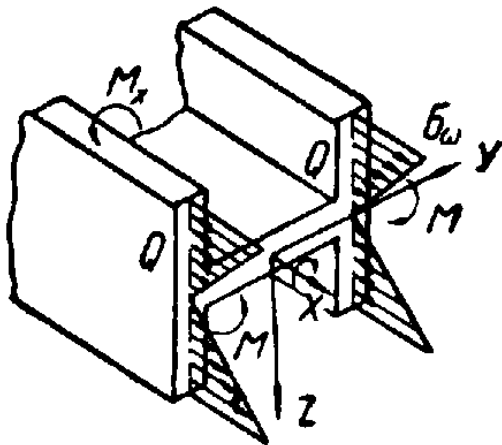
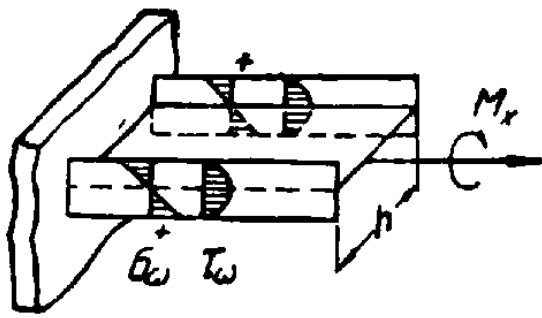


Рис. 146 Внутренние усилия в сечениях стержня при стесненном кручении.

Чем дальше от защемления находится сечение, тем свободнее его деформация. Значит, деформация соседних сечений различна. Поэтому и расстояния между отдельными точками этих сечений изменяются, т. е. изменяются длины продольных волокон. При этом полки двутавра искривляются.

В рассматриваемом случае изгибного кручения двутавра система внутренних усилий, действующих в поперечных сечениях полки, приводится к двум парам, направленным в противоположные стороны (рис. 146). Совокупность двух таких пар, противоположно направленных, лежащих в параллельных плоскостях, называется бипарой (двойной парой).

Величина бипары оценивается бимоментом B , равным произведению момента M каждой пары на расстояние между ними h (плечо бипары):

$$B = Mh \text{ кгсм}^2.$$

Кроме нормальных напряжений, в сечении возникают касательные напряжения двух родов:

а) Касательные напряжения τ_k , соответствующие свободному

кручению (рис. 146). Эти напряжения получаются от части общего крутящего момента M_x , которая идет на чистое кручение и обозначается через M_k .

б) Секториальные касательные напряжения τ_ω , возникающие в связи с появлением нормальных напряжений σ_ω . Эти напряжения вызываются изгибно-крутящим моментом M_ω , который составляет вторую часть общего крутящего момента M_x .

Секториальные касательные напряжения τ_ω принимаются равномерно распределенными по толщине стенки сечения (рис. 146).

Изгибно-крутящий момент M_ω можно определить как момент усилий, полученный от секториальных касательных напряжений.

При изучении закона распределения напряжений при кручении тонкостенных стержней исходят из следующих двух предположений:

1) деформации сдвига срединной поверхности стержня равны нулю;

2) проекция контура поперечного сечения не деформируется, т. е. при деформации стержня проекция расстояния между двумя точками контура на плоскость поперечного сечения остается постоянной.

Закон изменения секториальных нормальных напряжений по сечению выражается уравнением:

$$\sigma_\omega = -E\theta'' \omega. \quad (4)$$

Из этого выражения видно, что при стесненном кручении тонкостенного стержня нормальные напряжения в поперечном сечении распределяются по закону секториальных площадей ω .

Закон изменения секториальных касательных напряжений по сечению выражается следующим уравнением:

$$\tau_\omega = \frac{E\theta'''}{\delta} S_\omega^{\text{отс}}, \quad (5)$$

откуда видно, что секториальные касательные напряжения τ_ω в поперечном сечении стержня изменяются по закону изменения секториального статического момента (см. главу IV).

При расчете тонкостенных стержней, находящихся в усло-

виях стесненного кручения, нормальные напряжения следует определять по формуле:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{J_{\omega}} \omega, \quad (6)$$

где: B — расчетный изгибно-крутящий бимомент в $кгсм^2$;

J_{ω} — секториальный момент инерции в $см^6$;

ω — секториальная площадь (координата) в $см^2$.

Секториальные касательные напряжения τ_{ω} определяются по следующей формуле:

$$\tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} S_{\omega}^{отс}}{J_{\omega} \delta}, \quad (7)$$

где: M_{ω} — изгибно-крутящий момент в $кгсм$;

$S_{\omega}^{отс}$ — секториальный статический момент отсеченной части сечения, заключенной между начальной точкой контура, для которой $\tau_{\omega} = 0$, и той точкой, где τ_{ω} вычисляется;

δ — толщина стенки сечения в точке, где определяется касательное напряжение.

Наибольшие касательные напряжения от чистого кручения $\max \tau_k$ в сечении, состоящем из нескольких прямоугольников, возникают по середине наружного края наиболее широкого прямоугольника профиля:

$$\max \tau_k = \frac{M_k \delta_{\max}}{J_k}. \quad (8)$$

2. ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ

Дифференциальное уравнение углов закручивания для случая изгибного кручения имеет следующий вид:

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_k \theta'' + m = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения дает следующее выражение для угла закручивания:

$$\theta = \theta_0 + \frac{\theta'_0}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{B_0}{GJ_k} (1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_0}{kGJ_k} (kx - \operatorname{sh} kx) + f(x), \quad (10)$$

где: Θ_0 ; Θ'_0 ; B_0 и M_0 — соответственно угол закручивания, относительный угол закручивания, бимомент, общий крутящий момент в начале отсчета;

$$k = \sqrt{\frac{GJ_k}{EJ_\omega}} \text{ — изгибно-крутильная характеристика;}$$

$f(x)$ — функция влияния силовых и деформационных факторов, приложенных в пролете. Значение этой функции приводится в таблице 52.

Значения начальных параметров для различных способов закрепления и различных схем загрузки приводятся в таблице 53. Имея эти данные и пользуясь принципом независимости действия сил, можно определить начальные параметры для различного сочетания нагрузок.

Между силовыми и геометрическими факторами существует следующая дифференциальная зависимость:

Момент чистого кручения, как мы видели, равняется:

$$M_k = \Theta' GJ_k \text{ кгм.} \quad (11)$$

Взяв первую производную от момента чистого кручения по x и умножив ее на $-\frac{1}{k^2}$, получим уравнение бимомента:

$$B = -\frac{1}{k^2} \frac{dM_k}{dx} \text{ кгм}^2. \quad (12)$$

Изгибно-крутильный момент находится из следующей зависимости:

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} \text{ кгм.} \quad (13)$$

Общий крутящий момент равен:


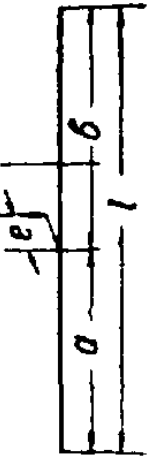
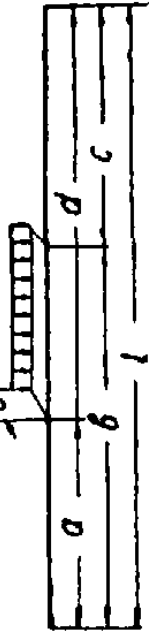
$$M_{(x)} = M_k + M_\omega. \quad (14)$$

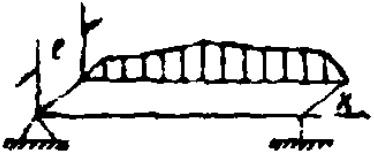
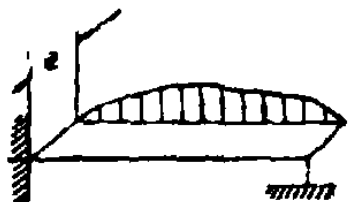
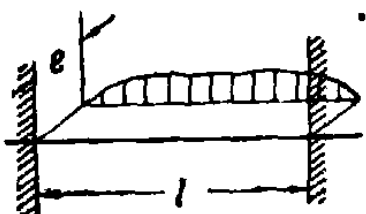
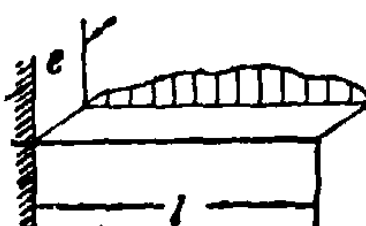
Интенсивность сплошной моментной нагрузки:

$$m = \frac{dM_{(x)}}{dx}. \quad (15)$$

Значения функций $f(x)$ и ее производных

Вид нагрузки

		
$-\frac{Me}{GJ_K} [1 - chk(x-a)]$	$\frac{Pe}{kGJ_K} [k(x-a) - shk(x-a)]$	<p>Второй участок</p> $\frac{m}{k^2 GJ_K} \left[\frac{k^2(x-a)^2}{2} - chk(x-a) + 1 \right]$ <p>Третий участок</p> $\frac{m}{k^2 GJ_K} \left[\frac{k^2(x-a)^2}{2} - chk(x-a) - \frac{k^2(x-b)^2}{2} + chk(x-b) \right]$
$\frac{Me k}{GJ_K} shk(x-a)$	$\frac{Pe}{GJ_K} [1 - chk(x-a)]$	<p>Третий участок</p> $\frac{m}{kGJ_K} [k(b-a) - shk(x-a) + shk(x-b)]$
$\frac{Me k^2}{GJ_K} chk(x-a)$	$-\frac{Pe k}{GJ_K} shk(x-a)$	<p>Третий участок</p> $-\frac{m}{GJ_K} [chk(x-b) - chk(x-a)]$

№№ схем	Схема закрепления балки	Начальные параметры
1		$\theta_0 = 0; \quad B_0 = 0$ $\theta'_0 = -\frac{f(l)}{l} - \frac{f''(l)}{k^2 l} \frac{kl - shkl}{shkl}$ $M_0 = -\frac{GJ_K}{k^2 l} [k^2 f(l) - f''(l)]$
2		$\theta_0 = 0; \quad \theta'_0 = 0$ $B_0 = \frac{GJ_K}{k^2} \frac{f''(l)(kl - shkl) + k^2 f(l) shkl}{kl chkl - shkl}$ $M_0 = -\frac{GJ_K}{k} \frac{k^2 f(l) chkl + f''(l)(1 - chkl)}{kl chkl - shkl}$
3	 <p style="text-align: center;"> $a = \beta l$ $b = \alpha l$ </p>	$\theta_0 = 0; \quad \theta'_0 = 0$ $B_0 = -\frac{GJ_K}{k} \frac{kf(l)(1 - chkl) - f'(l)(kl - shkl)}{2(1 - chkl) + kl shkl}$ $M_0 = -GJ_K \frac{kf(l) shkl + f'(l)(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + kl shkl}$
4		$\theta_0 = 0; \quad \theta'_0 = 0$ $B_0 = \frac{GJ_K}{k^2 chkl} \left[f''(l) - \frac{M_0 k}{GJ_K} shkl \right]$ $M_0 = -\Sigma M_x$

Пример. Для тонкостенного стержня, изображенного на рис. 147, требуется написать уравнения: упругого угла закручивания, момента чистого кручения, бимоента и изгибно-крутильного момента по всей длине стержня, предполагая известными геометрические характеристики сечения.

$$k = 0,004 \frac{1}{\text{см}}; kl = 2,4.$$

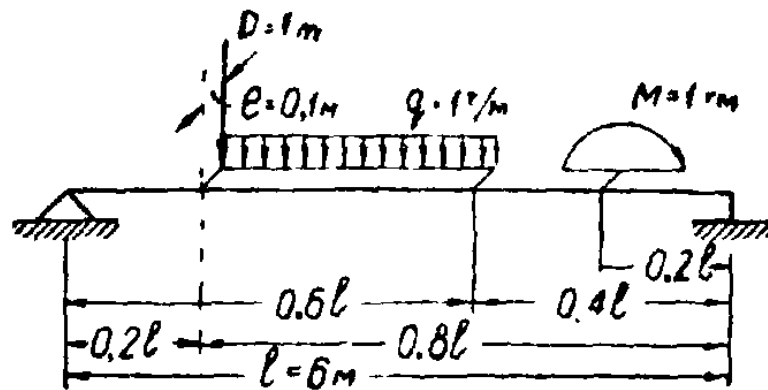


Рис. 147. Схема закрепления и загрузки тонкостенного стержня.

Решение. Пользуясь таблицей 53, напишем:

$$\begin{aligned} \theta'_0 &= \frac{-Pe}{GJ_K} \left(\alpha_p - \frac{\sin \alpha_p kl}{shkl} \right) + \frac{Mek}{GJ_K} \left(\frac{1}{kl} - \frac{ch \alpha_m kl}{shkl} \right) - \\ &- \frac{qe}{kGJ_K} \left[\left(\frac{\alpha_q^2 kl}{2} - \frac{ch \alpha_q kl}{shkl} \right) - \left(\frac{\alpha_{1q}^2 kl}{2} - \frac{ch \alpha_{1q} kl}{shkl} \right) \right]; \\ M_0 &= + \frac{Me}{l} - \alpha_p Pe - \frac{ml}{2} (\alpha_q^2 - \alpha_{1q}^2). \end{aligned}$$

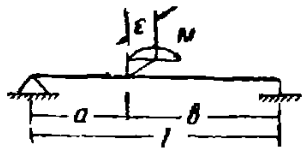
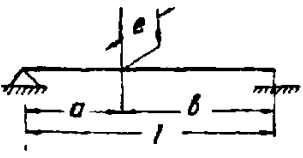
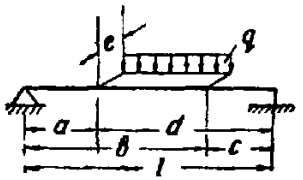
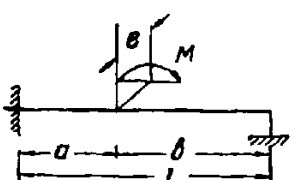
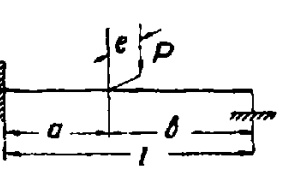
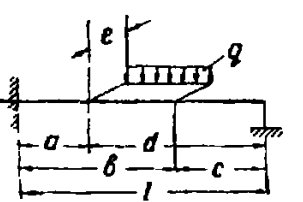
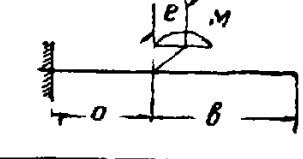
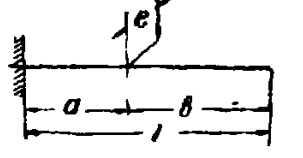
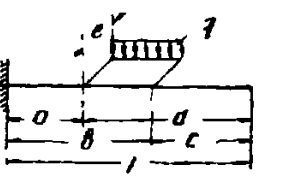
Подставив данные задачи, найдем:

$$\theta'_0 = \frac{-6361}{GJ_K}; M_0 = -20733 \text{ кгсм.}$$

Определив начальные параметры, напишем уравнение угла закручивания для четвертого участка:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{-6361}{kGJ_K} shkx - \frac{20733}{kGJ_K} (kx - shkx) + \frac{Pe}{kGJ_K} [k(x - 1,2) - \\ &- shk(x - 1,2)] + \frac{m}{k^2GJ_K} \left[\frac{k^2(x - 1,2)^2}{2} - chk(x - 1,2) - \right. \\ &\left. - \frac{k^2(x - 3,6)^2}{2} + chk(x - 3,6) \right] + \frac{Me}{GJ_K} [1 - chk(x - 4,8)]. \end{aligned}$$

		$- Pe l \frac{ashkl - shakl}{shkl - klchkl}$	$Pe \frac{aklchkl - shakl}{shkl - klchkl}$
		$-\frac{ml}{k} \left[\frac{\frac{\alpha^2 kl}{2} shkl - chakl}{shkl - klchkl} - \frac{\frac{\alpha_1^2 kl}{2} shkl - ch_{\alpha_1} kl}{shkl - klchkl} \right] =$ $= -\frac{ml}{k} (\omega - \omega_1)$	$\frac{m}{k} \left[\frac{\frac{\alpha^2 k^2 l^2}{2} chkl - chakl}{shkl - klchkl} - \frac{\frac{\alpha_1^2 k^2 l^2}{2} chkl - ch_{\alpha_1} kl}{shkl - klchkl} \right] = \frac{m}{k} (\omega - \omega_1)$
		$Me \frac{chakl}{chkl}$	0
		$+ \frac{Pe}{k} \left(thkl - \frac{shakl}{chkl} \right)$	- Pe
		$\frac{m}{k^2} \left[\left(\alpha kl thkl - \frac{chakl}{chkl} \right) - \left(\alpha_1 kl thkl - \frac{ch_{\alpha_1} kl}{chkl} \right) \right] =$ $= \frac{m}{k^2} (\omega - \omega_1)$	- m (d - c)
Θ_0	Θ'_0	B_0	M_0
0	0	$Me \frac{(1 - chakl)(1 - chkl) + shakl(kl - shkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$	$Me k \frac{shkl(1 - chakl) - shakl(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$
0	0	$-\frac{Pe(\alpha kl - shakl)(1 - chkl) - (1 - chakl)(kl - shkl)}{k \cdot 2(1 - chkl) + klshkl}$	$- Pe \frac{(\alpha kl - shakl) shkl + (1 - chakl)(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$

№№ схем	Схема балки и нагрузки	Θ_0	Θ'_0	B_0
1		0	$\alpha = \frac{b}{l} \frac{Me_k}{GJ_K} \left(\frac{1}{kl} - \frac{chakl}{shkl} \right)$	
2		0	$\alpha = \frac{b}{l} - \frac{Pe}{GJ_K} \left(a - \frac{shakl}{shkl} \right)$	
3		0	$-\frac{m}{kGJ_K} \left[\left(\frac{\alpha^2 kl}{2} - \frac{chakl}{shkl} \right) - \left(\frac{\alpha_1^2 kl}{2} - \frac{ch\alpha_1 kl}{shkl} \right) \right]$ $= -\frac{m}{kGJ_K} (\omega - \omega_1)$	
		Θ_0	Θ'_0	B_0
4		0	0	$- Me \frac{klchakl - shkl}{shkl - klchkl}$
5				$- Pcl \frac{ashkl - shakl}{shkl - klchkl}$
6				$-\frac{ml}{k} \left[\frac{\frac{\alpha^2 kl}{2} shkl - chakl}{shkl - klchkl} - \frac{\frac{\alpha_1^2 kl}{2} shkl - ch\alpha_1}{shkl - klchkl} \right]$ $= -\frac{ml}{k} (\omega - \omega_1)$
7				$Me \frac{chakl}{chkl}$
8				$+ \frac{Pe}{k} \left(thkl - \frac{shakl}{chkl} \right)$
9				$\frac{m}{k^2} \left[\left(\alpha kl thkl - \frac{chakl}{chkl} \right) - \left(\alpha_1 kl thkl - \frac{ch\alpha_1 kl}{chkl} \right) \right]$ $= \frac{m}{k^2} (\omega - \omega_1)$

		$\frac{m}{k^2} \left[\left(aklthkl - \frac{ch\alpha kl}{chkl} \right) - \left(\alpha_1 klthkl - \frac{ch\alpha_1 kl}{chkl} \right) \right] =$ $= \frac{m}{k^2} (\omega - \omega_1)$	$-m(d-c)$
θ_0	θ'_0	B_0	M_0
0	0	$Me \frac{(1 - ch\alpha kl)(1 - chkl) + sh\alpha kl(kl - shkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$	$Me k \frac{shkl(1 - ch\alpha kl) - sh\alpha kl(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$
0	0	$-\frac{Pe(\alpha kl - sh\alpha kl)(1 - chkl) - (1 - ch\alpha kl)(kl - shkl)}{k \cdot 2(1 - chkl) + klshkl}$	$-Pe \frac{(\alpha kl - sh\alpha kl) shkl + (1 - ch\alpha kl)(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$
0	0	$-\frac{m}{k^2} (\omega - \omega_1)$	$-\frac{m}{k} (\omega' - \omega'_1)$

$$\omega = \frac{\left(\frac{k^2 \alpha^2 l^2}{2} - ch\alpha kl \right) (1 - chkl) - (\alpha kl - sh\alpha kl)(kl - shkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$$

$$\omega_1 = \frac{\left(\frac{k^2 \alpha_1^2 l^2}{2} - ch\alpha_1 kl \right) (1 - chkl) - (\alpha_1 kl - sh\alpha_1 kl)(kl - shkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$$

$$\omega' = \frac{\left(\frac{k^2 \alpha^2 l^2}{2} - ch\alpha kl \right) shkl + (\alpha kl - sh\alpha kl)(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$$

$$\omega'_1 = \frac{\left(\frac{k^2 \alpha_1^2 l^2}{2} - ch\alpha_1 kl \right) shkl + (\alpha_1 kl - sh\alpha_1 kl)(1 - chkl)}{2(1 - chkl) + klshkl}$$

θ_0	θ'_0	B_0	M_0
0	$\frac{\theta l}{l}$	0	$\frac{GJ_K}{l} \theta l$
0	0	$-\frac{\theta l GJ_K th \frac{kl}{2}}{kl - 2th \frac{kl}{2}}$	$\frac{k \theta l GJ_K}{kl - 2th \frac{kl}{2}}$
0	0	$-\frac{\theta l GJ_K shkl}{klchkl - shkl}$	$\frac{GJ_K \theta l kchkl}{klchkl - shkl}$
θ_0	0	$\frac{\theta_0 GJ_K shkl}{klchkl - shkl}$	$-\frac{\theta_0 k GJ_K chkl}{klchkl - shkl}$

Как видно из решения, составление уравнения угла закручивания ничем не отличается от составления уравнения упругой линии.

Имея уравнение угла закручивания, легко получить уравнение для момента чистого кручения, взяв производную от угла кручения по абсциссе x и умножив ее на GJ_k .

$$M_k = -6361 \operatorname{ch} kx - 20733 (1 - \operatorname{ch} kx) + Pe [1 - \operatorname{ch} k(x - 1,2)] + \\ + \frac{m}{k} [k(x - 1,2) - \operatorname{sh} k(x - 1,2) - k(x - 3,6) + \operatorname{sh} k(x - 3,6)] - \\ - Mek \operatorname{sh} k(x - 4,8).$$

Найдя уравнение для момента чистого кручения, легко получить уравнение бимоента, взяв первую производную от момента чистого кручения по x и умножив ее на $-\frac{1}{k^2}$.

$$B = +\frac{6361}{k} \operatorname{sh} kx - \frac{20733}{k} \operatorname{sh} kx + \frac{Pe}{k} \operatorname{sh} k(x - 1,2) - \\ - \frac{m}{k^2} [\operatorname{ch} k(x - 3,6) - \operatorname{ch} k(x - 1,2)] + Me \operatorname{ch} k(x - 4,8).$$

Изгибно-крутильный момент получим, взяв первую производную от бимоента по x :

$$M_\omega = +6361 \operatorname{ch} kx - 20733 \operatorname{ch} kx + Pe \operatorname{ch} k(x - 1,2) - \\ - \frac{m}{k} [\operatorname{sh} k(x - 3,6) - \operatorname{sh} k(x - 1,2)] + Mek \operatorname{sh} k(x - 4,8).$$

Глава XIII. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СИСТЕМ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

На практике часто приходится решать задачу об устойчивости сжатых стержней. Если призматический стержень сжимать силами, действующими по оси, то он будет укорачиваться, сохраняя свою прямолинейную форму. При некоторых условиях прямолинейная форма равновесия может оказаться неустойчивой, а стержень начнет выпучиваться, искривляться. Это явление называют продольным изгибом, и наступает оно тем скорее, чем больше длина стержня по сравнению с его поперечными размерами.

Если упругое тело может иметь только одну форму равновесия, эта форма будет устойчива. Какие бы внешние силы ни отклоняли тело от принятой им формы равновесия, оно, будучи предоставлено самому себе, возвратится в первоначальное состояние, так как это состояние есть единственная возможная форма равновесия (предполагается, что все явления происходят в пределах упругости).

Рассчитываемая конструкция будет прочной лишь в том случае, если положенная в основе расчета форма равновесия устойчива. Поэтому практически необходимо знать то наименьшее значение внешней нагрузки, при котором становятся возможными несколько различных форм равновесия. Значение этой нагрузки называется критическим. Пока нагрузка меньше критической, возможна лишь одна — устойчивая форма равновесия.

При решении задач на определение критических сил применяются следующие методы:

1. Статический метод, использующий основные уравнения для перемещений и усилий, представленных в зависимости от их начальных значений.

2. Динамический метод, основанный на изучении поперечных колебаний сжатой системы.

3. Метод строительной механики сжато-изогнутых систем, базирующийся на применении начала возможных перемещений и являющийся развитием классических методов расчета статически неопределимых систем.

4. Энергетический метод, основанный на использовании равенства приращений энергии деформации работе внешних сил в критическом состоянии, особенно удобен для приближенного решения задач устойчивости стержней и простейших конструкций.

Существуют еще и другие методы.

2. ОДНОПРОЛЕТНЫЕ СТОЙКИ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Первое теоретическое решение задачи об устойчивости сжатого стержня было дано Л. Эйлером в 1744 г.

Критическое значение силы для стержня, заделанного одним концом и сжимаемого силой P , приложенной к свободному концу по Эйлеру, будет:

$$P_{\text{к}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}, \quad (1)$$

где: J — минимальный момент инерции;

l — длина стержня.

Отношение критического значения нагрузки $P_{\text{к}}$ к ее фактической величине (допускаемой P) носит название коэффициента запаса устойчивости:

$$k_y = \frac{P_{\text{к}}}{P}.$$

Для стальных стоек k_y принимается от 1,8 до 3,0, причем меньшие значения относятся к стержням с большей гибкостью.

Для стоек из чугуна

$$k_y = 5 \div 5,5.$$

Для стоек из дерева

$$k_y = 3 \div 3,2.$$

В общем случае для сжатого стержня критическое значение нагрузки может быть выражено формулой:

$$P_{\text{к}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}, \quad (2)$$

где: μ — коэффициент приведенной длины, а

$$\eta = \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^2.$$

Коэффициенты η и μ отражают следующие три фактора:

1) характер связей (линейные, угловые, абсолютно жесткие или упругие), наложенных на торцовые и промежуточные сечения стержня;

2) характер нагружения стержня внешними силами (сосредоточенные, распределенные);

3) характер изменения сечения стержня по его длине (постоянное, ступенчатое, непрерывно переменное).

Стойки, нагруженные продольными силами, приложенными к их торцовым сечениям

В таблице 54 приведены значения коэффициентов η и μ для различных однопролетных стоек, у которых:

- 1) абсолютно жесткие линейные и угловые связи наложены только на торцовые сечения;
- 2) внешние силы приложены только к торцовым сечениям;
- 3) поперечные сечения постоянны по длине стойки.

В большинстве практически встречающихся случаев крепление концов стойки осуществляется наложением не абсолютно жестких связей, а связей, способных деформироваться. Теоретическое исследование устойчивости таких стоек затрудняется некоторой неопределенностью степени податливости реальных связей. Какие-либо рекомендации в этом направлении должны быть основаны на результатах экспериментального исследования конкретных конструкций. Естественно, что эти рекомендации должны отражать специфические особенности различных отраслей техники.

Стойки, нагруженные продольными силами, приложенными к промежуточным и торцовым сечениям

Стержень нагружен двумя продольными силами P_1 и P_2 (рис. 148):

$$(P_1 + P_2)_к = \eta \frac{EJ}{l^2}. \quad (3)$$

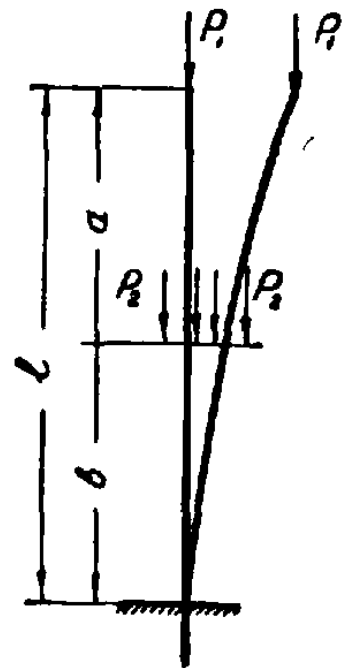
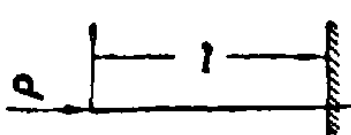
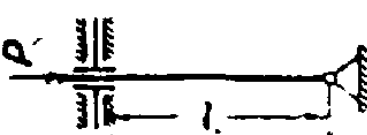
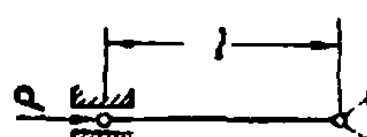
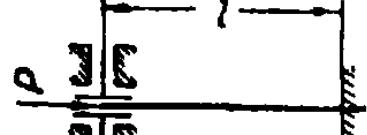
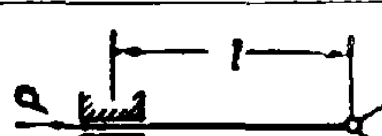
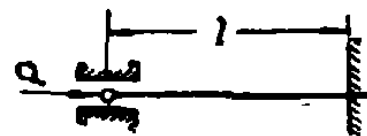
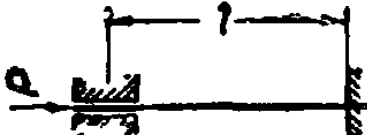


Рис. 148. Стойки, нагруженные продольными силами, приложенными к промежуточным и торцовым сечениям.

Таблица 54

Схемы и №№ стоек							
	I	II	III	IV	V	VI	VII
η	$\frac{1}{4} \pi^2 = 2,467$	$\frac{1}{4} \pi^2 = 2,467$	$\pi^2 = 9,870$	$\pi^2 = 9,870$	20,19	20,19	$4\pi^2 = 39,48$
μ	2	2	1	1	0,699	0,699	0,5
η'	7,87	—	18,5	18,9	29,6	52,5	73,6

П р и м е ч а н и е. Коэффициенты η и μ относятся к стойкам, нагруженным силами, приложенными к торцовым сечениям; коэффициент η' относится к случаю нагружения стойки силами, равномерно распределенными по ее длине.

Значения коэффициента η в зависимости от отношения $\frac{b}{l}$ и $\frac{P_2}{P_1}$ сведены в таблицу 55.

Таблица 55

$\frac{b}{l}$	$P_2 : P_1$										
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,714	2,961	3,701	4,935	7,402	14,80	27,14	51,82	125,8	249,2
0,1	2,467	2,714	2,960	3,698	4,930	7,377	14,68	26,66	49,86	111,6	176,3
0,2	2,467	2,710	2,953	3,679	4,880	7,207	13,78	23,19	36,33	50,96	56,48
0,3	2,467	2,703	2,936	3,622	4,712	6,769	11,70	16,82	21,37	24,89	26,14
0,4	2,467	2,688	2,904	3,525	4,470	6,074	9,187	11,57	13,29	14,52	14,97
0,5	2,467	2,665	2,856	3,384	4,136	5,268	7,060	8,210	8,963	9,488	9,675
0,6	2,467	2,635	2,793	3,211	3,759	4,497	5,504	6,048	6,434	6,674	6,764
0,7	2,467	2,599	2,715	3,020	3,385	3,830	4,376	4,660	4,834	4,952	4,993
0,8	2,467	2,557	2,636	2,821	3,040	3,280	3,551	3,685	3,765	3,818	3,836
0,9	2,467	2,513	2,551	2,641	2,734	2,832	2,936	2,986	3,015	3,033	3,040
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

Стержень, нагруженный несколькими сосредоточенными силами

Критическая сила определяется по приближенному уравнению проф. А. П. Коробова (рис. 149):

$$P_1 \left(\frac{a_1}{l} \right)^2 + P_2 \left(\frac{a_2}{l} \right)^2 + \dots + P_i \left(\frac{a_i}{l} \right)^2 + \dots + P_n = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}. \quad (4)$$

Если принять

$$P_i = k_i \sum_{i=1}^{l=n} P_i,$$

то

$$P_i \left(\frac{a_i}{l} \right)^2 = k_i \left(\frac{a_i}{l} \right)^2 \sum_{i=1}^{i=n} P_i.$$

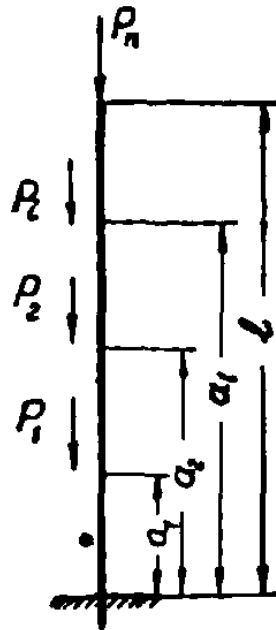


Рис. 149. Стержень, нагруженный продольными сосредоточенными силами, приложенными к промежуточным и торцовым сечениям.

Подставив эти значения в уравнение (4), получим:

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} P_i \right|_k = \frac{EJ}{l^2} \frac{\pi^2}{4 \sum_{i=1}^{i=n} k_i \left(\frac{a_i}{l} \right)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2};$$

$$\eta = \frac{\pi^2}{4 \sum_{i=1}^{i=n} k_i \left(\frac{a_i}{l} \right)^2} = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i}{4 \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i \left(\frac{a_i}{l} \right)^2};$$

$$\beta_i = \frac{P_i}{P_0},$$

где P_0 — любая сила, через которую можно выразить все остальные.

Пример 1. Найти критическую силу для случая загрузки стержня по рис. 150. Сечение стержня постоянно. Значение сил следующее:

$$P_1 = 3,6 P; \quad P_2 = 2,8 P; \quad P_3 = 2,0 P; \quad P_4 = 1,2 P; \quad P_5 = 0,4 P.$$

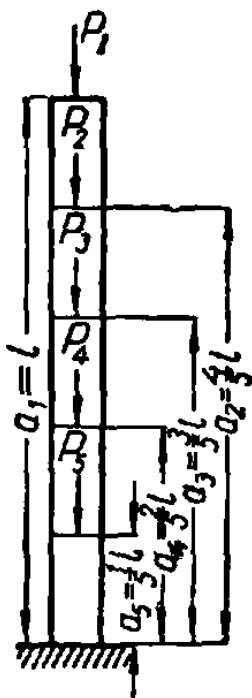


Рис. 150. Схема расположения сил по стойке.

Решение. Определим:

$$\eta = \frac{\pi^2 (3,6 + 2,8 + 2,0 + 1,2 + 0,4)}{4 \left[3,6 + 2,8 \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2,0 \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 1,2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 0,4 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \right]} = 3,90,$$

поэтому

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} P_i \right|_k = |10 P|_k = \frac{3,90 \cdot EJ}{l^2}.$$

Стойки, нагруженные продольными силами, распределенными по их длине

В этом случае величина критической силы $(ql)_k$ находится по уравнению:

$$(ql)_k = \eta' \frac{EJ}{l^2}, \quad (5)$$

где значение η' приводится в таблице 54 (нижняя строчка).

3. СТОЙКИ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ОПОРАМИ

В этом случае значение критической силы определяется по формуле:

$$P_k = \eta \frac{EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (6)$$

где l — длина всей стойки.

В таблице 56 приведены значения коэффициента η и коэффициента приведенной длины μ для стоек с промежуточной опорой и нижним шарнирно опертым концом для 4 случаев.

В таблице 57 даны коэффициенты η и μ для стоек с промежуточной опорой и нижним заделанным концом для 4 случаев.

В таблице 58 приведены значения коэффициента η для трехпролетной стойки с шарнирно опертыми обоими концами. Коэффициент η дан в зависимости от отношений $\frac{z_1}{l}$ и $\frac{z_2}{l}$ (рис. 151).

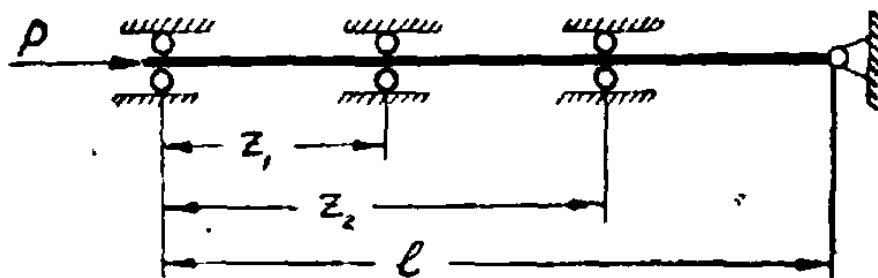


Рис. 151. Трехпролетная стойка с шарнирно опертыми концами.

В таблице 59 дан коэффициент η для трехпролетной стойки с одним заделанным и другим помещенным в неподвижную втулку концами.

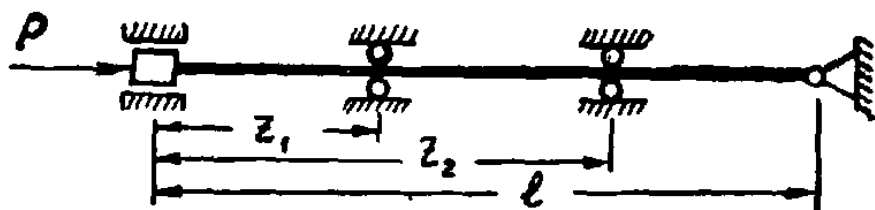
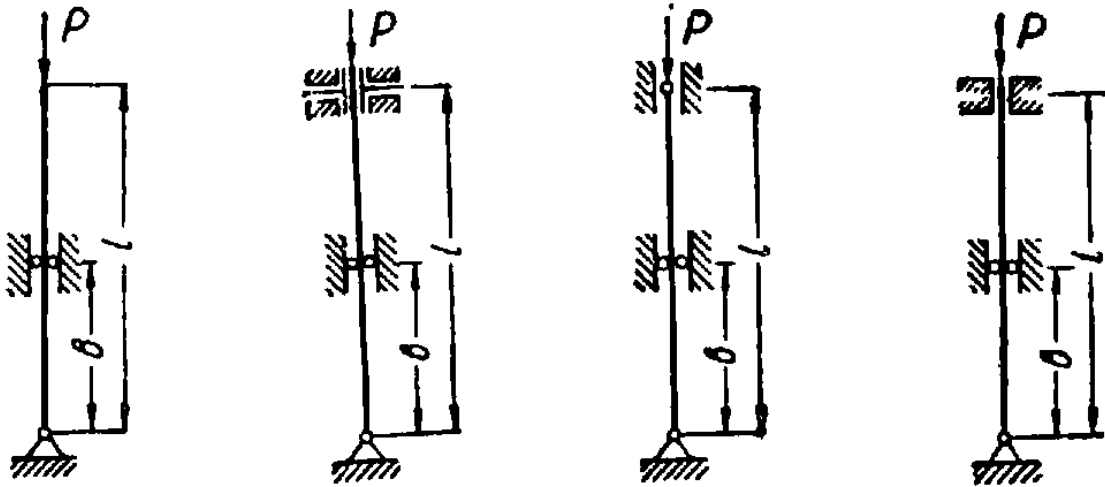


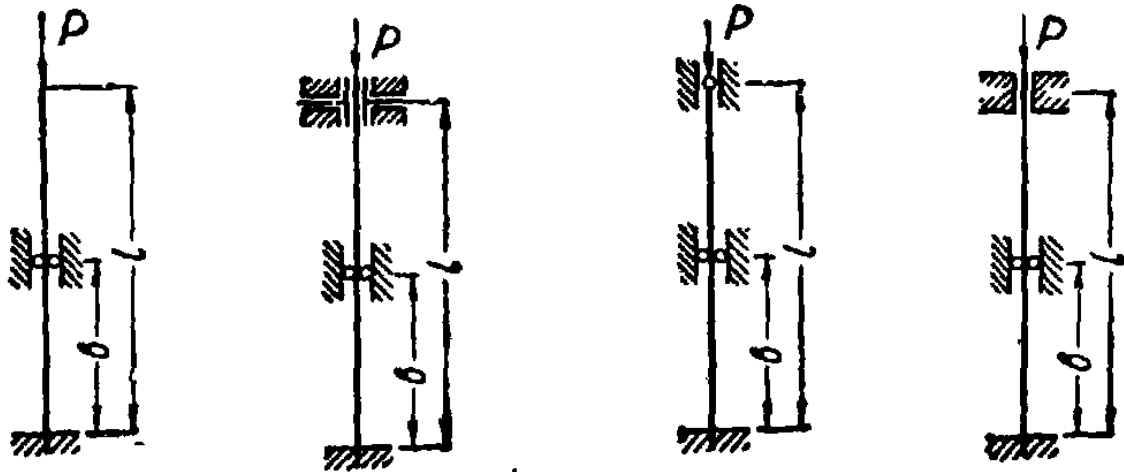
Рис. 152. Трехпролетная стойка с одним шарнирным и другим помещенным в неподвижную втулку концами.

Значения коэффициентов η и μ для стоек с промежуточной опорой и шарнирно опертым концом



№№ стоек	$\frac{b}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	η	2,467	2,832	3,283	3,845	4,551	5,438	6,511	7,726	8,874	9,637	9,870
	μ	2,000	1,87	1,73	1,60	1,47	1,35	1,23	1,13	1,06	1,01	1,00
2	η	9,870	11,33	13,11	15,26	17,72	20,19	21,88	22,14	21,40	20,55	20,19
	μ	1,00	0,933	0,868	0,801	0,746	0,699	0,672	0,668	0,679	0,693	0,699
3	η	20,19	23,23	27,06	31,75	36,80	39,48	36,80	31,75	27,06	23,23	20,19
	μ	0,699	0,652	0,604	0,558	0,518	0,500	0,518	0,558	0,604	0,652	0,699
4	η	39,48	45,27	51,97	58,92	58,84	51,12	41,68	33,96	28,09	23,63	20,19
	μ	0,500	0,467	0,436	0,412	0,410	0,439	0,487	0,539	0,593	0,646	0,699

Значения коэффициента η и μ для стоек с промежуточной опорой и зашечленным концом



№№ стоек	$\frac{b}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
		1	η	2,467	2,883	3,414	4,105	5,021	6,260	7,990	10,39	13,59
	μ	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,26	1,11	0,975	0,852	0,757	0,699
2	η	9,870	11,53	13,65	16,37	19,90	24,42	29,82	35,10	38,41	39,40	39,48
	μ	1,00	0,925	0,850	0,776	0,704	0,636	0,575	0,530	0,507	0,501	0,500
3	η	20,19	23,63	28,09	33,96	41,68	51,12	58,84	58,92	51,97	45,27	39,48
	μ	0,699	0,640	0,593	0,539	0,487	0,439	0,410	0,412	0,436	0,467	0,500
4	η	39,48	46,13	54,45	64,56	75,22	80,76	75,22	64,56	54,45	46,13	39,48
	μ	0,500	0,463	0,426	0,391	0,362	0,350	0,362	0,391	0,426	0,463	0,500

Значения коэффициента η для трехпролетных стоек с шарнирно
опертыми концами

$\frac{z_1}{l}$ \ $\frac{z_2}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	20,19	23,63	28,09	33,95	41,68	51,12	58,83	58,16	51,97	45,28	39,48
0,1	23,63	24,92	29,46	35,61	43,98	54,91	65,92	67,77	60,68	52,41	45,28
0,2	28,09	29,46	31,54	37,91	46,89	59,23	73,51	78,75	70,90	60,68	51,97
0,3	33,95	35,61	37,91	41,20	50,75	64,42	81,27	87,51	78,75	67,77	58,16
0,4	41,68	43,98	46,89	50,75	56,07	71,15	85,60	81,27	73,51	65,92	58,83
0,5	51,12	54,91	59,23	64,42	71,15	80,75	71,15	64,42	59,23	54,91	51,12
0,6	58,83	65,92	73,51	81,27	85,60	71,15	56,07	50,75	46,89	43,98	41,68
0,7	58,16	67,77	78,75	87,51	81,27	64,42	50,75	41,20	37,91	35,61	33,95
0,8	51,97	60,68	70,90	78,75	73,51	59,23	46,89	37,91	31,54	29,46	28,09
0,9	45,28	52,41	60,68	67,77	65,92	54,91	43,98	35,61	29,46	24,92	23,63
1,0	39,48	45,28	51,97	58,16	58,83	51,12	41,68	33,95	28,09	23,63	20,19

Значения коэффициента η для трехпролетной стойки с одним заземленным и другим помещаемым в неподвижную втулку концами

$\frac{z_1}{l}$ \ / \ $\frac{z_2}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	39,48	46,13	54,45	64,56	75,22	80,77	75,22	64,56	54,45	46,13	39,48
0,1	46,13	48,73	57,38	68,77	82,10	93,45	91,22	78,46	65,37	54,58	46,13
0,2	54,45	57,38	61,68	73,86	89,45	106,71	214,92	96,96	79,58	65,37	54,45
0,3	64,56	68,77	73,86	80,57	98,72	121,22	236,40	224,60	96,94	78,46	64,56
0,4	75,22	82,10	89,45	98,72	109,62	151,29	207,94	236,40	214,92	91,22	75,22
0,5	80,76	93,45	106,71	121,22	151,29	158,00	151,29	121,22	106,71	93,15	80,77
0,6	75,22	91,22	214,92	236,40	207,94	151,29	109,62	98,72	89,45	82,10	75,22
0,7	64,56	78,48	96,96	224,60	236,40	121,22	98,72	80,57	73,85	68,77	64,56
0,8	54,49	65,37	79,58	96,94	214,92	106,71	89,45	73,86	61,68	57,38	54,45
0,9	46,13	54,58	65,37	78,46	91,22	93,45	82,10	68,77	57,38	48,73	46,13
1,0	39,48	46,13	54,45	64,56	75,22	80,77	75,22	64,56	54,45	46,13	39,48

4. ОДНОПРОЛЕТНЫЕ СТОЙКИ С ПЕРЕМЕННЫМ СЕЧЕНИЕМ

а) Однопролетные стойки со ступенчатым изменением поперечного сечения (см. рис. 153). В этом случае критическая сила находится по уравнению:

$$P_k = \eta \frac{EJ}{l^2}. \quad (7)$$

Значения коэффициента η в зависимости от $\frac{b}{l}$ и $\frac{J_2 - J_1}{J_1}$ помещены в таблице 60.

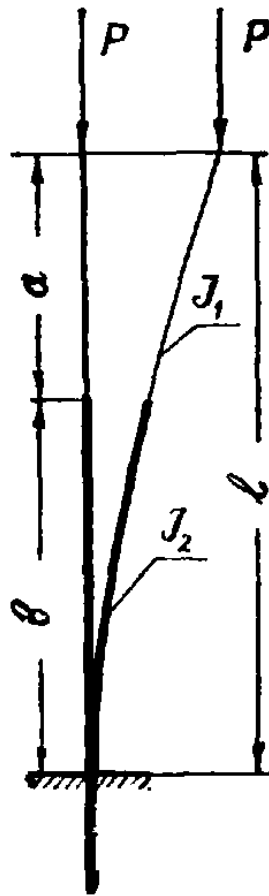


Рис. 153. Однопролетная стойка со ступенчатым изменением поперечного сечения.

