ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО БАЛЛИСТИКЕ

ФИЗМАТГИЗ · 1961

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО БАЛЛИСТИКЕ

Переводы
с немецкого, французского и латинского
П. Д. ЛЬВОВСКОГО и Л. С. ПОЛАКА

Редакция и предисловие Б. Н. ОКУНЕВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1961

ОТ РЕДАКТОРА

В 1787 г., через четыре года после смерти Леонарда Эйлера (1783), во Франции был издан один из его самых капитальных трудов: «Institutiones calculi differentialis». В «похвальном слове» (éloge), предваряющем это издание, Жан Антуан Кондорсе писал: «Эйлер всегда внушал своим ученикам, что математика не является наукой изолированной, а представляет собой основу и ключ ко всем человеческим знаниям».

Изучая научную деятельность Л. Эйлера в целом, мы не можем не обратить внимания на необычайно широкий круг его интересов и его исследований. При этом Эйлер, разрабатывая основные проблемы математической науки, никогда не упускал возможности изучать конкретные вопросы, имеющие непосредственно прикладное значение и позволяющие опытную проверку результатов, полученных на основе строгой математической теории изучаемого явления.

К числу таких работ Эйлера должны быть отнесены и его труды в области баллистики, представляющие собой великолепный образец характерных особенностей научного творчества и высокого стиля гениального ученого и большого человека, двухсотпятидесятилетие со дня рождения которого (1707) так широко было отмечено в нашей стране.

Баллистические исследования Л. Эйлера занимают видное место в развитии баллистики как науки, причем некоторые его положения и методы имеют непосредственное практическое значение и в настоящее время, что можно увидеть из очерка А. П. Мандрыки, помещенного в данной книге.

Еще более важное значение публикуемых работ Эйлера заключается в том, что они представляют собой прекрасный пример сочетания глубоких теоретических основ с необыкновенной чуткостью к конкретным запросам реальной действительности и правильным пониманием роли и значения эксперимента.

В этом отношении особого внимания заслуживает капитальный труд Эйлера, изданный в 1745 г. под скромным заглавием «Новые основания артиллерии... Беньямина Робинса. Перевел с английского с сопровождением необходимых пояснений и многочисленных замечаний Леонард Эйлер». Познакомившись с трудом Робинса, вышедшим в свет в 1742 г., Эйлер по достоинству оценил изобретение Робинсом баллистического маятника, которое, по словам Эйлера, являлось самым крупным открытием XVIII века в артиллерии. Точно так же Эйлер правильно предугадал громадные возможности нового экспериментального метода для решения самых разнообразных задач внешней баллистики.

Вместе с тем Эйлер не мог не видеть целого ряда недостатков работы Робинса и, в частности, недостаточной разработки теоретических вопросов. Считая своим долгом широко осветить значение экспериментальных работ Робинса и подвести под эти работы прочный теоретический фундамент, Эйлер и предпринял перевод книги Робинса на немецкий язык, снабдив этот перевод целым рядом существенных исправлений, замечаний и дополнений, которые в общей сложности превышают оригинальный текст Робинса более чем в пять раз.

Значительно меньшей по объему, но еще более глубокой по содержанию является работа «Исследование истинной кривой, описываемой брошенными телами в воздухе или в какой-либо другой среде», написанная Эйлером в 1753 г. и изданная в 1755 г. Эта работа сыграла выдающуюся роль в истории баллистики. Даже в XX столетии, в период между двумя мировыми войнами, она непосредственно была использована в артиллерийской практике как для расчета траекторий артиллерийских снарядов при скоростях, не превышающих 240 *м/сек*, так и для разработки методов расчета любых траекторий «по дугам».

В заключение я позволю себе обратить внимание читателя на те трудности, которые стояли перед переводчиками. Если в области математики и теоретической механики круг идей XVIII столетия вполне понятен современному читателю, то в области физики и химии идеи XVIII столетия коренным образом отличаются от наших представлений, о чем никогда не следует забывать при изучении работ Эйлера.

Б. Окунев

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

(1 707—1783)

НОВЫЕ ОСНОВАНИЯ
АРТИЛЛЕРИИ,

содержащие
определение силы пороха
с исследованием
о различии в сопротивлении воздуха
при быстром и медленном движениях

С английского труда
г-на Беньямина Робинса
перевел
с приложением необходимых пояснений
и многочисленных замечаний

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР
королевский профессор в Берлине

БЕРЛИН
1745

Neue Grundsätze der ARTILLERIE

enthaltend
die Bestimmung der Gewalt des Pulvers
nebst
einer Untersuchung
über den Unterscheid des Wiederstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen

aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins
übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen
von

Leonhard Euler
Königlichem Professor in Berlin.

Berlin bey A. Haude
Königl. und der Academie der Wissenschaften privil. Buchhändler. 1745.

ПРЕДИСЛОВИЕ ЭЙЛЕРА [1]

Артиллерия уже с давнего времени рассматривалась как часть математики, потому что ее нельзя излагать без достаточного знания арифметики и геометрии, хотя изготовление пороха, от которого берет свое начало артиллерия, относится скорее к химии, чем к математике, и, если бы хотели узнать причину той изумительной силы, которой обладает порох, то следовало бы обратиться вообще к естествознанию. Но все же определение самой силы, которая производит действие пороха, принадлежит математике; поскольку же это требует обширных знаний высшей геометрии и механики, то полагают, что лучше совершенно умолчать об этом вопросе в начальных основаниях науки. Описание различных огнестрельных орудий, применяемых в артиллерии, имеет, по-видимому, лишь некоторую близость к математическим наукам, поскольку при этом рассматриваются соотношения при различных смешениях [2]. Так как все это опирается только на опыт, а математика является наукой, которая не только показывает в каждом случае соотношения, но и определяет причины, от которых они зависят по природе самих вещей, то ясно, что от существующей связи артиллерии с математикой нельзя ждать по этому вопросу большой пользы. То же имеет место и при самом описании различных орудий, пушек и другого огнестрельного оружия, для которых приводятся только пропорции их частей и для чего они, собственно, предназначены, без того, чтобы задуматься о причинах, почему они так, а не иначе устроены. При этом объяснение и описание масштаба калибров кажется единственным, для чего требуется знание арифметики и геометрии, так как оно основано на возвышении в куб и извлечении кубического корня. Хотя особенно следовало бы обращаться за помощью к математике при определении траектории, описываемой бомбой или ядром в воздухе, однако обычно принимают, что эта кривая линия представляет собой параболу, и из ее свойств вычисляют, как далеко при каждом наклонном выстреле должно полететь ядро. Это было бы правильно, если бы ядро при своем движении не испытывало сопротивления; но так как сопротивление воздуха при столь быстром движении весьма заметно, то и описываемая ядром линия очень сильно отклоняется от параболы. По этой же причине и угол, при котором получается наибольшая дальность полета ядра, равен не 45 градусам, как обычно полагают, а несколько меньше. Но когда нужно исследовать действительную кривую линию, по которой движется пушечное ядро, то тут никак не обойтись без высшей математики.

Отсюда ясно, что польза, которую до сих пор в артиллерии извлекают из математики, весьма незначительна, и элементарные знания математики в том объеме, в каком они даны в обычных начальных руководствах, совершенно недостаточны, чтобы доставить артиллерии всю ту пользу, которую можно ожидать от этой науки. Если же обратиться за помощью к высшей математике, то можно будет определить наиболее точно как истинную силу пороха, так и действительное движение ядер. И так как эти два вопроса составляют основу артиллерийской науки, то из них могут быть основательным образом объяснены и представлены в полном виде также и другие, относящиеся сюда вопросы. Ведь если чистый математик, за отсутствием достаточного опыта, не в состоянии извлечь всю пользу из своих знаний, то все-таки нет никакого сомнения в том, что опытный артиллерист легко восполнит этот недочет и сумеет во всех случаях применить с пользой приобретенные им знания.

Широко распространено мнение, что высшая математика занимается только такими тонкими спекуляциями, от которых нельзя ожидать ни малейшей пользы; и если благодарны ей за ту пользу, которую не могут полностью отрицать, то разве только в отношении низших и общеизвестных разделов математики. Однако достаточно уже того, что сказано здесь об артиллерии, чтобы полностью рассеять это предубеждение: ведь с бо́льшим даже правом можно утверждать, что нет науки, не связанной с математикой, науки, которая, если она должна быть основательно разработана, не требовала бы применения высшей математики. Не раз даже случалось, что расширение пределов наших знаний делало возможным более правильное объяснение всех обстоятельств.

Чтобы убедительнее доказать это и тем самым отвести незаслуженный упрек, который обычно бросают высшей математике, мы покажем несколько подробнее наиболее выдающиеся практические приложения математики.

В механике, которая занимается объяснением и определением движения тел, не только встречаются труднейшие вопросы, которые невозможно было бы исследовать без глубокого проникновения в высшую математику, но не существует такой машины, действие которой могло бы быть объяснено обстоятельно без таких знаний. Все, что обычно говорится о машине, касается главным образом только ее устройства, и при этом ограничиваются указанием на равновесие между силой и сопротивлением. Но так как груз должен не только удерживаться в равновесии, но и приводиться в движение, то сила должна превосходить груз и вообще быть больше, чем требуется только для сохранения равновесия. Как в этом случае установить движение и с какой скоростью должен будет двигаться груз, об этом мы не находим ни слова в обычных руководствах по машинам, хотя именно на этом основаны назначение и полезность всех машин. В этом — важнейшая причина того, что ни на какую машину, вычерченную на бумаге, не могут положиться, прежде чем не сделают о ней заключение на основании проведенного испытания. Чтобы помочь в таком деле, совершенно недостаточны элементарные познания в математике; и даже если будет желательно определить движение хотя бы только в простых машинах, то нельзя будет этого сделать без анализа бесконечно малых, а в обыкновенных машинах встретятся даже такие вопросы, разъяснение которых потребует еще большего развития высшей математики. Но в этом-то и состоит полное изучение машин, польза которых никем не может быть взята под сомнение; а с тем, что выскажут против этого, можно и вовсе не считаться. Если, наоборот, для какой-либо вычерченной машины мы в состоянии по ее устройству и величине силы определить действительное движение груза, то отсюда можно легко при помощи высшей математики привести такую машину к высшей степени совершенства. Поскольку в каждом случае, когда заданы сила и груз, можно придумать бесконечно разнообразные машины, с помощью которых груз может перемещаться под действием силы, то важнейшим будет вопрос, как из всех этих машин выбрать такую, посредством которой груз перемещался бы наискорейшим образом. Однако этот вопрос невозможно разрешить без так называемой высшей математики.

Каким несовершенным было бы сочинение по гидростатике и гидравлике, если бы оно было основано только на элементарных началах математики, хорошо знает всякий, кто старался рассмотреть хотя бы только простейшие случаи. Движение жидкости представляет одну из труднейших и сложнейших проблем, какие только могут встретиться в математике и физике, и с элементарными познаниями в математике ничего здесь нельзя достичь. Знаменитые господа Бернулли были первыми, кто основательно исследовал эту малоизученную область. Сперва г. профессор Даниил Бернулли [3] выпустил в Базеле свой несравненный труд под названием «Hydrodynamica» [4], в котором путем искуснейших вычислений определил как силы, так и движение жидких тел под действием этих сил, и притом настолько основательно, что во всем получил совершеннейшее согласие с опытом. Здесь он применил в основном закон сохранения живых сил, но впоследствии его отец [5] нашел способ получения всех зависимостей из основных законов движения, как это прекрасно освещено в его сочинениях [6], которые были недавно изданы, а также опубликованы в 9-м томе Комментариев Петербургской Академии [7]. Кто хотя бы бегло просмотрел эти труды, легко убедился бы в том, что в этой науке без высшей математики ничего нельзя было бы сделать.

С того времени, как астрономия достигла современного уровня, для нее высшая математика стала совершенно и исключительно необходимой, так как без нее невозможно делать точные определения движения планет и комет. Но особенно наглядное доказательство необходимости высшей математики в астрономии дает нам теория движения луны. Законы, по которым происходит ее движение, открыты, и теперь дело заключается только в том, чтобы на основании этих законов определить действительное движение луны. Для этого необходимо не только глубокое знание анализа бесконечно малых; каким бы высоким ни казалось развитие анализа в настоящее время, оно, однако, все еще далеко не достаточно для точнейшего определения всех изменений в движении этой планеты. Все, что до сих пор было сделано, получено только в приближениях, и мы не можем надеяться ни на какое более точное знание этого движения, прежде чем высшая математика не будет поднята на более высокую ступень.

Отсюда совершенно ясно следует, что математика полезна отнюдь не только своими элементарными началами, применение которых простирается не очень далеко, но что больше следует быть благодарными высшей математике за всю ту пользу, которая отчасти уже действительно получается от этой науки, а отчасти еще ожидается от нее в будущем. Таким образом, еще далеко до того, чтобы эти исследования могли получить полное развитие, и достигнуть многого возможно будет не раньше, как будут добыты еще бóльшие знания и открытия.

Из настоящего труда по артиллерии [8], получившего всеобщее признание ввиду содержащихся в нем интересных и полезных открытий, достаточно ясно, что автор не дошел бы так далеко, если бы ему не была проложена дорога высшей математикой; в этом труде почти не встречается ни одного Предложения, которое могло бы быть полностью разобрано без помощи анализа бесконечно малых. Ввиду того что польза от этого английского трактата не только сама по себе весьма значительна, но и несомненно может быть значительно увеличена, я возымел намерение перевести этот труд на немецкий язык, чтобы сделать более известными содержащиеся в нем важные открытия. Но так как автор дал все это очень сжато, то я нашел полезным не только приложить повсюду необходимые пояснения, но и развить дальше каждое Предложение, с тем чтобы можно было лучше понять как его обоснованность, так и полезность. В своем переводе я допускал некоторую вольность, обращая внимание больше на сущность излагаемого, чем на отдельные слова, что в отношении этого рода сочинений не вызовет ни с чьей стороны упрека.

Автором предпослано этому труду довольно пространное предисловие, в котором даны исторические сведения о происхождении и применении как фортификации, так и артиллерии. Это, видимо, служит для того, чтобы показать главным образом, как до сих пор мало известно в области истинной теории артиллерии и как много важных открытий еще требуется для совершенствования этой науки.

Самый труд состоит из двух глав. В первой рассматривается, с одной стороны, сила пороха, с другой — сообщаемая пуле скорость. Сперва автор, опираясь на безукоризненные опыты, показывает, что сила пороха состоит в упругой силе заключенной в нем тонкой материи [9], освобождаемой при его воспламенении [10]. Затем он исследует, как велика эта сила и по каким законам она уменьшается, потому что тонкая материя с увеличением объема все больше расширяется. Он также показывает, как влияет на увеличение упругой силы теплота, возникающая при горении пороха. После этого он определяет действительную скорость, сообщаемую пуле определенным зарядом пороха в данном стволе. Но для большей убедительности в правильности этого определения, он дает описание изобретенного им прибора [11], с помощью которого можно определить истинную скорость всякой пули. Эту найденную опытным путем скорость он затем сравнивает с вычисленной им скоростью по силе пороха и во всех случаях показывает полнейшее соответствие между ними.

Во второй главе он приводит свои исследования сопротивления воздуха и показывает, что сопротивление при весьма быстром движении много больше, чем можно было бы полагать по принятым в настоящее время правилам. Отсюда он определяет, как пуля, брошенная в воздухе с некоторой скоростью, постепенно теряет ее, и всякий раз подтверждает все это многочисленными опытами, которые производит с помощью своего упомянутого выше прибора. Хотя он здесь и не дошел так далеко, чтобы определить траекторию, по которой движется пуля в воздухе, но обещает дать об этом отдельное исследование, которое, впрочем, насколько нам известно, пока еще не появилось.

Вот вкратце содержание всего труда. Хотя последний, казалось бы, содержит в себе только эти два главных вопроса, правда, составляющие основу и опору артиллерии в целом, однако вместе с тем эти вопросы так тесно связаны со всеми прочими отраслями артиллерийского искусства, что этот труд можно с полным правом рассматривать как полное сочинение по артиллерии.

Автор подразделяет обе главы на отдельные Предложения и по каждому из них приводит свое объяснение и доказательство; местами он еще дает к ним дополнения с некоторыми разъяснениями, которые, впрочем, не следует смешивать с сопроводительными замечаниями переводчика.

Замечания, которые следуют за каждым Предложением, принадлежат, таким образом, не автору сочинения, и потому их следовало бы отпечатать особым шрифтом; но так как это представило бы неудобства, отчасти вследствие пространности этих замечаний, отчасти же по разным другим причинам, необходимо только заметить читателю раз навсегда, что все то, что стоит под рубрикой Замечаний, принадлежит переводчику [1]. В них мы постарались прежде всего обстоятельнее разъяснить изложенные автором вопросы, а затем развить их подробнее с тем, чтобы из этого можно было извлечь больше пользы. Местами усмотрены и исправлены некоторые ошибки, допущенные автором. Во второй главе находятся также Замечания, в которых мы старались определить истинное движение снаряда в воздухе, если сила сопротивления воздуха выражена общей формулой. В целом все здесь основано только на вычислениях. Эти вычисления настолько тяжелы и сложны, что известные до сих пор достижения в области анализа бесконечно малых все еще недостаточны для преодоления всех трудностей, что, следовательно, дает новый аргумент против тех, кто оспаривает пользу высшей математики.

---

[1]) То есть Л. Эйлеру. (*Прим. ред. русского перевода.*)

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА
или
ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ПРОИСХОЖДЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ФОРТИФИКАЦИИ И АРТИЛЛЕРИИ

Почти год тому назад я решил прочесть публичные лекции по фортификации и артиллерии, но встретились некоторые затруднения, которых нет надобности здесь приводить и которые удержали меня от этого намерения. Но, так как некоторые записи, которые я составил для себя, попали в разные руки, я некоторым образом был вынужден написать данное сочинение.

Так как я намереваюсь сделать это сочинение столь полным, сколь это представляется мне возможным как посредством изучения больших моделей различного рода укреплений и способов их атаки, так и посредством рассмотрения различных правил применения артиллерии, основанных на боевом опыте, то я нашел необходимым добавить исследование о силе пороха вместе с некоторыми соображениями о сопротивлении воздуха, которые я нашел и подтвердил опытами. Эти основные понятия, изложенные в ставших известными записях, даны там очень кратко, без каких-либо доказательств. В то же время они могли казаться спорными, потому что не согласовывались с мнениями многих из тех, кто писал об этом, поэтому я приложил все свое старание к тому, чтобы преодолеть трудности, которые могут при этом возникнуть, и доказать правильность излагаемого неопровержимыми данными многочисленных опытов. Так и получился нижеследующий трактат, в котором сила и действие пороха определены настолько точно, что теперь на основании этого можно вычислять скорости различных типов ядер и притом в каждом отдельном случае находить совершенно необычайное сопротивление воздуха, которое при очень быстром движении гораздо значительнее, чем полагали до настоящего времени. Теперь станет ясно, что как начальная скорость, с которой будет выброшено полным зарядом ядро, так и траектория, описываемая им в воздухе, совершенно отличны от тех, которые указывались другими авторами.

Поскольку на последующих страницах приведены важнейшие исследования о силе пороха и движении ядер, читателю, вероятно, будет небезынтересно найти здесь некоторые сведения об изобретении пороха с кратким очерком о применении артиллерии и связанной с ней фортификации. Этот очерк дается здесь для того, чтобы после достаточно полного уяснения сущности содержания этого труда, можно было сравнить его с существовавшими прежде мнениями по этим вопросам. И хотя моя главная цель заключается только в совершенствовании теории и практики артиллерии, однако поскольку современное военно-инженерное искусство тесно связано с изобретением и применением артиллерии, и эта взаимосвязь между обоими искусствами закономерна, я полагаю, не будет неуместным предпослать описанию тех мощных военных машин, которые являются основой артиллерии, краткий очерк о происхождении и развитии современного военно-инженерного искусства.

Что касается изобретения бастионов [12], то у авторов существуют об этом различные мнения, и еще не разрешен вопрос, когда и где они впервые были применены. Одни приписывают это изобретение Жижке [13] в Богемии, другие же — Ахмет-Паше, который по взятии Отранто в 1480 году приказал особенно укрепить этот город и при этом построить бастионы [a]). Но это предположение встречается только у современных авторов. Те же, которые писали о фортификации сто и более лет назад,

---

[a]) Смотри об этом в Замечаниях кавалера Фоляра о Полибии, том 3, стр. 2.

кажется, придерживаются скорее того мнения, что бастионы постепенно совершенствовались еще в древности и что изобретение их не может быть приписано какому-либо отдельному лицу. Так, Пазино первую часть своей книги посвятил изменениям в старой фортификации и введению нового вида артиллерии увеличенной силы, не утверждая, вошла ли она как-то сразу в употребление или благодаря кому-либо лично [b]). Отсюда я заключаю, что в вопросе изобретения бастионов можно уверенно утверждать только то, что они стали известны вскоре после 1500 года. Так, в 1546 году Тарталья [14] опубликовал свои Quesiti et Inventioni diverse, где он в шестой книге упоминает, что, останавливаясь в Вероне (что могло быть несколькими годами раньше), он сам видел несколько бастионов необыкновенных размеров, из которых одни были уже закончены, другие же еще строились. И, кроме того, в этой самой книге имеется план Турина, укрепленного тогда 4 бастионами, которые, очевидно, уже были закончены незадолго до этого.

Хотя мы не можем определить точно время, когда начали превращать в бастионы старинные круглые башни, но, по всей видимости, это произошло незадолго до вышеуказанного времени. Так, в той же самой книге приор де Барлетта, который сам был военным специалистом, считал крепость Турин неприступной и к этому добавлял, что таково мнение всех знатоков военного дела. И тут он задавал себе вопрос, не достигло ли уже человеческое искусство в этой области высшей степени совершенства? Это является бесспорным признаком того, что в то время это изобретение было совершенно новым и что оно у всех специалистов вызывало размышления и удивление, а такое впечатление производит обычно всякое новое изобретение.

---

[b]) Discours sur plusieurs Points de l'Architecture de Guerre concernans les fortifications tant anciennes que modernes. Par Mr. Aurelio de Pasino Ferrarois, Architecte de très Illustre Seigneur, Monseigneur de Duc de Bouillon. Издано Плантино в 1579 г. Из приветствия в стихах, помещенного в начале этого труда, видно, что этот автор укреплял город Седан.

Первые бастионы, такие, как бастионы Турина, Антверпена [c]) и другие того же времени, были очень малы и слишком удалены один от другого, потому что тогдашний способ атаки состоял в захвате куртины [15], а не бастионов. Но спустя немного времени были введены более обширные бастионы, и их располагали уже ближе один к другому, чем это делали раньше, как это видно на цитадели Антверпена, которая была построена в 1566 году по распоряжению герцога Альбы [16], а высокие похвалы современников по ее поводу указывают на то, что это был первый образец такого усовершенствования.

Следовательно, можно установить, что к этому времени военно-инженерное искусство приняло новые формы, потому что большинство известных в настоящее время улучшений представляют собой не больше чем завершение методов, которые были разработаны в течение немногих лет того времени. Так, уже скоро после того появились такие знаменитости, как Лятрейль [d]), Алгизи, Марки [17], Пазино и особенно Шпекле [e]) [18], который был одним из самых выдающихся гениев, когда-либо занимавшихся этим искусством.

Чтобы можно было лучше судить о преимуществах новой фортификации, необходимо кратко рассмотреть различные способы, предложенные для прикрытия фланков [19], следовательно, для обеспечения безопасности вала от неприятельского нападения, поскольку полагают, что главнейшая оборона крепости сосредоточена на фланках. Поэтому искусство и способ обороны фланков

---

[c]) Антверпен был укреплен к 1540 году, как видно из 10-й главы 1-й книги Шпекле.

[d]) La Manière de fortifier Villes, Châteaux, et faire autres lieux forts, mis en françois par le Seigneur Bereil François de la Treille, Commissaire en l'Artillerie, Lyon, 1556.

Этот автор, как мне кажется, был первым, предложившим удаленные куртины, которые затем от других получили известность под названием усиленной системы.

[e]) Даниил Шпекле был архитектором в городе Страсбурге и умер в 1589 году. Он издал книгу по фортификации на немецком языке, которая была напечатана в Лейпциге в 1736 году [18].

дают в руки вернейшее средство для правильного суждения о преимуществах той или иной системы фортификации.

Самым обычным средством, которым достигают этой цели, являются теперь орильоны [20], равелины [21], располагаемые перед куртинами, демилюны [22] впереди угла бастиона и контргарды [23]; поэтому каждая из этих построек в отдельности заслуживает особого рассмотрения как в отношении ее прошлого, так и в отношении приносимой ею пользы.

Орильоны так же стары, как и сами бастионы, потому что в Турине и Антверпене находят (как выше было упомянуто) сниженные фланки, которые подрезаны в бастионах и притом снабжены значительной ширины эполементами [24], чтобы предохранять их от осадных батарей. Кроме того, подобные же орильоны, какие находятся теперь в употреблении, встречаются часто на чертежах Пазино, Шпекле и других, только с той разницей, что современные не такие мощные и массивные, как те. Это изобретение с успехом удержалось почти во всех наилучших системах фортификации, хотя польза их основывается, кажется, скорее на былой славе, заслуженной в далекие времена, чем на выгодах, которые действительно от них получают, потому что в старину при осадах осажденные обыкновенно строили позади бреши [25] ретраншемент [26], вследствие чего осаждающие были вынуждены закрепиться на развалинах бреши, чтобы захватить этот ретраншемент; в этом случае пушки, прикрытые орильоном, не могли остаться неиспользованными и, следовательно, в таких обстоятельствах оказывали прекрасную услугу осажденным. Можно привести также много примеров, когда осаждающий, после того как он успел прочно закрепиться на развалинах бреши, до того бывал этим потрясен, что оказывался вынужденным вовсе отказаться от своего предприятия. Но так как теперь выходит из практики это обыкновение задерживаться дольше после образования бреши и заполнения рва, то в наше время редко слышно о подобных выгодах, за которые были бы признательны орильонам.

Равелины, которые расположены перед куртинами (или демилюны, как их обычно называют в новых системах), должны служить для обеспечения фланков от перекрестного огня и для затруднения в размещении батарей, которые осаждающие строили на участке, расположенном против контрэскарпа [27], откуда они могли лучше поражать осажденных и от которых труднее укрыться. Это изобретение почти так же старо, как и само военно-инженерное искусство, потому что оно встречается в большинстве старинных крепостей и описано почти у всех прежних авторов, и с тех пор сохранено в большинстве фортификационных систем.

Однако прежние авторы, важнейшая забота которых была направлена на обеспечение фланков, не полагались на выгоду, которую они получали от последнего открытия, потому что хотя это средство и заставляет батареи, предназначенные для разрушения фланков, располагаться крайне стесненно на узком участке, но и на этом месте противник имеет больше простора, чем это требуется, для постройки своих контрбатарей [28]; и по этой причине различные авторы предлагали поставить впереди фланкируемого угла бастионов еще демилюны. Этим путем они намеревались овладеть участком, где могли быть размещены неприятельские батареи против фланков, и таким образом затруднить противнику сооружение этих батарей. Но это намерение не могло быть осуществлено таким путем полностью, и потому этот способ спустя некоторое время был оставлен.

Конечная цель контргардов f) [29], которые тоже очень стары,— та же, что и упомянутый только что [30] демилюн, и состоит в прикрытии фланков, чему они, если построены прочно, вполне соответствуют. Так, если противник хочет разрушить [31] фланки, то он должен либо устроить свою контрбатарею на самом контргарде,

f) Пазино, о котором мы выше упоминали, изобретение контргардов себе приписывает, хотя они впоследствии были значительно усовершенствованы Шпекле. Однако контргарды этого автора располагались не только впереди бастионов, но и вокруг всего укрепления.

что, однако, для него невыполнимо, если эта постройка имеет подходящий профиль, либо он должен разрушить часть контргарда, чтобы быть в состоянии устроить свою батарею на контрэскарпе и увидеть фланк, что все-таки, вследствие большой опасности и трудностей, представляет очень трудно выполнимое мероприятие; много препятствий он также встретит, если захочет приступить к пробитию бреши.

Однако, несмотря на преимущества этого изобретения, им совершенно пренебрегли в новых системах соседней нации[32] . Имеются, правда, две или три крепости, укрепленные французами, в которых хотя и встречаются такие сооружения, которые ими названы контргардами, но они не имеют ничего общего с теми, о которых здесь идет речь, кроме разве одного названия, хотя из собственного опыта использования этой постройки под Турином у французов должно было бы создаться выгодное мнение об ее достоинствах. Так, я недавно видел, что они усилили контргардами верки старых крепостей на значительном фронте, несмотря на то, что до того они были прикрыты сильно укрепленными сооружениями.

Из всего того, что было сказано до сих пор, ясно, что прежние инженеры много настойчивее заботились об устройстве прикрытия фланков, чем их преемники, и что, следовательно, фортификация своим совершенством нисколько не обязана современным инженерам, в чем хотят нас убедить некоторые несведущие писатели. Достоверно известно, что наибольшая сила крепости состоит в надежности фланков, потому что, даже когда выставленными батареями противника уже разрушены все прочие защитные сооружения, противник, однако, не осмелится приблизиться к главному валу, пока еще целы фланки. И так как это обстоятельство некоторыми современными инженерами мало принимается в соображение, то надо признаться, что истинные и подлинные основы этого искусства усвоены ими весьма несовершенно. Часто они спорят о каких-нибудь нескольких саженях в протяжении фланка, фаса или куртины или о нескольких градусах угла, оставляя, между тем, без внимания важнейший предмет рассмотрения, который заключается в прикрытии фланков от батарей противника.

Такое пренебрежение поддерживается иногда под видом некоего правила, которое состоит в том, что *нельзя видеть противника, не будучи видимым* [g]). Отсюда приходят к заключению, что если можно с фланка раскрыть противника, то и последний может разрушить фланк со своей батареи. Ошибочность такого заключения скрывается в том, что фланк, если только он хорошо прикрыт, не может быть виден противнику, пока он находится на таком месте, где ему представляется возможным устроить батареи; но как только противник начнет с такого места придвигаться, он подвергнется действительному огню фланка, не будучи в состоянии сам его атаковать в свою очередь. Так, например, пушка, прикрытая по общепринятому способу орильоном, может быть обнаружена противником не раньше, чем когда он перейдет через ров или овладеет брешью, однако ни на одном из этих обоих мест он не будет иметь возможность построить свои контрбатареи. И постройка, прикрывающая фланк, будет тем совершеннее, чем больше будет пространство, где противник находится в такой опасности.

Другие инженеры решались отрицать почти все достоинства этого способа, и с этой целью они так превозносили силу нового способа атаки, что пытались даже утверждать, будто никакая крепость не может быть так искусно укреплена, чтобы она могла устоять против такой атаки. Эти люди придерживаются того мнения, что раз только контрэскарп потерян, крепость должна тотчас сдаться, и это мнение они подкрепляют различными примерами очень сильных крепостей, которые были вынуждены к сдаче в значительно более короткое время, чем можно было предполагать. Если бы это мнение было правильно, то это означало бы, что большая часть расходов, которые пошли на постройку крепости, очень плохо использована, потому что только один вал с контрэскар-

---

[g]) Это правило в таком виде дано в «Fortification» Пагана [33], гл. IV.

пом доставил бы не менее выгоды, чем сильнейшая крепость. Но если разобраться в этом основательно, то можно прийти к выводу, что когда крепость хорошо построена и будет с честью обороняться, то потеря контрэскарпа еще не вызывает необходимости сдать крепость [h]).

Часто смелость и внезапность действий директора по апрошам [34] приводила в ужас робких и неопытных комендантов; но если подобные внезапные атаки будут предприняты против какой-либо крепости, которую защищает храбрый и опытный офицер, то этот сумеет так использовать все выгоды, что такое быстрое нападение приведет осаждающих к полной неудаче. Подобным образом действий часто даже легчайшие предприятия превращаются в совершенно невозможные, и нередко намерение добиться успеха в несколько дней приводит к полному отказу от всего предприятия [i]).

Кроме этих изобретений для прикрытия фланков, о которых здесь уже сообщено, были сделаны еще различные другие предложения совершенно другого рода, которые, впрочем, по причине их слишком необычного устройства не были рассмотрены. Таково сооружение некоей линии, которая пересекает ров от вершины бастиона до угла, противоположного контрэскарпу. Это предложение находится в мемуарах генерала Монтекуколи [35], как средство, которое должно представить значительно меньше трудностей, чем может казаться на первый

---

[h]) В последней достопримечательной осаде Барселоны потеря контрэскарпа (который был взят в течение 14 дней) не повлекла за собою сдачи крепости; но еще более жестокое сопротивление было оказано даже после того, как крепость имела пробитые во многих местах бреши.

[i]) Различные примеры подобного рода трудностей и опасностей, которым подвергались союзники в последнюю войну во Фландрии, описаны Ландсбергом, находившимся тогда на голландской службе в качестве инженера. Он полагает, что все это происходило по вине командования, которое из стремления к сокращению фронтов обложения зачастую оставляло в своем тылу укрепления противника, что сплошь и рядом приводило к полной невозможности дальнейшего продвижения войск.

взгляд [k]). Однако, несмотря на то, что при построенной так линии фланки скрыты от взора с построенной напротив, на контрэскарпе, батареи и что сама линия тоже может быть хорошо использована в обороне, я пока не слыхал еще, чтобы это действительно где-либо было использовано.

Другой способ обеспечения фланков состоит в том, что располагают входящий угол контрэскарпа или равелина между фланком и контрбатареей. Этот способ описан Эрраром де Бар ле Дюком [l]) [36] и, возможно, является изобретением графа фон Линара. И хотя некоторые авторы, которые не поняли всех преимуществ этого способа, никак не хотели согласиться с тем, что часть рва вовсе не может быть наблюдаема с фланка, что необходимо вытекает из этого устройства, тем не менее этот способ был одобрен выдающимися специалистами, занимавшимися этим искусством, и оценен их преемниками. Знаменитая крепость Берг-оп-Цом имела действительно свои фланки, частично прикрытые по этому способу.

При хорошем грунте может представиться возможность достигнуть такой мощной обороны, которая далеко превосходит все до сих пор упомянутое; это было получено при помощи контрмин [37]. Так, если установлено, что фортификация крепости имеет силу не бо́льшую, чем потребуется, чтобы вынудить противника вынести свои батареи на гласис [38], когда он собирается либо пробить брешь, либо разрушить фланк (что требует может быть только подходящего профиля и наличия равелина перед куртиной), то осажденные всегда в состоянии, если только ров до надлежащей глубины свободен от воды, посредством своих мин разрушить батареи противника и неоднократно повторять эту операцию, насколько позволяет

---

[k]) См. «Memorie del General Principe di Montecuccoli», стр. 116.

[l]) La Fortification démontrée, кн. III, гл. 2. Кроме упомянутого здесь изобретения, этот автор предложил устраивать галерею ниже прикрытого пути с выходом в ров, что и было устроено в укреплении при Турнэ, но более полно в Берг-оп-Цом. Кн. IV, гл. 7.

глубина грунта. В случае, когда расположение батарей противника определено, осажденные всегда могут их захватить и тем получить несравнимо большее преимущество над противником, если он снова попытается построить батареи: в таких обстоятельствах у осажденного всегда есть возможность подготовиться к защите.

Первое удачное применение мин при осадах имело место в Неаполитанском королевстве, где Педро Наварро [39] этим способом овладел крепостью, которую защищал французский гарнизон. Но первый выдающийся пример, когда осажденные применили мины, нанося ущерб противнику, имел место при осаде Кандии в 1666, 1667 и 1668 годах. Это не значит, что раньше не применяли мин при обороне крепости, хотя и не так искусно, но мы приводим эту осаду, потому что город Кандия в течение трех лет держался против турецкой мощи главным образом при помощи этого изобретения. После этого начали лучше постигать достоинства контрмин. Последний замечательный пример их использования представляет оборона города Турина в 1706 году: осажденные посредством мин так долго задерживали операции противника, что он спустя 4 месяца после открытия траншей едва только овладел контрэскарпом; и даже тогда осаждающими были взорваны на воздух 11 пушек противника всего только за 3 или 4 дня перед тем, как крепость была освобождена от осады.

Прежде чем закончить рассмотрение этого вопроса, я должен упомянуть о крупном усовершенствовании мин, которое описывается в несравненном сочинении, приложенном к третьей книге французского издания Полибия [m]). Нигде так полно не изложены способы применения всевозможных видов мин. В самом деле, можно не так уж точно соблюдать форму подкопа, которая там показана и как автор этого требует, но это нисколько не влияет на общее расположение горнов, которое

---

[m]) В предисловии сказано, что это сочинение принадлежит г-ну Вальеру, маршалу и генерал-инспектору артиллерии.

представлено очень хорошо отчасти для того, чтобы экономить грунт, отчасти же для того, чтобы разрушать сооружения противника.

Я уже сообщил некоторые сведения о недостатках, которые находятся в сочинениях современных инженеров, предлагающих новую систему фортификации. Но, говоря об этих авторах и их последователях, я должен при этом отметить исключительные заслуги знаменитого Кугорна [40], который вне всякого сомнения был самым выдающимся инженером, какого когда-либо видел свет. Этот автор опубликовал две книги по этому предмету. Первая содержит способ укрепления пятиугольника, к которому приложен проект усовершенствования фортификации Кевердена. В другой книге он изложил три различных системы укреплений, из которых первое 6-угольное, другое 7-угольное и третье 8-угольное. Кроме того, он изложил, как следует укреплять ту сторону крепости, которая прилегает к реке. При этом он, чтобы этим доказать большое преимущество его способа обороны, исследовал всевозможные виды атаки, которые могут быть предприняты против предложенных им крепостей. Поэтому этот труд может рассматриваться частью как учение об атаке и обороне, а частью как система фортификации; но в целом это превосходнейший труд, какой только появлялся в свет по этому предмету. Он был написан сначала на голландском языке, как на родном языке автора; а потом был переведен на французский и английский языки [41], но весьма несовершенно, хотя уже в новом издании французского перевода, которое вышло в Голландии, было исправлено множество ошибок и разъяснены некоторые особо трудные места издателем, который, по-видимому, очень хорошо понял все намерения автора.

Между тем, я был осведомлен через тех людей, которые лично хорошо знали этого великого человека, о том, что эти его книги в то время не доставили ему ни прибыли, ни внимания, на которое он мог с полным правом надеяться; и даже о том, что он благодаря интригам тогдашних инженеров, которые не хотели ни на шаг отступать от старых привычек, был обесславлен как неопытный и тщеславный человек. Но все эти нападки, вызванные завистью и предрассудками, он отвел обороной форта Гюйом под Намюром, когда этот пункт был осажден французами. После этого дела, которое упрочило его славу, он постепенно поднялся до высших военных должностей и увековечил свое имя руководством осадой Намюра при короле Вильгельме, а позднее осадами Бонна [42], Лимбурга, цитадели Люттиха и других мест. Его смерть, которая последовала в начале последней войны во Фландрии, была весьма роковой для союзников: почти все осады, которые были ими предприняты после 1707 года, были печальным доказательством этому.

Кроме осад, которые он вел, он был занят также совершенствованием и постройкой разных голландских пограничных крепостей. Его последнее укрепление, которое он, однако, не закончил, было Берг-оп-Цом, которое сделало навсегда его имя почетным, хотя еще и теперь критика не оставляет его в покое, как я это слышал от военных, склонных рассматривать как его существенную ошибку те именно постройки этой крепости, которые способствуют значительному усилению ее обороны.

Трудно понять, как при той громкой славе, которую генерал Кугорн заслужил своей деятельностью, так мало внимания уделяется его сочинениям. Естественнейшая причина такого пренебрежения, по-видимому, заключается в соперничестве двух наций, противоположные интересы которых проявляются в том, что какие-либо изобретения одной нации никогда не будут оценены по достоинству другой нацией. Что бы там ни было, а я все же думаю, что авторитет этого автора впоследствии еще возрастет. Так, я совсем недавно видел, что в одной из крупнейших пограничных крепостей Франции сооружена постройка, которая, очевидно, взята из упомянутых чертежей Кугорна.

Впрочем, среди современных авторов по фортификации я, не нанося ни малейшего ущерба их славе, не мог найти никого, кто заслуживал бы быть поставленным рядом с упомянутым здесь Кугорном. Имеются еще два знаменитых автора, которые писали об искусстве атаки и обороны крепостей, теснейшим образом связанном с фортификацией; я подразумеваю генерала Гулона и маршала Вобана [43]. От первого мы имеем трактат под названием Mémoires sur l'Attaque et la Dépense des Places, где он в очень ясной форме дал важнейшие правила для ведения этих операций. От другого — посвященное тогдашнему французскому королю сочинение, копии которого были потом распространены в нескольких экземплярах, пока, наконец, это сочинение было впервые издано несколько лет тому назад в Голландии [44]. В этой книге г-н Вобан очень обстоятельно изложил отдельные элементы атаки, которые являются его собственным изобретением: там имеются рикошетные батареи [45], параллели [46] и особенно продвижение сапой [47]. При этом он дал также очень пространное наставление ко всем другим необходимым операциям, так что это сочинение в целом можно справедливо рассматривать как образцовое сочинение, в котором большой опыт соединен с искусством этого великого человека.

Может быть, ожидают, что я должен сделать тут заявление точно с такими же похвалами о способностях этого упоминаемого здесь инженера и об его искусстве по фортификации; но так как он сам по этому предмету ничего не написал, то можно меня извинить за то, что я не включил его в число авторов по фортификации. Но если быть справедливым, то из всего до сих пор рассмотренного мною об его трудах я могу заключить, что он заслуживает уважения скорее не за фортификацию, а за свои дарования во всех остальных областях. Хотя я очень высоко ценю его большой ум и проницательность, но все же я не могу понять, как можно было его изобретения в этом искусстве ставить в какое-либо сравнение с кугорновыми.

Итак, я достаточно рассказал о возникновении и развитии современного военно-инженерного искусства. Мы теперь перейдем далее к выяснению того, что более непосредственно связано с настоящим нашим трактатом, а именно: к изобретению пороха и артиллерии и ее развитию, а также к различным теориям, которые с ним связаны.

Изобретение пороха приписывается обычно немецкому монаху по имени Бертольд Шварц, который, как говорят, изобрел его в 1320 году. Но впервые он был применен, как полагают, в 1380 году в войне венецианцев против генуэзцев. Однако оба эти мнения бесспорно ошибочны, потому что смесь, подобная пороху, была уже при Роджере Бэконе [48], который жил почти за 50 лет до упомянутого Шварца, и описана им как вещь уже достаточно хорошо известная; имеется также неопровержимое свидетельство того, что применение артиллерии имело место много раньше, чем в 1380 году.

И действительно, так как об изобретении селитры совершенно ничего неизвестно, то не удивительно также, что изобретение пороха должно быть делом также сокрытым и неизвестным, потому что эти два открытия так тесно связаны одно с другим, что даже нельзя представить себе, как могло первое быть известно задолго до второго.

Главное свойство селитры состоит в чрезвычайном увеличении той зажигательной силы, которая проявляется во всех смешанных с нею горючих веществах, хотя сама она, без смешения, и не загорается, и не горит. Так, если, к примеру, положить в тигель одну только селитру и держать на сильнейшем огне, она только расплавится и будет накалена, но не воспламенится. Но коль скоро она будет смешана с каким-либо горючим веществом вроде серы или угля, как тотчас же произойдет стремительное воспламенение и при этом уничтожится соответствующая часть селитры, смотря по тому, больше или меньше с ней было смешано горючих веществ. Такое же воспламенение произойдет, если бросить непосредственно в огонь только одну селитру. Представляется невероятным, чтобы это свойство селитры могло долго оставаться не раскрытым после того, как было обнаружено само это вещество, потому что если даже случайно бросить его в огонь, то тотчас же в смеси с горючими веществами должна будет проявиться его изумительная сила.

И после того как это было однажды замечено, вполне естественно и легко было напасть на такую смесь селитры с горючими веществами, которая горела бы более стремительно, чем уже известные вещества. Наш современный порох представляет собою не что иное, как такую же, но улучшенную смесь.

Следовательно, если бы мы могли определить время, когда впервые стала известна селитра, то смогли бы также довольно точно установить, когда впервые был найден состав, подобный нашему пороху. Общее мнение таково, что селитра открыта в IX веке не то арабами, не то нынешними греками в то время, когда эти народы с наибольшим усердием занимались химией и алхимией. Арабское название селитры означает то же, что и взрывная сила [49]; и греческий огонь, который был применен на войне при последних греческих императорах, если только правдивы приписываемые ему писателями действия, очевидно, должны были изготовлять тоже из селитры [50].

Некоторые современные авторы пытаются утверждать, что селитра стала известна еще с весьма отдаленного времени; на это наталкивает их то обстоятельство, что названия nitrum и salpeter имеют в настоящее время как будто бы одно и то же значение. Но химиками этот вопрос теперь уже выяснен, а именно у некоторых древних народов под веществом, описанным Плинием и носившим название nitro подразумевалась соль, совершенно отличная от той, которую мы называем salpeter.

Но то, что изобретение пороха или подобного ему состава появилось задолго до того времени, когда жили Шварц и Бэкон, и потому, по всей видимости, настолько старо, насколько стара и известна сама селитра, явствует из сочинения Бэкона. То, что он описывает, не было новооткрытым составом, а только применением давно известного состава для использования в военном деле. И из его собственных слов ясно видно [n]), что уже тогда смесь

---

[n]) Бэкон говорит, что можно искусственно воспроизводить громоподобный шум и искры, превосходящие сверкание молнии, и что это дало бы различные средства, которыми можно было бы

из селитры и других веществ употреблялась для изготовления фейерверков, применявшихся для развлечений. Это изложено еще яснее в книге Марка Грека [52], носящей название Liber ignium °). Этот автор описывает два вида фейерверков: один — летучий и другой, дающий взрыв. Оболочка для первого должна быть, по его указаниям, длинной и узкой и состав очень уплотнен. Оболочка для другого должна быть короткой и широкой, на обоих концах хорошо перевязанной и снаряженной только наполовину. Обе смеси, которые он описывает, состоят из двух фунтов угля, одного фунта серы и шести фунтов селитры; смесь должна быть измельчена и хорошо перемешана в каменной ступке. Этот состав должен быть еще сильнее, чем теперешний порох, изготовляемый в больших количествах. Хотя неизвестно точное время жизни этого писателя, но вероятно, что он жил задолго до применения артиллерии, потому что он нигде, как я вижу, не делает ни малейшего упоминания о том, что этот искусственный материал был употреблен на войне; и так как об изобретении бумажного змея и шутихи, как их называют в настоящее время, он говорит не как о чем-то новом, то можно уверенно думать, что оно применялось еще задолго до него.

Первое употребление этой смеси в военном деле имело место, кажется, вскоре после 1300 года. Предложение Бэкона, сделанное им в 1280 году, использовать такой взрыв для уничтожения городов и армий, очевидно,

---

уничтожить город или армию. По его мнению, с помощью этого искусства Гедеон уничтожил мадианитян. В другом месте он это же доказывает, но другими словами: Et experimentum huius rei capimus ex hoc ludicro puerili, quod fit in multis mundi partibus scilicet ut instrumento facto ad quantitatem pollicis horribilis sonus nascitur in ruptura tam modicae rei scilicet modici pergameni, quod fortis tonitrui rugitum et corruscationem maximam sui luminis jubar excedit [51].

См. предисловие доктора Джебба к его изданию «Baconis opus majus».

°) Это рукопись, которая находится у доктора Мэда. Но то, что там изложено, приведено издателем «Baconis opus majus» в его предисловии.

было первой мыслью, которая впоследствии была развита полнее. Шварц не являлся первым изобретателем пороха, а, вероятно, первый занимался тем, чтобы применить его в военном деле, хотя общераспространенный рассказ о том, что он случайным образом дошел до этого открытия, кажется, нисколько этого мнения не подтверждает [p]). И может быть, различные усовершенствования, которые спустя некоторое время были сделаны другими, равно как и претворение в разных местах идей Бэкона, являются действительным и причинами того, что историки весьма неединодушны в вопросе о происхождении артиллерии.

Некоторое время после изобретения артиллерии порох приготовлялся из значительно более слабого состава, чем в настоящее время [q]) и даже чем тот, который делали согласно сведениям Марка Грека. Однако причина этого заключалась, вероятно, скорее в слабости тогдашних орудий, чем в незнании лучшего и более сильного состава. Так, первые артиллерийские орудия были очень короткими и грубыми на вид, так как обычно изготовлялись из нескольких в длину сваренных железных полос и скреплялись железными кольцами. Ввиду того что они предназначались для стрельбы огромными каменными ядрами,

---

[p]) В общеизвестном рассказе, сообщается, что, когда Шварц как-то однажды растирал в ступке вещества для пороха и после прикрыл ступку камнем, в нее случайно попала искра, от которой смесь загорелась, и камень подбросило на значительную высоту. Однако теперь уже доказано, что Шварц, который был химиком, все же не мог быть первым изобретателем пороха, задолго до того уже известного, но этот случай мог навести его на мысль об удобном виде, в котором могли бы использовать порох на войне, потому что уже Бэкон, кажется, предвосхитил то действие пороха, которое сила пламени способна произвести на окружающие тела. Название и форма мортиры, которая еще в старинную артиллерию вошла как вид орудия, а также применение ее для навесной стрельбы камнями придают большой вес этому предположению.

[q]) См. в «Quesiti et Inventioni» Тартальи, кн. 3, вопрос 5, где приведены 23 различных состава, применявшихся в разное время. Первый из них, который в то же время является и самым старинным, приготовлялся из равных частей селитры, серы и угля.

в подражание старинным метательным машинам, которые они должны были заменить, у них было соответственно очень большое жерло. Однако трудность перевозки и перемещения такой неуклюжей машины, а также открытие того обстоятельства, что меньшие размером чугунные ядра производят большее действие, когда они выброшены бо́льшим количеством более сильного пороха, вызвало в скором времени крупные изменения как в материале, так и в форме первых орудий. Таким путем были введены бронзовые пушки, которые не только были легче и удобнее для перевозки, чем прежние, но благодаря их меньшему жерлу были значительно прочнее и могли выдерживать больший заряд лучшего пороха, чем бывшие до того в употреблении. Таким способом чугунные ядра весом от 40 до 60 фунтов приводились в более быстрое движение и, следовательно, обладали значительно большей силой, чем та сила, которую до того были в состоянии сообщить огромным камням [г]).

[г]) Время, к которому относятся эти изменения и полученные благодаря им улучшения, описано Гуйччардини [53], который высказывается следующим образом о французской армии, собиравшейся в 1494 году вторгнуться в Италию:

Et per unirsi con questo esersito, erano state condotte per mare a Genova quantità grande d'artiglierie da battere le muraglie, et da usare in campagna, ma di tale sorte, che giamai non haveva veduta Italia le simiglianti. Questa peste trovata molt' anni innanzi in Germania, fu condotta la prima volta in Italia da'Venetiani nella guerra, che circa l'anno della salute 1380 hebbono i Genovesi con loro... Il nome delle maggiori era bombarde, le quali, sparse dopo questa inventione per tutta Italia s'adoperavano nell'oppugnatione delle terre, aleune di ferro, alcune di bronzo, ma grossissime, in modo che per la macchina grande et per l'imperitia de gli huomini, et mala attitudine de gl'instrumenti tardissimamente et con grandissima difficultà si conducevano, piantavansi alle terre co'medesimi impedimenti, et piantate era dall'un colpo all'altro tanto intervallo, che con piccolissimo frutto, a comparatione di quello, che seguitò dopo, molto tempo consumavano, donde i defensori de'luoghi oppugnati havevano spatio di potere otiosamente fare di dentro ripari e fortificationi... Ma i Francesi fabricando pezzi molti più espediti, nè d'altro che di bronzo, i quali chiamavano Cannoni, et usando palle di ferro, dove prima di pietra, et senza comparatione piu grosse et di peso gravissimo, s'usavano, li conducevano in sulle

Этими путями вошел в употребление порох, который и теперь еще применяется во всей Европе. Но усовершенствование пороха заключалось не только в пропорции веществ, из которых приготовлялась эта смесь [s],) поскольку совершенно особую выгоду принесло также изобретение способа зернить ее. Так, первоначально порох изготовлялся мелким, как мука; в таком виде он получался размалыванием состава. Сомнительно, было ли первоначальной целью зернения пороха увеличение этим его силы или только желание сделать его удобным для малокалиберного огнестрельного оружия; зерненый порох только для этого и применялся в течение многих лет, тогда как в пушках всегда употребляли пороховую мякоть. Но когда заметили, что зернением достигается значительное увеличение силы пороха, так как благодаря этому огонь получал свободное распространение между зернами, то от пороховой мякоти полностью отказались [t]).

---

carette, tirate (non da buoi, come in Italia si costumava) ma da cavalli con agilità tale d'huomini, e d'instrumenti deputati a questo servigio, che quasi sempre al pari de gli eserciti caminavano, et condotte alle muraglie erano piantate con prestezza incredibile, et interponendosi dall'un colpo all'altro piccolissimo intervallo di tempo, si spesso et con impeto si gagliardo percuotevano, che quello che prima, in Italia fare in molti giorni si soleva, da loro in pochissime hore si faceva [[54]], Guicciardini Historia. Libr. 1, стр. 45.

Упоминание этим автором о громадной величине камней, употреблявшихся в старинных орудиях, будет более понятно, если представим себе, что, когда Магомет II в 1453 году осаждал город Константинополь, он обстреливал валы каменными ядрами весом до 1200 фунтов. Но из такого орудия можно было сделать в день не более чем четыре выстрела.

[s]) Мы видим у Тартальи, что в его время пушечный порох (polver grossa moderna) изготовляли из 4 частей селитры, 1 части серы и 1 части угля, а мушкетный порох — из 48 частей селитры, 7 частей серы и 3 частей угля или из 18 частей селитры, 2 частей серы и 3 частей угля. Эти составы мушкетного пороха довольно точно согласуются с составами современных порохов, так как в ста фунтах первого пороха содержится селитры примерно на 1 фунт больше, чем в теперешних, а в других на 3 фунта больше.

[t]) Совершенно бесспорно, что первоначально порох применялся в виде мякоти и что долгое время зерненым порохом поль-

Устройство артиллерийских орудий в течение двух столетий получило весьма незначительные усовершенствования; лучшие орудия, которые изготовляются теперь, мало отличны в отношении пропорций от тех, которые изготовлялись во времена императора Карла V. Правда, часто действительно предлагались и испытывались легкие и короткие орудия; но, несмотря на то, что они имели свои преимущества и в особых условиях очень хорошо выполняли свое назначение, кажется все-таки, что они были изъяты из всеобщего употребления, как слабые. Хотя за это время пропорции в артиллерии не изменились сколько-нибудь заметно, но зато значительные изменения были внесены в способы ее употребления, потому что теперь всюду стремятся выполнять задачи орудиями меньших калибров, чем те, которые до того требовались. Таким образом, повсеместно приняты батарейные орудия [56], полукартауны, стреляющие 24-фунтовым ядром, поскольку было найдено из опытов, что их выстрел хотя и слабее выстрела более крупного орудия, однако для применяемых в настоящее время профилей в крепостных сооружениях он достаточно сильный; ввиду удобств перевозки и перемещения, равно как и экономии в боеприпа-

---

зовались только для ручного огнестрельного оружия, а пороховая мякоть применялась для пушек. Тарталья положительно уверяет в своих «Quesiti», кн. 3, вопросы 9 и 10, что в то время пушечный порох был в виде мякоти, а мушкетный порох зерненый. И наш соотечественник Уильям Бурн[55] в своей книге «Art of Shooting in great Ordonnance», которая появилась через 40 лет после Тартальи, сообщает в первой главе, что шланговый порох (который он противопоставляет зерненому пороху) должен быть мелким, как песок или пыль; и в третьей главе он говорит, что 2 фунта зерненого пороха действуют так, как 3 фунта шлангового пороха. Далее г-н Генрих Мэнзьюэйринг в своем «Seamans Dictionnary», который он во времена Карла I посвятил герцогу Букингэмскому, в слове «Порох» сообщает, что два рода пороха были в употреблении: один назывался *шланговым порохом*, был не зерненым и выглядел, как пыль, а другой порох был *зерненый*; хотя он добавляет, что шланговый порох на море не применяется. А я думаю, что к тому времени, когда составлялась эта книга, все пороха были уже только зерненые, потому что иностранные авторы по артиллерии задолго еще до того рекомендовали употребление только зерненых порохов.

сах, полукартауны имеют весьма значительное преимущество перед целым картауном, который прежде применялся для пробития бреши. Весьма важным усовершенствованием в применении артиллерии является также современный способ брешировання, который состоит в том, что прежде всего стараются прорезать целый вал насколько возможно ниже, прежде чем обрушить его верхнюю часть. Так, я не могу припомнить, встречается ли этот способ у кого-либо из прежних авторов, и Габриель Буска [u]), который был высокого мнения о своем богатом опыте, утверждает обратное. Колладо, правда, упоминает об этом, но только как о способе, применяемом турками [x]), не высказывая одобрения и не предлагая его как образец для позаимствования.

Но значительнейшее усовершенствование в практическом применении артиллерии (о теоретической части будет сказано в своем месте) состоит в способе стрельбы малым количеством пороха с наводкой орудия таким образом, чтобы ядро было брошено прямо на парапет [59] противника и внутрь его укрепления. В этом случае ядро упадет на землю под небольшим углом и будет катиться с незначительной степенью скорости по приданному ему направлению, а потому если орудие было направлено по одной линии с батареей, которую надо

---

[u]) См. его «Instruzzione de Bombardieri», изданное в Карманьоле в 1584 году, в 37-й главе, где он советует начинать брешь с верха стены и продолжать ее затем книзу.

[x]) См. «Pratica manuale di Artiglieria dal Mag. Signor Luigi Collado Hispano», Bettico Nebrisense, изданное в Венеции в 1586 году, в 20-й главе, где он говорит: Nelle fattioni del gran Turco... sempre si adoperavano i pezzi... da tagliare le muraglie per di sotto di esse transversalmente, et di poi di alto in basso a perpendicolo, et applicandovi poi tutti a un tratto i basilischi, con che fanno cascar giù quella parte di muraglia che era già tagliata [57].

Упоминаемая здесь книга была написана и издана на итальянском языке, хотя автор ее был испанцем; это произошло потому, что он служил тогда в качестве инженера в испанской армии в Италии и в предисловии говорит, что намерен переиздать эту книгу на испанском языке. Это последнее издание, я предполагаю, и есть то, на которое Блондель [58] ссылается в своем «Art de jetter les Bombes».

подбить, или с фронтом, который должно обстрелять, то такой выстрел пройдет вдоль всей батареи или целого фронта и тем причинит обороняющемуся бесконечно больше бедствий и нанесет его пушкам много больше ущерба, чем если бы стреляли по этому укреплению обычным способом. Такое расположение артиллерии, которое действительно представляется чрезвычайно выгодным, является изобретением маршала Вобана и было им названо рикошетной батареей [y]). Оно было впервые применено при осаде Эт в 1692 году).

После этого краткого изложения того, что было сделано в практической части артиллерии, мы теперь изложим появлявшиеся время от времени различные теории движения ядер, в которых мы встретим очень мало заслуживающего какого-либо внимания. Но несмотря на это, поскольку все это некоторым образом связано с нашим сочинением, мы все же считаем себя обязанными доставить читателю в этом полное удовлетворение.

Первым автором, насколько я знаю, который обстоятельно писал о полете пушечных ядер, был Тарталья, знаменитый итальянский математик, который приобрел бессмертную славу решением кубического уравнения, обычно приписываемым Кардано. Тарталья весьма тщательно рассмотрел свойства этого движения сначала в своей Scientia nova, напечатанной в Венеции в 1537 году, а после — в своих Quesiti et Inventioni diverse, напечатанных там же в 1546 году [60]. И хотя тогдашнее несовершенное состояние механики предоставило в его распоряжение слишком ошибочные основания для того, чтобы на них что-либо строить, он все же в своих исследованиях добился некоторой удачи, потому что первым нашел, что самый дальний полет снаряда будет при угле в 45 градусов к горизонту. Он утверждал также (против обычного мнения артиллеристов), что ни малейшая часть пути, описываемого в воздухе ядром, не есть прямая линия,

---

[y]) См. его трактат «De l'Attaque et de la Défense des Places».

[z]) См. журнал его осады, напечатанный в конце последнего издания «Mémoires» генерала Гулона.

хотя в некоторых случаях кривизна этого пути незаметна; он сравнивал ее с поверхностью моря: если она рассматривается в незначительной своей части, то кажется совершенно плоской, хотя, вне всякого сомнения, она закруглена относительно центра Земли. Сам он приписывает себе также изобретение артиллерийского квадранта [61] и неоднократно высказывается не очень ясно о результатах всяких еще не испытанных методов, которые им были предложены. Но так как он был недостаточно сведущ в артиллерийском деле, а мнения свои основывал лишь на чистой теории, то подвергся нападкам со стороны почти всех последующих авторов, часто, однако, без упоминания о нем, например, в сочинениях Буска, Колладо [a]), Уфано, Семеновича и других. И поскольку в зарождавшиеся в связи с этим вопросы стала вмешиваться философия по вопросам об этом движении, возникало много споров, особенно в Италии; эти споры продолжались вплоть до времен Галилея и, по-видимому, послужили поводом к его общеизвестным «Беседам о движении», впервые вышедшим в свет в 1638 году [62]. В течение времени, до того как было освоено учение Галилея, появились различные теории движения ядер и всякого рода таблицы дальностей стрельбы, отвечающих различным углам возвышения, которые, однако, были совершенно неправильны и никак не могли соответствовать действительному движению таких тел, хотя некоторые из этих работ исходили от людей, бóльшую часть своей жизни проведших в артиллерийской практике. Таковы таблицы Уфано, Галлея, Ульриха [63] и других, которых привел

---

[a]) Колладо в 63 главе отрицает, что Тарталья был первым изобретателем артиллерийского квадранта и утверждает, что об этом приборе знал за много лет до того Даниил Зантбех либо Региомонтанус (он не указывает, который из них). Однако следует признать, что книга Зантбеха, где высказано это предположение («Problematum Astronomicorum et Geometricorum sectiones septem»), впервые вышла в 1561 году, следовательно, появилась много позднее Тартальи. К тому же Зантбеху был неизвестен способ применения квадранта с этой поставленной перед ним целью, хотя он тут и говорит о различных возвышениях орудия.

Блондель [b]); к ним можно еще добавить другие таблицы, о которых этот автор не упоминает. Среди прежних авторов, которые писали по этому вопросу и число которых очень велико, находились, правда, лишь немногие, не соглашавшиеся с умозрительными рассуждениями о различении естественного, насильственного и смешанного движений, хотя в определении этих ложных понятий едва ли двое из них могли согласиться между собою.

Но больше всего поражает нас то, что при этих разногласиях нашлось так мало людей, которые при всех имевшихся к тому возможностях стремились бы строить свои теории, обратившись к опыту. Как бы то ни было, но я могу припомнить не более четырех авторов, которые действительно определяли опытным путем дальность стрельбы для различных возвышений. Первый из них Колладо, оставивший нам таблицу дальностей стрельбы из 3-фунтового фальконета для каждой точки артиллерийского квадранта. Однако из его чисел ясно, что в этом орудии был взят не обычный заряд [c]). Вторым был наш соотечественник Бурн, трактат которого был издан год спустя после трактата Колладо. Его возвышения были обозначены не точками артиллерийского квадранта, а градусами, и он определял отношение дальности выстрела,

---

[b]) Заметим, что мнение, оспариваемое Блонделем в его «Art de jetter les Bombes», принадлежит не Ривальтиусу, которому Блондель его приписывает, а ранее упомянутому Зантбеху, у которого Ривальтиус это позаимствовал. См. у Зантбеха, Sect. 6.

[c]) Этими опытами было установлено, что дальность прямого выстрела равна 268 шагам. При возвышении на первой точке (что составляет 12-ю часть квадранта или $7^1/_2$ градусов) дальность достигла 594 шагов; на второй точке — 794 шагов; на третьей — 954 шагов, на четвертой — 1010, на пятой — 1040 и на шестой — 1053 шагов. Дальность выстрела на седьмой точке оказалась между дальностями на третьей и четвертой точках; на восьмой точке — между дальностями на второй и третьей; на девятой — между дальностями на первой и второй; на десятой — между дальностью прямого выстрела и дальностью первой точки; на одиннадцатой ядро упало сверху почти около самого орудия. См. 61-ю главу. Заметим также, что упоминаемые здесь шаги не геометрические, а обыкновенные, как он указывает в 42-й главе.

отвечающего различным возвышениям, к дальности прямого выстрела [d]). Однако этот автор не пишет, каким орудием он производил свои опыты. Но из его пропорций можно заключить, что оно должно было быть одним из самых мелкокалиберных. Было бы желательно, чтобы он поместил эту подробность вместе с приведенными им, потому что в дальнейшем будет показано, что отношение между различными дистанциями, на которые орудие стреляет при различных возвышениях, очень изменяется в зависимости от скорости, величины и веса ядра.

Двумя другими авторами, известными мне по этому предмету, были Эльдред и Андерсон, оба англичане; из них последний по чрезмерному пристрастию к своей ложной теории весьма грубо подделал свои эксперименты, о чем я потом буду иметь случай сказать подробнее. Но Эльдред заслуживает большей похвалы [e]). Его основные начала довольно просты, и хотя они не соответствуют истине, но все же довольно близко подходят к ней при известных условиях. Он оставил записи только дальности выстрелов из различного рода орудий при малых углах возвышения, которые были все ниже 10 градусов. В его книге находится большое число опытов, которые кажутся проведенными с особой тщательностью и большим вниманием; и он сам имел смелость не скрыть от нас те, которые не согласовались с его теорией. Вообще, видно, что он приложил гораздо больше старания и обладал много бо́льшими знаниями в этом деле, чем его собратья по прак-

---

[d]) Если дальность прямого выстрела принять за 1, то дальность, отвечающая возвышению в 5 градусов, выразится через $2^2/_9$; при возвышении в 10 градуссв — через $3^1/_3$; при 15 градусах — через $4^1/_3$, при 20 градусах — через $4^5/_6$ и наибольшая дальность, которая отвечает возвышению, равному 42 градусам, будет $5^1/_2$. Но, смотря по тому, будет ли ветер попутный или встречный выстрелу, угол возвышения самого дальнего выстрела может изменяться от 45 градусов до 36. См. его «Art of Shooting in great ordonnance» в 7-й главе.

[e]) Его книга носит название «The Gunners Glasse», и опыты, на которых он основывается, были большей частью произведены у дуврского замка, где он прожил много лет в качестве пушечного мастера. Наиболее ранняя дата его опытов относится. к 1611 году, хотя его книга впервые была издана в 1646 году

тической части артиллерии, потому что все они слишком упорно придерживались ложной теории и так твердо держались усвоенной практики, что и не думали об объяснении этого искусства собственными опытами и, следовательно, даже не понимали, что оно нуждалось в еще большем совершенствовании. Иначе было бы невозможно, что столь долгое время придерживались положений, которые так мало согласуются с опытом, даже после работ Галилея.

Беседы Галилея о движении, как уже было упомянуто, были изданы в 1638 году, и в них он открыл всеобщие законы, которые природа соблюдает в возникновении и изменении движения. Он был первым, кто писал о действии тяжести на падающие тела, и вывел, что линия, которую описывает пушечное ядро при своем полете, будет параболой, если только оно не будет отклонено от этого пути действием сопротивления воздуха. Он также предложил средство для определения изменений, которые происходят благодаря этому сопротивлению; так, он описывает способ, посредством которого можно определить действие, которое оказывает воздух на движение пушечного ядра на каком-либо расстоянии от орудия.

Когда Галилей показал, таким образом, что все брошенные тела, если только они не подвергаются действию сопротивления воздуха, описывают параболу, то следовало ожидать, что те, кто писал после него, приложат все усилия к исследованию изменений, которые происходят от сопротивления воздуха, или, по крайней мере, исследуют, нужно ли учитывать это обстоятельство или нет. Однако, вместо того чтобы проявить в этом осмотрительность, последующие авторы весьма ретиво и не обращаясь за помощью к опыту утверждали, что сопротивление воздуха не может произвести никакого заметного изменения в полете снаряда, опираясь в этом ложном утверждении на чрезвычайную разреженность воздуха по сравнению с разными плотными телами. Когда же это необоснованное мнение стало всячески поддерживаться и непрестанно повторяться, то приняли его за такое начало, которое не нуждается ни в каком доказательстве, и вообще стали утверждать, что движение тел происходит довольно точно по параболе.

Итак, в 1674 году наш соотечественник Андерсон опубликовал трактат под названием The genuine use and effects of the Gun, где он следует основным положениям Галилея и настойчиво утверждает, что полет всех пушечных ядер происходит по параболе, и притом пытается опровергать все возражения, которые выдвигались против того.

В 1683 году г-н Блондель издал в Париже Art de jetter les bombes, где также учение Галилея применено к движению всех видов снарядов и особенно рассмотрены изменения, вызываемые сопротивлением воздуха; но и этот автор в результате обширного исследования тоже приходит к заключению, что влияние воздуха так незначительно, что это обстоятельство нисколько не нарушает правильности его выводов [f]). Подобным же образом в наших Philosophical Transactions по этому вопросу напечатана [g]) статья д-ра Галлея, который, принимая во внимание большую разницу между тяжестью снаряда и воздуха, нашел весьма правдоподобным, что сопротивление воздуха на тяжелое пушечное ядро может быть едва заметным; хотя он добавляет, что действием его на малые и легкие тела нельзя пренебрегать. Достаточно обозреть труды всех тех авторов, которые в течение 40 лет писали об этом вопросе, чтобы убедиться в господстве этой ложной точки зрения.

Впрочем, такое мнение авторов, занимавшихся только отвлеченными рассуждениями, оказалось в некотором смысле даже полезным: так, Андерсон на основании большого числа поставленных им опытов пришел к выводу, что мнение о малом действии сопротивления воздуха на тяжелое пушечное ядро не может согласоваться с действительностью. Хотя из его сочинений не видно, чтобы он когда-либо занимался исследованием отношений между дальностью полета пушечных снарядов или мушкетных

---

[f]) См. стр. 345 первого издания in quarto, а также стр. 355 и следующие.

[g]) См. в № 216 стр. 68.

пуль при обыкновенных зарядах, все же путем опытов, произведенных им только с малыми зарядами, при которых снаряды выбрасывались с очень малыми скоростями, он убедился в том, что их траекторию нельзя принимать на всем протяжении за параболу, что можно видеть из его трактата Tu hit a Mark, изданного в 1690 году. Но вместо того чтобы из этого сделать правильные выводы и определить величину такого столь заметного сопротивления воздуха, он, ввиду чрезмерной склонности держаться своего вышеизложенного мнения, предпочел выдвинуть новую гипотезу, заключавшуюся в том, что всякое ядро на некотором протяжении в начале своего движения движется по прямой линии и лишь в дальнейшем продолжает движение по параболе. Он полагает также, что эта прямая линия, которую он называет линией силы огня, имеет значительное протяжение при всех углах возвышения пушек. Пользуясь этой гипотезой, хотя ничем и не подтвержденной, он все же был в состоянии объяснить все отклонения результатов стрельб от тех, которые должны были быть по общепринятому мнению, так как мог произвольно принимать протяжение своей прямой линии. Несмотря на это, его новая гипотеза не согласовывалась с произведенными им опытами, поскольку он никак не мог добиться того, чтобы посредством своей гипотезы объяснить дальности стрельбы при трех различных углах возвышения, хотя при двух это ему счастливо удавалось. Поскольку такое заметное отклонение происходило от сопротивления воздуха при движении бомб или ядер, выброшенных даже малыми зарядами, то как велико должно было бы быть действие воздуха, если бы был употреблен полный заряд? Так как в этом случае ядро получает степень скорости в три-четыре раза бо́льшую, чем в предыдущем, сопротивление воздуха, как будет доказано в дальнейшем, должно быть почти в пятьдесят раз больше и, следовательно, сделаться весьма заметным.

В этом исследовании заслуживает быть отмеченным не только то обстоятельство, что сопротивлением воздуха, оказывающим большое влияние на все быстро движущиеся тела, совершенно пренебрегали артиллеристы-практики, но и то, что после появления в свет Principia Mathematica Philosophiae Naturalis великого Ньютона [64] все математики должны были бы вполне убедиться в значительном действии воздуха, потому что в этом бессмертном труде определены и подтверждены многочисленными опытами законы и действительная величина сопротивления для медленного движения. Правда, эти законы, примененные к случаю очень быстрого движения, дают менее значительную величину сопротивления, чем она получается из опыта, и сам Ньютон уже заметил это отклонение [h]); однако именно отсюда следует, что тем более нельзя пренебрегать действием сопротивления воздуха на снаряды. Все это служит очевидным доказательством необходимости при рассмотрении движения снаряда учитывать сопротивление воздуха; все же, несмотря на это, я встретил до сих пор только единственный пример, где подобные движения были вычислены по законам Ньютона [i]).

Собрав теперь вместе все изложенное по этому вопросу, мы придем к совершенно ясному выводу, что современные авторы в области артиллерии весьма глубоко заблуждались, полагая, что сопротивление воздуха не надо принимать в рассмотрение, а потому утверждали, что траектория, которую описывают в воздухе бомбы и ядра, незаметно отличается от настоящей параболы. Отсюда бесспорно следует, что все сделанные до сих пор определения полета снарядов, обладавших очень высокой степенью скорости, значительно отклоняются от действительности и что, следовательно, современная теория артиллерии в этом весьма важном вопросе ошибочна и совершенно непригодна к употреблению.

Чтобы несколько помочь ее совершенствованию, мы во второй главе нашего сочинения постарались не только основательнейшим образом доказать то, что было здесь сказано о неправильности теории параболического

---

[h]) Phil. Nat. Princ. Math., стр. 351.

[i]) В Comment. Acad. Petrop., т. 2, стр. 338, 339.

движения, но вместе с тем и дать правильное определение действительной величины сопротивления, испытываемого снарядом при всякой степени скорости, поскольку из оснований, изложенных в первой главе, легко может быть определена скорость ядра, с которой оно действительно выброшено; таким образом, определение траектории, которую ядро описывает в воздухе, превращается в геометрическую проблему, требующую, правда, очень сложных и трудных вычислений; однако в случаях, часто встречающихся в практике, можно использовать какие-либо надежные и несложные приближения, которые будут вполне достаточны для определения по правильной теории различных дальностей стрельбы.

Хотя у тех, кто внимательно прочтет следующее далее сочинение, не останется никаких сомнений в точности приведенных в нем определений, все же можно ожидать, что точность этих оснований можно установить еще надежнее путем опытов над действительными дальностями выстрелов из различного оружия и сравнения их с теоретическими вычислениями. И действительно, я как-то раз взялся за составление предисловия к дополнительной главе по этому вопросу, но удержался от этого намерения по двум причинам. Первая состояла в большой трудности определить правильные дистанции, которых можно достичь при различных углах возвышения оружия; эти трудности легко поймет только тот, кто действительно сам производил этого рода опыты. Другой причиной была какая-то неправильность, наблюдавшаяся в этих дистанциях и делавшая все мои старания бесплодными. Так, часто одно и то же оружие при одном и том же заряде бросало пули на весьма различные дистанции, так что редко когда две из них совпадали одна с другой в одинаковых условиях опытов, как я это подробнее отметил в седьмом Предложении второй главы.

Но несмотря на эти трудности, которые воспрепятствовали приложить к этому трактату данные о таких опытах над дальностями выстрелов, что могло бы более подтвердить теорию сопротивления, я все же решился изложить этот вопрос и питаю надежду найти способ избежать упомянутых выше расхождений, потому что пока это препятствие не будет устранено, ясно, что от всех опытов этого рода будет мало пользы. Но я сохраняю за собой завершение своих будущих опытов по этому вопросу для второй части настоящего сочинения, где я, кроме производства опытов над полетом пуль и их сравнения с определениями, получаемыми геометрическим способом, имею намерение привести данные многих других опытов, которые хотя и носят смешанный характер, но все же находятся в строгой связи как с теорией, так и с практикой артиллерии. К этой второй части я приложу также различные сведения и практические правила, которые вытекают из ранее установленных Предложений и, возможно, принесут в будущем немаловажную пользу в применении артиллерии. Для этой второй части у меня уже имеется довольно много материала в готовом виде с значительным запасом, чтобы ее совершенно закончить. Но для постановки опытов, которых мне еще недостает, требуется длительное время и удобный случай.

Так как последующие страницы содержат в себе, кроме определения сопротивления воздуха, также теорию силы и действия пороха, то от меня вправе ожидать сведений о том, что до сих пор было написано другими авторами по этим вопросам. Однако все то, что до сих пор встречалось мне об этом, так неопределенно и неясно, что подчас очень трудно даже только понять мысли авторов. Наиболее понятной гипотезой, которая, кажется, лежит в основе всего, что было об этом высказано другими, является та, которую дал де Ляир [65].

В Histoire Французской Академии в 1702 году г-н де Ляир высказал предположение, что сила пороха происходит от увеличенной упругости воздуха, который находится в зернах и между зернами пороха и жаром и огнем производит взрыв. Если бы воздух в зернах находился перед стрельбой в таком же естественном (не уплотненном) состоянии, как и между зернами, то не могла бы проявиться сила бо́льшая той, которая была бы произведена только пламенем. Но такая расширительная сила самое большее в пять раз превосходит ту силу, которой обладает воздух в своем естественном состоянии, как будет подробно доказано в дальнейшем [k]) и, следовательно, этой силы было бы недостаточно, чтобы составить даже двухсотую часть силы, которую действительно производит порох.

Между тем, это объяснение все же дало повод для различных диссертаций и сочинений у соседней нации, в частности, один известный ученый [[66]] считает справедливым свое предположение о том, что расширительная сила воздуха, нагретого взрывом пороха, должна быть в сто раз бóльшей, чем при жáре кипящей воды. Но так как вполне доказана невозможность объяснить силу пороха этим учением, то я не хочу долго задерживать читателей пространным изложением мнений по этому вопросу, в особенности потому, что я питаю надежду на то, что теория силы пороха, которая будет изложена на последующих страницах, будет столькими опытами неопровержимо подтверждена, что окажется излишним формальное опровержение других мнений.

---

[k]) См. пятое Предложение первой главы настоящего труда.

ЗАМЕЧАНИЕ ЭЙЛЕРА

То, что наш автор рассказывает здесь о происхождении и развитии как артиллерии, так и фортификации, указывает на его необычайную начитанность и знание всех давнишних авторов, которые писали в области этих наук. Эти сведения, особенно же касающиеся практической части, также представляются столь основательными и соответствующими действительности, что нет никакого повода к малейшему в том сомнению. Однако все же кажется, что автору были неизвестны некоторые книги по теории артиллерии, где были даны более основательные сведения о движении ядер и силе пороха, чем те, которые он приводит; или ему нужно было старательно обойти таковые молчанием, чтобы тем самым более поднять значение своих собственных открытий. В самом деле, из того, что он приводит, следовало бы прийти к заключению, что до него очень мало знали достоверного как о движении ядер, так и о силе пороха, потому что тем, кто сделал в этой области такие прекрасные открытия, не уделено ни малейшего внимания, тогда как он же в других разделах так старательно приводит тех авторов, которые едва ли дали что либо сколько-нибудь примечательное.

Во-первых, что касается движения пушечных ядер в воздухе, то теоретики уже давно знают, что линия, которую такое ядро описывает в воздухе, весьма заметно отличается от параболы. Но какова природа этой кривой линии, не так легко может быть определено ввиду больших трудностей, которых требует это исследование. Правда, Гюйгенс [67] уже доказал, что если бы сопротивление воздуха было пропорционально скорости движущегося в нем тела, эта кривая линия должна была бы иметь вид логарифмики; однако Ньютон очень ясно доказал, что сопротивление воздуха пропорционально не самим скоростям, а их квадратам [68], и приложил все старание к определению кривой линии, которую описывает тело, испытывающее такое сопротивление. Впрочем, он все-таки не смог достигнуть своей цели и должен был ограничиться приближениями, как это достаточно ясно видно из Principiis Math. Phil. Natur. Этот же вопрос был предложен в 1718 году англичанином Кейлем знаменитому г-ну профессору Иоганну Бернулли в Базеле как такая проблема, над разрешением которой до тех пор бесплодно бились англичане. Когда упомянутый г-н Бернулли тотчас же решил эту задачу и даже в более полном виде, чем она была предложена [69], появилось в то же время и решение в «Phoronomie» г-на Германа [70], а также опубликовал свое решение проницательный англичанин Тэйлор [71]. Хотя г-н Робинс нашел, что при очень быстром движении сопротивление воздуха больше, чем полагали, но все же для этого случая решение содержится в общем методе, так что нельзя это рассматривать как неизвестное до сих пор обстоятельство. Впрочем, следует признать, что до настоящего времени еще ни один математик не приложил особого старания применить это решение на пользу практической артиллерии.

То, что сопротивление воздуха оказывает очень заметное влияние на быстрые движения, подобные движению ядер, доказал нагляднейшим образом и многими опытами знаменитый г-н профессор Даниил Бернулли во 2-м томе Comment. Acad. Petrop. [72], это приводит даже г-н Робинс, хотя и в другом месте; а между тем в указанном сочинении, например на стр. 338, показано, что ядро, которое достигло в воздухе высоты только 7819 футов, в безвоздушном пространстве должно было бы подняться на 58 750 футов; об этом замечательном наблюдении наш автор не делает ни малейшего упоминания.

Подобное обстоятельство имеет место и с объяснением силы пороха, о чем наш автор ничего другого не приводит как только то, что дал де Ляир в 1702 году. Из этого следовало бы сделать вывод, будто никто другой не был более счастлив в этом деле. Однако то, что воздух в порохе находится не в своем естественном состоянии, а в очень сжатом виде, очень ясно доказал уже в 1690 году упомянутый ранее г-н Иоганн Бернулли в своей «Dissertatio de effervescentia et fermentatione». Так, на основании нескольких поставленных им опытов над взрыванием пороха он пришел к правильному заключению, что воздух, находящийся в порохе, должен быть сжат по меньшей мере в сто раз больше, чем тот, какой обычно находится в естественном виде. Правда, вполне возможно, что эта диссертация г-ну Робинсу никогда не попадалась на глаза; но кажется совершенно невероятным, чтобы он вовсе не видал описанных в «Philosophical Transactions» опытов Папена [73], где также доказано, что в селитре действительно находится очень упругая текучая материя, от которой происходит сила пороха, и что в 6 гранах пороха содержится по крайней мере 1 гран сильно сжатого чистого воздуха. В «Supplementi al Giornale de letterati d'Italia», Tom. 1 n° 8 ученый по имени Брахус также описал опыты над силой пороха и из них пришел к заключению, что находящийся в порохе воздух в 450 раз плотнее, чем естественный [74].

Г-н профессор Даниил Бернулли также весьма обстоятельно изложил этот вопрос в 10-м разделе своего замечательного труда по гидродинамике, изданного в 1738 году в Страсбурге, где он на основании ряда опытов утверждает, что упругость заключенного в порохе воздуха более чем в 10 000 раз больше упругости естественного воздуха. Если, следовательно, принять, что упругость воздуха возрастает в точной пропорции со сжатием, то воздух в порохе тоже должен быть в 10 000 раз плотнее, чем обыкновенный воздух, которым мы окружены, и следовательно, порох более чем в 10 000 раз тяжелее, чем обыкновенный воздух. Так как вода только примерно в 1000 раз тяжелее воздуха, а по весу порох не слишком отличается от воды, то понятно, что эта гипотеза не может иметь места, даже если бы порох представлял собою не что иное, как сильно сжатый воздух. Поэтому упомянутый выше автор думает, что правило, по которому упругость воздуха пропорциональна его плотности, при очень сильных сжатиях не имеет больше места и что, может быть, естественный воздух, когда он будет сжат, например, так, что его объем станет в тысячу раз меньше, достигнет в 10 000 раз большей упругости; это мнение можно очень хорошо согласовать с принятым учением о свойствах воздуха. Но так как г-н Бернулли вывел это следствие из сопротивления воздуха, а оно принималось всегда пропорциональным квадрату скорости, тогда как наш автор нашел сопротивление при очень быстрых движениях значительно бо́льшим, то необходимо в это следствие внести поправку, в результате чего упругость содержащегося в порохе воздуха возможно окажется не такой уже чрезмерно большой. Это обстоятельство будет рассмотрено более подробно в последующих замечаниях.

ГЛАВА ПЕРВАЯ
О СИЛЕ ПОРОХА

ПЕРВОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Если зажечь порох в воздухе или в безвоздушном пространстве, то при воспламенении из него выделится некое устойчивое текучее вещество, обладающее упругостью

Если положить раскаленное докрасна железо под колокол воздушного насоса, выкачать при помощи воздушного насоса весь воздух и потом бросить на раскаленное железо несколько пороховых зерен, порох загорится и ртуть в манометре, присоединенном к прибору, сразу опустится. Правда, вскоре затем она снова поднимется, но уже не достигнет своей прежней высоты и окончательно остановится тем ниже, чем больше пороха было сожжено под колоколом. Этот хорошо известный опыт описан во всех подробностях г-ном Гоксби [75] в «Philosophical Transactions», № 295, где он упоминает, что после того, как он зажег таким образом незначительное количество пороха, ртуть в манометре, стоявшая до взрыва на высоте $29\frac{1}{2}$ дюймов, опустилась до $12\frac{3}{4}$ дюйма. Этот опыт бесспорно доказывает, что при взрыве пороха под колоколом выделилась тонкая упругая материя, упругой силой которой ртуть была так сильно вытеснена, и что, следовательно, наше Предложение в отношении безвоздушного пространства соответствует действительности. Но то, что эта выделившаяся жидкая материя была также и устойчива, вытекает из того, что г-н Гоксби в том же месте добавляет, что хотя ртуть опять поднялась на длину руки, все же на следующий день она стояла не выше $22\frac{1}{2}$ дюймов, и эта высота оставалась потом неизменной. Затем то, что эта жидкая материя упруга, или обладает упругой силой, достаточно доказывает пониженный уровень манометра, потому что жидкая материя только своей естественной тяжестью не могла бы произвести никакого заметного действия. Это видно также из того, что эта материя заполнила весь колокол, что не могло бы произойти, если бы она не обладала упругостью; и этот опыт одинаково удается, будет ли воздушный колокол большим или малым. Но падение ртути будет тем меньше, чем бóльших размеров будет взят колокол, если только брать одинаковое количество пороха; отсюда следует, что чем больше расширена жидкая материя, тем меньшей упругостью она обладает и, следовательно, в этом отношении она сходна с воздухом.

Эта жидкая упругая материя выделится и в том случае, если порох будет зажжен в воздухе[a]). Так, если положить небольшое количество пороха в верхнюю часть стеклянной трубки, а нижнюю часть опустить в воду так глубоко, что над водой останется только ее небольшая часть, где находится порох, и потом плотно закрыть верхний конец трубки, чем будет прервано всякое сообщение с внешним воздухом, а затем зажечь порох в трубке посредством зажигательного стекла, то вода, как ртуть в предыдущем опыте, сразу опустится и остановится на более низком уровне, чем перед воспламенением пороха. Эта разница между уровнями будет также тем больше, чем больше будет зажжено пороха и чем у́же будет трубка.

Следовательно, этим будет доказан вне всякого сомнения другой случай нашего Предложения: что взрыв пороха на воздухе выделяет расширяющуюся упругую жидкую материю.

---

[a]) См. Hauksbees. Phys.-Mechan. Exper., стр. 81.

ДОПОЛНЕНИЕ

Уже со времен знаменитого Бойля [76] заметили, что многие вещества при брожении и других химических процессах выделяют некий упругий флюид, который во всех отношениях очень схож с естественным воздухом. Нашли также, что некоторые смеси при различных обстоятельствах впитывают в себя часть окружающего воздуха и как бы поглощают его. Но особенно подметили, что все горючие тела и все сернистые пары разрушают бóльшую часть воздуха и либо поглощают его, либо, по крайней мере, лишают его упругих свойств. Такое воздействие и поглощение воздуха при химических процессах было недавно весьма основательно и успешно исследовано г-ном Гейлсом в его Vegetable Statics [77]. Из этого следует, что в последнем опыте сернистые пары, образовавшиеся при воспламенении пороха, должны были поглотить часть воздуха, находившегося в трубке. А потому необходимо, чтобы при этом опыте оставляли в трубке как можно меньше воздуха с тем, чтобы из-за поглощенного воздуха, количество которого могло бы оказаться одинаковым с выделившейся упругой материей, не нарушилась бы правильность опыта.

Имеется еще и другое соображение о том, почему при последнем опыте полезно оставлять в трубке мало воздуха. Причиной этого является действие огня, поскольку от него сильно возрастает упругость оставшегося воздуха; в результате трубка не выдержит давления воздуха и новообразовавшейся упругой материи и разорвется.

ЗАМЕЧАНИЕ

Трудно понять первое приводимое нашим автором соображение о том, что в верхней части трубки следует оставлять как можно меньше воздуха. Так как перед воспламенением объем в трубке над водой заполнен частью воздухом, частью веществом пороха, то после воспламенения там должен находиться еще прежний воздух вместе с выделившимся при этом упругим флюидом без поглощенного парами воздуха. Следовательно, в этом последнем случае получится излишек объема этого упругого флюида без поглощенного воздуха, и также еще без объема, который перед тем был занят порохом. Поэтому этот излишек, на котором основывается очевидность опыта, должен бы быть одинаковым, было ли в трубке оставлено сначала много или мало воздуха. Следовательно, при таких обстоятельствах приведенная причина является несостоятельной; или надо было утверждать, что пары поглотят тем меньше воздуха, чем меньше его было оставлено, и в этом случае эта причина еще некоторым образом могла бы быть оправдана. Но против этого можно бы еще возразить, что за недостаточностью воздуха пары могли частично поглотить упругую текучую материю, выделившуюся из сгоревшего пороха, полагая, что эта материя имеет такое большое сходство с воздухом. И в этом случае опыт должен был бы остаться столь же сомнительным, как если бы в трубке оставили много воздуха. Но так как это обстоятельство не ослабляет настоящего доказательства, то нет необходимости больше на нем останавливаться. А если бы хотели определить таким путем действительное количество выделившейся из пороха упругой материи, то упомянутое поглощение воздуха этому не очень помешало бы, если только в надлежащий момент заметить это воздействие на воду, так как возможно, что поглощение протекает не мгновенно, а требует все же некоторого времени.

ВТОРОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ,

содержащее более подробное объяснение обстоятельства, наблюдавшегося при взрыве пороха, как в воздухе, так и в безвоздушном пространстве при обоих вышеизложенных опытах

Если некоторое довольно умеренное количество пороха будет зажжено раскаленным железом под колоколом, из под которого совершенно выкачан воздух, то уровень ртути мгновенно упадет, но тотчас же снова начнет подниматься и после нескольких незначительных колебаний, едва заметных, кроме первого, успокоившись, судя по наблюдению, остановится на высоте значительно меньшей, чем до взрыва; это была точка, особенно замеченная нами при наших опытах. Но когда ртуть достигает этой кажущейся точки покоя, она еще значительное время продолжает подниматься, хотя так медленно, что трудно заметить какую-либо разницу. Между тем, это незаметное поднятие происходит [78] чем дальше, тем медленнее и, наконец, совсем прекращается, таким образом, что ртуть остается совершенно неподвижной на уровне более низком, чем тот, на котором она стояла до взрыва пороха.

Почти те же явления будут происходить, когда порох будет зажжен в трубке, из которой воздух не удален, как было описано во втором опыте.

Причиной всех этих явлений служат различные изменения, которые происходят в упругом флюиде, выделившемся при воспламенении пороха. Первоначальное внезапное падение ртути получается под действием силы этой упругой материи в течение того времени, пока сохраняется пламя, за счет чего упругая сила дополнительно возрастает. Но как только прекратятся пламя и одновременно сильное нагревание этой материи, упругость ее также станет снова уменьшаться; так как это происходит в течение очень короткого промежутка времени, то ртуть очень скоро после первого падения снова начнет подниматься, и это поднятие продлится до тех пор, пока упругая материя не достигнет одинаковой с колоколом степени теплоты; тогда ртуть придет в состояние покоя. Если же она потом незаметно еще поднимется, то произойдет это отчасти вследствие постепенно продолжающегося охлаждения колокола, поскольку он при горении пороха также был до некоторой степени нагрет, отчасти же это произойдет в силу поглощения части воздуха сернистыми парами, как было замечено выше, из-за чего и уменьшится его давление на ртуть.

ДОПОЛНЕНИЕ

В следующем Предложении будет бесспорно доказано, что сила пороха есть не что иное, как упругая сила этой жидкой материи, которая была выявлена в приведенных опытах путем воспламенения пороха. Мы здесь покажем также, что эта текучая материя в своих проявлениях подчиняется тем же законам, что и другие упругие материи и, в частности, воздух; таким образом, какими бы свойствами ни обладала сила этой упругой материи, действие будет таким же, как если бы вместо нее в тот же самый объем было помещено равное количество воздуха, т. е. если бы этот воздух был заключен в том же объеме и нагрет до той же степени, какую получила эта текучая материя при воспламенении пороха. Г-н Гейлс нашел, что упругие флюиды, которые были получены путем различных химических процессов, имеют одинаковый с воздухом вес, и он это очень ясно показал на флюиде, который выделяется из винного камня. Далее он также нашел, что эти упругие текучие материи при нагревании расширяются, а при охлаждении сжимаются; что они требуют одинаковой с воздухом силы, чтобы сжимать их в меньший объем; что если они будут совершенно очищены от сернистых паров, что делается пропусканием их через воду, то они могут сохраняться в одном и том же состоянии не только целыми месяцами, но даже годами, не теряя ни малейшей части своей упругости. Ввиду этого обстоятельства и ряда других он не сомневался в том, что все эти полученные таким путем флюиды представляют собою настоящий и естественный воздух. Если это мнение имеет место для всех флюидов, то оно, в частности, должно быть справедливым и для того, который выделяется из пороха, поскольку он происходит единственно только из селитры, так как ни сера, ни уголь его в себе не содержат. А известно, что селитра есть не что иное, как «соляная земля», смешанная с воздухом, потому что кусок этой «земли», выставленный соответствующим образом на воздух, способен непрерывно порождать новую селитру. Хотя мнение о том, что выделяемая путем воспламенения пороха тонкая упругая материя есть не что иное, как естественный воздух, представляется совершенно сообразным с действительностью, все же для нашего предмета безразлично, верно ли это, или ложно. Нам вполне достаточно знать, что действительно существует такая упругая материя, которая является источником действий пороха. Воздух это или нет, наши выводы будут одинаково справедливыми, потому что они основаны на свойствах, которые ясно доказаны опытами, а не на умозрительных рассуждениях о природе этой материи.

ЗАМЕЧАНИЕ

Можно, таким образом, представить себе порох как такое вещество, которое содержит в своих частицах чрезвычайно сильно сжатый воздух, и которое притом так устроено, что эти вместилища при воспламенении сразу раскрываются, а заключенный в них воздух, расширяясь, вырывается на свободу; потому что таким путем могли происходить те действия, которые наблюдались при вышеприведенных опытах: как только этот заключенный и очень сильно сжатый воздух при внезапном воспламенении освободится от своих уз, он вследствие большого жара огня получит значительное приращение упругой силы и в результате так сильно вытеснит в первом опыте ртуть, а в другом воду, как вряд ли была бы в состоянии сделать естественная упругая сила; но так как такое сильное нагревание длится, так сказать, только один момент, то эта большая упругость тотчас же снова уменьшается, и таким образом ртуть и вода вскоре после первого падения снова поднимаются вверх. Поскольку потом поднятие продолжается еще некоторое время очень медленно, и причиной этого являются как поглощение воздуха, производимое сернистыми парами пороха, так и постепенное остывание [79] колокола, то очевидно, что это поглощение протекает очень медленно и, следовательно, за счет этого в произведенные опыты не могла быть внесена неправильность, как уже было замечено в первом Предложении. Ввиду того, что такое же действие произойдет, если допустим не только то, что в порохе находится весьма сильно сжатый воздух, но также и то, что выделившаяся при воспламенении пороха тонкая упругая материя полностью обладает всеми свойствами воздуха, то тем более нет причин сомневаться в том, что это действительно должен быть воздух, так как из опыта хорошо известно, что воздух представляет собою смешанную из всех упругих испарений земных тел субстанцию, поэтому всякую текучую материю, которая имеет с воздухом одинаковую тяжесть и одинаковую упругость, можно всегда безошибочно принимать за настоящий воздух. Отсюда можно также представить себе особый вид изменения, непрерывно происходящего в воздухе. Так, при брожении, как и при взрыве пороха, выделяется заключенный в телах сильно сжатый воздух и соединяется с наружным воздухом; и это дают такие тела, которые в состоянии поглощать в себя воздух и сжимать его в своих порах, где он остается до тех пор, пока не найдется причина, снова высвобождающая его. И точно таким же образом можно постигнуть, как постепенно образуются селитра и другие тела, которые содержат в своих порах сжатый воздух.

ТРЕТЬЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Упругость или упругая сила выделенной из пороха текучей материи пропорциональна ее плотности или сжатию, когда прочие обстоятельства одинаковы

Это следует из того, что, если зажечь под одним и тем же колоколом вдвое бо́льшее количество пороха, ртуть в стеклянной трубке тоже опустится в два раза ниже. Так как из двойного количества пороха будет выделено двойное количество этой упругой жидкости, то она под пустым колоколом должна быть вдвое плотной. А так как ее упругость указывается падением ртути, то отсюда ясно, что вдвое бо́льшей плотности отвечает и вдвое бо́льшая упругость. Если же одинаковые количества пороха будут зажжены под различными колоколами неодинаковой величины точно таким же образом, как было описано выше, то падение ртути будет в точности тем больше, чем меньше будет колокол. Но чем меньше объем под колоколом, тем плотнее должна быть выделившаяся из пороха материя; и, следовательно, в этом случае упругость тоже пропорциональна плотности.

Так как в обычных опытах этого рода необходимо употреблять очень малое количество пороха, и потому невозможно точно заметить действительное соотношение между плотностью и связанной с ней упругой силой, то я взял довольно большой колокол, который имел около 520 кубических дюймов и, после того как из него был совершенно выкачан воздух, бросил на помещенное внутрь раскаленное железо сразу одну драхму пороха, от чего ртуть в манометре упала точно на 2 дюйма. Потом я раскалил железо для второго опыта и снова, как и раньше, удалив воздух, бросил на него 2 драхмы пороха, от чего ртуть упала на $3\frac{3}{4}$ дюйма. Но немного пороха упало подле железа и не загорелось, потому что дно колокола было слегка влажным; и это, кажется, было действительной причиной того, почему ртуть в последнем случае упала только приблизительно вдвое ниже, чем в первом. Если, следовательно, в последнем случае весь порох был бы воспламенен, то ртуть упала бы еще на $\frac{1}{4}$ дюйма, то есть в общем на 4 дюйма, откуда и на этот раз получилось бы, что упругость материи, выделившейся из пороха, пропорциональна ее плотности.

ЗАМЕЧАНИЕ

Из этих опытов довольно ясно видно, что если упругая материя, выделенная из пороха, будет заключена в два, в три или в четыре раза меньший объем, то ее упругость станет больше тоже в два, три или четыре раза. Хотя можно было бы еще усомниться в том, действительно ли это Предложение точное или оно только приближенное, потому что при этих опытах наблюдаются незначительные отклонения от этого правила, но все же правильность этого Предложения была уже доказана путем другого ряда опытов с воздухом. Так как эта прозрачная материя не отличается от воздуха, то нет никаких оснований сомневаться в правильности этого Предложения. Но это, разумеется, только в том случае, когда разница между величинами различных сжатий, при которых хотят найти упругость, не слишком велика. Так, хотя и можно вполне убедиться в том, что обычный воздух, помещенный в десять раз меньший объем, будет иметь упругость довольно точно в десять раз бо́льшую, но отсюда вовсе еще не следует, что это же Предложение останется неизменным и при наивысших степенях сжатия, потому что весьма даже возможно, что воздух, к примеру, в 100 раз более плотный, может быть упругим несколько больше, чем в сто раз. И это отнюдь не опровергает мнения г-на Бернулли, который полагает, что воздух в 1000 раз более плотный, возможно, обладает в 10 000 раз бо́льшей упругостью. Так как в порохе находится сильно сжатый воздух, плотность которого почти в 100 раз превышает плотность естественного воздуха, то еще очень сомнительно, точно ли во столько же раз его упругость больше упругости естественного воздуха. Поэтому нельзя сказать, что это Предложение автора без оговорок согласовывается с действительностью; чтобы приведенное доказательство было действительным, следует в Предложении сделать оговорку, что упругость воздуха только тогда пропорциональна его плотности, когда между различными плотностями нет слишком большой разницы.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить упругость и количество тонкой материи, которая будет выделена из данного количества пороха

Так как различные сорта пороха, сообразно разнице в их качестве, выделяют и различные количества этой тонкой материи, то необходимо, прежде чем что-либо определять в этой части, увериться в сорте того пороха, который желают употребить для исследований. Поэтому я выбрал тот сорт, который обычно изготовляется для государственных целей, причем такой, в котором всегда должна соблюдаться одинаковая пропорция материалов.

Этот сорт более удобен для постановки опытов, чем другие сорта, которые изготовляются по произволу.

Следовательно, после того как будет установлен сорт пороха, который будет употреблен для этих опытов, мы должны еще принять следующие два положения, которые были упомянуты в Дополнении ко второму Предложению: во-первых, что упругость этой тонкой материи под действием жара будет возрастать, а под действием холода убывать по тем законам, которые замечены для воздуха; во-вторых, что плотность этой материи, а следовательно, и ее тяжесть одинаковы с плотностью и тяжестью такого же количества воздуха, который обладает точно такой же степенью упругости и тепла.

Итак, из приведенного в предыдущем Предложении опыта очевидно, что порох весом в одну драхму, или $\frac{1}{16}$ унции торгового веса, или 27 гран тройского веса [80], понижает ртуть, которая перед тем стояла на высоте почти 30 дюймов, на 2 дюйма. Если же, следовательно, взять пороху в 15 раз больше, а именно 410 гран тройского веса, то ртуть сразу вся опустится, и, следовательно, находящаяся под колоколом тонкая материя уравновесилась с атмосферным воздухом и имеет одинаковую упругость с воздухом, в котором мы живем. Объем колокола по его обмеру равен 520 кубическим дюймам, откуда следует, что 410 гран пороха при воспламенении выделяют 520 кубических дюймов тонкой материи, которая имеет степень упругости одинаковую с обыкновенным воздухом. Следовательно, одна целая унция пороха выделит приблизительно 575 [81] кубических дюймов такой тонкой материи.

Чтобы можно было судить о плотности этой тонкой материи, заметим, что часть только что найденной упругости была произведена жаром находившегося под колоколом раскаленного железа. И так как собственная теплота колокола была много меньше, чем кипящей воды, у которой степень тепла обычно увеличивает упругость воздуха приблизительно на одну треть, то я с учетом всех обстоятельств пришел к заключению, что полученное на этом основании приращение упругости могло быть равно одной пятой части. Таким образом, если бы колокол имел одинаковую степень тепла с наружным воздухом, то ртуть могла бы упасть вместо 2 дюймов только на $1\frac{3}{5}$ дюйма. Поэтому же следует найденные выше 575 кубических дюймов уменьшить на пятую часть, что дает 460 кубических дюймов.

Такое количество этой тонкой материи, которая имеет одинаковые с воздухом степени упругости и плотности, содержится в одной унции пороха и выделится из него путем его воспламенения. Но 460 кубических дюймов обыкновенного воздуха весят приблизительно 131 гран, а так как одна унция — мера, которой я пользовался,— содержит 437 гран, выходит, что находящаяся в порохе тонкая материя составляет $\frac{131}{437}$ часть веса, или почти $\frac{3}{10}$ полного веса пороха.

Если требуется узнать количество этой тонкой материи относительно объема, занимаемого порохом, то заметим, что 1 унция и 1 драхма, или 17 драхм торгового веса пороха, если он очень сильно сжат, занимают 2 кубических дюйма. Но, согласно вышеприведенному вычислению, 17 драхм и, следовательно, 2 кубических дюйма пороха должны содержать $488\frac{3}{4}$ кубических дюйма этой тонкой материи, которая сходна с воздухом. Поэтому в одном кубическом дюйме пороха содержится столько этой материи, что если она будет так разрежена, что будет иметь плотность и упругость одинаковые с естественным воздухом, то заполнит объем в 244 кубических дюйма.

А чтобы еще более подтвердить это определение, я зажигал несколько раз 1 драхму пороха в безвоздушном объеме под колоколом, емкостью 470 кубических дюймов, при помощи зажигательного стекла. Эти опыты были несколько труднее предыдущих, в которых порох зажигался раскаленным железом. Так как это длилось иногда очень долго, пока загорится порох, то тем временем под колокол проникал воздух, что могло делать неверным последующее измерение. Кроме того, обычно также около одной четвертой части пороха оставалось не загоревшейся и разбросанной кругом под колоколом. Чтобы добиться при этом надежности, я собрал все несгоревшие пороховые зерна, взвесил их и увеличил полученное падение ртути в такой пропорции, чтобы оно соответствовало опыту с целой драхмой пороха. Таким образом, я нашел для первого опыта $2\frac{1}{10}$, для второго $1\frac{8}{10}$, для третьего $2\frac{1}{10}$ и для четвертого $1\frac{85}{100}$ дюйма. Из них я взял среднее и заключил, что полученное при одной драхме пороха падение ртути должно быть равно $1\frac{96}{100}$ дюйма для колокола, который имел 470 кубических дюймов. Отсюда следует, что 1 драхма пороха под ранее примененным колоколом в 520 кубических дюймов должна была произвести падение ртути только на $1\frac{77}{100}$ дюйма. То, что здесь при этом опыте должно быть скинуто вследствие образовавшегося под колоколом жара, очень незначительно. Так, я, положив под колокол маленький термометр, нашел, что жар был не больше чем обычное летнее тепло, при котором воздух разрежен лишь на $\frac{1}{12}$. Если же уменьшить $1\frac{77}{100}$ на двенадцатую часть, получим $1\frac{67}{100}$ дюйма, что очень мало отличается от $1\frac{3}{5}$, или $1\frac{60}{100}$ дюйма, которые были найдены перед этим. А потому остается действительным сделанный перед этим вывод, что содержащаяся в каком-либо количестве пороха тонкая материя, если она так разрежена, что обладает одинаковой с естественным воздухом плотностью, занимает объем в 244 раза больший, чем порох, из которого она выделилась.

Это соотношение также очень хорошо согласуется с опытом, который приводит Гоксби в своих Phys.-Mech. Experiments, стр. 81. Так, он нашел, что 1 гран пороха при воспламенении выделяет 1 кубический дюйм упругой и сходной с воздухом материи. Но если желательно узнать отношение объема, который занимает порох, к объему, который занимает выделившаяся из него тонкая материя, после того как она достигнет одинаковой с естественным воздухом плотности, то оно дано Гоксби как 1 к 232; такое отклонение от нашего значения столь незначительно, что могло произойти единственно только от различия в порохах.

Из этого мы можем также вывести заключение, что наружный воздух при выделении этой тонкой материи из пороха не подвергается никаким изменениям; потому что при сравнении опытов Гоксби с нашими собственными станет ясно, что из пороха выделяется в воздухе точно столько же тонкой материи, сколько и в безвоздушном пространстве.

Если же тонкая материя, выделенная из пороха, не сможет расширяться, а останется заключенной точно в том объеме, который перед тем был занят порохом, то она станет в 244 раза плотнее и, следовательно, будет обладать упругостью в 244 раза большей, чем естественный воздух, если она с воздухом будет иметь одинаковую степень тепла. Однако так как при воспламенении пороха она будет очень нагрета, то в этом состоянии ее упругость должна быть также значительно большей.

Отсюда, таким образом, неоспоримо следует, что если какое-то количество пороха будет воспламенено в замкнутом объеме, который будет им совершенно заполнен, то стенки этого объема должны в первый момент испытывать давление с силой, которая в 244 раза больше давления естественного воздуха вследствие высокой степени нагревания, при котором эта материя находится тотчас после воспламенения пороха. А каково увеличение упругости, получившееся собственно от этого жара, будет рассмотрено в следующем Предложении.

ЗАМЕЧАНИЕ

Здесь, во-первых, может зародиться сомнение относительно весов, которыми пользовался автор в своих опытах, потому что он упоминает о двух системах, которые применяются в Англии, а именно: о тройском весе и торговом весе. Первый применяется для взвешивания золота, серебра и других драгоценных товаров; его фунт принято делить на 12 унций, из которых каждая относится к парижской унции, как 480 к $472\frac{1}{2}$, и, следовательно, одна такая унция содержит $585\frac{1}{7}$ парижского грана. Торговый вес применяется для простых товаров, и один его фунт разделен на 16 унций, а далее, согласно трактату Эйзеншмида De ponderibus et mensuris veterum, одна унция на 8 драхм или 24 скрупулы, и одна такая унция содержит 534 парижских грана. Но г-н Робинс в приведенных здесь опытах принимает за драхму одну шестнадцатую часть унции, и следовательно, по Робинсу драхма равна только половине того, что было бы по Эйзеншмиду. Но мы не можем подозревать никакой ошибки во всем остальном ввиду очевидной большой точности, и так как подразделения и наименования веса произвольны, а также поскольку нам возможно неизвестны все применяемые в Англии системы, то мы можем то, что наш автор называет драхмой, принимать за полдрахмы. Но если опыты правильны, в чем нельзя сомневаться, то безразлично также, какой системой мер и весов пользоваться, потому что объем в один кубический фут, заполненный тем самым порохом, который наш автор называет государственным, содержит столько упругой тонкой материи, о которой здесь говорится, что, обладая одинаковой с естественным воздухом плотностью, она может занять объем в 244 кубических фута. И так как эта материя, пока она еще находится столь сильно сжатой в порохе, составляет часть его веса, то, как мы видели, эта часть будет равна $\frac{3}{10}$ веса. Поэтому в 10 фунтах пороха всегда содержится 3 фунта сжатого воздуха.

Кроме того, заметим здесь, что хотя воздух, выделившийся из пороха в замкнутом объеме, и имеет плотность в 244 раза бо́льшую, чем естественный воздух, однако, согласно предыдущему, из этого еще не следует, что его упругость тоже в 244 раза больше, чем естественного воздуха, потому что, как уже было замечено, из проведенных по этому вопросу опытов следует только то, что эта пропорция имеет место, когда воздух не слишком сжат. Следовательно, вполне может быть так, что воздух, в 244 раза более плотный, обладает более чем в 300 раз бо́льшей упругой силой; сомнение в этом может быть разрешено путем новых опытов. Впрочем, так как плотность естественного воздуха в разное время года довольно переменчива, следовало бы также учитывать при каждом опыте и степень тепла. Но поскольку нельзя достигнуть столь совершенного знания силы пороха, чтобы была необходимость обращать внимание на такие мелочи, то такое упущение вполне извинительно.

ПЯТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить приращение упругости воздуха, когда он будет нагрет до степени раскаленного железа

Чтобы найти это приращение, я взял часть мушкетного ствола длиной около 6 дюймов и плотно заткнул его с одного конца, а другой конец вытянул на конус так, что отверстие в свету́ составило не более $\frac{1}{8}$ дюйма. Эту трубку я дал кузнецу накалить докрасна и опустил ее, обратив вниз открытым концом, в наполненный водой сосуд, пока она совершенно не охладилась. Затем я со всеми предосторожностями вынул ее из воды и точнейшим образом взвесил воду, которая вошла внутрь во время охлаждения. В трех последовательно проведённых опытах вес этой воды составил 610, 595 и 600 гран, тогда как вся трубка вмещала 796 гран воды; а потому в этих опытах оставалось в трубке еще столько воздуха, сколько занимали бы 186, 201 и 196 гран воды, и это несомненно также был весь тот воздух, который находился в трубке, пока она была накалена. Следовательно, упругость воздуха, нагретого до высшей степени раскаленного докрасна железа, относится к упругости того же воздуха, но обладающего степенью тепла одинаковой с естественным воздухом, как объем всей трубки 796 к части, которую там занимал охлажденный воздух и которая по трем поставленным опытам была 186, 201 и 196, а если мы возьмем среднее из них, то как 796 к $194\frac{1}{3}$, или почти как 4 к 1.

Жар, который был сообщен трубке в этих опытах, кузнецы обычно называют белым калением. Впрочем, нужно при этом быть внимательным, чтобы при охлаждении трубки в нее не проникли водяные пары и находящийся там воздух не вытеснялся наружу, вследствие чего весь опыт оказался бы неверным. На этот случай я поручил сделать железную иглу, которая точно входила в отверстие трубки, и ею всякий раз затыкал трубку, прежде чем вытащить ее из огня, и оставлял ее там на все время, пока происходило охлаждение в воде. Затем я вытаскивал эту иглу под водой с тем, чтобы вода могла войти внутрь и заполнить свободный от воздуха объем.

ЗАМЕЧАНИЕ

Так как воздух, который заполнял трубку в течение того времени, как она была накалена, занимал после ее охлаждения только четвертую часть, то отсюда бесспорно следует, что, когда воздух в замкнутом объеме будет нагрет до степени раскаленного железа, его упругость должна увеличиться в четыре раза против прежней и что он, следовательно, может быть в равновесии не раньше, чем расширившись в 4 раза большем объеме. Хотя это может быть совершенно правильным для естественного воздуха, но все-таки еще имеется веская причина сомневаться, получит ли тоже в 4 раза бо́льшую упругость такой в 100 раз уплотненный воздух, подобный которому заключен в порохе, если он будет нагрет до той же степени. Следовательно, так как представляется еще неизвестным, будет ли также точно во столько же раз более упругим воздух, который в сто раз уплотнен против естественного, но имеет с ним одинаковую степень теплà, то еще более кажется неизвестным, будет ли упругость так уплотненного воздуха, если он нагрет до степени раскаленного железа, точно в 4 раза большей только потому, что такое увеличение усматривается у обыкновенного воздуха; вследствие этого при дальнейших исследованиях необходимо будет обратить особое внимание на эти обстоятельства с тем, чтобы не все то принимать как очевидное и доказанное, в чем еще можно иметь веские причины сомневаться.

ШЕСТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить насколько упругость выделенной из пороха тонкой материи будет еще увеличена от нагревания, которым сопровождается воспламенение

Так как эта тонкая упругая материя имеет такое сходство с воздухом, что под действием тепла и холода они изменяются одинаково, то, если мы примем, что при горении пороха образуется такой большой жар, какой ощущается у раскаленного железа, упругость тонкой материи, выделившейся из пороха в начальный момент воспламенения, должна быть много больше, чем впоследствии, когда она уже сравняется в степени тепла с наружным воздухом, то есть в начальный момент упругость этой тонкой материи вследствие жара должна быть в отношении 796 к $194\frac{1}{3}$, или в 4 раза больше, чем она была бы при обычной плотности.

То, что жар, который выделяется при горении довольно значительного количества пороха, не меньше чем у раскаленного железа, видно из рассмотрения пламени и из свойств веществ, из которых состоит порох. Поскольку этот огонь несомненно сильнее обыкновенного огня, который, как известно, способен нагреть железо докрасна, то нельзя также оспаривать, что этот огонь имеет такую же степень жара.

Если мы, следовательно, допустим, что пламя, которое возникает при воспламенении пороха, обладает нисколько не меньшим жаром, чем раскаленное железо, и что упругость выделившейся из пороха тонкой материи увеличилась от этого в отношении $194\frac{1}{3}$ к 796, как найдено в предыдущем Предложении, то отсюда следует, что так как эта материя, пока она остается заключенной в порохе в равном с ним объеме, в 244 раза плотнее обыкновенного воздуха, ее плотность вследствие нагревания не только в 244 раза, а больше 244 в $\frac{2388}{583}$ раза, то есть в $999\frac{1}{3}$ раза должна быть больше плотности обыкновенного воздуха. Такое увеличение достаточно очевидно из приведенных ранее обоснований.

Отсюда, следовательно, можно определить действительную величину силы пороха в первый момент воспламенения. Поскольку тонкая материя, которая из него выделяется, обладает упругой силой в $999\frac{1}{3}$, или, круглым числом, в 1000 раз бо́льшей, чем обыкновенный воздух, а обычный воздух оказывает на данную площадку давление, равное весу атмосферы, с которой упругость находится в равновесии, то сила воспламененного пороха в первый момент, прежде чем он расширится, должна быть в 1000 раз больше давления атмосферы; и, таким образом, эта сила, действующая на площадку в один квадратный дюйм, достигает веса более 6 тонн. Но эта сила тотчас начинает уменьшаться, как только начнет расширяться эта упругая материя, а ее нагретость уменьшаться, как показано в предыдущих Предложениях.

ДОПОЛНЕНИЕ

Хотя мы здесь сделали предположение, что жар пороха, когда он воспламенен в достаточном количестве, равен жару железа, накаленного докрасна или до белого каления, и это предположение будет в дальнейшем еще подкреплено несколькими опытами, то все-таки нет никаких сомнений в том, что жар, который возникает при воспламенении, равно как и в других случаях, должен изменяться, смотря по тому, больше или меньше находится там горючих веществ; и легко понять, что, после того как будет одновременно зажжено определенное количество пороха, пламя может иметь все различные степени жара: от той, которую дает раскаленное докрасна железо, и до той, при которой могут плавиться металлы. Однако требуемое для этого количество пороха должно быть чрезвычайно велико; но поскольку в военном деле никогда не встречается такого случая, чтобы требовалось одновременно зажечь столько пороха, мы из последующих наших опытов найдем, что недалеко отступим от действительности, приняв, что жар при обычных количествах сразу воспламененного пороха достигает почти одинаковой степени с тем бо́льшим жаром, который может иметь раскаленное докрасна железо, если в своих исследованиях эту степень жара будем при больших количествах пороха несколько увеличивать, а при малых несколько уменьшать.

ЗАМЕЧАНИЕ

Некоторых может быть удивит, что пламя должно иметь в себе такую высокую степень жара, какую имеет раскаленное железо, принимая во внимание, что можно без риска провести рукой сквозь пламя, тогда как невозможно дотронуться до раскаленного железа, не ожегшись. Однако при этом заметим, что хотя два тела имеют одинаковую степень тепла, но более плотное кажется по ощущению более теплым, чем менее плотное. Такое же обстоятельство имеет место и с холодом. Каждый знает, что зимою вода или железо, которые находились долгое время на холоде, кажутся значительно более холодными чем воздух, хотя по показанию термометра у всех наблюдается одинаковая степень холода. Причину этого также легко понять, поскольку, когда мы прикасаемся к телу, степень теплоты или холода которого значительно отлична от степени теплоты нашей руки, наше ощущение будет тем сильнее, чем к большему числу частиц тела мы прикасаемся, так как на нашу руку воздействует каждая частица. Ввиду того, что более плотное тело в одном и том же объеме содержит больше частиц, то ощущение, которое возникнет у нас от прикосновения к нему, будет также значительно сильнее, и потому нам покажется холодное железо более холодным, чем вода или воздух, хотя все они обладают одинаковой степенью холода. Отсюда легко будет понять, почему раскаленное железо кажется нам более горячим, чем пламя. Однако если глубже вдуматься и учесть, что железо получает весь свой жар от пламени, то мы должны будем также прийти к тому, что пламя обладает той же степенью жара, но нам оно только кажется не столь горячим по той причине, что пламя — очень разреженное, или менее плотное тело. Но хотя пламя и имеет в себе столь высокую степень жара, то все же требуется некоторое время, прежде чем оно сможет сообщить телу такую же степень жара, а именно тем большее время, чем больше и чем плотнее тело, которое положено в огонь. Так как упомянутая выше упругая материя очень разрежена, то легко допустить, что она должна, так сказать, принять точно ту степень жара, какую имеет пламя; но то, что эта степень должна быть очень высокой, усматривается из того, что пушка, когда из нее выстрелить несколько раз подряд, получает такую степень жара, что необходимо бывает ее охлаждать водой. Так как при каждом выстреле пламя, от которого выделяется теплота, появляется только на мгновение, то видно, что этот жар должен быть очень большим, чтобы за такое короткое время он мог сообщить орудию столь значительную степень тепла. Впрочем, в находящемся здесь определении приняты два положения, как если бы они уже были доказаны, но в правильности которых, как уже ранее было замечено, можно еще иметь большие основания сомневаться. А именно, во-первых, еще неизвестно, будет ли сильно сжатый воздух, который в 244 раза плотнее естественного, точно в 244 раза более упругим. Затем также еще не решено, точно ли в 4 раза бо́льшую упругость приобретает столь плотный воздух от жара раскаленного железа только потому, что это замечено у естественного воздуха, к тому же не очень сильно сжатого. Будет полезно, следовательно, принимать эти положения правильными лишь до тех пор, пока из сопоставления последующих опытов с разработанной по этому вопросу теорией не будет выяснено, будут они соответствовать действительности или нет. Таким образом, приняв эти положения как доказанные, убедимся в том, будем ли мы в состоянии при помощи этих положений объяснить все известные из опыта действия пороха или они покажут либо слишком завышенное, либо заниженное его действие. В соответствии с мнением г-на профессора Даниила Бернулли, определенная автором сила пороха слишком мала, чтобы произвести те действия, которые нам известны из опыта; но мы уже заметили, что Бернулли в своих вычислениях определил сопротивление воздуха не столь большим, как то доказывает автор; а потому можно питать еще некоторую надежду, что оба вышеприведенных положения могут еще оказаться вполне сообразными с действительностью. Это обстоятельнее будет рассмотрено в последующих Замечаниях.

СЕДЬМОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Найти скорость, с которой будет выброшено ядро из пушки, если известны длина и сечение канала, кроме того, вес ядра и заряд пороха, а также принята известной упругость пороха в первый момент воспламенения

Чтобы решить этот вопрос, мы используем следующие два положения:

I. Действие пороха на ядро прекращается, как только ядро выброшено из орудия.

II. Весь порох заряда воспламеняется и превращается в упругую материю, прежде чем ядро сколько-нибудь заметно сдвинется со своего первоначального места.

В Дополнении к этому Предложению мы обстоятельно докажем эти два начала, а пока что примем их как уже доказанные и на основе их решим следующую задачу.

Пусть AB — ось пушки, A — дно канала и B — отверстие полого цилиндра, или дуло, CD — его диаметр

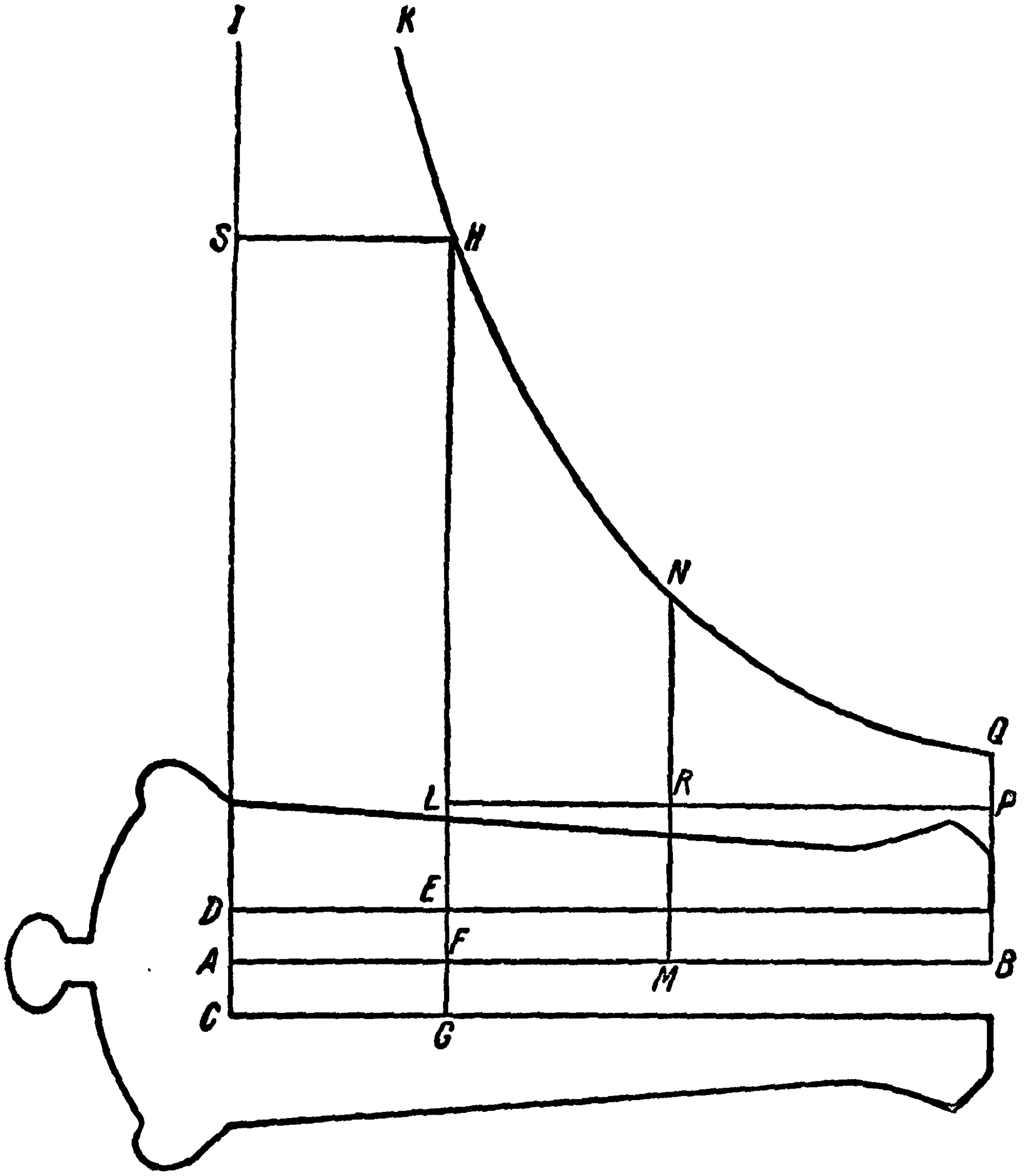

Рис. 1.

