

Т. ШТЕРН

**ВВЕДЕНИЕ
В НЕБЕСНУЮ
МЕХАНИКУ**

AN INTRODUCTION TO CELESTIAL MECHANICS

THEODORE E. STERNE

*Simon Newcomb Professor of Astrophysics in Harvard University
Associate Director, Smithsonian Astrophysical Observatory
Cambridge, Massachusetts*

INTERSCIENCE PUBLISHERS INC., NEW YORK
INTERSCIENCE PUBLISHERS LTD, LONDON

1960

T. ШТЕРН

ВВЕДЕНИЕ
В
НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

Перевод с английского
A. H. Гордеева и A. M. Микиши

Под редакцией В. А. Сарычева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1964

АННОТАЦИЯ

В небольшой по объему книге автор поставил цель — дать необходимые сведения по небесной механике для лиц, не имеющих специального астрономического образования, но вынужденных по роду своей деятельности интересоваться вопросами расчета движения искусственных небесных тел (ракет, искусственных спутников, космических кораблей и т. д.).

Первая глава содержит начальные сведения по теоретической астрономии и небесной механике, вторая — элементы теории притяжения тел, близких к шарообразным. В третьей главе описаны координаты, при помощи которых определяется положение небесных тел в пространстве. Четвертая глава знакомит читателя с элементами теории возмущенного движения. Пятая глава посвящена основам нового раздела небесной механики — теории движения искусственных спутников Земли и возможностям приложения этой теории для точного определения формы и размеров Земли. В шестой главе кратко рассмотрены численные методы небесной механики с приложением к задаче о возмущении движения искусственного спутника.

Автор умело обращает внимание читателей на самые основные вопросы астрономии и небесной механики, особенно существенные для изучения движения искусственных небесных тел. Книга будет прекрасным пособием для математиков, физиков, вычислителей, программистов, инженерно-конструкторских работников, интересующихся вопросами небесной механики, и может служить в качестве хорошего справочника.

О ГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию	
Предисловие	11

Глава первая

Тяготение. Задача двух тел. Эллиптическое движение

1.1. Законы Кеплера и тяготение	15
1.2. Притяжение сферических тел	20
1.2.1. Гравитационный потенциал	21
1.3. Движение относительно неподвижного ньютонианского центра	22
1.4. Задача двух тел	24
1.5. Эллиптическое движение. Аномалии. Зависимость положения на орбите от времени (закон движения)	26
1.6. Движение по параболе. Закон движения	29
1.7. Движение по гиперболе. Закон движения	30
1.8. Система единиц	31
1.9. Определение плоской орбиты по начальным данным	34
1.10. Примеры и задачи	35
Литература	43

Глава вторая

Притяжение тел неправильной формы.

Изменение формы, вызываемое вращением

2.1. Потенциал тела неправильной формы во внешней точке	45
2.2. Потенциал тела с осевой симметрией	49
2.3. Изменения формы Земли вследствие вращения . .	50
2.4. Сила тяжести на поверхности Земли. Уравнение Клеро	52
2.5. Гравитационный потенциал Земли	55
2.6. Общие аномалии, определяемые вращением Земли	56
Литература	58

*Глава третья***Координаты. Орбита в пространстве. Время.
Эфемериды. Прецессия**

3.1.	Системы астрономических координат	59
3.2.	Орбита в пространстве	62
3.3.	Время	67
3.3.1.	Примеры и задачи	73
3.4.	Определение элементов орбиты по положению и скорости	75
3.4.1.	Примеры и задачи	78
3.4.2.	Определение элементов орбиты из наблюдений	78
3.5.	Эфемериды и преобразования координат	81
3.6.	Прецессия и нутация	86
	Литература	92

*Глава четвертая***Динамика. Вариации элементов. Общие возмущения**

4.1.	Лагранжевы уравнения движения	93
4.2.	Интеграл энергии	96
4.3.	Пример: эйлеровы углы. Влияние нутации на время	97
4.4.	Гамильтонова форма уравнений движения	101
4.5.	Контактные преобразования	103
4.5.1.	Бесконечно малые контактные преобразования	104
4.5.2.	Преобразование динамических систем	106
4.5.3.	Дифференциальное уравнение в частных про- изводных Гамильтона—Якоби	107
4.5.4.	Возмущения	109
4.5.5.	Задача n тел	114
4.5.6.	Невозмущенное решение	118
4.5.7.	Возмущенное решение. Оскулирующие эле- менты	123
4.5.8.	Вариация элементов	126
4.5.9.	Вариация элементов, вызванная возмущающи- ми силами	130
4.6.	Общие возмущения в задаче об n планетах	135
4.7.	Теории Луны	141
	Литература	142

*Глава пятая***Общие возмущения движения искусственных спутников
Земли. Определение плотности атмосферы**

5.1. Введение	144
5.2. Применение методов теории планет (без учета со- противления воздуха)	145
5.3. Применение нового метода (без учета сопротивле- ния воздуха)	156
5.3.1. Новое решение. Невозмущенное движение	164
5.3.2. Новое решение. Возмущения	167
5.4. Сопротивление атмосферы	171
5.5. Влияние сопротивления воздуха. Плоская орбита . .	173
5.6. Методы интегрирования. Плоские орбиты с учетом сопротивления среды	180
5.6.1 Вывод распределения плотности атмосферы по движению спутников	186
5.6.2 Учет вращения атмосферы и сжатия планеты . .	190
5.6.3. Время существования искусственных спутников Земли	193
5.7. Движение искусственного спутника Земли с учетом вращения атмосферы и сжатия Земли	196
Литература	212

*Глава шестая***Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных
уравнений. Специальные возмущения**

6.1. Общие замечания	213
6.2. Численное интегрирование	214
6.3. Специальные методы для уравнений второго поряд- ка, не содержащих членов с первой производной . .	221
6.4. Точность численного решения обыкновенных диффе- ренциальных уравнений	225
6.5. Пример анализа ошибок: численное интегрирование уравнений движения близкого спутника Земли . .	229
6.6. Специальные возмущения. Метод Коуэла и Кром- мелина	235
6.7. Специальные возмущения. Метод Энке	237
6.8. Специальные возмущения. Другие методы	241
Литература	242

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Появление искусственных небесных тел — искусственных спутников Земли, космических кораблей и межпланетных ракет — резко повысило интерес к небесной механике — науке, изучающей движение небесных тел под действием их взаимного тяготения — и необычайно расширило круг лиц, которым в той или иной форме приходится сталкиваться с различными небесно-механическими задачами. Это относится не только к астрономам, но и к физикам, геофизикам, математикам, вычислителям и — не в последнюю очередь — к инженерно-конструкторским работникам, словом, ко всей многочисленной армии специалистов, принимающих участие в изучении и освоении космоса. В самом деле, вопрос, по какой орбите будет двигаться искусственное небесное тело, как предвычислить заранее его положение на орбите, как будет меняться его орбита с течением времени — все эти важнейшие вопросы самым непосредственным образом связаны с небесной механикой.

Именно на запросы указанного круга читателей стремился ответить своей книгой «Введение в небесную механику» Т. Штерн, в то время профессор Смитсонианского института, а ныне научный сотрудник университета Джона Гопкинса. В небольшой по объему книге он изложил основы теории невозмущенного и возмущенного движения тел солнечной системы и искусственных спутников Земли, а также применение теории возмущений для определения плотности земной атмосферы и формы Земли. Разумеется, небольшой объем книги потребовал особого характера изложения — читателю, как правило, сообщаются формулы без вывода; способ, которым получена та или иная формула, только

намечается, а подробных выкладок не приводится.¹ Поэтому книга Штерна не предназначена для начала систематического изучения небесной механики; но по ней читатель-неспециалист, владеющий основами математического анализа в объеме курса высшего технического учебного заведения, может с успехом познакомиться с основными проблемами и методами небесной механики, находящими применение в задачах о движении искусственных небесных тел.

Обсуждение более тонких и более специальных задач о движении спутников и космических ракет читатель может найти в специальном выпуске журнала «Успехи физических наук» (63, 1—200, 1957), а также в сборниках «Искусственные спутники Земли». Читателю, желающему более углубленно изучить небесную механику, следует обратиться к курсам небесной механики М. Д. Субботина и Г. Н. Дубошина, а также к книге Брауэра и Клеменса «Методы небесной механики» (М., изд-во «Мир», 1964).

B. Сарычев

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время имеется немного специалистов по небесной механике. Со многими из ее проблем в будущие годы в первую очередь столкнутся физики и инженеры, занимающиеся ракетами, искусственными спутниками и межпланетными кораблями; они будут решать возникающие задачи теми или иными способами. Есть много физиков и инженеров, но мало специалистов по небесной механике, а проблем будет много. Было бы очень жаль, если бы эти неспециалисты в небесной механике, сталкивающиеся с новыми проблемами, не использовали результаты, полученные за два с половиной столетия после Ньютона.

В течение этого времени проблемы небесной механики привлекли большое внимание астрономов, физиков и математиков, что вызвало к жизни замечательные исследования и привело к большим достижениям в технике наблюдений, в динамике и в чистой и прикладной математике. Достигнутые успехи глубоко повлияли на человеческую мысль XVIII и XIX веков и, возможно, привели к преувеличению роли математической физики среди других наук. Только в последнее время наибольшее внимание стало уделяться развитию квантовой механики.

Это введение в небесную механику написано не только для студентов-астрономов, но также и для неспециалистов, которые могут заинтересоваться предметом или будут сталкиваться с орбитальными проблемами. Поэтому основной упор был сделан на общие методы, которые могут оказаться полезными при решении новых задач. Книга рассчитана на читателей, мало знакомых с астрономией, но хорошо знающих основные

физические принципы. Предполагается, что читатель знаком с математикой и классической механикой на уровне студента, который специализируется в физике; он знает второй закон Ньютона, но не знает законов Кеплера. Можно надеяться, что книга будет полезна для студентов-астрономов, физиков и инженеров, а также для людей, сталкивающихся на практике с проблемами искусственных спутников, ракет и космических полетов.

Предлагаемая книга частично основана на динамической части полугодового курса по астрономии для аспирантов и студентов Гарвардского университета и частично на работах самого автора о движении искусственных спутников Земли. Книга не является в значительной степени оригинальным исследованием, хотя некоторые вопросы, подобные методу «общих возмущений» при учете сопротивления атмосферы в главе 5, возможно будут новыми; нестандартным является и выбор материала.

Приводятся методы получения орбит из наблюдений, но они упоминаются кратко, и мы отсылаем читателя к другим работам, где эти методы рассматриваются более полно. Ради более общей и практически более важной задачи *n* тел задача трех тел излагается очень кратко, несмотря на ее математическое очарование. Релятивистские эффекты для тел солнечной системы почти всегда пренебрежимо малы и здесь не рассматриваются. С другой стороны, включено довольно детальное описание вопросов определения времени и прецессионного движения для удобства читателей-неастрономов, которые, возможно, сталкиваются с орбитальными задачами и которым не всегда легко найти ясное и достаточно полное объяснение этих понятий.

В качестве иллюстрации общих принципов включено некоторое количество примеров.

Хотя автор и работал в области небесной механики, он не считает себя специалистом в ней и сознает, что писал введение в предмет, в который многие внесли гораздо больший вклад и почти в каждой части которого есть или были другие, более крупные специалисты.

Эта книга писалась тогда, когда автор был профессором астрофизики в Гарвардском университете и заместителем директора Смитсонианской астрофизической обсерватории. В настоящее время он является сотрудником университета Джона Гопкинса.

Автор глубоко благодарен Дирку Брауэру за ценные дискуссии, Барбаре Фолькарт за помощь при написании главы 5 и Чарльзу Уитнею за полезную критику.

Теодор Е. Штерн

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЯГОТЕНИЕ. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

1.1. Законы Кеплера и тяготение

В начале XVII в. Кеплер (1571—1630) из наблюдений Тихо Браге (1546—1601) открыл три закона, описывающие движение планет. Эти законы, которые носят его имя, не получили в то время теоретического объяснения. Эти законы таковы:

1. Путь (*орбита*) каждой планеты лежит в неподвижной плоскости, проходящей через Солнце, и является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Прямая (*радиус-вектор*), соединяющая Солнце и планету, ометает равные площади в равные промежутки времени.

3. Квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам их *средних расстояний* от Солнца (больших полуосей их орбит).

Динамический смысл этих законов был выявлен Ньютона (1642—1727) после того, как он сформулировал свои законы движения. Поучительно проследить его рассуждения; для удобства мы изложим их на современном языке.

Для того чтобы тело описывало плоскую кривую, равнодействующая всех сил, действующих на него, должна лежать в этой же плоскости. Далее, если планета, движущаяся в плоскости, имеет полярные координаты r и θ с центром в Солнце, то скорость, с которой площадь A ометается радиусом-вектором r , равна $dA/dt = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$. Однако, согласно второму закону движения Ньютона, производная по времени от $r^2\dot{\theta}$ равна

моменту относительно Солнца равнодействующей сил, действующих на планету, деленному на массу планеты. В соответствии со вторым законом Кеплера этот момент равен нулю. Следовательно, сила, действующая на планету, является центральной и ее направление всегда проходит через Солнце. Постоянная $c=r^2\dot{\theta}$ называется постоянной площадей планеты и равна удвоенной секториальной скорости.

Из первого закона Кеплера следует, что каждая планета при своем движении вокруг Солнца притягивается им с силой, пропорциональной $1/r^2$. Сущность доказательства этого утверждения такова. Возьмем уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \omega}, \quad (1.1.1)$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет (расстояние от центра эллипса до одного из его фокусов, деленное на a), ω — полярный угол θ , отсчитанный от *periцентра* (точка эллиптической орбиты, ближайшая к фокусу, где находится притягивающее тело), который в данном случае называется *перигелием*.

Отсюда

$$\dot{r} = \frac{ea(1-e^2)\dot{\omega} \sin \omega}{(1+e \cos \omega)^2} = \frac{ec \sin \omega}{a(1-e^2)}$$

и

$$\ddot{r} = \frac{ec^2 \cos \omega}{ar^2(1-e^2)} = \frac{c^2}{r^3} \left[1 - \frac{r}{a(1-e^2)} \right].$$

Радиальная составляющая ускорения в полярных координатах равна $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$. Это можно доказать, рассматривая прямоугольные координаты $x=\dot{r} \cos \theta$, $y=\dot{r} \sin \theta$ с тем же началом отсчета. В этих координатах

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta,$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

и

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta.$$

Так как радиальная составляющая ускорения \ddot{a}_r , равна $\ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta$, отсюда следует, что

$$\ddot{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2. \quad (1.1.2)$$

Теперь, если вместо \ddot{r} подставить величину, определяемую из (1.1.1), а вместо $r\dot{\theta}^2$ — равную ей величину c^2/r^3 , то радиальная составляющая ускорения во время движения планеты по эллипсу (1.1.1) будет определяться соотношением

$$\ddot{a}_r = - \frac{c^2}{a(1-e^2)r^2}, \quad (1.1.3)$$

из которого в силу второго закона Ньютона следует, что результирующая сила, действующая на планету, является притягивающей и меняется пропорционально $1/r^2$, поскольку c , a и e не меняются во время движения.

Третий закон Кеплера дал возможность Ньютону получить математическую форму закона всемирного тяготения. Суть доказательства была такой. Для любой планеты солнечной системы площадь, ограниченная ее эллиптической орбитой, равна $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, а скорость, с которой эта площадь ометается радиусом-вектором, равна $c/2$. Отсюда период обращения планеты по орбите

$$P = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{c}.$$

Среднее движение n на эллиптической орбите равно $2\pi/P$. Таким образом для любой планеты $n = c/a^2 \sqrt{1-e^2}$, откуда $n^2 a^3 = c^2/a(1-e^2)$, и, учитывая (1.1.3), получаем, что ускорение планеты от притяжения Солнцем равно $n^2 a^3/r^2$. По третьему закону Кеплера a^3 пропорционально P^2 , поэтому $n^2 a^3$ — постоянная величина, одинаковая для всех планет солнечной системы и равная μ . Ускорение каждой планеты по направлению к Солнцу равно μ/r^2 . Отсюда по второму закону Ньютона сила притяжения, действующая на планету, равна $m\mu/r^2$, где m — масса планеты. Но по третьему закону Ньютона действие и противодействие равны по величине и противо-

положно направлены. Следовательно, каждая планета притягивает Солнце с силой, пропорциональной массе этой планеты; поэтому сила взаимного притяжения пропорциональна как массе притягивающего тела, так и массе притягиваемого тела. Отсюда формулируется закон всемирного тяготения: сила взаимного притяжения двух масс m_1 и m_2 направлена по прямой, соединяющей эти массы, и равна Gm_1m_2/r^2 , где G — универсальная постоянная. Масса, которая входит во второй закон движения Ньютона, иногда называется *инертной* массой. Умноженная на скорость движения, она дает количество движения. Масса в законе всемирного притяжения (так называемая *тяжелая* масса), согласно приведенным выше рассуждениям, основанным на законах Кеплера, является тем же самым параметром. Но Ньютону *a priori* было ясно, что эти массы могут быть различны. Поэтому он провел [1] ряд экспериментов с маятниками одинаковой длины и формы, заполненными различными веществами: золотом, серебром, свинцом, стеклом, песком, поваренной солью, деревом, водой, пшеницей. Ньютон обнаружил, что все эти маятники имели одинаковые периоды колебаний. Отсюда он сделал вывод, что с точностью, превышающей $1:1000$, все тела у поверхности Земли имеют вес, пропорциональный их инертной массе, независимо от природы материала, из которого они состоят. Следовательно, независимо от состава тела и всех других обстоятельств, масса тела, которая входит в выражение для закона всемирного тяготения, является тем же параметром, что и инертная масса. Впоследствии идея тождественности инертной и тяжелой масс была пересмотрена с двух точек зрения. В общей теории относительности Эйнштейна закон всемирного тяготения несколько отличен от ньютоновского, но это отличие почти всегда несущественно с точки зрения небесной механики. С другой стороны [2], при пересмотре результатов ряда чрезвычайно точных гравитационных экспериментов, проделанных в начале XX в. Этвешем и его сотрудниками [3], была исключена возможность того, что антивещество, все электрические заряды которого имеют обратный знак по отношению к обычному веще-

ству, может иметь отрицательную тяжелую массу (последнее означало бы отрицательное значение величины m в законе всемирного тяготения, в то время как положительное значение величины m во втором законе движения Ньютона сохранилось бы). Этими экспериментами, гораздо более точными, чем опыты Ньютона с маятниками, постоянство отношения инертной массы к тяжелой было установлено для различных веществ с точностью больше 1 : 100 000 000. Предварительные результаты еще более недавних экспериментов Дикка [4], еще не законченных к марта 1959 г., дали для этого отношения точность порядка $3 : 10^{10}$.