б) Однопролетные стойки с непрерывным изменением сечения. Критическая сила определяется по формуле:

$$P_k = \eta \frac{EJ_2}{l^2}.$$

Значения коэффициента η для однопролетных ступенчатых стоек

$\frac{b}{l}$	$(J_2 - J_1) : J_1$										
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,243	2,056	1,645	1,234	0,8225	0,4111	0,2243	0,1175	0,04837	0,02465
0,1	2,467	2,285	2,126	1,761	1,367	0,9440	0,4894	0,2714	0,1436	0,05947	0,03010
0,2	2,467	2,325	2,197	1,881	1,520	1,093	0,5919	0,3350	0,1793	0,07486	0,03798
0,3	2,467	2,363	2,262	2,013	1,692	1,277	0,7293	0,4237	0,2302	0,09709	0,04944
0,4	2,467	2,396	2,327	2,141	1,879	1,499	0,9174	0,5498	0,3064	0,1309	0,06697
0,5	2,467	2,423	2,379	2,256	2,068	1,756	1,178	0,7462	0,4268	0,1860	0,09580
0,6	2,467	2,444	2,420	2,350	2,235	2,025	1,531	1,052	0,6330	0,2848	0,1482
0,7	2,467	2,457	2,446	2,415	2,356	2,256	1,950	1,530	1,018	0,4880	0,2588
0,8	2,467	2,464	2,461	2,453	2,440	2,402	2,297	2,106	1,730	0,9991	0,5592
0,9	2,467	2,467	2,466	2,465	2,465	2,459	2,446	2,424	2,374	2,189	1,746
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

В таблице 61 даны значения коэффициента η для конической стойки, заделанной одним концом в зависимости от $\frac{J_1}{J_2}$, где J_1 — момент инерции верхнего торца стойки и J_2 — нижнего торца.

Таблица 61

Значения коэффициента η для конической стойки с заземленным концом

$\frac{J_1}{J_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
η	1,233	1,505	1,710	1,870	2,002	2,117
$\frac{J_1}{J_2}$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
η	2,218	2,308	2,391	2,467	3,025	3,400

В таблице 62 приведены значения коэффициента η для симметричных трехступенчатых стоек с шарнирно опертыми концами (рис. 154). Средняя часть стойки длиной a имеет постоянное сечение, а крайние участки — переменное сечение с моментом инерции, изменяющимся по степенному закону

$$J(z) = J_2 \left(\frac{z}{z_0} \right)^n.$$

Значения коэффициента η даны в зависимости от n , $\frac{J_1}{J_0}$ и $\frac{a}{l}$.

Случай 1 соответствует условию, что толщина стержня постоянна, а меняется лишь ширина.

Случай 2 соответствует условию, что ширина стержня постоянна, а изменяется лишь толщина.

Случай 3 соответствует условию, что концы стержня представляют собой усеченные конусы.

Случай $\frac{a}{l} = 0$ соответствует условию, что у стержня средняя часть призматической формы отсутствует.

Значения коэффициента η для трехступенчатой стойки

Характер изменения поперечн. сечения	Характер закрепления концов стержня	J		$\frac{a}{l}$				
		J_1	J_2	0	0,2	0,4	0,6	0,8
1	Концы стержня шарнирно оперты	0,1		6,48	7,58	8,63	9,46	9,82
		0,2		7,01	7,99	8,90	9,63	9,82
		0,4		7,86	8,59	9,19	9,70	9,83
		0,6		8,61	9,12	9,55	9,76	9,85
		0,8		9,27	9,53	9,68	9,82	9,86
	Концы стержня заземлены	0,2		20,36	22,36	23,42	25,44	29,00
		0,4		26,16	27,80	28,96	30,20	33,08
		0,6		31,04	32,20	32,92	33,80	35,80
		0,8		35,40	36,00	36,36	36,84	37,84
2	Концы стержня шарнирно оперты	0,1		5,01	6,32	7,84	9,14	9,77
		0,2		6,14	7,31	8,49	9,39	9,81
		0,4		7,52	8,38	9,12	9,62	9,84
		0,6		8,50	9,02	9,46	9,74	9,85
		0,8		9,23	9,50	9,69	9,81	9,86
	Концы стержня заземлены	0,2		18,48	20,88	22,64	23,96	27,24
		0,4		25,32	27,20	28,40	29,52	32,44
		0,6		30,72	31,96	32,72	33,56	35,60
		0,8		35,32	35,96	36,32	36,80	37,80
3	Концы стержня шарнирно оперты	0,1		4,81	6,11	7,68	9,08	9,77
		0,2		6,02	7,20	8,42	9,38	9,80
		0,4		7,48	8,33	9,10	9,62	9,84
		0,6		8,47	9,01	9,45	9,74	9,85
		0,8		9,23	9,49	9,69	9,81	9,86
	Концы стержня заземлены	0,2		18,23	20,71	22,49	23,80	27,03
		0,4		25,23	27,13	28,33	29,46	32,35
		0,6		30,68	31,94	32,69	33,54	35,56
		0,8		35,33	35,96	36,32	36,78	37,80

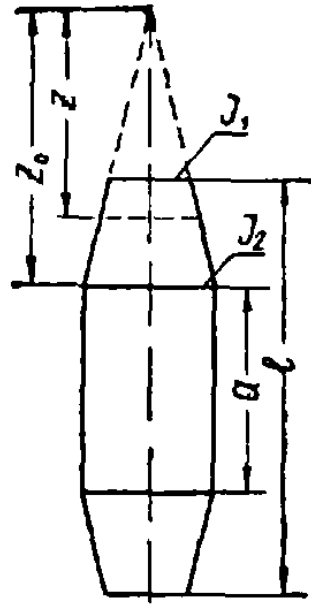


Рис. 154. Симметричная трехступенчатая стойка, средняя часть стойки постоянного сечения, крайние — переменного.

Для стержня, у которого средняя часть имеет постоянный момент инерции J_2 , а крайние части — постоянные моменты инерции J_1 (рис. 155), значения η приведены в таблице 63.

Таблица 63

$\frac{J_1}{J_2}$	Значения η при $\frac{a}{l}$			
	0,2	0,4	0,6	0,8
0,01	0,15	0,27	0,60	2,26
0,1	1,47	2,40	4,50	8,59
0,2	2,80	4,22	6,69	9,33
0,4	5,09	6,68	8,51	9,67
0,6	6,98	8,19	9,24	9,78
0,8	8,55	9,18	9,63	9,84

В случае стержня призматического сечения с шарнирно закрепленными концами, имеющего уменьшение площади

поперечного сечения на протяжении небольшого участка d в расстоянии a от середины стержня (рис. 156), следует увеличить фактическую длину стержня на:

$$\delta = d \frac{J - J_1}{J_1} \cos \frac{\pi a}{l}, \quad (8)$$

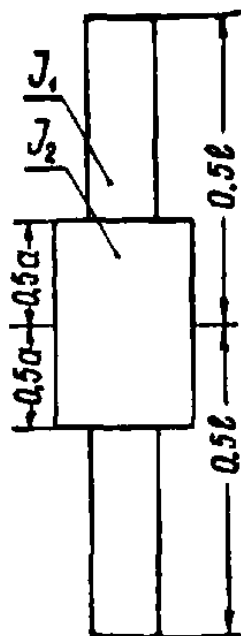


Рис. 155. Симметричная трехступенчатая стойка.

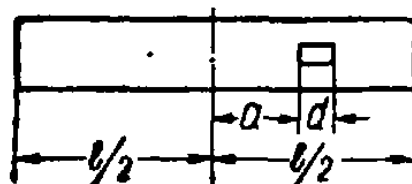


Рис. 156.

где: J — момент инерции поперечного сечения стержня;
 J_1 — момент инерции ослабленного участка.

Критическая сила:

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{(l + \delta)^2}. \quad (9)$$

Следует иметь в виду, что при критических напряжениях, превышающих предел пропорциональности, возможность использования теоретических формул вида:

$$P_k = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

для нахождения критического значения нагрузки отпадает, так как эти формулы выведены в предположении, что потеря устойчивости происходит в пределах применимости закона Гука.

5. РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

Условие применимости вышеприведенных формул, определяющих критическую нагрузку, выражается неравенством:

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}} \quad (10)$$

или

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}, \quad (11)$$

где: $\sigma_k = \frac{P_k}{F}$ — критическое напряжение;

$\sigma_{\text{пц}}$ — предел пропорциональности при осевом сжатии;

$\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гибкость стержня;

μ — коэффициент приведенной длины;

$i = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{F}}$ — наименьший радиус инерции сечения стержня.

Условие (11) дает возможность установить пределы применимости формул, определяющих критические нагрузки для любого материала.

Для коротких стержней, до гибкости 30—40, критические напряжения будут равны: для стали — пределу текучести и для чугуна и дерева — пределу прочности.

Для гибкостей в пределах от $\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}$ до $\lambda = 30 \div 40$ были предложены различные эмпирические формулы, показывающие, что критические напряжения при таких гибкостях меняются по закону, близкому к линейному.

Наибольшим распространением из эмпирических формул для стоек постоянного сечения пользуется формула, предполагающая линейную зависимость критического напряжения σ_k от гибкости стойки λ :

$$\sigma_k = a - b\lambda, \quad (12)$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала.

В таблице 64 приводятся значения коэффициентов a и b .

Таблица 64

Материал	Коэффициенты	
	a	b
Углеродистая сталь Ст. 3 :	3 100	11,4
Углеродистая сталь Ст. 5	4 640	36,17
Кремнистая сталь	5 890	38,17
Дерево	293	1,94

Для чугуна линейная зависимость заменяется параболической:

$$\sigma_k = 7760 - 120\lambda + 0,53\lambda^2. \quad (13)$$

6. РАСЧЕТ ПО ДОПУСКАЕМОМУ НАПРЯЖЕНИЮ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

При расчете на устойчивость допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma_y]$ определяется через допускаемое напряжение на простое сжатие $[\sigma]$ и коэффициент понижения напряжения φ , т. е.

$$\frac{P}{F} \leq [\sigma_y] = \varphi [\sigma]. \quad (14)$$

Для материалов, не имеющих предела текучести (чугун):

$$\varphi = \frac{\sigma_k}{\psi\sigma_B},$$

где: ψ — коэффициент, учитывающий эксцентриситет и начальную кривизну;

σ_B — предел прочности.

В таблице 65 приведены значения коэффициента φ в зависимости от гибкости λ .

Коэффициент φ

Гибкость λ	Значения φ для				
	стали марок 4, 3, 2, ОС	стали марки 5	стали СПК	чугуна	дерева
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Пользуясь этой таблицей, можно произвести подбор сжатого стержня. Подбор приходится осуществлять путем последовательных приближений. Порядок расчета показан на примере.

Пример 2. Подобрать двутавровое сечение стойки с одним зашцеиленным концом, сжатой силой $P = 40 \text{ т}$; длина стойки $l = 1,5 \text{ м}$; основное допускаемое напряжение $[\sigma] = 1\,600 \text{ кг/см}^2$.

Решение. Так как в условии устойчивости $\sigma = \frac{P}{\varphi F_{бр}} < [\sigma]$ неизвестно ни $F_{бр}$, ни φ , одной из этих величин необходимо задаться. Примем для первого приближения $\varphi = 0,5$. В этом случае необходимая площадь поперечного сечения стержня будет равна:

$$F_{бр} \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{40\,000}{0,5 \cdot 1\,600} = 50 \text{ см}^2.$$

По сортаменту выбираем двутавр № 24б с площадью $F = 52,6 \text{ см}^2$. Наименьший радиус инерции сечения:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = 2,38 \text{ см.}$$

Соответствующая гибкость стойки $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 150}{2,38} = 126$.

Коэффициент φ по интерполяции между значениями его из таблицы 65 для $\lambda = 120$ и $\lambda = 130$ равен $\varphi = 0,43$. Расчетным напряжением будет:

$$\sigma_p = \frac{P}{\varphi F} = \frac{40\,000}{0,43 \cdot 52,6} = 1\,770 \text{ кг/см}^2 > 1\,600.$$

Перенапряжение составляет:

$$\frac{1\,770 - 1\,600}{1\,600} \cdot 100 = 10,7\% > 5\%.$$

Попробуем двутавр № 27а; $F = 54,6 \text{ см}^2$; $i_{min} = 2,51 \text{ см}$. Наибольшая его гибкость:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 150}{2,51} = 120.$$

Так как коэффициент $\varphi = 0,45$, то расчетное напряжение:

$$\sigma_p = \frac{40\,000}{0,45 \cdot 54,6} = 1\,625 \text{ кг/см}^2.$$

Перенапряжение составляет теперь:

$$\frac{1\,625 - 1\,600}{1\,600} \cdot 100 = 1,5\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА

Если одна из главных жесткостей изгиба мала по сравнению с другой, то, изгибая стержень в плоскости наибольшей жесткости, можно, постепенно увеличивая нагрузку, достигнуть предела, когда плоская форма изгиба перестает быть устойчивой. Ось стержня искривляется в плоскости наименьшей жесткости, причем отдельные поперечные сечения стержня поворачиваются. Вместо плоского изгиба создается изгиб оси по линии двойной кривизны, сопровождающийся кручением. Критическая нагрузка балки зависит от жесткости на кручение и на изгиб в плоскости действия нагрузки.

Устойчивость балки будет зависеть от размеров поперечного сечения и ее свободной длины.

В таблице 66 приведены значения критических сил для балок с узким прямоугольным сечением при различных случаях нагрузки.

Обозначения: h — высота сечения балки; b — ширина сечения; l — длина балки; GJ_k — жесткость при кручении; EJ — наименьшая жесткость при изгибе; β — коэффициент, зависящий от отношения $\frac{GJ_k}{l}$; значения этого коэффициента следующие:

$\frac{GJ_k}{l}$	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
β	16,93	17,15	17,82	19,04	21,01	24,10	29,11	37,88	56,00	111,6

В случае двутавровой балки формула для критической нагрузки имеет следующий вид:

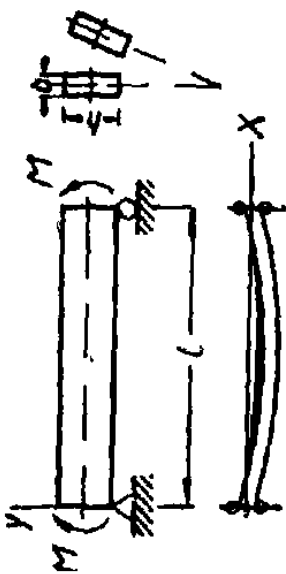
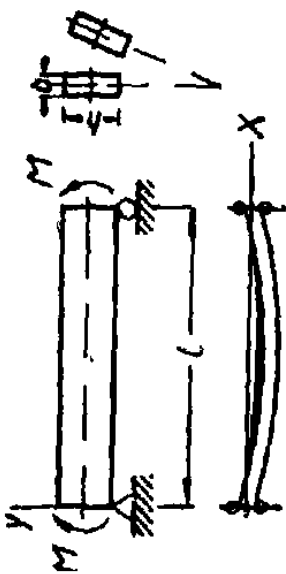
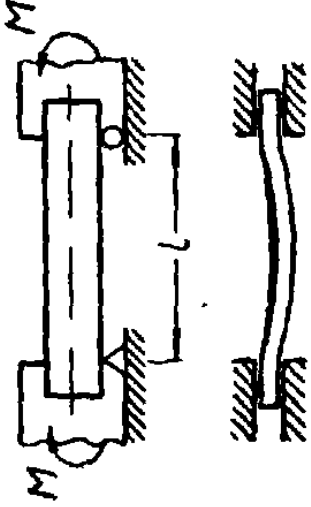
$$P_k = \frac{\beta}{l^2} m. \quad (15)$$

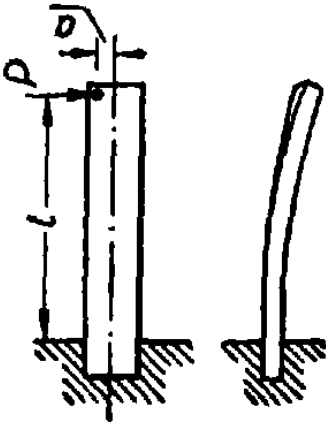
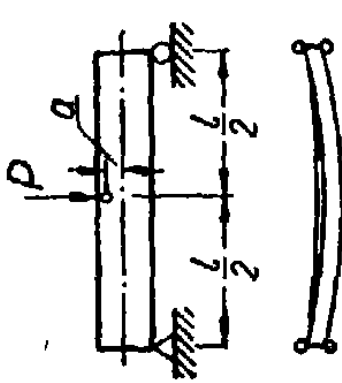

Коэффициент β определяется по таблице 67 в зависимости от:

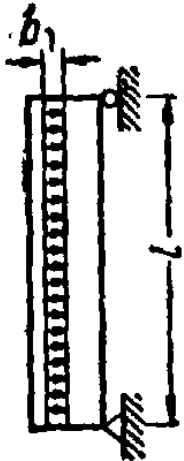
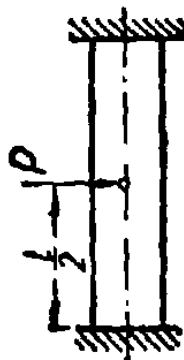
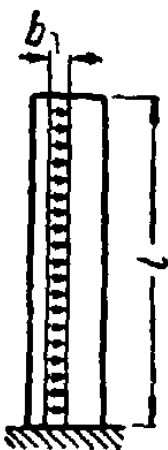
$$\alpha = \frac{GJ_k}{EJ} \left(\frac{l}{h} \right)^2,$$

где l — длина балки, а h — высота балки.

Критические силы

№№ п/п	Случай нагрузки		Значение критической нагрузки
1	<p>Стержень изгибается парами сил M, приложенными по концам. Концы балки могут свободно поворачиваться относительно осей Z и Y</p>		$M_k = \frac{\pi^2}{l^2} m$
2	<p>Нагрузка та же, но концы балки зашпунтованы (торцовые сечения относительно вертикальных осей поворачиваться не могут)</p>		$M_k = \frac{2\pi^2}{l^2} m$

№№ п/п	Случай нагрузки		Значение критической нагрузки
3	<p>Стержень с одним закрепленным концом нагружен сосредоточенной силой на свободном конце. Точка приложения нагрузки отстоит от оси стержня на расстоянии a</p>		$P_k = \frac{4.013}{l^2} \left(m - \frac{a}{l} EJ \right)$
4	<p>Стержень нагружен сосредоточенной силой посредине. Закрепления шарнирные. Точка приложения нагрузки отстоит от оси стержня на расстоянии a</p>		$P_k = \frac{16.93}{l^2} \left(m - 3.48 \frac{a}{l} EJ \right)$
5	<p>Закрепления шарнирные. Нагрузка приложена на расстоянии c от ближайшей опоры на оси стержня</p>		$P_k = \frac{\beta}{l^2} m$

№№ п/п	Случай нагрузки		Значение критической нагрузки
6	Стержень заделан, как и в предыдущем случае. Нагрузка, действующая на него, равномерно распределена по длине		$(q)_{к} = \frac{28,3}{l^2} m$
7	Стержень, заделанный концами, нагружен посередине сосредоточенной силой. Точка приложения нагрузки находится на оси стержня		$P_{к} = \frac{26,6}{l^2} m$
8	Стержень, заделанный одним концом, нагружен равномерно распределенной нагрузкой		$(q)_{к} = \frac{12,85}{l^2} m$

$$m = \sqrt{EJ GJ_{к}}$$

Коэффициент β

α	β_1	β_2	β_3	α	β_1	β_2	β_3
1	2	3	4	1	2	3	4
0,1	31,6	86,4	143,0	16	5,08	18,3	30,5
1,0	9,76	31,9	53,0	20	—	18,1	30,1
2,0	8,03	25,6	42,6	32	—	17,9	29,4
4,0	6,73	21,8	36,3	50	—	17,5	29,0
6,0	6,19	20,3	33,8	70	—	17,4	28,8
8,0	5,87	19,6	32,6	80	4,04	17,2	28,6
12,0	5,36	18,8	31,5	100	4,04	17,2	28,6

Здесь: β_1 — для консоли с силой на конце;

β_2 — для балки на двух опорах с силой посередине;

β_3 — для балки с равномерно распределенной нагрузкой.

Пример 3. Балка на двух опорах, пролетом $l = 6$ м двутаврового профиля № 60а, загружена равномерно распределенной нагрузкой $q = 10$ т/м (рис. 157). Проверить прочность балки при $[\sigma] = 1600$ кг/см² и устойчивость плоской формы изгиба при коэффициенте запаса на устойчивость и прочность $k_y = 1,7$.

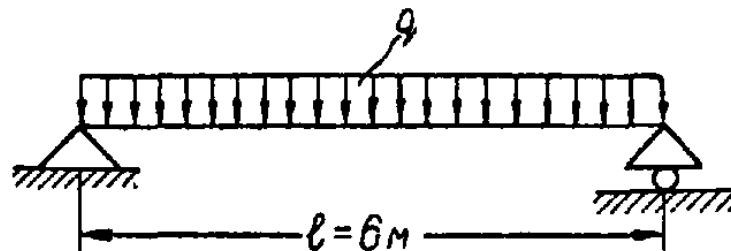


Рис. 157.

Размеры сечения по сортаменту — ГОСТ 10016 (рис. 158). $h = 60$ см; $b = 17,6$ см; $\delta_1 = 1,3$ см; $h_1 = 55,6$ см; $W_y = 2800$ см³; $J_z = 1700$ см⁴; $\delta_2 = 2,2$ см.

Решение: а) Проверка на прочность:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 45 \text{ тм} = 45 \cdot 10^5 \text{ кгсм};$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{45 \cdot 10^5}{2800} = 1605 \text{ кг/см}^2.$$

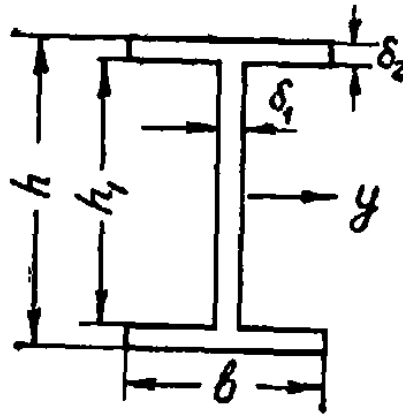


Рис. 158. Поперечное сечение.

Полученные результаты справедливы лишь при условии, что балка при изгибе не получит бокового выпучивания.

б) Проверка на устойчивость:

$$(ql)_k = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{EJGJ_k},$$

где J_k — момент инерции при кручении для двутаврового сечения может быть подсчитан по формуле:

$$J_k \approx \frac{1}{3} \sum h \delta^3 = \frac{1}{3} (h_1 \delta_1^3 + 2b \delta_2^3) = 160 \text{ см}^4.$$

Принимая модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, а отношение $\frac{E}{G} = 2(1 + \mu) = 2,6$, получим:

$$(ql)_k = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{EJ_z \frac{EJ_k}{2,6}} = \beta \frac{E}{l^2} \sqrt{\frac{1700 \cdot 160}{2,6}} = \beta \frac{E}{l^2} 324.$$

Для определения коэффициента β по таблице 67 найдем отношение:

$$\alpha = \frac{GJ_K}{EJ_z} \left(\frac{l}{h} \right)^2 = \frac{160}{2,6 \cdot 1700} \left(\frac{600}{60} \right)^2 = 3,62.$$

По интерполяции между значениями для $\alpha = 2$ и $\alpha = 4$ (таблица 67, столбец 4) находим $\beta = 37,5$. Отсюда критическая, т. е. наименьшая нагрузка, при которой становится возможным боковое выпучивание заданной балки:

$$(ql)_K = 324 \beta \frac{E}{l^2} = \frac{324 \cdot 37,5 \cdot 2,1 \cdot 10^6}{600^2} = 70\,800 \text{ кг.}$$

Критические напряжения:

$$\sigma_K = \frac{M_{max\ K}}{W_y} = \frac{(ql)_K l}{8W_y} = \frac{70\,800 \cdot 600}{8 \cdot 2\,800} = 1\,900 \text{ кг/см}^2.$$

Допускаемое напряжение на устойчивость должно быть взято:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_K}{k_y} = \frac{1\,900}{1,7} = 1\,120 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, для обеспечения устойчивости балки необходимо основное допускаемое напряжение уменьшить в отношении:

$$\varphi = \frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{1\,120}{1\,600} = 0,7.$$

Значит, надежная работа балки может быть обеспечена лишь при условии уменьшения действующей нагрузки с $q = 10 \text{ т/м}$ до $q = 7 \text{ т/м}$ или при условии постановки поперечных связей, препятствующих боковому выпучиванию, если это конструктивно возможно.

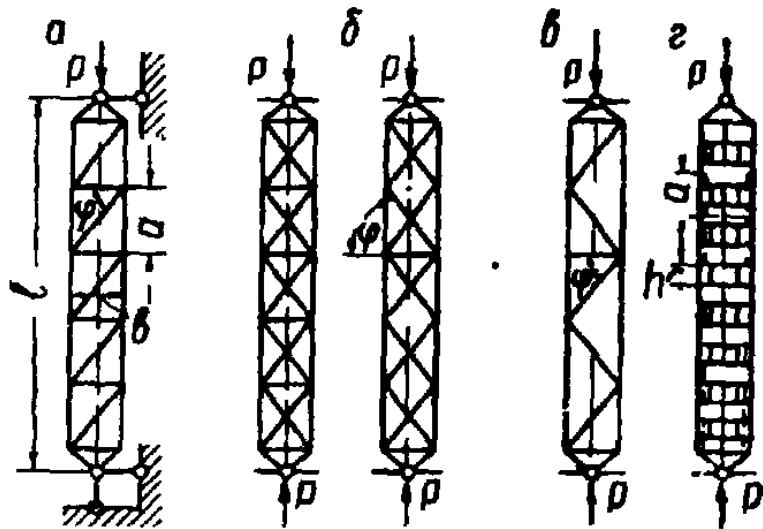
8. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Решетка, связывая ветви колонны, обеспечивает их совместную работу и определяет общую устойчивость стержня, поэтому критические силы таких стержней зависят от соединительной решетки. Вследствие деформативности решетки составные стержни, состоящие из параллельных поясов, соединенных решетками из диагоналей и распорок или планками, в меньшей степени сопротивляются внешним силам, чем сплошные, имеющие ту же площадь поперечного сечения и ту же гибкость. При расчете таких колонн в расчет вводят несколько увеличенную длину стержня, т. е. умножают действительную длину на коэффициент μ , больший единицы.

Формула для определения критической силы имеет следующий вид:

$$P_{к} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (16)$$

На рис. 159 приведены типы сквозных колонн, для которых в таблице 68 приводятся формулы для коэффициента μ .



Поперечные сечения сквозных стержней

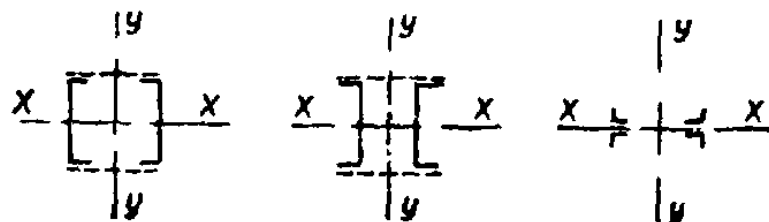


Рис. 159.

В формулы в таблице вошли следующие данные:

- J — момент инерции поперечного сечения относительно оси Y (см. рис. 159);
- F_d — площадь поперечного сечения для схемы (а) двух диагоналей и для схем (б) и (в) четырех диагоналей;
- F_p — площадь поперечного сечения двух распорок;
- a — длина панели;
- b — длина распорки между шарнирами или осями ветвей;
- φ — угол между распоркой и диагональю;
- J_p — момент инерции распорки при изгибе в плоскости решетки;

J_B — момент инерции поперечного сечения вертикальной ветви при изгибе в той же плоскости;

n — числовой коэффициент, равный 1,2 для прямоугольного поперечного сечения;

$$\alpha = \frac{P_H a^2}{2\pi^2 EJ_B}$$

Таблица 68

Стойка по рис. 159	Формулы для коэффициента μ
а	$\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{l}{F_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi} + \frac{b}{a F_p E} \right)}$
б и в	$\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \frac{l}{F_d E \sin \varphi \cos^2 \varphi}}$
г	<p>При числе панелей не менее 6 без учета влияния поперечной силы</p> $\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_p} + \frac{a^2}{24EJ_B} \right)}$ <p>При учете влияния поперечной силы в распорке</p> $\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_p} + \frac{a^2}{24EJ_B} + \frac{na}{bF_p G} \right)}$ <p>При значительных расстояниях между распорками или очень гибких вертикальных элементах (ветвях) составной колонны</p> $\mu = \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(\frac{ab}{12EJ_p} + \frac{a^2}{24EJ_B} \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{na}{bF_p G} \right)}$

9. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Особую проблему представляют расчеты на устойчивость сжатых тонкостенных стержней незамкнутого сечения.

В отличие от монолитных стержней такие стержни теряют устойчивость не только изгибаясь, но и закручиваясь.

Форма потери устойчивости, при которой возникает угол закручивания θ , называется изгибно-крутильной формой потери устойчивости. При этой форме каждое сечение поворачивается вокруг некоторой мгновенной оси, параллельной оси стержня. Если же сечения получают только поступательные перемещения без закручивания, то эта форма называется изгибной формой потери устойчивости.

Изгибным формам потери устойчивости, имеющим место в плоскости главных осей инерции сечения, соответствуют Эйлеровские критические силы.

Здесь приводятся лишь некоторые результаты, полученные В. З. Власовым при исследовании устойчивости тонкостенных стержней.

Для случая центрального (осевого) сжатия тонкостенного стержня продольными силами дифференциальное уравнение его искривленной оси имеет вид:

$$EJ_z \xi^{IV} + P \xi + a_z P \theta'' = 0. \quad (17)$$

Общие дифференциальные уравнения устойчивости для случая постоянной сжимающей силы имеют следующий вид (рис. 160):

$$EJ_y \xi^{IV} + P \xi'' + (a_y - e_y) P \theta'' = 0; \quad (18)$$

$$EJ_z \eta^{IV} + P \eta'' - (a_z - e_z) P \theta'' = 0; \quad (19)$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} + [P(r^2 + 2\beta_z e_z + 2\beta_y e_y) - GJ_K] \theta'' + (a_y - e_y) P \xi'' - (a_z - e_z) P \eta'' = 0, \quad (20)$$

где: EJ_y и EJ_z — жесткости стержня в главных плоскостях инерции;

EJ_ω и EJ_K — секториальная и крутильные жесткости стержня;

ξ и η — дополнительные перемещения (прогибы) в направлениях осей Y и Z , возникающие вследствие потери устойчивости плоской формы изгиба при продольном сжатии;

θ — угол закручивания сечения;

a_y и a_z — координаты центра изгиба сечения в главных центральных осях инерции;

e_y и e_z — эксцентриситеты приложения силы в главных центральных осях инерции;

$r^2 = \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 + a_z^2$ — геометрическая характеристика сечения тонкостенного стержня.

$$\beta_z = \frac{1}{2J_y} \int_F z^3 dF + \frac{1}{2J_y} \int_F z y^2 dF - a_z = \frac{U_z}{2J_y} - a_z;$$

$$\beta_y = \frac{1}{2J_z} \int_F y^3 dF + \frac{1}{2J_z} \int_F y z^2 dF - a_y = \frac{U_y}{2J_z} - a_y.$$

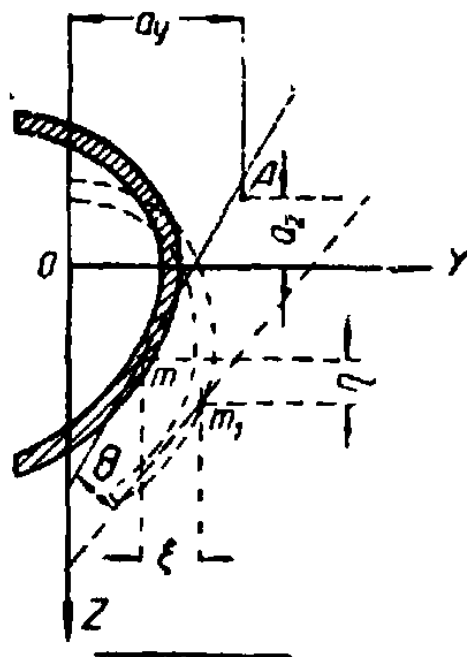


Рис. 160.

Для сечений с двумя осями симметрии величины β_z и β_y равны нулю, так как в этом случае $a_z = a_y = 0$ и обращаются

в нуль входящие в формулы (17) и (18) интегралы, поскольку они содержат нечетные степени координат y и z .

Подробно по геометрическим характеристикам см. главу IV.

Частные случаи расчета

1. Сечение несимметричное. Сила P приложена на линии центров изгиба: $e_y = a_y$ и $e_z = a_z$;

$$P_1 = P_y = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}; \quad P_2 = P_z = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \quad (21)$$

и

$$P_3 = \frac{P_\omega r^2}{\frac{J_y + J_z}{F} + \frac{U_z}{J_z} a_z + \frac{U_y}{J_y} a_y - a_z^2 - a_y^2}, \quad (22)$$

где

$$P_\omega = \frac{\pi^2 EJ_\omega}{l^2 r^2} + \frac{G J_K}{r^2}. \quad (23)$$

2. Сечение имеет две оси симметрии; сила приложена на оси симметрии: $e_z = 0$;

$$r^2 = \rho^2 = \frac{J_z + J_y}{F}; \quad P_1 = P_z;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2(\rho^2 - e_y^2)} \left[P_y + P_\omega - \sqrt{(P_y - P_\omega)^2 + 4 \frac{e_y^2}{\rho^2} P_y P_\omega} \right]. \quad (24)$$

3. Сечение несимметричное. Сила приложена в центре тяжести сечения: $e_x = e_y = 0$.

Уравнение для определения критической силы:

$$\bar{A}_0 + \bar{A}_1 P + \bar{A}_2 P^2 + \bar{A}_3 P^3 = 0, \quad (25)$$

где: $\bar{A}_3 = \rho^2$; $\bar{A}_2 = -r^2(P_\omega + P_z + P_y) + a_y^2 P_z + a_z^2 P_y$;

$$\bar{A}_1 = r^2(P_z P_y + P_z P_\omega + P_y P_\omega);$$

$$\bar{A}_0 = -r^2 P_z P_y P_\omega.$$

4. Сечение с одной осью симметрии. Сила приложена в центре тяжести сечения:

$$e_z = e_y = 0; P_1 = P_z; P_3 > P_2;$$

$$P_2 = \frac{r^2}{2(r^2 - a_z^2)} \left[P_z + P_\omega - \sqrt{(P_z - P_\omega)^2 + 4P_z P_\omega \frac{a_z^2}{r^2}} \right].$$

5. Сечение имеет две оси симметрии. Сила приложена в центре тяжести сечения:

$$e_z = e_y = 0;$$

$$P_1 = P_z; P_2 = P_y; P_3 = P_\omega.$$

Критической силой является наименьшая из трех сил.

6. В общем случае несимметричного сечения или несимметрично загруженного сечения приходится для нахождения P_K решать кубическое уравнение:

$$A_0 + A_1 P + A_2 P^2 + A_3 P^3 = 0, \quad (26)$$

где:

$$A_0 = -r^2 P_z P_y P_\omega; d_z = a_z - e_z; d_y = a_y - e_y;$$

$$A_1 = r^2 P_z P_\omega + r^2 P_y P_\omega + (r^2 + 2\beta_z e_z + 2\beta_y e_y) P_z P_y;$$

$$A_2 = -r^2 P_\omega - (r^2 + 2\beta_z e_z + 2\beta_y e_y - d_z^2) P_y - (r^2 + 2\beta_z e_z + 2\beta_y e_y - d_y^2) P_z;$$

$$A_3 = r^2 + 2\beta_z e_z + 2\beta_y e_y - d_z^2 - d_y^2.$$

Наименьший корень этого уравнения:

$$P_K = \frac{-A_0}{\sqrt[3]{A_1^3 + 3A_0^2 A_3 - 3A_0 A_1 A_2}}. \quad (27)$$

Формула для расчета на устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержней, нагруженных поперечной нагрузкой в общем случае для стержней с одной осью симметрии, имеет следующий вид:

$$P_K^3 - a P_K - b = 0, \quad (28)$$

а для случая стержня, имеющего две оси симметрии и нагруженного в центре тяжести сечения:

$$P_k = \sqrt{b}. \quad (29)$$

Значения коэффициентов a и b , входящих в формулы для частных случаев нагружения и закрепления, даются в таблице 69.

При решении уравнений (28) и (29) получаем два значения критической нагрузки, одно из которых положительное, а другое отрицательное. Первое соответствует приложению нагрузки по вертикали вниз, а второе — вверх. Величины критических сил, подсчитанные по приведенным формулам, будут соответствовать действительным, если напряжения в балке, полученные от этих сил, не будут превышать предела пропорциональности.

Глава XIV. ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

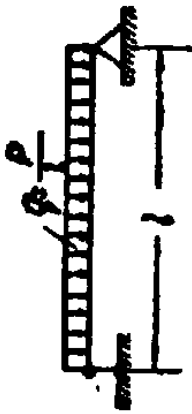
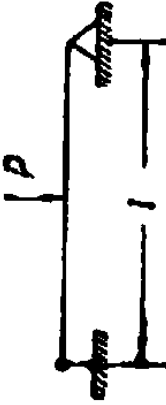
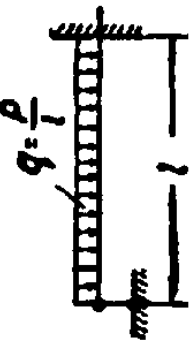
1. СЖАТИЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ИЗГИБОМ

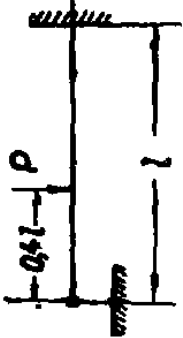
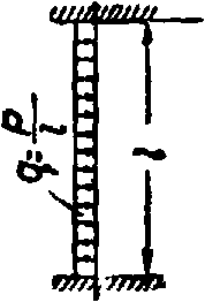

Нелинейная зависимость между перемещениями оси стержня и продольными силами исключает возможность использования при продольно-поперечном изгибе по отношению к продольным силам принципа независимости действия сил. Вследствие этого расчеты сжато-изогнутых или растянуто-изогнутых стержней при сосредоточенных продольных силах и при продольных, распределенных по длине стержня, резко отличаются друг от друга. Решение первых сводится к интегрированию линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; во втором случае при распределенных силах приходится интегрировать линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

Рассмотрим наиболее простой случай при сосредоточенных продольных силах, приложенных по концам стержня.

Для балки, сжатой постоянной продольной силой и несущей

Значения коэффициентов a и b

№, № схем	Схемы загрузки и закрепления концов стержня	Формулы коэффициентов, входящих в уравнения	
		a	b
1		$(82,1 d_y - 94,08 \beta_y) \frac{EJ_y}{l^3}$	$(8\ 000 EJ_\omega + 810 l^2 GJ_k) \frac{EJ_y}{l^6}$
2		$(59,7 d_y + 43,8 \beta_y) \frac{EJ_y}{l^3}$	$(2\ 910 EJ_\omega + 295 l^2 GJ_k) \frac{EJ_y}{l^6}$
3		$(363,8 d_y + 183,4 \beta_y) \frac{EJ_y}{l^3}$	$(86\ 600 EJ_\omega + 4\ 200 l^2 GJ_k) \frac{EJ_y}{l^6}$

№, № схем	Схемы загрузки и закрепления концов стержня	Формулы коэффициентов, входящих в уравнения	
		a	b
4		$(199,4 d_y + 52,8 \beta_y) \frac{EJ_y}{l^3}$	$(20\,900 EJ_\omega + 101,2 l^2 GJ_k) \frac{EJ_y}{l^6}$
5		$(1\,307 d_y + 56,6 \beta_y) \frac{EJ_y}{l^3}$	$(648\,000 EJ_\omega + 15\,910 l^2 GJ_k) \frac{EJ_y}{l^6}$
6		$(594 d_y - 53,83 \beta_y) \frac{EJ_y}{l^3}$	$(114\,800 EJ_\omega + 2\,820 l^2 GJ_k) \frac{EJ_y}{l^6}$

d_y — ордината линии приложения нагрузки над центром изгиба. Если нагрузка приложена выше центров изгиба, то расстояние d_y считается отрицательным.

произвольную поперечную нагрузку, общее уравнение упругой линии можно представить в следующем виде:

$$y = y_0 + y_0' kx + y_0'' (1 - \cos kx) + y_0''' (kx - \sin kx) + f(x), \quad (1)$$

где: y_0 ; ky_0' ; y_0'' ; y_0''' — соответственно прогиб, угол поворота, вторая и третья производные в начале отсчета;

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ}} \frac{1}{\text{см}};$$

где: N — продольная сила;

EJ — жесткость при изгибе;

$f(x)$ — функция влияния поперечных нагрузок, приложенных в пролете.

Выражение функции $f(x)$ и ее производных для частных случаев приводится в таблице 70.

Уравнения начальных параметров для различных схем закрепления и нагрузки, выраженной через $f(x)$, приводятся в таблице 71.

Уравнения начальных параметров для частных случаев загрузки приведены в таблице 72.

Чтобы получить начальные параметры для различных сочетаний нагрузок (речь идет о поперечных нагрузках, а не продольных), необходимо воспользоваться принципом независимости действия сил.

Пример. Для балки, состоящей из двух швеллеров № 16, изображенной на рис. 161, требуется написать уравнения: упругой линии, изгибающего момента и поперечной силы.

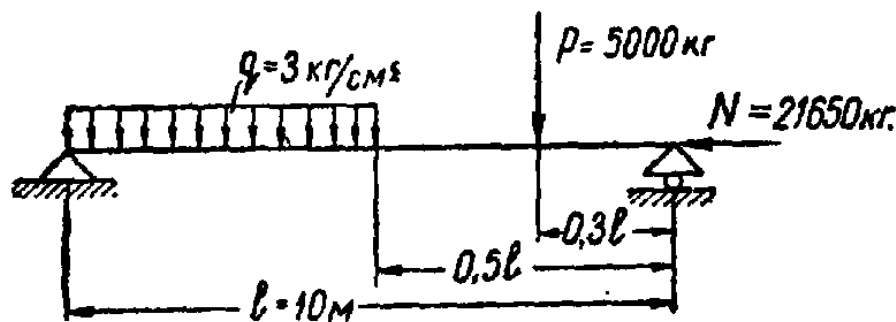


Рис 161. Схема закрепления и загрузки стержня.