и $CDEG$ — объем, занятый зарядом пороха. Далее положим, что ядро своей тыльной стороной в EG прилегает к пороху так, что давление, которое ядро воспринимает после воспламенения пороха, будет приложено к кругу, диаметр которого равен диаметру ядра. Поэтому сила, которая будет толкать ядро по направлению FB, легко определится по его диаметру. Проведем теперь прямую FH перпендикулярно к FB и AI параллельно FG и через точку H гиперболу $KHNQ$ между асимптотами AI и AB. Если теперь сила, которая в F будет толкать ядро вперед, представится отрезком FH, то отрезок MN выразит силу, которая будет толкать ядро, когда оно продвинется в M, по направлению MB, потому что, когда выделившаяся из пороха упругая материя расширится до M, ее упругость будет относиться к первоначальной, которую она имела, будучи заключена в объеме AF, как отрезок AF к AM, т. е. как MN к FH, что известно из свойств гиперболы. Правда, эти отрезки показывают, собственно, отношение плотностей тонкой материи; но во втором Предложении было доказано, что упругость пропорциональна плотности. Поэтому, если сила FH, которая толкает ядро в F, известна, то будет определена и сила MN, которая действует на ядро в M.

Теперь, так как мы положили известной силу в F, а также задан вес ядра, то известно также и отношение к весу ядра силы, которая будет толкать ядро в любом месте канала. Таким образом, возьмем $FH : FL$ как отношение движущей силы в F к весу ядра и проведем линию LP параллельно FB, и тогда отношение ординаты гиперболы MN какой-либо точки M к отрезку MR будет равно отношению соответствующей этому месту силы к весу ядра. Согласно предложению 39 Lib. 1. Newt. Princ. Math. Phil Nat., гиперболическая площадь $FHQB$ выражает квадрат скорости, с которой ядро под действием силы пороха будет выброшено из пушки; площадь прямоугольника $FLPB$ будет соответственно выражать квадрат скорости, с которой ядро будет выброшено из пушки, если бы движущая сила была постоянна по величине и равна весу ядра; и, следовательно, так как обе эти площади известны, будет найдено и отношение между этими скоростями. Но последняя скорость, которую имело бы ядро в своем движении по линии FB, когда его толкала бы постоянная сила, равная его весу, равна той, которую имело бы ядро, свободно падая с высоты, равной отрезку

FB. А так как эта скорость известна, то отношение ее к той скорости, с которой ядро под действием силы пороха действительно будет выброшено из пушки, будет равно отношению квадратного корня из величины площади прямоугольника $FLPB$ к квадратному корню из гиперболической площади $FHQB$. Из этой пропорции легко может быть найдена искомая скорость.

Чтобы пояснить это решение на примере, примем длину полого цилиндра AB равной 45 дюймам, диаметр DC или, лучше сказать, диаметр пули примем равным $^3/_4$ дюйма и длина AF, занятая порохом, пусть будет $2^5/_8$ дюйма. По этим данным мы теперь найдем скорость, с которой свинцовая пуля при заданных условиях будет выброшена из ствола AB.

Из предыдущего Предложения, во-первых, ясно, что действующая на пулю сила пороха в первый момент воспламенения в 1000 раз больше давления атмосферы. Но среднее атмосферное давление равно весу водяного столба высотою 33 фута. Так как вес свинца относится к весу воды, как 11,345 к 1, то давление атмосферы будет равно весу свинцового цилиндра высотой 34,9 дюйма. Это число, умноженное на 1000, дает 34 900 дюймов, высоту цилиндра, вес которого, следовательно, равен силе пороха в первый момент его воспламенения. Свинцовая пуля имеет в диаметре $^3/_4$ дюйма и, следовательно, равновелика цилиндру, высота которого при том же основании будет равна $^1/_2$ дюйма. Отсюда начальная сила пороха, действующая на пулю, больше веса пули в дважды 34 900 раз, что дает 69 800. Если мы, таким образом, примем $FL=1$, то будет $FH=69\,800$. Далее $FB:FA = (45-2^5/_8):2^5/_8$, или как 339 к 21 и, следовательно, отношение площади прямоугольника $FLPB$ к площади прямоугольника $AFHS$ равно 339 к $21\times 69\,800$, т. е. 1 к 4324. Но из известного свойства гиперболы, по которому асимптотические площади выражаются через логарифмы, следует, что прямоугольник $AFHS$ относится к площади $FHQB$ как десятичная дробь 0,43429 к логарифму дроби $\frac{AB}{AF}=\frac{360}{21}$. Но логарифм этой дроби равен

1,2340579 [82], поэтому прямоугольник $FLPB$ будет относиться к гиперболической площади $FHQB$, как 0,43429 к 4324×1,2340579, т. е. как 1 к 12 263, и следовательно, квадратный корень из этого отношения равен 1 : 110,7, и это будет отношением между скоростью, которую пуля получила бы, если бы она свободно падала с высоты FB, или $42\frac{3}{8}$ дюйма, и скоростью, с которой она действительно будет выброшена порохом из ствола AB. Но если тяжелое тело падает вниз с высоты $42\frac{3}{8}$ дюйма, то оно достигает такой скорости, с которой будет в состоянии проходить в секунду 15,07 фута; поэтому если свинцовая пуля, о которой здесь идет речь, будет выброшена в точке B, то она в состоянии пройти в секунду 15,07×110,7, т. е. 1668 футов. Таково, следовательно, движение, которое на основании изложенной здесь теории будет сообщено порохом свинцовой пуле.

Таким же путем может быть выполнено вычисление для любого другого случая. Если, например, не весь объем AF, который находится между дном канала и пулей, заполнен порохом, а только часть его, пуля же при этом находится в F, нужно отрезок HF, а следовательно, также и площадь $FHQB$ принять меньшими точно во столько раз, во сколько весь объем AF больше, чем та часть, которая занята порохом. Если калибр орудия, или диаметр ядра больше или меньше, а длины AB и AF имеют прежние размеры, то количества пороха и поверхности ядра будут соответственно больше или меньше в отношении квадратов диаметров, так как длина FH, которая обратно пропорциональна абсолютной силе пороха, выраженной в весе ядра, должна быть взята во столько раз бóльшей или меньшей, во сколько раз диаметр ядра будет соответственно меньше или больше. Если длина AF между дном канала и ядром будет больше или меньше, то прямоугольник $AFHS$ гиперболы и вместе с тем площадь между двумя ординатами, находящимися между собою в том же отношении, будут в соответственной пропорции больше или меньше. Таким образом, из всего этого следует, что площадь $FHQB$, которая представляет собой квадрат скорости, сообщаемой пуле, будет пропорциональна логарифму дроби $\frac{AB}{AF}$ (где AB обозначает полную длину канала, а AF — длину его части, находящейся позади пули) и, кроме того, будет прямо пропорциональна части объема AF, занятой порохом, ко всему объему AF, но обратно пропорциональна диаметру пули. Так как мы можем теперь определять скорость пули, которую она получает при выстреле из данного ствола при заданном количестве пороха, занимающего определенный объем позади пули, то, пользуясь найденными соотношениями, можно легко определять во всех других случаях скорость, с которой будет брошена пуля. При этом заметим, что в приведенном здесь примере мы приняли диаметр пули равным $^3/_4$ дюйма, вследствие чего диаметр канала будет несколько больше, и количество пороха, заполняющего объем $DEGC$, будет равно точно 12 драхмам, включая сюда вес небольшого пыжа из пакли.

ДОПОЛНЕНИЕ

В этой задаче мы приняли как правильные два следующих положения:

I. Действие пороха на ядро прекращается, как только оно вылетает из орудия.

II. Порох заряда весь воспламеняется, прежде чем ядро сколько-нибудь заметно сдвигается со своего места.

Оба эти положения нам надлежит здесь обстоятельно доказать.

Первое представляется довольно очевидным, если обратить внимание на то, что как только пламя вырвется на открытый воздух, оно вследствие своей упругости сразу действует во все стороны. Тогда, следовательно, его сила тотчас же рассеется так, что пуля уже не будет испытывать сколько-нибудь заметного ее действия.

Второе положение доказывается не так просто, тем более, что оно оспаривается многими из тех, кто занимался этим вопросом. Тем не менее оно также достоверно.

Чтобы убедиться в этом, достаточно только представить себе, как велико должно быть первоначальное сжатие пламени. Если обратить внимание на это и принять еще в соображение легкость проникания пламени между пороховыми зернами, то нетрудно будет понять, что за незначительнейший промежуток времени ни одно зерно не останется невоспламененным. Но чтобы не обосновать этот столь важный вопрос на одних лишь умозаключениях, я поставил следующие опыты.

Если порох воспламеняется не мгновенно, а постепенно, то тяжелое тело, находящееся впереди пороха, например 2 или 3 пули вместо одной, очевидно, получит соответственно больший толчок от пороха, потому что потребуется больше времени для прохождения всей длины ствола и, следовательно, за это более продолжительное время может воспламениться больше пороха. Но я нашел из опыта, что положенные одновременно 2 или 3 пули не вызывают большей силы, чем одна. Так, выстрелив при одном и том же заряде одной, двумя и тремя пулями подряд, я нашел по способу, который будет далее описан, что их скорости были приблизительно обратно пропорциональны квадратным корням из их весов. Так, если при каком-то произвольном заряде одна пуля была выброшена со скоростью 1700 футов в секунду, то такой же заряд сообщил двум пулям скорость от 1250 до 1300 футов в секунду и трем пулям скорость от 1050 до 1100 футов в секунду. Отсюда следует, что порох развивает всегда одну и ту же силу, будет ли находиться впереди более тяжелое или более легкое тело, потому что все математики согласны между собою в том, что если на два тела различного веса действуют одинаковые силы на одном и том же протяжении, то их скорости должны быть обратно пропорциональны квадратным корням из их весов. Хотя, согласно этому правилу, 2 и 3 пули должны были бы получить скорости соответственно только 1200 и 980 футов в секунду, однако я все-таки не думаю, что причиной такой разницы было замедленное воспламенение пороха; это несомненно произошло оттого, что пламя прорвалось между первой пулей и стенками канала и действовало больше на вторую пулю, отчего она и получила имевшее место приращение скорости.

Эта разница, впрочем, вовсе не замечалась во многих других опытах, и скорости получались точно обратно пропорциональными квадратным корням из весов брошенных пуль. Там же, где разница становилась более заметной, она не превосходила и восьмой доли всей скорости. Но если бы было верно мнение о том, что вначале воспламеняется лишь небольшая часть пороха, остальной же порох воспламеняется только после того, как ядро уже будет выброшено, а также что значительная часть пороха остается даже невоспламененной, то скорость, которую получили бы три пули, должна была бы быть значительно больше найденной нами, потому что три одна за другой положенные пули задерживались бы в канале в два и более раз дольше, чем одна; по общераспространенному мнению, за это вдвое удлиненное время воспламенилась бы гораздо бо́льшая часть пороха, и, следовательно, должна была бы быть произведена гораздо бо́льшая сила, чем при единственной пуле, что, однако, опровергается всеми опытами.

Справедливость этого Предложения будет доказана еще надежнее, когда в дальнейшем будет показано, что обоснованные на нем правила дают правильные степени скорости, будет ли пуля выброшена из длинного или из короткого ствола; такое согласие не могло бы иметь места, если бы порох сгорал не сразу.

Далее, что касается пороховых зерен, часто выбрасываемых из пушки невоспламенившимся, что приводят как наиболее веское доказательство того, что порох воспламеняется не весь сразу, то, по моему мнению, еще Диего Уфано, весьма опытный в артиллерии, высказал действительную причину этого, которая состоит в том, что часто в ду́льной части пушки остается немного пороха, неприбитого прибойником за ядро, который, следовательно, невоспламенившимся выбрасывается наружу [1]. Этого трудно избежать как в ручном оружии, так и в пуш-

---

[1]) См. его «Dialog», 20.

ках, особенно если из них уже сделано несколько выстрелов. Но, между тем, я не скрою, что часто даже в лучшем порохе попадаются зерна, которые по своим качествам настолько различны, что даже охваченные со всех сторон огнем, они не зажигаются и, таким образом, невоспламенившимися выбрасываются из пушки; подобное я сам неоднократно наблюдал. Но как бы там ни было, из-за этого совершенно не может возникнуть никаких сомнений в справедливости рассматриваемого Предложения.

После того, что здесь было показано, как на основе твердо установленных начал вычислить скорость, сообщаемую пуле силой пороха, я дальше докажу, что действительные скорости, которые получают пули различной величины в разном оружии от пороха различных качеств, вполне согласуются с нашими вычислениями, и что, следовательно, все то, что до сих пор было изложено о силе пороха, полностью подтверждает действия этой удивительной силы.

Но чтобы иметь возможность сравнивать скорость пули, выброшенной из ружья, со скоростью, которую дает вычисление, необходимо уметь измерять опытным путем действительную скорость, с которой будет выброшен снаряд из пушки или какого-либо ружья, что до сих пор никак не могли осуществить. Способы, которые до сих пор применялись с этой целью, состояли в том, что либо наблюдали время, в течение которого снаряд проходил определенное расстояние, либо отмечали дальность выстрелов при определенном угле возвышения и отсюда вычисляли скорость по обычным правилам, основанным на параболическом движении. Но первый способ вызывает непреодолимые трудности, так как движение ядер обычно настолько быстрое и, следовательно, время такое короткое, что малейшая ошибка, которая получится в измерении времени, может послужить причиной очень большой ошибки в скорости от 200 до 600 футов в секунду. Другой способ совершенно неправилен и ошибочен вследствие сопротивления воздуха (это явление имеет место и при первом способе), которое может быть столь большим, что часто не получают и десятой доли действительной скорости ядра.

Чтобы избежать всех этих трудностей, я нашел новый способ определения опытным путем действительной скорости любого снаряда, и с такой степенью точности (которая при желании может быть еще увеличена), что для пули при скорости 1700 футов в секунду ошибка никогда не составит и пятисотой части; это может быть выполнено предназначенным для этой цели прибором, не требующим особых хлопот в его подготовке. Описание и применение этого прибора составит содержание следующего Предложения.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Автор определил здесь скорость, с которой ядро вылетает из орудия, геометрическим способом, чтобы могли это понять и те, кто не знает алгебры; но для тех, кто знает употребление алгебраических формул, такое решение будет, без сомнения, понятнее. Итак, чтобы удовлетворить этому и вместе с тем положить основу для других исследований, мы дадим здесь алгебраическое решение этой же задачи.

1. Пусть полная длина канала орудия $AB=a$.

2. Длина объема $AF=b$; объем либо весь, либо только частью заполнен порохом.

3. Диаметр ядра равен c.

4. Пусть вещество, из которого состоит ядро, в n раз плотнее или тяжелее воды.

5. Пусть упругость пороха в объеме AF в первый момент после воспламенения пороха в m раз больше упругости воздуха.

Таким образом, если весь объем AF заполнен порохом, то по автору будет $m=1000$; но если заполнена порохом только его часть, то значение m следует принять соответственно меньшим.

Положим, что ядро уже пришло в M, и обозначим путь $FM=x$. Кроме того, пусть скорость ядра в M равна той скорости, которую приобретает тело, свободно падающее с высоты, равной v. Раз эта высота v будет известна, легко будет найти действительную скорость ядра. Выразим эту высоту v в тысячных долях рейнского фута, извлечем из этого числа квадратный корень и умножим результат на 250; тогда произведение покажет, сколько таких тысячных долей фута будет пройдено в секунду ядром, если оно будет иметь одну и ту же скорость.

Так как давление пороха в M относится к давлению в F, как AF к AM, т. е. как b к $b+x$, то отношение давления в M к атмосферному будет равно $\frac{mb}{b+x}$ к 1. Если мы примем давление атмосферы равным весу водяного столба высотой 32 фута, то получим тот же эффект, как если бы на ядро действовал вес столба воды высотой

$$\frac{32mb}{b+x} \text{ футов;}$$

но если бы само ядро состояло из воды, объем его был бы равен цилиндру, высота которого равна $\frac{2}{3}c$; а так как ядро в n раз тяжелее воды, то его вес будет равен весу столба воды, высота которого равна $\frac{2}{3}nc$. Отсюда отношение движущей силы к весу ядра будет равно

$$\frac{32mb}{b+x} \text{ к } \frac{2}{3}nc, \text{ или } \frac{48mb}{nc(b+x)} \text{ к } 1.$$

Из начал механики будем иметь следующее уравнение:

$$dv = \frac{48mb}{nc(b+x)} \cdot dx,$$

интеграл которого будет

$$v = \frac{48mb}{nc}\, l\, \frac{b+x}{b},$$

где $l\,\frac{b+x}{b}$ представляет собой гиперболический логарифм дроби $\frac{b+x}{b}$. Но гиперболические логарифмы можно выразить через обыкновенные, которые имеются в таблицах, если первые либо умножить на 2,302585, либо разделить на 0,43429448.

Положив теперь $x=FB$ и, следовательно, $b+x=$ $=AB=a$, найдем высоту, с которой падающее тело приобретает ту же самую скорость, с которой ядро будет выброшено из орудия, а именно:

$$v=\frac{48mb}{nc}\,l\frac{a}{b},$$

выраженную в футах. Но если желательно пользоваться таблицами обыкновенных логарифмов, следует это умножить сначала на 2,302585; если, следовательно, $l\frac{a}{b}$ будет обозначать обыкновенный логарифм от $\frac{a}{b}$, то будет

$$v=\frac{110{,}52408mb}{nc}\,l\frac{a}{b}\ \text{футов,}$$

следовательно, в тысячных долях рейнского фута

$$v=\frac{110524{,}08mb}{nc}\,l\frac{a}{b};$$

поэтому ядро получит такую скорость, с которой оно в секунду может пройти путь

$$250\sqrt{\frac{110524{,}08mb}{nc}\,l\frac{a}{b}}\ \text{тысячных долей фута,}$$

или

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{110524{,}08mb}{nc}\,l\frac{a}{b}}\ \text{футов,}$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{6907\frac{3}{4}\,mb}{nc}\,l\frac{a}{b}}\ \text{рейнских футов.}$$

Здесь $m=1000$, если весь объем $AF=b$ заполнен порохом; но если порохом будет заполнена только часть объема, которую мы обозначим через f, то

$$m=\frac{1000f}{b},$$

следовательно, движение ядра будет составлять

$$\sqrt{\frac{6907750f}{nc}\,l\frac{a}{b}}\ \text{футов в секунду.}$$

Следовательно, квадрат скорости, с которой ядро будет выброшено из орудия, будет прямо пропорционален логарифму числа $\frac{a}{b}$, или $\frac{AB}{AF}$, а также длине f объема, занятого порохом, и обратно пропорционален диаметру ядра c и его плотности n; в этой пропорции автор несколько ошибся, потому что он под конец ввел еще длину объема позади ядра $AF = b$.

Вычислим теперь скорость пули в приведенном автором примере.

Итак: $a = 45$ дюймов, $f = b = 2\frac{5}{8}$, $c = \frac{3}{4}$, $n = 11{,}345$, так как пуля свинцовая.

Следовательно,

$$\frac{a}{b} = \frac{120}{7}, \quad l\,\frac{a}{b} = 1{,}2340832,$$

$$\frac{f}{c} = \frac{7}{2} \quad \text{и} \quad \frac{f}{nc} = \frac{7}{22{,}69};$$

поэтому будет

$$l\,\frac{f}{nc} = 9{,}4892635.$$

Вычислив эти выражения логарифмированием, получим:

$$l\,1{,}2340832 = 0{,}091\,3445\,[83]$$

$$l\,\frac{7}{22{,}69} = 9{,}489\,2635$$

$$\frac{l\,6907750 = 6{,}839\,3366}{6{,}419\,9446\,[84]},$$

половина этого значения равна 3,209 9723 [85], что представляет логарифм от 1622 [86]. В силу этого пуля со своей скоростью проходит в секунду путь 1622 [86] рейнских фута; это число отличается от вычисленного автором только потому, что мы применяли здесь рейнские футы, тогда как автор вычислял в английских и потому еще, что мы приняли атмосферу равной водяному столбу высотой 32 фута, тогда как автор принял 33 фута.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

При этом решении были оставлены без внимания различные обстоятельства, которые хотя большей частью весьма незначительны и маловажны, однако каждое может привести к уменьшению найденной ранее скорости пули, а следовательно, все вместе смогут ее заметно изменить. Прежде всего, найденная формула, выражающая скорость ядра, не может со всей строгостью соответствовать действительности, потому что из нее вытекает, что чем длиннее будет ствол или длина $AB=a$, тем с большей скоростью должно вылетать ядро, что противоречит опытам, так как известно, что очень длинная пушка бросает ядро не так далеко, как более короткая. Поэтому необходимо будет учесть эти оставленные без внимания обстоятельства и исследовать, на сколько из-за них будет уменьшена найденная скорость ядра.

Во-первых, в вычисления не вошло противодавление наружного воздуха. Так, чем дольше ядро находится в канале FB, тем более оно будет отталкиваться наружным воздухом. Эта сила равна весу столба воды, высота которого составляет 32 фута, как мы уже приводили. Так как ядро приравнено водяному столбу, высота которого равна $^2/_3nc$, то противодействующая сила относится к весу ядра, как 32 к $^2/_3nc$, т. е. как $\frac{48}{nc}$ к 1; и, таким образом, отсюда получится следующее уравнение:

$$dv=\frac{48mb}{nc\,(b+x)}\,dx-\frac{48dx}{nc}$$

и далее

$$v=\frac{48mb}{nc}\,l\,\frac{b+x}{b}-\frac{48x}{nc}$$ [87].

Положим теперь $x=BF=a-b$; тогда скорость, с которой будет брошено ядро, будет

$$v=\frac{48mb}{nc}\,l\,\frac{a}{b}-\frac{48\,(a-b)}{nc}\ \text{футов.}$$

Во-вторых, не было также учтено сопротивление воздуха, которое хотя и не может сильно повлиять при малом протяжении FB, но все же оно не маловажно вследствие быстрого движения ядра. Но чтобы его внести в расчеты, заметим, что если бы ядро спереди было совершенно плоским, оно испытывало бы давление воздушного столба, высота которого равна $\frac{v}{864}$, приняв, что вода в 864 раза тяжелее воздуха. Но ввиду сферической формы ядра это сопротивление будет составлять только половину этой величины и потому будет равно весу водяного столба, высота которого равна $\frac{v}{1728}$. Следовательно, это сопротивление будет относиться к весу ядра, как $\frac{v}{1728}$ к $\frac{2}{3}\,nc$ или как $\frac{v}{1152}\,nc$ к 1. Таким образом, получим следующее уравнение:

$$dv = \frac{48mb\,dx}{nc\,(b+x)} - \frac{48dx}{nc} - \frac{v\,dx}{1152nc},$$

или

$$dv + \frac{v\,dx}{1152nc} = \frac{48mb\,dx}{nc\,(b+x)} - \frac{48dx}{nc}.$$

Чтобы проинтегрировать его, введем число e, гиперболический логарифм которого равен 1, или $e=2{,}718281828$, и умножим найденное дифференциальное уравнение на $e^{x:1152\,nc}$, или, положив для краткости $1152\,nc=g$ и умножив на $e^{x:g}$, получим:

$$e^{x:g}\left(dv + \frac{v\,dx}{g}\right) = \frac{48mbe^{x:g}\,dx}{nc\,(b+x)} - \frac{48e^{x:g}dx}{nc},$$

интеграл которого будет

$$e^{x:g}\cdot v = \frac{48mb}{nc}\int \frac{e^{x:g}\,dx}{b+x} - \frac{48g}{nc}\left(e^{x:g} - 1\right),$$

или

$$v = \frac{48mb}{nc}\,e^{-x:g}\int \frac{e^{x:g}\,dx}{b+x} - \frac{48g}{nc}\left(1 - e^{-x:g}\right).$$

Так как дробь $\frac{x}{g}$ очень мала, то будет приблизительно

$$e^{x:g} = 1 + \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg} \quad \text{и} \quad e^{-x:g} = 1 - \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg}.$$

Отсюда

$$\int \frac{e^{x:g}\,dx}{b+x}=\int\frac{dx}{b+x}+\int\frac{x\,dx}{g(b+x)}+\int\frac{xx\,dx}{2gg(b+x)}=$$
$$=l\frac{b+x}{b}+\frac{x}{g}-\frac{b}{g}\,l\frac{b+x}{b}+\frac{xx}{4gg}-\frac{bx}{2gg}+\frac{bb}{2gg}\,l\frac{b+x}{b}.$$

Таким образом, будет

$$v=\frac{48mb}{nc}\left\{\left[1-\frac{b+x}{g}+\frac{(b+x)^2}{2gg}\right]l\frac{b+x}{b}+\frac{x}{g}-\frac{bx}{2gg}-\frac{3xx}{4gg}\right\}-$$
$$-\frac{48x}{nc}\left(1-\frac{x}{2g}\right).$$

Положим теперь $x=a-b$; тогда скорость, с которой ядро вылетит из орудия, будет

$$v=\frac{48mb}{nc}\left(1-\frac{a}{g}+\frac{aa}{2gg}\right)l\frac{a}{b}+\frac{48mb(a-b)}{ncg}\left(1-\frac{3a-b}{4g}\right)-$$
$$-\frac{48(a-b)}{nc}\left(1-\frac{a-b}{2g}\right),$$

или, если отбросить ничтожно малые члены, не составляющие сколько-нибудь заметной величины, получим:

$$v=\frac{48mb}{nc}\left(1-\frac{a}{g}\right)l\frac{a}{b}+\frac{48mb(a-b)}{ncg}-\frac{48(a-b)}{nc}\text{ фут.}$$

Теперь мы можем подсчитать для приведенного выше примера, каково уменьшение скорости, получившееся как от противодавления, так и от сопротивления воздуха; итак:

$$a=45,\quad b=2\frac{5}{8},\quad c=\frac{3}{4},\quad n=11{,}345,$$
$$nc=8{,}509,\quad m=1000,\quad g=1152nc=9802{,}37,$$
$$48mb=126\,000\ \text{ и }\ \frac{48mb}{nc}=14\,808.$$

Обыкновенный логарифм дроби $\frac{a}{b}$ равен 1,2340832, что следует умножить на 2,302585, чтобы получить гиперболический логарифм $l\frac{a}{b}$, который, таким образом, будет равен 2,8415816.

Отсюда следует:

$$\frac{48mb}{nc}\, l\, \frac{a}{b} = 42078{,}1,$$

$$\frac{48mb}{nc}\cdot\frac{a}{g}\, l\, \frac{a}{b} = \quad 193{,}1$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad 41885{,}0},$$

$$\frac{48mb\,(a-b)}{ncg} = \ 64{,}014 \ [88],$$

$$\frac{48\,(a-b)}{nc} = 239{,}04.$$

Следовательно, v=41710 [89] футов.

Если эти футы раздробим на тысячные доли, то получим 41 710 000 [90], квадратный корень из чего даст 6458 [91]; четвертая часть этого числа составит 1615 [92] — столько футов проходит в секунду ядро своей скоростью. Так как мы перед тем нашли 1622 [93] фута, то ясно, что эти два обстоятельства дали уменьшение скорости всего на 7 футов; поэтому они вполне могли быть отброшены автором без ощутительной ошибки.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Кроме давления и сопротивления воздуха, имеются еще два других обстоятельства, уменьшающих скорость, если только мы с автором примем, что весь порох в орудии воспламеняется сразу. Впрочем, против этого все-таки сделаны различные возражения, которые будут ниже изложены. Эти два новых обстоятельства оказывают значительно большее влияние на движение ядра, поэтому они тем более не могут быть оставлены без внимания. Первое состоит в трении: ядро трется о внутренние стенки канала и от этого испытывает потерю в движении. В таком малом огнестрельном оружии, как мушкеты и нарезные стволы [94], в котором пули должны быть проталкиваемы с большой силой, это трение несомненно очень велико. Если оно будет равно весу пули, то следует найденную перед этим высоту v уменьшить на $BF=a-b$, что, имея в виду очень бо́льшие значения v, не дало бы существенной поправки; даже если бы трение было в 100 раз больше веса пули, можно было бы пренебречь величиной $100(a-b)$ по отношению к величине v. В пушках трение должно быть еще меньше, потому что ядра не проталкиваются с силой, а даже оставляется зазор между внутренними стенками и ядром; поэтому трение может быть не равно и весу ядра. Но несмотря на это, имеются основания полагать, что или трение, или какая-либо другая подобная причина, весьма значительно противостоит движению ядер в пушках. Поскольку ядро, как только оно вылетит из пушки, все еще встречает сопротивление своему движению, за исключением, впрочем, только трения, которое прекращается еще в пушке, то чрезвычайно большая длина пушки не затрудняла бы движения ядра. Это еще должен показать опыт, при котором ядро в пушке не встречает сопротивления, а вне пушки сопротивление совсем исчезает. Происходит ли это сопротивление от трения или какой-нибудь другой причины, но во всяком случае последняя должна быть весьма значительной, если движущая сила пороха должна ее превзойти в чрезмерно длинной пушке. Об этом теперь еще ничего нельзя сказать, пока не будут поставлены со всей тщательностью обстоятельные опыты над наивыгоднейшей длиной пушки. По-видимому, длина пушки определяется скорее из экономических соображений, чем из этих оснований. И если пушки делаются не длиннее, чем установлено, то, кажется, дело здесь не в том, что ядро приобретает более быстрое движение, а скорее всего в том, что выгода, которую таким путем действительно получили бы в отношении скорости, далеко не оправдает увеличенные издержки и возросшие неудобства, которых необходимо требуют более длинные пушки. Так, если допустим, что в приведенном выше примере длина канала, которая была 45 дюймов, будет увеличена до 50 дюймов, то $\frac{a}{b}=\frac{50}{2{,}625}$ вместо $\frac{45}{2{,}625}$ и, следовательно, $l\,\frac{a}{b}=1{,}2798407$ вместо

1,2340832. Следовательно, если пренебречь сопротивлением, квадрат скорости будет увеличен на $\frac{37}{1000}$ и скорость на $\frac{18}{1000}$, т. е. на $\frac{1}{55}$ ее часть. Во многих случаях затраченный труд на увеличение длины на 5 дюймов не оправдывался бы таким незначительным увеличением скорости. Поэтому мы немного уклонимся от действительности, если вовсе не будем принимать в рассмотрение трение, особенно в пушках.

Другая причина, о которой было здесь упомянуто, оказывает гораздо большее влияние на движение ядра, так как, в то время как ядро будет двигаться в канале пушки, упругий воздух будет все время прорываться не только через запальный канал, но и между ядром и внутренними стенками пушки, отчего упругость его будет всегда меньше, чем она определена при решении задачи. Поскольку вследствие большой упругости воздух вырывается через упомянутые отверстия с гораздо бо́льшими скоростями, чем те, которые может иметь ядро, эти потери в движущей силе довольно значительны и необходимо должны привести к тому, что ядро будет иметь скорость меньше полученной при приведенном выше расчете. Чтобы определить величину этого уменьшения, нужно знать скорость, с которой находящийся в пушке сильно сжатый воздух прорывается как через запальный канал, так и мимо ядра; это исследование мы будем иметь случай предпринять в дальнейшем. Между тем мы можем привести пример вычислений г-на профессора Даниила Бернулли в Hydrodynamica, стр. 241, где он, при нахождении действительной скорости ядра, пренебрегая этими потерями в движущей силе, определил первоначальную упругость заключенного в порохе воздуха в 6004 раза большей давления атмосферы, тогда как, приняв в рассмотрение упомянутые потери, он в том же случае должен был допустить первоначальную упругость в 10 000 атмосфер. Хотя это было выведено из таких начал, с которыми г-н Робинс не согласен, но все-таки из этого видно, что рассматриваемое обстоятельство должно произвести значительные изменения в приведенных выше определениях скорости. Поэтому, когда в последующих опытах действительная скорость согласуется с вычисленной, это будет безошибочным признаком того, что движущая сила много больше, чем найденная вычислениями, и что, следовательно, первоначальная упругость воздуха, выделившегося из воспламененного пороха, превосходит упругость естественного воздуха больше чем в тысячу раз.

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Это все-таки еще не все причины, из-за которых найденные вычислением скорости ядра должны быть снижены; мы можем к четырем уже упомянутым присоединить еще три. Во-первых, когда упругая материя уже действительно расширилась, все ее части должны двигаться вперед и тем быстрее, чем они более удалены от дна A. В то время, как передние части, прилегающие к ядру, имеют с ним одинаковую скорость, те, которые ближе к дну, имеют меньшую. Так как движение передних будет постепенно ускоряться, то соответственно должно ускоряться и движение остальных частей. Но каждая часть этой упругой материи будет проталкиваться вперед воздухом, находящимся позади, а находящимся впереди — назад; поэтому давление позади необходимо должно быть больше, чем впереди, иначе скорость этих частей не возрастала бы. Таким образом, отсюда следует, что упругость воздуха, находящегося позади ядра, не будет повсюду одинаково велика: у дна A она должна быть больше, чем около ядра, а потому ядро будет проталкиваться меньшей силой, чем найденная вычислениями, так как было принято, что воздух позади ядра повсюду имеет одинаковую упругую силу. Эта разница должна быть тем больше, чем плотнее воздух позади ядра. Но так как плотность его все же очень незначительна, мы охотно допустим, что заметное уменьшение скорости ядра произойти не может.

Из тех же соображений столь же мало заметной будет и вторая причина, которую мы имеем в виду. В вычислениях было принято, что вся сила пороха будет использована единственно только на сообщение движения ядру; но частицы пороха и выделившийся из них воздух также должны быть приводимы в движение, на что потребуется некоторая, хоть и незначительная часть действующей на ядро силы, которая, следовательно, должна быть из нее вычтена, а потому, следовательно, движение ядра еще будет уменьшено. Правда, эта причина, как и упомянутая выше, происходит из одного и того же источника, а именно от инертности, или материальности воздуха, и если возможно было ввести в расчет ту причину, то можно будет включить и эту. Между тем, об ее действии можно составить себе более ясное представление, если рассматривать с двух точек зрения то, что здесь происходит. Но, к счастью, действие, происходящее из этого источника, незначительно, иначе было бы трудно, а то и вовсе невозможно правильно его определить, исходя из известных основ механики. К тому же мы пришли бы к столь сложным дифференциальным уравнениям, что не нашли бы способа их решить или хотя бы вывести из них что-либо надежное.

Третья причина составляет содержание второго Предложения, которое автор принял за правильное и рассматривал как полностью доказанное, а именно то, что весь порох воспламеняется мгновенно. Имеется, однако, много обстоятельств для возражений, и доказательства самого автора таковы, что есть все основания сомневаться в их правильности. Автор приводит как первое обоснование большой жар и отсюда скорость пламени, с которой оно проникает между зернами. Но это еще вопрос, может ли в первый момент воспламениться так много пороха, сможет ли пламя сразу проникнуть между всеми зернами. Затем, так как эта передача происходит путем движения, то на это необходимо требуется время, и, следовательно, тут возникает вопрос, в течение какого времени от начала воспламенения загорится весь порох. Никто не станет отрицать, что это происходит за ничтожно малый промежуток времени; однако ядро тоже движется так быстро до вылета из пушки, что тут незначительнейшее время уже очень приметно. Обычно ядро проходит весь канал в одну сотую долю секунды. Если, следовательно, для полного воспламенения пороха требовалось бы только $\frac{1}{100}$ секунды, то каково может быть еще более короткое время, в течение которого ядро достигло бы дула пушки, когда закончилось бы воспламенение пороха; следовательно, даже за это время довольно заметно уменьшилась бы движущая сила пороха. По мнению г-на Робинса следует, что полное воспламенение протекает в более короткое время, чем $\frac{1}{200}$ секунды или даже $\frac{1}{1000}$ секунды, что, впрочем, едва ли кажется вероятным, особенно при больших зарядах. Как бы легко порох ни принимал огонь, а все-таки на это требуется некоторое время и при одном сорте пороха больше, чем при другом. Вследствие этого (как говорит и сам автор) зерненый порох предпочтительнее мякоти, потому что он воспламеняется быстрее.

Так как пороховая мякоть требует некоторого времени, прежде чем начавшееся в одном каком-нибудь месте воспламенение распространится повсеместно, то преимущество зерненого пороха может состоять в том, что для полного воспламенения достаточно значительно более короткого времени. Но чем будет меньше это время, тем, конечно, оно в состоянии вызвать более значительное изменение упругой силы. Выше мы приняли время, в течение которого ядро будет брошено из пушки, в $\frac{1}{100}$ секунды. Однако это время еще больше, судя по опытам, которыми сам г-н Робинс определил действительную скорость выброшенной из ружья пули. Он находит, что этой скоростью можно покрыть путь от 1500 до 2000 футов в секунду. Так как эта скорость была сообщена пуле в ружейном канале, длина которого была около $3\frac{1}{2}$ футов, то пуля, если бы она получила эту полную скорость в первый момент, должна была бы пробыть в канале только $\frac{3\frac{1}{2}}{1500}$ или $\frac{3\frac{1}{2}}{2000}$ секунды, т. е. в среднем $\frac{1}{500}$ секунды. Но если бы пуле была сообщена скорость, приобретаемая в равноускоренном движении падающими телами, то она пробыла бы в канале вдвое дольше, т. е. $\frac{1}{250}$ секунды. Так как движущая сила вначале значительно больше и постепенно убывает, то действительное время должно быть меньше чем $\frac{1''}{250}$, но больше чем $\frac{1''}{500}$ и, следовательно, составляет приблизительно $\frac{1}{375}$ секунды. Это время столь мало, что представляется столь же быстрым и полное воспламенение пороха, которое может произойти лишь немногим быстрее чем в $\frac{1}{375}$ секунды, следовательно, оно не может быть оставлено без внимания.

То, что говорит далее автор о пороховых зернах, выбрасываемых из пушек еще невоспламенившимися из-за того, что они, высыпавшись из стакана шуфлы [95], остались не позади ядра, хотя и может быть совершенно правильным, но, однако, никак еще не доказывает, что полное воспламенение протекает мгновенно и не требует вовсе никакого времени. Хотя и установлено, что весь порох воспламеняется раньше, чем ядро подойдет к дулу и, следовательно, целые зерна, которые находят часто перед пушкой, были не позади ядра, но из этого еще вовсе не следует, что можно принимать за ничто время полного воспламенения по сравнению с временем, в течение которого ядро пройдет через весь канал пушки. Возможно также, что некоторая часть пороха загорается вне дула и, следовательно, никак не способствует движению ядра, хотя эти зерна и не упали невоспламенившимися. Поскольку пламя за дулом еще довольно сильное, то часть пороха, которая вследствие короткого времени нахождения в канале осталась невоспламенившейся, может быть потом уничтожена пламенем. Сам автор затем признает, что он часто наблюдал в порохе отдельные зерна, которые подвергались некоторое время действию силы пламени и не воспламенялись. Так, теперь он может точно определить это время, поскольку оно должно быть значительно и, вероятно, более $\frac{1}{100}$ секунды. Если, следовательно, находятся такие зерна, которые могут выдержать силу пламени дольше чем $\frac{1}{100}$ секунды, то, конечно, еще должны быть такие, которые требуют для своего воспламенения только $\frac{1}{300}$ секунды. Поэтому доказательство, которое автор приводит в подтверждение своего Предложения, скорее утверждает противоположное.

Сильнейшим доказательством автора является то, что вычисления, произведенные на основе его Предложения, полностью совпадают с опытом. Однако мы уже показали, как много обстоятельств при этих вычислениях не было принято в рассмотрение, хотя некоторые из них и не вызывают сколько-нибудь заметных изменений, и что поэтому нельзя в этом случае без большой осторожности ссылаться на совпадение вычислений с опытом. Так как автор не наблюдал ту потерю в движущей силе, которая происходит через запальный канал и мимо ядра, а уже по этой причине должна была бы обнаружиться разница между теорией и опытом, то вполне возможно, что эта разница исчезла опять-таки вследствие постепенного воспламенения пороха. Поскольку сила пороха убывает не только по мере расширения, что было, впрочем, учтено еще в вычислениях, но также и вследствие потерь замкнутого упругого воздуха через запальный канал и зазор, то уменьшение силы должно быть больше, чем это принято в теории. Если же порох воспламеняется постепенно, то движущая сила получает непрерывные приращения, чем покрывается происходящая в ней убыль; этим путем можно также прийти к той же пропорции в убывании движущей силы.

Таким образом, эта теория, несмотря на все приведенные обстоятельства, может быть приведена к согласованию с опытом, если только принять силу воспламененного в первый момент пороха соответственно большей. Если только часть воспламенившегося первоначально пороха уже достаточна, чтобы произвести такое же действие, какое по теории должно быть произведено полным зарядом, то и упругая сила этой части должна быть так же велика, как и та, которая приписана целому заряду. Следовательно, если упругую силу естественного воздуха примем за 1, то упругая сила воздуха, выделившегося из воспламенившегося пороха, должна быть во столько раз больше 1000, во сколько раз первоначально воспламенившаяся часть пороха меньше полного заряда. При этом условии теория автора сможет оказаться в соответствии с опытом в том случае, если приращение движущей силы, получающееся за счет постепенного воспламенения пороха, будет всегда равно убыли, происходящей через запальный канал и зазор. Это и могло случайно получиться при сорте пороха, который употреблял автор. Но тогда страдает первый пункт аргументации автора, по которому он определяет упругую силу пороха и устанавливает ее в 1000 раз бо́льшей, чем давление атмосферы, потому что, если вычисления соответствуют опытам, эта сила должна быть много больше. Если, следовательно, автор в своем Предложении о мгновенном воспламенении пороха ссылается на совпадение основанного на этом вычисления с опытом, то отсюда еще далеко до того, чтобы это служило подтверждением его мнения; наоборот, оно этим будет только опровергнуто.

Но чтобы опытам, приведенным автором, противопоставить не одни только голые рассуждения и умозаключения, мы приведем также опыты, из которых со всей очевидностью станет ясно, что полное воспламенение пороха протекает не в одно мгновение. При этом я обращусь к многочисленным опытам, которые покойный генерал Гинтер [96] поставил в Санкт-Петербурге в 1727 [97] году в присутствии членов Академии, среди которых находился и я. Там, между другими, была употреблена пушка с длиной канала $7\frac{7}{10}$ английских футов, и из нее производились вертикальные выстрелы различными зарядами. Каждый раз отмечалось по маятнику время, в течение которого ядро после выстрела падало обратно, и по этому времени г-н Бернулли вычислял скорость, с которой ядро вылетало из пушки. Хотя он при этом применял ньютонову теорию сопротивления воздуха, но это нисколько не меняет дела. Он, таким образом, нашел, что ядро при зарядах пороха в 1, 4 и 8 лотов должно было бы подняться в безвоздушном пространстве на высоту соответственно 541, 13 694, 58 750 футов. Потом от этой пушки отпилили кусок длиной $1\frac{7}{10}$ фута, и таким образом получился пушечный ствол длиной ровно 6 футов. После этого укорочения снова были произведены вертикальные выстрелы прежними зарядами в 1,4 и 8 лотов пороха, и тогда получилось, что ядро в безвоздушном пространстве могло бы достигнуть высоты только 274, 2404 и 6604 фута соответственно. Следовательно, при заряде в 8 лотов ядро из целой пушки достигало высоты почти в 9 раз бо́льшей, чем из укороченной; поэтому скорость, с которой ядро было выброшено в первом случае, была примерно втрое бо́льшей, чем в последнем. По теории же г-на Робинса эта разница должна быть едва заметной. Отсюда ясно, что до укорочения пушки в ней воспламенялась бо́льшая часть пороха, прежде чем ядро пройдет в канале пушки последний фут. Точно такой же вывод следует и для меньших зарядов, хотя разница тут не так велика; отсюда вытекает, что чем больше заряд, тем больше требуется времени, пока воспламенится весь порох: это обстоятельство само собой достаточно понятно.

Нарезные стволы, которые, как известно, стреляют много дальше, чем ненарезные, дают нам также очень веское доказательство того, что порох не воспламеняется весь сразу, потому что, если бы весь порох сразу был охвачен огнем, то нарезной ствол не так уже много дальше стрелял, чем ненарезной. Надо учесть большое сопротивление, которое преодолевает пуля в нарезном стволе, а также то, что пуле будет сообщено движение около оси, на что также потребуется сила, в чем не может возникнуть ни малейшего сомнения. Но все-таки пуля из нарезного ствола, несмотря на это большое сопротивление, выбрасывается с бóльшей скоростью, чем из обыкновенного, если прочие обстоятельства будут одинаковы. Следовательно, в нарезном стволе должна действовать более значительная сила, которая была бы достаточна, чтобы не только преодолеть большое сопротивление, но еще при этом сообщить пуле более быстрое движение. Но сила происходит единственно только от пороха, и в обоих случаях имеется одинаковый заряд; поэтому все дело в том, что в нарезном стволе, прежде чем будет выброшена пуля, воспламеняется полный заряд или по меньшей мере бóльшая его часть, тогда как в обыкновенном стволе загорается только незначительная часть. Этот последний аргумент, по-видимому, доказывает не только то, что порох не весь сразу воспламеняется, но также и то, что обычно только очень небольшая часть пороха воспламеняется, прежде чем ядро будет выброшено из пушки. Это обстоятельство делает еще более правдоподобным вышеупомянутое мнение г-на профессора Даниила Бернулли, что выделившаяся из пороха упругая материя обладает в первый момент упругой силой, которая почти в 10 000 раз больше давления атмосферы, хотя наш автор показывает ее только в 1000 раз большей.

ВОСЬМОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить опытным путем скорость движения пули на каком-либо расстоянии от оружия

Простейший способ осуществления этого состоит [98] в применении прибора, представленного на прилагаемой схеме (рис. 2), где *ABCD* обозначает станок на треноге, чтобы он мог везде быть установлен на земле;

подобного рода машины обычно применяются для взвешивания и подъема тяжелых грузов. К двум из этих

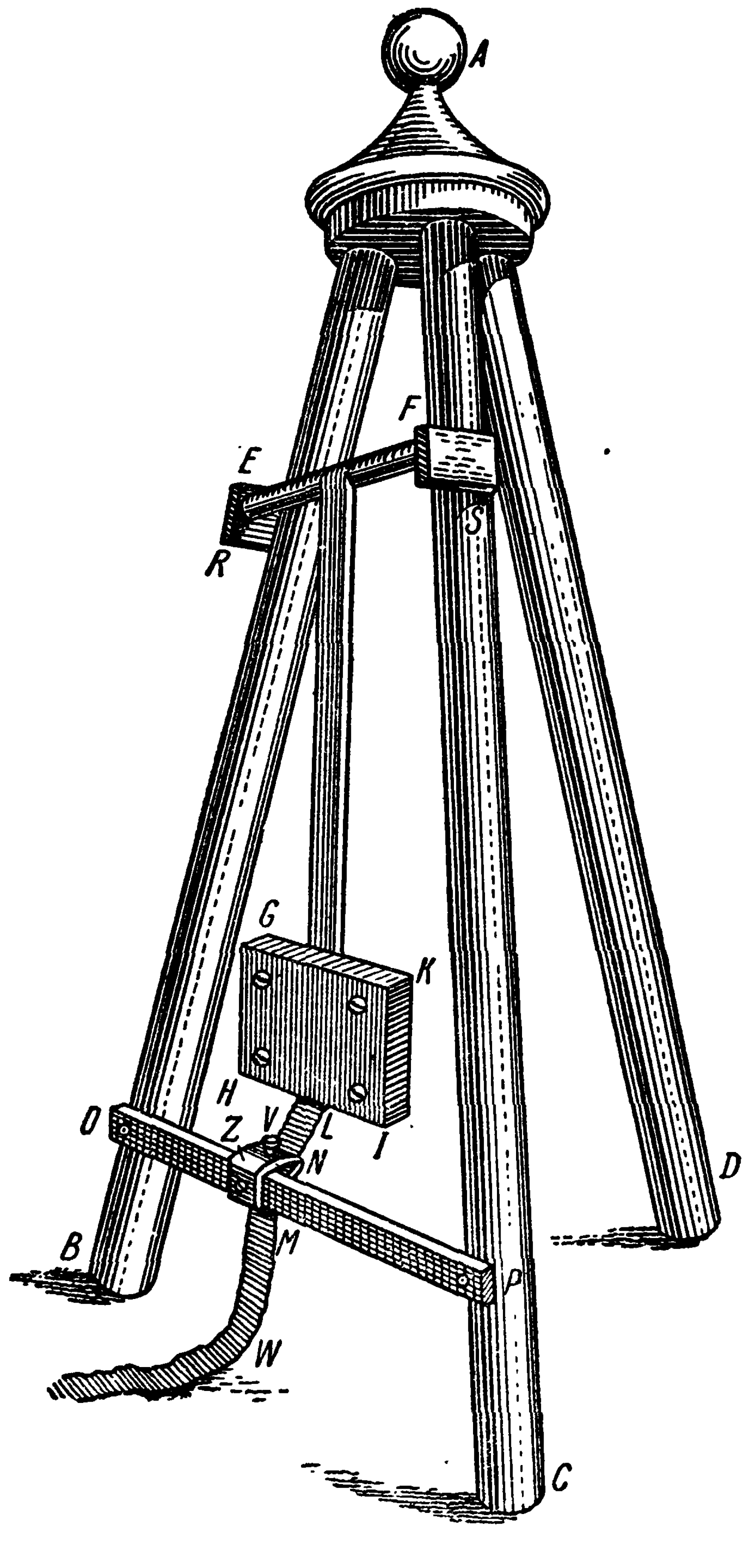

Рис. 2.

ножек B и C прикреплены прочные ручки R и S, на которых подвешен маятник $EFGHIK$ посредством поперечины *EF*, которая лежит на ручках *R* и *S* таким образом, что тело *GHIK* может свободно около нее двигаться. Тело маятника сделано из железа и книзу значительно уширено, что на рис. 2 не показано, но представлено отдельно на рис. 3, где обозначено *A*. К этому широкому железному щиту *A* при помощи нескольких винтов прикреплена деревянная доска *GHIK* (рис. 2). Тут же под маятником находится еще поперечина *OP*, прикрепленная к двум ножкам *B* и *C*, на которых подвешен маятник. На поперечине укреплен механизм *MNV*, который состоит из двух стальных рамок, прилаженных одна к другой на линии *VN*, как обычно делают рейсфедеры. Эти две рамки с помощью винта *Z* могут по желанию быть более или менее сильно поджаты. Далее затем к концу маятника прикреплена снизу узкая лента *LW*, которая проходит сквозь щель между теми стальными рамками и свободно свешивается с нижней части описанного механизма.

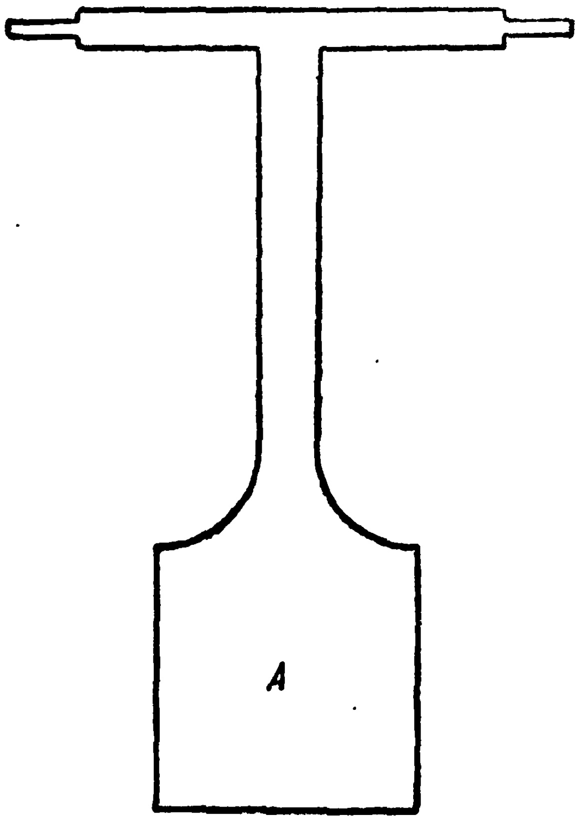

Рис. 3.

После того как описанный прибор будет собран, находим вес всего маятника, а также его центр тяжести и центр качания, чтобы было известно удаление центра качания от оси *EF*, около которой качается маятник. Затем определяем, как велико будет движение, сообщенное маятнику, если пуля, вес которой известен, ударит в него с данной скоростью и в данной точке. Таким образом, если маятник перед ударом находился в покое, можно будет показать, какой наибольший размах получит маятник при таком ударе и как далеко он отойдет от положения покоя. Если, наоборот, известно это удаление маятника, которое произведено при ударе в данную точку пулей данного веса, то можно из этого определить скорость, с которой была брошена пуля.

Так, если пуля определенного веса ударит в маятник, и будет точно установлена величина размаха, полученного маятником от этого удара, можно из этого вычислить скорость, которую имела пуля при ударе.

А величину размаха, который сделает маятник под действием удара, можно очень точно измерить при помощи ленты LN. С этой целью нужно стальные лезвия VN, между которыми проходит лента, натянуть посредством винта Z таким образом, чтобы лента могла протягиваться свободно и легко, однако не без некоторого сопротивления. Теперь, прежде чем маятник будет приведен в движение, вытягивают ленту так сильно, чтобы она была натянута между маятником и VN, но сам маятник не был бы этим выведен из своего положения покоя, и втыкают туда на линии VN булавку. Когда пуля ударит в маятник, который при этом оттолкнется и вытянет часть ленты у VN, можно будет измерить вытянутую часть длины ленты от булавки и тотчас же измерить угол, который описал маятник при первом размахе.

Но вычисление, которым будет определена скорость пули по установленному отклонению маятника после удара, требует дальнейшего разъяснения. С этой целью мы произведем вычисление по тому маятнику, который служил нам при наших опытах, что дает возможность производить вычисления во всех других случаях.

Общий вес маятника, железа и дерева взятых вместе, был 56 фунтов 3 унции. Его центр тяжести был удален от оси EF на 52 дюйма, и маятник делал 200 малых качаний за время в 253 секунды, откуда следует, что центр качания удален от оси качания на $62\frac{2}{3}$ дюйма. Кроме того, центр деревянной доски $GHIK$ от той же оси удален на 66 дюймов. Теперь рассуждаем так: отношение 66×66 к $62\frac{2}{3} \times 52$ равно отношению веса маятника 56 фунтов 3 унции к 42 фунтам $\frac{1}{2}$ унции. Но из механики известно, что, если маятник получит удар в центр деревянной доски *GHIK*, удар встречает точно такое сопротивление, как если бы найденный здесь вес 42 фунта $\frac{1}{2}$ унции был сосредоточен в этой точке, а остальная часть маятника целиком отсутствовала бы. Если мы теперь положим, что вес пули, которая ударит в этот маятник, будет $\frac{1}{12}$ фунта, или $\frac{1}{505}$ часть от найденного веса 42 фунта $\frac{1}{2}$ унции, то по законам движения, которые получены наблюдением при ударе двух тел без взаимного отражения, скорость после удара будет составлять $\frac{1}{505}$ той скорости, с которой ударила пуля. Следовательно, если известна скорость точки маятника, то остается только умножить ее на 505, чтобы определить скорость пули при ударе.

Но скорость точки удара после удара легко определится по хорде полученной при этом дуги, потому что по известному положению при колебательном движении все подвешенные тела достигают одинаковой высоты с той, на которую они поднимутся, если будут брошены из своей нижней точки вверх с той же скоростью, какую имела эта точка удара. Поэтому, если известен sinus versus [99] этой восходящей дуги, которая легко найдется по хорде и радиусу, то этот sinus versus сам равен высоте, которую достигнет тело, брошенное вверх со скоростью точки удара: следовательно, величина скорости легко определится из учения о падающих телах.

Например, хорда дуги, описанной маятником после удара, измеренная по ленте, была равна $17\frac{1}{4}$ дюйма. Расстояние от оси *EF* до нижней точки *L*, где зажата лента, было $71\frac{1}{8}$ дюйма. Отсюда по regulae de tri [100] для чисел $71\frac{1}{8} : 66 = 17\frac{1}{4}$ четвертая пропорциональная будет 16 и она представляет длину хорды дуги, описанной центром доски $GHIK$. Отсюда находим sinus versus дуги, хорда которой равна 16 дюймам и радиус 66 дюймам, равным 1,93939. Скорость, с которой тело могло бы подняться на эту высоту или которая одинакова с той, которую достигнет тело, падающее с высоты 1,93939 дюйма, составляет $3\frac{1}{4}$ фута в секунду.

Теперь, чтобы отсюда определить скорость, с какой пуля ударила в центр доски, когда маятник при происшедшем от этого размахе вытянул ленту через вышеописанный механизм NV на $17\frac{1}{4}$ дюйма, ничего более не нужно, как только найденное число $3\frac{1}{4}$ фута умножить на 505. Тогда произведение 1641 покажет, сколько футов пуля при скорости, которую она имела при ударе, могла бы пройти в секунду при равномерном движении, так как мы нашли, что точка доски, куда ударила пуля, имеет скорость $3\frac{1}{4}$ фута в секунду, но перед этим мы доказали также, что скорость пули должна быть в 505 раз больше. Следовательно, если пуля весом $\frac{1}{12}$ фунта ударит в серединную точку деревянной доски $GHIK$ и при этом лента будет вытянута на $17\frac{1}{4}$ дюйма, то скорость пули составит 1641 фут в секунду. Так как длина ленты, которая будет протянута через механизм у NV, дает точно хорду дуги, описываемой нижним концом маятника — потому что лента так прилажена, что разница [101] совершенно незаметна,— а эти хорды, как известно, находятся в одинаковом отношении со скоростями, сообщаемыми маятнику при ударе, то ясно, что часть ленты, которая будет вытянута через NV при различных ударах, пропорциональна скоростям ударившей пули. И поэтому длина $17\frac{1}{4}$ дюйма так относится к длине вытянутой части ленты в искомом случае, как 1641 фут относится к числу футов, которые пуля в этом же случае могла бы пройти в секунду со своей скоростью.

Отсюда, следовательно, видно, как с помощью этого прибора можно определить скорость любой пули. Но чтобы те, кто пожелает самостоятельно поставить подобные опыты, встретили возможно меньше трудностей, я хочу еще указать здесь на некоторые приемы, которые должны быть приняты во внимание как для наиболее удачного проведения опытов, так и в целях личной безопасности.

Я должен начать с того, что нельзя рассматривать деревянную доску $GHIK$ как излишнюю деталь прибора, так как выброшенная полным зарядом пуля при ударе непосредственно прямо в железо должна была бы разлететься в осколки, и эти осколки с такой стремительностью отскакивали бы назад, что врезались бы в находящиеся кругом деревянные части, не говоря уже о той опасности, что и маятник может дать неправильное показание скорости пули вследствие отражения, что вычислением не предусмотрено.

Полный вес всего маятника и толщина доски должны быть некоторым образом согласованы с размерами употребляемых пуль. Описанный здесь маятник может быть надежно применен ко всем пулям весом менее 3—4 унций, если только для наиболее тяжелых из них толщина доски будет 7—8 дюймов. Наиболее подходящее для этой цели дерево — буковое.

Опасно также стоять рядом с прибором, если доска не настолько массивна, чтобы пуля, прежде чем она дойдет до железа, потеряла в ней бо́льшую часть своей силы. Если пуля с довольно большой силой ударит о железо, то осколки свинца, которые не смогут пробиться назад сквозь дерево, проникнут между деревом и железом и могут разлететься довольно далеко в стороны.

Так как нет никакого другого способа прикрепления дерева к железу, как только винтами, отчего на доске торчат их головки, то может так случиться, что пуля попадет в такой винт и осколки от него разлетятся во все стороны.

Далее, если при этих опытах будет употреблено настолько мало пороха, что сообщенная им пуле скорость не превысит 400—500 футов в секунду, пуля не сможет проникнуть в дерево и, если дерево очень плотное, отскочит от него с очень большой скоростью. Я никогда не занимался тщательным исследованием скорости этого отражения, но часто наблюдал, что пуля оказывалась помятой при ударе в находившиеся поблизости предметы.

Во избежание этой опасности, при которой не мог бы быть достигнут успех в глубоконаучных исследованиях, наиболее надежным будет установка ствола, из которого будут стрелять, на прочном и массивном станке и сообщение огня не слишком быстрогорящим пальником [[102]]. Ствол по всей длине должен быть достаточно прочным, никакой мушкетный ствол, изготовленный по обычным размерам, тоже не может долго выдерживать эти опыты не разорвавшись. Ствол, на который я мог больше всего положиться и который я специально заказал для этой цели, почти одинаково прочен как в казенной, так и в дульной части, и толщина его почти всюду равна диаметру его канала.

Следует также с наибольшей точностью взвешивать порох для этих опытов и быть достаточно внимательным, чтобы при заряжании ничего не оставалось впереди пули; поэтому такой ствол нужно заряжать, как пушку. Лучше всего взять пыж из пакли, и всякий раз одинакового веса, но всегда столь незначительного, насколько это возможно, чтобы порох занимал отведенное ему место. Если же пространство между пулей и порохом останется пустым, то следует тщательно измерить его длину, потому что от этого очень зависят скорость пули и сила выстрела, даже если не будут изменены ни пуля, ни заряд. Нужно также, чтобы ствол был удален от маятника по крайней мере настолько, чтобы сила пламени не могла действовать на последний, что случается, когда при заряде в $\frac{1}{2}$ унции пороха это удаление не больше 16—

18 футов. Но при больших зарядах сила пламени распространяется еще дальше, и я нашел, что она простирается более чем на 25 футов. Ввиду этого я всегда выбирал это расстояние от 18 до 25 футов. При изложении и описании опытов я укажу, что еще надо соблюдать при этом.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Способ определения скорости пули опытным путем, описываемый нашим автором, без сомнения является одним из наиболее остроумных и полезнейших изобретений в артиллерии, потому что все прежние определения были весьма ненадежны и неправильны. Описание прибора настолько ясно, что по нему можно для каждого случая легко построить такой же; но подробного объяснения заслуживает вопрос, как из произведенных с ним опытов найти действительную скорость пули. Прежде всего, необходимо знать вес всего маятника, что легко найти обычным взвешиванием. Заметим при этом, что к телу маятника надо относить не только его нижнюю часть, а все то, что с ней будет вместе находиться в движении; следовательно, к нему относится также вес горизонтальной балки *EF*. Далее, эта балка *EF*, или, лучше сказать, линия, на которой она лежит на ручках *R* и *S*, должна быть совершенно горизонтальной, потому что эта линия представляет ось, около которой маятник совершает движение и от которой должно быть найдено удаление как центра тяжести, так и центра качания. Сперва находим с этой целью расстояние от упомянутой оси до самого нижнего края *HI*, где закреплена лента *LMW*, поскольку это также необходимо для вычисления скорости выброшенной пули. Потом, чтобы найти расстояние от той же оси до центра тяжести всего маятника, поднимаем маятник посредством ленты *LMW* или другой более прочной ленты, если это понадобится, настолько высоко, пока он не примет горизонтального положения (рис. 4). Для этого пропустим ленту через ролик *M*, установленный в таком месте, что часть ленты LM станет перпендикулярно. Когда маятник $GIHK$ будет приведен в горизонтальное положение, к другому концу ленты в W подвесим груз такого веса, который потребуется для удержания маятника в горизонтальном положении. Когда этот вес будет найден, то отношение его к весу маятника должно быть равно отношению расстояния от оси до центра тяжести к расстоянию от оси до точки L, как известно из статики. Если, следовательно, полный вес маятника будет равен P; вес, который при этом исследовании должен быть подвешен в W, равен Q; расстояние от оси EF точки L, а именно $DL,=a$; центр тяжести всего маятника принят в Q и обозначено расстояние $DQ=g$, то по правилам статики должно быть $Q : P=g : a$, или $Pg=Qa$, откуда найдем $g=\frac{Qa}{P}$. Далее,

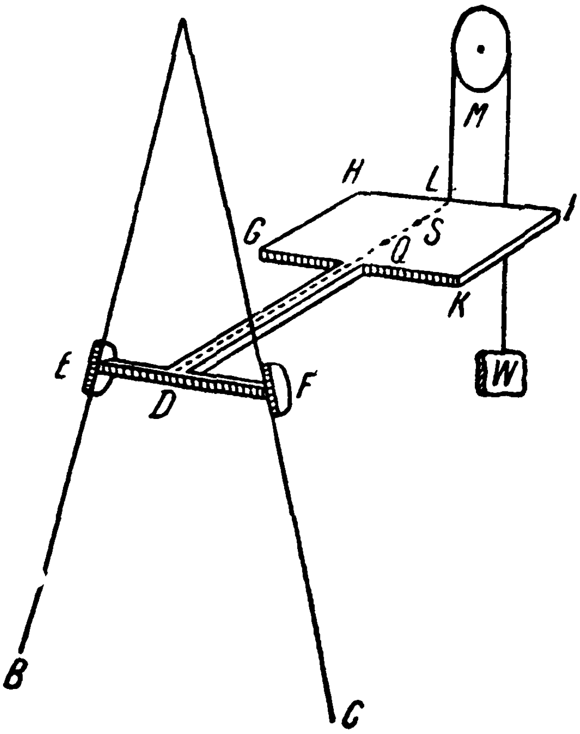

Рис. 4.

пусть S — центр качания маятника и $DS=f$, где f будет обозначать длину простого маятника [103], который совершает свои колебания в одинаковое время с рассматриваемым реальным маятником. Поэтому, чтобы определить расстояние $DS=f$, нужно найти, в какое время маятник совершает одно колебание. Для этого приводим маятник в слабое колебательное движение так, чтобы колебания не превосходили 5—6 градусов в обе стороны, потому что иначе они не будут все одинаковой продолжительности, и считаем по точным часам, сколько качаний делает маятник в 1, 2 или 3 минуты. Автор принял время 200 колебаний, откуда мы здесь в виде примера можем принять 3 минуты, или 180″. Пусть n — число колебаний, которое маятник совершает за время в 3 минуты. Так как количество колебаний простого маятника длиной 3,16625 рейнских фута показывает точно секунды, то этот маятник совершил бы в 3 минуты 180 колебаний. Но времена, в течение которых два простых маятника различной длины совершают свои колебания, пропорциональны корням квадратным из их длин. Поэтому, так как маятник длиной 3,16625 фута совершает одно колебание в 1″, а искомый маятник, длину которого мы обозначили через f, совершает одно колебание в $\frac{180''}{n}$, то

$$1 : \frac{180}{n} = \sqrt{3,16625} : \sqrt{f},$$

и, следовательно,

$$f = \frac{32\,400 \cdot 3,16625}{nn} \text{ рейнских футов,}$$

откуда $f = \frac{102\,586\frac{1}{2}}{nn}$. Таким образом, длина f легко находится в рейнских футах; эта мера в механике при вычислениях имеет перед другими мерами немаловажное преимущество, потому что свободно падающее тело проходит в секунду точно 15 625 тысячных частей рейнского фута, а это число есть полный квадрат, квадратный корень которого 125 является очень удобным для вычислений. Но из рейнской меры можно легко перейти либо к парижской, либо к английской, потому что 1,035 [104] рейнского фута составляет один парижский фут, и 0,970 рейнского фута — один английский фут. В примере автора маятник делает в 253 секунды 200 колебаний, следовательно, одно колебание совершается в $\frac{253''}{200}$, откуда получается следующая пропорция:

$$1 : \frac{253}{200} = \sqrt{3,16625} : \sqrt{f};$$

поэтому $f = \frac{253 \cdot 253 \cdot 3,16625}{40\,000} = 5,0667$ фута или в английских мерах $f = 5$ футов $2\frac{2}{3}$ дюйма $= 62\frac{2}{3}$ дюйма, как найдено автором.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

После того, как исследованы и определены таким образом свойства маятника, можно теперь ставить с ним опыты и определять скорость любого снаряда (рис. 5). Пусть, следовательно, полный вес маятника равен P, длина $DL=a$, Q — центр тяжести маятника и $DQ=g$; S — центр качания маятника и $DS=f$; все величины найдены только что показанными способами. Положим теперь, что пуля ударила этот маятник в точке V, и от этого удара маятник был отклонен до положения Dl, где хорда Ll будет указана лентой. Замечаем, следовательно, требуемое расстояние DV, которое пусть будет равно h; далее, пусть вес пули равен p и хорда $Ll=k$, откуда, по определению автора, скорость пули найдется следующим образом. Применим следующее regula de tri [100]: квадрат DV, или h^2, относится к произведению $DQ \cdot DS$, или fg, как вес маятника P относится к другому весу, который равен $\frac{fg}{hh}P$. Следовательно, удар в маятник будет произведен так, как если бы вместо всего маятника в точке V было получившее удар тело весом $\frac{fg}{hh}P$. Так как пуля не отскочила, то сообщение движения произошло по законам удара неупругих тел. Если скорость пули, которая ударила в V, будет равна скорости, которую получает тяжелое тело при падении с высоты, равной v, то количество движения перед ударом было бы равно $p\sqrt{v}$, которое сохра-

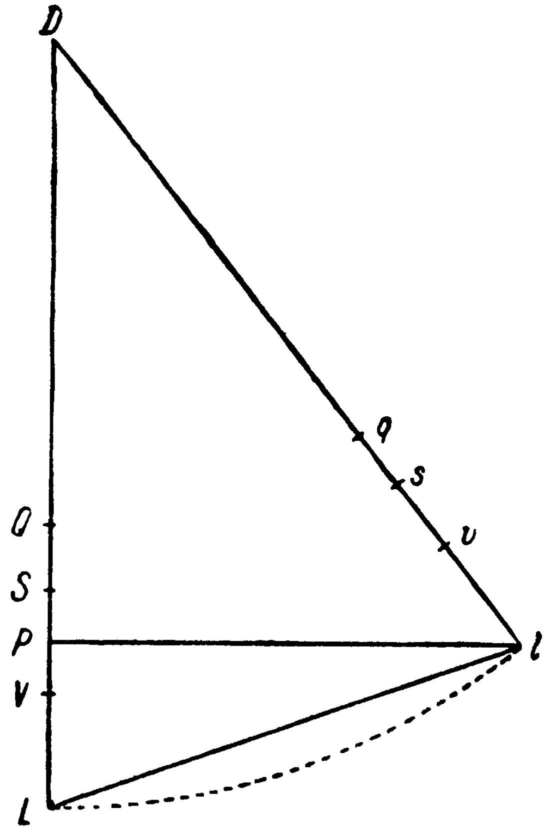

Рис. 5.

няется неизменным также и после удара. Поэтому скорость точки V после удара будет равна

$$\frac{p\sqrt{v}}{p+\frac{fg}{hh}\cdot P}=\frac{hhp\sqrt{v}}{fgP+hhp};$$

с этой скоростью она в последующем первом колебании поднимется на высоту, равную

$$\frac{h^4p^2v}{(fgP+hhp)^2}.$$

Так как хорда $Ll=k$ известна из опыта, то точка L действительно поднимется на высоту

$$LP=\frac{Ll\cdot Ll}{2DL}=\frac{kk}{2a};$$

следовательно, точка V поднимется на высоту, которая относится к вышеуказанной, как $DV=h$ к $DL=a$, и, таким образом, равную $\frac{hkk}{2aa}$.

Отсюда получаем следующее уравнение:

$$\frac{h^4p^2v}{(fgP+hhp)^2}=\frac{hkk}{2aa}$$

и, таким образом,

$$v=\frac{kk(fgP+hhp)^2}{2aah^3pp}$$

и

$$\sqrt{v}=\frac{k(fgP+hhp)}{ahp\sqrt{2h}}=\frac{fgP+hhp}{ahp}\cdot\frac{k}{\sqrt{2h}}.$$

Отсюда найдем действительную скорость следующим образом. Так как свободно падающее тело в одну секунду падает вниз на высоту 15 625 тысячных частей рейнского фута и с полученной таким образом скоростью проходит в одну секунду путь в 31 250 таких частей; а скорости, которые тело получает при падении с различных высот, пропорциональны квадратным корням из высот, поэтому будут относиться, как $\sqrt{15\,625} : \sqrt{v}$, или как 31 250 относится к пути, который пуля прошла бы со скоростью, приобретенной при падении с высоты v. Отсюда этот путь будет равен

$$\frac{31\,250\sqrt{v}}{\sqrt{15\,625}} = 250\sqrt{v}$$

тысячных частей рейнского фута, если v будет выражено в тех же частях. Так как

$$\frac{fgP + hhp}{ahp}$$

представляет собой отвлеченное число, независимо от того, какими мерами пользовались для буквенных обозначений a, f, g, h, P и p, то необходимо только k и h или дробь $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ выразить в частях рейнского фута; и тогда скорость пули в секунду будет составлять столько тысячных частей рейнского фута, сколько дает выражение

$$\frac{250(fgP + hhp)}{ahp} \cdot \frac{k}{\sqrt{2h}},$$

или столько рейнских футов, сколько дает число

$$\frac{fgP + hhp}{ahp} \cdot \frac{k}{4\sqrt{2h}}.$$

Для вычислений будет удобнее следующая формула:

$$\left(\frac{fg}{ah} \cdot \frac{P}{p} + \frac{h}{a}\right) \cdot \frac{k}{4\sqrt{2h}},$$

которая, когда дробь $\frac{k}{\sqrt{2h}}$ выражена в тысячных рейнского фута, показывает, сколько рейнских футов ядро при своей скорости в состоянии пройти в одну секунду.

В приведенном автором примере имеем:

$$P = 56\frac{3}{16}\,℔,\quad p = \frac{1}{12}\,℔,\quad \text{следовательно,}\quad \frac{P}{p} = 674\,\frac{1}{4},$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 71\frac{1}{8}\ \text{дюйма,} \\ f = 62\frac{2}{3}\ \text{дюйма,} \\ g = 52\ \text{дюйма,} \\ h = 66\ \text{дюймов,} \\ k = 17\frac{1}{4}\ \text{дюйма} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{английских} \\ \left.\begin{array}{l} = 5335 \\ = 1395 \end{array}\right\} \text{тысячных рейнского фута.} \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{fg}{ah} = \frac{62\frac{2}{3}\cdot 52}{71\frac{1}{8}\cdot 66} = \frac{3258\frac{2}{3}}{4694\frac{1}{4}}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} &= 468{,}053, \\ \frac{h}{a} &= \quad 0{,}928 \\ \hline \frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} + \frac{h}{a} &= 468{,}981. \end{aligned}$$

Далее, $2h = 10\,670$, и вычисление будет выполнено в логарифмах следующим образом:

$$\begin{aligned} l\,2h &= 4{,}0281644 \\ l\,\sqrt{2h} &= 2{,}0140822 \\ l4 &= 0{,}6020600 \\ \hline l\,4\sqrt{2h} &= 2{,}6161422 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \text{вычитая из } lk = 3{,}1445742 \\ \hline \text{остаток} \quad 0{,}5284320\,' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{прибавив } l\left(\frac{fg}{ah}\cdot\frac{P}{p} + \frac{h}{a}\right) = 2{,}6711552\ [105] \\ \hline \text{получим } 3{,}1995872\ [106] \end{array}$$

Соответствующее ему число равно 1583,388 [107] и показывает, что ядро способно пройти в секунду 1583 рейнских фута. Так как 970 рейнских футов равны 1000 английских футов, то эта скорость составляет 1632 английских фута в секунду, что отличается от вычисленной автором [108] только на 9 футов; эта разница здесь не существенна. В действительности скорость пули должна быть несколько больше, чем дает вычисление, потому что вследствие сопротивления воздуха маятник поднимется не так высоко, как это соответствовало бы сообщенной ему скорости. Но как велико это сопротивление, мы исследуем после того, как покажем, на чем основано приведенное автором правило для вычисления скорости пули.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Приведенное автором правило нахождения скорости пули по действию удара дано в столь сжатом виде, что будет совершенно непонятно большинству читателей. Поэтому небесполезно растолковать это довольно-таки неясное место, насколько этого требует предпринятая нами работа. Этот вопрос относится к учению об изменении движения, вызванного ударом двух соударяющихся тел; законы движения, в котором два тела сталкиваются так, что линия, перпендикулярная к точке их касания, проходит через каждый из их центров тяжести [109], достаточно известны и находятся в большинстве трудов по механике. Тела могут быть упругими и неупругими. Но так как этот случай не имеет здесь места, то по этим общеизвестным законам нельзя определить изменение, которое происходит при ударе. В рассматриваемом случае одно из тел, а именно маятник, при ударе не свободно, а подвижно вокруг оси; это обстоятельство в настоящем исследовании должно быть особенно принято во внимание. Но чтобы определить изменение, которое происходит в движущемся вокруг оси теле, вводят в рассмотрение его момент инерции, который получается, если массу каждой частицы тела [110] умножить на квадрат ее расстояния до оси и все эти произведения сложить; когда тело движется свободно, обычно учитывают его инерцию или собственный вес. Кроме того, при этом движении вокруг оси следует ввести в рассмотрение не действующую силу, а ее момент, который получается, если силу умножить на расстояние от оси, измеряемое по перпендикуляру к направлению силы. Этот момент силы, деленный на упомянутый выше момент инерции, дает абсолютную ускорительную силу движения около оси [111]; и если эта дробь будет умножена на расстояние какой-нибудь точки от оси, получим ускорительную силу этой точки [112]. В свободном движении тела, напротив, ускорительную силу получают, просто деля силу на инерцию тела или вес [113]. Расстояние центра качания S от оси, т. е. $DS=f$, найдем, если массы всех частиц маятника умножим на квадраты их расстояний до оси и сумму всех таких произведений, представляющую собою момент инерции, разделим на произведение полного веса маятника P и расстояния центра тяжести от оси $DQ=g$, т. е. то, что является моментом инерции Pfg, разделим на Pg. Обычно при определении изменений, происходящих при ударе двух тел, не вводят в рассмотрение время, в течение которого это происходит, и многие придерживаются того мнения, что эти изменения протекают мгновенно и не требуют никакого времени. То, что это мнение не соответствует действительности, можно было бы доказать многими доводами, если бы разбираемый случай не давал нам одно из очевидных тому доказательств: поскольку пуля проникает довольно глубоко в доску маятника, никто не сможет отрицать, что на это потребуется какое-то время. Поскольку же это время очень короткое, можно безошибочно принять, что маятник незаметно изменяет свое положение за то время, пока удар производит свое действие.

Пусть, следовательно, DL (рис. 6) [114] естественное положение маятника до того, как в него попадет пуля; Q — центр тяжести, S — центр качания и, следовательно, $DQSL$ — вертикальная линия. Обозначим по-прежнему полный вес маятника через P, отрезки $DL=a$, $DQ=g$, $DS=f$. Пусть пуля, вес которой равен p, брошена в маятник по горизонтальному направлению TV таким образом, что первый удар попадет в точку V. Пусть $DV=h$ и b есть высота, при падении с которой тело получает скорость, равную скорости пули; мы представим эту скорость через $\sqrt{b}$, потому что $\frac{1}{4}\sqrt{b}$ показывает, сколько рейнских футов прошла бы пуля в секунду, если бы высота b была выражена в тысячных частях рейнского фута. Теперь допустим, что по истечении незначительного времени t маятник переместился в положение Dl и что пуля уже проникла вглубь деревянной доски до u. Обозначим малую дугу $Vv=x$ и глубину $vu=y$; кроме того, пусть скорость, которую маятник уже имеет в точке v, равна $\sqrt{v}$ и скорость пули в u равна $\sqrt{u}$. Теперь, так как в течение бесконечно малого промежутка времени dt точка маятника v переместится на dx, а пуля — на $dx+dy$, то по законам движения

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx+dy}{\sqrt{u}}.$$

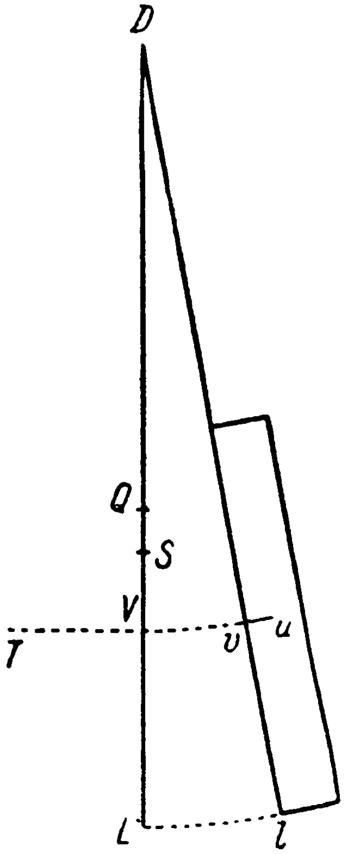

Рис. 6.

За это время пуля проникнет еще глубже в дерево, и так как дерево оказывает сопротивление, то в результате скорость маятника возрастает, а скорость пули убывает. Пусть V — сила сопротивления дерева, тогда $\frac{V}{p}$ будет замедляющей силой, действующей на пулю, откуда

$$du=-\frac{V}{p}(dx+dy).$$

Рассмотрим действие на маятник силы V, момент которой равен Vh; так как момент инерции маятника равен Pfg, то ускорительная сила маятника в точке v будет $\frac{Vhh}{Pfg}$, и следовательно,

$$dv = \frac{Vhh \cdot dx}{Pfg}.$$

Разделив уравнение для du на это уравнение, получим

$$\frac{du}{dv} = -\frac{Pfg\,(dx+dy)}{phh \cdot dx},$$

и так как

$$\frac{dx+dy}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}},$$

то

$$\frac{du}{dv} = -\frac{Pfg\sqrt{u}}{phh\sqrt{v}}$$

или

$$\frac{phh\,du}{\sqrt{u}} + \frac{Pfg\,dv}{\sqrt{v}} = 0.$$

По интегрировании это уравнение дает

$$phh\sqrt{u} + Pfg\sqrt{v} = phh\sqrt{b},$$

потому что в начале удара $v=0$ и $u=b$. Так как действие удара полностью прекращается, когда скорость маятника в точке V станет равной скорости пули, то, обозначив через $\sqrt{s}$ скорость маятника в точке V по окончании удара, получим

$$phh\sqrt{s} + Pfg\sqrt{s} = phh\sqrt{b}$$

или

$$\sqrt{s} = \frac{phh\sqrt{b}}{Pfg+phh};$$

это выражение совершенно согласуется с тем, которое дал автор, и, следовательно, до этого места правильность его вывода подтверждена.

Теперь, так как $\sqrt{s}$ выражает скорость, которая будет сообщена маятнику в точке V при ударе, то

$$\frac{\sqrt{s}}{h}=\frac{ph\sqrt{b}}{Pfg+phh}$$

будет выражать окончательно скорость качания, откуда видно, что размах будет очень мал, если расстояние DV будет взято очень малым; опять-таки, размах будет очень мал, когда h будет взято слишком большим. Следовательно, можно решить вопрос, в какой точке пуля со скоростью $\sqrt{b}$ должна ударить в маятник, чтобы он при этом получил наиболее сильный размах. Находим, что это может иметь место, когда $Pfg=phh$, или когда $h=DV=\sqrt{\frac{Pfg}{p}}$. Эта точка V есть, следовательно, так называемый центр удара, и отсюда ясно, что центр удара не является ни центром тяжести, ни центром качания; но кроме этой точки необходимо еще иметь в виду соотношение между весом маятника и весом пули. Так, если вес пули p по отношению к весу маятника P очень мал, то центр удара очень снизится. Но в рассматриваемом случае нет надобности обращать внимание на центр удара, а скорее полезно стремиться к тому, чтобы сообщенный маятнику размах не был чрезмерно большим. Но так как мы теперь нашли скорость точки V, то остается еще найти, как высоко при этом поднимется маятник. Известно, что движение всякого маятника происходит так, как если бы весь его вес был сосредоточен в центре качания, который теперь, когда пуля проникла в маятник, несколько переместится. Определим момент инерции, который с учетом пули будет равен $Pfg+phh$, разделим его на $Pg+ph$ и получим расстояние центра качания от оси равным

$$\frac{Pfg+phh}{Pg+ph},$$

причем мы пренебрегли объемом пули. Отношение h к $\frac{Pfg+phh}{Pg+ph}$ равно отношению скорости точки V (а именно,

$\sqrt{s}=\frac{phh\sqrt{b}}{Pfg+phh}$) к скорости центра качания, которая равна $\frac{ph\sqrt{b}}{Pg+ph}$. Этот центр при первом размахе должен подняться по дуге, sinus versus которой равен $\frac{pphhb}{(Pg+ph)^2}$, и хорда равна

$$\frac{ph}{Pg+ph}\cdot\sqrt{\frac{2b(Pfg+phh)}{Pg+ph}}.$$

Отсюда хорда дуги, которую опишет точка L, должна быть равна

$$\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}.$$

Так как эта хорда найдена из опыта и обозначена через k, то

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{b}=\frac{k\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}{pah\sqrt{2}}.$$

Здесь b обозначает то, что выше обозначали через v, т. е. высоту, при падении с которой будет достигнута скорость пули. Следовательно, так как автором выведено, что

$$\sqrt{b}=\frac{k(Pfg+phh)}{pah\sqrt{2h}},$$

то видно, что это неверно. Автор ошибся, полагая движение маятника происходящим так, как если бы весь вес, который он нашел, был сосредоточен в точке V, тогда как это относится только к центру качания. Чтобы исправить найденную автором скорость в соответствии с действительностью, нужно ее еще умножить на

$$\sqrt{\frac{Pgh+phh}{Pfg+phh}}.$$

Поэтому, когда h больше, чем f, то найденная автором скорость пули будет занижена, а когда h меньше, чем f, будет завышена. Однако разница обычно так мала, что можно легко упустить ее из виду. Поскольку p мало сравнительно с P и разница между f и h очень мала, то следует найденную автором скорость еще умножить на $1+\frac{h-f}{2f}$, что в его примере будет

$$1+\frac{3\frac{1}{3}}{2\cdot 62\frac{2}{3}}=1+\frac{5}{188};$$

следовательно, к найденной выше скорости 1632 английских фута в секунду нужно прибавить еще 43 фута, откуда получим 1675 английских футов в секунду, что дает уже довольно заметную разницу.

Так как p сравнительно с P чрезвычайно мало, то приблизительно будет

$$\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}=$$

$$=Pg\sqrt{f}+\frac{1}{2}ph\sqrt{f}+\frac{1}{2}phh:\sqrt{f}=\frac{Pfg+\frac{1}{2}ph(f+h)}{\sqrt{f}},$$

следовательно,

$$\sqrt{b}=\frac{Pgk\sqrt{f}}{pah\sqrt{2}}+\frac{k\,(f+h)}{2a\sqrt{2f}}=\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{f+h}{2f}\right)\cdot\sqrt{\frac{f}{2}}.$$

Если обозначим отвлеченное число

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{f+h}{2f}\right)=n$$

и выразим f в тысячных частях рейнского фута, то скорость, с которой пуля ударила в маятник, будет равна

$$\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}}$$ рейнских футов в секунду.

Так, в приведенном автором примере имеем:

$$k = 17\frac{1}{4},$$

$$a = 71\frac{1}{8}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{k}{a} = 0{,}24253,$$

$$P = 56\frac{3}{16}\ ℔$$

$$p = \frac{1}{12}℔, \quad \text{т. е.} \quad \frac{P}{p} = 674{,}25,$$

$$g = 52,$$

$$h = 66, \quad \text{т. е.} \quad \frac{g}{h} = 0{,}788,$$

$$f = 62\frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{Pg}{ph} = 531{,}309,$$

$$\frac{f+h}{2f} = 1{,}032,$$

$$\frac{Pg}{ph} + \frac{f+h}{2f} = 532{,}341,$$

следовательно, $n = 129{,}109$ и $\frac{n}{4} = 32{,}277$.

Кроме того, $f = 62\frac{2}{3}$ дюйма и $\frac{f}{2} = 2532{,}78$ [115], поэтому

$$\sqrt{\frac{f}{2}} = 50{,}327 \ [116] \text{ и } \frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}} = 1624{,}39 \ [117].$$

Следовательно, пуля могла бы иметь скорость 1624 рейнских фута в секунду или почти 1675 английских футов. Здесь будет также небесполезно исследовать, насколько пуля проникла вглубь доски. Если сила сопротивления дерева V почти повсюду одинакова, то из уравнения

$$du = -\frac{V}{p}(dx + dy)$$

получается интегрированием

$$u = b - \frac{V}{p}(x + y)$$

и, следовательно,

$$x+y=\frac{p(b-u)}{V};$$

а другое уравнение

$$dv=\frac{Vhh\,dx}{Pfg}$$

дает

$$v=\frac{Vhhx}{Pfg},$$

следовательно,

$$x=\frac{Pfgv}{Vhh}.$$

Но по окончании удара будет

$$v=u=\frac{p^2h^4b}{(Pfg+phh)^2}=s,$$

и, следовательно, глубина vu [118] равна

$$y=\frac{pb}{V}-\frac{s}{Vh^2}(Pfg+phh)[^{119}]=\frac{pb}{V}-\frac{p^2hhb}{V(Pfg+phh)}=$$

$$=\frac{Ppbfg}{V(Pfg+phh)}.$$

Отсюда видно, что чем больше будет расстояние $DV=h$ [120], тем меньше пуля проникает вглубь. Точно так же эта глубина проникания vu будет тем меньше, чем меньше момент инерции маятника Pfg. Так как маятник должен обладать необходимой прочностью, то это уменьшение в наших возможностях; для этого следует сделать маятник столь длинным, а внизу столь легким, как это возможно, и тогда стрелять пулей в наинизшую его часть. При соблюдении этого вполне возможно будет построить такой маятник, с помощью которого будут в состоянии определять скорость не только пистолетных и мушкетных пуль, как сделал автор, но также и пушечных ядер.

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Правило, которое дает автор для нахождения скорости пули по силе удара, справедливо только в том случае, когда пуля попадет в центр качания маятника; но случается, что пуля попадет ниже или выше: тогда в первом случае будет определена слишком малая скорость пули, а в последнем случае — слишком большая. Но кажется, что в большинстве произведенных автором опытов выстрелы ложились под центром качания, и потому найденные им скорости должны быть заниженными.

Здесь необходимо принять во внимание еще другое обстоятельство, которое автором было упущено из виду и которое также привело к тому, что скорость будет больше полученной предыдущими вычислениями. Этим обстоятельством является сопротивление воздуха, действие которого состоит в том, что маятник от удара будет отклонен от своего естественного положения не так далеко, как было бы, если бы совершенно отсутствовало сопротивление. Так как в вычислениях было допущено, что маятник после удара поднимается так высоко, как если бы не было никакого тому препятствия, то ясно, что действительная длина хорды Ll (рис. 5), по которой должна быть определена скорость пули, больше, чем показывает опыт, поэтому также и скорость пули должна быть соответственно увеличена. Но хотя эта разница очень незначительна, потому что при первом размахе уменьшение движения в результате сопротивления воздуха не очень заметно, тем не менее мы все же хотим некоторым образом исследовать это действие сопротивления воздуха с тем, чтобы быть вполне уверенным, можно ли безошибочно пренебречь им или нет? Мы для этого будем рассматривать обратную поверхность маятника, на которую действует сопротивление воздуха, в каком-либо ее положении во время размаха. Пусть, следовательно, скорость, с которой движется наинизшая точка L (рис. 7) около оси EF, равна $\sqrt{v}$, или равна той скорости, которую приобретает падающее вниз с высоты v тело, и расстояние этой наинизшей точки L от оси EF, как мы уже ранее приняли, пусть будет $DL=a$. Кроме того, проведем на этой плоскости маятника произвольную горизонтальную линию MPM и обозначим $DP=x$; тогда скорость какой-либо точки на этой линии будет $\frac{x}{a}\sqrt{v}$, и, следовательно, высота, с которой эта скорость будет достигнута, равна $\frac{xxv}{aa}$. Сопротивление воздуха, оказываемое этой линии MPM, таково, как если бы на нее давил столб воздуха высотой, равной $\frac{xxv}{aa}$. Если теперь обозначим ширину $MM=b$ и проведем параллельно и бесконечно близко к MM линию mm, то площадь $MmmM$ будет равна $b\,dx$, и испытываемое ею давление воздуха будет $\frac{bv}{aa}xx\,dx$. Но здесь надо рассмотреть не столько само давление, сколько его момент, равный $\frac{bv}{aa}x^3\,dx$; интеграл равен $\frac{bv}{aa}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{4}DO^4\right)$. Итак, обозначим $DO=c$ и положим $x=a$; тогда получим момент сопротивления, которое испытывает плоскость $GHIK$, равным $\frac{bv}{4aa}(a^4-c^4)$. Сопротивлением узкой детали DO по сравнению с найденной, отчасти из-за малости самой площадки DO, а отчасти еще вследствие весьма незначительного ее момента, можно пренебречь.

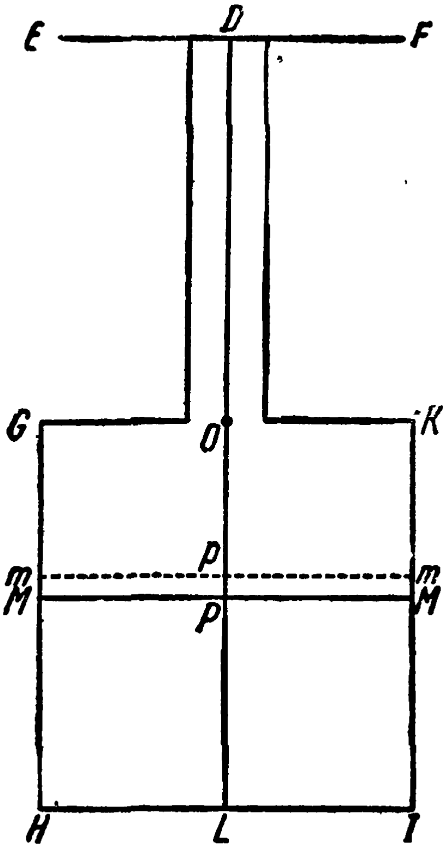

Рис. 7.

Таким образом, момент сопротивления равен $\frac{b(a^4-c^4)}{4aa}\cdot v$; чтобы выразить его надлежащим образом, вычислим вес воздуха в объеме $\frac{b(a^4-c^4)}{4aa}$, или вес воды, заполняющей объем $\frac{b(a^4-c^4)}{3456aa}$, и обозначим этот вес через R; тогда момент сопротивления воздуха будет равен Rv.

Теперь положим, что маятник при размахе пришел в положение Dl (рис. 5), и пусть угол $LDl=\varphi$. Скорость точки l, как было выше принято, равна $\sqrt{v}$, а скорость точки L в начале размаха пусть будет равна $\sqrt{i}$. Если теперь маятник Dl уходит из этого положения еще дальше от DL, то ему в этом препятствуют как его вес, так и сопротивление воздуха: момент его, как мы нашли, равен Rv, если вес R был определен приведенным выше способом. Вес маятника, равный P, действует так, как если бы он был сосредоточен в центре тяжести q, а так как расстояние $Dq=DQ=g$, то момент будет равен $Pg\sin\varphi$. Момент массы всего маятника, как мы видели выше, равен Pfg. Отсюда замедляющая сила абсолютного движения равна

$$\frac{Pg\sin\varphi+Rv}{Pfg},$$

а в точке l эта сила будет равна

$$\frac{Pag\sin\varphi+Rav}{Pfg}.$$

Так как точка l пройдет элементарную дугу Ll, которая равна $a\,d\varphi$, то будем иметь:

$$dv=\frac{-Pa^2g\,d\varphi\sin\varphi-Ra^2v\,d\varphi}{Pfg}=\frac{-a^2\,d\varphi\sin\varphi}{f}-\frac{Ra^2v\,d\varphi}{Pfg},$$

или

$$dv+\frac{Ra^2v\,d\varphi}{Pfg}=\frac{-a^2\,d\varphi\sin\varphi}{f}.$$

Чтобы сделать это уравнение интегрируемым, умножим его на

$$e^{Raa\varphi:Pfg},$$

где e обозначает число, гиперболический логарифм которого равен 1, или, обозначив для краткости

$$\frac{Ra^2}{Pfg}=m$$

и умножив на $e^{m\varphi}$, получим:

$$e^{m\varphi}\cdot(dv+mv\,d\varphi)=\frac{-a^2}{f}\cdot e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi,$$

интеграл которого будет

$$e^{m\varphi}v=\frac{-a^2}{f}\int e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi.$$

Так как

$$-\int d\varphi\sin\varphi=\cos\varphi,$$

то

$$-\int e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi=e^{m\varphi}\cos\varphi-m\int e^{m\varphi}\,d\varphi\cos\varphi$$

и, так как

$$\int d\varphi\cos\varphi=\sin\varphi,$$

то будет

$$\int e^{m\varphi}\,d\varphi\cos\varphi=e^{m\varphi}\sin\varphi-m\int e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi,$$

и, следовательно,

$$-\int e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi=e^{m\varphi}(\cos\varphi-m\sin\varphi)+mm\int e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi.$$

Из этого следует

$$-\int e^{m\varphi}\,d\varphi\sin\varphi=\frac{e^{m\varphi}(\cos\varphi-m\sin\varphi)}{1+mm}.$$

Отсюда мы получим следующее уравнение:

$$e^{m\varphi}v=\frac{e^{m\varphi}\,aa\,(\cos\varphi-m\sin\varphi)}{(1+mm)\,f}+\text{const}.$$

Эта постоянная должна быть определена из начальных условий движения, которые приняты известными; в самом деле, положив $\varphi=0$, будем иметь $v=i$ и, следовательно, получим:

$$i=\frac{aa}{(1+mm)\,f}+\text{const},$$

следовательно,

$$\text{const} = i - \frac{aa}{(1+mm)f}.$$

Поэтому имеем:

$$e^{m\varphi}v = i - \frac{aa - e^{m\varphi}aa(\cos\varphi - m\sin\varphi)}{(1+mm)f}.$$

Если мы теперь положим, что Dl обозначает высшее положение, которого маятник может достигнуть при первом размахе и откуда он начнет падать обратно вниз, то там будет $v=0$ и, следовательно,

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}aa(\cos\varphi - m\sin\varphi).$$

Но тогда хорда дуги будет $Ll=k$, величина которой будет известна из опыта. Поэтому

$$\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{k}{2a}, \quad \cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{1-\frac{kk}{4aa}},$$

и далее

$$\cos\varphi = 1 - \frac{kk}{2aa}$$

и

$$\sin\varphi = \frac{k}{a}\sqrt{1-\frac{kk}{4aa}}.$$

Следовательно,

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}aa\left(1 - \frac{kk}{2aa} - \frac{mk}{a}\sqrt{1-\frac{kk}{4aa}}\right),$$

или

$$(1+mm)fi = aa - e^{m\varphi}\left(aa - \frac{1}{2}kk - \frac{1}{2}mk\sqrt{4aa-kk}\right).$$

Но если сопротивление совершенно пропадет, то $m=0$ и хорда Ll будет несколько больше, чем k. Допустим, что хорда в этом случае стала равной s; тогда получим $fi = \frac{ss}{2}$. Таким образом, неизвестную величину i можно определить из расчета, так как тогда получим:

$$(1+mm)ss = 2aa - e^{m\varphi}(2aa - kk - mk\sqrt{4aa-kk}),$$

откуда можно найти действительную длину хорды s, которая была бы, если бы не было никакого сопротивления, и которую надо брать при расчетах вместо наблюденной хорды k. Тогда известны a, k и дробь $m=\frac{Raa}{Pfg}$, а φ есть угол, половина которого имеет sinus, равный $\frac{k}{2a}$, когда принят sinus totus $=1$ [121]. Это вычисление может быть упрощено двояким образом. Во-первых, так как сопротивление очень незначительно, то m будет столь малой дробью, что вместо $e^{m\varphi}$ можно принять $1+m\varphi$, потому что высшими степенями m можно без погрешности пренебречь. Поэтому будет:

$$(1+mm)\,ss=kk-2maa\varphi+mkk\varphi+mk\sqrt{4aa-kk}$$

или

$$ss=kk-2maa\varphi+mkk\varphi+mk\sqrt{4aa-kk}.$$

Во-вторых, обычно в подобных опытах угол LDl, выраженный в градусах, мал, и поэтому sinus половины угла φ почти равен самой дуге.

Поэтому

$$\frac{1}{2}\varphi=\frac{k}{2a}+\frac{k^3}{48a^3} \quad \text{и} \quad \varphi=\frac{k}{a}+\frac{k^3}{24a^3}$$

и, следовательно,

$$ss=kk-2mak-\frac{mk^3}{12a}+\frac{mk^3}{a}+mk\sqrt{4aa-kk}.$$

Но так как k по сравнению с $2a$ очень мало, то

$$\sqrt{4aa-kk}=2a-\frac{kk}{4a},$$

и, следовательно,

$$ss=kk+\frac{2mk^3}{3a} \quad \text{или} \quad s=k+\frac{mkk}{3a},$$

потому что мы уверенно можем отбросить высшие степени k. В вышеизложенном вычислении мы можем, следовательно, вместо хорды k применять найденное тут значение $k+\frac{mkk}{3a}$; и так как скорость пули пропорциональна самой хорде k, то действительную скорость пули получим, если найденную скорость еще умножим на $1+\frac{mk}{3a}$, и, таким образом, можно легко внести эту поправку, как только она окажется заметной. Мы сделаем поверку на примере, приведенном автором. Хотя он не сообщил, каковы размеры доски, привинченной к маятнику, но, по-видимому, она имеет, по крайней мере, 2 фута в длину и такую же ширину. Так как полная длина $DL=a=71\frac{1}{8}$ дюйма, то в футах будет $a=5,927$; следовательно, $c=3,927$ и $b=2$ фута. Отсюда

$$\begin{array}{r}a^4=1234,07\\ c^4=237,82\\ \hline a^4-c^4=996,25\end{array}$$

и

$$b(a^4-c^4)=1992,50,$$

следовательно, $\frac{b(a^4-c^4)}{3456aa}=0,01641.$

Этот объем, следовательно, содержит $\frac{1641}{100\,000}$ кубических футов. Так как кубический фут воды весит приблизительно 70 ℔, то вес $R=1,1487$ ℔. Но $P=56,187$ ℔ и также в футах $f=5,222$ и $g=4,333$. Отсюда будет

$$m=\frac{Raa}{Pfg}=0,03174,$$

и так как $k=1,4375$ фута, то получим:

$$\frac{mk}{3a}=0,002566\ [123],$$

что дает приближенно $\frac{mk}{3a}=\frac{1}{400}$.

Таким образом, найденная приведенным выше способом скорость меньше на $\frac{1}{400}$.

Так как мы нашли, что пуля проходит в одну секунду 1675 английских футов, то эта поправка составляет не более чем 4 фута; таким образом, пуля в секунду проходила 1679 футов. Автор нашел для этого случая только 1641 фут, тогда как по его собственному правилу должно было получиться только 1632. Но так как его правило само по себе неверное, то уже на этом основании скорость получилась меньше на 43 фута. Эта ошибка, следовательно, увеличивается еще от сопротивления воздуха на 4 фута; таким образом, правило автора в этом примере дает скорость пули на 47 футов в секунду меньше; эта разница по его же собственным положениям слишком велика, чтобы ею можно было пренебречь. Но мы здесь приняли наверняка слишком малое сопротивление и притом не рассматривали также трение оси, которое тоже привнесло бы еще что-либо: таким образом, можно с уверенностью утверждать, что пуля, с которой был поставлен опыт, проходила в секунду по меньшей мере 1680 английских футов.

ДЕВЯТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Сравнить действительные скорости пуль, выброшенных различным образом из огнестрельного оружия, с получаемыми теоретически

Как следует опытным путем определять скорость, с которой пуля будет действительно выброшена, было объяснено весьма подробно в предыдущем Предложении; и как следует вычислять по нашей теории скорость по силе пороха и размерам оружия, также исчерпывающе было показано в седьмом Предложении. Мы сопоставим здесь скорости, которые дают теория и опыт, и этим покажем, насколько точно теория согласуется с действительным движением пуль, несмотря на то, что она основана на таких положениях, которые не связаны с этими опытами.

Первые опыты, которые я здесь опишу, были произведены со стволом, который имел одинаковые размеры с примененным в примере шестого Предложения. Пуля имела $\frac{3}{4}$ дюйма в диаметре, полная длина канала была 45 дюймов и пороховая ка́мора длиной $2\frac{5}{8}$ дюйма могла вместить точно 12 драхм пороха, так как диаметр канала был примерно на $\frac{1}{40}$ больше, чем диаметр пули.

Вес пули, которая была применена, был равен $\frac{1}{12}$ ℔ торгового веса и, следовательно, одинаков с весом в примере седьмого Предложения; но доска маятника в настоящем случае была на 4 ℔ легче, чем в упомянутом примере. Теперь по этим данным можно вычислить, во-первых, скорость пули по теории и, кроме того, хорду Ll дуги, которую должен описать маятник после удара, и которая, если теория правильна, должна быть совершенно одинакова с длиной, показываемой при опыте лентой. Насколько точно это согласование получается в наших опытах, видно из следующей таблицы.

№	Вес пороха, драхмы	Хорда описанной дуги, измеренная лентой, дюймы	То же по теории, дюймы	Погрешность теории, дюймы
1	12	18,7	19,0	+0,3
2	12	19,6	19,0	—0,6
3	6	13,6	13,4	—0,2

Следующие опыты были произведены с тем же стволом; однако тело маятника на этот раз было несколько тяжелее, чем в примере седьмого Предложения. Здесь также не весь объем позади пули был заполнен порохом. Поэтому в следующей таблице (стр. 134) длины объема позади пули AF (рис. 1) отмечены особо.

Последние пять выведенных по теории чисел исправлены вследствие большого числа пуль, которые уже проникли в доску и вес которых, поскольку было поставлено много других опытов, уже перевалил за 2 ℔.

№	Объем позади пули AF (рис. 1), дюймы	Вес пороха, драхмы	Хорда дуги, измеренная лентой, дюймы	То же по теории, дюймы	Погрешность теории, дюймы
4	$2\frac{5}{8}$	6	11,9	12,1	+0,2
5	$2\frac{5}{8}$	6	12,2	12,1	—0,1
6	$1\frac{1}{4}$	6	13,2	13,6	+0,4
7	$1\frac{1}{4}$	6	13,9	13,6	—0,3
8	$2\frac{5}{8}$	12	16,7	17,2	+0,5
9	$2\frac{5}{8}$	12	17,5	17,2	—0,3
10	$2\frac{5}{8}$	12	16,9	16,8	—0,1
11	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	16,8	—0,2
12	$2\frac{5}{8}$	6	11,7	11,5	—0,2
13	$2\frac{5}{8}$	6	11,1	11,5	+0,4
14	$2\frac{5}{8}$	12	16,7	16,3	—0,4

По этой причине, так как вес маятника возрос, величина производимого ударом размаха должна была пропорционально уменьшиться.

Следующие опыты были проведены с другим стволом, который имел одинаковый калибр с предыдущим, но был длиной только 12,375 дюйма. Чтобы отличать этот случай от предыдущего, мы будем обозначать опыты, произведенные с первым стволом, буквой A, а те, где мы применяли укороченный ствол, буквой C. Доска, привинченная к маятнику, была сначала несколько

№		Объем *AF* (рис. 1), дюймы	Вес пороха, драхмы	Хорда дуги, измеренная *лентой*, дюймы	То же по теории, дюймы	Погрешность теории, дюймы
15	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	12,7	12,8	+0,1
16	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	12,6	12,8	+0,2
17	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	12,4	12,8	+0,4
18	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	17,3	+0,3
19	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	0
20	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+0,1
21	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	0
22	*A*	$2\frac{5}{8}$	6	12,4	12,2	—0,2

легче той, которая применялась в примере седьмого Предложения и была там описана.

В некоторых из следующих опытов был употреблен третий ствол, который по калибру был одинаков с двумя предыдущими, но длина его была только 24,312 дюйма. Этот ствол мы будем отмечать в отличие от других буквой *B*. Доска, укрепленная на маятнике, была первоначально лишь немного легче описанной в седьмом Предложении. Так как она вследствие большого числа опытов заметно возрастала в весе, то я также соответствующим образом уменьшал выведенные по теории числа.

Погрешности в 26-м и 27-м опытах, которые получились много больше, чем в каком-либо из других производившихся мною опытов, произошли, как я предполагаю,

№		Объем позади пули AF (рис. 1), дюймы	Вес пороха, драхмы	Хорда дуги, измеренная лентой, дюймы	То же по теории, дюймы	Погрешность теории, дюймы
23	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+0,1
24	A	$2\frac{5}{8}$	9	15,2	15,0	—0,2
25	A	$2\frac{5}{8}$	9	15,4	15,0	—0,4
26	C	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+1,3
27	C	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+1,3
28	C	$2\frac{5}{8}$	6	8,7	9	+0,3
29	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,3	12,5	+0,2
30	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0
31	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0
32	B	$2\frac{5}{8}$	6	10,3	10,5	+0,2
33	A	$1\frac{3}{4}$	8	14,7	14,5	—0,2
34	A	4	12	15,7	15,3	—0,4

от ошибки при взвешивании пороха или потому, что ствол (который перед этим действительно лежал в сыром месте) был несколько заржавлен, и при таком состоянии, как я наблюдал из опытов, сила пороха весьма заметно падала.

Следующие опыты были произведены с значительно более тяжелым маятником. Вес его был 97 ℔, центр тяжести его был удален от оси на 55,625 дюйма и 200 малых

№		Объем позади пули AF (рис. 1), дюймы	Вес пороха, драхмы	Хорда дуги, измеренная лентой, дюймы	То же по теории, дюймы	Погрешность теории, дюймы
35	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	9,2	9,2	0
36	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	9,5	9,2	—0,3
37	*A*	$5\frac{1}{4}$	24	11,7	11,3	—0,4
38	*A*	$7\frac{7}{8}$	36	13,2	12,6	—0,6
39	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	9,3	9,1	—0,2
40	*A*	$1\frac{3}{4}$	8	7,6	8,1	+0,5
41	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	6,1	6,6	+0,1
42	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	6,5	6,6	+0,1
43	*B*	$2\frac{5}{8}$	12	8,0	8,2	+0,2
44	*B*	$2\frac{5}{8}$	12	8,3	8,2	—0,1
45	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	9,5	9,1	—0,4
46	*A*	$2\frac{5}{8}$	12	9,1	9,1	0
47	*A*	$2\frac{5}{8}$	6	7,2	6,5	—0,7
48	*A*	$2\frac{5}{8}$	6	6,7	6,5	—0,2
49	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	6,8	6,7	—0,1
50	*C*	$2\frac{5}{8}$	12	7,5	6,7	—0,8
51	*C*	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+0,1

№		Объем позади пули AF (рис. 1), дюймы	Вес пороха, драхмы	Хорда дуги, измеренная лентой, дюймы	То же по теории, дюймы	Погрешность теории, дюймы
52	C	$2\frac{5}{8}$	6	5,0	4,8	—0,2
53	D	$2\frac{5}{8}$	12	7,0	7,2	+0,2
54	D	$2\frac{5}{8}$	12	7,1	6,8	—0,3
55	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+0,1
56	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,8	4,8	0
57	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+0,1
58	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+0,1
59	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,6	6,5	—0,1
60	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,7	6,5	—0,2
61	A	$2\frac{1}{16}$	12	9,0	9,1	+0,1

качаний его совершались за время в $255\frac{1}{4}$ секунды [124]; поэтому центр качания должен был отстоять от оси на 63,9 дюйма. Кроме этого, иногда употреблялся другой ствол, который имел длину только 7,06 дюйма и калибр 0,83, в который пуля загонялась так туго, что не оставалось никакого зазора, вес пули был $33\frac{1}{2}$ драхмы. Этот ствол будем отмечать буквой D.

Погрешность в 50-м опыте, наибольшая в этом ряду, произошла несомненно от ветра, потому что 49-й, непосредственно перед тем поставленный таким же образом и с равным количеством пороха, отклоняется очень мало от теории. Превышение в 38-м опыте над теорией произошло отчасти от удара пламени в маятник; это обстоятельство при таком сильном заряде могло быть ясно замечено.

Теория будет подтверждена и такими опытами, при которых бралось в заряд очень мало пороха. До сих пор мы принимали, что порох, когда он воспламенен, получает одинаковую с раскаленным до белого каления железом степень жара. Но мы заметили также, что при малых количествах пороха жар должен быть меньший: следовательно, в этих случаях сила пороха будет меньше указываемого прежним правилом. Это уменьшение силы при малых зарядах мы действительно обнаружили многими опытами. Рассмотрим здесь пример седьмого Предложения, где по теории скорость пули должна была быть около 1670 футов в секунду, и точно эта скорость получается также из опытов, если взять среднюю из найденных чисел. Теперь, сохранив этот же ствол и такое же место позади пули, но вместо 12 драхм пороха, которые были взяты в упомянутом опыте, зарядим только одной драхмой; из приведенных выше оснований следует, что, если упругость при меньших зарядах была бы пропорционально так же велика, как при бóльших, то скорость пули, выброшенной при меньшем заряде, должна относиться к скорости, которая получится при большем заряде, как корни квадратные из количеств пороха в обоих зарядах, т. е. как 1 к $\sqrt{12}$. Так как скорость, которую дают 12 драхм, составляет 1670 футов в 1 секунду, то скорость, которая получится только при 1 драхме, должна будет составить приблизительно 482 фута в 1″. Но я путем многократно повторявшихся опытов, которые все очень мало между собою различались, нашел, что наиболее действительная скорость, которую получала пуля в этом случае при заряде в 1 драхму, едва достигала 400 футов в секунду. Отсюда ясно, что упругая сила одной драхмы пороха при воспламенении меньше, чем предположено нашей теорией.

Равным образом, в этом же примере при заряде тремя драхмами пороха, я получил из многих опытов действительную скорость пули не больше чем от 720 до 740 футов в 1″, тогда как по теории, если бы из каждой драхмы взятых нами 3 драхм пороха производилась столь же большая упругость, как в том случае, когда мы имеем 12 драхм, то скорость должна бы быть 835 футов в секунду. Отсюда следует, что при воспламенении 3 драхм пороха упругость, а следовательно, и жар должны быть значительно меньше, чем при воспламенении 12 драхм, как требует теория.

Эти меньшие степени упругости пороха, когда воспламеняются его малые количества, относятся к той степени упругости, какую мы выше установили для больших количеств, как квадраты скоростей, с которыми пули будут выброшены из одного и того же ствола. Отсюда следует, что упругость при воспламенении одной драхмы относится к упругости при воспламенении 12 драхм, почти как 3 к 4, если допустить, что эти сниженные упругости также равномерно распределяются во всех частях объема. Однако это обстоятельство, по всей вероятности, не имеет здесь места, потому что, поскольку падение упругости происходит от уменьшения жара, представляется более правдоподобным, что при воспламенении незначительных количеств жар не только первоначально меньше, но также и после постепенно убывает по мере продвижения пули в стволе, и что, следовательно, происходящее от жара возрастание упругости тем интенсивнее затухает, чем дольше длится действие пороха на пулю; это обстоятельство не имеет места, если количество пороха будет точно пропорционально длине канала, в котором он использует свою силу.

ДОПОЛНЕНИЕ

Таким образом, мы подтвердили нашу теорию убедительнейшими доказательствами, которые оказались в полном согласии с многочисленными опытами, проведенными при всех условиях, какие только возможны.

Здесь еще необходимо вспомнить, что эти опыты большей частью были произведены и записаны до того, как мы предприняли какие-либо вычисления для сравнения их с теорией, хотя я уже заранее был убежден в правильности этой теории в том виде, как она здесь изложена.

Разнообразие этих опытов и столь полное согласие их с теорией не оставляют, таким образом, у нас ни малейшего сомнения в ее правильности, потому что мы исследовали действие воспламененного пороха как на пули различного веса, так и в стволах различной длины, от 7 дюймов до 45 дюймов. Мы изменяли также заряд пороха от 6 до 36 драхм и располагали его различным образом так, что иногда он заполнял весь объем позади пули, а иногда занимал только часть этого объема. И при всех этих условиях мы нашли, что наша теория всегда показывала правильную скорость, с которой выбрасывалась пуля. Если же, как случалось при малых зарядах, и были сделаны кое-какие исключения из общего правила, которое мы установили, то и это было всегда так, как того требовала теория. Эта теория, которая так точно согласовывалась с практикой в столь разнообразных опытах, необходимо должна была быть построена на правильном и единственно возможном определении силы и действия пороха, потому что иначе не могла бы иметь места такая точная согласованность.

В этой теории, как она была здесь изложена, утверждается, что около $\frac{3}{10}$ материи пороха мгновенным воспламенением превращается в устойчивую, тончайшую и текучую материю, упругость которой, принимая во внимание ее жар и плотность, одинакова с упругостью воздуха при тех же условиях. Кроме того, принимают, что вся сила, которую порох обнаруживает в своем стремительном действии, состоит не в чем другом, как только в упругой силе этой выделившейся тонкой материи; эти предположения дают возможность, как мы видели, определять скорости пуль, выбрасываемых из всех видов огнестрельного оружия, и вполне достаточны для всех случаев, когда это требуется для определения силы пороха. Мы не собирались здесь разрешать вопрос, является ли эта тонкая текучая материя, которая образуется при воспламенении пороха, настоящим и подлинным воздухом или каким-то особым веществом, потому что этот вопрос не стоит ни в какой связи с нашими настоящими задачами.

Из этой теории может быть выведено много заключений, имеющих весьма большое значение для практической части артиллерии. Из нее легко определить, например, толщину ствола с тем, чтобы он обладал надлежащей прочностью сопротивления силе пороха, потому что силу пороха легко узнать. Кроме того, отсюда видно также, как мало обоснованы предложения некоторых современных писателей, которые надеются получить наибольший результат путем придания особой формы пороховым ка́морам в пушках и мортирах, потому что все их расчеты в этом деле построены на совершенно неправильных представлениях о действии воспламененного пороха. Эта теория нас учит, что необходимо в пушке оставлять позади ядра всегда один и тот же объем, если при одном и том же заряде ядро должно быть выброшено с одной и той же скоростью, потому что из наших основ явствует, что одно и то же количество пороха дает бо́льшую или меньшую степень силы пороха, смотря по тому, меньше или больше тот объем, в котором он будет заключен. Прием, которым я пользовался, чтобы достигнуть в этом надежности, заключался в том, что я делал несколько отметок на прибойнике [125]; и в этом польза, какую не следует упускать из виду, если пушка стреляет при угле возвышения, особенно значительном при тех выстрелах, которые французами называются рикошетными.

Из последовательности действия пороха и способа его расширения, как это изложено в теории, можно, кроме длины пушки, определить одно из важнейших положений, требуемое для правильного расположения артиллерии, при котором она будет поставлена в наилучшие условия. Все практики признают, что нельзя сделать ни одного верного выстрела, если пушка стоит не на твердом основании или грунте, потому что, если грунт будет расстроен под действием начальной силы пороха, пушка непременно будет сбита со своего направления и, следовательно, выстрел будет неверным. Чтобы предупредить это неудобство, грунт, на котором установлена пушка, обычно уплотняют несколько позади ее на достаточную глубину так, чтобы пушка оставалась почти неподвижной не только в начале движения ядра, но и в продолжение отдачи. Однако достаточно очевидно, что, когда ядро уже выброшено из орудия, его движение не может быть сбито сотрясением орудия или грунта. Путем простого подсчета найдем, что ядро из пушки, которая имеет длину 10 футов и бросает 24-фунтовое ядро зарядом в 16 ℔, вылетит прежде, чем пушка откатится на полдюйма. Поэтому если грунт достаточно уплотнен на протяжении только начала отката пушки, то безразлично, уплотнен ли грунт на остальном протяжении или нет, так как сотрясение, которое получит пушка после того, как она откатилась на первые ½ дюйма, не может оказать никакого дальнейшего влияния на движение ядра. Отсюда, следовательно, представляется возможным легко придумать весьма удобный и практический способ уплотнения грунта батареи и тем избежать излишней работы [[126]].

Из этой теории также видно, как грубо ошибались те авторы, которые силу пороха или, по крайней мере, значительную ее часть приписывали единственно только действию воздуха, находящегося в пороховых зернах, а частично и в промежутках между ними. Они полагали, неясно представляя это себе, что такой воздух находится в своем естественном состоянии упругости и что возрастание его силы получается единственно только от жара при горении. Однако из того, что мы в пятом Предложении доказали опытом относительно увеличения упругости воздуха, которое происходило бы только от жара, мы можем уверенно заключить, что жар горения не может увеличить упругость воздуха более чем в пять раз; следовательно, сила, образующаяся только от этой причины, составляет не более чем двухсотую часть действительной силы, которую производит порох.

Закончив на этом доказательство правильности нашей теории, мы перейдем к исследованию некоторых особых обстоятельств, которые, хотя и вытекают вполне естественно из приведенных здесь оснований и легко могут быть объяснены, все-таки ввиду их новизны и необычного характера заслуживают обстоятельного объяснения.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

В этом Предложении автор сравнивает скорости пули, вычисленные по его теории, с теми скоростями, которые позволяет определить описанный в предыдущем Предложении прибор, и всюду находит столь точное согласование, какое едва ли можно ожидать от ложной теории. Чтобы предпринять тщательное исследование этого вопроса, мы, во-первых, сделаем с этой целью опыт и рассмотрим вытекающие из него заключения о том, что мы изложили в Замечании к предыдущему Предложению. Там мы доказали, что применяемое автором правило определения скорости пули по длине хорды (рис. 5). Ll, измеряемой посредством ленты, неверно, и только в том случае будет соответствовать истине, если пуля попадет прямо в центр качания маятника. Так, если обозначим вес маятника через P, вес пули через p и примем длину всего маятника от оси до ленты $DL=a$, удаление от оси центра тяжести $DQ=g$, удаление от оси центра качания $DS=f$, удаление от оси точки V, в которую ударяет пуля, $DV=h$ и, наконец, длину хорды, которую после удара показывает лента, $Ll=k$, то по правилу автора скорость пули выразится такой формулой:

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{h}{f}\right)\frac{f}{\sqrt{2h}};$$

в действительности же вместо нее должна быть применена формула

$$\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{ph}+\frac{f+h}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}},$$

которую мы выше вывели для случая, когда p очень мало сравнительно с P. Правда, в обе формулы не введено сопротивление воздуха, но так как оно составляет всего лишь несколько футов, мы можем им спокойно пренебречь. Однако неправильность применяемого автором правила может часто вызвать значительную ошибку в величине скорости пули. Так в вычисленном выше примере найденная автором скорость оказалась в силу этого на 43 фута меньше, что составляет около 40-й части всей скорости. Эта разница произошла оттого, что в этом опыте пуля ударила в маятник под центр качания S, а чем больше расстояние между центром качания и точкой V, в которую ударяет пуля, тем больше уклоняется произведенное по правилу автора вычисление от истины. Так как в обеих формулах соответствующие количества $\frac{h}{f}$ и $\frac{f+h}{2f}$ сравнительно с первым количеством $\frac{Pg}{ph}$ очень малы, то почти всегда найденная по правилу автора скорость будет относиться к истинной, как $\sqrt{f}$ к $\sqrt{h}$. Следовательно, чем больше h отличается от f, тем больше будет ошибка. Затем, так как автор, как видно из его опытов, всадил довольно много пуль в доску и притом больше двух не могло попасть в одно и то же место, то ясно, что разница между f и h становится то больше, то меньше.

В опыте было $f=62\frac{2}{3}$ дюйма и полная длина маятника $71\frac{1}{8}$ дюйма. Таким образом, если при опыте, как легко сообразить, расстояние $DV=h$ сделалось бы равным 69 дюймам, то найденная автором скорость относилась бы к истинной, как $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ к $\sqrt{69}$, т. е. почти как

20 к 21, и, следовательно, ошибка составила бы двадцатую часть, на которую найденная скорость была бы меньше. Если бы центр тяжести пришелся примерно посредине доски, он был бы там удален от оси на 52 дюйма, и можно было бы полагать, что иногда пули попадали бы и в него, а также еще выше, хоть до 45 дюймов от оси. В этих случаях найденная автором скорость пули была бы слишком велика, и если расстояние DV было бы равно только 45 дюймам, то вычисленная скорость должна была бы относиться к истинной как $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ к $\sqrt{45}$, т. е. как 13 к 11. Отсюда получается, что она была бы более чем на шестую часть больше. Так как во всех этих опытах автор не указывает, насколько точка V, в которую ударила пуля, была удалена от оси маятника, то нет возможности сказать, как велика в каждом из них ошибка. Если найденная скорость составила приблизительно 1700 футов в секунду, то получается, что это число было бы в одних случаях на 85 футов меньше, а в других на 283 [127] фута больше. Или, так как автор указывал не самую скорость, а только длину хорды $Ll=k$, которой скорость пропорциональна, то если длина этой хорды равна 16 дюймам, ошибка в ее измерении могла составить 0,8 дюйма, когда пуля попадает в нижнюю часть доски и даже 2,6 дюйма [128], когда пуля попадает в верхнюю часть. Следовательно, нельзя ничего определенного заключить о согласии опытов с теорией в пользу этой последней.