Численная величина постоянной G , называемой иногда *ニュートоновской* постоянной тяготения, известна с невысокой точностью и примерно равна [5]

$$6,670 (1 \pm 0,0007) \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2.$$

Ньютонов вывод закона тяготения, основанный на законах Кеплера, полученных из наблюдений Тихо Браге, конечно, был отчасти интуитивным и не вполне логичным. Открытию закона тяготения существенно помогли наблюдения Тихо Браге, выполненные хотя и с ограниченной, но все-таки достаточно высокой точностью. Эти наблюдения проводились без телескопа и, по-видимому, имели точность порядка 1'. Точность наблюдений была достаточной для того, чтобы Кеплер понял, что планеты движутся по эллипсам, а также сделал вывод о постоянстве секториальной скорости, но была недостаточной для того, чтобы обнаружить возмущения в положении планет от нескольких секунд дуги до десятков секунд дуги, вызванные взаимным притяжением планет. Если бы наблюдения Тихо Браге были значительно более точными или значительно менее точными, то, как отметил Рессел, открытие закона притяжения, возможно, надолго задержалось бы. Эмпирическое представление приближенно известного движения планет, сделанное Кеплером, дало Ньютону достаточные основания для вывода закона тяготения. Подлинным подтверждением этого закона явилось близкое согласие выводов из него и наблюдений, выполненных с высокой точностью. Очень малые отклоне-

ния, обнаруженные при этом, всегда можно было отнести за счет таких факторов, как релятивистские эффекты, сопротивление среды и неравномерность вращения Земли.

1.2. Притяжение сферических тел

Ньютона доказал, что однородные сферы или сферы с распределением плотности, зависящим только от расстояния до центра, притягивают другие тела так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах. Ньютону это стоило большого труда, а сейчас этот результат может быть легко получен, если использовать теорему Гаусса:

Если некоторое тело заключено внутри любой замкнутой поверхности, то интеграл по этой поверхности от внутренней нормальной составляющей вектора напряженности поля тяготения g_n равен $4\pi G$, умноженному на массу этого тела.

Под напряженностью в какой-либо точке понимается сила притяжения, действующая на частицу единичной массы, помещенную в эту точку.

Предположим, что замкнутая поверхность S содержит только одну частицу массы m . В любом элементе поверхности dS на расстоянии r от m сила притяжения направлена к m и равна Gm/r^2 . Нормальная составляющая силы притяжения равна $Gm \cos \theta/r^2$, где θ — угол между внутренней нормалью к dS и радиусом-вектором точки m . Таким образом, вклад элемента поверхности dS в интеграл составляет $GmdS \cos \theta/r^2$, что равно $Gmd\omega$, где $d\omega$ — телесный угол элемента dS из m . Отсюда интеграл по всей поверхности S от g_n равен $4\pi Gm$. Этот вывод справедлив, если масса m находится внутри поверхности S . Если m расположена вне S , то интеграл по поверхности равен нулю, так как положительные и отрицательные вклады от $d\omega$ взаимно компенсируют друг друга. Таким образом, теорема Гаусса доказана:

$$\iint_S g_n dS = 4\pi GM, \quad (1.2.1)$$

где M — полная масса внутри замкнутой поверхности S .

Возьмем теперь однородную сферу с центром в точке P , или сферу, плотность которой зависит только от расстояния до P , и рассмотрим замкнутую сферическую поверхность радиуса r , расположенную вне первой сферы и концентрическую с ней. Из соображений симметрии ясно, что сила притяжения g постоянна на всей поверхности и всюду направлена по внутренней нормали, так что интеграл по поверхности в теореме Гаусса равен просто $4\pi gr^2$. Следовательно, $g=GM/r^2$, где M — масса сферы. Это и есть тот результат, который был получен Ньютоном.

Поскольку Солнце и планеты очень близки к сферическим телам, для них справедливы все выводы разд. 1. 1. В следующей главе будут рассмотрены поля притяжения несферических планет (несферичность является следствием вращения планет).

1.2.1. Гравитационный потенциал

Как и в случае электростатических сил, закон обратной пропорциональности квадрату расстояния между частицами подразумевает, что силы консервативны. Поэтому сила тяготения должна иметь потенциал. Проще всего вычислить гравитационную потенциальную энергию как разность потенциальных энергий в двух состояниях: некотором исходном и таком, при котором все частицы удалены друг от друга на бесконечно большие расстояния. Тогда потенциальная энергия двух частиц m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r , равна $-Gm_1m_2/r$. Таким образом, мы определяем гравитационный потенциал ψ в некоторой точке как гравитационную потенциальную энергию частицы единичной массы в этой точке, которая равна работе сил притяжения при перемещении частицы из данной точки в бесконечность. При таком определении гравитационный потенциал всегда отрицателен или равен нулю. Составляющая силы притяжения в любом направлении, которое характеризуется возрастанием какой-либо прямоугольной координаты v , равна $-d\psi/dv$. Любая частица m добавляет к потенциальному в данной точке на расстоянии r от нее величину $-Gm/r$. Суммарный гравитационный

потенциал равен сумме потенциалов всех частиц. Такое определение гравитационного потенциала, принятное в физике, не используется в астрономии, где гравитационный потенциал считается положительным, а сила притяжения равна частной производной от потенциала, а не частной производной, взятой со знаком минус. Мы будем придерживаться определения, принятого в физике, поскольку данная книга не предназначена для специалистов-астрономов, а для других читателей это определение удобнее.

Из разд. 1.2 следует, что потенциал со сферическим распределением массы равен во внешней точке $-Gm/r$.

1.3. Движение относительно неподвижного ньютонианского центра

Ньютона показал, что частица P , движущаяся вокруг неподвижной произвольной точки O под действием ускорения, пропорционального $1/r^2$ и направленного к точке O , должна описывать коническое сечение с фокусом в O . Ускорение, направленное от O , можно обозначить $-\mu/r^2$, где μ — постоянная величина, равная G , умноженной на массу M неподвижного притягивающего центра. Тогда уравнение (1.1.2) запишется в виде:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (1.3.1)$$

Так как сила притяжения является центральной, величина $r^2\dot{\theta}$ постоянна (см. разд. 1.1); ее мы обозначаем c . Если теперь заменить r на $1/u$, то

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -c \frac{du}{d\theta}$$

и, следовательно,

$$\ddot{r} = -c\dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -c^2u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Подставляя вместо $r\dot{\theta}^2$ величину c^2/r^3 и используя полученные выше соотношения, из (1.3.1) найдем:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{c^2}. \quad (1.3.2)$$

Общее решение уравнения (1.3.2) есть

$$u = c_1 \cos(\theta - \varepsilon) + \frac{\mu}{c^2},$$

где c_1 и ε — постоянные. Таким образом, поскольку $r = 1/u$, имеем:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + e \cos(\theta - \varepsilon)}, \quad (1.3.3)$$

где e — постоянная, равная $c_1 c^2 / \mu$.

Это уравнение определяет коническое сечение с фокусом в точке O , параметром c^2/μ , эксцентриситетом e и углом ε между большой полуосью и осью $\theta=0$. Перицентр определяется из условия $\theta=\varepsilon$; при этом расстояние в перицентре равно $c^2/\mu(1+e)$. Если обозначить большую полуось через a , то расстояние в перицентре равно $a(1-e)$ и

$$c^2 = \mu a (1 - e^2). \quad (1.3.4)$$

Поэтому (1.3.3) может быть переписано в такой форме

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos w}, \quad (1.3.5)$$

где угол w , называемый *истинной аномалией*, равен $\theta-\varepsilon$. Уравнение (1.3.5) равносильно уравнению (1.1.1), с той только разницей, что (1.1.1) является уравнением эллипса, так что e лежит между 0 и 1, и всегда $a > 0$. В (1.3.5) e может быть равно 1 и в этом случае коническое сечение является параболой с $a = \infty$ и параметром, равным $a(1 - e^2) = 2q$, где q — расстояние от перицентра. Наконец, e может быть больше единицы. В этом случае a становится отрицательной величиной, и коническое сечение будет гиперболой.

Уравнение энергии в рассматриваемой задаче, очевидно, будет

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = h, \quad (1.3.6)$$

где v — скорость массы m , а h — постоянная (во время движения) величина, равная сумме кинетической и по-

тенциальной энергии точки единичной массы. Знак h определяет форму конического сечения. Если $h < 0$, то, поскольку v^2 может быть только положительным или равным нулю, r должно быть ограничено и орбита является эллипсом. Если $h > 0$, то r может принимать бесконечно большие значения при конечных значениях v . Поэтому орбита в этом случае будет гиперболой. Если $h = 0$, то v стремится к нулю при r , стремясь к бесконечности. В этом случае орбита будет параболой.

Поскольку в periцентре $r = a(1 - e)$ и $rv = c$, то, исключая r и v из левой части (1.3.6) и используя (1.3.4), легко найти, что $h = -\mu/2a$. Таким образом, уравнение (1.3.6) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (1.3.7)$$

причем положительные значения h соответствуют гиперболической, а нулевое значение h — параболической орбитам. Скорость v , при которой для данного r правая часть уравнения (1.3.6) равна нулю, называется *параболической* скоростью или скоростью освобождения.

Ясно, что изложенные результаты справедливы как для притягивающихся точечных частиц, так и для сферически симметричных тел. Кроме того, если неподвижный центр отталкивает, а не притягивает, то орбита материальной точки является гиперболой с внешним фокусом в O .

1.4. Задача двух тел

Если имеются две свободные взаимно притягивающиеся частицы или сферы с массами m и M , то из законов движения Ньютона следует, что их центр масс O движется по прямой линии с постоянной скоростью. Так как силы центральные, частицы будут все время оставаться в одной плоскости, проходящей через точку O . Примем точку O за начало полярных координат. За линию отсчета примем любую прямую, проходящую через начало координат O и лежащую в плоскости движения. Точка O лежит между частицами на линии,

соединяющей их. Обозначим через r_m и r_M расстояния от точки O до масс m и M ; тогда $mr_m = Mr_M$. Если полярный угол точки m равен θ , то полярный угол точки M равен $\pi + \theta$. Теперь на основании законов движения Ньютона, закона притяжения и уравнения (1.1.2) можно записать:

$$\ddot{r}_m - r_m \dot{\theta}^2 = -\frac{MG}{r^2},$$

$$\ddot{r}_M - r_M \dot{\theta}^2 = -\frac{mG}{r^2},$$

где r — расстояние между частицами, равное $r_m + r_M$. Складывая эти уравнения, найдем

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{(M+m)G}{r^2}. \quad (1.4.1)$$

Легко видеть, что $r = r_m(M+m)/M$. Поскольку сила, действующая на m , является центральной, величина $r_m^2 \dot{\theta}$ постоянна. Поэтому

$$r^2 \dot{\theta} = c, \quad (1.4.2)$$

где c — постоянная во время движения масс m и M . Уравнения (1.4.1) и (1.4.2) совпадают с уравнениями в задаче о движении относительно неподвижного центра при условии, что

$$\mu = G(M+m). \quad (1.4.3)$$

Но в этом случае расстояние r и угол θ есть просто полярные координаты точки m в системе с началом в M и с направлением отсчета, проходящим через M . Таким образом, динамически задача свелась к движению массы m относительно неподвижной массы M , т. е. задача двух тел свелась к задаче неподвижного центра, причем величина μ определяется равенством (1.4.3) и заменяет величину GM в задаче о движении относительно неподвижного центра.

В силу сказанного выше уравнение энергии записывается для задачи двух тел в виде (1.3.6), где h постоянна во время движения, а v — скорость массы m в невращающейся системе координат с центром в M .

Однако h теперь не равна сумме потенциальной и кинетической энергии на единицу массы. Из равенств $r_m = rM/(M+m)$ и $r_M = rm/(M+m)$ легко найти полную энергию системы двух тел относительно их центра масс, равную $hmM/(M+m)$. Тем не менее уравнения (1.3.1) — (1.3.7) справедливы, равно как и заключения о принадлежности орбиты к тому или иному типу конических сечений.

1.5. Эллиптическое движение. Аномалии. Зависимость положения на орбите от времени (закон движения)

Очень важен случай, когда h отрицательно, т. е. случай эллиптического движения. Площадь эллипса равна $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$, секториальная скорость равна $c/2$, откуда период P равен $2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}/c$. Если приравнять P величине $2\pi/n$, где n есть так называемое среднее движение, а величину c выразить из уравнения (1.3.4), то мы получим

$$n^2 a^3 = \mu, \quad (1.5.1)$$

где μ определяется равенством (1.4.3).

На рис. 1 изображена эллиптическая орбита AQB с центром в точке C , periцентром в точке A , apoцентром в точке B , а также окружность с центром в C и радиусом, равным a — большой полуоси эллипса. Окружность называется *вспомогательной окружностью* и связана с эллипсом соотношением

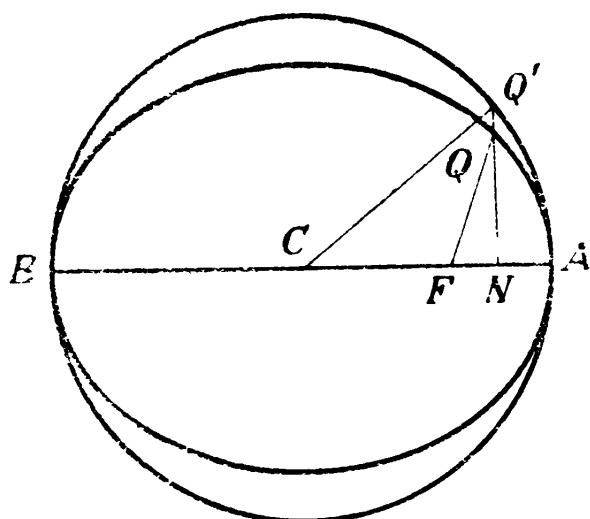


Рис. 1

$$QN = Q'N \sqrt{1-e^2},$$

где e — эксцентриситет эллипса, Q — точка на эллипсе, N — основание перпендикуляра из Q на AB , а Q' — точка пересечения этого перпендикуляра с окружностью.

Угол $AFQ = w$ — *истинная аномалия* (F — фокус эллипса). Угол $ACQ' = E$ называется обычно *эксцентри-*

ческой аномалией. Расстояние $CF = ae$. Теперь можно записать:

$$\begin{aligned} r^2 &= (FQ)^2 = (FN)^2 + (QN)^2 = \\ &= a^2 (\cos E - e)^2 + a^2 (1 - e^2) \sin^2 E, \end{aligned}$$

откуда

$$r = a (1 - e \cos E). \quad (1.5.2)$$

Далее получаем:

$$\sin \omega = QN/r = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E},$$

$$\cos \omega = FN/r = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

сткуда по известным формулам найдем

$$\tg \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \omega}}{\sqrt{1 + \cos \omega}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \sqrt{\frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}}$$

и окончательно

$$\tg \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tg \frac{E}{2}, \quad (1.5.3)$$

причем $\omega/2$ и $E/2$ находятся в одном и том же квадранте.

Пусть t — время, а τ — момент прохождения черезperiцентр; тогда $t - \tau$ равно времени, отсчитываемому от момента прохождения через periцентр. Величина $(t - \tau)/P$ есть площадь, ометаемая радиусом-вектором FQ после прохождения periцентра; она равна $n(t - \tau)/2\pi$, так как P — период обращения по орбите, а n — среднее движение. Величина

$$M = n(t - \tau) \quad (1.5.4)$$

называется *средней аномалией*. Отношение $M/2\pi$ равно отношению площади AFQ к площади эллипса и в то же время равно отношению площади AFQ' к площади круга. Но площадь AFQ' равна площади кругового сектора ACQ' без площади треугольника CFQ' . Поэтому

$$\frac{M}{2\pi} = \frac{Ea^2 - ea^2 \sin E}{2\pi a^2},$$

откуда

$$M = E - e \sin E. \quad (1.5.5)$$

Это уравнение называется *уравнением Кеплера*.

Выведенные уравнения содержат полное решение задачи об эллиптическом движении тел. Действительно, пусть известны массы тел, а также a , e и τ . Тогда из равенства (1.4.3) можно найти μ , а уравнение (1.5.1) даст нам значения n и периода. Если в заданный момент времени t нам надо знать положение одного тела относительно другого, то из (1.5.4) находим M , из уравнения Кеплера (1.5.5) находим E , а из (1.5.2) и (1.5.3) получим r и w .

Есть несколько различных по идеи методов, позволяющих найти E по данным e и M из уравнения Кеплера. Можно воспользоваться разложением в ряд, сделать удачное численное приближение, использовать специальные таблицы или применить механические средства. Разложение в ряд, согласно [6], таково:

$$E = M + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(pM)}{p} J_p(pe).$$

Используя численные методы, можно вычислить M для нескольких значений E и затем найти правильное значение E путем интерполяции. Для вычислений на быстродействующих машинах успешно используется так называемое правило ложного положения. При ручном счете отлично подходит метод Ньютона решения трансцендентных уравнений. В этом случае, если E_0 — приближенное значение величины E , то улучшенное значение вычисляется по следующей формуле:

$$E_1 = E_0 - \frac{E_0 - e \sin E_0 - M}{1 - e \cos E_0}.$$

Чтобы получить E с нужной точностью, необходимо сделать несколько последовательных приближений, причем на практике после первого или второго приближения численное значение знаменателя дроби не изменяется.

Иногда для решения уравнения Кеплера применяют специальные таблицы. В таких таблицах величина E (или лучше $\omega - M$) табулируется в зависимости от двух аргументов — e и M . Найдя величину $\omega - M$, называемую *уравнением центра*, можно, сложив ее с M , получить искомое значение ω , минуя получение величины E , которая является промежуточной при нахождении ω другими методами. После того, как по $\omega - M$ найдено ω , значение r может быть найдено из уравнения (1.3.5) также без нахождения E .

В качестве механического метода решения уравнения Кеплера Ньютон предложил использовать свойства движения круга единичного радиуса. Если круг повернется на угол E , то точка, отстоящая от центра на e , переместится в направлении движения на величину $M = E - e \sin E$.