Таблица функций и ее производных



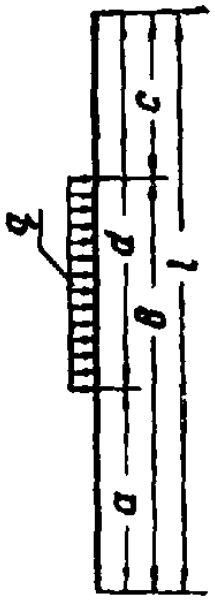
		Тип нагрузки		
				
$f(x)$	$\frac{M}{N} - \frac{M}{N} \cos k(x-a)$	$-\frac{P(x-a)}{N} + \frac{P}{Nk} \sin k(x-a)$	2-й участок $-\frac{q(x-a)^2}{2N} + \frac{q}{k^2 N} [1 - \cos k(x-a)]$	3-й участок $\frac{q}{N} \left[\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{\cos k(x-b) - \cos k(x-a)}{k^2} \right]$
$f'(x)$	$\frac{Mk}{N} \sin k(x-a)$	$-\frac{P}{N} + \frac{P}{N} \cos k(x-a)$	3-й участок $\frac{q}{N} \left[(a-b) - \frac{\sin k(x-b) - \sin k(x-a)}{k} \right]$	
$f''(x)$	$\frac{Mk^2}{N} \cos k(x-a)$	$-\frac{P}{N} k \sin k(x-a)$	3-й участок $\frac{q}{N} [\cos k(x-a) - \cos k(x-b)]$	
$f'''(x)$	$-\frac{Mk^3}{N} \sin k(x-a)$	$-\frac{Pk^2}{N} \sin k(x-a)$	3-й участок $\frac{q}{N} k [\sin k(x-b) - \sin k(x-a)]$	

Таблица начальных параметров для любого типа нагрузки, выраженной через $f(x)$

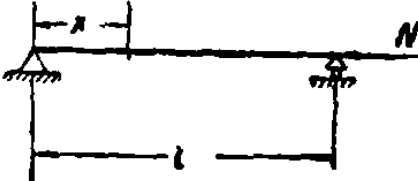
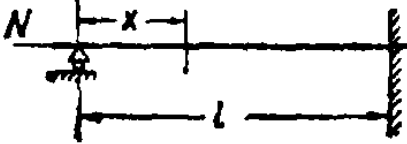
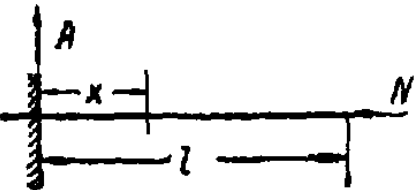
№№ схем	Тип закрепления концов балки	Начальные параметры
1		$y_0 = 0; \quad y'_0 = 0$ $y''_0 = \frac{f''(l) (kl - \sin kl)}{k^3 l \sin kl} - \frac{f(l)}{kl}$ $y'''_0 = - \frac{f''(l)}{k^2 \sin kl}$
2		$y_0 = 0; \quad y'_0 = 0$ $y''_0 = \frac{[f(l) - lf'(l)] (1 - \cos kl)}{kl \cos kl - \sin kl} - \frac{f'(l)}{k}$ $y'''_0 = \frac{lf'(l) - f(l)}{kl \cos kl - \sin kl}$
3		$y_0 = 0; \quad y'_0 = 0$ $y'''_0 k^3 EJ = A$ $y''_0 = - \frac{A \sin kl}{k^3 EJ \cos kl} - \frac{f''(l)}{k^2 \cos kl}$

Таблица начальных параметров при расчете стержней на с

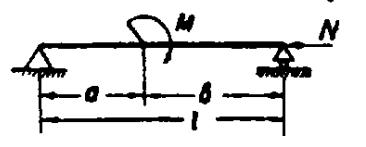
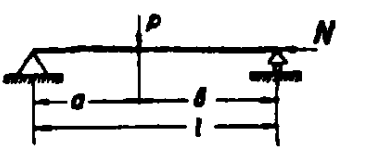
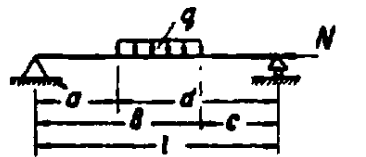
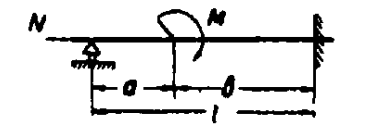
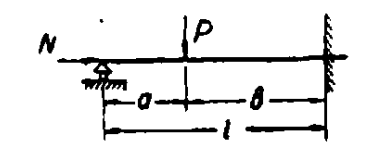
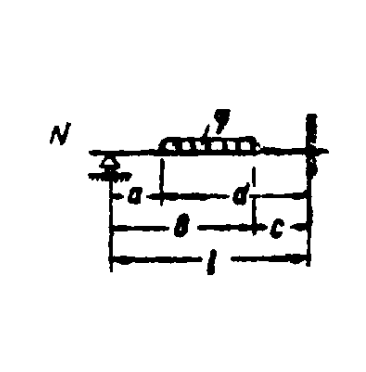
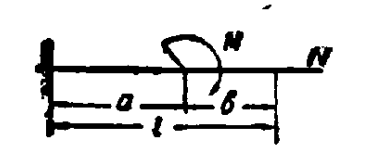
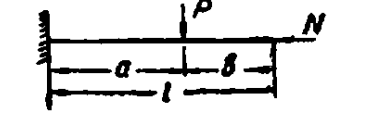

№№ схем		y_0	y'_0
1		0	$\frac{M}{N} \left(\frac{\cos \alpha kl}{\sin kl} - \frac{1}{kl} \right)$
2		0	$\frac{P}{Nk} \left(\alpha - \frac{\sin \alpha kl}{\sin kl} \right)$
3		0	$\frac{q}{k^2 N} \left[\left(\frac{\alpha^2 kl}{2} + \frac{\cos \alpha kl}{\sin kl} \right) - \left(\frac{\alpha_1^2 kl}{2} + \frac{\cos \alpha_1 kl}{\sin kl} \right) \right] =$ $= \frac{q}{k^2 N} (\omega - \omega_1)$
4		0	$- \frac{M}{N} \left[\frac{(kl \sin \alpha kl + \cos \alpha kl - 1)(1 - \cos kl)}{kl \cos kl - \sin kl} + \sin \alpha kl \right]$
5		0	$- \frac{P}{kN} \left\{ \frac{[kl(\alpha - 1 + \cos \alpha kl) - \sin \alpha kl](1 - \cos kl)}{kl \cos kl - \sin kl} - (1 - \cos \alpha kl) \right\}$
6		0	$\frac{q}{k^2 N} \left\{ \left[\frac{1 - \cos kl}{kl \cos kl - \sin kl} \left(\frac{\alpha^2 k^2 l^2}{2} - \alpha k^2 l^2 + kl \sin \alpha kl + \cos \alpha kl \right) - (\alpha kl - \sin \alpha kl) \right] - \right.$ $\left. - \left[\frac{1 - \cos kl}{kl \cos kl - \sin kl} \left(\frac{\alpha_1^2 k^2 l^2}{2} - \alpha_1 k^2 l^2 + kl \sin \alpha_1 kl + \cos \alpha_1 kl \right) - (\alpha_1 kl - \sin \alpha_1 kl) \right] \right\} = \frac{q}{k^2 N} (\omega - \omega_1)$
		y_0	y'_0
7			$- \frac{M}{N} \frac{\cos \alpha kl}{\cos kl}$
8			$- \frac{P}{kN} \left(\operatorname{tg} kl - \frac{\sin \alpha kl}{\cos kl} \right)$
			$- \frac{q}{Nk^2} \left[\left(\alpha kl \operatorname{tg} kl - \frac{\cos \alpha kl}{\cos kl} \right) - \left(\alpha_1 kl \operatorname{tg} kl - \frac{\cos \alpha_1 kl}{\cos kl} \right) \right] =$ $= - \frac{q}{Nk^2} (\omega - \omega_1)$

Таблица начальных параметров при расчете стержней на сжатие

№№ схем		y_0	y'_0	y''_0
1		0	$\frac{M}{N} \left(\frac{\cos akl}{\sin kl} - \frac{1}{kl} \right)$	0
2		0	$\frac{P}{Nk} \left(a - \frac{\sin akl}{\sin kl} \right)$	0
3		0	$\frac{q}{k^2 N} \left[\left(\frac{a^2 kl}{2} + \frac{\cos akl}{\sin kl} \right) - \left(\frac{a_1^2 kl}{2} + \frac{\cos a_1 kl}{\sin kl} \right) \right] =$ $= \frac{q}{k^2 N} (\omega - \omega_1)$	0
4		0	$-\frac{M}{N} \left[\frac{(kl \sin akl + \cos akl - 1)(1 - \cos kl)}{kl \cos kl - \sin kl} + \sin akl \right]$	0
5		0	$-\frac{P}{kN} \left\{ \frac{[kl(a-1 + \cos akl) - \sin akl](1 - \cos kl)}{kl \cos kl - \sin kl} - \right.$ $\left. - (1 - \cos akl) \right\}$	0
6		0	$\frac{q}{k^2 N} \left\{ \left[\frac{1 - \cos kl}{kl \cos kl - \sin kl} \left(\frac{a^2 k^2 l^2}{2} - ak^2 l^2 + kl \sin akl + \right. \right. \right.$ $\left. \left. + \cos akl \right) - (akl - \sin akl) \right] -$ $- \left[\frac{1 - \cos kl}{kl \cos kl - \sin kl} \left(\frac{a_1^2 k^2 l^2}{2} - a_1 k^2 l^2 + kl \sin a_1 kl + \right. \right.$ $\left. \left. + \cos a_1 kl \right) - (a_1 kl - \sin a_1 kl) \right] \right\} = \frac{q}{k^2 N} (\omega - \omega_1)$	0
		y_0	y'_0	y''_0
7				$-\frac{M \cos akl}{N \cos kl}$
8				$-\frac{P}{kN} \left(\operatorname{tg} kl - \frac{\sin akl}{\cos kl} \right)$
				$-\frac{q}{Nk^2} \left[\left(akl \operatorname{tg} kl - \frac{\cos akl}{\cos kl} \right) - \left(a_1 kl \operatorname{tg} kl - \frac{\cos a_1 kl}{\cos kl} \right) \right] =$ $= -\frac{q}{Nk^2} (\omega - \omega_1)$

с поперечным изгибом

$$y_0'''$$

$$-\frac{M}{N} \frac{\cos \alpha kl}{\sin kl} \quad \alpha = \frac{b}{l}$$

$$\frac{P}{Nk} \frac{\sin \alpha kl}{\sin kl} \quad \alpha = \frac{b}{l}$$

$$\frac{q}{k^2 N} \left(\frac{\cos \alpha kl}{\sin kl} - \frac{\cos \alpha_1 kl}{\sin kl} \right) = \frac{q}{k^2 N} (\omega - \omega_1)$$

$$\alpha = \frac{d}{l}; \quad \alpha_1 = \frac{c}{l}$$

$$\frac{M}{N} \frac{kl \sin \alpha kl + \cos \alpha kl - 1}{kl \cos kl - \sin kl}$$

$$\frac{P}{kN} \frac{kl (\alpha - 1 + \cos \alpha kl) - \sin \alpha kl}{kl \cos kl - \sin kl}$$

$$-\frac{q}{k^2 N} \left[\left(\frac{\alpha^2 k^2 l^2}{2} - \alpha k^2 l^2 + \cos \alpha kl + kl \sin \alpha kl \right) \frac{1}{kl \cos kl - \sin kl} - \left(\frac{\alpha_1^2 k^2 l^2}{2} - \alpha_1 k^2 l^2 + \cos \alpha_1 kl + kl \sin \alpha_1 kl \right) \frac{1}{kl \cos kl - \sin kl} \right] = \frac{q}{k^2 N} (\omega - \omega_1)$$

$$y_0'''$$

Решение. Определим коэффициент k .

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ}} = \sqrt{\frac{21\,650}{2 \cdot 10^9 \cdot 1732}} = 0,0025 \frac{1}{\text{см}}.$$

Уравнение упругой линии балки будет иметь следующий вид:

$$y = kx y_0' + y_0''' (kx - \sin kx) + f(x). \quad (2)$$

Напишем уравнения для определения начальных параметров (см. таблицу 72):

$$y_0' = \frac{q}{k^2 N} \left[\left(\frac{\alpha_q^2 kl}{2} + \frac{\cos \alpha_q kl}{\sin kl} \right) - \left(\frac{\alpha_{1q}^2 kl}{2} + \frac{\cos \alpha_{1q} kl}{\sin kl} \right) \right] +$$

$$+ \frac{P}{k N} \left(\alpha_p - \frac{\sin \alpha_p kl}{\sin kl} \right);$$

$$y_0''' = \frac{q}{k^2 N} \left(\frac{\cos \alpha_q kl}{\sin kl} - \frac{\cos \alpha_{1q} kl}{\sin kl} \right) + \frac{P}{k N} \frac{\sin \alpha_p kl}{\sin kl}.$$

Подставив данные задачи в уравнение для y_0' и y_0''' , получим:

$$y_0' = - \frac{5\,308,462}{k N};$$

$$y_0''' = \frac{7\,933,462}{k N}.$$

Уравнение упругой линии для 3-го участка:

$$y = \frac{-5\,308,462}{N} x + \frac{7\,933,462}{k N} (kx - \sin kx) - \frac{q}{N} \left[\frac{(x-500)^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos k(x-500) - \cos kx}{k^2} \right] - \frac{P(x-700)}{N} + \frac{P}{k N} \sin k(x-700).$$

Уравнение изгибающего момента получим, если y'' умножим на EJ :

$$M(x) = EJ y'' = \left\{ 7\,933,462 \sin kx + \frac{q}{k} [\cos kx - \cos k(x-500)] - \right.$$

$$\left. - P \sin k(x-700) \right\} \frac{1}{k}.$$

Уравнение поперечной силы найдем, взяв первую производную от M по x :

$$Q(x) = 7\,933,462 \cos kx + \frac{q}{k} [(\sin k(x - 500) - \sin kx)] - P \cos k(x - 700).$$

Если требуется определить только изгибающий момент и поперечную силу, то нет необходимости находить начальные параметры y_0 и y'_0 , так как они не входят в уравнение изгибающего момента и поперечной силы.

Расчеты на устойчивость в плоскости меньшей жесткости изложены в главе XII.

2. РАСТЯЖЕНИЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ИЗГИБОМ

Для балки, растянутой постоянной продольной силой N и несущей произвольную поперечную нагрузку, общее уравнение упругой линии имеет следующий вид:

$$y = y_0 + \theta_0 \frac{\sin kx}{k} + \frac{M_0}{N} (ch kx - 1) + \frac{Q_0}{kN} (sh kx - kx) + f(x),$$

где: y_0 ; θ_0 ; M_0 и Q_0 — соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале отсчета;

$$k = \sqrt{\frac{N}{EJ}} \text{ 1/см};$$



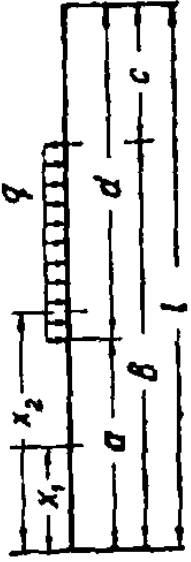
где: N — продольная растягивающая сила;
 EJ — жесткость при изгибе;
 $f(x)$ — функция влияния поперечных нагрузок, приложенных в пролете.

Частные случаи для функции влияния приводятся в таблице 73.

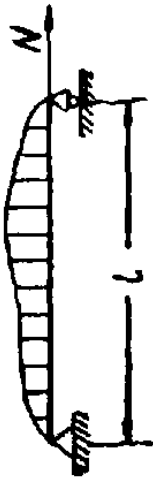
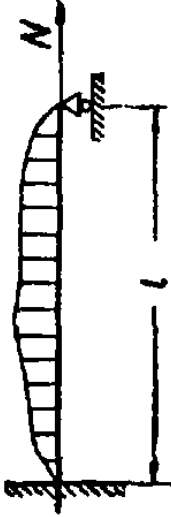
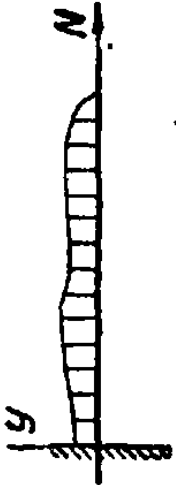
Начальные параметры для общего случая загрузки приведены в таблице 74.

Формулы начальных параметров для частных случаев загрузки и различных схем закрепления приводятся в таблице 75.

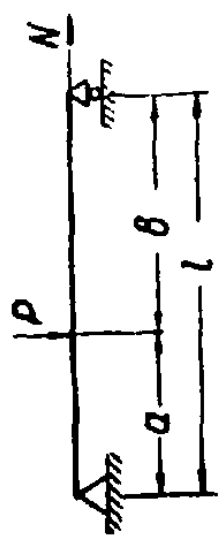
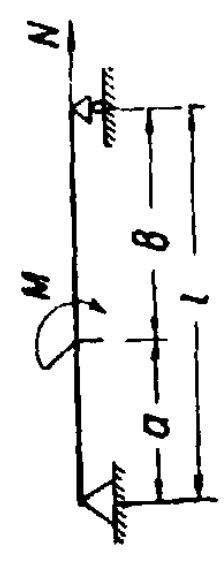
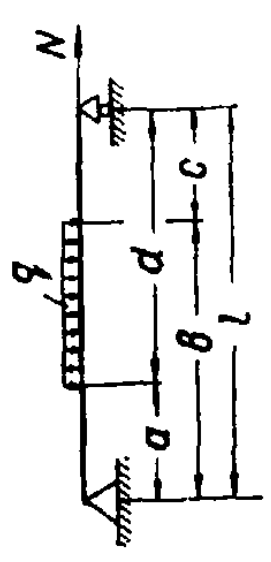
Таблица $f(x)$ и ее производных
Тип нагрузки

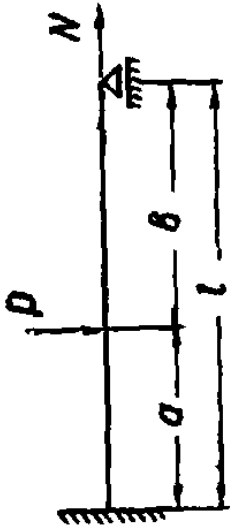

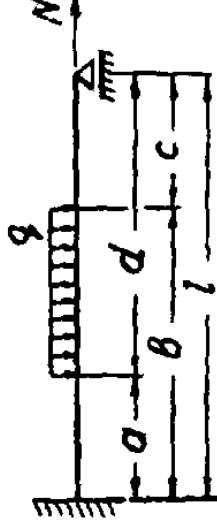
			
$f(x)$	$-\frac{M}{N} + \frac{M}{N} chk(x-a)$	$\frac{P(x-a)}{N} - \frac{P}{kN} shk(x-a)$	<p>2-й участок</p> $\frac{q(x-a)^2}{2N} + \frac{q}{k^2N} [1 - shk(x-a)]$ <p>3-й участок</p> $\frac{q}{N} \left[-\frac{(x-b)^2}{2} + \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{chk(x-b) - chk(x-a)}{k^2} \right]$
$f'(x)$	$\frac{Mk}{N} shk(x-a)$	$\frac{P}{N} - \frac{P}{N} chk(x-a)$	<p>3-й участок</p> $\frac{q}{N} \left[-(a-b) + \frac{shk(x-b) - shk(x-a)}{k} \right]$
$f''(x)$	$\frac{Mk^2}{N} chk(x-a)$	$-\frac{P}{N} kshk(x-a)$	<p>3-й участок</p> $\frac{q}{N} [chk(x-b) - chk(x-a)]$
$f'''(x)$	$\frac{Mk^3}{N} shk(x-a)$	$-\frac{P}{N} k^2chk(x-a)$	<p>3-й участок</p> $\frac{q}{N} k [shk(x-b) - shk(x-a)]$

Начальные параметры для любого типа нагрузки

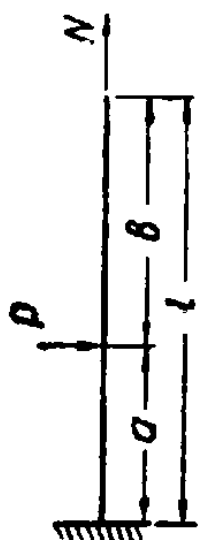
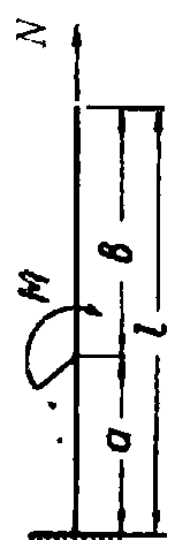
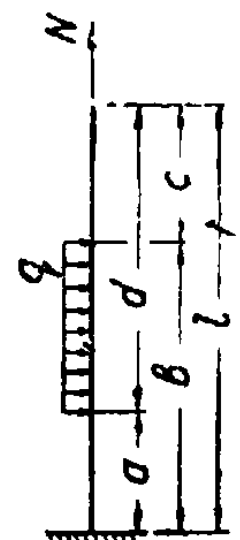
№№ схем	Схема закрепления балки	Начальные параметры
1		$y_0 = 0; \quad M_0 = 0$ $\theta_0 = \frac{f''(l)}{k^2 l shkl} (shkl - kl) - \frac{f(l)}{l}$ $Q_0 = -\frac{f''(l)}{kshkl} N$
2		$y_0 = 0; \quad \theta_0 = 0$ $Q_0 = \frac{N f''(l) (chkl - 1) - k^2 f(l) chkl}{shkl - klchkl}$ $M_0 = \frac{N f''(l) (shkl - kl) - k^2 f(l) shkl}{klchkl - shkl}$
3		$y_0 = 0; \quad \theta_0 = 0$ $M_0 = -\frac{\Sigma Y}{k^2} \frac{N}{N} \frac{kshkl + f''(l)}{chkl}$ $Q_0 = \Sigma Y$

Начальные параметры при расчете стержней с поперечным изгибом

№№ схем	Схема балки и нагрузки	y_0	θ_0	M_0	Q_0
1		0	$-\frac{P}{N} \left(a - \frac{shakl}{shkl} \right)$ $a = \frac{b}{l}$	0	$P \frac{shakl}{shkl}$
2		0	$-\frac{M}{N} k \left(\frac{chakl}{shkl} - \frac{1}{kl} \right)$ $a = \frac{b}{l}$	0	$-Mk \frac{chakl}{shkl}$
3		0	$\frac{q}{Nk} \left[\left(\frac{chakl}{shkl} - \frac{a^2kl}{2} \right) - \left(\frac{cha_1kl}{shkl} - \frac{a_1^2kl}{2} \right) \right]$ $a = \frac{d}{l}; a_1 = \frac{c}{l}$	0	$\frac{q}{k} \frac{chakl - cha_1kl}{shkl}$

№№ схем	Схема балки и нагрузки	y_0	θ_0	M_0	Q_0
4		0	0	$-Pl \frac{a \operatorname{sh} kl - \operatorname{sh} akl}{kl \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$	$-P \frac{a \operatorname{kl} \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} akl}{\operatorname{sh} kl - \operatorname{kl} \operatorname{ch} kl}$
5		0	0	$-M \frac{\operatorname{kl} \operatorname{ch} akl - \operatorname{sh} kl}{\operatorname{kl} \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl}$	$-Mk \frac{\operatorname{ch} akl - \operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl - \operatorname{kl} \operatorname{ch} kl}$
6		0	0	$\frac{ql}{k} \left[\frac{\operatorname{ch} akl - \frac{a^2 kl}{2} \operatorname{sh} kl}{\operatorname{kl} \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} - \frac{\operatorname{kl}}{2} \frac{\operatorname{sh} kl}{\operatorname{kl} \operatorname{ch} kl - \operatorname{sh} kl} \right]$ $= \frac{ql}{k} (\omega - \omega_1)$	$\frac{q}{k} \left[\frac{\frac{a^2 k^2 l^2}{2} \operatorname{ch} kl - \operatorname{ch} akl}{\operatorname{sh} kl - \operatorname{kl} \operatorname{ch} kl} - \frac{a_1^2 k^2 l^2}{2} \frac{\operatorname{ch} kl}{\operatorname{sh} kl - \operatorname{kl} \operatorname{ch} kl} \right]$ $= -\frac{q}{k} (\omega - \omega_1)$

Продолжение таблицы 75

№№ схем	Схема балки и нагрузки	y_0	θ_0	M_0	Q_0
7		0	0	$-\frac{P}{k} \left(thkl + \frac{shakl}{chkl} \right)$	P
8		0	0	$-M \frac{chakl}{chkl}$	0
9		0	0	$-\frac{q}{k^2} \left[a_k l t h k l - \frac{c h a k l}{c h k l} \right] - \left(a_1 k l t h k l - \frac{c h a_1 k l}{c h k l} \right)$	q (d - c)

Глава XV. РАБОТА УПРУГИХ СИЛ И ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. РАБОТА УПРУГИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

При статическом действии силы на любую упругую систему работа выражается половиной произведения окончательного значения этой силы на окончательное значение соответствующего ей перемещения:

$$A = \frac{P\Delta}{2}. \quad (1)$$

Здесь P представляет собой обобщенную силу, т. е. любое силовое воздействие: сосредоточенную силу, группу сил, сплошную нагрузку, момент и т. д.;

Δ — обобщенное перемещение, т. е. тот вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу. Сосредоточенной силе соответствует линейное перемещение, моменту — угол поворота и т. д.

Работа внутренних сил, возникающих в системе при ее загрузке, численно равна работе внешних сил, но противоположна ей по знаку.

Величина, равная и обратная по знаку действительной работе внутренних сил, совершаемой под действием внешней нагрузки, представляет собой потенциальную энергию упругой системы.

Потенциальная энергия стержня определяется следующими выражениями:

а) При растяжении или сжатии:

$$U_N = \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF}, \quad (2)$$

где: N — продольная сила,

s — длина стержня.

б) При сдвиге:

$$U_Q = k \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF}, \quad (3)$$

где: Q — поперечная сила;

$k = \frac{F}{J^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF$ — коэффициент, характеризующий неравномер-

ность распределения касательных напряжений в сечении и зависящий от его формы;

F — площадь сечения;

J — момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

S — статический момент части сечения, лежащей по одну сторону от рассматриваемого слоя;

b — ширина соответствующего слоя.

В случае прямоугольного сечения $k = 1,2$.

В случае круглого сечения $k = \frac{32}{27}$.

При двутавровом сечении $k \approx \frac{F}{F_{ст}}$,

где F — площадь всего сечения, $F_{ст}$ — площадь сечения стенки двутавра.

в) При изгибе:

$$U_M = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ}, \quad (4)$$

где M — изгибающий момент.

г) При кручении:

$$U_{M_k} = \int_0^s \frac{M_k^2 ds}{2GJ_p}, \quad (5)$$

где: M_k — крутящий момент;

J_p — полярный момент инерции сечения.

Потенциальная энергия деформации плоской системы, со-

стоящей из нескольких стержней, при внешней нагрузке в плоскости этой системы:

$$U = \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum k \int_0^s \frac{Q^2 ds}{2GF} + \sum \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (6)$$

В общем случае действия сил на систему:

$$U = \sum \int_0^s \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum k \int_0^s \frac{Q_y^2 ds}{2GF} + \sum k \int_0^s \frac{Q_z^2 ds}{2GF} + \\ + \sum \int_0^s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} + \sum \int_0^s \frac{M_z^2 ds}{2EJ_z} + \sum \int_0^s \frac{M_x^2 ds}{2GJ_k}, \quad (7)$$

где Q_y , Q_z и M_y , M_z — поперечные силы и изгибающие моменты, действующие во взаимно перпендикулярных главных плоскостях.

Возможной (виртуальной) работой называется работа, совершенная силой на перемещении, от нее не зависящем.

Возможная работа внутренних сил плоской упругой системы выражается формулой:

$$U_{mn} = \sum \int_0^s \frac{N_m N_n ds}{EF} + \sum k \int_0^s \frac{Q_m Q_n ds}{GF} + \sum \int_0^s \frac{M_m M_n ds}{EJ}, \quad (8)$$

где: N_m , Q_m , M_m — продольная, поперечная силы и изгибающий момент, возникающие при загрузении системы силами состояния m ;

N_n , Q_n , M_n — усилия при загрузении системы силами состояния n .

Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)

Возможная работа сил первого состояния на перемещениях по их направлению, вызванных силами второго состояния, равна

возможной работе сил второго состояния на перемещениях по их направлению, но вызванных силами первого состояния.

Эта теорема справедлива как для внешних, так и для внутренних сил, т. е. $A_{mn} = A_{nm}$; $U_{mn} = U_{nm}$; $A_{mn} = U_{nm}$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Перемещения отдельных точек упругой системы, вызываемые единичными силами, принято обозначать δ_{mn} , причем первый значок (m) указывает место и направление перемещения, а второй (n) — силу, вызывающую перемещение ($P_n = 1$).

Полные перемещения обозначаются $\Delta_{mn} = \delta_{mn} P_n$.

Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла)

При двух численно равных силовых воздействиях перемещение, производимое силами первого состояния по направлению сил второго состояния, численно равно перемещению, вызванному силами второго состояния по направлению сил первого состояния (рис. 162):

$$\Delta_{mn} = \Delta_{nm}.$$

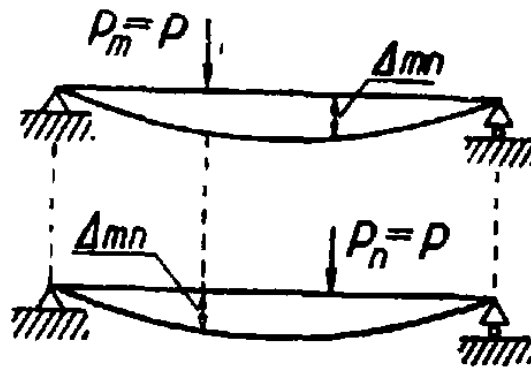


Рис. 162. Взаимность перемещений.

В случае единичных нагрузок ($P_m = 1$; $P_n = 1$):

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}.$$

Универсальная формула перемещений для плоской системы (формула Мора — Максвелла)

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^s \frac{\bar{N}_m N_n ds}{EF} + \sum k \int_0^s \frac{\bar{Q}_m Q_n ds}{GF} + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_m M_n ds}{EJ}, \quad (9)$$

где: $\bar{N}_m, \bar{Q}_m, \bar{M}_m$ — усилия, возникающие в системе от единичной силы, приложенной по направлению определяемого перемещения;

N_n, Q_n, M_n — усилия, возникающие в системе от находящейся на ней нагрузки.

Для балок и рам, т. е. для конструкций, работающих по преимуществу на изгиб, можно не учитывать продольные и поперечные силы, и формула приобретает следующий упрощенный вид:

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_m M_n ds}{EJ}. \quad (10)$$

Для стержневых ферм с шарнирными соединениями в узлах сохраняются только перемещения, зависящие от продольных сил, и формула имеет следующий вид:

$$\Delta_{mn} = \sum_1^n \frac{\bar{N}_m N_n l}{EF}. \quad (11)$$

В наиболее общем случае пространственной системы перемещение определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = & \sum \int_0^s \frac{\bar{N} N ds}{EF} + \sum k_y \int_0^s \frac{\bar{Q}_y Q_y ds}{GF} + \sum k_z \int_0^s \frac{\bar{Q}_z Q_z ds}{GF} + \\ & + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_y M_y ds}{EJ_y} + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_z M_z ds}{EJ_z} + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_K M_K ds}{GJ_K}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку слагаемые, зависящие от продольных сил N и поперечных сил Q_y и Q_z , невелики, ими обычно пренебрегают, сохраняя в формуле три последние слагаемые, зависящие от изгибающих моментов M_y , M_z и крутящего момента M_k , т. е. формула приобретает следующий вид:

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_y M_y ds}{EJ_y} + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_z M_z ds}{EJ_z} + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_k M_k ds}{GJ_k}. \quad (13)$$

Температурные перемещения

Перемещение, возникающее в плоской упругой системе вследствие изменения температуры ее элементов, может быть определено по формуле:

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_0^s \bar{N}_m ds + \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_0^s \bar{M}_m ds, \quad (14)$$

где: α — коэффициент линейного температурного расширения;

t_1, t_2 — изменения температуры крайних волокон элемента конструкции;

h — высота поперечного сечения элемента (расстояние между крайними волокнами);

\bar{N}_m, \bar{M}_m — соответственно продольная сила и изгибающий момент в сечении элемента конструкции, возникающие от действия единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения.

В том случае, когда сечение элемента несимметрично относительно оси, перпендикулярной плоскости деформации, в формулу вместо $\frac{t_1 + t_2}{2}$ входит выражение $\frac{t_1 y + t_2 (h - y)}{h}$,

где y — расстояние от центра тяжести сечения до крайнего волокна «2» (нагреваемого на t_2).

Если конструкция состоит из прямолинейных стержней постоянного сечения, то формула перемещений может быть записана так:

$$\Delta_{mt} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} \Omega_{\bar{N}} + \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} \Omega_{\bar{M}}, \quad (15)$$

где $\Omega_{\bar{N}}$ и $\Omega_{\bar{M}}$ — площади единичных эпюр продольной силы \bar{N} и изгибающего момента \bar{M} .

Знаки членов формулы Δ_{mt} устанавливаются по следующему правилу: Если характеры температурной деформации и деформации, вызываемой единичной нагрузкой, совпадают, то знак соответствующего члена будет положительным, и наоборот.

Теорема Кастилиано

Частная производная от выражения потенциальной энергии по обобщенной силе P равна вызванному нагрузкой перемещению по направлению этой силы:

$$\Delta_{kp} = \frac{\partial U}{\partial P_p}. \quad (16)$$

При определении перемещения при помощи этой теоремы к системе прикладывается соответствующая сила в том направлении, в котором отыскивается перемещение. Затем составляется полное выражение потенциальной энергии от совместного действия приложенной силы и нагрузки. Путем дифференцирования выражения потенциальной энергии по приложенной силе получается формула, определяющая искомое перемещение.

В этой формуле значение приложенной силы приравнивается нулю, поскольку приложенная сила не входит в состав нагрузки.

Если среди заданной нагрузки имеется сила, соответствующая искомому перемещению, то отпадает необходимость в приложении «дополнительной силы».

3. ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГИНА

В тех случаях, когда одна из эпюр моментов (M_i) прямолинейна, интеграл $\int M_i M_k ds$, входящий в формулу перемещений, так называемый «интеграл перемещений», или интеграл Мора, может быть вычислен путем «перемножения эпюр» по правилу Верещагина.

Если построены эпюры M_i и M_k (рис. 163), то интеграл перемещений будет равен произведению площади одной из

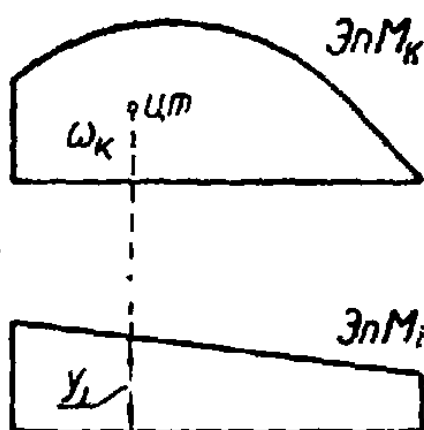


Рис. 163. Перемножение эпюр по правилу Верещагина.

эпюр (ω_k) на ординату другой (y_i), измеренную против центра тяжести первой:

$$\int M_i M_k ds = \omega_k y_i. \quad (17)$$

В тех случаях, когда одна из эпюр криволинейна, площадь ω берется обязательно этой криволинейной эпюры. Ордината y_i всегда берется из прямолинейной эпюры.

Знак произведения эпюр ($\omega_k y_i$) принимается положительным, если обе эпюры построены с одной стороны оси; в противном случае произведение $\omega_k y_i$ отрицательно.

Если одна из перемножаемых эпюр имеет сложное очертание, она разбивается на несколько простых частей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и под центром тяжести каждой части измеряются ординаты y_1, y_2, \dots на другой эпюре (рис. 164).

Интеграл перемещений определяется как сумма произведений площадей на соответствующие им ординаты:

$$\int M_i M_k ds = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3.$$

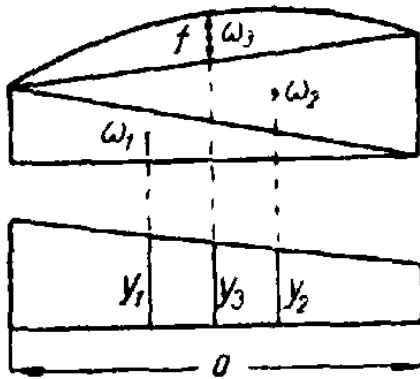


Рис. 164. Одна из эпюр ограничена квадратной параболой.

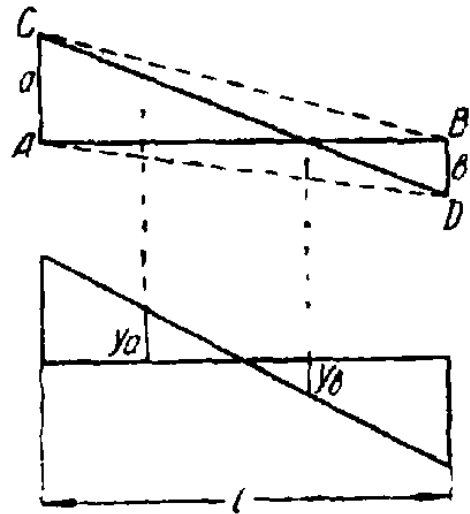


Рис. 165. Эпюры, состоящие из треугольников разных знаков.




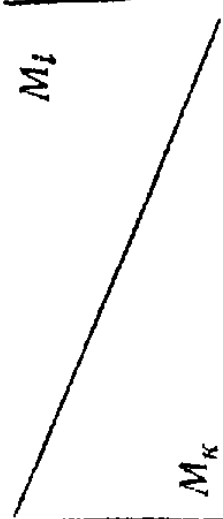



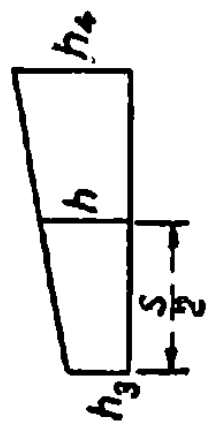

Если эпюра ограничена на участке длиной a квадратной параболой, что соответствует случаю загрузки этого участка сплошной равномерной нагрузкой интенсивности q , то средняя ордината параболы равна $f = \frac{qa^2}{8}$; площадь фигуры, ограниченной параболой, равна $\omega_3 = \frac{2}{3} fa$.





Если одна или обе эпюры состоят из двух треугольников с разными знаками (рис. 165), то одна из эпюр заменяется двумя треугольниками ABC и ABD , обращенными в разные стороны, и площади полученных треугольников умножаются на соответствующие их центрам тяжести ординаты второй эпюры с учетом знаков:

$$\int M_i M_k ds = \frac{al}{2} y_a + \frac{bl}{2} y_b.$$

В таблице 76 приведены значения интегралов $\int M_i M_k ds$ для различного вида эпюр M_i и M_k .

Выражения интегралов $\int M_l M_k ds$
(основание всех площадей — s)

M_l	M_k			
			$\frac{sh_1 h_2}{3}$	$\frac{sh_1}{6} (2c_4 - c_3)$
1	2		$\frac{sh_2}{6} (2h_5 + h_6)$	$\frac{s}{6} h_2 (-2c_3 + c_4)$
3	4		$\frac{s}{6} [2(h_3 h_5 + h_4 h_6) + h_3 h_4 + h_4 h_5]$	$\frac{s}{6} [2(-h_3 c_3 + h_4 c_4) + h_3 c_4 - h_4 c_3]$
4	1		$\frac{s}{6} [2(-c_1 h_5 + c_2 h_6) - c_1 h_4 + c_2 h_6]$	$\frac{s}{6} [2(c_1 c_3 + c_2 c_4) - c_2 c_3 - c_1 c_4]$

5	<p>Квадр. парабола</p> 	$\frac{sf_1 h_2}{12}$	$\frac{sf_1}{12} (3h_6 + h_6)$	$\frac{sf_1}{12} (-3c_3 + c_4)$
6	<p>Квадр. парабола</p> 	$\frac{sf_2 h_2}{4}$	$\frac{sf_2}{12} (3h_6 + h_6)$	$\frac{sf_2}{12} (3c_4 - c_3)$
7	<p>Квадр. парабола</p> 	$\frac{sf h_2}{3}$	$\frac{sf}{3} (h_6 + h_6)$	$\frac{sf}{3} (-c_3 + c_4)$
8	<p>Квадр. парабола</p> 	$\frac{s}{6} h_2 (2h' + \lambda)$	$\frac{s}{6} (h_6 k + 4eh' + h_6 \lambda)$	$\frac{s}{6} (-c_3 k + 4e_0 h' + c_4 \lambda)$

4. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пример 1. Найти горизонтальное перемещение точки D и угол поворота сечения D рамы, изображенной на рис. 166.

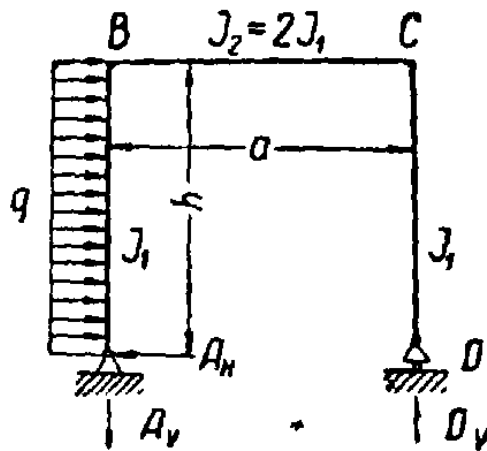


Рис. 166. К примеру 1.

Решение. Определяем опорные реакции рамы:

$$A_H = qh; \quad A_V = \frac{qh^2}{2a}; \quad D_V = \frac{qh^2}{2a}.$$

Строим эпюры моментов от заданной нагрузки (рис. 167).

Для определения горизонтального перемещения прикладываем в точке D горизонтальную единичную силу и строим единичную эпюру моментов (рис. 167).

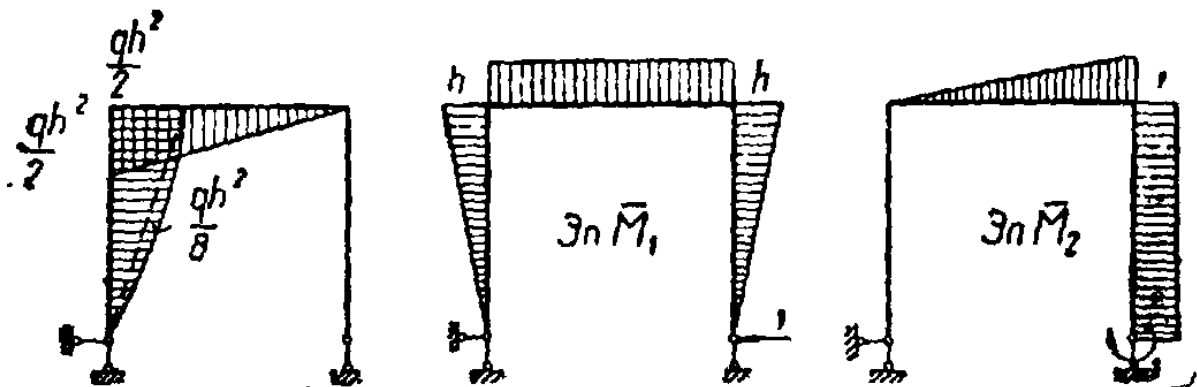


Рис. 167. Грузовая и единичные эпюры моментов.

Перемножая по правилу Верещагина грузовую и единичную эпюры и учитывая различные значения моментов инерции поперечных сечений элементов рамы, находим искомое перемещение:

$$\Delta_{1q} = \sum_0^s \int \frac{\overline{M}M_p ds}{EJ} = - \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{1}{2} \frac{qh^2}{2} h \frac{2}{3} h + \frac{2}{3} \frac{qh^2}{8} h \frac{h}{2} \right] -$$

$$- \frac{1}{EJ_2} \frac{1}{2} \frac{qh^2}{2} ah = - \frac{1}{EJ_1} \left(\frac{qh^4}{6} + \frac{qh^4}{24} \right) - \frac{qah^3}{8EJ_1};$$

$$\Delta_{1q} = - \frac{qh^3}{24EJ_1} (5h + 3a).$$

Знак минус указывает на то, что перемещение точки D рамы происходит в направлении, противоположном направлению единичной силы.

Для определения угла поворота сечения D прикладываем единичный момент $X_2 = 1$ и строим единичную эпюру моментов \overline{M}_2 (рис. 167).

Перемножая эту эпюру и грузовую по правилу Верещагина, находим угол поворота:

$$\Delta_{2q} = - \frac{1}{EJ_2} \frac{1}{2} \frac{qh^2}{2} a \frac{1}{3} \cdot 1 = - \frac{qah^2}{12EJ_2} = - \frac{qah^2}{24EJ_1}.$$

Пример 2. Определить вертикальное перемещение среднего узла нижнего пояса стальной фермы, изображенной на рис. 168, при условии, что площадь сечения каждого стержня верхнего пояса равна $F_1 = 100 \text{ см}^2$, а всех остальных стержней $F_2 = 50 \text{ см}^2$. Величина сил $P = 60 \text{ т}$. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

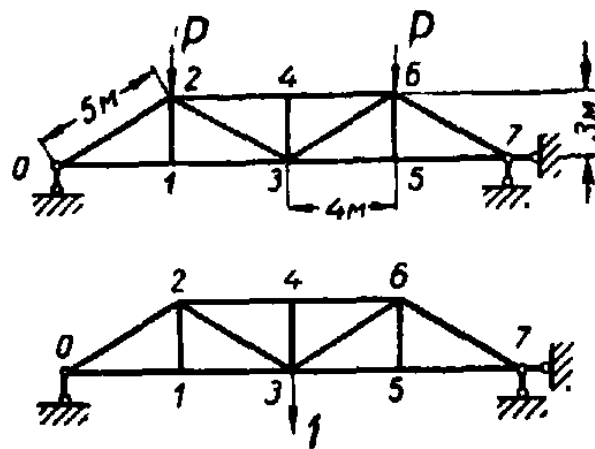


Рис. 168. К примеру 2.

Решение. Перемещение узла фермы определяем по формуле:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\overline{N}N_p l}{EF},$$

где: \overline{N} — усилия в стержнях от единичной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса;

N_p — усилия в стержнях от заданной нагрузки.

Найденные усилия \overline{N} и N_p сведены в следующую таблицу:

Таблица к примеру 2

Наименование стержней	Длина стержня l в см	Площадь сечения F в см ²	\bar{N} в т	N_p в т	$\bar{N}N_p \frac{l}{F}$
0—2	500	100	$-\frac{5}{6}$	-100	$+\frac{1250}{3}$
6—7	500	100	$-\frac{5}{6}$	-100	$+\frac{1250}{3}$
2—4	400	100	$-\frac{4}{3}$	-80	$+\frac{1280}{3}$
4—6	400	100	$-\frac{4}{3}$	-80	$+\frac{1280}{3}$
0—1	400	50	$+\frac{2}{3}$	+80	$+\frac{1280}{3}$
5—7	400	50	$+\frac{2}{3}$	+80	$+\frac{1280}{3}$
1—3	400	50	$+\frac{2}{3}$	+80	$+\frac{1280}{3}$
3—5	400	50	$+\frac{2}{3}$	+80	$+\frac{1280}{3}$
1—2	300	50	0	0	0
5—6	300	50	0	0	0
3—4	300	50	0	0	0
2—3	500	50	$+\frac{5}{6}$	0	0
3—6	500	50	$+\frac{5}{6}$	0	0

$$\Sigma = \frac{10180}{3} = 3393$$

Вертикальное перемещение узла «3» фермы:

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{\bar{N} N_p l}{EF} = \frac{3393}{E} = \frac{3393}{2 \cdot 10^8} = 1,7 \text{ см.}$$

Пример 3. Определить полное перемещение точки *A* кривого стержня, очерченного по дуге круга и несущего радиальную сплошную нагрузку (рис. 169).

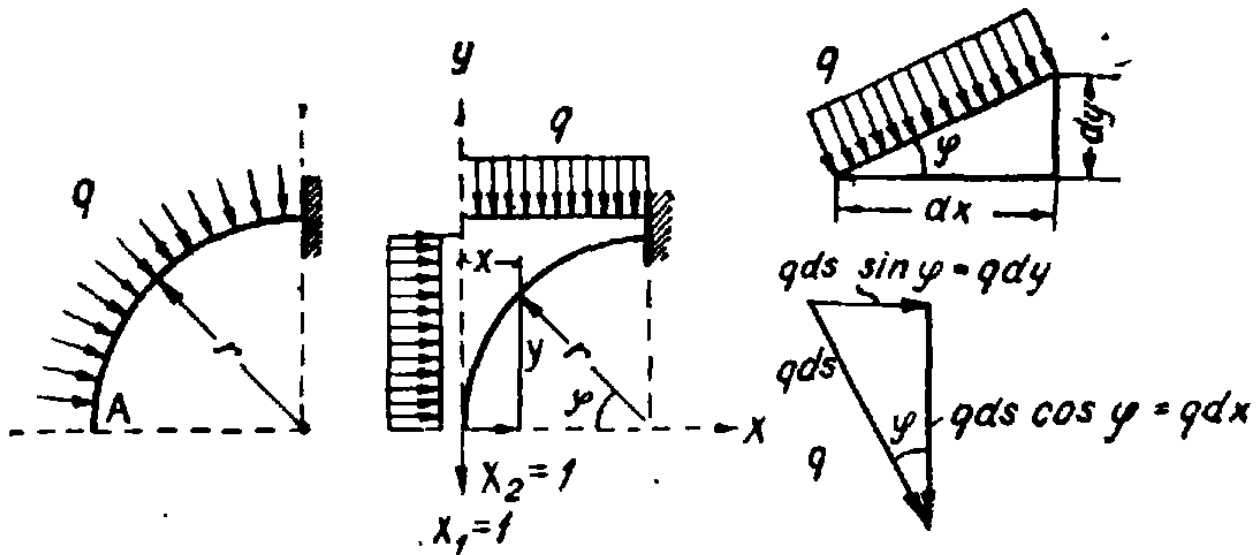


Рис. 169. К примеру 3.

Решение. Радиальную нагрузку можно разложить на две — вертикальную и горизонтальную, имеющие интенсивность q .

Для определения вертикальной и горизонтальной составляющих перемещения в точке *A* следует приложить единичные силы — вертикальную $X_1 = 1$ и горизонтальную $X_2 = 1$.

Изгибающие моменты в сечении стержня:

а) от заданной нагрузки:

$$M_p = \frac{qx^2}{2} + \frac{qy^2}{2} = \frac{q}{2} (x^2 + y^2) = \frac{qr^2}{2} [(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi] = \\ = qr^2 (1 - \cos \varphi);$$

б) от вертикальной единичной силы:

$$\bar{M}_1 = 1 \cdot x = r (1 - \cos \varphi);$$

в) от горизонтальной единичной силы:

$$\bar{M}_2 = 1 \cdot y = r \sin \varphi.$$

Вертикальная составляющая перемещения:

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \int_0^s \bar{M}_1 M_p ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} qr^4 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{qr^4}{EJ} \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right).$$

Горизонтальная составляющая перемещения:

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ} \int_0^s \bar{M}_2 M_p ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} qr^4 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{qr^4}{2EJ}$$

Полное перемещение:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_{1p}^2 + \Delta_{2p}^2} = \frac{qr^4}{EJ} \sqrt{\left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right)^2 + \frac{1}{4}} = 0,592 \frac{qr^4}{EJ}.$$

Пример 4. Определить вертикальное перемещение свободного конца коленчатого стержня круглого сечения, несущего сплошную нагрузку, перпендикулярную плоскости стержня (рис. 170).