Из описания этих опытов не видно также, чтобы автор очень тщательно измерял расстояния $DV=h$, потому что в сходных случаях, когда сделано много выстрелов при одном и том же заряде и из одного и того же ствола, он показывает всегда одну и ту же длину хорды $Ll=k$; однако едва ли можно поверить, что при всех различных выстрелах пуля попадала в доску на одной и той же высоте. Даже если автор мог бы попадать всегда в одну и ту же точку, он все-таки не пожелал бы, чтобы одна пуля наталкивалась на другую; следовательно, он нарочно должен был бы стрелять все время в разные точки доски, и так как пули имели в диаметре $\frac{3}{4}$ дюйма, то они должны были бы быть удалены одна от другой по крайней мере на 1 дюйм. Он также не упоминает о том, что все пули легли на одной горизонтальной линии доски и, следовательно, все оказались одинаково удаленными от оси, что было бы и невозможно; но если бы пуля попала в доску на один дюйм выше или ниже, следовало бы взять хорду Ll на 0,1 дюйма больше или меньше в случае, если длина всей хорды более 10 дюймов: разница в два дюйма составила бы на хорде 0,2 дюйма, в три дюйма — 0,3 дюйма и так далее. Эти ошибки могли возникнуть вследствие неверности правила автора, поскольку оно отклоняется от действительности. Но даже если бы правило было верным, все равно надлежало бы приложить больше старания в измерении расстояния $DV=h$, потому что, когда по правилу автора скорость пули почти равна $\frac{k}{a}\,\frac{Pfg}{ph\sqrt{2h}}$, что при одинаковых условиях дает соотношение $\frac{1}{h\sqrt{h}}$, очевидно, что нельзя упускать из виду ни малейшей разницы в величине расстояния h. Допустим, что при $h=66$ дюймам хорда получилась $k=16$ дюймам; тогда, если бы при тех же обстоятельствах расстояние h стало больше или меньше на 1 дюйм, хорда k стала бы уже на $\frac{1}{3}$ дюйма больше или меньше. Так как мы тут не встречаем такой заметной разницы в найденной длине хорды для одинаковых выстрелов, то либо все они должны были расположиться на доске на одной горизонтальной линии, либо автор в своих вычислениях не обращал внимания на различное удаление точки V от оси; так как первое неправдоподобно, то приходится допустить последнее. Но чтобы сохранить достоинство этих опытов, мы будем полагать, что если и не все выстрелы пришлись на доске на одной горизонтальной линии, то все-таки разница в высоте составляла не более одного дюйма; в этом случае автор при всей своей аккуратности все-таки не должен был допускать ошибки более чем в $\frac{1}{3}$ дюйма, поскольку это обстоятельство оказывает бо́льшее влияние, чем увеличение веса маятника за счет попавших в него пуль, на что автор обращает слишком много внимания и в соответствии с чем уменьшает вычисленную длину хорды.

В описании прибора, однако, имеется одно обстоятельство, которое может дать нам достаточное объяснение по этому вопросу. В том месте, где автор излагает свое правило определения скорости пули, он называет точку, в которую будет брошена пуля, серединной точкой доски и для нее производит вычисление, а затем для всех других случаев производит вычисления по правилу de tri [100]. А именно: так как он нашел, что если длина хорды, измеренная по ленте, равна $17\frac{1}{4}$ дюйма, скорость пули составит 1641 футов в секунду, то для всякого другого случая, в котором будет брошена в ту же доску пуля такого же веса, он дает следующее правило: $17\frac{1}{4}$ дюйма относится к найденной в рассматриваемом случае длине хорды, как 1641 фут относится к пути, который может пройти пуля в секунду. Это правило автор, кажется, постоянно использует, вычислив один раз по своей теории скорость для одного-единственного случая. Если это так, то в большей части его вычислений должна скрываться двойная ошибка. Во-первых, потому что число 1641, как мы уже доказали, слишком мало, и вместо него должно быть принято 1675. А затем нельзя ставить такое условие, чтобы все выстрелы приходились на серединную точку доски или в 66 дюймах от оси. Так, в последнем приведенном листе опытов находится 27 выстрелов, попавших в доску. И так как два каких-нибудь попадания из них должны бы быть удалены один от другого по крайней мере на один дюйм, а ширина доски имела немного более одного фута, то не могли же все они войти в доску на одной горизонтальной линии; следовательно, некоторые из них должны были попасть в доску по крайней мере на дюйм выше или ниже, и в соответствии со всеми обстоятельствами можно предполагать, что эта разница составляла часто 2, 3 и более дюймов, что, таким образом, должно было бы в вычисленной длине хорды учесть разницу иногда в целый дюйм. Это положение серединной точки доски, отстоящей от оси на 66 дюймов, указывает нам на величину доски, которая автором не была точно указана. Поскольку самый нижний край маятника был удален от оси на $71\frac{1}{8}$ дюйма, то расстояние от середины доски до самого нижнего конца было приблизительно 5 дюймов, и, следовательно, полная ее длина составляла 10 дюймов. Если, теперь ширина, как это кажется, была равна длине, то ее площадь была равна всего только 1 квадратному футу, а не 4, как мы выше предположили при вычислении сопротивления воздуха. А потому это вычисленное сопротивление вчетверо завышено, и так как оно составило в скорости пули 4 фута, то действительное сопротивление составило не более 1 фута. Поэтому тем более можно при этих опытах пренебречь сопротивлением воздуха. Так как по этой же причине никакой выстрел не может войти в доску более чем на 5 дюймов выше или ниже серединной точки, то и ошибка, которая находится в правиле автора, может составлять не более двадцатой доли всей скорости.

Автор в продолжение своих опытов не упускал из виду тех пуль, которые уже проникли в доску, и хотя он не оставлял это обстоятельство без внимания, но оно не играло большой роли, как об этом уже было упомянуто. Во-первых, от этого увеличивается вес маятника, затем, так как пули проникли в доску ниже центра тяжести, то от этого также сдвигается и центр тяжести или длина g и, наконец, подвергается незначительному смещению также и центр качания. Если положим, что скорость пули будет получена при падении с высоты b, то, когда в доске нет еще ни одной пули, имеем следующее уравнение:

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}}.$$

Теперь предположим, что вес пуль, которые уже попали в доску все на расстоянии h от оси, будет q; тогда вместо Pg (момента веса) следует написать $Pg+$ $+qh$, и вместо Pfg (момента инерции) следует написать $Pfg+qhh$; следовательно, в этом случае будет

$$k = \frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}}.$$

При одинаковых обстоятельствах, следовательно, прежняя хорда относится к этой, как

$$\sqrt{\frac{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}{(Pg+ph)(Pfg+phh)}} \text{ [129]}$$

относится к 1 или приблизительно как $1+\frac{qh(f+h)}{2Pfg}$ относится к 1, когда P очень велико сравнительно с p [130]. Если в ранее вычисленном случае имеем $P=56$ ℔, $f=62\frac{2}{3}$, $g=52$ и $b=66$ и положим, что вес пуль, находящихся в доске, составляет один фунт, то будем иметь $q=1$; и поэтому, когда употреблена новая доска, новая хорда будет относиться к той, которая получится уже после того, как в доске засядет 1 фунт пуль, при прочих равных условиях, как $1+\frac{1}{43}$ к 1, т. е. вследствие засевших в доске пуль хорда должна быть уменьшена на 44-ю часть; это уменьшение также было принято во внимание.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Описанным в предыдущем Замечании способом можно, следовательно, вычислить длину хорды $Ll=k$, если скорость пули, брошенной в доску, может быть принята известной, потому что если b — высота, падая с которой тело приобретает скорость одинаковую со скоростью пули, то, как мы выше нашли,

$$k=\frac{pah\sqrt{2b}}{\sqrt{(Pg+ph)(Pfg+phh)}};$$

эта длина, как мы уже заметили, может часто сильно отличаться от найденной автором по его способу. Но, кроме того, автор определяет скорость пули или высоту b первоначально предложенным им способом по количеству заряда, длине канала и объему позади пули, о котором уже ранее были сделаны различные замечания. Теперь, чтобы не смешивать между собою буквенные обозначения, примем длину канала ствола, из которого выбрасывается пуля, равной α, длину объема позади пули — равной β, длину заполненной порохом каморы — равной γ, диаметр пули — равным c и число n, обозначающее, во сколько раз материал, из которого состоит пуля, тяжелее воды; тогда из этого найдем высоту b, с которой при падении будет достигнута скорость, выраженная в рейнских футах:

$$b=\frac{110\,524{,}08\gamma}{nc}\,l\,\frac{\alpha}{\beta}\ [131],$$

где для $l\,\frac{\alpha}{\beta}$ взят обыкновенный логарифм дроби $\frac{\alpha}{\beta}$. Но если эту длину b желательно выразить в английских дюймах, как у автора, то, так как 0,97 рейнского фута составляют 12 английских дюймов, имеем:

$$b=\frac{1\,367\,308\gamma}{nc}\,l\,\frac{\alpha}{\beta}\ \text{английских дюймов},$$

следовательно,

$$2b=\frac{2\,734\,616\gamma}{nc}\,l\,\frac{\alpha}{\beta},$$

и, таким образом,

$$\sqrt{2b}=1654\sqrt{\frac{\gamma}{nc}\,l\,\frac{\alpha}{\beta}},$$

откуда, следовательно, получаем длину хорды k:

$$k = 1654pah\sqrt{\frac{\gamma l\,(\alpha:\beta)}{nc\,(Pg+ph)\,(Pfg+phh)}},$$

если не принимать в рассмотрение ни противодавление, ни сопротивление воздуха в продолжение того времени, пока пуля находится в канале. Но при вычислении по этой формуле мы с автором приняли, что весь порох воспламеняется мгновенно и при этом будет выделена тонкая материя, упругость которой, когда она еще заключена в объеме, занимаемом порохом, в 1000 раз больше упругости обыкновенного воздуха, или, что то же, давления атмосферы. Но выше было уже ясно доказано, что порох не может сразу воспламениться и что, следовательно, упругость вышеупомянутой тонкой материи должна превосходить давление воздуха гораздо больше, чем только в 1000 раз, чтобы произвести именно то самое действие. А потому что касается столь полного согласования опытов с теорией автора, хотя и при наличии весьма многих недочетов в вычислениях длин хорды Ll, которые автор сравнивает с наблюденными, то все же из этого ясно, что если скорости, найденные по теории, и не очень отклоняются от истинных, тем не менее согласие далеко еще не так велико, как полагает автор, так как вычисленная длина хорды может иногда отклоняться на целый дюйм. Но если бы даже вычисленная скорость пули вполне соответствовала истине, то все-таки это еще не подтверждало бы мнения автора о силе пороха, потому что точно такая же скорость пули могла бы получиться и в том случае, когда сила пороха много больше, но действует не мгновенно. Автор, правда, приводит в подтверждение своего мнения те опыты, которые были проведены с неодинаковыми по длине стволами и которые тем не менее хорошо согласуются с теорией, что, по его мнению, не могло бы случиться, если бы порох воспламенялся постепенно, потому что в более коротких стволах до вылета пули успевала бы сгорать менее значительная часть, чем в более длинных. Но мы выше уже высказали свое мнение об этом обстоятельстве [132], а также и о других опытах, из которых вытекает как раз противоположное. Поэтому здесь только добавим, что, возможно, порох применявшийся автором, был так хорошо изготовлен, что бо́льшая его часть воспламенялась до того, как пуля вылетала из самого короткого ствола. Могло быть и так, что неверно вычисленные хорды показали весьма точное согласование с опытом, тогда как этого не было бы, если бы их вычислили по верному правилу. Наконец, можно согласование с опытом отнести также за счет прорыва упругой материи через зазор и запальный канал, как было показано в предыдущих Замечаниях. Но из этой согласованности все-таки очевидно, что если первоначальная упругость пороха много больше, чем принятая автором, то в большинстве случаев это не произведет более сильного действия, чем нашел автор в своих вычислениях, и что, следовательно, постепенное сгорание пороха и прочие сопротивления, которые были рассмотрены выше, почти на столько уменьшают скорость пули, на сколько она должна была бы увеличиться большей силой. Всякий раз, как имеет место это равенство, можно также с уверенностью применять предложенное автором правило — определять скорость пули по заряду. Но могут встретиться такие обстоятельства, когда возьмет перевес либо бо́льшая сила пороха, либо упомянутые выше сопротивления, и скорость пули окажется либо больше, либо меньше, чем это следует из предложенного автором правила. Один из таких случаев имеет место при очень малом заряде пороха, где, как автор очень хорошо заметил, жар воспламенения и, следовательно, упругость тонкой материи не могут быть так велики, как это получится по расчетной формуле. В формуле положено $m=1000$; это значение очень хорошо соответствует сильным зарядам; но при очень слабых зарядах следует принять меньшее значение. Если мы примем, что для малого заряда соответствующим значением m будет μ, то для какого-либо случая это число μ можно легко определить из разницы между длиной хорды, которая найдена вычислением, и полученной при опыте. Так, в случае, когда $m=1000$, хорда k будет

$$k = 1654pah\sqrt{\frac{\gamma l(\alpha:\beta)}{nc\,(Pg+ph)\,(Pfg+phh)}},$$

откуда следует, что если m не равно 1000, а равно μ, то хорда должна быть равна

$$1654pah\sqrt{\frac{\mu\gamma l\,(\alpha:\beta)}{1000nc\,(Pg+ph)\,(Pfg+phh)}}$$

при прочих равных условиях. Отсюда при очень слабых зарядах вычисленная хорда относится к наблюденной, как $\sqrt{1000}$ к $\sqrt{\mu}$ и, следовательно, как 1000 к μ или как квадрат вычисленной хорды к квадрату наблюденной, или как квадраты самих скоростей.

В приведенном автором примере, где заряд составлял только 1 драхму пороха, вычисленная скорость будет 482 фута в секунду, а было получено только 400 футов; в этом случае 1000 относится к μ как 482^2 к 400^2 и, следовательно,

$$\mu = \frac{160\,000\,000}{482\cdot 482} = 688.$$

Если, следовательно, будет воспламенена только 1 драхма пороха, то возникающий при этом жар будет меньше, чем при бóльшем количестве пороха, так что первоначальная упругость окажется только в 688 раз больше давления атмосферы. В другом опыте, где заряд составлял 3 драхмы пороха, оказалось 1000 относится к μ как 835^2 к 730^2 и, следовательно,

$$\mu = \frac{532\,900\,000}{835\cdot 835} = 764.$$

Таким образом, в этом случае также вследствие незначительного жара первоначальная упругость пороха только в 764 раза больше давления атмосферы.

Автор на этом основании находит в первом случае отношение упругостей при воспламенении 1 драхмы и 12 драхм равным отношению 2 к 3, что очень точно согласовывается с нашим отношением 688 к 1000; в другом же случае он находит отношение 3 к 4 вместо 764 к 1000, разница между которыми весьма незначительна. Так как разница между числами: 688, 764 и 1000 довольно заметная, то приходится удивляться тому, что такая разница не выявляется при зарядах от 6 до 36 драхм и что эти столь различные случаи могут так точно согласовываться с вычислением. Может быть, причиной этого была замеченная выше погрешность в вычислении хорды восходящей дуги; и так как жар пламени, по утверждению автора, тем больше, чем больше пороха воспламенилось одновременно, то можно скорее всего предположить, что упругость при заряде в 36 драхм станет значительно больше, чем при 6 драхмах, и что в пушках, заряжаемых значительно бо́льшими количествами пороха, упругость должна быть еще бо́льшей. Поэтому предложенное автором правило вычисления скорости пули по силе пороха, по-видимому, оказалось бы для пушек уже не таким точным без учета обстоятельств, которые, как было доказано выше, ослабляют действие пороха. Но сейчас еще ничего вполне определенного нельзя сказать, так как хорды, вычисляемые автором, могут довольно сильно отклоняться от действительных, а те обстоятельства, которые вызывают необходимость внесения поправок, не исследовались. Поэтому было бы желательно, чтобы нашелся кто-нибудь, кто повторил бы все эти опыты с тем же старанием и тем же способом, как их произвел автор, но при каждом опыте тщательно измерял бы на доске удаление от оси точки, в которую попадает пуля, и отсюда вычислял бы длины хорд по изложенным здесь правильным положениям.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Польза, которую можно получить в артиллерии, зная силу пороха и скорость ядра, огромна. Так, если мы будем уметь точно решать эти вопросы, то будем также знать, как должны быть сильны и прочны пушки и мортиры, и следовательно, не будем опасаться, что изготовят пушки либо чрезмерно прочными, либо очень слабыми, чем в первом случае можно избежать излишних расходов, во втором же — предотвратить всякие убытки и опасность. Сила, которая двигает ядро, действует также и на внутренние стенки пушки, и, если они не обладают надлежащей прочностью, чтобы противостоять этой силе, то пушка обязательно разорвется. Наибольшая сила, которую испытывает пушка, проявляется в первый момент, когда воспламеняется порох еще до того, как ядро будет заметно сдвинуто со своего места (рис. 1). Таким образом, в объеме $CDEG$ стенки пушки нагружены так, как дно прямо поставленной и заполненной водой трубы, высота которой равна 32 000 футов, если мы с автором примем, что упругость выделяющейся при воспламенении пороха тонкой материи в первый момент в 1000 раз больше, чем давление атмосферы, которое равно столбу воды в 32 фута. Но столь огромная сила распространяется не на всю пушку, а только на ее казенную часть $CDEG$, которая занята порохом, вследствие чего эта часть должна иметь такую прочность, какая требуется для сопротивления этой силе. Передние части пушки не испытывают никакой силы до того, как ядро продвинется до них; когда же ядро продвинется, эта сила уже будет меньше, чем вначале. Когда же ядро будет продвинуто до M, упругая сила в объеме AM будет относиться к первоначальной, как AF к AM и, следовательно, будет равна водяному столбу высотой $32\,000 \cdot \frac{AF}{AM}$ футов, откуда следует, что сила, которую выдерживают передние части пушки, будет всегда меньше. Поэтому нет необходимости в том, чтобы пушка в передней части была такой же прочной, как позади у AF, и, следовательно, было бы излишне, если бы стали делать пушки впереди столь же прочными и массивными, как позади. Для того чтобы было яснее видно, как должно соразмерять толщину пушки в каждом месте с тем, чтобы она не была ни чрезмерно прочной, ни слишком слабой, мы должны рассмотреть вопрос, каким образом пушка сопротивляется этой силе. Если бы металл, из которого состоит пушка, не обладал прочностью, в силу которой его частицы связаны между собой, то под действием первоначальной силы они все были бы оторваны одна от другой и разбросаны, следовательно, силе пороха должно противостоять скрепление частиц металла. Но эта прочность вследствие большого разнообразия, которое определяется соединением частиц, не может быть очень точно рассчитана, потому что при отливке частицы часто в одном месте много прочнее связаны между собою, нежели в другом: поэтому прочность всегда должна быть больше, чем это показывает теория, которая основывается на таком равенстве прочности сцепления всех частиц.

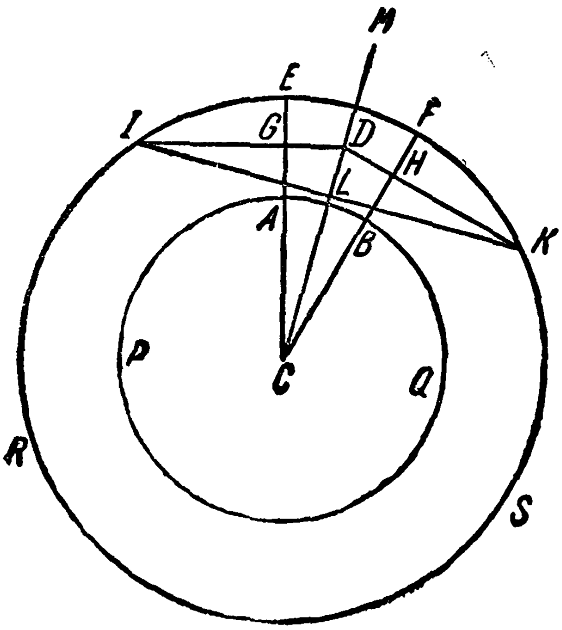

Рис. 8.

Все же будет не бесполезно дать здесь понятие о сцеплении частиц металла и возникающем при этом сопротивлении силе пороха, хотя здесь ничего точно определить нельзя. Представим себе с этой целью (рис. 8) поперечное сечение пушки, перпендикулярное к оси; на рисунке внутренний круг $ABQP$ — канал пушки, в котором развивается упругая сила пороха, а круговое кольцо между двумя окружностями обозначает металл. Упругая сила пороха действует равномерно на всю внутреннюю окружность $ABQP$ круга и стремится растянуть ее или даже разорвать. Но мы рассмотрим только часть металла $AEFB$, заключенную между двумя радиусами CE и CF, проведенными из центра C. Пусть внутренний радиус $AC = BC = a$ и угол $ACB = 2\varphi$ соответствует дуге AB, на которую действует сила пороха; эта дуга равна $2a\varphi$, и сама сила пропорциональна этой дуге, т. е. эта сила равна $2ma\varphi$. Среднее направление этой силы проходит через центр C и делит угол ACB на две равные части. Итак, пусть CDM — направление, по которому часть $AEFB$ выталкивается под действием силы $2ma\varphi$. Если бы эта часть не была скреплена с остальным металлом, она действительно была бы вытолкнута по направлению DM. Но эта часть скреплена по линиям AE и BF, по которым она связана с остальным металлом, и там это скрепление во всех точках одинаково, а потому его можно рассматривать как силу, которая прижимает с обеих сторон часть $AEFB$ к остальным частям по линиям AE и FB и направление которой перпендикулярно к обеим сторонам посредине в точках G и H. Если мы обозначим толщину металла $AE=FB=b$; то сжимающая с обеих сторон сила будет пропорциональна этой толщине b, т. е. равна nb. Продолжим направления обеих сил GI [133] и HK до пересечения в точке D на линии CM; тогда можно рассматривать точку D как если бы на нее действовали три силы: во-первых, по направлению DM сила $2ma\varphi$ [134], затем по направлениям DI и DK [135] с обеих сторон сила nb, и обе эти силы должны быть так же велики или больше, чтобы уравновесить первую. Разложим эти две силы на составляющие по направлениям DC и к нему перпендикулярному, и взаимно их сократим. Так как треугольники CDG и CDH имеют при G и H прямой угол, то DI или DK будет относиться к DL как CD к DG, т. е. как sinus totus 1 к sin угла DCG, т. е. $\sin\varphi$. Поэтому обе силы DI и DK дают по направлению DC силу $2nb\sin\varphi$, такую, что если бы она была меньше силы $2ma\varphi$, то часть $AEFB$ не могла бы удержаться против последней и была бы вырвана из пушки по направлению DM. Так как это все же не происходит, то сила $2nb\sin\varphi$, очевидно, столь же велика или даже больше, чем сила $2ma\varphi$, т. е. $nb\sin\varphi > > ma\varphi$, и это должно иметь место, как бы ни был велик угол ACB; но это отношение $nb\sin\varphi$ к $ma\varphi$ будет наименьшим, когда угол ACB будет равен 180°, или $\varphi=90°$; в этом случае $\sin\varphi=1$ и $\varphi=1,570796$; поэтому nb также должно быть больше чем $1,570796\ ma$. Отсюда следует;

что разрывающая сила будет наибольшей, когда часть $AEFB$ станет равной полуконтуру сечения, и что, следовательно, пушки подвергаются более всего опасности разрыва в двух взаимно противоположных местах. Чтобы этого не случилось, nb должно быть больше, чем $1{,}570796ma$ или, сокращенно, nb должно быть больше, чем $\frac{11}{7}ma$. В этих выражениях m будет определено по упругой силе пороха и n — по крепости металла. Следовательно, если в различных пушках будет применяться один и тот же металл, то всегда толщина металла должна быть пропорциональна калибру или диаметру ядра. И так как в пушке упругая сила пороха убывает по мере того, как продвигается вперед ядро, то толщина пушки в месте M должна относиться к толщине дна пушки в AF, как длина AF к длине AM. На этом основании можно, следовательно, дульную часть пушки без риска делать много слабее, чем делают обычно, если только правильна теория автора, и весь порох воспламеняется мгновенно, потому что в этом случае, если AM будет принято таким же, как AF, то было бы достаточно, если бы в M пушка имела только половину той толщины, какую она имеет у дна ствола AF. При этом имеется в виду сильнейший заряд, какой когда-либо может быть употреблен. А если принять, что не весь порох воспламеняется мгновенно, то из-за последовательного воспламенения пороха отношение силы в AM к силе в AF больше, чем AF к AM, и на этом основании толщина пушки в дульной части должна быть больше, чем по предыдущему правилу, что также подтверждено опытом. Этим подтверждено мнение, что порох не весь сразу воспламеняется. Но так как постепенное воспламенение пороха не поддается определению и весьма разнообразно для различных сортов пороха, то и нельзя из одной только теории вывести наивыгоднейшие пропорции толщины пушки, и лишь многочисленные опыты могут дать средство для этой цели. Если, наоборот, следовать теории автора, то было бы легко порешить с этим делом, но подобные пушки не смогут долго противостоять силе пороха, потому что дульная часть всегда будет слишком слабой, даже если казенная часть будет обладать необходимой прочностью.

Так как на этих основаниях нельзя изыскать способ уменьшить без риска вес пушек, то лучше всего для достижения этой конечной цели обратиться к улучшению материала, из которого отливают пушки. Наиболее предпочтительно отыскать такой материал, частицы которого были бы связаны между собою значительно сильнее, чем в обычных металлах; в этих исследованиях можно ожидать еще крупных успехов. Может быть также возможно еще внести различные улучшения в отливку, благодаря которым материал приобрел бы несколько бо́льшую прочность; это, без сомнения, может быть достигнуто если отливать цельные пушки без сердечника, а после отливки рассверливать в них канал, потому что при этом способе не только получается более плотный металл, но можно рассверлить канал точно по оси, чего нельзя достигнуть при отливке. Наконец, немалую пользу может принести хотя бы незначительная вязкость пушечного металла, потому что здесь все зависит не только от той силы, которой связаны между собой частицы вещества и которая может быть одинаковой и в хрупких и в вязких телах, а в том еще, что как только частицы будут незначительно удалены одна от другой, тело либо тотчас разрушится, либо будет иметь возможность снова вернуться в свое прежнее состояние. В том именно и состоит различие между хрупкими и вязкими материалами, что хрупкие тела сразу разрушаются, как только будут расстроены частицы, а вязкие тела, хотя среди их частиц и произойдет такое расстройство, тем не менее еще не будут разрушены вследствие связи сцепления. Следовательно, если бы материал, который будет применяться для пушек, имел несколько бо́льшую вязкость, то можно было бы без риска изготовлять их более легкими. Это именно и было причиной того, что в старину могли изготовлять кожаные пушки, которые по легкости были несравнимы с металлическими, а могли производить почти такие же сильные выстрелы; хотя, впрочем, они недолго существовали [136]. Между тем, здесь имеются еще такие возможности, поскольку в отношении материала для пушек можно ожидать еще значительных усовершенствований.

Упругая сила пороха вызывает также отдачу огнестрельного оружия и пушки, поскольку эта сила действует одинаково на дно канала назад, а на ядро вперед, таким образом, что если бы пушка не была тяжелее, чем снаряд, то она рванулась бы назад с такой же скоростью, как снаряд вперед. Но чем тяжелее тело, тем медленнее движение, которое будет ему сообщено одной и той же силой. Поэтому, во сколько раз пушка вместе с лафетом тяжелее ядра, которое будет брошено, во столько же раз движение пушки будет медленнее, чем ядра; следовательно, расстояние, на которое откатится пушка за то время, как ядро движется в пушке, будет относиться к длине канала без длины объема позади ядра, как вес ядра к полному весу пушки. Если, таким образом, полукартаун, который стреляет 24-фунтовым ядром, имеет длину 10 футов, то, поскольку его вес составляет приблизительно 64 центнера или 6400 фунтов, эта пушка к тому времени, как будет выброшено ядро, должна откатиться на расстояние $\frac{24}{6400} \cdot 10$ футов, или только на $\frac{3}{80}$ фута, то есть меньше чем на полдюйма. Если, следовательно, основание, на котором стоит пушка, настолько плотно, что она может откатиться назад на ½ дюйма не подпрыгивая, то выстрел будет верным, даже если основание далее позади совершенно не будет обладать такой плотностью. То, что пушка после вылета ядра и, следовательно, прекращения действия силы отдачи все еще продолжает откатываться, происходит от сообщенного ей движения, которое продолжается столь долго, пока не прекратится совсем вследствие сопротивления. Вот почему замечание автора, относящееся к прочности батарей, на которых устанавливаются пушки, вполне правильно, и этим может быть сбережено много бесполезно затрачиваемого труда.

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Автор делает из своей теории еще и то заключение, что все предложения, которые направлены на придание особой формы пороховой кáморе в пушках, не могут принести никакой выгоды. Такое заключение было бы вполне правильным, если бы, как думает автор, весь порох воспламенялся сразу в первый момент, потому что в этом случае первоначальная сила пороха одна и та же, а объем, в котором находится порох, может иметь форму, какую пожелают, при полном заполнении порохом. Если же только часть объема заполнена порохом, то сила будет тем меньше, чем эта часть меньше всего объема позади ядра: поэтому в этом случае величина силы также не зависит от формы кáморы. Но если ядро уже заметно продвинулось, то движущая сила так относится к первоначальной силе, как объем, занятый первоначально порохом, относится к тому же объему вместе с тем, через который ядро уже прошло; и, следовательно, здесь также форма пороховой кáморы не оказывает никакого влияния на действующую силу. На этом основании, следовательно, безразлично, какую хотят дать форму донной части канала пушки, и так как все формы оказывают на движущую силу одно и то же влияние, то справедливо выбирают ту, которая удобна в остальных отношениях. Если по другим соображениям не находят нужным что-либо изменить в обычной форме пушек, то на этом же основании можно ее спокойно сохранить и все предложения изменить ее можно рассматривать как непригодные, без дальнейщих исследований.

Но, как уже сказано, это основано на мнении автора о том, что весь порох воспламеняется мгновенно в первый момент. А так как выше мы уже привели весьма веские соображения против этого мнения, то никак нельзя отвергать предложения, касающиеся наивыгоднейшей формы кáморы. Может ли форма объема, в котором заключен порох, способствовать ускорению или замедлению воспламенения пороха или нет? Если на этот вопрос можно ответить *да*, то несомненно, что та форма, при которой порох воспламеняется наиболее быстро, будет лучшей и наивыгоднейшей, так как чем быстрее воспламеняется весь порох, тем больше и тем дольше продолжается и сила, действующая на ядро, следовательно, ему будет также сообщено более быстрое движение. Но легко доказать, что форма объема может влиять на быстроту воспламенения. Представим себе очень длинную и узкую трубку, в которой заключен порох, и что этот порох зажжен с одного конца. В этом случае воспламенение будет распространяться до другого конца трубки не так быстро, как если бы трубка была короче. Каждый легко поймет также, что, если казенную часть пушки превратить в такую длинную и узкую трубку, то ядро будет выброшено с весьма незначительной степенью скорости, хотя бы и применили такой же сильный заряд. Отсюда легко понять, что порох воспламеняется тем быстрее, чем менее удалены все его зерна одно от другого. Так как шарообразная форма среди всех других, имеющих такой же объем, обладает тем свойством, что ее поверхность наименьшая и все ее части наиболее сближены между собою, то нет никакого сомнения в том, что в таком объеме порох будет воспламеняться наиболее быстро. Поэтому следовало бы стремиться к тому, чтобы придать каналу в казенной части пушки позади ядра удобную форму или совершенно, или частично круглую, потому что при такой форме получилось бы значительное приращение скорости, с которой движется ядро. Действие было бы еще значительнее, если бы можно было зажечь порох в центре этого объема, чтобы от этого места воспламенение наиболее быстро распространялось во все стороны. Хотя, по всей видимости, встретятся разного рода трудности, из-за которых осуществление этих предложений покажется невозможным; но, быть может, сто́ит способному и опытному практику изыскать способ преодолеть все эти трудности, чтобы с пользой провести в жизнь сделанное предложение. Между прочим, для нашей настоящей цели достаточно указать на те обстоятельства, которые наиболее соответствуют выгодному устройству пороховой ка́моры и по которым легко судить о намеченных к тому предложениях. Но при этом заметим, что чем более будут увеличивать таким образом начальную силу пороха, тем должны соответственно прочнее делать в этом месте металл пушки.

ДЕСЯТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить изменения, которым подвергается сила пороха вследствие различного состояния атмосферы

Во всех опытах, которые я производил до настоящего времени, я не мог еще заметить, чтобы различное давление атмосферы вызывало хотя бы малейшее изменение в силе пороха, хотя я сделал много сотен выстрелов при совершенно различной погоде. Особенно часто я сопоставлял опыты, которые были произведены жарким летом в полдень, с теми, которые я ставил утром и вечером, когда было еще довольно свежо; но между ними никогда не замечалось ни малейшей разницы. То же самое имело место с опытами, которые ставились ночью и в зимнее время, хотя в такое различное время плотность воздуха весьма различна. И действительно, из того, что, как мы убедились, тонкая материя, в которой состоит сила пороха, выделяется в одинаковом количестве как в воздухе, так и в безвоздушном пространстве, довольно ясно следует, что эта сила не может испытывать никакого изменения от большой или малой плотности воздуха.

Но хотя плотность воздуха не оказывает никакого влияния на силу пороха, то все же влажность воздуха производит значительнейшие изменения. Так, я нашел, что один и тот же заряд, который в сухую погоду выбрасывал пулю со скоростью 1700 футов в секунду, в сырую погоду едва мог сообщить той же самой пуле скорость от 1200 [137] до 1300 футов в секунду, и даже еще меньше, если порох был плохого качества или плохо сохранившийся.

Это изменение силы в сыром порохе, как следует из моих опытов, тоже очень непостоянно и переменчиво, так, например, два выстрела, сделанных с одинаковым количеством отсыревшего пороха, бравшегося из одной и той же бочки, всегда отличались один от другого более чем в 10 раз; такой разницы не было в случае сухого пороха. Между тем я, несмотря на большое сомнение, все же не мог не заметить очень ясно, что это уменьшение силы пороха, происходящее от влажности воздуха, более сильно в малых зарядах, чем в больших, если в обоих случаях влажность одна и та же. Другое обстоятельство, которое вызывает влажный порох, состоит в весьма значительном загрязнении, которое остается в стволе после выстрела и которое больше, чем то, которое происходит от такого же заряда сухого пороха.

Все эти явления могут быть теперь очень легко объяснены, если принять во внимание, что порох вбирает в себя влажность из воздуха. Поскольку порох, когда он увлажнен, совершенно теряет способность к воспламенению, то отсюда следует, что незначительная степень влажности, если она не вполне затрудняет воспламенение, все-таки должна уменьшить силу пороха, и в этом случае будет выделено меньшее количество тонкой упругой материи, которая поэтому произведет тоже незначительную степень жара и очень слабую упругую силу. Следовательно, действие отсыревшего пороха будет ослаблено от двоякой причины, смотря по степени влажности, какую впитал в себя порох.

Плохой порох обычно содержит в себе немного обыкновенной соли, так как селитра недостаточно очищена. Вследствие того, что обыкновенная соль впитывает в себя влагу гораздо сильнее, чем селитра, легко понять, что при влажной погоде плохой порох должен впитать влаги много больше, чем хороший, отчего он теряет столь же много и в своей силе.

Неправильности, которые выявляются в действии отсыревшего пороха, происходят, как я полагаю, от различной степени усушки, которой он подвергается в стволе. Поскольку после первого и второго выстрелов ствол будет уже несколько нагрет, то порох, оставаясь некоторое время в канале, путем испарения потеряет часть влажности, которую он раньше имел. Так как и нагрев огнестрельного оружия, и время, в течение которого порох находился в оружии, являются весьма трудно определимыми обстоятельствами, то не приходится удивляться, что испарение и изменяющаяся от этого сила пороха едва ли могут быть определены. При этом вспомним еще, что часто в сухую погоду сила пороха при первом выстреле очень заметно уменьшается из-за холодного ствола и, возможно, находящейся в нем некоторой влажности.

Кроме того, то, что малое количество пороха при одинаковой степени влажности теряет в своей силе больше, нежели большее, происходит, без сомнения, от малой степени жáра, которым сопровождается воспламенение слабых зарядов, как уже было замечено выше, потому что точно такая же степень влажности причиняет бóльшие потери в более слабом огне, чем в более сильном.

Загрязнение, которое остается в стволе после стрельбы влажным порохом, как мы уже заметили, должно также происходить от уменьшения силы пламени при воспламенении. Так, если порох такого хорошего качества, что воспламеняется мгновенно и стремительно [138], то бóльшая часть его сгорает в золу, которая узнается по сероватому налету на всех предметах, находящихся перед дулом пушки. Но загрязнение, остающееся в стволе, происходит от тех частиц пороха, которые не могли полностью сгореть либо вследствие несовершенного смешения, либо вследствие холода стенок, к которым они прилегали. Так как влажный порох, в массе которого имеется влага, не дает столь сильного пламени, то в этом случае может быть совершенно истреблена и превращена в золу только незначительная часть пороха; следовательно, бóльшая часть его остается несгоревшей и образует загрязнение, которое наблюдается в пушке после выстрела.

ДОПОЛНЕНИЕ

В изложении этого Предложения было допущено как несомненный факт, что порох в сырую погоду впитывает в себя влагу из воздуха. Остается, таким образом, еще определить количество влаги, которое порох может в себя впитать; этот вопрос мы постараемся изложить на основании наших собственных опытов.

Я насыпал немного очень добротного пороха на белую бумагу, которая имела большое количество мелких отверстий, и держал бумагу над паром горячей воды, и нашел, что за полминуты порох прибавился в весе на $\frac{1}{50}$ часть.

Таким же образом я поставил другой опыт, но порох держал в парах дольше и затем нашел, что вес его увеличился на $\frac{1}{24}$ часть. Но в этом опыте уже несколько зерен слиплось, хотя форма их еще не изменилась.

Чтобы убедиться в том, способна ли влажность воздуха увеличить вес пороха, я взял около одной унции пороха и положил его на некоторое время в комнату, которая ежедневно протапливалась, и, после того как совершенно высушил его у огня, нашел, что он потерял $\frac{1}{100}$ веса. Вскоре затем я в той же комнате отдалил порох от огня, и он спустя по крайней мере 2 часа снова приобрел третью часть потери.

Так как часто воздух бывает очень влажным, как во время последнего опыта, и, кроме того, наружный воздух содержит больше влаги, чем воздух в закрытой комнате, в которой разведен огонь, то можно не сомневаться, что обычно в лучшем порохе имеется всего лишь двадцатая или тридцатая часть чистой воды; в этом, таким образом, нетрудно видеть причину указанного выше разнообразия в действиях пороха.

Однако я никогда не замечал, чтобы из-за влажности, которую порох вбирал из воздуха, сила его хоть сколько-нибудь уменьшалась после того, как он снова высушивался. Из приведенных в предшествовавшем Предложении опытов, читатель видел, как точно согласуются те из них, которые были произведены с одинаково сильными зарядами и при одинаковых условиях. В этих опытах, хотя и производившихся в различное время в течение трех летних месяцев, были, таким образом, предотвращены сухостью погоды все упомянутые здесь расхождения. Но когда с этим же порохом ставили опыты зимою в сырую погоду, я нашел, что, если употребляли тот же порох, что и летом, без предварительной просушки, действия его получались весьма непостоянными и много слабее. Однако если тот же заряд непосредственно перед употреблением хорошо просушивали, то я никогда не замечал ни малейшего падения его силы, и действия его были совершенно одинаковы с полученными до того летом. Если же по неосторожности порох будет выставлен в очень влажное место или если он содержит слишком много обыкновенной соли, то, пожалуй, впитанная им влага сможет совершенно растворить часть селитры, что представило бы такой вред, из-за которого порох уже никаким просушиванием не мог бы быть восстановлен. Если же соблюдать некоторую заботливость в хранении пороха и если селитра, из которой он состоит, будет хорошо очищена от обыкновенной соли, порох может обладать своей силой значительно дольше, чем это обычно полагают. Так, я слыхал, что порох, который хорошо хранился, по истечении 50 лет не подвергся никакой потере в своей силе.

При сушке отсыревшего пороха все же необходимо осторожно обращаться с ним, потому что есть такая степень жара, которая, хотя и недостаточна для воспламенения пороха, тем не менее расплавляет серу и тем разрушает состав пороха. Конечно, имеется еще выше этой такая степень жáра, при которой сера загорается и постепенно сгорает, не вызывая этим горения самого пороха. Это каждый может легко проверить на следующем опыте. Достаточно для этого взять кусок докрасна раскаленного железа и по мере того, как он остывает, бросать на него время от времени по нескольку зерен пороха; при этом увидим, что отдельные зерна из брошенных позднее спустя некоторое определенное время более уже не воспламеняются, а только светятся голубоватым огоньком, не исчезая. Иногда зерна начинают при этом загораться и, наконец, полностью воспламеняются, что обычно случается, когда несколько зерен расположится близко одно к другому, потому что, хотя пламени тех зерен в отдельности недостаточно, чтобы их воспламенить, все же из соединения двух и более подобных пламен получается такой жар, от которого эти зерна, наконец, воспламенятся полностью. Если при этой степени жара железа обсыпать его пороховыми зернами, то оно покроется голубоватым пламенем, которое часто длится довольно значительное время, прежде чем последует полное воспламенение пороха. Но когда я снял эти зерна перед самым воспламенением и рассмотрел их, я не мог заметить в них каких-либо изменений ни по их цвету, ни по их состоянию. А так как в такового рода зернах, в которых расплавлена сера, сила пороха уже потеряна, то очевидно, что порох при его просушивании может потерять свою силу от чрезмерно большого жара.

Значительные различия между отсыревшим и сухим порохом, рассмотренные в этом Предложении, достаточно показывают, как должны быть неточны и непостоянны все те практические приложения артиллерии, где на это обстоятельство не обращают никакого внимания, и как мало можно получить от опытов, в которых применялся такой порох.

Прежде чем закончить этот раздел, я выскажу одну мысль, которая как-то пришла мне в голову по этому вопросу. Так как вода, превращенная в пар, будет иметь, как известно, в десять раз бóльшую упругость, чем воздух, то я напал на мысль, что в определенных случаях влага, поглощенная порохом, может быть так соразмерена, что при воспламенении она превратится в пар и, следовательно, сила пороха из-за прибавления этой новой силы может быть настолько увеличена, насколько имеет место уменьшение в силе пламени. В том, что это может иногда действительно происходить, я убедился опытами одного современного автора, который упоминает, что выстрелы, произведенные из мортиры одинаковыми зарядами утром, когда еще было холодно, дали бóльшие дальности, чем при дневном тепле. Я же был убежден, что разница в плотностях воздуха, чем он хочет объяснить этот случай, не могла быть причиной этого. Но впоследствии я внимательно обследовал этот случай и не мог обнаружить, чтобы когда-нибудь степень влажности могла увеличить силу пороха. Так, из многочисленных опытов, поставленных мною с этой целью, я не мог заметить, чтобы эта сила сколько-нибудь превосходила среднюю величину, за исключением двух опытов; но и это увеличение, насколько я имею веские основания предполагать, произошло скорее от сдвига прибора. Впрочем, если упругость водяного пара столь велика, как это вообще полагают (вопрос, впрочем, еще неразрешенный), то могло случиться, что некоторое увеличение силы произошло вследствие воспламенения очень большого количества пороха.

ЗАМЕЧАНИЕ

В этом Предложении автором затронуто очень важное обстоятельство: причина, по которой порох в одном случае обладает гораздо меньшей силой, чем в другом. Это зависит от количества влаги, которую порох поглощает из воздуха. Здесь представляются собственно два обстоятельства: во-первых, сколько в каждом случае порох содержит в себе влаги, и, во-вторых, насколько будет уменьшена его сила от степени смешанной с ним влаги. Первое узнается взвешиванием. Так, если сначала совершенно высушить определенное количество пороха и точно взвесить, а затем тщательно снова замечать вес этого количества при каждом изменении воздуха, то приращение веса всегда покажет, сколько влаги содержится в порохе. Так как влажность воздуха может быть определена довольно точно гигрометром, то можно произвести полезные опыты, взвешивая определенное количество пороха при различных степенях влажности, которые укажет гигрометр. Таким образом узнали бы, сколько порох содержит в себе влаги при каждом состоянии воздуха, которое будет показано гигрометром. Но при том изменении, которое происходит в воздухе, надо порох оставлять на воздухе в течение значительного времени с тем, чтобы он всегда мог принять ту степень влажности, какую имеет воздух, потому что легко понять, что если влажность воздуха убывает, то та, которая до того уже втянута в поры, не так скоро может выйти из них испарением. При проведении таких опытов встретились бы, по-видимому, большие трудности, но тем не менее подобные опыты принесут весьма большую пользу. Ввиду того, что плохой порох вбирает, как замечает автор, в себя много больше влаги воздуха, чем хороший, то этим способом можно определять добротность пороха, потому что бесспорно лучше тот порох, который поглотил наименьше влаги.

Когда же этим способом найдут, сколько влаги содержит в себе порох в данное время, то легко могут узнать по предложенному автором способу, насколько из-за этого будет уменьшена сила, и, таким образом, будут в состоянии определить силу пороха исключительно только теоретически более точно, чем было возможно до настоящего времени. Чтобы показать уменьшенную силу отсыревшего пороха, автор приводит здесь замечательный пример, в котором влажным порохом пуле была сообщена скорость только 1200 футов в секунду, тогда как сухим порохом при тех же самых обстоятельствах пуле была сообщена скорость 1700 футов в секунду. Хотя автор не определяет, сколько в этом случае влаги было смешано с порохом, но если мы примем, что влага составляла тридцатую часть общего веса, то можно сказать, что, если порох смешан с тридцатой частью воды, его сила уменьшится на $\frac{5}{17}$. Если, кроме того, уменьшение силы пороха было бы всегда пропорционально смешанной с ним влаге, чего, правда, нельзя ожидать, то мы могли бы отсюда найти, насколько сила пороха уменьшится при другом количестве смешанной с ним влаги.

Так, предположим, что смешанная с порохом влага составляет $\frac{1}{n}$ часть веса; тогда $\frac{1}{30}$ будет относиться к $\frac{1}{n}$, как $\frac{5}{17}$ к искомой потере силы пороха, которая, следовательно, равна $\frac{150}{17n}$, или почти $\frac{9}{n}$. Если поэтому влага составляет только сотую часть пороха, то сила его уменьшится на $\frac{1}{11}$ часть; эта потеря, однако, была бы много больше, чем показывают проведенные автором опыты. Действительно, как вычисляет автор, порох, который долгое время находился в теплой комнате, терял от усушки еще $\frac{1}{100}$ часть своего веса; значит, должна была, вероятно, иметь место большая разница и у пороха, с которым были произведены упомянутые опыты, которые, однако, все же, несмотря на это, довольно точно согласуются с теорией автора.

Из всего, что было тут сказано, легко видеть, что различный вес и плотность воздуха не могут вызвать сколько-нибудь заметное изменение в действии пороха. Правда, можно думать, что так как тяжелый воздух сильнее, чем более легкий, давит на ядро, движущееся в канале, то скорость в первом случае будет заметнее уменьшена, чем во втором. Однако, так как мы выше показали, что никакой заметной разницы в скорости пули не было обнаружено, если полностью пренебречь противодействием воздуха, то столь же мало заметную разницу может произвести и различный вес его.

ОДИННАДЦАТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить скорость, с которой возникающее при воспламенении пороха пламя распространяется под действием своей упругой силы, если в пушку впереди пороха не вложено ни ядро, ни какое-либо другое тело

Если бы при воспламенении все вещество пороха превратилось в тонкую упругую материю, то по ее упругой силе, которая была определена выше, и по ее плотности, которая тоже известна, можно было бы легко определить степень скорости, с которой она начинает расширяться, а отсюда затем и последующее увеличение скорости, достигаемое в канале пушки. Но после того как мы доказали, что эта тонкая упругая материя, в которой содержится сила пороха, составляет только около $\frac{3}{10}$ от всего вещества пороха, то после воспламенения остаются прочие $\frac{7}{10}$, смешанные с тонкой упругой материей, и потому они должны своей тяжестью задерживать ее действие. К тому же эти две различные материи, на которые разлагается порох, не так тесно связаны между собою, чтобы совершать совместно одинаковое движение; твердые части будут продвигаться много медленнее, чем тонкие; многие из них даже остаются в канале позади, как легко видеть по загрязнению, которое находится в ружейных стволах после того, как они были часто использованы.

Эта неоднородность, которой подчинено расширительное движение пламени, обязывает нас в целях точного определения этого движения прибегнуть к опыту и единственно на этом обосновать наше исследование.

Опыты, поставленные с этой целью, были двух видов: первые были произведены со стволом, который мы выше обозначили буквой A [139]. Он был заряжен 12 драхмами пороха с легким пыжом из пакли, и после того как его дуло было установлено в 19 дюймах от серединной точки маятника, описанного в восьмом Предложении, из него в этом положении было выстрелено и замечено, что маятник от дуновения только пламени откачнулся, описав дугу, хорда которой составила 13,7 дюйма. Если мы теперь примем, что в маятник ударило все вещество пороха и что все части двигались с одинаковой скоростью, то получим, что его скорость должна была составить приблизительно 2650 футов в секунду. Это, следовательно, наименьшая скорость, которую можно приписать пороху при его расширении. Но если мы положим, что тонкие упругие части достигают при этом расширении значительно бо́льшей скорости, чем твердые, что, несомненно, соответствует действительности, то найденная здесь общая скорость должна быть увеличена для тонких частиц пороха, а для твердых частиц должна быть уменьшена. И так как, по всей видимости, в течение того времени, как пламя проходило пространство протяжением в 19 дюймов, была потеряна значительная часть скорости, я поставил следующие опыты, в которых не встретились эти затруднения.

Я закрепил на маятнике ствол, обозначенный буквой A, таким образом, что его ось была горизонтальна и в то же время перпендикулярна к плоскости доски, или, что то же, ствол был расположен в плоскости качания маятника. Точка, где ось ствола встречала маятник, была на 6 дюймов выше серединной точки доски, и вес ствола с железными частями, которые были употреблены для его укрепления, был 11 ½ фунтов. В этом положении ствол был заряжен 12 драхмами пороха без пули и пыжа и порох был только прибит шомполом. После произведенного выстрела маятник поднялся вверх по дуге, хорда которой оказалась равной 10 дюймам. Если теперь это действие привести к одинаковой силы удару в серединную точку маятника и вычесть то, что мог произвести вес ствола, то найдем, что маятник должен был подняться по дуге, хорда которой достигла 14,4 дюйма.

Этот же опыт был повторен другой раз, и хорда дуги, по которой поднялся маятник, была найдена в 10,1 дюйма, что, приведенное, как и выше, дало 14,6 дюйма.

Чтобы найти разницу в скорости различных частей пламени, я снова зарядил прежний ствол 12 драхмами пороха, который прибил пыжом из пакли весом в 1 драхму. Я представил себе, что этот пыж, по причине его легкости, достиг бы мгновенно той же степени скорости, с которой расширялась бы тонкая часть пороха, если бы перед ней не находилось никакого пыжа, и, таким образом, я нашел, что хорда восходящей дуги действительно увеличилась на 12 дюймов, которые по вышеуказанному приведению к серединной точке маятника составили 17,3 дюйма. Так как из двух первых опытов средняя длина хорды была 14,5 дюйма, то в настоящем случае, поскольку от прибавления 1 драхмы материи, одинаково движущейся с быстрейшими частями пламени, сила должна быть увеличена, хорда восходящей дуги возросла на 2,8 дюйма. Следовательно, скорость, сообщенная этой драхме материи, была 7000 футов в секунду.

Возможно, против этого результата будут возражать, что увеличение дуги, которую описал в этом случае маятник, произошло не только по причине сообщенного пыжу движения, но что увеличению дуги немало способствовало крайнее уплотнение пороха, отчего воспламенилась бо́льшая его часть. Однако если бы было верно, что при отсутствии пыжа воспламеняется не весь порох, а только часть его, то не было бы заметно, что при зажжении без пыжа различных количеств пороха хорды восходящей дуги будут уменьшаться или увеличиваться в таком же отношении, в каком будут увеличиваться или уменьшаться количества пороха. А это отношение получается довольно точно, как я нашел многими опытами. Так, когда я зарядил 9 драхм пороха, то нашел хорду восходящей дуги равной 7,3 дюйма, а при заряде в 12 драхм хорда была длиной от 10 до 10,1 дюйма. Но когда я взял заряд в 3 драхмы, эта хорда оказалась равной только 2 дюймам; эта длина, правда, на ½ дюйма меньше, чем требует упомянутое выше отношение, но по этому поводу можно было бы указать на два других важных обстоятельства.

Здесь мы имеем еще более веское доказательство того, что весь порох воспламеняется сразу, даже если перед зарядом не положен пыж. Оно основано на том, что часть движения маятника, происходящая только от расширения пороха, когда впереди пороха находится пуля, не станет больше, чем когда воспламенено точно такое же количество пороха, не уплотненного пыжом. Мы видели, что хорда дуги, по которой маятник будет отброшен единственно только упругой силой пороха, была 10 или 10,1 дюйма; но когда я зарядил этот ствол обычным образом, пыжом и пулей, я нашел хорду упомянутой дуги один раз $22\frac{1}{4}$, другой раз $22\frac{7}{8}$ дюйма длиной, среднее из которых равно 22,56. Если теперь мы допустим, что пуля с пыжом ударила как раз в то место, где ствол прикреплен к маятнику, и с той же самой скоростью, какую она получила у дульного отверстия ствола, то маятник будет этим понужден к движению по дуге, хорда которой приблизительно равна 12,3 дюйма, что может быть выведено из приведенных опытов и, согласно правилам, также из веса маятника, веса пули и их скорости в точке, где маятник получил удар. Если, следовательно, это число 12,3 вычесть из ранее найденного 22,56, то остаток 10,26 покажет примерно хорду дуги, по которой маятник получил движение единственно только от силы пороха, когда с ним была вложена и пуля. Это число 10,26 незаметно отличается от 10,1, т. е. от хорды восходящей дуги, когда мы выстрелили в маятник тем же количеством пороха без пули и пыжа.

Эта скорость в 7000 футов в секунду, котурую мы относим к действующей части пламени, не слишком велика, что вполне ясно видно из приведенного выше 38-го опыта, потому что в нем пуля была выброшена со скоростью 2400 футов в секунду. Если бы пламя распространялось с несколько бо́льшей скоростью, то должны были бы обнаружить заметное уменьшение силы при таком быстром движении пули, что, однако, не имело места.

Следовательно, в этом случае степень скорости, с которой порох расширяется позади пули без потери заметной части своей силы, должна быть гораздо меньше той, с которой расширялся бы один только порох, если бы пули вовсе не было.

В столь удивительной скорости, с которой распространяется пламя от воспламененного пороха, состоит главным образом столь же совершенно необычайная его сила, которой он превосходит все другие как древние, так и новые открытия в военном деле. Правда, если принимать во внимание только количество движения, которое сообщается движущимся телам и которое обычно измеряют их весом, умноженным на скорость, то мы должны согласиться с тем, что многие древние военные машины были способны произвести значительно большее движение, чем наши современные тяжелые пушки и мортиры. Однако огромная скорость, с какой в состоянии теперь бросать тела с помощью пороха, не может идти ни в какое сравнение с теми скоростями. Причина этого различия состоит в том, что хотя древние и могли по желанию увеличивать метательную силу посредством груза или пружин и скрученных канатов, однако увеличение силы одновременно увеличивало и массу, которая должна была быть приведена в движение, а с увеличением силы прибавлялась в весе и та часть машины, которая должна была передать движение. Из этого необходимо следует, что действие силы состояло не только в сообщении движения метаемым телам, но что бóльшая ее часть была употреблена на движение тех частей самой машины, с которыми связана сила, чтобы привести их в состояние следовать с бросаемым телом, непрерывно толкая его на всем протяжении действия силы. Из этих соображений ясно, что хотя древние машины могли бросать огромные тяжести, однако скорость последних была очень мала по сравнению с той, которая теперь может быть сообщена силой пороха ядрам и другим телам.

Поэтому во всех случаях, где нужно очень быстрое движение, наши современные машины имеют большое преимущество перед древними. Но там, где не требуется очень быстрое движение, можно даже теперь с немалой пользой применять древние машины. Поэтому древние машины еще заслуживают полного внимания со стороны военных мыслителей, обладающих достаточной способностью всякий вопрос по своей специальности приводить к верному и настоящему содержанию и не обращаться к предрассудкам своего времени.

Изложенные в этом Предложении определения могут объяснить также силу петард, так как их действие основано единственно только на силе пламени. Отсюда видно также, что посредством такой машины, если она хорошо изготовлена, некоторое количество пороха может произвести такое же большое действие, как ядро, которое вдвое тяжелее и движется со скоростью от 1400 [[140]] до 1500 футов в секунду.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Мы уже выше заметили, что скорость, сообщаемая пуле порохом, происходит не только от его упругой силы, но что должна быть принята в рассмотрение и та скорость, с которой пулю продвигает пламя. Очевидно, что, как бы ни была велика принятая сила пороха, пуля все-таки не может получить от нее степень скорости, бо́льшую той, с которой распространялось бы само пламя пороха, если бы не было пули. Эта степень скорости никогда не может быть сообщена пуле, потому что порох действует на пулю лишь постольку, поскольку она движется медленнее, чем двигалось бы само пламя, если бы в этот момент пуля исчезла. Так как сама пуля сопротивляется движению в силу своей инерции, а также встречает, кроме того, еще различные внешние препятствия, то нетрудно видеть, что она никогда не сможет достигнуть той степени скорости, с которой распространяется само пламя. Отсюда, кроме того, видно, что высшая степень скорости, какую порох может сообщить пуле, всегда должна быть тем меньше той, которую может достигнуть одно только пламя, чем тяжелее сама пуля и чем больше внешнее сопротивление. По этой причине вопрос, выдвигаемый автором в настоящем Предложении, представляет большую важность, потому что прежде чем он не будет решен, не может быть определена действительная скорость пули. Правда, автор считает очень легким разрешение этого вопроса и только в неоднородности частей, на которые разлагается порох при воспламенении, видит такие большие трудности, что полностью оставляет в стороне теорию и обращается только к опытам. Хотя мы не сомневаемся в способностях автора решать подобные вопросы, но все же думаем, что в этом вопросе он встретил бы немало трудностей, даже если не было бы упомянутого обстоятельства. Этот вопрос требует самых глубоких знаний природы и законов движения жидких тел; и еще далеко до того, чтобы мы могли решать подобные задачи с помощью вычислений.

Мощным развитием математических наук мы обязаны двум знаменитейшим ученым Иоганну и Даниилу Бернулли, из которых последний первым изложил этот предмет в своем несравненном труде по гидродинамике и все сочинение обосновал большей частью на законе сохранения так называемых живых сил. Его отец, г-н профессор Иоганн Бернулли в Базеле весьма остроумным способом пролил свет на природу этого движения, основываясь на первых началах механики; это сочинение находится как в IX томе трудов императорской Академии в Санкт-Петербурге, так и в Собрании сочинений этого великого человека, изданном в Лозанне несколько лет тому назад. Так как эти важные открытия еще не были известны нашему автору, когда он писал свою книгу, то трудно представить, что он так легко мог бы справиться с разрешением этого вопроса, хотя и склонен считать его легким. Наибольшая трудность, однако, состоит даже не в том, что неоднородные части, на которые разлагается порох при воспламенении, приводятся также в неодинаковое движение; но если бы даже эта неоднородность не имела места, то было бы еще более трудно определить различные силы, которые действуют на частицы. Но если главное внимание мы обратим на то, что в каждом положении, в котором находится выделившийся из пороха воздух, не все части при расширении могут иметь одинаковую степень упругости, следовательно, и одинаковую степень плотности, то в вычислениях возникают такие трудности, что и вышеупомянутые методы господ Бернулли едва ли достаточны, чтобы их преодолеть. Поскольку, как мы выше уже упоминали, пока продолжается расширение, движение каждой частицы ускоряется, каждая частица будет сжата сзади сильнее, чем спереди; следовательно, упругая сила позади всегда будет больше, чем впереди. Если, таким образом, перед порохом находится пуля, то после воспламенения она все время будет проталкиваться только теми малейшими силами, которыми обладают частицы пламени, так как на нее действуют своей упругостью только передние частицы. Но так как частицы этой выделенной из пороха упругой материи настолько тонки, что для приведения их в движение требуется весьма незначительная сила, то и неодинаковость в упругости может также быть незаметной; поэтому мы не слишком удалимся от истины, если примем, что в каждый момент упругость распределена по всей тонкой материи равномерно. А этим устраняются наибольшие трудности, и вопрос может быть разрешен следующим образом (рис. 9).

Так как тонкую упругую материю, выделившуюся из пороха при воспламенении, мы можем рассматривать

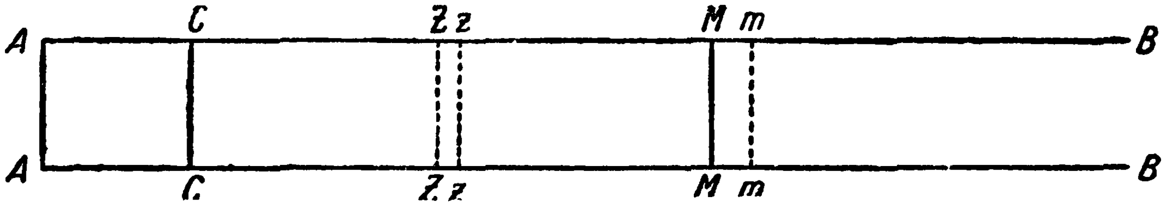

Рис. 9.

как чрезвычайно сильно сжатый воздух, то мы допустим, что в первый момент после воспламенения в пустом цилиндре $AABB$ объем $AACC$ заполнен таким сжатым воздухом. Пусть теперь длина всего этого цилиндра $AB=a$, ширина его $=cc$ и длина $AC=b$; а сжатый в этом объеме AC воздух в m раз плотнее, чем естественный воздух; тогда, по общему правилу, его упругость будет тоже в m раз больше упругости естественного воздуха. Если мы, следовательно, примем высоту ртути в барометре равной h, а ее вес равным упругости естественного воздуха, то упругость естественного воздуха будет выражена весом воздушного столба высотой 12 000 h, следовательно, упругость сжатого воздуха в объеме AC будет равна давлению столба природного воздуха высотой $12\,000mh$. Допустим теперь, что этот воздух спустя некоторое время уже расширился до MM, и обозначим длину этого объема $AM=x$; тогда плотность распространившегося в этом объеме воздуха будет относиться к первоначальной плотности в AC, как AC к AM, т. е. как b к x, и, следовательно, она будет в $\frac{mb}{x}$ раз больше плотности естественного воздуха, и его упругость будет равна весу столба естественного воздуха высотой

$$\frac{12\,000mbh}{x}.$$

Если мы теперь примем, что этот воздух расширяется единственно только под действием своей силы и не будет иметь перед собою ни пули, ни пыжа, то скорость, с которой происходит это расширение, может быть, следовательно, определена в каждый момент и в каждом месте. Пусть $\sqrt{v}$ — скорость, с которой самый передний слой MM движется к BB таким образом, что v обозначает высоту, с которой тяжелое тело при падении приобретает ту же скорость, с которой движется слой MM. Так как мы приняли, что сжатый воздух непрерывно равномерно расширяется, то каждый другой слой ZZ будет двигаться тем медленнее, чем он ближе к дну AA. Если мы, следовательно, обозначим это удаление $AZ=z$, то скорость в ZZ будет $\frac{z\sqrt{v}}{x}$, и в то время как передний слой MM пройдет бесконечно малый путь $Mm=dx$, слой ZZ пройдет путь $\frac{z\,dx}{x}$. Но так как скорость будет возрастать, то мы по правилу дифференциального исчисления должны положить, что в то время как MM пройдет Mm, высота v возрастет на dv или сама скорость $\sqrt{v}$ на $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$, в течение того же времени скорость слоя ZZ возрастет на $\frac{z\,dv}{2x\sqrt{v}}$, и высота $\frac{zzv}{xx}$, которой эта скорость достигнет, увеличится на $\frac{zz\,dv}{xx}$. Дадим теперь слою ZZ толщину $Zz=dz$ таким образом, что его объем будет $cc\,dz$, и так как воздух в этом положении в $\frac{mb}{x}$ раз плотнее, чем естественный, то слой $ZZzz$ с точки зрения массы будет равен такому же слою естественного воздуха, высота которого $=\frac{mb\,dz}{x}$. Так как движение этого слоя будет возрастать, а никакое этого рода возрастание не может быть произведено без силы, то мы допустим, что сила, под действием которой будет возрастать скорость слоя $ZZzz$, равна весу столба естественного воздуха одинаковой плотности, высота которого равна 12 000 p. Так как мы тут положили, что в то время как этот слой пройдет путь $\frac{z\,dx}{x}$, его скорость, определяемая высотой $\frac{zzv}{xx}$, возрастет на $\frac{zz\,dv}{xx}$, то по основным началам механики это приращение $\frac{zz\,dv}{xx}$ будет относиться к пути $\frac{z\,dx}{x}$, как действующая сила 12 000 ccp к весу слоя $\frac{mbcc\,dz}{x}$, т. е.

$$\frac{zz\,dv}{xx} : \frac{z\,dx}{x} = 12\,000ccp : \frac{mbcc\,dz}{x},$$

откуда получаем величину силы, требуемой для сообщения движения этому слою

$$12\,000ccp = \frac{mbcczdz\,dv}{xx\,dx} = \frac{mbcc\,dv}{xx\,dx}\,z\,dz.$$

Так как такая сила потребуется для бесконечно малого слоя $ZZ\,zz$, то интеграл от найденного выражения, а именно $\frac{mbcc\,dv}{xx\,dx}\cdot\frac{zz}{2}$, выразит силу, которая необходима для ускорения воздуха, находящегося в объеме $AAZZ$, а если мы теперь положим $z = x$, то получим полную силу, от которой происходит ускорение всего воздуха, заключенного в объеме $AAMM$, и она будет равна $\frac{mbcc\,dv}{2dx}$. Эта сила, если нет никакого сопротивления, будет равна упругой силе, которой обладает этот сжатый воздух, что выражается весом столба естественного воздуха высотой $\frac{12\,000mbh}{x}$ и основанием cc; таким образом, мы получим следующее уравнение:

$$\frac{dv}{2dx} = \frac{12\,000h}{x}, \text{ или } dv = \frac{24\,000h\cdot dx}{x},$$

интеграл которого дает: $v = 24\,000h\cdot l\,\frac{x}{b}$.

Если мы теперь вместо x подставим $AB=a$, то получим высоту, которая дает точно ту скорость, с которой сжатый в нашем полом цилиндре воздух будет вырываться через отверстие BB; эта высота равна $24\,000h\cdot l\,\frac{a}{b}$. Причем заметим, что здесь для $l\,\frac{a}{b}$ следует брать не обыкновенные логарифмы, а так называемые гиперболические логарифмы. Но если желательно пользоваться обыкновенными, следует их умножить на число 2,30258509, и получим $v=55\,261\,hl\frac{a}{b}$. Если же хотим знать, сколько футов в секунду содержит эта скорость, нужно длину h выразить в тысячных частях рейнского фута и квадратный корень из v разделить на 4. Если возьмем $h=30$ английским дюймам, то в рейнских мерах $h=2425$, и искомая скорость содержит $\frac{1}{4}\sqrt{55\,261\cdot 2425\cdot l\,\frac{a}{b}}$ рейнских футов в секунду. В первом примере, приведенном автором, было $a=45$ и $b=2\frac{5}{8}$, следовательно, $\frac{a}{b}=\frac{360}{21}=\frac{120}{7}$; в этом случае, когда впереди пороха не вложены ни пуля, ни пыж, а также отсутствует внешнее сопротивление, пламя должно вырываться из ствола со скоростью, с которой может проходить в секунду столько футов, сколько показывает число

$$\frac{1}{4}\sqrt{55\,261\cdot 2425\cdot 1{,}23408}\ [141].$$

Так как здесь

$$\begin{array}{rr}
 & l\,55261 = 4{,}7424187 \\
 & l\,2425 = 3{,}3847117 \\
 & l\,1{,}23408 = 0{,}0913435 \\
\hline
 & 8{,}2184740 \\
\text{взять половину} & 4{,}1092370 \\
\text{вычесть } l\,4 = & 0{,}6020600 \\
\hline
 & 3{,}5071770,
\end{array}$$

то эта скорость составит 3215 футов в секунду. Это число более чем наполовину меньше того, которое автор вывел из опытов; мы здесь не рассматривали ни противодавления воздуха, ни его сопротивления, которые должны бы еще более снизить эту скорость. Поскольку противодавление воздуха равно весу ртути в барометре, а следовательно, весу воздушного столба высотой $12\,000h$, а сопротивление равно весу воздушного столба, высота которого равна v, то общее сопротивление будет

$$(12\,000h+v)\,c^2,$$

которое в вышеприведенном вычислении должно быть вычтено из действующей силы

$$\frac{12\,000mbcch}{x}.$$

Отсюда мы получаем уравнение

$$\frac{mb\,dv}{2dx}=\frac{12\,000mbh}{x}-12\,000h-v,$$

которое преобразуется в следующее:

$$dv+\frac{2v\,dx}{mb}=\frac{24\,000h\cdot dx}{x}-\frac{24\,000h\cdot dx}{mb}.$$

Это уравнение будет интегрируемо, если его умножить на $e^{\frac{2x}{mb}}$, где e обозначает число, гиперболический логарифм которого равен 1, или $e=2{,}718281828$; а самый интеграл будет

$$e^{\frac{2x}{mb}}v=24\,000h\int\frac{e^{\frac{2x}{mb}}\,dx}{x}-12\,000\,h\cdot e^{\frac{2x}{mb}}.$$

Если m обозначает такое большое число, что дробь $\frac{2x}{mb}$ будет очень мала, то приблизительно будет

$$e^{\frac{2x}{mb}}=1+\frac{2x}{mb}$$

и следовательно,

$$\int \frac{e^{\frac{2x}{mb}}\,dx}{x} = l\frac{x}{b} + \frac{2x}{mb} - \frac{2}{m},$$

потому что этот интеграл должен исчезнуть, если $x = b$. Отсюда получаем:

$$\left(1 + \frac{2x}{mb}\right)v = 24\,000h \cdot l\,\frac{x}{b} + \frac{24\,000\,h \cdot x}{mb} - \frac{24\,000h}{m}.$$

Умножив это на $\dfrac{1}{1+\dfrac{2x}{mb}}$ или на $1 - \dfrac{2x}{mb}$, и отбрасывая слишком малые члены, получим:

$$v = 24\,000h\left(1 - \frac{2x}{mb}\right) l\,\frac{x}{b} + \frac{24\,000hx}{mb} - \frac{24\,000h}{m}.$$

Чтобы определить теперь скорость, с которой пламя вырывается через дульное отверстие BB, подставим $x=a$, и чтобы можно было пользоваться обыкновенными логарифмами, умножим найденные логарифмы на 2,30258509, откуда получим:

$$v = 55\,261h\left(1 - \frac{2a}{mb}\right) l\,\frac{a}{b} + \frac{24\,000ha}{mb} - \frac{24\,000h}{m}.$$

Здесь, как мы видели раньше, $h=2425$ тысячных долей рейнского фута, и если мы с автором примем $m=1000$, а для предыдущего случая положили $\frac{a}{b} = \frac{120}{7} = 17{,}1428$, то будет $l\frac{a}{b}=1{,}2340832$, а следовательно, $v=160\,646\,077$, и скорость будет составлять в секунду 3168 футов, что не очень отличается от того, что мы получили раньше, не принимая во внимание сопротивления воздуха.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Если опыты автора и сделанные из них выводы правильны, то найденная здесь теоретическим путем скорость слишком мала. Но она получилась бы еще значительно меньшей, если бы мы учли, соответственно действительности, что не весь порох сразу воспламеняется в первый момент, и к тому же еще приняли бы в рассмотрение твердые частицы пороха. Тогда скорость в приведенном примере теоретически получилась бы не более 2000 футов в секунду, и никакая пуля не могла бы выбрасываться с такой большой скоростью, какая была найдена опытами автора. Даже если принять, что весь порох воспламеняется сразу, а также, что твердые частицы не препятствуют движению тонкой материи, и то еще скорость пули получается много меньше, чем ее определяют в действительности. Чтобы представить себе это яснее, мы должны только в прежние вычисления, кроме частиц сжатого воздуха, которые могут быть приведены в движение, ввести в рассмотрение еще и пулю. Допустим, следовательно, что впереди сжатого воздуха в MM находится еще пуля, вес которой равен воздушному столбу с основанием cc и высотой k. Так как эта пуля имеет одинаковую скорость с передним слоем MM, то приняв, что она приводится в движение силой, равной весу столба естественного воздуха высотой P, по основным законам движения мы получим следующее уравнение:

$$k\,dv = P\,dx, \quad \text{и следовательно,} \quad P = \frac{k\,dv}{dx}.$$

Эта сила должна быть прибавлена к силе $\frac{mbcc\,dv}{2dx}$, которая требуется для ускорения самого пламени, и тогда получим полную, требуемую для ускорения силу

$$\frac{mbcc\,dv}{2dx} + \frac{kcc\,dv}{dx}.$$

Эта сила должна быть равна упругости, которой будет поддерживаться движение, если мы пренебрежем сопротивлением воздуха, что не может вызвать заметной ошибки. Таким образом, после того как мы разделим полученное выражение на cc, получим следующее уравнение:

$$\frac{mb\,dv}{2dx}+\frac{k\,dv}{dx}=\frac{12\,000mbh}{x}$$

и

$$v=\frac{24\,000mbh}{mb+2k}\,l\,\frac{x}{b}.$$

Отсюда видно, что скорость пули всегда должна быть много меньше, чем скорость одного только пламени, которая была выражена найденным выше уравнением

$$v=24\,000hl\,\frac{x}{b}.$$

Следовательно, скорость пули относится к скорости одного только пламени, которой оно достигло бы при одинаковых обстоятельствах, как $\sqrt{mb}$ к $\sqrt{mb+2k}$, или как 1 к $\sqrt{1+\frac{2k}{mb}}$. Теперь, так как в приведенном ранее примере скорость одного только пламени составила 3168 футов в секунду, то скорость пули, брошенной при тех же условиях, будет составлять только $\frac{3168}{\sqrt{1+\frac{2k}{mb}}}$ футов в секунду. Но здесь $m=1000$, $b=2\frac{5}{8}$ дюйма, и так как пуля свинцовая, то $k=4900$ дюймов; таким образом,

$$\sqrt{1+\frac{2k}{mb}}=\sqrt{\frac{12\,425}{2625}},$$

и, следовательно, достигнутая скорость пули будет равна 1456 футов в секунду. Эта скорость много меньше скорости, найденной в опыте при таких же условиях. Но она оказалась бы еще меньше, если бы мы ввели в рассмотрение твердые частицы пороха, а также учли бы, что не весь порох сразу воспламеняется. Из всего этого теперь вполне ясно видно, что предлагаемая автором теория о силе пороха никак не может согласоваться с его собственными опытами и что в порохе должна скрыто находиться значительно бо́льшая сила, чем полагает автор. Таким образом, чем дальше, тем больше мы должны согласиться с мнением глубокомыслящего г-на Даниила Бернулли, который в своей Hydrodynamica утверждает, что начальная упругость находящейся в порохе тонкой материи почти в 10 000 раз больше, чем упругость естественного воздуха. А так как порох менее чем в 1000 раз тяжелее воздуха, и только $\frac{3}{10}$ от него составляет сжатый воздух, то отсюда необходимо следует, что при таком чрезвычайно сильном сжатии воздуха его упругость возрастает в большем отношении, чем плотность. Если не признать этого, невозможно будет обнаружить в порохе ту силу, которая, судя по опытам, действительно в нем находится. Таким образом, полностью опровергается основное положение автора, уже ранее подвергнутое нами сомнению, а именно то, что упругость воздуха всегда пропорциональна его плотности: это положение может иметь место только при условии, что воздух не будет чрезмерно сжат. Доказательство, которое приводит автор, также относится только к этому случаю, как было упомянуто в приведенном там Замечании. Поэтому, чтобы объяснить действия пороха, должно обратиться к совершенно другому учению о природе воздуха. По этому вопросу до сих пор нет никакой известной теории о воздухе более подходящей, чем та, которую я дал во 2-м томе Комментариев Петербургской Академии [142], где из сложившегося у меня представления о состоянии воздуха я пришел к следующему. Так как воздух состоит из материи, то мне ясно, что он не может сжиматься безгранично. Поэтому должна существовать такая степень плотности, которую нельзя переступить при сжатии воздуха. Это, следовательно, высшая степень плотности воздуха q, значительно больше, чем плотность естественного воздуха; и если это число q принять за известное, то я нашел, что упругость естественного воздуха будет относиться к упругости воздуха (который в m раз плотнее, чем естественный), как

$$\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2} \text{ к } \sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}.$$

Так как упругость естественного воздуха будет выражена ртутным столбом h, то упругость воздуха, когда он в m раз более плотный, будет представлена ртутным столбом, высота которого равна

$$\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}}\cdot h.$$

Но так как q очень велико и, по всей видимости, число бо́льшее, чем m вообще может быть, то в нашем вопросе с достаточной точностью будет

$$\sqrt[3]{(q-1)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2}{3\sqrt[3]{q}}-\frac{1}{9q\sqrt[3]{q}}$$

и

$$\sqrt[3]{(q-m)^2}=\sqrt[3]{q^2}-\frac{2m}{3\sqrt[3]{q}}-\frac{mm}{9q\sqrt[3]{q}}.$$

Таким образом, упругость воздуха, если он в m раз плотнее естественного воздуха, будет, следовательно, такова:

$$\frac{6mq+mm}{6q+1}h=\left[m+\frac{m(m-1)}{6q}\right]h,$$

или упругость естественного воздуха относится к упругости воздуха (который в m раз плотнее естественного), как 1 к $m+\frac{m(m-1)}{6q}$. Вместе с тем из этой формулы вытекает общее правило, что если m не чрезмерно большое число, то упругость всегда довольно точно пропорциональна плотности. Но если число m становится столь большим, что дробью $\frac{m(m-1)}{6q}$ нельзя пренебречь, то должно быть заметным отклонение общего правила от действительности. А это зависит от величины числа q, которая нам неизвестна; мы могли бы ее определить, если бы знали хотя бы только в одном случае, насколько [143] общее правило отклоняется от действительности. Так как теперь мы из приведенных оснований видим, что если естественный воздух будет сжат так, что его объем станет в 244 раза меньше, как это имеет место в порохе, то его упругость должна возрасти много больше, если даже не принимать во внимание возрастание, происходящее от нагревания [144], откуда следует, что число $6q$ будет много меньше, чем $244 \cdot 243$. Упругость упоминаемого сжатого воздуха должна быть в 300 раз больше упругости естественного воздуха, так что будет

$$56 = \frac{244 \cdot 243}{6q},$$

следовательно,

$$q = \frac{244 \cdot 243}{336}$$

и, таким образом, меньше чем 244, что идет вразрез с нашими обычными представлениями. Но надо заметить, что если число m не слишком мало по сравнению с q, то приведенное выше приближение не может иметь места; поэтому в таких случаях следует применять нижеследующее правило, а именно: упругость естественного воздуха будет относиться к упругости некоего в m раз более плотного воздуха, как

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{q}} + \frac{1}{9q\sqrt[3]{q}} \text{ к } \sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2},$$

т. е. как

$$6q + 1 \text{ к } 9qq - 9q\sqrt[3]{q(q-m)^2}.$$

Если, следовательно, $m=244$, то упругость более не может возрастать, и наибольшее значение будет $q=244$. В этом случае упругость сжатого в порохе воздуха была бы, следовательно, $\frac{9qq}{6q+1}$, т. е. в 366 раз больше, чем упругость воздуха в его естественном состоянии. И если при этом происходит нагревание, как это определял наш автор, то упругость освобождающегося из пороха при воспламенении нагретого воздуха была в 1500 раз больше, чем упругость естественного воздуха.

Хотя кажется, что это наибольшая сила, какая может быть приписываема пороху, но все же легко видеть, что она все еще недостаточна, чтобы объяснить действие, найденное опытом.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Для того чтобы прийти к точному знанию содержащейся в порохе силы, вспомним, во-первых, что находящийся в порохе воздух, после того как он примет одинаковую степень плотности с естественным, заполнит объем в 244 раза больший, чем до того занимало все вещество пороха; но сжатый воздух составляет приблизительно только третью часть пороха. Поэтому воздух в порохе до воспламенения должен быть еще более сжат приблизительно в три раза или, по автору, в $\frac{10}{3}$ раз, и следовательно, в 813 раз должен быть более плотным, чем естественный воздух. В таком очень сжатом состоянии находится, следовательно, воздух, заключенный в селитре, и так как приведенное выше значение q не может быть меньше, чем 813, то представляется наиболее соответствующим действительности, что q равно 813 или круглым числом $q=800$. Если только эта степень плотности воздуха постоянна во всей селитре, то можно ожидать, что это есть также и наибольшая степень сжатия. Отсюда теперь легко понять, как огромны силы, потребные для образования селитры, и так как такие силы действительно существуют в природе, то весьма возможно, что ими воздух в селитре сжат до наивысшей степени, и что именно на этой основе получается однородность различных частей селитры. Если мы примем, что наибольшая плотность, до которой может быть доведен воздух сжатием, в 800 раз больше плотности естественного воздуха, и в этом состоянии воздух будет плотным, как вода (это сходство нисколько не служит подтверждением рассматриваемого Предложения), то мы будем в состоянии дать правильную теорию о различных степенях упругости, которыми обладает воздух при различных степенях плотности. Так, если упругость естественного воздуха примем за 1, то упругость воздуха в m раз более плотного, чем естественный, выразится следующим числом:

$$[1200-3\sqrt[3]{100(800-m)^2}]\left(1-\frac{1}{4800}\right),$$

откуда могут быть сделаны следующие выводы.

Во-первых, если m очень мало, упругость будет равна

$$m+\frac{m(m-1)}{4800}.$$

Поэтому, если m — дробь, что имеет место, когда воздух не сжат, а разрежен, то упругость всегда пропорциональна плотности, как это и должно быть; это подтверждают также все опыты, которые были поставлены с разреженным воздухом.

Во-вторых, если воздух будет сжат до объема в 16 раз меньшего, что является почти наивысшей степенью, которая может быть достигнута применением при опытах ручной силы, то упругость будет уже в $16\frac{1}{20}$ раз больше упругости естественного воздуха. Так как такая разница едва заметна, то и не удивительно, что до сих пор ошибочность общего правила не могла быть обнаружена опытами.

В-третьих, если m — число бо́льшее чем 16, то отклонение будет уже заметнее. Но так как в этих случаях формула

$$m+\frac{m(m-1)}{4800}.$$

уже начинает удаляться от действительности, то следует пользоваться первоначальной, а именно:

$$[1200-3\sqrt[3]{100(800-m)^2}]\left(1-\frac{1}{4800}\right).$$

Если, следовательно, будет положено $m=100$, то упругость будет:

$$(1200-3\sqrt[3]{49\,000\,000})\left(1-\frac{1}{4800}\right)=102,19.$$

А если положим $m=300$, то упругость будет

$$(1200-3\sqrt[3]{25\,000\,000})\left(1-\frac{1}{4800}\right)=322,73.$$

В-четвертых, если положим $m=800$, как это действительно имеет место в селитре и порохе, то упругость будет равна 1200. Если при этом происходит еще нагревание от пламени, то следует увеличить m еще примерно в 5 раз и, следовательно, упругость получится более чем в 5000 раз большей, чем упругость естественного воздуха. Таким образом, мы получим в результате силу, которая в 5 раз больше той, которую приводит автор, и каковая, по всей видимости, будет способна, за вычетом всех вышеприведенных потерь, произвести те действия, которые наблюдаются в опытах. Насколько это учение согласуется с опытами, мы рассмотрим в следующем Замечании.

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Итак, мы опять предположим, что в полом цилиндре $AABB$ объем $AACC$ заполнен порохом (рис. 10) [145]. Так как сжатый воздух составляет $\frac{3}{10}$ полного веса пороха, то мы имеем здесь материи трех видов: во-первых, сжатый воздух, который, как было показано, в 800 раз плотнее, чем естественный воздух; во-вторых, твердые части, из которых состоит порох, и, в-третьих, естественный воздух, который находится между пороховыми зернами. Эти троякого рода материи заполняют объем $AACC$, и кажется, что мы не удалимся заметно от действительности, если примем, что естественный воздух занимает $\frac{1}{4}$ объема $AACC$, сжатый воздух тоже $\frac{1}{4}$

и твердые вещества $^{2}/_{4}$. Следовательно, как только сжатый воздух при воспламенении освободится из своего вместилища, он смешается с естественным воздухом и займет вдвое бо́льший объем, чем прежний, таким образом, что теперь он будет уже только в 400 раз плотнее, чем естественный воздух. Остальная половина объема $AACC$ остается занятой твердыми веществами. Так как они теперь не будут вполне вытеснены путем последующего расширения воздуха первоначальным слоем CC, но также

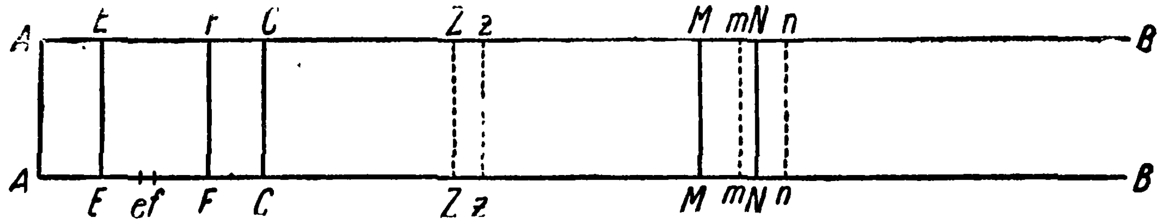

Рис. 10.

и не целиком останутся позади у дна AA, то мы наиближайше подойдем к действительности, если допустим, что половина твердых веществ остается позади у дна AA, а другая половина движется впереди воздуха. Следовательно, в начальный момент после того, как воспламеняется порох, что, как утверждает автор, произойдет мгновенно, объем $AACC$ будет так заполнен, что первая четвертая часть $AAEE$ будет содержать в себе половину твердых веществ пороха, последняя четверть $CCFF$ другую их половину и средние две четверти $EEFF$ — сжатый воздух, который в 400 раз плотнее, чем естественный воздух. Если, таким образом, обозначим длину объема $AC=b$, то $AE=\frac{1}{4}\,b$ и $CF=\frac{1}{4}\,b$, а $EF=\frac{1}{2}b$. Так как твердые части пороха тяжелее, чем вода, то мы примем, что твердые вещества, находящиеся в $CCFF$, эквивалентны столбу естественного воздуха постоянной плотности высотой $1000\ CF=250\ b$.

Но для того чтобы наше вычисление не было ограничено таким допущением, которое может еще вызвать некоторое сомнение, мы примем в общем виде

$$EF=\frac{1}{\alpha}b,\quad AE=CF=\frac{\alpha-1}{2\alpha}\,b,$$

и воздух, находящийся в $EEFF$, будет в m раз более плотным, чем естественный воздух; но твердые вещества в $CCFF$ будут в n раз тяжелее, чем обычный воздух; поэтому, если положим $\alpha=2$, $m=400$ и $n=1000$, то получим ранее данные значения.

Теперь положим, кроме того, что спустя еще некоторое время воздух, сжатый в $EEFF$, расширился в $EEMM$, и находившиеся в $FFCC$ твердые вещества вытолкнуты в $MMNN$, таким образом, что $MN=FC=\frac{\alpha-1}{2\alpha}b$; тогда, если мы положим $EM=x$, то плотность находящегося в $EEMM$ воздуха будет в $\frac{mb}{\alpha x}$ раз больше плотности естественного воздуха.

Если, следовательно, h — высота воздушного столба, вес которого равен упругости естественного воздуха, то приблизительно $h=29\,100$ рейнских футов, и упругость заключенного в $EEMM$ воздуха будет равна весу столба естественного воздуха, высота которого равна

$$\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\left(q-\frac{mb}{\alpha x}\right)^2}}{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{(q-1)^2}}\cdot h=\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\cdot h,$$

где q обозначает число 800. Но мы лучше сохраним буквенное обозначение q с тем, чтобы, если в других случаях для него будет найдено другое значение, вычисления все же остались теми же. Но в эту формулу не введено в рассмотрение нагревание, от которого, по автору, упругость будет примерно в 4 раза больше. А так как это может быть и больше и меньше, то мы вместо числа 4 применим букву β, отчего искомая упругость будет равна

$$\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha q x}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\cdot\beta h.$$

Пусть, кроме того, $\sqrt{v}$ — скорость, с которой проталкивается самый передний слой MM, а следовательно, и твердые вещества $MMNN$, где v, как было уже выше упомянуто, обозначает высоту, с которой тяжелые тела при падении приобретают ту же скорость; но, между тем как слой MM продвинется на $Mm = dx$, прежняя высота v увеличится на dv. Отсюда теперь легко получится сила, которая необходима, чтобы сообщить твердым веществам $MMNN$ это ускорение. Поскольку эти вещества приравнены воздушному столбу, высота которого равна

$$\frac{\alpha-1}{2\alpha}nb,$$

то необходимая сила будет равна весу воздушного столба такой же плотности и высотой, равной

$$\frac{\alpha-1}{2\alpha}\cdot\frac{nb\cdot dv}{dx}.$$

Если, сверх этого, нужно еще проталкивать пулю, вес которой равен весу воздушного столба высотой k, то требуемая сила для проталкивания этой пули выразится весом воздушного столба высотой

$$\frac{k\cdot dv}{dx}.$$

Но чтобы определить силу, которая требуется для ускорения сжатого в $EEMM$ воздуха, плотность которого относится к плотности естественного воздуха, как $\frac{mb}{\alpha x}$ к 1, мы рассмотрим слой ZZ и положим расстояние $EZ = z$. Скорость этого слоя, как мы выше показали, будет $\frac{z\sqrt{v}}{x}$, и в то время, как самый передний слой MM продвинется на dx, этот слой продвинется на $\frac{z\,dx}{x}$, а высота $\frac{zzv}{xx}$, которая определяет его скорость, увеличится на $\frac{zz\,dv}{xx}$. Если мы теперь примем толщину слоя $Zz = dz$, то он будет равен воздушному столбу высотой $\frac{mb\,dz}{\alpha x}$, что по умножении на $\frac{zz\,dv}{xx} : \frac{z\,dx}{x}$, или на $\frac{z\,dv}{x\,dx}$ даст высоту воздушного столба, вес которого равен требуемой для ускорения силе. Отсюда эта сила будет равна

$$\frac{mbz\,dz\,dv}{\alpha xx\,dx} = \frac{mb\,dv}{\alpha xx\,dx} \cdot z\,dz;$$

интеграл этого выражения

$$\frac{mb\,dv}{\alpha xx\,dx} \cdot \frac{zz}{2}\ [146]$$

выражает силу, требуемую для ускорения находящегося в $EEZZ$ воздуха; положив $z = x$, получим силу, требуемую для ускорения всего заключенного в $EEMM$ воздуха, равную $\frac{mb\,dv}{2\alpha\,dx}$.

Положим сначала, что перед порохом нет пули, и порох свободно воспламеняется без пыжа; в этом случае развивающаяся полностью сила будет равна

$$\frac{mb\,dv}{2\alpha\,dx} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \cdot \frac{nb\,dv}{dx} = \frac{[m + (\alpha - 1)\,n]\,b\,dv}{2\alpha\,dx}$$

и она должна быть равна движущей силе за вычетом сопротивления. Но движущая сила равна упругости и, следовательно, равна

$$\frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}}\,\beta h.$$

А сопротивление состоит, во-первых, из противодавления внешнего воздуха, которое обозначим через h, и из сопротивления, равного воздушному столбу высотой v; таким образом, мы получаем следующее уравнение:

$$\frac{[m + (\alpha - 1)\,n]\,b\,dv}{2\alpha\,dx} = \frac{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}}{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}} \cdot \beta h - h - v.$$

Но так как мы уже раньше положили, что сопротивление воздуха не значительно, то для облегчения вычислений мы можем пренебречь последним членом v и тогда получим:

$$\frac{\left[1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}\right]\cdot[m+(\alpha-1)n]}{2\alpha}\cdot b\,dv=$$

$$=\left[1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}\right]\beta h\,dx-$$

$$-\left[1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}\right]h\,dx\,[147].$$

Чтобы проинтегрировать это уравнение, заметим, что

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}=1-\frac{2}{3q}-\frac{1}{9qq}-\frac{4}{81q^3}-\frac{7}{243q^4}-\text{etc.}$$

и

$$\sqrt[3]{\left(1-\frac{mb}{\alpha qx}\right)^2}=$$

$$=1-\frac{2mb}{3\alpha qx}-\frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x^2}-\frac{4m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^3}-\frac{7m^4b^4}{243\alpha^4q^4x^4}-\text{etc.}$$

Затем интегрирование надо произвести так, что, когда $x=EF=\frac{b}{\alpha}$, скорость, или v обращается в нуль. Поэтому получим:

$$\frac{[m+(\alpha-1)n]\cdot bv}{2\alpha}\cdot\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc.}\right)=$$

$$=\beta h\left(\frac{2mb}{3\alpha q}\,l\,\frac{\alpha x}{b}-\frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x}+\frac{m^2b}{9\alpha q^2}-\frac{2m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^2}+\frac{2m^3b}{81\alpha q^3}-\text{etc.}\right)-$$

$$-hx\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\text{etc.}\right)+\frac{hb}{\alpha}\left(\frac{2}{3q}+\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\text{etc.}\right).$$

Но дроби $\frac{1}{9qq}+\frac{4}{81q^3}+\frac{7}{243q^4}+\text{etc.}$ настолько малы, что можно ими пренебречь, и тогда получим:

$$\frac{[m+(\alpha-1)n]\,bv}{2\alpha}=\beta h\left(\frac{mb}{\alpha}\,l\,\frac{\alpha x}{b}+\frac{m^2b}{6\alpha q}-\frac{m^2b^2}{6\alpha^2qx}\right)+\frac{hb}{\alpha}-hx.$$

Если положим теперь длину $EB = a$ и $x = \alpha$, то получим скорость, с которой пламя вырывается из дула BB:

$$v = \frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}\left(l\frac{\alpha a}{b} + \frac{m}{6q} - \frac{mb}{6aqa}\right) - \frac{2h(\alpha a - b)}{[m+(\alpha-1)n]b},$$

вместо которой можно без заметной ошибки принять следующее значение:

$$v = \frac{2\beta mh}{m+(\alpha-1)n}\, l\frac{\alpha a}{b}.$$

Если теперь мы вместо букв α, β, m, n и h подставим приведенные выше значения, а именно $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $m = 400$, $n = 1000$ и $h = 29\,100$ рейнских футов, то получим:

$$v = \frac{16}{7} hl \frac{2a}{b}.$$

Остается теперь вычислить скорость в приведенном выше примере, где $b = 2\frac{5}{8}$ английских дюйма и $a = 45 - \frac{21}{32}$. Отсюда имеем:

$$2a = 90 - \frac{21}{16} \quad \text{и} \quad \frac{2a}{b} = \frac{1419}{42} = 33{,}8,$$

следовательно,

$$l\frac{2a}{b} = 1{,}528\,917,$$

что должно быть умножено на число 2,30258509. А это будет:

$$\begin{array}{r} l\,1{,}528917 = 0{,}184383 \\ l\,2{,}302585 = 0{,}362215 \\ l\frac{16}{7} = 0{,}359021 \\ \hline 0{,}905619. \end{array}$$

К этому прибавим лагарифм от h в тысячных долях рейнского фута:

$$\begin{array}{r} lh = 7{,}463893 \\ \hline \text{получаем } lv = 8{,}369512 \\ \text{и } l\sqrt{v} = 4{,}184756 \\ \hline \text{следовательно, } \sqrt{v} = 15\,302. \end{array}$$

Четвертая часть этого числа, а именно 3825, показывает, сколько футов составляет искомая скорость в одну секунду. Это не слишком большое увеличение скорости против той, которая была ранее найдена равной 3215 футам, несмотря на то, что здесь мы приняли значительно бо́льшую силу, произошло главным образом из-за твердых веществ пороха, половина которых должна быть проталкиваема впереди сжатого воздуха. Если бы мы приняли, что эти твердые вещества целиком остались позади у дна канала AA, то из уравнения выпал бы член, содержащий n, и мы получили бы следующее уравнение:

$$v = 2\beta hl \frac{aa}{b}, \quad \text{или} \quad v = 8hl \frac{aa}{b},$$

т. е. в $\sqrt{\frac{7}{2}}$ раз бо́льшую скорость, равную 7157 футов в секунду, что за вычетом противодавления воздуха может составить приблизительно 7000 футов. Это действие очень точно согласуется с мнением автора, которое он выводит из своих опытов, потому что он заключает из них, что, если бы движение пламени не задерживалось твердыми частями пороха, оно выбрасывалось бы из ствола со скоростью 7000 футов. В подтверждение нашего мнения о силе пороха отметим, что найденная нами скорость несколько больше, чем показывают опыты, так как вследствие постепенного воспламенения пороха она несколько уменьшается.

Если перед порохом находится пуля, то в этом случае предыдущее вычисление также легко может быть выполнено. Так, если k обозначает высоту воздушного столба, вес которого равен весу пули, мы получим полную силу, которая требуется для ускорения, равной

$$\frac{mb\,dv}{2\alpha\,dx} + \frac{\alpha-1}{2\alpha} \cdot \frac{nb\,dv}{dx} + \frac{k\,dv}{dx} = [mb + (\alpha-1)\,nb + 2\alpha k]\,\frac{dv}{2\alpha\,dx}.$$

Эта же сила, если бы не было пули, была бы равна

$$[m + (\alpha-1)\,n]\,\frac{b\,dv}{2\alpha\,dx}.$$

Следовательно, в предыдущее выражение мы вместо

$$m+(\alpha-1)n$$

подставим

$$m+(\alpha-1)n+\frac{2\alpha k}{b},$$

так, что скорость, с которой будет брошена пуля, определится из следующего уравнения:

$$v=\frac{2\beta mb\cdot h}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}\left(l\frac{aa}{b}+\frac{m}{6q}-\frac{mb}{6aqa}\right)-$$

$$-\frac{2h(aa-b)}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k} \quad [148].$$

Если мы теперь подставим прежние значения $\alpha=2$, $\beta=4$, $m=400$, $n=1000$, $q=800$ и $h=29\,100$ рейнских футов, то получим:

$$v=\frac{h}{700b+2k}\left[1600bl\frac{2a}{b}+(2a-b)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)\right]$$

или

$$v=\frac{h}{700+2k:b}\left[1600l\frac{2a}{b}+\left(\frac{2a}{b}-1\right)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)\right].$$

Чтобы приложить это вычисление к первому случаю автора, возьмем: $b=2\frac{5}{8}$, $a=44\frac{11}{32}$ и $k=4900$ английских дюймов. Поэтому $\frac{2a}{b}=33{,}8$ и гиперболический логарифм от $\frac{2a}{b}$ равен 3,52045. Кроме того, $\frac{200b}{3a}=3{,}94$ и $\frac{2k}{b}=3733$. Отсюда получается

$$\begin{array}{r} 1600l\frac{2a}{b}=5632{,}72 \\ \left(\frac{2a}{b}-1\right)\left(\frac{200b}{3a}-1\right)=\quad 96{,}43 \\ \hline 5729{,}15 \end{array},$$

и, следовательно,

$$v=\frac{5729{,}15h}{4433}.$$

Чтобы найти теперь, сколько футов с этой скоростью в секунду может пройти пуля, следует h выразить в тысячных частях рейнского фута; тогда будет $h=29\,100\,000$, а затем нужно корень квадратный из v разделить на 4. Логарифмируя, имеем:

$$\begin{array}{r} lh = 7{,}463893 \\ l\,5729{,}15 = 3{,}758090 \\ \hline 11{,}221983 \\ l\,4433 = 3{,}646698 \\ \hline lv = 7{,}575285 \\ l\sqrt{v} = 3{,}787642 \\ l\,4 = 0{,}602060 \\ \hline 3{,}185582. \end{array}$$

Искомое число равно 1533.

Следовательно, пуля будет брошена со скоростью 1533 рейнских футов в секунду, что в английских футах составляет 1580. Это число, подлежащее, кроме того, уменьшению из-за не сразу происходящего воспламенения и потери силы через зазор и запальный канал, было бы много меньше числа, получаемого для этого случая из опытов. Но причина этого лежит, кажется, в нашем допущении, по которому после воспламенения только половина объема $AACC$ заполнена воздухом; однако, весьма вероятно, что твердые вещества пороха не занимают такую большую часть объема; причем заметим, что незначительная разница в этом отношении вызывает очень заметную разницу в скорости. Так, если мы примем, что после сгорания твердые вещества заполняют только третью часть объема, то

$$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}b \quad \text{и} \quad a=\frac{3}{2},$$

и найденное выше уравнение преобразуется в следующее:

$$v=\frac{2h}{900b+3k}\left[1600b\cdot l\frac{3a}{2b}+\left(\frac{3}{2}a-b\right)\left(\frac{800b}{9a}-1\right)\right],$$

или

$$v=\frac{2h}{900+3k:b}\left[1600l\frac{3a}{2b}+\left(\frac{3a}{2b}-1\right)\left(\frac{800b}{9a}-1\right)\right].$$

Положив теперь, что $b=2\frac{5}{8}$, $a=45-\frac{7}{16}$ и $k=4900$ английских дюймов, получим $\frac{3a}{2b}=25{,}46$; $\frac{800b}{9a}=5{,}23$ и $l\frac{3a}{2b}=3{,}23710$. Таким образом,

$$\begin{array}{r} 1600l\frac{3a}{2b}=5179{,}36 \\ \left(\frac{3a}{2b}-1\right)\left(\frac{800b}{9a}-1\right)=\ 103{,}46 \\ \hline 5282{,}82. \end{array}$$

Затем

$$\frac{3k}{b}=5600$$

и

$$\frac{900+3k:b}{2}=3250,$$

откуда

$$v=\frac{5283h}{3250}.$$

Отсюда получается скорость, которая составляет 1720 рейнских футов или 1773 английских фута в секунду. Эта скорость много больше, чем та, которая была найдена опытами, и кажется, что после всех вычетов получится полное согласование с опытом. Мы можем с полным правом рассматривать это выражение, в котором принято $\alpha=\frac{3}{2}$, как очень близко подходящее к действительности.

ПЯТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Мы можем вывести отсюда полезные заключения как для познания природы пороха, так и для целесообразного его использования, что, возможно, будет немало способствовать совершенствованию артиллерии.

Во-первых, так как соотношение количеств твердых и горючих веществ, находящихся в порохе, существенно влияет на скорость пуль, которые будут выталкиваться значительно быстрее или медленнее в зависимости от того, будет ли смешано с порохом меньше или больше подобных твердых веществ, то легко видеть, что добротность пóроха зависит главным образом от количества смешанных с ним твердых веществ. Поскольку, по всей видимости, находящийся в селитре воздух приблизительно в 800 раз плотнее естественного воздуха, что представляет высшую степень плотности, до которой воздух может быть доведен сжатием, то все порохá обладали бы одинаковой силой, если бы в них было одинаковое соотношение между этим сжатым воздухом и твердыми веществами, и при условии, что смесь изготовлена так, что не будет затруднено воспламенение. Поэтому порох тем лучше и сильней, чем меньше в нем содержится указанных твердых веществ. Но так как воспламенение зависит от этих твердых веществ, то в приготовлении пороха важнейшая сноровка должна состоять в том, чтобы найти такую пропорцию между селитрой и горючими веществами, при которой и достаточно ускорялось бы воспламенение, и вместе с тем было бы возможно меньше этих веществ. Главная предосторожность касается чистоты селитры, чтобы были насколько возможно отделены твердые части от горючих, поскольку первые не только не способствуют быстрому воспламенению, но даже ему препятствуют и уменьшают по этой причине силу пороха. Это обстоятельство имеет очень важное значение, так как порох приготовляется в бóльшей своей части из селитры.

Следовательно, к качеству и силе пороха предъявляются два главных требования: во-первых, чтобы порох сразу воспламенялся, и, во-вторых, чтобы к нему как можно меньше было примешано твердых веществ. Поэтому, если работать по усовершенствованию пороха, то надо обратить внимание на два таких пункта: во-первых, нельзя ли найти новую смесь, которая воспламенялась бы наискорейше и наибыстрейше, и, во-вторых, нельзя ли уменьшить количество необходимых для воспламенения твердых веществ.

Это, кроме того, позволяет легко разобраться в недостатках каждого пороха, потому что все то, что или препятствует интенсивности воспламенения или увеличивает количество твердых веществ, уменьшает силу пороха. Во-первых, порох ослабляется смешанной с ним влагой, так как из-за этого либо много частиц вовсе не загорится, либо все-таки воспламенение будет протекать медленнее. Во-вторых, порох, который либо приготовлен из плохо очищенной селитры, либо содержит в себе слишком много серы и угля или других подобных веществ, слабее, потому что при воспламенении должно быть приведено в движение слишком много твердых частей. Если, следовательно, для лучшего пороха в вышеприведенном уравнении $\alpha = {}^3/_2$, то для плохого пороха следует дать α меньшее значение. Поэтому найденное уравнение для скорости ядра может быть применено ко всем сортам пороха. Но так как в уравнении мы приняли, что весь порох воспламеняется мгновенно, а в действительности этого не бывает, то на этом основании мы должны найденную скорость взять несколько меньшей; сколько может составить это уменьшение, мы далее рассмотрим подробнее.

В третьих, из этого можно также определить, сколько пороха надо взять для заряда в каждом данном стволе с тем, чтобы ядро было выброшено с наибольшей скоростью, потому что легко видеть, что с увеличением заряда скорость не может быть увеличена сверх некоторой определенной степени. Чтобы понять это, представим себе, что весь канал заполнен порохом. Так как в этом случае ядро будет выброшено сразу же первоначальным толчком, и тогда же движущая сила прекратит свое действие из-за расширения в атмосферу, то сообщенное ядру движение будет очень незначительно. Такой наиболее сильный заряд сообщает ядру относительно меньшую скорость, чем малый, а чрезвычайно малый заряд опять-таки производит очень малое действие. В таком случае должен быть такой заряд, которым ядро будет выброшено с наибольшей скоростью, таким образом, что, если бы взяли больше или меньше пороха, ядро в обоих случаях получило бы более слабое движение. Очевидно, что отыскание этого заряда имеет большое значение в артиллерии. Этим не только получат возможность бросать ядро с наибольшей возможной скоростью, но во многих случаях смогут сберечь много пороха, если будут точно знать, что ядро при менее значительном заряде может двигаться также быстро и даже быстрее. Чтобы определить величину этого сильнейшего заряда, мы только продифференцируем найденное выше выражение для скорости ядра, рассматривая величину b как переменную, а затем эту производную приравняем нулю. Чтобы наш вывод распространялся на все случаи, мы возьмем общее выражение

$$\frac{v}{2h}=\frac{\beta mb}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}\, l\,\frac{aa}{b}+\frac{(aa-b)(\beta m^2b-6\alpha qa)}{[mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k]\,6\alpha qa}\,.$$

Взятая, как упомянуто, производная

$$\frac{2\alpha\beta mk\, dbl\,(aa:b)}{[mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k]^2}-\frac{\beta m\, db}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}+$$
$$+\frac{-[m+(\alpha-1)n](\beta m^2b^2-6\alpha^2qa^2)\,db-4\alpha\beta m^2bk\,db}{[mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k]^2\,6\alpha qa}+$$
$$+\frac{2\alpha^2ak(\beta m^2+6q)\,db}{[mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k]^2\,6\alpha qa}\,,$$

будучи приравнена нулю, дает следующее уравнение:

$$12\alpha^2\beta mqkal\,\frac{aa}{b}=[m+(\alpha-1)n]\,\beta m^2b^2+$$
$$+6\alpha\beta mq\,[m+(\alpha-1)n]\,ab-6\alpha^2q\,[m+(\alpha-1)n]\,a^2+$$
$$+4\alpha\beta m^2bk+12\alpha^2\beta mqak-2\alpha^2\beta m^2ak-12\alpha^2qak.$$

Но здесь k — очень большая величина, поскольку она выражает высоту воздушного столба, вес которого равен весу ядра. Обозначив диаметр ядра через c, примем ядро равнообъемным цилиндру одинаковой с ним плотности и высотой $\frac{2}{3}c$. Таким образом, если материал, из которого состоит ядро, в i раз тяжелее, чем воздух, получим:

$$k = \frac{2}{3} ic;$$

если ядро чугунное, а чугун в 7,820 раза тяжелее воды, вода же приблизительно в 850 раз тяжелее воздуха, то $i = 6650$ и, следовательно, приблизительно $k=4430\ c$. Пренебрегая в вышеприведенном уравнении ничтожно малыми членами, получим:

$$l\frac{\alpha a}{b} = 1 - \frac{m}{6q} - \frac{[m+(\alpha-1)n]\,a}{2\beta mk} + \frac{mb}{3\alpha qa} + \\ + \frac{[m+(\alpha-1)n]\,b}{2\alpha k} + \frac{[m+(\alpha-1)n]\,mb^2}{12\alpha^2 qak} \text{ [149]}.$$

Теперь, так как все эти дроби очень малы сравнительно с единицей, то, приняв e за число, гиперболический логарифм которого равен 1, получим:

$$\frac{\alpha a}{b} = e^{1-\frac{m}{6q}-\frac{[m+(\alpha-1)n]\,a}{2\beta mk}} \left\{1 + \frac{mb}{3\alpha qa} + \frac{[m+(\alpha-1)n]\,b}{2\alpha k} + \right. \\ \left. + \frac{[m+(\alpha-1)n]\,mb^2}{12\alpha^2 qak} + \frac{m^2b^2}{18\alpha^2q^2a^2} + \text{etc}\right\} \text{ [149]},$$

откуда нетрудно найти приближенное значение b. Пусть, как положено выше, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 4$, $m = 400$, $n = 1000$ и $q = 800$; тогда

$$\frac{3a}{2b} = e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}} \cdot \left(1 + \frac{b}{9a} + \frac{300b}{k} + \frac{50bb}{3ak} + \frac{bb}{162aa}\right) \text{ [149]}.$$

Пусть для краткости

$$\frac{3}{2}a : e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}} = A \text{ [149]};$$

тогда

$$A = b + \frac{bb}{9a} + \frac{300bb}{k} + \frac{50b^3}{3ak}.$$

Если теперь положим

$$b = A - pA^2 + qA^3 \text{ [150]},$$

то

$$bb = AA - 2pA^3,$$

и

$$b^3 = A^3,$$

следовательно,

$$A = A - pA^2 + qA^3 + \frac{1}{9a}A^2 - \frac{2p}{9a}A^3 + \frac{300}{k}A^2 - \\ - \frac{600p}{k}A^3 + \frac{50}{3ak}A^3,$$

откуда

$$p = \frac{1}{9a} + \frac{300}{k},$$

$$q = 2p\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) - \frac{50}{3ak}.$$

Вычислим их значения для полукартауна, длина которого в 20 раз больше калибра, или где $a = 20c$. Для чугунного ядра, следовательно, будет $k = 4430c$, и следовательно,

$$p = \frac{1}{180c} + \frac{1}{15c} = \frac{1}{14c}$$

и

$$q = \frac{1}{98cc} - \frac{1}{5316cc} = \frac{1}{99cc}.$$

Отсюда имеем:

$$b = A - \frac{AA}{14c} + \frac{A^3}{99cc}.$$

Но

$$A = 30c : e^{1-\frac{1}{12}};$$

ввиду того, что дробь $\frac{9a}{32k}$ мала, а

$$e^{1-\frac{1}{12}} = e : \left(1 + \frac{1}{12}\right),$$

то приблизительно будет

$$A = \frac{32,5c}{2,718} = 12c,$$

и, следовательно,

$$b = 12c - \frac{72}{7}\text{ c } [151].$$

Но поскольку здесь второй член лишь немного меньше первого, очевидно, что это приближение в данном случае не может быть применено.

Следовательно, мы должны снова вернуться к первоначальному уравнению

$$A = b + bb\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) + \frac{50b^3}{3ak},$$

которое в рассматриваемом случае дает:

$$12c = b + \frac{bb}{14c} + \frac{b^3}{5316cc};$$

в нем можно пренебречь последним членом, и тогда мы получим квадратное уравнение

$$bb + 14bc = 168cc,$$

и следовательно,

$$b = -7c + \sqrt{217cc},$$

или, приближенно,

$$b = 7\frac{3}{4}c;$$

это значение еще несколько великовато вследствие отброшенного последнего члена. Отсюда видно, что из полукартауна чугунное ядро может быть брошено с наибольшей скоростью, если заряд в пушке заполняет примерно $7\frac{1}{2}$ калибров. Столь же приблизительно порох будет в полтора раза тяжелее ядра. Так как обычный заряд равен половине веса ядра, то видно, что тройной заряд даст ядру самую большую скорость и что если зарядят еще больше чем тройным количеством пороха против обычного, то ядро будет брошено с меньшей скоростью. Но в других случаях, когда стреляют чугунными ядрами, можно также найти сильнейший заряд следующим образом.

Так как $k=4430c$, то положим $a=\theta c$; тогда

$$A=\frac{13\theta c}{8e}=\frac{3}{5}\theta c,$$

и, кроме того,

$$A=b+\frac{bb}{9\theta c}+\frac{bb}{15c};$$

следовательно,

$$bb+\frac{45\theta bc}{5+3\theta}=\frac{45\theta Ac}{5+3\theta}=\frac{27\theta\theta cc}{5+3\theta};$$

и, таким образом,

$$b=\frac{-45\theta c+3\theta c\sqrt{285+36\theta}}{10+6\theta}.$$

Отношение объема, который занимает заряд, к калибру зависит, следовательно, от числа θ, которое показывает, сколько калибров составляет протяжение канала. Отсюда составлена следующая таблица:

Если длина канала составляет столько калибров:	то сильнейший заряд составляет в канале столько калибров:
5	2,46
10	4,46
15	6,17
20	7,71
25	9,10
30	10,39
35	11,60
40	12,73
45	13,81
50	14,83

причем заметим, что эти числа не точные, а только лишь приблизительно согласованные с опытом, отчасти потому, что не все обстоятельства могли быть приняты в расчет, отчасти потому, что порох воспламеняется не мгновенно, как это было здесь допущено, а также потому, что движущая сила испытывает еще другие потери.

ШЕСТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Мы обещали еще рассмотреть, насколько будет уменьшена найденная ранее скорость, если не весь порох сразу воспламеняется. Итак, пусть (рис. 10), как и раньше, длина объема, который занят первоначально порохом, $AC=b$, длина всего канала пушки $AB=a$, и по истечении некоторого времени пламя вместе с ядром должно уже распространиться до NN. Положим $AN=x$, и скорость самого переднего слоя NN такая же, как и ядра, пусть будет $\sqrt{v}$; таким образом, что, в то время как ядро будет протолкнуто на $Nn=dx$, высота v увеличится на dv. Если, следовательно, вес ядра выразить через воздушный столб, высота которого равна k, то сила, требуемая для ускорения ядра, будет равна $\frac{kdv}{dx}$. Но так как еще не весь порох воспламенился, то мы примем, что уже вполне воспламенившаяся часть пороха относится ко всему заряду, как y к b, так, что y будет такой величиной, составленной из x и известных чисел, которая, если положить $x=b$, исчезнет, так как в этом случае воспламенение только еще начинается; поэтому, когда уже весь порох воспламенился, то должно быть $y=b$, что произойдет, когда $x=a$ при условии, что мы тот же канал примем столь длинным, что весь порох будет иметь время воспламениться, прежде чем будет выброшено ядро. Но если к этому времени еще не весь порох воспламенился, то должно быть $y=b$, если за x принять длину, бо́льшую чем a. Пусть она равна f, таким образом, что, когда $x=f$, то $y=b$. Отсюда теперь можно уже вполне заключить, как получить выражение для y; итак, приблизительно будет:

$$y=\frac{b\,(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}},$$

как такое выражение, которое обладает высказанными выше свойствами. Если мы, кроме того, положим, что выделившаяся из воспламененного уже пороха материя составляет $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ часть, то ею будет заполнена часть объема AM, длина которого равна

$$\frac{(\alpha-1)y}{\alpha};$$

но еще невоспламенившийся порох занимает объем, длина которого равна $b-y$, что вместе с прежним будет

$$b-\frac{y}{\alpha}.$$

Отсюда остается для воздуха весь остальной объем, длина которого равна

$$x-b+\frac{y}{\alpha}.$$

Но если этот воздух должен разредиться до того, как он будет иметь одинаковую степень плотности с естественным воздухом, то он заполнит объем канала того же диаметра и длиной $244y$; следовательно, в настоящем случае он должен быть в $\frac{244y}{x-b+\frac{y}{\alpha}}$ раз более плотным, чем естественный воздух. Мы для краткости обозначим это число $\frac{244y}{x-b+\frac{y}{\alpha}}$ буквой s; так что, как мы уже доказали, упругость этого воздуха будет равна весу воздушного столба, высота которого равна

$$\frac{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{s}{q}\right)^2}}{1-\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}}\beta h=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right);$$

это приближение для нашей цели вполне достаточно. Здесь h обозначает высоту воздушного столба, вес которого равен упругости естественного воздуха, и β показывает, во сколько раз упругость возрастает при нагревании. Так как уже высвобожденный при воспламенении воздух равен воздушному столбу высотой $244y$, то для его ускорения потребуется сила, равная

$$\frac{122y\,dv}{dx}.$$

Эта сила, как было объяснено выше, равна только половине той, от которой весь этот воздух получил бы одинаковое ускорение. Кроме этого, остается еще рассмотреть твердые вещества, часть которых также должна быть приведена в движение. Мы, как и раньше, будем принимать, что одна половина этих твердых веществ остается позади, у дна AA, а другая выбрасывается с ядром, и что последняя в n раз плотнее, чем естественный воздух; так что эта часть будет равна

$$\frac{1}{2}n\left(b-\frac{y}{\alpha}\right),$$

и для ее ускорения потребуется сила

$$\frac{1}{2}n\left(b-\frac{y}{\alpha}\right)\frac{dv}{dx};$$

поэтому полная сила, требуемая для проталкивания, будет равна

$$\frac{dv}{dx}\left(k+\frac{1}{2}nb-\frac{ny}{2\alpha}+122y\right);$$

эта сила должна быть равна действительной силе

$$\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right),$$

уменьшенной на противодавление воздуха h и, кроме того, еще уменьшенной на сопротивление воздуха, которое, ввиду того, что ядро сферическое, равно $\frac{1}{2}v$.

Отсюда получаем следующее уравнение:

$$dv\,(2\alpha k + n\alpha b - ny + 244\alpha y) =$$
$$= 2\alpha\beta h\,dx\left(s + \frac{ss}{6q}\right) - 2\alpha h\,dx - \alpha v\,dx,$$

где

$$s = \frac{244\alpha y}{\alpha(x-b)+y}$$

и

$$y = \frac{b\,(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}}.$$

Отсюда

$$s = \frac{244\alpha b\,(x-b)^{\mu-1}}{\alpha\,(f-b)^{\mu} + b\,(x-b)^{\mu-1}}.$$

Если бы $\mu = 1$, то было бы

$$s = \frac{244\alpha b}{\alpha f - (\alpha - 1)\,b}$$

и

$$y = \frac{b\,(x-b)}{f-b}.$$

Следовательно, в этом случае упругая сила была бы всегда одной и той же. Мы остановимся на этом случае ввиду простоты вычислений, чтобы увидеть, как далеко оно отклоняется от действительности.

Итак,

$$dv\,[\alpha\,(2k+nb)(f-b) + b\,(244\alpha - n)(x-b)] =$$
$$= \alpha\,dx\,(f-b)\left[2\beta h\left(s + \frac{ss}{6q}\right) - 2h - v\right],$$

и, следовательно,

$$\frac{dv}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right) - 2h - v} = \frac{\alpha\,dx\,(f-b)}{\alpha\,(2k+nb)(f-b) + b\,(244\alpha-n)(x-b)},$$

что интегрируется и применительно к рассматриваемому случаю дает:

$$l\frac{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h}{2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h-v}=$$

$$=\frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)\,b}\,l\,\frac{\alpha(2k+nb)(f-b)+(244\alpha-n)\,b\,(x-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)}.$$

Положим для краткости

$$2\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2h=g,$$

$$\frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)\,b}=\nu;$$

тогда

$$l\frac{g}{g-v}=\nu l\frac{\nu(2k+nb)+x-b}{\nu(2k+nb)},$$

и, следовательно,

$$\frac{g}{g-v}=\left[1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right]^{\nu};$$

отсюда

$$v=g-g\left[1+\frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right]^{-\nu};$$

полагая $x=a$, получим из этого равенства скорость, с которой выброшено ядро.

Чтобы применить это выражение к неоднократно уже рассматривавшемуся случаю, положим

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad \beta=4,\quad n=1000,\quad a=45,\quad b=2\frac{5}{8}$$

а $f=45$, и $k=4900$ английских дюймов, так что будет

$$s=14{,}5\ [152],\quad g=114{,}4h\ [153],\quad \nu=-\frac{1}{26}\ [154],$$

и, наконец,

$$v=\frac{10\,135}{24\,850}h\ [155],$$

откуда найдется скорость, которая составляет 861 [156] фут в секунду. Хотя эта скорость почти на половину меньше, чем полученная из опытов, но она еще очень велика, если принять во внимание, что сила, которой пуля выталкивается, очень мала, поскольку она создается давлением воздуха, который только в 14,5 раза плотнее, чем естественный воздух, и следовательно, путем нагревания получает только в 58 [157] раз бóльшую упругость. Мы, следовательно, видим отсюда, что число μ приняли очень большим, потому что чем больше будет взято μ, тем меньше будет s и, следовательно, также и скорость. Но если мы положим μ меньшим 1, то s, а, следовательно, также и скорость будут больше.

Пусть $\mu \cong \frac{1}{2}$; в этом случае

$$s = \frac{244\alpha b}{b + \alpha\sqrt{(f-b)(x-b)}}$$

и

$$y = b\sqrt{\frac{x-b}{f-b}},$$

и так как

$$\sqrt{x-b} = \frac{y}{b}\sqrt{f-b},$$

то

$$s = \frac{244\alpha bb}{bb + \alpha(f-b)y}$$

и

$$dx = \frac{2(f-b)y\,dy}{bb}.$$

Чтобы несколько облегчить интегрирование, мы отбросим последние три члена

$$2\alpha\beta h\,dx \cdot \frac{ss}{6q} - 2\alpha h\,dx - \alpha v\,dx,$$

что представляется вполне возможным, так как мы уже видели, что действие сопротивления

$$2\alpha h\,dx + \alpha v\,dx$$

почти ничего не составляет и, сверх того, оно еще в настоящем случае почти сократится с членом

$$\frac{\alpha\beta hss\,dx}{3q}.$$

Таким образом, получим следующее уравнение:

$$dv = \frac{2\alpha\beta hs\,dx}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\,y}.$$

Так как здесь

$$s = \frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)\,y}$$

и

$$dx = \frac{2(f-b)\,y\,dy}{bb},$$

то

$$s\,dx = \frac{488\alpha(f-b)\,y\,dy}{bb+\alpha(f-b)\,y},$$

и отсюда получаем:

$$dv = \frac{976\alpha^2\beta h(f-b)\,y\,dy}{[bb+\alpha(f-b)\,y]\,[\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\,y]}.$$

Положим для краткости

$$\frac{976\alpha^2\beta h(f-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(f-b)(2k+nb)} = A;$$

тогда найденное уравнение представится в следующем виде:

$$dv = \frac{-Abb\,dy}{bb+\alpha(f-b)\,y} + \frac{A\alpha(2k+nb)\,dy}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\,y},$$

и его интеграл будет:

$$v = C - \frac{Abb}{\alpha(f-b)} l\,[bb + \alpha(f-b)\,y] -$$
$$- \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l\,[\alpha(2k+nb) - (n-244\alpha)\,y].$$

Постоянная величина C здесь должна быть такова, что $v=0$, когда $x=b$, т. е. когда $y=0$; отсюда имеем:

$$v = \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l \frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\,y} -$$
$$- \frac{Abb}{\alpha(f-b)} l \frac{bb+\alpha(f-b)\,y}{bb}.$$

Чтобы найти теперь конечную скорость, с которой ядро будет брошено из канала, положим $x=a$, но примем также и $f=a$, или, что весь порох воспламенился за то время, как ядро прошло через весь канал; тогда будет $y=b$, и в этом случае

$$A = \frac{976\alpha^2\beta h\,(a-b)}{bb\,(n-244\alpha)+\alpha^2\,(a-b)\,(2k+nb)}$$

и

$$v = \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l \frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\,b} -$$
$$- \frac{Abb}{\alpha(a-b)} l \frac{bb+\alpha(a-b)\,b}{bb} \quad [158],$$

или

$$v = \frac{-Abb}{\alpha(a-b)} l \left[1 + \frac{\alpha(a-b)}{b}\right] -$$
$$- \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l \left[1 - \frac{(n-244\alpha)\,b}{\alpha(2k+nb)}\right].$$

Пусть, кроме того,

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta$$

и

$$\frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)\,b} = \eta;$$

тогда

$$v = -\frac{976\beta\eta bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)} l(1+\zeta) -$$

$$-\frac{976\beta\zeta\eta^2 bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)} l\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

Теперь, чтобы можно было этот случай лучше сравнить с тем, в котором было допущено, что весь порох сразу воспламеняется в начальный момент, мы подставим в дифференциальное уравнение $y = b$ и, отбросив, как и раньше, те же члены, получим:

$$s = \frac{244\alpha b}{\alpha x - (\alpha - 1) b}$$

и

$$dv = \frac{488\alpha^2 \beta bh\, dx}{[\alpha(2k+nb) - (n - 244\alpha) b][\alpha x - (\alpha - 1) b]},$$

интеграл которого будет:

$$v = \frac{488\, \alpha\beta bh}{\alpha(2k+nb) - (n - 244\alpha) b} l \frac{\alpha x - (\alpha - 1) b}{b};$$

и если положим $x = a$, то получим:

$$v = \frac{488\alpha\beta bh}{\alpha(2k+nb) - (n - 244\alpha) b} l \left[1 + \frac{\alpha(a-b)}{b}\right].$$

Положив, как и раньше,

$$\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta$$

и

$$\frac{\alpha(2k+nb)}{(n - 244\alpha) b} = \eta,$$

имеем:

$$v = \frac{488\beta\eta bh}{(\eta - 1)(2k+nb)} l(1+\zeta),$$

которое легче сравнить с предыдущим выражением, чем то, которое мы нашли выше, так как мы здесь в обоих случаях отбросили одинаковые члены.