1.6. Движение по параболе. Закон движения

Если $h=0$, то орбита будет параболой; величина e в уравнении (1.3.3) равна единице и

$$c^2 = 2\mu q, \quad (1.6.1)$$

где q — расстояние от фокуса доperiцентра, а μ определяется равенством (1.4.3). Следовательно, (1.3.3) принимает вид:

$$r = \frac{2q}{1 + \cos \omega} . \quad (1.6.2)$$

Так как орбита не периодическая, то понятие средней аномалии отсутствует, и уравнение Кеплера неприменимо. Однако из (1.4.2), (1.6.1) и (1.6.2) имеем

$$dt = \frac{d\omega}{\dot{\omega}} = \frac{r^2}{c} d\omega,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{\mu}{8q^3}} dt = \frac{d\omega}{(1 + \cos \omega)^2} .$$

Интегрируя это уравнение от τ — времени прохождения черезperiцентр — до t , получим после замены $z = \operatorname{tg}(\omega/2)$

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - \tau) = z + \frac{z^3}{3}. \quad (1.6.3)$$

Это уравнение в случае параболического движения играет такую же роль, как уравнение Кеплера (1.5.5) в случае эллиптического движения. Чтобы определить положение на орбите в момент t , надо решить уравнение (1.6.3) относительно z , а затем найти ω . Значение r можно получить или из (1.6.2), или непосредственно из уравнения

$$r = q(1 + z^2), \quad (1.6.4)$$

которое можно рассматривать как аналог уравнения (1.5.2) для эллипса.

1.7. Движение по гиперболе. Закон движения

Если $h > 0$, то орбита будет гиперболой. Из (1.3.4), (1.3.5) и (1.4.2) имеем

$$dt = \frac{d\omega}{w} = \frac{r^2}{c} d\omega,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{\mu}{[-a(e^2 - 1)]^3}} dt = \frac{d\omega}{(1 + e \cos \omega)^2}.$$

При этом надо помнить, что для гиперболы a отрицательно, а e больше единицы. Интегрируя в пределах от τ до t и пользуясь заменой

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{F}{2}, \quad (1.7.1)$$

найдем, что

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}(t - \tau) = e \operatorname{sh} F - F. \quad (1.7.2)$$

Это уравнение аналогично уравнению Кеплера (1.5.5) для эллиптического движения, так же как (1.7.1) аналогично (1.5.3). Если известно w , значение r можно найти либо из (1.3.5), либо из уравнения

$$r = -a(e \sin F - 1), \quad (1.7.3)$$

которое можно легко получить из (1.3.5) и которое соответствует уравнению (1.5.2) для эллипса.

На практике точные положения на гиперболических орбитах рассчитываются в редких случаях.

1.8. Система единиц

В качестве единиц измерения для объектов солнечной системы астрономы обычно принимают за единицу времени средние солнечные сутки, за единицу расстояния — среднее расстояние от Земли до Солнца и за единицу массы — массу Солнца. В этой системе единиц постоянную G обычно обозначают через k^2 . Тогда уравнения (1.5.1) и (1.4.3) для случая движения планеты вокруг Солнца сводятся к виду

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m), \quad (1.8.1)$$

где m — масса планеты в единицах солнечной массы. Из (1.8.1), пользуясь данными для Земли и полагая $a=1$, Гаусс получил численное значение k . Заменив n на $2\pi/T$, где T — продолжительность сидерического года в средних солнечных сутках, которую он принял равной 365,2563835, и положив массу Земли m равной 1/354710, он нашел из уравнения

$$k = \frac{2\pi}{T \sqrt{1+m}} \quad (1.8.2)$$

численное значение постоянной k , которая теперь называется *гауссовой постоянной тяготения*

$$k = 0,01720209895.$$

Значения тех двух величин, на основании которых определяется k , время от времени уточнялись и, несомненно,

мненно, будут уточняться и в будущем. Однако, чтобы каждый раз не менять значения k , удобнее считать гауссову постоянную абсолютно точной, а периодически пересматривать величину среднего расстояния Земли от Солнца a . В свое время Ньюком нашел, что значение a равно примерно 1,000000030 *астрономических единиц*. На практике астрономическая единица (а. е.) определяется так, чтобы из этого значения следовала величина k , точно равная значению, вычисленному Гауссом. Несмотря на отмеченную выше неопределенность, можно показать, что величина k известна со значительно большей точностью, чем G .

Величина астрономической единицы в километрах определялась многими методами [7] и результаты обычно выражались через величину *солнечного параллакса* — угла, под которым был бы виден экваториальный радиус Земли на расстоянии астрономической единицы. Недавно [8] были проведены два прямых измерения времени, проходившего радиосигналом от станции на Земле до Венеры и обратно. Расстояние от станции до ближайшей точки Венеры в этих случаях было равно (по таблицам Ньюкома) 0,296355 а. е. и 0,303853 а. е.; времена прохождения радиосигнала равнялись 295,5065 сек и 302,9842 сек соответственно. Это приводит к времени прохождения сигналом расстояния в 1 а. е., равному 498,5684 сек и 498,5704 сек соответственно. Умножая среднее из этих двух значений, равное 498,5694 сек, на скорость света $(2,997923 \pm 0,000008) \times 10^5$ км/сек, получим для астрономической единицы величину $1,49467 \cdot 10^8$ км с вероятной ошибкой в 1—2 единицы последнего знака. Эта ошибка может несколько увеличиться главным образом из-за неточности таблиц Ньюкома. Из приведенных выше цифр следует, что скорость в 1 а. е. за средние солнечные сутки соответствует 1729,94 км/сек. Очень соблазнительно отдать предпочтение таким прямым измерениям по сравнению с прежними измерениями, дающими искомую величину астрономической единицы более косвенным путем. Однако прямые измерения не могут быть приняты безоговорочно, так как уровень радиошумов очень высок и a priori существует возможность того, что Венера окру-

жена радиоотражающим слоем большего радиуса, чем радиус видимого диска планеты¹.

Иногда за единицу времени берется величина $1/k = 58,13244087$ суток вместо средних солнечных суток. В такой системе единиц $k = 1$. Иногда, например для двойных звезд, за единицу времени берется год, за единицу расстояния — среднее расстояние от Земли до Солнца, за единицу массы — масса Солнца. Тогда из (1.8.1) имеем

$$(2\pi)^2 = k^2 (1 + m),$$

откуда в этих единицах

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + m}}. \quad (1.8.3)$$

При решении задач, связанных с движением близких искусственных спутников Земли, использование системы единиц, связанной с солнечной системой, неудобно и приводит к неточностям. Поэтому часто за единицу длины принимают экваториальный радиус Земли. Масса искусственного спутника Земли всегда преубежденно мала по сравнению с массой Земли. Поэтому нет необходимости вводить специальную единицу массы, а единицу времени можно выбрать так, чтобы $\mu = 1$. Определить эту единицу времени можно, зная силу тяготения на поверхности Земли и величину радиуса Земли, не опираясь на плохо известное значение постоянной G или массы Земли. Однако существует некоторая неопределенность в величинах экваториального радиуса Земли, притяжения на поверхности Земли, сжатия Земли и коэффициента J при второй гармонике разложения гравитационного потенциала Земли; все эти величины связаны между собой и с величиной μ .

¹ Проведенные в 1961 г. эксперименты по радиолокации Венеры в СССР, США и Англии подтвердили, что отражения радиоимпульсов происходят от твердой поверхности планеты и дали в качестве нового более точного значения величины астрономической единицы $149\,598\,500 \pm 500$ км (см. сборник «Радиолокация Венеры», М., ИЛ, 1963, серия «Проблемы астрономии и геофизики»). — Прим. ред.

В настоящее время¹ предпочтительнее пользоваться следующими значениями этих величин:

Экваториальный радиус Земли	6378270 м
Сжатие (последние определения [9]) . . .	1/298,32 ± 0,05
Коэффициент J	0,0016232 (1 ± 0,0003)

Используя эти значения и соотношения, приведенные в [10], найдем для $\sqrt{\mu}$ значение 0,07436616 (за единицу времени принята минута), откуда легко получить иско-мую единицу времени (такую, чтобы $\mu = 1$), равную 806,819 сек. Величина экваториального радиуса Земли определялась ранее и ее *международное* значение равно 6378388 м. Беря это значение, приведенные выше значения сжатия и J , получим для единицы времени 806,826 сек. Таким образом мы приходим к неуверенности полученной величины порядка 5 единиц последнего знака.

По-видимому, величина 806,819 сек предпочтительнее. Принимая ее и взяв за величину экваториального радиуса Земли 6378270 м, получим для задач о движении искусственного спутника Земли единицу скорости, равную 7,905453 км/сек.

1.9. Определение плоской орбиты по начальным данным

Тип орбиты (а также a и e) легко найти, зная начальные условия (или условия запуска), т. е. значения r и v , в начальной точке. Из (1.3.6) находим h ; орбита будет эллипсом, параболой или гиперболой, если h отрицательно, равно нулю или положительно. Из (1.3.7) найдем a . Таким образом тип орбиты и значение a определяются только начальными значениями радиуса-вектора и скорости, независимо от их направления. В случае эллиптической орбиты (1.5.1) даст значение среднего движения и периода P . Величина $c = r^2 \dot{\theta}$ равна произведению радиуса r на нормальную компоненту скорости v . Поэтому

$$c = rv \sin \Phi, \quad (1.9.1)$$

¹ Имеется в виду апрель 1959 г. — время написания книги. —
Прим. перев.

где ϕ — угол между \mathbf{r} и вектором скорости \mathbf{v} . Очевидно, что \mathbf{c} — вектор, равный векторному произведению \mathbf{r} и \mathbf{v} :

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (1.9.2)$$

Поэтому, если известны r и v , а также угол ϕ между ними, (1.9.1) даст значение c , а (1.3.4) определит значение эксцентриситета e (так как a уже найдено).

Выберем в плоскости орбиты относительного движения неподвижную прямоугольную систему координат (xOy) с началом в одном из этих тел. Если заданы начальные условия, т. е. значения координат x , y и компонент скоростей \dot{x} , \dot{y} другого тела, то соотношения

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

$$c = x\dot{y} - y\dot{x}$$

вместе с (1.3.4) и (1.3.7) позволяют легко определить значения a и e .

Определение орбиты по начальным данным будет подробно рассмотрено в одной из следующих глав, где будут изучаться орбиты в пространстве. Однако численные расчеты могут быть рассмотрены уже сейчас, и некоторые типичные расчеты будут приведены в следующем разделе в виде примеров и задач. Соединение полуинтуитивных выводов в задаче о близком прохождении двух тел, приведенное в примере 13, дает достаточно точные приближенные общие выводы, более полезные ввиду их оперативности, чем более точные результаты, которые могут быть получены путем громоздкого численного интегрирования.

1.10. Примеры и задачи

1. Единица времени выбрана так, что $\mu = 1$, и в некоторый момент времени r и v равны единице, а $\phi = 45^\circ$. Какова форма орбиты? Чему равны

a , e и q ? Если орбита эллиптическая, чему равны период обращения и расстояние в апоцентре?

Из (1.3.7) находим $a = 1$; из (1.9.1) $c = 1/\sqrt{2}$; из (1.3.4) $e = 1/\sqrt{2}$. Орбита эллиптическая. Уравнение (1.5.1) дает $n = 1$, откуда период $P = 2\pi$. Из (1.3.5) находим для расстояния в апоцентре и в periцентре

$$a(1+e) = 1 + 1/\sqrt{2},$$

$$q = a(1-e) = 1 - 1/\sqrt{2}$$

соответственно.

2. Единица времени выбрана так, что $\mu = 1$. Определить вид конического сечения и величины a , e и q для следующих начальных условий:

r	v	Φ
1	1	30°
1	1	90°
2	1	45°
1	2	30°
10	$1/3$	90°

3. Покажите, что на эллиптической орбите

$$\dot{r} = \frac{\mu e}{c} \sin w,$$

где $\mu = k^2(M+m)$. (Экзаменационная задача Гарвардского университета.)

4. Пусть тело m движется относительно тела M по гиперболической орбите и скорость на бесконечности равна v . Расстояние в periцентре равно q . Обозначим угол между асимптотами гиперболы через δ . Покажите, что значение δ определяется формулой

$$\delta = 2 \arccos \left(1 + \frac{qv^2}{\mu} \right).$$

(Экзаменационная задача Гарвардского университета.)

5. Если в предыдущей задаче скорость на бесконечности равна v , а кратчайшее расстояние от точки M до асимптоты равно p , то найдите δ и q .

Указание. Покажите, что $c = rv$, и, используя уравнение энергии, получите соотношения:

$$q = -\frac{\mu}{v^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{v^4} + p^2},$$

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \left(1 + \frac{p^2 v^4}{\mu^2}\right)^{-1}.$$

6. Земля считается сферической, влияние атмосферы не учитывается. После запуска искусственный спутник Земли обращается вокруг Земли так, что в некоторый момент он движется параллельно поверхности Земли на высоте 500 км, а его скорость относительно неподвижных геоцентрических осей равна 7,9200 км/сек. Найти высоту апогея и период обращения искусственного спутника Земли.

Решение. Выберем систему единиц, описанную в конце разд. 1.8. Тогда $r=1,07839$; $v=1,00184$ и $\phi=90^\circ$. Из (1.3.7) $a=1,17517$; из (1.9.1) $c=1,08037$; из (1.3.4) $e=0,08231$. Расстояние в апогее равно $r=a(1+e)=1,27190$, т. е. высота апогея равна 0,27190 или 1734,25 км. Из (1.5.1) $P = 2\pi a^{3/2} = 8,00444$ (ед.) = 107,6356 мин.

7. В предыдущей задаче взять те же условия, кроме значения скорости, которую взять равной 7,9210 км/сек. Найти высоту апогея.

8. Пользуясь данными разд. 1.8 и уравнением (1.3.6), покажите, что скорость ухода с поверхности Земли равна $\sqrt{2}$ ед., или 11,18000 км/сек. Если скорость на поверхности Земли равна 3 ед., то, пользуясь той же формулой, найдите величину v^2 на расстоянии 2, 10, 60 радиусов Земли и на бесконечности. Притяжение Солнца, Луны и планет, а также сопротивление воздуха не учитываются.

9. Пользуясь формулой (1.3.6), покажите, что скорость ухода из какой-либо точки в $\sqrt{2}$ раз больше значения круговой скорости в этой точке. Взяв величину астрономической единицы в километрах из разд. 1.8 и длину сидерического года, равную 365,256360 суткам, найдите круговую скорость и скорость ухода из солнечной системы в *км/сек* для точки, находящейся на расстоянии 1 а. е. от Солнца. (*Ответ:* 29,759 *к.и/сек* и 42,085 *км/сек*.)

10. Оценить минимальное значение скорости частицы вблизи поверхности Земли, необходимой для ухода частицы из солнечной системы. (Экзаменационная задача Гарвардского университета.)

Указание. Из решения задачи 8 видно, что уже на расстоянии 40 земных радиусов геоцентрическая скорость частицы существенно уменьшается. Но это расстояние составляет всего лишь 1/500 а. е. Поэтому достаточно точный приближенный ответ на поставленную задачу (16,641 *км/сек*) можно получить путем нахождения такого значения геоцентрической скорости вблизи поверхности Земли без учета притяжения Солнца, чтобы соответствующая скорость на бесконечности, сложенная (геометрически) с гелиоцентрической скоростью Земли, равнялась 42,085 *км/сек*, как было найдено в предыдущей задаче.

11. С какой горизонтальной геоцентрической скоростью должен быть запущен искусственный спутник Земли, чтобы апогей его орбиты был удален от центра Земли на 60 земных радиусов, т. е. примерно на расстояние от Земли до Луны? Сопротивление воздуха и притяжение Луны и Солнца не учитывать. Каковы будут значения периода обращения и эксцентриситета? (*Ответ:* 11,0880 *км/сек*; 9,88307 *суток*; 59/61.)

Указание. Найдите *a* и *e*. Из (1.3.7) найдите *v*², а из (1.5.1) — период обращения.

12. Искусственная планета запущена по касательной к земной орбите с геоцентрической скоростью 11,50 *км/сек*. Сопротивлением атмосферы и притяжением

Луны пренебрегаем. Орбита Земли принимается за круговую. Определить приближенные значения элементов орбиты искусственной планеты: a , e и P . (Ответ: 1,2334; 0,1892; 1,3698 года.).

Указание. Как и при решении задачи 8, найдите геоцентрическую скорость на бесконечности в км/сек, прибавьте ее к круговой скорости на расстоянии 1 а. е. от Солнца и найдите гелиоцентрическую скорость планеты. Для Солнца $\mu=1$; в этой системе единиц круговая скорость на единичном расстоянии равна единице. Найдите гелиоцентрическую скорость планеты в этой системе единиц и затем найдите a . Период P найдите из третьего закона Кеплера. Учитывая, что перигелийное расстояние равно 1, и зная a , найдите e .

13. Попробуем учесть в предыдущей задаче близкое прохождение планеты около Луны, масса которой составляет $1/82$ массы Земли. Если притяжением Луны пренебречь и считать, что искусственная планета пройдет на расстоянии одного земного радиуса от центра Луны, то такое прохождение называется сближением. Как можно учесть это сближение?

Из задачи 8 следует, что земное воздействие, ослабляясь с удалением планеты, почти кончается на расстоянии 60 радиусов Земли. Сближение с Луной изменяет направление скорости, не изменяя ее величины, в системе координат, связанной с Луной (*сelenоцентрические координаты*). Это изменение в основном происходит вблизи Луны и протекает быстро.

Можно с достаточной точностью считать, что движение планеты происходит по геоцентрической гиперболической орбите до момента наибольшего сближения с Луной; отметим направление и величину геоцентрической скорости в этой «точке сближения». Затем переходим к сelenоцентрическим координатам, что легко сделать в прямоугольных координатах, если знать геоцентрическую скорость Луны для этого момента. Величина и направление преобразованной таким путем скорости рассматриваются как величина и направление скорости на бесконечности для сelenоцентрической гиперболической орбиты. Тогда задача 5 указывает нам,

как можно найти величину и направление скорости на бесконечности после близкого прохождения. Затем величина и направление скорости после сближения преобразуются опять к первоначальной геоцентрической системе путем обратного преобразования координат и принимается новая гипербола относительно Земли, проходящая через «точку сближения» с новым направлением скорости. Далее геоцентрическая скорость на новой гиперболе векторно складывается с гелиоцентрической скоростью Земли для получения величины начальной скорости и ее направления для гелиоцентрического движения искусственной планеты, откуда известными методами можно найти параметры эллиптического движения планеты вокруг Солнца. Корректность такого подхода для получения приближенных выводов основана на том обстоятельстве, что понятие «бесконечность» для геоцентрического и селеноцентрического гиперболических движений есть величина достаточно малая по сравнению с расстоянием в 1 а. е.

В рассматриваемой задаче селеноцентрическая скорость относительно Луны равна всего ~ 3 км/сек; селеноцентрическое изменение направления вектора скорости, вызванное сближением с Луной, только $\sim 9^\circ$, что эквивалентно появлению составляющей скорости $\sim 0,5$ км/сек, перпендикулярной к плоскости траектории до сближения. Это значит, что в гелиоцентрических координатах весь эффект сближения с Луной состоит только в отклонении планеты примерно на 1° , поскольку прибавляемая гелиоцентрическая круговая скорость близка к 30 км/сек. Даже грубая прикидка может дать отклонение с точностью до нескольких минут дуги.