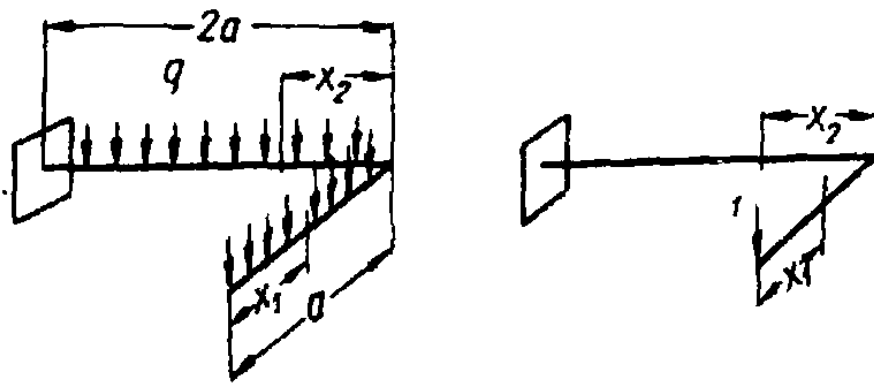
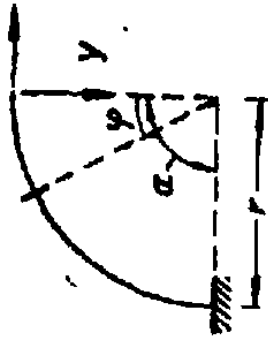


Рис. 170. К примеру 4.

Решение. Поскольку стержень подвергается изгибу и кручению, постольку перемещение определяется по формуле:

$$\Delta_{1p} = \sum \int_0^s \frac{\bar{M} M_p ds}{EJ} + \sum \int_0^s \frac{\bar{M}_k M_{kp} ds}{GJ_p}.$$

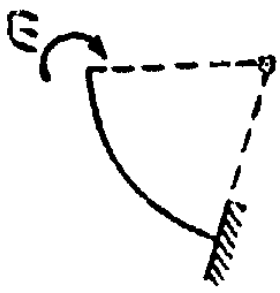
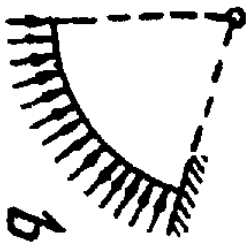

X Усилия и перемещения консольного кругового стержня

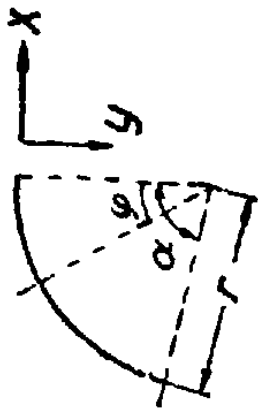


M, N, Q — изгибающий момент, продольная сила и поперечная сила в произвольном сечении

$\Delta_8, \Delta_2, \Delta_\theta$ — вертикальное и горизонтальное перемещения и угол поворота

№№ схем	Схемы загрузки	M	N	Q	Δ_8	Δ_2	Δ_θ
1		$-Pr \sin \varphi$	$-P \sin \varphi$	$P \cos \varphi$	$\frac{Pr^3}{EJ} \left(\frac{a}{2} - \frac{\sin 2a}{4} \right)$	$\frac{Pr^3}{EJ} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$\frac{Pr^2}{EJ} (1 - \cos \alpha)$
2		$-Pr(1 - \cos \varphi)$	$P \cos \varphi$	$P \sin \varphi$	$\frac{Pr^3}{EJ} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$\frac{Pr^3}{EJ} \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{Pr^2}{EJ} (\alpha - \sin \alpha)$

№№ схем	Схемы загрузки	M	N	Q	Δ_8	Δ_2	$\Delta\theta$
3		-m	0	0	$\frac{mr^2}{EJ}(1 - \cos \alpha)$	$\frac{mr^2}{EJ}(\alpha - \sin \alpha)$	$\frac{mr}{EJ}\alpha$
4		$-\frac{qr^2}{2}(1 - \cos \varphi)$	$-\frac{qr}{2}(1 - \cos \varphi)$	$qr \sin \varphi$	$\frac{qr^4}{EJ} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2}$	$\frac{qr^4}{EJ} \left(\frac{3\alpha}{2} - 2\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$	$\frac{qr^3}{EJ}(\alpha - \sin \alpha)$
5		$-\frac{pr^2}{2}(\varphi - \sin \varphi)$	$pr \sin \varphi$	$pr(1 - \cos \varphi)$	$\frac{pr^4}{EJ} \left[\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} - \alpha \cos \alpha \right]$	$\frac{pr^4}{EJ} \left[\frac{\alpha^2}{2} - \alpha \sin \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right]$	$\frac{pr^3}{EJ} \left[\frac{\alpha^2}{2} + \cos \alpha - 1 \right]$

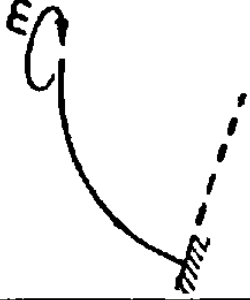
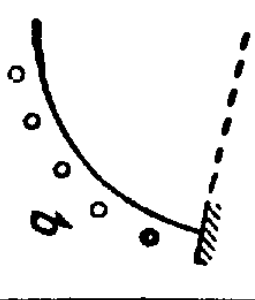


Усилия и перемещения консольного кругового стержня под нагрузкой, перпендикулярной к его плоскости

Отношение жесткостей изгиба и кручения:

$$\lambda = \frac{EJ}{GJ_k}; \quad GJ_k \text{ — жесткость при кручении}$$

№№ схем	Схемы загрузки	Момент изгиба M перпендикулярно плоскости XU	Крутящий момент M_k	Перемещение, перпендикулярное к плоскости XU	Угол поворота вокруг осн X	Угол поворота вокруг осн Y
1		$Pr \sin \varphi$	$Pr(1 - \cos \varphi)$	$Pr^3 \left(\frac{1 + 3\lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha - 2\lambda \sin \alpha \right)$	$\frac{Pr^2}{EJ} \left[\frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\lambda + 1}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right]$	$\frac{Pr^2}{EJ} \left[\frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha + \lambda(1 - \cos \alpha) \right]$
2		$m \sin \varphi$	$-m \cos \varphi$	$\frac{mr^3}{EJ} \left[\frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\lambda + 1}{2} \alpha - \lambda \sin \alpha \right]$	$\frac{mr}{EJ} \left(\frac{1 + \lambda}{2} \alpha + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha \right)$	$\frac{mr}{EJ} \frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha$

№№ схем	Схемы загрузки	Момент изгиба M перпендикулярно плоскости XU	Крутящий момент M_k	Перемещение, перпендикулярное к плоскости XU	Угол поворота вокруг оси X	Угол поворота вокруг оси Y
3		$m \cos \varphi$	$m \sin \varphi$	$\frac{mr^2}{EJ} \left[\frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha + \lambda (1 - \cos \alpha) \right]$	$\frac{mr}{EJ} \frac{\lambda - 1}{2} \sin^2 \alpha$	$\frac{m}{EJ} \left(\frac{1 + \lambda}{2} \alpha - \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha \right)$
4		$qr^2 (1 - \cos \varphi)$	$qr^2 (\varphi - \sin \varphi)$	$\frac{qr^2}{EJ} [(1 - \cos \alpha)^2 + \lambda (1 - \sin \alpha)^2]$	$\frac{qr^3}{EJ} [(\lambda + 1)(1 - \cos \alpha) - \frac{\lambda - 1}{4} (1 - \cos 2\alpha) - \lambda \alpha \sin \alpha]$	$\frac{qr^3}{EJ} \left[(\lambda + 1) \left(\sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\alpha - \lambda \alpha \cos \alpha \right]$

Изгибающий и крутящий моменты в сечениях стержня от заданной нагрузки и от единичной силы, приложенной по направлению перемещения:
а) на 1-м участке:

$$M_1 = -\frac{qx_1^2}{2}, \quad \bar{M}_1 = -1 \cdot x_1;$$

$$M_{K_1} = 0, \quad \bar{M}_{K_1} = 0;$$

б) на 2-м участке:

$$M_2 = -qax_2 - \frac{qx_2^2}{2}, \quad \bar{M}_2 = -1 \cdot x_2;$$

$$M_{K_2} = \frac{qa^2}{2}, \quad \bar{M}_{K_2} = 1 \cdot a.$$

Вертикальное перемещение свободного конца стержня:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \int_0^a \frac{qx^3 dx}{2EJ} + \int_0^{2a} \frac{1}{EJ} \left(qax^2 + \frac{qx^3}{2} \right) dx + \int_0^{2a} \frac{qa^3 dx}{2GJ_p} = \\ &= \frac{qa^4}{8EJ} + \frac{8qa^4}{3EJ} + \frac{2qa^4}{EJ} + \frac{qa^4}{GJ_p} = \frac{115qa^4}{24EJ} + \frac{qa^4}{GJ_p} = \\ &= \frac{115qa^4 + 30qa^4}{24EJ} = \frac{145}{24} \frac{qa^4}{EJ}, \end{aligned}$$

где $J_p = 2J$; $G = 04E$.

Глава XVI. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

1. СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА

Статически неопределимой системой называется система, определение усилий в которой невозможно при помощи одних лишь уравнений статики.

Разность между числом неизвестных усилий в системе и числом независимых уравнений статики, которые можно составить при расчете этой системы, определяет степень ее статической неопределимости.

Степень статической неопределимости равна числу лишних связей в системе, т. е. таких связей, удаление которых превращает заданную статически неопределимую систему в статически определимую, не нарушая ее геометрической неизменяемости.

Реакции или усилия, возникающие в лишних связях, представляют собою лишние неизвестные.

Число лишних связей (лишних неизвестных) определяется по формуле:

$$L = C_o + C_v - 3D, \quad (1)$$

где: L — число лишних связей;

C_o — число опорных связей;

C_v — число внутренних связей;

D — число дисков (неизменяемых звеньев, стержней, образующих систему).

При подсчете числа опорных связей (C_o) необходимо иметь в виду, что:

1) шарнирно подвижная опора имеет одну связь;

2) шарнирно неподвижная опора имеет две связи;

3) защемление (заделка) имеет три связи.

При определении числа внутренних связей (C_v) следует учитывать, что:

1) шарнирное соединение двух стержней (дисков) эквивалентно двум связям, шарнирное соединение (при общем цилиндрическом шарнире) трех стержней — четырьмя связям, шарнирное соединение четырех стержней — шестью связями и т. д.;

2) жесткое соединение двух стержней (дисков) эквивалентно трем связям, жесткое соединение в общий узел трех стержней — шестью связями, жесткое соединение четырех стержней — девятью связями и т. д.

Например, для конструкции, изображенной на рис. 171, число опорных связей $C_o = 3 + 2 = 5$; число внутренних связей $C_v = 2 + 6 \cdot 3 = 20$; число стержней $D = 7$; число лишних связей $L = 5 + 20 - 3 \cdot 7 = 4$.

Всякая статически неопределимая система может быть сведена к геометрически неизменяемой статически определимой

системе путем перерезывания или отбрасывания лишних связей и замены их усилиями.

При этом связь, препятствующая линейному перемещению, заменяется силой, приложенной по направлению этого перемещения.

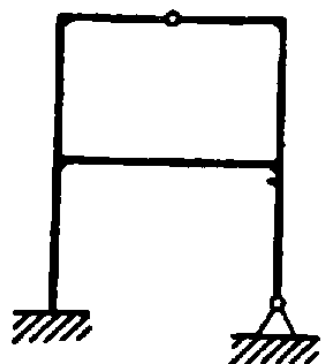


Рис. 171.

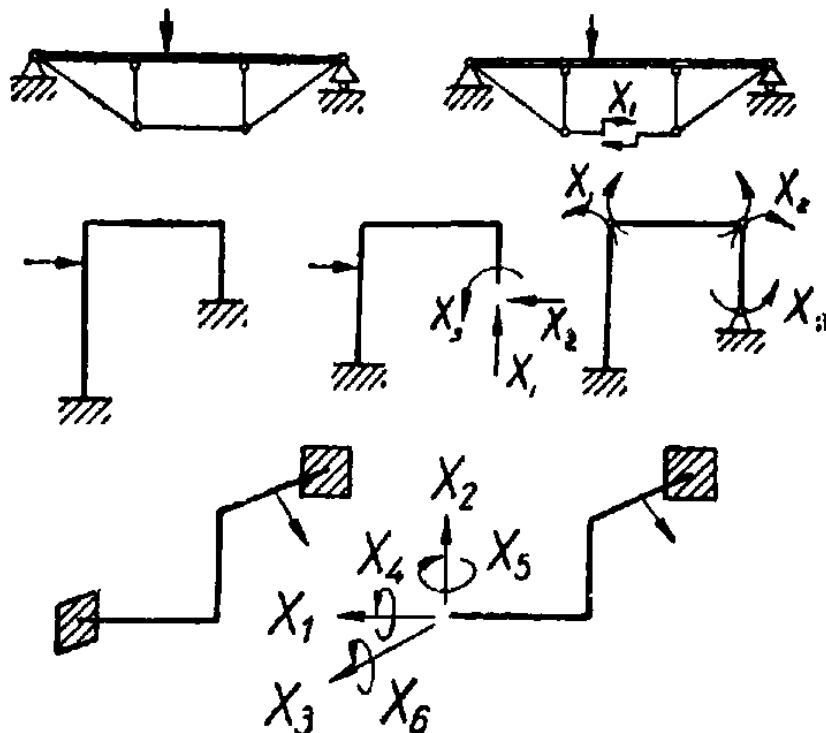


Рис. 172. Варианты основной системы.

Связь, препятствующая повороту сечения, заменяется моментом, приложенным по направлению возможного поворота.

Полученная таким образом статически определимая система называется основной системой.

Для каждой статически неопределимой системы можно получить несколько вариантов основной системы.

На рис. 172 показаны примеры выбора основной системы и назначения лишних неизвестных.

Выбирая основную систему, следует стремиться выполнить следующие условия:

1. Основная система должна быть возможно более простой и удобной для расчета.
2. Протяженность единичных и грузовой эпюр моментов должна быть наименьшей.
3. Желательно, чтобы возможно большее число эпюр момен-

основной системы по направлению неизвестной силы X_2 , третье — по направлению силы X_3 и т. д.

Коэффициенты уравнений представляют собой перемещения в основной системе от действия единичных сил, приложенных вместо лишних неизвестных.

Например, δ_{ik} — перемещение по направлению X_i , вызванное силой $X_k = 1$.

Свободные члены уравнений представляют собой перемещения в основной системе от заданной нагрузки.

Например, Δ_{ip} — перемещение по направлению силы X_i , вызванное нагрузкой P .

Для вычисления коэффициентов и свободных членов системы уравнений строятся единичные эпюры моментов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ в отдельности от сил $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ и, кроме того, эпюра моментов M_p от заданной нагрузки основной системы.

При учете только деформации изгиба (плоские рамы) коэффициенты определяются по сокращенной формуле перемещений.

Главные коэффициенты, имеющие одинаковые индексы:

$$\delta_{ii} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ}. \quad (3)$$

Побочные коэффициенты (с неодинаковыми индексами):

$$\delta_{ik} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}. \quad (4)$$

Побочные коэффициенты с переставленными индексами равны друг другу: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Свободные члены (грузовые коэффициенты):

$$\Delta_{ip} = \sum_s \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ}. \quad (5)$$

Интегралы перемещений, входящие в правые части приведенных формул, в случае конструкций, состоящих из прямолинейных стержней, могут быть вычислены путем перемножения соответствующих эпюр по правилу Верещагина.

При наличии только продольных усилий (стержневые фермы с шарнирными соединениями в узлах) коэффициенты и свободные члены определяются по формулам:

$$\delta_{ii} = \sum_1^n \frac{\bar{N}_i^2 l}{EF}; \quad \delta_{ik} = \sum_1^n \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k l}{EF};$$

$$\Delta_{ip} = \sum_1^n \frac{\bar{N}_i \bar{N}_p l}{EF}.$$

В случае необходимости учесть деформации от всех силовых факторов: продольных сил, поперечных сил, моментов коэффициенты и свободные члены уравнений определяются по универсальной формуле перемещений (глава XV).

Расчет на действие температуры

При расчете статически неопределимой системы на действие температуры (при отсутствии внешней нагрузки) канонические уравнения получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1t} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2t} &= 0; \\ \dots &\dots \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{nt} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где: $\delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{nn}$ имеют те же значения, что и при расчете на действие внешней нагрузки;

$\Delta_{1t}, \Delta_{2t}, \dots, \Delta_{nt}$ представляют собой температурные перемещения в основной системе по направлению лишних неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n .

Эти перемещения определяются по формуле:

или

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_s \bar{N}_m ds + \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_s \bar{M}_m ds$$

$$\Delta_{mt} = \frac{\alpha (t_1 + t_2)}{2} \Omega_{\bar{N}} + \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{h} \Omega_{\bar{M}}.$$

где $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ — значения изгибающего момента в данном сечении от действия единичных сил $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$.

Полная эпюра моментов может быть получена путем суммирования единичных эпюр, умноженных на величины неизвестных, и грузовой эпюры.

Суммирование эпюр наиболее удобно производить следующим образом:

Узловые ординаты единичных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ умножаются на величины соответствующих неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n .

Полученные значения, а также и узловые ординаты грузовой эпюры M_p суммируются с учетом знаков.

Суммарные узловые моменты откладываются со стороны растянутого волокна по концам каждого стержня. При соединении прямыми вершин этих ординат получается линия узловых моментов (ab, cd, ef на рис. 173).

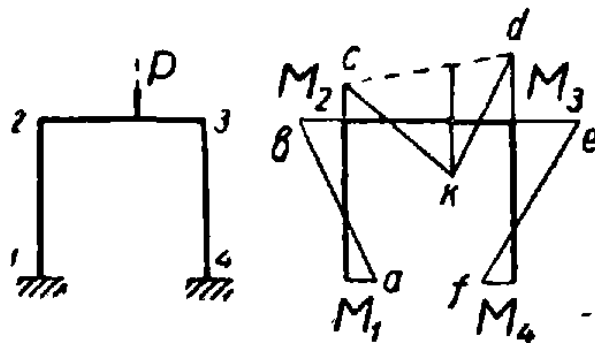


Рис. 173. Построение эпюры моментов.

Для стержневой конструкции, не несущих внешней нагрузки, эпюра узловых моментов представляет собой окончательную (полную) эпюру моментов.

Если же стержень несет нагрузку, то следует построить эпюру моментов от этой нагрузки, рассматривая стержень как балку, свободно лежащую на двух опорах, и отложить ординаты этой эпюры в ту или иную сторону от линии узловых моментов (линия ckd на рис. 173).

Окончательная эпюра моментов может быть получена и путем непосредственного построения. В этом случае к основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия и заданная нагрузка. Затем от их совместного воздействия на основную статически определимую систему строится эпюра изгибающих моментов, которая и будет окончательной эпюрой.

Для контроля правильности построения могут быть использованы условия равновесия. На основании этих условий алгебраическая сумма моментов, действующих в каждом узле конструкции, должна быть равна нулю.

Кроме того, проверка может быть произведена, исходя из условия, что перемещения заданной статически неопределимой конструкции по направлению каждого лишнего неизвестного равны нулю.

Если лишнее неизвестное представляет собою опорную реакцию, то равно нулю перемещение этой опоры по направлению соответствующей реакции. Если лишнее неизвестное — усилие в разрезе конструкции, то равно нулю относительное перемещение сечений в месте разреза.

Выражая перемещение по направлению лишнего неизвестного $X_i = 1$ обычной формулой, получим:

$$\sum \int_s \frac{M_i M ds}{EJ} = 0, \quad (13)$$

где M, M_i — моменты в сечениях заданной (статически неопределимой) системы.

Таким образом, при перемножении по правилу Верещагина полной (окончательной) эпюры моментов на любую единичную эпюру должен получиться нуль.

Эта проверка является проверкой правильности всего предыдущего расчета.

Построение эпюры Q

Поперечная сила в каком-либо сечении стержня конструкции равна сумме проекций на ось, перпендикулярную оси стержня, всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.

Знак поперечной силы удобнее всего устанавливать в зависимости от очертания эпюры моментов, руководствуясь следующим правилом:

При эпюре M , построенной со стороны растянутых волокон, поперечная сила в данном сечении положительна, если для совмещения оси стержня с касательной к эпюре моментов в этом сечении приходится ось стержня вращать по часовой стрелке (рис. 174).

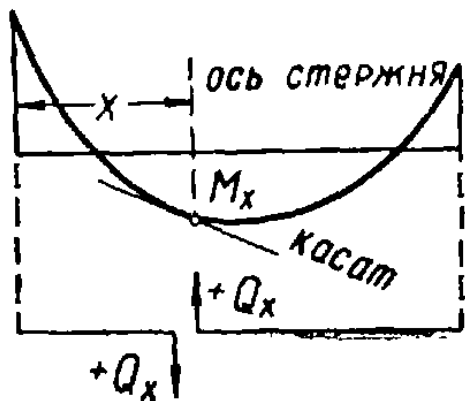


Рис. 174. Определение знака поперечной силы.

При этом вращение оси стержня следует производить так, чтобы угол поворота не превосходил 90° .

Для определения направления Q необходимо провести через данное сечение разрез и к каждой части стержня в разрезе приложить поперечную силу Q_x . Если Q_x положительна, то она должна вращать каждую часть стержня относительно его другого конца по часовой стрелке.

Для построения эпюры Q следует составить выражения поперечной силы на каждом участке стержня, вычислить значения Q в характерных местах и отложить соответствующие ординаты эпюры с учетом их знаков, перпендикулярно оси стержня.

В случае построения эпюры Q для рамной системы можно положительные ординаты откладывать снаружи контура, отрицательные — внутри.

Построение эпюры N

Продольная сила в каком-либо сечении стержня системы равна сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

Продольную силу можно считать положительной, если она направлена от сечения, т. е. производит растяжение стержня. Отрицательная продольная сила направлена к сечению и вызывает сжатие.

При наличии построенной эпюры поперечных сил продольные силы легко получаются из условий равновесия узлов конструкции.

К вырезанному узлу прикладываются уже известные поперечные силы и неизвестные продольные. Проектируя все силы узла на взаимно перпендикулярные оси, определяют величину продольных сил.

При построении эпюры ординаты продольной силы обычно откладываются симметрично по обе стороны оси стержня с указанием знака.

Для проверки правильности построения эпюр Q и N могут быть использованы условия равновесия всей системы или ее отдельных частей.

Например, сумма вертикальных опорных реакций должна уравновесить вертикальную проекцию внешней нагрузки; сумма горизонтальных реакций должна уравновесить горизонтальную проекцию внешней нагрузки; сумма моментов всех реакций должна уравновесить момент внешней нагрузки относительно любой точки и т. д.

Проверка эпюры Q производится также путем сопоставления ее с эпюрой M .

Например, в сечении, где касательная к эпюре M параллельна оси стержня, поперечная сила Q должна равняться нулю; в тех сечениях стержня, где касательная к эпюре M наклонена к его оси в одну и ту же сторону, поперечная сила должна иметь одинаковые знаки; из двух сечений стержня то, в котором касательная к эпюре M образует с осью стержня больший угол, имеет и большую поперечную силу и т. д.

Эпюра продольных сил может быть проверена путем сопоставления ее с эпюрой поперечных сил.

4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Последовательность расчета статически неопределимой системы методом сил следующая:

1. Выбирается основная статически определимая система путем отбрасывания из заданной системы лишних связей.

2. Действие отброшенных связей возмещается приложением к основной системе неизвестных усилий X_1, X_2, \dots, X_n .

3. Составляются канонические уравнения.

4. Для вычисления коэффициентов канонических уравнений основная система поочередно загружается единичными усилиями $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$; от каждого из них отдельно строятся единичные эпюры изгибающих моментов. Кроме того, строится грузовая эпюра моментов. Если влиянием продольных и поперечных сил пренебрегать нельзя, то аналогично строятся эпюры N и Q .

5. Перемножением единичных эпюр друг с другом и с грузовой эпюрой вычисляются коэффициенты и грузовые члены системы канонических уравнений.

6. Решается система канонических уравнений и определяются значения лишних неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n .

7. Строятся окончательные (полные) эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил для заданной статически неопределимой системы.

Пример 1. Рассчитать плоскую раму, изображенную на рис. 175. Момент инерции сечения стоек $J_1 = J$, ригеля $J_2 = 2J$.

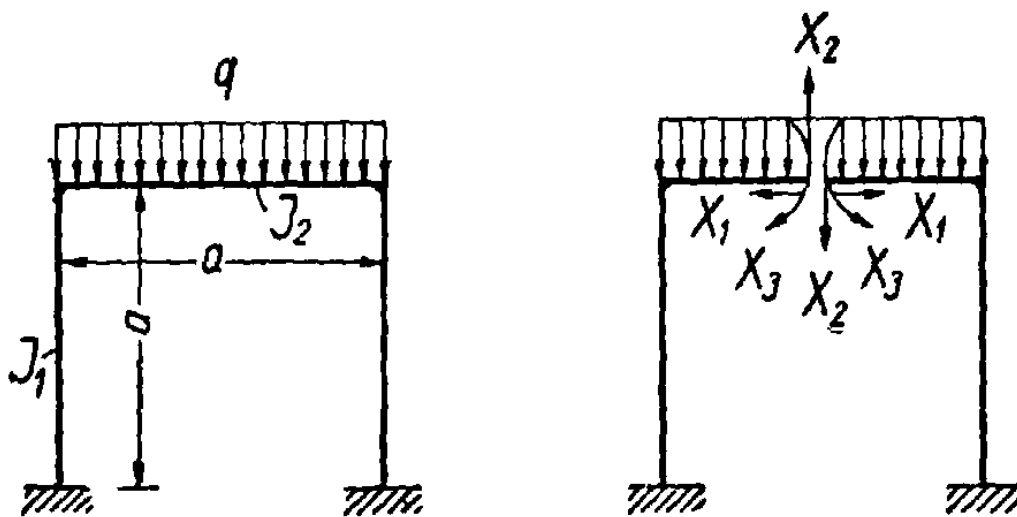


Рис. 175. К примеру 1.

Решение. Выбираем основную систему, разрезая ригель посередине и прикладывая в разрезе продольные силы X_1 , поперечные силы X_2 и изгибающие моменты X_3 .

Составляем систему канонических уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Строим для выбранной основной системы единичные и грузовую эпюры моментов (рис. 176).

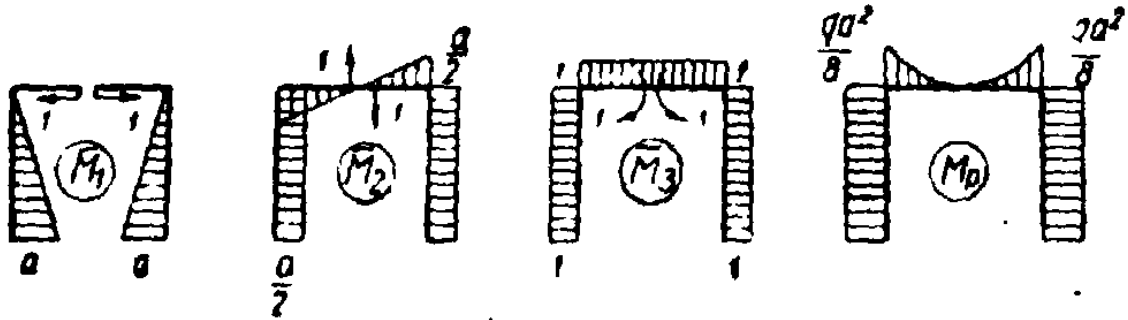


Рис. 176. Единичные и грузовая эпюры моментов.

Вычисляем коэффициенты и свободные члены уравнений, перемножая соответствующие эпюры по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \frac{a^2}{2} \frac{2}{3} a \cdot 2 = \frac{2a^3}{3EJ}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \frac{a^2}{2} \frac{a}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{a}{2} \frac{2}{3} \frac{a}{2} \cdot 2 = \frac{13a^3}{24EJ}; \\ \delta_{33} &= \frac{1}{EJ} 1 a \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 1 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{5a}{2EJ}; \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0; \\ \delta_{13} &= \delta_{31} = -\frac{1}{EJ} \frac{a^2}{2} \cdot 1 \cdot 2 = -\frac{a^2}{EJ}; \\ \Delta_{1p} &= -\frac{1}{EJ} \frac{a^2}{2} \frac{qa^2}{8} \cdot 2 = -\frac{qa^4}{8EJ}; \\ \Delta_{2p} &= 0; \\ \Delta_{3p} &= \frac{1}{EJ} \frac{qa^2}{8} a \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \frac{1}{3} \frac{qa^2}{8} \frac{a}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{13qa^3}{48EJ}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные величины коэффициентов в канонические уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_2 \delta_{22} &= 0; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Откуда, после соответствующих сокращений,

$$\frac{2a}{3} X_1 - X_3 - \frac{qa^2}{8} = 0;$$

$$- aX_1 + \frac{5}{2} X_3 + \frac{13qa^2}{48} = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$X_1 = \frac{qa}{16}; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = -\frac{qa^2}{12}.$$

Вычисляем узловые моменты заданной статически неопределимой рамы, умножая ординаты единичных эпюр на значения лишних неизвестных и суммируя соответствующие величины с учетом ординат грузовой эпюры:

$$M_1 = M_4 = aX_1 + \frac{a}{2} X_2 - 1 \cdot X_3 - \frac{qa^2}{8} = \frac{qa^2}{16} + \frac{qa^2}{12} - \frac{qa^2}{8} = \frac{qa^2}{48};$$

$$M_2 = M_3 = \frac{a}{2} X_2 - \frac{qa^2}{8} = \frac{qa^2}{12} - \frac{qa^2}{8} = -\frac{qa^2}{24}.$$

Отложив ординаты, равные узловым моментам, и соединив вершины их прямыми, получим линию узловых моментов. В пределах стоек эта линия соответствует полной эпюре моментов. В пределах ригеля полная эпюра моментов получится, если от линии узловых моментов отложить ординаты грузовой эпюры, полученной в предположении, что ригель является балкой на двух опорах.

Момент посредине ригеля будет равен:

$$M = -\frac{qa^2}{24} + \frac{qa^2}{8} = \frac{qa^2}{12}.$$

Полная эпюра моментов изображена на рис. 177.

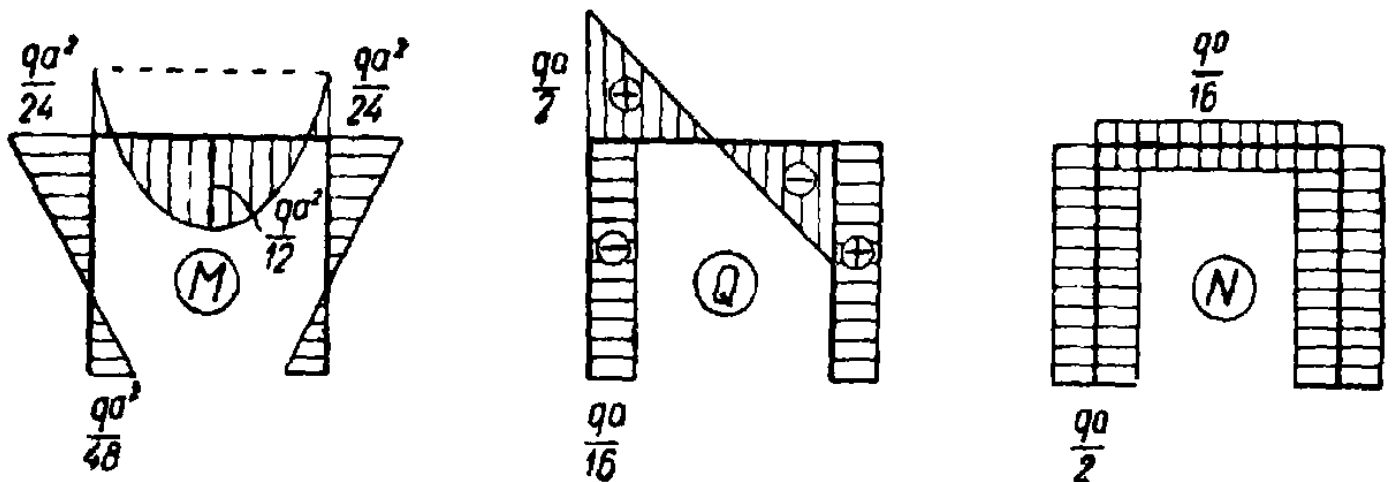


Рис. 177. Эпюры моментов, поперечных и продольных сил.

Производим проверку выполненного расчета, умножая полученную полную эпюру моментов на каждую единичную:

$$\Delta_1 = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{1}{2} \frac{qa^2}{24} a \frac{a}{3} + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{48} a \frac{2}{3} a \right) 2 = 0;$$

$$\Delta_2 = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M ds}{EJ} = 0;$$

$$\Delta_3 = \sum \int \frac{\bar{M}_3 M ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} a \frac{qa^2}{96} \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \frac{qa^3}{24} \cdot 1 - \frac{1}{2EJ} \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a \cdot 1 = 0.$$

Убедившись в правильности расчета и построения полной эпюры изгибающих моментов, строим эпюры поперечных и продольных сил (рис. 177).

Пример 2. Определить усилия в стержнях фермы, изображенной на рис. 178. Сечение стержней одинаковое.

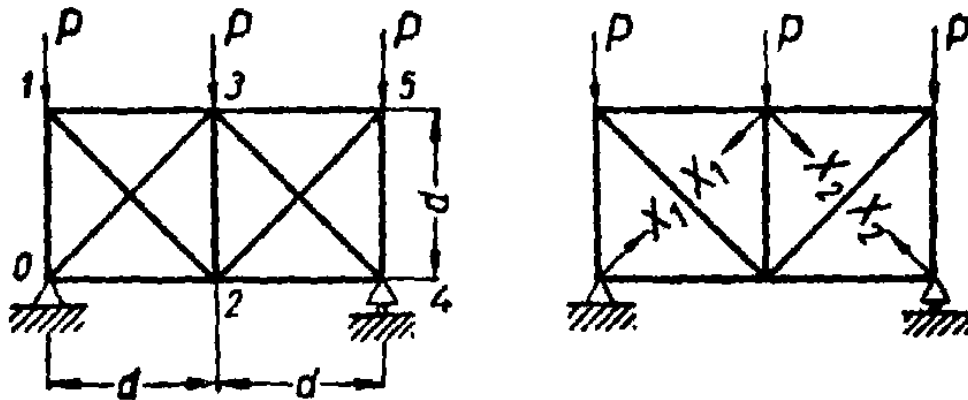


Рис 178. К примеру 2.

Решение. Лишних неизвестных два. Разрезаем обе восходящие к середине диагонали и заменяем их действие обобщенными силами X_1 и X_2 .

Составляем канонические уравнения:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0.$$

Вследствие симметрии конструкции:

$$X_1 = X_2; \quad \delta_{11} = \delta_{22}; \quad \Delta_{1p} = \Delta_{2p}.$$

Система уравнений приводится к одному:

$$X_1 (\delta_{11} + \delta_{12}) + \Delta_{1p} = 0.$$

Выражение в скобках есть перемещение по направлению силы X_1 , вызванное всей группой из четырех сил $X_1 = 1$ и $X_2 = 1$.

Обозначая $\delta'_{11} = \delta_{11} + \delta_{12}$ и $\Delta'_p = \Delta_{1p}$, получим:

$$X_1 \delta'_{11} + \Delta'_{1p} = 0, \quad \text{откуда} \quad X_1 = -\frac{\Delta'_{1p}}{\delta'_{11}}.$$

Коэффициенты уравнений определяются по формулам:

$$\delta'_{11} = \sum_1^n \frac{\bar{N}_1^2 l}{EF}; \quad \Delta'_{1p} = \sum_1^n \frac{\bar{N}_1 N_p l}{EF}.$$

Находим усилия в стержнях основной системы \bar{N}_1 от единичных сил и N_p от заданной нагрузки. Вычисления располагаем в следующей таблице:

Таблица к примеру 2

Наименование стержней	Длины стержней l	\bar{N}_1	N_p	$\bar{N}_1^2 l$	$\bar{N}_1 N_p l$
1—3	d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{1}{2} d$	$\frac{1}{4} Pd\sqrt{2}$
3—5	d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{P}{2}$	$\frac{1}{2} d$	$\frac{1}{4} Pd\sqrt{2}$
0—2	d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2} d$	0
2—4	d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2} d$	0
0—1	d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{2} P$	$\frac{1}{2} d$	$\frac{3}{4} Pd\sqrt{2}$
2—3	d	$-\sqrt{2}$	$-P$	$2d$	$Pd\sqrt{2}$
4—5	d	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{2} P$	$\frac{1}{2} d$	$\frac{3}{4} Pd\sqrt{2}$
1—2	$d\sqrt{2}$	+1	$+\frac{P\sqrt{2}}{2}$	$d\sqrt{2}$	Pd

Наименование стержней	Длины стержней l	\bar{N}_1	N_p	$\bar{N}_1^2 l$	$\bar{N}_1 N_p l$
2—5	$d\sqrt{2}$	+1	$+\frac{P\sqrt{2}}{2}$	$d\sqrt{2}$	Pd
0—3	$d\sqrt{2}$	+1	0	$d\sqrt{2}$	0
3—4	$d\sqrt{2}$	+1	0	$d\sqrt{2}$	0
				$(5 + 4\sqrt{2})d$	$(3\sqrt{2} + 2)Pd$

$$\delta'_{11} = \frac{1}{EF} (5 + 4\sqrt{2}) d; \quad \Delta'_{1p} = \frac{1}{EF} (3\sqrt{2} + 2) Pd.$$

Усилие в диагонали:

$$X_1 = -\frac{\Delta'_{1p}}{\delta'_{11}} = -\frac{3\sqrt{2} + 2}{4\sqrt{2} + 5} P = -(2 - \sqrt{2}) P \approx 0,59P.$$

Усилия в стержнях заданной фермы определяются по формуле:

$$N_i = \bar{N}_i X + N_{ip}.$$

$$N_{13} = N_{35} = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 - \sqrt{2}) P - \frac{P}{2} = (\sqrt{2} - 1,5) P \approx -0,09P;$$

$$N_{02} = N_{24} = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 - \sqrt{2}) P = (\sqrt{2} - 1) P \approx +0,41 P;$$

$$N_{01} = N_{45} = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 - \sqrt{2}) P - \frac{3}{2} P = (\sqrt{2} - 2,5) P \approx -1,09 P;$$

$$N_{23} = \sqrt{2} (2 - \sqrt{2}) P - P = (2\sqrt{2} - 3) P \approx -0,18 P;$$

$$N_{12} = N_{25} = -(2 - \sqrt{2}) P + \frac{P}{2} \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} P \approx +0,11 P;$$

$$N_{03} = N_{34} = -(2 - \sqrt{2}) P \approx -0,59 P.$$

Пример 3. Определить распор двухшарнирной арки, изображенной на рис. 179. Ось арки очерчена по параболе, уравнение которой $y = \frac{4f}{l^2} (l-x)x$; арка пологая $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$, сечение арки постоянно ($EJ = \text{const}$).

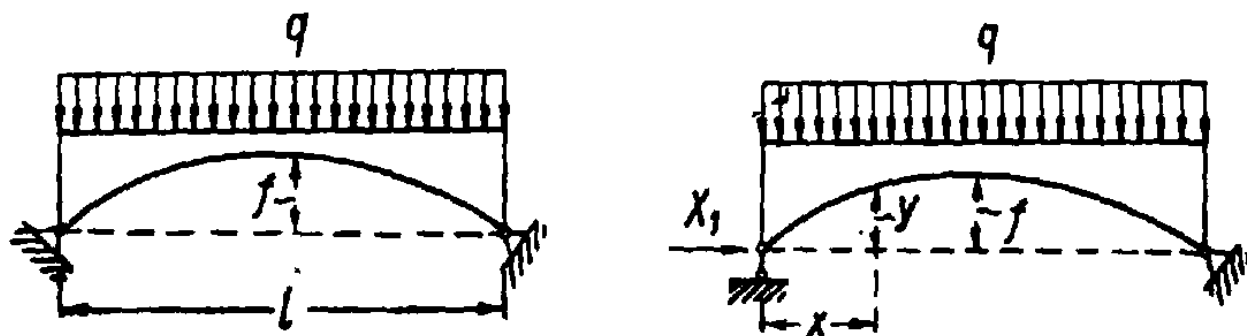


Рис. 179. К примеру 3.

Решение. Примем за лишнее неизвестное горизонтальную составляющую левой опорной реакции.

Каноническое уравнение будет иметь следующий вид:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Вследствие криволинейности стержня способ перемножения эпюр непригоден и коэффициенты уравнения следует определить аналитически:

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\bar{N}_x^2 ds}{EF} + \int_0^s \frac{\bar{M}_x^2 ds}{EJ}.$$

Влиянием поперечной силы пренебрегаем.

Усилия в сечении от действия силы $X_1 = 1$:

$$\bar{N}_x = -1 \cos \varphi_x; \quad \bar{M}_x = -1 \cdot y_x.$$

Подставляя в формулу перемещения, получаем:

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\cos^2 \varphi_x ds}{EF} + \int_0^s \frac{y_x^2 ds}{EJ}.$$

Полагая, вследствие пологости арки, $ds \approx dx$ и $\cos \varphi = 1$, находим:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EF} \int_0^l dx + \frac{16f^2}{l^4 EJ} \int_0^l x^2 (l-x)^2 dx = \frac{l}{EF} + \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{EJ}$$

Свободный член уравнения Δ_{1p} определяем без учета продольной силы, так как величина последней при вертикальной нагрузке незначительна.

Изгибающий момент в сечении от вертикальной нагрузки:

$$M_{xp} = \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2} (l-x).$$

Свободный член уравнения:

$$\Delta_{1p} = \int_0^s \frac{\bar{M}_x M_{xp} ds}{EJ} = - \frac{2qf}{l^2} \int_0^l x^2 (l-x)^2 dx = - \frac{ql^3 f}{15EJ}.$$

Распор арки:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{ql^2}{8f + \frac{15}{f} \frac{J}{F}}.$$

Пример 4. Рассчитать комбинированную систему (шпренгель), изображенную на рис. 180.

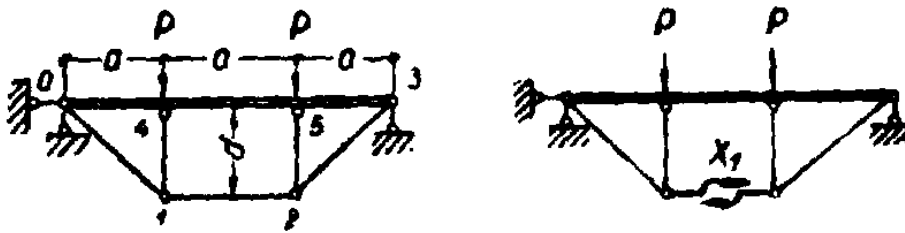


Рис. 180. К примеру 4.

Решение. Конструкция представляет собой сочетание балки, работающей в основном на изгиб, и стержней, работающих на растяжение-сжатие.

Основную систему получим, разрезая стержень 1—2.

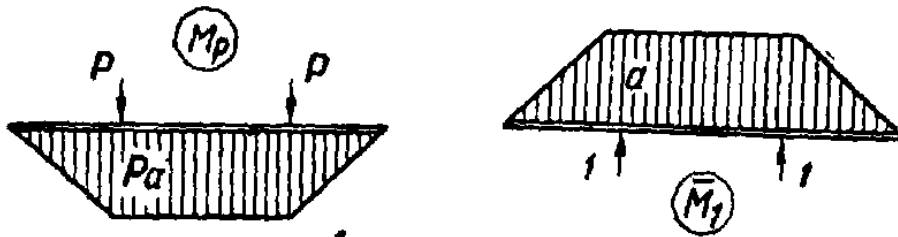


Рис. 181. Эпюры изгибающих моментов.

Каноническое уравнение получает следующий вид:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0.$$

Для подсчета коэффициентов строим эпюры изгибающих моментов \bar{M} и M_p (рис. 181) для основной балки и вычисляем продольные усилия в стержнях дополнительной конструкции. Вычисления сводим в следующую таблицу.

Таблица к примеру 4

Наименование стержней	Длина стержней l	\bar{N}_i	N_p	$\bar{N}_i N_p l$	$\bar{N}_i^2 l$
0—1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$
1—2	a	1	0	0	a
2—3	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$
1—4	a	-1	0	0	a
2—5	a	-1	0	0	a
				0	$a(3 + 4\sqrt{2})$

Значения коэффициентов:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{a^2}{2} \frac{2}{3} a \cdot 2 + a^2 a \right) + \frac{1}{EF} a(3 + 4\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{5a^3}{EJ} + \frac{a}{EF} (3 + 4\sqrt{2});$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{Pa^2}{2} \left(-\frac{2}{3} \right) a \cdot 2 - Pa^2 a \right] = -\frac{5Pa^3}{3EJ}.$$

Подставив значения δ_{11} и Δ_{1p} в уравнение и решив его, получим:

$$X_1 = \frac{P}{3 + \frac{3}{5} \frac{J(3 + 4\sqrt{2})}{Fa^2}}.$$

Определение изгибающих моментов и продольных сил в заданной конструкции производится суммированием грузовых усилий с единичными, увеличенными в X_1 раз.

Например, изгибающий момент в сечении балки под грузом P равен:

$$M = M_p + \bar{M}_1 X_1 = Pa + \bar{N}_{14} a X_1 = (P - X_1) a.$$

Пример 5. Определить напряжения в трубопроводе (рис. 182), возникающие при равномерном нагреве на $t = 200^\circ$. Сечение трубопровода постоянно по его длине: наружный диаметр $d_n = 10$ см, внутренний $d_b = 8$ см; длина $l = 2$ м. Материал — сталь.

Решение. Основную систему получаем, освобождая правый конец трубопровода. При равномерном нагреве вертикальная реакция $X_3 = 0$ и канонические уравнения имеют следующий вид:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1t} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2t} = 0.$$

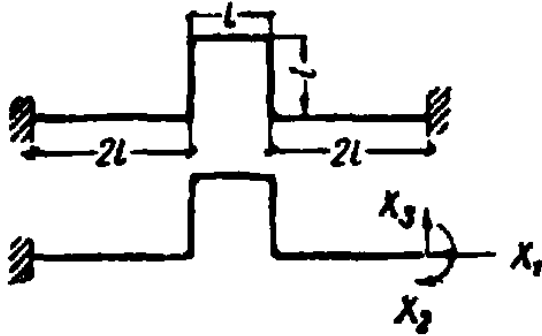


Рис. 182. К примеру 5.