Для случая, когда порох воспламеняется мгновенно, обозначим скорость ядра через $\sqrt{u}$, а для случая, когда порох воспламеняется постепенно, как мы приняли, скорость ядра обозначим через $\sqrt{v}$; тогда получим отношение

$$u:v=\frac{1}{\eta-1}\,l(1+\zeta):\left[\frac{-2}{1+\zeta\eta}\,l(1+\zeta)-\frac{2\zeta\eta}{1+\zeta\eta}\,l\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right],$$

и так как логарифмы во всех различных системах имеют между собою одно и то же отношение, то здесь безразлично, какую используем таблицу.

Если теперь мы положим

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad a=45,\quad b=2\frac{5}{8},\quad k=4900 \text{ и } n=1000,$$

то

$$\zeta=24{,}21,\quad \eta=11{,}2\ [159],$$

и следовательно,

$$u:v=\frac{10}{42}\,l\,25{,}2:\left[\frac{-100}{6342}\,l\,25{,}2+\frac{12580}{6342}\,l\,\frac{52}{42}\right],$$

или

$$u:v=1:\left[\frac{1258\,l\,1{,}2381}{151\,l\,25{,}2}-\frac{10}{151}\right]=1:\frac{73{,}25}{151},$$

т. е.

$$u:v=1:0{,}4851$$

и

$$\sqrt{u}:\sqrt{v}=1:0{,}696.$$

Следовательно, эти скорости относятся, почти как 10 к 7. Но скорость при допущении мгновенного воспламенения составляет в секунду 1731 рейнский фут; отсюда в рассматриваемом случае, когда порох воспламеняется не мгновенно, получается 1212 футов. Так как это постепенное воспламенение зависит от значения $\mu=\frac{1}{2}$, а когда раньше положили $\mu=1$, скорость была найдена равной только 877 футам, то очевидно, что, если для μ возьмем еще меньшую дробь чем $\frac{1}{2}$, скорость тоже получится больше чем 1212 футов и, следовательно, будет ближе к действительности. Но чем меньшее значение μ мы примем, тем интенсивнее будет воспламеняться порох вначале, хотя воспламенение в самый первый момент остается бесконечно малым. Так как мы можем быть уверены, что в начальный момент уже воспламенилась значительная часть пороха, то отсюда следует, что найденная скорость 1212 футов должна быть слишком мала, и что, следовательно, наше мнение, в силу которого порох не должен сразу воспламениться, могло бы вполне соответствовать действительности. Поскольку мгновенное воспламенение дает скорость 1795 английских футов, а опыты указывают приблизительно только 1650, то разница в 145 футов довольно значительна [160], из чего можно заключить, что уменьшение произошло от постепенности воспламенения. К тому же, так как найденная скорость 1795 футов еще слишком мала вследствие отброшенного члена $\frac{ss}{6q}$, который не так уже мал, поскольку в этом случае s очень велико, то легко понять, что все равно следовало из нее еще вычесть потери, происходящие через зазор и запальный канал; между тем, как в мушкетном стволе, где из-за пыжа через зазор почти ничего не может вырваться, эта потеря будет едва заметна. И, следовательно, вряд ли найдут какую-нибудь причину сомневаться в правильности изложенного здесь учения о силе пороха.

СЕДЬМОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Так как трудно подчинить вычислению последовательное воспламенение пороха, равно как и выполнить самые вычисления, то можно было бы представить себе процесс происходящим таким образом, как если бы в начальный момент воспламенилась лишь некоторая часть пороха, а остальная часть осталась совершенно невоспламенившейся. Так как в действительности порох может воспламеняться и мгновенно, и постепенно, то всегда будет возможно определить такую его часть, которая, воспламенившись в начальный момент, произвела бы совершенно одинаковое с тем действие. Поэтому в вычислениях мы на этот раз примем, что воспламенившаяся в начальный момент часть пороха, под действием силы которой движется ядро, будет обозначена через λb, т. е. что эта часть пороха относится к полному заряду, как λ к 1; таким образом, λ будет представлять собою некоторую дробь, которая тем более приближается к единице, чем быстрее в действительности воспламеняется порох. Поэтому в полученном выше уравнении будет

$$y=\lambda b \quad \text{и} \quad s=\frac{244\alpha\lambda b}{\alpha(x-b)+\lambda b}, \quad \text{или} \quad s=\frac{244\alpha\lambda b}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b},$$

$$\text{и} \quad \frac{ss}{6q}=\frac{ss}{4800}=\frac{12{,}4\alpha^2\lambda^2b^2}{[\alpha x-(\alpha-\lambda)b]^2}.$$

Так как

$$dv[\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b]=$$
$$=2\alpha\beta h\,dx\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2\alpha h\,dx-av\,dx,$$

то по интегрировании найдем:

$$v[\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b]=$$
$$=488\alpha\beta\lambda bhl\frac{\alpha(x-b)+\lambda b}{\lambda b}-\frac{24{,}8\alpha^2\beta\lambda^2b^2h}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}+$$
$$+24{,}8\alpha^2\beta\lambda bh-2\alpha hx+2\alpha bh-\alpha\int v\,dx.$$

Но так как уже довольно точно

$$v=\frac{488\alpha\beta\lambda bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha(x-b)+\lambda b}{\lambda b},$$

и

$$\alpha\int v\,dx=v[\alpha x-(\alpha-\lambda)b]-\int dv[\alpha x-(\alpha-\lambda)b],$$

то

$$\alpha\int v\,dx=\frac{488\alpha\beta\lambda bh\,[\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b]}{\alpha\,(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha\,(x-b)+\lambda b}{\lambda b}-$$
$$-\frac{488\alpha^2\beta\lambda bh\,(x-b)}{\alpha\,(2k+nb)-(n-244\alpha)\,\lambda b}.$$

Если теперь обозначим для краткости

$$\frac{2\alpha b}{\alpha\,(2k+nb)-(n-244\alpha)\,\lambda b}=m,$$

то найдем:

$$v=244\beta\lambda mhl\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}{\lambda b}-\frac{12{,}4\alpha\beta\lambda^2 mbh}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}+12{,}4\alpha\beta\lambda mh-$$
$$-\frac{mh\,(x-b)}{b}-\frac{244\beta\lambda mh\,[\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b]}{\alpha\,(2k+nb)-(n-244\alpha)\,\lambda b}\,l\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}{\lambda b}+$$
$$+\frac{244\alpha\beta\lambda mh\,(x-b)}{\alpha\,(2k+nb)-(n-244\alpha)\,\lambda b}\qquad [161],$$

или

$$v=244\beta\lambda mh\left\{1-\frac{m\,[\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b]}{2\alpha b}\right\}l\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}{\lambda b}+$$
$$+\frac{12{,}4\alpha^2\beta\lambda mh\,(x-b)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}-\frac{mh\,(x-b)}{b}\,(1-122\beta\lambda m)\qquad [162].$$

Если теперь положим $x=a$, то получим скорость, с которой ядро вылетит из канала; для этого случая получаем следующее уравнение:

$$v=244\beta\lambda mh\left\{1-\frac{m\,[\alpha\,(a-b)+\lambda b]}{2\alpha b}\right\}l\,\frac{\alpha\,(a-b)+\lambda b}{\lambda b}+$$
$$+\frac{12{,}4\alpha^2\beta\lambda mh\,(a-b)}{\alpha\,(a-b)+\lambda b}-\frac{mh\,(a-b)}{b}\,(1-122\beta\lambda m).$$

Но чтобы сравнить между собою скорости, которые получены, во-первых, для случая, когда весь порох воспламенился, а потом для случая, когда воспламенилась только часть его, достаточно будет взять только первые члены. Пусть $\sqrt{u}$ будет скорость, с которой будет выброшено ядро, когда весь порох сразу воспламенится;

далее, пусть $\sqrt{v}$ будет скорость, с которой будет выброшено ядро, когда воспламеняется только часть пороха, которая относится к целому, как λ к 1; тогда будем иметь:

$$u:v=\frac{1}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}\,l\,\frac{\alpha(a-b)+b}{b}:$$
$$:\frac{\lambda}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}\,l\,\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b},$$

или

$$u:v=1:\frac{\alpha\lambda(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b}\cdot\frac{l\,\dfrac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}}{l\,\dfrac{\alpha(a-b)+b}{b}}$$ [163],

или для краткости положим, как и выше:

$$\frac{\alpha(a-b)}{b}=\zeta$$

и

$$\frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b}=\eta,$$

тогда будет

$$u:v=1:\frac{(\eta-1)\lambda}{\eta-\lambda}\cdot\frac{l\,[(\zeta+\lambda):\lambda]}{l\,(\zeta+1)}.$$

Если теперь, как уже в часто рассматривавшемся примере, примем

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad a=45,\quad b=2\frac{5}{8},\quad k=4900\quad\text{и}\quad n=1000,$$

то

$$\zeta=24{,}21\quad\text{и}\quad\eta=5{,}2;$$

таким образом, имеем следующее уравнение:

$$u:v=1:\frac{4{,}2\lambda}{5{,}2-\lambda}\cdot\frac{l\,\dfrac{24{,}21+\lambda}{\lambda}}{l\,25{,}21}.$$

Положим для примера $\lambda = \frac{3}{4} = 0,75$; тогда

$$u : v = 1 : 0,7078 \frac{l\,33,28}{l\,25,21} = 1 : 0,7687,$$

и отношение между самими скоростями будет следующее:

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,8767.$$

Так как скорость пули при допущении, что весь порох воспламеняется сразу, составила, как мы видели, в секунду приблизительно 1800 футов, то скорость пули, когда воспламенилось только $\frac{3}{4}$ пороха, будет составлять в секунду 1578 английских футов. Но правдоподобно, что для согласования с действительностью следует принять для λ значение большее чем $\frac{3}{4}$. Если мы примем $\lambda = \frac{7}{8}$, то получим скорость приблизительно 1689 футов в секунду, которая уже больше, чем показывает опыт. И так как некоторая небольшая часть движущей силы теряется через запальный канал и зазор, то при порохе хорошего качества, который применял автор, можно будет принять для λ значение $\frac{9}{10}$. В рассматриваемом примере получится поэтому следующая пропорция:

$$u : v = 1 : 0,88 \frac{l\,27,9}{l\,25,21} = 1 : 0,90765,$$

и следовательно,

$$\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,9527 \ [^{164}].$$

Поэтому теперь скорость пули уже составит в секунду 1755 английских футов. Если же от этой величины будет отнято 100 футов на потери из-за зазора и запального канала, то получится истинная скорость, которая и была найдена [165]. Но мы можем определить значение u или скорость пули точнее, чем из последнего проинтегрированного уравнения для случая, когда весь порох воспламеняется сразу, потому что в нем не было пренебрежено сопротивлением. Для этого мы только положим $\lambda=1$, а β будет такое число, что, по автору, 244 $\beta=1000$, т. е. 122 $\beta=500$ и 12,4 $\beta=50{,}8$. Кроме того, $n=1000$ и $\alpha=\frac{3}{2}$, откуда получается

$$m=\frac{b}{k+289b}.$$

Далее положим

$$\frac{\alpha(a-b)}{b}=\frac{3(a-b)}{2b}\zeta;$$

тогда

$$u=1000mh\left[1-\frac{m(\zeta+1)}{3}\right]l(\zeta+1)+$$
$$+\frac{76{,}2\zeta mh}{\zeta+1}-\frac{2\zeta mh}{3}(1-500m)$$

Следовательно, в нашем примере, так как $a=45$, $b=2\frac{5}{8}$ и $k=4900$, мы имеем:

$$\zeta=24{,}2143$$

и

$$m=\frac{1}{2155{,}66};$$

следовательно,

$$u=\frac{h}{2{,}15566}\cdot 0{,}996102\cdot l\,25{,}2143+0{,}033947h-0{,}005752h,$$

или

$$u=0{,}46209h\cdot l\,25{,}2143+0{,}028195h.$$

Отсюда искомая скорость определится следующим образом:

$$\begin{array}{r}
l\,25{,}2143=1{,}401647\\
\hline
l\,1{,}401647=0{,}146638\\
l\,2{,}302581=0{,}362215\\
l\,0{,}46209\ \ =9{,}664723\\
\hline
0{,}173576
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rr}
\text{Число} & 1{,}491340 \\
 & \underline{0{,}028195} \\
 & \underline{1{,}519535} \\
l\,1{,}519535 = & 0{,}181710 \\
lh = & \underline{7{,}463893} \\
 & 7{,}645603 \\
\text{Половина} = & 3{,}822802 \\
l4 = & \underline{0{,}602060} \\
 & 3{,}220742
\end{array}
$$

Скорость 1662 рейнских фута или 1711 [166] английских футов.

Так как это число почти на 100 футов меньше, чем найденное нами раньше, когда не вводили в рассмотрение сопротивление, то остаются излишними только примерно 60 футов, которые могут быть приписаны уменьшению скорости, происшедшему от постепенности воспламенения пороха и от потерь через запальный канал и зазор. Если теперь мы положим $\lambda=\frac{9}{10}$, то эта потеря составит около 40 футов, и прочие потери могут составить 20 футов.

ВОСЬМОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Так как мы в этих замечаниях ввели в рассмотрение все обстоятельства, которые оказывают какое-либо влияние на движение ядра, пока оно еще не выброшено из пушки, за исключением уменьшения движения, происходящего от непрерывной потери движущей силы через запальный канал и зазор, то здесь мы исследуем, как могло бы повлиять это обстоятельство. Пусть при этом, как мы полагали раньше, длина всего канала пушки $AB=a$ (рис. 10), длина объема, который первоначально занят порохом, $AC=b$, и чтобы не увеличивать без надобности трудностей, мы положим, что часть пороха, которая мгновенно воспламеняется в начальный момент, относится к целому заряду, как λ к 1, и что потом уже ничего более не воспламеняется. Таким образом, невоспламенившаяся еще часть будет занимать объем, длина которого равна $(1-\lambda)b$. Кроме того, твердые вещества, образовавшиеся из воспламенившегося пороха, пусть составляют $\frac{\alpha-1}{\alpha}$-ю часть его, которая с невоспламенившимся порохом будет занимать объем, длина которого равна

$$b-\frac{\lambda b}{\alpha}.$$

Теперь мы положим, что оба отверстия, зазора и запала, через которые вырывается сжатый воздух, составляют $\frac{1}{m}$-ю часть поперечного сечения канала пушки, которое обозначим через cc. С этой целью мы примем запальное отверстие ef несколько бóльшим, с тем, чтобы туда вошел и зазор, и, таким образом, положим:

$$ef=\frac{cc}{m}.$$

При этом предположении пусть ядро спустя некоторое время уже продвинулось до MN. Обозначим длину $AM=x$ и скорость как ядра, так и переднего слоя MN равной $\sqrt{v}$, таким образом, за то время, как ядро продвинется на $Nn=dx$, высота v возрастет на dv. Если, следовательно, вес ядра будет выражен воздушным столбом, высота которого равна k, то сила, которая требуется для ускорения ядра, будет

$$\frac{k\,dv}{dx}.$$

Затем, если положим, что твердые вещества в n раз плотнее, чем естественный воздух, то сила, которая требуется для их ускорения, будет

$$\frac{1}{2}n\left(b-\frac{\lambda b}{\alpha}\right)\frac{dv}{dx}.$$

Но так как ядро теперь выталкивается не всей силой, которая первоначально была выделена из пороха, поскольку часть ее тем временем оказалась потерянной через запальный канал, то мы положим, что эта потерянная часть относится к целой, как z к 1, или что эта потеря будет равна весу столба естественного воздуха высотой $244\,\lambda bz$. Следовательно, воздух, еще находящийся в пушке, будет

$$244\,\lambda b\,(1-z).$$

Так как он занимает теперь в пушке объем длиной

$$x-b+\frac{\lambda b}{\alpha},$$

то он должен быть плотнее, чем естественный воздух в

$$\frac{244\,\lambda b\,(1-z)}{x-b+\frac{\lambda b}{\alpha}}$$

раз. Мы эту дробь для краткости обозначим буквой s, так что упругость этого воздуха, как было ранее доказано, будет равна весу воздушного столба высотой

$$\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right),$$

и так как для ускорения этого воздуха требуемая сила будет

$$\frac{122\,\lambda b\,(1-z)\,dv}{dx},$$

то полная сила, требуемая для ускорения, равна

$$\frac{dv}{dx}\left[k+\frac{1}{2}nb\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)+122\,\lambda b\,(1-z)\right];$$

эта сила, равная действительной силе без противодавления h и сопротивления воздуха $\frac{1}{2}v$, дает уравнение

$$dv\left[k+\frac{1}{2}nb\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)+122\,\lambda b\,(1-z)\right]=$$
$$=\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)dx-h\,dx-\frac{1}{2}v\,dx.$$

Но чтобы определить потерю z, мы положим скорость, с которой этот воздух вырывается через запальное отверстие ef, равной $\sqrt{u}$. В то время как ядро пройдет dx, через запальное отверстие пройдет малый цилиндр воздуха, длина которого равна

$$\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$$

и плотность которого равна $\frac{cc}{m}$. И так как этот воздух в s раз плотнее, чем естественный воздух, то эта потеря составит столб естественного воздуха, поперечное сечение которого равно cc и высота равна

$$\frac{s\,dx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}}.$$

Так как это представляет убыль от находящегося в пушке воздуха

$$244\lambda b(1-z),$$

то

$$244\lambda b\,dz = \frac{s\,dx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}};$$

интеграл этого уравнения должен быть взят так, что он обращается в нуль, когда $x=b$. Теперь, следовательно, еще остается определить скорость $\sqrt{u}$, которая зависит от силы сжатия. Так как эта сила равна весу столба естественного воздуха, высота которого равна

$$\beta h\left(s+\frac{ss}{6q}\right),$$

то для этого сжатия требуется высота одинаковой плотности воздуха, равная

$$\beta h\left(1+\frac{s}{6q}\right);$$

поэтому давление у запального отверстия будет точно такое, как если бы над ним находился столб воздуха, который в s раз плотнее естественного воздуха и высота которого равна

$$\beta h\left(1+\frac{s}{6q}\right).$$

Но в этом случае воздух вырывался бы через запальное отверстие со скоростью, которую приобретает падающее с этой высоты тело; и следовательно,

$$u=\beta h\left(1+\frac{s}{6q}\right).$$

Здесь мы можем пренебречь дробью $\frac{s}{6q}$ по ее малости, и, таким образом, получим:

$$u=\beta h,$$

и следовательно,

$$244\,\lambda b\,dz=\frac{s\,dx\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{v}}.$$

Тогда

$$s=\frac{244\,\alpha\lambda b\,(1-z)}{\alpha x+(\lambda-\alpha)\,b}$$

или, так как $\alpha>1$ и $\lambda<1$, то лучше взять

$$s=\frac{244\,\alpha\lambda b\,(1-z)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}.$$

Если мы теперь подставим это значение s, то получим:

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{\alpha\,dx\sqrt{\beta h}}{m\,[\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b]\sqrt{v}}.$$

Но мы уже раньше нашли

$$dv\,[2\,\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)+244\,\alpha\lambda b\,(1-z)]=$$

$$=2\alpha\beta h\,dz\left(s+\frac{ss}{6q}\right)-2\,\alpha h\,dx-\alpha v\,dx,$$

и если мы пренебрежем здесь последними тремя членами, которые не только очень малы, но даже почти взаимно уничтожаются, то будем иметь:

$$dv\,[2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b\,(1-z)]=\frac{488\alpha^2\beta\lambda bh\,(1-z)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}dx.$$

Но предыдущее уравнение дает:

$$\frac{\alpha\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}=\frac{m\,dz\sqrt{v}}{(1-z)\sqrt{\beta h}},$$

и поэтому получим уравнение:

$$dv\,[2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b\,(1-z)]=488\,m\alpha\lambda b\,dz\sqrt{\beta hv},$$

или

$$dz+\frac{z\,dv}{2m\sqrt{\beta hv}}=\frac{dv\,[2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)]}{488m\alpha\lambda b\sqrt{\beta hv}}+\frac{dv}{2m\sqrt{\beta hv}}$$ [167],

которое, будучи умножено на $e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}$, может быть проинтегрировано, после чего получим:

$$e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}z=$$

$$=\left[\frac{2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda bm}+\frac{1}{m}\right]\int e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}\frac{dv}{2\sqrt{\beta hv}},$$

или

$$e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}z=\left[\frac{2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}+1\right](e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-1),$$

потому что величина z, которая выражает потерю движущей силы, должна исчезнуть, когда $v=0$, что происходит в начальный момент. Отсюда мы получаем:

$$z=\frac{2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b}{244\alpha\lambda b}\left(1-e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}\right)$$

и

$$1-z=\frac{[2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda b]\,e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-2\alpha k-nb\,(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}.$$

Далее

$$l(1-z)=l\left\{\left[1+\frac{2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right]e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha k+nb\,(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}\right\}.$$

Пусть

$$\frac{2ak+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b}=\mu.$$

Тогда

$$l(1-z)=l\left[(1+\mu)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-\mu\right]$$

и, следовательно,

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}\cdot dv\,:\,2m\sqrt{\beta hv}}{(1+\mu)e^{-\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}-\mu},$$

или

$$\frac{dz}{1-z}=\frac{(1+\mu)\,dv\,:\,2m\sqrt{\beta hv}}{1+\mu-\mu e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}}.$$

Так как выше мы нашли

$$\frac{\alpha\,dx}{ax-(\alpha-\lambda)b}=\frac{dz}{1-z}\cdot\frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{\beta h}},$$

то

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{ax-(\alpha-\lambda)b}=\frac{(1+\mu)\,dv}{1+\mu-\mu e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}}.$$

Но так как m обычно очень большая величина, то дробь

$$\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$$

очень мала, и следовательно, довольно точно

$$e^{\sqrt{v}\,:\,m\sqrt{\beta h}}=1+\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}.$$

Если теперь это значение подставить в предыдущее уравнение, то

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{ax-(\alpha-\lambda)b}=\frac{m(1+\mu)\,dv\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h}-\mu\sqrt{v}},$$

или, так как

$$\frac{m\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h}-\mu\sqrt{v}}=1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}},$$

то получим:

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}=(1+\mu)\,dv+\frac{\mu(1+\mu)\,dv\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}\,.$$

Отсюда интегрированием получим:

$$2\beta hl\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}{\lambda b}=(1+\mu)\,v+\frac{2\mu(1+\mu)\,v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}\,.$$

Но если бы не произошло никаких потерь в силе пороха через запальный канал, то имели бы:

$$(1+\mu)\,v=2\beta hl\,\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}{\lambda b}\,,$$

откуда следует, что в рассматриваемом случае скорость будет уменьшена. Чтобы теперь найти, сколько составляет это уменьшение, мы положим, что если бы не было этой потери, скорость ядра была бы $\sqrt{u}$; а если имеется потеря через запальный канал, то пусть скорость ядра равна $\sqrt{v}$; отсюда получается следующее уравнение:

$$u=v+\frac{2\mu v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}\,,$$

и далее из этого уравнения получаем:

$$v=u-\frac{2\mu u\sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}}$$

и

$$\sqrt{v}=\sqrt{u}-\frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}}\,.$$

Следовательно, отношение примет вид

$$\sqrt{v}:\sqrt{u}=\left(1-\frac{\mu\sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}}\right):1\,.$$

Если теперь $\sqrt{u}$ выразить числом футов, которое ядро может проходить в секунду, то получим:

$$\sqrt{\beta h}=2700\ \text{футов}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{v} : \sqrt{u} = \left[1 - \frac{\mu\sqrt{u}}{8100m}\right] : 1,$$

а

$$\mu = \frac{2ak + nb\,(\alpha - \lambda)}{244\alpha\lambda b}.$$

Если, таким образом, ядро без этой потери будет выброшено со скоростью 1700 футов в секунду, то эта потеря должна составить

$$\frac{17\mu}{81m} \cdot 1700 \text{ футов в секунду.}$$

В предыдущем примере, где $b = 2{,}625$, $k = 4900$, $n = 1000$, $\alpha = \frac{3}{2}$ и $\lambda = \frac{9}{10}$, будет $\mu = 18{,}82$ [168], и отсюда потеря составляет

$$\frac{319{,}9}{81m} \cdot 1700 \text{ [169]},$$

что дает

$$\frac{6715}{m} \text{ [170] футов.}$$

Пусть отверстие запального канала составляет сотую часть сечения канала пушки; тогда эта потеря получилась бы 67 [171] футов в секунду, и следовательно, ядро проходило бы в секунду вместо 1700 только 1633 [172] фута. Но тут же заметим, что найденное нами выражение для потери слишком велико, потому что при последнем интегрировании было отброшено несколько членов, которые могли бы уменьшить эту потерю; и эта ошибка будет тем больше, чем больше запальный канал или чем меньше число m, потому что примененное приближение допустимо только в том случае, если m — очень большое число. Это вполне ясно видно также из выражения для потери

$$\frac{6715}{m} \text{ [170];}$$

так, если, например, m было бы только 3, потеря составила бы 2238 [173] футов в секунду. А так как вся скорость только около 1700 футов, то очевидно, что потеря должна быть много меньше 1700 футов; следовательно, ясно, что если m — не очень большое число, то найденная этим способом потеря должна быть всегда излишне большой. Поэтому если в примере положено $m=100$, то уменьшение скорости наверно много меньше чем 67 [171] футов.

Далее, полученная потеря слишком велика еще и потому, что, как мы приняли, через запальный канал прорывается только сжатый воздух, тогда как, несомненно, с ним уносится и некоторое количество твердых веществ; следовательно, движущая сила уменьшится не настолько, как это было получено вычислениями, поскольку кроме того, что движущая сила испытывает этим путем не такую большую убыль, еще уменьшается и количество твердых веществ, которые в противном случае должны были бы следовать с ядром. В соответствии с последним можно теперь легко поправить найденную формулу, если принять запальное отверстие несколько меньшим, чем оно в действительности; причем заметим, что здесь мы к запальному отверстию присоединили и зазор. Но чтобы исправить первую ошибку, что необходимо, если m — не очень большое число, нужно значение

$$e^{\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}}$$

выразить точнее, и тогда получим для него

$$1+\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{v}{2m^2\beta h}+\frac{v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}+\text{etc},$$

и следовательно,

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b}=\frac{(1+\mu)\,dv}{1-\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}-\frac{\mu v}{2m^2\beta h}-\frac{\mu v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}-\text{etc.}},$$

или преобразованием дроби приближенно получим:

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}=(1+\mu)\,dv\left[1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{\left(\mu^2+\frac{1}{2}\mu\right)v}{m^2\beta h}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\mu^3+\mu^2+\frac{1}{6}\mu\right)v\sqrt{v}}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}\right].$$

Обозначим теперь $\sqrt{u}$ скорость, которую получит ядро, если не происходит никакой потери движущей силы; тогда

$$u=v+\frac{2\mu v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}+\frac{(2\mu^2+\mu)v^2}{4m^2\beta h}+\frac{(6\mu^3+6\mu^2+\mu)v^2\sqrt{v}}{15m^3\beta h\sqrt{\beta h}}$$

и, решив это уравнение относительно $\sqrt{v}$, получим:

$$\sqrt{v}=\sqrt{u}-\frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}}+\left(\frac{1}{36}\mu^2-\frac{1}{8}\mu\right)\frac{u\sqrt{u}}{m^2\beta h}+$$

$$+\left(\frac{1}{270}\mu^3+\frac{1}{20}\mu^2-\frac{1}{30}\mu\right)\cdot\frac{uu}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}.$$

Так как $\sqrt{\beta h}$ представляет собою скорость 2700 футов, то если $\sqrt{u}$ также выразим в футах и для краткости обозначим

$$\frac{\sqrt{u}}{m\sqrt{\beta h}}=r,$$

найдем:

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}=1-\frac{1}{3}\mu r+\left(\frac{1}{36}\mu^2-\frac{1}{8}\mu\right)r^2+$$

$$+\left(\frac{1}{270}\mu^3+\frac{1}{20}\mu^2-\frac{\mu}{30}\right)r^3.$$

Так как в предыдущем примере $\mu=18{,}82$ [168] и $r=\frac{17}{27m}$, то будет

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}=1-3{,}950\cdot\frac{1}{m}+2{,}968\cdot\frac{1}{m^2}+10{,}427\cdot\frac{1}{m^3}\ [174].$$

Эта формула пригодна, когда m — не очень большое число, примерно менее 60. Так, если $m=60$, то третий член $2{,}968 \cdot \frac{1}{m^2}$ [175], умноженный на $\sqrt{u}=1700$, дает только 1,4 фута [176]. Пусть для примера $m=10$, т. е. запальное отверстие вместе с зазором составляет десятую долю всего сечения канала; тогда будет

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}=0{,}64511 \quad [177],$$

и потеря в скорости составит 603 фута [178].

Таким образом, ядро получит скорость только 1097 [179] футов в секунду. Впрочем, заметим еще здесь, что так как

$$\mu=\frac{2\alpha k+nb(\alpha-\lambda)}{244\alpha\lambda b},$$

то убыль скорости будет тем больше, чем тяжелее ядро или чем больше k, а, опираясь на это, мы можем с достаточным основанием опровергнуть один из самых веских доводов, который автор приводит в подтверждение своего мнения о том, что весь порох воспламеняется сразу в начальный момент. Так, он говорит, что если бы порох не весь сразу воспламенялся, то две или три пули, вложенные вместе, должны были бы получить пропорционально бóльшую скорость, чем одна, потому что они дольше остаются в стволе и, следовательно, подвергаются действию бóльшей силы. Хотя, впрочем, он никак не мог подтвердить это своими собственными опытами. И в самом деле, это заключение было бы вполне правильно и подкрепило бы мнение автора, если бы отсутствовало выясненное здесь влияние запального канала. Поскольку на этом основании тяжелая пуля испытывает бóльшую убыль, чем более легкая, а на вышеприведенном основании получается прямо противоположное, легко может случиться, что эти два противоположных действия либо взаимно вполне уничтожатся, либо будут так близки, что при опыте разница может остаться незамеченной.

Если теперь собрать воедино все сделанные замечания, можно будет в каждом представившемся случае не только указать причины всех возникающих обстоятельств, но и определить заранее вычислением скорость ядра.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Определить силу, движущую ядро, когда оно значительно удалено от заряда

В различных приведенных выше опытах мы помещали пулю не вплотную к пороху, а на некотором расстоянии от него, так что между зарядом и пулей было еще свободное пространство, впрочем не превышавшее полутора дюйма, и в этом случае мы наблюдали, что наша теория довольно точно согласуется с опытами. Но когда пуля помещалась дальше от пороха, на расстоянии 12, 18 или 24 дюймов, уже не имели места те начала, которые мы применяли выше, в седьмом Предложении, когда пуля вкладывалась или вплотную к пороху, или недалеко от него. В предыдущем Предложении мы видели, что если тяжелое тело не вплотную прилегает к пороху, то пламя распространяется со скоростью, значительно большей той, которую оно в состоянии непрерывно сообщать пуле. Так как порох, расширяясь в свободном пространстве в 12, 18 или 24 дюйма, приобретает весьма значительную степень скорости, то первоначальное движение пули будет происходить не единственно только от силы давления пороха, но также от сильного удара его, а потому пуля получит в начальный момент значительно бóльшую степень движения, которую можно определить как по силе удара, так и по упругой силе пороха.

Отсюда следует, что скорость пули, если она вложена довольно далеко от пороха, должна быть значительно больше той, которая была выведена выше в седьмом Предложении единственно только по упругой силе пороха. Это, согласное с теорией увеличение скорости пули, мы также подтвердили различными опытами. Мы нашли, что пуля, которая была вложена в ствол, обозначенный буквой A, в $11\frac{1}{4}$ дюйма от дна и выброшена 12 драхмами пороха, получила скорость 1400 футов в секунду, тогда как она же, приведенная в движение единственно только упругой силой пороха, достигла бы скорости только 1200 футов в секунду. Мы нашли также, что то же самое имеет место при всех других бо́льших расстояниях (а также и при меньших, хотя не в той же степени) и при всех зарядах. Все это довольно точно согласуется также и с тем, что мы изложили в предыдущем Предложении о скорости распространения как тонких, так и твердых частей пламени.

Отсюда вытекает еще другое очень большой важности соображение для артиллерийской практики, которое состоит в том, что никогда не следует вкладывать ядро на значительном расстоянии от пороха, если ствол недостаточно крепок и прочен. Так, если даже умеренный заряд пороха сперва расширится в свободном объеме и затем только достигнет ядра, то пламя вследствие уже приобретенной скорости должно сгуститься позади ядра и при этом приобрести чрезвычайно высокую степень плотности, отчего ствол, если он в этом месте не обладает чрезвычайной прочностью, непременно разорвется под действием этой возросшей силы пороха. Я проверил справедливость этого заключения также на опыте с мушкетом из высококачественного и очень мягкого железа. Когда я зарядил его 12 драхмами пороха и загнал пулю на 16 дюймов от дна, то этот ствол после выстрела точно позади пули раздулся почти вдвое и стал похож на надутый пузырь; кроме того, на нем появились две большие трещины длиной около двух дюймов.

Так как полное движение пули, помещенной достаточно далеко впереди пороха, происходит от двоякого рода действующих на нее сил, а именно: во-первых, от удара части воспламенившегося пороха, сила которого зависит от скорости, действительно полученной этой частью путем расширения, и, во-вторых, от развивающейся силы упругости, под действием которой пуля будет проталкиваться на остальном протяжении канала ствола, то я и озаботился отделить эти два различных действия одно от другого и выделить только последнее, которое происходит от развивающегося давления пламени. С этой целью для устранения действия удара я не прибил порох к дну канала, а рассыпал его по возможности равномерно по всему объему позади пули и представил себе, что таким путем скорость пламени в каждом месте будет сдерживаться вследствие разрежения соседних частей. Вложив таким образом заряд, я нашел, что пуля, которая была помещена в $11\frac{1}{4}$ дюйма от дна, вместо полученной в предыдущем опыте скорости 1400 футов в секунду теперь получила скорость только 1100 футов, что на 100 футов меньше, чем было найдено по нашей теории для случая свободно развивающегося давления пороха.

Причиной этой убыли было без сомнения внутреннее движение пламени. Поскольку при воспламенении пороха, разбросанного в значительно большем объеме, чем занимаемый им объем, необходимо должны были происходить всевозможные различные удары и отражения пламени, и вследствие этих внутренних движений тонкой упругой материи необходимо должно было весьма заметно уменьшиться давление на внутренние стенки, а следовательно, также и на пулю, как это обычно происходит в таких случаях со всеми другими жидкими материями. Чтобы избежать впредь таких колебаний силы, я во всех производившихся впоследствии опытах по возможности тщательно прибивал порох, даже когда пуля помещалась на небольшом расстоянии от него.

ЗАМЕЧАНИЕ

Исследование излагаемого в этом Предложении вопроса представляет одну из самых трудных материй, какие только могут встретиться в учении о движении жидких тел; и если бы это Предложение надлежало разработать со всей строгостью, то в настоящее время ни начала анализа, ни самые основы той науки, к которой относится это исследование, еще недостаточны, чтобы преодолеть встречающиеся тут трудности. Здесь рассматривается случай, когда ядро не вплотную лежит к пороху, а между порохом и ядром оставлено свободным некоторое пространство. Если бы это пространство было совершенно пустым и в нем совсем отсутствовал воздух, то после воспламенения освободившийся при этом сжатый воздух, в соответствии с описанным в предыдущих Предложениях способом вполне свободно расширялся бы до тех пор, пока передние его части не достигли ядра. И в этом случае не представило бы затруднений определить по изложенным выше правилам как упругую силу сжатого воздуха в момент, когда она начинает действовать на ядро, так и скорость всех его частей. Но так как в действительности на ядро действует двойная сила: первая, представляющая упругую силу сжатого воздуха и проталкивающая ядро до тех пор, пока оно не будет выброшено из ствола, и вторая, происходящая от силы удара и производящая свое действие на ядро как бы мгновенно,— то действие первой силы может быть определено по изложенным тут правилам, как это уже раньше имело место. Однако в определении действия другой силы имеются такие большие трудности, которые пока еще не могут быть вполне устранены. Хотя этот вопрос относится к учению о движении, происходящем при ударе, и, следовательно, поскольку это учение уже достаточно развито, никаких особо больших затруднений не представляет, однако, так как в этом случае должны быть известны как вес, так и скорость ударяющихся тел, легко видеть, что в рассматриваемой задаче обе эти величины совершенно неизвестны. Так, поскольку здесь ударяющим телом является расширяющийся воздух, то нельзя принимать ни вес всей его массы за вес ударяющего тела, ни скорость его передних частей за его скорость. Чтобы яснее это представить, можно принять, что, в то время как передние частицы сжатого воздуха ударяют в ядро, задние принимают в этом лишь незначительное участие, поскольку движение их ослаблено. А так как они все же еще могут некоторым образом продолжать свое движение, то это будет равносильно тому, как если бы часть их уже не принадлежала к массе ударяющих тел. Но определить, какова величина этой части, и есть то, в чем состоят наибольшие трудности. Впрочем, мы не слишком отклонимся от истины, если эту искомую часть примем равной четверти или трети. Итак, положив, что (рис. 9) ядро сначала находилось в ZZ, а заряд заполнял объем AC, обозначим: $AC=b$, $AZ=f$; тогда вес заряда будет приблизительно равен весу столба естественного воздуха высотой $1000\,b$, если считать, что порох ровно в 1000 раз тяжелее воздуха; его половина, следовательно, будет действовать на ядро, вес которого выражается весом воздушного столба высотой k. Но поскольку после воспламенения пламя распространится до ZZ, оно получит скорость, которая, как следует из вышеизложенного, получится из высоты равной

$$\frac{2\alpha}{n(\alpha-\lambda)+244\,\alpha\lambda}\cdot 244\beta\lambda h\cdot\frac{\alpha f-(\alpha-\lambda)\,b}{\lambda b},$$

где $\alpha=\frac{3}{2}$, $n=1000$, $244\beta=1000$ и λ означает воспламенившуюся часть пороха (мы примем $\lambda=\frac{9}{10}$), а h есть высота столба естественного воздуха, вес которого равен упругости естественного воздуха. Поэтому та высота, через которую выражена скорость пламени в Z, будет

$$\frac{90}{31}hl\frac{5f-2b}{3b},$$

и, следовательно, сама скорость будет равна

$$\sqrt{\frac{90}{31}hl\frac{5f-2b}{3b}}.$$

Теперь, так как ядро вначале находилось в покое, то по известным правилам надо составить следующее равенство: как сумма $500b+k$ для обоих тел относится к $500b$ для ударяющего тела, так скорость ударяющего тела

$$\sqrt{\frac{90}{31}hl\frac{5f-2b}{3b}}$$

относится к скорости обоих тел после удара; поэтому скорость ядра после удара будет

$$\frac{500b}{k+500b}\sqrt{\frac{90h}{31}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}}\,.$$

Если бы от массы пороха взяли меньшую часть чем половину, то следовало бы вместо $500b$ взять меньшее число. Если мы примем $310b$, то $k+310b$ даст точно такой же знаменатель

$$\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b \quad [180],$$

какой выше был найден в седьмом Замечании к предыдущему Предложению, и эта согласованность тоже служит веским указанием на то, что число $310b$ показывает правильную часть. Итак, следовательно, мы получим для высоты, которая соответствует скорости ядра, следующее выражение:

$$\frac{310\cdot 900b^2h}{(k+310b)^2}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}=\frac{279\,000b^2h}{(k+310b)^2}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}\,.$$

Но если бы ядро вначале лежало вплотную к пороху, то, после того как оно продвинулось до ZZ, оно получило бы скорость, которая находится из высоты

$$\frac{900bh}{k+310b}\,l\,\frac{5f-2b}{3b} \quad [181].$$

Следовательно, эта скорость будет относиться к прежней, как 1 к $\sqrt{\frac{310b}{k+310b}}$; итак, сообщенная ядру при ударе скорость гораздо меньше той, которую оно имело бы в Z, если бы было помещено вплотную к пороху. Теперь, если эта скорость, достигнутая при ударе, правильна, то легко будет определить последующее ее увеличение под действием упругой силы. Для этого мы только возьмем найденное выше уравнение, которое, после того как отбросим ничтожно малые члены и вместо α, λ, β и n подставим соответствующие им значения, представится в таком виде:

$$v=\frac{900bh}{k+310b}\,l\,\frac{5x-2b}{3b}\,;$$

и к этому еще прибавится постоянная величина, которая должна быть такой, что при $x=f$ высота v обратится в величину

$$\frac{279\,000bbh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}.$$

Таким образом, v означает высоту, соответствующую скорости ядра, после того как оно будет продвинуто до MM, где $AM=x$, и тогда будем иметь следующее уравнение:

$$v=\frac{900bh}{k+310b}\, l\, \frac{5x-2b}{3b}+C.$$

Теперь для определения величины C положим $x=f$ и

$$v=\frac{279\,000bbh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b};$$

тогда получим:

$$\frac{279\,000bbh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}=\frac{900bkh}{k+310b}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}+C,$$

откуда

$$C=\frac{-900bkh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}.$$

Следовательно, получим:

$$v=\frac{900bh}{k+310b}\, l\, \frac{5x-2b}{3b}-\frac{900bkh}{(k+310b)^2}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}.$$

Но если бы ядро не получило удара в ZZ, а продвигалось бы единственно только под действием упругой силы, то было бы

$$C=\frac{-900bh}{k+310b}\, l\, \frac{5f-2b}{3b} \qquad [182],$$

и, таким образом,

$$v=\frac{900bh}{k+310b}\, l\, \frac{5x-2b}{3b}-\frac{900bh}{k+310b}\, l\, \frac{5f-2b}{3b}.$$

Но если бы ядро вначале прилегало вплотную к пороху, то мы получили бы

$$v=\frac{900bh}{k+310b}\, l\, \frac{5x-2b}{3b}.$$

Теперь если мы вместо x подставим длину всего канала a и для приведенного автором примера примем $a=45$, $b=2{,}625$, $f=11{,}25$, $k=4900$ и $lh=7{,}463893$, то сможем определить три различных скорости следующим образом:

$$\frac{900b}{k+310b}=\frac{236\,250}{571\,375} \quad [183],$$

$$\frac{900bk}{(k+310b)^2}=\frac{490\,000}{571\,375}\cdot\frac{236\,250}{571\,375} \quad [184]$$

или

$$\frac{900b}{k+310b}=0{,}41348 \quad [185],$$

$$\frac{900bk}{(k+310b)^2}=0{,}35459 \quad [186],$$

и

$$\frac{5x-2b}{3b}=27{,}905,$$

$$\frac{5f-2b}{3b}=6{,}476 \quad [187].$$

Следовательно,

$$l\;27{,}905=1{,}445682,$$

$$l\;6{,}476=0{,}811307 \quad [188],$$

$$l\;1{,}445682=0{,}160073 \quad [189],$$

$$l\;0{,}811307=9{,}909185 \quad [190].$$

Прибавляя 0,362216 [191], имеем:

$$ll\,\frac{5x-2b}{3b}=0{,}522289 \quad [192],$$

$$ll\,\frac{5f-2b}{3b}=0{,}271401 \quad [193],$$

так что получаем:

$$\frac{900b}{k+310b}\cdot l\,\frac{5x-2b}{3b}=1{,}37639,$$

$$\frac{900b}{k+310b}\cdot l\,\frac{5f-2b}{3b}=0{,}77243 \quad [194],$$

$$\frac{900bk}{(k+310b)^2}\cdot l\,\frac{5f-2b}{3b}=0{,}66242 \quad [195].$$

Итак, если вначале пуля была вложена вплотную к пороху, то $v=1{,}37639h$ и скорость составит 1582 фута в секунду. Но если пуля вначале находилась в ZZ и порох в объеме AZ был так рассыпан, что пуля не получила толчка, то

$$v=0{,}60395h$$ [196]

и в этом случае скорость составит 1048 [197] футов в секунду. Но если ядро в ZZ сразу получит удар от пороха, тогда

$$v=0{,}71396\,h$$ [198]

и соответствующая скорость составит 1140 [199] футов в секунду.

Но тут же заметим, что формула, по которой определяется эта скорость, несколько сокращена, поэтому находимые по ней числа должны быть несколько увеличены. К тому же видно, что в последнем случае скорость пули, когда она начинает движение под действием удара пороха, много меньше, чем показывает опыт. Но если обратить внимание на обстоятельства, сопровождавшие удар, то нетрудно увидеть, что при ударе тонкая материя должна очень сильно сгуститься позади ядра и, следовательно, получить значительно бóльшую степень упругости, отчего, таким образом, пуле должна быть сообщена и значительно бóльшая степень скорости. Что же касается раздутия и разрыва ствола, то причину этого легко понять. Поскольку пуле при ударе была придана как бы в один момент значительная скорость, ясно, что сжимающая сила, которая могла за такое короткое время придать пуле такую степень скорости, должна была чрезвычайно возрасти; и возможно, что сила в 10 раз бóльшая, чем обычно одна только действующая на пулю упругая сила пороха, еще недостаточна, чтобы произвести такое действие. Поскольку пушечный или мушкетный ствол изготовлен в таком месте лишь настолько прочным, как то требуется, чтобы он мог выдержать обычно развиваемую упругую силу пороха, то не удивительно, что при таком большом возрастании силы обыкновенный ствол разорвется или раздуется, как и случилось в приведенном автором примере.

Если бы пуля не получила этого удара, то по нашему вычислению она получила бы скорость 1048 [200] рейнских футов в секунду, что составляет в английских футах 1080 [201] и, следовательно, с 1100 футами, которые получены из опыта, согласуется настолько точно, что наша формула, которая была здесь применена, лишь немного занижена. Если же автор нашел для этого случая скорость 1200 футов, то либо в его вычисления вкралась ошибка, либо причиной этого, и это всего вероятнее, является неправильность теории самого автора, потому что он не учитывает силу, необходимую для движения пламени. Тут дело обстоит так, что отпадают и его объяснения, которыми он хотел истолковать уменьшение в этом случае скорости пули; на самом деле никак не могло бы произойти действие, которое приводит автор, потому что хотя Предложение, согласно которому упругая сила жидкой упругой материи будет меньше, если в ней происходит внутреннее движение между ее частями, бесспорно правильно, однако легко допустить, что в случае, когда порох разбросан по всему объему позади пули, внутреннее движение в пламени должно тотчас прекратиться, как только оно начнет действовать на пулю.

Но еще ранее, при рассмотрении движения пули, вложенной не вплотную к пороху, мы приняли, что пространство между порохом и пулей совершенно пустое, а так как в нем все же находится естественный воздух, то в сделанное заключение потребуется внести незначительную поправку, потому что сразу же после воспламенения пламя начинает расширяться, а находящийся между порохом и пулей воздух будет сжиматься и получит, следовательно, силу для продвижения пули, таким образом, что пуля действительно будет приведена в движение, прежде чем ее непосредственно достигнет пламя и произведет в нее удар. И в этом, по-видимому, заключается основная причина того, что пуля получит более быстрое движение, чем то, которое было найдено в вышеприведенном вычислении.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Привести различные сорта пороха и указать надежнейший способ испытания его добротности

До сих пор мы рассматривали порох, который обычно приготовляется для государственных потребностей. Но, кроме этого, имеются еще различные другие сорта, из которых одни лучше, другие хуже, и о которых я намерен сообщить лишь некоторые данные, насколько я был в состоянии исследовать эти пороха.

Прежде всего я должен сказать, что, по моему мнению, государственный порох, если только он хорошо изготовлен, настолько добротен, насколько вообще может быть добротен порох, изготовленный для всеобщего употребления. Я испытывал его с большой тщательностью и сравнивал с другими сортами пороха, которые изготовляются здесь в Англии и считаются, подобно военному пороху, лучшими, и не мог заметить между ними никакой сколько-нибудь значительной разницы. Я сравнивал его также путем нескольких опытов с известным испанским порохом, который был на «Сант Яго» [202], и хотя действительно нахожу испанский порох лучшим, но все же разница между этими порохами составляет около одной пятнадцатой или одной шестнадцатой и, следовательно, слишком мала, чтобы можно было утверждать это с полной уверенностью. Когда я сравниваю опыты других со своими, то нахожу, что французский порох очень мало отличается от нашего: впрочем, я не могу быть в этом так уверенным, как желал бы, потому что никак не мог достать сколько-нибудь этого пороха. Но при этом я должен еще раз повторить, что если говорю о порохе нашего государства, то понимаю под ним тот, который содержит вещества в установленной пропорции и тщательно отработан: этого же сорта был тот порох, которым я пользовался в своих опытах.

Самый сильный порох, с которым я когда-либо обращался, был, как меня поставили в известность, того сорта, который изготовлялся в Голландии. Его сила относится к силе пороха нашего государства, почти как 5 к 4. Однако этот порох изготовлен, несомненно, из тщательно очищенных и превосходных по качеству материалов и, по всей видимости, еще обработанных чистым спиртом, таким образом, что при изготовлении его в больших количествах издержки значительно перевешивают такое увеличение силы. Лучший порох, который после этого попадался мне, изготовлен в Португалии под руководством одного голландца, который несколько лет тому назад построил под Лиссабоном пороховые мельницы. Этот порох несколько слабее, чем вышеупомянутый голландский и ближе к нашему государственному пороху.

Обыкновенный рыночный порох, который здесь в Англии продается в мелочных лавках, не только значительно слабее, чем государственный или военный порох, но и слишком разнообразен, соответственно усмотрению тех, кто его изготовляет. Я испытал из них несколько сортов, сила которых относилась к силе государственного пороха приблизительно как 2 к 3; но попадались среди них такие сорта, которые были еще слабее. Однако из всех разнообразных сортов есть такой наихудший, который изготовляется для торговли в Африке и который обыкновенно называют гвинейским порохом. Но такие пороха вовсе не заслуживают тщательного исследования, потому что при их изготовлении не соблюдаются никакие сколько-нибудь определенные и строго установленные правила.

Различие в силе пороха может зависеть от трех причин: во-первых, от качества материалов, из которых он изготовляется, во-вторых, от пропорции, которая соблюдается при его смешении, в-третьих, от способа его обработки.

Порох состоит, как каждый это достаточно хорошо знает, из селитры, серы и угля. Из этих веществ самые дешевые — сера и уголь. И хотя среди них есть некоторые сорта, которые сравнительно с другими более подходят для этой цели, но, если взять лучший из них, разница все-таки будет настолько незначительной по сравнению с общими издержками, затрачиваемыми на изготовление пороха, что было бы просто нелепо, если порох, который мог бы иначе быть хорошим, будет испорчен из-за плохой серы или угля.

Самым дорогостоящим материалом при изготовлении пороха является селитра, и именно в этом заключается наибольший недостаток пороха. Селитра же есть не что иное, как вещество, которое образуется из воздуха в земле, потому что если некоторое количество земли, из которой уже извлечена селитра, будет снова выставлено на какое-то время на воздух, в ней снова образуется селитра; и это происходит так часто, как часто повторяют опыт.

Селитра сама по себе — вещество негорючее, потому что положенная в сильнейший огонь, она только плавится и никак не загорается, по крайней мере пока не примешают к ней какое-нибудь горючее вещество. И хотя она сама, не смешанная с другими веществами, не воспламеняется, не горит, но, будучи смешана с горючими веществами, она совершенно необычайным образом увеличивает стремительность воспламенения и производит в этом случае более сильное действие, чем то способен произвести воздух, если он вдувается несколькими мехами и смешивается с огнем.

Так как порох состоит, во-первых, из серы и угля, которые являются горючими веществами, и из селитры — негорючего вещества, то ясно, что, когда количество селитры по отношению к двум другим веществам взято слишком большим, воспламенение не будет настолько значительно, чтобы использовать всю селитру. Поэтому огонь в этом случае не будет таким действенным и, следовательно, порох, как было замечено в десятом Предложении, не будет столь сильным, каким бы он был, если бы от него отняли часть селитры, а вместо нее положили такое же количество других составляющих веществ.

Если же, наоборот, положить в порох меньше селитры, которая легко может быть уничтожена двумя другими веществами, огонь не будет столь интенсивным, каким он должен быть, потому что он не достигнет такой высокой ступени, как произошло бы, если бы при смешении было взято большее количество селитры.

Отсюда ясно, что о добротности пороха следует судить не только по количеству находящейся в нем селитры, хотя это вещество и представляет собой источник тонкой упругой материи, в которой содержится вся его сила. Поскольку и превращение селитры в эту тонкую упругую материю, и происходящая от этого угругая сила определенным образом зависят от силы пламени, с чем связано воспламенение, то ясно, что это должна дать такая пропорция смеси этих веществ, которая будет наиболее подходящей для означенной цели и, следовательно, даст лучший сорт пороха.

Найти эту пропорцию представляется возможным только опытным путем, и, по-видимому, теперь принято как общее правило, что в данном количестве пороха должно находиться три четверти селитры, а остальная четверть должна состоять из равных частей серы и угля. Это соотношение соблюдается не только французами, но и большинством народов в Европе; мы, напротив, позволяем себе более точное определение требуемых частей для этой смеси, хотя оно незаметно отличается от упомянутых, и я тоже не уверен в том, что оно имеет какое-нибудь преимущество. По крайней мере, среди испытанных сортов пороха у нас в Англии нельзя обнаружить между ними какую-нибудь разницу; и другие сорта порохов, которые изготовлены по обычной пропорции, нисколько не уступают нашим.

Но чтобы изготовить вполне добротный порох, недостаточно только соблюдать надлежащую пропорцию материалов: тут многое зависит от другого обстоятельства не менее значительной важности, которое состоит в том, что материалы эти должны быть очень тщательно между собою перемешаны, потому что, если на это не будет обращено внимание, получится так, что некоторые части пороха будет содержать в себе слишком много селитры, а другие слишком мало; но в обоих случаях сила пороха будет ослаблена.

Так как добротность пороха зависит от столь различных обстоятельств, а именно от качества и количества веществ, из которых он будет изготовлен, и от самого способа смещения, то без сомнения является делом большой важности, чтобы те, которые принимают порох в общественные магазины, имели бы надежный способ убеждаться в его качестве. В нашей стране обычный способ достижения этой цели состоит в том, если я правильно излагаю, что поджигают щепотку испытуемого пороха на чистой доске и внимательно наблюдают как за пламенем и дымом, которые при этом образуются, так равно и за следами, остающимися на доске: на основе этих примечаемых обстоятельств можно, как утверждают, очень точно судить о добротности пороха. Однако, кроме этого столь ненадежного способа, который, быть может, и очень в ходу, но я думаю, что никто из рассудительных не станет его всерьез одобрять, иногда в особых случаях применяют еще другие способы испытаний пороха, имеющие близкое сходство с пробой обычными пробными пистолетами [203], которые продаются в мелочных лавках. Имеются для этого и такие мастерски разработанные приборы, которые вместо пружины приводят в движение груз, показывающий силу пороха более точно и однообразно [204].

Эти приборы, хотя и более совершенные, чем обычные пробные пистолеты, все же подвержены весьма большим неточностям. Поскольку они приводятся в действие только начальным толчком пламени, и развивающаяся затем упругая сила не оказывает уже никакого влияния, они тоже не могут указать действительную силу воспламененного пороха с той точностью и однообразием, как их обычно ожидают от этого рода испытаний. Поэтому я вынужден признать, что значительно вернее способ, который применяется во Франции и по которому там обычно принимается порох с пороховых мельниц. А поступают там следующим образом.

В каждом магазине имеется небольшая литая мортирка с приложенным к ней станком определенного образца, который установлен единым для всего королевства [205]. Эта мортирка всегда наклонена под углом 45° и вмещает точно три унции пороха. Тут твердо соблюдается такое правило, что никакой порох не будет принят в магазины, три унции которого, всыпанные в зарядную ка́мору мортирки, не выбросят массивное ядро диаметром $7^1/_2$ дюймов по крайней мере на 55 туазов [206].

Против этого способа возражают, что если нужно таким способом подвергнуть испытанию каждый бочонок пороха, то нестерпимы трудности как в заряжании каждый раз мортирки, так и в приносе назад ядра, и потеря времени становится так велика, что при подобной работе и конца ее не видно. А если бы пожелали принять большое число бочек по пробе, произведенной в нескольких из них, то рисковали бы тем, что среди всех могут оказаться некоторые плохие, а это может привести к обмену. К этим трудностям присоединяется и другая, еще более значительная: она состоит в отсутствии соответствия между весом ядра и количеством пороха, которое выбрасывает ядро; порох оказывает действие значительно дольше, чем это обычно происходит при его действительном употреблении. К тому же это время довольно значительно для того, чтобы уменьшилась теплота пламени и бо́льшая часть его прорвалась через запальный канал и зазор ядра; таким образом, количество движения, которое в этом случае будет получено при воспламенении пороха, составит лишь немногим больше половины того, каким оно должно было бы быть, если бы порох действовал на ядро полной своей силой и при отсутствии указанного обстоятельства, которое приводит к ослаблению силы. Так как по этим причинам движущая сила пороха не может уменьшаться по какому-либо строго определенному закону, то ввиду изменчивости этого обстоятельства, может происходить то, что ядро будет выбрасываться на весьма разнообразные расстояния и, следовательно, ничего надежного о силе пороха нельзя будет заключить.

Это последнее возражение вполне отпадет, если воспользоваться способом, посредством которого я испытывал силу разнообразных сортов пороха путем определения действительной скорости, с которой выбрасывается пуля при обыкновенном заряде. Так как эта скорость, как бы она ни была велика, может быть легко определена по вышеприведенным началам из движения, которое будет сообщено маятнику ударом пули, то этот способ кажется настолько более совершенным, чем способ, применяемый во Франции, что может быть введен взамен последнего. Хоть я и уверен, что испытание при помощи маятника гораздо правильнее и не так мешкотно и производилось бы много скорее, но так как этот способ потребовал бы большого внимания и аккуратности, то на практике он оказался бы весьма неудобным, когда при большом числе бочек надо было бы каждую отдельно подвергать испытанию; а потому я хочу предложить другой способ, который не менее надежен и может быть налажен в деле с такой быстротой, что бо́льшая часть работы будет состоять единственно только в отвешивании определенного количества пороха, который должен быть взят из каждой бочки. И при этом способе было бы достаточно трех или четырех человек, чтобы в одно утро проверить до 500 бочек. Кроме того, можно требуемые для этой цели приборы изготовить из чугуна и ввиду их дешевизны очень легко при желании размножить. Но я не дам здесь описания этого способа испытания пороха, отложив это на другое время, и перейду непосредственно к рассмотрению сопротивления воздуха, что представляет собою вопрос огромной важности для усовершенствования и развития артиллерии.

ЗАМЕЧАНИЕ

Сила пороха зависит, как это достаточно выяснено, от двух факторов: во-первых, от количества тонкой упругой материи, которая, как было доказано, одинакова с воздухом и которая выделяется при воспламенении данного количества пороха, и, во-вторых, от быстроты самого воспламенения. Таким образом, чем больше содержится в порохе воздуха и чем больше его плотность, тем, следовательно, будет больше и упругая сила, в которой состоит сила пороха. Отсюда уже можно вывести и все то, что было выше сказано о твердой материи пламени, которая должна приходить в движение и этим уменьшать движущую силу пороха. Так, чем больше воздуха будет выделено из данного количества пороха, тем необходимо меньше должен быть остаток, который состоит из твердой материи. Поэтому от такого пороха, в котором содержится наибольшее количество сжатого воздуха, ожидают двойной выгоды, так как он не только развивает бо́льшую упругую силу, но и выделяет меньшее количество твердой материи, которая тотчас же должна быть приведена в движение. Затем, от быстроты воспламенения зависит то, насколько быстро заключенный воздух освободится от своих связей и окажется в состоянии произвести действие своей силы. Чем, следовательно, быстрее воспламенение распространится на весь порох, тем будет больше и сила, которая из него образуется; а потому наибольшая сила, которая действует на ядро и продолжает все время действовать на него, проявляется точно в начальный момент. Но быстрота воспламенения способствует увеличению упругой силы еще и по другой причине, потому что, чем быстрее воспламеняется порох, тем больше будет и появляющийся при этом жар. А поскольку под влиянием жара, как мы выше видели, упругость воздуха весьма заметно возрастает, то и получается очень большое приращение силы пороха. Следовательно, чтобы получить полное знание силы любого сорта пороха, необходимо знать, во-первых, сколько воздуха содержится в данном количестве пороха и затем, во-вторых, сколько при этом проходит времени, в течение которого воспламенение распространится на весь порох. Первое можно определить из опыта тем способом, который автор привел в первом Предложении этой главы; но о последнем нельзя достигнуть полного знания, потому что время, в течение которого происходит полное воспламенение, слишком короткое и притом основывается на таком шатком обстоятельстве, что, по всей видимости, оно никогда одинаковым не будет. Поэтому мы соберем все изложенное выше по первому пункту и примем все это в рассмотрение. Автор ставил свои опыты над тем сортом пороха, который в Англии обычно изготовляется для государственных потребностей, и определял количество заключенного в нем воздуха двумя способами: по объему и по весу. По первому способу он нашел, что в одном кубическом дюйме пороха содержится воздух, который после расширения до одинаковой с естественным воздухом степени плотности заполняет объем в 244 кубических дюйма. Так как в одном кубическом дюйме пороха содержится 244 кубических дюйма естественного воздуха в сильно сжатом состоянии, то ясно, что если в пушечном или мушкетном стволе длина заполненного порохом объема AC (рис. 9), положим, равна b, то заключенный в нем воздух будет иметь объем, равный объему цилиндра, поперечное сечение которого одинаково с поперечным сечением канала CC, а длина равна 244 b. Но после того, как автор сравнил вес этого содержащегося в порохе воздуха с полным весом пороха, он нашел, что первый относится к второму, как 3 к 10. Так как в предыдущем случае вес заключенного воздуха был равен весу воздушного столба, высота которого равна $244b$, то вес целого заряда пороха должен равняться весу столба естественного воздуха высотой $\frac{10}{3}\cdot 244\,b = 813\,b$. Следовательно, твердые части, из которых состоит порох, равны весу воздушного столба высотой $569b$. Так как эти твердые части при воспламенении не расширяются, то, положив, что воздух в пороховых зернах в 800 раз плотнее естественного воздуха и первоначально находился в объеме AC, длина которого равна $\frac{244}{800}b$, получим остаток $\frac{556}{800}b$, который и состоит частью из твердой материи пороховых зерен, частью из воздуха, находящегося между зернами. Если, следовательно, допустим, что промежутки между пороховыми зернами составляют пятую часть всего объема, то твердая материя пороха занимает остальной объем, длина которого равна $\frac{396}{800}b$, и точно такой же объем должна непременно занимать твердая материя после воспламенения пороха. Чтобы теперь сравнить с этим сортом пороха, другие сорта, мы допустим, что вес воздуха, содержащегося в другом сорте пороха, равен весу столба естественного воздуха длиной mb, если b означает длину объема AC, и что вес всего пороха равен весу воздушного столба высотой nb. Если принять, кроме того, что воздух, содержащийся постоянно в порах пороховых зерен, в 800 раз плотнее естественного воздуха, то перед воспламенением он должен занимать объем длиной $\frac{m}{800}\,b$; следовательно, если для промежутков примем опять пятую часть, то на твердую материю придется остальной объем длиной

$$\frac{640-m}{800}\,b.$$

Если мы хотим теперь знать, каковы могут быть различные значения m и n в скорости пули, надо в этом случае только произвести вычисление. Пусть длина всего канала ствола $AB=a$; k — высота воздушного столба, вес которого равен весу ядра, и h — высота воздушного столба, вес которого равен упругости естественного воздуха. Положим $AM=x$, и после того как ядро будет уже продвинуто из CC в MM, пусть его скорость равна $\sqrt{v}$, таким образом, что за то время, как ядро пройдет $Mm=dx$, высота v увеличится на dv. Чтобы теперь сообщить ядру это увеличение скорости, потребуется сила, которая равна весу воздушного столба $\frac{k\,dv}{dx}$. Так как, кроме того, твердые и тонкие части пороха общим весом равны весу воздушного столба высотой nb, то требуемая для ускорения этой материи сила будет равна $\frac{nb\,dv}{2dx}$; эта формула будет иметь место независимо от того, распределена ли твердая материя равномерно во всем объеме AM или, как мы выше приняли, одна ее половина продвигается вслед за ядром, а другая остается у дна AA. Значит, если к тому же от всей материи пороха ничего не уходит потерянным через запальный канал и зазор, то сила, которая потребуется для ускорения как ядра, так и самого пороха, будет равна

$$\left(k+\frac{1}{2}nb\right)\frac{dv}{dx},$$

независимо от того, мгновенно ли воспламенился порох или нет.

Допустим, что весь порох мгновенно воспламенился в начальный момент; тогда из него образуется цилиндр воздуха высотой mb, который вместе с твердой материей находится в объеме AM. Так как теперь только твердая материя занимает объем, равный $\frac{640-m}{800}b$, то для воздуха останется

$$x-\frac{(640-m)b}{800}.$$

Следовательно, во сколько раз величина $x-\frac{(640-m)b}{800}$ меньше, чем mb, во столько раз этот воздух будет плотнее, чем естественный. Положим для краткости

$$\frac{800mb}{800x-(640-m)b}=s;$$

тогда плотность сжатого воздуха в AM будет в s раз больше, чем плотность естественного, и, следовательно, его плотность выразится высотой столба естественного воздуха, высота которого равна

$$h\left(s+\frac{ss}{6q}\right)=h\left(s+\frac{ss}{4800}\right),$$

если мы для q, как высшей степени плотности воздуха, примем значение 800. Но эта высота должна вследствие нагревания еще быть умножена на β, значение которой приблизительно равно 4. Отсюда, следовательно, если будет принято в рассмотрение противодавление и сопротивление наружного воздуха, получается следующее уравнение:

$$\left(k+\frac{1}{2}nb\right)\frac{dv}{dx}=\beta h\left(s+\frac{ss}{4800}\right)-h-\frac{1}{2}v,$$

которое, если пренебречь ничтожно малыми членами, даст после интегрирования следующее уравнение:

$$\left(k+\frac{1}{2}nb\right)v=\beta mbhl\,\frac{800x-640b+mb}{160b+mb}\,,$$

или

$$v\,\frac{\beta mbh}{k+\frac{1}{2}nb}\,l\,\frac{800x-640b+mb}{160b+mb}\,.$$

Отсюда видно, таким образом, что скорость получается тем больше и, следовательно, порох будет тем лучше, чем больше число m и чем меньше число n, т. е. чем больше воздуха заключено в данном количестве пороха, и чем легче притом сам порох. Хотя, впрочем, что касается последнего обстоятельства, то оно дает очень мало и им можно даже вовсе пренебречь, так как почти все пороха имеют одинаковый удельный вес, и он не может быть уменьшен. Но если бы даже было возможно незначительное уменьшение его веса, то все-таки не получилось бы никакого заметного увеличения скорости пули; следовательно, все зависит главным образом от величины числа m, которым обозначено количество заключенного в порохе воздуха. Поэтому если бы у всех сортов пороха воспламенение происходило мгновенно, как это утверждает наш автор, то о добротности пороха можно было бы судить по величине числа m. Так как при испытании государственного пороха автор нашел значение этого числа $m=244$, то какой-нибудь из сортов пороха, для которого m больше чем 244, должен считаться более сильным, а тот, который имеет меньшее значение m, более слабым. Отсюда, следовательно, можно было бы прийти к правильному способу испытания добротности пороха, который состоял бы в проведении тех опытов, которые предложил автор для определения числа m; однако это испытание вследствие ряда обстоятельств, которые при этом должны быть приняты во внимание, слишком медлительно и мешкотно. Но если бы весь порох загорался сразу, как тут было принято автором, то можно бы еще много легче достигнуть этой цели. В этом случае было бы достаточно заметить только самое первоначальное действие, которое порох производит по воспламенении; и с этой целью можно было бы с большой выгодой пользоваться обыкновенными пробными мортирками, посредством которых добротность пороха обычно определяется по высоте, на которую силой пороха подбрасывается груз [204]. Сам автор ничего не возражает против этого общепринятого способа испытания пороха, кроме разве того, что этим будет указана только начальная сила его. Но если весь порох воспламеняется мгновенно, как это утверждает сам автор, то развиваемая упругая сила зависит единственно только от начальной силы, так что чем бо́льшей или меньшей эта сила будет определена в начальный момент, тем соответственно бо́льшей или меньшей должна быть и вся сила пороха. А потому если автор склонен считать этот общепринятый способ пороховой пробы неточным, то он сам себе противоречит, так как тут он отрицает или, по крайней мере, берет под сомнение мгновенность воспламенения пороха, как раз то, что он до этого все время так упорно отстаивал. Хотя на этот счет мы придерживаемся мнения, противоположного его мнению, мы не можем совсем отрицать пользу этого общепринятого способа испытания, если только приборы изготовлены с надлежащей тщательностью, потому что если даже не весь порох воспламеняется мгновенно в начальный момент, то все-таки полная сила его зависит главным образом от силы первоначального толчка; и если время, требуемое для полного воспламенения равных количеств пороха, одинаково, можно также правильно судить по первому толчку о полной силе пороха. Если же это время окажется неодинаковым, надо будет так изменить обычную пороховую пробу, чтобы порох мог в течение некоторого времени действовать на тело, которое приводится в движение; и такое усовершенствование было бы, по-видимому, нетрудно осуществить. Возможно, новый способ автора испытывать порох, о котором он умалчивает, состоит не в чем ином, как только в надлежащем улучшении обычных пороховых проб; и любой искусный мастер легко может добиться этого путем ряда опытов. Все дело состояло бы именно в том, чтобы ка́моры, в которые закладывается порох, делать более глубокими и придать им цилиндрическую форму, с тем чтобы порох не заполнял весь их объем. Кроме того, груз, который выбрасывается в высоту, следует изготовлять в виде пробки, чтобы он нижним своим концом плотно входил в канал и мог быть продвинут внутрь до пороха. Таким образом, на этот груз могла бы действовать сила пороха не только в начальный момент, но и вплоть до того, пока он не будет совершенно выброшен из канала. И так как вес этого груза по отношению к незначительному количеству пороха, который употребляется для испытания, очень велик, и следовательно, не может быть приведен в весьма быстрое движение, то возможно, что будет достаточно, если только нижний его конец сделать очень коротким в виде пробки, потому что, до того как он будет выброшен наружу, пройдет уже столько времени, что при этом успеет воспламениться весь порох или по крайней мере в такой пропорции, как это обычно происходит в пушках.

ГЛАВА ВТОРАЯ

О СОПРОТИВЛЕНИИ ВОЗДУХА И О ТРАЕКТОРИИ, ОПИСЫВАЕМОЙ В ВОЗДУХЕ ЯДРОМ ИЛИ БОМБОЙ

Прежде чем приступить со всем старанием к изложению предмета, составляющего содержание этой главы, я полагаю необходимым напомнить, что почти все авторы, писавшие об этом предмете, брали за определенное и безусловное правило, что, пока тело движется в одной и той же текучей среде, сопротивление, встречаемое им, будет всегда пропорционально квадратам его скоростей. То есть, когда скорость этого тела в каком-нибудь месте движения в три раза больше, чем в другом, то сопротивление в первом месте будет в девять раз больше, чем в последнем. И если скорость была в каком-нибудь месте в четыре раза больше, чем в другом, то сопротивление при большей скорости должно бы быть в 16 раз больше, чем при меньшей, и т. д. Хотя это правило, если его рассматривать как общее, весьма заметно, как это будет в дальнейшем ясно доказано, отклоняется от действительности, но все же оно вполне к ней приблизится, если будет ограничено определенными рамками. Поэтому в своих дальнейших исследованиях мы будем им пользоваться, как верным, если разница между различными скоростями тела, которое подвергается сопротивлению, очень мала. Следовательно, когда мы в дальнейшем будем говорить, что сопротивление текучей среды только вследствие изменения скоростей стало больше или меньше, то под этим не следует понимать увеличение или уменьшение сопротивления, как оно имело бы место на основе этого правила; мы хотели бы этим сказать только то, что сопротивление тела стало больше или меньше, чем это следовало бы по данному правилу, или же под этим нужно будет понимать увеличение или уменьшение силы сопротивления самой текучей среды, что обычно имеет место, если будет увеличена или уменьшена плотность этой текучей среды, поскольку важнейшей целью нашего настоящего изыскания является то, чтобы неопровержимо доказать, что всякие изменения в силе сопротивления, происходящие вследствие различных причин — как взаимного сжатия текучей среды, так и скорости движущегося в ней тела,— вряд ли могли бы получиться на основании общепринятых положений, даже если допустить, что плотность стала в три раза больше. И это положение мы будем доказывать в последующем изложении столь убедительным образом, чтобы в справедливости его не оставалось ни малейшего сомнения.

ПЕРВОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Изложение и установление общих основных положений о сопротивлении, которое текучая среда оказывает движущимся в ней твердым телам

Для того чтобы иметь ясное представление о противодействии текучей среды, которое испытывают движущиеся в ней тела, необходимо различать два следующих вида текучей среды. Первый вид заключает в себе все те текучие среды, которые под действием тяжести до того сжаты, что всегда быстрейшим образом замещают пространство, оставляемое телом, дабы ни на одно мгновение тут не образовывалась пустота. Ко второму виду принадлежат такие текучие среды, которые или совсем не сжаты или же не очень сильно сжаты, так что пространство, которое оставляет за собой движущееся в нем тело, может в течение некоторого времени оставаться пустым. Из-за этого различия между текучими средами возникают весьма любопытные изменения в законах, которыми определяется сопротивление. Это особенно необходимо принять во внимание, если желательно доискаться действия воздуха на ядра и бомбы, потому что воздух обладает обеими вышеуказанными особенностями, вследствие которых тело движется в нем быстрее или медленнее.

Если текучая среда устроена так, что все ее частицы находятся на одинаковом расстоянии и не производят одна на другую никакого действия, сопротивление, встречаемое телом в такой текучей среде, может быть легко вычислено из движения, сообщенного телом частицам среды. Если бы, например, цилиндр двигался вдоль своей длины в такой текучей среде, он расталкивал бы частицы, встречаемые прямо перед собой, сообщая им одинаковое движение, если допустить, что ни цилиндр, ни частицы текучей среды не обладают упругостью. Поэтому, полагая известными как скорость, так и диаметр цилиндра, а кроме того и плотность текучей материи, мы можем определить количество движения, которое сообщается частицам этой текучей среды и которое, ввиду того что действие равно противодействию, должно равняться потере, испытываемой телом при движении; и таким образом будет найдена величина сопротивления, которое испытывает цилиндр в этой текучей среде.

Когда, следовательно, текучая среда устроена таким образом, что частицы ее не связаны между собою, а удалены одна от другой, то каждая частица может хотя бы некоторое время совершать движение, не нарушая покоя остальных находящихся вокруг нее частиц. Отсюда если вместо цилиндра, который должен двигаться вдоль в текучей среде, будет взято другое тело, сталкивающееся с частицами этой текучей среды под острым углом, то направление, по которому эти частицы будут приведены в движение, будет неодинаково с тем, по которому движется само тело, а направление каждой отдельной частицы будет перпендикулярно к той поверхности тела, от которой она была отражена. И в этом случае, следовательно, сопротивление тела определится уже не из всего движения, которое будет сообщено частицам текучей среды, а только из движения той их части, которая имеет одинаковое с телом движение. Следовательно, в таких текучих средах, в которых частицы удалены одна от другой, величина сопротивления зависит главным образом от очертания и формы головной части поверхности тела и подвергается вследствие этого очень большим изменениям из-за различных свойств этой поверхности, даже если во всех случаях поперечное сечение тела, перпендикулярное к направлению движения, будет одинаково. И г-н Исаак Ньютон ясно доказал, что если ядро движется в такой текучей среде, то сопротивление будет составлять только половину сопротивления движению цилиндра, который имеет одинаковый диаметр с ядром и движется вдоль своей длины с одинаковой с ним скоростью.

Хотя рассмотрение такой текучей среды очень полезно для объяснения природы сопротивления, однако нам еще неизвестна какая-либо текучая среда такого вида, которая действительно существовала бы в природе, ибо все текучие среды, которые нам известны, таковы, что их частицы или действительно взаимно соприкасаются или, по крайней мере, так взаимодействуют одна с другой, как если бы они находились в такой связи. При таком положении ни одна частица, с которой сталкивается тело, не может двигаться, не приведя в движение большого количества других частиц, из которых некоторые значительно удалены. Затем движение, которое таким образом будет сообщено части текучей среды, может не иметь никакого определенного направления, но оно должно быть придано каждой частице особо в зависимости от различного положения отдельных частиц относительно тех, от которых исходит движение. Но так как большое число таких частиц будет двигаться по весьма различным направлениям, то вследствие этого величина сопротивления, которое испытывает движущееся в текучей среде тело и которое может быть определено по количеству движения, сообщенного телом текучей среде, поскольку таковое совпадает с направлением движения тела, получится совершенно иной, чем в предыдущем случае, и вычисление сопротивления при этих обстоятельствах будет, следовательно, значительно труднее и сложнее.

Когда текучая среда сжата весом находящейся над ней части, а в подобном состоянии находятся все известные нам текучие среды, исключая только их верхние слои, и если, сверх того, скорость движущегося тела меньше скорости, с которой частицы текучей среды в состоянии проникать в пустое пространство в силу их сжатия, то ясно, что в этом случае пространство, оставляемое за собой движущимся телом, мгновенно заполняется снова текучей средой и что частицы, на которые тело наталкивается своей головной частью, вместо того чтобы двигаться вперед, постепенно меняют свое направление и устремляются в пространство за движущимся телом. Таким образом, они все время восстанавливают равновесие, которое в противном случае было бы нарушаемо постоянным притоком текучей среды в оставляемые телом места. В этом случае направленное вперед движение текучей среды и отсюда также сопротивление тела, которое зависит от этого движения, должно быть много меньше, чем в ранее приведенном случае, когда все частицы текучей среды имеют одинаковое движение с самим телом и увлечены по тому же самому направлению. Г-н Исаак Ньютон доказал, что сопротивление движению цилиндра, движущегося вдоль своей длины в сжатой текучей среде, подобное только что нами рассмотренному, будет в четыре раза меньше того сопротивления, которое будет испытывать тот же цилиндр, если он будет двигаться с той же скоростью в такой текучей среде, которую мы описывали вначале, при условии, что в обоих случаях плотность текучей среды будет одинаковой.

Кроме того, сопротивление, встречаемое телом в подобных двух различных текучих средах, отличается не только по величине, но в еще большей степени от различия в форме движущегося в них тела.

Мы доказали, что в описанной нами вначале текучей среде с взаимно удаленными частицами уменьшению сопротивления очень много способствует закругленность лобовой части поверхности тела. Однако для сжатых текучих сред это правило не имеет места; по крайней мере, в этом случае не возникает никакого сколько-нибудь значительного различия. В сжатых текучих средах величина сопротивления зависит главным образом от бо́льшей или меньшей легкости, с которой текучая среда, проталкиваемая лобовой частью тела, изменяет направление своего движения в обратную сторону, в пространство позади тела. Это явление будет изменяться под влиянием формы движущегося тела весьма незначительно, а то и вовсе останется почти неизменным, будет ли тело цилиндрическим, коническим или сферическим, как ядро. Из этого следует, что поскольку неизменным остается поперечное сечение тела, а следовательно, и масса текучей среды, приводимой в движение, то разница в форме тела не вызовет значительного изменения в величине сопротивления.

Такое сопротивление испытывает тело, движущееся в сжатой текучей среде, при условии, что скорость его вследствие сжатости значительно меньше той, которой могут достигнуть частицы текучей среды; такой случай, говорю я, обстоятельно рассмотрен г-ном Исааком Ньютоном, определившим со всей тщательностью величину этого сопротивления в зависимости от величины движущегося в текучей среде тела и плотности текучей среды. Он совершенно ясно при этом замечает, что принятые им для этого случая правила не являются всеобщими и без ограничений не могут иметь места в действительности, но что сжатие текучей среды должно быть установлено тем бо́льшим, чем больше скорость движущегося в ней тела. Между тем некоторые несведущие авторы, слепо следовавшие за великим человеком, не приняли во внимание это его указание и делали свои заключения без различия для всех степеней скорости, которые может иметь твердое тело в текучей среде, и не делая различия между степенями сжатия текучей среды, в которой возникает сопротивление; они принимали сопротивление воздуха для мушкетных пуль и пушечных ядер в три раза меньшим чем то, которое я нашел в действительности на основании опыта.

Из всего сказанного до сих пор вполне ясно, что противодействующая сила текучей среды увеличивается, когда тело движется так быстро, что текучая среда не успевает занимать и заполнять оставляемое пустым место позади тела и не может оказывать на него давление. В этом случае давление на тело с его обратной стороны исчезает, а оно до известной степени уравновешивало сопротивление, и тело должно испытывать своей головной частью всю противодействующую силу, а кроме того и движение, которое сообщено частицам текучей среды. И так как, кроме того, движение частиц, отражаемых телом, не может быть слишком отклонено в силу упругости текучей материи, то оно меньше уклоняется от того направления, по которому эти частицы были непосредственно отражены телом. Поэтому такой вид сопротивления более или менее подходит к рассмотренному нами вначале, в котором частицы текучей среды не связаны между собой и беспрепятственно воспринимают сообщаемое им движение.

Как мы уже раньше заметили, сопротивление такой несжатой текучей среды, оказываемое на цилиндр, движущийся в ней вдоль своей длины, в четыре раза больше сопротивления одинаково плотной, но сильно сжатой текучей среды. Отсюда следует, что в случае, если позади тела будет оставаться пустота, сопротивление текучей среды будет почти в четыре раза больше, чем если бы оно возникло в той же самой среде, когда позади тела не образуется пустоты. Так, если пространство, оставляемое за собою телом, не будет тотчас же заполняться, то нами доказано, что сопротивление должно быть таким, как в том случае, когда частицы текучей среды были бы совершенно разобщены одна от другой.

При этих обстоятельствах пусть имеется цилиндр, движущийся с совершенно различными степенями скорости в сжатой текучей среде таким образом, что, когда он начинает свое движение с очень большой скоростью и будет двигаться затем так долго, что эта скорость почти совершенно исчезнет, противодействующая сила текучей среды будет в начале движения почти в четыре раза больше, чем в конце. При полете ядра разница будет не так велика, так как сопротивление вследствие закругленности его поверхности будет едва вдвое больше в сжатой текучей среде, чем в несжатой, потому что закругленность его поверхности уменьшает сопротивление только в первом случае и не уменьшает во втором. Сила сжатия текучей среды, даже в том случае, если позади тела образовалась пустота, может до некоторой степени отклонить назад косое движение частиц текучей среды, отраженных телом. Так как в этих частицах заключена бо́льшая степень плотности, если текучая среда обладает упругостью, то весьма вероятно, что сопротивление движению ядра, движущегося с очень большой скоростью в сжатой текучей среде, будет почти средним между сопротивлением движению ядра и цилиндра в несжатой текучей среде. Таким образом, если скорость достаточно велика, мы можем принять, что противодействующая сила будет более чем в два раза, но все же менее чем в четыре раза больше, чем в том случае, когда то же ядро движется в той же текучей среде с меньшей скоростью. При этом мы, возможно, ошибемся немного, если примем, что ядро, движущееся с большей скоростью, встретит почти в три раза большее сопротивление из-за скорости, чем в том случае, когда оно движется медленно.

Таким образом, поскольку имеется увеличение противодействующей силы, если скорость движущегося тела так велика, что оно оставляет за собой совершенно пустое пространство, известная доля этого увеличения и становится очень заметной при малых скоростях. Так, если упругая сила текучей среды мгновенно заполняет пространство, оставляемое за собою телом, остаются все же верными положения, приведенные нами для совершенно пустого пространства, хотя и не в столь полной мере, как для случая, когда скорость, с которой текучая среда заполняет оставленное телом пространство, немного лишь превышает скорость движения тела. И поэтому мы не можем допустить, что увеличение сопротивления, о котором мы до сих пор упоминали, внезапно исчезнет, как только упругая сила текучей среды будет в состоянии предотвратить образование пустого пространства позади движущегося тела; иначе мы должны будем предположить, что в этом случае упомянутое увеличение будет уменьшаться, как только скорость, с которой частицы текучей среды следуют за телом, сколько-нибудь превзойдет скорость движения тела.

Отсюда мы приходим к заключению, что если ядро будет двигаться в такой текучей среде со скоростью значительно больше той, с которой частицы в силу упругости в состоянии проникнуть в пустое пространство, позади ядра в его движении будет обязательно оставаться пустота. Я утверждаю, что в этом случае сопротивление, встречаемое ядром из-за его скорости, будет почти в три раза больше найденного г-ном Исааком Ньютоном по правилу, данному для малых скоростей. Впредь мы можем также уверенно утверждать, что противодействующая сила текучей среды постепенно убывает с уменьшением скорости тела, пока его движение так замедлится, что скорость, с которой текучая материя в состоянии следовать за телом, станет едва заметной, в полном соответствии с правилом г-на Исаака Ньютона, которое он дал для сжатых жидких сред.

Из этого определения мы, таким образом, видим, как сильно ошибаются те, которые утверждают, что сопротивление всякой текучей среды, оказываемое всем движущимся в ней телам, всегда пропорционально квадратам скоростей. Из того, что здесь сказано, ясно вытекает, что это правило только тогда будет близко к действительности, когда изменения в скорости тела очень незначительны, и что оно не может без грубых ошибок применяться в тех случаях, когда будут определять сопротивление для весьма различных степеней скорости.

Установив твердо эти положения, мы пойдем теперь дальше и займемся в основном определением сопротивления воздуха опытным путем. Здесь можно будет показать, насколько точно эти соображения согласуются с действительным действием текучих сред, обнаруженным посредством опыта; и из этого можно также убедиться в том, как глубоко ошибались все те, которые воображали, что сопротивление воздуха, встречаемое всякого рода ядрами и бомбами, едва ли заслуживает какого-либо внимания.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Так как тело, движущееся в текучей среде, не может продвигаться без того, чтобы не приводить в движение находящиеся на его пути частицы этой среды, то неизбежно скорость тела вследствие этого должна уменьшаться. Так как никакое движение не может возникнуть без действия силы, то и для отталкивания частиц текучей среды требуется сила. Именно эта сила воздействует обратно на само тело и, следовательно, замедляет его движение. Это также следует из основного положения механики, что ни одно тело не может сообщить другому движение без того, чтобы не потерять ровно столько же в своем собственном движении; и на этом основываются общие правила, по которым движение двух взаимно сталкивающихся тел после столкновения изменяется.

Если же спросят в дальнейшем о первопричине этого изменения, то последнее основано на способности всех тел, поскольку они состоят из материи, сохранять свое состояние неизменным. Именно эта способность является существенной особенностью материи и свойственна ей так же, как и протяженность. Как материя не может быть без протяженности, точно так же она не может существовать без этой способности сохранять неизменным свое положение. Эта способность обнаруживается одинаково как в находящихся в покое, так и в движущихся телах. Поэтому покоящееся тело должно в силу этой способности оставаться в покое, и оно никогда не сможет получить движение, пока не появится какая-либо внешняя сила, которая и приведет его в движение. Равным образом, если тело находится в движении, то оно должно неизменно его продолжать, пока какая-либо внешняя сила не изменит этого состояния. Коль скоро тело, бывшее прежде в покое, приведено в движение или же движущееся тело испытывает в своем движении изменение, мы можем быть уверены, что причиною этого была внешняя сила.

Но при всяком движении нужно обращать внимание на два обстоятельства, а именно: на скорость и ее направление; при этом каждое тело имеет способность в силу своей природы сохранять неизменными и скорость и ее направление, как определяющие его положение. Итак, если тело не будет подвергаться воздействию какой-либо внешней силы, оно неизменно должно сохранять одну и ту же скорость и одно и то же ее направление. Но если будет замечено, что или скорость, или ее направление, или и то и другое были изменены, то из этого можно вывести точное заключение о том, что такое изменение было вызвано посторонней силой. Но так как во вселенной такие изменения происходят каждое мгновение и в ней не встречается ни постоянного покоя, ни прямолинейного равномерного движения, то возникает вопрос — откуда же появляются силы, производящие эти изменения.

Отвечая на этот вопрос, некоторые философы утверждали, что тела́, кроме способности сохранять неизменным свое положение, наделены способностью постоянно изменять свое положение. Но поскольку этим материи приписываются два совершенно противоположных свойства, мы путем подобного утверждения не в состоянии будем разъяснить ни малейшего изменения, происходящего во вселенной. Природа и в этом случае не нуждается в каких-либо особенных силах, и тут, как и во всех своих проявлениях, неизменно избирает путь наиболее простой и короткий; и чтобы произвести все изменения, ей не нужно никаких других сил, кроме вышеуказанной способности, которой наделены все тела — сохранять неизменным свое положение.

На первый взгляд кажется, что в этом содержатся некоторые противоречия, так как трудно понять, каким образом сила, предназначенная сохранять тело в принятом им положении, одновременно может вызывать все изменения. Но если принять это утверждение, то по зрелом его рассмотрении сразу станет видно, что это существенное свойство всех тел, благодаря которому они стремятся сохранять свое положение, не только в состоянии вызывать изменения, но что в действительности все изменения, которые мы в состоянии объяснить, происходят не из чего другого, как только из того же общего свойства.

Чтобы понять это действие, нужно представить себе два тела, из которых одно находится в покое, а другое направляется к первому с известной степенью скорости. Отметим для бо́льшей ясности первое тело, находящееся в покое, буквой A, второе же, стремящееся к этому последнему, буквой B. Первое тело A обладает способностью оставаться неизменно в покое, второе же B также имеет способность сохранять свое положение, т. е. двигаться со свойственной ему скоростью по своему направлению или вообще по прямой линии. Если теперь тело B действительно движется к телу A, то ясно, что ни одно из них не способно оставаться в своем положении без того, чтобы одновременно не изменить весьма заметно положения другого, потому что тело A должно сохранять свое положение покоя; поскольку же другое тело не может пройти сквозь него, оно должно или внезапно остановиться, или отскочить назад, или же отклониться в сторону; во всех случаях прежнее положение будет значительно изменено. Если же тело B должно было бы неизменно продолжать свое движение, то оно неминуемо столкнулось бы с телом A, следствием чего было бы то, что тело A было бы выведено из своего прежнего положения. Но так как невозможно, чтобы эти оба тела одновременно сохраняли свои прежние положения, и не существует причин, почему в одном теле больше, чем в другом, должно произойти изменение, то из этого следует, что оба эти тела должны испытывать одновременно изменение своего состояния. А именно, тело A будет приведено в движение, а скорость тела B будет уменьшена. Так как причина, вследствие которой тело изменило свое положение, должна быть названа силой, ясно, что силы, изменившие в указанном случае положение обоих тел *A* и *B*, представляют собою не что иное, как способность каждого из них сохранять свое положение. Таким образом, способность, которую имеет тело *A*, сохранять свое положение является причиной, а следовательно, и силой, которая вносит изменение в положение тела *B*, и опять-таки способность, которой наделено тело *B*, оставаться в присущем ему положении, является причиной, а поэтому и силой, посредством которой передается изменение телу *A*.

Если тело неизменно сохраняет свое положение, т. е. оно находится или в состоянии покоя или может продолжать свое движение, не изменяя направления, то в этом проявляется способность тела сохранять свое положение. Но как только тело встречает сопротивление, которое мешает ему оставаться в прежнем положении, возникает эта способность противостоять изменению, которое должно было произойти, и производит силу, уничтожающую встречающиеся на пути препятствия. Подобно этому все силы, находящиеся во вселенной, возникают не из чего другого, как из способности, которой наделены все тела — сохранять свое положение и которая превращается в силу, как только положение двух или нескольких тел становится в такое взаимоотношение, при котором ни одно из них не может его сохранить, не изменяя одновременно положения других. Но так как во вселенной беспрерывно происходят такие случаи, когда на покоящееся тело наталкиваются другие или когда встречаются между собою разные находящиеся в движении тела, то постоянно и проявляются такие силы, под действием которых будет изменяться положение каждого тела. И отсюда видно, что все изменения, происходящие в мире, могут быть выведены только из свойственной всем телам способности сохранять неизменным свое положение. Если это исследовать точнее, то действительно можно найти, что положение каждого тела изменится лишь постольку, поскольку оно соприкасается с другими телами, которые не могут сохранять свое положение, не вызывая в нем изменений. Как велико изменение в каждом отдельном случае и в каждом теле, когда оба тела находятся в таком отношении одно к другому, что оба не могут оставаться в прежнем положении, определено в механике.

На этой основе покоится все учение о сопротивлении тел, движущихся в такой текучей среде, как вода или воздух, ибо когда тело непрерывно продолжает свое движение в подобной текучей среде, обязательно будет оттолкнуто и приведено в движение большое количество частиц, из которых состоит текучая среда. Ввиду того, что эти частицы одновременно наделены способностью сохранять свое положение, они противодействуют такому изменению; отсюда в положении самого тела должно возникнуть изменение, которое будет тем больше, чем большее число частиц текучей среды приведено в движение и чем больше происходящее с ними изменение. Итак, если бы было известно изменение, вызванное в текучей среде, можно было бы вычислить по основным законам механики, как велико должно быть изменение с самим телом. Отсюда возникает сопротивление, которое испытывает тело в текучей среде и которое, следовательно, должно быть определено из основных законов механики.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Автор сперва рассматривает такую среду, частицы которой до того удалены одна от другой, что каждая из них неизменно продолжает некоторое время присущее ей движение, не подвергаясь воздействию близ расположенных частиц. Хотя такое представление противно природе всех текучих сред и во всем мире не встречается такой текучей среды, все же оно служит основанием, положенным в изучение сопротивления. Когда тело движется в такой текучей среде, оно постоянно наталкивается на новые частицы, потому что те, которые уже ранее подверглись толчку, продолжают сообщенное им движение, не изменяя положения остальных; если же эта текучая среда взята в состоянии покоя, то все частицы, на которые тело наталкивается в каждое мгновение, находятся в абсолютном покое. Вычисление сопротивления, испытываемого телом в этой текучей среде, основывается на том, что определяют, сколько теряет тело каждое мгновение в своем движении, если оно постоянно наталкивается на определенное число мельчайших частиц, находящихся в покое, причем плотность их, измеренная относительно плотности тела, известна. Это дает возможность вывести с помощью определенных правил, как изменяется движение двух взаимно сталкивающихся тел, если заранее известно, обладают ли находящиеся рядом с телом частицы упругостью, то есть отскакивают ли они после толчка или нет, и в каком случае они остаются после толчка вместе. Мы хотим особо рассмотреть здесь оба эти случая, так как сопротивление в этих случаях очень различно.

В первом случае, следовательно, вовсе не должно существовать упругости, так что частицы, уже приве-

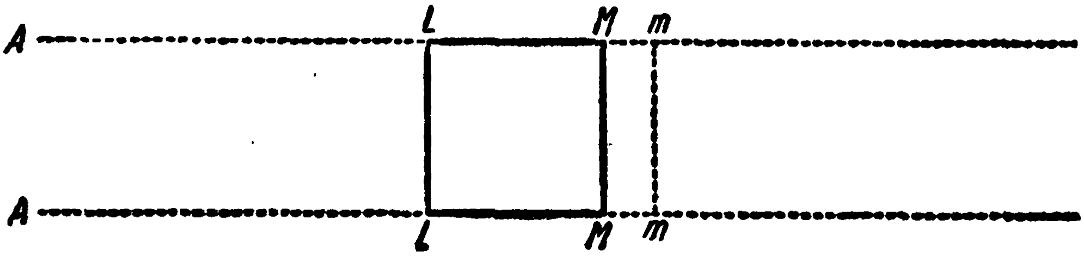

Рис. 11.

денные телом в движение, отходят от него, не испытывая в остальном никакого изменения. Чтобы представить себе это, нужно только вообразить, что частицы, уже подвергшиеся толчку от тела, как бы внезапно исчезли или были уничтожены, дабы не вносить никакого изменения в положение других частиц раньше, чем тело толкнет также и их. Поскольку понятие о такой текучей среде зависит единственно от нашего воображения, то мы свободны добавить еще и это условие, так как таким путем гораздо легче достигается та конечная цель, ради которой принимается в рассмотрение такая текучая среда. Предположим, следовательно (рис. 11), что передняя часть тела MM, которой оно толкает частицы текучей среды, плоская и в то же время перпендикулярна к направлению AM, по которому движется тело. Пусть площадь этой передней плоскости $MM = cc$, длина тела, которое может рассматриваться нами как цилиндр, $LM = a$ и скорость, с которой оно теперь движется, выразится через $\sqrt{v}$, где v обозначает высоту, с которой падающее тело достигает равной скорости. Далее, плотность тела выразим через m, а плотность текучей среды через n. Отсюда масса тела будет $macc$. В то время как тело проходит бесконечно малое протяжение $Mm = dx$, оно должно оттолкнуть частицы текучей среды, которые заключаются в пространстве $MmmM$, и так как масса этих частиц будет $nccdx$, то надо здесь решить такой вопрос: во сколько раз уменьшится скорость $\sqrt{v}$ тела, масса которого равна $macc$, если оно натолкнется на другое тело, находящееся в покое и масса которого равна $nccdx$. Перед толчком количество движения будет

$$macc\sqrt{v},$$

а после толчка скорость тела будет равна

$$\sqrt{v+dv} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

и станет одинаковой со скоростью частиц текучей среды $ncc\,dx$, подвергнутых удару. Таким образом, количество движения обоих тел, которое тотчас же после толчка будет равно

$$(macc + ncc\,dx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

по законам механики будет равно предыдущему количеству движения $macc\sqrt{v}$. Отсюда, таким образом, получается уравнение

$$macc\sqrt{v} = (macc + ncc\,dx)\left(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}\right),$$

которое преобразуем в следующее:

$$0 = \frac{macc\,dv}{2\sqrt{v}} + ncc\,dx\sqrt{v},$$

откуда получаем:

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx.$$

Отсюда ясно, что движение тела уменьшится точно так, как если бы на него давил вес цилиндра, состоящего из текучей материи, основание которого или сечение равно cc, и его высота равна $2v$, потому что масса, а следовательно, и вес [207] такого цилиндра будут равны $2nccv$, и так как масса тела равна $macc$, то за время, в течение которого тело проходит путь dx, движение его должно уменьшиться во столько раз, сколько указывает уравнение

$$dv = -\frac{2nccv}{macc}dx,$$

которое совершенно сходно с вышеприведенным. Когда, следовательно, такое тело движется в подобной текучей среде, то сила сопротивления равна весу цилиндра, состоящего из этой текучей материи, основание которого одинаково с передней площадкой тела $MM = cc$, высота которого равна удвоенной высоте $2v$, что выражает собой скорость тела. Так как высота v пропорциональна квадрату скорости, то ясно, что сопротивление такой текучей среды пропорционально квадратам скоростей движущегося в этой текучей среде тела, если только передняя площадка тела MM при наталкивании на частицы текучей среды перпендикулярна к направлению удара.

Так обстоит дело с сопротивлением такой текучей среды, которая не обладает упругостью и, следовательно, когда после толчка не происходит отражения. Если же и тело, и частицы текучей среды обладают абсолютной упругостью, то возникшее в предыдущем случае действие будет вычисляться по законам удара упругих тел. В этом случае частицы текучей среды отражаются от тела и получают, следовательно, степень скорости бо́льшую, чем та, которую имеет само тело. В данном случае, однако, остаются неизвестными две величины: во-первых, скорость тела, а затем также и скорость частиц текучей среды после толчка. Чтобы определить их, необходимо с принятым раньше основным положением, в силу которого количество движения до и после толчка остается неизменным, связать еще и другое основное положение, по которому у абсолютно упругих тел так называемая живая сила до и после толчка также остается неизменной. Живую силу тела находят, умножая массу на квадраты скоростей. Итак, обозначим, как раньше, скорость тела, масса которого равняется $macc$, перед толчком через $\sqrt{v}$, а после толчка через

$$\sqrt{v+dv}=\sqrt{v}+\frac{dv}{2\sqrt{v}};$$

скорость текучей среды, на которую наталкивается тело, проходя расстояние $Mm=dx$, после толчка равна $\sqrt{u}$, тогда как до толчка она была равна нулю (масса этой среды равна $ncc\,dx$). Тогда количество движения до толчка будет равно

$$macc\sqrt{v},$$

а после толчка

$$macc\left(\sqrt{v}+\frac{dv}{2\sqrt{v}}\right)+ncc\,dx\sqrt{u}.$$

Из этого равенства на основании первого основного положения вытекает:

$$0=\frac{macc\,dv}{2\sqrt{v}}+ncc\,dx\sqrt{u}.$$

Живая сила перед толчком будет

$$maccv,$$

а после толчка

$$macc(v+dv)+nccu\,dx;$$

из их сравнения получим:

$$0=macc\,dv+nccu\,dx.$$

И так как из первого уравнения найдем, что

$$\sqrt{u}=\frac{-ma\,dv}{2n\,dx\sqrt{v}},$$

и, таким образом,

$$u=\frac{m^2a^2\,(dv)^2}{4nn\,(dx)^2\,v},$$

а другое уравнение дает

$$u=\frac{-ma\,dv}{n\,dx},$$

то получаем:

$$\frac{ma\,dv}{4nv\,dx}=-1,$$

или

$$dv=\frac{-4nccv\,dx}{macc}.$$

Отсюда для этого случая сопротивление будет так же велико, как если бы на тело давил вес цилиндра, состоящего из текучей материи, основание которого равно передней площадке тела $MM=cc$, а высота в четыре раза больше той величины v, которой выражена скорость тела. И так как в предыдущем случае высота такого давящего цилиндра была найдена равной $2v$, ясно, что в данном случае вследствие упругости сопротивление вдвое больше, чем в предыдущем случае, когда не было совершенно упругости. Но в обоих случаях, если тело движется с различными степенями скорости в одной и той же текучей среде, сопротивление всегда пропорционально квадратам скоростей. Если же плотность текучей среды будет больше или меньше, то и сопротивление будет во столько же раз больше или меньше. А поскольку мы, таким образом, легко найдем изменение скорости тела, то можно также без труда определить все его движение, которое само постепенно убавляется.

Но мы здесь рассматривали только тот случай, когда передняя площадка тела, которая наталкивается на частицы текучей среды, перпендикулярна не только к плоскости, но и к направлению движения. В этом случае сила сопротивления движению тела идет по прямой линии и, следовательно, уменьшается только скорость движения без изменения направления. Поскольку такое тело продолжает свое прямолинейное движение, его состояние изменится только в отношении скорости. Следовательно, осталось еще вычислить сопротивление в том случае, когда передняя площадка тела образует с направлением движения острый угол, а отсюда впоследствии можно будет найти и сопротивление для всех как прямых, так и криволинейных очертаний.

Итак, пусть форма тела имеет вид, показанный на рис. 12. Предположим, что тело $LLMM$, которое движет-

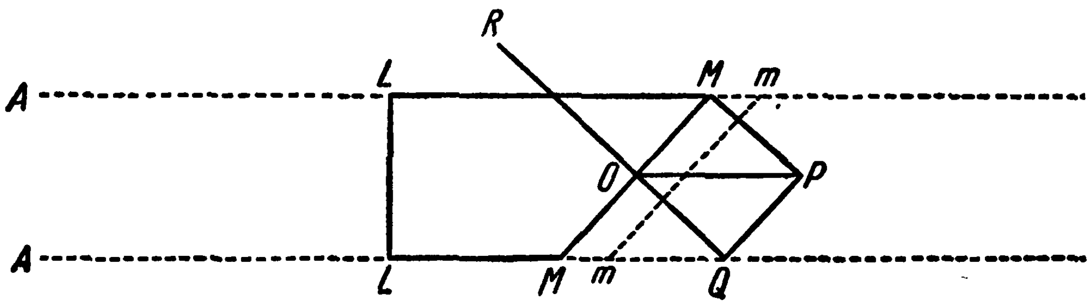

Рис. 12.

ся в текучей среде по направлению OP, наталкивается своей скошенной плоскостью MM на частицы текучей среды. За то время, как это тело пройдет бесконечно малое расстояние $Mm = dx$, оно вытеснит заключенную в пространстве $MMmm$ текучую материю. И если мы примем, как и раньше, что передняя площадка тела $MM = cc$, то количество текучей материи будет не как раньше $ccdx$, а должно быть уменьшено в отношении радиуса к синусу угла MOP, под которым передняя площадка тела толкает текучую среду. Если взять радиус равным 1, а синус угла MOP равным q, то количество текучей среды, которое должно быть приведено в движение за то время, как тело пройдет путь $Mm = dx$, должно быть выражено через $cc\,dx$ и с прежде найденным сопротивлением помножено на q, так как иначе действие было бы одинаково. Но так как тело наталкивается на эту текучую среду не прямо, а под углом, то и сопротивление будет не так велико, как в предшествующем случае и, следовательно, еще и по этой причине должно быть умножено по правилам механики на q. Поэтому сопротивление площадки cc, когда она перпендикулярно наталкивается на текучую среду, так относится к сопротивлению (когда эта площадка движется под углом, синус которого равен q), как квадраты радиуса 1 относятся к квадратам синуса qq. А так как текучая среда оказывает сопротивление только в том случае, если тело движется прямо в направлении к MM, то направление сопротивляющейся силы перпендикулярно к плоскости MM. Если скорость тела будет выражена соответствующей высотой v, то противодействующая сила, направление которой OR перпендикулярно к MM, равна весу цилиндра, состоящего из этой текучей материи, с основанием, равным cc, и высотой, равной или $2qqv$, или $4qqv$, смотря по тому, действуют при столкновении законы удара неупругих или вполне упругих тел. Так как в данном случае тело отталкивается по линии OR, идущей перпендикулярно к передней площадке MM, то это направление образует с направлением движения острый угол; это не только уменьшает скорость тела, но и меняет его направление. Если мы эту силу, которая выражена соответственно через $2nccqqv$ или через $4nccqqv$, причем n, как и раньше, обозначает плотность текучей среды, разложим по двум направлениям, из которых одно будет прямо противоположно направлению движения, а другое перпендикулярно к нему, то первая соответственно будет равна $\frac{2}{4}nccq^3v$ [208], а последняя $\frac{2}{4}nccqqv\sqrt{1-qq}$ [209]. Под действием первой скорость тела уменьшается, под действием же второй изменяется направление движения. Вместо двух чисел $\frac{2}{4}$ мы поставим μ, которое в том случае, когда тело совершенно не обладает упругостью, равно 2, а когда тело вполне упруго, равно 4; P будет обозначать массу или вес движущегося тела [210]. Отсюда ясно, что в течение того промежутка времени, за который тело пройдет $MM=dx$, прежде всего скорость его $\sqrt{v}$ так уменьшится, что

$$dv = \frac{-\mu ncc q^3 v\,dx}{P}.$$

Затем направление изменится таким образом, что тело будет продолжать свое движение по дуге окружности. Отсюда радиус этой окружности равен

$$\frac{2P}{\mu nccqq\sqrt{1-qq}} \text{ [211]}.$$

Между тем, как только тело изменит свое направление, изменится и угол, под которым тело ударялось о частицы текучей среды, а следовательно, синус q получит другое значение. Кроме того, само тело поворачивается и вскоре затем ударяется о частицы текучей среды уже другой частью своей поверхности. Отсюда, ввиду непрерывного изменения сопротивления, следует, что движение тела становится очень усложненным.

Из сопротивления, которое испытывает поверхность, движущаяся в текучей среде под углом к направлению движения, можно получить сопротивление любого тела, какова бы ни была его форма. Но здесь обратим особое внимание на тела вращения, движущиеся в направлении своей оси, потому что у них уменьшается только скорость, а направление остается неизменным. Такое тело испытывает со всех сторон одинаковое воздействие на все свои части; поэтому все эти силы взаимно уничтожаются и на движение тела никак не влияют. Тело вращения получается в том случае, если любую фигуру будем вращать около оси. Пусть (рис. 13) ADB будет фигура, от вращения которой вокруг линии AB получается тело, сопротивление которого при движении в текучей среде по направлению его оси BA мы и подвергнем здесь исследованию. Так как фигура ADB представляет собою полукруг, то ясно, что образовавшееся тело будет шаром. Произведем вычисление сначала в общем случае для всякой кривой линии, которую можно принять за ADB. Прежде всего нужно отличать от остальной части тела ту его часть, которая ударяется о текучую среду. Эта часть, принимающая на себя сопротивление, состоит из AMD — участка на взятой нами кривой — и простирается от A до D, где окружность начинает заходить назад, или где, иначе говоря, касательная становится параллельной оси AB. Проведем произвольную перпендикулярную к оси AB линию MP и примем, что $AP=x$, $PM=y$; далее, пусть mn будет бесконечно близко к MP и при этом параллельно ей. Проведем Mn параллельно оси; тогда

$$Pp=Mn=dx, \quad mn=dy \text{ и } Mm=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

обозначим для краткости $Mm=ds$. Вращая Mm вокруг оси AB, получим шаровой пояс, наружная поверхность

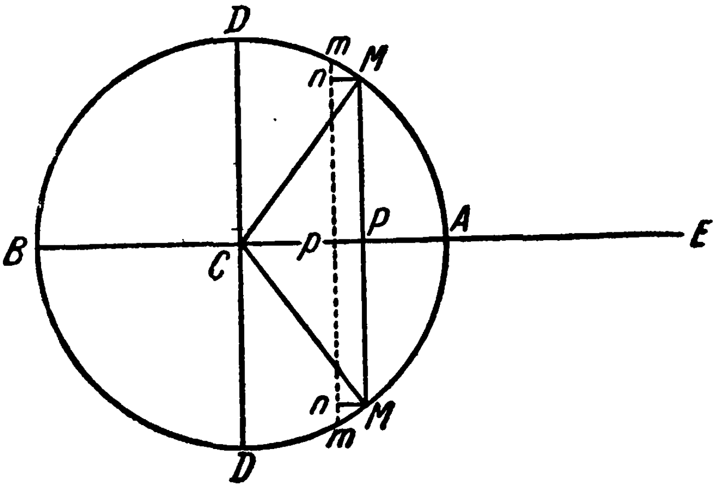

Рис. 13.

которого равна $2\pi y ds$, если $1:\pi$ выражает отношение диаметра окружности к длине окружности. Этот шаровой пояс со всех сторон ударяется о частицы текучей среды одинаково под острым углом, а именно под углом mMn, синус которого, следовательно, будет $\frac{dy}{ds}$ и косинус $\frac{dx}{ds}$. Если выразим скорость тела через $\sqrt{v}$, а плотность текучей среды через n, то сопротивление упомянутого выше шарового пояса (если принять $2\pi y ds$ за cc и $\frac{dy}{ds}$ за q) будет равно

$$\mu n\, 2\pi y\, ds \frac{dy^2}{ds^2} \cdot v = \frac{2\mu\pi n v y\, dy^2}{ds};$$

направление его будет по линии MC перпендикулярно к Mm. Отсюда, следовательно, получается сопротивление в направлении движения, равное

$$\frac{2\mu\pi nvy\, dy^3}{ds^2},$$

и его интеграл

$$2\mu\pi nv \int \frac{y\, dy^3}{ds^2}$$

дает полное сопротивление, которое испытывает поверхность вращения дуги AM; и если мы продолжим точку M до D, то получим искомое сопротивление, действие которого замедлит движение тела.

Чтобы найти теперь сопротивление шара, возьмем вместо кривой линии AMD четвертую часть окружности. Пусть радиус шара $AC = CD = a$; тогда $CP = \sqrt{aa - yy}$ и

$$Mm = ds = \frac{a\, dy}{\sqrt{aa - yy}}.$$

Следовательно,

$$ds^2 = \frac{aa\, dy^2}{aa - yy},$$

и найденное выше сопротивление будет равно

$$2\mu\pi nv \int \frac{y\, dy\, (aa - yy)}{aa} = 2\mu\pi nv \left(\frac{1}{2}yy - \frac{y^4}{4aa}\right).$$

Чтобы найти теперь полное сопротивление, положим $y = a$; тогда получим:

$$2\mu\pi nv \cdot \frac{1}{4}aa = \frac{1}{2}\mu\pi naav.$$

Но πaa выражает площадь большого круга этого шара или его сечения; если положим его равным cc, то сопротивление получится равным

$$\frac{1}{2}\mu nccv.$$

А если такой круг или одинакового сечения цилиндр движется по направлению своей оси в той же самой текучей среде, то сопротивление его будет

$$\mu n c c v;$$

отсюда ясно, что сопротивление шара составляет только половину сопротивления, испытываемого цилиндром одинакового сечения, движущимся по направлению своей оси с одинаковой скоростью в той же самой текучей среде.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Однако такой текучей среды, которую мы здесь рассматривали, не только нет нигде в мире, но она и невозможна; поэтому сопротивление, встречаемое телом в тех текучих средах, которые действительно имеются в мире, должно отличаться иными свойствами, чем найденные в предыдущем Замечании. Займемся преимущественно рассмотрением воздуха, так как сопротивление его приходится определять повсюду. Прежде всего надо заметить, что воздух является не только текучей средой, но вместе с тем находится в сжатом состоянии, так что любое тело, окруженное воздухом, сдавливается им со всех сторон; но поскольку все эти сжимающие со всех сторон силы одинаковы, то тело, если оно раньше находилось в покое, не приходит от этого в движение. Если же тело уже движется, то оно испытывает не только давление среды, но, кроме того, подвергается еще действию силы, возникшей от столкновения его с частицами воздуха. Если вышеназванные силы находятся в равновесии, то замедление движения объясняется исключительно ими; это случается, если тело движется не слишком быстро. Если же тело движется очень быстро, то воздух вокруг него приходит в заметное движение, отчего давление его значительно изменяется и становится вокруг тела неодинаковым. Итак, в этом случае состояние тела будет изменяться не только силой сопротивления воздуха, но и под влиянием неодинаковости распределения его давления. Здесь нужно особенно обратить внимание на тыльную сторону тела, на которую, пока тело находится в покое, давление воздуха надавливает так же сильно вперед, как на переднюю сторону назад. Но когда тело так быстро движется, что воздух не в состоянии за ним следовать, то давление с тыльной его стороны может даже вовсе отсутствовать; поскольку же в этом случае давление спереди не исчезает, сопротивление заметно увеличивается. Отсюда ясно, что даже если скорость тела стала меньше, то давление сзади все же должно быть меньше, чем спереди, следовательно, в этом случае движение тела уменьшится не только вследствие сопротивления, которое происходит от столкновения с частицами воздуха, но и от давления воздуха, оказываемого на переднюю сторону, поскольку оно не уравновешивается противодавлением сзади. Кроме того, имея дело с воздухом, придется считаться еще с особым обстоятельством, не свойственным ни воде, ни другим текучим телам. Оно заключается в том, что воздух может быть сжат в чрезвычайно малом объеме, равно как может и расшириться в произвольно большом объеме, и поэтому может весьма различаться своей плотностью. Итак, если тело очень быстро движется в воздухе, отталкивая его перед собой, ясно, что воздух впереди тела будет несколько плотнее, а позади его — несколько реже; по этой причине тело будет встречать спереди как бóльшее давление, так и бóльшее сопротивление; давление же сзади будет, наоборот, несколько слабее. Все эти обстоятельства вызовут уменьшение скорости тела и поэтому должны быть приняты во внимание тем в большей мере, чем быстрее движется тело. Это обстоятельство наиболее убедительно подтверждает мнение автора о том, что сопротивление воздуха при очень быстром движении гораздо значительнее, чем это показывают все современные теории.

Из всего этого ясно, что каждое тело, движущееся в воздухе, подвергается действию двояких сил: одна из них возникает от столкновения тела с частицами воздуха и создает противодействие или сопротивление; другая вызвана неравномерным распределением давления на тело. При определении движения тела должны быть приняты в соображение обе эти силы в совокупности; но все же величину каждой следует отыскивать в отдельности, потому что они происходят от совершенно различных причин.

С этой целью мы рассмотрим сначала первую из этих двух сил: ту, которая происходит от столкновения тела с частицами воздуха. Здесь скорость тела уменьшается постольку, поскольку в окружающих частях воздуха вызвано движение: какая сила требуется для приведения этого воздуха в движение, такая же сила в свою очередь воздействует обратно на тело. Отсюда ясно, что это сопротивление воздуха должно быть меньше, чем в обоих случаях, описанных в предшествующем Замечании. В последнем случае, так как частицы текучей среды отскакивают, сопротивление оказывается равным весу цилиндра, высота которого равна $4v$; в первом же, где частицы двигаются с одинаковой с телом скоростью, сопротивление равно весу цилиндра, высота которого равна $2v$. Когда же тело ударяется о частицы воздуха, они и не отскакивают назад, и не устремляются вперед, а отходят в стороны и не приобретают заметного движения, если только тело движется не очень быстро. Так как частицам воздуха сообщается значительно меньшее движение, чем в обоих изложенных перед этим случаях, то и сопротивление должно стать меньше веса цилиндра высотой $4v$ или даже $2v$. По этой причине считается, что сопротивление воздуха, испытываемое площадкой, которая равна cc и движется в направлении, перпендикулярном к своей плоскости со скоростью $\sqrt{v}$, равно весу воздушного столба с основанием cc и высотой v. Опытом установлено, что тело в воде испытывает сопротивление, которое можно выразить весом водяного столба высотой v; а так как частицы воды и воздуха одинаково расходятся перед движущимся в них телом, то заключили, что сопротивление в обеих этих текучих средах обладает одинаковыми свойствами.

Чтобы это яснее себе представить, следует заметить, что сопротивление, встречаемое телом, движущимся с данной скоростью в неподвижной текучей среде, всегда должно равняться силе, действующей на это тело, как если бы оно находилось в состоянии покоя, а текучая среда, наоборот, устремлялась бы на него с той же скоростью. Представим себе сосуд с водой, в дне которого имеется отверстие; заткнем отверстие пальцем. В этом случае палец будет испытывать давление, равное весу водяного столба, основанием которого будет площадь отверстия, а высотой — высота воды в сосуде. Если палец чуть отнять от отверстия и позволить воде выливаться,

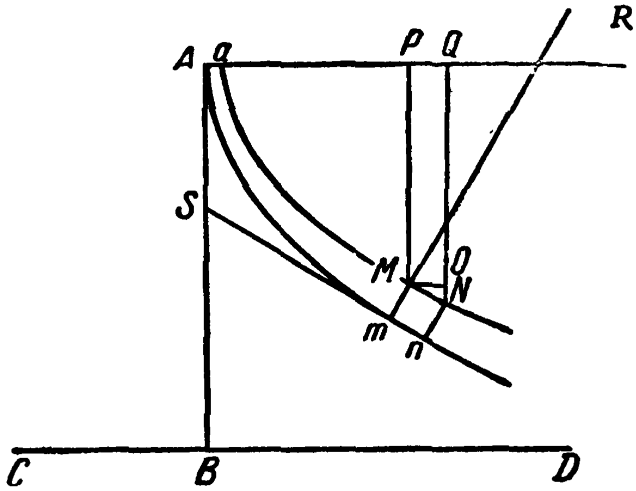

Рис. 14.

то палец, казалось бы, должен испытывать такое же давление, как и раньше. Вода, однако, будет бить со скоростью, соответствующей высоте ее в сосуде; итак, давление бьющей о палец воды будет равно весу столба воды с основанием, равным площади отверстия, и высотой, одинаковой с той, которая соответствует скорости. Таким же образом подтверждается и ранее высказанное мнение о том, что сопротивление как воды, так и воздуха равно весу цилиндра, высота которого равна высоте v, соответствующей скорости.

Чтобы это ясно вывести из ранее точно установленных оснований, по которым сопротивление должно равняться силе, требуемой для возникновения движения в текучей среде, предположим, что тело стоит неподвижно в CD (рис. 14), а текучая среда движется на него в направлении AB со скоростью $\sqrt{b}$, или с той, которая достигается при падении с высоты b. Ясно, во-первых, что когда все частицы текучей среды могут беспрепятственно продолжать свое движение, то тело не испытывает на себе никакого воздействия; но так как все частицы текучей среды по мере приближения к телу вынуждены расступиться и изменить как свою скорость, так и направление, то тело должно испытать на себе воздействие такой силы, какая требуется, чтобы произвести это изменение как в скорости, так и в направлении движения частиц. Предположим, что текучая среда, устремившаяся в Aa на тело со скоростью $\sqrt{b}$, вынуждена уклоняться в сторону к $AaMm$, и представим себе, что с этой целью она устремляется при этом через кривой канал $AaMm$. В этом случае не только будет непрерывно изменяться ее направление, но и в зависимости от того, будет ли канал шире или у́же, скорость будет меньше или больше [212]. Пусть a—первоначальная ширина канала, которую следует рассматривать как бесконечно малую, так как для каждого ряда нужно представить себе особый канал. Пусть затем ширина $Mm=z$, и пусть скорость текучей среды в Mm равна $\sqrt{v}$. Так как скорость текучей среды, движущейся по каналу, обратно пропорциональна ширине канала, то

$$a : z = \sqrt{v} : \sqrt{b}$$

и следовательно,

$$z\sqrt{v} = a\sqrt{b}.$$

Проведем ось AP перпендикулярно к AB и обозначим координаты $AP = x$, $PM = y$; проведем QN параллельно PM и бесконечно близко к нему; тогда $PQ = MO = dx$; $ON = dy$; $MN = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и частица текучей материи $MNnm$ будет выражена через

$$z\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Предположим далее, что $dy = p\,dx$; тогда

$$MN = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + pp},$$

и если принять R за центр кривизны канала MN, получим, что

$$MR=\frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Чтобы направить движение частицы $MNnm$ по этой кривой, требуется приложить в направлении MR силу, которая относится к весу этой частицы, как

$$2v \quad \text{к} \quad \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Если вес этой частицы выражается величиной $z\,dx\sqrt{1+pp}$, то сила

$$MR=\frac{-2vz\,dp}{1+pp}.$$

Далее, если сечение канала в Mm увеличивается, то скорость уменьшается. Здесь требуется еще одна сила, действующая в направлении mS, касательная к каналу в m, и если эту силу обозначим через T, то получим:

$$z\,dx\sqrt{1+pp}\cdot dv=-T\,dx\sqrt{1+pp},$$

или

$$T=-z\,dv\cdot$$

Эти две силы MR и mS требуются, следовательно, для изменения движения текучей среды в канале $AaMm$ в каждой точке M. Поэтому, чтобы получить равнодействующую силу, разложим обе силы по двум неизменным направлениям BA и AP. Первая сила MR, которая была равна

$$\frac{-2vz\,dp}{1+pp},$$

дает в направлении BA силу, которая равна

$$\frac{-2vz\,dp}{(1+pp)\sqrt{1+pp}},$$

в направлении же AP силу, которая равна

$$\frac{2vzp\,dp}{(1+pp)\sqrt{1+pp}}.$$

Другая сила mS, которая была равна

$$-z\,dv,$$

дает в направлении BA силу, равную

$$\frac{-zp\,dv}{\sqrt{1+pp}},$$

а в направлении PA силу, равную

$$\frac{z\,dv}{\sqrt{1+pp}}.$$

Следовательно, на частицу $MNnm$ в направлении BA будет действовать сила

$$\frac{-2vz\,dp}{(1+pp)\sqrt{1+pp}}-\frac{zp\,dv}{\sqrt{1+pp}},$$

а в направлении AQ

$$\frac{-2vzp\,dp}{(1+pp)\sqrt{1+pp}}+\frac{z\,dv}{\sqrt{1+pp}}.$$

Но, как мы уже видели раньше,

$$z=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}},$$

и, следовательно, сила, возникшая из движения частицы $MNnm$ в направлении BA, равна

$$\frac{-2a\,dp\sqrt{bv}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}}-\frac{ap\,dv\sqrt{b}}{\sqrt{v(1+pp)}}.$$

Отсюда интеграл равен

$$\frac{-2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{1+pp}}+C$$

и дает в направлении BA силу, которая требуется для изменения движения всей текучей среды, находящейся в канале $AaMm$, если только правильно будет определена величина постоянной C. Чтобы верно определить ее, следует заметить, что если положить $AP=0$ (в этом случае p бесконечно велико) и $v=b$, то сила должна исчезнуть; примем поэтому, что при $p=\infty$ будет $C-2ab=0$, и следовательно, $C=2ab$. Следовательно, для изменения движения текучей среды $AaMm$, находящейся в канале, в направлении BA требуется сила, которая равна

$$2ab-\frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{1+pp}}=2ab\left[1-\frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{b(1+pp)}}\right].$$

Но

$$\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$$

представляет косинус угла MNO или угла mSB, если принять радиус за 1, и отсюда найдется приведенная выше сила

$$z=ab\left(1-\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}}\cos mSB\right);$$

под действием этой силы тело CD движется в направлении AB. Но $2ab$ представляет вес цилиндра текучей материи с основанием $Aa=a$ и высотой $2b$, причем $\sqrt{b}$ есть скорость, с которой текучая среда наталкивается на тело, или, что то же самое, с какой тело наталкивается на текучую среду. Эта сила, а следовательно, и сопротивление зависят, с одной стороны, от направления SM, по которому текучая среда отклоняется в сторону, а с другой стороны, — от скорости, которую эта среда сохраняет после толчка.