14. Рассмотрим сферическую планету. Влияние атмосферы и вращение вокруг оси не учитываются. Из некоторой точки P на поверхности планеты выпущен снаряд со скоростью v под углом φ к вертикали, который возвращается на планету в точку Q , отстоящую по дуге от P на угол Φ , меньший 180° . Найти v^2 , φ и a как функции эксцентриситета орбиты e . Существует ли минимум v^2 для данного Φ ? Сколько значений e и φ соответствует данному Φ для большего значения v^2 ?

Указание. Орбита снаряда должна быть коническим сечением с фокусом в центре планеты. Так как орбита лежит вне поверхности планеты между точками P и Q , то апоцентр должен находиться между этими точками, и орбита должна быть эллипсом. Из соображения симметрии ясно, что большая полуось должна делить дугу PQ пополам. Поэтому истинная аномалия в P равна $\pi - \frac{1}{2}\Phi$, а в Q равна $\pi + \frac{1}{2}\Phi$. Отсюда получаем

$$a = \frac{r_0 \left(1 - e \cos \frac{1}{2}\Phi \right)}{1 - e^2},$$

где r_0 — радиус планеты. Используя (1.3.7), находим

$$\frac{v^2 r_0}{\mu} = 1 - e \frac{\cos \frac{1}{2}\Phi - e}{1 - e \cos \frac{1}{2}\Phi}.$$

Уравнения (1.3.4) и (1.9.1) дают

$$\sin^2 \varphi = \frac{\left(1 - e \cos \frac{1}{2}\Phi \right)^2}{1 - 2e \cos \frac{1}{2}\Phi + e^2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - e \cos \frac{1}{2}\Phi}{e \sin \frac{1}{2}\Phi}.$$

Теперь легко найти, что v^2 имеет минимум и что для значения v^2 , заключенного между минимальным и параболическим значениями, существуют два значения e (и соответственно два значения φ), являющиеся корнями некоторого квадратного уравнения.

15. Пусть в предыдущей задаче $\Phi = 90^\circ$. Положим $r_0 = 1$ и $\mu = 1$. Покажите, что $v_{\min}^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$, а соот-

ветствующие $e = \sqrt{2} - 1$ и $a = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$. Покажите, что если $v^2 = 0,9$, то для e , $\operatorname{tg}\varphi$ и a получатся следующие значения:

$$\begin{array}{ll} \text{Для нижней орбиты} & e = 0,1625241 \\ & \operatorname{tg}\varphi = 7,7015616 \\ & a = 0,9090909 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Для верхней орбиты} & e = 0,6152933 \\ & \operatorname{tg}\varphi = 1,2984384 \\ & a = 0,9090909 \end{array}$$

16. Есть ли минимальное значение v^2 при $\Phi > 180^\circ$? Сколько орбит существует для большего значения v^2 ?

17. Среднее расстояние Венеры от Солнца равно 0,723 а. е. Будем считать орбиты Венеры и Земли круговыми и компланарными. Вы запланировали полет на Венеру без возвращения с использованием многоступенчатой ракеты. Запуск осуществлен так, что когда начинается свободный полет, скорость ракеты направлена по касательной к орбите Земли и начальная точка является афелием ($r_a=1$; начальное расстояние от Земли пренебрежимо мало по сравнению с астрономической единицей), причем расстояние в перигелии равно 0,723 и рассчитано так, чтобы имело место близкое прохождение около Венеры в этой точке.

Каковы a и e орбиты ракеты? (Ответ: 0,8615; 0,1608). Каков период обращения ракеты по орбите? (Указание: за единицу времени принимается величина $1/k=58,13$ суток). Чему равен период обращения Венеры? Какова должна быть разность долгот Земли и Венеры в момент запуска? Через сколько дней произойдет сближение с Венерой? (Ответ: 292,1 суток; 224,5 суток; 54,°1; 146,0 суток.) Чему равна гелиоцентрическая скорость ракеты в афелии в а. е./сутки? Чему равна скорость Земли в а. е./сутки? Чему равна разность между скоростями Земли и ракеты в а. е./сутки? Чему равна эта разность в км/сек, если скорость в 1 а. е./сутки равна 1730 км/сек? (Ответ: 0,9161 k ; 1,0000 k ; 0,0839 k ; 2,50 км/сек.) Какова должна быть скорость ракеты у поверхности Земли

(притяжение Солнца и влияние атмосферы не учитывается), чтобы скорость на бесконечности равнялась 2,50 км/сек? (Ответ: 11,46 км/сек.)

18. Предыдущая задача дает только приближенные результаты. Но дифференцирование гелиоцентрического перигелийного расстояния ракеты по ее геоцентрической скорости запуска даст нам критерий зависимости условий близкого прохождения около Венеры от малых изменений условий запуска. Покажите, что если v_0 есть геоцентрическая скорость запуска ракеты в км/сек, сразу после выхода из атмосферы (т. е. на расстоянии от центра Земли, мало отличающемся от земного радиуса), а $r_{\text{п}}$ — перигелийное расстояние ракеты в а. е., то

$$r_{\text{п}} = \frac{\left[1 - \frac{1}{kc} \sqrt{v_0^2 - 2b^2} \right]^2}{2 - \left[1 - \frac{1}{kc} \sqrt{v_0^2 - 2b^2} \right]^2},$$

где $b = 7,905453$ км/сек, $c = 1730$ км · сутки/а.е. · сек. Покажите, что для предыдущей задачи $dr_{\text{п}}/dv_0 = 0,415$ а.е. × \times сек/км = $6,2 \cdot 10^7$ км · сек/км. Радиус Венеры равен $6,2 \cdot 10^3$ км. Поэтому ошибка всего в 10 см/сек в величине начальной скорости v_0 приведет к ошибке в $r_{\text{п}}$ в один радиус Венеры. Существует также другая ошибка, из-за которой Венера не окажется в месте предвычисленного близкого прохождения. Как велика должна быть эта ошибка? (Ответ: 12,4 радиуса Венеры.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Newton I., Principia Mathematica, The Royal Society, Lnd., 1687, Book 3, Proposition VI, Theorem VI.
2. Schiff L. I., Sign of the Gravitational Mass of a Positron, Phys. Rev. Letters, 1, 254 (1958).
3. Eötvös, Pekar, Fekete, Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität, Ann. Phys., 68, 11 (1922).
4. Dicke R. H., Science, 129, 621 (1959).
5. Heyl P. R., J. Res. Natl. Bur. Standards, 5, 1243 (1930); Birge R. T., Rep. Progr. in Phys., 8, 90 (1941).
6. Plummer H. C., Dynamical Astronomy, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1918, p. 37, Eq. (19).

7. В книге: Russell, Dugan, Stewart, Astronomy, Ginn, New York, 1926, vol. I, p. 187 приводится величина $8'',803 \pm 0'',001$, являющаяся наиболее точным средним значением всех достоверных измерений параллакса до 1926 г. Де Ситтер и Брауэр (De Sitter, Broecker, Bull. Astron. Insts. Netherlands, 8, 213, 1938), дали величину $8'',8030 \pm 0'',0018$, как наиболее точную для того времени. Спенсер Джонс (Spencer Jones H., Mem. Roy. Astron. Soc., 66, Part II, 1941) на основе детального геометрического и оптического изучения Эроса получил величину $8'',790 \pm 0'',001$. Рабе (Rabe, Astron. J., 55, 112 (1950)), получив суммарную массу Земли и Луны из возмущений Эроса и одновременно сравнивая притяжение Солнца с силой тяжести на поверхности Земли, нашел значение $8'',79835 \pm 0'',00039$.
8. Price, Green, Goblick, Kingston, Kraft, Petten-gill, Silver, Smith, Science, 129, 751 (1959). Авторы пользовались эфемеридным временем. Считалось, что отражение происходит от поверхности планеты и является зеркальным. Скорость света бралась из работы: Bearden, Earle, Minkowski, Thomassen, American Institute of Physics Handbook, McGraw-Hill, New York, 1957, p. 73. Вероятная ошибка во времени равна $2 \cdot 10^{-6}$, ошибка в скорости света равна $3 \cdot 10^{-6}$, а ошибка в расстоянии (в а. е.), взятом из таблиц Ньюкома, если сравнивать таблицы Ньюкома и Леверье в предположении, что обе имеют одинаковую величину ошибки, равна $7 \cdot 10^{-6}$. Если принять международное значение экваториального радиуса Земли, равное 6 378 388 м с ошибкой около 100 м, то можно найти величину солнечного параллакса $8'',8022 \pm 0'',0002$, что расходится с величинами, найденными Спенсером Джонсом и Рабе, но находится в хорошем согласии с более старыми значениями.
9. Lecar M., Sorensen J., Eckels A., Determination of the Coefficient J of the Second Harmonic in the Earth's Gravitational Potential from the Orbit of Satellite 1958 β₂, J. Geophys. Res., 64, 209 (1959).
10. Herrick S., Baker R. M. L., Hilton C. G., Gravitational and Related Constants for Accurate Space Navigation, Proc. VIIIth Intern. Astronaut. Congr., Barcelona, 197 (1958); Univ. of Calif. Astron. Papers, 1, No. 24, 297.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПРИТЯЖЕНИЕ ТЕЛ НЕПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ. ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ВРАЩЕНИЕМ

2.1. Потенциал тела неправильной формы во внешней точке

Можно рассчитать притяжение тела массы M во внешней точке P , если найден потенциал силы тяготения тела в P . Мы получим точное выражение для этого потенциала. Выберем центр масс тела O за начало отсчета, а за оси координат Ox , Oy и Oz примем систему трех главных осей инерции, главные моменты инерции относительно которых равны соответственно A , B и C . Тогда любой элемент массы тела dM дает приращение dV потенциал V точке в P , определяемое соотношением:

$$-dV = \frac{GdM}{r} \left[1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

где ρ — расстояние элемента dM от O , r — величина расстояния OP , а угол $POdM$ равен углу φ . Разлагая это выражение в ряд, найдем:

$$-dV = \frac{GdM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \varphi). \quad (2.1.1)$$

Здесь P_n — полином Лежандра степени n . Несколько первых полиномов таковы:

$$P_0(s) = 1,$$

$$P_1(s) = s,$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2}(3s^2 - 1),$$

$$P_3(s) = \frac{1}{2} (5s^3 - 3s),$$

$$P_4(s) = \frac{1}{8} (35s^4 - 30s^2 + 3),$$

$$P_5(s) = \frac{1}{8} (63s^5 - 70s^3 + 15s),$$

$$P_6(s) = \frac{1}{16} (231s^6 - 315s^4 + 105s^2 - 5),$$

$$P_7(s) = \frac{1}{16} (429s^7 - 693s^5 + 315s^3 - 35s).$$

Значение любого полинома можно получить из следующего уравнения:

$$P_n(s) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^n (s^2 - 1)^n.$$

Интегрируя почленно уравнение (2.1.1), легко получить:

$$\begin{aligned} -V &= \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^2} \int \rho \cos \varphi dM + \\ &+ \frac{G}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) dM + \\ &+ \dots + \frac{G}{r^{n+1}} \int \rho^n P_n(\cos \varphi) dM + \dots \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Если l, m, n — направляющие косинуса OP , а x, y, z — координаты dM , то

$$\rho \cos \varphi = lx + my + nz,$$

и поскольку O — центр масс тела, имеем

$$\int x dM = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Поэтому второй член в правой части (2.1.2) равен нулю. Подынтегральное выражение третьего члена может быть записано в виде

$$\begin{aligned} 3(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2) - (x^2 + y^2 + z^2) + \\ + 6(lmxy + lnxz + mnzy). \end{aligned}$$

Но

$$A = \int (y^2 + z^2) dM \quad \text{и т. д.,}$$

$$\int x^2 dM = \frac{1}{2} (A + B + C) - A \quad \text{и т. д.,}$$

где два других уравнения каждого типа можно получить круговой перестановкой букв A, B, C и x, y, z . Таким образом, (2.1.2) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} -V = & \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} [A + B + C - 3(AI^2 + Bm^2 + Cn^2)] + \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{G}{r^{n+1}} \int \rho^n P_n \left(\frac{lx + my + nz}{\rho} \right) dM, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

которое и является искомым точным выражением для потенциала. Члены, содержащие xy и т. д., обратились в нуль при интегрировании, так как оси координат являются главными осями инерции.

Второй член в правой части (2.1.3) часто записывается несколько иначе.

Если через I обозначить момент инерции тела относительно оси OP :

$$I = \int [\rho^2 - (lx + my + nz)^2] dM = l^2A + m^2B + n^2C,$$

то второй член в правой части (2.1.3) может быть записан, как это обычно делают, в следующем виде:

$$\frac{G}{2r^3} (A + B + C - 3I).$$

Можно рассмотреть этот вопрос с другой точки зрения. Теорема Гаусса, выведенная в предыдущей главе и примененная к бесконечно малому элементу объема, приводит к уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho,$$

где ρ — плотность вещества. В пустом пространстве с нулевой плотностью это уравнение принимает специальный вид, называемый уравнением Лапласа

$$\nabla^2 V = 0.$$

Решениями уравнения Лапласа служат сферические функции, и общее решение уравнения Лапласа может быть получено в виде их линейной комбинации.

Решение, являющееся однородной функцией координат степени n , называется сферическим многочленом степени n и определяется формулой $r^n S_n$, где S_n — функция, называемая сферической гармоникой n -го порядка, являющаяся функцией направления из O . Можно показать, что если $r^n S_n$ — сферический многочлен степени n , то $r^{-(n+1)} S_n$ — также сферический многочлен степени $-(n+1)$. Отдельные члены в правой части (2.1.3) имеют как раз такой вид и являются сферическими многочленами степени $-(n+1)$, а каждый интеграл под знаком суммы — это рациональная сферическая гармоника степени n , выраженная через направляющие косинусы l, m, n прямой OP ; ρ, x, y, z при интегрировании исключаются.

Таким образом, формула (2.1.3) дает выражение потенциала силы тяготения тела во внешних точках в виде ряда рациональных сферических гармоник отрицательных степеней. В общем присутствуют все степени, кроме -2 , которая никогда не может войти в выражение для потенциала, если начало системы координат находится в центре масс тела. Функция степени -1 есть просто $-GM/r$, что представляет потенциал частицы, имеющей массу всего тела M и находящейся в центре масс. Гармоника степени -3 легко выражается через главные моменты инерции тела; гармоники более высоких отрицательных степеней в общем случае будут иметь вид S_n/r^{n+1} и могут быть получены путем интегрирования, если известно распределение плотности. Сферическая гармоника в общем случае может быть представлена в виде суммы

$$S_n = \sum_{m=0}^n P_n^m (\cos \theta) [C_m \cos m\psi + D_m \sin m\psi],$$

где θ — полярный угол, отсчитываемый от произвольно выбранной оси, ψ — азимут, а C_m и D_m — числовые коэффициенты. Функция

$$P_n^m(s) = (1 - s^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^m P_n(s)$$

называется присоединенной функцией Лежандра первого рода и обладает очевидным свойством

$$P_n^0(s) = P_n(s).$$

2.2. Потенциал тела с осевой симметрией

Если тело имеет осевую симметрию, то можно ось z направить вдоль оси тела; при этом $A=B$. Тогда второй член в правой части (2.1.3), заключенный в квадратные скобки, принимает вид

$$\begin{aligned} 2A + C - 3A(1 - n^2) - 3Cn^2 &= (C - A)(1 - 3n^2) = \\ &= -(C - A)(3 \cos^2 \theta - 1), \end{aligned}$$

где θ — угол zOP . Теперь (2.1.3) можно записать так:

$$\begin{aligned} -V &= \frac{GM}{r} - \frac{G(C - A)}{2r^3}(3 \cos^2 \theta - 1) + \\ &+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{G}{r^{n+1}} \int \rho^n P_n \left(\frac{lx + my + nz}{\rho} \right) dM. \quad (2.2.1) \end{aligned}$$

Поскольку теперь сферические функции имеют ось симметрии, то присоединенные функции Лежандра первого рода становятся просто коэффициентами Лежандра, ибо осевая симметрия требует обращения в нуль m в P_n^m .

В большинстве астрономических приложений необходимо учитывать только первый член в правых частях (2.1.3) или (2.2.1). Это происходит не только в силу огромных расстояний между небесными телами по сравнению с их размерами, но также в силу близости этих тел к сферически симметричным, что приводит к малости величины $(A+B+C-3I)$ в (2.1.3) и $C-A$ в (2.2.1).

Второй член становится ощутимым в случае движения спутников около сжатых планет, а также в связи с пре-

цессией и нутацией. Второй и третий члены важны только для изучения движения близких искусственных спутников и в вопросах, связанных с обработкой и анализом гравиметрических измерений.

Важно отметить, что предыдущие результаты были получены непосредственно из закона тяготения и никаким образом не зависят ни от неоднородности распределения плотности, ни от формы тела.

2.3. Изменения формы Земли вследствие вращения

Центробежная сила, вызванная вращением Земли относительно оси Oz с угловой скоростью ω и отнесенная к единице массы, равна $\omega^2 r \sin \theta$; она направлена вдоль перпендикуляра к Oz . Можно рассматривать эту силу как обусловленную возмущающим потенциалом

$$U_d = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 (\cos^2 \theta - 1), \quad (2.3.1)$$

поскольку частная производная со знаком минус от U_d по любому направлению дает значение компоненты центробежной силы в этом направлении. Потенциал силы тяготения, как мы видели, можно представить в следующем виде:

$$V = -\frac{GM}{r} + \frac{G(C-A)}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \text{члены более высокого порядка.}$$

Таким образом, мы можем рассмотреть равнодействующую силы тяжести и центробежной силы, действующую на частицу единичной массы, которая находится в покое на поверхности Земли, как силу, определяемую общим потенциалом

$$\Psi = V + U_d. \quad (2.3.2)$$

Безотносительно к тому, находится ли Земля как целое в гидростатическом равновесии, зададимся вопросом: какова должна быть форма свободной поверхности

океана, если она должна находиться в равновесии под действием рассмотренных сил? Ясно, что равнодействующая силы тяжести и центробежной силы не должна иметь компоненты, параллельной поверхности воды, иначе вода имела бы тенденцию к горизонтальному движению, и равновесия не было бы. Так как океан находится в покое, то, следовательно, поверхность воды должна быть всюду перпендикулярна равнодействующей и, таким образом, должна быть эквипотенциальной поверхностью, т. е. поверхностью $\psi = \text{const}$. Запишем радиус-вектор точки поверхности океана в виде

$$r = a(1 - Y), \quad (2.3.3)$$

где a — земной экваториальный радиус, а Y — малая величина, о которой известно, что она не превышает $1/300$. Если величину r из (2.3.3) подставить в (2.3.2) и пренебречь членами более высокого порядка в V , то требование $\psi = \text{const}$ на поверхности океана даст

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \omega^2 a^2 (1 - Y)^2 (\cos^2 \theta - 1) - \frac{GM}{a(1 - Y)} + \\ & + \frac{G(C - A)}{2a^3(1 - Y)^3} (3 \cos^2 \theta - 1) = \text{const}. \end{aligned}$$

Если, далее, мы пренебрежем квадратами и произведениями малых величин, то это условие сводится к следующему:

$$Y = \left[\frac{3(C - A)}{2Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM} \right] \cos^2 \theta.$$

Положим $\varphi = \omega^2 a^3 / GM$; это будет равно отношению центробежной силы $\omega^2 a$ на экваторе к силе тяготения MG/a^2 от частицы с массой M . Второй член в квадратных скобках равен половине этой величины. Следовательно, с точностью, принимаемой в наших вычислениях, равновесная форма поверхности океана определяется выражением

$$r = a(1 - f \cos^2 \theta), \quad (2.3.4)$$

где «сжатие» f задается в виде

$$f = \frac{3(C - A)}{2Ma^2} + \frac{1}{2} \varphi. \quad (2.3.5)$$

Уравнение (2.3.5) показывает, что, зная величину φ , можно по измерениям величины f найти разницу между полярным и экваториальным радиусами инерции. Однако почти невозможно получить f из геометрических измерений с достаточной точностью; эту величину необходимо получать либо из аномалий силы тяжести на поверхности Земли в зависимости от широты, либо из наблюдений за движением спутников.