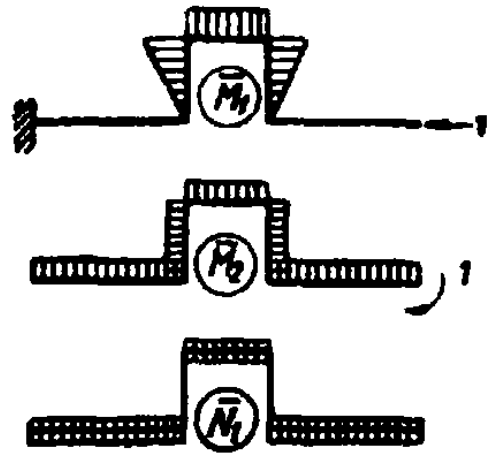


Рис. 183. Эпюры моментов и продольных сил.

Строим единичные эпюры моментов и продольных сил (рис. 183) и вычисляем коэффициенты уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[2 \frac{l^2}{2} \frac{2}{3} l + l^3 l \right] = \frac{5l^3}{3EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} (2 \cdot 2l + 2l + l) = \frac{7l}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \left(2 \frac{l^2}{2} \cdot 1 + l^2 \cdot 1 \right) = \frac{2l^2}{EJ};$$

$$\Delta_{1t} = \frac{\alpha (t_1 + t_2)}{2} \omega_{\bar{N}}; \quad \omega_{\bar{N}} = 2l \cdot 1 + 2l \cdot 1 + l \cdot 1 = 5l;$$

$$\Delta_{1t} = -5\alpha t l;$$

$$\Delta_{2t} = \frac{\alpha (t_1 - t_2)}{h} \omega_{\bar{M}} = 0 \quad \text{при } t_1 = t_2 = t.$$

Подставляя значения коэффициентов в уравнения, после соответствующих сокращений получаем:

$$5l^2 X_1 + 6l X_2 - 15\alpha t EJ = 0;$$

$$2l X_1 + 7X_2 = 0.$$

Решая уравнения, находим:

$$X_1 = \frac{105\alpha tEJ}{23l^2}; \quad X_2 = -\frac{30\alpha tEJ}{23l}.$$

Полная эпюра моментов, построенная по найденным значениям усилий, показана на рис. 184.

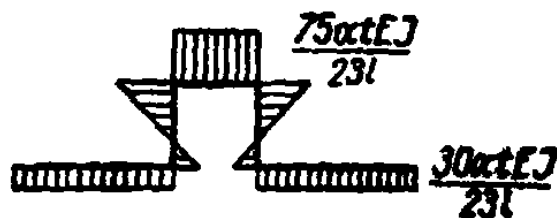


Рис. 184. Полная эпюра моментов.

Площадь сечения трубопровода:

$$F = \frac{\pi}{4} (d_H^2 - d_B^2) = \frac{3,14}{4} (100 - 64) = 28,3 \text{ см}^2.$$

Момент инерции сечения:

$$J = \frac{3,14}{64} (10^4 - 8^4) = 290 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления:

$$W = \frac{290}{3} = 58 \text{ см}^3.$$

Наибольший изгибающий момент:

$$M = \frac{75\alpha tEJ}{23l} = \frac{75 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 290}{23 \cdot 200} = 23\,600 \text{ кгсм.}$$

Продольная сила:

$$N = \frac{105\alpha tEJ}{23l^2} = \frac{105 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 290}{23 \cdot 4 \cdot 10^4} = 166 \text{ кг.}$$

Наибольшее по абсолютной величине напряжение (сжимающее):

$$\sigma = -\frac{N}{F} - \frac{M}{W} = -\frac{166}{23,8} - \frac{23\,600}{58} = -7 - 407 = -414 \text{ кг/см}^2.$$

Пример 6. Определить опорные реакции и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, защемленной обоими концами, при условии, что левая заделка поворачивается на угол θ (рис. 185).

Решение. Основную систему получим, освобождая левый конец балки.

Принимая во внимание, что $X_3 = 0$, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} = 0;$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} = \Theta.$$

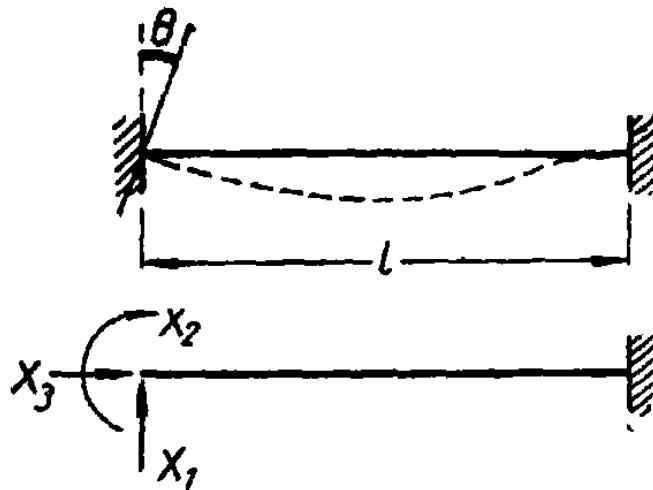


Рис. 185. К примеру 6.

Построим единичные эпюры моментов (рис. 186) и вычислим коэффициенты уравнений, перемножая эти эпюры по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l^2}{2} \cdot 1 = \frac{l^2}{2EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EJ}.$$

После подстановки значений коэффициентов и необходимых преобразований система уравнений получит следующий вид:

$$\frac{l}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = 0;$$

$$\frac{l^2}{2} X_1 + l X_2 = EJ\Theta.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$X_1 = R_A = -\frac{6EJ}{l^2} \Theta; \quad X_2 = M_A = \frac{4EJ}{l} \Theta.$$

Реакции правой опоры определяем из условий равновесия:

$$\Sigma M_B = \frac{4EJ}{l} \theta - \frac{6EJ}{l^2} \theta l + M_B = 0;$$

$$M_B = -\frac{4EJ\theta}{l} + \frac{6EJ\theta}{l} = \frac{2EJ\theta}{l};$$

$$\Sigma Y = -\frac{6EJ}{l^2} \theta + R_B = 0;$$

$$R_B = \frac{6EJ}{l^2} \theta.$$

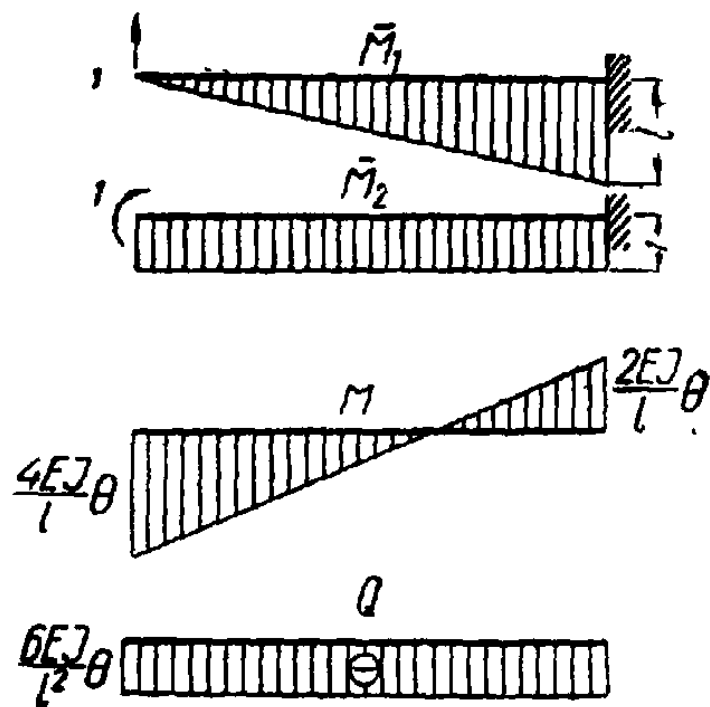
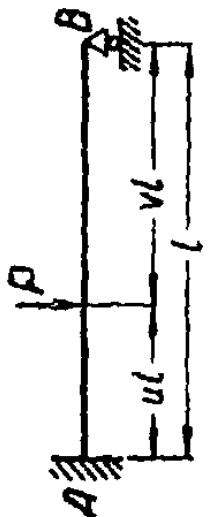
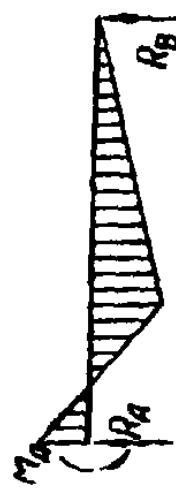
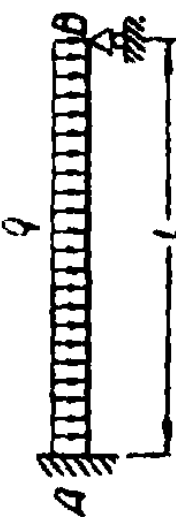
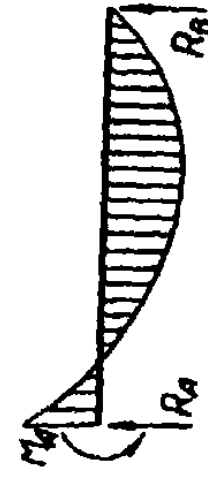

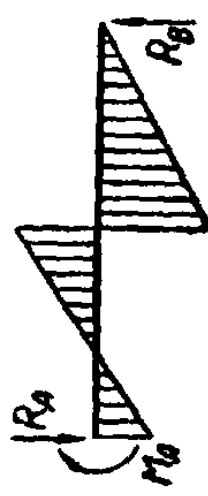
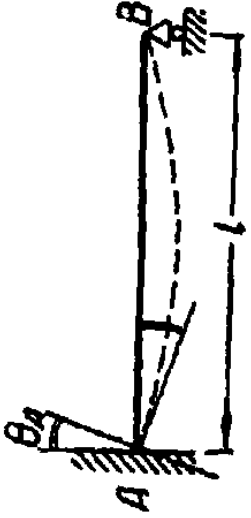
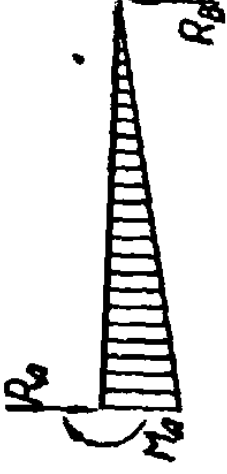
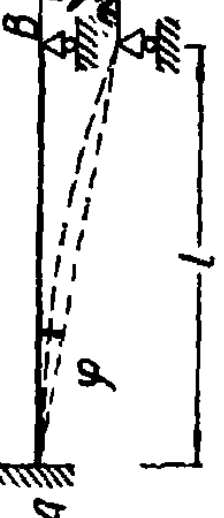
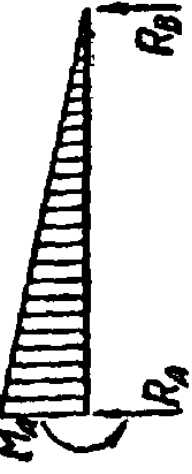
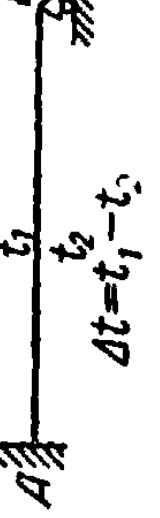
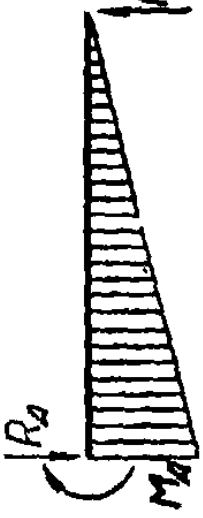


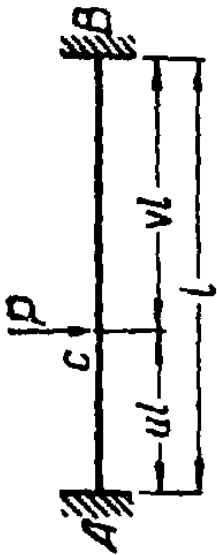
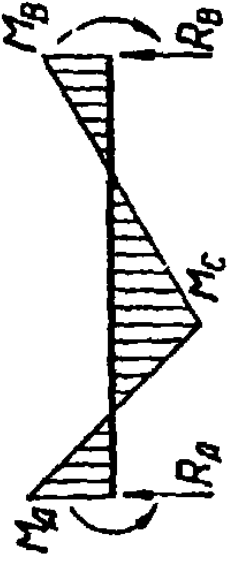
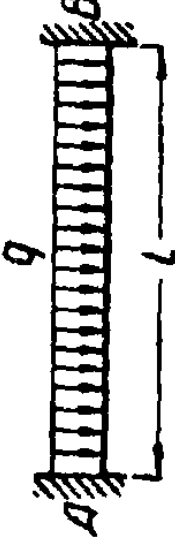
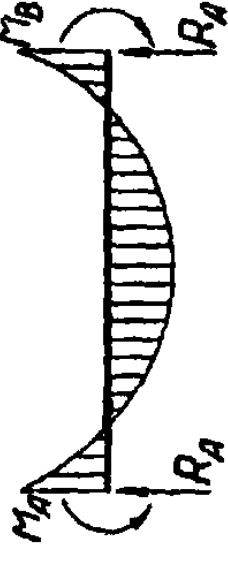

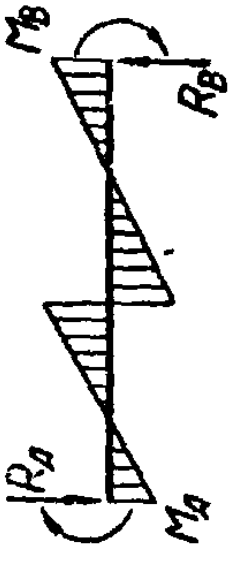
Рис. 186. Единичные и полная эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.


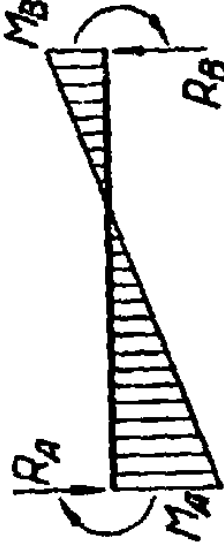

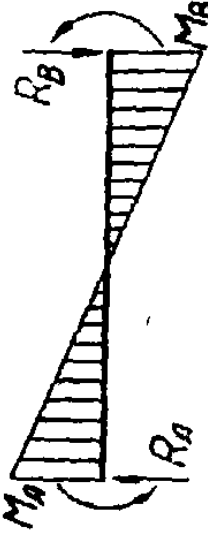
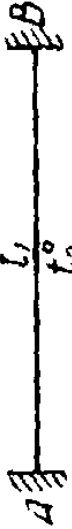
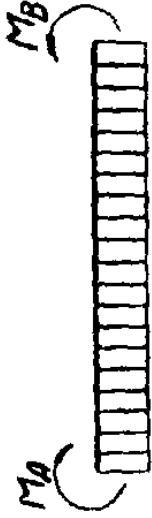
На основании полученных данных на рис. 186 (внизу) построена окончательная эпюра изгибающих моментов и эпюра поперечных сил

Опорные реакции балок постоянного сечения

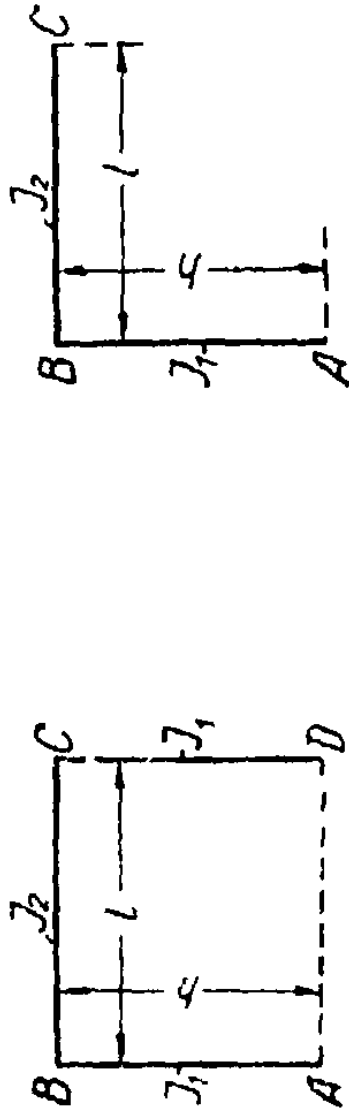
№, № схем	Схемы балок	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
1			$M_A = -\frac{Pl}{2}v(1-v^2)$ $M_C = \frac{Pl}{2}u^2v(3-u)$ $R_A = \frac{Pv}{2}(3-v^2)$ $R_B = \frac{Pu^2}{2}(3-u)$
2			$M_A = -\frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8}ql$ $R_B = \frac{3}{8}ql$
3			$M_A = \frac{m}{2}(1-3v^2)$ $R_A = -R_B = -\frac{3m}{2l}(1-v^2)$

№№ схем	Схемы балок	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
4			$M_A = \frac{3EJ}{l} \theta_A$ $R_A = -R_B = -\frac{3EJ}{l^2} \theta_A$
5			$M_A = -\frac{3EJ}{l^2} \Delta = -\frac{3EJ}{l} \psi$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3} \Delta = \frac{3EJ}{l} \psi$
6	<p>Неравномерный нагрев</p> 		$M_A = \frac{3EJ\alpha\Delta t}{2h},$ <p>где: h — высота поперечного сечения α — коэффициент линейного расширения</p> $R_A = -R_B = -\frac{3EJ\alpha\Delta t}{2hl}$

№№ схем	Схемы балок	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
7		<p style="text-align: center;">Балка с обоими заделанными концами</p> 	$M_A = -\mu^2 P l \quad M_B = \mu^2 \nu P l$ $M_C = 2\mu^2 \nu^2 P l$ $R_A = \nu^2 (1 + 2\mu) P$ $R_B = \mu^2 (1 + 2\nu) P$
8			$M_A = -M_B = -\frac{q l^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{q l}{2}$
9			$M_A = m \nu (2 - 3\nu)$ $M_B = m \mu (2 - 3\mu)$ $R_A = -R_B = -\frac{6\mu \nu}{l} m$

№№ схем	Схемы балок	Эпюры изгибающих моментов и реакции	Формулы
10			$M_A = \frac{4EJ}{l} \Theta_A$ $M_B = \frac{2EJ}{l} \Theta_A$ $R_A = -R_B = -\frac{6EJ}{l^2} \Theta_A$
11			$M_A = M_B = -\frac{6EJ}{l^2} \Delta =$ $= -\frac{6EJ}{l} \psi$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^3} \Delta =$ $= \frac{12EJ}{l^2} \psi$
12	<p>Неровномерный нагрев</p>  <p>$\Delta t = t_1 - t_2$</p>		$M_A = -M_B = \frac{EJ\alpha\Delta t}{h}$ <p>где: h — высота поперечного сечения α — коэффициент линейного расширения $R_A = R_B = 0$</p>

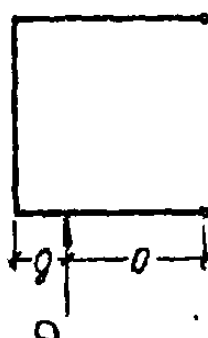

Формулы для расчета однопролетных рам



$$k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}; \quad n = 2k + 3$$

№№ схем

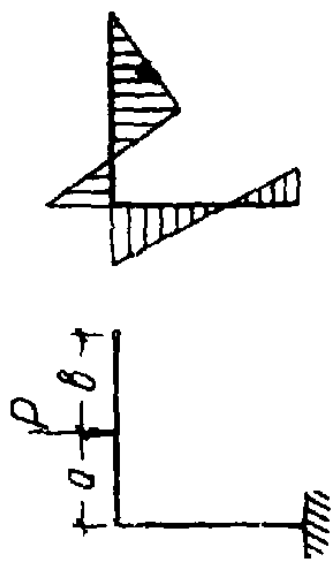
1			$M_B = M_C = -\frac{Pab}{l} \frac{3}{2n}$ $M_P = \frac{Pab}{l} + M_B$
2			$M_B = M_C = -\frac{ql^2}{4n}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8} + M_B$

№ схем	$k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}; n = 2k + 3$	
3		$\beta = \frac{b}{h}$ $M_B = \frac{Pa}{2} \left[-\frac{(2-\beta)\beta k}{n} + 1 \right]$ $M_C = \frac{Pa}{2} \left[-\frac{(2-\beta)\beta k}{n} - 1 \right]$ $M_P = (1-\beta)(Pb + MB)$
4		$M_B = \frac{qh^2}{4} \left(-\frac{k}{2n} + 1 \right)$ $M_C = \frac{qh^2}{4} \left(-\frac{k}{2n} - 1 \right)$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}; \quad n = 3k + 4$$

№№
схем

6



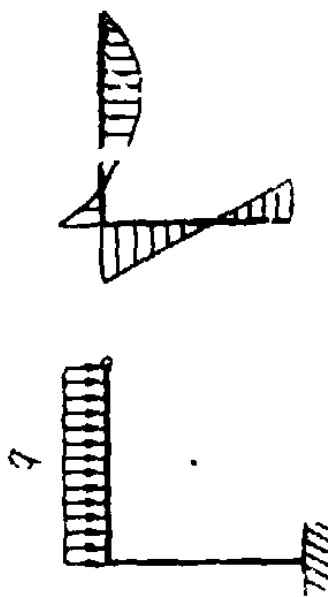
$$\beta = \frac{b}{l}$$

$$M_A = \frac{Pa\beta(1 + \beta)}{n}$$

$$M_B = -2M_A$$

$$M_P = (Pa + M_B)\beta$$

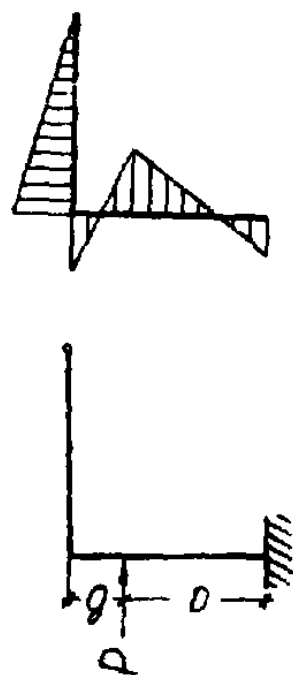
7



$$M_B = -\frac{ql^2}{2n}$$

$$M_A = -\frac{M_B}{2}$$

8

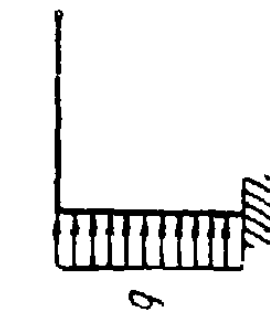
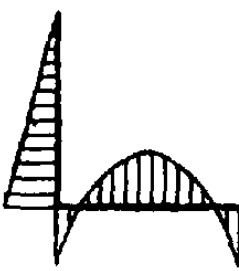
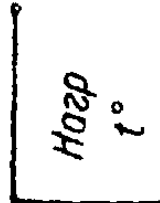


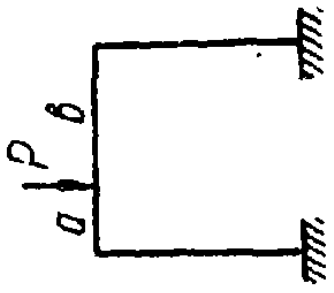
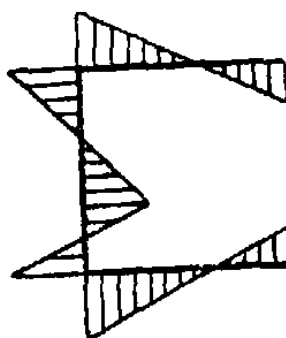
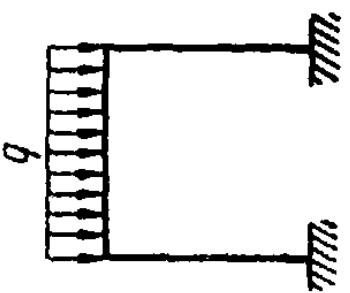
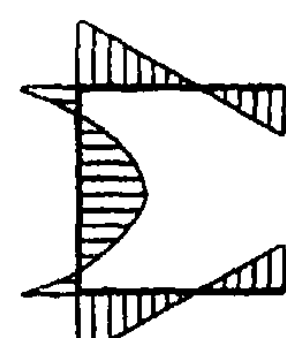
$$\beta = \frac{b}{h}$$

$$M_B = -\frac{Pab}{h} \frac{3(1 - \beta)k}{n}$$

$$M_A = -\frac{Pab}{h} \frac{3\beta k + 2(1 + \beta)}{n}$$

$$M_P = \frac{Pab}{h} + 3M_A + (1 - \beta)M_B$$

№№ схем	$k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}; n = 3k + 4$	
9		 $M_B = -\frac{qh^2k}{4n}$ $M_A = -\frac{qh^2(k+2)}{4n}$
10		$T = \frac{6EJ_2at}{ln}; B = \frac{l^2 + h^2}{lh}$ $M_A = T \left[\frac{2l(k+1)}{hk} + B \right]$

№№ схем	$k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}, n_1 = k + 2; n_2 = 6k + 1; \beta = \frac{b}{l}$	
11	 	$M_A = \frac{Pab}{l} \left[\frac{1}{2n_1} - \frac{2\beta - 1}{2n_2} \right]$ $M_D = \frac{Pab}{l} \left[\frac{1}{2n_1} + \frac{2\beta - 1}{2n_2} \right]$ $M_B = -\frac{Pab}{l} \left[\frac{1}{n_1} + \frac{2\beta - 1}{2n_2} \right]$ $M_C = -\frac{Pab}{l} \left[\frac{1}{n_1} - \frac{2\beta - 1}{2n_2} \right]$
12	 	$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12n_1}$ $M_B = M_C = -\frac{ql^2}{6n_1}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8} + M_B$

$$k = \frac{J_2}{J_1} \frac{h}{l}; \quad n_1 = k + 2; \quad n_2 = 6k + 1; \quad \beta = \frac{b}{l}$$

№№ схем

$$X_1 = \frac{Pab}{h} \frac{1 + \beta + \beta k}{2n_1}$$

$$X_2 = \frac{Pab(1 - \beta)k}{2n_1}; \quad X_3 = \frac{3Pa(1 - \beta)k}{2n_2}$$

$$\frac{M_A}{M_D} = -X_1 \mp \left(\frac{Pa}{2} - X_3 \right)$$

$$\frac{M_B}{M_C} = -X_2 \pm X_3$$
$$M_A = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{k+3}{6n_1} - \frac{4k+1}{n_2} \right]$$

$$M_B = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{k}{6n_1} + \frac{2k}{n_2} \right]$$

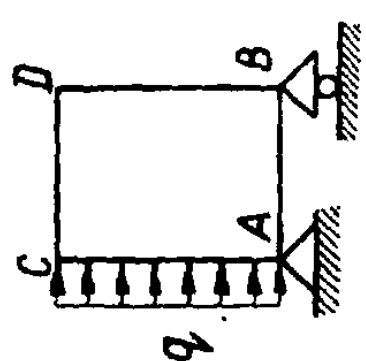
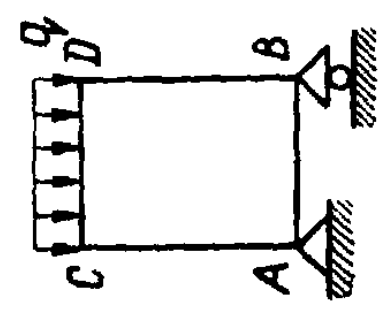
$$M_C = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{k}{6n_1} - \frac{2k}{n_2} \right]$$

$$M_D = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{k+3}{6n_1} + \frac{4k+1}{n_2} \right]$$
$$T = \frac{3EJ_2 \alpha t}{hn_1}$$

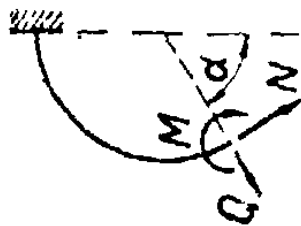
$$M_A = M_D = T \frac{k+1}{k}$$

$$M_B = M_C = -T$$

№№ схем	$k = \frac{J_1}{J_2} \frac{h}{l}; m = \frac{J_1}{J_3}; \alpha = \frac{a}{l}; \nu = (2+k) + \frac{m}{k}(3+2k); \mu = 1+6k+m$	
16		$\frac{M_A}{M_B} = \frac{Pl}{2} \alpha (1-\alpha) \left[\frac{1}{\nu} \mp \frac{1-2\alpha}{\mu} \right]$ $\frac{M_C}{M_D} = \frac{Pl}{2} \alpha (1-\alpha) \left[-\frac{2k+3m}{k\nu} \mp \frac{1-2\alpha}{\mu} \right]$
17		$\frac{M_A}{M_B} = \frac{Pl}{2} \alpha (1-\alpha) m \left[\frac{3+2k}{k\nu} \mp \frac{1-2\alpha}{\mu} \right]$ $\frac{M_C}{M_D} = -\frac{Pl}{2} \alpha (1-\alpha) m \left[\frac{1}{\nu} \mp \frac{1-2\alpha}{\mu} \right]$
18		$\eta = \frac{y}{h}$ $\frac{M_A}{M_B} = \frac{Ph}{2} \eta \left\{ \frac{1-\eta}{\nu} [(1+k)\eta - (2+k)] \mp \frac{1+3k(2-\eta)}{\mu} \right\}$ $\frac{M_C}{M_D} = \frac{Ph}{2} \eta \left\{ -\frac{1-\eta}{\nu} [(k+m)\eta + m] \mp \frac{3k\eta + m}{\mu} \right\}$

№№ схем	$k = \frac{J_1}{J_2} \frac{h}{l}$; $m = \frac{J_1}{J_3}$; $a = \frac{a}{l}$; $\nu = (2+k) + \frac{m}{k} (3+2k)$; $\mu = 1 + 6k + m$	$M_A = M_B = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{3+k}{6\nu} \mp \frac{1+4k}{\mu} \right]$ $M_C = M_D = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{k+3m}{6\nu} \pm \frac{2k+m}{\mu} \right]$
19		$M_A = M_B = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{3+k}{6\nu} \mp \frac{1+4k}{\mu} \right]$ $M_C = M_D = \frac{qh^2}{4} \left[-\frac{k+3m}{6\nu} \pm \frac{2k+m}{\mu} \right]$
20		<p>а) Нагрузка на элементе CD</p> $M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} \frac{1}{\nu}$ $M_C = M_D = -\frac{ql^2}{12} \frac{2k+m}{k\nu}$ <p>б) Нагрузка на элементе AB</p> $M_A = M_B = \frac{ql^2}{12} m \frac{3+2k}{k\nu}$ $M_C = M_D = -\frac{ql^2}{12} \frac{m}{\nu}$

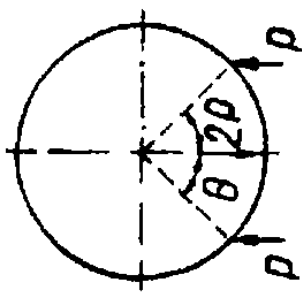
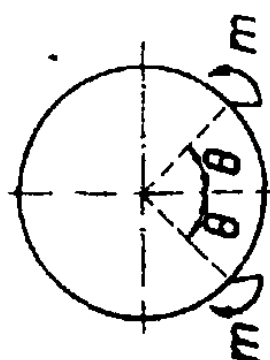
Формулы для расчета колец

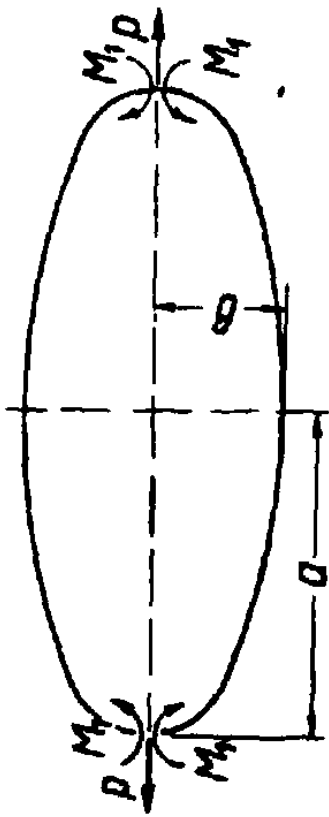


M_1, N_1, Q_1, M, N, Q положительны, если они направлены, как указано на чертеже.

Обозначения: E — модуль упругости; J — момент инерции сечения; $z = \sin \alpha$; $u = \cos \alpha$; $s = \sin \theta$; $c = \cos \theta$; $n = \sin \varphi$; $e = \cos \varphi$; δ_x и δ_y — увеличения диаметра кольца в направлениях X и Y .

<p>№№ схем</p> <p>1</p>		$M = Pr \left(0,3183 - \frac{1}{2}z \right); \max(+M) = 0,3183 Pr \text{ при } \alpha = 0$ $\max(-M) = -0,1817 Pr \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{2}$ $N = -\frac{1}{2}Prz; Q = -\frac{1}{2}Pu; \delta_x = +0,137 \frac{Pr^3}{EJ}; \delta_y = -0,149 \frac{Pr^3}{EJ}$
<p>2</p>		$0 < \alpha < \theta$ $M = Pr [0,3183(s - c\theta) + u\theta - usc]$ $N = P [0,3183u(\theta - sc) - u]$ $Q = P [0,3183z(sc - \theta) + z]$ $\delta_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left[0,6366(s - c\theta) + \frac{1}{2}(sc - \theta) \right]$ $\delta_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left[0,6366(s - c\theta) + c + \frac{1}{2}s^2 - 1 \right]$ $\theta < \alpha < \pi$ $M = Pr [0,3183(s - c\theta) + u\theta - usc]$ $N = P [0,3183u(\theta - sc)]$ $Q = P [0,3183z(sc - \theta)]$

3		$0 < \alpha < \theta$ $M = Pr [0,3183 (s\theta + c + us^2 - 1) - s + z]$ $N = P (0,3183 us^2 + z)$ $Q = P (u - 0,3183 zs^2)$ $\delta_x = \frac{Pr^3}{EJ} \left[-\frac{s^2}{2} + 0,6366 \cdot (s\theta + c - 1) \right]$ $\delta_y = \frac{Pr^3}{EJ} \left[\frac{1}{2} (sc + \theta) + 0,6366 (s\theta + c - 1) - s \right]$	$\theta < \alpha < \pi$ $M = Pr [0,3183 (s\theta + c + us^2 - 1)]$ $N = 0,3183 us^2 P$ $Q = 0,3183 zs^2 - P$
4		$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $M = m [0,3183 (2us + \theta) - 1]$ $N = \frac{m}{r} 0,6366 us$ $Q = \frac{m}{r} 0,6366 zs$ $\delta_x = \frac{mr^2}{EJ} (0,6366 \theta - s); \quad \delta_y = \frac{mr^2}{EJ} (0,6366 \theta + c - 1)$	$\theta < \alpha < \pi$ $M = m [0,3183 (2us + \theta)]$ $N = \frac{m}{r} 0,6366 us$ $Q = -\frac{m}{r} 0,6366 zs$



Эллиптическое кольцо

$$M_1 = kPa$$

k — коэффициент, зависящий от отношения $a:b$

$\frac{a}{b} =$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$k =$	0,318	0,295	0,274	0,255	0,240	0,227	0,216	0,205

$\frac{a}{b} =$	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$k =$	0,195	0,185	0,175	0,167	0,161	0,155	0,150	0,145

Глава XVII. РАСЧЕТ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При расчете по допускаемым напряжениям подбор сечений элементов конструкции производится, исходя из условия, чтобы наибольшие напряжения в элементах были ниже допускаемых. Одновременно должна быть обеспечена устойчивость конструкции и нормативная величина предельных деформаций.

Допускаемое напряжение представляет собой частное от деления предела текучести (для пластичных материалов) или предела прочности (для хрупких материалов) на установленный коэффициент запаса.

Коэффициент запаса, принятый для расчета отдельных элементов, характеризует запас прочности конструкции в целом только в статически определимой системе, в которой все элементы испытывают осевые усилия.

В случае статически неопределимой системы, имеющей лишние элементы или связи, появление в них пластических деформаций или текучести не выводит всей конструкции из строя, а, постепенно уменьшая степень статической неопределимости, превращает конструкцию в статически определимую, которая еще может нести нагрузку.

Точно так же, если элемент работает на кручение или изгиб, то появление в крайних волокнах какого-либо сечения предельных напряжений еще не означает потери несущей способности элемента, так как напряжения остальных волокон сечения ниже предельных.

Для таких конструкций более правильным является расчет по предельным состояниям.

Следует различать три основных вида предельных состояний:

1) предельное состояние по прочности или потере несущей способности, когда конструкция теряет способность нести нагрузку вследствие появления чрезмерных напряжений или нарушения устойчивости;

- 2) предельное состояние по появлению чрезмерных деформаций, нарушающих правильную эксплуатацию конструкции;
 3) предельное состояние по появлению местных повреждений (например, трещин, износа и т. д.).

Расчет по первому предельному состоянию (по прочности) совпадает с расчетом по предельным нагрузкам. Предельной нагрузкой считается та, которая приводит конструкцию в предельное состояние, т. е. делает невозможной ее дальнейшую эксплуатацию.

Для упрощения расчета по предельным нагрузкам материал рассматривается совершенно упругим вплоть до предела текучести σ_T и совершенно пластичным после появления текучести. Для стали диаграмма растяжения заменяется упрощенной диаграммой, изображенной на рис. 187.

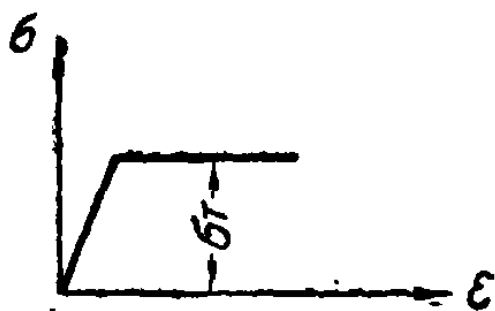


Рис. 187. Упрощенная диаграмма растяжения.

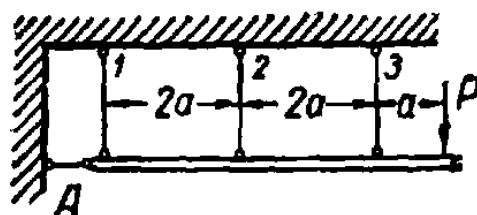


Рис. 188. Статически неопределимая система.

Способностью материала к упрочнению обычно пренебрегают. Процесс расчета сводится к определению величины предельной нагрузки. Предварительно следует выявить все возможные схемы разрушения конструкции. Для этого необходимо считать пришедшими в состояние текучести столько связей (стержней) системы, сколько необходимо для превращения ее в изменяемую систему.

Таких превращений может быть несколько, и каждому из них будет соответствовать некоторое значение предельной нагрузки.

Действительная величина предельной нагрузки будет наименьшей из значений, полученных при рассмотрении возможных схем разрушения.

Рассмотрим в качестве примера конструкцию, изображенную на рис. 188.

Предположим, что балка жесткая. Стержни имеют одинаковое сечение F и могут работать как на растяжение, так и на сжатие с пределом текучести σ_T . Требуется определить допускаемую нагрузку P , приняв коэффициент запаса равным k .

Рассмотрим возможные схемы разрушения. Очевидно, система может перейти в предельное состояние, когда усилия в двух каких-либо стержнях достигнут предельной величины $N_{пр} = \sigma_T F$.

Следовательно, возможны три схемы разрушения (рис. 189).

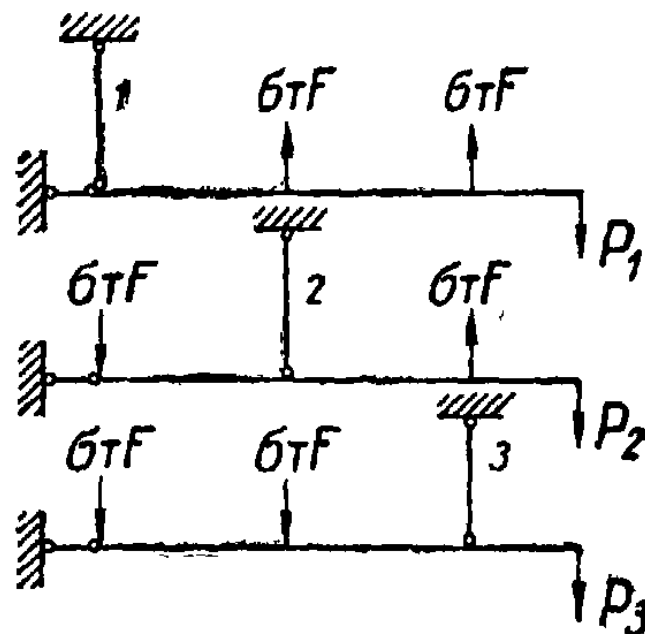


Рис. 189. Возможные схемы разрушения.

1-я схема. В состоянии текучести находятся 2-й и 3-й стержни.

Усилия в них равны:

$$N_2 = \sigma_T F; N_3 = \sigma_T F.$$

Условие равновесия:

$$\Sigma M_A = \sigma_T F 2a + \sigma_T F 4a - P_1 5a = 0,$$

откуда

$$P_1 = \frac{6\sigma_T F}{5} = 1,2\sigma_T F.$$

2-я схема. В состоянии текучести находятся 1-й и 3-й стержни, т. е.

$$N_1 = N_3 = \sigma_T F.$$

Условие равновесия:

$$\Sigma M_B = \sigma_T F 2a + \sigma_T F 2a - P_2 3a = 0,$$

откуда

$$P_2 = \frac{4\sigma_T F}{3} \approx 1,33 \sigma_T F.$$

3-я схема. В состоянии текучести находятся 1-й и 2-й стержни, т. е.

$$N_1 = N_2 = \sigma_T F.$$

Условие равновесия:

$$\Sigma M_C = \sigma_T F 4a + \sigma_T F 2a - P_3 a = 0,$$

откуда

$$P_3 = 6\sigma_T F.$$

Предельная нагрузка равна наименьшей из полученных, т. е.

$$P_{\text{пр}} = P_1 = 1,2 \sigma_T F.$$

Допускаемая нагрузка:

$$\bar{P}_{\text{доп}} = \frac{P_{\text{пр}}}{k} = \frac{1,2 \sigma_T F}{k}.$$

В том случае, когда нагрузка (P) на конструкцию задана и необходимо подобрать сечения стержней, заданную нагрузку рассматривают как допустимую:

$$P = P_{\text{доп}} = \frac{1,2 \sigma_T F}{k},$$

откуда

$$F = \frac{kP}{1,2 \sigma_T}.$$

Если предел текучести, деленный на коэффициент запаса, рассматривать как допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}$, то выражение для необходимой площади сечения можно будет записать следующим образом:

$$F = \frac{P}{1,2 [\sigma]}.$$

2. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ. ПОДБОР СЕЧЕНИЯ БАЛОК

В предельном состоянии изгибаемой балки нормальные напряжения по всему сечению достигают предела текучести, и эпюра напряжений приобретает вид двух прямоугольников с ординатами, равными пределу текучести (рис. 190).

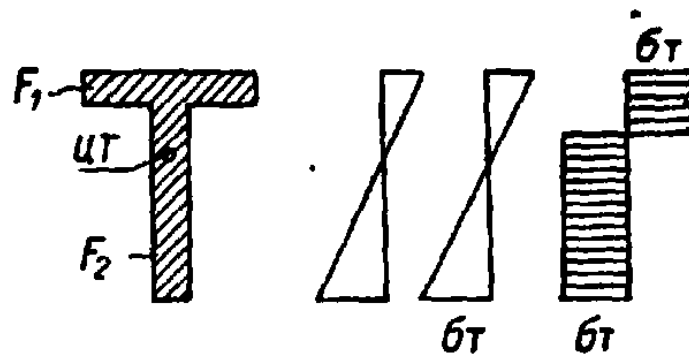


Рис. 190. Эпюры нормальных напряжений при переходе в предельное состояние.

Предельный изгибающий момент, соответствующий распространению текучести по всему сечению:

$$M_{пр} = \sigma_T (S_1 + S_2) = \sigma_T W_{пл}, \quad (1)$$

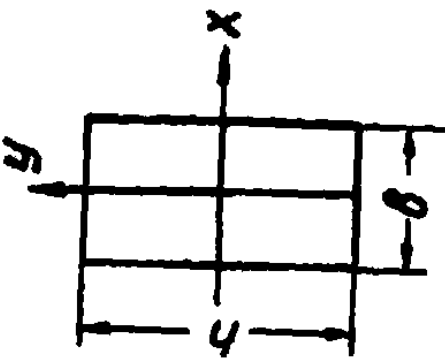
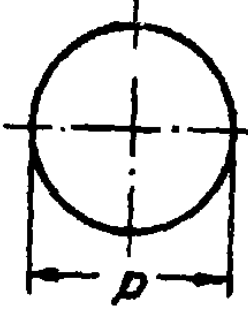
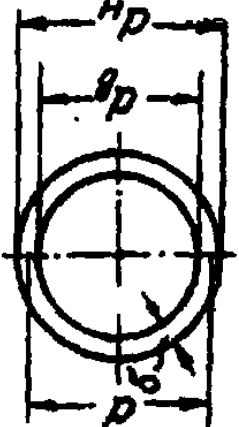
где: S_1 — статический момент относительно нейтральной оси верхней половины площади сечения;

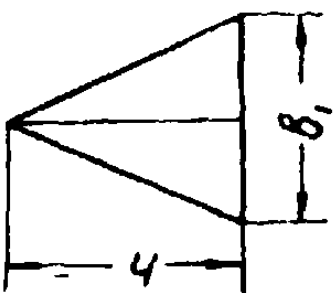
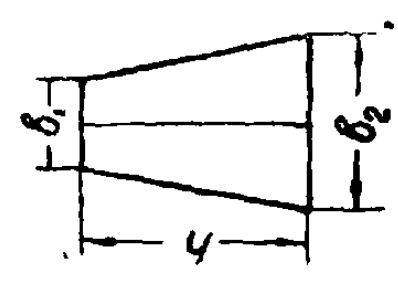
S_2 — статический момент относительно нейтральной оси нижней половины площади сечения;

$W_{пл}$ — пластический момент сопротивления сечения.

$$W_{пл} = S_1 + S_2. \quad (2)$$

Пластические моменты сопротивления для некоторых сечений

№, № схем		
1		$W_{пл} = 2S = \frac{bh^2}{4}; \quad W_{пл} = 1,5 W_x$
2		$W_{пл} = 2S = \frac{d^3}{6}; \quad W_{пл} = 1,7 W_x$
3		$W_{пл} = \frac{1}{6} (D^3 - d^3) \approx d^2 \delta$ $W_{пл} = 1,7 \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^4} W_x; \quad \alpha = \frac{d}{D}$

№№ схем		
4		$W_{пл} = S_1 + S_2 = \frac{bh^2}{6} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,0977 bh^2$ $W_{пл} \approx 2,36 W_v$
5		$W_{пл} = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2} \left[b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$

При несимметричном сечении нейтральная ось в предельном состоянии оказывается смещенной и делит площадь сечения на две равные части $(F_1 = F_2 = \frac{F}{2})$.

В случае симметричного сечения нейтральная ось и в предельном состоянии проходит через центр тяжести сечения. Предыдущие формулы получают следующий вид:

$$W_{пл} = 2S, \quad (3)$$

где $S = S_1 = S_2$ — статический момент полусечения относительно нейтральной оси.

Значения пластических моментов сопротивления для различных форм сечений приведены в таблице 82.