Отсюда ясно, что если текучая среда, чтобы обойти тело, отходит от своего естественного направления почти на прямой угол, так что угол $mSB=90°$, то найденная сила равна $2ab$; если это происходит со всеми текучими средами, у которых на пути стоит тело CD, то получается сопротивление, которое мы нашли в предыдущем Замечании для первого случая. Точно то же самое происходит и тогда, когда текучая среда теряет при толчке все свое движение. Если бы текучая среда после толчка устремилась назад по прежнему направлению с той же скоростью, то был бы угол $mSB = 180°$ и $\sqrt{v} = \sqrt{b}$; поэтому сила должна была бы равняться $4ab$, как это было найдено в предыдущем Замечании для другого случая.

Если бы можно было знать, каким образом каждая струя текучей среды Aa, движущаяся по направлению к телу BD, уклоняется от него, изменяя как свою скорость, так и направление, то можно было бы тогда определить силу, действующую на тело. Для этой цели нет надобности знать ширину и кривизну канала $AaMm$ на всем его протяжении, по которому струя Aa, как мы полагаем, движется по направлению к телу; достаточно, если это будет известно нам для конечной точки канала, потому что сила, возникающая из части $AaMm$ в направлении AB, выражается формулой

$$2ab\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} \cos mSB\right),$$

или, так как

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{z},$$

следующей формулой:

$$2ab\left(1 - \frac{a}{z} \cos mSB\right),$$

где z обозначает ширину канала в последней точке M, а угол mSB определяется положением последнего участка $MNnm$. Здесь, следовательно, все зависит только от того, что мы примем для конца канала. Если брать все пространство до того места, где текучая среда совсем уже минует тело и пойдет своим прежним ходом, тогда будет $z = a$, угол mSB будет равен нулю, следовательно, его косинус равен 1. В этом случае сила, действующая на тело в направлении AB, будет

$$2ab(1 - 1) = 0,$$

и тело совершенно не будет испытывать никакого сопротивления. Отсюда ясно, что для воды и для воздуха нельзя принимать за конечную ту точку канала, где движение позади тела опять целиком совпадает с первоначальным. Для объяснения этого мы должны только точнее рассмотреть действующую на тело силу. Если мы будем иметь дело только с частью канала $AaMm$, то сила, действующая на тело в направлении AB, будет равна

$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos mSB\right),$$

и, пока увеличивается угол mSB, она становится больше по мере удаления от начала Aa. Это значит, что до тех пор, пока канал изгибается в сторону от тела, увеличивается и возникающая отсюда сила, толкающая тело в направлении AB. Если же канал, как на рис. 15, внезапно изменяет свой изгиб и от M до D поворачивается к телу, то от M до D угол MSB все убывает, а потому и сила тоже уменьшается таким образом, что если канал в Dd идет параллельно Aa и при этом одинаково широк, то вся сила делается равной нулю. Если канал имеет такую форму, то в нем следует рассматривать отдельно две части: AM и MD; у AM его кривизна идет в сторону от тела BD, а у MD она обращена к телу. В первой части AM возникает сила, которая толкает тело по направлению AB и может быть выражена через

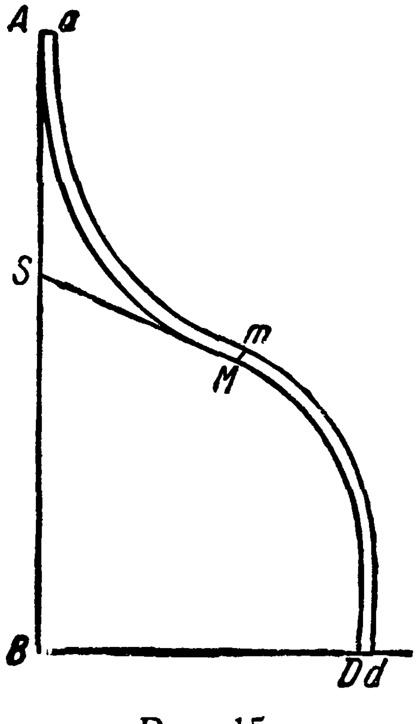

Рис. 15.

$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos MSB\right).$$

В другой части DM возникает сила, противоположная первой и отталкивающая тело назад в направлении BA. Так как ни одно тело не может быть приведено в движение иначе, чем действительным давлением, то и эта последняя сила может действовать на тело лишь постольку, поскольку давление текучей среды достаточно велико, чтобы проталкивать тело вперед. Так как и в воде, и в воздухе давление спереди не только не равно давлению сзади, но обычно даже больше, то очевидно, что сила, возникшая в части канала MD, не оказывает на тело никакого воздействия или, в крайнем случае, весьма незначительное. Поэтому сила, возникшая во всем канале AMD и фактически действующая на тело, почти равна той, которая возникает в части AM и, следовательно, может быть выражена через

$$2ab\left(1-\frac{a}{z}\cos MSB\right).$$

Отсюда видно также, что если бы текучая среда обладала такими свойствами, что сила, возникающая в части MD и отталкивающая тело назад, могла бы оказать свое полное воздействие [213], то тело не испытывало бы никакого воздействия от столкновения с такой текучей средой и, следовательно, не встречало бы в ней никакого сопротивления [214]. Такой случай мог бы иметь место, если бы текучая среда была бесконечно тонкой и в то же время сжата бесконечно большой силой. Возможно, что этим свойством обладает тонкая небесная среда, в которой движутся планеты и кометы, и это является причиной, почему в движении этих тел нельзя заметить никакого уклонения. Это свойство, однако, отсутствует у воздуха, воды и других известных текучих сред — обстоятельство, подтверждаемое их значительным сопротивлением; и так как они ввиду их обращенной к телу кривизны MD не в состоянии притянуть его к себе, то сила, возникающая по причине наличия противоположной кривизны AM, оказывает на тело полное воздействие, и именно поэтому возникает большое сопротивление.

Чтобы иметь возможность обоснованно судить о величине этого сопротивления, рассмотрим цилиндр, который обтекает с данной скоростью такая текучая среда. Пусть (рис. 16) $OP\alpha Q$ будет половиной этого цилиндра, а AOQ — его осью; то, что будет сказано об одной его половине, относится также и к другой. Представим себе, что этот цилиндр помещен в канал, у которого половина ширины обозначена через AH; через этот канал воздух или вода устремляются к телу с определенной скоростью. Разложим мысленно эту протекающую среду на бесконечное число малых струй AB, BC, CD, DE и т. д. и представим себе, какой путь вокруг тела изберет для себя каждая из них. Ясно, что эти пути будут несколько искривляться, как показывает рисунок. Затем отметим на этих путях точки a, b, c, d, e, f и т. д., в которых они начинают изгибаться по отношению к телу, и вычислим силы в направлении AO, возникающие из закругления этих струй до точек a, b, c, d, e и т. д. Все эти силы, вместе взятые дадут сопротивление. Очевидно, что первая струя $ABab$ изгибается, образуя почти прямой угол, и поэтому возникающее отсюда сопротивление равно $2ab$, причем a обозначает толщину струи AB, а b — высоту, дающую скорость струи. Следующая струя $BCbc$ не образует уже такого большого изгиба и, следовательно, не дает такой большой силы. Таким же образом силы, возникающие от последующих струй CD, DE, EF, становятся все меньше и под конец вовсе незаметны. Отсюда ясно, что общее сопротивление будет гораздо меньше, чем вес столба текучей материи, у которого ширина такая же, как у тела, а высота равна двойной высоте b, выражающей скорость.

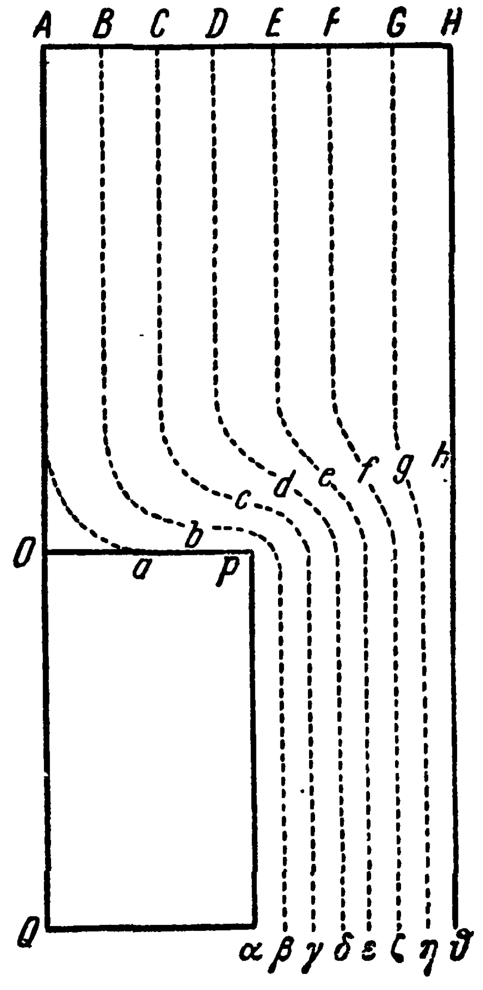

Рис. 16.

То, что здесь сказано о цилиндре и о теле с передней плоской частью, ударяющей о текучую среду, легко применить и к другим фигурам. Но мы тут же увидим, что если передняя часть тела не является плоской, а выпукла или даже заострена, то сопротивление должно быть меньше, чем в предшествующем случае. В этом случае даже первая струя AB не образует прямого угла, а у последующих изгиб будет еще меньше. Поэтому мы не можем согласиться здесь с автором, когда он говорит, что в таких сжатых текучих средах сопротивление зависит не от формы тела, а от величины их поперечного сечения. По этой причине весьма вероятно, что сопротивление, испытываемое телами различной формы в сжатой текучей среде, может быть определено по тому же правилу, которое было перед этим дано, и что разница здесь заключается только в том, что в настоящем случае сопротивление будет гораздо меньше, чем в предыдущем. Причину этого видели также в том, что сопротивление шара в таком случае составляет только половину сопротивления, оказываемого цилиндром такого же сечения. Однако возможно объяснить большинство опытов, поставленных относительно сопротивления как воды, так и воздуха, если принять, что сопротивление цилиндра, который движется вдоль своей оси, равно цилиндру того же сечения, состоящему из текучей среды, и высота которого равна той, через которую выражена скорость.

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Но это может относиться только к той части сопротивления, которая возникает от фактического столкновения тела с частицами текучей среды и о котором до сих пор только и шла речь. Это сопротивление, однако, как уже было замечено, может увеличиться в том особом случае, когда текучая среда давит на тело спереди сильнее, чем сзади. Пока давление на все тело одинаково, как это бывает при всяком не очень быстром движении, тело до тех пор испытывает только то сопротивление, которое возникает от фактического столкновения тела с частицами текучей среды и которое можно заранее определить. Если же, например, тело так быстро движется в воздухе, что последний не в состоянии поспеть за ним и тотчас же занять место, оставленное телом, то тело сзади вовсе не будет испытывать никакого давления, и следовательно, давление спереди из-за этого не уменьшится; отсюда лобовое сопротивление должно еще увеличиться давлением спереди.

Все зависит здесь, следовательно, от того, как быстро воздух может следовать за телом, или от того, с какой степенью скорости воздух проникает в безвоздушное пространство. Эта скорость зависит от упругости воздуха, которую мы выше выразили весом воздушного столба высотой 29 100 рейнских футов; следовательно, воздух проникает в безвоздушное пространство со скоростью, которой достигает тело, падающее с высоты 29 100 футов, и которая, следовательно, равна 1348 футам в секунду. Поэтому если цилиндр движется вдоль своей оси со скоростью 1348 футов в секунду, то воздух может следовать непосредственно за ним так, что позади него не будет оставаться пустое пространство. Но в этом случае воздух не оказывает сзади никакого давления на цилиндр. Так как тот же цилиндр спереди должен преодолевать, во-первых, сопротивление, равное весу воздушного столба одинакового сечения и высотой 29 100 футов [215], выражающей его скорость, и, кроме того, еще противодействие атмосферы, которое столь же велико, то общее сопротивление оказывается вдвое больше сопротивления, возникающего от столкновения этого тела с частицами воздуха. Если бы этот цилиндр двигался с еще большей скоростью, он не только не испытывал бы сзади никакого давления, но за ним еще всегда оставалось бы безвоздушное пространство. Если, следовательно, упомянутую высоту 29 100 футов, через которую выражается скорость движущегося позади воздуха, обозначить через h, а высоту, соответствующую действительной скорости цилиндра, через v, причем v больше h, то сопротивление, как было указано выше, окажется равным весу воздушного столба высотой v, а противодавление будет равно весу воздушного столба высотой h. Так как этот цилиндр не испытывает сзади никакого давления, то полное сопротивление будет равно весу воздушного столба высотой $h+v$; в противном случае, если это тело испытывает спереди и сзади давление одинаковой величины, сопротивление выразится только высотой v. Следовательно, в этом случае, как замечает автор, сопротивление гораздо больше, чем оно было бы найдено по обычным правилам.

Если же скорость цилиндра меньше скорости, с которой воздух поспевает за ним, т. е. если v меньше h, то цилиндр испытывает еще сзади давление, которое будет тем больше, чем высота v меньше h. Чтобы найти это давление, следует рассмотреть скорость, с которой воздух, следующий за телом, нагоняет его; эта скорость равна разности между скоростью воздуха $\sqrt{h}$ и скоростью тела $\sqrt{v}$. Это, следовательно, как раз столько, сколько было бы, если бы воздух сзади устремился на тело со скоростью $\sqrt{h}-\sqrt{v}$, а так как высота, которая дает такую скорость, равна

$$h-2\sqrt{hv}+v,$$

то, по-видимому, давление сзади равно весу воздушного столба, высота которого равна

$$h-2\sqrt{hv}+v.$$

Тело это, как и раньше, будет относить назад с силой, равной весу воздушного столба, высота которого равна $h+v$. Если мы вычтем отсюда силу, действующую на тело сзади и толкающую его вперед, то для сопротивления остается только вес воздушного столба высотой $2\sqrt{hv}$ [[216]]. Если бы этот вывод был правилен, сопротивление было бы пропорционально не квадрату скоростей тела, как это было найдено нами раньше, а только самой скорости $\sqrt{v}$; так будет обстоять дело до тех пор, пока тело будет двигаться со скоростью меньшей, чем воздух, настигающий тело. Вывод этот основан на том, что сила давления всегда пропорциональна квадрату скорости, с которой частицы воздуха ударяют о тело, если допустить, что частицы действительно движутся со скоростью, которой они достигли бы, проникая в безвоздушное пространство. Если давление воздуха на тело так велико, как если бы воздух устремлялся на тело с такой большой скоростью, то приведенное выше рассуждение не представляется необоснованным.

Так как природа текучих сред постигнута еще не настолько совершенно, чтобы можно было, не прибегая к опытам, определять все происходящие в них явления на основании только теории, то будет небесполезно развить дальше это положение о воздействии воздуха и других текучих материй на твердые тела, хотя, как будет показано дальше, оно и не подтверждается опытом. Давление спереди на цилиндр, движущийся вдоль своей оси в воздухе со скоростью $\sqrt{v}$, получается иначе, чем раньше. Так, если мы допустим, что воздух, вместо того чтобы оказывать на цилиндр давление, движется на него со скоростью, соответствующей давлению, т. е. $\sqrt{h}$, то относительная скорость, с которой цилиндр ударяет спереди частицы воздуха, равна $\sqrt{h}+\sqrt{v}$, а высота, соответствующая этой скорости, равна $h+2\sqrt{hv}+v$. Таким образом, давление спереди равно весу воздушного столба, высота которого равна

$$h+2\sqrt{hv}+v.$$

Если теперь скорость цилиндра больше, чем скорость следующего с ним воздуха, т. е. если $v>h$, то тело совершенно не испытывает сзади давления и, следовательно, сопротивление будет равно весу воздушного столба, высота которого равна $h+2\sqrt{hv}+v$. Но если скорость цилиндра $\sqrt{v}$ меньше, чем $\sqrt{h}$, то давление сзади, как мы видели, равно $h—2\sqrt{hv}+v$, что после вычитания из него давления спереди даст сопротивление $4\sqrt{hv}$; следовательно, в этом случае сопротивление пропорционально скорости тела $\sqrt{v}$. Отсюда видно также, что сопротивление должно быть тем больше, чем сильнее сжата текучая материя. Поэтому если бы сопротивление воды обладало такими свойствами, то сопротивление этого же цилиндра, движущегося под водой с одинаковой скоростью на различной глубине, было бы тем больше, чем глубже цилиндр погружен в воду. А именно, сопротивление возрастало бы, в соответствии с квадратным корнем из глубины под водой, так, что на глубине в четыре раза большей сопротивление должно было бы быть вдвое больше. Следовательно, рыба, которая плывет на глубине 40 футов, должна испытывать сопротивление в два раза большее, чем в том случае, когда она движется с той же скоростью на глубине только 10 футов, если только

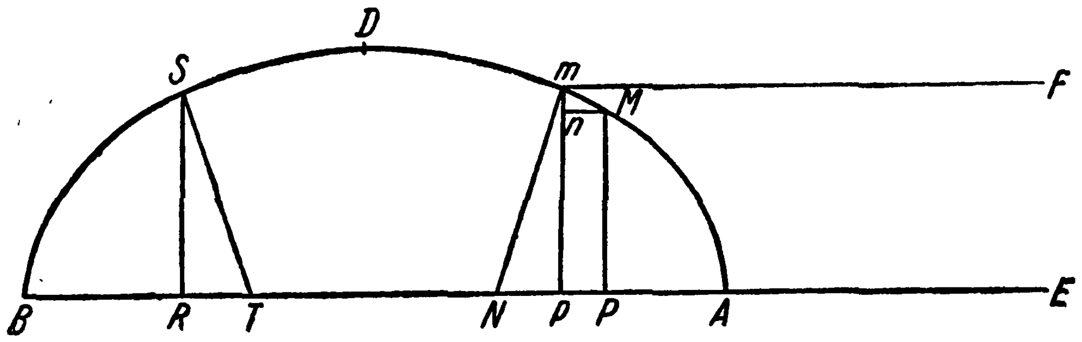

Рис. 17.

ее скорость меньше той, какую приобретает тело, падающее с высоты 10 футов. Желательно было бы поэтому заняться постановкой подобного рода опытов над сопротивлением тел на различных глубинах под водою. Этот вид сопротивления изменяется также совершенно по другим законам, если форма тела не цилиндрическая, причем дело здесь не только в передней части тела, которая, собственно, и наталкивается на частицы текучей среды, но и в форме тыльной части, которая здесь также заслуживает особого внимания. Чтобы подробнее изучить свойства этого сопротивления, мы рассмотрим тело вращения, образованное вращением кривой линии $AMSB$ около оси AB (рис. 17) и движущееся в направлении оси AB в воздухе или в какой-либо другой сжатой текучей среде. Пусть $\sqrt{b}$— скорость, с которой это тело движется сейчас в направлении AE, а $\sqrt{h}$—скорость, с которой текучая среда проникала бы в пустое пространство и которую мы рассматриваем вместо действительного давления в соответствии с этим представлением о сопротивлении. Так как давление на тело будет отовсюду перпендикулярным, то проведем перпендикулярную линию mN к элементу дуги Mm, который будет испытывать в этом направлении такое давление, как если бы его ударял воздух, движущийся со скоростью $\sqrt{h}$. Но так как мы полагаем, что далее тело пойдет по направлению mF со скоростью $\sqrt{b}$, а давление на Mm по-прежнему перпендикулярно, то следует взять составляющую скорости по этому перпендикулярному направлению, а именно

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b},$$

которую мы получим, если из M и m проведем перпендикулярные к оси AB линии MP, mp, а Mn, параллельную оси. Пусть $AP=x$, $PM=y$; тогда будет $Pp=Mn=dx$, $mn=dy$. Положим $dy=p\,dx$, тогда будет $Mm=dx\sqrt{1+pp}$ и

$$\frac{mn}{Mm}\sqrt{b}=\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{1+pp}}.$$

Поэтому элемент Mm испытывает частью от давления, а частью от толчка действие такой силы, как если бы его ударял воздух в направлении mN со скоростью

$$\sqrt{h}+\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{1+pp}}$$

и, следовательно, как если бы на него давил воздушный столб высотой

$$h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}+\frac{bpp}{1+pp}.$$

Но так как эта сила направлена по mN, то следует взять из нее ту часть, которая имеет одинаковое направление с движением тела; и это будет

$$\frac{p}{\sqrt{1+pp}}\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}+\frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Так как действие этой силы испытывает на себе весь шаровой пояс, образованный вращением около оси AB элемента $Mm = dx\sqrt{1+pp}$, а поверхность этого шарового пояса равна $2\pi y\,dx\sqrt{1+pp}$, если принять $1 : \pi$ за отношение диаметра к окружности, то сила, которая возникает на этом шаровом поясе и замедляет движение тела, будет

$$2\pi yp\,dx\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}+\frac{bpp}{1+pp}\right).$$

Взятый отсюда интеграл покажет величину сопротивления, которое возникает на поясе, получаемом вращением AM около оси. Следовательно, чтобы найти полное сопротивление, следует этот интеграл распространить на все тело, поскольку воздух действует на все тело, если скорость тела $\sqrt{b}$ меньше, чем $\sqrt{h}$. Но при этом заметим, что значение полученного интеграла увеличивается от A до тех пор, пока возрастает ордината y, что имеет место до D. Но если от D идти дальше к B, то, так как величина $p=\frac{dy}{dx}$ становится отрицательной, то тем самым сила сопротивления уменьшается, потому что в этих местах тело проталкивается давлением воздуха вперед. В этом случае в выражении

$$h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}+\frac{bpp}{1+pp}$$

второй член

$$\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}$$

получает, следовательно, знак минус.

Поэтому при $b<h$ получим полное сопротивление, если полученный выше интеграл

$$2\pi\int yp\,dx\left(h+\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}+\frac{bpp}{1+pp}\right)$$

распространить на всю кривую линию ADB.

Но если скорость тела $\sqrt{b}$ больше, чем $\sqrt{h}$, и следовательно, воздух совсем не поспевает за телом, то позади окажется часть BS, на которую воздух совершенно не оказывает давления. Чтобы определить эту часть, следует только отыскать точку S, где давление воздуха совершенно исчезает, что происходит, когда

$$h+\frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{1+pp}}=0;$$

т. е. если из S провести перпендикуляр ST к кривой линии, то, так как в этом случае

$$\frac{RT}{ST}=\frac{-p}{\sqrt{1+pp}},$$

следует найти точку S, для которой

$$\sqrt{h}=\frac{RT}{ST}\sqrt{b},$$

или

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}=\frac{RT}{ST}.$$

Если эта точка S будет найдена, то приведенный выше интеграл не следует брать дальше, чем до найденной точки. Отсюда следует, что если кривая линия у B так заострена, что до B дробь $\frac{RT}{ST}$ все время больше, чем $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, то интеграл следует брать для всей кривой линии. Если же сопротивление уменьшается вследствие давления, которое действует сзади, то очевидно, что чем больше тело заострено сзади, тем сопротивление будет меньше, а именно, когда $\sqrt{b}>\sqrt{h}$. Некоторые ученые пытаются вывести это обстоятельство опытным путем и утверждают, что сопротивление корабля зависит не только от формы его носовой части, но и что форма кормовой части, если она хорошо заострена, весьма значительно способствует уменьшению сопротивления. Хотя по этому вопросу не были еще проведены обстоятельные опыты, однако это новое учение о сопротивлении текучих сред получит немаловажное подтверждение, если только это обстоятельство окажется до известной степени верным.

Вычислим, между прочим, по вышеприведенным правилам сопротивление, которое встречает шар в воздухе. Итак, пусть диаметр шара $AB = 2a$; тогда будет $yy = 2ax - xx$, и

$$Mm = \frac{a\,dy}{\sqrt{aa - yy}}.$$

Так как $p\,dx = dy$, то

$$\frac{p}{\sqrt{1 + pp}} = \frac{\sqrt{aa - yy}}{a},$$

и интеграл будет

$$2\pi \int y\,dy \left[h + \frac{2\sqrt{bh(aa - yy)}}{a} + \frac{b(aa - yy)}{aa} \right] \quad [217],$$

откуда будет найден интеграл

$$\pi hyy - \frac{4\pi(aa - yy)\sqrt{bh(aa - yy)}}{3a} + \frac{4\pi a^2\sqrt{bh}}{3} + \\ + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Если $b < h$, то следует этот интеграл распространить до B и, следовательно, положить $y = 0$, причем заметим, что если абсцисса x больше, чем будет принят радиус a, то выражение $\sqrt{aa - yy}$ получает знак минус. Поэтому если переменить знак у второго члена и положить $y = 0$, то получается сопротивление, равное

$$\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}.$$

Но πaa представляет собой площадь большого круга этого шара. Если, следовательно, обозначить эту площадь через cc, то сопротивление будет равно

$$\frac{8}{3}cc\sqrt{bh}.$$

А выше мы видели, что если в воздухе движется с постоянной скоростью цилиндр, площадь сечения которого равна cc, то его сопротивление будет равно

$$4cc\sqrt{bh};$$

поэтому сопротивление шара будет относиться к сопротивлению одинакового сечения цилиндра, как 2 к 3. Но это будет верно только в том случае, если $b < h$; если же $b > h$, то интеграл следует брать не до точки B, а только до S, где

$$\sqrt{h} = \frac{-p\sqrt{b}}{\sqrt{1+pp}},$$

или

$$\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}} = \frac{-\sqrt{aa-yy}}{a}.$$

А так как эта точка S находится за точкой D, то $\sqrt{aa-yy}$ будет отрицательным, и интеграл будет, следовательно, записан так:

$$\pi hyy + \frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a} + $$

$$+\frac{4}{3}\pi aa\sqrt{bh} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}.$$

Полагаем здесь

$$\sqrt{aa-yy} = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$$

и

$$aa-yy = \frac{aah}{b},$$

следовательно,

$$yy = \frac{aa(b-h)}{b}$$

и

$$y^4 = \frac{a^4(b-h)^2}{bb};$$

тогда искомое сопротивление будет равно

$$\pi aa\left(\frac{1}{2}b + \frac{4}{3}\sqrt{bh} + h - \frac{hh}{6b}\right),$$

или

$$\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}+\frac{\pi aa}{6b}(\sqrt{b}-\sqrt{h})^3(3\sqrt{b}+\sqrt{h}).$$

Отсюда следует, что, когда $\sqrt{b}=\sqrt{h}$, сопротивление, как в предыдущем случае, будет

$$\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}.$$

Чтобы привести еще один пример, возьмем тело вращения, движущееся в направлении своей оси BAE со скоростью $\sqrt{b}$ в воздухе (рис. 18) и состоящее

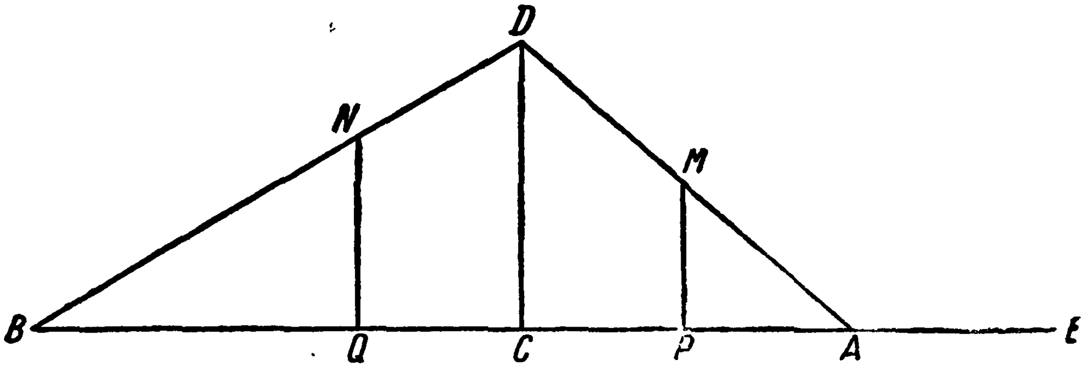

Рис. 18.

из двух конусов [218], наподобие той фигуры, которая получится, если треугольник ADB вращать около оси AB. Обозначим высоту $DC=a$, стороны: $AD=m$ и $BD=n$; тогда передняя часть ACD будет равна

$$\frac{p}{\sqrt{1+pp}}=\frac{a}{m}$$

и сопротивление передней части будет

$$2\pi\int y\,dy\left(h+\frac{2a\sqrt{bh}}{m}+\frac{aab}{mm}\right)=$$

$$=\pi aa\left(h+\frac{2a\sqrt{bh}}{m}+\frac{aab}{mn}\right).$$

Но давление воздуха на тыльную часть, если

$\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, будет толкать тело вперед с силой

$$\pi aa\left(h - \frac{2a\sqrt{bh}}{n} + \frac{aab}{nn}\right).$$

Если вычесть эту силу из предыдущей, останется действительное сопротивление тела, которое будет равно

$$\pi aa\left[\frac{2a(m+n)\sqrt{bh}}{mn} + \frac{aab(nn-mm)}{mmnn}\right] =$$
$$= \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left[2\sqrt{bh} + \frac{ab(n-m)}{mn}\right].$$

Но если

$$\sqrt{h} < \frac{a\sqrt{b}}{n},$$

то тыльная часть совершенно не испытывает давления, и тогда, следовательно, сопротивление равно

$$\pi aa\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Если

$$\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n},$$

то сопротивление тем меньше, чем длиннее тыльная часть, и если она будет бесконечно длинной, то сопротивление будет равно

$$\pi aa\left(\frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right).$$

Если это же тело перевернуть так, чтобы оно двигалось частью DBC в воздухе с той же скоростью, то сопротивление его будет равно

$$\frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left[2\sqrt{bh} + \frac{ab(m-n)}{mn}\right],$$

если только

$$\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{m}.$$

Из этого следует, что если оба конуса неодинаково заострены, то сопротивление тела будет наименьшим, когда направлена вперед более заостренная часть. Из такого представления о сопротивлении текучих сред можно получить много других изящных выводов, которые мы, однако, благоразумно пропустим, потому что еще неизвестно, совпадут ли они в какой-либо мере с данными опыта или нет. Пока что получило подтверждение только то положение автора, что если шар движется со скоростью большей, чем может следовать за ним воздух, то сопротивление оказывается гораздо бо́льшим, чем полагали прежде. Так, если

$$\sqrt{b} > \sqrt{h},$$

то к сопротивлению

$$\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh},$$

которое получается, если $\sqrt{b}$ не больше, чем $\sqrt{h}$, следует еще прибавить величину

$$\frac{\pi aa}{6b}(\sqrt{b}-\sqrt{h})^3(3\sqrt{b}+\sqrt{h}).$$

Независимо от того, будет ли то или иное объяснение сопротивления воздуха удовлетворительно, существует еще другое обстоятельство, требующее рассмотрения, которое вызывает еще более значительное увеличение сопротивления. Оно основано на том, что воздух способен как сжиматься в наименьшем объеме, так и неограниченно расширяться. Отсюда получается, что если тело движется в воздухе очень быстро, то воздух перед телом сильнее сжат и, следовательно, плотнее, позади же тела воздух сжат меньше и, следовательно, он будет реже.

Таким образом, вследствие первого обстоятельства сила сопротивления спереди больше, вследствие же второго обстоятельства сила, проталкивающая тело сзади вперед, слабее; а потому сопротивление воздуха и по этой причине будет при быстром движении значительно больше, чем при медленном.

ВТОРОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Как опытным путем определить сопротивление воздуха, которое испытывает движущееся в нем тело?

С помощью прибора, описанного в восьмом Предложении, я всегда могу определить скорость пули в любой точке пути, по которому она движется. Все, в сущности, зависит от направления движения, которое должно быть таково, чтобы пуля в данном месте своего пути попала в маятник. Я брал мушкет, который стрелял свинцовой пулей диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма, и заряжал его порохом примерно в половину веса пули; причем я был настолько осмотрителен, что всегда тщательнейшим образом отвешивал порох и так налаживал оружие, чтобы после предварительных многочисленных испытаний быть уверенным в том, что при всех выстрелах расхождение в скорости пули будет не более 20 футов в секунду. После этого я стрелял трижды различным образом в маятник, который в первый раз отстоял от дула на 25 футов, в другой раз на 75 футов и третий раз на 125 футов, и нашел, что в первом случае пуля ударила в маятник со скоростью 1670 футов в секунду, во втором случае со скоростью 1550 футов и в третьем со скоростью 1425 футов в секунду. Таким образом, эта пуля теряла в своей скорости приблизительно от 120 до 125 футов в секунду на протяжении каждых проходимых ею 50 футов, и время, в течение которого она проходила эти 50 футов, равнялось приблизительно $\frac{1}{32}$ или $\frac{1}{30}$ секунды. Из этого следует, что средняя величина сопротивления воздуха при этих опытах была приблизительно в 120 раз больше, чем вес пули; и таким образом, сопротивление равнялось приблизительно 10 ℔ торгового веса [219], так как пуля весила приблизительно $\frac{1}{12}$ ℔. Если мы произведем теперь вычисление по способу г-на Ньютона, приведенному им в 38-м предложении 2-й книги для сжатых текучих материй, принимая при этом во внимание, что воздух в 850 раз легче воды, то найдем, что сопротивление пули диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма, движущейся со скоростью около 1600 футов в секунду, будет не больше чем $4\frac{1}{6}$ фунта торгового веса. Так как мы знаем, что те правила, которые содержатся в вышеупомянутом предложении г-на Ньютона, весьма точны для медленного движения, то с уверенностью можем отсюда заключить, что противодействующая сила воздуха при медленном движении меньше, чем при быстром в отношении $4\frac{1}{6}$ к 10; это отношение находится между отношениями 1 к 2 и 1 к 3.

В дальнейшем я снова несколько раз заряжал тот же мушкет равными зарядами пороха и пулями одинакового веса и прилагал наивозможное старание к тому, чтобы при всех выстрелах получалась одна и та же скорость. Таким образом, я трижды стрелял в маятник, отстоявший в 25 футах от дула ствола, и нашел, что средняя скорость пули достигала приблизительно 1690 футов в секунду. Затем я установил мушкет на расстоянии в 170 футов от маятника и после нескольких выстрелов нашел, что средняя скорость пяти выстрелов, при которых пули с этого расстояния попали в маятник, достигла 1300 футов в секунду. Таким образом, эта пуля, проходя расстояние в 150 футов, теряла в своей скорости около 390 футов в секунду. При этих опытах, следовательно, сопротивление оказалось несколько бо́льшим, чем в предыдущих, и достигало здесь величины между 10 и 12 фунтами торгового веса. Итак, по этим опытам отношение противодействующей силы воздуха при очень быстром движении к таковой при очень медленном движении ближе подходит к отношению 3 к 1, чем в предшествующих случаях.

Установив таким путем сопротивление воздуха для скорости примерно в 1700 футов в 1″, т. е. для скорости, которая достаточно велика, чтобы позади пули оставалось безвоздушное пространство, я занялся исследованием сопротивления для меньшей степени скорости.

С этой целью я заряжал тот же мушкет пулями такой же величины, как и раньше, но уменьшенным зарядом пороха, и затем, поставив маятник в 25 футах от ствола, произвел в него последовательно пять выстрелов одинаковым зарядом: так я нашел среднюю скорость пули, с которой она подходила к маятнику, равной 1180 футам в 1″. После этого я передвинул маятник на расстояние в 250 футов от ствола и снова произвел пять последовательных выстрелов и, взяв среднее из них, получил скорость пули, равную 950 футам в секунду. Итак, пуля, пройдя в воздухе расстояние большее на 225 футов, теряла в своей скорости 230 футов в 1″. Так как она проходила этот путь приблизительно в $\frac{3}{14}$ секунды, то сопротивление воздуха при средней степени скорости должно было быть приблизительно в $33\frac{1}{2}$ раза больше веса пули и, следовательно, равняться 2℔ 10 унциям торгового веса. А по теории сопротивления для медленного движения оно в данном случае должно составлять только $\frac{7}{11}$; поэтому противодействующая сила воздуха при скорости в 1065 футов в секунду должна быть увеличена не больше чем в отношении 7 к 11, так как мы в предыдущих опытах уже видели, что при большей степени скорости увеличение очень близко подходит к отношению 1 к 3.

Затем я произвел три выстрела прежней величины зарядом и пулей того же веса в спокойную воду, так чтобы можно было отчетливо заметить место, где пуля коснулась воды, и точно определить как время, так и путь, пройденный пулей в воздухе до самой воды. Каждая пуля проходила со скоростью 400 футов в секунду, и многочисленные опыты при одинаковых зарядах убедили меня, что я могу рассчитывать на такую скорость с точностью до 10 футов в секунду. Первая пуля прошла 313 ярдов, прежде чем коснулась воды, и полет ее длился $4\frac{1}{4}$ секунды: следовательно, пуля прошла 313 ярдов в $4\frac{1}{4}$ секунды. Вторая прошла 319 ярдов в 4 секунды, а третья — 373 ярда в $5\frac{1}{2}''$. Согласно твердо установленной теории сопротивления, при медленном движении первое расстояние должно было быть пройдено только в $3'',2$, второе в $3'',28$ и третье в $4''$. Отсюда следует, что при каждом из этих выстрелов движение встречало значительно большее сопротивление воздуха, чем оно должно было иметь место по теории. Следовательно, при таком довольно-таки медленном движении, как 400 футов в $1''$, противодействующая сила воздуха оказалась значительно больше, чем при медленном движении.

Таким образом, из всего того, что здесь приведено, следует, что учение о сопротивлении воздуха в том виде, как оно твердо установлено г-ном Ньютоном для медленного движения и подтверждено им с помощью различных опытов, совершенно не соответствует действительности, если его распространять на быстрое движение, подобное движению мушкетной пули; в данном случае противодействующая сила воздуха будет почти втрое больше, чем она должна быть по упомянутому учению. Но в то же время это увеличение противодействующей силы воздуха убывает тем больше, чем меньше скорость пули, пока, наконец, эта скорость не станет так мала, что величина сопротивления будет вполне согласна с теорией. Поэтому сопротивление увеличивается не пропорционально квадрату скорости, как это обычно принимают, а уклоняясь от этой пропорциональности тем сильнее, чем больше скорость пули и давление воздуха на нее спереди. Принимая в соображение это обстоятельство, мы должны утверждать, что вследствие этих несовершенных и ошибочных представлений о сопротивлении воздуха путь, описываемый ядром в воздухе, никоим образом не может быть определен точно и что, следовательно, артиллерийское искусство в этой части остается еще весьма несовершенным. Мы здесь доказали и установили со всей несомненностью возрастание сопротивления воздуха при очень быстром движении, далеко превосходящее все то, что до сих пор об этом предполагали; но если мы должны быть в состоянии определять движение брошенных тел в воздухе, необходимо еще найти действительное соотношение, по которому можно будет определять сопротивление при любой скорости. Это и будет предметом нашего следующего Предложения.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Автор сообщает нам здесь о нескольких весьма замечательных опытах, посредством которых может быть определено действительное сопротивление воздуха при быстром движении. Хотя на основании вышеприведенных причин можно до некоторой степени сомневаться

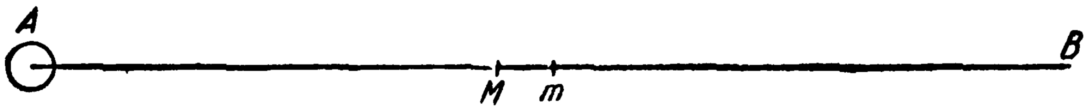

Рис. 19.

в правильности полученной автором скорости пули, потому что он, по-видимому, не учел всех необходимых обстоятельств и к тому же построил свое вычисление на неверном правиле; но так как ошибка не может быть особенно велика, мы по необходимости примем это правило как бы за верное, тем более, что ввиду отсутствия подробного описания опытов с маятником нет возможности исправить допущенные при вычислении ошибки. Чтобы прежде всего установить, в какой мере общепринятое учение о сопротивлении воздуха в этих поставленных автором опытах не соответствует действительности, вычислим по его данным, сколько должна потерять в своей скорости пуля, которая начала двигаться с заданной скоростью, после того как она прошла определенный путь. И хотя траектория, описываемая пулей, в действительности имеет кривизну, но весьма незначительную, и очевидно, что в настоящем исследовании мы можем ею вовсе пренебречь (рис. 19). Итак, предположим, что пуля движется в воздухе по прямой линии AB; ее вес относится к весу воздуха, как n к 1. Если принять, что вода в 850 раз тяжелее воздуха, то для n мы получим в зависимости от материала, из которого может состоять пуля, следующие значения:

Материал пули	Вес по отношению к весу дождевой воды	Значение n
Чистое золото	19,080	16 218
Чистое серебро	10,480	8 908
Свинец	11,350	9 647
Медь	8,840	7 514
Железо	7,820	6 647
Латунь	8,412	7 150
Слоновая кость [220] . .	1,826	1 552
Мрамор	2,710	2 303

Пусть c — диаметр пули; тогда пуля будет весить столько, сколько весит такого же сечения цилиндр воздуха, высота которого равна $\frac{2}{3}nc$. Далее, пусть скорость пули в A будет $\sqrt{b}$, или b будет означать высоту, с которой падающее тело приобретает такую же, как у пули, скорость; и после того, как пуля пройдет путь $AM=x$, ее скорость в M пусть будет $\sqrt{v}$. Если бы пуля испытывала такое же сопротивление, как цилиндр такого же сечения, то сопротивление было бы равно весу воздушного столба высотой v; но так как сопротивление пули по общеизвестному учению составляет только половину этого, то оно будет выражено весом одинакового сечения воздушного столба, высота которого равна $\frac{1}{2}v$; следовательно, сопротивление будет относиться к весу пули, как $\frac{1}{2}v$ к $\frac{2}{3}nc$, или как $\frac{3v}{4nc}$ к 1. Если пуля пройдет бесконечно малое расстояние $Mm=dx$, мы получим следующее уравнение:

$$dv = \frac{-3v\,dx}{4nc},$$

или, после интегрирования:

$$\frac{3}{4nc} = l\,\frac{b}{v},$$

где $l\,\frac{b}{v}$ обозначает гиперболический логарифм от $\frac{b}{v}$. Это можно записать так:

$$\frac{3x}{4nc} = 2l\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}};$$

если же примем e за число, гиперболический логарифм которого равен 1, то будем иметь:

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}} = e^{3x:8nc}$$

или

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = e^{-3x:8nc}.$$

Так как в рассматриваемых примерах $\frac{3x}{8nc}$ представляет довольно малую дробь, то приблизительно будет

$$\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{3x}{8nc} + \frac{9xx}{128nncc},$$

следовательно,

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{3x}{8nc} - \frac{9xx}{128nncc}.$$

По этой формуле мы прежде всего произведем подсчет в первом примере автора. Пуля была свинцовая и, следовательно, $n = 9647$. Далее, диаметр пули был $c = \frac{3}{4}$ дюйма и скорость ее в A была 1670 футов в секунду; это число мы здесь можем подставить вместо $\sqrt{b}$, так как вопрос касается только отношения $\sqrt{b}$ к $\sqrt{v}$. Затем в первом опыте пуля прошла 50 футов и сохранила скорость 1550 футов в секунду. Итак, было $x = 50$ футов и $\frac{x}{c} = 800$; следовательно,

$$\frac{3x}{8c} = 300 \text{ и } \frac{3x}{8nc} = \frac{300}{9647} = 0{,}03109.$$

Отсюда член

$$\frac{9xx}{128nncc} = 0{,}00048.$$

Так как $\sqrt{b} = 1670$ и $\sqrt{v} = 1550$, то

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{120}{1670} = 0{,}07185;$$

при правильном расчете найденное число должно бы равняться прежнему 0,03061 [221]. Но так как оно более чем вдвое больше, то отсюда следует, что сопротивление было более чем вдвое больше, чем допускалось, что почти целиком совпадает с замечанием автора. Мы здесь приняли, что сопротивление пули равно только половине сопротивления цилиндра такого же сечения; автор же настаивает на том, что оба эти тела испытывают одинаковое сопротивление. Если мы, следовательно, примем, что сопротивление этих тел вдвое больше, то вместо 0,03061 получим 0,06026 [222], что гораздо ближе к 0,07185. Таким образом, общепринятое учение не так уже уклоняется от действительности, и, может быть, подлинной причиной этого увеличения сопротивления является уплотнение воздуха впереди пули. Во всяком случае мнение автора, будто пуля испытывает такое же сопротивление, как и одинакового с ней сечения цилиндр, не соответствует действительности, и мы предпочитаем вместе с автором приписать увеличение сопротивления другой причине, только не этой. Произведем по этому способу вычисления для случая медленного движения и посмотрим, следует ли определять сопротивление пули по целой высоте v или только по ее половине.

При втором опыте автор имел дело с такой же пулей, которая, пройдя 100 футов, обладала скоростью 1420 футов в секунду. По приведенным выше правилам $\sqrt{b} = 1670$;

$\sqrt{v}=1425$; следовательно,

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{245}{1670}=0,14670.$$

Далее,

$$\frac{3x}{8nc}=0,06218\ [^{223}],$$

и, следовательно, должно было бы быть $0,14670=$ $=0,06026$ [224], из чего снова явствует, что сопротивление принято слишком малым. Оба эти примера дают почти одинаковое отношение между действительным сопротивлением и тем, которое предполагается: в обоих случаях отношение предполагаемого сопротивления к действительному равно $1:2,40$ [225].

Третий пример был выполнен с такой же пулей, которая имела первоначально в A скорость 1690 футов в $1''$ и, пройдя расстояние в 150 футов, сохранила еще скорость 1300 футов в секунду. Таким образом, получается, что $\sqrt{b}=1690$ и $\sqrt{v}=1300$; следовательно,

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{390}{1690}=0,23077.$$

Затем

$$\frac{3x}{8nc}=0,09329\ [^{226}]$$

и, следовательно, должно было бы быть $0,23077=$ $=0,08894$ [227]; отсюда следует, что предположенное сопротивление относится к действительному, как $1:2,59$ [228]. Этот опыт не вполне согласуется с предыдущими, и так как в этом последнем случае пуля летела дальше, то, по личному мнению автора, разница должна была бы быть меньше, чем в прежних случаях, потому что чем больше убывает скорость пули, тем лучше согласовывается действительное сопротивление с теорией.

Четвертый опыт был проведен с такой же пулей, но она имела скорость в A только 1180 футов в секунду; после того как она пролетела 225 футов, ее скорость еще равнялась 950 футам в $1''$. Следовательно, $\frac{x}{c}=3600$

и $\frac{3x}{8\,nc}=0{,}13994$ [229]. Затем, $\sqrt{b}=1180$ и $\sqrt{v}=950$; следовательно, по теории должно было бы быть

$$0{,}13994=l\,\frac{1180}{950}=l\,\frac{118}{95}=0{,}21681.$$

В этом случае предположенное сопротивление опять-таки слишком мало и относится к действительному, как 1 к 1,498 [230], что почти совпадает с отношением 7 : 11, установленным автором. Так как разница окажется тем меньше, чем меньше будет скорость пули, то отсюда следует, что мы не сделаем ошибки, если для случая очень медленного движения будем принимать сопротивление пули равным только половине того, которое соответствует цилиндру одинакового сечения.

Рассмотрение следующих примеров требует другого способа вычисления, так как в них, кроме скорости, которую пуля имела в начале движения в A, дано еще время, в течение которого она прошла данный путь. Таким образом, приняв, как и раньше, что скорость в A равна $\sqrt{b}$, в M равна $\sqrt{v}$ и путь $AM=x$, мы составим следующее уравнение:

$$\sqrt{v}=e^{-3x:8nc}\sqrt{b}.$$

Положим теперь, что время, в течение которого пуля прошла от A до M, равно t; тогда будет:

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{e^{3x:8nc}\,dx}{\sqrt{b}},$$

откуда найдется интеграл

$$t=\frac{8nc\,(e^{3x:8nc}-1)}{3\sqrt{b}}=\frac{8nc}{3b}\,(e^{3x:8nc}-1)\sqrt{b}.$$

Этой формулой надо пользоваться таким образом: выразим b в тысячных долях рейнского фута и затем разделим полученное число на 250: частное даст количество секунд, которое составляет время t. Но выше мы видели, что если $\sqrt{b}$, после того как b будет выражено в тысячных долях рейнского фута, разделить на 4, то частное покажет, сколько футов может пройти пуля, двигаясь со скоростью $\sqrt{b}$ в секунду. Если пуля со своей первоначальной скоростью в A может пройти в 1 секунду m рейнских футов, то $\frac{\sqrt{b}}{4}=m$ и $b=\frac{16mm}{1000}$ рейнских, или $\frac{16mm}{970}$ английских футов, и искомое время будет

$$t=\frac{8nc}{3b}(e^{3x:8nc}-1)\frac{m}{62,5}\text{ секунд.}$$

Если время t будет выражено в секундах, то получим:

$$e^{3x:8nc}=1+\frac{1875bt}{80mnc}\quad\text{или}\quad\frac{3x}{8nc}=l\left(1+\frac{1875bt}{80mnc}\right).$$

Если, следовательно, это уравнение будет иметь место при каком-нибудь опыте, это будет означать, что принятое сопротивление правильно; в противном случае сейчас же обнаружится, что принятое нами сопротивление слишком велико или слишком мало, а также во сколько раз оно больше или меньше. Если $\frac{3x}{8nc}$ представляет собою очень малое число, то первое уравнение можно привести к следующему:

$$t=\frac{mx}{62,5b}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{ и т. д.}\right)$$

или, так как

$$b=\frac{16mm}{970}\text{ английских футов,}$$

то получим:

$$t=\frac{97x}{100m}\left(1+\frac{3y}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{ и т. д.}\right).$$

Или если первоначальная скорость $\sqrt{b}$ будет дана также в английских футах и она будет содержать m таких же футов в секунду, получим:

$$t=\frac{x}{m}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9xx}{16\cdot 24n^2c^2}+\text{ и т. д.}\right)\text{ секунд;}$$

в этой формуле величины x, m и c могут быть выражены безразлично в каких, но только в одинаковых мерах, так как здесь все дело только в отношениях между ними. Далее заметим здесь, что абсолютная величина сопротивления выражается через $\frac{3}{8n}$. Если, следовательно, предположенное сопротивление окажется слишком малым, то следует только посмотреть, какую бо́льшую дробь нужно взять для $\frac{3}{8n}$, чтобы получилось тождество, и тогда она будет указывать действительную величину сопротивления.

В последних приведенных автором опытах было, как и раньше, $c=\frac{3}{4}$ дюйма и $n=9647$. Далее, первоначальная скорость была 400 футов в секунду; итак, положив $m=400$, все остальные величины мы должны выразить в этих мерах. Первый выстрел дал 313 ярдов в $4\frac{1}{4}$ секунды, а ярд содержит 3 английских фута, следовательно, будет $x=939$ футов; $\frac{x}{m}=2{,}3475$; далее, $\frac{x}{c}=15\,024$ и $\frac{3x}{8nc}=0{,}58401$. Если мы подставим эти значения в приведенное выше уравнение, то окажется, что $4{,}25=3{,}18843$ [231], из чего следует, что предположенное сопротивление оказалось слишком малым. Автор на основании теории находит для этого случая $3'',2$; это время в точности совпадает с нашим. Чтобы получить теперь полное равенство, следовало бы увеличить сопротивление почти на такую же величину. Но кажется, что на этот опыт нельзя слишком полагаться, так как в следующем опыте пуля прошла в течение более короткого времени, а именно в $4''$, на 6 ярдов дальше, откуда, следовательно, увеличение сопротивления должно было получиться меньше. Разберем подробнее этот опыт. Здесь будет $x=957$ футов, и следовательно, $\frac{x}{m}=2{,}3925$, затем $\frac{x}{c}=15\,312$ и $\frac{3x}{8nc}=0{,}59521$. Отсюда получим $4=3{,}2696$.

Если и здесь должно получиться равенство, то сопротивление, а следовательно, и член $\frac{3x}{8nc}$ должны быть приняты бо́льшими.

Положим $\frac{3x}{8nc}=z$, тогда будет

$$\frac{4}{2,3925}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\frac{z^3}{24}\ [232]+\frac{z^4}{120}+ \text{ и т. д.} =1,6719,\ [233],$$

или

$$\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2\cdot3}+\frac{z^3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{z^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+ \text{ и т. д.} =0,6719\ [234].$$

Отсюда находим, что $z=0,9528$ [235] и что предположенное сопротивление относится к действительному, как 0,59521 к 0,9528 [235], или как 1 к 1,6008 [236]. Эта разница оказывается еще значительно большей, так как выше, в 4-м опыте, где скорость пули вначале была почти в пять раз больше, чем здесь, отношение было 1 к 1,498 [237]. Но здесь чрезвычайно важно точное определение всех обстоятельств, так как малейшая неточность может послужить причиной весьма заметной разницы. Поэтому всеми этими опытами можно пользоваться главным образом только для того, чтобы показать вообще, что действительное сопротивление, которое испытывает в воздухе быстро движущаяся пуля, значительно больше, чем показывает теория, которой мы здесь пользуемся, и что чем больше скорость пули, тем больше эта теория отклоняется от действительности.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Чтобы сделать вполне понятным это рассуждение о сопротивлении тел в воздухе, мы займемся исследованием медленных движений, подобных наблюдаемым движениям падающих тел. В таких случаях величину сопротивления можно определить, заметив время, в течение которого данное тело падает вниз с данной высоты. Так как известно время, в течение которого тело падает под действием своей тяжести с любой высоты в безвоздушном пространстве, то при падении в воздухе это время оказывается бо́льшим; и из разницы имеем возможность вывести величину сопротивления. Но воздух оказывает здесь двоякое воздействие, потому что кроме сопротивления еще и вес тела уменьшается тем больше, чем больше весит равнообъемная этому телу масса воздуха.

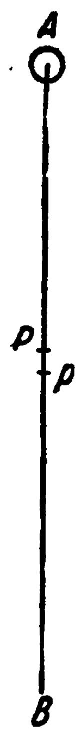

Рис. 20

Пусть A (рис. 20) — ядро, падающее из точки A вниз по вертикальной линии AB; пусть его диаметр равен c, а его вес относится к весу воздуха, как n к 1; следовательно, вес его уменьшен на $\frac{1}{n}$ часть. Предположим, что ядро уже упало вниз до P; пусть высота $AP=x$ и скорость в P равна $\sqrt{v}$. Отсюда сила тяжести в P выразится через $1-\frac{1}{n}$, а сила сопротивления через $\frac{3v}{4nc}$; тогда получим ускорение из следующего уравнения:

$$dv=\left(1-\frac{1}{n}-\frac{3v}{4nc}\right)dx.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{3dx}{4nc}=\frac{3dv}{4nc-4c-3v},$$

откуда интеграл

$$\frac{3x}{4nc}=l\,\frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}.$$

Если принять e за число, гиперболический логарифм которого равен 1 [238] или если $e=2{,}718\,281\,828\,459$, то

$$e^{3x:4nc}=\frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v},$$

или

$$1-\frac{3v}{4(n-1)c}=e^{-3x:4nc},$$

отсюда получим:

$$v=\frac{4(n-c)c}{3}\left(1-e^{-3x:4nc}\right),$$

и, следовательно,

$$\sqrt{v}=\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}.$$

Далее, если обозначим через t время в секундах, в течение которого ядро упадет вниз из A в P, то получим:

$$dt=\frac{dx}{250\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}}$$

и

$$t=\frac{\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^{-3x:4nc}}}.$$

А интегрирование дает

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\,\frac{1+\sqrt{1-e^{-3x:4nc}}}{1-\sqrt{1-e^{-3x:4nc}}},$$

или

$$t=\frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\left(1+\sqrt{1-e^{-3x:4nc}}\right)+\frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}.$$

Если дробь $\frac{3x}{4nc}$ очень мала, то положим для краткости

$$\frac{4nc}{3}=m,$$

и тогда

$$e^{\frac{-x}{m}}=1-\frac{x}{m}+\frac{x^2}{2m^2}-\frac{x^3}{6m^3}+\frac{x^4}{24m^4}-\text{ и т. д.};$$

следовательно,

$$l\left(1+\sqrt{1-e^{\frac{-x}{m}}}\right)=$$

$$=l\left(1+\sqrt{\frac{x}{m}-\frac{x^2}{2m^2}+\frac{x^3}{6m^3}-\frac{x^4}{24m^4}+\text{ и т. д.}}\right)$$

Если теперь выразим этот логарифм приближенно [239] и подставим в приведенное выше уравнение, то получим:

$$t=\frac{2n\sqrt{cx}}{125\sqrt{3(n-1)m}}\left(1+\frac{x}{12m}+\frac{xx}{480m^2}-\frac{x^3}{2688m^3}-\text{ и т. д.}\right),$$

или

$$t=\left(1+\frac{x}{12m}+\frac{xx}{480m^2}-\frac{x^3}{2688m^3}-\frac{x^4}{92160m^4}+\text{ и т. д.}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{125}\sqrt{\frac{nx}{n-1}},$$

где в члене $\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$ высота x должна быть выражена в тысячных долях рейнского фута. Чтобы пояснить эту формулу примером и в то же время показать, насколько точно она соответствует данным опыта, мы возьмем с этой целью пример из Математических Начал Натуральной Философии г-на Ньютона: он сбрасывал с собора св. Павла стеклянный шар с высоты 220 английских футов [240]. Шар имел в диаметре 5 дюймов и весил 483 грана [241]. Водяной шар такой же величины весил бы 16 600 гранов; следовательно, если воздух в 850 раз легче воды, то воздушный шар такой же величины весил бы $\frac{16\,600}{850}$, т. е. 19,53 грана. Итак, $c=5$ дюймов, и так как этот шар в безвоздушном пространстве весил бы 502,53 грана, то будет

$$n=\frac{502,53}{19,53}=25,73$$

и $x=220$ футов. Далее, будет $m=171,5$ дюйма, а так как $x=2640$ дюймов, то

$$\frac{x}{m}=\frac{26\,400}{1715}=15,3935.$$

Так как здесь $\frac{x}{m}$ не является столь малым числом, чтобы можно было применить приведенное выше приближение, то мы возьмем первое найденное уравнение

$$t=\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\,l\,\frac{1+\sqrt{1-e^{-3x:4nc}}}{1-\sqrt{1-e^{-3x:4nc}}},$$

где c должно быть выражено в тысячных долях рейнского фута. Таким образом, будет $c=404{,}166$ и, следовательно,

$$\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}=0{,}48044.$$

Положим для краткости

$$\frac{x}{m}=15{,}3935=\alpha,$$

тогда имеем:

$$t=0{,}48044\,l\,\frac{1+\sqrt{1-e^{-\alpha}}}{1-\sqrt{1-e^{-\alpha}}}\text{ секунд.}$$

Пусть

$$e^{-\alpha}=z,$$

тогда

$$lz=-\alpha\,le;$$

так как $e=2{,}718281828$, то в обыкновенных логарифмах $le=0{,}43429448$ и, таким образом,

$$lz=-15{,}3935\cdot 0{,}43429448=-6{,}6853;$$

следовательно,

$$z=\frac{1}{4\,845\,100}.$$

Так как $z=e^{-\alpha}$ — очень малое число, то

$$\sqrt{1-z}=1-\frac{1}{9\,690\,200}$$

и

$$t=0{,}48044\,l19\,380\,400\text{ секунд.}$$

Обыкновенный логарифм от 19 380 400 равен 7,287363, что по умножении на 2,30258509 дает гиперболический логарифм: он, таким образом, будет равен 16,7797, и тогда получается

$$t = 8{,}0616 \text{ секунды.}$$

Ньютон же точнейшим образом наблюдал это время и нашел 8″,2. Таким образом, для падения шара с высоты 220 футов потребовалось несколько больше времени, чем определено по теории [242]. Следовательно, он встретил несколько большее сопротивление, чем оно принято по теории. Разница, однако, так незначительна, что определить из нее действительную величину сопротивления совершенно невозможно, так как такая маленькая ошибка легко могла вкрасться в наблюдения. Ньютон производил вычисления для этого и еще для целого ряда подобных опытов другим способом: по данному времени он, согласно теории, определял высоту, с которой должно упасть тело. Но эта высота всякий раз оказывалась у него несколько большей, чем была в действительности. Из этого, следовательно, ясно, что сопротивление в действительности должно было быть несколько бóльшим, чем оно получается по теории. Это еще более подтверждает мнение автора о том, что для быстрого движения теория дает слишком малое сопротивление, потому что и при этих опытах скорость к концу падения была не очень малой и равнялась приблизительно 29 футам в секунду; при этой скорости тело должно уже испытывать несколько большее сопротивление.

Вычисление этого и других подобных примеров, где $e^{-3x:4nc}$ представляет собой очень малое число, может быть произведено более удобно следующим способом. Так как безошибочно будет

$$\sqrt{1-e^{-3x:4nc}} = 1 - \frac{1}{2}e^{-3x:4nc},$$

то найдем:

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} \cdot l\,\frac{2-\frac{1}{2}e^{-3x:4nc}}{\frac{1}{2}e^{-3x:4nc}} =$$

$$= \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} \cdot l4e^{3x:4nc},$$

или

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} \cdot l4 + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}.$$

Так как $l4 = 1{,}38629436$, то получим:

$$l = \frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{n-1}}\left(0{,}0064030 + 0{,}0034641\frac{x}{nc}\right) \text{ секунд.}$$

Для определения в этих случаях высоты x по данному времени t имеем:

$$0{,}0034641\frac{x}{nc} = \frac{t\sqrt{n-1}}{n\sqrt{c}} - 0{,}0064030,$$

и, следовательно,

$$x = 288{,}675t\sqrt{c(n-1)} - 1{,}8484nc,$$

или

$$\frac{x}{nc} = 288{,}675\frac{t\sqrt{n-1}}{n\sqrt{c}} - 1{,}8484,$$

где в члене $\frac{t\sqrt{n-1}}{n\sqrt{c}}$ время t должно быть выражено в секундах, а диаметр c — в тысячных долях рейнского фута. Так как в предыдущем вычисленном примере было $t = 8{,}2''$, $c = 404{,}166$ и $n = 25{,}73$, то $nc = 128{,}65$ английского дюйма, или $10{,}72$ английского фута. Отсюда получим $\frac{x}{10{,}72} = 20{,}9086$, или $x = 224{,}14$ английского фута, то есть больше чем 220 футов, которые этот шар в действительности прошел за это время. Но разница составляет всего 4 фута, которые шар мог бы пройти за $\frac{1}{7}$ секунды. Так как невозможно уследить точно за таким незначительным промежутком времени, приходим к выводу, что общепринятая теория Ньютона при движениях не слишком быстрых вполне точно соответствует действительности, при быстрых же движениях дает сопротивление слишком заниженное.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Отсюда достаточно ясно, и что можно было бы подтвердить еще и другими опытами, что для движения не слишком быстрого общеизвестное учение о сопротивлении воздуха в том виде, как оно изложено великим Ньютоном и до настоящего времени применяется учеными, вполне соответствует действительности. Для таких случаев установлено, во-первых, что сопротивление тела пропорционально квадрату его скорости и, во-вторых, что сопротивление цилиндра, движущегося в воздухе вдоль своей длины, равно весу воздушного столба такого же сечения и такой высоты, с которой тяжелое тело при падении приобретает одинаковую с находящимся в движении цилиндром скорость. В третьих, известно также, что сопротивление шара составляет только половину сопротивления цилиндра такого же сечения. Отсюда можно с полной уверенностью заключить, что для тел какой-либо другой формы сопротивление обладает такими свойствами, которые можно выявить с помощью указанного выше способа определения сопротивления вычислением; надо, впрочем, заметить, что с такими телами очень трудно производить настолько правильные опыты, чтобы было возможно сравнивать их движение с вычисленным.

Так как при этом вычислении в расчет принимается только форма передней части тела, то отсюда следует, что форма тыльной части мало влияет на величину сопротивления, а потому и обстоятельства, приведенные в Замечаниях к предыдущему Предложению, по-видимому, почти целиком теряют свою силу. Тем более отпадает последний способ определения сопротивления для того случая, когда оно принимается пропорциональным самой скорости, потому что сопротивление не может быть одновременно пропорционально и самой скорости тела и ее квадрату. Однако у каждого тела может быть такая скорость, при которой сопротивление окажется одинаковым по обеим пропорциональностям; при всех же прочих скоростях оно все-таки должно быть различным. Если тело движется быстрее указанной скорости, то квадраты скоростей дают сопротивление большее, чем скорости, и наоборот: если тело движется с меньшей степенью скорости, то скорости дадут большее сопротивление, чем их квадраты. Исходя из этого представления, можно предположить, что оба эти различия часто сглаживаются и что, таким образом, обе теории соответствуют действительности. Это последнее мнение, видимо, находит еще новое подтверждение главным образом в том, что при очень медленном движении сопротивление оказывается бо́льшим, чем его дает теория; такое обстоятельство обычно склонны приписывать вязкости жидкой среды.

Для того чтобы об этом можно было судить более обоснованно, вычислим по этой теории несколько примеров. Итак, пусть c — диаметр ядра и $\sqrt{b}$ — его скорость, а $\sqrt{h}$ — скорость, с которой воздух может проникать в пустое пространство позади ядра; тогда сопротивление цилиндра такого же сечения будет равно весу цилиндра воздуха высотой $4\sqrt{bh}$. Но сопротивление ядра равно весу воздуха в объеме цилиндра такого же сечения, высота которого равна $\frac{8}{3}\sqrt{bh}$, если только $b<h$. Если же $b>h$, высоту цилиндра того же веса следует принять равной

$$\frac{8}{3}\sqrt{bh}+\frac{1}{6b}\left(\sqrt{b}-\sqrt{h}\right)^3\left(3\sqrt{b}+\sqrt{h}\right),$$

где $h=29\,100$ рейнских футов, и этот последний случай имеет место, когда скорость ядра в секунду более чем 1348. По общепринятому учению сопротивление этого ядра должно было бы равняться весу воздушного столба высотой $\frac{1}{2}b$.

Таким образом, чтобы доискаться, когда ядро, согласно этим двум теориям, будет испытывать одинаковое сопротивление, положим только, что

$$\frac{1}{2}b=\frac{8}{3}\sqrt{bh},$$

и тогда получим:

$$\sqrt{b} = \frac{16}{3}\sqrt{h},$$

или что ядро должно двигаться со скоростью 7189 футов в секунду; при меньших же скоростях, следовательно, $\frac{8}{3}\sqrt{bh}$ всегда будет больше, чем $\frac{1}{2}b$, и при этом в $\frac{16\sqrt{h}}{3\sqrt{b}}$ раз. Таким образом, при скорости 30 футов в секунду сопротивление по этим новым представлениям должно было бы оказаться в 239 раз больше сопротивления, вычисленного обычным способом. Но так как в последнем случае оно в точности совпадает с действительностью, то ясно, что новые представления невероятно уклоняются от действительности. Даже если бы можно было утверждать, что скорость, с которой воздух проникает в пустое пространство, по каким-либо неизвестным нам причинам оказалась бы не так велика, как мы здесь предполагали, то и тогда получилось бы нечто абсурдное. Так, если принять, что $\sqrt{h}=100$ или еще меньшему числу, то не только при очень медленном движении сопротивление окажется чрезмерно большим, но также и при очень быстром движении сопротивление будет всегда получаться значительно меньшим, чем это следует по общепринятому учению, между тем как по этому учению в таких случаях сопротивление и без того получается слишком малое. Поэтому нет надобности приводить еще примеры в опровержение этой новой теории сопротивления, так как ошибочность ее вполне очевидна. Отсюда можно вывести заключение, что при подобного рода изысканиях надо неизменно соблюдать величайшую осторожность, потому что ошибки, допускаемые при применяемом здесь методе, не так легко бросаются в глаза. Но между тем все это способствует тому, чтобы еще больше подкрепить и поставить вне всяких сомнений общепринятое учение о сопротивлении текучих тел при медленном движении. А каким образом его распространить на очень быстрые движения и привести к совершенству, будет показано в дальнейшем.

ТРЕТЬЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Как надо определять различную величину силы сопротивления воздуха по различным скоростям движущихся в нем тел?

Так как на практике не часто случаются выстрелы, сообщающие ядру скорость, бо́льшую чем 1700 футов, то я и не ставил ещё опытов для определения сопротивления воздуха в том случае, когда ядро движется с большей скоростью. Но для нашей теперешней цели будет достаточно, если мы сможем указать изменения сопротивления только для малых степеней скорости.

На основании опытов, поставленных мною по этому вопросу, можно всегда очень точно определить сопротивление воздуха для всех скоростей, которые меньше 1700 футов в секунду, по следующему правилу.

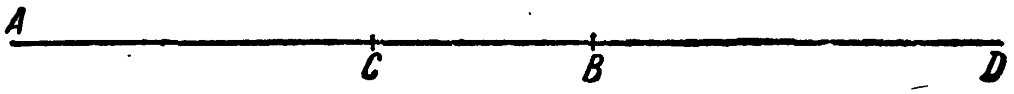

Рис. 21.

Примем, что AB относится к AC (рис. 21), как скорость 1700 футов в секунду к данной скорости, для которой определяется сопротивление воздуха. Продолжим затем линию AB до D так, чтобы BD относилось к AD, как сопротивление воздуха при очень медленном движении относится к сопротивлению при скорости 1700 футов в 1″. Когда это будет выполнено, то CD будет относиться к AD, как сопротивление воздуха при медленном движении относится к сопротивлению при данной степени скорости, которая представлена отрезком AC.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

После того как твердо установлено общее учение о сопротивлении воздуха в случае умеренного движения и одновременно доказано, что для очень быстрого движения сопротивление получается по этому учению слишком малым, следует в этом случае сопротивление увеличить, чтобы это учение привести полностью в соответствие с действительностью. Выше мы уже довольно ясно рассмотрели причину этого увеличения, которая опирается на следующие два положения: во-первых, на то, что при очень быстром движении воздух не в состоянии следовать за ядром, вследствие чего, таким образом, сопротивление увеличивается еще от давления воздуха спереди. Кроме того, в этих случаях воздух перед ядром оказывается к тому же и значительно плотнее, вследствие чего увеличивается противодавление, равно как и сопротивление. Если бы только можно было точно определить оба эти обстоятельства из свойств воздуха, мы были бы в состоянии привести в исчерпывающую ясность учение о его сопротивлении. Но так как наши познания в этом весьма недостаточны, мы должны удовлетвориться тем, что выведем эти необходимые поправки из опыта, делая это насколько возможно точно и в соответствии с действительностью. Такой путь выбрал и автор, чтобы в этом Предложении определить сопротивление воздуха при очень быстром движении; и так как его опыты не рассчитаны на скорость, бóльшую чем 1700 футов в 1″, то он и удовольствовался тем, что дал такое правило, по которому сопротивление для всех малых степеней скорости будет именно таким, каким он его нашел из опытов.

Чтобы вразумительнее объяснить основу этого правила, рассмотрим сначала медленные движения, для которых, как было указано, теория полностью справедлива. Если ядро движется в воздухе со скоростью, которая достигается падением с высоты v, то сопротивление в данном случае равно весу воздушного столба такого же сечения и высотой $\frac{1}{2}v$; таким способом мы всегда найдем действительную величину сопротивления, если высота v не очень велика. Если же высота v так велика, что при падении с нее скорость достигает 1000 и более футов в 1″, то мы видели, что сопротивление в действительности значительно больше, чем $\frac{1}{2}v$, и что при скорости 1700 футов в 1″ оно выражается воздушным столбом, высота которого приблизительно равна $\frac{3}{2}v$. Итак, чтобы обобщить наше выражение, положим, что действительное сопротивление ядра равно весу воздушного столба такого же сечения высотой θv; и тут ясно, что θ должна представлять собою такую переменную величину, которая всегда равна $\frac{1}{2}$, если v будет не очень велико; но если v будет очень велико, она должна иметь значение большее и, наконец, будет равна почти $\frac{3}{2}$, когда скорость ядра возрастет до 1700 футов в 1″, т. е. когда v будет почти 46 400 английских футов. Все дело, следовательно, состоит теперь в том, чтобы найти для θ такое выражение, которое при незначительной величине v всегда даст $\frac{1}{2}$, а если $v = 46\,400$, даст $\frac{3}{2}$. Эта величина θ есть, следовательно, то, что автор называет противодействующей силой воздуха и которую он определяет в этом Предложении для всех случаев. Определим теперь значение этой величины θ из данного им правила. Пусть f — высота, с которой будет достигнута скорость 1700 футов в 1 секунду, или же пусть $\sqrt{f} = 1700$ и $\sqrt{v}$ — скорость, для которой отыскивается сопротивление, т. е. значение θ. Затем обозначим через α значение θ для случая, когда $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, таким образом, что в этом случае α будет приблизительно равно $\frac{3}{2}$; если же $\sqrt{v}$ очень мал, то должно быть $\theta = \frac{1}{2}$. Обозначим теперь отрезок $AB = a$; из этих величин автор составляет пропорцию

$$AB\,(a) : AC = \sqrt{f} : \sqrt{v};$$

отсюда будет

$$AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}.$$

Вторая пропорция автора получается в таком виде:

$$BD : AD = \frac{1}{2} : \alpha,$$

что преобразовывается в следующую пропорцию:

$$AB : AD = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) : \alpha,$$

откуда

$$AD = \frac{2\alpha a}{2\alpha - 1}.$$

Так как

$$AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}},$$

то

$$CD = \frac{2\alpha a\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\, a\sqrt{v}}{(2\alpha - 1)\sqrt{f}}.$$

Наконец, говорит автор, получим:

$$CD : AD = \frac{1}{2} : \theta$$

и, следовательно,

$$\theta = \frac{AD}{2CD}.$$

Отсюда найдем:

$$\theta = \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}},$$

и сопротивление ядра, которое движется в воздухе со скоростью $\sqrt{v}$, будет равно весу воздушного столба такого же сечения и высотой

$$\frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}}.$$

Это [243] найденное выражение для θ обладает требуемыми свойствами. Так, если скорость $\sqrt{v}$ очень мала, член $(2\alpha - 1)\sqrt{v}$ исчезает по сравнению с $2\alpha\sqrt{f}$ и, следовательно, будет $\theta = \frac{1}{2}$; если же скорость $\sqrt{v}$ будет равна 1700 футам в 1″, или будет равна $\sqrt{f}$, то $\theta = \alpha$, как и требовалось. Для меньших скоростей θ

получает меньшие значения, как это видно из прилагаемой таблицы, где мы приняли $\alpha = \frac{3}{2}$.

Если скорость ядра в одну секунду содержит столько английских футов	то сопротивление воздуха, или значение величины θ будет
1	0,5000
100	0,5204
200	0,5425
300	0,5667
400	0,5930
500	0,6219
600	0,6538
700	0,6892
800	0,7286
900	0,7727
1000	0,8226
1100	0,8793
1200	0,9444
1300	1,0200
1400	1,1087
1500	2,2143
1600	1,3421
1700	1,5000

Но легко видеть, что это выражение величины θ нельзя брать для бóльших скоростей. Так, если

$$\sqrt{v} = \frac{2\alpha \sqrt{f}}{2\alpha - 1},$$

т. е. если скорость достигает 2550 футов в одну секунду, то θ будет бесконечно велико, и в этом случае сопротивление должно быть бесконечно большое, что было бы полным абсурдом. Хотя автор предусмотрел это и умышленно ограничил свое правило степенями скорости, меньшими чем 1700 футов в 1″, однако все же ясно, что если оно так сильно отклоняется от действительности при больших скоростях, то оно не может вполне соответствовать действительности и при несколько меньших. Без особого труда можно найти для θ много таких формул, которые для очень малых скоростей дают $\theta = \frac{1}{2}$, а для скорости в 1700 футов в 1 секунду $\theta = \frac{3}{2}$. Будет, пожалуй, лучше всего выразить действительное сопротивление такой формулой:

$$\frac{1}{2} v + pv^n,$$

где p — очень малое число, а n больше 1. Таким путем мы можем также получить выполнение необходимых условий, чтобы при очень малом v член pv^n исчезал сравнительно с $\frac{1}{2} v$, а при v очень большом, а именно 46 400 футов, член pv^n становился вдвое больше первого члена $\frac{1}{2} v$. Чтобы удовлетворить первому условию, требуется обязательно, чтобы число n было больше 1. Итак, весь вопрос только в том, возьмем ли мы его равным $\frac{3}{2}$ или 2; в первом случае это добавление pv^n будет пропорционально кубу скорости, в другом же — квадрату квадрата. Если взять первый случай, трудность скажется в том, что при движении тела назад и, следовательно, когда скорость $\sqrt{v}$ становится отрицательной, сопротивление станет равным $\frac{1}{2} v - pv\sqrt{v}$, тогда как оно должно было бы, так же как и в первом случае, равняться $\frac{1}{2} v + pv\sqrt{v}$.

Эта трудность отпадет, если мы примем для n число 2 так, что сопротивление будет выражено через

$$\frac{1}{2} v + pv^2,$$

потому что здесь безразлично, будет ли скорость $\sqrt{v}$ положительной или отрицательной; кроме того, при этом способе также отпадает упомянутая выше трудность в том, что при некоторой конечной степени скорости сопротивление получается бесконечно большим. Эта формула находит некоторое подтверждение и в том, что при очень медленном движении сопротивление становится несколько бо́льшим $\frac{1}{2}v$, что приписывается влиянию вязкости воздуха. Но, как доказал великий Ньютон, сила вязкости не пропорциональна ни скоростям, ни их квадратам, а остается всегда постоянной [244]. Итак, если обозначить эту вязкость через δ, то по общепринятому учению все сопротивление выразится через $\delta+\frac{1}{2}v$, где δ — величина настолько малая, что при не слишком малом v ею можно совершенно пренебречь по сравнению с $\frac{1}{2}v$; если, например, δ будет хотя бы одной тысячной фута, то едва лишь v окажется равным только нескольким дюймам, как эта величина исчезнет вовсе. Так как выражение $\delta+\frac{1}{2}v$ не составляет еще полного сопротивления в случае, если v очень велико и, следовательно, к нему надо добавить еще один член, то, по всей видимости, он может иметь не иначе как такой вид: pv^2. А так как при быстрых движениях, подобных тем, которые мы здесь рассматриваем, первый член δ может быть вовсе опущен, сопротивление, таким образом, выразится через $\frac{1}{2}v+pv^2$. Если бы мы наверняка знали, что при скорости 1700 футов в 1″, или когда $v=46\,400$ футов, действительное сопротивление втрое больше, чем по общепринятому правилу, то можно было бы определить отсюда величину p, потому что тогда будет

$$\frac{1}{2}\cdot 46\,400+p\cdot 46\,400^2=\frac{3}{2}\cdot 46\,400,$$

следовательно,

$$p=\frac{1}{46\,400}.$$

Но если сопротивление оказывается втрое больше только при скорости в 1900 футов, то получим:

$$p=\frac{1}{58\,200},$$

причем заметим, что 58 200 футов дает удвоенную высоту h, которая была употреблена выше для выражения упругости воздуха. Но так как значение для p еще неизвестно, мы его положим равным $\frac{1}{2g}$ так, чтобы действительная величина

$$\frac{1}{2}v+\frac{1}{2g}v^2,$$

сопротивления была равна, а действительное значение g мы определим непосредственно из опыта. Впрочем, если принять для $\frac{1}{2g}$ приведенную выше дробь $\frac{1}{46\,400}$, то для всех низших степеней скорости получим сопротивление почти таким же, как по правилу автора. Так, если мы здесь опять обозначим сопротивление воздуха через θ, то

$$\theta=\frac{1}{2}+\frac{v}{46\,400},$$

или, если ядро проходит в одну секунду n футов,

$$\theta=\frac{1}{2}+\frac{nn}{2\,890\,000};$$

если, следовательно, $n=100$, то $\theta=0{,}5034$, что меньше, чем по правилу автора; но если $n=800$, то получится $\theta=0{,}7214$, почти как у автора; если же $n>800$ до $n=1700$, θ получает отсюда значения, бóльшие чем по автору, что, по-видимому, не противоречит действительности.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Итак, мы примем, что действительное сопротивление, испытываемое ядром, движущимся в воздухе со скоростью $\sqrt{v}$, равно весу цилиндра воздуха такого же сечения и имеющего высоту

$$\frac{1}{2}v+\frac{1}{2g}v^2,$$

и определим величину g таким образом, чтобы наше вычисление возможно больше совпало с опытами автора (рис. 19). Пусть диаметр ядра равен c, и оно движется в воздухе по прямой линии AB так, что его скорость в начале движения в A равна $\sqrt{b}$; отсюда можно определить его скорость в любой точке M, и пусть она равна $\sqrt{v}$. Положим, что путь $AM=x$ и что ядро состоит из такого вещества, которое тяжелее воздуха в n раз; следовательно, вес ядра будет равен весу воздушного столба такого же сечения и высотой $\frac{2}{3}nc$, и вес ядра, следовательно, будет относиться к сопротивлению в M, как $\frac{2}{3}nc$ к $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2g}v^2$ или как

$$1 \text{ к } \frac{3v}{4nc}+\frac{3v^2}{4ncg}.$$

В то время как ядро пройдет бесконечно малое пространство $Mm=dx$, получим:

$$dv=\frac{-3dx}{4nc}\left(v+\frac{vv}{g}\right),$$

или

$$\frac{3dx}{4nc}=\frac{-g\,dv}{gv+vv}=\frac{-dv}{v}+\frac{dv}{g+v},$$

откуда после интегрирования найдем

$$\frac{3x}{4nc}=l\,\frac{b\,(g+v)}{v\,(g+b)},$$

или, если за e будет взято число, гиперболический логарифм которого равен 1, то получим:

$$e^{3x:4nc}=\frac{b\,(g+v)}{v\,(g+b)}, \quad \text{или} \quad e^{3x:4nc}bv+e^{3x:4nc}gv=bg+bv,$$

откуда находим:

$$g=\frac{(e^{3x:4nc}-1)\,bv}{b-e^{3x:4nc}v},$$

причем заметим, что если $\frac{3x}{4nc}$ — очень малая дробь, то будет приблизительно

$$e^{3x:4nc}=1+\frac{3x}{4nc}+\frac{9xx}{2\cdot 16n^2c^2}+\text{и т. д.}$$

В примерах, приведенных автором, $n = 9647$, так как пуля была свинцовой, и диаметр пули $c = \frac{3}{4}$ дюйма. Далее, пуля имела вначале скорость 1670 английских футов в одну секунду, а потому $b = 41\,990$ рейнских футов, или 43 237 [245] английских футов. Рассмотрим второй пример автора, где пуля, пролетев 100 футов, сохранила еще скорость 1425 футов в секунду. Таким образом, имеем: $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1670 : 1425$; и приблизительно $b : v = 103 : 75$. Затем, так как $x = 100$ футов, то

$$\frac{3x}{4nc} = 0{,}12439 \; [246],$$

следовательно,

$$e^{\frac{3x}{4nc}} = 1{,}13242,$$

и поэтому будет

$$g = \frac{0{,}13242 \cdot 75}{103 - 75 \cdot 1{,}13242} b = \frac{9{,}93150}{18{,}0685} b \; [247]$$

или, так как $b = 41\,990$ рейнских футов, то

$$g = 23\,080 \text{ рейнских футов } [248].$$

В третьем примере было $\sqrt{b} = 1690$ футов, $x = 150$ футов и $\sqrt{v} = 1300$ футов, поэтому $\frac{3x}{4nc} = 0{,}18654$ и $e^{3x:4nc} = 1{,}20507$, а следовательно,

$$g = \frac{0{,}20507v}{b - 1{,}20507v} b.$$

Так как

$$\sqrt{b} : \sqrt{v} = 13 : 10 \quad \text{и} \quad b : v = 169 : 100,$$

то найдем:

$$g = \frac{20{,}507}{48{,}493} b.$$

Но $b = 42\,981$ рейнский фут, и, следовательно, $g = 18\,176$ рейнских футов.

Найдем теперь значение g еще из четвертого опыта, при котором, как было в предшествующих, $c = \frac{3}{4}$ дюйма и $n = 9647$. Но скорость пули в A была $\sqrt{b} = 1180$ футов, а после того как она прошла пространство $x=225$ футов, была $\sqrt{v}=950$ футов. Отсюда будет $\frac{3x}{4nc}=0{,}27986$ и, таким образом, $e^{3x:4nc}=1{,}32294$. Следовательно,

$$g = \frac{0{,}32294v}{b - 1{,}32294v}\,b.$$

Но $b:v = 13\,924:9025$, и поэтому получим:

$$g = \frac{2914{,}5335}{1984{,}4665}\,b.$$

А здесь $b = 20\,958$ рейнских футов, поэтому

$$g = 30\,781 \text{ рейнский фут.}$$

Из этих трех опытов автора мы, таким образом, получили три разных значения величины g, а именно:

I. $g = 23\,080$ [248]
II. $g = 18\,176$
III. $g = 30\,781$
рейнских футов.

Если взять между ними среднее, то получим $g = 24\,012$ [249]. Но так как в третьем пуля прошла значительно больший путь, чем в двух других, а также и разница между скоростями в A и M была больше, то ошибка в измерении в последнем опыте не могла оказать такого большого влияния, как в других опытах, а потому последнее найденное значение g представляется больше всего соответствующим действительности. А так как имеется основание все же полагать, что оно еще несколько велико, высота же столба естественного воздуха, равного упругой силе воздуха, несколько меньше, то, по-видимому, будет правильным считать величину g в точности равной этой высоте. Но выше мы положили эту высоту несколько большей, потому что там приняли, что воздух в 864 раза легче воды. Если мы, таким образом, считаем, что ртутный столбик, вес которого равен упругости воздуха, должен иметь 30 английских дюймов, или $2\frac{1}{2}$ фута, а ртуть тяжелее воды в 13,575 раза и тяжелее воздуха в 11 538 раз, то высота столба естественного воздуха, вес которого равен упругости воздуха, получается равной 28 845 английским, или 27 979 рейнским футам, и следовательно, мы лишь чуточку уклонимся от действительности, если примем для g эту высоту. Так как мы до сих пор эту высоту обозначали через h, которая, следовательно, имеет такое значение:

$$h = 28\,845 \text{ английских футов},$$

или

$$h = 27\,979 \text{ рейнских футов},$$

то найдем $g = h$, и поэтому сопротивление ядра равно весу воздушного столба одинакового сечения, высота которого равна

$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv.$$

Сопротивление воздуха, которое выражено здесь через

$$\frac{1}{2} + \frac{v}{2h},$$

будет тем больше, чем быстрее движется ядро, и почти соответствует тому правилу, которое было дано автором. По нашему правилу скорость ядра, сопротивление которого втрое больше, чем по общепринятому правилу, составляет 1870 рейнских, или 1926 английских футов. Автор, по-видимому, полагает, что если это происходит уже при скорости в 1700 футов в 1″, то при столь многих неточностях, которые свойственны опытам, разница не так уж велика, чтобы ее стоило принимать во внимание. Впрочем, такое совпадение значений g и h немало подкрепляет нашу формулу, так как раньше уже можно было видеть, что найденное добавление $\frac{1}{2h}vv$ должно быть определено через упругость воздуха. Поскольку это увеличение сопротивления происходит частью от уплотнения воздуха перед ядром, частью же от разрежения позади его, а эти оба обстоятельства обязаны упругости воздуха, нельзя рассматриваемое увеличение приписать никакой другой причине, как только упругости воздуха. Далее мы увидим, что чем больше упругость воздуха, тем меньше должно быть происходящее уплотнение впереди ядра и разрежение позади его, потому что воздух в этом случае в состоянии скорее прийти в равновесие с окружающей средой. Таким образом, отсюда следует, что чем больше упругость воздуха, тем меньше это увеличение сопротивления, и что в случае, когда упругость была бы бесконечно велика, оно должно было бы совершенно исчезнуть. Это именно и показывает найденная формула

$$\frac{1}{2}v+\frac{1}{2h}vv,$$

в которой добавление $\frac{1}{2h}vv$ будет тем меньше, чем больше будет высота h, которой измеряется упругость воздуха; и если положим, что h бесконечно велико, то член $\frac{1}{2h}vv$ совершенно исчезнет, как это соответствует самой природе явления. Правда, то же самое произошло бы, если бы для g вместо h взяли $2h$, или $3h$, или только $\frac{1}{2}h$; однако из произведенных выше вычислений легко видеть, что для надлежащего проведения опытов нельзя брать для g ни $\frac{1}{2}h$, ни $2h$, ни тем более $3h$. Таким образом, простота, с которой высота h почти точно подходит к значению g, тем более подтверждает правильность найденной нами формулы, потому что подобные простейшие выражения всего более присущи природе. Если, следовательно, наше правило определения сопротивления воздуха, полученное из опыта, вполне согласно с действительностью, то нет никакого сомнения в том, что его можно было бы вывести только на основании теории. И так как мы уже заранее убеждены в истинности такой теории, то рассмотрение этой теории может немало способствовать более совершенному познанию природы и истинной причины сопротивления, чем то, которое, как это достаточно ясно следует из вышесказанного, еще весьма несовершенно.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Как надлежит определять скорость бросания мушкетных пуль и пушечных ядер обыкновенным зарядом пороха?

Из вычисления, приведенного в седьмом Предложении первой главы и подтвержденного последующими опытами [250], следует, что свинцовая пуля диаметром $\frac{3}{4}$ дюйма и весом $1\frac{1}{3}$ унции торгового веса, выброшенная из ствола длиной в 45 дюймов порохом в половину веса пули, приобретает такую скорость, с которой она в равномерном движении прошла бы в одну секунду 1700 футов.

Если вместо свинцовой пули взять чугунную такой же величины и при таких же обстоятельствах, зарядить ею ствол и бросить ее таким же зарядом пороха, то эта чугунная пуля приобретет бо́льшую скорость, чем свинцовая. Отношение скорости чугунной пули к скорости свинцовой равно квадратному корню из отношения удельного веса свинца к удельному весу чугуна. Если мы теперь примем это отношение, как 3 к 2, и произведем вычисление по данным в указанном месте правилам, то найдем, что чугунное ядро весом в 24 фунта, брошенное 16 фунтами пороха из пушки с длиной канала 10 футов, приобретает при этом такую скорость, с которой оно в равномерном движении могло бы пройти около 1650 футов в секунду.

Такова, следовательно, скорость, которую по нашей теории должно приобрести 24-фунтовое ядро, если оно будет выброшено полным зарядом. Если же вместо этого заряда пороха, равного $\frac{2}{3}$ веса ядра, взять только половину веса ядра, а именно 12 фунтов, то по этим же правилам скорость ядра в секунду составит не больше 1490 футов. Эта же самая скорость будет также и у всех ядер меньшего диаметра, если они будут выброшены подобным же зарядом пороха [251] и если длина канала будет неизменно находиться в одном и том же отношении к диаметру ядра. Хотя в артиллерии и не соблюдают обычно этого соотношения между длиной канала и диаметром ядра в пушках меньшего калибра, однако разница в этом не настолько велика, чтобы скорость, которая определена здесь, могла слишком отклоняться от действительности, что каждый легко установит путем вычисления.

Но при этих определениях мы заранее полагали, что зазор должен быть не больше, чем это необходимо для того, чтобы легко вложить ядро в канал, хотя обычно в действительности либо по небрежности, либо по незнанию, но часто случается, что диаметр дульного отверстия настолько превосходит диаметр ядра, что значительная часть движущей силы пороха вырывается в стороны [252], и в таком случае скорость ядра, конечно, может оказаться значительно меньшей, чем мы ее здесь определили. Впрочем, все же вероятно, что некоторая часть этой потери возмещается сильным возрастанием жара, свойственного, по-видимому, как было упомянуто выше в шестом Предложении, таким большим зарядам пороха.

ДОПОЛНЕНИЕ

Рассмотрение найденных здесь изумительных скоростей пушечных ядер может помочь в разрешении одной проблемы, которая привела некоторых авторов, занимавшихся вопросами общей теории артиллерии, к одной совершенно необычайной и нелепой идее. Эта проблема, о которой я говорю, относится к так называемому прямому выстрелу, или расстоянию, на протяжении которого, как это обычно представляют себе, ядро движется по прямой линии. Наш Андерсон путем многочисленных опытов нашел, что траектория ядер и бомб в начале их движения — не такая крутая кривая, какой она должна быть, по началам Галилея, по сравнению с траекторией на всем протяжении выстрела. Чтобы объяснить это обстоятельство на основании своей теории, он решил, что при каждом выстреле ядро проходит определенное расстояние от дула пушки по прямой линии и что в течение этого времени сила тяжести не оказывает на него никакого действия. Таким путем он думал сохранить учение о параболическом движении, разделяя в то же время общее мнение, которое высказывали по этому вопросу авторы-практики. Но если бы даже не нашли лучшего способа, с помощью которого можно было бы объяснить это явление, то все равно не потребовалось бы опровергать такую нелепость вроде прекращения действия силы тяжести. В действительности же Андерсон ошибался, потому что не знал, как под влиянием сопротивления воздуха сильно изменяется первоначальная скорость даже самых тяжелых пушечных ядер в течение их движения. Нетрудно таким путем объяснить и общераспространенное мнение артиллеристов-практиков, утверждающих, что любое пушечное ядро проходит определенное расстояние от пушки по прямой линии; это воображаемое расстояние они обычно называют прямым выстрелом. Для объяснения этого нам нужно только показать, что на определяемом так протяжении отклонение от прямой линии траектории, по которой движется ядро, настолько незначительно, что практически можно совершенно не принимать его во внимание. Так как 24 ℔ ядро, выброшенное зарядом пороха в $\frac{2}{3}$ его веса на расстояние в 1500 футов от пушки, отклоняется от своего первоначального направления на угол величиной немногим лишь больше чем в полградуса, то те, которые обычно наводят орудия весьма сомнительными способами, легко поймут, что столь незначительное отклонение вряд ли может быть замечено кем-нибудь из общей массы артиллеристов; и что, следовательно, они безошибочно могут эту часть траектории, по которой движется ядро, принимать за прямую линию: тем более, что чаще встречаются еще другого рода ошибки, имеющие гораздо большее значение, чем кривизна этой линии, вызванная действием силы всеобщего тяготения.

Таким образом, в этом Предложении определена скорость ядра как при заряде пороха в две трети веса ядра, так и в случае, когда заряд составляет только половину веса ядра. Но по этому поводу я должен напомнить, что на основании нашей теории, прочно установленной в этом трактате, если заряд все время увеличивать, то скорость ядра будет от этого увеличиваться только до некоторой определенной степени; таким образом, в каждом случае можно указать определенную величину заряда, при котором ядро будет выброшено с наибольшей скоростью; и если зарядить еще бо́льшим количеством пороха, то скорость ядра уменьшится. Заряд, который сообщает ядру наибольшую скорость, и отношение этой

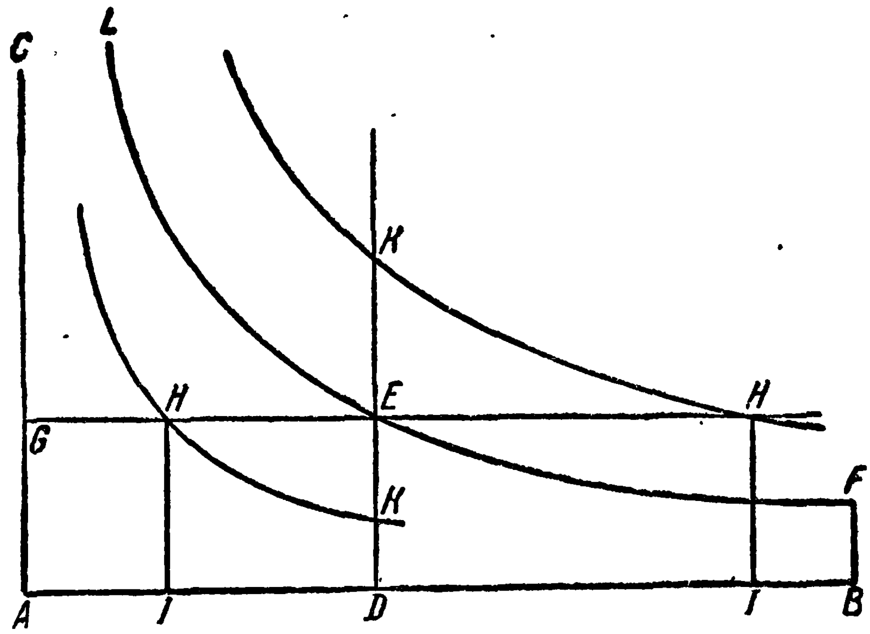

Рис. 22.

скорости к тем, которые получаются при бо́льших или меньших зарядах, могут быть найдены следующим образом.

Представим себе линию AB (рис. 22) как ось пушки и проведем затем перпендикуляр AC; между этими линиями AC и AB, как между асимптотами, проведем гиперболу LEF и линию BF параллельно AC. Затем найдем точку D так, что четырехугольник $ADGE$ будет равновелик гиперболической фигуре $DEFB$; тогда отрезок AD укажет предельный заряд, который сообщит ядру наибольшую скорость. Так как, насколько известно из теории логарифмов, AD относится к AB, как 1 к 2,71828, то по длине отрезка AD, который будет таким образом найден, и по величине дульного отверстия можно легко определить количество пороха, которое требуется для этого заряда.

Если же вместо этого заряда будет принят другой, который занимает в канале пушки пространство AI, проводим IH параллельно AC и через точку H между прежними асимптотами AB и AC опишем гиперболу HK. Когда это выполнено, наибольшая скорость будет относиться к скорости, сообщенной ядру зарядом AI, как квадратный корень из четырехугольника AE к квадратному корню из фигуры, которая получится, если из четырехугольника AE вычтем фигуру HEK, ограниченную тремя линиями. Все это легко вывести из положений, которые прочно установлены в седьмом Предложении первой главы.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

После того как автор в первой главе вычислил скорость только мушкетных пуль и подтвердил вычисления опытами посредством своего маятника, теперь он переходит к рассмотрению пушечных ядер; и так как скорость их нельзя определять с помощью применявшегося им ранее прибора, он довольствуется тем, что выводит ее только на основании своей теории. Поскольку для пуль не было обнаружено сколько-нибудь заметного расхождения между теорией и опытом, он мог с большим основанием предполагать, что и для ядер теория также согласуется с опытом. И хотя, правда, зазор в пушках относительно гораздо больше, чем в мушкетах, а потому теряется и более значительная часть движущей силы пороха, зато в свою очередь нагревание, которое происходит при воспламенении пороха, по его мнению, много больше в пушках, чем в огнестрельном оружии; а так как от этого движущая сила пороха увеличивается, то этим увеличением силы почти покрывается упомянутая потеря. Выше мы уже заметили, как много обстоятельств было оставлено автором без внимания при вычислении скорости пули. Но так как они должны быть привлечены к рассмотрению главным образом при исследовании природы пороха и его действительной силы, то в рассматриваемом случае достаточно выбрать такую формулу, выражающую скорость ядра, которая согласуется с данными опытов с пулями, даже если в них и не все обстоятельства учтены. Приходится поэтому надеяться на то, что такое правило, которое оказывается верным для пуль, не будет слишком расходиться с действительностью и для ядер, главным образом потому что в этой области нельзя рассчитывать на полноту знаний.

Итак, мы тут воспользуемся формулой, приведенной в Замечании к последнему Предложению предыдущей главы, как такой, которая не требует пространных вычислений и дает для пуль почти ту же скорость, что и найденная опытом. Но так как в ней имеются две величины: m и n, которые зависят от качества пороха, мы возьмем для них те же значения, которые характерны для государственного пороха, употреблявшегося автором, что, следовательно, будет приблизительно $m=244$ и $n=850$. Положив это, обозначим через a длину всего канала ствола; b — длину находящегося позади ядра пространства, заполненного порохом; k — высоту воздушного столба, который равен весу ядра, и h — высоту воздушного столба, которым измеряется упругость воздуха, таким образом, что $h=27\,980$ рейнских футов, как мы нашли. Пусть, наконец, v будет высота, при падении с которой тело достигает той же скорости, с какой выбрасывается ядро, и тогда мы находим следующее равенство [253]:

$$v=\frac{244\beta bh}{k+425b}\, l\, \frac{800a-396b}{404b}.$$

Но по автору $244\beta=1000$, и если в дробь $\frac{800a-396b}{404b}$ вместо чисел 396 и 404 мы подставим круглое число 400, что не очень изменит значение этой дроби, то получим:

$$v=\frac{1000bh}{k+425b}\, l\, \frac{2a-b}{b}.$$

Если теперь взять здесь для первого опыта автора $a=45$ дюймов, $b=2\frac{5}{8}$ дюйма, $k=4900$ дюймов, то получим для скорости ядра 1684 английских фута в секунду, что довольно точно сходится с действительностью. Если теперь c — диаметр ядра, и материал ядра в n раз тяжелее воздуха, то $k=\frac{2}{3}nc$. Так как вес пороха равен $850\,b$, то вес ядра будет относиться к весу заряда, как k к $850\,b$. Итак, пусть вес ядра равен P, вес заряда Q; тогда получим:

$$k:850b=P:Q,$$

и следовательно,

$$k:b=850P:Q.$$

Отсюда, так как при стрельбе отношение между весами ядра и пороха обычно дано, получается следующее уравнение:

$$v=\frac{1000Qh}{425\,(2P+Q)}\,l\,\frac{2a-b}{b},$$

или, так как $h=27\,980$ рейнских футов, то найдем:

$$v=\frac{65\,700Q}{2P+Q}\,l\,\frac{2a-b}{b}\ \text{рейнских футов.}$$

Далее, так как $k=\frac{2}{3}nc$, то получим:

$$P:Q=\frac{2}{3}nc:850b=nc:1275b;$$

следовательно,

$$b=\frac{nQc}{1275P},$$

и, таким образом, b определится через диаметр ядра c. И длина пушки a тоже обычно выражена в таких же диаметрах; если, следовательно, мы положим, что $a=ic$, то получим:

$$a:b=i:\frac{nQ}{1275P}=1275iP:nQ,$$

и, таким образом,

$$v=\frac{65\,700Q}{2P+Q}\,l\,\frac{2550iP-nQ}{nQ}\ \text{рейнских футов.}$$

Если, как обычно для пушек, ядро чугунное, то $n=6647$ или 6650; поэтому для чугунных ядер найдем:

$$v=\frac{65\,700Q}{2P+Q}\,l\,\frac{51iP-133Q}{133\,Q}\ \text{рейнских футов.}$$

Итак, если заряд Q будет принят вполовину веса ядра P, мы получаем:

$$v=13140l\,\frac{102i-133}{133}\ \text{рейнских футов.}$$

Если же заряд Q составляет $\frac{2}{3}$ веса ядра P, то получим:

$$v=16\,425l\,\frac{153i-266}{266}\ \text{рейнских футов,}$$

и оба эти случая рассмотрены здесь автором. Но мы, кроме этих случаев, приведем еще один, в котором заряд Q составляет три четверти веса ядра; тогда

$$v=17\,918l\,\frac{204i-399}{399}\ \text{рейнских футов.}$$

И, наконец, если вес заряда Q пороха будет принят равным весу самого ядра, то

$$v=21\,900l\,\frac{51i-133}{133}.$$

Автор далее рассматривает выстрелы только полукартауна, потому что полагает вес ядра в 24 ℔; мы же хотим здесь на основании этих формул вычислить скорость ядер для всех общеупотребительных видов пушек. Тут, следовательно, на первом месте идут целые картауны, из которых стреляют 48-фунтовыми ядрами; у них обычно $i=18$. Затем следуют $^3/_4$-картауны, которые стреляют ядрами в 36 ℔; у этих обычно $i=20$. В-третьих, идут полукартауны, которые стреляют 24-фунтовыми ядрами и у которых $i=24$. В четверть-картаунах — с 12-фунтовыми ядрами, $i=26$; в $\frac{1}{8}$-картаунах [254] — с шестифунтовыми ядрами, $i = 27$. В полковых же пушках i редко бывает больше 18. Кроме этих, применяются еще и другие виды пушек, как, например, целые фельдшланги, из которых стреляют 18-фунтовыми ядрами и у которых $i=30$; у полуфельдшланга $i=32$; у четверть-, или, вернее, треть-фельдшланга, так как его ядра весят 6 фунтов, $i=34$. В полчетверти-фельдшлангах [255], или фальконетах $i=36$; в полуфальконетах $i=38$ и в серпантинелях $i=40$. Из всех этих различных видов пушек ядро будет вылетать с той скоростью, которая показана в следующей таблице, состоящей из четырех столбцов. Первый относится к случаю, когда вес заряда составляет половину веса ядра; второй — когда заряд составляет $\frac{2}{3}$ веса ядра; третий — для заряда, который составляет $\frac{3}{4}$ веса ядра, и четвертый— когда заряд равен весу ядра. Наконец, скорость выражена в рейнских футах, проходимых ядром в секунду.

	полузаряд	$\frac{2}{3}$ заряд	$\frac{3}{4}$ заряд	целый заряд	i
целый картаун	1447	1515	1535	1559	18
$^3/_4$-картаун	1479	1554	1577	1612	20
полукартаун	1532	1618	1647	1697	24
четверть-картаун	1554	1645	1676	1733	26
$^1/_8$-картаун	1565	1657	1690	1749	27
полковая пушка	1447	1515	1535	1559	18
целый фельдшланг . .	1593	1692	1727	1794	30
полуфельдшланг . . .	1610	1712	1749	1821	32
треть-фельдшланг . . .	1626	1731	1769	1845	34
фальконеты	1642	1749	1788	1868	36
полуфальконеты	1656	1766	1806	1889	38
серпантинель	1669	1781	1823	1909	40

Из этой таблицы видно, что если веса зарядов находятся в одинаковом отношении к весам ядер, то скорость ядра будет тем больше, чем больше раз диаметр ядра содержится в длине пушки. Целый картаун выбрасывает свое ядро с меньшей скоростью, чем полукартаун, что могло бы показаться невероятным и абсурдным тем артиллеристам, которые не имеют никакого понятия о сопротивлении воздуха. Поскольку же из опытов известно, что при одинаковом возвышении выстрел из целого картауна простирается дальше, чем из половинного, то отсюда, по-видимому, следует, что ядро целого картауна должно обладать большей скоростью, чем ядро половинного. Такое заключение было бы вполне правильным, если бы или вовсе отсутствовало сопротивление воздуха или оно было бы незначительным, как это обычно и принимают; в этом случае, конечно, ядра, выброшенные при одном и том же угле возвышения, летели бы тем дальше, чем больше была бы скорость, с которой ядро выброшено из пушки. Но так как сопротивление воздуха, как уже было показано, столь невероятно велико и зависит оно главным образом от величины ядра, то возможно, что более крупное ядро будет лететь дальше, чем менее крупное, если бы даже оно и обладало вначале меньшей скоростью. Чтобы лучше пояснить это обстоятельство, необходимо заметить, что о действии сопротивления следует судить не столько по самой его величине, сколько по отношению его к весу ядра. Если мы представим себе два ядра из одинакового материала, причем одно диаметром будет вдвое больше другого, то вес первого будет в восемь раз больше веса второго. Хотя сопротивление первого вчетверо больше, чем второго, если их скорости равны между собой, так как сопротивление соответствует поверхностям или квадратам диаметров, но все же действие сопротивления на первое ядро относится к действию на второе не как $4:1$, а как $\frac{4}{8}:\frac{1}{1}$, следовательно, действие сопротивления на первое и большее ядро составляет только половину того, что на второе. Отсюда ясно, что если оба эти ядра выброшены с одинаковой скоростью и при одном и том же угле возвышения, то первое обязательно полетит дальше, чем второе; а если оба должны одинаково далеко долететь, то большее будет иметь первоначально меньшую степень скорости, чем меньшее. Эта разница, как будет еще яснее из дальнейшего, так велика, что очень легко себе представить, почему большее ядро при одинаковом возвышении может быть выброшено дальше, чем меньшее, хотя первое имело вначале не такую большую скорость, как последнее.

Автор рассматривает только чугунное 24-фунтовое, или полукартаунное ядро и при заряде в 16 ℔ дает ему скорость 1650 футов в 1 секунду, что довольно точно совпадает с нашим определением, потому что для этого случая таблица показывает 1618 рейнских футов, то есть 1666 английских футов. Если же заряд только вполовину веса ядра, а именно 12 ℔, то автор полагает скорость только в 1490 английских футов в 1″, тогда как мы нашли ее для этого случая равной 1532 рейнским, или 1577 английским футам. Следует, однако, заметить, что автор вычисляет скорость по такому правилу, в котором упущены из виду все неизбежные обстоятельства, возникающие при воспламенении пороха. Правило, которым он пользуется, заключается в следующей формуле:

$$v = \frac{1000bh}{k}\, l\, \frac{a}{b},$$

или, если ввести веса́ заряда и ядра, то в следующей формуле:

$$v = \frac{32\,850Q}{P}\, l\, \frac{1275iP}{nQ} \text{ рейнских футов,}$$

где P, Q, n и i имеют те же значения, которые даны им в нашей формуле. Итак, если ядро чугунное, то по правилу автора

$$v = \frac{32\,850Q}{P}\, l\, \frac{51iP}{266Q},$$

а если заряд Q вполовину веса ядра P, то

$$v = 16\,425 l \frac{51i}{133}.$$

Если теперь принять здесь $i=24$, как это обычно у полукартаунов, то найдем скорость ядра равной 1509 рейнским, или 1554 английским футам в одну секунду, что довольно-таки отличается от вычислений автора. Если в число автора не вкралась опечатка, то разница, не считая h и k, которые определяются автором несколько иначе, получается главным образом оттого, что мы здесь приняли диаметр ядра в точности равным диаметру дульного отверстия, между тем как вследствие зазора между ними все же имеется некоторая разница. Но так как ввиду столь многих других обстоятельств тут ничего нельзя определить, мы не считали нужным вводить это обстоятельство в рассмотрение и тем усложнять наши вычисления.

Главная же причина разницы между формулой автора и нашей заключается в том, что он совершенно не принял во внимание твердых веществ в порохе, которые частью должны быть приведены вместе с ним в движение, частью же должны уменьшать объем, занимаемый сжатым воздухом. Первое обстоятельство, состоящее в том, что эти твердые вещества должны быть вместе с тонкой материей приведены в движение, уменьшает скорость ядра; второе же способствует увеличению скорости ядра, поскольку сжатый воздух тем самым будет стеснен в меньшем объеме. Если, следовательно, оба эти действия почти уравновешиваются, то правило, данное автором, совпадает с нашим, как это имеет место с 24-фунтовым ядром, которое брошено зарядом в 16 ℔ пороха; ничего нет удивительного, что в других случаях они будут очень заметно отличаться одно от другого. Причиной же того, что в приведенной выше таблице числа оказались слишком велики, мы можем считать то, что ввели допущение, по которому весь порох воспламеняется сразу, а также не приняли во внимание потерю движущей силы вследствие зазора. Между тем, соотношение между этими самыми числами будет довольно постоянным, таким образом, что, если бы знать, насколько одно из них увеличено, можно также исправить и все остальные. Если же ядро полукартауна при заряде в 16 ℔ пороха действительно получило скорость 1650 английских, или 1601 рейнских футов, то наши числа оказываются больше всего только на 20 футов; такую разницу при опытах заметить невозможно.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

В этих вычислениях мы приняли, что порох весит столько же, сколько и вода, и что, следовательно, он в 850 раз тяжелее воздуха, что не очень далеко от действительности. Хотя пороховые зерна в воде идут ко дну, но опять-таки воздух, находящийся между ними, составляет столько, что кубический фут пороха весит почти столько же, сколько вода. Если мы для определения скорости ядра примем по правилу автора, что

$$v = \frac{1000bh}{k} \, l \, \frac{a}{b},$$

и вес пороха определим из того, что 24-фунтовое ядро, выброшенное 16 фунтами пороха, получает скорость 1650 английских футов в 1″, то порох окажется в 910 раз тяжелее, чем воздух. Но при этом не учтен зазор, который в пушках составляет обычно $\frac{1}{15}$ часть всего дульного отверстия. Итак, если мы полагаем, что порох в действительности в m раз тяжелее воздуха, то вес заряда Q должен быть равен весу воздушного цилиндра, сечение которого одинаково с сечением ядра, а высота равна $\frac{16}{15}mb$. И, таким образом, получим отношение

$$P : Q = \frac{2}{3} nc : \frac{16}{15} mb$$

или как k к $\frac{16}{15}mb$; следовательно, по вычислению автора должно быть положено $\frac{16}{15}m = 910$, откуда получается $m = 853$, почти как мы предполагали. Если же мы внесем в наше приведенное выше вычисление и зазор, то мы должны в отношение P к Q вместо числа 850 подставить число 910; тогда получается:

$$P : Q = nc : 1365b,$$

и так как $a = ic$, то найдем:

$$a : b = 1365iP : nQ \text{ и } k : b = 910P : Q.$$

Отсюда получается

$$v = \frac{1000Qh}{455(2P+Q)}\, l\, \frac{2730iP - nQ}{nQ},$$

или

$$v = \frac{61\,494Q}{2P+Q}\, l\, \frac{65iP - 158Q}{158Q} \text{ рейнских футов}$$

для чугунного ядра. Из отношений между P и Q, приведенных выше, получается:

$$\text{если } Q = \frac{1}{2}P, \text{ то } v = 12\,298{,}8l\,\frac{65i - 79}{79},$$

$$\text{если } Q = \frac{2}{3}P, \text{ то } v = 15\,373{,}5l\,\frac{195i - 316}{316},$$

$$\text{если } Q = \frac{3}{4}P, \text{ то } v = 16\,771{,}1l\,\frac{130i - 237}{237}\ [256],$$

$$\text{если } Q = P, \text{ то } v = 20\,498{,}0l\,\frac{65i - 158}{158}\ [257].$$

И отсюда можно по желанию исправить вышеприведенную таблицу или перевычислить ее заново.

На основании этого сравнительного расчета, более приближающегося к действительности, чем предыдущий, мы вычислим другую таблицу, а чтобы можно было извлечь из нее больше пользы, введем в рассмотрение также и меньшие заряды. Сэтой целью мы разделим вес ядра, которое примем как чугунное, на 6 равных частей и произведем вычисления для 6 различных зарядов. Во-первых, заряд пороха будет равен шестой части веса ядра, затем — двум шестым, в-третьих,— трем шестым, в-четвертых,— четырем шестым, в-пятых,— пяти шестым, в-шестых,— шести шестым, или заряд пороха будет равен целому весу ядра. Если, таким образом, полная длина пушки относится к диаметру ядра, как i к 1, и v означает в рейнских футах высоту, при падении с которой в безвоздушном пространстве тело приобретает одинаковую с ядром скорость, то значение для каждого из этих шести зарядов будет выражено следующим образом. Пусть, как и раньше, P означает вес ядра, а Q — вес заряда пороха.

Если	то будет
$Q=\frac{1}{6}P$	$v=4730{,}31l\,\frac{780i-316}{316}$
$Q=\frac{2}{6}P$	$v=8784{,}85l\,\frac{390i-316}{316}$
$Q=\frac{3}{6}P$	$v=12298{,}8l\,\frac{260i-316}{316}$
$Q=\frac{4}{6}P$	$v=15373{,}5l\,\frac{195i-316}{316}$
$Q=\frac{5}{6}P$	$v=18086{,}5l\,\frac{156i-316}{316}$
$Q=\frac{6}{6}P$	$v=20498{,}0l\,\frac{130i-316}{316}$

Затем, так как скорость ядра зависит не столько от типа пушки [258], сколько от величины числа i, то мы положим, как и раньше, сначала $i=18$, а потом будем все время увеличивать его значение на 2 до 40. Таким образом, мы включим в наше рассмотрение все возможные виды пушек. Так, если i окажется подчас нечетным числом, то в этих случаях легко будет заключить о скорости на основании ближайших четных чисел. Чтобы иметь возможность определить скорость для более коротких пушек, мы начнем нашу таблицу с $i=10$, и, как это делалось выше, выразим скорсть ядра в рейнских футах в одну секунду.

Из этой таблицы можно извлечь разнообразную пользу и объяснить разные обстоятельства, встречающиеся в артиллерийской практике. Во-первых, из нее видно, что если заряд дан в весе пороха, то скорость ядра будет

Длина пушки, калибры	Заряд					
	$\frac{1}{6}$ ядра	$\frac{2}{6}$ ядра	$\frac{3}{6}$ ядра	$\frac{4}{6}$ ядра	$\frac{5}{6}$ ядра	$\frac{6}{6}$ ядра
10	967	1155	1233	1256	1245	1206
12	996	1201	1295	1336	1342	1325
14	1019	1238	1345	1398	1417	1414
16	1039	1259	1386	1448	1478	1484
18	1056	1295	1420	1491	1528	1543
20	1071	1318	1450	1527	1571	1592
22	1084	1338	1477	1559	1608	1635
24	1096	1357	1501	1588	1642	1672
26	1107	1374	1522	1614	1671	1706
28	1117	1389	1542	1637	1698	1736
30	1126	1403	1560	1658	1723	1764
32	1135	1416	1576	1678	1745	1789
34	1143	1428	1591	1696	1766	1813
36	1150	1439	1605	1713	1785	1834
38	1157	1449	1619	1729	1803	1854
40	1164	1459	1631	1744	1820	1873

тем больше, чем длиннее пушка. Это как будто противоречит опыту, потому что, по общему мнению, скорость ядра, движущегося в чрезмерно длинной пушке, начинает уменьшаться, и на этом основании хотели определить наивыгоднейшую длину пушки. Хотя ядро, двигаясь в пушке, испытывает сопротивление воздуха, однако это последнее все же не только не больше испытываемого им в свободном воздухе, но значительно меньше, особенно когда ядро движется с большой скоростью, потому что в пушке позади ядра нет пустого пространства, как обычно бывает на открытом воздухе. Кроме того, движущая сила пороха остается еще очень значительной, пока ядро находится в пушке, и ее достаточно, чтобы увеличивать скорость ядра; что же касается трения, то уже выше было доказано, что можно совершенно не вводить его в рассмотрение, принимая во внимание сравнительно большую силу пороха. Таким образом, поскольку ядро, пока оно находится в пушке, не испытывает никакого уменьшения своего движения, которое оно испытывало бы в сильнейшей степени на открытом воздухе, и, более того, будет в пушке еще больше проталкиваться, то непостижимо, как может чрезмерно большая длина пушки уменьшать скорость ядра. Может, правда, случиться, что, если пушка высверлена не по прямой линии, ядро в ней будет испытывать в своем движении столь бóльшое замедление, что с укорочением пушки и отнятием от нее искривленной части, ядро приобретет бóльшую скорость; и это обстоятельство, несомненно, имело место при тех опытах, которыми старались обосновать вышеприведенное мнение. Обычно ссылаются именно на тот случай, когда от одной очень длинной пушки отскочил кусок ствола примерно в $2\frac{1}{2}$ фута длиной, причем было замечено, что после этого случая ядра из этой пушки выбрасывались с большей скоростью, чем раньше. Однако этот случай, по-видимому, свидетельствует только о том, что вообще канал этой пушки был искривлен и что разрыв упоминаемой пушки произошел не столько от силы пороха, сколько от ударов ядра. Затем, чтобы отстоять свое мнение, обычно ссылались на изменения, произведенные в старых пушках, которые были гораздо длиннее современных. Так как полагали путем укорочения получить немалую выгоду, то хотят заключить, что пушка, отлитая по правилам современного искусства, бросает ядро с большей скоростью, чем если бы она была длинной. Мнение это, однако, не подтверждается никаким надежным опытом; ссылаются лишь на то, что наблюдали, будто старая 96 ℔ пушка стреляла не так далеко, как современный целый 48 ℔ картаун, хотя и была длиннее его. Если даже в обоих случаях заряд пороха был в одинаковом отношении к весу ядра, то все-таки нужно заметить, что скорость ядра зависит не столько от длины пушки, сколько от числа калибров в ней. Пусть такая 96-фунтовая пушка длиннее современного целого картауна, но ее длина содержит в себе меньше калибров, и для того чтобы 96-фунтовая пушка бросала свое ядро с такой же скоростью, как целый картаун, ей нужно было бы быть на четвертую часть длиннее последнего.

Важнейшей причиной, заставившей отказаться от старых длинных и тяжелых пушек, были, несомненно, большие трудности перемещения их, причем ни величина ядер, ни их бóльшая скорость не могли возместить эти трудности. Так, если нужно пробить брешь, действие ядра вдвое большего веса отнюдь не будет вдвое более сильным, и в стене, которую надлежит разрушить, оно не пробьет бреши вдвое большей; два выстрела ядрами половинного веса могут сделать гораздо больше и при этом будут стоить не дороже, чем один выстрел из пушки вдвое большего калибра. По этой причине и перестали употреблять при брешировании целые 48-фунтовые картауны, так как могли достигнуть поставленной цели с меньшими трудностями и затратами при помощи полукартаунов. Но на море, наоборот, целые картауны применяются со значительно бóльшим успехом, чем полукартауны, потому что если корабль [259] получит попадание из целого картауна в подводную часть, то пробоину, во-первых, не так легко будет заделать, к тому же ядро при этом разбивается на большое число осколков, которыми может с большого расстояния ранить и убивать окружающих.

Впрочем, не следует придавать такое большое значение увеличению скорости, потому что, если ядро будет лететь так быстро, что в состоянии будет пробить как на суше стену на определенную глубину, так и на море корабль, то нет никакой необходимости, а в некоторых случаях даже опасно, сообщать ядру еще бóльшую скорость. Если 24-фунтовое ядро, выброшенное из полукартауна 12 ℔ пороха, производит требуемое действие, то для этого необходима степень скорости, равная приблизительно 1500 футам в одну секунду. Из этого, следовательно, необходимо определить длину батарейных пушек так, чтобы сообщить 24-фунтовому ядру скорость 1500 футов в одну секунду. Если этого можно достигнуть 12 ℔ пороха, то пушка должна быть длиной в 24 калибра, что представляет обычный размер полукартауна. Но если желательно достичь этого же действия меньшим количеством пороха, то пушка должна быть значительно длиннее; так, если захотят взять только 8 ℔ пороха, то даже 40 калибров окажутся далеко недостаточными для длины пушки. Если же будут брать на каждый выстрел больше пороха, можно несколько выиграть в длине пушки: так, если брать на каждый выстрел 16 ℔ пороха, длина пушки может составить только около 19 калибров. А если зарядить 20—24 ℔ пороха, то пушка все же должна быть не короче 17 калибров. Из сопоставления расходов на порох с трудностями, проистекающими от длины, а следовательно, и от веса пушки, станет понятна необходимость определения наивыгоднейшей длины пушек. По крайней мере, отсюда становится ясно, что выгоднее истратить 12 ℔ пороха и изготовить пушку длиной в 24 калибра, чем сэкономить на заряде 4 ℔, но зато изготовить пушку длиной более 40 калибров.

Что же касается заряда в 16 ℔ пороха, то выигрыш в 5 калибров, который получается в длине пушки, по-видимому, не может возместить больших расходов на порох. Поэтому обычный заряд в 12 ℔ пороха и длина пушки в 24 калибра являются, по-видимому, наиболее подходящими.

Далее. Так как более крупное ядро не так много теряет в воздухе в своей скорости, как менее крупное, то нет необходимости сообщать ему порохом такую же большую скорость, как меньшему. Следовательно, 48-фунтовое ядро может проникнуть в стену так же глубоко, как и 24-фунтовое, хотя бы первоначальная скорость у первого была меньше, чем у второго. Если для этой цели подходят целые картауны, то необходимая скорость 48-фунтового ядра должна составить 1420 футов в одну секунду. Если эту скорость желательно получить при 16 ℔ пороха, то пушка должна быть длиной в 34 калибра: на деле подобная машина оказалась бы совершенно непрактичной. Если же взять на выстрел 24 фунта пороха, то достаточной будет длина в 18 калибров, которая является и самой наивыгоднейшей, потому что, беря на выстрел пороху больше чем 32 ℔, выгадываем на длине только 2 калибра.