«Геоид» определяется как эквипотенциальная поверхность, и наши рассуждения о поверхности океана применимы к нему. Геоид определяется путем нивелирования.

2.4. Сила тяжести на поверхности Земли. Уравнение Клеро

Нормаль к поверхности океана отличается от радиального направления только на малый угол порядка f , и, следовательно, косинус этого малого угла отличается от единицы только членами порядка f^2 , или на величину около $1/90000$. Следовательно, с точностью до малых величин первого порядка, сила тяжести на поверхности океана может быть получена по (2.3.2) подстановкой значения r согласно (2.3.4) в выражение $d\psi/dr$, полученное дифференцированием (2.3.2). Пренебрегая в V членами более высокого порядка, мы таким путем получим

$$g = \frac{GM}{a^2(1 - f \cos^2 \theta)^2} - \frac{3G(C - A)}{2a^4} (3 \cos^2 \theta - 1) + \\ + \omega^2 a (\cos^2 \theta - 1).$$

Если мы пренебрежем квадратами и произведениями малых величин и исключим $C - A$, используя (2.3.5), то получим

$$g = g_e \left[1 + \left(\frac{5}{2} \varphi - f \right) \cos^2 \theta \right], \quad (2.4.1)$$

где g_e — сила тяжести на экваторе:

$$g_e = \frac{GM}{a^2} \left(1 + f - \frac{3}{2} \varphi \right). \quad (2.4.2)$$

Соотношение (2.4.1) было впервые получено Клеро. Оно может быть использовано для вывода величины сжатия f по измерениям g на различных широтах $\frac{1}{2}\pi - \theta$ — при известной величине φ . Ни (2.3.5), ни (2.4.1) не зависят от предположения о гидростатическом равновесии внутри Земли. По существу основными предположениями были: а) фигура равновесия океана должна быть экви-потенциальной поверхностью; б) сила тяжести определяется как градиент потенциала. Из разд. 2.1 и 2.2 мы знаем, что чисто гравитационный потенциал вне Земли может быть представлен рядом по сферическим гармоникам отрицательных степеней; гармоника степени -1 соответствует сферическому океану с постоянной силой тяжести; гармоника степени -2 отсутствует в случае, если начало координат расположено в центре массы Земли. Если оси вращаются, то должен быть добавлен член U_d , определяемый (2.3.1); он состоит из сферической функции степени $+2$ и члена, содержащего r^2 , не являющегося сферической функцией; последний просто вызывает равномерное увеличение радиуса Земли как целого. Другими наиболее важными сферическими функциями, отличными от функции степени -1 , являются сферические функции степени $+2$ и -3 ; обе содержат одну и ту же сферическую гармонику P_2 , и уравнение Клеро, рассмотренное с этой точки зрения, является просто следствием свойств P_2 и отношений, в которые входят члены порядков r^{-1} , r^{-3} и r^2 .

Зная отношение $(C-A)/C$, полученное по предварению равноденствий, и используя (2.3.5), можно получить величину C/Ma^2 и отсюда заключить, что существует некоторая концентрация плотности по направлению к центру Земли. Но выражение (2.4.1) не включает никаких данных о распределении вещества в Земле, и поэтому без использования данных о прецессии невозможно получить выводы о распределении плотности только по измерениям силы тяжести, сжатия или скорости

вращения, не делая предположений о гидростатическом равновесии в недрах Земли. Но даже тогда, когда сделано предположение о внутреннем гидростатическом равновесии, мы не получаем никакой новой информации [1] о распределении плотности из перечисленных выше данных. По сравнению с тем случаем, когда мы используем данные о прецессии без всяких предположений о внутреннем гидростатическом равновесии.

При анализе в этом разделе и в разд. 2.3 мы пренебрегали квадратами и произведениями малых величин. Для более точного вывода f из g такие малые члены должны бытьдержаны, как и член $r^{-5}P_4$, входящий в выражение для потенциала Земли во внешней точке. Однако можно вывести достаточно уверенное значение f из g при помощи простых приближенных выражений. В «American Ephemeris» и «Nautical Almanac»¹ приведена такая формула для g :

$$g = 978,0490 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) \text{ см/сек}^2,$$

где φ (угол, дополнительный к θ) — широта. Формула учитывает эффекты от сферической гармоники степени —5, которая в нашем приближенном рассмотрении не учитывалась. Если член $\sin^2 2\varphi$ заменить приближенно суммой постоянной и члена P_2 , то после необходимых преобразований получим:

$$g = 978,0516 (1 + 0,0052850 \cos^2 \theta).$$

Величина ω равна $2\pi/86164,1$ рад/сек, а для международного эллипсоида $a=6378388$ м. Таким образом, из (2.4.1) и (2.4.2) найдем:

$$\Phi = \frac{a\omega^2}{g_e} \left(1 + f - \frac{3}{2} \Phi \right)$$

и

$$f = \frac{5}{2} \Phi - 0,0052850.$$

¹ Указанные книги представляют собой американский и английский астрономические Ежегодники.—Прим. ред.

Решая эти уравнения относительно ϕ и f , получим, что $\phi = 1/288,9$ а $f = 1/296,8$, что дает отличное совпадение с международным значением $f = 1/297,0$.

2.5. Гравитационный потенциал Земли

Коэффициент $G(C-A)$ во втором члене правой части (2.2.1) может быть выражен в зависимости от f посредством (2.3.5). Первые два члена правой части тогда дают

$$-V = \frac{GM}{r} \left[1 - \frac{J}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\ \left. + \text{члены более высокого порядка} \right], \quad (2.5.1)$$

где

$$J = f - \frac{1}{2} \phi. \quad (2.5.2)$$

Если Земля симметрична относительно плоскости экватора, то сферические функции $r^{-(n+1)} P_n$ с нечетными значениями n отсутствуют, и первый член более высокого порядка есть $r^{-5} P_4$. Несколько первых членов удобнее записать в виде

$$-V = \frac{GM}{r} \left[1 - \frac{J}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\ \left. + \frac{K}{30} \left(\frac{a}{r} \right)^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) + \right. \\ \left. + \text{члены более высокого порядка} \right]. \quad (2.5.3)$$

Теперь, когда в рассмотрение включены члены более высокого порядка, форма геоида уже больше не определяется таким простым выражением, как (2.3.4), а g на поверхности геоида — таким простым выражением, как (2.4.1). Поскольку теперь учитывается сферическая функция P_4 , коэффициенты различных гармоник в выражениях для радиуса геоида, V и g связаны друг с другом, с f и ϕ алгебраическими выражениями, содержащими квадраты и произведения малых величин.

В настоящее время, по-видимому, наиболее точные определения величины J получены из движения искусственных спутников Земли. Так, Лекар, Соренсон и Эклс [2] нашли

$$J = 0,0016232 \pm 0,0000005,$$

$$K = (8,845 \pm 0,006) \times 10^{-6}$$

при $a = 6\,378\,270$ м. Этим величинам соответствует

$$f = 1/298,32 \pm 0,05.$$

Более того, в работе [3] довольно убедительно показано существование влияния на V сферической функции степени -4 . Правая часть (2.5.3) содержит член $(A_3/r^4)P_3$, где

$$A_3 = (2,5 \pm 0,2) \cdot 10^{29} \text{ м}^6/\text{сек}^2,$$

который можно записать в виде:

$$\frac{GM}{r} \left[\frac{L}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \right],$$

где $L = (2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-6}$ — величина безразмерная. Существование такого члена указывает на неполную симметрию Земли относительно плоскости экватора, что не должно вызывать удивления, если это явление отражает факт существования материка Антарктиды.

2.6. Общие аномалии, определяемые вращением Земли

Мы уже рассматривали аномалии потенциала Земли, вызванные ее вращением. Соответствующие сферические функции содержали P_2 . Можно найти довольно простые, но более общие соотношения, справедливые с точностью до малых величин первого порядка, между аномалиями формы геоида, аномалиями силы тяжести над ним и аномалиями внешнего гравитационного поля Земли. Аномалии внешнего поля Земли могут возникнуть либо из-за несимметричности распределения плотности внутри Земли, либо из-за аномалий потенциалов вращательного или приливного происхождения, либо из-

за обеих причин вместе. Предположим, что существует возмущающий потенциал $c_n^m r^n P_n^m$ вращательного либо приливного характера, накладываемый на потенциал $-GM/r$, где P_n^m — присоединенная функция Лежандра первого рода, которая в случае осевой симметрии равна просто P_n , а c_n^m — коэффициент, который может быть равным нулю. Геоид примет некоторую форму; рассмотрим искажающую компоненту Y_n^m , соответствующую P_n^m , такую, чтобы радиус имел величину

$$r = a(1 - Y_n^m). \quad (2.6.1)$$

Внешний гравитационный потенциал Земли имеет соответствующий член вида

$$A_n^m r^{-(n+1)} P_n^m.$$

В силу ортогональности различных P_n^m достаточно рассмотреть общий потенциал

$$\Psi = -\frac{GM}{r} + c_n^m r^n P_n^m + A_n^m \frac{P_n^m}{r^{n+1}}. \quad (2.6.2)$$

Условие, что Ψ должно быть постоянно на геоиде, дает связь между Y , c и A

$$Y_n^m = \frac{1}{GM} c_n^m a^{n+1} P_n^m + \frac{A_n^m}{GMa^n} \cdot P_n^m. \quad (2.6.3)$$

Если подставить соответствующую компоненту силы тяжести g_n^m , полученную дифференцированием (2.6.2) по r , в выражение для r (2.6.1), то после исключения Y при помощи (2.6.3) легко получить

$$g_n^m = (n+2) c_n^m a^{n-1} P_n^m - A_n^m \frac{n-1}{a^{n+2}} P_n^m; \quad (2.6.4)$$

исключение A дает

$$g_n^m = (2n+1) c_n^m a^{n-1} P_n^m - (n-1) \frac{GM}{a^2} Y_n^m. \quad (2.6.5)$$

Если нет внешних или обусловленных вращением Земли причин, вызывающих появление члена с c , то c_n^m в последних трех уравнениях равно нулю. Тогда (2.6.3) дает связь между отклонением поверхности геоида V_n^m и членом с A_n^m в выражении для внешнего гравитационного потенциала; (2.6.4) дает связь силы тяжести на поверхности с A_n^m -членом в потенциале, а (2.6.5) — связь между силой тяжести на поверхности и отклонением поверхности геоида. Если положить $n=2$ при $c_2 = -\frac{1}{3}\omega^2$, то получается результат, включающий результат Клеро. Поэтому (2.6.5) можно рассматривать как обобщение уравнения Клеро.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeffreys H., The Earth, Cambridge University Press, London, 1952, chapter IV. (Русский перевод 4-го изд.: Джейфрис Г., Земля, ее происхождение, история и строение, М., ИЛ, 1960.)
2. Lecag M., Sorenson J., Eckels A., J. Geophys. Res., 64, 209 (1959).
3. O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K., Vanguard Measurements give Pear-Shaped Component of Earth's Figure, Science, 129, 565 (1959).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

КООРДИНАТЫ. ОРБИТА В ПРОСТРАНСТВЕ. ВРЕМЯ. ЭФЕМЕРИДЫ. ПРЕЦЕССИЯ

3.1. Системы астрономических координат

Системы координат, используемые в астрономии, определяются их началами и основными направлениями. *Гелиоцентрические* координаты имеют начало в центре Солнца, *геоцентрические* — в центре Земли, *планетоцентрические* — в центре выбранных планет, *сelenоцентрические* — в центре Луны и т. д.

В астрономии удобно и часто полезно представлять данное направление в пространстве как пересечение сферической поверхности, называемой *небесной сферой*, с радиусом, параллельным данному направлению. Любая система параллельных линий в пространстве представляется парой диаметрально противоположных точек на сфере, а любая система параллельных плоскостей — одним большим кругом на сфере. В астрономии эклиптика обычно определяется не как плоскость в пространстве, а как большой круг небесной сферы и, то, что мы будем называть «эклиптикой», обычно называется «плоскостью эклиптики». В данной книге, пред назначенной не для специалистов по астрономии, мы пытались избежать использования представлений, специфичных для астрономии и не обязательно необходимых для небесной механики. Например, концепции геометрии пространства являются совершенно необходимыми для нашего предмета, в то время как понятие «небесная сфера» таковым не является. Из уважения к читателям, не являющимся специалистами-астрономами, мы должны предупредить их, что наши определения иногда отличаются от принятых в астрономии, хотя мы наде-

емся и считаем, что они по существу всегда эквивалентны или совпадают с такими определениями. Читателей, которые пожелают познакомиться ближе с основными понятиями астрономии, мы отсылаем к книге Рессела, Дьюгана и Стюарта (см. ссылку [7], гл. 1) или к любому другому хорошему руководству по астрономии.

В качестве основной оси полярной системы координат часто выбирается направление оси вращения Земли; при этом положительным считается направление от центра Земли на север. Системы, базирующиеся на этой основной оси, называются *экваториальными* системами. *Небесный экватор* есть плоскость, перпендикулярная этой оси. *Эклиптика* есть плоскость земной орбиты относительно Солнца, а нормаль к эклиптике обычно выбирается как ось полярной системы координат, которые называются *эклиптическими*. Положительное направление нормали определяется как направление, относительно которого орбитальное движение Земли происходит в положительном направлении (против часовой стрелки. — Ред.). Небесный экватор и эклиптика пересекаются по некоторой прямой. Направление с Земли на Солнце вдоль этой общей прямой, когда Солнце пересекает экватор с юга на север, называется направлением на точку *весеннего равноденствия* Υ и обычно выбирается как начало, от которого отсчитывается азимутальный угол в экваториальной и эклиптической системах полярных координат. В экваториальных системах отсчитываемый таким образом азимутальный угол называется *прямым восхождением* a ; в эклиптических системах координат этот угол называется *астрономической долготой* λ . В качестве другой угловой координаты обычно принимают не сам полярный угол, а его дополнение до прямого угла; это дополнение в экваториальных системах называют *склонением* δ , а в эклиптических системах — *астрономической широтой* β . Оба эти углы изменяются в пределах от -90° до $+90^\circ$, и всегда должны быть указаны их знаки.

В системах прямоугольных экваториальных координат направление оси z есть направление оси вращения Земли, оси x — направление на точку весеннего равноденствия, оси y — лежит на экваториальной плоскости

и выбрано так, чтобы получилась правая система координат. В системах прямоугольных эклиптических координат направление оси z есть направление положительной нормали к эклиптике, оси x — направление на точку весеннего равноденствия, а оси y — такое направление в плоскости эклиптики, чтобы система координат была правой.

Угол между эклиптикой и небесным экватором, обычно обозначаемый ϵ , называется *наклонением эклиптики*. Его величина в 1959 г. равнялась $23^{\circ}26'40'',39$. Если этот угол известен, то, поскольку оси x в эклиптической и экваториальной системах координат имеют одно и то же направление, легко сделать переход от одной системы координат к другой. Движение эклиптики и небесного экватора, которое будет рассмотрено позже, не только приводит к зависимости наклонения от времени, но и заставляет вращаться в пространстве оси обеих систем координат. *Средний экватор* и *среднее равноденствие* для какой-нибудь произвольно выбранной эпохи, скажем 1950,0, определяют невращающиеся эклиптическую и экваториальную системы координат, которые используются для решения динамических задач.

Если O — начало координат и точка P имеет эклиптические координаты r, β, λ , то эклиптические направляющие косинусы L, M, N для направления OP будут $\cos \beta \cos \lambda, \cos \beta \sin \lambda, \sin \beta$, а эклиптические прямоугольные координаты X, Y, Z точки P суть Lr, Mr, Nr . Если при том же начале экваториальные полярные координаты P равны r, δ, a , то направляющие экваториальные косинусы l, m, n направления OP суть $\cos \delta \cos a, \cos \delta \sin a, \sin \delta$, а экваториальные прямоугольные координаты x, y, z точки P равны lr, mr, nr . Направляющие косинусы, связывающие две системы осей, таковы:

	x	y	z
X	1	0	0
Y	0	$\cos \epsilon$	$\sin \epsilon$
Z	0	$-\sin \epsilon$	$\cos \epsilon$

откуда получаем точные соотношения

$$\begin{aligned}\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \varepsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \varepsilon \sin \beta, \\ \sin \delta &= \sin \varepsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \varepsilon \sin \beta\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

и

$$\begin{aligned}\cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha, \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \varepsilon \sin \delta, \\ \sin \beta &= -\sin \varepsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \varepsilon \sin \delta.\end{aligned}\quad (3.1.2)$$

Для точек на эклиптике ($\beta = 0$) соотношения (3.1.1) дают

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \sin \varepsilon \sin \lambda, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \cos \varepsilon \operatorname{tg} \lambda,\end{aligned}\quad (3.1.3)$$

причем α всегда расположена в том же квадранте, что и λ .