Допускаемый изгибающий момент определяется, исходя из принятого коэффициента запаса:

$$M_{доп} = \frac{M_{пр}}{k} = \frac{\sigma_T W_{пл}}{k}. \quad (4)$$

Подбор сечений производится по формуле:

$$W_{пл} = \frac{k M_{доп}}{\sigma_T}. \quad (5)$$

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

В статически неопределимых балках появление пластического шарнира только снижает степень статической неопределимости на единицу, но не приводит к потере несущей способности. Балка утрачивает несущую способность после образования нескольких пластических шарниров (по меньшей мере двух).

Рассмотрим в качестве примера двухпролетную неразрезную балку, нагруженную сосредоточенной силой (рис. 191).

При обычном расчете в пределах упругости изгибающие моменты в пролете и на опоре соответственно равны:

$$M_D = \frac{13 Pl}{64}; \quad M_B = \frac{3Pl}{32}.$$

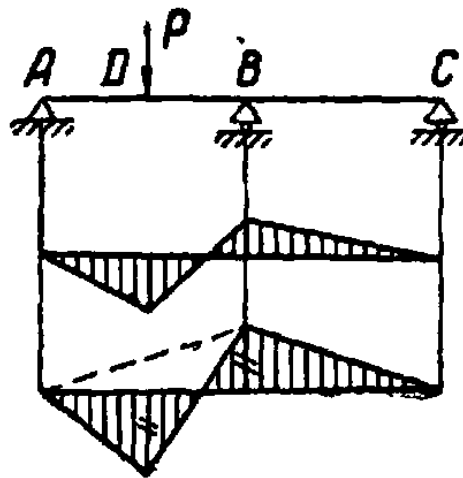


Рис. 191. Выравнивание моментов в неразрезной балке.

При образовании пластического шарнира в наиболее напряженном сечении D балка превращается в статически определимую.

Несущая способность балки будет исчерпана после образования второго пластического шарнира на опоре B , так как балка станет геометрически изменяемой.

В предельном состоянии изгибающие моменты в сечениях B и D выравниваются:

$$M_B = M_D = \sigma_t W_{пл}.$$

Из условий равновесия в предельном состоянии получаем:

$$M_{пр} = \frac{P_{пр} l}{4} - \frac{M_{пр}}{2},$$

откуда

$$M_{пр} = \frac{P_{пр} l}{6}$$

или

$$P_{пр} = \frac{6M_{пр}}{l}.$$

Полагая, что нагрузка, действующая на балку, является допустимой $P = P_{\text{доп}}$, получим следующее значение расчетного изгибающего момента:

$$M = \frac{Pl}{6}.$$

При расчете многопролетных неразрезных балок предельные состояния устанавливаются для каждого пролета в отдельности. Построив эпюры моментов, соответствующие предельному состоянию каждого пролета, находят расчетные моменты. По этим моментам подбирается сечение в каждом пролете.

В том случае, когда сечение балки постоянно по ее длине, размеры сечения подбираются по наибольшему из всех расчетных моментов, найденных в каждом пролете или на опорах.

Пример. Подобрать сечение прокатного двутавра для трехпролетной неразрезной балки, изображенной на рис. 192. Предел текучести $\sigma_T = 2500 \text{ кг/см}^2$. Коэффициент запаса $k = 1,6$.

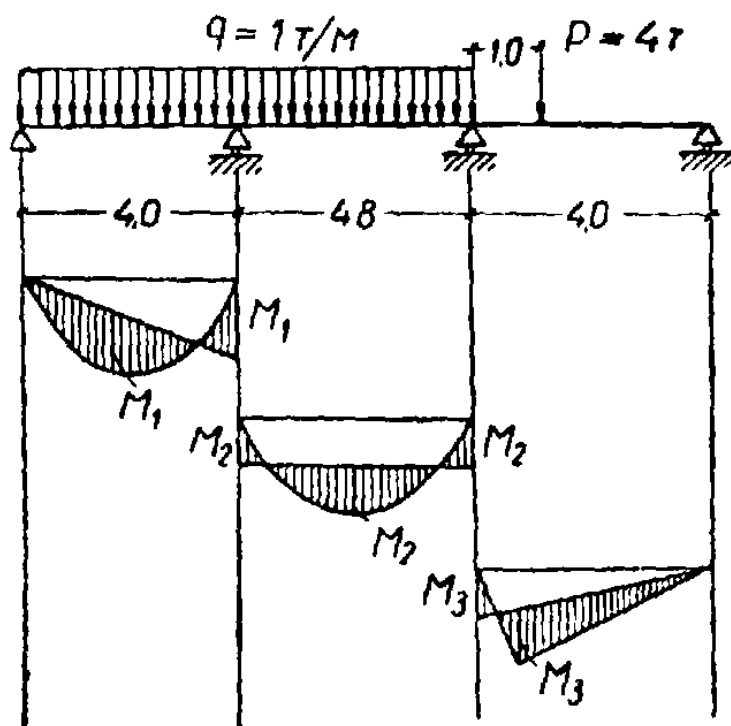


Рис. 192. Эпюры моментов в предельных состояниях неразрезной балки.

Решение. Значения расчетных моментов находим из рассмотрения предельного состояния в каждом пролете.

1-й пролет. В предельном состоянии шарниры текучести появятся в наиболее напряженных сечениях, т. е. на расстоянии от левой опоры $x_0 = \frac{3}{8} l = 1,5$ м и на второй опоре. Считая моменты в этих сечениях равными по величине, получаем:

$$M_1 = \frac{ql_1}{2} \frac{3}{8} l_1 - \frac{3}{8} ql_1 \frac{3}{16} l_1 - \frac{3}{8} M_1,$$

откуда

$$M_1 = \frac{15}{176} ql_1^2 = 1,36 \text{ тм.}$$

2-й пролет. В предельном состоянии шарниры текучести появляются на второй и третьей опорах и в середине пролета:

$$M_2 = \frac{ql_2^2}{8} - M_2.$$

откуда

$$M_2 = \frac{ql_2^2}{16} = 1,44 \text{ тм.}$$

3-й пролет. В предельном состоянии шарниры текучести появятся на третьей опоре и в месте приложения сосредоточенной силы.

Из элюры моментов следует:

$$M_3 = \frac{3Pl_3}{16} - \frac{3}{4} M_3,$$

откуда

$$M_3 = \frac{3Pl_3}{28} = 1,714 \text{ тм.}$$

Поскольку сечение балки предполагается постоянным, за расчетный момент следует принять наибольшее из полученных значений:

$$M = M_3 = 1,714 \text{ тм} = 171\,400 \text{ кгсм.}$$

Необходимый момент сопротивления находим, принимая для двутавра

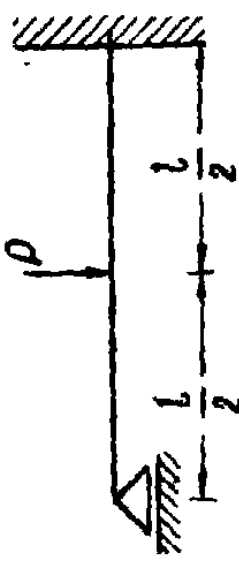
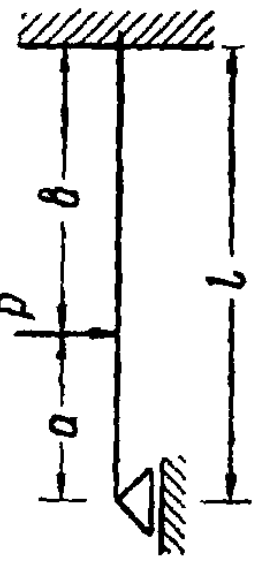

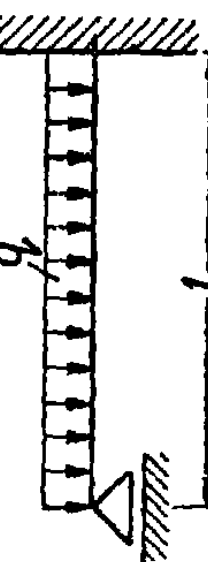
$$W_{\text{пл}} = 1,16 W_x; \quad W_{\text{пл}} = \frac{kM}{\sigma_T},$$

откуда

$$W_x = \frac{kM}{1,16 \sigma_T} = \frac{1,6 \cdot 171\,400}{1,16 \cdot 2\,500} = 94,5 \text{ см}^3.$$

Принимаем двутавр № 14 $W_x = 102 \text{ см}^3$.

Значения предельных моментов в крайних и промежуточных пролетах неразрезных балок и балок с защемленными концами

№.№ схем	Схема балки	Предельный (расчетный) момент
1		$M = \frac{Pl}{6}$
2		$M = \frac{Pab}{l+a}$
3		$M = \frac{Pal}{l+a}$
4		$M = \frac{15}{176} ql^2 \approx 0,086 ql^2$

№№ схем	Схема балки	Предельный (расчетный) момент
5	<p>Diagram of a simply supported beam of length l with a point load P applied at the center, $l/2$ from each support.</p>	$M = \frac{Pl}{8}$
6	<p>Diagram of a simply supported beam of length l with a point load P applied at a distance a from the left support and b from the right support.</p>	$M = \frac{Pab}{2l}$
7	<p>Diagram of a simply supported beam of length l with a point load P applied at a distance a from the left support.</p>	$M = \frac{Pa}{2}$

4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ

Если материал стержня не обладает упрочнением, то в предельном состоянии пластическая область заполняет все сечение и эпюра напряжений τ превращается в два прямоугольника с ординатами, равными пределу текучести при кручении τ_T (рис. 193).

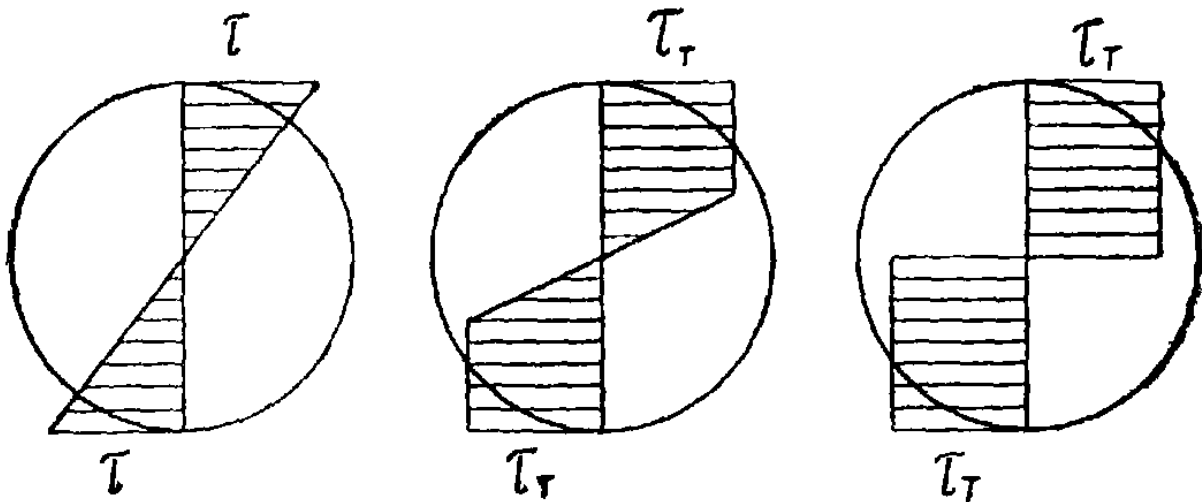


Рис. 193. Эпюры напряжений при кручении в упругой и пластической стадиях.

Предельный крутящий момент может быть определен по формуле:

$$\text{пр } M_K = \tau_T W_{\text{кп}}, \quad (6)$$

где: τ_T — предел текучести при кручении;

$W_{\text{кп}}$ — пластический момент сопротивления сечения при кручении.

В случае круглого сечения $W_{\text{кп}}$ равен полярному статическому моменту сечения:

$$W_{\text{кп}} = S_{\text{кп}} = \int_F \rho dF. \quad (7)$$

При сплошном круглом сечении:

$$W_{\text{кп}} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{12}. \quad (8)$$

При кольцевом сечении:

$$W_{\text{нп}} = \frac{2\pi}{3} (r_{\text{н}}^3 - r_{\text{в}}^3) = \frac{2\pi r_{\text{н}}^3}{3} (1 - \alpha^3) = \frac{\pi d_{\text{н}}^3}{12} (1 - \alpha^3), \quad (9)$$

где

$$\alpha = \frac{r_{\text{в}}}{r_{\text{н}}} = \frac{d_{\text{в}}}{d_{\text{н}}}.$$

Условие прочности по предельному состоянию при заданном коэффициенте запаса k может быть записано следующим образом:

$$M_{\text{н}} \leq \frac{\text{пр } M_{\text{н}}}{k} = \frac{\tau_{\text{г}} W_{\text{нп}}}{k} = [\tau] W_{\text{нп}}, \quad (10)$$

откуда

$$W_{\text{нп}} \geq \frac{M_{\text{н}}}{[\tau]}, \text{ где } [\tau] = \frac{\tau_{\text{г}}}{k}.$$

Формулы для определения диаметра сечения:

а) при сплошном круглом сечении:

$$d = \sqrt[3]{\frac{12 M_{\text{н}}}{\pi [\tau]}}; \quad (11)$$

б) при кольцевом сечении:

$$d_{\text{н}} = \sqrt[3]{\frac{12 M_{\text{н}}}{\pi [\tau] (1 - \alpha^3)}}. \quad (12)$$

При кручении стержней некруглого сечения условие прочности по предельному состоянию имеет тот же вид, что и при круглом сечении.

Значения пластического момента сопротивления определяются по следующим формулам:

а) Прямоугольное сечение с размерами b и h :

$$W_{\text{нп}} = \frac{b^2}{6} (3h - b). \quad (13)$$

Для квадратного сечения:

$$W_{\text{нп}} = \frac{b^3}{3}. \quad (14)$$

б) Треугольное сечение:

$$W_{\text{кп}} = \frac{4F^2}{3P}, \quad (15)$$

где: F — площадь сечения;

P — периметр сечения.

Для равностороннего треугольника со стороной a :

$$W_{\text{кп}} = \frac{a^3}{12}. \quad (16)$$

в) Незамкнутый тонкостенный профиль (рис. 194).

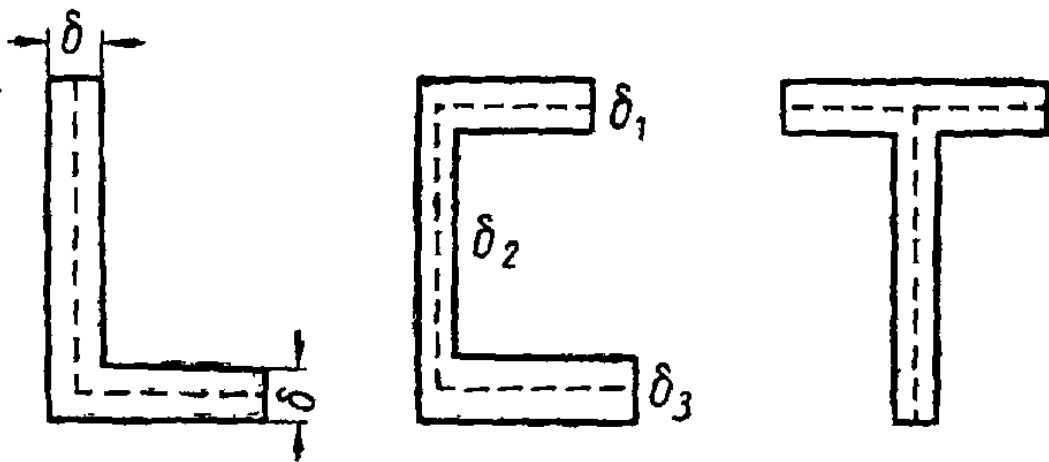


Рис. 194. Тонкостенные профили.

При одинаковой толщине стенок профиля (δ):

$$W_{\text{кп}} = s \frac{\delta^2}{2}, \quad (17)$$

где s — длина средней линии сечения.

При разной толщине стенок профиля:

$$W_{\text{кп}} = \sum s_i \frac{\delta_i^2}{2}, \quad (18)$$

где δ_i и s_i — соответственно толщина стенки и длина средней линии каждого прямоугольника, входящего в состав сечения.

5. РАСЧЕТ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ СОСТОЯНИЯМ

Принятый в настоящее время метод расчета строительных конструкций по предельным состояниям отличается следующими особенностями:

1. Вместо общего коэффициента запаса введены три отдельных коэффициента:

а) Коэффициент перегрузки $n > 1$, особый для каждого вида нагрузки и учитывающий наибольшую возможную перегрузку конструкции.

Постоянная нагрузка — собственный вес конструкции — может быть подсчитана наиболее точно, поэтому коэффициент перегрузки принимается в этом случае небольшим, например $n = 1,1$.

Временную нагрузку — вес поезда, толпы, давление на сооружение ветра, снега точно подсчитать невозможно. В связи с этим для таких нагрузок вводятся повышенные коэффициенты перегрузки. Например, для снеговой нагрузки $n = 1,4$.

Расчетная нагрузка определяется путем умножения каждого вида действующей нагрузки на соответствующий коэффициент перегрузки.

б) Коэффициент однородности материала $k < 1$, учитывающий возможное понижение прочности материала против установленной нормами и называемой нормативным сопротивлением R^n .

Расчетное сопротивление получается путем умножения нормативного сопротивления на коэффициент однородности:

$$R = kR^n. \quad (19)$$

Например, для стали марки Ст. 3 нормативное значение предела текучести 2400 кг/см^2 . В действительности возможны некоторые отклонения в ту или другую сторону. Поэтому коэффициент однородности принимается $k = 0,85 \div 0,90$ и расчетное сопротивление оказывается равным:

$$R = kR^n = (0,85 \div 0,90) \cdot 2400 \approx 2100 \text{ кг/см}^2.$$

в) Коэффициент условий работы $m \leq 1$, который учитывает все остальные весьма разнообразные обстоятельства, могущие вызвать понижение несущей способности конструкции, как-то: неточности расчетных предпосылок, неточности изготовления, влияние влажности, температуры и т. д.

2. Основная расчетная формула метода предельных состояний может быть в общем виде записана следующим образом:

$$N \leq f(S; k_1 R_1^n; m_1; \dots k_2 R_2^n; m_2 \dots), \quad (20)$$

где: N — расчетное усилие, т. е. усилие (или изгибающий момент) от нормативных нагрузок, умноженных на соответствующие коэффициенты перегрузки;

$R_1^n, R_2^n \dots$ — нормативные сопротивления материала (предел прочности, текучести);

$k_1, k_2 \dots$ — коэффициенты однородности;

S — геометрические характеристики сечения (площадь, момент сопротивления);

$m_1, m_2 \dots$ — коэффициенты условий работы;

f — функция, соответствующая роду усилия (сжатие, растяжение, изгиб и т. д.).

При расчете балок по методу предельных состояний возможны два случая:

1. По условиям эксплуатации допустимы остаточные прогибы. В этом случае несущая способность балки определяется по изгибающему моменту:

$$M = W_{пл} R,$$

где: $W_{пл}$ — пластический момент сопротивления сечения;

R — расчетное сопротивление.

2. Если остаточные прогибы недопустимы, то предельным состоянием считается то, при котором напряжения в крайних волокнах достигают расчетного сопротивления. Несущая способность определяется по формуле:

$$M = WR,$$

где W — момент сопротивления сечения при работе в упругой стадии.

При определении несущей способности двутавровых и тому подобных балок с тонкими стенками и мощными поясами во всех случаях рекомендуется пользоваться предыдущей формулой $M = WR$.

Расчет статически неопределимых балок производится в предположении выравнивания моментов в местах возможного образования пластических шарниров.

Глава XVIII. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Многие детали машин и сооружений в эксплуатационных условиях подвергаются действию переменных напряжений, многократно изменяющихся во времени. Экспериментальные исследования и многочисленные поломки деталей показывают, что при переменных нагрузках материал разрушается при напряжениях значительно меньших, чем при постоянных нагрузках.

Разрушение при переменных напряжениях начинается с образования в наиболее напряженном месте детали микротрещин, которые, постепенно развиваясь, при работе детали проникают в глубь детали, все более ослабляют ее и могут привести последнюю к разрушению.

Это явление понижения прочности материала при переменных напряжениях за счет прогрессивно развивающихся микротрещин называется усталостью материала.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Напряжения во времени могут изменяться периодически или непериодически. Мы в дальнейшем будем рассматривать только периодически изменяющиеся напряжения от некоторого максимального до минимального значения, которые чаще всего встречаются в машиностроении.

Так, например, при равномерном вращении вала (рис. 195), находящегося под действием изгибающей нагрузки, напряжение в точке A , лежащей на поверхности произвольного сечения вала, определяется по формуле:

$$\sigma_A = \frac{Mz}{J_y} = \frac{Mr}{J_y} \cos \omega t, \quad (1)$$

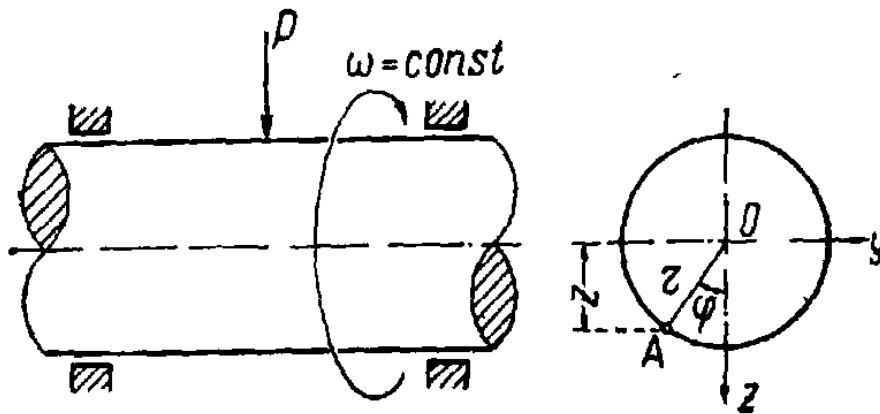


Рис. 195. Вал, работающий по симметричному циклу.

где: M — изгибающий момент в рассматриваемом сечении;
 J_y — момент инерции поперечного сечения вала относительно нейтральной оси;
 z — расстояние от исследуемой точки до нейтральной оси ($z = r \cos \varphi = r \cos \omega t$).

Из формулы (1) следует, что график напряжений в зависимости от времени представляет косинусоиду, показанную на рис. 196.

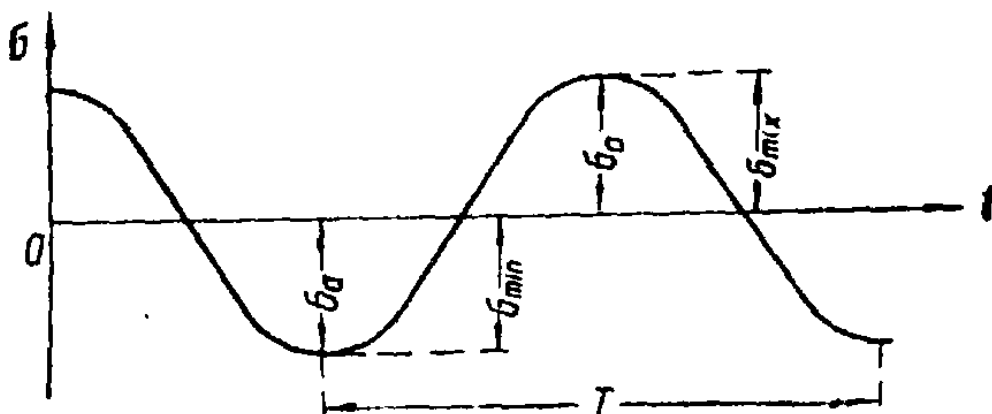


Рис. 196. Симметричный цикл изменения напряжений.

Если на вал будет дополнительно действовать растягивающая сила P_1 , не зависящая от времени, то напряжение в точке A :

$$\sigma_A = \frac{P_1}{F} + \frac{Mr}{J_y} \cos \omega t, \quad (2)$$

где $F = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь поперечного сечения вала.

График изменения напряжений в этом случае показан на рис. 197.

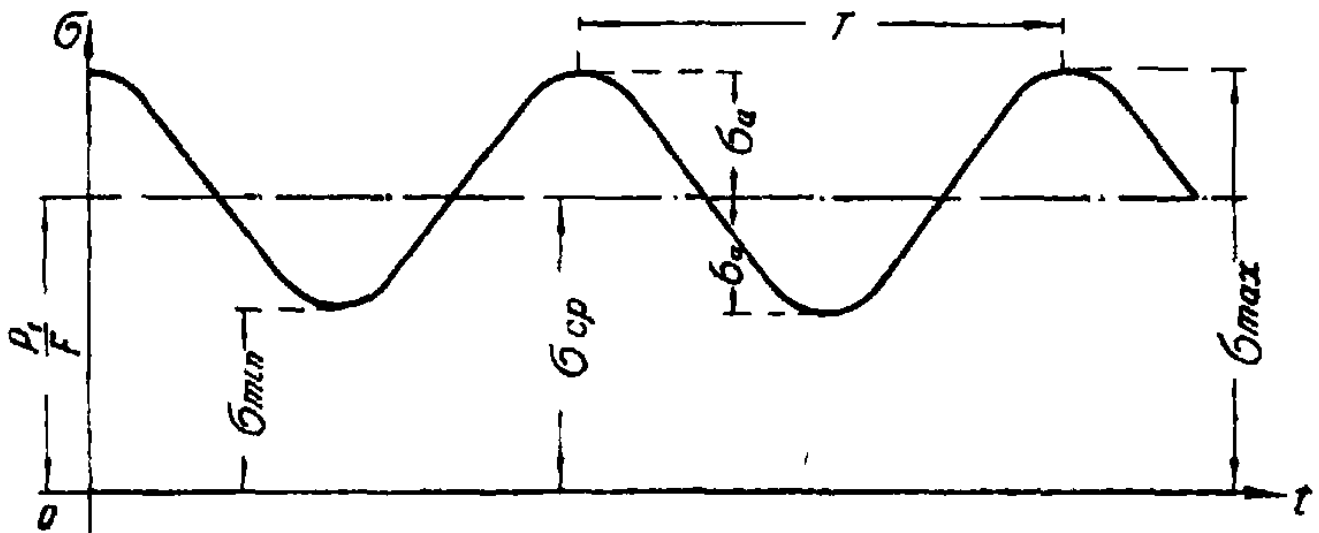


Рис. 197. Несимметричный цикл изменения напряжений.

Циклом напряжений называется замкнутая однократная смена напряжений, получающих непрерывный ряд значений.

Время T , в течение которого протекает один цикл, называется периодом, а число циклов в одну секунду $n = \frac{1}{T}$ дает частоту цикла.

Циклы могут быть: симметричными в том случае, когда наибольшее и наименьшее напряжения одинаковы по величине и противоположны по знаку (рис. 196), и несимметричными при неодинаковых по величине наибольшем и наименьшем напряжениях (рис. 197).

Основными характеристиками цикла нормальных напряжений являются σ_{max} и σ_{min} или

амплитуда напряжений

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}; \quad (3)$$

среднее напряжение

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}. \quad (4)$$

Коэффициент несимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (5)$$

Из соотношений (3) и (4) следует, что

$$\sigma_{max} = \sigma_{cp} + \sigma_a; \quad \sigma_{min} = \sigma_{cp} - \sigma_a.$$

Любой несимметричный цикл может быть получен наложением на постоянное среднее напряжение симметричного цикла (рис. 197).

Среднее напряжение цикла может быть положительным, отрицательным или равным нулю, а амплитуда цикла всегда величина существенно положительная.

Циклы, у которых максимальное или минимальное напряжения равны нулю, называются пульсационными (рис. 198, а и б).

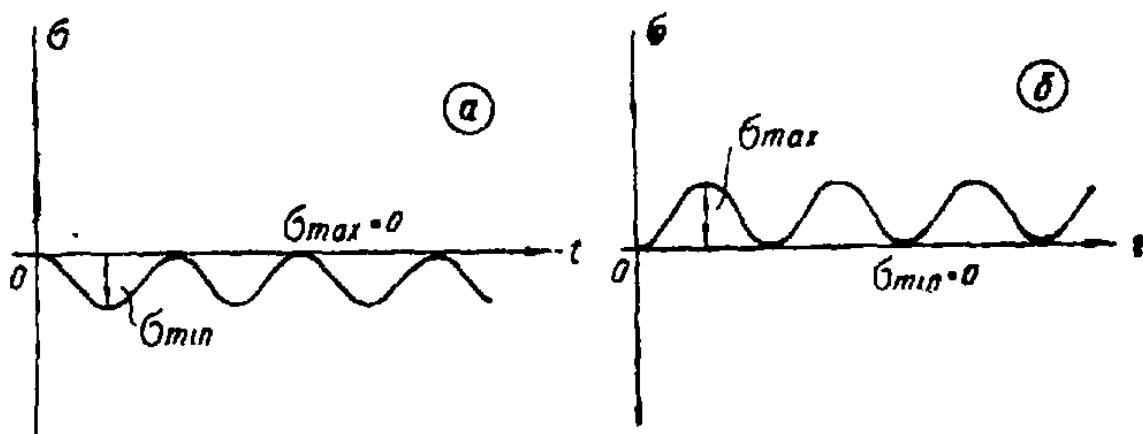


Рис. 198. Пульсационные циклы:
а — отрицательный; б — положительный.

Все сказанное для циклов нормальных напряжений справедливо и для циклов касательных напряжений. В этом случае в приведенных соотношениях следует σ заменить на τ .

На рис. 199 графически представлены различные случаи изменения напряжений во времени и зависимости от вида функции $\sigma = f(t)$.

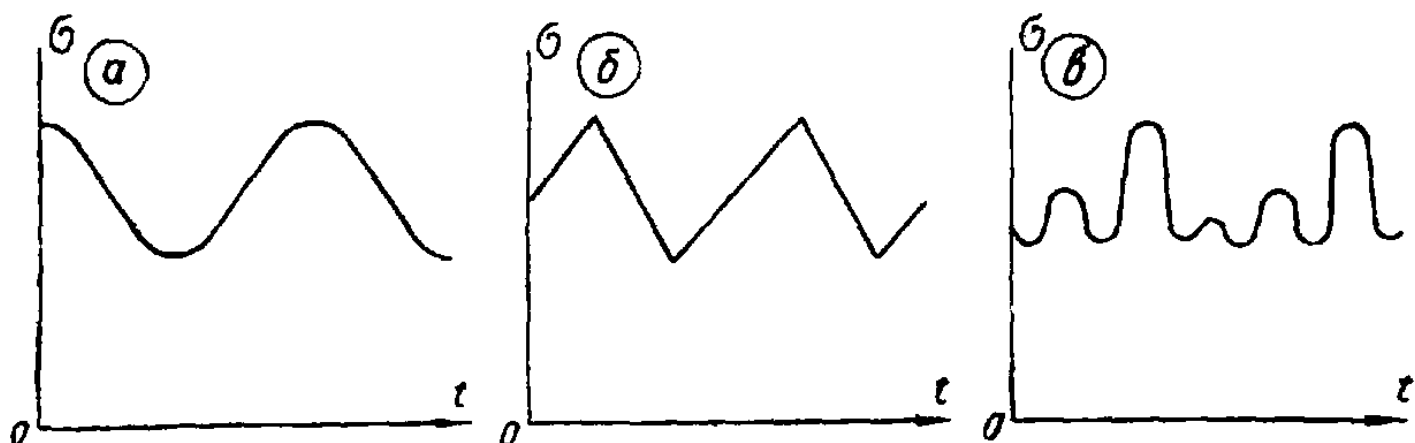


Рис. 199. Различные случаи периодического изменения напряжений.

Закон изменения напряжений во времени не влияет заметно на прочность материала, которая в основном зависит от величины и знака максимального σ_{max} и минимального σ_{min} напряжений. Поэтому, если σ_{max} и σ_{min} в случаях а, б и в рис. 199 одинаковы, то можно практически считать, что все приведенные случаи изменения напряжений равноопасны.

В таблице 84 приведены различные частные случаи изменения напряжений характерных циклов.

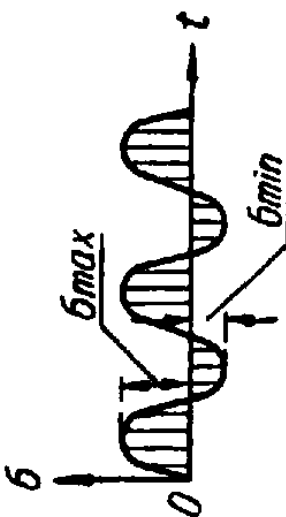
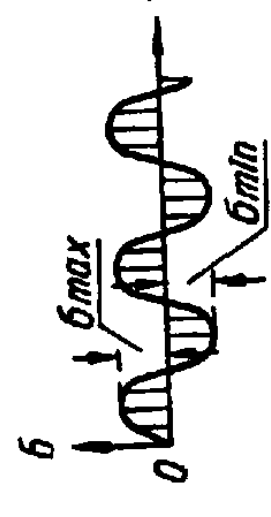
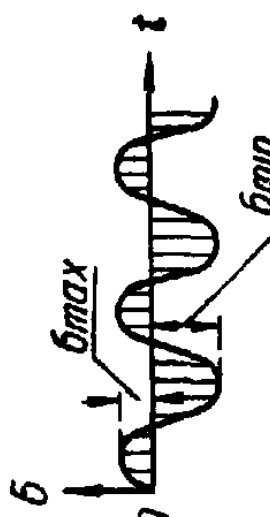
2. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ И ОПЫТНОЕ ЕГО ОПРЕДЕЛЕНИЕ

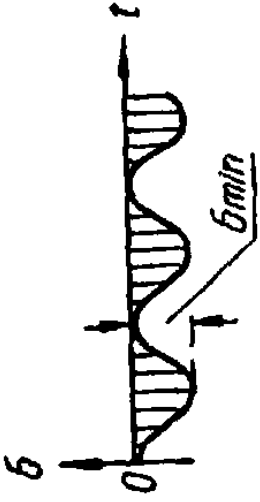
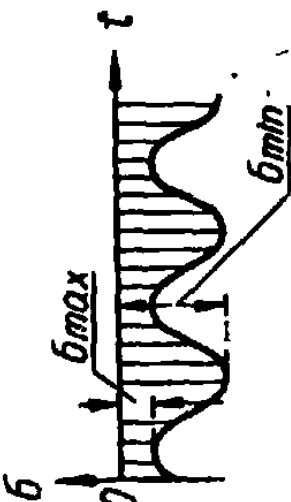
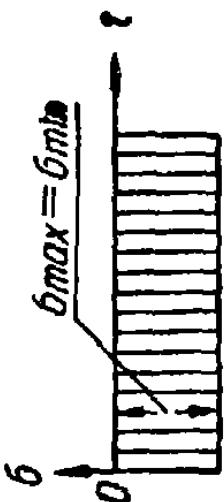
На основании многочисленных испытаний материалов при различных случаях периодического изменения напряжений установлено, что если наибольшее по абсолютной величине напряжение меньше некоторого определенного значения, то материал не разрушится при неограниченно большом числе циклов. Это напряжение называется пределом выносливости, или пределом усталости, и обозначается σ_r или τ_r , где индекс r — коэффициент несимметрии. Например, σ_{-1} — предел выносливости при симметричном цикле изменения нормальных напряжений; τ_0 — предел выносливости при пульсационном цикле изменения касательных напряжений.

Рассматривая условно предел прочности σ_b как «предел

Различные циклы изменения напряжений во времени

№№ схем	График $\sigma = f(t)$	σ_{max} ; σ_{min}	$\sigma_{ср}$; σ_a	r	Цикл
1		$\sigma_{max} = \sigma_{min} > 0$	$\sigma_{ср} = \sigma_{max} = \sigma_{min}$ $\sigma_a = 0$	+1	Постоянный положительный
2		$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} > 0$	$\sigma_{ср} > 0$ $\sigma_a \neq 0$	$0 < r < +1$	Несимметричный положительный
3		$\sigma_{max} > 0$ $\sigma_{min} = 0$	$\sigma_{ср} = \frac{1}{2} \sigma_{max}$ $\sigma_a = \frac{1}{2} \sigma_{max}$	0	Пульсационный положительный

№№ схем	График $\sigma = f(t)$	σ_{max} ; σ_{min}	σ_{cp} ; σ_a	r	Цикл
4		$\begin{aligned} \sigma_{max} &> 0 \\ \sigma_{min} &< 0 \\ \sigma_{max} &> \sigma_{min} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sigma_{cp} &> 0 \\ \sigma_a &\neq 0 \end{aligned}$	$-1 < r < 0$	Несимметричный
5		$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \\ &= -\sigma_{min} > 0 \\ \sigma_{min} &< 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sigma_{cp} &= 0 \\ \sigma_a &= \sigma_{max} \end{aligned}$	-1	Симметричный
6		$\begin{aligned} \sigma_{max} &> 0 \\ \sigma_{min} &< 0 \\ \sigma_{max} &< \sigma_{min} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sigma_{cp} &< 0 \\ \sigma_a &\neq 0 \end{aligned}$	$-\infty < r < -1$	Несимметричный

№№ схем	График $\sigma = f(t)$	σ_{max} ; σ_{min}	σ_{cp} ; σ_a	r	Цикл
7		$\sigma_{max} = 0$ $\sigma_{min} < 0$	$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{min}}{2}$ $\sigma_a = \sqrt{\frac{\sigma_{min}^2}{2}}$	$\pm \infty$	Пульсационный отрицательный
8		$\sigma_{max} < 0$ $\sigma_{min} < 0$	$\sigma_{cp} < 0$ $\sigma_a \neq 0$	$+1 < r < +\infty$	Несимметричный отрицательный
9		$\sigma_{max} = \sigma_{min} < 0$	$\sigma_{cp} = \sigma_{max} = \sigma_{min}$ $\sigma_a = 0$	$+1$	Постоянный отрицательный

выносливости» при статическом нагружении, будем иметь: $\sigma_B = \sigma_{\text{ст}}$.

Предел выносливости является основной характеристикой усталостной прочности материалов.

Симметричный цикл является самым опасным, так как независимо от материала при таком цикле предел выносливости имеет наименьшее значение. С другой стороны, симметричный цикл легче всего осуществить в лабораторных условиях при опытном определении предела выносливости, особенно при изгибе. Поэтому подавляющее большинство опытных данных получено для изгиба при симметричном цикле.

По опытным данным испытаний, порядок проведения которых установлен ГОСТ 2860-45, может быть построена кривая выносливости (рис. 200), дающая графическую зависимость между величиной максимального напряжения σ_{max} и количеством циклов нагружений N , необходимых для разрушения образца.

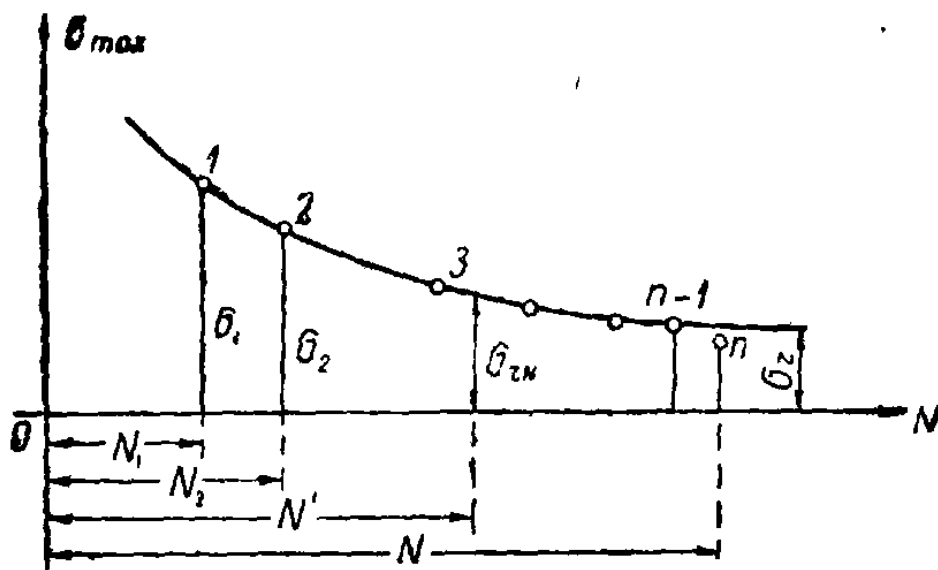


Рис. 200. Кривая выносливости в координатах N, σ_{max} .

Как видно из графика, кривая в левой своей части круто спускается вниз, а затем переходит в чрезвычайно пологую, почти горизонтальную линию, асимптотически приближающуюся к горизонтальной прямой.

Ордината этой асимптоты дает максимальное напряжение,

при котором образец выдерживает, не разрушаясь, неограниченное число циклов перемен нагрузки. Это максимальное напряжение и является пределом выносливости (σ_r).

Существует еще понятие предела ограниченной выносливости, т.е. наибольшее (по абсолютной величине) напряжение, которое материал может выдержать заданное число раз N' (ордината $\sigma_{rN'}$ на рис. 200).

Многочисленные опыты показали, что образец из черного металла, не разрушившийся после $(5-10) \cdot 10^6$ циклов напряжений, может практически выдержать неограниченное число циклов. Поэтому в практике предел ограниченной выносливости для черных металлов при числе циклов $N = 10^7$ можно принять за предел выносливости.

Число циклов, выдержав которое образец не разрушится в дальнейшем, называется базой для определения предела выносливости. Величина предела выносливости численно равна ординате точки пересечения кривой усталости с вертикалью, проведенной на расстоянии, равном принятой базе.

Для цветных металлов нельзя надежно установить такое число циклов, выдержав которое образец не разрушился бы в дальнейшем, так как даже после $N = 10^8$ циклов кривая выносливости продолжает еще падать и не имеет асимптоты.

Условно за предел выносливости для цветных металлов принимают предел ограниченной выносливости, соответствующий числу циклов $N = 10^8$.

Иногда из условия эксплуатации машины заранее известно, что деталь за время своей работы должна воспринять значительно меньшее число циклов, чем принятое при определении предела выносливости. В этом случае более экономично расчет детали вести на долговечность, а не исходить из предела выносливости. Долговечностью образца называют число циклов, необходимое для его поломки при данном цикле напряжений. Кривая выносливости позволяет решить вопрос о долговечности образца, так как абсциссы точек этой кривой определяют долговечность образца при соответствующих значениях максимального напряжения цикла.

Величина допускаемого напряжения по кривой выносливости может быть получена делением предельного (разрушающего) напряжения для заданного числа циклов, которое должен выдержать образец на коэффициент запаса прочности.

3. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ВЕЛИЧИНУ ПРЕДЕЛА ВЫНОСЛИВОСТИ

Влияние типа деформации

Результаты многочисленных опытов по установлению зависимости между пределом выносливости при изгибе σ_{-1}^H и пределом прочности при растяжении σ_B различных сталей приведены на рис. 201. Кривые I и II ограничивают области

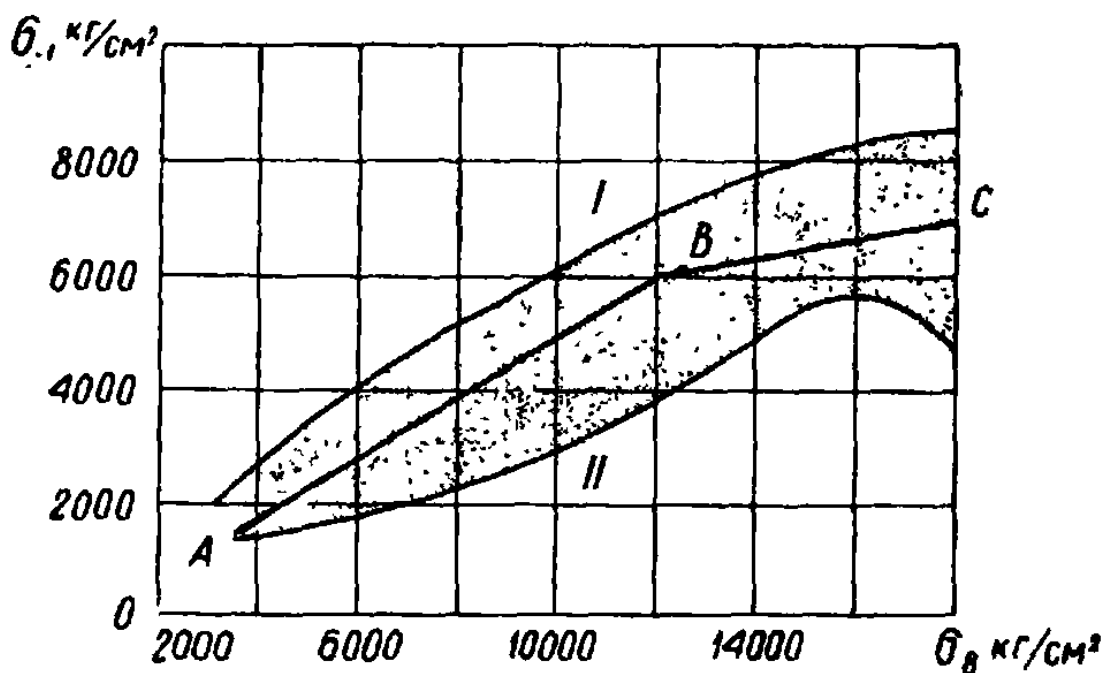


Рис. 201. Опытные данные по установлению зависимости между σ_{-1}^H и σ_B для сталей.

разброса точек. В среднем для сталей с пределом прочности от 3 000 до 12 000 кг/см² можно принять:

$$\sigma_{-1}^H = 0,5 \sigma_B.$$

Это соотношение соответствует прямой AB (рис. 201). Для высокопрочных сталей с пределом прочности от 12 000 до 18 000 кг/см^2 ориентировочно можно принять:

$$\sigma_{-1}^n = 4\,000 + \frac{1}{6} \sigma_B \text{ кг/см}^2.$$

Это соотношение дает прямая BC (рис. 201).

Для цветных металлов это соотношение изменяется в более широких пределах, чем для сталей, и составляет:

$$\text{для латуни } \sigma_{-1}^n = (0,30 \div 0,40) \sigma_B;$$

$$\text{для бронзы } \sigma_{-1}^n = (0,30 \div 0,50) \sigma_B;$$

$$\text{для дюралюминия и электролита } \sigma_{-1}^n = (0,25 \div 0,40) \sigma_B.$$

Для сталей при симметричных циклах можно принять следующую приближенную зависимость между пределом выносливости для осевой деформации (растяжение-сжатие) и пределом выносливости при изгибе:

$$\sigma_{-1}^o = (0,7 \div 0,8) \sigma_{-1}^n.$$

Предел выносливости при кручении:

$$\tau_{-1}^n = (0,40 \div 0,70) \sigma_{-1}^n.$$

В большинстве случаев:

$$\tau_{-1}^n = 0,58 \sigma_{-1}^n.$$

Все приведенные эмпирические формулы носят приближенный характер, и пользоваться ими следует с осторожностью при невозможности произвести необходимые опыты для определения величины предела выносливости.

Значения пределов выносливости для разных материалов и различных типах деформации, найденные опытным путем при испытании нормальных образцов, приведены в таблице 85.