Чтобы мелкие ядра летели так же далеко, как 24-фунтовые, которые выбрасываются со скоростью 1500 футов в одну секунду, они должны вследствие большего сопротивления воздуха иметь вначале и бо́льшую скорость. Вообще, все зависит от той цели, которую ставят себе при каждом виде стрельбы, так как на основании ее судят о скорости, которую должно иметь ядро при вылете из пушки, и отсюда можно затем найти наиболее выгодную длину пушки и вместе с этим наиболее подходящий заряд. Предположим, что требуется пушка, из которой стреляли бы 18-фунтовыми ядрами со скоростью 1650 футов в одну секунду. Если мы за разрешением этого вопроса обратимся к вышеприведенной таблице, то сразу увидим, что этого нельзя получить ни с зарядом в 3 ℔, ни в 6 фунтов, ни в 9 фунтов, потому что даже в последнем случае пушка должна быть более 40 калибров длиной. Но если возьмем 12 фунтов пороха, то пушка должна быть длиной в 30 калибров, а при 15 фунтах пороха пушка будет приблизительно 25 калибров длиной и при 18 фунтах пороха она будет около 23 калибров длиной. Из последних случаев ясно видно, что ради 2 калибров не сто́ит брать пороху на 3 фунта больше, но 5 калибров уже могут возместить прибавку заряда на 3 фунта пороха. Поэтому для пушки наиболее предпочтительно будет принять длину в 30 калибров и заряд в 12 фунтов. Этот случай в действительности имеет место в фельд-шлангах, назначением которых является стрельба на дальние расстояния.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Если мы теперь эти положения, подтверждаемые опытом, примем за основу, то из них можно вывести следующее правило, с помощью которого мы сможем для всякой скорости, которую надлежит сообщить ядру, указать наивыгоднейшую длину пушки вместе с соответствующим зарядом. Пусть n — путь в рейнских футах, проходимый ядром в одну секунду; длина пушки содержит i калибров или диаметров ядра и заряд относится к весу [260] ядра, как m к 1, т. е. пусть $Q=mP$. Так как выше v означало высоту, при падении с которой тело приобретает одинаковую с ядром скорость, то $n=\frac{1}{4}\sqrt{1000\,v}$, и следовательно,

$$v=\frac{16nn}{1000}.$$

Но выше было найдено [261]

$$v=\frac{61\,494Q}{2P+Q}\,l\,\frac{65iP-158Q}{158Q},$$

или

$$v=\frac{61\,494m}{2+m}\,l\,\frac{65i:m-158}{158}\text{ рейнских футов.}$$

В приведенных выше положениях, в которых определены данные о пушках и которые подтверждаются опытами, i к m почти всегда сохраняет одинаковое отношение, которое для полукартаунов, изготовленных в 24 калибра длиной, будет, как 48 к 1. У целых картаунов, правда, это отношение получается $i:m=36:1$, в других же видах пушек значение $\frac{i}{m}$ приходится между 48 и 36. Так как полукартауны по своим качествам [262] считаются более совершенными, чем целые, то наивыгоднейшее значение дроби $\frac{i}{m}$ должно подходить ближе к числу 48, чем к числу 36, а так как прежде полукартауны обычно изготовляли длиной только в 22 калибра, то отсюда $\frac{i}{m}=44$, и мы имеем все основания полагать, что ближе всего подойдем к самому выгодному решению, к которому стремились на практике, если примем отношение $i:m$ постоянно равным $45:1$. Итак, пусть $\frac{i}{m}=45$; отсюда сразу можно будет вывести наилучшую величину заряда для всех видов пушек, если только известна их длина в калибрах. Для этого надо только разделить число калибров на 45, и тогда частное покажет, какую часть веса ядра должен составлять порох. Таким образом, если пушка имеет длину 30 калибров, то наилучший заряд для нее будет в $\frac{2}{3}$ веса ядра. И наоборот: если известен заряд в отношении к весу ядра, или величина m, то отсюда мы найдем самую подходящую длину пушки в калибрах, выраженную, таким образом, через $i=45m$. Следовательно, если заряд будет равен половине веса ядра, то длина пушки должна составлять $22\frac{1}{2}$ калибра. Но если примем заряд равным полному весу ядра, то самой подходящей на этот раз должна быть пушка длиной в 45 калибров.

Поскольку мы, таким образом, установили наилучшее соотношение между i и m, то можно отсюда легко определить для каждой скорости, с которой ядро вылетит из пушки, наивыгоднейшую длину ствола и вместе с этим соответствующий заряд. Поскольку дробь $\frac{i}{m}$ неизменно сохраняет одно и то же значение, логарифм

$$l\,\frac{65i:m-158}{158}$$

будет во всех случаях один и тот же; благодаря этому вычисления будут значительно облегчены. Положим, что $\frac{i}{m}=45$, тогда

$$l\,\frac{65i:m-158}{158}=l\,\frac{2767}{158}=2{,}86292.$$

Так как

$$v=\frac{16nn}{1000},$$

то

$$\frac{16nn}{1000}=\frac{61\,494m}{2+m}\cdot 2{,}86292,$$

или

$$nn=\frac{11\,003\,300m}{2+m},$$

откуда, следовательно, получается

$$\frac{2+m}{m}=1+\frac{2}{m}=1+\frac{90}{i}=\frac{11\,003\,300}{nn}.$$

По этой формуле вычислена следующая таблица, которая для каждой скорости ядра дает длину пушки в калибрах и заряд в тысячных долях веса ядра.

Скорость ядра в рейнских футах в 1 секунду	Длина пушки в калибрах и сотых долях	Заряд пороха в тысячных долях веса ядра	Скорость ядра в рейнских футах в 1 секунду	Длина пушки в калибрах и сотых долях	Заряд пороха в тысячных долях веса ядра
500	2,09	46	1400	19,51	434
550	2,54	57	1450	21,26	484
600	3,04	68	1500	23,14	514
650	3,59	80	1550	25,14	559
700	4,19	93	1600	27,29	606
750	4,85	108	1650	29,59	659
800	5,56	124	1700	32,06	712
850	6,32	141	1750	34,71	771
900	7,15	159	1800	37,56	835
950	8,02	179	1850	40,63	903
1000	9,00	200	1900	43,95	977
1050	10,02	223	1950	47,53	1056
1100	11,12	248	2000	51,40	1142
1150	12,29	273	2050	55,61	1236
1200	13,55	308	2100	60,20	1338
1250	14,89	331	2150	65,20	1449
1300	16,33	363	2200	70,68	1571
1350	17,87	397			

С помощью этой таблицы легко, таким образом, определить в каждом данном случае наиболее подходящий размер пушки, а также и соответствующий заряд, если только известна скорость ядра, требуемая для выполнения поставленной задачи. Но тут часто самым трудным оказывается определение этой степени скорости, потому что до сих пор никто не был в состоянии хотя бы грубо измерить скорость пушечного ядра. Но так как скорость ядра можно достаточно точно вычислить по длине пушки и величине заряда, то стóит только произвести из уже имеющейся пушки несколько выстрелов разными зарядами и посмотреть, какой из них отвечает поставленной задаче, и, таким образом, можно сразу же путем вычисления определить требуемую скорость. Нужно только заметить, что эти пробные выстрелы следует производить ядрами той величины, которая будет принята для требуемой пушки, и на ту же дистанцию, потому что сопротивление воздуха оказывает различное действие на ядра разной величины и на различных дистанциях. Впрочем, эту разницу в дальнейшем следует представить так, чтобы при пробной стрельбе крупными и мелкими ядрами на различные дистанции можно было бы все-таки определить из того требуемую скорость. Если, например, для пробивания бреши 24-фунтовое ядро должно быть выброшено из пушки со скоростью 1500 футов в одну секунду, то из приведенной таблицы видно, что для этой цели самой лучшей будет пушка длиной в $23\frac{14}{100}$ калибра и что пороховой заряд должен быть в $\frac{514}{1000}$ веса ядра, или $12\frac{1}{3}$ фунта, что вполне согласуется с обычным устройством полукартауна [263]. Бывает, однако, много случаев, когда нет вовсе необходимости, чтобы ядро имело такую большую скорость, как у вобановых рикошетных батарей, и когда нужно ядрами поражать только людей и с небольшого расстояния. Если бы для этого была достаточна скорость в 1000 футов в 1″ [264], то наиболее подходящей была бы пушка длиной не более 9 калибров, а пороховой заряд должен составлять не больше пятой части веса ядра. Если, однако, было бы желательно не изготовлять для этой цели специальных пушек, а использовать те, которые, собственно, предназначены для других целей и имеют гораздо бóльшую длину, то можно еще сэкономить на порохе; например, по приведенной выше таблице, если бы пушка была длиной 20 калибров, то не нужно, чтобы порох составлял $\frac{1}{6}$ веса ядра, если требуется скорость только 1000 футов в 1″. Но если нужно попасть ядром в цель с очень большого расстояния и для этого ядро должно обладать скоростью 1900 футов в одну секунду, то это не может быть достигнуто никакой из существующих пушек вида картаунов, а наиболее подходящая для этого пушка должна была бы иметь длину почти в 44 калибра и заряд пороха почти в полный вес ядра. Из такой пушки можно было бы стрелять — причем только не слишком мелкими ядрами — гораздо дальше, чем из фельдшланга длиной в 30 калибров, заряженного в $\frac{2}{3}$ веса ядра. Таким образом, по данным этой таблицы можно было изготовить такие пушки, которые, если бы это потребовалось, могли бы сообщить ядрам еще более быстрое движение.

ЧЕТВЕРТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Найдя, таким образом, для данного ядра как длину пушки, так и величину заряда, мы легко определим требуемую во всех местах прочность металла и сумеем составить надлежащий чертеж всей пушки. Для этого лучше всего разделить пушку по длине на две части таким образом, что казенная часть содержит в себе заряд или порох, а дульная часть представляет собою путь, по которому будет двигаться ядро. Прочность казенной части должна быть определена в соответствии с силой пороха в первый момент воспламенения, когда она является наибольшей, пока ядро еще не сдвинулось со своего места. Таким образом, если мы примем, по автору, что первоначальная сила пороха в 1000 раз больше атмосферного давления, которое уравновешивается водяным столбом в 32 фута, то, следовательно, казенная часть пушки должна быть настолько прочна, чтобы она могла выдержать давление водяного столба высотой в 32 000 футов. Следовательно, если бы можно было точно вычислить прочность металла, из которого будет отлита пушка, тогда можно было бы определить толщину этой казенной части, поскольку выше, в третьем Замечании к девятому Предложению первой главы, мы указали, что толщина металла должна быть всегда в одинаковом отношении к диаметру ядра. Поэтому, если бы мы хоть в одном случае знали, как толщина металла в казенной части должна относиться к диаметру ядра, то это же отношение имело бы место и во всех других видах пушек. Но опытом установлено, что в картаунах толщина металла в казенной части должна быть равна диаметру ядра, откуда вытекает следующее общее правило, что во всех пушках толщина металла в казенной части должна приниматься всегда равной диаметру ядра. Это правило основывается, следовательно, на двух обстоятельствах, а именно, на прочности металла и на силе пороха. Если бы нашли другой сплав, который по прочности превосходил бы применяемый в настоящее время, то была бы достаточна меньшая толщина металла в казенной части пушки, чтобы выдержать ту же силу пороха. Если же, наоборот, можно было бы увеличить силу пороха, то пришлось бы принять бо́льшую толщину пушки, поскольку, если в этом случае положить даже меньше пороха, то все-таки упругая сила в первый момент воспламенения будет при этом не меньше, чем если бы заряд был принят больше. Отсюда ясно, что если бы можно было значительно увеличить силу пороха, то все современные пушки оказались бы непригодными. Но пока в употреблении находится один и тот же порох, казенная часть пушки неизменно будет испытывать воздействие одинаковой силы, безразлично, будет ли взят большой или малый заряд. Если она в состоянии выдержать действие малого заряда, то она не разорвется и в том случае, если заряд будет значительно больше. В этом смысле передняя, или дульная, часть пушки устроена совершенно иначе. Так как сила пороха убывает тем больше, чем больше пространство, в котором он распространяется, то ясно, что каждому месту дульной части приходится выдерживать тем бо́льшую силу, чем больше будет принят заряд пороха. Поэтому, чтобы дульная часть пушки обладала надлежащей прочностью, она должна быть определена по наибольшему заряду, который всегда может быть взят к этой пушке.

Пусть, например, AF (рис. 1) означает самый большой заряд, который только может быть в пушке AB; итак, AF — казенная часть и FB — дульная часть; в первой толщина металла должна повсюду равняться диаметру ядра, и так как сила, воздействующая на казенную часть, повсюду одинаково велика, то и нет необходимости в том, чтобы пушка была отлита позади у A более утолщенной, чем у F. Из этих соображений можно сберечь немало металла при отливке пушек и благодаря этому без всякого риска облегчить их, потому что если толщина в E, которая уже принята меньшей, чем диаметр ядра, вполне достаточна для того, чтобы выдержать силу пороха, то и в D не потребуется большей прочности. Что же касается дульной части FB, то здесь легко в каждой ее точке M определить силу пороха, которая действует в M, как только туда дойдет ядро. По правилу автора эта сила относится к первоначальной силе пороха, которую выдерживает казенная часть, как AF к AM, и, следовательно, толщина металла в M может быть настолько меньше, чем в F, насколько AF меньше, чем AM; таким образом, пушка снаружи должна иметь очертание по гиперболе. По нашему определению силы пороха, она в течение того времени, как ядро проходит дульную часть FB, должна уменьшаться в большей пропорции и, следовательно, дульная часть может быть не такой прочной, как по правилу автора. Однако так как оба правила основываются на мгновенности воспламенения, тогда как в действительности оно происходит последовательно, то сила, которой противостоит дульная часть, по сравнению с силой, действующей на дно канала, будет больше, чем по приведенным правилам, и, следовательно, толщина этой части должна быть повсюду несколько больше, чем будет найдено по этим правилам.

Но если бы можно было при вычислении учесть последовательность воспламенения, то появилось бы тогда еще другое обстоятельство, которое сделало бы определение прочности дульной части пушки гораздо более сложным и почти невозможным. Дело в том, что дульная часть подвержена действию не только силы пороха, но также и той подчас весьма значительной силы, которая возникает при движении ядра. Если бы канал пушки был высверлен совершенно точно по прямой линии и ядро неизменно двигалось вдоль этой прямой линии, оно не оказывало бы ни малейшего воздействия на стенки канала пушки и, таким образом, вылетало бы, совершенно не коснувшись пушки, потому что весом ядра, которое действием его прижато своей нижней стороной, можно вполне пренебречь. Но когда канал пушки хотя бы только незначительно искривлен и ядро, следовательно, должно отклониться от первоначально приданного ему направления, то очевидно, что ядро должно оказывать в свою очередь действие на пушку силой, которая называется центробежной силой. Эта сила может здесь стать весьма значительной; так, если мы положим, что дульная часть в каком-либо месте изогнута по дуге окружности, радиус которой равен r, и что скорость самого ядра определена высотой v, то давление ядра на внутреннюю стенку пушки будет относиться к его весу, как $\frac{2v}{r}$ к 1. Если, следовательно, это искривление канала пушки происходило бы по окружности, радиус которой $r=100$ футам, а подобное искривление на незначительной длине едва заметно, и если бы само ядро имело скорость 1500 футов в одну секунду, получилось бы $v=36\,000$ футов, и пушка подверглась бы в этом месте давлению, которое в 720 раз было бы больше, чем вес ядра, и так как все это давление сосредоточено на весьма незначительной площадке, где ядро прикасается к металлу, то действие его было бы гораздо больше, чем то, которое происходит от упругой силы пороха. То же самое может произойти и в том случае, когда пушечный канал высверлен совершенно по прямой, потому что если сила пороха проталкивает ядро не точно по направлению канала, то получается то же самое, как если бы канал был немного искривлен относительно направления движения ядра, и пушка, следовательно, подвергнется в этом случае такому же воздействию, как и в предыдущем. Но направление, сообщенное ядру порохом, может по разным причинам несколько отклоняться от направления канала; здесь особенное значение приобретает зазор и еще то обстоятельство, что направление движущей силы не проходит через центр тяжести ядра. Эти обстоятельства имеют иногда большее, иногда меньшее значение, и в них, по-видимому, кроется подлинная причина того, почему иногда пушка разрывается от совсем слабого выстрела, тогда как до этого она выдержала большое число более сильных выстрелов. По этой причине, следовательно, чрезвычайно важно делать дульную часть пушки значительно более прочной, чем это требуется каким-либо из вышеприведенных правил с тем, чтобы она была в состоянии противостоять действию этих неизвестных сил. Длинные пушки более подвержены этому воздействию ядра, чем короткие, потому что чем длиннее пушка, тем легче и скорее может возникнуть причина, вследствие которой ядро несколько отклонится от оси канала пушки. Кроме того, в более длинной пушке и ядро движется с большей скоростью, отчего центробежная сила будет значительно возрастать, так как она увеличивается как квадрат скорости.

Нельзя, наконец, обойти молчанием и то обстоятельство, что движение ядра испытывает немалое замедление при давлении на пушку, потому что от этого возникает трение, которое, как было выше показано, вообще незаметно, но сильно возрастает, поскольку оно тем больше, чем сильнее одно тело давит на другое. А так как это давление зависит от весьма разнообразных обстоятельств, то легко может случиться, что у одинаковых ядер, которые будут выброшены из пушки одинаковыми зарядами, окажется заметная разница в их скорости. Тем не менее, все-таки кажется, что при большом старании можно в большинстве случаев устранить эти неправильности, а именно: если, во-первых, высверливать пушки совершенно точно по прямой, во-вторых, ядра изготовлять совершенно круглыми и, в-третьих, при заряжании приложить все старание к тому, чтобы центр ядра точнейшим образом располагался на оси канала и в продолжение всего движения не мог сойти с нее. В таком случае не только пушки не будут подвергаться воздействию такой большой силы, но и мы будем с большей уверенностью рассчитывать на выстрел, как это будет подробно доказано в дальнейшем.

ПЯТОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Все то, что автор далее возражает в этом Предложении против нелепого мнения тех, кто утверждает, что пушечное ядро первоначально движется на известном расстоянии по совершенно прямой линии, само по себе ясно и понятно, потому что первоначальная скорость такого ядра так велика, что кривизна его траектории, вызванная действием силы тяжести, не может быть заметной даже на порядочном расстоянии. Если скорость определяется высотой v, а ядро будет брошено в горизонтальном направлении, то радиус дуги, закругленной так же, как путь ядра, должен равняться $2\ v$. Если скорость ядра составляет 1500 футов в одну секунду, то v=36 000 футов; следовательно, путь этого ядра будет закруглен не больше чем по дуге окружности, радиус которой равен 72 000 футов. А эта кривизна так незначительна, что на протяжении 1256 футов она составляет всего один градус. Хотя это протяжение несколько и уменьшится вследствие сопротивления воздуха, тем не менее оно останется все еще достаточно большим, так что практически можно безошибочно очень отлогую часть траектории, описываемой ядром, принимать за прямую линию, которую артиллеристы обычно называют дальностью прямого выстрела. Но так как об этом подробнее будет изложено в дальнейшем, то не стóит здесь задерживаться на этом вопросе; упомянем только о том, что автор в этом Предложении пишет относительно сильнейшего заряда к пушке, хотя мы выше, в пятом Замечании к второму Предложению, уже достаточно подробно разобрали этот вопрос и дали там таблицу сильнейших зарядов. Между тем то обстоятельство, что для каждой пушки существует определенный заряд, который сообщает ядру наибольшую скорость, сразу бросается в глаза при взгляде на таблицу, приведенную во втором Замечании к этому Предложению, потому что из нее видно, что из пушки длиной в 10 калибров ядро при заряде в $\frac{2}{3}$ веса ядра вылетит с большей скоростью, чем при большем заряде. Этот же сильнейший заряд показан также в той же таблице у пушек в 12 и 14 калибров длиной, из которых ядро при заряде пороха в полный вес ядра вылетает не так быстро, как при меньших зарядах.

Автор определяет величину этого сильнейшего заряда по своему правилу, где он дает скорость ядра, и которое представлено в следующем виде:

$$v = \frac{1000bh}{k} l \frac{a}{b}.$$

Так как в этой формуле упущено из виду очень много обстоятельств, которые все же вызывают немалые изменения, то и неудивительно, что его определение сильнейшего заряда не совпадает с нашим. Автор находит по этой формуле, что для сильнейшего заряда длина b объема, который занят порохом, должна всегда находиться в одном и том же отношении к полной длине пушки a, а именно как 1 к числу 2,71828, гиперболический логарифм которого равен 1; по нашему же правилу это отношение не всегда одно и то же, а зависит как от числа калибров, которые содержатся в длине пушки a, так и от материала ядра, как это ясно из приведенной выше таблицы; тем не менее можно все же заметить некоторое совпадение между этой таблицей и отношением, которое дает автор. А как это отношение выводится из формулы автора, само собой ясно из учения о максимуме и минимуме. Так как k и h — величины постоянные, то все дело только в том, чтобы определить значение величины b так, чтобы $bl\frac{a}{b}$ представляло собой наибольшую величину. Для этого нужно эту величину $bl\frac{a}{b}$ продифференцировать, приняв только b за переменную; тогда получим:

$$db \cdot l\frac{a}{b} - db.$$

Этот дифференциал нужно далее по известному правилу приравнять нулю; тогда

$$l\frac{a}{b} - 1 = 0, \quad \text{или} \quad l\frac{a}{b} = 1.$$

Так как здесь речь идет о гиперболическом логарифме, то $\frac{a}{b}$ должно быть равно тому часто уже применявшемуся числу 2,7182818..., гиперболический логарифм которого равен 1; следовательно, $\frac{a}{b} = 2{,}7182818$, или

$$b : a = 1 : 2{,}7182818,$$

как это было найдено автором. Так как $l\frac{a}{b} = 1$, то эта наибольшая скорость, по автору, получится из высоты v таким образом, что

$$v = \frac{1000bh}{k}.$$

Но чтобы сравнить с этой скоростью ядра другие меньшие скорости, как это сделал автор, рассмотрим гиперболу (рис. 22) LEF: так как $AD = b$ и $AB = a$, то, прежде всего, четырехугольник $ADEG$ для всех точек этой гиперболы равновелик и, далее, площадь $ADEG$ относится к площади фигуры $EDBF$, как 1 к гиперболическому логарифму от $\frac{AB}{AD}$. Так как тут этот логарифм равен 1, то фигура $DEFB$ должна быть равновелика четырехугольнику $AGED$. Мы положим, что отрезок $DE = f$, тогда фигура $DEFB$ выразится через $bfl\frac{a}{b}$, т.е. через bf. Рассмотрим теперь другой заряд, который занимает объем от A до I, и обозначим $AI = \beta$; тогда квадрат наибольшей скорости будет относиться к квадрату скорости, полученной при этом заряде AI, как bf к $\beta f l \frac{a}{\beta}$. Но $l \frac{a}{\beta} = l \frac{a}{b} + l \frac{b}{\beta} = 1 + l \frac{b}{\beta}$, потому что $l \frac{a}{b} = 1$; следовательно, отношение это будет равно bf к $\beta f + \beta f l \frac{b}{\beta}$.

Но из приведенных выше свойств гиперболы величина $\beta f l \frac{b}{\beta}$ выражает площадь фигуры $IHKD$, и βf есть четырехугольник $AGHI$, так же как bf есть четырехугольник $AGED$; поэтому

$$\beta f + \beta f l \frac{b}{\beta} = AGHI + IHKD = AGED - HEK.$$

Следовательно, квадрат наибольшей скорости относится к квадрату скорости, полученной при заряде AI, как $AGED$ к $AGED - HEK$, как нашел автор. Мы рассмотрели здесь случай, когда заряд AI меньше, чем сильнейший заряд AD; но если AI больше, чем AD, и $\beta > b$, то доказательство одинаково с предыдущим, если только принять во внимание, что в этом случае площадь фигуры $DKHI$ выразится не через $\beta f l \frac{b}{\beta}$, а через $\beta f l \frac{\beta}{b}$ или через $-\beta f l \frac{b}{\beta}$.

Хотя мы уже определили выше величину наиболее сильного заряда из формулы, гораздо более приближающейся к действительности, однако и там величина a означала не всю длину канала ствола, а только его часть, так что в той таблице ствол следует всегда считать более длинным, чем там указано. Для устранения этого недостатка выведем из этой формулы, которой мы здесь пользовались для определения скорости, также и сильнейший заряд, так как он будет, таким образом, больше отвечать действительности. Наше равенство в случае, когда в рассмотрение вводится зазор, следующее:

$$v = \frac{1000bh}{k + 455b} l \frac{2a - b}{b}.$$

Эта величина будет наибольшей, когда

$$\frac{b}{k + 455b} l \frac{2a - b}{b}$$

получит наибольшее значение. Чтобы найти это, продифференцируем эту формулу, в которой рассматриваем только b как переменную, и приравняем дифференциал нулю; тогда найдем:

$$\frac{kdb}{(k+455b)^2}\, l\,\frac{2a-b}{b}-\frac{2adb}{(k+455b)(2a-b)}=0,$$

или

$$l\,\frac{2a-b}{b}=\frac{2a(k+455b)}{(2a-b)k}.$$

Обозначим $\frac{2a-b}{b}=u$, тогда будет $b=\frac{2a}{1+u}$, и

$$lu=1+\frac{1}{u}+\frac{910a}{ku}.$$

Если мы теперь положим, что пушка будет i калибров длиной, а материал ядра в n раз тяжелее воздуха, то $k:a=910:\frac{1365i}{n}$; следовательно, получим:

$$lu=1+\frac{1}{u}+\frac{1365i}{nu}.$$

Далее, если возьмем чугунное ядро, то $n=6650$ и $\frac{1365}{n}=\frac{1}{5}$ настолько близко, что разницей можно пренебречь. Поэтому имеем:

$$lu=1+\frac{i+5}{5u}.$$

Правда, из этого уравнения вообще нельзя указать значение u, но в каждом отдельном случае его легко получить приближенно. Чтобы показать это на примере, положим $i=30$; тогда

$$lu=1+\frac{7}{u}.$$

Если под рукой имеется таблица гиперболических логарифмов, то тут же увидим, что u находится между 7 и 8. Берем, следовательно, оба эти значения u и у каждого отмечаем разницу следующим образом:

	$u=7$	$u=8$
$lu=$	1,945909	2,079441
$1+\frac{7}{u}=$	2,000000	1,875000
Разница	$-0{,}054091$	$+0{,}204441$

Так как обе эти разности имеют разные знаки, складываем их и говорим по regula falsi [265]: эта сумма относится к 1, а именно, к разнице между двумя принятыми значениями u, как 0,054091 относится к разнице между истинным значением u и 7, которое будет найдено равным 0,21; следовательно, $u=7{,}21$. Так как тут $a=30\,c$, то найдем:

$$b=\frac{60c}{8{,}21}=7{,}31c\,.$$

Отсюда можно далее определить вес сильнейшего заряда по отношению к весу ядра. Так, если P — вес ядра, Q — вес заряда и положим $Q=mP$, то будет приблизительно

$$m=\frac{b}{5c}.$$

На этом основании вычислена следующая таблица (стр. 382).

Так как эта таблица составлена по последней выведенной нами формуле, в которой учтены все обстоятельства, кроме последовательности воспламенения пороха, то несомненно, что приведенные в таблице сильнейшие заряды лучше согласуются с действительностью, чем те, которые или найдены по правилу автора или содержатся в приведенной ранее таблице. Мы видим прежде всего, что в этой таблице все сильнейшие заряды меньше, чем в предыдущей; если сравнить их с вычисленными по правилу автора, при длине ствола, меньшей 6 калибров, приведенный здесь сильнейший заряд больше, чем найденные по правилу автора; при 6 калибрах они полностью согласуются между собою; и если ствол длиннее 6 калибров, то наши заряды отклоняются от правила автора в меньшую сторону, и чем длиннее ствол, тем больше. При длине ствола в 60 калибров длина объема, занятого порохом, по автору составляет около 22 калибров, тогда как у нас получается меньше половины этого. И если бы

Таблица сильнейших зарядов

Полная длина канала ствола в калибрах	Длина пороховой каморы в калибрах	Вес пороха в сотых долях веса ядра	Полная длина канала ствола в калибрах	Длина пороховой каморы в калибрах	Вес пороха в сотых долях веса ядра
2	0,82	16	32	7,61	152
4	1,54	31	34	7,90	158
6	2,18	43	36	8,18	163
8	2,78	56	38	8,44	169
10	3,35	67	40	8,69	174
12	3,86	77	42	8,93	179
14	4,30	86	44	9,18	184
16	4,77	95	46	9,42	188
18	5,20	104	48	9,66	193
20	5,59	112	50	9,89	198
22	5,96	119	52	10,11	202
24	6,32	126	54	10,31	206
26	6,66	133	56	10,51	210
28	6,99	140	58	10,71	214
30	7,31	146	60	10,90	218

было возможно изготовить ствол длиной в 10 000 калибров, то для сильнейшего выстрела требуемый заряд занял бы объем не более чем в $49\frac{3}{4}$ калибра, и этот заряд был бы приблизительно в 10 раз больше веса ядра. Если бы еще приняли в рассмотрение последовательность воспламенения пороха, то, по-видимому, наисильнейший заряд в этом случае получился бы еще меньшим; поэтому имеется мало оснований сомневаться в том, что правило автора определяет этот заряд слишком преувеличенным.

ПЯТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Если 24-фунтовое пушечное ядро выброшено полным зарядом, то по вылете его из пушки сопротивление воздуха более чем в двадцать раз больше его веса

Во втором Предложении этой главы мы показали, что сопротивление воздуха пуле диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма, движущейся со скоростью 1670 футов в секунду, равно весу в 10 фунтов. А в предыдущем Предложении было показано, что 24-фунтовое чугунное ядро, выброшенное зарядом в 16 фунтов (этот заряд обычно принимается как наиболее подходящий для пробивания бреши), приобретает скорость около 1650 футов в секунду, что незначительно разнится от вышеприведенной. Так как поверхность этого ядра более чем в 54 раза больше поверхности пули диаметром $\frac{3}{4}$ дюйма, а скорости их почти одинаковы, то следует, что сопротивление, испытываемое ядром, составляет более 540 фунтов, что почти в 23 раза больше веса ядра.

ДОПОЛНЕНИЕ

Мы выше уже отмечали во введении, что все стремившиеся к основательному изучению артиллерии исходили из того, что траектория ядра или бомбы очень близко подходит к кривой линии, которая называется параболой. Наши два последних Предложения были направлены главным образом к тому, чтобы опровергнуть это мнение.

Причина, по которой упомянутые авторы настаивали на этом мнении, заключалась главным образом в том, что они думали, будто бы сопротивление воздуха не может производить никакого заметного действия. Так как сейчас уже совершенно бесспорно доказано, что если бы вовсе не было сопротивления, то траектория всех брошенных тел должна была бы быть параболой, они поспешно так прямо и заключили, что такие тяжелые тела, как бомбы и ядра, не могут испытывать от столь тонкого вещества, как воздух, никакого сколько-нибудь заметного сопротивления и что, следовательно, их параболическая траектория не может от этого заметно измениться.

Этот предрассудок в достаточной степени опровергнут теперь тем изумительным сопротивлением, которое воздух оказывает 24-фунтовому ядру и величину которого мы определили здесь. Может ли не быть теперь ошибочным такое мнение, которое вовсе не будет считаться с силой, более чем в двадцать раз большей веса тела? Мы не хотим, однако, ограничиваться тем, чтобы показать только значение и величину сопротивления воздуха, но мы хотим обстоятельно исследовать также истинную траекторию тела в этой текучей материи. А именно, мы хотим с помощью многочисленных опытов ясно показать, насколько путь, описываемый каждым выброшенным в воздухе телом, отличается всеми обстоятельствами от того, который вытекает из общепринятых положений. Но для этого необходимо привести несколько положений, в которых находит доказательства большинство авторов, излагавших общепринятое учение о падающих телах.

1 положение. Если сопротивление воздуха так незначительно, что движение выброшенного тела происходит по параболе, то ось этой параболы всегда перпендикулярна к горизонту, и, следовательно, часть этой кривой линии, по которой это тело подымается, равна и подобна той, по которой тело обратно опускается.

2 положение. Если параболу, по которой движется тело, наложить на горизонтальную плоскость, то наивысшая точка ее одинаково удалена от обоих концов.

3 положение. В этом случае тело упадет на землю под тем же углом и с той же скоростью, как оно первоначально было выброшено.

4 положение. Если тело будет выброшено с одной и той же скоростью, но под различными углами, то наибольшая дальность получится при бросании, которое будет произведено под углом в 45 градусов к горизонту.

5 положение. Если известна скорость, с которой первоначально выброшено тело, то из этого можно

найти наибольшую дальность бросания. На основании известной теории падения тел вычисляется высота, при падении с которой тело приобретает ту же скорость, с которой оно было выброшено; тогда взятая вдвое эта высота даст наибольшую дальность, которую может достигнуть тело, если оно будет выброшено под углом в 45 градусов к горизонту.

6 положение. Горизонтальные дальности тела, выброшенного с одной и той же скоростью под различными углами к горизонту, относятся между собою, как синусы двойных углов, под которыми произведено бросание.

7 положение. Если тело будет выброшено под одним и тем же углом к горизонту, но с различными скоростями, то дальности на горизонтальной плоскости будут относиться, как квадраты скоростей.

В этих положениях содержатся все те основы, по которым современные артиллерийские авторы вычисляют движение выброшенных тел. Если, следовательно, некоторые из этих положений не соответствуют движению выброшенных тел, то из этого бесспорно следует, что тела в своем движении отклоняются от параболического пути. Поэтому общепринятое учение о движении выброшенных тел будет полностью опровергнуто, если мы сможем доказать, что вообще ни одно из этих положений не согласуется с действительным движением тел.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

В этом Предложении автор отыскивает величину сопротивления воздуха, которое испытывает полукартаунное ядро, движущееся при этом со скоростью 1650 футов в одну секунду, и показывает, что сила сопротивления более чем в 20 раз больше веса ядра. Чтобы доказать это, он берет в основу ранее найденное сопротивление, которое испытывает пуля диаметром только в $\frac{3}{4}$ дюйма, движущаяся со скоростью 1670 футов в 1″. Так как обе эти скорости незначительно отличаются одна от другой, то сопротивление ядра должно относиться к сопротивлению пули, как квадрат диаметра ядра к квадрату диаметра пули, поскольку поверхности ядра и пули относятся между собою, как квадраты их диаметров. Но здесь автор утверждает, что поверхность 24-фунтового ядра более чем в 54 раза больше поверхности пули, диаметр которой был равен только $\frac{3}{4}$ дюйма; следовательно, диаметр ядра должен быть равен $\frac{3}{4}\sqrt{54}$ дюймов, т. е. почти $5\frac{1}{2}$ дюймам. Поэтому чугунное ядро диаметром в 5,5 дюйма весит 24 фунта; и отсюда можно определить диаметр любого чугунного ядра, вес которого известен. А на основании найденной выше формулы, выражающей сопротивление ядра, мы можем легко определить в каждом отдельном случае отношение сопротивления воздуха к весу ядра. Пусть c — диаметр ядра и v — высота, с которой может быть достигнута скорость ядра; тогда, как мы уже нашли, сопротивление равно весу воздушного столба одинакового сечения с ядром и высотой, равной $\frac{1}{2}v+\frac{1}{2h}vv$, где h обозначает высоту в 28 845 английских, или 27 979 рейнских футов. Далее, вес ядра равен весу воздушного столба такого же сечения и высотой $\frac{2}{3}c$. Итак, если принять, что вещество ядра в n раз тяжелее воздуха, то вес ядра равен весу воздушного столба равного сечения и высотой $\frac{2}{3}nc$; тогда, следовательно, сопротивление ядра относится к его собственному весу, как

$$\frac{1}{2}v+\frac{1}{2h}vv \text{ к } \frac{2}{3}nc,$$

т. е. как

$$\frac{3v(h+v)}{4nch} \text{ к } 1.$$

Если, следовательно, ядро чугунное, то $n=6647$, и сопротивление ядра будет относиться к его весу, как

$$\frac{v(h+v)}{8863ch} \text{ к } 1$$ [266].

Предположим, что скорость ядра составляет 1650 английских, или 1600 рейнских футов в секунду; тогда высота $v=40\,960$ рейнским, или 42 226 английским футам, и $h+v=71\,071$ английскому футу; следовательно, сопротивление относится к весу ядра, как 11,7386 фута к диаметру ядра. Так как по вычислениям автора диаметр 24-фунтового ядра составляет 5,5 дюйма или $\frac{11}{24}$ фута, то сопротивление его должно относиться к его собственному весу в 24 ℔, как 11,7386 к $\frac{11}{24}$, или как 25,6115 [267] к 1, и, таким образом, сопротивление более чем в 25½ раз больше веса ядра. Нет необходимости доискиваться, почему автор нашел это сопротивление только в 23 раза бо́льшим веса ядра, так как из его работы видно, что намерения его не шли дальше того, чтобы показать, что сопротивление ядра в данном случае более чем в 20 раз больше его веса, и потому он всячески преуменьшал все определения, чтобы тем меньше можно было усомниться в справедливости его Предложения.

Так как сопротивление воздуха столь изумительно велико, то тем менее можно разделять в дальнейшем общепринятое мнение о том, что ядра движутся по параболе, потому что оно было бы целиком опровергнуто даже в том случае, если бы сопротивление воздуха было равно только весу самого ядра. Между прочим, ошибочность этого общепринятого мнения уже давно была достаточно убедительно доказана, но в среде артиллеристов, по-видимому, на это мало обратили внимания. Поэтому автор должен был несколько умерить свои выражения, словно он самым первым обнаружил эту ошибку. Мы указывали еще в наших Замечаниях к Предисловию автора, что эта ошибка уже давно была не только замечена, но и исправлена, так как оказалось возможным определить ту линию, которая в действительности описывается телом в воздухе. Тем не менее мы все же обязаны автору самым главным, тем, что он заметил значительное увеличение сопротивления воздуха при очень быстром движении, чем он не только избавил рядовых профессионалов от грубого заблуждения, но и отчетливо показал ученым неправильность общепринятого учения о сопротивлении воздуха.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Так как автор в следующем Предложении намерен показать с помощью опытов ту большую разницу, которая существует между действительной траекторией, описываемой в воздухе выброшенным телом, и параболой, то здесь он приводит в рассмотрение важнейшие особенности движения по параболе. Поскольку вовсе не так легко определить с помощью опытов истинную траекторию, которую описывает тело, то было бы очень трудным делом рассмотреть непосредственно разницу между этой траекторией и параболой. Поэтому автор разбирает здесь некоторые свойства, с которыми неизбежно связано движение по параболе, чтобы иметь потом возможность проследить, имеются ли эти свойства при движении тела в воздухе или нет. Так, если в воздухе не имеют места хотя бы только некоторые из этих свойств, из этого бесспорно будет следовать, что траектория, которую описывает такое тело в воздухе, никак не может быть параболой. Хотя эти свойства основательно доказаны в многочисленных книгах, тем не менее мы выведем их здесь из основных начал движения отчасти с тем, чтобы еще более отчетливо предстала их правильность, отчасти же для того, чтобы мы затем имели возможность таким образом легче определить истинное движение тела в воздухе.

Уже Галилей нашел, что тяжелое тело в безвоздушном пространстве, или если оно не испытывает почти никакого сопротивления, движется по параболе; на этом основании большинство авторов, которые писали об артиллерии, принимали путь в воздухе бомбы или ядра за параболу; не то чтобы они не имели никакого представления о сопротивлении, а потому, что они полагали это сопротивление настолько малым, что оно не могло вызвать никаких заметных изменений в движении этих тел. Итак, мы предположим, что тело почти не испытывает никакого сопротивления, и из основных начал движения определим ту линию, по которой оно должно совершать свое движение после того, как оно было выброшено с определенной скоростью и под определенным углом к горизонту.

Пусть, таким образом, EF (рис. 23) будет горизонтальной линией, с которой выброшено тело из точки E по

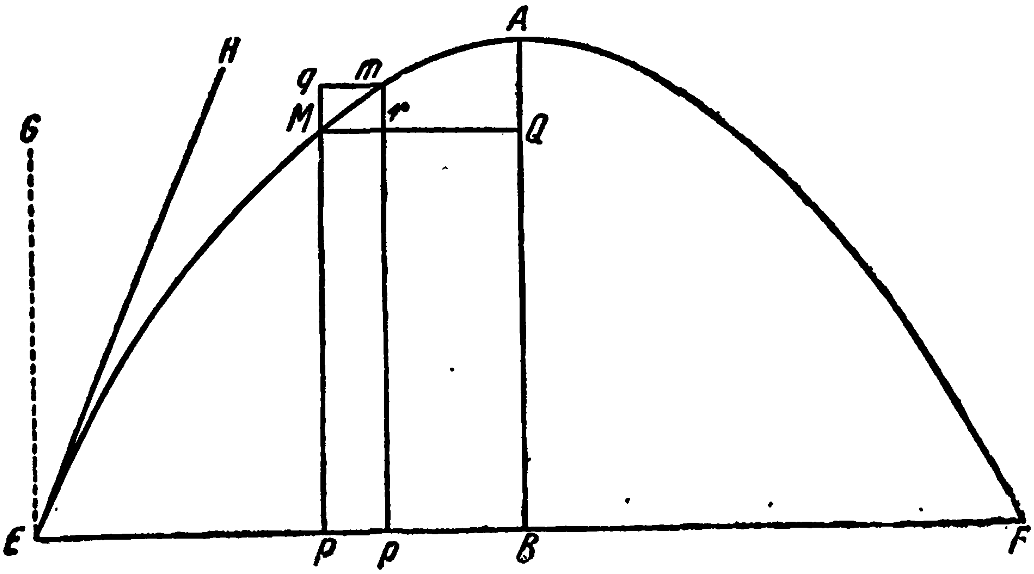

Рис. 23.

направлению EH со скоростью, которая достигается при падении с высоты b, и кривая линия $EMAF$ будет представлять собою траекторию, по которой движется тело, пока опять не упадет в F на горизонтальную линию. Пусть $HEF = \zeta$ — угол, образуемый вначале направлением движения тела EH с горизонтальной линией EF. Так как скорость тела в E выражается через $\sqrt{b}$ и если это движение мысленно разложить на два других, из которых одно будет направлено по вертикальной линии EG, а другое по горизонтальной линии EF, то скорость первого будет $\sqrt{b}\sin\zeta$ и скорость второго $\sqrt{b}\cos\zeta$, если примем, что синус от 90° равен 1. Предположим теперь, что тело уже пришло в M, и опустим из M перпендикулярную линию MP; тогда обозначим $EP=x$ и $PM=y$, а время, в течение которого тело пришло в M, пусть будет t. В течение бесконечно малого времени dt тело пройдет Mm, и если путь, деленный на время, дает скорость, то скорость тела в M будет равна $\frac{Mm}{dt}$. Это движение также разложим на два по направлениям Mq и Mr, из которых первое происходит по перпендикуляру к горизонту, а второе параллельно горизонту; и так как, после того как проведем линию mp, параллельную MP, будет $Mq=mr=dy$ и $Mr=dx$, то скорость по направлению Mq равна $\frac{dy}{dt}$ и по направлению Mr равна $\frac{dx}{dt}$. Так как тут движение тела будет изменяться только от его тяжести, которая направлена вниз по MP, то очевидно, что скорость по направлению Mr не испытывает от этого никакого изменения и поэтому повсюду одинакова, т. е. неизменно равна первоначальной скорости по горизонтальному направлению, которая была равна $\sqrt{b}\cos\zeta$. Поэтому

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{b}\cos\zeta$$

или

$$dx=dt\sqrt{b}\cos\zeta;$$

это уравнение по интегрировании дает

$$x=t\cos\zeta\sqrt{b},$$

откуда следует, что тело в горизонтальном направлении движется все время одинаково быстро. Напротив, вся сила тяжести действует по другому направлению, а именно по вертикальному направлению Mq. Так как скорость по этому направлению равна $\frac{dy}{dt}$, то высота, с которой будет приобретена эта скорость, будет равна $\frac{dy^2}{dt^2}$ и дифференциал ее, если принять за постоянную dt, будет $\frac{2dy\,ddy}{dt^2}$. Этот дифференциал должен относиться к расстоянию dy, которое тело проходит в этом движении за время dt, как сила, которая действует на тело по направлению Mq, к его весу. Но эта сила тут равна весу самого тела; только заметим, что от этого скорость не увеличивается, а уменьшается. Отсюда мы получаем следующую пропорцию:

$$\frac{2dy\,ddy}{dt^2} : dy = -1 : 1,$$

откуда получается следующее уравнение:

$$2ddy = -dt^2.$$

Отсюда интеграл

$$\frac{2dy}{dt} = C - t,$$

где $\frac{dy}{dt}$ означает вертикальную скорость тела по истечении времени t. Так как вначале, когда $t = 0$, вертикальная скорость была равна $\sqrt{b}\sin\zeta$, то в этом месте будет

$$2\sqrt{b}\sin\zeta = C,$$

откуда определится величина C, которая получена при интегрировании. Таким образом, получаем:

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b}\sin\zeta - t,$$

или

$$2dy = 2dt\sin\zeta\sqrt{b} - t\,dt,$$

откуда интеграл дает:

$$2y = 2t\sin\zeta\sqrt{b} - \frac{1}{2}tt.$$

Из дифференциального уравнения

$$\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b}\sin\zeta - t$$

видно, что, так как $\frac{dy}{dt}$ обозначает скорость в вертикальном движении, то, во-первых, когда $t=2\sqrt{b}\sin\zeta$, вертикальная скорость тела исчезает, и тело находится только в горизонтальном движении. Если мы положим, что это происходит в точке A, то касательная к кривой линии в A будет горизонтальна. Если же t будет больше, чем $2\sqrt{b}\sin\zeta$, то вертикальная скорость $\frac{dy}{dt}$ получит отрицательное значение, которое показывает, что тело теперь падает вниз. Следовательно, EA будет той частью пути EMF, по которой тело поднимается вверх, и AF будет той частью, по которой тело падает обратно вниз. Но чтобы ближе познать природу этой кривой линии, заметим, что

$$t=\frac{x}{\cos\zeta\sqrt{b}}.$$

Подставим, таким образом, это значение t в уравнение

$$2y=2t\sin\zeta\sqrt{b}-\frac{1}{2}tt;$$

тогда получим:

$$2y=2x\operatorname{tg}\zeta-\frac{xx}{2b\cos^2\zeta},$$

или

$$xx-4bx\sin\zeta\cos\zeta=-4by\cos^2\zeta.$$

Отсюда получаем:

$$-x+2b\sin\zeta\cos\zeta=2\cos\zeta\sqrt{bb\sin^2\zeta-by}.$$

Из этого уравнения ясно теперь видно, что искомая кривая линия EMF есть парабола. Так, если возьмем $EB=2b\sin\zeta\cos\zeta$, то $BP=2b\sin\zeta\cos\zeta-x$. Далее, проведем в B перпендикулярную линию $BA=b\sin^2\zeta$ и проведем MQ параллельно EF; тогда $AQ=b\sin^2\zeta-y$, $MQ=BP$. Если теперь обозначим $AQ=p$ и $QM=q$, то найдем:

$$q=2\cos\zeta\sqrt{bp}$$

или

$$qq=4bp\cos^2\zeta;$$

это уравнение ясно показывает, что искомая кривая линия есть парабола, осью которой является вертикальная линия AB. И из этого следует правильность первого, второго и третьего положений, а именно: во-первых, что ось параболы AB перпендикулярна к горизонтальной линии EF и что, следовательно, обе части AE и AF между собою равны и подобны. Затем ясно также и то, что крайние точки на горизонтальной линии E и F одинаково удалены от высшей точки A. В-третьих, из этого равенства частей AE и AF следует, что углы, которые кривая линия образует в E и F с горизонтальной линией EF, равны между собой. Далее, так как

$$EF=2EB=4b\sin\zeta\cos\zeta,$$

то вертикальная скорость тела в F будет равна

$$\sqrt{b}\sin\zeta-\frac{x}{2\sqrt{b}\cos\zeta},$$

если для x примем знчение $4b\sin\zeta\cos\zeta$. Следовательно, эта скорость будет равна $-\sqrt{b}\sin\zeta$, и она отличается от первоначальной скорости в E только тем, что та направлена вверх, а эта вниз. Так как горизонтальное движение остается все время равномерным, то отсюда следует, что тело в F имеет ту же самую скорость, с которой оно было выброшено в E. Затем, так как $EB=2b\sin\zeta\cos\zeta$, то $EB=b\sin 2\zeta$, и дальность бросания по горизонтальной линии, а именно EF, равна $2b\sin 2\zeta$, откуда прежде всего следует, что если бывшая в начале E скорость $\sqrt{b}$ остается постоянной, то дальность бросания пропорциональна двойному углу HEF; но если угол FEH остается постоянным, а изменяется скорость $\sqrt{b}$, то дальность бросания EF пропорциональна b, т. е. квадрату скорости. Это служит для доказательства шестого и седьмого положений. Что, далее, касается наибольшей дальности бросания, то, поскольку найдена дальность $EF=2b\sin 2\zeta$, видно, следовательно, что она будет наибольшей, когда угол 2ζ будет содержать девяносто градусов, так как тогда его синус равен радиусу, все же остальные синусы, как известно, меньше радиуса. Итак, если дальность бросания по горизонтальной линии должна быть наибольшей, то угол HEB, под которым первоначально будет выброшено тело, должен содержать 45°; и в этом состоит четвертое положение. Примем теперь угол HEB равным 45°; тогда будет $\sin 2\zeta = 1$ и, следовательно, дальность бросания $EF = 2b$, т. е. удвоенной высоте b, с которой при падении может быть достигнута первоначальная скорость тела. Отсюда, следовательно, следует правильность пятого Положения. Но во всех случаях дальность бросания может быть найдена по правилу de tri [100]. А именно, мы говорим: синус 90° относится к синусу двойного угла HEB, образованного вначале направлением движения тела с горизонтом, как удвоенная высота b, с которой будет достигнута скорость тела, относится к дальности бросания EF, которая таким образом и будет найдена. Если в дальнейшем желательно определить наибольшую высоту AB, которой достигает тело в своем поднятии, то $AB = b \sin^2 \zeta$ и, следовательно, так же легко найдется по правилу de tri.

Итак, если бы сопротивление воздуха не оказывало никакого действия на ядра, то их траектория была бы всегда параболой и движение ядер было бы подчинено найденным здесь законам и, следовательно, легко могло бы быть определено, как это достаточно ясно видно почти во всех руководствах по артиллерии, составленных на этой основе. Мы так же легко могли бы обобщить наши определения, приняв, что линия EF не горизонтальна, а наклонена произвольно к горизонту. Вычислений при этом почти не прибавилось бы, но из них было бы видно, что в том случае, когда тело должно пройти как можно дальше по такой наклонной плоскости, первоначальное направление движения тела EH должно разделить на две равные части угол GEF, образуемый вертикальной линией GE, по которой действует сила тяжести, и наклонной линией EF. Но так как это рассмотрение не может иметь никакого практического значения в артиллерии, мы не будем далее задерживаться на нем и перейдем к следующему Предложению автора.

ШЕСТОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Траектория, по которой движется в воздухе бомба или ядро, не является ни параболой, ни близкой к параболе, если только скорость, с которой они брошены, не очень мала.

В четвертом Предложении этой главы мы показали, что мушкетная пуля диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма, брошенная зарядом пороха вполовину ее веса из ствола длиной 45 дюймов, достигнет скорости почти 1700 футов в 1″. Если бы эта пуля двигалась по параболе, то самый дальний выстрел, который получается под углом в 45° к горизонту, достиг бы, согласно пятому положению, примерно 17 английских миль. Но все авторы-практики заверяют нас в том, что такой выстрел никогда не достигал и полумили. Диего Уфано [268] полагал, что для ружья, которое имело длину в 4 фута и выбрасывало свинцовую пулю в полторы унции, самый дальний выстрел составляет 797 обыкновенных шагов, что почти совпадает с нашим примером, если ствол будет направлен под углом между 40 и 50 градусами и заряжен самым мелким порохом в полный вес пули. Мерсенн [269] сообщает нам, что он нашел горизонтальную дальность ружейного ствола, направленного под углом в 45° к горизонту, менее чем 400 сажен, или 800 ярдов. Так как все эти выстрелы никогда не достигали даже одной английской мили, то следует, что мушкетный выстрел, произведенный достаточным зарядом пороха при возвышении в 45°, никогда не составит и 34-й части дальности, которой он мог бы достигнуть, если бы пуля двигалась по параболе.

Нет никаких оснований удивляться такому большому сокращению горизонтальной дальности, если вспомним, что сопротивление этой пули, после того как она была брошена из ствола, приблизительно в 120 раз больше ее собственного веса, как то было доказано неопровержимыми опытами во втором Предложении этой главы.

Но если возразят, что такое уклонение полета мушкетной пули от параболы еще недостаточно доказывает, что и более тяжелые ядра, испытывающие ввиду своего веса значительно меньшее сопротивление, также заметно отклоняются от общепринятого об этом представления, то мы на этот случай возьмем для примера чугунное 24 ℔ ядро, применяемое обычно на суше как самое тяжелое. Если такое ядро будет выброшено из соответствующей пушки полным зарядом, то, как было показано в четвертом Предложении этой главы, оно приобретет скорость 1650 футов в одну секунду. Если на основании пятого положения вычислить наибольшую дальность по параболе для угла в 45°, то найдем для нее приблизительно 16 миль, что будет в пять-шесть раз больше той, которую получим в действительности, потому что все практики согласны между собою в том, что этот выстрел не достигнет и трех миль. Сен-Реми [270] также приводит нам сведения о некоторых опытах, поставленных г-ном дю Метц. По их данным дальность выстрела под углом в 45° из пушки длиной 10 футов 24-фунтовым ядром и заряженной 16 ℔ пороха, составила не более 2250 французских сажен [271]; эта дальность на 222 сажени меньше трех миль. Следовательно, если 24-фунтовое чугунное ядро будет выброшено полным зарядом пороха под углом в 45°, оно никогда не пройдет и пятой части того, что должно было бы пройти, если бы его движение происходило по параболе.

Но то, что траектория так заметно отличается от параболы, происходит не только в том случае, когда ядро будет выброшено с очень большой скоростью; подобные отклонения часто бывают и в таких движениях, которые настолько медленны, что можно глазами следить за полетом. В этом случае путем подобных наблюдений нашли бы очень мало таких движений, которые не противоречили бы заметным образом первому, второму и третьему положениям, потому что эти тела падают вниз всегда по такой кривой линии, которая короче и образует с горизонтом больший угол, чем та, по которой тело поднималось. Затем высшая точка их траектории также всегда гораздо ближе к месту, куда тело упадет, чем к месту, от которого оно поднимается вверх. Чтобы в этом убедиться настолько, что не осталось бы ни малейших сомнений, надо только внимательно понаблюдать с удобного места за полетом камней, стрел или бомб, бросаемых на значительное расстояние.

Я нашел путем опыта, что пятое, шестое и седьмое положения также отклоняются от действительности, если по ним судить о движении даже таких пуль, которые обладают лишь незначительной степенью скорости. Я стрелял, например, свинцовой пулей диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма со скоростью 400 футов в 1″ под углом в 19°5′ к горизонту и нашел, что она на ровном месте пролетела не дальше чем на 448 ярдов, между тем как по пятому положению наибольшая горизонтальная дальность должна была равняться по крайней мере 1700 ярдам, а далее по шестому положению дальность выстрела под углом в 19°5′ будет 1050 ярдов. Таким образом, в этом опыте дальность выстрела не составила даже $\frac{3}{7}$ той, на которую должна была пролететь пуля, если бы было верным общепринятое мнение.

В дальнейшем такая же пуля была выброшена с той же скоростью, как и в предыдущем опыте, но только под углом в 9°45′, и дальность выстрела на горизонтальной плоскости была найдена около 330 ярдов.

Эта дальность по пятому и шестому положениям в соответствии с первоначальной скоростью должна была бы равняться 556 ярдам. Но если ее вычислить из предыдущего опыта, применив шестое положение, найдем не более чем 241 ярд, и, следовательно, эти оба числа очень сильно отличаются от 330 ярдов.

Затем пуля была выброшена под углом в 8° к горизонту, но со скоростью 700 футов в 1″, и дальность была найдена в 690 ярдов.

Но, вычислив эту дальность по пятому и шестому положениям, найдем, что, если бы учение, на котором основаны эти положения, соответствовало действительности, пуля в настоящем примере должна была бы достигнуть дальности в 1400 ярдов. Откуда ясно видно, что пуля не прошла и половины того, что должна была бы пройти, если бы двигалась по параболе.

Снова была выброшена пуля с той же скоростью, как и в последнем опыте, но только под углом в 4°, и дальность выстрела была найдена в 600 ярдов. Эта дальность на основании предыдущего опыта по шестому положению не должна была превышать 350 ярдов, откуда совершенно очевидна неправильность этого положения, а следовательно, и вообще параболического учения, на котором оно основано.

Поскольку доказано, таким образом, что траектория, описываемая в воздухе даже самыми тяжелыми ядрами, не является ни параболой, ни близко подходящей к ней кривой, за исключением тех случаев, когда ядро будет двигаться с весьма незначительной скоростью, мы отложим до другой части дальнейшее объяснение природы тех кривых линий, по которым ядра действительно движутся в воздухе. Между тем, здесь я хочу еще только дать понятие о больших трудностях, с которыми связано это исследование, сообщить некоторые сведения о необычайных, но часто случающихся обстоятельствах.

Так как сила тяжести действует в вертикальном направлении к горизонту, то ясно, что, если кроме тяжести никакая другая сила не отклоняет брошенного тела от его прямолинейного движения, его движение должно все время происходить в плоскости, перпендикулярной к горизонту и проходящей через линию, вдоль которой тело было первоначально брошено. Но мы, однако, нашли, что тела в своем движении часто отклоняются от этой плоскости то вправо, то влево, и это происходит по изогнутой линии, обращенной своей выпуклостью к упомянутой плоскости. Таким образом, движение ядра происходит часто по линии, имеющей двойную кривизну, потому что она получается, во-первых, от действия вниз силы тяжести и затем под действием другой силы вправо или влево от первоначальной вертикальной плоскости. В таком случае, следовательно, никакая часть траектории, по которой движется ядро, не лежит в одной плоскости, но эта траектория расположена на поверхности некоторого рода цилиндра, ось которого перпендикулярна к горизонту. Справедливость этого положения будет доказана в следующем Предложении путем неоспоримых опытов.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Автор обнадежил здесь нас, пообещав вторую часть, в которой должно быть дано определение истинной траектории ядра; насколько, однако, нам об этом известно, по этому вопросу еще ничего им опубликовано не было, хотя с тех пор прошло уже несколько лет. Это исследование, впрочем, настолько трудно, что автор вправе требовать для его завершения значительно больший срок. Мы попробуем пока что, исходя из того понятия о сопротивлении воздуха, которое было выведено нами из опыта, определить действительное движение ядра в воздухе, в надежде, что наша работа не будет очень отличаться от той, которую нам обещал автор. Но тут нам необходимо будет совершенно забыть про то обстоятельство, о котором автор упоминает в конце этого Предложения и по которому ядро отходит то вправо, то влево от вертикальной плоскости, в которой оно начинает свое движение, потому что это обстоятельство, как будет показано в дальнейшем, происходит большей частью от неправильной формы ядра. Таким образом, мы наперед предположим, что ядро, которое будет выброшено, не только совершенно сферической формы, но и что центр тяжести в нем совершенно точно совпадает с центром его фигуры; равным образом также, что ядро не получает никакого особого движения около своего центра, потому что если бы пришлось принимать в рассмотрение такие случаи, то исследование оказалось бы не только в высшей степени трудным, даже, пожалуй, и вовсе невозможным, но, кроме того, из него нельзя было бы извлечь ни малейшей пользы, так как мы никогда не можем иметь заранее точное представление о неправильностях, которые имеются в форме и внутри ядра. Если же мы примем, что ядро совершенно сферической формы и что положение центра тяжести его не отлично от положения центра его фигуры, то тогда ясно, что оно должно совершать свое движение всегда в вертикальной плоскости.

Но для того чтобы это исследование принесло некоторую пользу артиллерийской практике, необходимо будет разделить его на три части. Во-первых, мы рассмотрим горизонтальные выстрелы, поскольку кривизна их траекторий незначительна, и определим как уменьшение скорости, так и отклонение ядра от горизонтальной

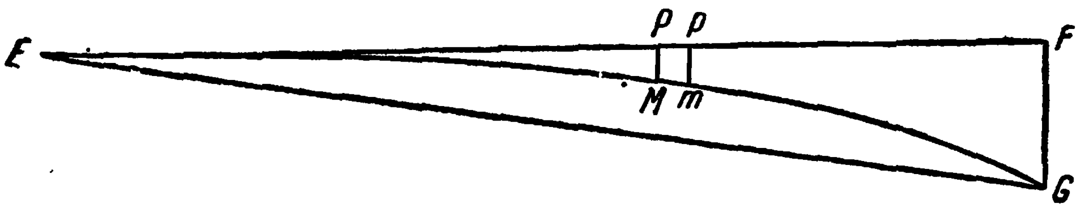

Рис. 24.

линии. Во-вторых, мы займемся исследованием вертикальных выстрелов как при поднятии, так и при падении ядра. В-третьих, мы рассмотрим все наклонные выстрелы, произведенные под острым углом к горизонту, и определим как природу кривой линии, по которой движется ядро, так и дальность выстрела; тут же приведенные автором опыты послужат нам для подтверждения нашей теории.

Итак, мы предположим, что ядро движется в горизонтальном направлении EF (рис. 24). Хотя траектория ядра EMG чем дальше, тем больше отклоняется от этой прямой линии EF, но на довольно значительном протяжении разница так мала, что она едва может быть замечена. Так как думали, что ядро на известном расстоянии действительно движется по прямой линии EF, то и назвали это расстояние прямым выстрелом как такое, на котором ядро движется прямо в точку, в которую наведена пушка. В действительности, однако, истинная траектория ядра начинает загибаться вниз сразу же от дула пушки E; поэтому дальность прямого выстрела EF должна иметь такое протяжение, с которого отклонение FG, или, вернее, угол FEG практически уже начинает становиться заметным. Так как угол FEG очень мал, то кривая линия EMG так мало отличается от прямой EF, что разницей можно безошибочно пренебречь. Мы можем, таким образом, представить себе, что ядро действительно движется по прямой линии EF, если только мы вместе с тем сможем определить в любой ее точке P, насколько ядро опустилось вниз в M, что очень легко, если только известно время от E до P, потому что эта линия PM есть действие тяжести, которое составляет в одну секунду 15,625 рейнского фута.

Итак, пусть b — высота, при падении с которой будет достигнута скорость ядра в E; c — диаметр ядра, и пусть вещество, из которого состоит ядро, в n раз тяжелее воздуха. Спустя некоторое время t ядро, допустим, уже пришло в M или P, и обозначим $EP=x$, $PM=y$ и скорость ядра $\sqrt{v}$. Так как $PM=y$ равно высоте, с которой ядро упало за время t, то

$$y=\frac{tt}{4}.$$

Но чтобы определить движение по горизонтальной линии EP, заметим, что сопротивление в P будет выражено столбом воздуха высотой

$$\frac{1}{2}v+\frac{1}{2h}vv,$$

где h обозначает высоту атмосферы и составляет 28 845 английских, или 27 979 рейнских футов. Так как вес ядра выразится столбом воздуха высотой $\frac{2}{3}nc$, то сила сопротивления так относится к весу ядра, как

$$\frac{3v(h+v)}{4nch} \text{ к } 1.$$

Следовательно, за то время, как ядро пройдет $Pp=dx$, будет

$$dv=\frac{-3v(h+v)}{4nch}dx \text{ и } dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

Так как

$$dx = \frac{-4nch\,dv}{3v(h+v)},$$

то получим:

$$dt = \frac{-4nch\,dv}{3v(h+v)\sqrt{v}}.$$

Первому уравнению можно придать следующий вид:

$$dx = \frac{-4nc}{3}\left(\frac{dv}{v} - \frac{dv}{h+v}\right),$$

откуда интеграл будет равен

$$x = \frac{4nc}{3}\, l\, \frac{b(h+v)}{v(b+h)}.$$

Если положим для краткости

$$\frac{3x}{4nc} = z$$

и примем e за число, гиперболический логарифм которого равен 1, то

$$e^z = \frac{b(h+v)}{v(b+h)}$$

и

$$v = \frac{bh}{e^z(b+h) - b}.$$

Другое уравнение

$$dt = \frac{-4nch\,dv}{3v(h+v)\sqrt{v}}$$

дает

$$dt = \frac{-4nc}{3}\,\frac{h\,dv}{(h+v)\,v\sqrt{v}}.$$

Чтобы избавиться от иррациональности, положим

$$h = aa \text{ и } v = uu;$$

тогда

$$dt = \frac{-4nc}{3}\,\frac{2aa\,du}{uu(aa+uu)} = \frac{8nc}{3}\left(\frac{du}{aa+uu} - \frac{du}{uu}\right);$$

интеграл этого выражения зависит частью от круговой функции, потому что

$$\int \frac{a\,du}{aa+uu} = \operatorname{arctg}\frac{u}{a},$$

что представляет дугу окружности, тангенс которой равен $\frac{u}{a}$, если радиус будет принят равным 1. Таким образом, получаем:

$$t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + \frac{1}{u} - C\right).$$

Положим здесь опять $a=\sqrt{h}$ и $u=\sqrt{v}$ и определим величину C таким образом, что, когда $t=0$, будет $v=b$; тогда найдем:

$$t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right),$$

или

$$t = \frac{8nc}{3}\left[\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{h}}{h+\sqrt{bv}}\right].$$

Так как перед этим v было определено из расстояния x, то и t может быть выражено через x, и, следовательно, получим:

$$y = \frac{tt}{4},$$

выраженное через x, откуда, проведя линию EM, получим угол PEM.

Так как мы приняли, что отклонение от горизонтальной линии EF незначительно, то можем с большим успехом использовать одно удобное приближение, потому что в этом случае дробь

$$\frac{3x}{4nc} = z$$

должна быть очень мала, и так как приблизительно

$$e^z = 1 + z = 1 + \frac{3x}{4nc},$$

то, следовательно,

$$v = b - \frac{(b+h)z}{h}$$

и

$$\sqrt{v} = \sqrt{b} - \frac{b(b+h)z\sqrt{b}}{2h},$$

и, таким образом,

$$t = \frac{8nc}{3}\left[\frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}}\right].$$

Так как z очень мало, то

$$\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}} = \frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}}$$

и, следовательно,

$$t = \frac{4ncz}{3\sqrt{b}} = \frac{x}{\sqrt{b}};$$

это выражение относится к вполне равномерному движению. Но так как движение не может рассматриваться как равномерное, то мы должны принять более точное приближение.

Итак, пусть

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}zz;$$

тогда

$$v = b - \frac{b(b+h)}{h}\left(z - \frac{1}{2}zz - \frac{bzz}{h}\right)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} + \frac{(b+h)(h-b)zz}{8hh\sqrt{b}}.$$

Так как

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} \text{ и } z = \frac{3x}{4nc},$$

то найдем:

$$t=\frac{x}{\sqrt{b}}+\frac{3(b+h)xx}{16nch\sqrt{b}}+\frac{3(hh-bb)x^3}{128nncchh\sqrt{b}},$$

откуда узнаем время, в течение которого ядро проходит расстояние $EP=x$. А отсюда найдем отклонение $PM=\frac{tt}{4}$, которое будет

$$PM=\frac{xx}{4b}+\frac{3(b+h)x^3}{32ncbh}$$

и, таким образом, получим угол PEM, тангенс которого равен

$$\frac{x}{4b}+\frac{3(b+h)xx}{32ncbh}.$$

А скорость ядра в P будет определена из следующего уравнения:

$$v=b-\frac{3b(b+h)x}{4nch}+\frac{9b(b+h)(2b+h)xx}{32n^2c^2hh},$$

или $\sqrt{b}$ так относится к $\sqrt{v}$, как

$$1+\frac{3(b+h)x}{8nch}+\frac{9(hh-bb)xx}{128n^2c^2h^2} \text{ к } 1.$$

Так как тангенс угла PEM почти равен $\frac{x}{4b}$, то отсюда определится расстояние EF, на котором угол отклонения FEG получает заданную величину. Пусть этот угол FEG равен полуградусу; тогда найдем:

$$\frac{x}{4b}=0{,}0087269,$$

и, следовательно, приблизительно:

$$EF=\frac{8b}{229}.$$

Но так как угол FEG все же еще несколько больше чем $^1/_2$ градуса, то EF следует принять несколько меньше чем $\frac{8b}{229}$; и для того чтобы угол FEG составил полградуса для 24-фунтового чугунного ядра, которое будет выброшено со скоростью 1500 футов в одну секунду, то должно быть

$$EF = \frac{b}{40} \text{,или 900 футов.}$$

Следовательно, если надо попасть в точку G, которая удалена от пушки на 900 футов, то ось пушки должна быть направлена в точку F или на полградуса выше. Из этих формул, если нам даны скорость ядра в E, его диаметр c и его вес n по отношению к воздуху, можно во всех случаях определить точку G на данном расстоянии $EF=a$, в которую попадет ядро, а кроме угла FEG, еще и скорость, которую ядро будет иметь в G, если только расстояние EF не слишком велико, чтобы можно было пренебречь кривизной.

Предположим, что диаметр ядра равен $5\frac{1}{2}$ дюймов, или $\frac{11}{24}$ английского фута, затем пусть ядро будет чугунное и, следовательно, $n = 6647$, и первоначальная его скорость составляет 1650 английских футов, или 1600 рейнских футов; тогда высота будет $b = 40\,960$ рейнских футов. Так как $c = \frac{11}{24}$ английского, или 0,44458 рейнского фута, то получим:

$$\frac{4nc}{3} = 3940$$

и $h = 27\,979$ рейнских футов.

Пусть теперь расстояние $EF\,(a) = 1000$ рейнских футов, тогда $x = 1000$ и $z = \frac{3x}{4nc} = \frac{100}{394}$.

Отсюда следует, что z так мало́, что приведенные выше приближения будут достаточно точны. Следовательно, если скорость в G будет выражена через $\sqrt{v}$, имеем:

$$\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1 + \frac{(b+h)\,z}{2h} + \frac{(b+h)(h-b)\,zz}{8hh} : 1,$$

и, таким образом,

$$\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1{,}30348 : 1.$$

Следовательно, скорость ядра в G составляет еще 1227 рейнских футов в одну секунду. Кроме того, тангенс угла FEG равен

$$\frac{x}{4b}+\frac{(b+h)\,xz}{8bh}=\frac{x}{4b}\left[1+\frac{(b+h)\,z}{2h}\right];$$

или, выраженный в числах,

$$1{,}31268\ \frac{x}{4b}=0{,}008012,$$

это есть тангенс угла $27'32''$. Таким образом, в этом примере угол отклонения FEG не больше чем $27'32''$, хотя расстояние EF составляет 1000 рейнских футов и скорость ядра в G уже очень заметно снизилась. Итак, если нужно попасть этим ядром в данную точку G на дистанции в 1000 футов, то пушку нужно наводить в верхнюю точку F так, чтобы угол EFG составлял $27'32''$, для чего можно сделать на пушке такие значки, чтобы по ним можно было наводить так, что визирная линия образует с осью пушки угол в $27'32''$. Если бы дистанция была вдвое больше, то и этот угол следовало бы принять приблизительно еще на столько же больше. А для дистанций, меньших чем 1000 футов, почти не ошибутся, если уменьшат этот угол в том же самом отношении. Так, для расстояния в 500 футов угол отклонения равен $13'46''$, а для 250 футов — $6'53''$. Вообще, отсюда видно, что если данное расстояние будет принято незначительно превышающим 1000 футов, то угол FEG никогда не дойдет и до полуградуса. Так как при обычной наводке пушек на такие малые углы не обращают внимания, то становится совершенно ясной причина, почему вообще полагают, что ядро проходит довольно значительное расстояние по совершенно прямой линии. Так, следовательно, незначительна кривизна траектории ядра, если пушка направлена горизонтально; но она будет еще меньше, если пушка образует угол с горизонтом, потому что тогда на искривление траектории действует только часть силы тяжести, тогда как при горизонтальных выстрелах оказывает влияние весь вес. Это уменьшение происходит по косинусу угла, который пушка образует с горизонтом; и если пушка будет поставлена совершенно вертикально, ядро поднимется вверх по прямой линии и не будет допущено ее искривление, что представляет второй случай, который мы и намерены объяснить.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Итак, пусть, как и раньше, диаметр ядра равен c, вес ядра в n раз больше, чем вес воздуха, и первоначальная скорость ядра, с которой оно выброшено прямо вверх по вертикальному направлению EA, равна $\sqrt{b}$ (рис. 25). Мы предположим, что по истечении времени t ядро поднялось до P, где обозначим его скорость $\sqrt{v}$ и высоту $EP=x$. Если примем бесконечно малый элемент $Pp=dx$, то найдем:

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{v}}\,[272]\,,$$

Рис. 25.

и пока ядро поднимается вверх на протяжении Pp, его движение будет замедлено и тем, и другим: и его весом, и сопротивлением воздуха. Но естественный вес ядра должен быть уменьшен на $\frac{1}{n}$, так как каждое тело в воздухе теряет в своем весе столько, сколько весит воздух в таком же объеме. Поэтому действие веса на ядро выразится через $1-\frac{1}{n}$, что мы для краткости обозначим через g. Затем, как мы выше показали, действие сопротивления равно

$$\frac{3v(h+v)}{4nch}\,,$$

откуда мы получим следующее уравнение:

$$dv=-g\,dx-\frac{3v(h+v)\,dx}{4nch},$$

или

$$dx = \frac{-4nch\,dv}{4ngch + 3hv + 3vv}.$$

Интегрирование этого выражения выполняется или в круговых функциях или в логарифмах, или может быть выполнено алгебраически. Так, если $h < \frac{16}{3}\,ngc$, или $h < \frac{16}{3}(n-1)c$, интегрирование требует круговых функций; но если $h > \frac{16}{3}(n-1)c$, надо обратиться к логарифмам, и если $h = \frac{16}{3}(n-1)\,c$, можно интегрирование произвести алгебраически. Так как $h = 27\,979$ рейнским футам, то для чугунного ядра, когда $n = 6647$, интегрирование выполнимо алгебраически, если диаметр ядра $c = \frac{176}{223}$ рейнских фута, или если диаметр ядра содержит $9\frac{3}{4}$ английских дюйма. Если же диаметр чугунного ядра больше $9\frac{3}{4}$ дюйма, интегрирование выполняется в круговых функциях; наоборот, если диаметр ядра меньше $9\frac{3}{4}$ дюйма, обращаемся к логарифмам, и это как раз случай, который встречается наиболее часто.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $h = \frac{16}{3}\,ngc$, или когда

$$4ngch = \frac{3}{4}\,hh \quad \text{и} \quad 4nch = \frac{3hh}{4g}.$$

Здесь, следовательно,

$$dx = \frac{-hh}{4g}\,\frac{dv}{\left(\frac{1}{2}h + v\right)^2}$$

и

$$x = \frac{hh}{2g\,(h + 2v)} - \frac{hh}{2g\,(2b + h)}\ [273],$$

откуда получается полная высота EA, на которую поднимется ядро, если положим $v = 0$, потому что ядро поднимается до тех пор, пока его скорость совершенно не уничтожится. А потому в этом случае

$$EA = \frac{h}{2g} - \frac{hh}{2g(2b+h)} = \frac{bh}{g(2b+h)} \text{ [274]}.$$

Но когда диаметр ядра меньше, чем в этом случае, или $4ngch < \frac{3}{4} hh$, можно принять $4ngch = \frac{3}{4} hh - 3kk$, и для dx найдем:

$$dx = \frac{-(hh-4kk)\,dv}{4g\left[\left(\frac{1}{2}h+v\right)^2 - kk\right]},$$

или

$$\frac{4g\,dx}{hh-4kk} = \frac{dv}{2k\left(v+\frac{1}{2}h+k\right)} - \frac{dv}{2k\left(v+\frac{1}{2}h-k\right)} \text{ [275]},$$

откуда интегрированием получим:

$$x = \frac{hh-4kk}{8gk}\, l\, \frac{(2v+h+2k)(2b+h-2k)}{(2v+h-2k)(2b+h+2k)}.$$

Если теперь положим здесь $v=0$, то получим:

$$EA = \frac{hh-4kk}{8gk}\, l\, \frac{(h+2k)(2b+h-2k)}{(h-2k)(2b+h+2k)},$$

и так как $g = 1 - \frac{1}{n}$, то $k = \sqrt{\frac{1}{4} hh - \frac{4}{3}(n-1)\, ch}$.

Отсюда мы можем определить высоту, которой может достигнуть чугунное ядро диаметром $5\frac{1}{2}$ дюймов, выброшенное прямо вверх со скоростью 1650 английских футов в секунду.

Итак,

$$b = 40\,960 \text{ рейнских футов},$$

$$\frac{4nc}{3} = 3940 \text{ рейнских футов}$$

и

$$\frac{4}{3}(n-1)\, ch = 110\,226\,100 \text{ [276]} = \frac{hh-4kk}{4}.$$

Далее будет найдено

$$\frac{1}{4}hh = 195\,706\,110\,[^{277}]$$

и, следовательно,

$$k = \sqrt{85\,480\,010}\,[^{278}] = 9245{,}54\,[^{279}];$$

таким образом,

$$\frac{hh - 4kk}{8gk} = 5962\,[^{280}]\,;$$

поэтому

$$EA = 5962\, l\,\frac{46\,470 \cdot 91\,408}{9488 \cdot 128\,390} = 7447\,[^{281}].$$

Таким образом, это ядро поднимется не выше чем на 7447 [282] рейнских футов, тогда как в безвоздушном пространстве оно поднялось бы на высоту 40 960 рейнских футов. Но так как чем выше, тем воздух становится реже, и, следовательно, сопротивление его уменьшается, то ядро это в действительности может подняться еще несколько выше, хотя и немного, так как в нижней области ядро испытывает большее сопротивление.

Когда, таким образом, будет найдена высота EA, которой достигнет ядро, мы можем принять ее как известную вместо скорости в E, чтобы иметь возможность таким путем проще определить обстоятельства падения ядра и вместе с тем требуемое на то время. Итак, пусть полная высота $AE=a$, скорость поднимающегося ядра в P будет $\sqrt{v}$, скорость падающего ядра также в P будет $\sqrt{u}$, высота AP обозначена через z. Так как $z=a-x$ и $dz=-dx$, то для подъема мы имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$4nch\,dv = 4ngch\,dz + 3hv\,dz + 3vv\,dz.$$

Но при падении движению противостоит только сопротивление воздуха, потому что вес тянет ядро вниз и ускоряет движение. В этом случае, следовательно, получим уравнение

$$4nch\,du = 4ngch\,dz - 3hu\,dz - 3uu\,dz.$$

Это уравнение получается из предыдущего, если вместо c напишем — c; поэтому, если будет найден интеграл для первого уравнения, из него можно легко вывести посредством этого изменения интеграл и для другого уравнения. Для нашей цели, впрочем, удобнее произвести это интегрирование путем подходящего приближения. Так как если z и, следовательно, v еще очень малы, то имеем следующее уравнение:

$$4nch\,dv = 4ngch\,dz,$$

или

$$dv = g\,dz;$$

поэтому для действительного значения v мы примем следующий ряд:

$$v = gz + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \text{ и т. д.}$$

и значения α, β, γ, δ и т. д. определим из первого уравнения. Но чтобы возможно легче это выполнить, мы вместо g подставим 1, потому что $\frac{1}{n}$ — такая незначительная дробь, которая не сто́ит рассмотрения. Затем положим $4nc = 3mh$, или $m = \frac{4nc}{3h}$; тогда первое уравнение преобразуется в следующее:

$$mhh\,dv = mhh\,dz + hv\,dz + vv\,dz$$

и если к тому же примем

$$v = z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 + \text{и т. д.},$$

то найдем:

$$\alpha = \frac{1}{2mh},$$

$$\beta = \frac{1}{6m^2h^2}(2m+1),$$

$$\gamma = \frac{1}{24m^3h^3}(8m+1),$$

$$\delta = \frac{1}{120m^4h^4}(16m^2 + 22m + 1).$$

И, таким образом, имеем:

$$v = z + \frac{z^2}{2mh} + \frac{(1+2m)\,z^3}{6m^2h^2} + \frac{(1+8m)\,z^4}{24m^3h^3} + \\ + \frac{(1+22m+16m^2)\,z^5}{120m^4h^4} + \text{и т. д.};$$

это выражение относится к подъему; а для падения получаем:

$$u = z - \frac{z^2}{2mh} + \frac{(1-2m)\,z^3}{6m^2h^2} - \frac{(1-8m)\,z^4}{24m^3h^3} + \\ + \frac{(1-22m+16m^2)\,z^5}{120m^4h^4} - \text{и т. д.}$$

Чтобы определить отсюда время как поднятия, так и падения, ищем значения $\frac{1}{\sqrt{v}}$ и $\frac{1}{\sqrt{u}}$. И найдем:

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left[1 - \frac{z}{4mh} + \frac{(1-16m)\,z^2}{96m^2h^2} + \frac{(1-16m)\,z^3}{384m^3h^3} - \right. \\ \left. - \frac{(1+32m+256m^2)\,z^4}{10\,240m^4h^4} - \text{и т. д.}\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left[1 + \frac{z}{4mh} + \frac{(1+16m)\,z^2}{96m^2h^2} - \frac{(1+16m)\,z^3}{384m^3h^3} - \right. \\ \left. - \frac{(1-32m+256m^2)\,z^4}{10\,240m^4h^4} + \text{и т. д.}\right].$$

Умножим эти равенства на dz и проинтегрируем их, а положив затем $z = a$, найдем для времени поднятия:

$$2\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{6mh} + \frac{(1-16m)\,a^2\sqrt{a}}{240m^2h^2} + \frac{(1-16m)\,a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3}{}^{[283]} - \\ - \frac{(1+32m+256m^2)\,a^4\sqrt{a}}{46\,080m^4h^4} - \text{и т. д.}$$

и для времени падения:

$$2\sqrt{a} + \frac{a\sqrt{a}}{6mh} + \frac{(1+16m)\,a^2\sqrt{a}}{240m^2h^2} - \frac{(1+16m)\,a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3} - \\ - \frac{(1-32m+256m^2)\,a^4\sqrt{a}}{46\,080m^4h^4} + \text{и т. д.}$$

Оба эти выражения, взятые вместе, дают полное время, в течение которого ядро находится в воздухе до того, как оно упадет обратно. Это время, следовательно, будет

$$4\sqrt{a}+\frac{a^2\sqrt{a}}{120m^2h^2}-\frac{a^3\sqrt{a}}{42m^3h^3}-\frac{(1+256m^2)\,a^4\sqrt{a}}{23\,040m^4h^4}+\text{и т. д.}$$

Если a выражено в тысячных долях рейнского фута и это выражение разделено на 250, получим время, выраженное в секундах. Следовательно, наоборот: если будет дано время, которое протекло от выстрела до падения ядра, то отсюда можно найти высоту $EA=a$, которую достигло ядро. Пусть это время равно μ секунд, и положим $t=250\mu$; тогда найдем:

$$\sqrt{a}=\frac{t}{4}-\frac{t^5}{2^{15}\cdot 3\cdot 5m^2h^2}+\frac{t^7}{2^{17}\cdot 3\cdot 7m^2h^3}+$$
$$+\frac{t^9}{2^{29}\cdot 3\cdot 5m^4h^4}+\frac{t^9}{2^{21}\cdot 5\cdot 9m^2h^4}-\text{и т. д.}$$

и, таким образом, a будет выражено в тысячных долях рейнского фута. Этот ряд так быстро убывает, что приведенных здесь членов достаточно, чтобы определить высоту $EA=a$, если только t не слишком большое число.

Чтобы объяснить это вычисление, мы рассмотрим один пример из тех, которые привел г-н Бернулли во втором томе Петербургских Комментариев [284]. Опыты производились с трехфунтовым чугунным ядром, диаметр которого содержал 0,2375 английского фута. После того как это ядро было брошено прямо вверх из пушки длиной 32 калибра зарядом пороха в 2 унции или $\frac{1}{8}$ ℔, оно через 34″ упало обратно на землю.

Итак, здесь $n=6647$, $c=0{,}2304$ рейнского фута. Следовательно, $nc=1531$ и $\frac{4}{3}\,nc=2041=mh$; следовательно, $mh=2\,041\,000$ тысячных рейнского фута, и $m=0{,}07295$. Умножим теперь 34″ на 250; тогда будет

$t=8500$; и отсюда найдем:

$$\frac{t}{4}=2125,$$

$$\frac{t^5}{2^{15}\cdot 15m^2h^2}=21{,}670, \quad \frac{t^7}{2^{17}\cdot 21m^2h^3}=9{,}993,$$

$$\frac{t^{29}}{2^{29}\cdot 15m^4h^4}=1{,}657, \quad \frac{t^9}{2^{21}\cdot 45m^2h^4}=0{,}753 \text{ [285]}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{a}=2115{,}733 \text{ [286]}$$

и $$a=4476{,}3 \text{ [287] рейнского фута.}$$

Итак, по этому вычислению ядро должно было подняться на высоту в 4476,3 [287] рейнского фута; отсюда может быть найдена первоначальная скорость ядра или высота b, с которой при падении в безвоздушном пространстве будет достигнута такая скорость. Поскольку $EA=a=4476{,}3$ рейнского фута, и эта высота не очень отлична от той, которую нашел г-н Бернулли [288], то если примем

$$k=\sqrt{\frac{1}{4}hh-\frac{4}{3}nch},$$

то $k=11\,773$ рейнских фута, и получим:

$$a=\frac{hh-4kk}{8gk}\,l\,\frac{(h+2k)(2b+h-2k)}{(h-2k)(2b+h+2k)}.$$

Отсюда найдем b; так как $g=1$ и $\frac{1}{4}hh-kk=$ $=2041h$, то

$$\frac{8ak}{hh-4kk}=1{,}8464,$$

и если e будет принято за число, гиперболический логарифм которого равен 1, то $e^{1{,}8464}=6{,}3373$, и искомая высота b, следовательно, будет

$$b=\frac{5{,}3373\,(hh-4kk)}{2h+4k-6{,}3373\,(2h-4k)}.$$

Отсюда будет найдено $b=26\,014$ рейнских футов, и поэтому ядро должно было быть брошено из пушки со скоростью 1275 футов в 1″. Эта скорость много больше той, которую нашел г-н проф. Бернулли на основании своей теории [289]. Но этому не приходится удивляться, потому что, поскольку мы с автором принимаем здесь сопротивление бо́льшим, чем полагает Бернулли, ядро должно было иметь вначале значительно бо́льшую скорость, чтобы достичь той же самой высоты. Но здесь имеется другое значительно большее затруднение в том, что вышеустановленным действием пороха невозможно объяснить, как трехфунтовое ядро могло получить от заряда в $\frac{1}{8}$ ℔ такую большую скорость. Так, если взять по нашим вышеприведенным правилам вес ядра $P=3$, вес заряда $\frac{1}{8}$ и длину пушки в калибрах $i=32$, найдем $b=7219$ [290] рейнских футов, и, следовательно, ядро не имело бы бо́льшую скорость, чем 671,7 [291] фута в 1″. Разница между 671,7 [291] фута и 1275 футами так велика, что она могла возникнуть лишь вследствие большого расхождения теории с действительностью. Если, следовательно, при этом опыте не было крупной ошибки, то либо сила пороха в 4 раза больше, чем утверждает автор, каковое следствие делает из этого же опыта и господин Бернулли, либо принятое приближение для определения высоты a неверно. Так, хотя 5 первых членов, которыми выражен $\sqrt{a}$, довольно быстро убывают, тем не менее могло бы случиться, что следующие члены снова станут бо́льшими, и, следовательно, действительное значение a будет меньше. Чтобы разобраться в этом, поставим вопрос наоборот, и по первоначальной скорости ядра, которая должна быть 1275 футов в 1″, определим время, которое потребуется как для поднятия, так и для падения ядра, и тогда посмотрим, составляет ли это время 34″, как это было найдено при опыте.

Итак, пусть $b=26\,014$ рейнских футов и $m=\frac{4nc}{3h}=0{,}07295$, и $mh=2041$ рейнский фут. Так как выше для поднятия ядра было найдено

$$mhh\,dv = mhh\,dz + hv\,dz + vv\,dz,$$

то получим:

$$dz = \frac{mhh\,dv}{mhh + hv + vv}.$$

Далее положим $mhh = \frac{1}{4}hh - kk$; тогда будет $k = 11\,773$ рейнских фута и, таким образом,

$$dz = \frac{mhh\,dv}{\left(v + \frac{1}{2}h + k\right)\left(v + \frac{1}{2}h - k\right)}.$$

Если примем время равным t, получим:

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{v}} = \frac{mhh\,dv}{\left(v + \frac{1}{2}h + k\right)\left(v + \frac{1}{2}h - k\right)\sqrt{v}}.$$

Пусть $\sqrt{v} = s$, тогда

$$dt = \frac{2mhh\,ds}{\left(ss + \frac{1}{2}h + k\right)\left(ss + \frac{1}{2}h - k\right)},$$

или

$$dt = \frac{mhh}{k}\left(\frac{ds}{ss + \frac{1}{2}h - k} - \frac{ds}{ss + \frac{1}{2}h + k}\right).$$

Но $\frac{1}{2}h - k = 2216{,}5$ и $\frac{1}{2}h + k = 25762{,}5$; следовательно, интегрирование обоих членов основано на круговых функциях. Пусть для краткости

$$\frac{1}{2}h - k = 2216{,}5 = \beta\beta,$$

$$\frac{1}{2}h + k = 25762{,}5 = \gamma\gamma,$$

тогда

$$t = \frac{mhh}{\beta k}\operatorname{arctg}\frac{s}{\beta} - \frac{mhh}{\gamma k}\operatorname{arctg}\frac{s}{\gamma}.$$

Если эти величины выражены здесь в тысячных долях рейнского фута и разделены на 250, то получим время в секундах. *И*, следовательно, полное время поднятия получится, если положим $v=b$ и $s=\sqrt{b}=$ $=161{,}29$. Таким образом, будет $\beta=47{,}08$, и $\gamma=160{,}50$, и $\frac{mh}{k}=0{,}17336$; далее,

$$\frac{\sqrt{h}}{\beta}=3{,}55298 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{h}}{\gamma}=1{,}04218.$$

Поэтому

$$t=3{,}66797\left(3{,}55298 \operatorname{arctg} \frac{16129}{4708}-\right.$$
$$\left.-1{,}04218 \operatorname{arctg} \frac{16\,129}{16\,050}\right) [292] \text{ секунд,}$$

и отсюда найдется время поднятия равным $13\frac{3}{4}''$.

Для точного определения времени падения мы должны сначала найти скорость, с которой ядро упадет вниз. Ее можно определить из уравнения

$$dz=\frac{mhh\,du}{mhh-hu-uu}.$$

Положим $mhh=ff-\frac{1}{4}hh$; тогда

$$f=h\sqrt{m+\frac{1}{4}}=15\,900$$

и

$$dz=\frac{mhh\,du}{\left(f-\frac{1}{2}h-u\right)\left(f+\frac{1}{2}h+u\right)};$$

следовательно,

$$dz=\frac{mhh}{2f}\left(\frac{du}{f+\frac{1}{2}h+u}+\frac{du}{f-\frac{1}{2}h-u}\right),$$

откуда надлежаще взятый интеграл дает:

$$z=\frac{mhh}{2f}\, l\,\frac{\left(f-\frac{1}{2}h\right)\left(f+\frac{1}{2}h+u\right)}{\left(f+\frac{1}{2}h\right)\left(f-\frac{1}{2}h-u\right)}.$$

Положим теперь $z = 4478$ [287] рейнских футов, т. е. найденной высоте $EA = a$; тогда

$$\frac{2fz}{mhh} = \frac{2a\sqrt{m+\frac{1}{4}}}{mh} = 2{,}49367,$$

и $e^{2,49367} = 12{,}1056$; примем это число равным N, тогда получим:

$$N = \frac{ff - \frac{1}{4}hh + \left(f - \frac{1}{2}h\right)u}{ff - \frac{1}{4}hh - \left(f + \frac{1}{2}h\right)u}$$

и

$$u = \frac{mhh(N-1)}{\left(f + \frac{1}{2}h\right)N + f - \frac{1}{2}h}.$$

Отсюда получается $u = 1743{,}51$ [293] рейнского фута. Положим теперь время падения равным t, тогда найдем для dt:

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{u}} = \frac{mhh}{2f}\left(\frac{du : \sqrt{u}}{f + \frac{1}{2}h + u} + \frac{du : \sqrt{u}}{f - \frac{1}{2}h - u}\right).$$

Пусть $\sqrt{u} = s = 41{,}7582$; $f + \frac{1}{2}h = \beta\beta$; $f - \frac{1}{2}h = \gamma\gamma$; тогда будет $\beta = 172{,}873$ и $\gamma = 43{,}7607$, и

$$dt = \frac{mhh}{f}\left(\frac{ds}{\beta\beta + ss} + \frac{ds}{\gamma\gamma - ss}\right),$$

откуда интеграл

$$t = \frac{mhh}{\beta f}\operatorname{arctg}\frac{s}{\beta} + \frac{mhh}{2\gamma f}\, l\,\frac{\gamma + s}{\gamma - s}.$$

Но

$$\frac{mh}{f} = 0{,}128365; \quad \frac{\sqrt{h}}{\beta} = 0{,}96759 \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{h}}{2\gamma} = 1{,}91118.$$

Отсюда

$$t = 2{,}71595\left(0{,}96759\operatorname{arctg}\frac{417582}{1728730} + {}\right.$$
$$\left. + 1{,}91118\, l\,\frac{855189}{20025}\right) \text{секунд},$$

и, следовательно, время падения будет 20,11 секунды; поэтому полное время, в течение которого ядро находилось в воздухе, будет 33,87 секунды, что от наблюденного времени, т. е. от 34″, разнится только на $\frac{13}{100}$ [294] секунды.

Отсюда ясно, что можно уверенно положиться на примененное выше приближение.

Так как здесь не обнаружено никакой ошибки, то скорость, с которой ядро было выброшено из пушки, должна была действительно составлять 1275 футов в 1″; и остается еще, таким образом, самое большое затруднение: откуда ядро получило такую большую скорость?

Мы уже указывали, что 2 унции пороха, которые были взяты для этого выстрела, по вышеустановленной теории не могли сообщить ядру скорость, бóльшую чем 654 фута в 1″. Эта разница слишком велика, а заряд слишком мал, чтобы можно было объяснить это увеличение силы усилением жара при воспламенении пороха. Но из этого опыта нельзя также выводить заключение, что сила пороха должна быть значительно больше, чем мы принимали выше, потому что, если бы это было так, то во всех поставленных автором опытах скорость ядра должна была бы быть почти вдвое больше, чем было найдено опытами, которые никак нельзя не признать.

По нашей таблице, которую мы дали выше, для получения этой скорости нужен был бы заряд более полуфунта пороху и, следовательно, в четыре раза больше, чем указанный, который составлял только 2 унции. Высота в 4478 футов также слишком мала, чтобы разреженность воздуха могла повлечь значительные изменения, потому что, по общему мнению, воздух вверху в A не может быть реже, чем внизу в E, более чем на одну пятую, что при слабом уже движении там не могло произвести ничего существенного. Оставим, таким образом, этот опыт в покое и перейдем к исследованию криволинейного движения ядра.

ТРЕТЬЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Пусть опять, как и раньше, диаметр ядра равен c, вес ядра относится к весу воздуха, как n к 1, и b — высота, с которой будет достигнута при падении первоначальная скорость ядра в E (рис. 23). Итак, мы предположим, что ядро выброшено из пушки под некоторым острым углом к горизонту EF, а именно по направлению линии EH, и обозначим угол $HEF = \theta$. Скорость ядра будет выражена здесь через $\sqrt{b}$; если мы ее разложим по горизонтальному направлению EF и вертикальному направлению EG, то горизонтальная скорость будет $\sqrt{b}\cos\theta$ и вертикальная скорость $\sqrt{b}\sin\theta$.

Пусть по истечении времени t ядро пришло в M, где его скорость равна $\sqrt{v}$. Проведем из M вертикальную линию MP и обозначим $EP = x$, $PM = y$; тогда, представив себе, что бесконечно близко к PM проведена вертикальная линия pm, будем иметь: $Pp = Mr = dx$ и $mr = Mq = dy$.

Далее, обозначим элемент кривой линии $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ и угол $mMr = \varphi$; тогда будет $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$. Отсюда горизонтальная скорость ядра в M будет $\sqrt{v}\cos\varphi$ и вертикальная скорость $\sqrt{v}\sin\varphi$ и, кроме этого, рассмотрение времени дает $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$. Сила тяжести, как мы раньше видели, будет выражена через $1 - \frac{1}{n}$, что мы для краткости обозначим через g; под действием этой силы вертикальная скорость будет уменьшаться. Затем сила сопротивления равна

$$\frac{3v(h+v)}{4nch}$$

и действует по направлению mM. Отсюда, следовательно, вертикальная скорость уменьшается под действием силы

$$\frac{3v(h+v)}{4nch}\sin\varphi$$

и горизонтальная скорость под действием силы

$$\frac{3v(h+v)}{4nch}\cos\varphi.$$

Из этих сил получаются, таким образом, уравнения.

$$d(v\sin^2\varphi) = -g\,dy - \frac{3v(h+v)\,dy\sin\varphi}{4nch},$$

$$d(v\cos^2\varphi) = \frac{-3v(h+v)\,dx\cos\varphi}{4nch}.$$

Или, так как $dx = ds\cos\varphi$ и $dy = ds\sin\varphi$, то получаем:

$$dv\sin^2\varphi + 2v\,d\varphi\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$= -g\,ds\sin\varphi - \frac{3v(h+v)\,ds\sin^2\varphi}{4nch},$$

$$dv\cos^2\varphi - 2v\,d\varphi\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$= \frac{-3v(h+v)\,ds\cos^2\varphi}{4nch}$$ [295].

Разделив первое на второе, получим, следовательно:

$$\frac{dv\sin^2\varphi + 2v\,d\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{dv\cos^2\varphi - 2v\,d\varphi\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{4ngch\sin\varphi + 3v(h+v)\sin^2\varphi}{3v(h+v)\cos^2\varphi},$$

в котором находятся еще только две переменные величины v и φ. Но это уравнение приведем к следующему:

$$2ngch\,dv\cos\varphi = 4ngchv\,d\varphi\sin\varphi + 3vv(h+v)\,d\varphi.$$

Если затем из обоих приведенных выше уравнений исключить dv, найдем:

$$v = \frac{-g\,ds\cos\varphi}{2d\varphi}.$$

Если бы из вышеприведенных уравнений можно было определить v через угол φ, то тогда было бы

$$ds = \frac{-2v\,d\varphi}{g\cos\varphi}$$

и далее

$$dx = \frac{-2v\,d\varphi}{g} \quad \text{и} \quad dy = \frac{-v\,d\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}{g}.$$

Но если мы хотим иметь уравнение, связывающее x и y, сложим по частям два первых уравнения; тогда

$$dv = -g\,dy \cdot \frac{-3v(h+v)\,ds}{4nch}.$$

Положим $dy = p\,dx$; тогда $ds = dx\sqrt{1+pp}$, $\sin\varphi = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+pp}}$. Дифференцирование последнего дает:

$$d\varphi\sin\varphi = \frac{p\,dp}{(1+pp)\sqrt{1+pp}},$$

и, следовательно,

$$d\varphi = \frac{dp}{1+pp}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{-g\,dx\,(1+pp)}{2dp}.$$

Затем положим $dp = q\,dx$, тогда

$$v = \frac{-(1+pp)}{2g}$$

и

$$dv = \frac{-gp\,dp}{q} + \frac{g\,dq\,(1+pp)}{2qq} = -g\,dy + \frac{g\,dq\,(1+pp)}{2qq}.$$

Следовательно,

$$\frac{4}{3}nch\,dq = h\,dp\sqrt{1+pp} - \frac{g\,(1+pp)^{\frac{3}{2}}\,dp}{2q}$$

или

$$\frac{4}{3}nc\,dq = dp\sqrt{1+pp} - \frac{g\,dp\,(1+pp)\sqrt{1+pp}}{2hq}.$$

При интегрировании этого уравнения необходимыми будут следующие условия: в начале E должно быть

I. $x=0$; II. $y=0$; III. $p=\operatorname{tg}\theta$ и IV. $q=\frac{-g}{2b\cos^2\theta}$.
Но если q выражено через p, то получим:

$$x=\int\frac{dp}{q} \quad \text{и} \quad y=\int\frac{p\,dp}{q},$$

а так как уравнение между p и q не может быть проинтегрировано, надо постараться выполнить это с помощью подходящего приближения. С этой целью положим:

$$\frac{4}{3}nc=k, \quad \frac{2h}{g}=f, \quad p=\frac{u}{\sqrt{1-uu}} \quad \text{и} \quad q=\frac{1}{r};$$

тогда приведенное выше уравнение преобразуется в следующее:

$$k(1-uu)^3\,dr+rr\,du\,(1-uu)-\frac{1}{f}r^3\,du=0.$$

Теперь положим:

$$r=a+Au+Bu^2+Cu^3+\text{ и т. д.}$$

тогда найдем:

$$A=\frac{a^2(a-f)}{kf},$$

$$B=\frac{a^3(a-f)(3a-2f)}{2kkff},$$

$$C=\frac{a^2(3a-2f)}{3kf}+\frac{a^4(a-f)(15aa-20af+6ff)}{6k^3f^3}$$

и т. д. В начале E будет, следовательно,

$$u=\sin\theta, \quad \sqrt{1-uu}=\cos\theta \quad \text{и} \quad r=\frac{-2b\cos^2\theta}{g}.$$

Так как

$$dp=\frac{du}{(1-uu)^{3:2}},$$

и

$$p\,dp=\frac{u\,du}{(1-uu)^2},$$

то получим:

$$x=\int \frac{du\,(a+Au+Bu^2+Cu^3+\text{ и т. д.})}{(1-uu)^{3:2}},$$

$$y=\int \frac{u\,du\,(a+Au+Bu^2+Cu^3+\text{ и т. д.})}{(1-uu)^2}.$$

Но имеем:

$$\int \frac{du}{(1-uu)^{3:2}}=\frac{u}{\sqrt{1-uu}},$$

$$\int \frac{u\,du}{(1-uu)^{3:2}}=\frac{1}{\sqrt{1-uu}},$$

$$\int \frac{uu\,du}{(1-uu)^{3:2}}=\frac{u}{\sqrt{1-uu}}-\arcsin u,$$

$$\int \frac{u^3\,du}{(1-uu)^{3:2}}=\frac{2-uu}{\sqrt{1-uu}}$$

и т. д.;

$$\int \frac{u\,du}{(1-uu)^2}=\frac{1}{2(1-uu)},$$

$$\int \frac{uu\,du}{(1-uu)^2}=\frac{u}{2(1-uu)}-\frac{1}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u}, \text{ [296]}$$

$$\int \frac{u^3\,du}{(1-uu)^2}=\frac{1}{2(1-uu)}+\frac{1}{2}\,l\,(1-uu),$$

$$\int \frac{u^4\,du}{(1-uu)^2}=\frac{3u-2u^3}{2(1-uu)}-\frac{3}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u}$$

и т. д.

Следовательно:

$$x=E+\frac{au}{\sqrt{1-uu}}+\frac{A}{\sqrt{1-uu}}+\frac{Bu}{\sqrt{1-uu}}-$$

$$-BA\sin u+\frac{C\,(2-uu)}{\sqrt{1-uu}},$$

$$y = F + \frac{a}{2(1-uu)} + \frac{Au}{2(1-uu)} + \frac{B}{2(1-uu)} + \frac{C(3u-2u^3)}{2(1-uu)} - \frac{A}{4}\, l\, \frac{1+u}{1-u} + \frac{B}{2}\, l(1-uu) - \frac{3C}{4}\, l\, \frac{1+u}{1-u} + \text{и т. д.}$$

Чтобы определить a, E и F, обратимся к началу, где

$$\frac{-2b\cos^2\theta}{g} = a + A\sin\theta + B\sin^2\theta + C\sin^3\theta + \text{и т. д.};$$

$$-E = \frac{a\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{A}{\cos\theta} + \frac{B\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{C(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta} - B\theta - \text{и т. д};$$

$$-F = \frac{a}{2\cos^2\theta} + \frac{A\sin\theta}{2\cos^2\theta} + \frac{B}{2\cos^2\theta} + \frac{C(3\sin\theta - 2\sin^3\theta)}{2\cos^2\theta} - \frac{A}{4}\, l\, \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + Bl\cos\theta - \frac{3C}{4}\, l\, \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + \text{и т. д.}$$

Но так как мы приняли угол $mMr = \varphi$, то будет $p = \operatorname{tg}\varphi$, и $u = \sin\varphi$, и $\sqrt{1-uu} = \cos\varphi$.

Следовательно, имеем:

$$x = a\operatorname{tg}\varphi + \frac{A}{\cos\varphi} + B\operatorname{tg}\varphi + \frac{C(1+\cos^2\varphi)}{\cos\varphi} - B\varphi - a\operatorname{tg}\theta - \frac{A}{\cos\theta} - B\operatorname{tg}\theta - \frac{C(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta} - \text{и т. д.} + B\theta + \text{и т. д.};$$

$$y = \frac{a}{2\cos^2\varphi} + \frac{A\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{B}{2\cos^2\varphi} + \frac{C(3\sin\varphi - 2\sin^3\varphi)}{2\cos^2\varphi} - \frac{A}{4}\, l\, \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + Bl\cos\varphi - \frac{3C}{4}\, l\, \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} - \frac{a}{2\cos^2\theta} - \frac{A\sin\theta}{2\cos^2\theta} - \frac{B}{2\cos^2\theta} - \frac{C(3\sin\theta - 2\sin^3\theta)}{2\cos^2\theta} + \frac{A}{4}\, l\, \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} - Bl\cos\theta + \frac{3C}{4}\, l\, \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + \text{и т. д}$$

Если k — очень большое число, то значения величин A, B, C и т. д. должны все время убывать. Мы видим, однако, что при этом приближении C оказывается не меньше A. Поэтому, чтобы найти более подходящее для нашей цели приближение, мы введем в дифференциальное уравнение угол φ вместо u; тогда получим:

$$k\,dr\cos^5\varphi + rr\,d\varphi\cos^2\varphi = \frac{1}{f}r^3\,d\varphi.$$

Положим тут $r = a + P + Q +$ и т. д. и, приведя подобные члены, получим:

$$P = \frac{-aa}{k}\int\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{a^3}{fk}\int\frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} + \text{ и т. д.},$$

$$Q = \frac{-2a}{k}\int\frac{P\,d\varphi}{\cos^3\varphi} + \frac{3a^2}{fk}\int\frac{P\,d\varphi}{\cos^5\varphi} + \text{ и т. д.}$$

При этом заметим, что вначале, где $\varphi = \theta$ [297], должно быть:

$$r = \frac{-2b\cos^2\theta}{g}.$$

Отсюда

$$x = \int\frac{r\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi} - \int\frac{dr\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

и

$$y = \int\frac{r\,d\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{r}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\int\frac{dr}{\cos^2\varphi}.$$

Чтобы найти эти значения, обозначим для краткости

$$\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \omega$$

и, следовательно,

$$\omega = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right);$$

или ω есть гиперболический логарифм тангенса угла $45^\circ + \frac{1}{2}\varphi$, если радиус будет принят равным 1.

Далее будет найдено:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{\omega}{2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{\sin\varphi}{4\cos^4\varphi} + \frac{3\sin\varphi}{4\cdot 2\cos^2\varphi} + \frac{3\omega}{4\cdot 2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^7\varphi} = \frac{\sin\varphi}{6\cos^6\varphi} + \frac{5\sin\varphi}{6\cdot 4\cos^4\varphi} + \frac{5\cdot 3\sin\varphi}{6\cdot 4\cdot 2\cos^2\varphi} + \frac{5\cdot 3\omega}{6\cdot 4\cdot 2}.$$

Отсюда, чтобы найти значение Q, имеем:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} \int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \omega\right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} \int \frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{24\cos^6\varphi} + \frac{3}{32}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \omega\right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} \int \frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{32}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{3\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{3\omega}{2}\right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^5\varphi} \int \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = -\frac{1}{24\cos^8\varphi} + \frac{1}{24}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{3\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{3\omega}{2}\right)^2.$$

Отсюда получаем:

$$P = \frac{-aa}{2k}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \omega\right) + \frac{a^3}{4fk}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{3\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{3\omega}{2}\right),$$

$$Q = \frac{2a^3}{8k^2}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \omega\right)^2 - \frac{a^4}{3fkk\cos^6\varphi} -$$

$$- \frac{3a^4}{32fkk}\left(\frac{1}{\cos^4\varphi} - \frac{5}{\cos^2\varphi} + \frac{4\omega\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{10\omega\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + 5\omega^2\right) +$$

$$+ \frac{3a^5}{32ffkk}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{3\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{3\omega}{2}\right)^2.$$

Если бы не было совсем никакого сопротивления, то было бы $r = a$ и кривая линия была бы параболой. Если бы, следовательно, сопротивление было не очень велико, то вполне достаточно было бы применить следующее уравнение:

$$r = a + P.$$

Отсюда получаем:

$$x = E + \frac{a \sin \varphi}{\cos \varphi} + \frac{P \sin \varphi}{\cos \varphi} - \int \frac{dP \sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$y = F + \frac{a}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{P}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{2} \int \frac{dP}{\cos^2 \varphi},$$

где

$$dP = \frac{-aa\, d\varphi}{k \cos^3 \varphi} + \frac{a^3\, d\varphi}{fk \cos^5 \varphi};$$

следовательно,

$$\int \frac{dP \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{-aa}{3k \cos^3 \varphi} + \frac{a^3}{5fk \cos^5 \varphi}$$

и

$$\int \frac{dP}{\cos^2 \varphi} = \frac{-aa}{4k} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos^4 \varphi} + \frac{3 \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{3\omega}{2} \right) +$$
$$+ \frac{a^3}{6fk} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos^6 \varphi} + \frac{5 \sin \varphi}{4 \cos^4 \varphi} + \frac{15 \sin \varphi}{8 \cos^2 \varphi} + \frac{15\omega}{8} \right) \text{[297]}.$$

Если мы теперь подставим эти значения P и dP, то получим:

$$x = E + a \operatorname{tg} \varphi - \frac{aa}{k} \left(\frac{1}{6 \cos^3 \varphi} - \frac{1}{2 \cos \varphi} + \frac{1}{2} \omega \operatorname{tg} \varphi \right) +$$
$$+ \frac{a^3}{fk} \left(\frac{1}{20 \cos^5 \varphi} + \frac{1}{8 \cos^3 \varphi} - \frac{3}{8 \cos \varphi} + \frac{3}{8} \omega \operatorname{tg} \varphi \text{ [298]} \right),$$

$$y = F + \frac{a}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{aa}{4k} \left(\frac{\sin \varphi}{2 \cos^4 \varphi} - \frac{3 \sin \varphi}{4 \cos^2 \varphi} - \frac{3}{4} \omega + \frac{\omega}{\cos^2 \varphi} \right) +$$
$$+ \frac{a^3}{4fk} \left(\frac{\sin \varphi}{6 \cos^6 \varphi} + \frac{\sin \varphi}{3 \cos^4 \varphi} - \frac{5 \sin \varphi}{8 \cos^2 \varphi} - \frac{5}{8} \omega + \frac{3\omega}{4 \cos^2 \varphi} \right).$$

Но

$$\frac{-2b \cos^2 \theta \text{ [299]}}{g} = a - \frac{aa}{2k} \left[\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right) \right] +$$
$$+ \frac{a^2}{4fk} \left[\frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} + \frac{3 \sin \theta}{2 \cos^2 \theta} + \frac{3}{2} l \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right) \right],$$

а E и F должны быть так определены, что при $\varphi = \theta$

как x, так и y исчезнут. Таким образом, будет с приближением

$$a = \frac{-2b\cos^2\theta}{g} + \frac{2bb}{ggk}\left[\sin\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\theta\right)\right] +$$
$$+ \frac{2b^3}{g^3fk}\left[\sin\theta\cos^2\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\cos^4\theta + \frac{3}{2}\cos^6\theta l\,\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\theta\right)\right],$$

откуда будет найдено значение a.

Если надо отсюда найти дальность выстрела EF, положим $y=0$, откуда, кроме значения $\varphi=\theta$, найдем еще другое со знаком минус. Однако уравнение будет настолько сложным, что отыскание этого угла может быть выполнено только путем приближения и то с помощью пространнейших вычислений. Но когда этот угол φ найден, следует его подставить в выражение для x; и тогда полученное значение x будет искомой дальностью выстрела EF.

Можно найти и другое приближенное уравнение между x и y, которое будет иметь вид:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{gxx}{4b\cos^2\theta} - \frac{gx^3}{12bk\cos^3\theta} + \frac{ggx^4\sin\theta}{96bbk\cos^4\theta} -$$
$$- \frac{x^3}{6fk\cos^3\theta} + \frac{gx^4\sin\theta}{16bfk\cos^4\theta} - \frac{gx^4}{48bkk\cos^4\theta} - \frac{x^4}{24fkk\cos^4\theta} \pm \text{и т. д.}$$

Если сопротивление очень мало, это уравнение будет довольно точно выражать природу кривой линии. Следовательно, дальность выстрела EF будет найдена из этого уравнения как значение корня x:

$$0 = \sin\theta - \frac{gx}{4b\cos\theta} - \frac{gxx}{12bk\cos^2\theta} - \frac{x^2}{6fk\cos^2\theta} \pm \text{и т. д.}$$

Отсюда получаем дальность выстрела

$$EF = \frac{4b\sin\theta\cos\theta}{g} - \frac{16bb\sin^2\theta\cos\theta}{3ggk} - \frac{32b^3\sin^2\theta\cos\theta}{3g^3fk}.$$

Так как в этом случае g незаметно отличается от 1, то получим:

$$EF = 2b\sin 2\theta\left(1 - \frac{4b\sin\theta}{3k} - \frac{8bb\sin\theta}{3fk}\right),$$

где, как было приведено выше,

$$k=\frac{4}{3}nc \text{ и } f=2h.$$

Поэтому

$$EF=2b\sin 2\theta\left[1-\frac{b(b+h)\sin\theta}{nch}\right],$$

где $2b\sin 2\theta$ обозначает дальность выстрела при отсутствии сопротивления. Поэтому дальность выстрела в безвоздушном пространстве будет относиться к дальности выстрела в воздухе, как

$$1 \text{ к } 1-\frac{b(b+h)\sin\theta}{nch}.$$

Чем, следовательно, больше угол θ, под которым будет стрелять пушка, тем будет меньше дальность выстрела по сравнению с той, которая была бы при полном отсутствии сопротивления.

Если направление пушки с горизонтом составляет угол в 45°, то наибольшая дальность выстрела все же не получится, так как вследствие сопротивления этот угол следует взять несколько меньшим. Если искать обычным способом такой угол θ, под которым ядро должно упасть дальше всего на горизонтальную плоскость, то найдем приблизительно:

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{b(b+h)}{8nch}.$$

Однако эти формулы могут применяться только в тех случаях, когда nc значительно больше b. А во всех опытах, приведенных автором, b значительно больше nc; поэтому выполненное здесь приближение не может быть использовано ни в одном из приведенных автором примеров. По этой причине мы вынуждены прервать здесь это исследование и предоставить автору полное изложение этого вопроса, что он и обещал дать нам в отдельной работе.

СЕДЬМОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Ядра при полете не только притягиваются силой тяжести вниз, но и отклоняются другими силами в стороны: вправо или влево

Если бы действительно было так, что ядра в своем движении уклонялись бы единственно только силой тяжести, то их отклонения от цели, по которой производится стрельба, смотря по тому, куда они идут в сторону — вправо или влево, были бы пропорциональны расстоянию пушки от цели. Но этому противоречит повседневный опыт. Так, если на расстоянии в 30 футов ядро отклонилось от цели не более чем на один дюйм, то это не значит, что на расстоянии в 300 футов оно отклонится в сторону от цели только на 10 дюймов, и тем более — на расстоянии в 900 футов только на 30 дюймов. Такое возрастание отклонений при стрельбе на большие расстояния безусловно наблюдаемо всеми, хотя бы немного практиковавшимися в стрельбе. Этому нельзя найти никакой другой причины, как только ту, что траектория ядра искривлена так же в сторону, как и книзу, и, таким образом, отклонение траектории ядра от цели возрастает в большей степени, чем удаление ядра от пушки. А именно, если сопоставить траекторию ядра прямой линии, по которой наведена пушка, то у дула пушки обе эти линии соприкасаются между собой, а затем все больше и больше отходят одна от другой, как обычно бывает у всех кривых линий, соприкасающихся с прямой.

Чтобы убедить в справедливости этих положений и тех, которые сами в этом не имеют собственного опыта, я приведу несколько опытов, которые помогут рассеять всякие сомнения.

Я взял мушкетный ствол, который стрелял пулей диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма, и закрепил его на тяжелом станке с тем, чтобы он все время сохранял одно и то же положение и направление. Но чтобы быть вполне уверенным в его неподвижности, я выстрелил из него 16 раз подряд в доску, которая имела $1\frac{1}{7}$ [300] фута в квадрате и была установлена на расстоянии 180 футов, и нашел, что пуля пролетела мимо доски только один раз. После этого я снова закрепил ствол на этом же станке, но уменьшил заряд пороха с тем, чтобы сделать, по возможности, незначительными сотрясения и происходящие от этого изменения в положении ствола, и затем стрелял в цель, которая была удалена на 2260 футов. При этих выстрелах я обнаружил, что пули отклонялись и вправо и влево от цели иногда на 300 футов. На таком расстоянии движение и в вертикальной плоскости было бы таким же изменчивым, потому что пули иногда падали на землю на 600 футов дальше или ближе, хотя я путем тщательного обследования не обнаруживал после каждого выстрела ни малейшей перемены в положении и направлении ствола.

Это обстоятельство совершенно неоспоримо доказывает правильность нашего Предложения, потому что движение пули никоим образом не могло бы быть столь неустойчивым и изменчивым, если бы ее траектория не искривлялась как внизу, так и в стороны: или вправо, или влево.

ДОПОЛНЕНИЕ

Теперь, поскольку неоспоримо доказано, что траектория ядра имеет двойную кривизну, возникает вне всяких сомнений вопрос: что может быть причиной такого разнообразного движения, которое мы тут до сих пор наблюдали? Я отвечу на это, что такие отклонения вызваны, безусловно, той силой, которая оказывает влияние на движение ядра под углом, и что эта сила может быть найдена не в чем ином, как в сопротивлении воздуха. Если меня спросят дальше: каким образом сопротивление воздуха может влиять на движение ядра всякий раз под углом? Я отвечу, что иногда это, может быть, вызывается неправильной формой ядра, главным же образом причиной этого является собственное вращательное движение ядра, потому что если это вращение соединено с поступательным движением ядра, то каждая часть поверхности ядра должна наталкиваться на воздух в совершенно другом направлении, чем это происходило бы при полном отсутствии такого вращательного движения. Перекос в направлении сопротивления воздуха, вызванный этой причиной, будет становиться тем больше, чем быстрее в отношении поступательного движения вращается ядро вокруг самого себя или вокруг оси, проходящей через его центр.

На этом я довел до конца все то, что был намерен изложить в своей работе, а именно то, что относится как к силе пороха, так и к сопротивлению воздуха. Но так как в артиллерии чрезвычайно важно иметь понятие о сопротивлении твердых тел для изучения вопроса о проникании ядер и особенно при брешировании, то я и закончу эту работу относящимся сюда Предложением, которое будет еще здесь вполне уместно.

ПЕРВОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Каждое твердое тело может находиться в двоякого рода движении: во-первых, когда все тело целиком перемещается из одного положения в другое, и это будет называться поступательным движением тела. Другое движение вращательное, в котором тело вращается вокруг самого себя или около оси, проходящей через центр его фигуры. Здесь речь идет только о твердых телах, потому что мягкие или гибкие, или даже жидкие тела могут, кроме этих двух, иметь еще бесчисленное множество другого рода движений. Твердое же тело может иметь или только поступательное движение, или одно только вращательное движение, или оба движения вместе. Если такое тело находится единственно только в поступательном движении, то все его частицы перемещаются не только одинаково быстро, но и направления движения всех частиц параллельны между собой. К такого рода движению относится первый основной закон механики, которым устанавливается, что всякое тело, приведенное в такое движение, движется непрерывно с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении, пока на него не действует никакая внешняя сила и не изменяет его состояния; отсюда в свою очередь следует, что если изменены или скорость или направление движения тела, то, значит, на это тело обязательно воздействовала какая-то внешняя сила.

Затем тело может, не меняя своего места, находиться во вращательном движении, в котором оно будет вращаться около некоторой оси. В этом движении ось остается неподвижной, а все частицы тела движутся вокруг нее, и скорости их будут тем больше, чем дальше отстоят они от оси. Если эта ось закреплена, то такое движение можно легче всего представить себе на примере токарного станка; тело, однако, может двигаться и около оси, которая нигде не закреплена, но для этого требуются два условия: во-первых, чтобы ось проходила через центр тяжести тела, и во-вторых, чтобы центробежные силы удерживали в равновесии все его частицы. Там, где имеют место оба эти условия, оказывается действительным вышеупомянутое правило о том, что такое движение непрерывно продолжается равномерным и не испытывает никакого изменения, если тут не появится какая-либо внешняя сила. Если же центробежные силы не находятся в равновесии, то хотя движение тела и будет продолжаться, однако ось, около которой оно происходит, будет сама подвижной, и вращение будет происходить все время около переменной оси. Если шар сделан из вещества одинаковой повсюду плотности, то центробежные силы будут всегда в равновесии, если только ось шара проходит через его центр фигуры, и, следовательно, такой шар может находиться непрерывно в равномерном движении около той линии, которая проходит через его центр фигуры.

Оба эти движения, а именно поступательное и вращательное, столь различные между собой, могут оба одновременно иметь место для одного и того же тела, нисколько не мешая одно другому; каждое из них под действием внешних сил может быть совершенно изменено, не вызвав этим ни малейшего изменения в другом.

Пример такого двоякого рода движения в одном теле представляет нам земной шар, который, во-первых, в своем поступательном движении в течение года движется вокруг Солнца и в то же время неизменно оборачивается в течение 24 часов около своей оси. В земном шаре наблюдается также смещение его оси, которая отклоняется ежегодно на 50 секунд в обратную сторону.

Итак, если тело, кроме поступательного движения, совершает также движение около своей оси, которая проходит через его центр тяжести и которая, следовательно, такова, что все центробежные силы находятся в равновесии, то оба они одновременно будут непрерывно продолжаться и не будут испытывать никаких изменений, если только на тело не будут действовать никакие внешние силы.

Главный вопрос заключается теперь в том, какие силы могут сообщать телу только поступательное движение или только вращательное или оба движения вместе.

Если направление силы проходит через центр тяжести тела, то она вызывает только поступательное движение. Если тело до этого находилось в покое, то ему будет сообщено движение в том самом направлении, по которому направлена сила; а если тело перед этим уже находилось в поступательном движении, то оно будет двигаться или быстрее или медленнее или же изменит свое направление, смотря по тому, будет ли направление силы идти по направлению движения, обратно ему, или под углом к нему. Если же тело, кроме поступательного движения, уже имело еще и вращательное, то последнее останется совершенно неизмененным силой, которая проходит через центр тяжести.

Если направление силы проходит не через центр тяжести тела, то вследствие этого прежде всего поступательное движение изменяется таким образом, как если бы такая же самая сила проходила через центр тяжести в параллельном направлении. Но, кроме того, от такой силы телу будет сообщено еще вращательное движение около оси, которая проходит через его центр тяжести и перпендикулярна к плоскости, проведенной через этот центр и направление силы. Если же тело перед этим уже имело вращательное движение около этой оси или около какой-либо другой, то это движение будет ускорено или замедлено, причем в последнем случае будет также изменена и самая ось.

Но если на тело одновременно действуют две или больше сил, то следующим образом найдем, какие движения и изменения должны возникнуть от этого в теле. Прежде всего представим себе, будто все эти силы проходят каждая по своему направлению через центр тяжести и преобразуем их в одну-единственную силу, по которой определится возникновение и изменение поступательного движения. Если случится так, что все эти силы взаимно уничтожатся, то в поступательном движении не произойдет никаких изменений. Что же касается вращательного движения, то мы отыскиваем моменты всех этих сил по их действительным направлениям, умножая силы на их расстояния от центра тяжести, и, уравновесив их, находим, какая должна быть ось и какова сила вращательного движения тела. Отсюда, следовательно, можно определить либо возникновение вращательного движения, если тело перед этим не имело его, или изменение вращательного движения, если тело его уже имело.

Изложив эти основные положения, мы теперь исследуем более точно, какое движение сообщается ядру, которое выброшено из пушки силой пороха, и как затем оно изменяется под действием сопротивления воздуха. Мы, прежде всего, предположим, что ядро совершенно сферическое и что его центр тяжести совпадает с центром его фигуры. В этом случае движущая сила пороха не только проходит через центр тяжести ядра, но и совпадает с осью канала; поэтому ядру будет сообщено единственно только поступательное движение вдоль оси канала. Ядро, следовательно, получит то самое движение, которое мы с автором вывели для него, и от силы пороха оно не получает вращательного движения. Но так как ядро движется внутри канала пушки, испытывая при этом трение, направление которого проходит не через центр тяжести ядра, а вне его, то от этого ядру будет сообщено вращательное движение или качение, если этому не будет препятствовать пыж. Но так как обычно пыж забивают очень туго, то трение слишком незначительно, чтобы ядру могло быть сообщено такое движение качения. Таким образом, ядро вылетает в воздух, обладая единственно только поступательным движением, а там оно подчинено уже частью силе тяжести, частью сопротивлению. Первая сила проходит всегда через центр тяжести и, следовательно, действует только на поступательное движение, направление которого под ее действием будет отклоняться вниз. Сила сопротивления в данном случае также проходит через центр тяжести ядра и, следовательно, тоже не вызывает никакого вращательного движения. И так как она совпадает с направлением движения ядра, то оно и не выйдет из той вертикальной плоскости, в которой началось движение. Отсюда ясно, что если ядро совершенно сферическое и центр тяжести находится в центре его фигуры, то его движение должно происходить точно так, как этого требует теория, а именно, ядро будет двигаться в вертикальной плоскости, не отклоняясь от нее ни вправо, ни влево.

Следовательно, если цель, в которую стреляют, находится в этой же вертикальной плоскости, то выстрел может пройти мимо не иначе, как если только он идет выше или ниже. Если же вертикальная плоскость, в которой движется ядро, не проходит через цель, то выстрел также должен пройти стороной и тем больше, чем больше цель удалена от пушки, а именно, угол, который прямая линия, проведенная от пушки к цели, образует с вышеупомянутой вертикальной плоскостью, будет один и тот же. Поэтому если ядро, например, отклоняется вправо от цели, то все выстрелы, которые будут произведены без изменения направления пушки, отклонятся одинаково далеко вправо от цели, если даже будет увеличен или уменьшен заряд. Итак, если при большом числе выстрелов, произведенных из закрепленного ствола, направление которого не может быть изменено, отклонение происходит то вправо, то влево, и при больших расстояниях возрастает в бо́льшем отношении, чем само расстояние, то автор правильно заключает, что траектория пули не была в вертикальной плоскости, и что она, следовательно, должна была иметь двоякую кривизну.