3.2. Орбита в пространстве

Чтобы описать орбиты тел относительно Солнца, обычно выбирают гелиоцентрические эклиптические оси OX , OY , OZ . На рис. 2 начало координат O находится в центре Солнца, XOY — плоскость эклиптики, OX направлена на точку весеннего равноденствия, а OZ — на северный полюс эклиптики. Плоскость орбиты тела пересекает плоскость эклиптики вдоль *линии узлов* ON , и если N является той точкой, в которой тело пересекает эклиптику с юга на север, то она называется *восходящим узлом*. Угол XON называется *долготой восходящего узла* и обозначается Ω . Пусть OZ' — нормаль к орбите, причем если смотреть вдоль OZ' , то движение тела происходит в направлении по часовой стрелке. Тогда угол ZOZ' есть *наклонение* i орбиты. Таким образом, два угла Ω и i определяют ориентацию плоскости орбиты в пространстве. Угол Ω принимает значения от 0 до 360° , а угол i — любое значение между 0 и 180° , причем если i превышает 90° , то говорят, что движение обратное. Угол NOA , отсчитываемый в

направлении движения по орбите, определяет положение перигелия A и обозначается через ω . Он называется *расстоянием перигелия от узла* и определяет положение орбиты в ее плоскости. Элементы a и e для эллипса или гиперболы или q (перигелийное расстояние) и e для параболы или гиперболы определяют форму и размеры орбиты. Время может быть введено посредством

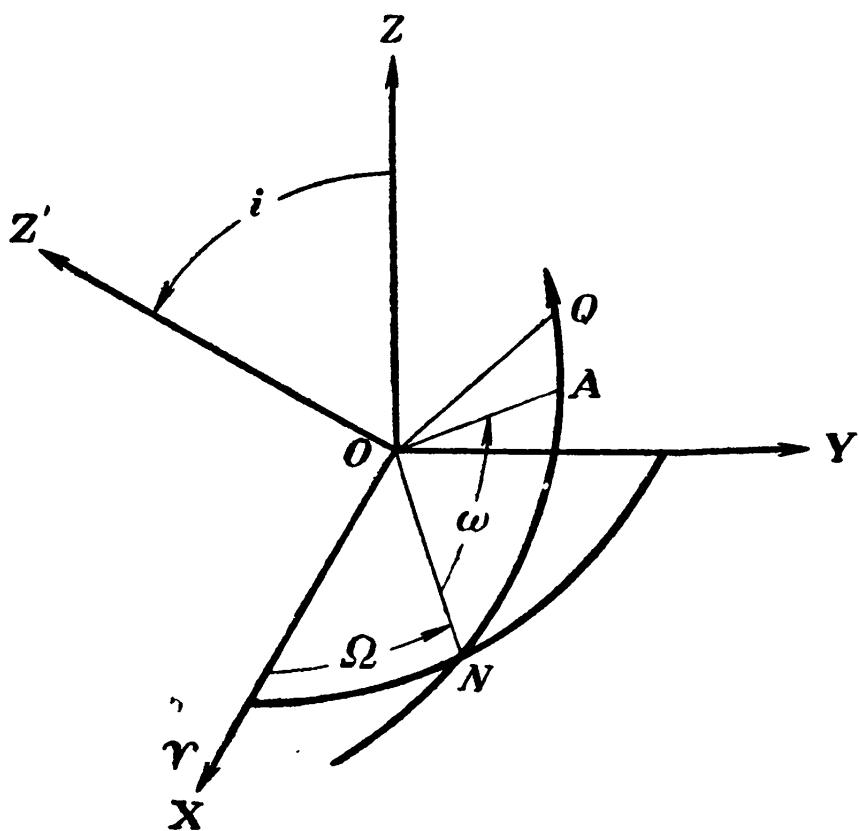


Рис. 2

задания T — момента прохождения перигелия. Таким образом, величины a , e , i , Ω , ω и T могут рассматриваться как шесть независимых *элементов*, которые полностью определяют орбиту тела вокруг Солнца и положение тела на орбите в любой момент времени в задаче двух тел, рассмотренной в гл. 1. Чтобы определить систему координатных осей, кроме того, должны быть также указаны даты для эклиптики и среднего равноденствия, к которым эти элементы относятся. Шесть независимых элементов соответствуют шести начальным данным: трем компонентам скорости и трем координатам, которые динамически определяют орбиту. Однако обычно для планет, кроме a , указывают период P или среднее

движение n , поскольку соотношение (1.8.1) между a и n содержит еще массу планеты m , а также потому, что притяжения других планет могут нарушить связь между n и a , даваемую (1.8.1).

Вместо ω часто используется *долгота перигелия*

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega,$$

поскольку ω не определено при $i=0$ или 180° . Долгота перигелия представляет собой сумму двух углов, обычно лежащих в разных плоскостях. Угол NOQ , отсчитываемый в направлении движения от восходящего узла до некоторой точки Q на орбите, называется *аргументом широты* и обозначается через u :

$$u = \omega + w = \tilde{\omega} + w - \Omega,$$

где w — истинная аномалия, т. е. угол AOQ . Название это (аргумент широты) обязано тому обстоятельству, что в сферической тригонометрии широта точки β дается выражением

$$\sin \beta = \sin i \sin u. \quad (3.2.1)$$

Долгота в орбите определяется суммой

$$\Omega + u = \tilde{\omega} + w.$$

Она имеет смысл даже тогда, когда плоскость орбиты совпадает с эклиптикой. Сумма

$$L = \tilde{\omega} + M, \quad (3.2.2)$$

где M — средняя аномалия $n(t-T)$, называется *средней долготой*. Часто вместо T , как элемента планетных орбит, задается ε — величина, которая в некоторую произвольную эпоху t_0 определяется соотношением:

$$\varepsilon = \tilde{\omega} + n(t_0 - T). \quad (3.2.3)$$

Эта величина называется *средней долготой в эпоху*. Конечно, момент t_0 должен быть задан. Пример системы таких элементов для Юпитера дан в табл. 1. В качестве другого примера в табл. 2 приведены предвари-

Таблица 1

**Элементы орбиты Юпитера для эпохи
1956 январь 1,5 UT**

(эклиптика и среднее равноденствие 1956,0)

Элемент	Обозначение	Величина
Среднее расстояние . . .	a	5,202803
Эксцентриситет	e	0,0484288
Наклонение	i	$1^{\circ}18'20'',1$
Долгота узла	Ω	$100^{\circ}00'14'',4$
Долгота перигелия . . .	ω	$13^{\circ}36'49'',6$
Средняя долгота	ϵ	$138^{\circ}22'44'',51$
Среднее движение . . .	n	$299'',12846$

тельные элементы кометы Слайфера—Бернхэма, приведенные в Harvard Announcement Card 1425 9 февраля 1959 г. Некоторые величины в этом списке излишни: период P , перигелийное расстояние q и афелийное расстояние Q .

Зная элементы, легко найти гелиоцентрические эклиптические координаты в момент t . Сумма ϵ и $n(t-t_0)$ дает L . Величина M равна $L-\tilde{\omega}$. Можно также найти M как $n(t-T)$. Решением уравнения Кеплера (1.5.5) находим эксцентрическую аномалию E , радиус-вектор r можно найти из (1.5.2), а истинную аномалию из (1.5.3). Тогда $u=\omega+\tilde{\omega}-\Omega$, и соотношение (3.2.1) определяет истинную гелиоцентрическую широту, в то время как по формулам сферической тригонометрии истинная гелиоцентрическая долгота равна

$$\lambda = \Omega + \operatorname{arctg}(\cos i \cdot \operatorname{tg} u), \quad (3.2.4)$$

где арктангенс для прямого движения ($\cos i > 0$) лежит в том же квадранте, что u , а для обратного движения ($\cos i < 0$) лежит в противоположном, чем u , квадранте. Если угол i мал, то можно считать, что величина арктангенса в уравнении (3.2.4) мало отличается от u , так что добавление небольшой поправки к долготе в орбите, являющейся функцией u и i и называемой *редук-*

Таблица 2

**Предварительные элементы кометы
Слайфера—Бернхэма**

Обозначение	Величина	Обозначение	Величина
T	1958 август 4,53 UT	a	5,00123
		e	0,51662
ω	$30^\circ, 573$ (1950,0)	P	11,18 лет
Ω	$348^\circ, 973$ (1950,0)	q	2,418
i	$8^\circ, 243$ (1950,0)	Q	7,585

цией к орбите, позволяет найти гелиоцентрическую долготу орбиты.

Если орбита — парабола, то ω и r определяются по T , q и t так, как описано в разд. 1.6; если же орбита — гипербола, то ω и r находятся по a , e , T и t согласно разд. 1.7. Остальные расчеты не меняются.

Для удобства элементы орбиты искусственных спутников Земли относятся к экватору, а не к эклиптике, и их точность далеко не достаточна, чтобы оправдать учет тонких эффектов, которым подвержены экватор и среднее равноденствие. Обычно задаются следующие элементы: среднее расстояние a в единицах земного радиуса; эксцентриситет e ; наклонение i плоскости орбиты к экватору; прямое восхождение Ω восходящего узла плоскости орбиты на экваторе; аргумент широты перигея ω или время прохождения узла; либо средняя аномалия в эпоху или истинная аномалия в эпоху; либо аномалистический период или драконический период. Имеются три периода, которые сильно отличаются друг от друга из-за большого влияния на орбиты близких спутников осевых гармоник гравитационного потенциала Земли. *Сидерический период* — это время, требуемое для изменения прямого восхождения на 360° ; *аномалистический период* — это время от одного прохождения через перигей до следующего; *драконический период* — это время от одного прохождения через восходящий узел до следующего. Возмущения, вызываемые осевы-

ми гармониками, изменяют элементы Ω и ω на несколько градусов в сутки, а сопротивление воздуха при низких перигеях приводит к постепенному уменьшению a , e и P . Следовательно, должна быть выбрана достаточно близкая эпоха для элементов и заданы их производные по времени, если мы хотим получить необходимую точность для их предсказания.

3.3. Время

Геоцентрическое прямое восхождение какого-либо пункта на земной поверхности называется *звездным временем* в этом месте; оно часто обозначается через θ и меняется от 0 до 24^{h} на 15° за каждый час. Если прямое восхождение отсчитывается от истинного равноденствия, подверженного влиянию нутации, то время называется *истинным звездным временем*; если прямое восхождение измеряется от среднего равноденствия, то время называется *средним звездным временем*. Плоскость, проходящая через точку на поверхности Земли и ось вращения, называется местным *меридианом*; плоскость, проходящая через ось вращения Земли и светило, называется *часовым кругом* светила. Угол, отсчитываемый к западу от меридиана до часовогого круга светила, называется *часовым углом* t светила и обычно дается в часовой мере. Отметим, что звездное время равно часовому углу точки весеннего равноденствия и если α — прямое восхождение светила, то $t = \theta - \alpha$. Таким образом, когда светило пересекает меридиан, то $t = 0$ и тогда $\theta = \alpha$. Это является основой удобного метода определения звездного времени путем наблюдения момента прохождения через меридиан (*кульминация*) светила с известным прямым восхождением.

Географической долготой места на земной поверхности называется угол между меридианом места и стандартным меридианом. По международному соглашению стандартным является гринвичский меридиан. При этом географические долготы отсчитываются географами от Гринвича на запад и на восток в градусах, астрономами — в часах до 180° или 12^{h} ; долготы, отсчитываемые на запад, считаются отрицательными. Ясно, что часо-

вые углы двух мест земной поверхности или очень удаленного объекта, наблюдаемого из этих двух мест, отличаются на разность географических долгот этих мест, при этом часовой угол алгебраически больше для места, расположенного восточнее. В частности, звездное время на долготе x равно звездному времени Гринвича минус x .

Истинное солнечное время равно часовому углу Солнца $\pm 12^h$. Его показывают солнечные часы, но оно имеет мало других применений, так как скорость его изменения далека от равномерной. Звездное время не пригодно для использования в повседневной жизни, поскольку оно не имеет постоянной связи с днем и ночью. Поэтому для практических целей вводят воображенное солнце, равномерно движущееся среди звезд в плоскости земного экватора; его прямое восхождение, отсчитываемое от средней точки весеннего равноденствия, почти равно средней долготе Солнца, отсчитываемой от той же точки весеннего равноденствия с учетом aberrации. Поскольку среднее движение Солнца среди звезд не равномерно, а имеет малый вековой член, возникающий из-за влияния притяжения планет, Ньюком [1, 2] ввел понятие среднего солнца таким образом, чтобы оно все время имело равномерное движение среди звезд, равное среднему движению среди звезд истинного Солнца в эпоху 1900, январь $0^d,5$ UT. Именно промежуток времени между двумя кульминациями этого фиктивного солнца, введенного Ньюкомом и определяемого постоянными из его работы [2], составляет *средние солнечные сутки*, $1/86\,400$ часть которых (секунда) используется как единица времени физиками и инженерами. Часовой угол среднего солнца $\pm 12^h$ называется *местным средним временем* и изменяется в пределах от 0 до 24^h ; местное среднее время Гринвича называется *всемирным временем* (UT). До 1 января 1925 г. гринвичское среднее время отсчитывалось от полудня; с 1925 г. гринвичское среднее время отсчитывается от полуночи, как принято в повседневной жизни. Практически всемирное время находится из среднего звездного гринвичского времени добавлением или вычитанием 12^h и вычитанием прямого

восхождения среднего солнца, отсчитываемого от среднего равноденствия¹. Разность истинного солнечного времени и среднего солнечного времени называется *уравнением времени* и, очевидно, должно равняться прямому восхождению среднего солнца минус прямое восхождение истинного Солнца. За подробностями, относящимися к переводу времен, мы отсылаем читателя к любому астрономическому Ежегоднику.

Для средней долготы кажущегося движения Солнца вокруг Земли, отсчитываемой от средней точки равноденствия и освобожденной от влияния aberrации, Ньюком [2] дал выражение

$$L = 279^{\circ}41'48'',04 + 129602768'',13T + 1'',089T^2, \quad (3.3.1)$$

где T измеряется в юлианских столетиях, состоящих из 36 525 средних солнечных суток, от 1900 января 0^d,5000 UT. Таким образом, тропический год от одного весеннего равноденствия до следующего имеет продолжительность

$$\frac{1296000 (365^d, 25)}{1296027,6813 + 0,02178T} = 365^d,24219879 - 0,00000614T.$$

Ньюком [1] принял для общей прецессии по долготе за тропический год величину

$$50'',2482 + 0'',0222T,$$

которая дает значение

$$50'',2493 + 0'',0222T$$

за юлианский год. Это ведет к значению среднего сидерического движения Солнца за юлианский год, равному

$$n = 1295977'',4320 - 0'',000403T$$

и продолжительности сидерического года

$$365^d,25636042 + 0'',00000011T.$$

¹ Московское время равно всемирному времени $+3^h$. — *Прим. ред.*

Однако в более поздней работе Ньюком получил улучшенное значение общей прецессии по долготе за тропический год

$$50'',2564 + 0'',0222T,$$

которой с тех пор обычно все пользуются. Это значение соответствует прецессии за юлианский год

$$50'',2575 + 0'',0222T,$$

среднему сидерическому движению Солнца за юлианский год

$$n = 1295977'',4238 - 0'',00042T$$

и продолжительности сидерического года

$$365^d,25636273 + 0'',00000012T,$$

что, кажется, лучше соответствует более поздней работе Ньюкома, чем общепринятая величина $365^d, 25636042$. Для аномалистического года (от одного прохождения Земли через перигелий до следующего) Ньюком [2] нашел:

$$365^d,25964134 + 0'',00000304T.$$

Ньюком [1] дал для прецессии за 100 лет по прямому восхождению величину

$$4606'',36 + 2'',79T.$$

Поэтому, если через μ обозначить равномерное движение среди звезд среднего солнца в плоскости экватора, то прямое восхождение этого среднего солнца, отсчитываемое от среднего равноденствия, будет равно [4]

$$\tau = \tau_0 + \mu T + 4607'',85T + 1'',394T^2.$$

Ньюком [2] для постоянной aberrации взял значение $20'',50$ и отсюда нашел из (3.3.1), что средняя долгота истинного Солнца с учетом aberrации равна

$$L' = 279^\circ 41' 27'',54 + 129602768'',13T + 1'',089T^2.$$

Ньюком хотел, чтобы прямое восхождение фиктивного среднего солнца как можно лучше совпадало со

средней долготой Солнца, с учетом aberrации и чтобы среднее солнце двигалось среди звезд по экватору с постоянной скоростью, равной среднему сидерическому движению Солнца в январе 1900 $0^d,5$ UT. Поэтому он так распорядился постоянной τ_0 , чтобы согласовать ее с постоянной в L' , а постоянной μ так, чтобы коэффициенты при T были одни и те же в обоих выражениях. Он получил

$$\tau = 279^\circ 41' 27'',54 + 129602768'',13T + 1'',394T^2$$

или в единицах времени,

$$\tau = 18^h 38^m 45^s,836 + 8640184^s,542T + 0^s,0929T^2. \quad (3.3.2)$$

Постоянные и линейные члены в L' и τ одни и те же, но квадратичные члены различаются, поскольку такой член в (3.3.2) появляется только из движения среднего равноденствия, в то время как член в L' содержит часть, обусловленную притяжением Земли планетами, что оказывается на ее среднем движении и, следовательно, на движении истинного Солнца. Ньюком понимал, что разница эта вызовет различие в движении среднего Солнца от истинного на 2^s в 1000 лет, но не видел путей избежать этой трудности. Представляется, что такая трудность неизбежна, если определять средние солнечные сутки так, чтобы их длина сохранялась постоянной.

Выражение (3.3.2) все еще используется в Ежегодниках как определение фиктивного среднего солнца, на котором основано гражданское и астрономическое среднее солнечное время. Хотя принятая сейчас постоянная aberrации отличается от значения, которым пользовался Ньюком, постоянный член в (3.3.1) был предварительно получен из наблюдений, исправленных за aberrацию с исцелением ньюкомовского значения, так что при необходимости исключить aberrацию необходимо пользоваться величиной, которую употреблял Ньюком. В более поздней работе [3] Ньюком нашел также принятое сейчас и отличающееся от прежнего значение прецессии по прямому восхождению за тропический век

$$4608'',50 + 2'',79T,$$

но фактически для получения (3.3.2) он использовал только коэффициент при T , который не изменился, и поэтому (3.3.2) остается справедливым и соответствует принятым сейчас постоянным прецессии.