Влияние степени несимметрии цикла

Величина предела выносливости существенно зависит от степени несимметрии цикла. Эту зависимость изображают диаграммами предельных напряжений, которые строятся на основании опытных данных для каждого материала.

Напряжения, соответствующие работе материала на пределе выносливости, будем называть предельными и обозначать с индексом r внизу (σ_{rmax} , σ_{rmin} , σ_{rcp} , σ_{ra}). Наибольшее по абсолютной величине значение σ_{rmax} или σ_{rmin} совпадает с пределом выносливости σ_r .

Таблица 85

Характеристики механической прочности сталей

Марка стали	Предел прочности σ_B в кг/мм ²	Предел текучести $\sigma_{0,2}$ в кг/мм ²	Предел выносливости при симметричном цикле		
			Изгиб σ_{-1}^H в кг/мм ²	Кручение τ_{-1}^K в кг/мм ²	Осевая деформация σ_{-1}^O в кг/мм ²

1. Углеродистая сталь

10	32—42	18	16—22	8—12	12—15
20	40—50	24	17—22	10—13	12—16
30	48—60	28	20—27	11—14	17—21
35	52—65	30	22—30	13—18	17—22
40	57—70	32	23—32	14—19	18—24
45	60—75	34	25—34	15—20	19—25
50	63—80	35	27—35	16—21	20—26
60	65—90	37	31—38	18—22	22—28
30Г	56—70	29	22—32	—	—
50Г	65—85	37	29—36	—	—
45Г2	70—90	41	31—40	18—22	—

Примечание. Данные приведены для сталей в нормализованном состоянии и получены на образцах $d = 6—12$ мм с полированной поверхностью. База испытаний $N = 10^7$ циклов; значения пределов текучести соответствуют нижнему пределу.

Марки стали ГОСТ 1050-52; при использовании сталей по ГОСТ 380-50 необходимо иметь в виду следующее соответствие марок: Сталь Ст. 3 соответствует стали 20, Ст. 5 — стали 35, Ст. 6 — стали 45.

2. Легированная сталь

20X	72—85	40—60	31—38	17—23	—
40X	73—105	65—90	32—48	21—26	24—34
45X	85—105	70—95	40—50	—	—
40XН	100—145	80—130	46—60	—	31—42
40XНМА	100—170	85—160	50—70	27—38	—
40XФ	90—125	80—95	38—49	—	—
50XФ	115—140	90—120	55—63	—	—
12XНЗА	95—140	70—110	42—64	22—30	—
37XНЗА	115—160	100—140	52—70	32—40	—
20XНЗА	95—145	85—110	43—65	24—31	—
18XНВА	115—140	85—120	54—62	30—34	—
25XНВА	110	95	50	—	—
30XГСА	110—170	85—150	48—70	28—40	—

Примечание. Пределы выносливости получены на полированных нормальных образцах. База испытаний $N=5 \cdot 10^6 \div 10^7$ циклов.

Предельные напряжения $\sigma_{ср}$ и $\sigma_{га}$ или σ_{rmax} и σ_{rmin} определяются опытным путем на специальных испытательных машинах, дающих возможность получить несимметричные циклы с различными коэффициентами несимметрии. Результаты опытов можно представить в виде графика. Для этого по оси абсцисс откладываются $\sigma_{ср}$, а по оси ординат $\sigma_{га}$. Каждая пара значений $\sigma_{ср}$ и $\sigma_{га}$, определяющих предельный цикл, будет изображаться на этом графике точкой (рис. 202). Для предельных циклов с различными коэффициентами несимметрии получим ряд точек. Плавная кривая, проведенная через эти точки, даст диаграмму предельных напряжений.

Точка В пересечения кривой АВ с осью $\sigma_{ср}$ ($\sigma_a = 0$) соответствует постоянной нагрузке и, следовательно, ее абсцисса представляет в масштабе диаграммы предел прочности.

Точка А кривой, для которой $\sigma_{ср} = 0$, соответствует симметричному циклу, и ее ордината дает предел выносливости σ_{-1} .

Чтобы найти предел выносливости при заданном коэффициенте несимметрии r , на диаграмме предельных напряжений (рис. 202) необходимо через начало координат провести луч OD под углом β , тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_{cp}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1 - r}{1 + r}. \quad (6)$$

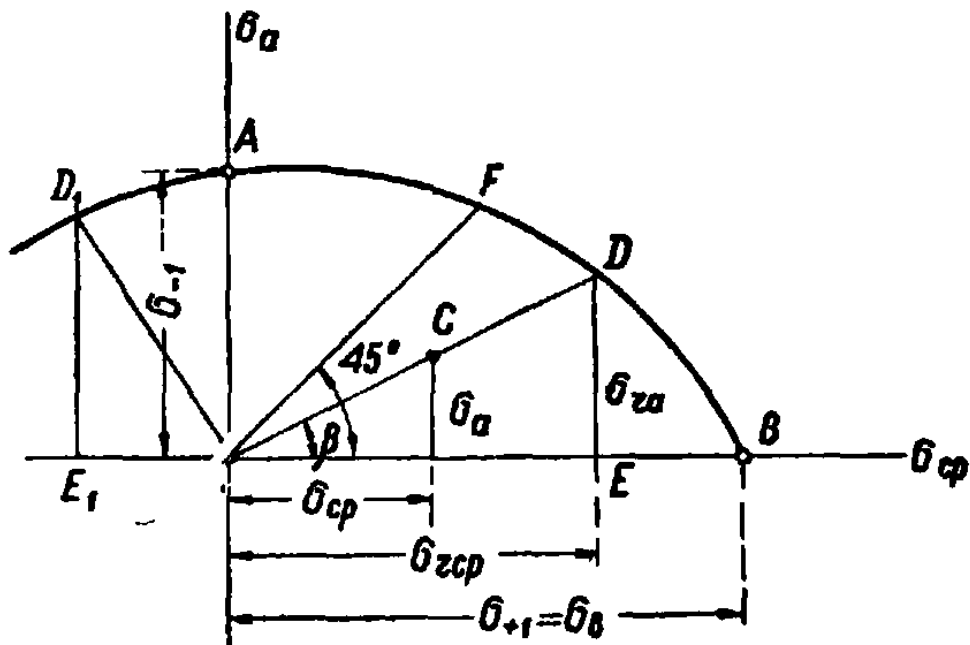


Рис. 202. Диаграмма предельных напряжений в координатах σ_{cp} , σ_a .

Сумма абсциссы и ординаты точки D пересечения этого луча с кривой AB дает искомую величину предела выносливости σ_r :

$$\sigma_{max} = OE + ED = \sigma_{rcp} + \sigma_{ra} = \sigma_r. \quad (7)$$

Предельные напряжения при пульсационном цикле характеризуются точкой F пересечения кривой AB с лучом, проведенным из начала координат под углом 45° к оси абсцисс.

В случае отрицательного среднего напряжения предельного цикла ($\sigma_{cp} < 0$) для определения предела выносливости нужно абсциссу брать по модулю:

$$\sigma_r = |\sigma_{min}| = OE_1 + E_1D_1 = |\sigma_{rcp}| + \sigma_{ra}.$$

Точки, лежащие на луче OD , представляют подобные циклы, и только точка D характеризует предельный цикл,

а все остальные точки, расположенные внутри области $OADB$ (например, точка C), представляют безопасные циклы напряжений в смысле появления трещин усталости, так как в этом случае:

$$\sigma_{max} = \sigma_{cp} + \sigma_a < \sigma_r$$

Для деталей из пластичных материалов является опасным не только усталостное разрушение, но и переход за предел текучести, что приводит к возникновению остаточных деформаций, искажающих форму и размеры детали. Поэтому максимальные напряжения циклов должны быть меньше не только предела выносливости, но и предела текучести:

$$\sigma_{max} = \sigma_{cp} + \sigma_a < \sigma_T$$

Для того чтобы исключить из диаграммы (σ_{cp}, σ_a) ту область, где $\sigma_{max} = \sigma_{cp} + \sigma_a > \sigma_T$, надо провести прямую KL , отсекающую на осях координат отрезки, равные σ_T (рис. 203).

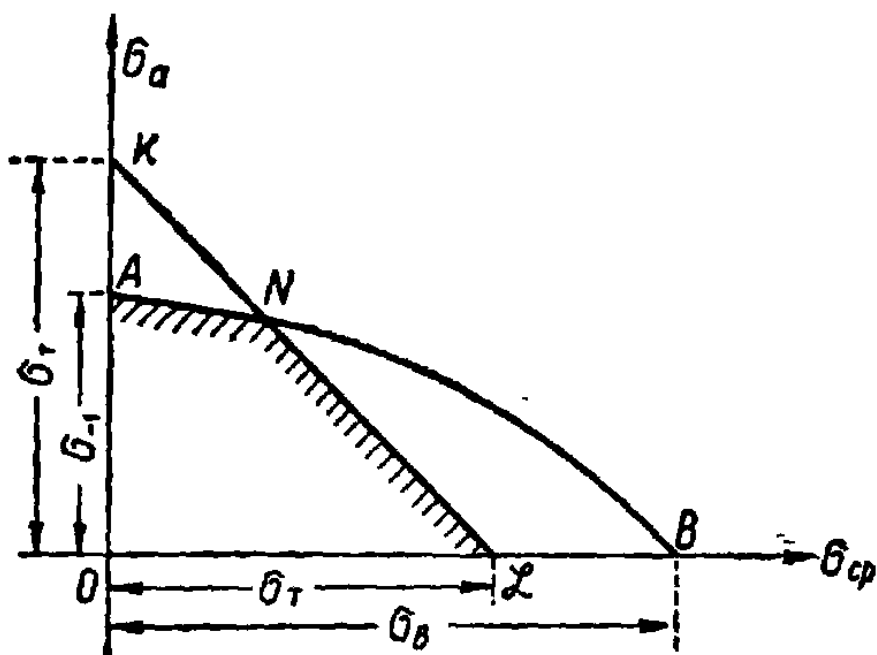


Рис. 203. Диаграмма предельных напряжений для пластичного материала.

Уравнение этой прямой будет:

$$\sigma_{cp} + \sigma_a = \sigma_T \quad (8)$$

Для точки N $\sigma_r = \sigma_T$; для точек прямой NL $\sigma_{max} = \sigma_T < \sigma_r$, а для точек участка кривой AN $\sigma_{max} = \sigma_r < \sigma_T$.

Таким образом, линия предельных напряжений ANL состоит из участка кривой AN (линия предельных циклов по усталостной прочности) и отрезка прямой NL (линия предельных циклов по статической прочности).

Схематизированные диаграммы предельных напряжений

При отсутствии необходимых опытных данных в практических расчетах пользуются схематизированными (спрямленными) диаграммами.

Наилучшую схематизацию дает диаграмма Серенсена — Кинасошвили (рис. 204), которая строится по трем опытным данным σ_T , σ_{-1} и σ_0 для лабораторного образца.

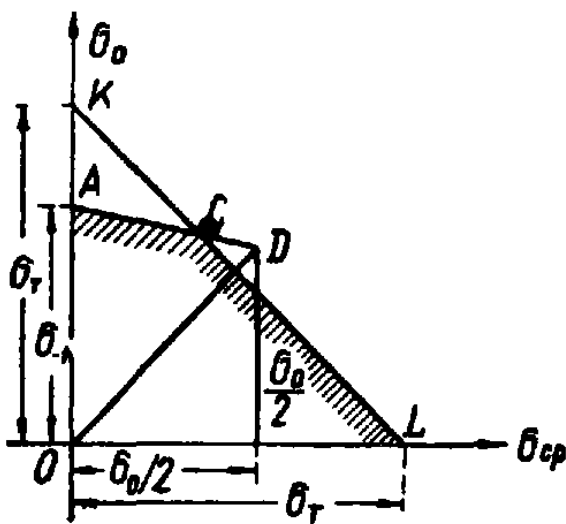


Рис. 204. Схематизированная диаграмма Серенсена — Кинасошвили.

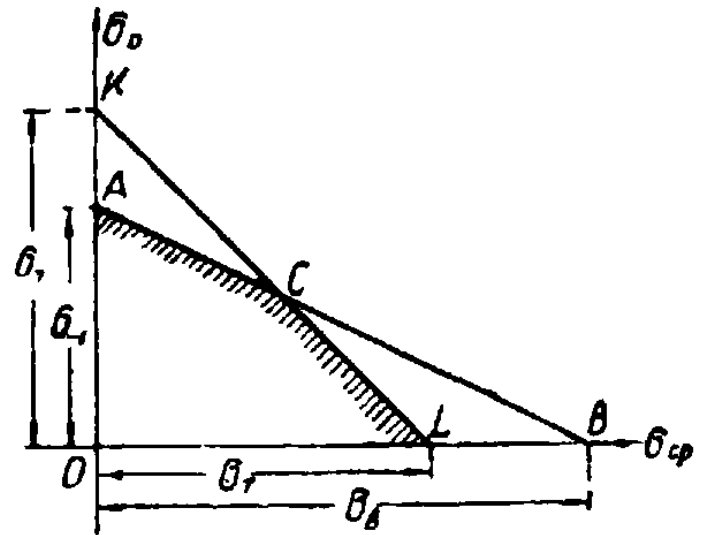


Рис. 205. Схематизированная диаграмма предельных напряжений.

Сначала наносятся точки A, K, L и D , координаты которых известны, а положение точки C определяется пересечением прямых AD и KL . Координаты точек ломаной ACL дают предельные значения σ_{cp} и σ_a .

Ввиду малочисленности опытных данных о величине предела выносливости при пульсационном цикле большое распространение получила схематизированная диаграмма, которая строится по опытным данным для величин σ_B , σ_T и σ_{-1} (рис. 205).

За диаграмму предельных напряжений принимается ломаная линия ACL .

Влияние концентрации напряжений и абсолютных размеров детали

Как показывает опыт, местные напряжения сильно снижают предел выносливости. Явление возникновения местных напряжений называется концентрацией напряжений, а причины, вызывающие концентрацию напряжений (отверстия, надрезы, выточки и т. п.), называются концентраторами напряжений.

Номинальным напряжением образца называется напряжение образца в опасном сечении, вычисленное по формулам сопротивления материалов без учета концентрации.

Отношение величины наибольшего местного напряжения (не превосходящего предел упругости) к величине номинального напряжения называется теоретическим коэффициентом концентрации напряжений:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma}; \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{max}}{\tau}. \quad (9)$$

σ_{max} и τ_{max} большей частью определяются экспериментально поляризационно-оптическим методом или вычисляются методами теории упругости в предположении полной упругости и изотропности материала. Поэтому теоретический коэффициент концентрации напряжений отражает лишь влияние формы концентратора на величину местных напряжений. Как показывают опыты, коэффициент концентрации зависит не только от формы, но и от материала образца, его абсолютных размеров, коэффициента несимметрии цикла и других факторов. Поэтому наряду с теоретическим коэффициентом концентрации вводится понятие эффективного коэффициента концентрации k_{σ} или k_{τ} , который представляет собой отношение предела выносливости при симметричном цикле гладкого образца к пределу выносливости образца того же диаметра с концентрацией напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1H}}; k_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1H}}. \quad (10)$$

Между коэффициентами k_σ и α_σ имеется следующая приближенная зависимость:

$$k_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1), \quad (11)$$

где q — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.

Если $q = 1$, то $k_\sigma = \alpha_\sigma$ и материал обладает полной чувствительностью к концентрации напряжений. Для высокопрочных сталей величина q близка к единице. Для конструкционных сталей в среднем $q = 0,6 \div 0,8$, для углеродистых сталей q снижается до 0,5.

Приближенное значение q (без учета влияния размеров детали) для стали может быть найдено из графиков рис. 206 в зависимости от временного сопротивления материала σ_B и теоретического коэффициента концентрации α .

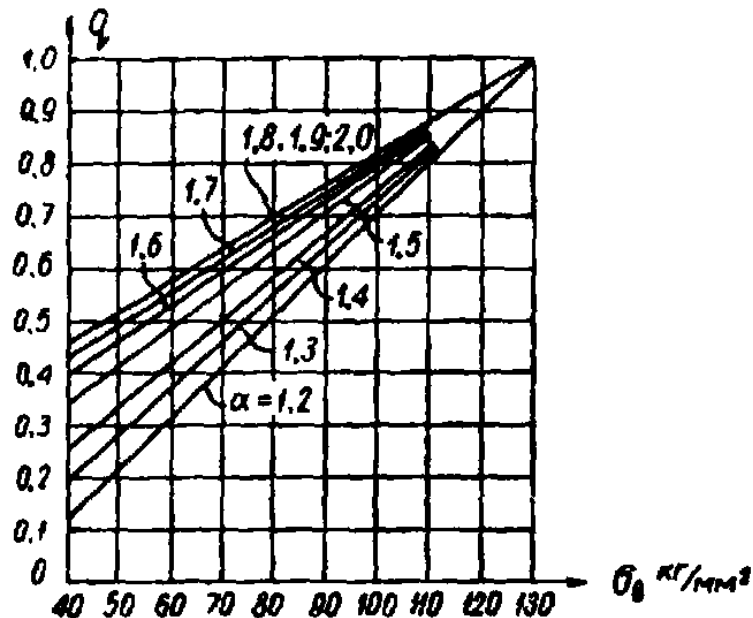


Рис. 206. Графики коэффициента «чувствительности» для стали.

Предел выносливости гладкого образца зависит от его абсолютных размеров. С увеличением абсолютных размеров сечений образца предел выносливости его понижается. Особенно сильно сказывается влияние масштабного фактора для образцов с концентрацией напряжений.

Уменьшение предела выносливости детали с увеличением ее абсолютных размеров учитывается масштабным коэффициентом ϵ_σ или ϵ_τ , равным отношению предела выносливости

детали данного размера к пределу выносливости лабораторного образца подобной конфигурации сечением $d_0 = 7 \div 10$ мм.

Масштабный коэффициент без концентрации напряжений:

$$(\varepsilon_\sigma)_d = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}} \quad (12)$$

Масштабный коэффициент с концентрацией напряжений:

$$(\varepsilon_{\sigma K})_d = \frac{(\sigma_{-1K})_d}{(\sigma_{-1K})_{d_0}} \quad (13)$$

Значения масштабных коэффициентов при изгибе и кручении приведены на рис. 207 и 208.

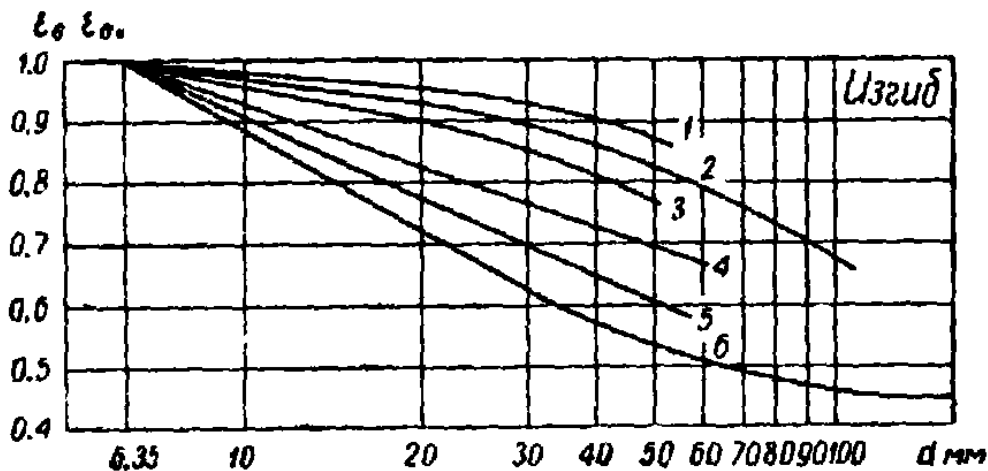


Рис. 207. Значения коэффициентов влияния абсолютных размеров при изгибе:

1—углеродистая сталь, гладкий полированный вал; 2—углеродистая сталь, гладкий шлифованный вал; 3—легированная сталь, гладкий полированный вал; 4—легированная сталь, гладкий шлифованный вал; углеродистая сталь, деталь с концентрацией напряжений; 5—легированная сталь, деталь с умеренной концентрацией напряжений ($k_\sigma \leq 2$); 6—конструкционная сталь

($\sigma_B \leq 65 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$), вал с напрессованной деталью; для $d \leq 60$ мм — легированная сталь с резкой концентрацией напряжений.

Эффективный коэффициент концентрации напряжений для детали, учитывающий суммарное влияние коэффициента концентрации и абсолютных размеров детали, равен отношению предела выносливости гладкого образца диаметром d_0 к пределу выносливости детали:

$$(k_\sigma)_D = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1K})_d} \quad (14)$$

Из этой формулы следует, что предел выносливости детали:

$$(\sigma_{-1к})_d = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(k_\sigma)_D}. \quad (15)$$

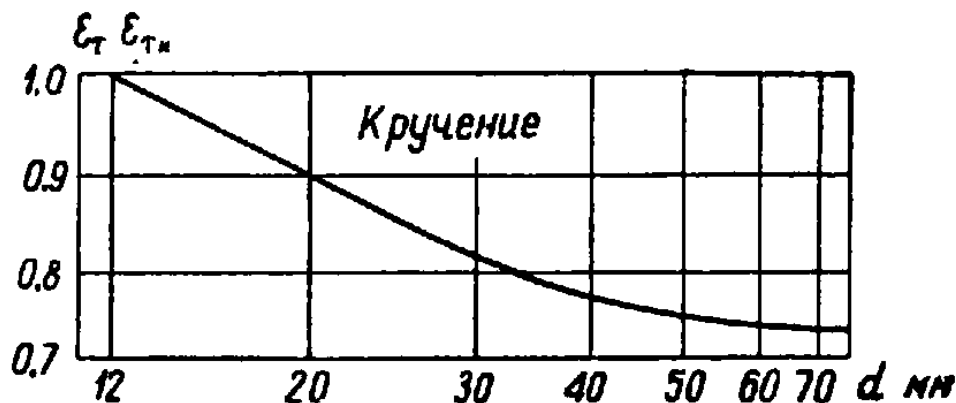


Рис. 208. Значения коэффициентов влияния абсолютных размеров при кручении.

Эффективный коэффициент концентрации k_σ образца с диаметром $d_1 \neq d_0$ определяется как отношение предела выносливости гладкого образца диаметром d_1 к пределу выносливости образца того же диаметра с концентратором напряжений:

$$(k_\sigma)_{d_1} = \frac{(\sigma_{-1})_{d_1}}{(\sigma_{-1к})_{d_1}}. \quad (16)$$

Величину $(k_\sigma)_D$ можно выразить через $(k_\sigma)_{d_1}$:

$$(k_\sigma)_D = (k_\sigma)_{d_1} \cdot \frac{(\varepsilon_{\sigmaк})_{d_1}}{(\varepsilon_\sigma)_{d_1} \cdot (\varepsilon_{\sigmaк})_d}. \quad (17)$$

Для частных случаев:

1) когда диаметр образца равен диаметру детали $d_1 = d$, то $(\varepsilon_{\sigmaк})_{d_1} = (\varepsilon_{\sigmaк})_d$ и

$$(k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_d}{(\varepsilon_\sigma)_d}, \quad (17 а)$$

2) когда коэффициент $(k_\sigma)_{d_1}$ определяется на образце диаметром d_0 , т. е. $d_1 = d_0$, то $(\varepsilon_{\sigmaк})_{d_1} = (\varepsilon_{\sigmaк})_{d_0} = 1$ и $(\varepsilon_\sigma)_{d_1} = (\varepsilon_\sigma)_{d_0} = 1$ и

$$(k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_{d_0}}{(\varepsilon_{\sigmaк})_d}. \quad (17 б)$$

Для деталей сечением 40—100 мм коэффициент $(k_{\sigma})_D$ можно определять по приближенной формуле (исключение — на-прессовки):

$$(k_{\sigma})_D = \frac{(k_{\sigma})_{d_1}}{(\epsilon_{\sigma})_d} \quad (18)$$

Поскольку $(k_{\sigma})_{d_1}$ мало изменяется при увеличении диаметра свыше 40 мм, можно принять $(k_{\sigma})_d \approx (k_{\sigma})_{d_1}$.

Обширный справочный материал по величинам эффективных коэффициентов концентрации напряжений для различных видов концентраторов приведен в работе С. В. Серенсена, Л. А. Козлова и В. П. Кагаева (Листки для конструктора «Вестник машиностроения» №№ 10, 11, 12 за 1949 г. и №№ 3, 4, 6, 7, 8, 9 за 1950 г.).

Влияние качества обработки поверхности на предел выносливости металлов

На предел выносливости детали существенное влияние оказывает качество обработки ее поверхности. Это влияние учитывается коэффициентом поверхностной чувствительности ϵ_n , равным отношению предела выносливости образца с заданным состоянием поверхности к пределу выносливости такого же гладкого образца с полированной поверхностью:

$$\epsilon_n = \frac{(\sigma_{-1})_n}{\sigma_{-1}} \quad (19)$$

На рис. 209 приведены ориентировочные численные значения коэффициентов поверхностной чувствительности для сталей в зависимости от ее обработки и временного сопротивления.

Как показывают приведенные на рис. 209 графики, чувствительность стали к состоянию поверхности возрастает с увеличением ее прочности. Поэтому детали из легированных сталей требуют особо тщательной обработки.

Цветные металлы и чугун мало чувствительны к обработке поверхности.

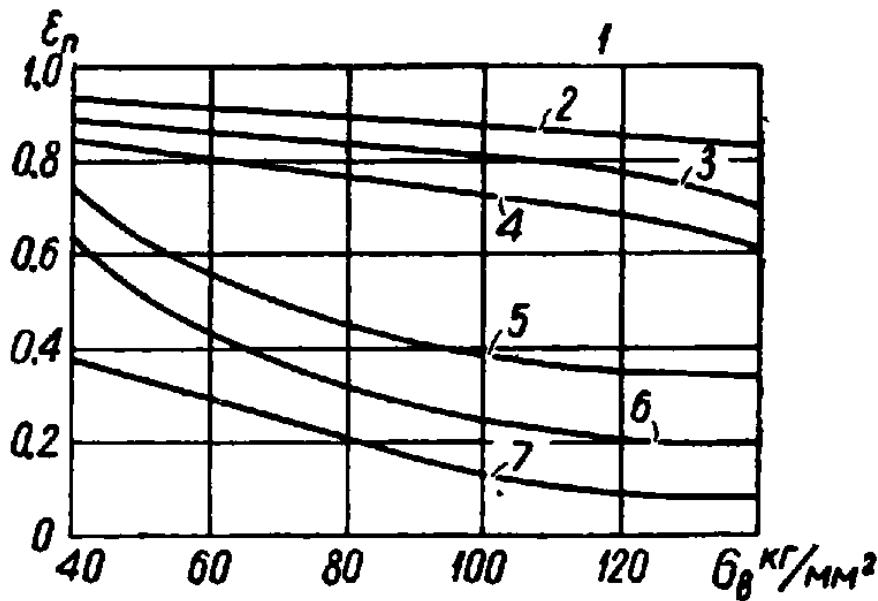


Рис. 209. Графики коэффициента поверхностной чувствительности для сталей:

1 — тщательное полирование; 2 — грубое полирование; 3 — тонкое шлифование или тонкая обточка; 4 — грубое шлифование или грубая обточка; 5 — испытание в пресной воде при наличии концентрации напряжений; 6 — испытание в пресной воде при отсутствии концентрации, в морской воде при наличии концентрации; 7 — испытание в морской воде при отсутствии концентрации.

4. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ОДНООСНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ЧИСТОМ СДВИГЕ (КРУЧЕНИИ)

Одноосное напряженное состояние имеет место при растяжении, сжатии и чистом изгибе. При поперечном изгибе бруса сплошного сечения касательными напряжениями, возникающими в поперечном сечении, обычно пренебрегают и расчет ведут так же, как и для случая одноосного напряженного состояния.

Мы рассмотрим наиболее часто встречающийся в практике случай расчета на прочность при неограниченном числе циклов нагружения, когда характеристикой усталостной прочности является предел выносливости.

К детали, изготовленной из пластичного материала, большей частью предъявляют требование, чтобы она обладала достаточной прочностью в смысле усталости и чтобы в ней не возникали остаточные деформации. Этому требованию удовлетворяет

Коэффициент запаса по усталостному разрушению для цикла, изображаемого точкой M_1 , равен:

$$n = \frac{ON + NM}{ON_1 + N_1M_1} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{NM}{N_1M_1} = \frac{OM}{OM_1}$$

и может быть вычислен по следующей формуле:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_{ср}}, \quad (20)$$

где

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \quad (21)$$

Аналогично для цикла, изображаемого точкой F_1 , коэффициент запаса по текучести определяется по формуле:

$$n_\tau = \frac{OE + EF}{OE_1 + E_1F_1} = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_a + \sigma_{ср}} = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_{max}}. \quad (22)$$

Коэффициент запаса для детали отличается от коэффициента запаса лабораторного образца, так как необходимо учесть влияние на усталостную прочность детали концентрации напряжений, абсолютных размеров детали и качества ее поверхности введением соответствующих поправочных коэффициентов.

Эти поправочные коэффициенты обычно определяют при симметричном цикле, а для постоянных нагрузок они близки к единице, поэтому на практике при несимметричном цикле поправочные коэффициенты относят только к переменной части цикла напряжений, т. е. к амплитуде цикла σ_a или τ_a , и расчетные формулы для определения коэффициента запаса для детали имеют следующий вид:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{(k_\sigma)_D}{\varepsilon_\sigma} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_{ср}}; \quad (23)$$

$$n_\tau = \frac{\sigma_\tau}{\sigma_a + \sigma_{ср}}. \quad (24)$$

Если данных о величинах предела выносливости при пульсационном цикле нет, то для определения коэффициента запаса пользуются схематизированной диаграммой, показанной на рис. 205, и в этом случае расчетные формулы будут:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{(k_{\sigma})D}{\epsilon_{\Pi}} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_{\text{ср}}}; \quad (25)$$

$$n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_a + \sigma_{\text{ср}}}. \quad (26)$$

При расчете определяют оба коэффициента запаса — по усталости и по текучести и руководствуются меньшим из них.

Для осевого растяжения-сжатия в формулах (23) и (25) σ_{-1} надо заменить на σ_{-1}^0 — предел выносливости при симметричном цикле для осевой деформации.

При расчете деталей, находящихся в условиях чистого сдвига, в предыдущих формулах достаточно σ заменить на τ :

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\frac{(k_{\tau})D}{\epsilon_{\Pi}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_{\text{ср}}}, \quad (27)$$

где

$$\psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0};$$

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\frac{(k_{\tau})D}{\epsilon_{\Pi}} \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_B} \tau_{\text{ср}}}; \quad (28)$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{\tau}}{\tau_a + \tau_{\text{ср}}}. \quad (29)$$

Величина коэффициента запаса прочности зависит от многих причин. Если условия эксплуатации машины, характер внешних нагрузок и механические характеристики материала хорошо известны, а напряжения определены достаточно точными методами, запасы прочности по усталостному разрушению и по текучести могут быть взяты небольшими — порядка 1,2—1,5; в противном случае их следует увеличить.

В среднем величины запасов прочности колеблются в пределах:

$$\left. \begin{array}{l} n_T \\ n \end{array} \right\} = 1,5 \div 2,0.$$

При расчете деталей, выполненных из хрупкого материала, на диаграмме в координатах σ_a , σ_{cp} не имеет смысла проводить линию KL (рис. 203), так как весьма хрупкие материалы не имеют условного предела текучести.

В этом случае коэффициент запаса вычисляют по формулам (25) и (28).

Усталостная прочность деталей зависит от условий эксплуатации, конструктивных, технологических и других факторов. Поэтому при конструировании деталей машин расчет на прочность при переменных напряжениях носит поверочный характер и заключается в определении коэффициента запаса. Но в некоторых простейших случаях возможно непосредственное определение конструктивных размеров деталей по допускаемым напряжениям для данного коэффициента запаса и заданного соотношения амплитуды напряжения к среднему напряжению:

$$\rho_\sigma = \frac{\sigma_a}{\sigma_{cp}}.$$

Для заданного соотношения $\frac{\sigma_a}{\sigma_{cp}} = \rho_\sigma$ при принятом коэффициенте запаса n допускаемое максимальное напряжение по усталостному разрушению, исходя из схематической диаграммы рис. 205, определяется по формуле:

$$[\sigma_r] = \frac{\sigma_{-1}}{n} \cdot \frac{1 + \rho_\sigma}{\frac{(k_\sigma)_D}{\epsilon_\Pi} \rho_\sigma - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}}; \quad (30)$$

$$[\tau_r] = \frac{\tau_{-1}}{n} \cdot \frac{1 + \rho_\tau}{\frac{(k_\tau)_D}{\epsilon_\Pi} \rho_\tau - \frac{\tau_{-1}}{\tau_B}}; \quad (30a)$$

$$\text{где } \rho_\tau = \frac{\tau_a}{\tau_{cp}}.$$

Допускаемое максимальное напряжение, исходя из расчета на текучесть, будет:

$$[\sigma_r] = \frac{\sigma_T}{n_T}; \quad (31)$$

$$[\tau_r] = \frac{\tau_T}{n_T}. \quad (31a)$$

Из двух полученных величин для допускаемого напряжения берется меньшее.

Рассмотрим несколько примеров определения коэффициента запаса при переменных напряжениях.

Пример 1. Определить коэффициент запаса вращающегося шлифованного вала в месте изменения его радиуса с 40 на 50 мм. Радиус галтели $r = 2$ мм (рис. 211). Изгибающий момент M в опасном сечении постоянен во времени по величине и по направлению $M = 3\,200$ кгсм. Материал вала — сталь 45. Ее механические характеристики: $\sigma_B = 5\,250$ кг/см²; $\sigma_T = 2\,840$ кг/см²; $\sigma_{-1} = 2\,250$ кг/см².

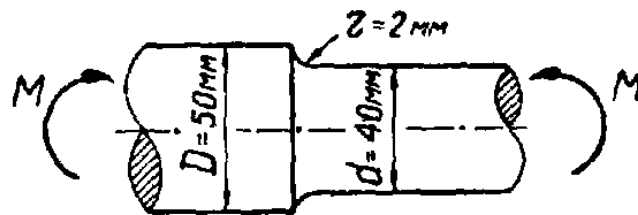


Рис. 211. К примеру 1.

Решение. Эффективный коэффициент концентрации напряжений детали $(k_\sigma)_D$ для изгиба вала с галтелью при $\frac{r}{d} = \frac{2}{40} = 0,05$ и с соотношением диаметров $\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1,25$ определяем по приближенной формуле (18), пользуясь справочными данными, приведенными в «Вестнике машиностроения» № 10 за 1949 г. (Листки для конструктора, листы №№ 1, 2 и 3):

$$(k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_{d1}}{(\epsilon_\sigma)_d} = \frac{1,79}{0,85} = 2,10.$$

По графику 3 (рис. 209) для $\sigma_B = 5\,250$ кг/см² для шлифованной поверхности находим: $\epsilon_\Pi = 0,93$.

В данном случае цикл изменения напряжений симметричный. Амплитуда напряжений:

$$\sigma_a = \frac{M}{W_p} = \frac{M}{0,1 d^3} = \frac{3\,200}{0,1 \cdot 4^3} = 500 \text{ кг/см}^2.$$

Среднее напряжение цикла $\sigma_{\text{ср}} = 0$.

Коэффициент запаса по усталостной прочности определяем по формуле (25):

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{(k_{\sigma}) D}{\varepsilon_n} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_{\text{ср}}} = \frac{2\,250}{\frac{2,10}{0,93} 500} = 2,0.$$

Пример 2. Определить коэффициент запаса клапанной пружины, изготовленной из хромованадиевой проволоки. Характеристики материала проволоки: $\tau_T = 9\,500 \text{ кг/см}^2$; $\tau_{-1} = 5\,000 \text{ кг/см}^2$; $\tau_0 = 7\,000 \text{ кг/см}^2$; $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$. Размеры пружины: средний диаметр пружины $D = 50 \text{ мм}$; диаметр проволоки пружины $d = 5 \text{ мм}$; число рабочих витков пружины $n = 6$. Длина рабочей части пружины в свободном состоянии $H = 75 \text{ мм}$. Предварительная затяжка пружины $\lambda_2 = 25 \text{ мм}$. Наибольший ход клапана при работе $h = 14 \text{ мм}$.

Решение. Напряжение в опасных точках поперечных сечений проволоки пружины определяем по формуле (44) главы V:

$$\tau = k_1 \frac{16 PR}{\pi d^3} = k_1 \frac{8 PD}{\pi d^3}. \quad (\text{а})$$

Осадка пружины определяется по формуле (45) главы V:

$$\lambda = k_2 \frac{4 PR^3 n}{Gr^4} = k_2 \frac{8 PD^3 n}{Gd^4}. \quad (\text{б})$$

На основании формул (а) и (б) получим:

$$\tau = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{Gd}{\pi D^2 n} \lambda. \quad (\text{в})$$

Поправочные коэффициенты k_1 и k_2 находим по таблице 23 главы V при $\frac{D}{d} = \frac{50}{5} = 10$; $k_1 = 1,14$; $k_2 = 1,05$.

1. Определяем напряжения в опасных точках поперечных сечений пружины:

а) при закрытом клапане:

$$\tau = \frac{k_1 Gd}{k_2 \pi D^2 n} \lambda_3 = \frac{1,14 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,5}{1,05 \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 6} 2,5 = 2\,300 \text{ кг/см}^2;$$

б) при полном открытии клапана:

$$\lambda = \lambda_3 + h = 25 + 14 = 39 \text{ мм}$$

и в этом случае:

$$\tau = \frac{k_1 Gd}{k_2 \pi D^2 n} \lambda = \frac{1,14 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 0,5}{1,05 \cdot 3,14 \cdot 5^2 \cdot 6} 3,9 = 3\,600 \text{ кг/см}^2.$$

Следовательно, максимальное и минимальное напряжения цикла имеют значения: $\tau_{max} = 3\ 600\ \text{кг/см}^2$; $\tau_{min} = 2\ 300\ \text{кг/см}^2$.

2. Определяем среднее напряжение цикла τ_{cp} и амплитуду цикла τ_a по формулам (3) и (4):

$$\tau_{cp} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{3\ 600 + 2\ 300}{2} = 2\ 950\ \text{кг/см}^2;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{3\ 600 - 2\ 300}{2} = 650\ \text{кг/см}^2.$$

3. Определяем коэффициент запаса по усталостному разрушению по формуле (27). Так как пределы выносливости определены на образце из проволоки (нешлифованном) и концентрация напряжений отсутствует, то $(\epsilon_\tau)_d = 1$; $(k_\tau)_D = 1$ и $\epsilon_\Pi = 1$:

$$\psi_\tau = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 5\ 000 - 7\ 000}{7\ 000} = \frac{3}{7} = 0,428.$$

По формуле (27) получим:

$$n = \frac{\tau_{-1}}{\frac{(k_\tau)_D}{\epsilon_\Pi} \tau_a + \psi_\tau \tau_{cp}} = \frac{5\ 000}{650 + 0,428 \cdot 2\ 950} = 2,62.$$

4. Определяем коэффициент запаса по текучести по формуле (29):

$$n_\tau = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_{cp}} = \frac{\tau_T}{\tau_{max}} = \frac{9\ 500}{3\ 600} = 2,66.$$

Таким образом, запас прочности пружины определяется усталостным разрушением и равен:

$$n = 2,62.$$

Б. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Многие детали машин, как, например, трансмиссионные и коленчатые валы, пружины различных конструкций и т. д., испытывают переменные во времени напряжения в условиях сложного напряженного состояния.

Для расчета таких деталей необходимо, как и в случае статической нагрузки, создать теорию прочности при переменных напряжениях, которая позволила бы судить о прочности материала, находящегося в сложном напряженном состоянии, на

основании опытных данных при одноосном напряженном состоянии.

Рассмотрим наиболее важный и часто встречающийся случай плоского напряженного состояния — совместное действие изгиба и кручения.

В результате многочисленных опытов с малоуглеродистыми и различными легированными сталями и специальными чугунами были установлены следующие зависимости между предельными значениями нормальных и касательных напряжений:

1) для сталей:

$$\left(\frac{\sigma_{ra}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ra}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1; \quad (32)$$

2) для чугунов:

$$\left(\frac{\sigma_{ra}}{\sigma_{-1}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) + \frac{\sigma_{ra}}{\sigma_{-1}} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) + \left(\frac{\tau_{ra}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1, \quad (33)$$

где: σ_{ra} и τ_{ra} — предельные значения амплитуд нормальных и касательных напряжений;

σ_{-1} и τ_{-1} — пределы выносливости при симметричном цикле, соответственно при изгибе и кручении.

Формулы (32) и (33) были получены при совместном изгибе и кручении из опытов с образцами, нормальные и касательные напряжения у которых изменялись синфазно (касательные и нормальные напряжения одновременно достигали экстремальных значений) по симметричным циклам (рис. 212).

Сдвиг фаз не оказывает существенного влияния на прочность деталей, работающих одновременно на изгиб и кручение. Поэтому этими формулами можно пользоваться и тогда, когда напряжения σ и τ изменяются не в одной фазе (несинфазно). В последнем случае расчет по этим формулам приводит к увеличению запаса прочности.

Если $\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} = 2$, что характерно для пластичных материалов (малоуглеродистая сталь), то формулы (32) и (33) совпадают.

Обозначив через σ_a и τ_a значения амплитуд нормального

и касательного напряжений для заданного рабочего цикла напряжений и учитывая, что циклы подобны, имеем:

$\frac{\sigma_{ra}}{\sigma_a} = \frac{\tau_{ra}}{\tau_a} = n$ — коэффициент запаса по усталостному разрушению (общий коэффициент запаса);

$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} = n_\sigma$ — частный коэффициент запаса только по изгибу, определяемый в предположении отсутствия кручения;

$\frac{\tau_{-1}}{\tau_a} = n_\tau$ — частный коэффициент запаса только по кручению.

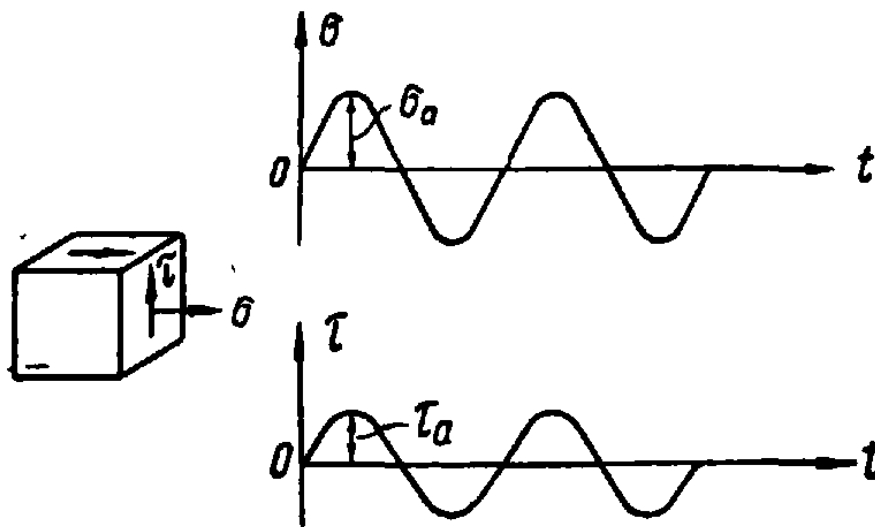


Рис. 212. Синфазное изменение нормальных и касательных напряжений по симметричным циклам.

Используя принятые обозначения, зависимости (32) и (33) можно написать в следующем виде:

$$\left(\frac{n}{n_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{n}{n_\tau}\right)^2 = 1; \quad (34 \text{ а})$$

$$\left(\frac{n}{n_\sigma}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) + \frac{n}{n_\sigma} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) + \left(\frac{n}{n_\tau}\right)^2 = 1. \quad (34 \text{ б})$$

Из формулы (34 а) получаем окончательное выражение для общего коэффициента запаса по усталостному разрушению:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \quad (35)$$

Формулы (34 а) и (35) применяют и в случае несимметричных циклов (рис. 213).

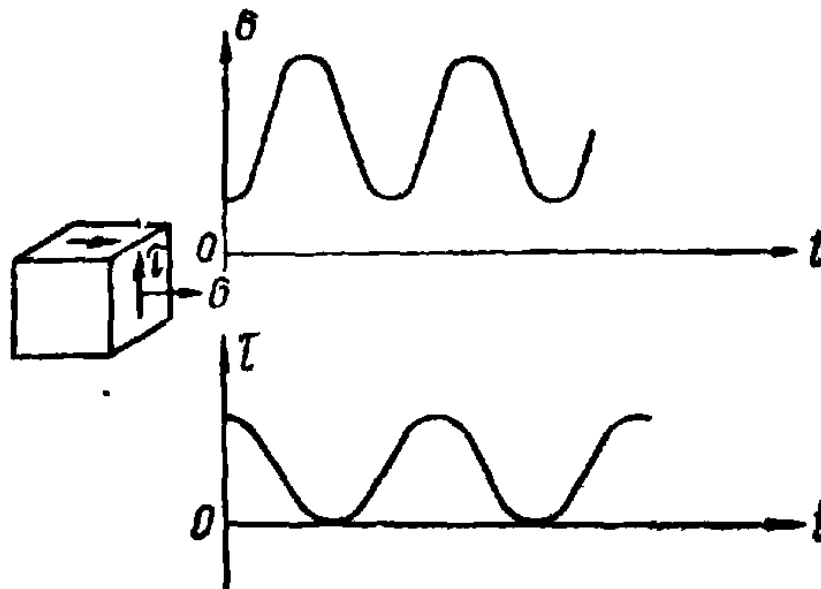


Рис. 213. Несинфазное изменение нормальных и касательных напряжений по несимметричным циклам.

В этом случае частные коэффициенты запаса по разрушению для нормальных напряжений (n_{σ}) и касательных напряжений (n_{τ}) определяются по формулам (23), (25), (27) и (28).

Коэффициент запаса по текучести определяется по формуле:

$$n_{\tau} = \frac{\sigma_{\tau}}{\sigma_{\text{расч}}}, \quad (36)$$

где: σ_{τ} — предел текучести;

$\sigma_{\text{расч}}$ — расчетное напряжение, величина которого зависит от принятой теории прочности.

Из двух полученных коэффициентов запаса по усталости и по текучести прочность оценивается меньшим по величине коэффициентом.

Пример 3. Определить коэффициент запаса в опасном сечении элемента вала с кольцевой выточкой (рис. 214).

Дано: $D = 110$ мм, $d = 90$ мм, радиус кольцевой выточки $r = 10$ мм, поверхность вала шлифованная. Материал — углеродистая сталь с характеристиками: $\sigma_B = 50$ кг/мм², $\sigma_T = 30$ кг/мм², $\sigma_{-1} = 22$ кг/мм²; $\tau_B = 26$ кг/мм², $\tau_T = 16$ кг/мм², $\tau_{-1} = 12$ кг/мм².

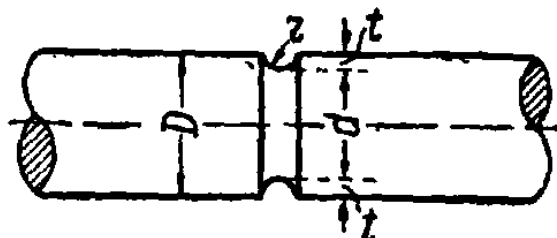


Рис. 214. К примеру 3.