Теперь мы рассмотрим ядро, которое, хотя и совершенно сферическое, но центр тяжести которого находится вне центра его фигуры. Пока такое ядро подвержено действию силы пороха в канале пушки, направление этой силы проходит через центр фигуры ядра и параллельно оси пушки, и оно, следовательно, приходит в такое же поступательное движение, как и в предыдущем случае; и если это направление проходит также через центр тяжести, то никакого вращательного движения не возникнет. Но если центр тяжести ядра лежит вне этой линии, по которой действует сила пороха, то ядру сразу же будет придано вращательное движение около центра тяжести. А так как от этого движения центр фигуры ядра быстро переместится на противоположную сторону относительно центра тяжести, вращательное движение ядра этой силой опять прекратится, так что непрерывного вращательного движения ядра никак не может быть. То же положение оказывается и когда ядро уже выброшено из канала, потому что направление сопротивления проходит через центр фигуры ядра и, так как оно прямо противоположно движению ядра, то поступательное движение ядра изменится так же, как и в предыдущем случае. Но, сверх того, ядро получает вращательное движение около центра тяжести, вследствие чего центр фигуры переместится назад. А как только центр фигуры начнет опять перемещаться вперед, сила сопротивления начнет действовать в направлении, обратном предыдущему, и будет, таким образом, замедлять возникшее уже вращательное движение, пока оно, наконец, совсем не прекратится, и ядро будет двигаться так, что центр его фигуры будет устойчиво удерживаться позади центра тяжести. Отсюда следует, что в конце концов более тяжелая половина ядра, в которой находится центр тяжести, будет постоянно обращена вперед, а более легкая будет позади; это обстоятельство всегда можно заметить в действительности. В этом случае, следовательно, ядро также не будет выходить из той вертикальной плоскости, в которой началось движение. Поэтому такое отклонение не может происходить ни от какой другой причины, как только от недостаточно совершенной сферической формы.

Если ядро не совершенно сферическое, то может случиться, что направление силы пороха не только не проходит через центр тяжести ядра, но даже не будет параллельно оси пушки. В первом случае ядру было бы сообщено вращательное движение, которое, однако, скоро должно было бы прекратиться, как это было доказано в предыдущем случае. Но последний случай особенно примечателен, если иметь в виду приводимые автором обстоятельства: ядро здесь движется не вдоль оси пушки, а по направлению движущей силы. Таким образом, ядро будет ударяться о внутренние стенки пушки, отскакивать от них обратно и подобным образом оказывать на пушку немалое воздействие. Это как раз тот случай, о котором мы упоминали выше, когда пушка, если даже она будет высверлена совершенно по прямой линии, может, однако, разорваться единственно только от ударов ядра; отсюда еще яснее представляется необходимость совершенной сферической формы пушечных ядер.

Но когда такое не вполне сферическое ядро вылетает из пушки, то, кроме того, что его направление уже несколько отклонено от оси пушки, его движение будет изменяться под действием сопротивления воздуха совершенно иначе, чем если бы ядро было совершенно сферическим. Это происходит потому, что поскольку сопротивление воздуха обращено на поверхность ядра, оказывается не только возможным, что направление сопротивления и направление движения будут различны, но был бы очень редким такой случай, когда оба эти направления совпали бы одно с другим. Может, следовательно, так случиться, что ядро будет отброшено сопротивлением вверх или вниз сильнее, чем это было бы в других случаях. И отсюда совершенно ясно, почему одно ядро может иногда падать на землю на несколько сотен шагов ближе или дальше, чем другое, хотя оба выброшены из одного и того же ствола, в одинаковом направлении и одним и тем же зарядом. Но если направление сопротивления расположено не в вертикальной плоскости, в которой началось движение, то ядро из-за этого будет отнесено в сторону: вправо или влево. И если ядро при этом не вращается, то сила сопротивления будет его непрерывно отклонять от упомянутой вертикальной плоскости; поэтому чем дальше, тем ядро будет все больше относиться в сторону, так, что чем дальше будет брошено ядро, тем больше окажется его отклонение от цели. А именно, при двойном расстоянии отклонение ядра от цели будет не только вдвое, даже не только втрое больше того отклонения, которое могло бы быть, если бы ядро, пролетев первую половину пути, более не относилось бы в сторону; оно должно было бы быть вчетверо больше, если бы сила, относящая ядро в сторону, оставалась все время одинаковой по величине. И хотя сила уменьшается вместе со скоростью ядра, но отклонение увеличивается, пусть и несколько меньше чем в четыре раза, но во всяком случае больше чем в три раза.

Следовательно, подлинная причина неточности выстрелов заключается только в отсутствии точной сферической формы ядра, и вращательное движение ядра ничего существенного не может внести, как это полагает автор. Наоборот, если ядро при своем полете будет вращаться, то сила сопротивления должна будет менять направление то вправо, то влево и, таким образом, выстрелы на большом расстоянии будут такими же неточными, как и на малом. Однако, как бы ни была велика неточность выстрелов, которую приводит автор, не следует все же думать, что она должна быть столь же большой и для пушечных ядер, потому что автор ставил свои опыты со свинцовыми пулями, которые обычно не только сами по себе весьма значительно отступают от сферической формы, но и могут еще больше изменить ее в канале. Пушечные ядра, напротив, имеют обычно более совершенную сферическую форму, и так как они чугунные, то форма их не так легко может быть изменена и в канале пушки. По этой причине, следовательно, пушечная стрельба в своем роде гораздо точнее мушкетной стрельбы свинцовыми пулями. Но из этого должны быть исключены, по-видимому, выстрелы из нарезных стволов и по той самой причине, которой автор вообще объясняет неточность выстрелов, потому что пули в нарезных стволах получают вращательное движение, которое продолжается все время вместе с поступательным; таким образом, всякое сопротивление, которым пуля отбрасывается вверх или в сторону, переходит в противоположное, в то время как пуля совершает вращение; поэтому в данном случае неправильная форма пули не может повлечь за собой такую большую неточность, как если бы пуле вовсе не было сообщено вращательное движение.

ВТОРОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Итак, мы открыли бесспорную причину неточных выстрелов, которые автор приводит в этом Предложении и дает очень сомнительное объяснение, в то время как мы доказали, что это зависит исключительно от формы пули; так, если пуля будет совершенно сферическая, то даже в том случае, когда центр тяжести не совпадает с центром ее фигуры, отклонение пули в сторону от цели не может быть значительным. И если бы в этом случае пуля летела в сторону от цели, это было бы верным доказательством того, что цель находится не в той вертикальной плоскости, в которой расположена ось пушки или ружья. Если же пуля не совершенно сферическая, то мы доказали, что она в большинстве случаев отклоняется от своего направления в одну сторону и должна при этом отклоняться тем дальше от цели, чем больше удалена цель от ружья. Это отклонение не только не будет увеличено вращательным движением пули, но, если бы пуля обладала этим движением, неточность выстрела была бы не так велика.

Хотя автор, по-видимому, утверждает противоположное, но, помимо соображений, изложенных выше, мы можем также доказать, что под влиянием вращательного движения пули сила сопротивления изменяется весьма незначительно и остается все время почти такой же, какой она была бы, если бы пуля не имела вовсе вращательного движения. Хотя и верно, как замечает автор, что такое вращательное движение изменяет как скорость, с какой каждая точка пули наталкивается на воздух, так и угол, под которым происходит этот удар, однако, прежде всего, направление силы удара остается всегда перпендикулярным к поверхности пули. Кроме того, так как сила удара всегда пропорциональна квадрату скорости, умноженному на квадрат синуса угла, под которым происходит удар, то почти всегда синус этого угла бывает несколько больше или меньше, смотря по тому, уменьшается или увеличивается скорость; поэтому сила удара остается приблизительно одинаковой, имеет ли пуля вращательное движение или нет. Это равенство почти возможно, если форма пули не очень отличается от совершенного шара и если ось, около которой происходит вращательное движение, проходит почти через центр ее фигуры. Если же пуля совершенно сферическая и вращается около оси, проходящей через центр ее фигуры, то действие сопротивления будет совершенно одинаковым независимо от того, имеет ли пуля вращательное движение или не имеет.

Нам необходимо доказать только это последнее, потому что в случае справедливости его само собой следует, что если форма пули не очень отличается от совершенного шара, а ось вращения проходит почти через центр ее фигуры, то неодинаковость сопротивления, если даже она не исчезает, как в первом случае, все же не может быть очень значительной. Итак, для ясности доказательства рассмотрим совершенно сферическое ядро, которое, кроме поступательного движения, еще вращается около оси, проходящей через центр его фигуры, причем безразлично, будет ли эта ось постоянной или непостоянной. Здесь прежде всего заметим, что если бы ядро не имело поступательного движения, то оно не испытывало бы от воздуха никакого другого сопротивления, как только то, которое могло бы возникнуть от трения частиц, но которое так незначительно, что им можно вполне пренебречь. Так, если ядро не имеет поступательного движения, то центр его фигуры совершенно неподвижен, и так как все частицы поверхности остаются все время одинаково удаленными от центра фигуры, то в них и не может возникнуть такое движение, которое вызвало бы действительное столкновение с частицами воздуха. В этом случае частицы воздуха не обладают никаким другим движением, как только увлекаются слабым трением, и поэтому они также

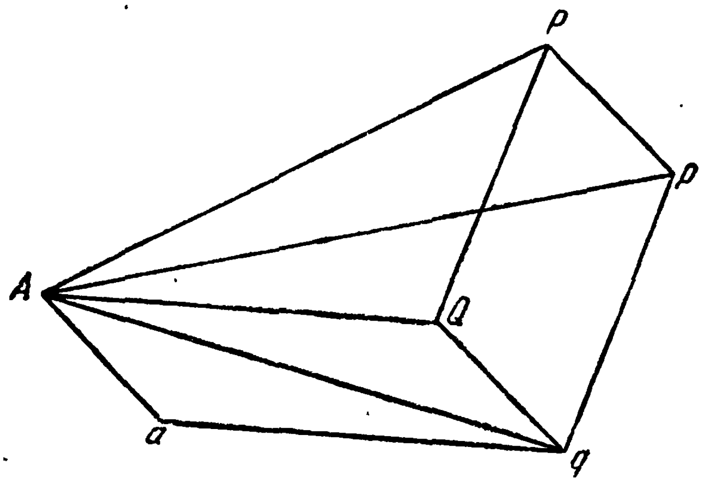

Рис. 26.

не могут оказать никакого воздействия на вращательное движение ядра. Если же ядро имеет поступательное движение, то, как было указано выше, можно всегда представить себе дело так, как если бы ядро не имело никакого поступательного движения, а, наоборот, в него ударял бы с такой же скоростью воздух, потому что в обоих случаях сила, возникшая от удара частичек воздуха, будет одинаковой.

Итак, представим себе ядро с неподвижным центром фигуры, около которого оно и вращается, и допустим, что на это ядро с определенной скоростью движется воздух. Пусть на рис. 26 плоскость листа бумаги [301] в точке A касается ядра, а воздух ударяет в эту точку ядра A по направлению PA. Представим скорость воздуха в виде отрезка PA, опустим из точки P на неподвижную плоскость перпендикуляр PQ и проведем линию AQ. Если бы ядро не имело никакого вращательного движения, то сила удара воздуха была бы равна квадрату отрезка PA, которым обозначена скорость воздуха, умноженному на квадрат синуса угла PAQ, образуемого направлением движения воздуха PA в этой точке A с поверхностью ядра. Так как синус угла PAQ выразится через $\frac{PQ}{PA}$, то сила воздуха, действующая на точку A, будет выражена через

$$PA^2 \frac{PQ^2}{PA^2},$$

т. е. через PQ^2.

Если же ядро имеет вращательное движение и при этом центр его фигуры неподвижен, то точка A не может иметь никакого другого движения, как только в направлении, которое лежит в касательной к ядру плоскости, представленной плоскостью медной доски [302]. Пусть, таким образом, Aa будет направлением, по которому движется точка A, и примем Aa столь большим, что PA относится к Aa, как скорость воздуха к скорости точки A. Чтобы теперь определить действие, оказываемое воздухом, движущимся в направлении PA, на точку A, движущуюся в направлении Aa, надо только мысленно представить себе, что движением точки A обладает и воздух, что получится, если мы проведем Pp, параллельную Aa и равную ей по величине, поскольку действие воздуха на точку A будет таким же, как если бы она стояла неподвижно, а воздух действовал бы на нее в направлении линии pA со скоростью, представленной отрезком pA. Следовательно, нужно умножить квадрат этой скорости или отрезка pA на квадрат синуса угла, образуемого этой линией pA с касательной плоскостью. Чтобы найти этот угол, опустим из точки p на касательную плоскость перпендикуляр pq, что будет, если положим, что Qq равно и параллельно Aa. А так как Qq тоже равно и параллельно PQ, и линия pq тоже параллельна линии PQ, то должно быть

$$pq = PQ$$

и дробь $\frac{pq}{pA}$ должна выразить синус угла pAq, под которым воздух ударяет в движущуюся точку A [303]. Поэтому сила этого удара будет выражаться через

$$pA^2 \frac{pq^2}{pA^2},$$

т. е. через pq^2. Так как $pq=PQ$, то сила воздуха, действующая на движущуюся точку A, такова, какой она была бы и в том случае, если бы точка A вовсе не находилась в движении.

Хотя от движения точки A изменяется как скорость ударяющего в нее воздуха pA, так и угол pAq, под которым происходит этот удар, но все же оба эти изменения происходят так, что возникающая от этого сила получается одной и той же. То, что здесь доказано для точки A поверхности ядра, относится равным образом ко всем другим ее точкам; следовательно, этим самым бесспорно подтверждается наше положение о том, что совершенно сферическое ядро, которое, кроме поступательного движения, вращается около центра своей фигуры, испытывает со стороны воздуха то же самое сопротивление, как если бы оно не имело вращательного движения.

Следовательно, если такое ядро, будучи еще в пушке, кроме поступательного, получает и вращательное движение около центра своей фигуры, то в воздухе оно будет продолжать двигаться так, как если бы оно не имело никакого вращательного движения. И так как у совершенно сферического ядра поступательное движение никоим образом не будет изменено вращательным движением, то отсюда ясно, что, если у ядра не вполне сферического и возникнет изменение сопротивления, вызванное вращательным движением, оно все-таки не могло бы быть очень значительным, и ядро продолжало бы двигаться почти так же, как если бы оно не имело вовсе вращательного движения. Поэтому ни в каком случае поступательное движение ядра не может быть заметно изменено вращательным движением.

ВОСЬМОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Если ядра одинаковой величины и одинакового веса ударяют с различными скоростями в одно и то же твердое тело и проникают в него, то различные глубины, на которые проникнут ядра, относятся между собою приблизительно как квадраты их скоростей, и сопротивление таких твердых тел прониканию ядра всегда одинаково

В правильности первой части этого Предложения я убедился путем очень большого числа опытов, поскольку, стреляя в вязовую колоду свинцовой пулей диаметром в $\frac{3}{4}$ дюйма, обладавшей скоростью около 1700 футов в секунду, я на основании большого числа опытов нашел, что она проникала вглубь на $4\frac{1}{2}-5\frac{1}{2}$ дюймов. Когда же я стрелял в эту самую колоду такой же пулей, но обладавшей скоростью около 730 футов в секунду, тыльная сторона пули уходила в древесину приблизительно на $\frac{1}{4}$ дюйма, так что в этом случае глубина проникания составляла в среднем около одного дюйма; но если рассматривать весь объем пробоины и представить его в виде цилиндра, то он будет длиной около $\frac{7}{8}$ дюйма[304]. Если же скорость пули была не больше чем 400 футов в секунду, то в дерево обычно проникала только приблизительно половина пули, что составляло по цилиндру четвертую часть дюйма в глубину. Квадрат этих трех различных скоростей относятся между собой приблизительно как числа: 55, 10 и 3. Если мы теперь за наибольшее углубление, которое было получено при самой большой скорости, будем считать 5 дюймов, то по приведенному отношению квадратов скоростей найдем, что углубления, которые были получены при обеих незначительных степенях скорости, должны составить $\frac{10}{11}$ и $\frac{3}{11}$ дюйма; эти числа незначительно разнятся от найденных опытом $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{4}$. Нельзя ожидать более точного согласования подобных опытов с теорией, если принять во внимание неодинаковость в соединениях между частицами древесины, а также изменения в форме пули, вызванные ударом.

Так как глубина пробоин пропорциональна квадратам скорости ударяющего тела, то одинаковость сопротивления, оказываемого деревом, легко доказать на тех же основаниях, на которых обычно доказывают одинаковость действия силы тяжести из свойства скоростей, квадраты которых пропорциональны высотам, с которых тело падает вниз. Это ясно также и из поднятия тела, брошенного прямо вверх, потому что в этом случае высота, которая достигается телом, всегда пропорциональна квадрату скорости, с какой тело вначале брошено вверх.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если тело брошено в неподвижную стену или в вал, то оно либо отскакивает назад, либо проникает вглубь до тех пор, пока его скорость не будет уничтожена сопротивлением. Отражение происходит в том случае, если и ударяющее тело и вал совершенно упруги или наделены силой, благодаря которой способны снова восстанавливать свою прежнюю форму после того, как в них произошли изменения. Там, где этой способности нет, ядро проникает вглубь до тех пор, пока не утратит всё движение и тогда остановится. В обоих случаях ядро оставляет след: в первом случае он затем исчезает, а в последнем остается после удара; отсюда и возникает разница между упругими и неупругими телами. Но между этими двумя видами тел находится еще бесконечное множество промежуточных видов, смотря по тому, больше или меньше в них способности восстанавливаться; конечно, можно почти с уверенностью утверждать, что во всем мире нет совершенно упругого тела, так же как и такого, которое было бы совершенно лишено упругости, потому что, каким бы упругим ни казалось тело, всегда возможно, что на нем останется хоть незначительный след от каждого надавливания; и также не встречали такого тела, которое после надавливания не восстановило бы до известной степени своего вида. Но для объяснения настоящего Предложения мы рассмотрим единственно только то действие, которое происходит, когда сталкиваются между собою два тела, и которое происходит во всех случаях, безразлично, обладают ли эти тела упругостью или нет; и в этом отношении безразлично, останется ли этот след от действия неизменным или же он исчезнет целиком или только частично. Между тем, насколько все-таки известно из опыта, ядро, попав в вал или в деревянную стену, застревает там и ничуть не отскакивает назад. Поэтому, если эти тела даже и обладают упругостью, то ею здесь наверняка можно полностью пренебречь.

Если ядро попадает в такое тело, то оно не только вдавливается в него, но и проникает внутрь на известную глубину, а так как это не может происходить без большого сопротивления, то движение ядра мало-помалу замедляется и, наконец, совсем прекращается. Итак, чтобы определить глубину, на которую ядро может проникнуть вглубь, надо иметь возможность определить сопротивление, которое испытывает ядро в то время, как оно проникает вглубь. Будет ли то стена или вал из дерева или из земли, но очевидно, что ядру, для того чтобы проникнуть туда, требуется тем бо́льшая сила, чем больше пробоина, которую требуется там проделать. И так как в этих случаях упругость ничтожна, ядро, проникнув уже на известную глубину, встретит и там такое же сопротивление, как и вначале. Поэтому такое сопротивление является постоянной или одной и той же силой, которая не зависит от скорости и, следовательно, в этом отношении оно напоминает силу тяжести, под действием которой брошенное вверх тело в равные времена всегда одинаково теряет в своей скорости, будет ли эта скорость велика или мала. Величина этой силы зависит тут прежде всего от прочности материала стены или вала, а затем также и от площади отверстия, которое там проделало ядро и которое пропорционально квадрату диаметра ядра.

Если, таким образом, положим, что диаметр ядра равен c и через f обозначим прочность вала, тогда сопротивление будет пропорционально величине ccf. Итак, мы положим, что эта сила сопротивления равна весу водяного столба, высота которого равна f и который имеет одинаковое сечение с ядром, потому что это предоставляет нам возможность определять эту силу по желанию, лишь бы во всех разнообразных случаях было соблюдено правильное соотношение с величиной f. Затем мы положим, что вес вещества, из которого состоит ядро, относится к весу воды, как n к 1. Через b мы обозначим высоту, при падении с которой будет приобретена та же скорость, с которой ядро в начальный момент ударяет в вал; а ту скорость, которая будет после того, как оно уже проникнет на глубину x, обозначим через $\sqrt{v}$. Так как вес ядра равен весу цилиндра воды одинакового сечения и высотой $\frac{2}{3}nc$, то сопротивление будет относиться к весу ядра, как f к $\frac{2}{3}nc$, т. е. как

$$\frac{3f}{2nc} \text{ к } 1.$$

Отсюда, после того как ядро проникло на бесконечно малое расстояние, получаем следующее уравнение:

$$dv = -\frac{3f\,dx}{2nc},$$

и, следовательно,

$$v = b - \frac{3fx}{2nc}.$$

Но ядро, проникая вглубь, продолжает двигаться до тех пор, пока не утратится совершенно его движение, т. е. до $v=0$. Если поэтому глубина пробоины, которую могло проделать в валу ядро при своем движении, будет a, то получаем следующее уравнение:

$$b = \frac{3af}{2nc} \text{ или } a = \frac{2ncb}{3f}.$$

Эту глубину, вес ядра и квадрат его скорости надо перемножить и разделить на квадрат диаметра ядра и прочность вала. Если, следовательно, по тому же самому валу стрелять одинаковыми ядрами, то глубины пробоин будут относиться между собой, как квадраты скоростей ядер. Так как это подтверждено опытом, то из этого следует, что наши начала, на основании которых сделан этот вывод, должны быть правильны. И далее мы отсюда заключаем, что если ядра неодинаковой величины, но из одного и того же материала попали в тот же самый вал с одинаковой скростью, то глубина пробоин должна быть пропорциональна диаметру ядер. Следовательно, более крупные ядра при одинаковых обстоятельствах не только проделают более широкие пробоины, но и глубже проникнут в них. Если в свою очередь по данным опыта будет найдена глубина, на которую данное ядро при известной скорости проникает в вал, то отсюда можно определить величину f, которой обозначена прочность материала вала, и таким образом можно произвести сравнение всех разнообразных материалов, из которых вообще сооружают валы.

Автор стрелял своими пулями в колоду из вяза, и поэтому мы можем определить значение величины f для древесины вяза. Пуля имела в диаметре $\frac{3}{4}$ дюйма; поэтому $c = 0{,}0625$ английского фута, и так как пуля была свинцовая, то $n = 11{,}35$. Затем, пуля имела скорость 1700 футов в секунду, поэтому будет $b = 44\,900$ английских футов, и, наконец, пуля проникла в дерево на глубину 5 дюймов, т. е. 0,4166 фута. Отсюда из уравнения

$$f = \frac{2ncb}{3a}$$

находим значение

$$f = \frac{22{,}7 \cdot 0{,}0625 \cdot 44\,900}{1{,}25} \doteq 50\,960.$$

Таким образом, мы получили значение f для древесины вяза, по которому можно во всех случаях определить, как глубоко может проникнуть любая пуля.

Но чтобы можно было сравнить прочность этого дерева с прочностью земляного вала, мы допустим, что полукартаунное ядро при полном заряде проникло в глубь такого вала на 15 футов. Так как это ядро чугунное, то $n=7{,}82$, и диаметр ядра $c=0{,}46$ английского фута. Скорость ядра, с которой оно достигает вала, может составить приблизительно 1300 футов в секунду; и тут $b=27\,040$ [[305]]. Так как $a=15$ футов, то $f=4323$ [[306]]. Следовательно, прочность древесины вяза относится к прочности земляного вала приблизительно, как 11,8 к 1 [[307]]. Подобным образом можно сравнивать между собой прочность всех других материалов, проделав с ними такие же опыты.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТИННОЙ КРИВОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ БРОШЕННЫМИ ТЕЛАМИ В ВОЗДУХЕ ИЛИ В КАКОЙ-ЛИБО ДРУГОЙ СРЕДЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТИННОЙ КРИВОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ БРОШЕННЫМИ ТЕЛАМИ В ВОЗДУХЕ ИЛИ В КАКОЙ-ЛИБО ДРУГОЙ СРЕДЕ [308]

1. После открытия Галилея, что тела, брошенные наклонно в пустоте, всегда описывают параболу, заметили, что это неприложимо к определению движения бомбы или пушечного ядра. Причина этого в том, что вследствие очень большой скорости, с которой эти тела движутся в воздухе, сопротивление воздуха становится настолько значительным по отношению к их весу, что под его действием эти тела весьма значительно отклоняются от параболического пути; таким образом, вычисления, основанные на свойствах параболы, совершенно не могут быть применены в этих случаях. Не следует этому удивляться, так как Галилей в своем исследовании не принимал в расчет других сил, которые действуют на тела, кроме силы тяжести, пренебрегая, таким образом, сопротивлением, которое они испытывают со стороны воздуха.

2. В действительности имеются две силы, действию которых подчинено движущееся в среде [309] тело. Одна — сила тяжести, или вес тела, о котором следует, однако, заметить, что он меньше, чем естественный вес тела, так как уменьшен на вес равного объема среды, в которой происходит движение. Другая сила — сила сопротивления, которая, как известно, пропорциональна квадрату скорости тела; и когда тело — шар, каким

обычно принимают тело [311], направление этой силы прямо противоположно направлению движения тела. Эта сила, следовательно, непрерывно изменяется как по величине, так и по направлению, тогда как первая остается все время одинаковой. Требуется, следовательно, определить кривую, которую должно описывать наклонно брошенное тело, находясь под действием двух сил, о которых я сказал.

3. Хотя этот вопрос легко приводится к чисто аналитической задаче, но великий Ньютон безрезультатно трудился над ней, несмотря на весьма искусные исследования в отыскании ее решения. Он был первым, взявшимся за это, и если иметь в виду достигнутый успех при допущении сопротивления, пропорционального скорости, то кажется почти непостижимым, как он не достиг цели при сопротивлении, принятом пропорциональным квадрату скорости, тогда как до того он разрешил множество вопросов несравнимо более трудных. Покойный г-н Иоганн Бернулли первый дал решение этой задачи [311], и из него он вывел построение кривой посредством квадратур нескольких трансцендентных кривых, описание которых, впрочем, не представляет значительных трудностей.

4. Итак, эта главная задача давно уже решена, и даже очень хорошо решена. Однако решение, каким бы оно ни было хорошим в теории, все же таково, что до настоящего времени от него не могут получить помощи для практики и для исправления ошибок параболической теории, которой все еще придерживаются артиллеристы, хотя они и признают полную ее несостоятельность. Таким образом, верно, что это решение не принесло никакой реальной пользы для совершенствования артиллерии, и кажется, что оно только убедило профессионалов в ошибочности их правил, выведенных из свойств параболы, которыми они еще вынуждены пользоваться. Это в некоторой степени хорошо — знать, что применяемые правила ошибочны, но если не знают достаточно точно, насколько они в каждом случае ошибочны, от этого не получается почти никакой пользы.

5. Сначала кажется, что предпринимаемая работа по установлению новых правил для стрельбы бомбами и пушечными ядрами, правил, которые соответствовали бы истинной кривой, описываемой этими телами в воздухе, будет неисчерпаемой. Так как гипотеза Галилея включает только угол возвышения мортиры и скорость, с которой вылетает бомба, то нетрудно было вычислить таблицы, указывающие для всех возможных случаев как высоту поднятия бомбы, так и точку, в которой она должна упасть на землю. Но если бы хотели составить подобные же таблицы, которые соответствовали бы действительности, необходимо было бы, кроме двух упомянутых элементов, принять еще во внимание как диаметр бомбы или ядра, так и их вес; следовательно, было бы необходимо вычислить такие таблицы для каждого диаметра и всех соответствующих ему весов, что несомненно сделало бы подобную задачу практически невыполнимой.

6. Однако, взвесив хорошенько все трудности, я не нахожу их совершенно непреодолимыми, потому что, как я заметил, многие из случаев, представляющихся различными, могут быть помещены в одну и ту же таблицу; и, несмотря на то, что число случаев продолжает еще оставаться бесконечным, поскольку они соответствуют определенному порядку между собой, все же достаточно вычислить конечное их число, чтобы можно было затем все другие получать посредством интерполяции. Таким образом, вся работа сведется к конечному числу вычисленных таблиц и инструкции, указывающей, как ими пользоваться; и этого будет достаточно для вычисления всех случаев, какие могут представиться в артиллерии, и по ним будут в состоянии находить все почти так же быстро, как и при упрощенной гипотезе Галилея.

7. Чтобы лучше пояснить свою мысль, я начну вывод решения этой задачи из основных начал механики. Итак, прежде всего я рассматриваю действительный вес шара, движение которого требуется определить; и если положить этот вес равным P, то пусть Π будет вес равного объема воздуха или среды, в которой происходит движение. Приняв это, узнаем, что вес этого шара в среде будет равен $P—\Pi$; так как это сила, непрерывно увлекающая шар вниз, то ускорительная сила тяжести [312], действующая на этот шар, будет равна

$$\frac{P-\Pi}{P}=1-\frac{\Pi}{P}.$$

Эта ускорительная сила, следовательно, найдется путем вычитания из единицы дроби $\frac{\Pi}{P}$, которая представляет собою отношение удельного веса среды к удельному весу шара. Следовательно, когда движение происходит в воздухе, если только шар будет из вещества не чрезвычайно легкого, то очевидно, что безошибочно можно принять эту ускорительную силу равной 1; однако, чтобы представить свои исследования в общем виде, я в дальнейшем буду обозначать эту ускорительную силу тяжести через α, и, таким образом,

$$\alpha=1-\frac{\Pi}{P}.$$

8. Переходя к определению сопротивления этого шара, обозначим d его диаметр и v — высоту, с которой тяжелое тело при падении в пустоте приобретает скорость, одинаковую, как мы полагаем, со скоростью движения шара в среде. Положив отношение диаметра к окружности равным $1:\pi$, получим площадь большого круга этого шара равной $\frac{1}{4}\pi\, dd$:, следовательно, его поверхность будет равна $\pi\, dd$ и объем самого шара $\frac{1}{6}\pi\, d^3$, что выражает и объем массы среды, вес которой равен Π, как мы только что приняли. Затем, если площадка, равная площади большого круга $\frac{1}{4}\pi\, dd$, движется прямо [313] в среде со скоростью шара, то известно, что сопротивление будет равно весу среды в объеме цилиндра, основание которого равно $\frac{1}{4}\pi\, dd$ и высота равна v, а следовательно, объем равен $\frac{1}{4}\pi ddv$. Но известно, что сопротивление шара равно только половине сопротивления большого круга [314]; следовательно, сопротивление шара будет равно весу массы среды, объем которой равен

$$\frac{1}{8}\pi ddv.$$

9. А так как вес этой среды объемом $\frac{1}{6}\pi d^3$ равен Π, то ее вес объемом, который мы нашли равным $\frac{1}{8}\pi ddv$, будет

$$\frac{3v}{4d}\Pi,$$

что выражает силу сопротивления, и если ее разделим на массу или вес шара P [315], то получим возникающую в результате сопротивления задерживающую силу, равную

$$\frac{3v}{4d}\cdot\frac{\Pi}{P},$$

и направленную противоположно движению шара. А так как и диаметр шара d, и отношение его удельного веса к удельному весу среды, или P к Π предполагаются известными, я для краткости обозначу

$$\frac{4d}{3}\cdot\frac{P}{\Pi}=c,$$

чтобы представить задерживающую силу сопротивления равной $\frac{v}{c}$. Очевидно, что для воздуха значение дроби $\frac{P}{\Pi}$ выразится всегда очень большим числом; так, если бы шар весил столько же, сколько вода в равном ему объеме, то было бы $\frac{P}{\Pi}=850$ или около того.

10. Отношение между удельными весами шара и среды находится проще всего посредством воды, потому что, зная вес P шара, найдем сначала объем массы воды, вес которой также равен P, поскольку известен вес одного кубического фута воды. Пусть, следовательно, e^3 будет объем этой массы воды весом, равным P, и удельный вес воды относится к удельному весу среды, в которой происходит движение, как 1 к μ, и $\frac{1}{\mu}\cdot e^3$ будет объем этой среды весом, равным P. А Π обозначает вес массы той же среды объемом, равным $\frac{1}{6}\pi d^3$, откуда мы выводим:

$$P:\Pi=\frac{1}{\mu}e^3:\frac{1}{6}\pi d^3$$

или

$$\frac{P}{\Pi}=\frac{6e^3}{\mu\pi d^3};$$

тогда получим:

$$c=\frac{8e^3}{\mu\pi dd}.$$

И, следовательно, если бы движение происходило в воде, то поскольку $\mu=1$, получили бы:

$$c=\frac{8e^3}{\pi dd},$$

а когда движение происходит в воздухе, получим приблизительно:

$$c=\frac{6666e^3}{\pi dd},$$

или

$$c=\frac{2133e^3}{dd}.$$

11. Эта формула будет иметь место, когда шар движется не очень быстро, так что воздух может тотчас свободно заполнять пространство, оставляемое за собой шаром. Но если движение настолько быстрое, что воздух не будет сразу занимать пространство, оставляемое за собой шаром, и в этом пространстве по крайней мере на мгновение образуется пустота, тогда как шар будет испытывать своей передней частью давление атмосферы, неуравновешиваемое давлением сзади, то ясно, что сопротивление увеличится на давление атмосферы на пе-

реднюю часть шара. Итак, приняв k за высоту столба воды, который находится в равновесии с атмосферой, получим, что это давление будет равно весу массы воды, объем которой равен $\frac{1}{4}\pi\, ddk$ и, следовательно, равно весу массы воздуха, объем которого приблизительно равен $213\Pi\, ddk = 669\, ddk$.

12. В этом случае полное сопротивление шара в воздухе будет, следовательно, равно весу массы воздуха, объем которого равен

$$\frac{1}{8}\pi ddv + 213\pi ddk\ [^{316}].$$

Но так как вес шара равен весу воздуха в объеме $850e^3$, то задерживающая сила сопротивления будет равна

$$\frac{\pi ddv}{6666e^3} + \frac{\pi ddk}{4e^3}.$$

А только что положили

$$c = \frac{6666e^3}{\pi\, dd},$$

или

$$\pi\, dd = \frac{6666e^3}{c};$$

следовательно, задерживающая сила сопротивления будет равна

$$\frac{v}{c} + \frac{6666k}{4c} = \frac{v + 1666k}{c}.$$

13. Эта сила будет иметь место в случае, когда скорость шара больше той, с которой воздух вследствие своей упругости проникает в пустое пространство. А так как упругость равна весу столба того же воздуха высотой $850k$, то скорость, с которой воздух будет врываться в пустое пространство, будет соответствовать высоте $850k$; следовательно, во всех случаях, когда $v = 850k$, задерживающая сила сопротивления воздуха будет равна

$$\frac{v + 1666k}{c}.$$

А известно, что при обычном состоянии воздуха k приблизительно равно 33 футам [317]; таким образом, этот случай будет иметь место, когда $v > 28\,050$ футов или когда шар проходит в секунду путь, больший чем 1325 футов.

14. Отсюда легко понять, что, когда v будет меньше $850k$, задерживающая сила сопротивления не будет сразу приведена к $\frac{v}{c}$; и что давление атмосферы на тыльную сторону шара всегда будет меньше, чем на переднюю, что и приведет к увеличению сопротивления. Таким образом, если $v = \frac{1}{2}850k$, задерживающая сила сопротивления будет равна

$$\frac{v + \frac{1}{2}\,1666k}{c},$$

и вообще, когда $v = \frac{1}{n}850k$, эта сила станет почти равной

$$\frac{v + \frac{1}{n}\,1666k}{c},$$

или

$$\frac{3v}{c}\ [318].$$

Однако далеко до того, чтобы найденная величина была точной, потому что она зависит от давления атмосферы на тыльную сторону шара. Необходимо также заметить, что это исследование не вполне строго следует геометрии и что приходится довольствоваться лишь подходящим приближением.

15. Мы поэтому почти не ошибемся, если примем величину задерживающей силы сопротивления равной $\frac{3v}{c}$, хотя она станет неверной, когда $v > 850k$. Но это будет только при очень быстрых движениях, а если последние будут приведены к значению v, меньшему $850k$, то ошибка в результате не будет значительной. Следовательно, если вместо $c = \frac{6666\, e^3}{\pi dd}$ мы примем $c = \frac{2222\, e^3}{\pi dd}$ или $c = 707 \frac{e^3}{d^2}$, задерживающая сила сопротивления будет равна $\frac{v}{c}$, и мы в дальнейшем воспользуемся этой формулой для удобства вычислений; здесь нужно только помнить, что d обозначает диаметр шара и e^3 — объем воды, вес которой равен весу шара.

16. Итак, чтобы определить движение шара, брошенного в воздухе, нужно начать с точного измерения как его диаметра d, так и его веса, а по весу найти объем равного веса воды, который пусть будет равен e^3; тогда получим значение $c=707 \frac{e^3}{d^2}$, на чем должно быть основано вычисление. Отсюда уже видно, что вычисления будут одинаковы для всех шаров, у которых будет одно и то же отношение веса к квадрату диаметра. Однако нельзя отрицать того, что число 707 установлено не слишком твердо и что оно различно ввиду различной температуры воздуха. Но это обстоятельство нужно будет принимать во внимание уже в приложении вычислений к опытам; в самом же вычислении величину c будем считать известной, не обращая пока внимания на то, как она зависит от размеров и веса шара. Переходя затем к практике, найдут из нескольких опытов, какое значение следует дать величине c для любого данного шара и при любом состоянии воздуха.

17. Пусть, следовательно, $CNAMH$ (рис. 1) кривая, описываемая в некоторой среде шаром, ускоряющая сила тяжести которого α, и пусть c — упомянутая величина, от которой зависит сопротивление. Пусть A — наивысшая точка этой кривой и горизонталь BAE — касательная в этой точке; CNA, следовательно, будет частью этой кривой, по которой шар поднимается, и AMH — частью, по которой он опускается. Рассмотрим отдельно движение восходящее и нисходящее, и пусть для последнего абсцисса какой-нибудь взятой на горизонтали точки $AP=x$, которой отвечает вертикальная ордината $PM=y$;

пусть затем v — высота, соответствующая скорости шара в M, и, таким образом, задерживающая сила сопротивления в ней будет равна $\frac{v}{c}$.

18. Если разложим движение тела по направлениям горизонтальному AP и вертикальному PM, то движение по вертикальному направлению будет, прежде всего, ускоренным с ускорительной силой тяжести, равной α. Затем, так как задерживающая сила сопротивления $\frac{v}{c}$

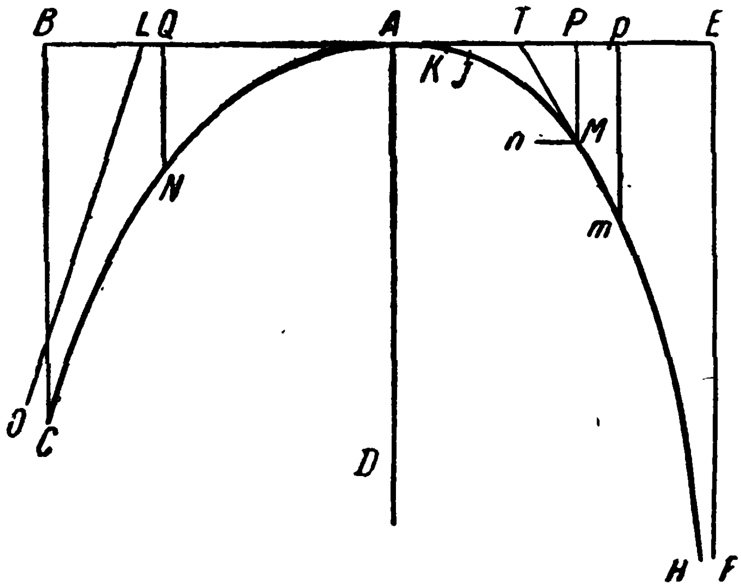

Рис. 1.

действует по направлению касательной MT, то, обозначив элемент кривой Mm через ds, получим в этой точке силу, противодействующую горизонтальному движению, равную

$$\frac{v\,dx}{c\,ds},$$

и силу, противодействующую вертикальному движению, равную

$$\frac{v\,dy}{c\,ds}.$$

Следовательно, если положим элемент времени равным dt так, что $dt=\frac{ds}{\sqrt{v}}$, и примем этот элемент dt

за постоянную [319], то начала механики дают нам для ускорений следующие два равенства:

$$\frac{2d\,dx}{dt^2} = -\frac{v\,dx}{c\,ds}$$

и

$$\frac{2d\,dy}{dt^2} = \alpha - \frac{v\,dy}{c\,ds}.$$

19. Так как $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, получим $v = \frac{ds^2}{dt^2}$; таким образом, наши два уравнения примут вид

$$\frac{2d\,dx}{dt^2} = -\frac{dx\,ds}{c\,dt^2}$$

и

$$\frac{2d\,dy}{dt^2} = \alpha - \frac{dy\,ds}{c\,dt^2}.$$

Кроме того, положим:

$$dy = p\,dx,$$

где p — тангенс угла PTM или угла наклона движения тела к горизонту, и так как

$$ds = dx\sqrt{1+pp}$$

и

$$d\,dy = pd\,dx + dx\,dp,$$

то получим следующие два уравнения:

$$\frac{2d\,dx}{dt^2} = -\frac{dx^2\sqrt{1+pp}}{c\,dt^2}$$

и

$$\frac{2pd\,dx}{dt^2} + \frac{2dx\,dp}{dt^2} = \alpha - \frac{p\,dx^2\sqrt{1+pp}}{c\,dt^2}.$$

И если мы вычтем из последнего уравнения первое, умноженное на p, останется

$$\frac{2dx\,dp}{dt^2} = \alpha,$$

или

$$\alpha\, dt^2 = 2dx\, dp,$$

а первое дает

$$-\frac{2d\,dx}{dx^2} = \frac{\sqrt{1+pp}}{c}.$$

В конце концов получим:

$$v = \frac{dx^2(1+pp)}{dt^2} = \frac{\alpha\, dx\,(1+pp)}{2dp}.$$

20. Так как

$$2dp = \frac{\alpha\, dt^2}{dx},$$

то уравнение

$$-\frac{2d\,dx}{dx^2} = \frac{\sqrt{1+pp}}{c},$$

умноженное на dp, приведется к следующему:

$$-\frac{2\alpha\, dt^2 d\,dx}{dx^3} = \frac{2dp\sqrt{1+pp}}{c},$$

интеграл которого, вследствие того, что элемент dt постоянная величина, будет

$$\frac{\alpha\, dt^2}{dx^2} = \frac{2dp}{dx} = 2C + \frac{2}{c}\int dp\sqrt{1+pp},$$

откуда получим:

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+pp}}$$

и

$$dy = \frac{p\,dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+pp}},$$

следовательно,

$$ds = dx\sqrt{1+pp} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{1+pp}}.$$

Затем, так как

$$\alpha\, dt^2 = 2dx\, dp,$$

получим:

$$\frac{1}{2}\alpha\, dt^2 = \frac{dp^2}{C + \frac{1}{c}\int dp \sqrt{1+pp}}$$

и

$$dt\sqrt{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{dp}{\sqrt{C + \frac{1}{c}\int dp \sqrt{1+pp}}},$$

и, наконец, для скорости тела мы будем иметь:

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+pp)}{C + \frac{1}{c}\int dp \sqrt{1+pp}}.$$

21. Интеграл вида

$$\int dp \sqrt{1+pp},$$

который входит в эти выражения, очевидно, представляет дугу параболы; его можно представить в логарифмах, поскольку

$$\int dp\sqrt{1+pp} = \frac{1}{2} p\sqrt{1+pp} + \frac{1}{2} l\left(p + \sqrt{1+pp}\right) \text{ [320]},$$

беря интеграл так, чтобы он обращался в нуль в случае, когда $p=0$, что получается в вершине A кривой, где касательная становится горизонтальной. Таким образом, принимая угол наклона движения тела к горизонту, тангенс которого равен p, известным для точки M, куда оно приходит, можем определить абсциссу $AP=x$, ординату $PM=y$, дугу $AM=s$, высоту, соответствующую скорости в M, и, наконец, время, в течение которого тело проходит дугу AM.

22. Представим постоянную C, которая была введена при интегрировании, в виде дроби $\frac{n}{c}$, причем ясно, что

n — положительное число. Затем обозначим для краткости

$$\int dp\sqrt{1+pp}=P,$$

имея в виду, что для каждого значения p можно легко найти значение P; и для ветви AMH, по которой тело опускается, мы получим следующие формулы:

$$x=c\int\frac{dp}{n+P},$$

$$y=c\int\frac{p\,dp}{n+P},$$

$$s=c\int\frac{dp\sqrt{1+pp}}{n+P}\ [321],$$

$$dt\sqrt{\frac{1}{2}\alpha}=\frac{dp\sqrt{c}}{\sqrt{n+P}},$$

или

$$t=\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{n+P}}$$

и

$$v=\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}.$$

Эти интегралы должны быть взяты так, что при $p=0$ они обращаются в нуль, откуда видно, что высота, соответствующая скорости в A, будет равна

$$\frac{\alpha c}{2n}.$$

23. Эти формулы служат также для выражения свойств другой ветви ANC, которая будет описана телом при поднятии, потому что в этом случае нужно только брать отрицательные значения p. Таким образом, если направление движения в N образует с горизонтом угол, тангенс которого равен p, получим:

$$AQ = c\int \frac{dp}{n-P},$$

$$QN = c\int \frac{p\,dp}{n-P}$$

и

$$AN = c\int \frac{dp\sqrt{1+pp}}{n-P},$$

время для дуги AN равно

$$\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{dp}{\sqrt{n-P}},$$

высота, соответствующая скорости в N, равна

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}.$$

Отсюда видно, что в восходящей ветви ANC наклон ее касательных к горизонту не будет нигде таким, чтобы получилось $P>n$, и там, где $P=n$, скорость тела обращается в бесконечность.

24. Следовательно, движение тела и кривая $CNAMH$, которую оно описывает, зависят от трех постоянных: α, c и n, значения которых нужно знать в каждом рассматриваемом случае. Первая из них, α, определяется отношением удельного веса среды к удельному весу шара [322], и так как α не входит в формулы, которые определяют характер кривой, то природу кривой узнаем независимо от α; от величины же α зависят только время и скорость. Величина c определяется диаметром и весом шара [323], и так как в найденные формулы эта величина входит только в виде множителя, она не вносит никаких затруднений в вычисления. Но третья величина n, которая зависит от сообщенной телу скорости, настолько влияет на наши формулы, что обязывает вычислять отдельно их значения для всех различных значений n.

25. Чтобы лучше выяснить природу этой кривой, исследуем ее радиус кривизны, которым измеряется кривизна в каждой из точек кривой. А известно, что, если положить $dy=pdx$, радиус кривизны равен

$$\frac{dx(1+pp)\sqrt{1+pp}}{dp}.$$

Следовательно, так как для нисходящей ветви

$$\frac{dx}{dp}=\frac{c}{n+P},$$

то радиус кривизны в M будет равен

$$\frac{c(1+pp)\sqrt{1+pp}}{n+P}.$$

Для восходящей ветви в N, где также $dy=p\,dx$, радиус кривизны будет равен

$$\frac{c(1+pp)\sqrt{1+pp}}{n-P}.$$

Таким образом, там, где $P=n$ и скорость тела равна бесконечности, радиус кривизны становится также бесконечно большим; видно также, что в обеих ветвях, где касательные к ним одинаково наклонены к горизонту, радиус кривизны, равно как и другие величины: x, y, s, t и v — имеют соответственно бо́льшие значения в восходящей ветви, чем в нисходящей.

26. Следовательно, в сопротивляющейся среде обе ветви кривой, описанной телом, не симметричны, и притом так, что нисходящая ветвь круче восходящей и движение по восходящей ветви более быстрое, чем по нисходящей. А в пустоте обе ветви, как известно, равны и подобны, как и движение по ним, что наглядно показывают и наши формулы, потому что для пустоты величина c обращается в бесконечность [324], как и число n, поскольку $\frac{\alpha c}{2n}$ обозначает высоту, соответствующую скорости в точке A [325]. Следовательно, P становится ничтожно малым по сравнению с n, и так как $\alpha=1$ [326], то, положив $\frac{c}{2n} = b$, мы получим для пустоты:

$$x = 2bp,\ y = bpp,\ s = 2b \int dp \sqrt{1+pp},$$

$$t = 2p\sqrt{b}\,[327] \text{ и } v = b(1+pp),$$

и радиус кривизны равным

$$2b(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

откуда очевидно, что кривая представляет параболу и движение имеет хорошо известный характер.

27. Разница между траекториями в пустоте и в среде происходит, следовательно, от величины

$$P = \int dp \sqrt{1+pp},$$

и очевидно, что эта разница будет тем больше, чем будет больше величина P по сравнению с числом n. Величина P обращается в нуль в вершине A, и отсюда в ту и другую стороны она растет вместе с углом MTP, образуемым касательной к кривой и горизонтом так, что когда этот угол становится прямым, величина P обращается в бесконечность. Следовательно, как бы мало ни было сопротивление, кривая $CNAMH$ удаляется от параболы к бесконечности, потому что, продолжая ее ветви, мы обязательно придем к тому, что величина P станет, наконец, равной числу n, как бы велико оно ни было, и даже бесконечно больше его.

28. Но когда нужно знать только такой участок NAM кривой, для которого наклон касательных к ней в его концах M и N настолько мал, что величина P, которая зависит от этого, будет весьма мала по сравнению с числом n, можно довольно просто найти приближения, чтобы описать участок этой кривой. Поскольку P слишком мало относительно n, будем иметь:

$$\frac{1}{n+P} = \frac{1}{n} - \frac{P}{nn} \text{ и } \frac{1}{n-P} = \frac{1}{n} + \frac{P}{nn}$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{n+P}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{P}{2n\sqrt{n}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{n-P}}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{P}{2n\sqrt{n}}.$$

Следовательно, для нисходящей ветви AM будем иметь:

$$AP=x=\frac{c}{n}\left(p-\frac{1}{n}\int P\,dp\right)=$$

$$=\frac{c}{n}\left\{p-\frac{1}{n}Pp+\frac{1}{3n}\left[(1+pp)^{\frac{3}{2}}-1\right]\right\},$$

$$PM=y=\frac{c}{n}\left(\frac{1}{2}pp-\frac{1}{n}\int Pp\,dp\right)=$$

$$=\frac{c}{n}\left[\frac{1}{2}pp-\frac{1}{2n}Ppp-\frac{1}{8n}P+\frac{1}{8n}p(1+pp)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$AM=s=\frac{c}{n}\left(P-\frac{1}{n}\int P\,dp\sqrt{1+pp}\right)=$$

$$=\frac{c}{n}\left(P-\frac{1}{2n}PP\right),$$

время для AM

$$t=\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{an}}\left\{p-\frac{1}{2n}Pp+\frac{1}{6n}\left[(1+pp)^{\frac{3}{2}}-1\right]\right\},$$

высоту, соответствующую скорости в M,

$$v=\frac{ac(1+pp)}{2n}\left(1-\frac{P}{n}\right).$$

А полагая p и P отрицательными, будем иметь эти же выражения для восходящей ветви AN.

29. Эти приближения имеют место только пока величина P продолжает оставаться чрезвычайно малой по отношению к числу n. Следовательно, чем число n будет больше, тем больше будет участок кривой MAN, который наверно уже будут знать посредством этих формул. Но как только потребуется определить больший ее участок, эти приближения вовсе не будут иметь применения;

и в этом случае, поскольку нет способа интегрирования найденных выражений для x, y и времени t, обратимся к отысканию их значений методом квадратур. Однако, прежде чем приняться за эту работу, будет полезно заметить некоторые особенности, которые раскрывает нам исследование этой кривой.

30. Прежде всего я замечаю, что дугу кривой $AM=s$ можно выразить через логарифм, а именно, так как

$$dp\sqrt{1+pp}=dP,$$

получим:

$$s=c\int\frac{dP}{n+P}\ [328],$$

и, следовательно,

$$s=cl\,\frac{n+P}{n},$$

поскольку в A, где $s=0$, будет и $P=0$; а эта формула уже довольно удобна для описания кривой, так как, вычисляя значения s для большого числа значений p, найдем столько же и участков кривой, а зная угол наклона каждого к горизонту, легко найдем части абсциссы и ординаты, которые им соответствуют и которые, будучи сложены вместе, дадут в целом как абсциссу, так и ординату, отвечающие каждой точке кривой. Затем, определив для каждой точки кривой скорость по формуле

$$v=\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P},$$

делением длины каждого участка кривой на $\sqrt{v}$ найдем время, в течение которого тело проходит участок; и если только участки кривой взяты достаточно малыми, получим довольно точно как вид кривой, так и движение тела.

31. Из полученного для нисходящей ветви выражения

$$s=cl\,\frac{n+P}{n}$$

видно, что эта кривая все более и более приближается к направлению вертикали, которой она, однако, достигает только в бесконечности. Это следует из того, что дуга s обращается в бесконечность только в случае, когда P равно бесконечности, что имеет место, когда p взято равным бесконечности, или когда касательная к кривой становится вертикальной. Для восходящей же ветви ANC мы будем иметь дугу

$$AN = -cl\frac{n-P}{n} = cl\frac{n}{n-P};$$

следовательно, эта дуга обратится в бесконечность, когда $P=n$; отсюда получим конечное значение p, по которому найдем угол наклона касательной к этой кривой в бесконечности; эта касательная будет асимптотой кривой.

32. Из выражения для восходящей ветви

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}$$

видно, что в бесконечности, где $P=n$, скорость тела равна бесконечности и что при поднятии до A она непрерывно убывает, потому что с уменьшением p числитель $\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)$ убывает, а знаменатель $n-P$ возрастает: то и другое приводит к убыванию скорости. Для нисходящей же ветви из выражения

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}$$

получим для вершины A:

$$v = \frac{\alpha c}{2n};$$

отсюда, однако, не следует, что чем тело будет ниже опускаться, тем и его движение будет все более ускоряться; но после прохождения вершины A движение тела будет еще некоторое время замедляться до прибытия в некоторую точку I, где его скорость будет наименьшей.

33. Такая точка I, в которой тело будет иметь наименьшую скорость, найдется, вообще говоря, если приравняем нулю производную от $\frac{1+pp}{n+P}$ [329], откуда получим:

$$2p(n+P)=(1+pp)\sqrt{1+pp},$$

а имея

$$P=\frac{1}{2}p\sqrt{1+pp}+\frac{1}{2}l\,(p+\sqrt{1+pp}),$$

получим:

$$2np+pl(p+\sqrt{1+pp})=\sqrt{1+pp}\,[330].$$

Так как это обыкновенно случается вблизи точки A, где значение p будет очень мало и, следовательно, приблизительно

$$P=p+\frac{1}{6}p^3\,[331]$$

и

$$(1+pp)\sqrt{1+pp}=1+\frac{3}{2}pp+\frac{3}{8}p^4,$$

то

$$2np+2pp+\frac{1}{3}p^4=1+\frac{3}{2}pp+\frac{3}{8}p^4,$$

или

$$2np=1-\frac{1}{2}pp+\frac{1}{24}p^4.$$

Отсюда, если только число n не будет очень мало, получим для точки I:

$$p=\frac{1}{2n}-\frac{1}{16n^3}\,[332],$$

и, следовательно, высота, соответствующая наименьшей скорости в I, приблизительно будет:

$$v=\frac{\alpha c}{2n}\cdot\frac{4nn+1}{4nn+2},$$

или

$$v = \frac{ac}{2n}\left(1 - \frac{1}{4nn}\right) [333].$$

34. От этой точки I движение тела будет уже ускоренное; но хотя ускорение и будет продолжаться бесконечно, однако скорость никогда не перейдет определенного предела, потому что в бесконечно большом удалении от кривой, где $p=\infty$, будем иметь:

$$v = \frac{\frac{1}{2}\,acpp}{P},$$

так как n становится ничтожно малым по сравнению с P, значение которого тоже возрастает до бесконечности. Но вследствие того, что $p=\infty$, число $l(p+\sqrt{1+pp})$ хотя и бесконечно, но ничтожно по сравнению с $p\sqrt{1+pp}$; таким образом, в этом случае $P = \frac{1}{2}pp$ и, следовательно,

$$v = ac,$$

это и будет высота, соответствующая скорости, к которой все более и более будет приближаться опускающееся по дуге IMH тело, и которую оно достигнет только в бесконечности.

35. Заметим также, что так как радиус кривизны в точке M равен

$$\frac{c\,(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{n+P},$$

то наибольшая кривизна будет находиться не в самой вершине A, а в некоторой другой точке K нисходящей ветви, что найдем из решения следующего уравнения:

$$3p\,(n+P) = (1+pp)\sqrt{1+pp},$$

или

$$3np + \frac{1}{2}pp\sqrt{1+pp} + \frac{3}{2}pl\,(p+\sqrt{1+pp}) =$$

$$= \sqrt{1+pp}\ [334].$$

Если только число n не будет очень мало, получим приблизительно $p=\frac{1}{3n}$ [335], откуда видно, что эта точка K будет ближе к вершине A, чем точка I, в которой скорость тела наименьшая.

36. Но в отношении свойств нисходящей ветви AMH возникает очень важный вопрос: имеет ли она вертикальную асимптоту вроде EF или не имеет? То есть, если положить $p=\infty$, обратится ли абсцисса x в бесконечность или она примет конечное значение, как AE, что, следовательно, даст асимптоту EF. Будем, следовательно, искать значение интеграла

$$\int \frac{dp}{n+P}$$

для случая, когда $p=\infty$, потому что для значения ординаты

$$c\int \frac{p\,dp}{n+P}$$

нет никаких сомнений в том, что при $p=\infty$ она обращается в бесконечность. Но для нахождения значений абсциссы при P, меньшем чем n, никакие способы, которые были бы довольно точны, не могут быть применены здесь с успехом.

37. Я же полагаю, что наиболее верным средством будет обратиться к пределам, давая P последовательно два таких значения, из которых одно будет очень большим, а другое очень малым; таким образом, можем выразить интеграл

$$\int \frac{dp}{n+P}$$

для того и другого случая. Очевидно, что

$$\int dp\sqrt{1+pp}$$

или P всегда меньше, чем $p\sqrt{1+pp}$ и, конечно, больше, чем p или $p\sqrt{1+0\cdot pp}$. Чтобы получить более близкие пределы, положим:

$$P=\int dp\sqrt{1+pp}=p\sqrt{1+\delta pp},$$

и, дифференцируя, получим:

$$\sqrt{(1+pp)(1+\delta pp)}=1+2\delta pp,$$

или

$$(1-3\delta)pp+\delta(1-4\delta)p^4=0,$$

откуда видно, что, если $\delta=\frac{1}{3}$, левая часть этого выражения меньше 0, и если $\delta=\frac{1}{4}$, она больше 0. Следовательно, мы будем иметь эти два довольно сближенных предела:

$$P<p\sqrt{1+\frac{1}{3}pp}$$

и

$$P>p\sqrt{1+\frac{1}{4}pp}.$$

38. Это убеждает нас в том, что в нисходящей ветви всегда будем иметь:

$$x>c\int\frac{dp}{n+p\sqrt{1+\frac{1}{3}pp}}$$

и

$$x<c\int\frac{dp}{n+p\sqrt{1+\frac{1}{4}pp}}.$$

Итак, развернем эти два предела, и чтобы свести вывод к одной операции, положим:

$$x=c\int\frac{dp}{n+p\sqrt{1+\delta pp}},$$

а для освобождения от иррациональности пусть

$$\sqrt{1+\delta pp}=p\sqrt{\delta}+q,$$

и будем иметь:

$$p=\frac{1-qq}{2q\sqrt{\delta}},$$

$$\sqrt{1+\delta pp}=\frac{1+qq}{2q}$$

и

$$p\sqrt{1+\delta pp}=\frac{1-q^4}{4qq\sqrt{\delta}};$$

кроме того,

$$dp=-\frac{dq(1+qq)}{2qq\sqrt{\delta}}$$

и, следовательно,

$$x=-2c\int\frac{dq\,(1+qq)}{1+4nqq\sqrt{\delta}-q^4}.$$

39. Так как знаменатель в подынтегральном выражении состоит из двух вещественных множителей, положим, что они равны $ff+qq$ и $gg-qq$, и получим:

$$ffgg=1 \quad \text{и} \quad gg-ff=4n\sqrt{\delta},$$

или

$$ff=\frac{1}{gg} \quad \text{и} \quad 4n\sqrt{\delta}=\frac{g^4-1}{gg}.$$

Отсюда наше выражение примет вид

$$x=-2c\left(\frac{1-ff}{ff+gg}\int\frac{dq}{ff+qq}+\frac{1+gg}{ff+gg}\int\frac{dq}{gg-qq}\right),$$

и, беря интегралы, имеем:

$$x=\frac{-2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\operatorname{arctg}\frac{q}{f}-\frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}\,l\,\frac{g+q}{g-q}+\text{const}.$$

А так как $x=0$ при $p=0$ и, следовательно, при $g=1$, мы будем иметь:

$$x=\frac{2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{f}-\operatorname{arctg}\frac{q}{f}\right)+$$
$$+\frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}\,l\,\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$ [330],

или, так как $f=\frac{1}{g}$,

$$x=\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}(\operatorname{arctg} g-\operatorname{arctg} gq)+$$
$$+\frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\,\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}.$$

40. Теперь, чтобы иметь случай $p=\infty$, положим только $q=0$; и абсцисса, которая отвечает бесконечно продолженной дуге AMH, будет

$$AE=\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\operatorname{arctg} g+\frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\,\frac{g+1}{g-1},$$

где

$$gg=2n\sqrt{\delta}+\sqrt{1+4\delta nn}.$$

Итак, положив $\delta=\frac{1}{3}$, получим:

$$gg=2n\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{1+\frac{4}{3}nn},$$

и, следовательно, интервал AE будет или больше или меньше, чем дает выражение

$$\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\operatorname{arctg} g+\frac{cg(1+gg)}{1+g^4}\,l\,\frac{g+1}{g-1},$$

смотря по тому, возьмем ли

$$gg=2n\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{1+\frac{4}{3}nn}$$

или

$$gg=n+\sqrt{1+nn}.$$

41. Когда n — очень большое число, будет также велико и g, и $\operatorname{arctg} g$ сделается равным $\frac{\pi}{2}$, принимая π за меру двух прямых углов; следовательно, так как

$$l\,\frac{g+1}{g-1}=\frac{2}{g},$$

наша формула примет вид

$$\frac{\pi c}{g}+\frac{2c}{gg}.$$

Следовательно, если возьмем или $gg=4n\sqrt{\frac{1}{3}}$, или $gg=2n$, интервал AE будет заключен в пределах между

$$\frac{\pi c\sqrt{\sqrt{3}}}{2\sqrt{n}}+\frac{c\sqrt{3}}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{\pi c\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}+\frac{c}{n}.$$

Но когда n очень малая дробь, получим или

$$gg=1+2n\sqrt{\frac{1}{3}},$$

или

$$gg=1+n;$$

следовательно, так как $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, пределы интервала AE будут

$$\frac{\pi nc}{2\sqrt{3}}+c\,l\,\frac{2\sqrt{3}}{n}$$

и

$$\frac{\pi nc}{4}+c\,l\,\frac{4}{n}.$$

42. Итак, криволинейная траектория в среде будет иметь две асимптоты: одну вертикальную, с которой сходится нисходящая ветвь, и другую наклонную к горизонту для восходящей ветви, которая так наклонена к горизонту, что, если обозначить тангенс угла наклона через p, получим $P=n$, или

$$n=\frac{1}{2}p\sqrt{1+pp}+\frac{1}{2}l(p+\sqrt{1+pp}).$$

В случае пустоты эта последняя асимптота становится вертикальной так же, как и первая, причем и та и другая будут бесконечно удалены от вершины A. А чтобы найти точку L, где асимптота восходящей ветви пересекает горизонтальную линию BAE, положим $P=n$ и получим:

$$AL=x-\frac{y\,dx}{dy}=c\left(\int\frac{dp}{n-P}-\frac{1}{p}\int\frac{p\,dp}{n-P}\right).$$

43. После этих общих замечаний перейдем к тому, чтобы показать, как из полученных формул можно извлечь некоторую пользу для практики. И прежде всего очевидно, что не избежать составления таблицы, которая дает для каждого значения p соответствующее значение P. Итак, поскольку p выражает тангенс угла наклона кривой к горизонту, обозначим этот угол через φ таким образом, что $p=\operatorname{tg}\varphi$; и так как $\sqrt{1+pp}=\sec\varphi$, мы получим:

$$P=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\cdot\sec\varphi+\frac{1}{2}l(\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi),$$

или

$$P=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\cdot\sec\varphi+\frac{1}{2}l\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi\right),$$

где следует брать гиперболические логарифмы тангенса углов $45^\circ+\frac{1}{2}\varphi$, которые находят в труде Непера о логарифмах [337].

44. Итак, вот содержание первой таблицы (стр. 491) [338], где первый столбец содержит все углы наклона к горизонту от градуса к градусу от 0 до 90°; второй столбец содержит тангенсы, которые представляют собою значения p. Третий столбец содержит значения формулы $\operatorname{tg}\varphi\cdot\sec\varphi$ или $p\sqrt{1+pp}$, и четвертый — значения формулы $l\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{1}{2}\varphi)$ или $l(p+\sqrt{1+pp})$, такие же, как в гидрографии дает таблица градусов широт [339]. Наконец, пятый столбец содержит значения, отвечающие формуле интеграла $P = \int dp \sqrt{1+pp}$, который необходим нам в наших выражениях.

45. Относительно нахождения кривых, которые тело может описывать в среде, нужно заметить, что их имеется бесконечное множество различных видов, которые определяются различными значениями числа n. Так, пока число n остается без изменения, кривые будут всегда подобны между собою, или принадлежать к одному и тому же виду, какова бы ни была разница между величинами α и c, потому что эти последние входят в вычисления только для определения размеров кривой без изменения ее вида, и, кроме того, для определения движения тела.

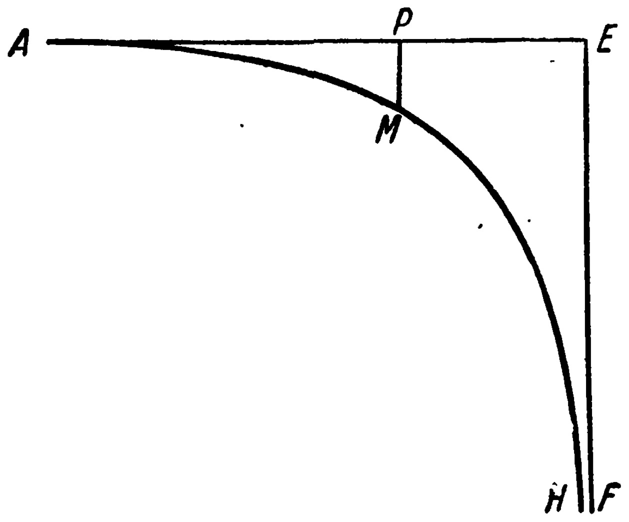

Рис. 2.

46. Эти различные виды кривых характеризуются углом OLB, под которым асимптота восходящей ветви наклонена к горизонту. Чтобы узнать этот угол, нужно только найти значение числа n в пятом столбце нашей таблицы, и первый столбец покажет этот угол. Таким образом, если $n=0$, угол OLB исчезает, или асимптота OL будет горизонтальна, и вершина A находится в бесконечности. Следовательно, в этом случае восходящая ветвь кривой исчезает, и тело будет все время опускаться (рис. 2), приближаясь постепенно к другой асимптоте вертикальной EF: это, таким образом, будет первый вид траекторий, описываемых в среде.

47. Другие виды получим, давая n положительные значения. Хотя число их бесконечно, но для практики будет достаточно остановиться на некотором числе их, давая углу OLB (рис. 1) значения, возрастающие на 5°.

Таким образом, второй вид будет при $n=0{,}0876001$, когда угол OLB станет равным 5°. Вот, следовательно, какие можно установить различные виды траекторий.

Вид	Угол OLB	Значение числа n	Вид	Угол OLB	Значение числа n
1	0°	0,0000000	10	45°	1,1477934
2	5	0,0876001	11	50	1,432361
3	10	0,1772365	12	55	1,822067
4	15	0,2711218	13	60	2,390530 [340]
5	20	0,3718537	14	65	3,290396
6	25	0,4826944	15	70	4,884250
7	30	0,6079863	16	75	8,223564 [341]
8	35	0,7538161	17	80	17,54793
9	40	0,9291380	18	85	67,13822 [342]

Следующий вид (т. е. девятнадцатый) заключает в себе случаи, когда шар брошен вертикально вверх; а так как эти случаи достаточно объяснены в другом месте [343], я их здесь не помещаю.

48. Можно составить еще столько же видов, давая n те же значения, но взятые отрицательными; однако, поскольку кривые в этих случаях не имеют восходящей ветви, они будут иметь место только в случаях, когда шар будет брошен вниз [344]. А так как в артиллерии не очень часто приходится направлять пушки и мортиры ниже горизонта, будет бесполезно вычислять эти виды; и поскольку направление пушек и мортир всегда или горизонтально или под углом выше горизонта, можно обойтись даже без 1-го вида, поскольку он никогда не имеет места в практике.

49. Самое главное в способе вычисления каждого из этих видов будет в том, чтобы разделить всю кривую на несколько частей и каждую из них вычислять в отдельности: потом останется только соединить все эти части. Итак, пусть Mm (рис. 1) — одна из таких частей кривой, и пусть тангенс угла наклона в M равен p и в m равен q, и, полагая

$$\int dq \sqrt{1+qq} = Q,$$

так же как и

$$\int dp \sqrt{1+pp} = P,$$

получим:

$$AM = c\, l\,\frac{n+P}{n} \quad \text{и} \quad Am = c\, l\,\frac{n+Q}{n}\,;$$

следовательно, отрезок дуги Mm будет равен

$$c\, l\,\frac{n+Q}{n+P}\,.$$

Затем, взяв среднее между углами наклона в M и m, которое пусть равно η, получим для части абсциссы, отвечающей этой дуге:

$$Pp = c\cos\eta\; l\,\frac{n+Q}{n+P}\,,$$

и для части ординаты

$$pm - PM = c\sin\eta\; l\,\frac{n+Q}{n+P}\,,$$

имея в виду, что разница между p и q должна быть достаточно мала.

50. Затем для движения тела высота, соответствующая скорости в M, будет

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}\,,$$

а скорость в m —

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+qq)}{n+Q}\,.$$

Беря же среднюю между скоростями, полученными по этим формулам, которая пусть будет $\sqrt{u}$, найдем время прохождения телом пути Mm, равным $\frac{Mm}{\sqrt{u}}$. Или возьмем среднее из значений

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{n+P}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{1+qq}}{\sqrt{n+Q}},$$

которое пусть будет μ, и вследствие того, что

$$\sqrt{u}=\mu\sqrt{\frac{1}{2}\alpha c},$$

время для дуги Mm будет

$$\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1}{\mu}\,l\,\frac{n+Q}{n+P}.$$

И чтобы иметь это время выраженным в секундах, допустим, что g — высота, которую падающее тело проходит в первую секунду [345]; тогда число секунд будет

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\alpha g}}\cdot\frac{1}{\mu}\,l\,\frac{n+Q}{n+P}.$$

Таким же способом можно выразить скорости через пути, проходимые в секунду, и на этом основании скорость в M будет

$$\sqrt{2\alpha c g}\cdot\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{n+P}}.$$

51. Хотя здесь надо брать гиперболические логарифмы, однако можно пользоваться и обыкновенными, умножая коэффициенты при этих членах на число 2,302585092994, обыкновенный логарифм которого равен 0,3622156. Таким образом, при пользовании обыкновенными логарифмами какая-либо дуга кривой будет

$$2{,}302585c\,l\,\frac{n+Q}{n+P};$$

и этот коэффициент будет соответствовать также абсциссам и ординатам. Затем скорость в M, выраженная через путь, проходимый с этой скоростью в секунду, будет

$$\sqrt{2acg} \cdot \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{n+P}};$$

и время для дуги Mm будет

$$\frac{2{,}302585\,\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}} \cdot \frac{1}{\mu}\, l\, \frac{n+Q}{n+P} \text{ секунд,}$$

где μ есть среднее значение между

$$\frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{n+P}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{1+qq}}{\sqrt{n+Q}},$$

и g обозначает высоту, с которой тело падает в пустоте в секунду, причем известно, что $g = 15{,}625$ рейнского фута.

52. На этих основаниях я вычислю таблицу для двенадцатого вида, когда $n=1{,}882067$; она будет содержать две части: одну для восходящей ветви ANC, другую для нисходящей ветви AMH, и может служить образцом для вычисления подобных же таблиц для других видов; и при помощи 18 подобного рода таблиц будут в состоянии решать все вопросы, какие могут встретиться в артиллерии.

53. Посредством этой таблицы, вычисленной через 5°, легко построим траекторию двенадцатого вида, как она представлена на третьей фигуре (рис. 3). А зная значения величин c и α, найдем по этой таблице скорость тела в каждой точке кривой и время для каждой части кривой. Таким образом, если задано направление или угол возвышения пушки или мортиры, под которым бросаем шар, найдем угол возвышения в первом столбце таблицы для восходящей ветви, а столбец пятый покажет скорость, которая должна быть сообщена шару, чтобы он описал траекторию двенадцатого вида (см. таблицу на стр. 489).

54. Возьмем для примера бомбу, диаметр которой пусть будет $\frac{1}{2}$ фута и вес 64 фунта, или равен весу

$\frac{9}{10}$ кубического фута воды. Итак, имея

$$d=\frac{1}{2} \text{ и } e^3=\frac{9}{10},$$

мы получим (§ 15): $c=707\cdot\frac{18}{5}=2545{,}2$ фута, а α примем равной единице. Пусть эта бомба брошена в C под углом возвышения 45°, и чтобы она описала траекторию двенадцатого вида, нужно чтобы ее скорость в C была $1{,}7222525\sqrt{2\alpha gc}$ футов в секунду, или чтобы она была

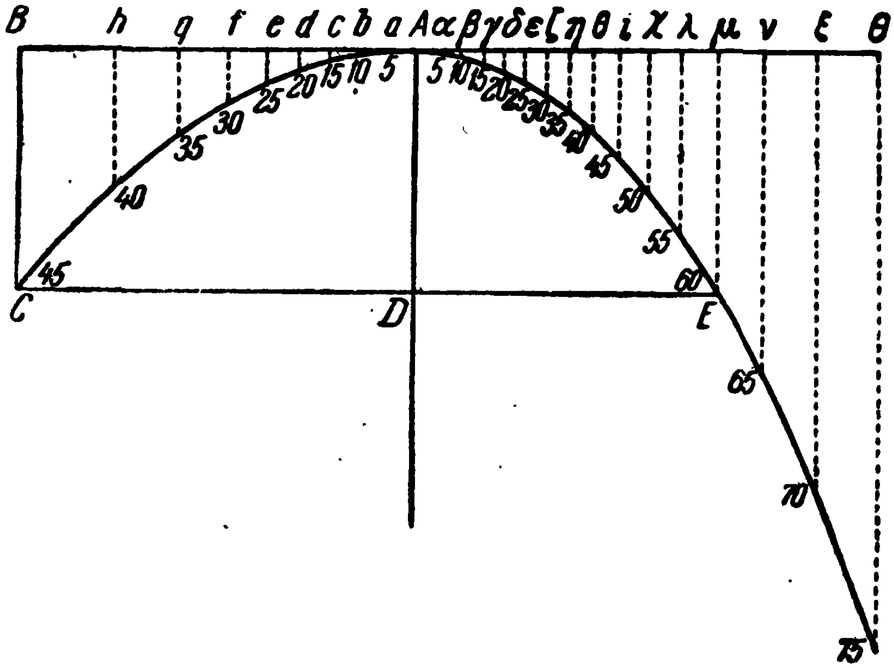

Рис. 3.

способна пройти с этой скоростью в секунду путь в $485\frac{7}{10}$ [346] фута. Если ее скорость будет больше этой, траектория будет принадлежать к одному из предшествующих видов; а если она будет меньше, к следующему виду, и в этих случаях должно иметь вычисленные таблицы для этих других видов.

55. Итак, допустим, что начальная скорость бомбы в C (рис. 3) $485\frac{7}{10}$ [346] фута в секунду, и что, брошенная наклонно из C на ту же горизонтальную плоскость, она упала в E. Пусть вершина находится в A, откуда опустим перпендикуляр AD, и таблица для восходящей ветви даст нам:

интервал	$CD=AB=2139{,}2$	фута,
высоту	$AD=1234{,}8$	фута,
длину дуги кривой	$CA=2529{,}0$	фута,
скорость в вершине	A $208\frac{8}{9}$	фута в секунду,
время поднятия по	CA $8{,}18$	секунды.

56. Для нисходящей ветви нужно в таблице для этой ветви найти интерполяцией точку, ордината которой

ВИД XII

Для восходящей ветви*)

Угол наклона в N	Дуга AN $=2{,}302585c$ умн. на	Абсцисса AQ $=2{,}302585\,c$ умн. на	Ордината QN $=2{,}302585c$ умн. на	Скорость в N $=\sqrt{2agc}$ умн. на	Время для AN $=\frac{2{,}302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ умн. на
0°	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,740 8247	0,000 0000″
	21 3983	21 3779	9334	21 3820	28 4763
5	0,021 3983	0,021 3779	0,000 9334	0,762 2067	0,028 4763
	23 0448	22 8477	3 0080	29 5427	29 6594
10	0,044 4431	0,044 2256	0,003 9414	0,791 7494	0,058 1357
	25 5349	24 9296	5 5268	39 5510	31 4747
15	0,069 9780	0,069 1552	0,009 4682	0,831 3004	0,089 6104
	29 1646	27 8148	8 7699	52 3866	34 0273
20	0,099 1426	0,096 9700	0,018 2381	0,883 6870	0,123 6377
	34 5303	31 9018	13 2142	69 7094	37 6196
25	0,133 6729	0,128 8718	0,031 4523	0,953 3964	0,161 2573
	42 6536	37 7472	19 6952	94 5651	42 6723
30	0,176 3265	0,166 6190	0,051 1475	1,047 9615	0,203 9296
	55 5745	46 8711	29 8602	133 1725	49 9521
35	0,231 9010	0,213 4901	0,081 0077	1,181 1330	0,253 8817
	77 8564	61 7676	47 3960	200 3240	60 9504
40	0,309 7574	0,275 2577	0,128 4037	1,381 4570	0,314 8321
	121 9806	89 9335	82 4089	340 7955	79 0812
45	0,431 7380	0,365 1912	0,210 8126	1,722 2525	0,393 9133
	238 1005	160 8581	175 5460	769 8425	114 9287
50	0,669 8385	0,526 0493	0,386 3586	2,492 0950	0,508 8420

*) В каждой графе таблицы дано значение соответствующей величины и ее разность, отвечающая изменению аргумента на один шаг, т. е. на 5°.

Для нисходящей ветви

Угол наклона в M	Дуга AM $=2,302585c$ умн. на	Абсцисса AP $=2,302585c$ умн. на	Ордината PM $=2.302585c$ умн. на	Скорость в M $=\sqrt{2agc}$ умн. на	Время для AM $=\frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ умн. на
0°	0,000 0000	0,000 0000	0,000 0000	0,740 8247	0,000 0000″
	20 3933	20 3739	8895	—14 4229	27 7997
5	0,020 3933	0,020 3739	0,000 8895	0,726 4018	0,027 7997
	19 9209	19 7505	2 6002	—8 2616	27 5814
10	0,040 3142	0,040 1244	0,003 4897	0,718 1402	0,055 3811
	19 9299	19 4575	4 3136	—2 5702	27 8019
15	0,060 2441	0,059 5819	0,007 8033	0,715 5700	0,083 1830
	20 4125	19 4677	6 1380	+2 8920	28 4687
20	0,080 6566	0,079 0496	0,013 9414	0,718 4620	0,111 6517
	21 4049	19 7755	8 1913	8 3320	29 6214
25	0,102 0615	0,098 8251	0,022 1327	0,726 7940	0,141 2731
	22 9898	20 3922	10 6155	13 9390	31 3328
30	0,125 0513	0,119 2173	0,032 7482	0,740 7330	0,172 6059
	25 3104	21 3465	13 5993	19 8950	33 7196
35	0,150 3617	0,140 5638	0,046 3475	0,760 6280	0,206 3255
	28 5969	22 6875	17 4086	26 3895	36 9608
40	0,178 9586	0,163 2513	0,063 7561	0,787 0175	0,243 2863
	33 2130	24 4872	22 4384	33 6125	41 3278
45	0,212 1716	0,187 7385	0,086 1945	0,820 6300	0,284 6141
	39 7389	26 8470	29 2985	41 7430	47 2492
50	0,251 9105	0,214 5855	0,115 4930	0,862 3730	0,331 8633
	49 1194	29 9018	38 9688	50 9230	55 3474
55	0,301 0299	0,244 4873	0,154 4618	0,913 2960	0,387 2107
	62 9347	33 8148	53 0786	61 1670	66 7116
60	0,363 9646	0,278 3021	0,207 5404	0,974 4630	0,453 9223
	84 1010	38 8335	74 5985	72 0310	83 2818
65	0,448 0656	0,317 1356	0,282 1389	1,046 4940	0,537 2041
	117 8537	45 1007	108 8830	82 5390	108 4230
70	0,565 9193	0,362 2363	0,391 0219	1,129 0330	0,645 6271
	175 4921	52 7715	167 3697	90 0010	149 5880
75	0,741 4114	0,415 0078	0,558 3916	1,219 0340	0,795 2151
	285 1538	61 7186	278 3950	89 4400	225 7818
80	1,026 5652	0,476 7264	0,836 7866	1,308 4740	1,020 9969
	551 3732	71 9686	546 6560	73 3500	410 0500
85	1,577 9384	0,548 6950	1,383 4426	1,381 8240	1,431 0469

Вспомогательная таблица

Угол φ	$p = \operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi \cdot \sec\varphi$	$l\,\operatorname{tg}\left(45° + \frac{1}{2}\varphi\right)$	P
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0174551	0,0174577	0,0174541	0,0174559
2	0,0349208	0,0349420	0,0349136	0,0349278
3	0,0524078	0,0524797	0,0523838	0,0524318
4	0,0699268	0,0700976	0,0698698	0,0699837
5	0,0874887	0,0878229	0,0873773	0,0876001
6	0,1051042	0,1056832	0,1049116	0,1052974
7	0,1227846	0,1237068	0,1224783	0,1230926
8	0,1405408	0,1419220	0,1400823	0,1410022
9	0,1583844	0,1603587	0,1577296	0,1590442
10	0,1763270	0,1790471	0,1754259	0,1772365
11	0,1943803	0,1980185	0,1931766	0,1955976
12	0,2125566	0,2173052	0,2109876	0,2141464
13	0,2308682	0,2369410	0,2288650	0,2329030
14	0,2493280	0,2569609	0,2468144	0,2518877
15	0,2679492	0,2774014	0,2648421	0,2711218
16	0,2867454	0,2983010	0,2829544	0,2906277
17	0,3057307	0,3197000	0,3011576	0,3104288
18	0,3249197	0,3416408	0,3194582	0,3305495
19	0,3443276	0,3641680	0,3378626	0,3510153
20	0,3639702	0,3873290	0,3563784	0,3718537
21	0,3838640	0,4111741	0,3750122	0,3930932
22	0,4040262	0,4357564	0,3937709	0,4147637
23	0,4244748	0,4611325	0,4126623	0,4368974
24	0,4452287	0,4873633	0,4316947	0,4595290
25	0,4663077	0,5145136	0,4508752	0,4826944
26	0,4877326	0,5426522	0,4702126	0,5064324
27	0,5095254	0,5718538	0,4897151	0,5307845
28	0,5317094[347]	0,6021983	0,5093921	0,5557952
29	0,5543091	0,6337714	0,5292525	0,5815120
30	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863
31	0,6008606	0,7009840	0,5695625	0,6352732
32	0,6248694	0,7368323	0,5900326	0,6634325

Продолжение

Угол φ	$p = \mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi \cdot \sec\varphi$	$l\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)$	P
33°	0,6494076	0,7743300	0,6107273	0,6925287
34	0,6745085	0,8136044	0,6316578	0,7226311
35	0,7002075	0,8547958	0,6528363	0,7538161
36	0,7265425	0,8980560	0,6742752	0,7861656
37	0,7535541	0,9435520	0,6959879	0,8197699
38	0,7812856	0,9914657	0,7179875	0,8547266
39	0,8097840	1,0419980	0,7402898	0,8911439
40	0,8390996	1,0953666	0,7629093	0,9291380
41	0,8692867	1,1518160	0,7858627	0,9688394
42	0,9004040	1,2116130	0,8091670	1,0103900
43	0,9325151	1,2750535	0,8328403	1,0539469
44	0,9656888	1,3424655	0,8569026	1,0996840
45	1,0000000	1,4142136	0,8813732	1,1477934
46	1,0355303	1,4907040	0,9062752	1,1984896
47	1,0723687	1,5723920	0,9316313	1,2520116
48	1,1106125	1,6597842	0,9574664	1,3086253
49	1,1503684	1,7534530	0,9838076	1,3686303
50	1,1917536	1,8540400	1,0106827	1,4323614
51	1,2348972	1,9622710	1,0381231	1,5001970
52	1,2799416	2,0789700	1,0661613	1,5725657
53	1,3270448	2,2050705	1,0948332	1,6499519
54	1,3763819	2,3416410	1,1241768	1,7329089
55	1,4281480	2,4899000	1,1542341	1,8220670
56	1,4825610	2,6512520	1,1850503	1,9181512
57	1,5398650	2,8273130	1,2166746	2,0219938
58	1,6003345	3,0199590	1,2491603	2,1345596
59	1,6642795	3,2313720	1,2825662	2,2569691
60	1,7320508	3,4641020	1,3169578[348]	2,3905299[349]
61	1,8040478	3,721147	1,3524042	2,536776
62	1,8807265	4,006050	1,3889854	2,697518
63	1,9626105	4,323021	1,4267876	2,874904
64	2,0503038	4,677095	1,4659075	3,071501

Продолжение

Угол φ	$p = \operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi \cdot \sec\varphi$	$l\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)$	P
65°	2,1445069	5,074337	1,5064535	3,290396
66	2,2460368	5,522093	1,5485467	3,535320
67	2,3558524	6,029344	1,5923233	3,810834
68	2,4750869	6,607161	1,6379381	4,122549
69	2,6050891	7,269313	1,6855678	4,477441
70	2,7474774	8,033085	1,7354146	4,884250
71	2,9042109	8,920438	1,7877114	5,354075
72	3,0776835	9,959592	1,8427293	5,901161
73	3,2708526	11,187310	1,9007861	6,544048
74	3,4874144	12,652184	1,9622566	7,307220
75	3,7320508	14,419540	2,0275887	8,223564[350]
76	4,0107809	16,578823	2,0973231	9,338073
77	4,3314759	19,255193	2,1721209	10,713657
78	4,7046301	22,628020	2,2528019	12,440411
79	5,1445540	26,961800	2,3403999	14,651100
80	5,6712818	32,65962	2,4362452	17,54793
81	6,3137515	40,36036	2,5420894	21,45123
82	7,1153697	51,12605	2,6603052	26,89318
83	8,1443464	66,82850	2,7942178	34,81136
84	9,5143645	91,02174	2,9486992	46,98522
85	11,4300522[351]	131,14514[352]	3,1313001	67,13822[353]
86	14,300666	205,0084	3,3546723	104,1815
87	19,081137	364,5893	3,6425320	184,1162
88	28,636253	820,5348	4,0481241	412,2915
89	57,289962	3 282,639	4,7413471	1 643,690
89°30′	114,58865	13 131,06	5,4345129	6 568,250
89°44′	214,85762	46 164,31	6,0631256	23 085,19
89°52′	429,71757	184 657,7	6,7562739	92 332,23[354]
89°56′	859,43630	738 631,4	7,4494211	36 9319,4
89°58′	1718,8732	2 954 526	8,1425680	14 77267

равна 0,2108126; видим, что эта точка находится между 60° и 65°, а точно 60°13′. Таким образом, бомба упадет в E на горизонт под углом 60°13′. А отсюда найдем:

интервал	$DE = 1640{,}1$		фута,
длину дуги кривой	$AE = 2153{,}6$		фута,
скорость в	E	$275\frac{2}{3}$	фута в секунду,
время падения по	AE	$9{,}50$	секунды.

Таким образом, бомба пробудет в воздухе в течение 17,68 или $17\frac{2}{3}$ секунды и дальность бросания будет

$$CE = 3779\frac{1}{3} \text{ фута.}$$

Этого примера достаточно, чтобы показать применение этих таблиц при решении всякого рода задач, предлагаемых обычно в артиллерии.

РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ПОВОДУ НЕДАВНО ПРЕДПРИНЯТЫХ ОПЫТОВ СТРЕЛЬБЫ ИЗ ОРУДИЙ

РАЗМЫШЛЕНИЯ ПО ПОВОДУ НЕДАВНО ПРЕДПРИНЯТЫХ ОПЫТОВ СТРЕЛЬБЫ ИЗ ОРУДИЙ [355]

В движении ядер различаются два этапа: движение ядра в орудии и движение вне орудия. Каждое из этих движений следует рассматривать отдельно. Прежде всего рассмотрим движение вне орудия, которое можно определить: по времени, которое ядро находится в воздухе, по диаметру ядра и по отношению удельных весов ядра и воздуха. По этим данным узнаем высоту, которой достигнет ядро, и начальную скорость, с которой ядро выбрасывается из орудия, а также время его подъема и падения по отдельности. Определив эти величины, можем перейти к рассмотрению движения ядра внутри орудия и по скорости, с которой ядро вылетает, узнаем силу пороха и многое другое весьма полезное в пиротехнике.

Полагаю при этом, что направление ствола является вертикальным, так что ядро описывает при подъеме и падении прямую линию, наклонное же движение по кривой линии есть предмет дальнейшего исследования.

Пусть c обозначает диаметр ядра в скрупулах рейнского фута; m; n — отношение удельного веса ядра к удельному весу воздуха или среды, в которой движется ядро; пусть t — время пребывания ядра в воздухе в секундах; далее, пусть x — искомая высота, на которую поднимается тело. Напишем e вместо числа, логарифм которого есть единица и которое равно 2,7182818, логарифм которого по Флакку есть 0,4342944. Далее, пусть N означает число градусов дуги, тангенс которой есть

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}$$

при полном синусе, равном 1. Искомую высоту x отыскиваем из следующего уравнения:

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3n(m-n)}}\times$$
$$\times\left[125N-716\lg\left(\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}}-\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}\right)\right].$$

Для облегчения расчета примем $\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}=y$; N будет число градусов дуги, тангенс которой есть y; тогда

$$t=\frac{m\sqrt{c}}{447\,650\sqrt{3n(m-n)}}\,[125N-7162\lg(\sqrt{yy+1}-y)].$$

Чтобы применить логарифмы Флакка, следует умножить логарифм на 2,7182817. Вместо

$$\frac{447\,650\sqrt{3n(m-n)}}{m\sqrt{c}}$$

напишем A, тогда будет

$$At=125N-19\,468\lg(\sqrt{yy+1}-y),$$

следовательно, будет

$$N=\frac{At+19\,468\lg(\sqrt{yy+1}-y)}{125}=$$
$$=\frac{8At+155\,746\lg(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}.$$

Из данного уравнения необходимо найти y, все время подставляя вместо y разные значения, пока не получится равенства.

Опыт I

(Произведен 21 августа 1727 г.)

Железное ядро диаметром 225 скрупулов было выпущено (из пушки) вертикально; время пребывания его в воздухе было 45 секунд. Следовательно,

$$c=225, \quad t=45, \quad m=7000 \quad \text{и} \quad n=1.$$

Следовательно, получим:

$$A=618, \quad At=27\,816 \quad \text{и} \quad 8At=222\,530$$

и

$$N=\frac{222\,530+155\,746 \lg(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}.$$

Положим $y=2{,}70$, тогда

$\sqrt{yy+1}=2{,}879$, следовательно, $\sqrt{yy+1}-y=0{,}179$; соответственно

$$\lg(\sqrt{yy+1}-y)=-0{,}7471 \text{ и } N=69\frac{41}{60}=\frac{69\,683}{1000}.$$

Из уравнения находим $N=\dfrac{106\,173}{1000}$. Следовательно, y необходимо взять большим; пусть $y=3{,}00$; тогда

$\sqrt{yy+1}=3{,}162$. Следовательно, $\sqrt{yy+1}-y=0{,}162$,

отсюда его логарифм равен $-0{,}790$, откуда $N=99°$.

Пусть $y=4{,}00$, тогда

$$\sqrt{yy+1}=4{,}123 \text{ и } \sqrt{yy+1}-y=0{,}123,$$

логарифм которого есть $-0{,}9100$.

Следовательно, $N=80{,}802$, но должно было быть $N=75°58'$; пусть $y=4{,}10$, тогда

$$\sqrt{yy+1}-y=0{,}12,$$

логарифм которого равен $-0{,}9208$. Следовательно, $N=79°12'$, но должно было быть $N=76°18'$. Продолжая так, находим $y=4{,}31$; в этом случае весьма точно сохраняется равенство, так что нет ошибки даже в сотых долях.

$N=76°56'$; чтобы найти высоту, которой достигает тело, имеем $\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}-1}=y$, поэтому $e^{\frac{3nx}{4mc}}=19{,}5761$, следовательно, $\frac{3nx}{4mc}0{,}4342944=1{,}2915908$ или $x=$ $=\frac{2\,100\,000\cdot 1{,}2915908}{0{,}4342944}=6245$ рейнских футов. Отсюда находим начальную скорость, или высоту, на которую поднялось бы ядро в вакууме с той же самой силой. (Эта скорость или высота) равна:

$$e^{\frac{3nx}{4mc}}=\frac{4c(m-n)+3nK}{4c(m-n)},$$

где K обозначает высоту подъема в вакууме; следовательно, получим $K=20\,997\cdot 1857{,}61$ скруп. $=39\,004$ рейнских фута.

Время, которое ядро затрачивает на подъем, равно $\frac{mN\sqrt{c}}{3581\sqrt{3n(m-n)}}$ секунд, т. е. (так как $N=76{,}93$ и $\sqrt{c}=15$) оно $=15^{\frac{1}{2}}$ секунд. Следовательно, время падения равно $29^{\frac{1}{2}}$ секунд; поэтому разница между временем подъема и падения равна 14 секунд.

Опыт II

(Произведен в тот же день)

Из той же пушки произведен выстрел таким же ядром при половинном количестве пороха; находилось оно в воздухе 34 секунды.

Следовательно, $c=225$, $t=34$, $m=7000$, $n=1$, $A=618$; тогда $At=21\,012$ и $8At=168\,096$.

Следовательно, $N=\frac{168\,096+155\,746\lg(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}$;

положим $y=2{,}00$, тогда $\sqrt{yy+1}-y=0{,}236$, логарифм которого есть $-0{,}6270$; отсюда находим $N=70{,}91$, а должно было быть 63°26′; подбирая таким образом, находим, что необходимо взять для y значение 2,185, тогда $N = 65°25'$, и следовательно,

$$\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}} = 2,185 \quad \text{и} \quad e^{\frac{3nx}{4mc}} = 5,7742.$$

Следовательно,

$$\frac{3nx}{4mc} = \frac{\lg 5,7742}{0,43429} = \frac{0,76147}{0,43429},$$

откуда

$$x = \frac{2\,100\,000 \cdot 0,76147}{0,43429} \text{ скрупул} = 3682 \text{ рейнск. фута.}$$

Высота подъема ядра в вакууме будет равна 10 025,862 рейнского фута. Время подъема 13,19 секунды. Следовательно, время падения равно 20,81 секунды.

Опыт III

(Произведен 23 августа 1727 г.)

То же ядро диаметром 225 скруп. выброшено из пушки вертикально, время полета было 2 секунды, количество пороха 1 лот или $\frac{1}{8}$ часть предшествующего.

Следовательно, как выше, имеем: $c = 225$, $m = 7000$, $n = 1$, $t = 2$ и $A = 618$, $At = 1236$, $8At = 9888$.

Соответственно будет

$$N = \frac{9888 + 155\,746 \lg \sqrt{yy+1} - y}{1000}.$$

Пробуя, что следует подставить на место y, найдем $y = 0,075$, откуда $N = 4°19'$. Следовательно, $\sqrt{e^{\frac{3nx}{4mc}}} - 1 = 0,075$ и $e^{\frac{3nx}{4mc}} = 1,005625$, откуда

$$\frac{3nx}{4mc} = \frac{0,002300}{0,4343} \quad \text{и} \quad x = \frac{2\,100\,000 \cdot 0,0026}{0,4343} = 11\,122 \text{ скруп.}$$

Итак, ядро поднялось на высоту 11 футов.

Затем $0,005625=\frac{3nK}{4c\,(m-n)}$. Следовательно,

$$K=2\,099\,700\cdot 0,005625=11\,800 \text{ скруп.}$$

Разница высот в вакууме и в воздухе составляет 678 скруп. Время же подъема равно $\frac{7000\cdot 4,32\cdot 15}{3581\cdot 144}=$ $=0,88$ секунды; следовательно, время падения равно 1,12 секунды.

В этих опытах длина пушки была 7260 скруп. В последующих же опытах применялась та же пушка, но несколько укороченная, так что ее длина составляла приблизительно 5808 скруп. В первом опыте количество пороха было 16 лотов, во втором — 8 лотов, в третьем 1 лот.

Опыт IV

(Произведен 2 сентября 1727 г.)

То же ядро диаметром 225 скруп. выброшено вертикально с зарядом пороха в 1 лот и упало спустя 8 секунд.

Итак, опять имеем: $c=225$, $m=7000$, $n=1$, но $t=8$, откуда

$$N=\frac{39\,552+155\,746\lg\left(\sqrt{yy+1}-y\right)}{1000}.$$

Отсюда находим: $y=0,33$; следовательно, $N=18°25'$,

$$e^{\frac{3nx}{4mc}}=1,1089,\quad \text{а}\quad x=\frac{2\,100\,000\cdot 0,04458}{0,4343}.$$

Следовательно, высота подъема ядра будет равна 215 футов, 1 дюйм, 7 лин.; высота же подъема в вакуумė есть $K=2\,099\,700\cdot 0,1089=228$ футов, 5 дюймов, 8 лин.

Время подъема $\frac{7000\cdot 18,41\cdot 15}{3581\cdot 144}=3,7$ сек. Следовательно, время падения равно 4,3 сек.

Опыт V

(Произведен в тот же день)

То же ядро было выброшено из той же пушки зарядом пороха 4 лота; время его пребывания в воздухе 20 секунд.

Следовательно, $c=225$, $m=7000$, $n=1$, $t=20$, а

$$N=\frac{98\,880+155\,746\lg(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}.$$

Следовательно, $y=0{,}93$, $N=42°56'$, $e^{\frac{3nx}{4mc}}=1{,}8649$. В этом случае $x=\frac{2\,100\,000\cdot 0{,}27044}{0{,}43429}=1307{,}707$ фута. Затем $K=2\,099\,700\cdot 0{,}8649=1816{,}025$ фута. Время же подъема равно

$$\frac{7000\cdot 42{,}93\cdot 15}{3581\cdot 144}=\frac{210\cdot 4293}{103\,849}=8{,}6 \text{ сек.}$$

Следовательно, время падения равно 11,4 секунды.

Опыт VI

(Произведен в тот же день)

То же ядро было выброшено из той же пушки зарядом пороха 8 лотов. Время пребывания в воздухе 28 секунд. Следовательно, $c=225$, $m=7000$, $n=1$, $t=28$;

$$N=\frac{138\,432+155\,746\lg(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}.$$

Отсюда находим: $y=1{,}52$ и $N=56°39'$, $e^{\frac{3nx}{4mc}}=$ $=3{,}3104$, откуда $x=\frac{2\,100\,000\cdot 0{,}519828}{0{,}43429}=2513{,}621$ рейнского фута. Но $K=20\,997\cdot 31{,}04=4851{,}150$ рейнского фута. Время же подъема равно

$$\frac{7000\cdot 56{,}66\cdot 15}{3581\cdot 144}=11{,}45 \text{ секунды.}$$

Следовательно, время падения равно 16,55 секунды.

Опыт VII

(Произведен в тот же день)

Из той же пушки, но зарядом пороха в 12 лотов, произведен выстрел таким же ядром, время пребывания в воздухе равно 32 секундам. Так как $c=225$, $m=7000$, $n=1$, $t=32$, то

$$N=\frac{158\,202+155\,746\,\lg(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}.$$

Отсюда следует: $y=1{,}93$, а следовательно, $N=62°37'$. Затем $e^{\frac{3nx}{4mc}}=4{,}7249$; следовательно, $x=\frac{2\,100\,000\cdot 0{,}6733099}{0{,}43429}=3255{,}776$ рейнского фута или 3 255 776 скруп. Однако

$$K=20\,997\cdot 372{,}49=7821{,}172 \text{ фута.}$$

Время же подъема равно $\frac{210\cdot 6261}{103\,849}=12{,}67$ секунды, а время падения будет равно 19,33[1]).

[1])

Таблица поправок

Эксперимент	Вес порошка в лотах	t	N	x, рейнск. фут.	Время подъема в секундах	Время падения в секундах	K, рейнск. фут.
I	16	45	80°25′	7530	16,27	28,73	73 558
II	8	34	69°39′	4436	14,09	19,91	15 263
III	1	2	4°56′	15,59	0,998	1,002	15,644
IV	1	8	19°35′	250,3	3,96	4,04	265,74
V	4	20	$46°22\frac{1}{2}'$	1559	9,38	10,62	2 311,6
VI	8	28	60°58′	3036	12,34	15,66	6 813
VII	12	32	$66°58\frac{1}{2}'$	3943	13,55	18,45	11 625

ОБ УДАРЕ ПУЛЬ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ПО ДОСКЕ

ОБ УДАРЕ ПУЛЬ ПРИ СТРЕЛЬБЕ ПО ДОСКЕ [356]

Случай первый: доска неподвижна

1. Примем сначала, что доска неподвижна, с тем, чтобы было легче перейти к анализу, исходящему из принципов движения. Что же касается пули, то тут надо рассматривать главным образом два обстоятельства: прежде всего — скорость, с которой она ударяет по доске. Ее мы измеряем расстоянием, которое пуля проходит с такой скоростью в одну секунду. Допустим эта скорость будет равна c. Пусть g обозначает высоту, с которой тяжелое тело свободно падает за время в одну секунду. Таким образом, если скорость пули такова, какую мы получаем, исходя из высоты g, то она равна $c=2g$. Если же скорость такова, какую мы получаем, исходя из высоты nng, тогда $c=2ng$, откуда следует: если $c=2ng$, то $n=\frac{c}{2g}$, и поэтому высота, которая вызывает эту скорость c, будет $nng=\frac{ce}{4g}$. Затем в расчет входит масса этой пули, которую мы обозначим буквой M, где, согласно принципам механики, M определяется весом этой же пули.

Что же касается внешней формы пули, то ее вряд ли следует здесь принимать в расчет, если только она сохраняется неизменной.

2. Началом удара является момент соприкосновения пули с доской. От него мы будем отсчитывать время. Итак, допустим, что с этого момента уже прошло

t секунд, спрашивается, на какое расстояние теперь проникла пуля в доску. Обозначим глубину, на которую проникла пуля, равной x. Так как это расстояние пройдено пулей во время t, то скорость пули в этот момент равна $\frac{dx}{dt}$, а его ускорение равно $\frac{Md\,dx}{2g\,dt^2}$ (dt мы принимаем за величину постоянную), которому должна быть равна сила сопротивления, взятая с обратным знаком. Отвлечемся здесь от влияния веса пули, в силу которого ее движение искривляется, поскольку результат такого влияния при этом незначителен.

3. Допустим, что пуля проникнет на глубину x в доску и эту глубину мы здесь принимаем меньшей, чем толщина доски. Если толщина доски равна a, то как только $x=a$, следует полагать, что пуля прошла сквозь доску. Итак, теперь, пока пуля находится на глубине x, она встречает определенное и значительное сопротивление, которое противодействует ее движению и которое мы обозначаем буквой R. Так как его величина едва ли в каком-либо случае может быть точно определена, то здесь будем рассматривать его только как зависящее от величины пули и от твердости самой доски, а также от глубины x проникания пули в доску. Отсюда следует, что поскольку два первых фактора остаются постоянными для одной и той же пули и данной доски, то сила сопротивления может рассматриваться как функция x. При этом сила сопротивления исчезает как при $x=0$, так и при $x=a$, потому что как до удара по доске, так и после выхода из нее пуля не встречает никакого сопротивления.

4. Итак, установив это сопротивление R, мы тотчас получим уравнение

$$\frac{d\,dx}{2g\,dt^2} = -\frac{R}{M}.$$

Помножив уравнение на dx, получим после интегрирования

$$\frac{dx^2}{4g\,dt^2} = C - \int \frac{R\,dx}{M},$$

где интеграл $\int \frac{R\,dx}{M}$ возьмем так, что в самом начале, при $x=0$, он равен нулю. Отсюда постоянную C следует определить так, чтобы при $x=0$ скорость пули $\frac{dx}{dt}$ была равна c, откуда выводится $C=\frac{cc}{4g}$, так что мы имеем:

$$\frac{dx^2}{dt^2}=cc-4g\int\frac{R\,dx}{M},$$

откуда сама скорость ядра

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\left(cc-4g\int\frac{R\,dx}{M}\right)}$$

и далее для определения времени выводится следующее уравнение:

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\left(cc-4g\int\frac{R\,dx}{M}\right)}}.$$

5. Не рассматривая вопросы о времени, мы легко сможем судить из уравнения, найденного для скорости, прошла ли пуля полностью через доску или же она, прекратив движение, застряла в доске. Здесь главным образом надо иметь в виду сопротивление R и интеграл $\int R\,dx$, который с возрастанием x постоянно увеличивается. Итак, положим при $x=a$ будет $\int\frac{R\,dx}{M}=f$, и теперь видно, что пуля не могла пройти через плиту, пока cc меньше, чем $4gf$. Вытекающие отсюда случаи необходимо подразделить:

1°. Если скорость пули $c<2\sqrt{gf}$, пуля не пройдет через доску и застрянет там, где $\int\frac{R\,dx}{M}=\frac{cc}{4g}$, откуда можно будет судить о глубине проникания пули в доску.

2°. Если же скорость пули $c>2\sqrt{gf}$, тогда пуля не только пройдет сквозь доску, но даже сохранит при этом некоторую скорость, равную $\sqrt{cc-4gf}$.

Случай второй: доска свободно движется по горизонтальной плоскости

6. Кроме того, что установлено выше относительно пули и ее скорости, теперь следует еще учесть массу доски, которую обозначим N. Для того чтобы доска не приняла криволинейного движения, допустим, что удар пули произойдет в центр инерции доски и что движение пули горизонтальное. Толщина доски в месте удара пусть будет равна a.

7. Прошло t секунд с начала удара, т. е. с того момента, когда доска находилась в состоянии покоя, а пуля двигалась со скоростью c. Допустим, что теперь доска уже прошла расстояние y, а пуля проникла в плиту на глубину x, где она встречает силу сопротивления R, как мы приняли раньше.

Итак, когда доска за время t пройдет расстояние y, скорость ее будет $\frac{dy}{dt}$, а ускорение, найденное прежним способом, равно $\frac{N\,d\,dy}{2g\,dt^2}$, пуля же между тем проделала расстояние $x+y$, откуда ее скорость будет $\frac{dx+dy}{dt}$, а ускорение равно $\frac{M(d\,dx+d\,dy)}{2g\,dt^2}$; следует при этом отметить, что в самом начале было $x=0$ и $y=0$, а скорость доски первоначально $\frac{dy}{dt}=0$ и скорость пули равна $\frac{dx+dy}{dt}=c$ так, что в этот момент $\frac{dx}{dt}=c$.

8. Что касается движения доски, то явно, что оно ускоряется силой R. Ибо сила в то время, когда она противостоит движению пули, в равной степени воздействует обратно на доску и ускоряет ее движение, откуда вытекает первое уравнение

$$\text{I.}\qquad \frac{N\,d\,dy}{2g\,dt^2}=R, \quad \text{или} \quad \frac{d\,dy}{dt^2}=\frac{2gR}{N},$$

затем движение ядра замедляется той же силой R, откуда возникает второе уравнение:

$$\text{II.}\qquad \frac{M(d\,dx+d\,dy)}{2g\,dt^2}=-R \quad \text{или} \quad \frac{d\,dx+d\,dy}{dt^2}=-\frac{2gR}{M};$$

обоим написанным уравнениям должны следовать оба движения, а в силу этого и расстояния x и y.

В первую очередь полезно заметить, что величина R является функцией только самого x так, что из первого уравнения, взятого отдельно, ничего нельзя заключить.

9. Поэтому сначала исключим $d\,dy$, откуда получим следующее уравнение:

$$\frac{d\,dx}{dt^2} = -\frac{2g(M+N)}{MN}\cdot R;$$

умножив его на dx, получим после интегрирования:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C - \frac{4g(M+N)}{MN}\cdot\int R\,dx.$$

Если $\int R\,dx$ равен нулю при $x=0$, то наше уравнение принимает вид

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - \frac{4g(M+N)}{MN}\cdot\int R\,dx.$$

А если, как раньше, для всей толщины доски, равной a, положить

$$\int\frac{R\,dx}{M} = f,$$

то, для того чтобы пуля прошла через доску, необходимо, чтобы

$$cc > 4fg\,\frac{M+N}{N},$$

откуда становится понятным, что для пули нужна бóльшая скорость, если доска подвижна, чем в том случае, когда она неподвижна. Все это верно, за исключением того случая, когда вес доски очень велик по сравнению с весом пули, так как чем легче доска при постоянной толщине и твердости, тем бóльшая требуется скорость пули, чтобы она прошла сквозь доску. При определенной массе доски N вопрос о том, проникла ли пуля сквозь доску или нет, решается таким же образом, как и в случае неподвижной доски.

10. Наиболее интересным является исследование движения, которое доска принимает с некоторого данного момента. Для определения этого движения сложим оба ранее найденных уравнения, в результате чего величина R будет исключена; таким образом, получим уравнение

$$\frac{M\,d\,dx}{2g\,dt^2} + \frac{(M+N)\,d\,dy}{2g\,dt^2} = 0,$$

которое после интегрирования принимает следующий вид:

$$\frac{M\,dx}{dt} + \frac{(M+N)\,dy}{dt} = Mc,$$

поэтому, так как $\frac{dy}{dt}$ выражает скорость доски, мы будем иметь:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Mc}{M+N} - \frac{M\,dx}{(M+N)\,dt}.$$

Из этого уравнения видно, что в тех случаях, когда пуля не проходит доску насквозь, но задерживается на определенной глубине, где $\frac{dx}{dt} = 0$, доска будет двигаться со скоростью $\frac{Mc}{M+N}$.

Но если пуля с большой скоростью c проникнет насквозь через доску, то доска приобретет меньшее движение, чем в рассмотренном случае, как это будет скоро ясно. В этом явлении можно усмотреть немалый парадокс.

11. До тех пор, пока пуля не проникла насквозь, а остается в доске, что произойдет тогда, когда $\frac{dx}{dt} = 0$, определение движения не испытывает никаких затруднений. Ибо тогда скорость доски, как мы только что видели, будет

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \cdot c.$$

Рассмотрим теперь те случаи, при которых пуля проникает насквозь через доску, что произойдет при

$$cc > 4fg\frac{(M+N)}{N} = 4fg\left(1 + \frac{M}{N}\right).$$

Допустим ради краткости

$$4gf\left(1+\frac{M}{N}\right)=kk,$$

так, что k выражает такую скорость, при которой пуля еще может проникнуть через доску, и если $c=k$, вследствие $\frac{dx}{dt}=0$, то скорость доски после удара

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}\cdot k.$$

Ядро же застрянет на самом краю доски. Теперь допустим, что $c>k$ и $c=nk$, так что $n>1$; после удара мы будем иметь:

$$\frac{dx}{dt}=k\sqrt{(nn-1)},$$

откуда скорость доски после удара

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}\left(nk-k\sqrt{(nn-1)}\right)=\frac{M}{M+N}k\left(n-\sqrt{(nn-1)}\right).$$

Поэтому если n лишь немного превысит единицу, так что $n=1+a$, то скорость доски после удара будет равна $\frac{Mk}{M+N}(1-\sqrt{2a})$ (при этом a мы рассматриваем как бесконечно малую величину), откуда становится ясным, что скорость доски меньше, чем если бы было $n=1$.

12. Пусть n будет числом большим, чем единица, а поскольку после удара

$$\frac{dx}{dt}=k\sqrt{(nn-1)},$$

а скорость доски после удара

$$\frac{dy}{dt}=\frac{M}{M+N}k\left(n-\sqrt{(nn-1)}\right),$$

то скорость пули после удара будет:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\frac{Mnk}{M+N}+\frac{M}{M+N}k\sqrt{(nn-1)}.$$

Итак, рассмотрим несколько основных случаев, вытекающих из рассмотрения этого выражения.

Скорость пули до удара	Скорость доски после удара	Скорость пули после удара
I. $c=k$	$\frac{M}{M+N}k$	$\frac{M}{M+N}k$
II. $c=2k$	$\frac{M}{M+N}k(2-\sqrt{3})$	$\frac{k(2M+N\sqrt{3})}{M+N}$
III. $c=3k$	$\frac{M}{M+N}k(3-\sqrt{8})$	$\frac{k(3M+N\sqrt{8})}{M+N}$
IV. $c=4k$	$\frac{M}{M+N}k(4-\sqrt{15})$	$\frac{k(4M+N\sqrt{15})}{M+N}$
V. $c=5k$	$\frac{Mk}{M+N}(5-\sqrt{24})$	$\frac{k(5M+N\sqrt{24})}{M+N}$
VI. $c=6k$	$\frac{Mk}{M+N}(6-\sqrt{35})$	$\frac{k(6M+N\sqrt{35})}{M+N}$

13. Если n будет числом средней величины, так что приблизительно можно будет принять

$$\sqrt{(nn-1)}=n-\frac{1}{2n},$$

тогда скорость пули до удара будет $c=nk$, скорость доски после удара

$$\frac{Mk}{2n(M+N)};$$

скорость же пули после удара

$$nk-\frac{Nk}{2n(M+N)},$$

откуда становится ясным, что чем больше будет число n или чем больше будет скорость пули до удара, тем меньше будет скорость доски после удара, и скорость пули тем в меньшей мере будет убывать по сравнению со скоростью до удара, иными словами, потеря скорости, которую испытывает пуля, будет тем меньше.

Замечания к предшествующим решениям

14. Эти проблемы должны быть отнесены к теории столкновения тел. Эта теория составляет обычно предмет исследований не только в математике, но и в философии. Все различие состоит только в том, что в философии рассматриваются случаи, когда тело, производящее удар, проникает в другое тело, и даже проделывает себе проход, в то время как в обычной науке рассматриваются только такого рода тела, которые при столкновении не получают никаких деформаций, либо во всяком случае очень незначительные.

15. Итак, сопоставляя наше решение с общими представлениями, мы примем (не разграничивая в данном случае, продолжается ли столкновение или оно уже окончилось) скорость пули равной v и скорость доски равной u; поскольку $v=\frac{dx+dy}{dt}$ и $u=\frac{dy}{dt}$, то оба уравнения, найденные для второй задачи, после интегрирования примут следующий вид:

$$(v-u)^2=cc4g\,\frac{(M+N)}{MN}\int R\,dx$$

и

$$Mv+Nu=Mc,$$

из которых последнее воплощает то, что обычно называется количеством движения.

Это уравнение показывает, что количество движения или произведение массы обоих тел на их скорость постоянно сохраняется неизменным. Так как до столкновения доска находилась в состоянии покоя, то все количество движения было Mc, в момент же столкновения или после него количество движения равно $Mv+Nu$. Это сохранение количества движения предполагает наличие равномерного продвижения общего центра тяжести.

16. Чтобы также и первое уравнение привести к общепринятым понятиям, мы умножим его на MN и получим:

$$MN(v-u)^2=MNv^2-2MNvu+MNuu=$$
$$=MNcc-4g(M+N)\int R\,dx,$$

прибавим к нему квадрат второго уравнения, равный

$$MMv^2 + 2MNvu + NNuu = MMcc,$$

и получим сумму

$$M(M+N)v^2 + N(M+N)uu = (M+N)cc - 4g(M+N)\int R\,dx.$$

Это уравнение, деленное на $M+N$, принимает вид

$$Mv^2 + Nuu = Mcc - 4g\int R\,dx.$$

А это уравнение явно содержит понятия, известные под названием живых сил. Ибо Mcc есть вся живая сила до столкновения, Mvv—живая сила пули во время или после столкновения, а Nuu — живая сила доски.

17. Итак, отсюда видно, что ни в момент столкновения, ни после него вся живая сила не остается неизменной, но уменьшается, а именно на величину $4g\int R\,dx$. Это представляется противоречащим общепринятому принципу сохранения живых сил. Однако следует отметить, что сохранение живых сил только тогда имеет место, когда из этих сил ничего не исчезает.

Так как в нашем случае доска пробивается, и для того, чтобы проделать отверстие, должно быть затрачено немалое количество сил, то не удивительно, что совокупность живых сил здесь терпит ущерб, и даже из самого нашего анализа ясно, что интегральное выражение $\int R\,dx$ обозначает совокупность сил, затраченных на то, чтобы проделать отверстие.

18. Здесь не бесполезно будет показать, каким образом непосредственно из наших дифференциальных уравнений второй степени мы бы могли произвести расчет относительно живых сил. Первое из уравнений, найденных в пункте 8, помножим на dy, второе на $dx+dy$, и они, сложенные друг с другом, дадут следующее уравнение:

$$\frac{N\,dy\cdot d\,dy}{2g\,dt^2}+\frac{M\,(dx+dy)\,(d\,dx+d\,dy)}{2g\,dt^2}=-R\,dx,$$

которое после интегрирования даст:

$$\frac{N\,dy^2}{4g\,dt^2}+\frac{M\,(dx+dy)^2}{4g\,dt^2}=\frac{Mcc}{4g}=-\int R\,dx.$$

Введя же буквы v и u, мы тотчас получим уравнение

$$Nuu+Mvv=Mcc-4g\int R\,dx.$$

19. Итак, исходя из общепринятых принципов, которые широко используются в учении о столкновении тел, мы могли бы вывести решение нашей задачи, если бы только учли, что на проникновение пули внутрь доски затрачиваются определенные силы и что они в совокупности выражаются формулой: $4g\int R\,dx$.

Так как вся живая сила до столкновения была равна Mcc в момент столкновения, когда пуля уже проникла до глубины x, сумма живых сил равна $Mvv+Nuu$, из этого с необходимостью следует, что $Mvv+Nuu=Mcc-$ $-4g\int R\,dx$; другой же принцип количества движения или равномерного продвижения общего центра тяжести всегда выражается следующим уравнением:

$$Mv+Nuu=Mc,$$

которое в соединении с первым уравнением содержит полное решение нашей задачи.

20. В данном случае не будет лишено целесообразности в немногих словах изложить, как следует рассматривать те хорошо известные понятия количества движения и живых сил, на основании которых философы пытаются строить всю теорию движения, и в какой степени эти понятия соединимы с истинными и универсальными принципами механики. Во-первых, относительно истинных принципов механики следует помнить, что они исходят из единственного начала, в котором содержится соотношение между ускорениями и действующими силами и которое простирается так широко, что распространяется также и на жидкие тела. Это начало таково, что оно всегда приводит к дифференциальным выражениям второй степени, относительно которых надо далее рассмотреть, допускают ли они интегрирование.

21. В бесчисленных случаях подобного рода интегрирование осуществимо и, таким образом, можно прийти к дифференциальным формулам первой степени, которые можно раскрыть как скорости. И в нашем случае $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ означают скорости. Эти формулы после интегрирования выражают те понятия, которые обычно известны под наименованием количества движения или живой силы. Впрочем, уже давно замечено, что наименование «живая сила» неуместно, так как произведение массы какого-либо тела на квадрат скорости отнюдь не может быть сведено к понятию какой-либо силы.

22. Итак, такие принципы, относительно которых обычно полагают, что они отражают законы движения, должны рассматриваться только как следствия основного принципа механики. Так как они имеют место лишь при известных условиях в той мере, в какой можно интегрировать формулы второй степени, то они должны считаться только частными принципами, и их можно называть также вторичными или производными принципами, в то время как истинный принцип механики является единственным и наиболее всеобщим.

Более точное исследование предшествующих решений

23. Поскольку сила R, которую мы ввели в наше решение, не ограничивается никаким способом и ей не ставится никакого предела, то наше решение представляется наиболее общим и применимым ко всем решительно случаям. Ибо, каким бы образом проникание пули в доску ни противодействовало его продвижению вперед, всегда можно представить определенную силу, равную этому сопротивлению и обозначенную выше буквой R.

Поскольку, однако, величина R рассматривается нами как функция переменной x, обозначающей глубину проникания пули в доску, каким бы образом она ни зависела как от величины пули и ее формы, так и от твердости и толщины доски, если только эти величины рассматриваются как постоянные, постольку наше решение весьма часто может отходить от истины, так как непременно будут и такие случаи, когда сила сопротивления зависит не только от единственной переменной x, но, кроме того, и от некоторой другой, например, скорости. Но это требует более подробного объяснения.

24. С этой целью представим себе, что доска как бы наделена свойством флюида; в этом случае не будет никакого сомнения в том, что сопротивление зависит только от скорости и пропорционально ее квадрату. Итак, в этом случае величина R не будет функцией самого x, но скорее функцией скорости, с которой пуля проникает в доску и которую мы выразили формулой $\frac{dx}{dt}$. Легко понять, что если это сопротивление R зависит также от $\frac{dx}{dt}$, то способ интегрирования, которым мы пользовались, никоим образом не может иметь места, так как именно выражение $R\,dx$ рассматривалось как интегрируемое.

25. Итак, если бы доска как бы имела природу флюида, так что сопротивление отчасти состояло бы из функции самого x, как мы приняли, отчасти же из квадрата скорости, то наше решение никоим образом не могло бы остаться без изменения, в силу чего необходимо произвести исследование тех случаев, при которых к обычному сопротивлению доски присоединяется сопротивление, зависящее от свойств флюида. Но достаточно хорошо известно, что все сопротивление флюида возникает главным образом в силу того, что его частицы должны быть сдвинуты со своего места и им должно быть сообщено движение. Все это не может происходить без затраты сил, в то время как раньше буква R обозначала только такую противодействующую силу, которая замедляла движение пули, но сама не вызывала возникновения движения.

Итак, эти два случая сопротивления должны тщательно разграничиваться друг от друга.

26. Тот вид сопротивления, который прямо противопоставляет себя движению тела и как пружина отталкивает тело, мы назовем **абсолютным сопротивлением**, к нему относится то сопротивление, которое мы рассматривали выше. Другой же вид сопротивления, который в силу порождения нового движения возникает, например, во флюидах, всецело отличается от предыдущего вида, хотя и он также замедляет движение тела. После того как нами отмечено это различие, мы можем сделать следующий вывод: так как никакое отверстие не может быть проделано в доске без того, чтобы ее внутренние частицы не только были бы оторваны друг от друга, но и сдвинуты со своего места, то достаточно ясно, что в действительности должно иметь место сопротивление обоих видов.

27. Итак, для нашего случая необходимо выразить истинное сопротивление двумя частями, а именно, первая часть будет содержать абсолютное сопротивление, пропорциональное любой функции самого x. Это сопротивление мы обозначим, как и раньше, буквой R. Другая же часть, возникающая от нового движения и пропорциональная квадрату скорости, пусть будет выражена формулой $A\,\frac{dx^2}{dt^2}$, где $\frac{dx}{dt}$ обозначает скорость, с которой пуля проникает в доску. A есть некая величина, зависящая от плотности материала и величины отверстия. Таким образом, все сопротивление должно быть представлено следующей формулой: $R+A\,\frac{dx^2}{dt^2}$.

28. То, что вторая часть пропорциональна квадрату скорости, вытекает из следующего очевидного соображения. Представим себе некую массу M, находящуюся в покое, которая приводится в движение силой P. Допустим, что по прошествии времени t масса прошла расстояние s, и так как из уравнения движения

$$\frac{Md\,ds}{2g\,dt^2}=P,$$

то путем интегрирования мы получим

$$\frac{M\,ds^2}{4g\,dt^2} = Ps,$$

где $\frac{ds}{dt}$ обозначает скорость, приданную массе M.

Отсюда мы узнаем, что для того, чтобы данной, находящейся в покое массе, в то время как она продвигается на расстояние s, была придана данная скорость $\frac{ds}{dt}$, требуется движущая сила $P = M\frac{ds^2}{4gs\,dt^2}$. Эту формулу мы применим к нашему случаю, в котором пуля проникает далее в доску на расстояние dx, так что у нас $s = dx$. Между тем необходимо, чтобы определенная часть материи, которая занимала это пространство dx, была сдвинута со своего места, масса же этой части материи будет пропорциональна отчасти самому расстоянию dx, отчасти величине пули, а также и плотности вещества, из которого состоит доска. В силу этого масса, которую следует привести в движение, сможет быть выражена таким образом, что будет равна $C\,dx$; эту формулу следует написать вместо M, затем этой массе должна быть придана скорость, равная скорости пули, так чтобы было предоставлено место для продвижения ядра вперед, и, таким образом, эта скорость будет в нашем случае равна $\frac{dx}{dt}$; это выражение должно быть подставлено вместо $\frac{dy}{dt}$. Поэтому, чтобы массе $C\,dx$, которая приводится в движение на расстоянии $s = dx$, была бы придана скорость $\frac{dx}{dt}$, требуется движущая сила $\frac{C \cdot dx}{4g\,dt^2}$, которую мы выражаем прямо по формуле $A\frac{dx^2}{dt^2}$. Относительно этой формулы следует считать, что она как раз и представляет общий принцип движения.