За юлианское столетие прямое восхождение среднего солнца, определяемое (3.3.2), возрастает на $8\,640\,184^{\text{s}},542 + 0^{\text{s}},1858T$; следовательно, за одни средние солнечные сутки это увеличение равно отношению этой величины к 36 525. За одни средние солнечные сутки прямое восхождение меридиана увеличивается на

$$24^{\text{h}} + x = 24^{\text{h}}03^{\text{m}}56^{\text{s}},555360 + 5^{\text{s}},06 \cdot 10^{-6}T,$$

что и является продолжительностью средних солнечных суток, выраженной в среднем звездном времени. Обращая это соотношение, найдем, что одни средние звездные сутки составляют

$$23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}},090538 - 5^{\text{s}},06 \cdot 10^{-6}T$$

среднего солнечного времени. Постоянная μ вековой скорости сидерического движения фиктивного среднего солнца по экватору была выбрана Ньюкомом так, что ее сумма с величиной m , являющейся прецессией по прямому восхождению за юлианское столетие в 1900 г., равна $129\,602\,768'',13$. Если взять принятую сейчас величину прецессии за тропическое столетие $4608'',50$, соответствующую юлианской $m=4608'',60$, легко найдем, что $\mu=129\,598\,159'',53$. Таким образом, за один юлианский год Земля не повернется до полных 36 525 оборотов на величину $1840'',47$; абсолютная скорость вращения Земли равна $1,002\,737\,811\,906$ оборотов за средние солнечные сутки, а период ее абсолютного вращения равен $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}},098\,904$ среднего солнечного времени. По крайней мере это было справедливо в 1900 г.

Предполагалось, что Земля вращается равномерно, хотя возможны небольшие нерегулярности истинного звездного времени из-за нутации. Однако были открыты нерегулярности в движениях Луны, Солнца и планет, что с несомненностью указывало на наличие гораздо больших ошибок в UT по сравнению с l — независимой переменной динамических уравнений движения, кото-

рая может быть названа ньютонианским временем. Вращение Земли по причинам, которые частично поняты, немного неравномерно, и эффекты этих нерегулярностей накапливаются. Поэтому *эфемеридное время* (ET) определяется как время, которое позволяет согласовать таблицы Ньюкома для Солнца [2] с наблюдениями. В юлианских столетиях, отсчитываемых от 1900 января $0^d 12^h$ UT (этот же момент соответствует 1900 январь $0^d 12^h$ ET), эфемеридное время есть величина T в формуле (3.3.1); оно может быть найдено из наблюдений долготы Солнца, но оно более точно может быть получено из наблюдений Луны, которая движется быстрее. Оно измеряется менее точно, чем всемирное время, но много более точно, чем ньютонианское время t . В 1959 г. разность ET—UT была немногим больше половины минуты. Международная комиссия мер и весов решила, что в качестве физического эталона времени лучше служит не средняя солнечная секунда, а *эфемеридная секунда*, которая определяется как $1/31\ 556\ 925,9747$ тропического года на 1900 январь 0 гринвичского полдня в соответствии с формулой (3.3.1). *Эфемеридные сутки* определяются как 86 400 эфемеридных секунд. Момент 1900 января $0^d 12^h$ ET определяется как момент, когда $L=279^{\circ}41'48'',04$.

Если атомные часы (возможно, в комбинации с кварцевыми часами) могут сохранять непрерывный ход в течение десятилетий или столетий, они дали бы наилучший способ измерения t .

3.3.1. Примеры и задачи

1. Чему равно местное солнечное время в 20 EST 22 октября 1958 г. в г. Кембридже, Массачусетс, на западной долготе $4^h44^m31^s,05$? (*Ответ:* $20^h15^m28^s,95$.) Чему равно всемирное время? (*Ответ:* 1958 октябрь $23^d 01^h$.) Покажите, что с 1900 январь $0^d,5$ UT прошло 0,58 юлианского столетия плюс $295^d 01^h$ и, используя (3.3.2), найдите прямое восхождение среднего солнца. (*Ответ:* $14^h03^m46^s,589$.) Чему равно местное среднее звездное время? (*Ответ:* $22^h19^m15^s,54$.) Если прямое восхождение Солнца равно $13^h48^m16^s,65$, чему равен его часовой угол? (*Ответ:* $8^h30^m58^s,89$.) Чему равно истинное солнечное

время? (Ответ: $20^{\text{h}}30^{\text{m}}58^{\text{s}},89.$) Чему равно уравнение времени? (Ответ: $15^{\text{m}}29^{\text{s}},94$, в полном согласии с Ежегодником.)

2. Если вы правильно сделаете следующий пример, ваши результаты, в которых не учитывались притяжения планет, совпадут с данными Ежегодника (Nautical Almanac) с точностью $1''$ по L , $10''$ по λ , 1^{s} по a , $7''$ по δ , $0^{\text{s}},02$ по θ , 1^{s} в уравнении времени, $0,00002$ в r и $0'',02$ в видимом радиусе Солнца.

В эпоху 1958 январь $1^{\text{d}},0$ UT Земля имела следующие элементы, отнесенные к среднему равноденствию 1958,0:

$$a = 1,000000$$

$n = 3548'',1928$ (среднее сидерическое движение за средние солнечные сутки)

$$e = 0,0167268$$

$$\tilde{\omega} = 102^{\circ}13'05''$$

$$\varepsilon = 100^{\circ}08'34''$$

Наклонение эклиптики равно $23^{\circ}26'41''$. Найти по этим элементам следующие величины в момент 1958 октябрь $22^{\text{d}},0$ UT:

а) Среднюю долготу Солнца, включая прецессию, равную $40'',48$ (N. A. (Nautical Almanac. — Ред.) дает $209^{\circ}55'23'',2$).

б) Истинную долготу Солнца, включая прецессию (N. A. дает $208^{\circ}05'16'',6$).

в) Прямое восхождение и склонение Солнца для среднего равноденствия (N. A. дает $13^{\text{h}}44^{\text{m}}20^{\text{s}},12$ и $-10^{\circ}47'38'',4$).

г) Среднее звездное время Гринвича. Вычитая постоянную aberrации $20'',6$ из L Солнца, найти a среднего солнца, часовой угол которого равен 12^{h} ; затем найти θ (N. A. дает $1^{\text{h}}59^{\text{m}}40^{\text{s}},18$).

д) Уравнение времени (истинное минус среднее). Зная θ и прямое восхождение истинного Солнца, найти его часовой угол (N. A. дает $15^{\text{m}}20^{\text{s}},4$).

е) Длину радиуса-вектора в а. е. (Н. А. дает 0,995157).

ж) Видимый радиус Солнца, если на среднем расстоянии он равен 16'01",50 (Н. А. дает 16'06",18).

3. Перигелийное расстояние кометы, имеющей параболическую орбиту, равно 1 а. е. Сколько суток будет двигаться комета от $\omega = -90^\circ$ до $\omega = 90^\circ$? (Ответ: 219^d,231.)

3.4. Определение элементов орбиты по положению и скорости

Пусть началом O невращающейся системы координат $OXYZ$ является частица массы M . В момент t_0 частица массы m , движущаяся под действием притяжения массы M , находится в точке X, Y, Z и имеет компоненты скорости $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$. Задача — найти орбиту m относительно M . Соотношения

$$\begin{aligned} \mu &= k^2(M + m), \\ v^2 &= \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2, \\ r^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2, \\ \frac{1}{a} &= \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

последнее из которых — это уравнение энергии (1.3.7), дают значение элемента a и определяют тип орбиты. Она будет эллиптической, параболической или гиперболической, если величина $1/a$ будет соответственно положительной, нулевой или отрицательной.

Как и в разд. 1.9, постоянная площадей c может быть представлена как векторное произведение \mathbf{r} и скорости на орбите \mathbf{v} массы m относительно M . Поскольку и \mathbf{r} и \mathbf{v} лежат в плоскости орбиты, то вектор c будет иметь направление нормали OZ' к плоскости орбиты. Пусть составляющие c по осям X, Y и Z будут c_x, c_y и c_z ; обозначим направляющие косинусы $c_x/c, c_y/c, c_z/c$ через l, m и n . Величина c и ее составляющие могут быть найдены из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} c_x &= Y\dot{Z} - Z\dot{Y}, \\ c_y &= Z\dot{X} - X\dot{Z}, \\ c_z &= X\dot{Y} - Y\dot{X}, \\ c^2 &= c_x^2 + c_y^2 + c_z^2. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Но если i — наклонение ZOZ' плоскости орбиты к плоскости XOY и если Ω — долгота XON восходящего узла N , отсчитываемая от OX в плоскости XOY , то, поскольку долгота N отличается от долготы OZ' на 90° , легко получить, что $l = \sin i \sin \Omega$, $m = -\sin i \cos \Omega$, $n = \cos i$, поэтому

$$\begin{aligned} \cos i &= \frac{c_z}{c}, \\ \sin i \sin \Omega &= \frac{c_x}{c}, \\ \sin i \cos \Omega &= -\frac{c_y}{c}. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Выражения (3.4.2) и (3.4.3) определяют c^2 и элементы i и Ω . Затем формула (1.3.4) даст значение эксцентриситета e

$$e^2 = 1 - \frac{c^2}{\mu a}. \tag{3.4.4}$$

Значение истинной аномалии w , которое будет нужно позже, чтобы найти элемент ω , может быть определено из соотношений

$$\begin{aligned} e \cos w &= \frac{c^2}{r\mu} - 1, \\ e \sin w &= \frac{cr}{\mu}, \\ \dot{r}r &= X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Первое из них получается из (1.3.3), второе может быть получено дифференцированием (1.3.3) и заменой $\dot{\omega}$ на c/r^2 , а третье — дифференцированием третьего уравнения

ния системы (3.4.1). При этом выбор квадранта получается однозначным.

Прежде чем искать ω или $\tilde{\omega}$, надо определить $u = \omega + w$, т. е. аргумент широты. Направляющие косинусы линии узлов ON суть $\cos \Omega$, $\sin \Omega$, 0, а радиус-вектора r соответственно X/r , Y/r , Z/r . Таким образом формулы

$$\begin{aligned} r \cos u &= X \cos \Omega + Y \sin \Omega, \\ r \sin u &= \frac{Z}{\sin i} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

полностью определяют u ; второе уравнение легко находится из соотношений сферической тригонометрии. Зная u , можно получить

$$\omega = u - w \text{ или } \tilde{\omega} = \Omega + u - w.$$

Таким образом можно определить элементы a , e , i , Ω и $\tilde{\omega}$.

Если орбита — эллипс, то из (1.5.3) можно найти E по w и e ; тогда из уравнения Кеплера (1.5.5) можно определить среднюю аномалию M_0 , а средняя долгота ε в эпоху t_0 найдется из равенства

$$\varepsilon = \tilde{\omega} + M_0.$$

Среднее движение n определяется по (1.5.1), а по n можно найти период. Если необходимо знать время прохождения перигея (periцентра), его можно найти из уравнения

$$M_0 = n(t_0 - T).$$

Если орбита будет параболой, то q и T определяются из (1.6.1) и (1.6.3), где $t = t_0$. Если орбита — гипербола, то T можно найти из (1.7.1) и (1.7.2), где $t = t_0$.

Этим завершается определение элементов орбиты по мгновенным значениям положения и скорости. По существу определение сводится только к преобразованиям, поскольку движение определено начальными значениями координат и компонент скорости; иногда такие

мгновенные значения начальных данных могут сами рассматриваться как элементы орбиты.

3.4.1. Примеры и задачи

1. Пусть $\mu=1$. В точке $(2, 0, 0)$ скорость равна $(0, 0, 1/\sqrt{2})$. Найти a, e и форму орбиты. Ответ: $(2; 0;$ круговая орбита.)

2. $\mu=1$. В момент $t_0=5$ эклиптические гелиоцентрические координаты кометы равны $(3, 4, 0)$, а компоненты скорости $(0, \sqrt{2}/5, 0)$. Найти элементы орбиты и положение кометы в момент $t=-5$. Ответ: Элементы равны: $a=\infty; e=1,00000; i=0^{\circ}00'00''; \omega=306^{\circ}52'; q=1,80000; T=-2,252$. Координаты в момент $t=-5$: $r=2,666; \lambda=237^{\circ}22'; \beta=0$.

3.4.2. Определение элементов орбиты из наблюдений

Здесь мы дадим краткие указания, как элементы орбит планет или комет могут быть выведены из наблюдений с Земли; хорошее объяснение содержится в [5] и [6], к которым мы отсылаем заинтересованного читателя¹.

Будем обозначать гелиоцентрические координаты Земли через X, Y, Z и пусть расстояние земли от Солнца равно R . Пусть экваториальные гелиоцентрические координаты объекта пренебрежимо малой массы будут x, y, z и его гелиоцентрическое расстояние равно r . Пусть, далее, геоцентрические направляющие косинусы объекта будут l, m, n , а его геоцентрическое расстояние равно ρ . Тогда

$$l\rho = x - X,$$

$$\dot{l}\rho + l\dot{\rho} = \dot{x} - \dot{X},$$

¹ В советской литературе вопрос об определении орбит по наблюдениям со всеми подробностями, включая рабочие схемы вычислений, изложен в книгах: М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, М., 1935; А. Д. Дубяго, Определение орбит, М., Гостехиздат, 1950. — Прим. ред.

$$\begin{aligned}
 \ddot{l}\rho + 2\dot{l}\dot{\rho} + l\ddot{\rho} &= \ddot{x} - \ddot{X} = \\
 &= k^2(1+m_e) \frac{X}{R^3} - k^2 \frac{x}{r^3} = \\
 &= k^2(1+m_e) \frac{X}{R^3} - k^2 \frac{X+l\rho}{r^3}
 \end{aligned}$$

и поэтому

$$l\left(\ddot{\rho} + \frac{k^2\rho}{r^3}\right) + 2\dot{l}\dot{\rho} + \ddot{l}\rho = k^2X\left(\frac{1+m_e}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right); \quad (3.4.2.1)$$

аналогично получаются два уравнения для Y и Z . Здесь m_e обозначает массу Земли, а k — гауссова постоянная тяготения. В качестве неизвестных могут рассматриваться ρ , $2\dot{\rho}$, $\ddot{\rho} + k^2\rho/r^3$. Решая систему (3.4.2.1) как алгебраическую относительно ρ , найдем:

$$l_0\rho = k_0 - \frac{1}{r^3}, \quad (3.4.2.2.)$$

где

$$l_0 = \frac{1}{k^2} \frac{\begin{vmatrix} l & i & \ddot{l} \\ m & \dot{m} & \ddot{m} \\ n & \dot{n} & \ddot{n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l & i & X \\ m & \dot{m} & Y \\ n & \dot{n} & Z \end{vmatrix}}, \quad k_0 = \frac{1+m_e}{R^3}.$$

Но из треугольника со сторонами R , r и ρ имеем:

$$r^2 = R^2 + \rho^2 + k_1\rho, \quad (3.4.2.3)$$

где

$$k_1 = 2(Xl + Ym + Zn).$$

Уравнения (3.4.2.2) и (3.4.2.3) могут быть решены относительно r и ρ ; тогда ρ можно найти из такого соотношения

$$\dot{\rho} = \frac{\rho}{2} \cdot \begin{vmatrix} l & X & \ddot{l} \\ m & Y & \ddot{m} \\ n & Z & \ddot{n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l & \dot{l} & X \\ m & \dot{m} & Y \\ n & \dot{n} & Z \end{vmatrix}.$$

Затем мы находим

$$x = X + l\rho \text{ и т. д.}$$

$$\dot{x} = \dot{X} + \dot{l}\rho + l\dot{\rho} \text{ и т. д.,}$$

после чего элементы орбиты в экваториальной системе координат можно найти, как в разд. 3.4.

Величины X, Y, Z и их первые производные можно найти в астрономическом Ежегоднике; величины геоцентрических направляющих косинусов и их первые и вторые производные по времени могут быть получены из трех точных наблюдений, которые не слишком сильно разделены во времени. Уравнение, получающееся исключением r из уравнений (3.4.2.2) и (3.4.2.3), является уравнением восьмой степени относительно ρ и многократно изучалось с целью отделения и исследования его корней. Этот метод, в принципе восходящий к Лапласу, имеет известный недостаток в том, что в нем предполагается возможным получение из наблюдений первых и вторых производных геоцентрических направляющих косинусов по времени — процесс, который неточен, когда наблюдения близки, и невозможен, когда они далеки. В методе Гаусса наблюдения могут быть сильно разделены во времени; внешне этот метод годится для конечных интервалов времени. На практике метод Гаусса оказывается значительно сложнее и является только приближенным. Таким образом, оба метода неточны, и необходимо вводить дифференциальные поправки в элементы, чтобы получить значения, как можно более близкие к наблюдаемым геоцентрическим направлениям. Для точных исследований необходимо принимать во внимание геоцентрические координаты мест наблюдения.

Для искусственных спутников Земли изложенный метод неприменим. Хороший метод состоит в нахождении уравнений в геоцентрических экваториальных координатах каждого из трех направлений на спутник, проходящих через станцию наблюдения. Если геоцентрические расстояния первого и третьего положений спутника равны ρ_1 и ρ_3 , то плоскость орбиты, проходящая через центр Земли и первое и третье положения спутника, пересечет второе направление на геоцентрическом расстоянии ρ_2 . Затем можно найти a , e и три значения истинной аномалии, но полученное коническое сечение может быть выпукло к Земле или проходить через Землю и в общем случае не давать интервалов времен между положениями, равных наблюдаемым. Только при правильном выборе ρ_1 и ρ_3 предсказанные времена будут правильными. Обширная серия проб на быстродействующих вычислительных машинах, запрограммированная подходящим образом, дает правильные ρ_1 и ρ_3 и, следовательно, элементы орбиты. Этот метод был предложен Герриком и разработан на Смитсонианской астрофизической обсерватории Бриггсом и Словеем.

Другой метод, подходящий для искусственных спутников, — принять величины начальных координат и компонент скорости, определенных в момент запуска, и вывести временную, предварительную систему элементов орбиты по этим величинам методом, описанным в разд. 3.4.

3.5. Эфемериды и преобразования координат

Если надо рассчитать много положений, как бывает в случае вычисления эфемериды, то можно с большой выгодой использовать направляющие косинусы, чтобы перейти от правой гелиоцентрической системы координат OX_1 , OY_1 , OZ_1 (где OX_1 проходит через перигелий, а ось OZ_1 перпендикулярна к плоскости орбиты) к гелиоцентрическим эклиптическим координатам. Нетрудно получить

$$X_1 = a(\cos E - e),$$

$$Y_1 = a \sqrt{1 - e^2} \sin E,$$

$$Z_1 = 0,$$

так что даже не нужно определять истинную аномалию. Эти оси повернем в отрицательном направлении (по часовой стрелке) вокруг оси OZ_1 на угол ω ; при этом получается система OX_2 , OY_2 , OZ_2 , причем OX_2 проходит через восходящий узел, а OZ_2 совпадает с OZ_1 , нормалью к орбите. Связь между этими двумя системами осей определяется матрицей A направляющих косинусов:

$$\begin{array}{c|ccc} & X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix} & \left| \begin{array}{ccc} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| & = A. \end{array}$$

Поворотом по часовой стрелке вокруг оси OX_2 на угол i переведем оси в положение OX_3 , OY_3 , OZ_3 , где OX_3 проходит через узел, OY_3 лежит в плоскости эклиптики, а OZ_3 перпендикулярна к эклиптике. Матрица B направляющих косинусов для этого поворота имеет вид

$$\begin{array}{c|ccc} & X_3 & Y_3 & Z_3 \\ \begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix} & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{array} \right| & = B. \end{array}$$

Поворотом по часовой стрелке на угол Ω вокруг оси OZ_3 последняя система осей переводится в обычные эклиптические оси OX , OY , OZ с матрицей направляющих косинусов поворота

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \begin{matrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{matrix} & \left| \begin{array}{ccc} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| & = C. \end{array}$$

Затем образуется произведение матриц AB , и, наконец, матрица $D=ABC$, определяющая общее преобразование

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \\ \hline X_1 & D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} \\ Y_1 & D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} \\ Z_1 & D_{3,1} & D_{3,2} & D_{3,3} \end{array} = D.$$

Правило для образования элементов $(AB)_{i,j}$ произведения двух матриц A и B таково

$$(AB)_{i,j} = \sum_s A_{i,s} B_{s,j},$$

где $A_{i,s}$ — элемент матрицы A , стоящий в i -й строке и s -м столбце. Умножение матриц подчиняется ассоциативному закону и не подчиняется коммутативному, поэтому порядок умножения трех матриц может быть или $(AB)C$ или $A(BC)$ и никакой другой. Для того чтобы повороты соответствовали правилам умножения матриц, необходимо, чтобы строки и столбцы матриц поворотов, как они приведены выше, не переставлялись.