Действующие переменные во времени моменты равны: $M_{max}^H = 500$ кгм, $M_{max}^K = 200$ кгм, $M_{min}^H = -100$ кгм, $M_{min}^K = -50$ кгм.

Решение. Полярный и осевой моменты сопротивления сечения:

$$W_p = 0,2 d^3 = 0,2 \cdot 9^3 = 146 \text{ см}^3; W_H = \frac{W_p}{2} = 73 \text{ см}^3.$$

1. Определяем максимальные и минимальные номинальные напряжения в опасном сечении вала:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}^H}{W_H} = \frac{50\,000}{73} = +685 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{min}^H}{W_H} = \frac{-10\,000}{73} = -137 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}^K}{W_p} = \frac{20\,000}{146} = +137 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{min}^K}{W_p} = \frac{-5\,000}{146} = -34 \text{ кг/см}^2.$$

2. Определяем средние напряжения и амплитуды циклов:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{685 - 137}{2} = +274 \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{685 + 137}{2} = +411 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{cp} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{137 - 34}{2} = + 51,5 \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{137 + 34}{2} = + 85,5 \text{ кг/см}^2.$$

3 Определяем поправочные коэффициенты. Эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе $(k_\sigma)_D$ и при кручении $(k_\tau)_D$ для вала с кольцевой выточкой определяем по формуле (18), пользуясь справочным материалом из «Вестника машиностроения» №№ 10 и 11 за 1949 г. (Листки для конструктора, листы №№ 2 и 4):

$$\text{а) от изгиба } (k_\sigma)_D = \frac{(k_\sigma)_{d_1}}{(\varepsilon_\sigma)_d} = \frac{1,6}{0,715} = 2,24;$$

$$\text{б) от кручения } (k_\tau)_D = \frac{(k_\tau)_{d_1}}{(\varepsilon_\tau)_d} = \frac{1,2}{0,715} = 1,68.$$

Коэффициент состояния поверхности ϵ_Π находим по графику 3 рис. 209. Для $\sigma_B = 5\,000 \text{ кг/см}^2$, для шлифованной поверхности

$$\epsilon_\Pi = 0,93.$$

4. Вычисляем коэффициент запаса. Материал вала в опасном сечении испытывает плоское напряженное состояние. Поэтому вначале находим частные коэффициенты запаса по формулам (25) и (28):

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{(k_\sigma)_D}{\epsilon_\Pi} \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_{cp}} = \frac{22}{\frac{2,24}{0,93} 4,11 + \frac{22}{50} 2,74} = 1,98;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{(k_\tau)_D}{\epsilon_\Pi} \tau_a + \frac{\tau_{-1}}{\tau_B} \tau_{cp}} = \frac{12}{\frac{1,68}{0,93} 0,855 + \frac{12}{26} 0,515} = 6,8.$$

Общий коэффициент запаса по усталостной прочности находим по формуле (35):

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{1,98 \cdot 6,8}{\sqrt{1,98^2 + 6,8^2}} = 1,89.$$

Определяем коэффициент запаса по текучести. По третьей теории прочности наибольшее расчетное напряжение:

$$\sigma_{расч} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4 \tau_{max}^2} = \sqrt{6,85^2 + 4 \cdot 1,37^2} = 7,0 \text{ кг/мм}^2.$$

По формуле (36)

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{расч}} = \frac{30}{7} = 4,3.$$

Таким образом, коэффициент запаса лимитируется усталостной прочностью и равен 1,89.

Глава XIX. РАСЧЕТЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

Динамической нагрузкой называется такая нагрузка, при действии которой в каждый момент времени внешние силы не уравновешены внутренними силами упругости.

Внешние и внутренние силы при динамической нагрузке могут быть между собой связаны с помощью уравнений равновесия, если воспользоваться принципом Даламбера и присоединить так называемые силы инерции. Сила инерции материальной точки равна по величине произведению массы точки на ее ускорение и направлена в сторону, обратную ускорению.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЗАДАННЫХ УСКОРЕНИЯХ

Напряжения в стержне переменного сечения при равноускоренном подъеме груза (рис. 215):

$$\sigma = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \left(\frac{Q}{F} + \frac{\gamma}{F} \int_0^z F dz\right), \quad (1)$$

где: σ — нормальное напряжение в исследуемом поперечном сечении стержня на расстоянии z от нижнего конца;
 F — площадь исследуемого поперечного сечения;
 l — длина стержня;
 Q — величина поднимаемого груза;
 a — ускорение груза;
 g — ускорение силы тяжести;
 γ — вес единицы объема материала стержня.

Для стержня постоянного поперечного сечения ($F = const$) наибольшие нормальные напряжения в верхнем сечении определяются по формуле:

$$\sigma_{max} = \left(1 + \frac{a}{g}\right) \left(\frac{Q}{F} + \gamma l\right) = k_d \sigma_{ст} \quad (2)$$

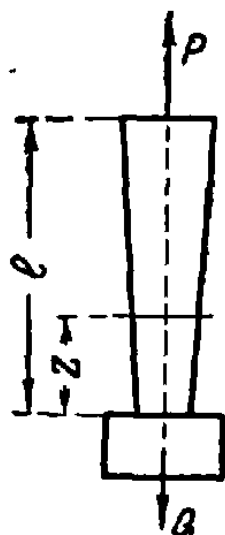


Рис. 215. К определению напряжений в стержне переменного сечения.

где: $\sigma_{ст} = \frac{Q}{F} + \gamma l$ — напряжение в опасном сечении при статическом действии силы;

$k_d = \left(1 + \frac{a}{g}\right)$ — динамический коэффициент.

Напряжения в тонком круговом кольце, вращающемся с постоянной скоростью

а) Кольцо вращается в своей плоскости относительно оси, проходящей через центр кольца (рис. 216). Нормальное напряжение в поперечном сечении кольца:

$$\sigma = \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} = \frac{\gamma v^2}{g}, \quad (3)$$

где: v — окружная скорость точек кольца.

ω — угловая скорость.

Для данного материала величина напряжений зависит только от скорости v .

В таблице 86 приведены напряжения в стальном кольце ($\gamma = 7,86 \text{ г/см}^3$) при различных окружных скоростях вращения.

Таблица 86

$v \text{ м/сек}$	30	60	90	120	150	180	240	300
$\sigma \text{ кг/см}^2$	75	300	665	1 200	1 850	2 650	4 750	7 500

б) Кольцо вращается вокруг оси, совпадающей с диаметром (рис. 217). В этом случае продольная сила и изгибающий момент будут одновременно наибольшими в сечениях A и B ; их величины:

$$N_{max} = \frac{\gamma \omega^2 F R^2}{g}; \quad M_{max} = \frac{\gamma \omega^2 F R^3}{4g}. \quad (4)$$

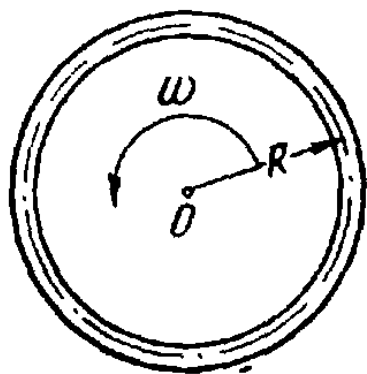


Рис. 216. Тонкое кольцо, вращающееся в своей плоскости.

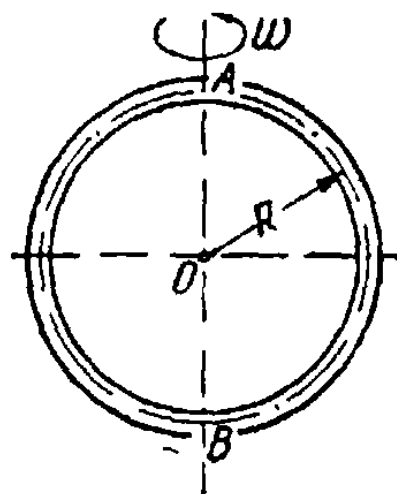


Рис. 217. Тонкое кольцо, вращающееся относительно своего диаметра.

Наибольшие нормальные напряжения в этих сечениях:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} + \frac{M_{max}}{W}. \quad (5)$$

Напряжения в спарниках (рис. 218)

Наиболее опасным будет крайнее нижнее положение спарника AB , при котором силы инерции совпадают по направлению с собственным весом спарника.

В этом случае интенсивность нагрузки на единицу длины спарника равна:

$$q = q_1 + q_2 = \gamma F + \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r.$$

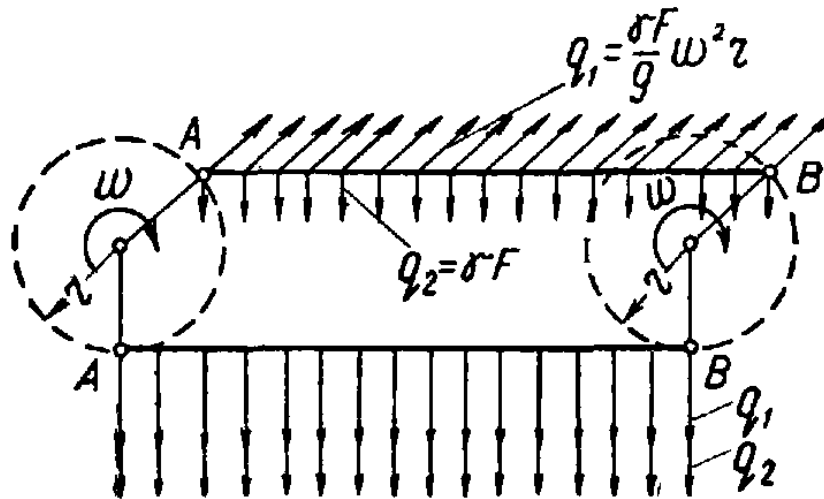


Рис. 218. К определению напряжений в спарниках.

Рассматривая спарник как простую балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , будем иметь:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{ql^2}{8W} = \frac{\gamma Fl^2}{8W} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g} \right), \quad (6)$$

где W — осевой момент сопротивления сечения спарника.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ УДАРЕ

При изучении явления удара принимаем следующие ограничения и допущения:

1. В ударяемой конструкции возникают напряжения, не превосходящие предела пропорциональности, и закон Гука при ударе сохраняет свою силу.

2. Удар является неупругим, и после удара тела не отделяются друг от друга.

3. Ударяющее тело является абсолютно жестким и не деформируется.

4. Сопротивлением движению пренебрегаем.

5. Масса ударяемой конструкции мала по сравнению с массой ударяющего тела и в расчет не принимается.

Определение напряжений и деформаций при ударе производится на основании закона сохранения энергии.

Пусть груз P без начальной скорости падает на упругую конструкцию с высоты h . На рис. 219 и 220 показаны изгибающий и растягивающий удары.

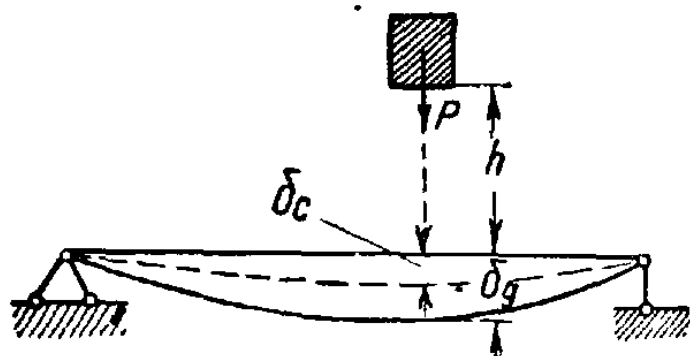


Рис. 219. Изгибающий удар.

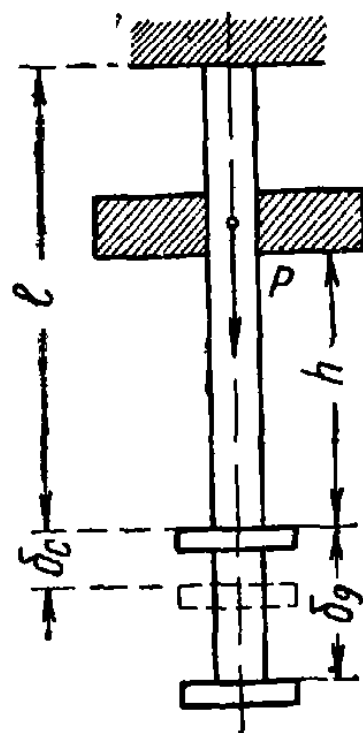


Рис. 220. Растягивающий удар.

Скорость падения груза, пренебрегая сопротивлением воздуха, определяется по формуле $v = \sqrt{2gh}$. Отсюда следует, что $h = \frac{v^2}{2g}$. Таким образом, всякий удар со скоростью v можно привести к свободному падению с условной высоты h .

Наибольшая динамическая деформация при ударе в точке падения груза δ_d определяется по формуле:

$$\delta_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}} \right) = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{ст}}} \right), \quad (7)$$

где $\delta_{ст}$ есть статическая деформация в той же точке от силы P .

Величина в скобках показывает, во сколько раз динамическая деформация больше статической. Эта величина называется динамическим коэффициентом удара. Таким образом,

$$\delta_d = k_d \delta_{ст},$$

$$\text{где } k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}. \quad (8)$$

Так как по закону Гука напряжения пропорциональны деформациям, то

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст},$$

где $\sigma_{ст}$ — статическое напряжение.

Величина напряжений при ударе зависит от величины деформации, т. е. от жесткости ударяемого тела. С уменьшением жесткости напряжения при ударе уменьшаются. Поэтому для смягчения удара применяют резиновые и пружинные прокладки.

При мгновенном приложении нагрузки без удара $h = 0$ и из формулы (8) получим:

$$k_d = 2; \quad \delta_d = 2\delta_{ст}; \quad \sigma_d = 2\sigma_{ст}.$$

Если высота падения груза h весьма велика по сравнению с $\delta_{ст}$, то величина динамического коэффициента определяется по приближенной формуле:

$$k_d = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_{ст}}}. \quad (9)$$

Крутящий удар наблюдается при резком снижении угловой скорости вала с маховиком путем торможения конца вала (рис. 221).

Динамический угол закручивания вала при этом:

$$\varphi_d = \sqrt{\frac{J_M l}{GJ_p} (\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (10)$$

где: J_M — момент инерции массы маховика;

J_p — момент инерции сечения вала;

ω_0, ω — угловые скорости вала до и после торможения.

Динамический крутящий момент определяется формулой:

$$M_d = \frac{GJ_p}{l} \varphi_d,$$

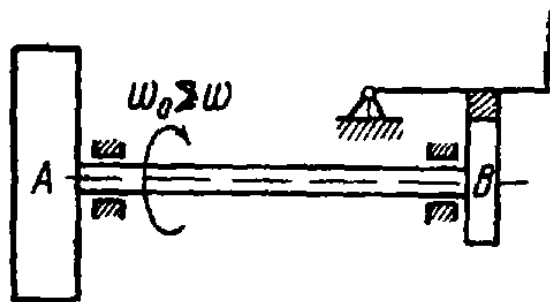


Рис. 221. Крутящий удар.

а соответствующее ему максимальное касательное напряжение:

$$\tau_d = \frac{M_d}{W_p}.$$

Учет массы конструкции, испытывающей удар

Если масса ударяемой конструкции не мала по сравнению с массой ударяющего тела, то ею пренебречь нельзя, и в этом случае в приведенных ранее формулах взамен статической деформации $\delta_{ст}$ подставляют $\delta_{ст} \left(1 + \frac{kQ}{P} \right)$,

где: Q — полный вес конструкции;

P — вес ударяющего тела;

k — коэффициент приведения.

При растягивающем ударе (рис. 220) $k = \frac{1}{3}$, при изгибающем ударе в середину пролета простой балки (рис. 219) $k = \frac{17}{35}$.

С учетом массы конструкции динамический коэффициент определяется по формуле:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст} \left(1 + \frac{kQ}{P} \right)}}. \quad (11)$$

Из сравнения формул (7) и (11) следует, что учет собственной массы ударяемой конструкции приводит к уменьшению величины динамического коэффициента, т. е. к снижению эффекта удара.

3. КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Колебание (вибрация) есть периодически изменяющаяся во времени деформация.

Числом степеней свободы упругой системы называется количество независимых геометрических координат, определяющих положение всех масс системы при любых упругих деформациях ее.

Свободные или собственные колебания без затухания

Колебания, совершающиеся при отсутствии внешних периодически действующих сил, называются свободными. Пусть, например, груз P соединен с пружиной, масса которой мала по сравнению с массой груза (рис. 222, а). Если груз может перемещаться только в вертикальном направлении, то рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как дефор-

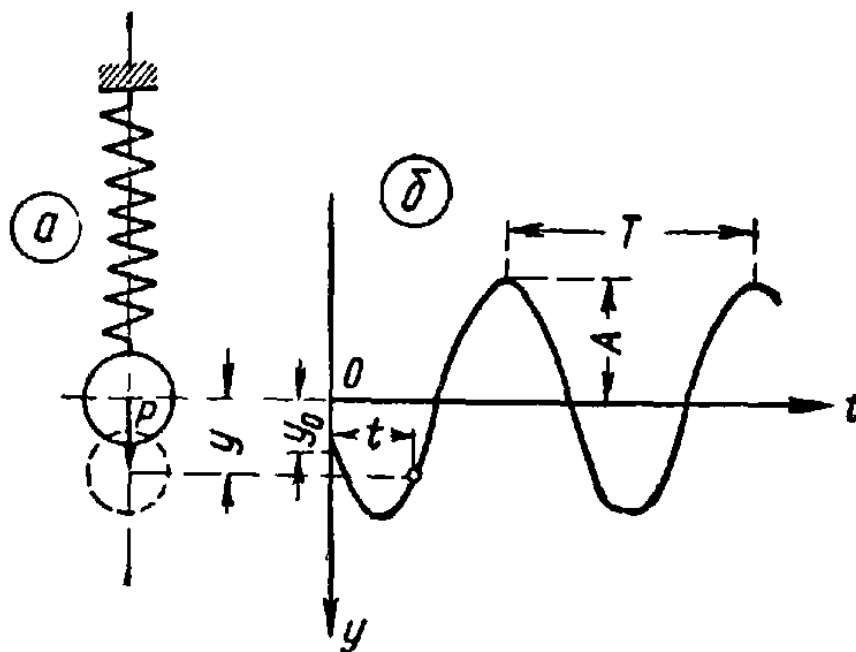


Рис. 222. Свободные гармонические колебания сосредоточенного груза.

мация ее вполне определяется вертикальным перемещением груза.

При толчке или внезапном приложении и удалении внешней силы груз будет совершать свободные гармонические колебания, определяемые дифференциальным уравнением:

$$y'' + \omega^2 y = 0. \quad (12)$$

Общий интеграл этого уравнения

$$y = A \sin(\omega t + \lambda) \quad (13)$$

дает закон движения груза. График гармонического колебания показан на рис. 222,б.

В формуле (13):

y — смещение груза из положения статического равновесия;

A — амплитуда колебания. Она характеризует размах колебания и дает максимальное значение перемещения;

λ — начальная фаза;

t — время, отсчитываемое от момента начала колебания.

Продолжительность одного полного колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (14)$$

называется периодом полного колебания.

Величина $\omega = \frac{2\pi}{T}$ называется круговой частотой; она дает число колебаний в 2π секунд и измеряется в радианах в секунду.

Круговая частота определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}. \quad (15)$$

Здесь c — жесткость системы, характеризуемая усилием, необходимым для осуществления статическим путем единичного перемещения;

$m = \frac{P}{g}$ — масса груза;

$y_{ст} = \frac{P}{c}$ — статическое перемещение под действием груза P .

Количество колебаний в одну минуту:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{300}{V_{y_{ст}}}, \quad (16)$$

где $y_{ст}$ выражается в сантиметрах.

Амплитуда A и начальная фаза λ зависят от начальных данных и определяются по формулам:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\omega y_0}{v_0}, \quad (18)$$

где y_0 и v_0 — начальная координата и начальная скорость груза.

В таблице 87 даны значения c , ω^2 и T для некоторых простых упругих систем с одной степенью свободы.

Наибольшая полная деформация системы:

$$y_d = y_{ст. \max} + A = y_{ст. \max} \left(1 + \frac{A}{y_{ст. \max}} \right) = k_d y_{ст. \max}, \quad (19)$$

где $k_d = 1 + \frac{A}{y_{ст. \max}}$ называется коэффициентом динамичности при колебаниях.

При деформации системы в пределах упругости напряжения пропорциональны деформациям и

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст.}$$

Условие прочности будет:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} \leq [\sigma].$$

Свободные затухающие колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости

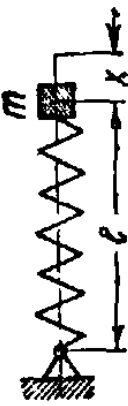



При сопротивлении, пропорциональном скорости, сила сопротивления $R = -\alpha y'$ (α — коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров и формы тела) и дифференциальное уравнение движения груза будет:

$$y'' + 2ny' + \omega^2 y = 0; \quad (20)$$




$$2n = \frac{\alpha}{m},$$

где n — коэффициент затухания колебаний.

Колебания простых упругих систем

№№ схем	Упругая система	Вид колебаний и описание системы	Масса или момент инерции	c	ω^2	T
1		Продольные колебания Точечная масса на пружине	m	c	$\frac{c}{m}$	$2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$
1a		а) Точечная масса на упругом стержне	m	$\frac{EF}{l}$	$\frac{EF}{ml}$	$2\pi \sqrt{\frac{ml}{EF}}$
2	 G - модуль сдвига Jp - полярный момент инерции вала	Крутильные колебания Вращающаяся масса на валу	J	$\frac{GJp}{l}$	$\frac{GJp}{Jl}$	$2\pi \sqrt{\frac{Jl}{GJp}}$
3a		Изгибные колебания Балка с точечной массой а) шарнирно опертая на обоих концах	m	$\frac{48 EJ}{l^3}$	$\frac{48 EJ}{ml^3}$	$\pi \sqrt{\frac{ml^3}{3EJ}}$

№№ схем	Упругая система	Вид колебаний и описание системы	Масса или Момент инерции	c	ω^2	T
3б		б) заземленная на одном конце и шарнирно опертая на другом	m	$\approx \frac{110 EJ}{l^3}$	$\approx \frac{110 EJ}{ml^3}$	$2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{110 EJ}}$
3в		в) заземленная на обоих концах	m	$\frac{192 EJ}{l^3}$	$\frac{192 EJ}{ml^3}$	$\pi \sqrt{\frac{ml^3}{3 EJ}}$
3г		г) заземленная на одном конце и свободная на другом	m	$\frac{3 EJ}{l^3}$	$\frac{3 EJ}{ml^3}$	$2\pi \sqrt{\frac{ml^3}{3 EJ}}$
4а		Балка с равномерно распределенной массой а) шарнирно опертая на обоих концах	—	—	$\approx \frac{100 EJ}{ml^3}$	$\approx \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{ml^3}{EJ}}$

№.№ схем	Упругая система	Вид колебаний и описание системы	Масса или момент инерции	c	ω^2	T
46		б) заземленная на одном конце и шарнирно опертая на другом	—	—	$\approx \frac{240 EJ}{m l^3}$	$\approx \frac{2\pi}{15} \sqrt{\frac{m l^3}{EJ}}$
48		в) заземленная на обоих концах	—	—	$\approx \frac{500 EJ}{m l^3}$	$\approx \frac{\pi}{5} \sqrt{\frac{m l^3}{5EJ}}$
4e		г) заземленная на одном конце и свободная на другом	—	—	$\approx \frac{12 EJ}{m l^3}$	$\approx \pi \sqrt{\frac{m l^3}{3EJ}}$

При малом сопротивлении ($\omega > n$) общий интеграл уравнения (20) будет:

$$y = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \varphi). \quad (21)$$

Благодаря наличию в уравнении (21) множителя e^{-nt} амплитуда колебаний Ae^{-nt} будет убывать со временем, и такое колебание называется затухающим. График колебаний дан на рис. 223.

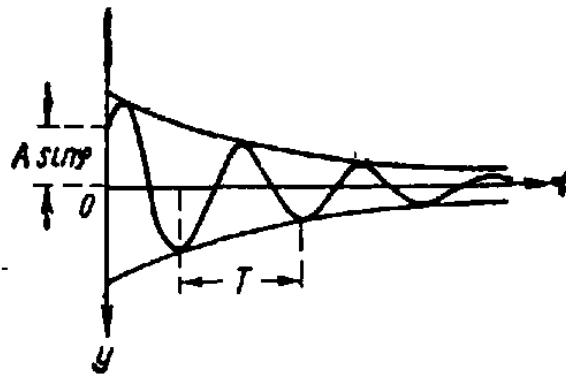


Рис. 223. График свободных затухающих колебаний.

Постоянные A и φ определяются начальными условиями движения.

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \quad (22)$$

получается бóльшим, чем в случае свободных гармонических колебаний, $\sqrt{\omega^2 - n^2}$ дает частоту колебаний.

При больших сопротивлениях, когда $n \geq \omega$, движение теряет колебательный характер и становится аperiodическим.

Вынужденные колебания при сопротивлении, пропорциональном скорости

Если внешняя сила, нарушающая равновесие материальной точки, продолжает действовать в течение всего процесса движения, то колебания называются вынужденными, а сила называется возмущающей силой.

Рассмотрим случай, когда возмущающая сила S меняется по периодическому закону:

$$S = H \sin \theta t, \quad (23)$$

где: θ — частота возмущающей силы;
 H — постоянная амплитуда силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$y'' + 2ny' + \omega^2 y = \frac{H}{m} \sin \theta t. \quad (24)$$

В случае малого сопротивления, когда $n < \omega$, общее решение уравнения (24) будет:

$$y = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega^2 - n^2} t + \varphi) + A_v \sin(\theta t + \lambda). \quad (25)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой затухающие свободные колебания, которые с течением времени исчезают и их часто при расчетах не учитывают. Второе слагаемое — вынужденные колебания с частотой θ , равной частоте возмущающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A_v = \frac{H}{m \sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 n^2}} = \frac{y_n}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}, \quad (26)$$

где y_n — статическая деформация системы от наибольшей величины возмущающей силы $S_{max} = H$.

Отметим, что амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий.

Отношение

$$\frac{A_v}{y_n} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} = \beta \quad (27)$$

называется коэффициентом нарастания колебаний.

Динамический коэффициент без учета свободных колебаний:

$$k_d = 1 + \frac{A_n}{\sigma_{ст, max}} = 1 + \frac{y_n}{y_p} \beta, \quad (28)$$

где y_n и y_p — статические деформации от сил N и P .

На рис. 224 представлены графики зависимости β от $\frac{\theta}{\omega}$ при различных $\frac{n}{\omega}$.

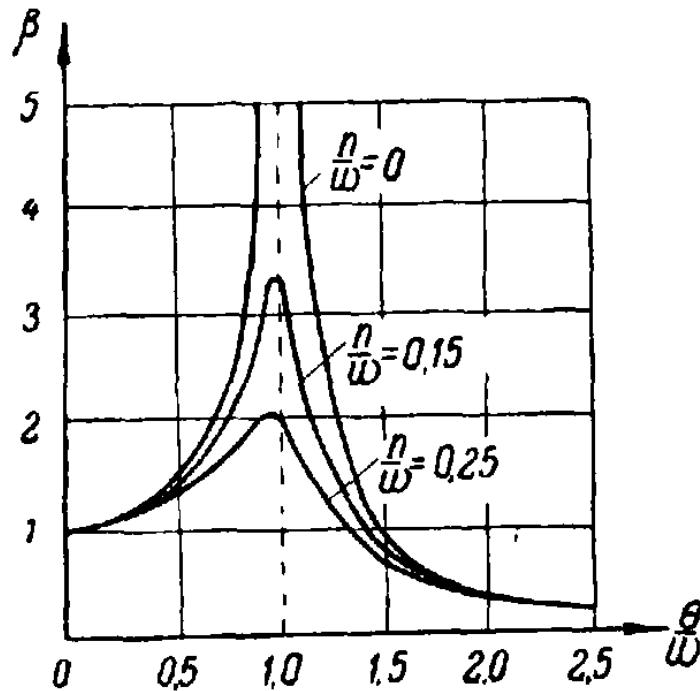


Рис. 224. Графики коэффициента нарастания колебаний.

Как видно из графиков, при значениях θ , близких к ω , коэффициент β , а следовательно, и напряжения резко возрастают. Теоретически при $\theta = \omega$ и при отсутствии сопротивления ($n = 0$) β становится бесконечно большим.

Случай совпадения частот возмущающей силы и свободных колебаний $\theta = \omega$ называется резонансом. Очевидно, что с точки зрения прочности резонанс недопустим, и он должен быть устранен изменением частоты возмущающей силы θ или изменением размеров самой упругой системы, от которых зависит частота ω .

Необходимо учесть, что при колебаниях мы имеем напряжения разных знаков, и поэтому допускаемые напряжения при колебаниях следует брать меньшими, чем при статических нагрузках.

Если масса упругой системы достаточно велика по сравнению с массой груза P , то с учетом этой массы частота свободных колебаний приближенно определяется по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{1 \text{ ст}}}}, \quad (29)$$

здесь $y_{1 \text{ ст}}$ — статическая деформация от груза $P + Q_{\text{пр}}$,
где $Q_{\text{пр}} = kQ$ — приведенный вес упругой системы, равный произведению полного веса Q на коэффициент приведения k ; k имеет те же значения, что и при ударе.

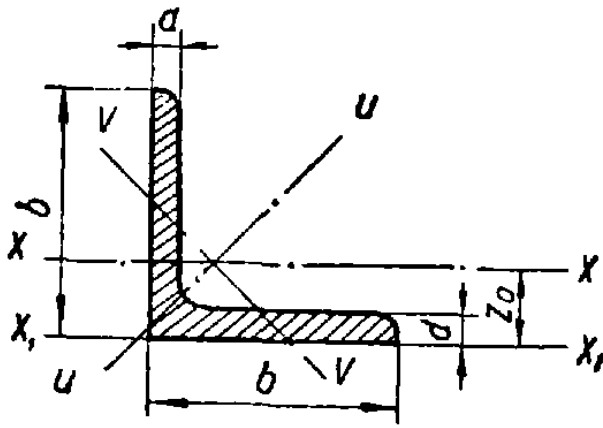
ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 88

СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ

Угольники равнобокие

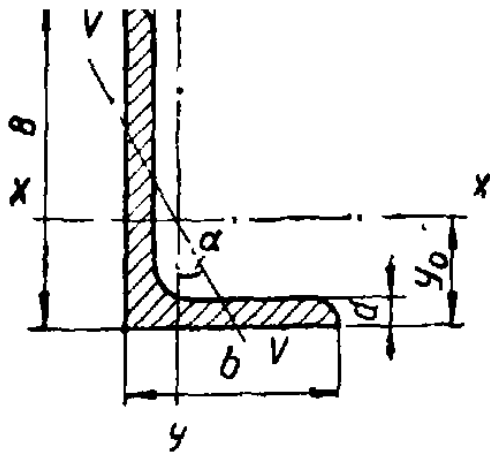
(ГОСТ 8509-57)



№№ профилей	Размеры		Площадь профиля см ²	Вес 1 пог. м кг	Ось	Ось		Ось		Ось	Расстояние центра тяжести Z ₀ см
	b	d			X—X	U—U		V—V		X ₁ —X ₁	
					J _x	J _u макс	i _u макс	J _v мин	i _v мин	J _{x1}	
мм		см ²	кг	см ⁴	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	3,5	3,86	3,03	11,6	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57

№№ профилей	Размеры		Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Ось	Ось		Ось		Ось	Расстоя- ние центра тяжести Z_0
	b	d			$X-X$	$U-U$		$V-V$		X_1-X_1	
						J_x	J_u макс	i_u макс	J_v мин		
мм		см ²	кг	см ⁴	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
11	110	7	15,2	11,9	176	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00

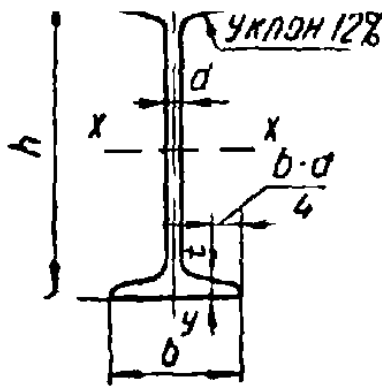
№№ профилей	Размеры		Площадь профиля см ²	Вес 1 пог. м кг	Ось	Ось		Ось		Ось	Расстоя- ние центра тяжести Z ₀ см
	b	d			X—X	U—U		V—V		X ₁ —X ₁	
					J _x	J _u макс	i _u макс	J _v мин	i _v мин	J _{x1}	
	мм	мм			см ⁴	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	
12,5	125	8	19,7	15,5	294	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
25	250	16	78,4	61,5	4717	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
		22	106,1	83,3	6270	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31



Угольники неравнобокие
(ГОСТ 8510-57)

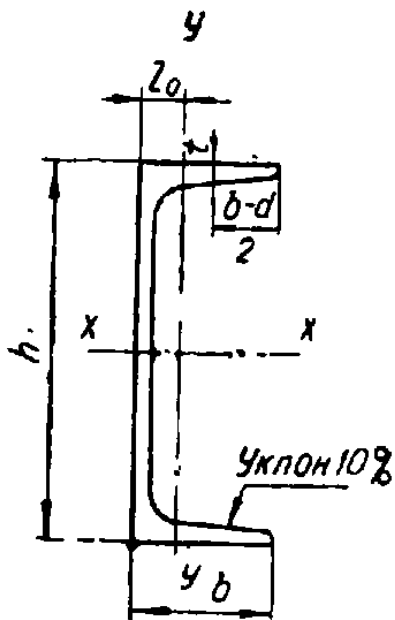
№№ профилей	Размеры			Площадь профиля см ²	Вес 1 пог. м кг	Ось X—X	Ось Y—Y	Координаты центра тяжести		Ось V—V		
	B	b	d			J _x	J _y	y ₀	x ₀	J _v мин	i _v мин	tgα
	мм					см ⁴	см ⁴	см	см	см ⁴	см	
2,5 1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,70	0,22	0,86	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2 2	32	20	3	1,49	1,17	1,52	0,46	1,08	0,49	0,28	0,43	0,382
			4	1,94	1,52	1,93	0,57	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
4 2,5	40	25	3	1,89	1,48	3,06	0,93	1,32	0,59	0,56	0,54	0,385
			4	2,47	1,94	3,93	1,18	1,37	0,63	0,71	0,54	0,381
4,5 2,8	45	28	3	2,14	1,68	4,41	1,32	1,47	0,64	0,79	0,61	0,382
			4	2,80	2,20	5,68	1,69	1,51	0,68	1,02	0,60	0,379
5 3,2	50	32	3	2,42	1,90	6,17	1,99	1,60	0,72	1,18	0,70	0,403
			4	3,17	2,49	7,98	2,56	1,65	0,76	1,52	0,69	0,401
5,6 3,6	56	36	3,5	3,16	2,48	10,1	3,30	1,80	0,82	1,95	0,79	0,407
			4	3,58	2,81	11,4	3,70	1,82	0,84	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	13,8	4,48	1,86	0,88	2,66	0,78	0,404
6,3 4,0	63	40	4	4,04	3,17	16,3	5,16	2,03	0,91	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	19,9	6,26	2,08	0,95	3,73	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	23,3	7,28	2,12	0,99	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	29,6	9,15	2,20	1,07	5,58	0,85	0,386
7 4,5	70	45	4,5	5,07	3,98	25,3	8,25	2,25	1,03	4,88	0,98	0,407
			5	5,59	4,39	27,8	9,05	2,28	1,05	5,34	0,98	0,406

№№ про- филей	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Ось	Ось	Координаты центра тяжести		Ось V—V		
	B	b	d			X—X	Y—Y	У ₀	х ₀	J _v мин	i _v мин	tgα
	мм					см ²	кг	см ⁴	см ⁴	см	см	см ⁴
7,5 5	75	50	5	6,11	4,79	34,8	12,5	2,39	1,17	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	40,9	14,6	2,44	1,21	8,48	1,08	0,435
			8	9,47	7,43	52,4	18,5	2,52	1,29	10,9	1,07	0,430
8 5	80	50	5	6,36	4,99	41,6	12,7	2,60	1,13	7,58	1,09	0,387
			6	7,55	5,92	49,0	14,8	2,65	1,17	8,88	1,08	0,386
9 5,6	90	56	5,5	7,86	6,17	65,3	19,7	2,92	1,26	11,8	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	70,6	21,2	2,95	1,28	12,7	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	90,9	27,1	3,04	1,36	16,3	1,21	0,380
10 6,3	100	63	6	9,59	7,53	98,3	30,6	3,23	1,42	18,2	1,38	0,393
			7	11,1	8,70	113	35,0	3,28	1,46	20,8	1,37	0,392
			8	12,6	9,87	127	39,2	3,32	1,50	23,4	1,36	0,391
			10	15,5	12,1	154	47,1	3,40	1,58	28,3	1,35	0,387
11 7	110	70	6,5	11,4	8,98	142	45,6	3,55	1,58	26,9	1,53	0,402
			7	12,3	9,64	152	48,7	3,57	1,6	28,8	1,53	0,402
			8	13,9	10,9	172	54,6	3,61	1,64	32,3	1,52	0,400
12,5 8	125	80	7	14,1	11	227	73,7	4,01	1,8	43,4	1,76	0,407
			8	16	12,5	256	83,0	4,05	1,84	48,8	1,75	0,406
			10	19,7	15,5	312	100	4,14	1,92	59,3	1,74	0,404
			12	23,4	18,3	365	117	4,22	2,00	69,5	1,72	0,400
14 9	140	90	8	18	14,1	364	120	4,49	2,03	70,3	1,98	0,411
			10	22,2	17,5	444	146	4,58	2,12	85,5	1,96	0,409
16 10	160	100	9	22,9	18	606	186	5,19	2,23	110	2,2	0,391
			10	25,3	19,8	667	204	5,23	2,28	121	2,19	0,390
			12	30	23,6	784	239	5,32	2,36	142	2,18	0,388
			14	34,7	27,3	897	272	5,40	2,43	162	2,16	0,385
18 11	180	110	10	28,3	22,2	952	276	5,88	2,44	165	2,42	0,375
			12	33,7	26,4	1123	324	5,97	2,52	194	2,40	0,374
20 12,5	200	125	11	34,9	27,4	1449	446	6,5	2,79	264	2,75	0,392
			12	37,9	29,7	1568	482	6,54	2,83	285	2,74	0,392
			14	43,9	34,4	1801	551	6,62	2,91	327	2,73	0,390
			16	49,8	39,1	2026	617	6,71	2,99	367	2,72	0,388
25 16	250	160	12	48,3	37,9	3147	1032	7,97	3,53	604	3,54	0,410
			16	63,6	49,9	4091	1333	8,14	3,69	781	3,50	0,408
			18	71,1	55,8	4545	1475	8,23	3,77	866	3,49	0,407
			20	78,5	61,7	4987	1613	8,31	3,85	949	3,48	0,405



Балки двутавровые
(ГОСТ 8239-56)

№№ про- филей	Вес I пог. м	Размеры				Площадь сечения	Для осей					
		h	b	d	t		X—X			Y—Y		
							J_x	W_x	S_x	J_y	W_y	i_y
		кг	мм				см ²	см ⁴	см ³	см ³	см ⁴	см ³
10	11,1	100	70	4,5	7,2	14,2	244	48,8	28,0	35,3	10,1	1,58
12	13,0	120	75	5,0	7,3	16,5	403	67,2	38,5	43,8	11,7	1,63
14	14,8	140	82	5,0	7,5	18,9	632	90,3	51,5	58,2	14,2	1,75
16	16,9	160	90	5,0	7,7	21,5	945	118	67,0	77,6	17,2	1,90
18	18,7	180	95	5,0	8,0	23,8	1330	148	83,7	94,6	19,9	1,99
18a	19,9	180	102	5,0	8,2	25,4	1440	160	90,1	119	23,3	2,17
20	20,7	200	100	5,2	8,2	26,4	1810	181	102	112	22,4	2,06
20a	22,2	200	110	5,2	8,3	28,3	1970	197	111	148	27,0	2,29
22	23,7	220	110	5,3	8,6	30,2	2530	230	130	155	28,2	2,26
22a	25,4	220	120	5,3	8,8	32,4	2760	251	141	203	33,8	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	423	516	71,1	2,89
40	56,1	400	155	8,0	13,0	71,4	18930	947	540	666	85,9	3,05
45	65,2	450	160	8,6	14,2	83,0	27450	1220	699	807	101	3,12
50	76,1	500	170	9,3	15,2	96,9	39120	1560	899	1040	122	3,28
55	88,6	550	180	10,0	16,5	113	54810	1990	1150	1350	150	3,46
60	103	600	190	10,8	17,8	131	75010	2500	1440	1720	181	3,62
65	119	650	200	11,7	19,2	151	100840	3100	1790	2170	217	3,79
70	137	700	210	12,7	20,8	174	133890	3830	2220	2730	260	3,96
70a	158	700	210	15,0	24,0	202	152700	4360	2550	3240	309	4,01
70б	184	700	210	17,5	28,2	234	175370	5010	2940	3910	373	4,09



Швеллеры
(ГОСТ 8240-56)

№№ про- филей,	Вес 1 пог. м кг	Размеры				Площадь сечения см ²	Для осей					
		h	b	d	t		X—X			Y—Y		Z ₀ см
							J _x	W _x	S _x	J _y	W _y	
		мм					см ²	см ⁴	см ³	см ³	см ⁴	см ³
5	5,42	50	37	4,5	7,0	6,90	26,1	10,4	6,36	8,41	3,59	1,36
6,5	6,50	65	40	4,5	7,4	8,28	54,5	16,8	10,0	11,9	4,58	1,40
8	7,78	80	45	4,8	7,4	9,91	99,9	25,0	14,8	17,8	5,89	1,48
10	9,20	100	50	4,8	7,5	11,7	187	37,3	21,9	25,6	7,42	1,55
12	10,8	120	54	5,0	7,7	13,7	313	52,2	30,5	34,4	9,01	1,59
14	12,3	140	58	5,0	8,0	15,7	489	69,8	40,7	45,1	10,9	1,66
14a	13,2	140	62	5,0	8,5	16,9	538	76,8	44,6	56,6	13,0	1,84
16	14,1	160	64	5,0	8,3	18,0	741	92,6	53,7	62,6	13,6	1,79
16a	15,1	160	68	5,0	8,8	19,3	811	101	58,5	77,3	16,0	1,98
18	16,1	180	70	5,0	8,7	20,5	1080	120	69,4	85,6	16,9	1,95
18a	17,2	180	74	5,0	9,2	21,9	1180	131	75,2	104	19,7	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	87,8	113	20,5	2,07
20a	19,6	200	80	5,2	9,6	25,0	1660	166	95,2	137	24,0	2,27
22	20,9	220	82	5,3	9,6	26,7	2120	193	111	151	25,4	2,24
22a	22,5	220	87	5,3	10,2	28,6	2320	211	121	186	29,9	2,47
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	139	208	31,6	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	151	254	37,2	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	178	262	37,3	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	224	327	43,6	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7960	484	281	410	51,8	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	350	513	61,7	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	444	642	73,4	2,75

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Беляев Н. М. Сопротивление материалов. ГТТИ, 1951.
- Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности. ГТТИ, 1953.
- Бернштейн С. А. Сопротивление материалов. Изд. ВИА, 1946.
- Бычков Д. В. и Мрощинский А. К. Кручение металлических балок. Стройиздат, 1944.
- Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Госстройиздат, 1940.
- Гольденблат И. И. и Сизов А. М. Справочник по расчету строительных конструкций. Госстройиздат, 1952.
- Дарков А. В. и Кузнецов В. И. Статика сооружений. Трансжелдориздат, 1951.
- Дыховичный А. И. Строительная механика. Госстройиздат, 1953.
- Жданов С. М. Расчет конструкций с учетом пластичных свойств материала. Изд. МЭИ, 1952.
- Коган Л. А. Расчеты на прочность при переменных напряжениях. Изд. УПИ, 1955.
- Кузнецов В. И. Статический расчет элементов верхнего строения пути. Трансжелдориздат, 1956.
- Лихарев К. К. Основы сопротивления материалов. Изд. МВТУ, 1946.
- Малинин Н. Н. Расчеты на прочность при переменных напряжениях. Изд. МВТУ, 1945.
- Машиностроение. Энциклопедический справочник, т. 1. Машгиз, 1947.
- Пешль Т. Сопротивление материалов. Госиздат, 1948.
- Пономарев С. Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении (расчеты при статической нагрузке). Машгиз, 1950.
- Пономарев С. Д. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении (расчеты при динамической нагрузке). Машгиз, 1952.
- Попов А. А. Сопротивление материалов. Машгиз, 1956.
- Прочность в машиностроении. Сборник статей. Машгиз, 1951.
- Рабинович И. М. Курс строительной механики. Госстройиздат, 1954.

Рабинович С. В. Расчеты на прочность при переменных напряжениях. Изд. МЭИ, 1951.

Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Госстройиздат, 1954.

Рудицын М. Н. Расчет конструкций по разрушающим нагрузкам. Белгосиздат, 1940.

Рудицын М. Н. Расчетно-графические работы по сопротивлению материалов. Изд. БГУ, 1957.

Справочник машиностроителя, т. 3. Машгиз, 1955.

Справочник по технической механике. Гостехиздат, 1949.

Справочник «Инженерные сооружения», т. 1. Машстройиздат, 1950.

Серенсен С. В., Тетельбаум И. М., Пригородский Н. И. Динамическая прочность в машиностроении. Машгиз, 1945.

Серенсен С. В., Кагаев В. П., Козлов Л. А. Листки для конструктора. «Вестник машиностроения» №№ 10, 11, 12, 1949 и №№ 3, 4, 6, 7, 8, 9, 1950.

Столяров Я. В. Теория плоских статически неопределимых конструкций. Харьков—Киев, «Будвидав», 1932.

Технический справочник железнодорожника. Гострансжелдориздат, 1950.

Технический справочник транспортника, т. 2. Желдориздат, 1933.

Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Гостехиздат, 1946.

Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946.

Тихомиров Е. Н. Сопротивление материалов. ОНТИ, 1934.

Трапезин И. И. Прочность металлов при переменной нагрузке. Гостехиздат, 1948.

Умаиский А. А., Вольмир А. С., Коданев А. И. Курс сопротивления материалов. Изд. ВВИА, 1954.

Филоненко-Бородич М. М. Сопротивление материалов. Гостехтеориздат, 1955.

Редактор *И. Черняк*

Технический редактор *Н. Степанова*

Корректор *Л. Пупко*

АТ 09930. Подп. к печати 23/V 1961 г. Тираж 15 000 экз. Формат 70 × 108^{1/32}.
Физ. печ. л. 16,125 + 3 вклейки. Усл. печ. л. 22,09. Уч.-изд. л. 20,55. Зак. 409.
Цена 1 руб. 18 коп.

Типография им. Сталина, Минск, проспект им. Сталина, 79.