29. Здесь мы принимаем, что пуля не только проникает прямо через доску, но также ударяет перпендикулярно по ее частицам. А если она производит удар под углом? Пусть прямая AB будет направлением движения, а DCE—передней поверхностью движущегося тела, которая, пройдя расстояние $Cc=dx$, приходит в положение dce; пусть угол наклона $DCB=\alpha$; проведем прямую $C\gamma$, нормальную к обеим наклонным прямым,— тогда становится ясным, что при движении тела нет необходимости, чтобы попадающиеся на его пути частицы были продвинуты на расстояние Cc, но они должны быть смещены только на расстояние $C\gamma$, которое относится к предыдущему расстоянию Cc, как синус α к 1, в силу чего достаточно, чтобы частицам была придана скорость $\frac{dx}{dt}\sin\alpha$; таким образом, при данном угле наклона сопротивление равно $\frac{C}{4g}\cdot\frac{dx^2}{dt^2}\sin\alpha^2$, т. е. оно пропорционально квадрату синуса угла наклона, а так как $\sin\alpha^2$ — величина постоянная, то ее значение может быть учтено величиною C. Поэтому не возникает необходимости уделять этому случаю особое место в нашем анализе.

Усовершенствование данного выше решения

30. Итак, чтобы приведенное выше решение освободить от упомянутого недостатка, необходимо лишь, чтобы в обоих найденных уравнениях вместо R было написано $R+\frac{A\cdot dx^2}{dt^2}$; при этом условии уравнения будут:

$$\frac{Nd\,dy}{2g\,dt^2}=R+\frac{A\cdot dx^2}{dt^2}; \quad \frac{M(d\,dx+d\,dy)}{2g\,dt^2}=-R-\frac{A\,dx^2}{dt^2};$$

сложив их, получим, как и раньше:

$$\frac{Md\,dx+(M+N)\,d\,dy}{2g\,dt^2}=0;$$

интеграл этого уравнения, как и выше, равен

$$\frac{M\,dx}{dt}+(M+N)\frac{dy}{dt}=Mc.$$

Для того же, чтобы найти второе интегральное уравнение, мы перенесем величину

$$\frac{d\,dy}{2g\,dt^2}=\frac{R}{N}+\frac{A}{N}\cdot\frac{dx^2}{dt^2}$$

из первого уравнения во второе:

$$\frac{d\,dx}{2g\,dt^2}=-\frac{(M+N)}{MN}R-\frac{(M+N)}{MN}A\frac{dx^2}{dt^2},$$

или

$$\frac{2d\,dx}{dt^2}=-4g\frac{(M+N)}{MN}\cdot R-4gA\frac{(M+N)}{MN}\frac{dx^2}{dt^2}.$$

Обозначив теперь для краткости

$$\frac{4g\,(M+N)\,A}{MN}=2\alpha,$$

мы получим следующее уравнение:

$$\frac{2d\,dx+2\alpha\,dx^2}{dt^2}=-4g\frac{(M+N)}{MN}.$$

Рассмотрим, каким образом его можно привести к виду, допускающему интегрирование.

31. Прежде всего мы видим, что сумма $d\,dx^2+\alpha\,dx^2$ становится интегрируемой, если ее умножить на $e^{\alpha x}$, ибо тогда будет:

$$e^{\alpha x}(d\,dx+\alpha\,dx^2)=de^{\alpha x}\,dx.$$

Итак, помножив наше уравнение на $e^{\alpha x}$, приведем его к следующему виду:

$$\frac{2de^{\alpha x}\,dx}{dt^2}=-4g\frac{(M+N)}{MN}e^{\alpha x}R;$$

чтобы это уравнение стало интегрируемым, помножим его на $e^{\alpha x}\,dx$. Мы получим интеграл

$$\frac{e^{2\alpha x}\,dx^2}{dt^2}=C-4g\frac{(M+N)}{MN}\cdot\int e^{2\alpha x}\cdot R\,dx,$$

причем, если мы примем, что интегральное выражение равно нулю при $x=0$, то величина постоянной C должна быть равна cc и, таким образом, после интегрирования это уравнение примет следующий вид:

$$\frac{dx^2}{dt^2}=e^{-2\alpha x}\cdot\left(cc-4g\,\frac{(M+N)}{MN}\int e^{2\alpha x}R\,dx\right);$$

это уравнение, соединенное с найденным прежде

$$\frac{M\,dx+(M+N)\,dy}{dt}=Mc,$$

представляет верное решение нашей второй задачи.

32. Относительно этого решения мы замечаем следующее: когда показатель степени $2\alpha x$ равен нулю и $e^{2\alpha x}=1$, тогда это решение полностью согласуется с предшествующим. Итак, оно только в той мере будет отличаться от предшествующего решения, в какой $2\alpha x$ не равно нулю. А так как при этом величина $e^{2\alpha x}$ тем больше превосходит единицу, чем больше будет показатель $2\alpha x$, то очевидно, что формула $e^{2\alpha x}\,R\,dx$ выражает бо́льшую величину, чем в случае, рассмотренном выше, а именно, тем бо́льшую, чем больше будет расстояние x, то есть чем толще будет доска. Кроме того, очевидно, что выражение $\int R\,dx$ само по себе составляет при $x=a$ большую величину; при умножении на $e^{2\alpha x}$ оно увеличивается еще больше. Поэтому, в то время как мы раньше для случаев, при которых пуля проникает сквозь всю доску, полагали

$$4g\frac{(M+N)}{MN}\cdot\int e^{2\alpha x}\cdot R\,dx=kk,$$

то если мы теперь предположим, что

$$4g\frac{(M+N)}{MN}\cdot\int e^{2\alpha x}\cdot R\,dx=kk,$$

то величина k будет больше, чем в предыдущем случае. Поэтому теперь скорость пули, необходимая для того, чтобы она проникла сквозь всю толщу доски, должна быть более значительна, чем та, которая требовалась в соответствии с предшествующим решением. По мере увеличения толщины доски эта разница будет все увеличиваться.

33. Когда пуля прошла насквозь через доску, то для ее скорости в момент выхода мы будем иметь:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha a}(cc - kk),$$

эта скорость будет меньше, чем в предшествующем случае, по двум причинам (разумеется, при той же скорости c до момента столкновения пули с доской). Во-первых, так как k больше, то разность $cc—kk$ гораздо меньше, чем раньше; кроме того, эта разность умножается на $e^{-2\alpha a}$, или, что то же самое, делится на $e^{+2\alpha a}$, т. е. на величину, бо́льшую единицы, поэтому скорость $\frac{dx}{dt}$ значительно уменьшается. Что же касается самого движения плиты, то, поскольку ее скорость для момента после проникновения ядра была найдена

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N}\left(c - \frac{dx}{dt}\right)$$

и поскольку, как мы только что видели, $\frac{dx}{dt}$ значительно меньше, чем в предшествующем случае, то теперь самой доске сообщается значительно бо́льшее перемещение, чем в предшествующем случае.

На основании этого расчета скорость пули, после удара равная $\frac{dx+dy}{dt}$, несколько увеличится, между тем как по формуле

$$\frac{dx+dy}{dt} = \frac{M}{M+N}\cdot c + \frac{N}{M+N}\cdot\frac{dx}{dt}$$

и поскольку $\frac{dx}{dt}$ меньше, чем в предшествующем случае, также и сама скорость пули окажется меньшей.

34. Приведем теперь также и эти формулы к общим понятиям и для всех случаев, вне зависимости от того, проникает ли пуля сквозь доску или нет; допустим, что скорость ядра после удара равна v, скорость же плиты равна u, и так как $\frac{dy}{dt} = u$; $\frac{dy}{dt} = v—u$, то оба наши уравнения примут вид:

$$Mv + Nu = Mc$$

и

$$(v-u)^2 = e^{-2\alpha x}cc - 4g\frac{(M+N)}{MN}e^{-2\alpha x}\cdot\int e^{2\alpha x}\cdot R\,dx,$$

из которых первое, как мы уже указывали, равным образом обозначает как сохранение количества движения, так и равномерное продвижение общего центра тяжести. Для того чтобы подсчитать живые силы, помножим второе уравнение на MN; получим:

$$MNvv - 2MNvu + MNuu =$$
$$= MNcce^{-2\alpha x} - 4g(M+N)\cdot e^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx;$$

прибавив к нему квадрат первого уравнения, получим:

$$M(M+N)vv + N(M+N)uu =$$
$$= Mcc(Me^{-2\alpha x} + N) - 4g(M+N)e^{-2\alpha x}\cdot\int e^{2\alpha x}R\,dx.$$

Это уравнение, деленное на $M+N$, примет вид:

$$Mvv + Nuu = \frac{Mcc}{M+N}(Me^{-2\alpha x} + N) - 4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx;$$

исходя из этого уравнения, можно видеть, что теперь сумма живых сил после удара не связана более столь непосредственно с живой силой до столкновения пули с доской, которая была равна Mcc, как это было в предыдущем случае. Ибо теперь

$$Mvv + Nuu = Mcc - \frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) - 4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx,$$

откуда следует, что живой силой, потерянной в момент столкновения пули с доской, будет

$$\frac{MMcc}{M+N}(1 - e^{-2\alpha x}) + 4ge^{-2\alpha x}\int e^{2\alpha x}R\,dx.$$

Однако совершенно не ясно, на основании какого вычисления можно сделать вывод относительно этой потери.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. П. МАНДРЫКА

ТРУДЫ Л. ЭЙЛЕРА В ОБЛАСТИ БАЛЛИСТИКИ

Научная деятельность Леонарда Эйлера охватывает необычайно широкий круг физико-математических проблем, причем наряду с чисто теоретическими исследованиями внимание Эйлера привлекают также задачи, имеющие непосредственное практическое значение. К этой второй категории работ Эйлера принадлежат его труды по баллистике, появление которых связано как с развитием артиллерии в XVIII столетии, так и с прогрессом физико-математических дисциплин.

В XVIII веке цеховой способ производства был заменен мануфактурным. Уровень промышленности значительно возрос, и были созданы условия для проведения важных реформ в артиллерии.

Число калибров орудий было сведено к минимуму, сконструированы и приняты на вооружение более прочные железные лафеты, созданы пушки, которые, обладая значительными начальными скоростями, могли вести стрельбу под большими углами бросания. Эти реформы проводились почти одновременно во всех государствах Европы, в которых уровень развития артиллерии был в то время наиболее высоким. Усовершенствования материальной части артиллерии и новые требования, выдвигаемые при ее боевом использовании, стимулировали развитие артиллерийской науки и в первую очередь баллистики.

В середине XVIII века значительно усилилось опытное изучение явлений, имеющих место при движении снаряда в канале ствола орудия и в воздухе. В 1740 году английский артиллерист Бенджамен Робинс сконструировал баллистический маятник и поставил с его помощью опыты по определению скоростей ружейных пуль. В последующие годы эксперименты были продолжены д'Арси и главным образом Хэттоном, построившим в 1775 году подобный же прибор для измерения скоростей артиллерийских снарядов при стрельбе из пушек небольшого калибра. Баллистический маятник давал возможность определять скорости довольно грубо. Тем не менее для своего времени он сыграл безусловно положительную роль и только в середине XIX века был заменен электромагнитным хронографом. Можно согласиться с известным французским баллистиком и автором единственного значительного труда по истории этой артиллерийской науки Шарбонье[1]), что баллистический маятник положил начало развитию экспериментальной баллистики. Была открыта возможность более достоверного опытного определения величины дульной скорости, что разграничило внутреннюю и внешнюю баллистику и способствовало формированию первой из них в самостоятельную дисциплину.

Одна из важных задач механики в XVIII веке заключалась в определении траектории материальной точки, перемещающейся под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха, направленной в сторону, противоположную вектору скорости. Эта проблема именуется в настоящее время *основной задачей внешней баллистики*. Теоретические изыскания по решению этой задачи первоначально строились на базе аналитических, а позднее численных методов расчета.

Ньютону в 1686 году не удалось найти траекторию материальной точки в предположении квадратичного закона сопротивления, выведенного им в результате теоретических и опытных изысканий. В дальнейшем эта задача не переставала привлекать внимание наиболее

---

[1]) Charbonnier, Essais sur l'histoire de la Ballistique. Mémorial de l'artillerie française, VI, 1927.

выдающихся ученых мира. После Ньютона и Гюйгенса, еще пользовавшихся геометрической формой изложения при решении задач внешней баллистики, дальнейшие изыскания следуют по пути аналитической интерпретации.

В 1707—1710 гг. Вариньон излагает в аналитической форме результаты Ньютона и Гюйгенса. Совершенствуя параболическую теорию, Гине в 1707 и Мопертюи в 1731 гг. излагают ее аналитически. Основываясь на той же форме изложения, Тейлор и Герман предпринимают попытку разрешить основную задачу баллистики на основе квадратичного закона сопротивления. По этому пути устремляют свои усилия Иоганн Бернулли и Леонард Эйлер, и им первым удается прийти к конечному решению задачи.

До появления баллистического маятника ученые исходили в вопросах изучения движения снаряда в канале ствола орудия чаще всего из априорных предположений. После создания первого в мире баллистического прибора ученые получили возможность оперировать с данными эксперимента, пусть даже не очень точными. В задачу внутренней баллистики входило в то время теоретическое определение дульной скорости, установление влияния на ее величину утечки пороховых газов через зазор и запал[1]), выбор наивыгоднейшего веса заряда и рациональной длины ствола, а также определение толщины стен ствола. После работ Даниила Бернулли и Биго де Морога эта артиллерийская дисциплина все более становится на путь опыта, постепенно превращаясь к концу XVIII века в эмпирическую науку. Всеми перечисленными проблемами внутренней баллистики занимался и Эйлер, сосредоточивший основную часть исследований в этой области в труде 1745 года, о котором будет сказано ниже. Эйлер и Робинс первыми воспользовались

---

[1]) Зазор — отверстие между поверхностью снаряда и канала ствола, образующееся вследствие разницы в величине диаметров их поперечных сечений; запал — отверстие в казенной части орудия, посредством которого огонь сообщается пороховому заряду.

новым орудием эксперимента при разработке теории движения снаряда в канале ствола орудия.

Леонарду Эйлеру принадлежит значительное место в разрешении важнейших проблем артиллерийской науки. Баллистика является лишь одной из многочисленных областей естествознания, в которых столь успешно работал этот крупный ученый. На протяжении почти 45 лет, начиная с 1727 г. и кончая 1771 годом, Эйлер интересовался вопросами баллистики, эпизодически возвращаясь к разработке ее проблем. За это время им было опубликовано всего пять работ, однако ценность их исключительно велика. Баллистические работы Эйлера тесно связаны с его изысканиями во многих других областях естествознания. Достаточно сказать, что его исследования по физике, в частности мемуар[1]) 1729 года, посвященный изучению упругости воздуха, а также некоторые разделы его известных «Писем к принцессе»[2]) открыли ему путь к изучению горения пороха и построению теории, с помощью которой он объяснял выделение энергии, при взрывчатом превращении пороха. Эти же работы были использованы Эйлером при анализе явлений, имеющих место при обтекании твердого тела идеальной упругой жидкостью. Труды Эйлера по баллистике основаны на широком использовании математики и механики и зиждутся на достижениях, полученных им самим или его современниками. Некоторые из результатов Эйлера по механике получили приложение в баллистике только значительно позднее. Опубликованный в 1765 году труд[3]) по динамике твердого тела лег в основу построенной в середине XIX века теории движе-

---

[1]) Euler L., Tentamen explicationis phaenomenorum aeris. Comm. Acad. Sc. Petrop., 1729, т. 2.

[2]) Euler L., Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie, 1768, т. I, II; 1772, т. III.

[3]) Euler L., Theoria motus corporum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata, 1765, Росток и Грейфсвальд; Euler L., Opera omnia, серия 2, тт. 3, 4.

ния вращающегося продолговатого снаряда в воздухе, положившей начало современной внешней баллистике. Ясно, что мемуары Эйлера по баллистике невозможно изучать вне связи с другими его трудами физико-математического направления. Исследования Эйлера по артиллерийской науке являются плодом его усиленной работы в ряде областей точного естествознания.

В 1862 году, уже после смерти Эйлера, был опубликован его мемуар[1]) «Meditatio in experimenta tormentorum nuper instituta» («Размышления по поводу недавно предпринятых опытов стрельбы из орудий»). Позднее, в 1922 году, статья вошла[2]) вместе с другими исследованиями Эйлера по баллистике в XIV том его полного собрания сочинений «Opera omnia», издаваемого в Швейцарии.

Редактор XIV тома и автор вводной статьи и комментариев к нему Шеррер датирует работу Эйлера 1727 или 1728 годом, основываясь на слове «недавно» (nuper), стоящем в заглавии мемуара. Приводимый Шеррером довод нельзя считать достаточным, так как он говорит лишь о том, что работа Эйлера написана им непосредственно после петербургских опытов.

Работа Эйлера 1727—1728 годов является его первым по времени исследованием по баллистике и написана в связи с проводившимися в 1727 году в Петербурге опытными стрельбами, научной стороной которых руководил Даниил Бернулли. Эксперименты заключались в измерении полного времени полета сферического снаряда, выброшенного из пушки вертикально вверх. Стрельба велась из орудий с различной длиной канала ствола изменяющимися зарядами.

Обработке результатов петербургских опытов Бернулли посвятил часть своего большого мемуара[3]) 1729 года. Бернулли ставил перед собой задачу по полному измеренному времени движения снаряда в воздухе

---

[1]) Euler L., Opera postuma, 1862, т. 2, стр. 800—804.

[2]) Euler L., Opera omnia, 1922, серия вторая, т. XIV, стр. 468—478.

[3]) Bernoulli D., De actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis, Comm. Acad. Sc. Petrop., 1729, т. 2.

найти высоту его полета, а также раздельно время подъема и падения. На основе квадратичного закона сопротивления Бернулли составил уравнение, для решения которого он использовал специально разработанный им метод последовательных подстановок. Мемуар Эйлера преследовал те же цели, базировался на методе Бернулли и на данных петербургских опытов. Отличие исследований заключалось лишь в значениях, выбранных Бернулли и Эйлером для удельного веса железа, из которого были изготовлены снаряды.

Необходимо отметить, что в своем мемуаре Эйлер, как впервые заметил Энестрем, ввел обозначение «е» для основания натуральных логарифмов. Проведенные Эйлером выкладки содержат ряд неточностей. Шеррер объясняет их небрежной записью в протоколе, которым пользовался Эйлер. Содержащиеся в статье 1727—1728 годов дефекты дают основания Шерреру заключить, что Эйлер не считал исследование завершенным, почему своевременно и не опубликовал его.

Большее значение, чем только что охарактеризованная работа Эйлера по баллистике, имело исследование, помещенное в его труде по механике «Mechanica sive motus scientia analytica exposita» («Механика или наука о движении, изложенная аналитически»), изданном в Петербурге в 1736 году. Позднее, в 1848 году, книга была переведена на немецкий язык[1], а в 1912 году издана в Швейцарии[2]. Шестая глава, названная «De motu curviline puncti liberi in medio resistente» («О свободном криволинейном движении точки в сопротивляющейся среде») интересна прежде всего тем, что в ней Эйлер впервые обращается к решению основной задачи внешней баллистики, которой ранее занимались многие крупные ученые, в том числе Ньютон, Гюйгенс, Тейлор, Герман и Иоганн Бернулли.

---

[1]) Euler L., Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläutetungen, 1848.

[2]) Euler L., Opera omnia, 1912, серия вторая, т. I, II.

Вплоть до второй половины XVIII века задача по определению траектории движения материальной точки при квадратичном законе сопротивления воздуха представляла чисто математический интерес. Несмотря на то, что уже с конца XVI столетия было обнаружено, что истинная траектория артиллерийского снаряда значительно отличается от параболической, практика и в первой половине XVIII века продолжала вполне удовлетворяться теорией Галилея. Это объяснялось тем, что параболической теорией пользовались при стрельбе только под большими углами бросания из мортир и гаубиц, обладавших небольшими начальными скоростями. В этом случае истинная траектория сравнительно немного отличалась от параболической. Кроме того, рассеивание точек падения снарядов было настолько велико, что отклонения в дальности перекрывали разность между вычисленной и средней дальностью, наблюдаемой в действительности. Все это обусловливало жизненность параболической теории, успешно применявшейся в артиллерийской практике в течение нескольких столетий и имеющей приложение в некоторых случаях и теперь.

В начале XVIII века решение основной задачи внешней баллистики было осложнено тем, что математический аппарат, которым располагали ученые, был еще недостаточно совершенен. В 1719 году[1]) Иоганн Бернулли впервые решил основную задачу внешней баллистики, а в 1721 году[2]) установил уравнение годографа скоростей. Оно было выведено из дифференциальных уравнений, полученных на основе теоремы Гюйгенса о нормальной и касательной составляющих сил, действующих на материальную точку, перемещающуюся по криволинейной траектории. Бернулли исходил из закона сопротивления воздуха, пропорционального

---

[1]) Bernoulli I., Roesponsio ad non nennis provocationem ensque solutio quaestionis ipsia ab eodem propositae de invendienda linea curva, quam describit projectile in medio resistente, Acta eruditorum, 1719 u. Opera omnia. 1742, т. 2.

[2]) Bernoulli I., Operatio analytica. Acta erud., 1721, стр. 228; Opera omnia, 1742, т. 2, стр. 513—516.

произвольной степени скорости и свел решение к квадратурам. Результат Бернулли носил чисто математический характер и не мог быть использован в практике.

В 1736 году Эйлер последовал методу Бернулли. Решение Эйлера являлось развитием изложенного Бернулли в его мемуарах и сводилось к квадратурам, которые отличались от полученных его предшественником своей формой. Исследование Эйлера в настоящий сборник не включено, так как является органической частью его книги по механике.

Несомненную ценность имеет труд Эйлера — его добавления к одной из наиболее интересных книг по артиллерии XVIII века «New principles of gunnery» [1]), принадлежавшей перу английского артиллериста Бенджамена Робинса и опубликованной в 1742 году. Выход в свет книги Робинса явился крупным событием в артиллерии. Положенный в основу труда экспериментальный материал по измерению скоростей ружейных пуль с помощью баллистического маятника давал новые возможности для разработки теоретических разделов артиллерии. Всесторонне образованный и знающий инженер, Робинс глубоко проанализировал полученные новые данные и пришел к ряду весьма ценных результатов как в области внешней, так и внутренней баллистики.

Труд Робинса «New principles of gunnery» привлек внимание Эйлера прежде всего богатством содержащегося в нем экспериментального материала. Сконструированный Робинсом баллистический маятник он считал наиболее выдающимся открытием в артиллерии за весь предшествовавший вековой период ее развития. С добавлениями Эйлера книга Робинса была опубликована в переводе на немецкий язык в 1745 году [2]). Не считая

---

[1]) Robins B., New principles of gunnery containing the determination of the force of gunpowder and investigation of the difference in the resisting power of the air to swift and slow motions, 1742, London.

[2]) Eiler L., Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewalt der Pulvers nebst einer Untersuchung

вводной статьи Эйлера, в книге было 720 страниц, причем по объему добавления Эйлера в пять раз превышали текст Робинса. Построенные на солидной экспериментальной базе и на широком использовании математического аппарата, результаты Эйлера были крупными достижениями в области артиллерийской науки своего времени и в некоторых своих частях не потеряли научной ценности и теперь. Широкое использование математического аппарата — характерная черта творчества ученых XVIII века в области точного естествознания — было свойственно Эйлеру и особенно ярко проявилось в его труде 1745 года.

Первая глава рассматриваемого труда, посвященная вопросам внутренней баллистики, занимает в книге видное место как по содержанию, так и по объему. Результаты, полученные Эйлером, имели большое значение для развития этой дисциплины и во многом опередили свое время.

Ученые XVIII века в своих исследованиях по внутренней баллистике исходили из понятия «упругой силы» пороха. Величиной этой характеристики, измеряемой полным пиростатическим давлением при плотности заряжания, равной единице, они оценивали энергию, выделяемую при взрывчатом превращении пороха. В соответствии с уровнем развития физики того времени ученые рассматривали пороховые газы как идеальную упругую жидкость и полагали, что при сгорании дымного пороха весь он превращается в газы. В таком случае величина полного пиростатического давления совпадала со значением удельной эффективности пороха (силы пороха). В своих исследованиях ученые XVIII века исходили из закона Бойля — Мариотта, который представляли в форме, близкой к выведенной Ноблем

über den Unterschied des Widerstand des Luft in schnellen und langsamen Bewegungen, aus dem Englischen des Hrn. Benjamin Robins übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und mit vielen Anmerkungen versehen, 1745, Berlin; Euler Opera omnia, 1922, серия вторая, т. XIV, стр. 3—409.

и Эйблем. Первыми получили такую зависимость Биго де Морог и Робинс.

Эйлер много сделал для уточнения формулы величины «упругой силы» пороха. Во-первых, он принял в расчет, что при взрывчатом превращении пороха не весь он обращается в газы. Некоторая часть пороха остается в виде нелетучих продуктов превращения. В формулу для определения величины «упругой силы» пороха была введена составная часть приведенного удельного коволюма, учитывающая объем нелетучих продуктов взрывчатого превращения пороха, в результате чего эта зависимость еще более приблизилась к форме для выражения полного пиростатического давления, установленной Ноблем и Эйблем. В таком случае величина «упругой силы» пороха уже не совпадала со значением удельной эффективности. Эйлер установил, во-вторых, что при больших давлениях, какие развиваются при взрывчатом превращении пороха, закон Бойля — Мариотта не отвечает действительности. Основываясь на структуре воздуха, изложенной им в 1729 году, он нашел, что существует определенная граница плотности воздуха, далее которой его сжать невозможно. Исходя из этого положения, Эйлер нашел формулу сжимаемости, в которую он ввел величину, аналогичную коволюму. Формула служила ему основой при решении задачи о движении ядра в канале ствола орудия и при разработке теории истечения пороховых газов через дульный срез ствола, через запал и зазор.

Предшественниками Эйлера по изучению движения ядра в канале ствола орудия и, в частности, по теоретическому определению величины дульной скорости были Даниил Бернулли, Биго де Морог и Робинс. Они принимали положение, что до начала движения ядра весь заряд обращается в пороховые газы, т. е. принимали так называемую гипотезу мгновенного сгорания заряда. Это допущение не вполне отвечало действительности. Но для быстро горящего дымного пороха оно было в первом приближении вполне приемлемым и оказалось весьма плодотворным. Решение основной задачи внутренней баллистики базировалось на этом положении вплоть до конца XIX века. Предшественники Эйлера полагали, что на ядро действует лишь одна сила, обусловленная давлением пороховых газов, и пользовались в качестве закона расширения формулой Бойля — Мариотта.

Разработку теории движения ядра в канале ствола орудия Эйлер начинал с решения той простейшей задачи, которую ставили перед собой Даниил Бернулли, Биго де Морог и Робинс. Новое в теории Эйлера заключалось в усложнении постановки задачи и в расширении границ принимаемых допущений. Первым шагом в этом направлении было определение дульной скорости с учетом сил, замедляющих движение ядра по каналу, т. е. сил, обусловленных действием сопротивления воздуха и атмосферного давления, а также силы трения, возникающей между поверхностью ядра и стенками канала. В результате он нашел, что перечисленные сопротивления не сказываются сколько-нибудь существенно на величине дульной скорости. Это позволило Эйлеру при решении более сложных задач абстрагироваться от учета перечисленных факторов. Усложнение задачи состояло в построении теории движения ядра в канале ствола с учетом перемещения массы пороховых газов и нелетучих продуктов разложения. При этом Эйлер основывался на установленной им формуле упругости, которую он систематически применял при разработке вопросов, связанных с движением ядра по каналу ствола и при истечении пороховых газов. Таким образом, он приблизил постановку задачи к действительности, отойдя от схемы, которую рассматривали ученые, занимавшиеся этим вопросом до него. Установив факт неравномерности распределения давлений в заснарядном пространстве для каждого данного момента времени, Эйлер счел возможным принять давление в каждом слое газа постоянным и равным некоторому осредненному его значению, т. е. придерживался допущения Бернулли и Робинса. Первая попытка построить теорию движения ядра в канале ствола орудия так, как ее поставил Эйлер в 1745 году, т. е. в предположении, что давление в различных слоях газов заснарядного пространства неодинаково, принадлежало Лагранжу, давшему свое решение в 1793 году.

Следующим этапом по пути усложнения задачи была разработка теории, основанной на допущении, что пороховой заряд сгорает в течение всего времени перемещения ядра по каналу, т. е. на основе гипотезы постепенного сгорания заряда. Это была весьма смелая для середины XVIII века попытка. Решить задачу в такой ее постановке было очень сложно как вследствие трудности облечь ее в математическую форму, так и затруднений, связанных с интегрированием полученных уравнений. Впервые в баллистической литературе Эйлер ввел зависимость, связывающую сгоревшую часть заряда с изменяющимся с течением времени расстоянием ядра до дна канала. Базируясь на установленной им формуле сжимаемости, Эйлер пришел к решению, отличавшемуся большой громоздкостью, что затрудняло его практическое использование. Для того чтобы дать возможность воспользоваться теорией для приложений, он принял некоторое компромиссное предположение, а именно допустил, что к началу движения ядра бо́льшая часть заряда обращается в газообразные продукты, в то время как другая его часть вовсе не сгорает. В таком виде формула Эйлера была использована Ломбаром при расчете дульных скоростей орудий, состоявших на вооружении французской артиллерии.

Интересна созданная Эйлером теория истечения пороховых газов через отверстие дульного среза ствола и через запал и зазор, явившаяся зачатком той теории, которая сформировалась в начале XX века в самостоятельную дисциплину — баллистику не вполне замкнутого пространства.

В задачу исследования вопроса об истечении газов через отверстие дульного среза ствола при их свободном расширении входило определение скорости их истечения, которую в XVIII веке рассматривали как предельную скорость, которая может быть достигнута артиллерийским снарядом. Эйлер исследовал этот вопрос одновременно с изучением движения ядра в канале ствола при допущении, что вместе с пороховыми газами перемещаются и нелетучие продукты взрывчатого превращения.

В разработке теории истечения газов через запал и зазор Эйлер исходил из работы Даниила Бернулли [1]) 1738 года. Однако в отличие от него Эйлер принимал, что площадь сечения запала и зазора достаточно велика по отношению к площади поперечного сечения канала, а скорость движения ядра не так уж мала сравнительно со скоростью истечения газов. Основываясь на предположении, что к началу движения ядра только часть заряда обратилась в пороховые газы, а другая осталась несгоревшей, Эйлер нашел формулу, позволявшую вычислить величину дульной скорости с учетом прорыва газов через запал и зазор. Как и в предыдущем случае, он учитывал движение нелетучих продуктов сгорания и пользовался своей формулой сжимаемости. В последующие годы ученые-артиллеристы не прекращали заниматься изучением влияния прорыва газов на величину дульной скорости. Изыскания в этой области устремились главным образом по экспериментальному пути.

Выбор наивыгоднейшего веса порохового заряда и рациональной длины канала ствола, т. е. решение вопросов, входящих в задачу проектирования ствола орудия, интересовал артиллеристов со времен Тартальи. Эти вопросы не переставали привлекать внимание и ученых XVIII века. Даниил Бернулли, Биго де Морог и Робинс пытались искать наивыгоднейший вес заряда, исходя из построенных ими теорий. В трудах этих ученых нашло отражение и исследование влияния длины канала на величину дульной скорости. Эйлер не остался в стороне от разрешения чисто практических задач, связанных с проектированием орудий. Пользуясь формулой для дульной скорости, выведенной с учетом

---

[1]) Bernoulli D., Hydrodinamica, sive de viribus et motibus fluidorum. Comm. opus academicum, 1738 (8).

движения массы пороховых газов и нелетучих продуктов превращения, он составил таблицы, дающие значение дульной скорости для орудий различного калибра в зависимости от относительного веса заряда и длины канала ствола, выраженной в калибрах. Этими таблицами Эйлер предлагал пользоваться для выбора наивыгоднейшего веса заряда и рациональной длины ствола. Одновременно он предложил оригинальный метод, позволявший найти наилучший вариант орудия данного калибра, т. е. наиболее целесообразное сочетание веса заряда и длины канала для данной начальной скорости. Иными словами, Эйлер заложил здесь основы теории баллистического проектирования ствола орудия. Таковы проблемы внутренней баллистики, разрешенные Эйлером в труде 1745 года, где были сосредоточены его важнейшие изыскания в этой области артиллерийской науки.

Вторая глава книги Эйлера «Neue Grundsätze der Artillerie» трактует вопросы внешней баллистики. Проблемы, стоявшие перед этой наукой в XVIII веке, заключались, как уже говорилось выше, в изучении сопротивления воздуха движению артиллерийского снаряда, т. е. проведении экспериментальных изысканий, имеющих целью получить более достоверный опытный материал и в установлении на его основе аналитической зависимости, связывающей силу сопротивления воздуха со скоростью. Другой задачей являлось создание метода вычисления траектории материальной точки, перемещающейся под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха. На разрешение этих двух задач и были устремлены исследования Эйлера, помещенные в его труде 1745 года.

Проведенные Робинсом опыты показали, что для значительных скоростей квадратичный закон непригоден. Выяснилось, что для согласования теории с действительностью необходимо было найти другую аналитическую зависимость, связывающую силу сопротивления воздуха со скоростью. Эта задача была разрешена в результате теоретических изысканий Эйлера, построенных на анализе экспериментального материала Робинса.

Опыты привели Робинса к выводу, что при значительных скоростях сопротивление воздуха возрастает быстрее, чем квадрат скорости. Он объяснял это тем, что воздух вследствие своей упругости не заполняет пустоты, которая образуется позади движущегося тела. Действующее на головную часть тела давление не уравновешивается, что и обусловливает возникновение того дополнительного сопротивления, которое Робинс наблюдал в своих опытах.

Эйлер начинает свои добавления ко второй главе с теоретического исследования вопроса. Работа открывала цикл его трудов по гидродинамике и содержала теорию обтекания твердого тела идеальной несжимаемой и упругой жидкостью. Эйлер считал, что при медленном движении тела сопротивление обусловлено уменьшением его количества движения за счет изменения скорости частиц жидкости в обтекающих тело струях и их отклонения от первоначального направления. При больших скоростях тел сопротивление сильно возрастает. Это связано с упругостью воздуха, которая обусловливает возникновение разреженности позади тела. Эйлер находит выражение для силы сопротивления в зависимости от формы хвостовой части и устанавливает выражение для определения его величины. Исследование Эйлера представляет интерес, как одна из первых попыток теоретического изучения обтекания твердого тела жидкостью. Она служит ему основой для анализа материалов опытов Робинса при выводе закона сопротивления воздуха движению артиллерийского снаряда.

После изучения опытов Ньютона и Робинса, показавших Эйлеру, что квадратичный закон сопротивления имеет место лишь для небольших скоростей, он пришел к закону, справедливому для скоростей, изменяющихся в более широких границах. Это была двучленная формула сопротивления, первый член которой пропорционален квадрату, а второй — четвертой степени скорости, на базе которой Эйлер и решает в 1745 году основную задачу внешней баллистики.

Изучаемый Эйлером диапазон скоростей включал скорость звука. Вблизи этой критической точки сила сопротивления, как известно, резко возрастает. Это обстоятельство затрудняло аналитическое представление закона сопротивления воздуха. Однако во времена Эйлера рассматриваемые скорости заключались в довольно узких границах, почему ему удалось выразить закон простой двучленной зависимостью. Позднее, в XIX веке, когда скорости артиллерийского снаряда значительно возросли, стало невозможным вывести для закона сопротивления простую формулу для всего участка скоростей. Выход был найден в использовании зональных зависимостей.

В 1745 году Эйлер решал основную задачу внешней баллистики для двучленного закона сопротивления воздуха на основе численного метода интегрирования дифференциальных уравнений движения, которые были представлены в форме, весьма близкой к употребляемой теперь. Слабая сторона метода заключалась в применении медленно сходящихся рядов, что делало способ недостаточно точным. Эйлер разработал метод лишь для случая навесной стрельбы с небольшими начальными скоростями, для которых, вообще говоря, и квадратичный закон сопротивления достаточно хорошо отражает действительность. Чрезвычайная сложность метода приводила к невозможности его практического применения.

Эйлер предложил в том же 1745 году метод вычисления элементов траектории при горизонтальной стрельбе. В основу метода было положено допущение, что при значительных скоростях траектория снаряда на начальном участке мало отличается от прямолинейной. В основу этого способа было положено раздельное определение понижения снаряда под действием силы тяжести и вычисление элементов движения по горизонтальному участку, когда на ядро действует одна лишь сила сопротивления воздуха. В 1783 году Ломбар воспользовался методом Эйлера при разработке способа решения задач прицельной стрельбы. Теория Эйлера послужила ему основой при составлении таблиц прицельной стрельбы, опубликованных в 1787 году[1]).

Добавления Эйлера сильно повысили ценность книги Робинса и фактически превратили ее в самостоятельный труд великого математика. Именно Эйлеру книга обязана тем чрезвычайным интересом, с каким она была встречена в артиллерийских кругах целого ряда государств. Соединение усилий двух выдающихся ученых — Робинса и Эйлера — дало необыкновенные для своего времени результаты. Достижения обоих ученых пробудили большой интерес не только к изучению самого труда, но и к разработке трактуемых в нем вопросов.

Сочинение Эйлера почти одновременно было переведено на французский и английский языки. Крупный французский артиллерист Ломбар ознакомился с немецким изданием книги в 1748 году. В том же году он приступил к ее переводу, который закончил через три года. Однако перевод Ломбара увидел свет много позднее, в 1783 году [2]). На английский язык труд был переведен Брауном [3]) в 1777 году и издан в прекрасном по тому времени оформлении.

Книга Эйлера получила широкое распространение в качестве руководства по артиллерии в государствах Западной Европы. Труд был встречен с большим одобрением в военных кругах Франции. Морской министр Тюрго много способствовал переводу труда на французский язык и принятию его в качестве учебного пособия

---

[1]) Lombard, Tables du tir des canons et des obusiers, 1787.

[2]) Nouveaux Principes d'Artillerie de M. Benjamin Robins commentés par M. Léonard Euler. Traduits de l'allemand avec des notes par M. Lombard, Proffeseur royal. Aux Ecoles d'Artillerie à Auxonne.

[3]) Euler L., The true principles of gunnery invistigated and explained. Comprehending translations of professor Eulers observations upon the new principles of gunnery, published by the late Mr. Benjamin Robins and that cellebrated autors. Discoure upon that track described by a body in a resisting medium, inserted in the memoirs of the Royal academy of Berlin of the Year 1753.

в артиллерийских школах. В Англии и Пруссии книга получила не меньшую известность.

В 1755 году вышла в свет наиболее ценная работа Эйлера по баллистике, занимающая по своему значению центральное место среди его трудов в этой области артиллерийской науки. Исследование Эйлера «Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un au tre fluide quelconque» было представлено Берлинской Академии наук в 1753 году и помещено в ее мемуарах [1]). В 1777 году этот сравнительно небольшой по объему труд был издан на английском языке Брауном одновременно с работой Эйлера 1745 года.

Мемуар 1753 года Эйлер посвятил решению основной задачи внешней баллистики на базе квадратичного закона сопротивления воздуха. Работа была подготовлена предшествовавшим развитием внешней баллистики и отвечала новым запросам артиллерийской практики.

В середине XVIII столетия опыты Робинса и других ученых вскрыли недостоверность закона Ньютона. В это время принимаются на вооружение орудия, которые обладали сравнительно большой начальной скоростью и могли вести стрельбу под значительными углами бросания. Машинный способ производства дал возможность уменьшить допуски в обработке канала ствола и артиллерийских снарядов, что значительно снизило рассеивание точек падения снарядов в дальности. Иными словами, практика требовала вычисления траектории снаряда уже с учетом действия силы сопротивления воздуха. Эти обстоятельства поставили ученых в необходимость искать решение основной задачи внешней баллистики уже в практическом ее приложении, почему в последней четверти XVIII века появляется целая серия исследований, посвященных решению этой проблемы. Среди них особо важное место занимает мемуар Эйлера.

---

[1]) Memoires de l'Académie royale des Sciences et belles lettres, 1755, т. IX, стр. 321—355; Eileri L., Opera omnia, 1922, серия вторая, т. XIV, стр. 413—448.

Эйлер дал метод интегрирования уравнений движения, распространенный позднее Башфортом и Н. А. Забудским на закон сопротивления воздуха, выраженный одночленами с показателями степени, равными трем и четырем. Способ получил известность под наименованием общего метода Эйлера. Одновременно в 1753 году был предложен метод вычисления траектории снаряда по дугам. Эйлер разработал, наконец, и схему составления таблиц стрельбы. В итоге был найден имеющий практическое значение метод решения основной задачи внешней баллистики. Попытка воспользоваться способом Эйлера для практики была предпринята сразу после публикации его мемуара. Уже в 1764 году офицер прусской артиллерии Гревениц обратился к методу Эйлера для составления специальных таблиц. Работа по их вычислению проводилась под руководством профессора математики университета в Ростоке Карстена, состоявшего по этому вопросу в переписке с Эйлером, который не переставал интересоваться доведением разработанного им метода до использования в артиллерийской практике. После Гревеница таблицы, рассчитанные по способу Эйлера, постоянно совершенствовались. В XVIII веке более удобные для практики таблицы были составлены Ламбертом и Брауном, а в XIX — Обенхеймом, Лежандром и, наконец, в 1842 году Отто, которые после их усовершенствования Сиаччи в 1886 году продолжают употребляться и теперь.

В стороне от общего направления работ Эйлера в области артиллерийской науки лежит последнее по времени исследование «De Ictu glandium contra tabula explosarum» («Об ударе пуль при стрельбе по доске»), опубликованное в Петербурге в 1771 году[1]). Мемуар посвящен теории проникновения пули в доску.

До конца XIX века вопросы, связанные с действием пули или вообще артиллерийского снаряда на всевозможные преграды включались в специальные курсы

[1]) Novi Comm. Petrop., 1771, т. XV, стр. 414—436; E u l e r i L., Opera omnia, 1922, серия вторая, т. XIV, стр. 448—468.

баллистики[1]). В настоящее время решение такого рода задач уже не входит в круг вопросов, которыми занимается баллистика, а является предметом другой артиллерийской науки, изучающей эффективность действия снарядов у цели. Мемуар Эйлера не представляет непосредственного интереса для баллистики и включен в сборник, чтобы показать, как в своем последнем по времени исследовании он решал задачу о движении материальной точки в сопротивляющейся среде.

Изучая проникновение пули в доску в двух случаях, когда она неподвижна или может перемещаться в горизонтальном направлении, Эйлер пользовался дифференциальным уравнением движения, выраженном через вторую производную от координаты по времени. Ту же задачу он решал и с помощью уравнения сохранения количества движения для системы материальных точек и уравнения живых сил. Принималось, что действующее на пулю сопротивление со стороны материала доски зависит от углубления в нее пули и от квадрата скорости. Исследование Эйлера не могло иметь практического значения, так как величины коэффициентов были неизвестны. Это не позволяло решать конкретные задачи с тем, чтобы проверить посредством опыта результаты, полученные теоретически.

Мемуар Эйлера может служить иллюстрацией того, как использовались достижения механики для решения прикладных вопросов артиллерии, и свидетельствует о связи между изысканиями в области естествознания и артиллерийскими дисциплинами.

Баллистические исследования Эйлера занимают видное место среди изысканий ученых XVIII века в этой области артиллерийской науки. Кроме формулировки отдельных положений баллистики, сохранивших ценность и теперь, Эйлер вместе с Иоганном Бернулли явился основоположником аналитического метода в решении основной задачи внешней баллистики. На ин-

---

[2]) Маиевский Н. В., Курс внешней баллистики, 1870, Петербург.

тегрировании дифференциальных уравнений движения по способу Эйлера и вычислении траектории артиллерийского снаряда по дугам построены употребляемые в настоящее время таблицы Отто — Сиаччи. На методе Эйлера базировалась в начале XX века французская баллистическая школа при вычислении траектории артиллерийского снаряда для случая стрельбы под большими углами бросания со значительными начальными скоростями. Эйлеру принадлежит также заслуга открытия цикла работ ученых XVIII века по численному интегрированию уравнений основной задачи внешней баллистики. Этот метод получил широкое применение теперь в результате крупных успехов вычислительной техники.

Научная деятельность Эйлера протекала в период, когда идеи французских материалистов оказывали сильное влияние на творчество ученых. Эйлер не избежал этого воздействия. Его исследования проникнуты духом механистического представления явлений, изучаемых баллистикой. Примером может служить построенная Эйлером модель структуры воздуха, из которой он вывел свой закон сжимаемости. Так же механистически он подходит к объяснению физической сущности горения пороха и установлению причин, обусловливающих сильное возрастание сопротивления воздуха при значительных скоростях.

Механистический подход к изучению явлений природы в XVIII веке являлся прогрессивным методом исследования, который способствовал успешному развитию науки. На его основе Эйлеру удалось прийти к ряду весьма ценных результатов в баллистике, значение которых далеко выходит за границы круга вопросов, изучаемых этой дисциплиной. В качестве иллюстрации можно отметить его исследование 1745 года по теории обтекания твердого тела идеальной упругой жидкостью. В сущности это была первая появившаяся в печати работа Эйлера по гидродинамике, открывшая серию его работ по данному разделу механики. Мемуары Эйлера по баллистике включают ряд моментов, интересных для развития математики и механики, и требуют специального анализа.

На русском языке исследования Эйлера по баллистике опубликованы не были. Во второй половине XVIII века в России фактически не имелось артиллеристов, владевших математическим аппаратом, которым пользовался Эйлер, почему его труды не получили известности и должного приложения. Позднее, в середине XIX столетия, исследования Эйлера во многом сохранили свое научное значение. Однако в России баллистикой занимался сравнительно узкий круг лиц, который вполне удовлетворялся работами Эйлера, изданными на западноевропейских языках. В настоящее время баллистические исследования Эйлера отошли в основном в область истории. Тот большой интерес, который проявляют советские специалисты к изучению наследия Эйлера, дает право опубликовать в переводе на русский язык его труды по баллистике, тесно переплетающиеся с его изысканиями по математике, механике, гидродинамике, физике и т. п., и сделать эти работы достоянием широкого круга ученых.

ПРИМЕЧАНИЯ *)

[1] Русский перевод труда Л. Эйлера «Neue Grundsätze der Artillerie» выполнен по первому изданию 1745 года. При переводе было использовано также последнее издание, помещенное в XIV томе Leonhardi Euleri Opera omnia (1922), выпущенное под редакцией Ф. Р. Шеррера, а также французский перевод Ж. Л. Ломбара (1783) и многочисленные к ним примечания **).

Труд Л. Эйлера представляет собою перевод на немецкий язык одноименного труда английского физика Б. Робинса (1707—1751) с обширным к нему комментарием. В этом труде две главы: каждая из них содержит основные положения Робинса — предложения (Sätze), в 1-й главе 13 предложений и во 2-й главе 8. Каждое предложение Робинса обстоятельно разобрано Эйлером в его замечаниях (Anmerkungen); в ряде случаев одно предложение Робинса сопровождается несколькими замечаниями Эйлера. В сущности, все эти замечания Эйлера выходят далеко за рамки критического разбора робинсовых положений. В своих замечаниях Эйлер дал по каждому выдвинутому Робинсом вопросу самостоятельное исследование.

Встречающиеся в примечаниях Робинса к его Предисловию отдельные цитаты на латинском и итальянском языках даны в русском переводе (примечания 51, 54 и 57).

В целях облегчения чтения математических формул знаки радикала и обозначения тригонометрических и круговых функций и их степеней заменены современными; применены скобки и знаки равенства, но оставлен эйлеров знак логарифма l; в надлежащих случаях Эйлер указывает, какой имеется в виду лога

---

*) Составил П. Д. Львовский.

**) Ссылки в примечаниях на Шеррера и Ломбара обозначают, что данные, приведенные в этих ссылках, заимствованы соответственно из XIV тома Leonhardi Euleri Opera omnia (Lpz. u. B. 1922), редактором которого был Фридрих-Роберт Шеррер, и из Nouveaux principes d'artillerie de M. Benjamin Robins, commentés par M. Léonard Euler в переводе Ж. Л. Ломбара (Дижон—Париж, 1783).

рифм. натуральный или десятичный, причем называет натуральный логарифм гиперболическим, а десятичный логарифм — обыкновенным. Для большей четкости все математические выводы и формулы выделены из текста и даны отдельной строкой, как это сделано в упомянутом выше издании 1922 года.

В первоначальном издании 1745 года имеются опечатки и ошибки. Бо́льшая часть последних выявлена переводчиками: Брауном (1777 г.), Ломбаром (1783 г.) и др., но главным образом Шеррером, редактором последнего немецкого издания (1922 г.). В настоящем переводе эти исправления учтены, что и отмечено в примечаниях.

При поверочных вычислениях использованы семизначные таблицы, помещенные в «Логарифмически-тригонометрическом руководстве Г. Вега» по К. Бремикеру (Берлин, 1897). Что касается опечаток в немецком тексте, то они в значительной части исправлены Шеррером, но в большинстве своем без оговорок. В нашем переводе все замеченные опечатки оговорены в примечаниях. В примечания внесены также некоторые сведения справочного характера. Все примечания обозначены в тексте перевода порядковыми номерами.

Отдельным приложением к переводу дана Таблица мер и весов, встречающихся в тексте. Данные этой таблицы в основном заимствованы у Шеррера и лишь несколько дополнены.

Оригинал 1745 года не имеет оглавления. Для надлежащей ориентировки в содержании труда к настоящему переводу дано оглавление.

В заключение необходимо отметить одну особенность в применяемом Эйлером способе выражения скорости через высоту, с которой свободно падающее в пустоте тело приобретает данную скорость. Сущность этого способа состоит в том, что общая формула

$$v=\sqrt{2gh},$$

в которой h — высота падения, g — ускорение силы тяжести и v — скорость в конце падения, где

$$g=31{,}25\,\frac{\textit{рейнск. фута}}{\textit{сек}^2},$$

принимает вид

$$v=\sqrt{62{,}5h}\,\frac{\textit{рейнск. фута}}{\textit{сек}},$$

а с раздроблением рейнских футов в скрупулы (1 рейнский фут = 1000 скрупул) приводится либо к виду

$$v=\sqrt{62\,500h\cdot 10^3}=250\sqrt{h\cdot 10^3}\,\frac{\textit{скрупул}}{\textit{сек}},$$

либо — по разделении на 10^3 — к виду

$$v = \frac{\sqrt{h \cdot 10^3}}{4} \, \frac{\textit{рейнск. фут.}}{\textit{сек}}.$$

В своих теоретических выводах Эйлер всегда принимает скорость $v = \sqrt{h}$, заранее полагая, что h выражено в скрупулах, а в численных расчетах вводит либо множитель 250, и тогда скорость выражается в $\frac{\textit{скрупулах}}{\textit{сек}}$, либо множитель $\frac{1}{4}$, и в этом случае скорость выражается в $\frac{\textit{рейнских футах}}{\textit{сек}}$.

В обозначении скорости v через $\sqrt{h}$ высота h называется высотой, соответствующей скорости v, т. е. скорости, которую достигает тело, свободно падающее в пустоте с высоты h (L. Euler, Mechanica, Petersburg, 1736, §§ 200—203, 223, 233, 234, 238).

[2] Это были преимущественно задачи по анализу сплавов, механических смесей и других составов, решавшиеся по правилу смешения.

[3] Даниил Бернулли (1700—1782), знаменитый математик и физик, один из первых членов Петербургской Академии наук.

[4] Издан в Страсбурге в 1738 году и посвящен автором Петербургской Академии наук.

[5] Иоганн Бернулли (1667—1748), знаменитый математик.

[6] В оригинале на обороте 5-го листа (3 стр. сверху) напечатано so wohl aus auseinen, следует читать so wohl aus seinen.

[7] Имеется в виду труд Иоганна Бернулли «Dissertatio hydraulica de motu aequarum per vasa aut per canales quamcunque figuram habentes fluentium», помещенный в Comment. Acad. Petrop., т. IX (1744) и X (1747).

[8] Трактат английского физика Бенджамина Робинса (1707—1751) New principles of gunnery, изданный в Лондоне в 1742 году; был переведен Л. Эйлером на немецкий язык с приложением обширных комментариев к нему и вышел берлинским изданием в 1745 году. Русский перевод его дается здесь по этому его изданию.

[9] Под тонкой (subtile) материей в то время понимались газообразные вещества в отличие от жидкостей, с которыми они вместе составляли класс текучих тел или флюидов. См. L. Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne, т. 1. Petersbourg, 1768, Lettre IX от 10 мая 1760 г., стр. 33.

[10] По вопросу о структуре пороха и о его взрывчатом разложении в XVIII веке существовали различные теории. Эйлер придерживался теории, по которой принималось, что в селитре находится сильно сгущенный воздух. Пороховое зерно, в состав которого, кроме селитры, входят горючие вещества — сера и уголь, — при зажжении воспламеняется, и при этом из

селитры выделяется сжатый воздух, а горючие вещества сгорают с выделением большого количества тепла. В результате упругость воздуха, освобожденного при воспламенении зерна, повышается еще за счет нагревания. Горючие же вещества по сгорании образуют твердый остаток.

См. замечания Эйлера к 1-й главе рассматриваемого труда, а также L. Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne, т. 1, Petersbourg, 1768, Lettre XIII, стр. 49.

[11] Это был баллистический маятник, изобретенный в 1740 г. Б. Робинсом. В первоначальной конструкции этот прибор служил для определения скоростей только ружейных пуль.

[12] Бастионы — пятиугольные укрепления с двумя фасами и двумя фланками, открытые со стороны внутренности крепости. Располагались в углах крепостной ограды для обороны впереди лежащей местности. Два обращенных друг к другу бастиона составляли бастионный фронт.

[13] Ян Жижка (ок. 1360—1420), выдающийся чешский полководец и политический деятель.

[14] Николо Тарталья, настоящая фамилия Фонтана (ок. 1500—1557), итальянский математик.

[15] Куртина — участок крепостной ограды, соединявший два смежных бастиона; давала фронтальный огонь по впереди лежащей местности.

[16] Фернандо Альварес де Толедо, герцог Альба (1507—1582), испанский полководец и государственный деятель.

[17] Франсуа де Марки (1506—1574), знаменитый итальянский инженер. Его труд «Dell'architettura militare, del Capitano Francesco de Marchi», Brescia, 1599.

[18] Даниил Шпекле (1536—1589), выдающийся немецкий военный инженер и архитектор. Его сочинение «Architectura von Festungen» было впервые издано в Страсбурге в 1589 году.

[19] Фланки — боковые стороны бастиона позади его фасов. На фланках обычно устанавливалась артиллерия.

[20] Орильон — боковое закругленной формы закрытие при устройстве ярусных фланков.

[21] Равелин — вспомогательная постройка из двух фасов, образующих исходящий угол. Располагалась перед серединой бастионного фронта для обстреливания местности перекрестным огнем и прикрытия куртины от артиллерийского огня, а также для сообщения с полем.

[22] Демилюна — вспомогательная полукруглого очертания постройка, располагавшаяся перед куртиной для прикрытия ее от артиллерийского огня, а также для прикрытия сообщения с полем.

[23] Контргард — земляной вал, вынесенный за наружный ров и приспособленный для занятия артиллерией; служил для прикрытия эскарпной стенки главного вала от брешировования.

[24] Эполемент — земляной вал, служивший прикрытием от артиллерийского огня.

[25] Брешь — пролом в крепостной стене, произведенный артиллерией или минными взрывами для облегчения штурма крепости.

[26] Ретраншемент — вспомогательная оборонительная постройка позади главного вала крепости, предназначавшаяся для продолжения обороны и обстрела тыльной стороны главного вала после того, как им овладеет противник.

[27] Контрэскарп — передняя отлогость наружного рва укреплений, противоположная эскарпу — обратной отлогости наружного рва. Эскарп и контрэскарп обычно одевались каменной стенкой.

[28] Контрбатареи — осадные пушечные батареи, которые устраивались при постепенной атаке крепости для уничтожения фланговой обороны крепостных рвов.

[29] В оригинале опечатка на 11 странице (9 стр. св.): напечатано *a*, следует читать *f*.

[30] В оригинале опечатка на 11 странице (10 стр. св.): напечатано itzt, следует читать jetzt.

[31] В английском оригинале стоит: ruin. В эйлеровом переводе поставлено: *miniren*. (Шеррер.)

[32] Имеется в виду Франция.

[33] Блэз-Франсуа де Паган (1604—1665), выдающийся французский военный инженер. Его труд «Traité des fortifications» был издан в Париже в 1646 году.

[34] Апроши или подступы — ровики, по которым осаждающий приближался к атакуемому участку крепости, оставаясь укрытым от огня осажденного.

[35] Раймунд граф Монтекуколи (1609—1681), австрийский полководец. Здесь упоминаются его «Memorie della guerra ed istruzioni d'un generale» (Vened. 1703).

[36] Эррар де Бар ле Дюк (1554—1610), выдающийся французский военный инженер.

[37] Контрмины — минные галлереи, которые обороняющийся вел при обороне ближайших подступов к отдельным укреплениям и крепостным фронтам против минной (подземной) или ближней (наземной) атаки противника.

[38] Гласис — пологая насыпь впереди наружного рва укрепления. Служил для уничтожения необстреливаемого пространства и для маскировки укрепления.

[39] Педро Наварро (1446—1528), выдающийся испанский военный инженер.

[40] Минно ван Кугорн (1641—1704), знаменитый голландский военный инженер.

[41] На голландском языке был издан в 1685 г. В переводе на русский язык был издан в 1710 году под названием: «Новое крепостное строение на мокром и низком горизонте, которое на три манера показуется в фортификование внутренней величины».

[42] В оригинале опечатка на 22 странице (4 стр. сн.): напечатано Bon, следует читать Bonn.

[43] Себастьен ле Претр де Вобан (1633—1707), маршал, знаменитый французский военный инженер.

[44] Этот труд впервые был издан в 1737 году и появился в русском переводе в 1744 году под названием: «Книга о атаке и обороне крепостей, изданная через господина де Вобана».

[45] Рикошетные батареи — пушечные батареи осаждающего, располагавшиеся на продолжении фасов атакуемого фронта для обстрела рикошетными выстрелами артиллерии обороны. При рикошетной стрельбе ядро, брошенное под небольшим углом, отражалось при падении несколько раз, производя разрушение на всем протяжении рикошетного выстрела.

[46] Параллели — траншеи, устраивавшиеся на атакуемом фронте осажденной крепости. Первая параллель располагалась вне дальности картечного огня, последующие — на сближенных расстояниях к фронту и последняя, так называемая траншея венчания — у гребня гласиса.

[47] Сапа—траншея, которую рыли осаждающие при их приближении к атакуемому фронту под огнем противника. При перекидной или тихой сапе траншея отрывалась под землей, летучей сапой траншея отрывалась с поверхности земли.

[48] Роджер Бэкон (ок. 1214—1294), английский философ и естествоиспытатель.

[49] Арабское название селитры bārūd позднее было присвоено и пороху, потому что в пороховую смесь селитра входила как ее главная составная часть. Самый термин bārūd не чисто арабского происхождения (И. Ю. Крачковский). Высказывались предположения о том, что в основе слова bārūd лежит либо гебраическое слово barad — град (Рейно), либо греческое πυρίτης — кремень (Бартэлеми).

[50] Мнения о составе так называемого греческого огня весьма различны, и до настоящего времени этот вопрос не получил еще разрешения в пользу какого-либо из существующих мнений. Одни придерживаются того, что этот огнеметный состав в основном содержал селитру (Лаланн, Рейно, Бертело, Дильс), другие полагают, что в рецептуре греческого огня главную роль играла негашеная известь (Ромоцкий, Фельдхауз). В число составных частей этой смеси разные исследователи включают смолы, масла, серу, нефть и др. Несомненно одно, что греческий огонь византийского происхождения, и в арабских источниках огнеметные составы нигде не упоминаются под названием греческого огня. Со времени крестовых походов и до появления огнестрельной артиллерии греческим огнем в Западной Европе называли вообще всякие зажигательные составы и огнеметные средства.

[51] В переводе (с латинского): «и для испытания этого предмета берем то, что служит для детской игрушки и что делают во многих частях света, а именно, довольно искусно изготовленное вещество, в количестве почти с большой человеческий палец, и из силы той соли, которая называется селитрой,

при почти мгновенном взрыве такого незначительного предмета возникнет ужаснейший шум, сопровождаемый оглушительным громоподобным треском и сверканием ослепительного сияния».

[52] Марк Грек (Marcus Graecus) жил примерно в 13 веке. Упоминаемая здесь его рукопись «Liber ignium ad comburendos hostes» была впервые издана в Париже в 1804 году.

[53] Франческо Гуйччардини (1483—1540), итальянский военный деятель и историк. Упоминаемая здесь его книга «Storia d'Italia» была издана в 1537—1540 гг.; последнее издание этой книги вышло во Флоренции в 1919 году.

[54] В переводе (с итальянского):

«... и вместе с этими войсками они переправили морем в Геную большое количество крупной артиллерии для разбития стен и для действий в поле, но, однако, такой, подобно которой никогда в Италии не видывали. Эта чума, изобретенная много лет тому назад в Германии, была впервые занесена в Италию венецианцами в их успешной войне с генуэзцами около 1380 года... Название самого крупного (из них) — *бомбарда*. Бомбарды после их изобретения распространились по всей Италии для действий на суше; одни были железные, другие бронзовые, но очень крупные, подобно громоздким машинам, с малоопытными людьми и плохо прилаженными приспособлениями, перетаскивались медленно и с огромными трудностями; их устанавливали прямо на земле с тем же обозом и производили выстрел, а другой делали спустя такой длительный интервал, что получался ничтожнейший результат сравнительно с тем временем, которое требовалось для продолжения стрельбы, благодаря чему защитники осажденного города имели в своем распоряжении достаточный промежуток времени для передышки в своем убежище или крепости... Но французы изготовляли орудия много быстрее и только бронзовые, которые называли *канон* и употребляли в них чугунные ядра вместо ранее применявшихся каменных. Эти орудия независимо от их величины и веса их ядер перевозили на повозках, которые тащили не волами, как обычно в Италии, а лошадьми. При этом сопровождавшие их люди отличались необычайным проворством и имели с собой приспособления, предназначенные для артиллерийской службы; они почти всегда следовали вместе с войсками, а при подходе к крепостным стенам устанавливали орудия с невероятной быстротой и производили выстрелы один за другим в кратчайший промежуток времени, вызывая частыми и порывистыми вспышками такое сильное потрясение, что достигавшееся прежде в Италии в течение многих дней выполнялось ими за очень малый промежуток времени».

[55] В оригинале опечатка на 37 странице (10 стр. сн.): напечатано William, следует читать William Boorn.

[56] Батарейные орудия — пушки крупного калибра, устанавливавшиеся на специально построенных батареях (отсюда

их название батарейные), представлявших собою земляные закрытия с амбразурами, одетые турами или мешками с землею, и с деревянными платформами под орудия.

[57] В переводе (с итальянского):

«В действиях главной турецкой армии всегда применялась артиллерия... для разрушения стен проделывали [ядрами] снизу наискосок вверх [борозду] и после того по вертикали сверху вниз [другую], а затем одновременно [стреляли] все василиски *), под действием которых стремительно обрушивалась эта часть стены, которая уже была почти разрушена».

[58] Франсуа Блондель (1617—1686), выдающийся французский архитектор. Автор известного труда «Cours d'architecture» и упоминаемого здесь исследования «L'art de jetter les bombes», изданного в Париже в 1683 году.

[59] Парапет в фортификационных сооружениях — каменная стенка, выполнявшая назначение бруствера.

[60] «Nova scientia» переиздавалась затем в 1550, 1562 и 1583 гг., «Quesiti» переиздавались в 1550, 1554, 1606 и 1620 гг. Оба эти сочинения Тартальи более известны по французским переводам Риффеля, первое под названием Tartaglia, La balistique, Ouvrage publié pour la 1-ère fois en 1537 sous le titre de «La science nouvelle» и второе под названием: Tartaglia, Questions et Inventiones diverses relatives à l'artillerie. Оба перевода были помещены в Journ. desarmes spec. за 1845 г.и вышли затем отдельными изданиями в 1845—1847 гг.

[61] Артиллерийский квадрант — прибор для наводки орудий, появился в XV веке, был позаимствован из практики астрономических измерений. Со второй половины XVI века всеобщее распространение получил квадрант Тартальи, о чем имеется авторитетное указание Торричелли в его труде «De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum» (1641).

[62] Галилео Галилей (1564—1642), великий итальянский физик и астроном. Упоминаемый здесь его труд имеется в русском переводе под названием: «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», М.—Л., 1934.

[63] В оригинале опечатка на 45 странице (4 стр. св.): напечатано Ulrich, следует читать Elrich.

[64] Исаак Ньютон (1643—1727), гениальный английский физик, астроном и математик. Упоминаемый здесь его труд имеется в русском переводе под названием: «Математические начала натуральной философии» в книге Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.—Л., 1936.

[65] Габриэль-Филипп де-Ляир (1677—1719), французский математик и физик. Здесь упоминается его трактат «Sur les

---

*) Василиски — крупнокалиберные длинные бомбарды XV—XVI веков.

effets du ressort de l'air dans la poudre à canon et dans la tonnerre» (1702) (Hist. de l'Acad. royale d. sc. P., 1704).

[66] Имеется в виду Иоганн Бернулли, на что указывает Эйлер в своем Замечании к этому Предисловию.

[67] Христиан Гюйгенс (1629—1695), выдающийся голландский физик и математик. Вопрос о движении в среде, сопротивление которой пропорционально скорости движущегося в ней тела, рассмотрен Гюйгенсом в «Traité de la Lumière avec un Discours de la Cause de la Pesanteur» (Лейден, 1690), где он дал решение задачи графическим способом, не приведя доказательств построения. Правильность выводов Гюйгенса была впоследствии доказана Вариньоном.

[68] См. И. Ньютон, упом. соч. (страницы по русскому переводу, указанному в прим. 64): Кн. 2, Отд. 1, Поучение, стр. 325; Отд. 7, Предл. 33, Теор. 27, стр. 424—425; Предл. 35, Зад. 7, След. 3, стр. 434.

[69] Иоганн Бернулли дал решение задачи в трактате «Responsio ad nonneminis provocatronem, eiusque solutio quaestionis ipsi ab eodem proposite de invenienda Linea curva quam describit projectile in medio rosistente», помещенном в Acta eruditorum (Lipsiae), A. 1719, m. maji, стр. 216—219. Доказательство решения задачи было опубликовано несколько позже в «Johann Bernoulli operatio analytica per quam deducta est ejusdem solutio, que extat in Actis Lips.», 1719 m. Maji, «Problematis de invenienda Curva, que describitur a projectili gravi in medio resistente. Experpta ex illius Epistola ad Ilustr., Monmortium» d 13, Julii, 1719, помещен. в Acta erud. (Lips.) a. 1721 m. Maji.

[70] Яков Герман (1678—1733), математик, первый академик открытой в 1725 году Петербургской Академии. Упоминаемый здесь его труд «Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum, libri duo» был издан в Амстердаме в 1716 году.

[71] Брук Тэйлор (1685—1731), английский математик. Упоминаемое здесь решение баллистической задачи он дал в «Methodus incrementorum directa et inversa» (Лондон, 1715) только для случая движения в безвоздушном пространстве.

[72] Имеется в виду трактат Д. Бернулли «De actione fluidorum in corpora solida et motu solidorum in fluidis» (1727), помещенный в Comm. acad. sc. Petrop. t.2, 1729, в 4-й части которого под названием «De motu corporum sursum projectorum, ubi ad calculum revocantur experimenta ab Excellentiss. Dno Günthero cum tormentis instituta», стр. 329—342, приводятся упоминаемые здесь данные.

[73] Дени Папен (1647—1714), французский физик, математик, талантливый изобретатель. Упоминаемые здесь его опыты изложены в Philos. Transact. за 1675 г. (стр. 546—548).

[74] Jacopo Brachi Saggio sopra l'aria nel polve d'arcobugio e la sua compressione, Suppl. al Giorn. de letter. d'Italia, т. 1, n° 8, Venezia, 1723.

[75] Фрэнсис Гоксби, английский физик второй половины XVII в.

[76] Роберт Бойль (1627—1691), знаменитый английский физик и химик.

[77] Стивен Гейлс (1677—1761), выдающийся английский ботаник. Его труд «Vegetable staticks» был издан в Лондоне в 1727 году.

[78] В оригинале опечатка на 76 странице (15 стр. сн): напечатано geschicht, следует читать geschieht.

[79] В оригинале опечатка на 81 странице (12 стр. св.): напечатано Abweichung, следует читать Abkühlung.

[80] Об английских торговом и тройском весах см. Таблицу мер и весов в конце книги.

[81] По Шерреру $554\frac{2}{3}$, точнее будет 554,88, что близко к 555 кубическим дюймам на 1 унцию торгового веса.

[82] Неверно, потому что $\lg\frac{360}{21}=1{,}2340832$, а не 1, 2340579. Ломбар, приняв правильное значение этого логарифма, получил в дальнейших расчетах несколько отличные данные от робинсовых и скорость пули в точке В, равную 1669 футов в секунду, что, впрочем, ничтожно мало отличается от вычисленной Робинсом.

[83] В оригинале 0,0913447. Исправлено по Шерреру.

[84] В оригинале 6,4199448. Исправлено по Шерреру.

[85] В оригинале 3,2099724. Исправлено по Шерреру.

[86] В оригинале 1625. Исправлено по Шерреру.

[87] В оригинале:

$$v=\frac{48mb}{nc\,(b+x)}\,dx-\frac{48x}{nc}.$$

Исправлено по Ломбару.

[88] В оригинале 0,035. Исправлено по Шерреру.

[89] В оригинале 41 646. Исправлено по Шерреру.

[90] В оригинале 41 646 000. Исправлено по Шерреру.

[91] В оригинале 6453. Исправлено по Шерреру.

[92] В оригинале 1618. Исправлено по Шерреру.

[93] В оригинале 1625. Исправлено по Шерреру.

[94] Винтовки, штуцера, нарезные карабины, состоявшие уже в то время на вооружении.

[95] Шуфла — артиллерийская принадлежность, служившая для насыпания пороха в канал орудия; состояла из металлического стакана с длинной рукоятью.

[96] Иван Яковлевич Гинтер (1670—1729), генерал-фельдцейхмейстер русской артиллерии.

[97] В оригинале 1728. См. примечание 72, где приведен трактат Д. Бернулли, в котором дано описание этих опытов.

[98] В оригинале опечатка на 153 странице (11 стр. сн.): Напечатано geschicht, следует читать geschieht.

[99] Sinus versus (синус верзус) — тригонометрическая функция; для аргумента α имеем sinvers $\alpha=1-\cos\alpha$.

[100] Regula de tri — арифметическое правило нахождения четвертой пропорциональной по трем данным. Современное простое тройное правило.

[101] Т. е., разница между длиной хорды дуги, описанной нижним концом маятника, и длиной вытянутой части ленты.

[102] Пальник — артиллерийская принадлежность, применявшаяся при стрельбе для сообщения огня заряду пороха в орудии. Состоял из укрепленного на конце длинной рукояти зажима, в который вставлялся фитиль, зажигавшийся при стрельбе от палительной свечи.

[103] Т. е. математического маятника.

[104] Шеррер исправил это число на 1,030, что неверно, так как

1 рейнский фут=0,31385 *м*, 1 парижский фут=0,32484 *м*, следовательно,

$$1 \text{ парижский фут} = \frac{0{,}32484}{0{,}31385} = 1{,}035 \text{ рейнского фута},$$

что и показано в оригинале. Это же соотношение см. в книге: Л. Э й л е р, Mechanica (1736), Propos. 27, Corollarium 4, Scholion 1, § 223.

[105] В оригинале 2,6711544. Исправлено по Шерреру.

[106] В оригинале 3,1995864. Исправлено по Шерреру.

[107] В оригинале 1583,385. Исправлено по Шерреру.

[108] 1641 англ. футов в сек. См. восьмое Предложение.

[109] Т. е. для случая прямого удара.

[110] В оригинале «ein jegliches Theilchen des Cörpers» (стр. 177), где под Theilchen здесь следует понимать не только частицу тела, но и ее массу. Об этом см. Mechanica Л. Эйлера (1736) или в русск. переводе: Л. Э й л е р, Основы динамики точки (1938), примечания 1 и 2 к Предложению 16, стр. 115—116.

[111] Т. е. угловое ускорение. В современных обозначениях если J — момент инерции твердого тела, вращающегося около неподвижной оси, и L — главный момент относительно той же оси приложенных к нему внешних сил, то

$$\frac{L}{I} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где φ — угол поворота.

[112] Т. е. ускорение. См. «Mechanica» Л. Эйлера (1736), к Propositio 26, §§ 213 и 214.

[113] Так как Эйлер принимает ускорение силы тяжести для наших широт за единицу, то получается, что вес тела численно равен его массе. См. его «Mechanica» (1736), §§ 197 и 205.

[114] В оригинале опечатка на 179 странице (7 стр. св.): напечатано Fig. 5, следует читать Fig. 6.

[115] В оригинале 2532,75. Исправлено по Шерреру.

[116] В оригинале 50,326.

[117] В оригинале 1624,37.

[118] Обозначение vu см. на рис. 6.

[119] В оригинале $\frac{pb}{V} - s\,(Pfg + phh.)$ Исправлено по Шерреру.

[120] В оригинале опечатка на 188 странице (3 стр. св.): напечатано DV=angenommen, следует читать $DV=h$ angenommen.

[121] Sinus totus=sin 90°.

[122] В оригинале опечатка на 198 странице (9 стр. сн.): напечатано $a^4=237{,}82$, следует читать $c^4=237{,}82$.

[123] В оригинале 0,002666. Исправлено по Ломбару.

[124] В английском оригинале показано $255\frac{1}{4}$ секунды, в немецком оригинале — $265\frac{1}{4}$ секунды. Исправлено по Шерреру.

[125] Прибойник — артиллерийская принадлежность, служившая для прибития всыпанного в пушечный канал порохового заряда; он состоял из насаженной на длинную рукоять деревянной цилиндрической болванки диаметром в диаметр ядра.

[126] Этим предложением имелось в виду исключить из комплекса работ по сооружению батарей настилку деревянных платформ под батарейные пушки в целях экономии времени, материалов и затрачиваемого труда.

[127] Эйлер рассматривает здесь два крайних случая: $h=69$ дюймов и $h=45$ дюймов при $f=62\frac{2}{3}$ дюйма. Так как соотношение между робинсовой и истинной скоростями равно $\sqrt{f}:\sqrt{h}$, то при истинном значении скорости, равном 1700 *фут/сек*, ошибка в робинсовой скорости будет в первом случае

$$1700\left(1-\frac{\sqrt{62\frac{2}{3}}}{\sqrt{69}}\right)=80 \text{ фут/сек}$$

и во втором случае

$$1700\left(\frac{\sqrt{62\frac{2}{3}}}{\sqrt{45}}-1\right)=306 \text{ фут/сек.}$$

Приведенные в этом месте Эйлером данные взяты для этих обоих случаев округленно: в первом случае для ошибки в $\frac{1}{20}$ в меньшую сторону и во втором случае для ошибки в $\frac{1}{6}$ в бóльшую сторону, что при скорости в 1700 *фут/сек* составляет:
в первом случае 85 *фут/сек* и во втором случае 283 *фут/сек*.

Поправка, сделанная Шеррером для последнего случая: 262 *фут/сек* вместо 283 *фут/сек* неверна (см. Leonhardi Euleri Opera omnia, т. XIV, стр. 132).

[128] При $k=16$ дюймов и скорости 1700 *фут/сек* ошибка в скорости на 85 *фут/сек* соответствует ошибке в измерении хорды

$$\frac{16\cdot 85}{1700}=0{,}8 \text{ дюйма}$$

и при ошибке в скорости на 283 *фут/сек* соответствует

$$\frac{17\cdot 283}{1700}=2{,}6 \text{ дюйма},$$

как и приведено Эйлером.

Поправка Шеррера в этом месте (стр. 133 т. XIV) относится к случаю ошибки в скорости на 262 *фут/сек* и сюда отношения не имеет.

[129] В оригинале

$$\sqrt{\frac{(Pg+ph)(Pgf+phh)}{(Pg+ph+qh)(Pfg+phh+qhh)}}\,.$$

Исправлено по Шерреру.

[130] В оригинале опечатка на 228 странице (3 стр. сн.): напечатано *des q*, следует читать *des p*.

[131] В первом Замечании к седьмому Предложению было выведено выражение для высоты v, соответствующей скорости снаряда в канале ствола, в виде

$$v=\frac{110{,}52408mb}{nc}\,l\,\frac{a}{b}\,.$$

Если положить, как у Эйлера, $m=1000$ и принять соответствующие обозначения, то и получим приведенное выражение для высоты b.

[132] В четвертом Замечании к седьмому Предложению.

[133] В оригинале опечатка на 242 странице (12 стр. св.): напечатано CI, следует читать GI.

[134] На неточность этой схемы сил, построенной Эйлером, указал еще Гуго Браун в предисловии к своему английскому переводу рассматриваемого труда Эйлера (Лондон, 1777), заметив, что составляющая давления пороховых газов на сектор $2a\varphi$ в направлении CLM равна не $2\,ma\varphi$, а $2\,ma\sin\varphi$ (Шеррер).

[135] В оригинале опечатка на 242 странице (13 стр. сн.): напечатано DH, следует читать DK.

[136] Эйлер имеет здесь в виду шведские кожаные пушки системы Вурмбрандта, бывшие на вооружении полковой артиллерии шведской армии при Густаве Адольфе. Эти мелкокалиберные пушки имели тонкостенный бронзовый ствол, стянутый

железными обручами и пеньковым канатом и обтянутый снаружи кожаным чехлом, чтобы не выдать секрета их устройства; отсюда и название этих пушек: кожаные. Стреляли только картечью. Ввиду сложности изготовления и частых разрывов эти маломощные пушки были скоро сняты с вооружения и в других армиях не нашли применения. Эйлер, по-видимому, имел о них неправильное представление.

[137] В оригинале опечатка на 254 странице (12 стр. сн.): напечатано: 12, следует читать 1200.

[138] В оригинале опечатка на 257 странице (11 стр. сн.): напечатано Heftigtigkeit, следует читать Heftigkeit.

[139] В девятом Предложении.

[140] В оригинале опечатка на 279 странице (10 стр. сн.): напечатано 14, следует читать 1400.

[141] В оригинале опечатка на 289 странице (1 стр. сн.): напечатано

$$\frac{1}{4}\sqrt{55\,261\cdot 2425\cdot 1{,}23438},$$

следует читать

$$\frac{1}{4}\sqrt{55\,261\cdot 2425\cdot 1{,}23408}.$$

[142] Изложено в его «Tentamen explications phaenomenorum aeris» (1727), помещен. в Comment. acad. sc. Petrop. т. 2, 1729.

[143] В оригинале опечатка на 299 странице (7 стр. сн.): напечатано: wir viel, следует читать wie viel.

[144] См. четвертое Предложение.

[145] В оригинале опечатка на 305 странице (7 стр. св.): напечатано Fig. 9, следует читать Fig. 10.

[146] В оригинале опечатка на 310 странице (4 стр. сн.): напечатано $\frac{mb\,dx}{axx\,dx}\frac{zz}{2}$, следует читать $\frac{mb\,dv}{axx\,dx}\cdot\frac{zz}{2}$.

[147] В оригинале перед вторым членом правой части уравнения пропущен знак минус (стр. 312).

[148] В оригинале в знаменателе второго члена правой части уравнения третье слагаемое напечатано: $2ak$ вместо $2\alpha k$ (стр. 317).

[149] В оригинале перед третьим членом правой части этого выражения стоит знак плюс, тогда как следует поставить знак минус, также и далее (стр. 221) в выражениях для $\frac{\alpha a}{b}$ и $\frac{3a}{2b}$, где в показателе степени при e третий член должен быть со знаком минус, как и в выражении

$$\frac{3}{2}a : e^{1-\frac{1}{12}-\frac{9a}{32k}} = A.$$

Исправлено по Шерреру.

[150] В этом выражении коэффициенты p и q не имеют ничего общего с встречавшимися ранее обозначениями p и q; в оригинале они выделены особым шрифтом.

[151] Этот результат получится, если в предыдущем выражении для b отбросить член $\frac{A^3}{99cc}$, который все же представляет заметную величину, так как $A \approx 12c$, где c — калибр орудия.

[152] В оригинале $s=15{,}7$. Исправлено по Ломбару.

[153] В оригинале $g=124h$, между тем, положив в формуле для g значение $q=800$, как это следует из третьего замечания к одиннадцатому Предложению, получим $g=114{,}3504h$ или $g=114{,}4h$.

[154] В оригинале опечатка на 339 странице (2 стр. св.): напечатано $v=-\frac{1}{26}$; следует читать $\nu=-\frac{1}{26}$.

[155] В оригинале $v=\frac{10\,509}{24\,850}h$. Исправлено по Шерреру.

[156] В оригинале 877 футов в секунду. Исправлено по Шерреру.

[157] В оригинале 63. Исправлено по Ломбару.

[158] В оригинале в знаменателе выражения под знаком логарифма первого члена правой части первый член напечатан в виде

$$a(2k+nb)$$

вместо

$$\alpha(2k+nb).$$

[159] В оригинале $\eta=5{,}2$. Ошибка в величине η произошла, по-видимому, вследствие того, что в знаменателе выражения для η было взято не $n-244\alpha$, а $n+244\alpha$ и, таким образом, вместо правильного подсчета

$$\eta=\frac{1{,}5\,(2\cdot 4900+1000\cdot 2{,}625)}{(1000-244\cdot 1{,}5)\,2{,}625}=11{,}1987\approx 11{,}2$$

было получено:

$$\eta=\frac{1{,}5\,(2\cdot 4900+1000\cdot 2{,}625)}{(1000+244\cdot 1{,}5)\,2{,}625}=5{,}1976\approx 5{,}2.$$

Исправлено по Ломбару и Шерреру.

[160] Все последующие за примечанием 159 вычисления оставлены в том виде, как они были выполнены при $\eta=5{,}2$. Однако, как показал Шеррер, при правильно вычисленном значении η (см. прим. 159), будет

$$\sqrt{u}:\sqrt{v}=1:0{,}718,$$

и начальные скорости по формулам Эйлера получаются: при допущении мгновенности воспламенения заряда 1630 рейнских футов в секунду, или 1680 английских футов в секунду, а при последовательном воспламенении — 1171 рейнский фут в секунду. Таким образом, разница между скоростью, вычисленной по допущению Робинса и полученной им из опыта, составит всего 30 английских футов в секунду, а не 145 английских футов, как приведено в оригинале.

[161] В оригинале второй член правой части этого выражения дан в виде

$$-\frac{12,4\alpha\beta\lambda^2\alpha bh}{ax-(\alpha-\lambda)\,b}$$

вместо

$$-\frac{12,4\alpha\beta\lambda^2 mbh}{\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b},$$

(стр. 348).

[162] В оригинале в первом члене правой части числитель под знаком логарифма дан в виде $ax-(\alpha-\lambda)\,b$ вместо $\alpha x-(\alpha-\lambda)\,b$ (стр. 349).

[163] В оригинале во втором члене отношения второй член знаменателя дан в виде $-(n-244\alpha)\,\lambda b\cdot$ вместо $-(n-244\alpha)\,b$ (стр. 350).

[164] В оригинале опечатка на 352 странице (2 стр.св.): напечатано 1 : 0 : 0,90765; следует читать $1 : \sqrt{0,90765}$, или $\sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,95270$.

[165] При правильно вычисленном значении $\eta = 11,2$ (см. прим. 160) все приведенные в оригинале данные примут вид:

$$\text{для } \lambda=\frac{3}{4} \ \ldots\ldots\ldots \ \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,8916,$$

$$\text{для } \lambda=\frac{7}{8} \ \ldots\ldots\ldots \ \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,9481,$$

$$\text{для } \lambda=\frac{9}{10} \ \ldots\ldots\ldots \ \sqrt{u} : \sqrt{v} = 1 : 0,9588,$$

и начальные скорости соответственно будут: 1605, 1705 и 1726 английских футов в секунду (Шеррер).

[166] Следует 1711 английских футов в секунду (Шеррер).

[167] В оригинале в правой части этого равенства пропущен второй член этой части равенства (стр. 360):

$$+\frac{dv}{2m\sqrt{\beta hv}}.$$

Исправлено по Ломбару.

[168] В оригинале $\mu = 17$. Исправлено по Ломбару.

[169] В оригинале

$$\frac{289}{81m}\cdot 1700.$$

У Шеррера показано (стр. 212 L. Euleri, Opera omnia, т. XIV):

$$\frac{17\mu}{81m}\cdot 1700=\frac{319{,}6}{81m}\cdot 1700,$$

что неверно, так как при $\mu=18{,}82$

$$17\mu=319{,}94\approx 319{,}9,$$

а потому

$$\frac{17\mu}{81m}\cdot 1700=\frac{319{,}9}{81m}\cdot 1700.$$

[170] В оригинале $\frac{6065}{m}$; у Шеррера $\frac{6714}{m}$ неточно вследствие допущенной Шеррером ошибки (см. предыдущее примечание). У Ломбара ошибки в вычислениях (стр. 246 франц. издания), а именно: при $\mu=18{,}822\ldots$ $17\mu=310$ (?) и

$$\frac{310}{81m}\cdot 1700=\frac{6715}{m}\ (?!).$$

В действительности, если $\mu=18{,}82$, то

$$\frac{17\mu}{81m}\cdot 1700=\frac{319{,}94}{81m}\cdot 1700=\frac{6714{,}79}{m}\approx\frac{6715}{m}.$$

[171] В оригинале 60 футов в секунду. Исправлено по Ломбару.

[172] В оригинале 1640 футов в секунду. Исправлено согласно предыдущему примечанию.

[173] В оригинале 2000 футов в секунду. Исправлено по Ломбару.

[174] В оригинале численные коэффициенты: при втором члене правой части (—3,568), при третьем (+2,340) и при четвертом (+8,007). Исправлено по Шерреру.

[175] В оригинале $2{,}340\cdot\frac{1}{m^2}$. Исправлено по Шерреру.

[176] В оригинале 1 фут. Исправлено по Шерреру.

[177] В оригинале 0,67461. Исправлено по Шерреру.

[178] В оригинале 553 фута в секунду. Исправлено по Шерреру.

[179] В оригинале 1147 футов в секунду. Исправлено по Шерреру.

[180] В оригинале опечатка на 379 странице (10 стр. св.): напечатано — $(n-244)\,\lambda b$, следует читать — $(n-244\alpha)\,\lambda b$.

[181] В оригинале опечатка на 380 странице (2 стр. св.): напечатано $l\,\frac{5-2b}{3b}$, следует читать $l\,\frac{5f-2b}{3b}$.

[182] В оригинале опечатка на 381 странице (3 стр. сн.): напечатано

$$C=\frac{-900bh}{k+3106}\,l\,\frac{5f-2b}{3b},$$

следует читать

$$C=\frac{-900bh}{k+310b}\,l\,\frac{5f-2b}{3b}.$$

[183] В оригинале

$$=\frac{236\,350}{561\,375}.$$

Исправлено по Ломбару.

[184] В оригинале

$$=\frac{490\,000}{571\,375}\cdot\frac{236\,260}{571\,375}.$$

Исправлено по Ломбару.

[185] В оригинале 0,41438. Исправлено по Ломбару.

[186] В оригинале опечатка на 382 странице (6 стр. сн.): напечатано

$$\frac{900bk}{(k+3106)^2}=,$$

следует читать

$$\frac{900bk}{(k+310b)^2}=.$$

[187] В оригинале 6,375. Исправлено по Ломбару.

[188] В оригинале l 6,375=0,804470. Исправлено по Шерреру.

[189] В оригинале опечатка на 382 странице (2 стр. сн.): напечатано l 1,445982, следует читать l 1,445682.

[190] В оригинале l 0,80448=9,905515. Исправлено по Шерреру.

[191] $0{,}362216=l\,\frac{1}{m}$, где $m=0{,}4342945$ — модуль бригговых логарифмов.

[192] В оригинале 0,522288. Исправлено по Шерреру.

[193] В оригинале 0,267730. Исправлено по Шерреру.

[194] В оригинале 0,76592. Исправлено по Ломбару.

[195] В оригинале 0,65683. Исправлено по Шерреру.

[196] В оригинале 0,61046 h. Исправлено по Ломбару.

[197] В оригинале 1054 фута в секунду. Исправлено по Ломбару.

[198] В оригинале 0,71955 h. Исправлено по Шерреру.

[199] В оригинале 1144 фута в секунду. Исправлено по Ломбару.

[200] В оригинале 1054 рейнских фута в секунду. Исправлено по Шерреру.

[201] В оригинале 1086 английских футов в секунду. Исправлено по Шерреру.

[202] Линейный корабль испанского флота.

[203] Пробный пистолет — ручной прибор для пробы пороха, состоявший из ствола с ка́морой для навески испытуемого пороха и крышкой, составлявшей одно целое с зубчатым колесом, в зубцы которого упиралась прокалиброванная пружина. Под действием выстрела крышка отбрасывалась и поворачивала зубчатое колесо; о силе пороха судили по числу зубьев колеса, пропущенных пружиной. Этот способ применялся в России под названием пороховой пробы с кратами.

[204] При этом способе, известном под названием голландской пробы (в России — пробы мортиркой с футштоком), при выстреле из вертикально установленной мортирки выбрасывался груз, и по высоте его поднятия судили о силе пороха.

[205] Введена была во Франции в 1686 году.

[206] Требуемая регламентами минимальная дальность бросания ядра из пробной мортирки с течением времени увеличивалась. Если в 1686 году установленная дальность была 50 туаз, то регламентом 1775 года уже требовалось 90 туаз. Туаз — 1,949 *м*.

[207] См. примечание 113.

[208] Читается: равно $2nccq^3v$, или равно $4nccq^3v$.

[209] Читается: равно $2nccqqv\sqrt{1-qq}$ или равно $4nccqqv\sqrt{1-qq}$.

[210] См. примечание 113.

[211] Общее выражение для центростремительной силы

$$F=\frac{mV^2}{\varrho},$$

где m — масса движущегося тела и $m=\frac{P}{g}$, если P вес тела, V — скорость тела, ϱ — радиус кривизны траектории.

В случае кругового движения

$$F=\frac{mV^2}{r},$$

где r — радиус окружности.

Отсюда

$$r=\frac{PV^2}{gF}.$$

Если скорости V отвечает высота v свободного падения в пустоте, то

$$V=\sqrt{2gv},$$

а выражение центростремительной силы получено в виде

$$F=\mu nccqqv\sqrt{1-qq}.$$

По подстановке в выражение для радиуса кривизны получим:

$$r=\frac{P\cdot 2gv}{g\cdot\mu nccqqv\sqrt{1-qq}}=\frac{2P}{\mu nccqq\sqrt{1-qq}}.$$

[212] В оригинале наоборот: «скорость будет больше или меньше» (стр. 453), что неверно—чем шире канал, тем скорость соответственно меньше.

[213] Т. е. могла бы оттолкнуть тело назад настолько же, насколько сила, возникшая из первой части AM, смогла оттолкнуть это же тело вперед.

[214] Высказанное здесь Эйлером, а годом раньше его Д'Аламбером *) положение, по которому твердое тело, движущееся прямолинейно и равномерно в жидкой или газообразной среде, лишенной вязкости, при безотрывном обтекании не испытывает никакого сопротивления со стороны этой среды, стало известно в гидродинамике как парадокс Д'Аламбера—Эйлера. Как поясняет далее Эйлер, чтобы такое движение было возможно, среда должна обладать особенными свойствами, которыми вообще не обладает никакая реально существующая жидкая или газообразная среда (полное отсутствие вязкости, вихреобразований и поверхностей разрыва скоростей).

[215] В оригинале опечатка на 472 странице (15 стр. св.): напечатано 29 100, следует читать 29 1,00 футов.

[216] В оригинале опечатка на 474 странице (14 стр. св.): напечатано $\sqrt{hv}$, следует читать $2\sqrt{hv}$.

[217] У Шеррера в этом выражении отсутствует коэффициент 2 перед π (Leonhardi Euleri Opera omnia, т. XIV, стр. 277).

[218] В оригинале опечатка на 485 странице (5 стр. св.): напечатано aus zween Kugeln, следует читать aus zween Kegeln.

[219] См. Таблицу мер и весов, стр. 588.

[220] В оригинале опечатка на 497 странице (11 стр. св.): напечатано Helfenbein, следует читать Elfenbein.

[221] Из предыдущего видно, что

$$\frac{3x}{8nc}-\frac{9xx}{128nncc}=0{,}03109-0{,}00048=0{,}03061.$$

---

*) В его «Traité de l'équilibre et du mouvement des liquides», Paris, 1744.

Жан Лерон Д'Аламбер (1717—1783)—французский математик и философ, состоял членом многих академий наук, в том числе Петербургской (с 1764 г.).

[222] Если сопротивление пули принять равным сопротивлению цилиндра того же сечения и движущегося вдоль своей оси, то

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}=\frac{6x}{8nc}-\frac{36x^2}{128n^2c^2},$$

причем

$$\frac{6x}{8nc}=0{,}0621955$$

и

$$\frac{36x^2}{128n^2c^2}=0{,}0019341.$$

Следовательно, $\frac{6x}{8nc}-\frac{36x^2}{128n^2c^2}=0{,}06026$, а не 0,06029, как в оригинале.

[223] Точнее: 0,06220.

[224] При $x=100$ футов имеем:

$$\frac{3x}{8nc}=0{,}0621955 \quad \text{и} \quad \frac{9x^2}{128n^2c^2}=0{,}0019341.$$

Следовательно,

$$\frac{3x}{8nc}-\frac{9x^2}{128n^2c^2}=0{,}06026.$$

В оригинале дано 0,06218, у Шеррера 0,06030.

[225] Отношение

$$(1-e^{-3x\,:\,8nc}):\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}$$

для первого опыта будет 1:2,35 и для второго опыта будет 1:2,43 (по Шерреру).

[226] В оригинале 0,09327. Исправлено по Ломбару.

[227] В оригинале 0,08905. У Шеррера 0,08907.

В действительности, так как при $x=150$ футов

$$\frac{3x}{8nc}=0{,}09329 \quad \text{и} \quad \frac{9x^2}{128n^2c^2}=0{,}00435,$$

то

$$\frac{3x}{8nc}-\frac{9x^2}{128n^2c^2}=0{,}08894,$$

что и показано у Ломбара.

[228] В оригинале 2,92. Исправлено по Ломбару.

[229] В оригинале 0,13993. Исправлено по Ломбару.

[230] Приведенное в оригинале отношение 1:1,549 неверно, как и приведенное Шеррером 1:1,493, потому что при $c=\frac{3}{4}$ дюй-

ма и $n=9647$ в рассматриваемом случае, когда $\sqrt{b}=1180$ *фут/сек*, $\sqrt{v}=950$ *фут/сек* и $x=225$ футов, получим:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}}}{\dfrac{3x}{8nc}-\dfrac{9x^2}{128n^2c^2}}=\frac{\dfrac{1180-950}{1180}}{\dfrac{3\cdot 225}{8\cdot 9647\cdot 0{,}0625}-\dfrac{9\cdot 225^2}{128\cdot 9647^2\cdot 0{,}0625^2}}=$$

$$=1{,}49764\approx 1{,}498,$$

и отношение будет

$$1:1{,}498.$$

[231] Это уравнение приведем к виду, удобному для вычислений:

$$t=\frac{x}{m}\left(1+\frac{3x}{16nc}+\frac{9x^2}{16\cdot 24\cdot n^2c^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{x}{m}\left[1+\frac{3x}{8nc}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\left(\frac{3x}{8nc}\right)^2\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\left(\frac{3x}{8nc}\right)^3\cdot\frac{1}{4!}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3x}{8nc}\right)^4\cdot\frac{1}{5!}+\ldots\right].$$

Положив $x=939$ футов, $m=400$ футов, $n=9647$, $c=\frac{3}{4}$ дюйма, получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{3x}{8nc}=0{,}2920078,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{3x}{8nc}\right)^2=0{,}0568457,$$

$$\frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{3x}{8nc}\right)^3=0{,}0082997,$$

$$\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{3x}{8nc}\right)^4=0{,}0009694,$$

$$\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{3x}{8nc}\right)^5=0{,}0000944,$$

$$\frac{1}{7!}\cdot\left(\frac{3x}{8nc}\right)^6=0{,}0000079.$$

Ограничившись этим членом, поскольку последующие члены не повлияют на точность результата до 10^{-5}, получим: $t=\frac{939}{400}\times$ $\times\,1{,}3582249=3{,}18843$ сек. с точностью до пятого знака.

В оригинале эти же члены разложения вычислены каждый с точностью до пяти знаков и в результате получено менее точное значение $t=3{,}18839$ сек., точное лишь в пределах трех знаков. Шеррер дал $t=3{,}18643$ сек., что точно лишь до 2-го знака, т. е. еще менее точно, чем в оригинале.

[232] В оригинале опечатка на 507 странице (2 стр. сн.): напечатано $\frac{z^2}{24}$, следует читать: $\frac{z^3}{24}$.

[233] В оригинале 1,6718. Исправлено по Шерреру.

[234] В оригинале 0,6718. Исправлено по Шерреру.

[235] В оригинале 0,9556. Исправлено по Шерреру.

[236] В оригинале 1,6055. Исправлено по Шерреру.

[237] В оригинале 1,549. См. примечание 230.

[238] Т. е. $\ln e=1$.

[239] С помощью логарифмического ряда

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots,$$

где u — развернутое по степеням выражение

$$\left(\frac{x}{m}-\frac{x^2}{2m^2}+\frac{x^3}{6m^3}-\ldots\right)^{\frac{1}{2}}.$$

[240] И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, рус. перевод в Собр. трудов А. Н. Крылова, VII, М.—Л., 1936, стр. 462—463.

[241] Этот стеклянный шар был полый, заполненный воздухом. Заметим, что Ньютон в своих вычислениях при обработке данных июльских опытов 1710 года принимал, что воздух в 860 раз легче воды, и потому вес воздуха в объеме, равном объему стеклянного шара, у него получился равным 19,3 грана. (И. Ньютон, упом. соч., стр. 463), тогда как Эйлер принимает, что воздух в 850 раз легче воды, а потому и вес воздуха в объеме, равном объему стеклянного шара, у него равен 19,53 грана, т. е. несколько больше, чем у Ньютона.

[242] И. Ньютон, Упом. соч., стр. 463.

[243] В оригинале опечатка на 527 странице (1 стр. сн.): напечатано v. Dieser, следует читать Dieser.

[244] И. Ньютон. упом. соч., Поучение к предложению XIV, стр. 368.

[245] В оригинале 42 190. Исправлено по Шерреру.

[246] В оригинале 0,12436. Исправлено по Шерреру.

[247] В оригинале $\frac{9{,}93150}{18{,}86758}$. Исправлено по Шерреру.

[248] В оригинале 22 102. Исправлено по Шерреру.

[249] В оригинале 23 686. Исправлено по Шерреру.

[250] Описание этих опытов приведено в девятом Предложении первой главы.

[251] Т. е. таким же относительным зарядом, вес которого в данном случае равен половине веса ядра.

[252] В оригинале опечатка на 544 странице (12 стр. сн.): напечатано heraus dringt; следует читать heraus bringt.

[253] См. стр. 259.

[254] Правильнее: в полчетверти-картаунах.

[255] Калибр 2 фунта.

[256] В оригинале: $v = 16\,862{,}0 \cdot l \cdot \frac{130i - 237}{237}$. Исправлено по Ломбару.

[257] В оригинале опечатка на 564 странице (3 стр. св.): напечатано $20498, l\frac{65i - 158}{158}$, следует читать $= 20498{,}0\, l\frac{65i - 158}{158}$.

[258] Имеется в виду приведенное Эйлером в первом замечании к этому Предложению разделение пушек на типы с их наименованиями по системе, существовавшей в прусской артиллерии в первой половине XVIII в.

[259] В оригинале опечатка на 570 странице (10 стр. сн.): напечатано Schif, следует читать Schiff.

[260] В оригинале опечатка на 575 странице (9 стр. св.): напечатано Geicht, следует читать Gewicht.

[261] См. стр. 359.

[262] Имеются в виду тактико-технические свойства полукартаунов, т. е. 24-фунтовых пушек.

[263] Пушечный калибр в 24 фунта, соответствующий линейному калибру примерно в 6 дюймов или 152 *мм*, просуществовал во всех европейских армиях в течение двухсот лет (в России с 1708 года) почти до конца первой мировой войны как главный калибр осадной артиллерии.

[264] Следовательно, Эйлер полагал, что для рикошетной стрельбы требовалась скорость более 1000 футов в секунду, что вызвало возражение Ломбара, отметившего в примечании 30 к своему переводу (1783), что для рикошетной стрельбы скорость даже в 1000 *фут/сек* была слишком велика, и во французской артиллерии, в которой была впервые введена рикошетная стрельба, заряды для такой стрельбы применялись не более чем в $\frac{1}{12}$ веса ядра, при которых начальная скорость ядра не превышала примерно 800 *фут/сек*.

[265] Regula falsi в сущности представляет прямолинейную интерполяцию и является в математике одним из способов приближенного решения уравнения $f(x) = 0$. В основу этого способа положено допущение, по которому разность частных значений функции $f(x)$ пропорциональна разности соответствующих значений аргумента x. Составив пропорцию при $x = a$ и $x = b$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

или, так как $f(x)=0$,

$$\frac{-f(a)}{x-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

найдем:

$$x=b+f(a)\cdot\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

[266] В оригинале опечатка на 610 странице (7 стр. св.): напечатано $\frac{v(h+v)}{8863ch}$, следует читать $\frac{v(h+v)}{8863ch}$ zu 1.

[267] В оригинале 25,6615. Исправлено по Шерреру.

[268] Диего Уфано, испанский артиллерист второй половины XVI в., автор артиллерийского руководства «Tratado dela Artilleria y uso della platicada por el capitan Diego Ufano en las Guerras de flandes, Brusélas», 1613. См. там же стр .34.

[269] Марен Мерсенн (1588—1648), французский ученый. Здесь имеется в виду его труд «Ballistica et Acontismologia» (помещен в собрании его сочинений «Cogitata physico-mathematica», Parisiis, 1644). Приведенные данные находятся в гл. XXV стр. 84 этого трактата.

[270] Сюрирей де Сен-Реми (1650—1716), французский артиллерист. Описание упоминаемых здесь опытов приведено в его руководстве «Mémoires d'Artillerie», Paris, 1697; имеется русский перевод под названием «Сюрирей де Сен-Реми, Мемории или записки артиллерийские», ч. 2, 1732 г. стр. 89.

[271] Имеются в виду туазы.

[272] В оригинале $dt=\frac{-dx}{\sqrt{v}}$. Исправлено по Шерреру.

[273] В оригинале

$$x=\frac{hh}{2g(h+v)}-\frac{hh}{2g(b+h)}.$$

Исправлено по Шерреру.

[274] В оригинале

$$EA=\frac{h}{2g}-\frac{hh}{2g(b+h)}=\frac{bh}{2g(b+h)}.$$

Исправлено по Шерреру.

[275] В оригинале опечатка на 648 странице (7 стр. св.): напечатано

$$-\frac{dv}{2k\left(+\frac{1}{2}h-k\right)},$$

следует читать

$$-\frac{dv}{2k\left(v+\frac{1}{2}h-k\right)}.$$

[276] В оригинале 110 237 500. Исправлено по Шерреру.

[277] В оригинале 195 705 800. Исправлено по Шерреру.

[278] В оригинале $\sqrt{85\,468\,300}$. Исправлено по Шерреру.

[279] В оригинале 9245. Исправлено по Шерреру.

[280] В оригинале 5963. Исправлено по Шерреру.

[281] В оригинале:

$$EA=5963 \quad l\frac{46\,469\cdot 91\,409}{9\,489\cdot 128\,389}=9376.$$

Исправлено по Шерреру.

[282] В оригинале 9376. Исправлено по Шерреру.

[283] В оригинале опечатка на 653 странице (8 стр. св.): напечатано $\frac{(1-16m)\,a^3\sqrt{a}}{4344m^3h^3}$, следует читать $\frac{(1-16m)\,a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3}$.

[284] См. примечание [72].

[285] В оригинале 1,193. Исправлено по Шерреру.

[286] В оригинале 2115,973. Исправлено по Шерреру.

[287] Как замечает Шеррер, при суммировании первых пяти членов выражения для $\sqrt{a}$ при приведенных в оригинале значениях каждого члена должно получиться:

$$\sqrt{a}=2116,\ 173,$$

как это показано у Ломбара (см. стр. 461 французского перевода 1783 г.). Но так как пятый из этих членов равен 0,753, а не 1,193, как в оригинале (см. примечание [285]) и у Ломбара, то

$$\sqrt{a}=2115{,}733,$$

что дает $a=4476{,}3$ рейнского фута, а не 4478, как в оригинале.

[288] Д. Бернулли получил при своих опытах 4550 английских футов (Comment. acad. sc. Petrop., t. 2, стр. 338), что составляет 4419 рейнских футов.

[289] Высоте $b=13\,694$ английских фута, полученной Бернулли, отвечает скорость 939 *англ.фут/сек*, или, что то же: высоте 13 298,2 рейнского фута отвечает скорость 912 *рейнск. фут/сек*. Это и есть начальная скорость ядра в упоминаемом опыте Бернулли.

[290] В оригинале $b=6855$. Если правильно выполнить вычисление, то найдем:

$$b=\frac{61\,494\cdot\frac{1}{8}}{2\cdot 3+\frac{1}{8}}\ln\frac{65\cdot 32\cdot 3-158\cdot\frac{1}{8}}{158\cdot\frac{1}{8}}=7219{,}14\approx 7219 \text{ рейнских футов}.$$

Общее выражение для b—см. во втором замечании Эйлера к 4-му Предложению.

[291] В оригинале 654 *рейнск.фут/сек*. Исправлено согласно предыдущему примечанию:

$$\frac{1}{4}\sqrt{6\cdot 10^3}=\frac{1}{4}\sqrt{7219\cdot 10^3}=671{,}7\,\frac{\textit{рейнск.фута}}{\textit{сек}}.$$

[292] Это выражение получается из приведенного выше последнего уравнения следующим образом:

$$t=\frac{mhh}{\beta k}\cdot\operatorname{arctg}\frac{s}{\beta}-\frac{mhh}{\gamma k}\cdot\operatorname{arctg}\frac{s}{\gamma}=$$

$$=\frac{mh\sqrt{h}}{k}\left(\frac{\sqrt{h}}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{s}{\beta}-\frac{\sqrt{h}}{\gamma}\cdot\operatorname{arctg}\frac{s}{\gamma}\right),$$

где $\sqrt{h}=v=b$.

Сила пороха принята в четыре раза большей, чем по Робинсу, что и оговорено Эйлером. (По Ломбару.)

[293] В оригинале 1743,7. Правильное значение $u=1743{,}51$ получено при правильном значении $z=a=4476{,}3$ (см. примечание 287). Исправлено по Шерреру.

[294] Для времени падения в секундах имеем выражение

$$\frac{mh}{250f}\sqrt{1000h}\left(\frac{\sqrt{h}}{\beta}\cdot\operatorname{arctg}\frac{s}{\beta}+\frac{\sqrt{h}}{2\gamma}\cdot\ln\frac{\gamma+s}{\gamma-s}\right),$$

которое по подстановке в него значений

$$s=41{,}75538,\quad \beta=172{,}886,\quad \gamma=43{,}70926,$$

$$\frac{\sqrt{h}}{\beta}=0{,}967513,\quad \frac{\sqrt{h}}{2\gamma}=1{,}91343$$

дает время падения 20,26 секунды, и полное время вертикального движения ядра в воздухе получается 34,02 секунды.

[295] В оригинале опечатка на 667 странице (7 стр. сн.): напечатано

$$\frac{-3v\,(h+v)\,ds\cos^2}{4nch},$$

следует читать

$$\frac{-3v\,(h+v)\,ds\cos^2\varphi}{4nch}.$$

[296] В оригинале опечатка на 672 странице (1 стр. св.): напечатано $\frac{a}{2\,(1-uu)}$, следует читать $\frac{u}{2\,(1-uu)}$.

[297] В оригинале опечатка на 680 странице (4 стр. св.): напечатано $\frac{5\sin\varphi}{4\cos^4\varphi}\,\frac{15\sin\varphi}{8\cos^2\varphi}$, следует читать $\frac{5\sin\varphi}{4\cos^4\varphi}+\frac{15\sin\varphi}{8\cos^2\varphi}$.

[298] В оригинале опечатка на 680 странице (1 стр. сн.): напечатано $\frac{3}{8}\omega\,\mathrm{tang}$, следует читать $\frac{3}{8}\omega\,\mathrm{tang}\,\varphi$.

[299] В оригинале вместо применявшегося все время начертания греческой буквы θ поставлена здесь та же буква, но другого начертания ϑ. Такая замена произведена далее во всех формулах, где встречается эта буква на страницах 674—676, 681—683 и, по-видимому, объясняется единственно тем, что на этот печатный лист в кассе не хватило литеры θ, которая на этом листе встречается 91 раз. Подобная замена одного и того же знака литерами другого шрифта встречается в математических формулах и в разных других местах этой книги (например, *h* и β в двух разных шрифтах), что вносит некоторое затруднение в чтение формул и требует внимания со стороны читателя.

[300] В оригинале опечатка на 688 странице (2 стр. св.): напечатано $1\frac{1}{2}$; следует читать $1\frac{1}{7}$.

[301] Т. е. плоскость чертежа, на которой дана схема 26.

[302] Т. е. той же плоскостью чертежа, на которой дана рассматриваемая схема 26.

[303] В результате построения схемы, представленной на рис. 26, параллелограмм *AQqa* находится в плоскости чертежа, которая касательна к сферическому ядру в точке *A*; плоскость *PQqp* перпендикулярна к плоскости чертежа. В перспективе, представленной на схеме, ядро находится под плоскостью чертежа.

[304] В данном случае несквозная пробоина глубиной в 1 дюйм имеет объем, равный объему цилиндра, с основанием, равным площади большого круга сферической пули и высотой в $\frac{5}{8}$ дюйма и объему переднего полушара пули, который равен объему цилиндра с тем же основанием, а высотой, равной $^1/_3$ диаметра пули, или $^1/_4$ дюйма. Таким образом, общая высота цилиндра, равнообъемного пробоине глубиной в 1 дюйм при том же основании, будет $\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$ дюйма.

[305] В оригинале 27 800. Исправлено по Шерреру.

[306] В оригинале 4441. Исправлено по Шерреру.

[307] В оригинале как 11 к 1. Исправлено по Шерреру.

[308] Впервые опубликовано в «Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres», т. IX (1753), 1755 г., Берлин, стр. 321—352.

[309] В оригинале «dans un fluide» — «в флюиде». По представлениям, сложившимся к середине XVIII в., в природе существуют два вида тел: твердые тела и флюиды — текучие тела. Флюиды различались упругие (например, воздух) и неупругие (например, вода). Упругие флюиды — газообразные вещества — встречаются у Эйлера под названием: тонкая или субтильная материя, medium rarissimum.

В рассматриваемой статье под флюидом или средой подразумевается среда, оказывающая сопротивление движущимся в ней телам, в частности, воздушная среда. См.: L. Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne, т. I, Petersb., 1768. Lettre IX, стр. 33. L. Euler, Mechanica, т. II, Petersb., 1736, стр. 351. Л. Эйлер, Основы динамики точки, М.—Л., 1938, стр. 386, 492—493.

[310] Имеются в виду артиллерийские снаряды сферической формы: ядра, бомбы, гранаты.

[311] Иоганн Бернулли, скончавшийся в 1748 году, в 1719 году дал решение баллистической задачи, приняв в самой общей форме одночленный закон сопротивления воздуха (см. примечание 69).

[312] Встречающиеся в этой статье термины: ускорительная сила и задерживающая сила обозначают то, что в современной механике называется вообще ускорением. По Эйлеру ускорительная сила равна отношению величины силы к массе тела. Но так как Эйлер принимает ускорение силы тяжести за 1, то масса тела численно равна его весу, и ускорение выражается отношением действующей на тело силы к весу тела. L. Euler, Mechanica, т. I, Petersb., 1736, §§ 197, 205, 213, 214, 258.

[313] Т. е. по направлению нормали к площадке.

[314] И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, перевод А. Н. Крылова, Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, М.—Л., 1936, стр. 426—428.

[315] Эйлер принимает ускорение силы тяжести за единицу, или отношение веса тела к его массе равным единице, т. е. вес тела численно равным его массе (L. Euler, Mechanica, Petersb., 1736, §§ 197—205).

[316] В оригинале (326 страница, 8 стр. сн.) $\frac{1}{4}\pi ddv+213\pi ddk$, тогда как следует $\frac{1}{8}\pi ddv+213\pi ddk$, в соответствии с §§ 8 и 11.

[317] Здесь и всюду далее принят так называемый рейнский фут, который равен 0,31385 метра.

[318] Если принять $\frac{1}{n}=1$, что будет соответствовать значению $v=850\,k$, то $\frac{1}{n}\cdot 1666k\approx 2v$, и выражение для ускорения силы сопротивления воздуха примет вид

$$\frac{v+\frac{1}{n}\cdot 1666k}{c}=\frac{v+2v}{c}=\frac{3v}{c}.$$

[319] Т. е. время t принимается за аргумент.

[320] Здесь и везде дальше символ l представляет собою эйлеров знак логарифма. В надлежащих случаях Эйлер оговаривает, какая при этом имеется в виду система логарифмов

(§§ 43, 51); называя натуральные логарифмы гиперболическими, а десятичные логарифмы обыкновенными.

[321] В оригинале (331 страница, 3 стр. сн.) знаменатель подынтегрального выражения дан в виде $n+p$ вместо $n+P$.

[322] А именно: $\alpha=1-\frac{\Pi}{P}$ (см. § 7).

[323] А именно: $c=707\cdot\frac{e^3}{d^2}$ (см. § 15).

[324] Так как в общем случае $c=\frac{8e^3}{\mu\pi d^2}$, где μ — удельный вес среды (см. § 10), то в случае пустоты $\mu=0$ и, следовательно, $c=\infty$.

[325] Высота $\frac{\alpha c}{2n}$, соответствующая скорости в вершине траектории, является всегда конечной величиной. При $c=\infty$ это возможно только в случае, когда $n=\infty$.

[326] Так как $\alpha=1-\frac{\Pi}{P}$, где P — вес снаряда, а Π — вес воздуха в объеме, равном объему снаряда, то в случае пустоты $\Pi=0$ и, следовательно, $\alpha=1$.

[327] В оригинале (334 страница, 3 стр. св.) $t=2bp$, между тем, так как в общем случае (§§ 22, 23)

$$t=\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{n\pm P}},$$

что представим в виде

$$t=\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\int dp\sqrt{\frac{c}{n\pm P}},$$

то в случае пустоты, когда величиной P можно пренебречь, имея в виду, что $n=\infty$, и, кроме того, $\alpha=1$, получим:

$$t=p\sqrt{\frac{2c}{n}},$$

а так как обозначено $\frac{c}{2n}=b$, то окончательно $t=2p\sqrt{b}$.

[328] Ранее было получено (§ 22):

$$s=c\int\frac{dp\sqrt{1+p^2}}{n+P}.$$

[329] Дифференцированием получим:

$$\left(\frac{1+p^2}{n+P}\right)'_p=\frac{2p\,(n+P)-P'_p\,(1+p^2)}{(n+P)^2}.$$

Условие, по которому

$$\left(\frac{1+p^2}{n+P}\right)'_p=0,$$

приводит к равенству

$$2p(n+P)-P'_p(1+p^2)=0,$$

где

$$P=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right),$$

и, следовательно,

$$P'_p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+p^2}+\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{1+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}}{p+\sqrt{1+p^2}}\right)=\sqrt{1+p^2}.$$

По подстановке в полученное выше равенство представим его в виде

$$2p(n+P)=(1+p^2)\sqrt{1+p^2}.$$

[330] А именно:

$$2p(n+P)=2np+2pP=2np+2p\left[\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\right]=2np+p^2\sqrt{1+p^2}+p\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right).$$

Но из предыдущего

$$2p(n+P)=(1+p^2)\sqrt{1+p^2};$$

таким образом,

$$2np+p^2\sqrt{1+p^2}+p\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=(1+p^2)\sqrt{1+p^2},$$

или

$$2np+p\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=(1+p^2)\sqrt{1+p^2}-p^2\sqrt{1+p^2}=\sqrt{1+p^2}.$$

[331] Выражение

$$P=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$$

разложим в ряд

$$\sqrt{1+p^2}\approx 1+\frac{1}{2}p^2$$

и

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\approx\ln(p+1)\approx p-\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{3}.$$

Тогда по подстановке этих выражений в первое получим:

$$P \approx \frac{1}{2}\, p\left(1+\frac{1}{2}\, p^2\right)+\frac{1}{2}\left(p-\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{3}\right)=p+\frac{p^3}{6}.$$

Разложение в ряд другого выражения

$$(1+p^2)\sqrt{1+p^2}$$

дает:

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \approx 1+\frac{3}{2}\, p^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}\, p^4=1+\frac{3}{2}\, p^2+\frac{3}{8}\, p^4.$$

[332] Приведенное здесь Эйлером выражение для p получено приближенным решением уравнения

$$2np=1-\frac{1}{2}\, p^2+\frac{1}{24}\, p^4,$$

которое получается из равенства

$$2p\,(n+P)=(1+p^2)\sqrt{1+p^2}$$

путем подстановки в него найденных выше приближенных выражений для P и $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}$:

$$2p\left(n+p+\frac{1}{6}\, p^3\right)=1+\frac{3}{2}\, p^2+\frac{3}{8}\, p^4,$$

что после преобразований и дает приведенное выше уравнение. При его решении отбрасываем член $\frac{1}{24}\, p^4$ по его малости и получаем новое уравнение

$$\frac{1}{2}\, p^2+2np-1=0,$$

или

$$p^2+4np-2=0,$$

решая которое, получим:

$$p=-2n\pm\sqrt{4n^2+2}.$$

Разлагая в ряд второй член правой части и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим:

$$\sqrt{4n^2+2}=2n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{16n^3}.$$

Так как в нисходящей ветви $p>0$, берем перед радикалом знак плюс, и тогда

$$p=-2n+2n+\frac{1}{2n}-\frac{1}{16n^3}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{16n^3},$$

что и приведено Эйлером.

[333] В выражении

$$v=\frac{\alpha c}{2n}\cdot\frac{4n^2+1}{4n^2+2}$$

второй множитель непосредственно делением дает

$$\frac{4n^2+1}{4n^2+2}=1-\frac{1}{4n^2+2};$$

или приблизительно, если число n не очень мало, о чем в § 33 сделана оговорка, имеем:

$$\frac{4n^2+1}{4n^2+2}=1-\frac{1}{4n^2}$$

и

$$v=\frac{\alpha c}{2n}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

[334] Для нисходящей ветви радиус кривизны (§ 25)

$$\varrho=\frac{c(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{n+P}$$

и, следовательно,

$$\varrho'_p=\frac{3cp(n+P)\sqrt{1+p^2}-c(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\cdot P'_p}{(n+P)^2},$$

причем, как уже нашли (примечание 329),

$$P'_p=\sqrt{1+p^2}.$$

Из условия для нахождения минимума

$$\varrho'_p=0$$

получим:

$$3p(n+P)-(1+p^2)\sqrt{1+p^2}=0,$$

а подставив вместо P его выражение, получим приведенное Эйлером уравнение.

[335] Приближенное значение $p=\frac{1}{3n}$ получено из предыдущего выражения (§ 35), которое имеет вид

$$3np+\frac{1}{2}p^2\sqrt{1+p^2}+\frac{3}{2}p\cdot\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)-\sqrt{1+p^2}=0.$$

Применив разложение в ряд радикалов и логарифма и ограничившись в разложении приведенными ниже членами, получим:

$$3np+\frac{1}{2}p^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}p\cdot\ln\left[p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\right]-(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\approx$$

$$\approx 3np+\frac{1}{2}p^2\left(1+\frac{1}{2}p^2\right)+\frac{3}{2}p\cdot\ln\left(p+1+\frac{1}{2}p^2\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}p^2\right)=3np+\frac{1}{4}p^4+\frac{3}{2}p\left(p+\frac{1}{2}p^2\right)-1=0.$$

Отбросив по малости члены, содержащие p в степенях выше первой, получим:

$$3np-1=0,$$

откуда

$$p=\frac{1}{3n}.$$

[336] В оригинале (340 страница, 8 строка св.) в первом члене правой части выражение в скобках дано в виде

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{tang}\cdot\frac{1}{f}\mathrm{A}-\mathrm{tang}\,\frac{q}{g},$$

тогда как следует:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{tang}\cdot\frac{1}{f}-\mathrm{A}\cdot\mathrm{tang}\frac{q}{f}.$$

[337] Имеется в виду труд шотландского математика Джона Непера (1550—1617) «Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, eiusque usus, in utraque, trigonometria, ... explicatio», Edinburgi, 1614. Это были первые в истории математики логарифмические таблицы.

[338] См. стр. 38—41, где эта таблица под названием «Вспомогательная таблица» (Table subsidiaire) помещена, как и в оригинале, в конце трактата.

[339] Здесь Эйлер имеет в виду таблицы функции

$$\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

составленные специально для вычисления абсциссы x параллелей цилиндрической равноугольной проекции шара по формуле

$$x=\cos\varphi_0\cdot\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

при радиусе шара, принятом за 1.

В этой проекции, называемой меркаторской по имени ее автора, знаменитого фламандского картографа Г. Меркатора (1512—1594), всякая прямая линия является локсодромией, т. е. кривой, пересекающей на поверхности шара все меридианы под постоянным углом. Известно, что почти все морские карты строятся в меркаторской проекции.

[340] В оригинале 2,390330. Исправлено по Шерреру.

[341] В оригинале 8,223570. Исправлено по Шерреру.

[342] В оригинале 67,12291. Исправлено по Шерреру.

[343] Например, во втором Замечании Эйлера к шестому Предложению Робинса во 2-й главе труда Эйлера «Новые основания артиллерии» («Neue Grundsätze der Artillerie», 1745).

[344] Здесь Эйлер имеет в виду случай склонительной стрельбы, как в его время называли стрельбу под отрицательными углами возвышения.

[345] Следовательно, скорость, соответствующая высоте u, будет $\sqrt{4gu}=2\sqrt{g}\sqrt{u}$ (в секунду). (Шеррер.)

[346] В оригинале $434\frac{9}{10}$. Исправлено по Шерреру.

[347] В оригинале 0,5417094. Исправлено по Шерреру.

[348] В оригинале 1,3165572. Исправлено по Шерреру.

[349] В оригинале 2,3903296. Исправлено по Шерреру.

[350] В оригинале 8,223570. Исправлено по Шерреру.

[351] В оригинале 11,4300520. Исправлено по Шерреру.

[352] В оригинале 131,11452. Исправлено по Шерреру.

[353] В оригинале 67,12291. Исправлено по Шерреру.

[354] В оригинале 92 332,30. Исправлено по Шерреру.

[355] Впервые опубликовано в «Opera posthuma», 2, 1862, стр. 800—804.

[356] Впервые опубликовано в «Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae», 15 (1770), 1771, стр. 414—436.

ТАБЛИЦА МЕР И ВЕСОВ,
встречающихся в труде Эйлера «Новые основания артиллерии» (1745)

Меры:

Рейнский фут=12 дюймов=1000 скрупул=0,31385 метра.

Английский фут= $\frac{1}{3}$ ярда=12 дюймов=0,30479 метра.

Парижский фут= $\frac{1}{6}$ туаза=12 дюймов=0,32484 метра.

Туаз=1,9490 метра.

Рейнский фут=1,0297 англ. фута=0,9662 парижск. фута.

Английский фут=0,9711 рейнск. фута=0,9383 парижск. фута.

Парижский фут=1,0350 рейнск. фута=1,0658 англ. фута.

Веса:

Английский торговый фунт (avoirdupois, lbs, ℔)=16 унций (ounces)=256 драхм (drahms)=453,5926 грамма.

Английский тройский фунт (troypfund)=12 унций=5760 гранов (grains)=373,2419 грамма.

Тройский фунт = $\frac{144}{175}$ ℔.

1℔=7000 гранов тройского веса.

Английская тонна (long ton)=20 квинталов (центнеров)=2240℔= =1016,0475 килограмма.

Английский квинтал (центнер)=112 ℔=50,802 килограмма.

Парижский фунт=16 унций=489,5058 грамма.

Нюрнбергский фунт=16 унций=509,7 грамма.

СОДЕРЖАНИЕ

Леонард Эйлер

Исследования по баллистике.

Редактор *Л. С. Полак.*
Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*
Корректор *О. А. Сигал.*

Сдано в набор 30/VIII 1961 г. Подписано к печати 22/XI 1961 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 18,5+1 вкл. Условн. печ. л. 30,47. Уч.-изд. л. 26,22.
Тираж 3300 экз.
Цена книги 1 р. 51 к. Заказ № 1211.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.

87840

1р. 51к.