Мы не пытаемся показать произведение матриц в алгебраической форме из-за сложности результата. Однако на настольной счетной машине подобное произведение матриц легко реализовать численно. Каждый раз, когда записана новая матрица F , необходимо проверить ее элементы, чтобы быть уверенным, что сумма по всем i величин $F_{i,j} \cdot F_{i,k}$ и подобная ей сумма величин $F_{j,i} \cdot F_{k,i}$ равна нулю всегда, кроме случая $j=k$, когда эта сумма равна единице. Первое условие есть условие ортогональности, второе — условие того, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице.

Гелиоцентрические эклиптические координаты объекта легко определяются при помощи уравнений, полученных переходом от X_1, Y_1, Z_1 к X, Y, Z

с использованием матрицы D

$$X = aD_{1,1} \cos E + a\sqrt{1-e^2} D_{2,1} \sin E - aeD_{1,1},$$

$$Y = aD_{1,2} \cos E + a\sqrt{1-e^2} D_{2,2} \sin E - aeD_{1,2}, \quad (3.5.1)$$

$$Z = aD_{1,3} \cos E + a\sqrt{1-e^2} D_{2,3} \sin E - aeD_{1,3},$$

где девять постоянных могут быть вычислены раз на-всегда, а от времени будут зависеть только $\sin E$ и $\cos E$. Можно сделать любое желаемое изменение эклиптики и весеннего равноденствия, подобное описанному в следующем разделе, с использованием соответствующего поворота F , примененного к осям X, Y, Z , например, чтобы перевести их в X', Y', Z' . Полная комбинация вращений определяется тогда одной матрицей $D=ABC$, так что (3.5.1) позволяют потом автоматически учесть изменение равноденствия. Переход к гелиоцентрическим экваториальным координатам X_q, Y_q, Z_q с тем же равноденствием может также быть объединен в одну матрицу D включением в D множителя Q , так что $D=ABCQ$, где Q — матрица

$$\begin{array}{ccc} X_q & Y_q & Z_q \\ X' & 1 & 0 & 0 \\ Y' & 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ Z' & 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{array} = Q,$$

которая переводит эклиптические координаты в экваториальные; здесь ε — наклонение эклиптики. Если матрице F не соответствует вращение, то она является просто единичной матрицей с диагональными членами, равными единице, а остальными — равными нулю. Читатель не будет испытывать никаких затруднений в приспособлении описанной выше общей процедуры для получения уравнений в форме (3.5.1), которые непосредственно дают гелиоцентрические эклиптические или экваториальные координаты, отнесенные к любому фиксированному равноденствию. Чтобы получить координаты, отнесенные к подвижному среднему экватору и равноденствию или к истинному экватору и равноден-

ствию, пожалуй, самым лучшим будет включить в соотношения (3.5.1) только преобразование к среднему экватору и равноденствию на начало года, а затем преобразовать каждую систему вычисленных координат по отдельности при помощи соответствующего численного преобразования к нужным подвижным осям, после чего можно перейти к геоцентрическому началу.

Если нужны геоцентрические экваториальные координаты x_q , y_q , z_q , то они могут быть получены добавлением к X_q , Y_q , Z_q геоцентрических экваториальных координат x_{\odot} и т. д. Солнца, которые даются в Ежегоднике:

$$\begin{aligned}x_q &= X_q + x_{\odot}, \\y_q &= Y_q + y_{\odot}, \\z_q &= Z_q + z_{\odot}.\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

Тогда геоцентрическое расстояние ρ , прямое восхождение α и склонение δ даются формулами

$$\begin{aligned}x_q &= \rho \cos \delta \cos \alpha, \\y_q &= \rho \cos \delta \sin \alpha, \\z_q &= \rho \sin \delta.\end{aligned}$$

Наконец, если вычесть из геоцентрических экваториальных координат объекта геоцентрические экваториальные координаты какой-нибудь станции на земной поверхности, мы получим экваториальные координаты относительно станции; исправленные за aberrацию и сумерки, последние дают *видимое* направление на объект в экваториальной системе с началом в станции наблюдения.

Прежде чем относить положение небесного объекта к месту станции, необходимо применить такие повороты осей, которые приведут геоцентрические экваториальные координаты к среднему равноденствию нужной даты. Если θ — местное звездное время, а ϕ — географическая широта, то местные геоцентрические эквато-

риальные координаты равны

$$\begin{aligned}x' &= \rho' \cos \varphi \cos \theta, \\y' &= \rho' \cos \varphi \sin \theta, \\z' &= \rho' \sin \varphi,\end{aligned}\tag{3.5.3}$$

где ρ' — радиус сферической Земли, равный примерно 0,00004266 а. е. Если нужны более точные координаты станции, то их можно рассчитать на основе международного эллипсоида, заданного экваториальным радиусом $a = 6378,388$ км и сжатием $f = 1/297$. Эксцентриситет e дается соотношением $e^2 = f(2 - f)$, а географическая широта φ определяется как угол между экватором и нормалью к эллипсоиду. Если h есть высота над эллипсоидом, то координаты определяются с большой точностью по следующим формулам:

$$\begin{aligned}d &= (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \\x' &= (ad + h) \cos \varphi \cos \theta, \\y' &= (ad + h) \cos \varphi \sin \theta, \\z' &= [ad(1 - e^2) + h] \sin \varphi.\end{aligned}\tag{3.5.4}$$

3.6. Прецессия и нутация

Описание явлений прецессии обычно относится к сферической астрономии, а не к небесной механике. Однако в учебниках по астрономии основные положения иногда излагаются недостаточно корректно, и по этой причине, равно как и для удобства читателя-неастроно-ма, которому, возможно, придется столкнуться с вопросами орбит, включение правильного краткого объясне-ния прецессии представляется оправданным. За большиими подробностями отсылаем читателя к работам Ньюкома [3] и [7] и к Ежегоднику [8]¹.

¹ Читатель, желающий более подробно ознакомиться с вопросами прецессии и нутации, может обратиться к книгам: С. Н. Бларажко, Курс сферической астрономии, М., Гостехиздат, 1948; К. А. Куликов, Фундаментальные постоянные астрономии, М., Гостехиздат, 1956; К. А. Куликов, Курс сферической астрономии, М., Физматгиз, 1961.—Прим. ред.

Эклиптика перемещается под действием притяжения планет; небесный экватор перемещается из-за моментов вращения, действующих на сжатую и вращающуюся Землю со стороны Солнца и Луны.

Под плоскостью эклиптики понимается плоскость, в которой Земля движется вокруг Солнца, с учетом существования небольших колебаний центра Земли, перпендикулярных этой плоскости и вызванных притяжением Луны и планет. Такие движения, порядка десятой доли секунды дуги, являются в основном результатом движения Земли относительно центра масс системы Земля—Луна. Истинная геоцентрическая широта Солнца, таким образом, редко равняется точно нулю. Притяжение других планет, кроме того что оно вносит вклад в перпендикулярные к плоскости эклиптики колебания, заставляет также вращаться плоскость эклиптики почти равномерно со скоростью примерно $47''$ в столетие. Это медленное вращение называется *прецессией от планет*. Поскольку орбита Земли относительно Солнца в действительности не лежит в одной плоскости, то понятие «плоскость эклиптики», хотя оно и полезно, является абстракцией. По существу эклиптика есть средняя плоскость, определяемая на практике путем комбинации динамической теории и наблюдений видимого пути Солнца по небу. Выражение «средняя эклиптика» является излишним и ненужным.

Небесный экватор не является абстракцией того же рода, что и эклиптика. В любой момент существует мгновенная ось, относительно которой происходит вращение Земли в этот момент, и трудно относить различные наблюдения к чему-либо другому. Ось вращения Земли имеет сравнительно быстрое и сложное движение, которое воспроизводится небесным экватором и точкой истинного равноденствия, в которой экватор пересекает эклиптику; это крайне неподходящая система координат для динамических исследований. Как мы видели в гл. 2, гравитационный потенциал Земли включает члены с осесимметричными гармониками, наиболее важными из которых являются члены степени -1 и -3 . Поэтому Солнце и Луна вызывают появление моментов сил относительно осей, перпендикулярных к оси

вращения Земли. Как это было впервые показано Ньютона, такие моменты приводят к вращению земной оси в пространстве и, следовательно, к вращению небесного экватора. На практике движение оси вращения Земли разделяется на две части. Одна из них, *лунно-солнечная прецессия*, представляет собой обратное вращение оси с примерно постоянной скоростью $50''$ в год относительно оси, перпендикулярной к эклиптике (которая считается фиксированной). При этом ось вращения описывает конус с почти постоянным углом при вершине, равным наклонению эклиптики. Лунно-солнечная прецессия в сочетании с прецессией от планет дает то, что мы называем *общей прецессией*. Она вынуждает точку равноденствия совершать обратное движение вдоль эклиптики или экватора с почти постоянной скоростью около $50''$ в год, а наклонение — медленно уменьшаться с почти постоянной скоростью около $0'',47$ в год. Другая часть движения оси вращения Земли называется *нутацией* и включает колебания наклонения, а также колебания точки равноденствия из положения, которое она имела бы, если бы испытывала только влияние прецессии. Если эффекты нутации отсутствуют, то результирующие фиктивные экватор и равноденствие называются *средним экватором* и *средним равноденствием*. Их мгновенные положения в любой момент называются *средним экватором* и *средним равноденствием в эпоху*, в то время как их положение в начале Бесселевого года (когда средняя долгота Солнца, с учетом aberrации, равна точно 280°) называется средним равноденствием на начало года и записывается в виде «среднее равноденствие 1959,0» или «среднее равноденствие 1950,0». Как уже отмечалось, средний экватор и равноденствие произвольно выбранной эпохи определяют невращающиеся эклиптические и экваториальные оси, которые удобны для динамических исследований.

Нутация часто подразделяется на долгопериодические и короткопериодические члены; они возмущают экватор, а не эклиптику, и потому изменяют небесные долготы и наклонение эклиптики, но не небесные широты. Самый большой член в наклонении имеет амплитуда $9'',21$ и период около 19 лет, для долготы ампли-

туда наибольшего члена равна $17'',23$, а период тот же. Типичный короткопериодический член в долготе имеет амплитуду $0'',015$ и период около месяца.

На рис. 3 (см. [8]) Q_0 , E_0 и C_0 обозначают экватор, эклиптику и равноденствие в некоторую начальную эпоху t_0 , а Q , E и C — в момент t . Точка M является узлом

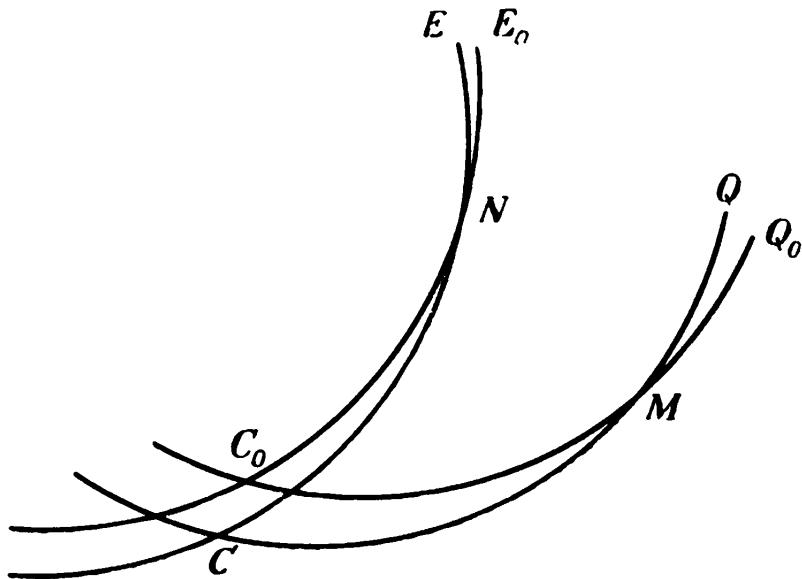


Рис. 3

двух экваторов, а N — узлом двух эклиптик; оба узла восходящие, если $t - t_0 > 0$. Приведенных ниже величин, взятых по Ньюкуму, достаточно, чтобы уточнить связь между эклиптиками, средними экваторами и равноденствиями для различных дат:

$$C_0M = 90^\circ - \zeta_0,$$

$$CM = 90^\circ + z,$$

$$\text{Угол } C_0MC = \theta,$$

$$\varepsilon = ECQ,$$

$$T = \text{время в тропических столетиях от } t_0 = 1900,0,$$

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 08'',26 - 46'',8645T - 0'',0059T^2 + 0'',00181T^3,$$

$$\zeta_0 = 2304'',25T + 0'',30T^2 + 0'',018T^3,$$

$$z = 2304'',25T + 1'',09T^2 + 0'',019T^3,$$

$$\theta = 2004'',68T - 0'',43T^2 - 0'',041T^3.$$

Влияние прецессии на экваториальные координаты может быть точно учтено следующим образом. Пусть экваториальные прямоугольные оси координат для эпохи 1900,0 обозначаются через OX_0 , OY_0 и OZ_0 . Через T тропических столетий экваториальные прямоугольные оси повернулись по часовой стрелке вокруг OZ_0 на угол ζ_0 , затем повернулись против часовой стрелки вокруг новой оси Y на угол θ , а затем повернулись вокруг новой оси Z по часовой стрелке на угол z ; после этих трех поворотов конечные направления определяются прямоугольными экваториальными осями OX , OY и OZ для момента T . Легко найти, что переход от осей OX_0 , OY_0 , OZ_0 к осям OX , OY , OZ определяется направляющими косинусами

$$\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \hline X_0 & egi - dh & egh + di & ef \\ Y_0 & -dgi - eh & -dgh + ei & -df \\ Z_0 & -fi & -fh & g \end{array},$$

где

$$\begin{aligned} d &= \sin \zeta_0, & f &= \sin \theta, & h &= \sin z; \\ e &= \cos \zeta_0, & g &= \cos \theta, & i &= \cos z. \end{aligned}$$

Ньюком дал также следующие величины:

$$\Pi = 173^\circ 57',06 + 54',77T,$$

$$\pi = 0'',4711 - 0'',0007T,$$

$$p = 50'',2564 + 0'',0222T,$$

$$m = 46'',0850 + 0'',0279T,$$

где Π — долгота восходящего узла эклиптики между $1900+T+dt$ и $1900+T$, отсчитываемая от среднего равноденствия; π — годичная скорость изменения наклонения подвижной эклиптики к эклиптике $1900+T$; p — годовая общая прецессия $CN-C_0N$ по долготе и m — годовая общая прецессия $CM-C_0M$ по прямому восхождению. Отсюда влияние прецессии на эклиптические координаты между эпохой t_0 и другой датой t может

быть найдено следующим образом. Пусть $\bar{\Pi}$, $\bar{\pi}$ и \bar{p} обозначают величины Π , π и p в момент, находящийся точно посередине между датами t_0 и t ; пусть величина

$$a = \bar{p}(t - t_0) = CN - C_0N$$

обозначает полную общую прецессию долготы в промежутке от t_0 до t (время дано в годах); пусть величина

$$b = \bar{\pi}(t - t_0)$$

обозначает наклонение C_0NC эклиптики E в момент t по отношению к эклиптике E_0 в момент t_0 ; пусть, наконец,

$$c_0 = 180^\circ - \bar{\Pi} + \frac{a}{2},$$

а

$$c = 180^\circ - \bar{\Pi} - \frac{a}{2}.$$

Предположим, что оси эклиптической системы координат OX_0 , OY_0 и OZ_0 соответствуют эклиптике и среднему равноденствию в момент t_0 . За время $t - t_0$ лет эти оси примут положение, которое можно считать результатом поворота вокруг оси OZ_0 по часовой стрелке на угол c_0 , затем на угол b по часовой стрелке вокруг новой оси X и затем на угол c против часовой стрелки вокруг новой оси Z ; конечными направлениями после этих трех поворотов будут направления, совпадающие с эклиптическими прямоугольными осями OX , OY , OZ , которые соответствуют эклиптике и среднему равноденствию в момент t . Связь между этими двумя системами осей определяется направляющими косинусами:

$$\begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ \hline X_0 & ADE + BF & ADF - BE & AC \\ Y_0 & BDE - AF & BDF + AE & BC \\ Z_0 & -CE & -CF & D \end{array}.$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sin c_0, & C &= \sin b, & E &= \sin c, \\ B &= \cos c_0, & D &= \cos b, & F &= \cos c. \end{aligned}$$

Читатель может выполнить самостоятельно этот поучительный пример, чтобы вычислить угловое расстояние между средним равноденствием 1900,0 и средним равноденствием 2150,0, сначала рассматривая поворот экваториальных осей, а затем — эклиптических осей. С помощью первого метода он найдет величину $12750'',98$, а с помощью второго $12571''04$, что указывает на очень хорошее согласие между собой различных постоянных прецессии за период в два с половиной столетия, выведенных Ньюкомом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Newcomb S., The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy, American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897, Govt. Print. Office, Washington, 1895, p. 188.
2. Newcomb S., Tables of the Motion of the Earth on its Axis and Around the Sun, Astron. Papers Amer. Ephemeris Nautical Almanac, 6, 7 (1898).
3. Newcomb S., A New Determination of the Precessional Constant with the Resulting Precessional Motion, Astron. Papers Amer. Ephemeris Nautical Almanac, 8, 73 (1898).
4. См. ссылку [1]. Ньюком должен был вместе члена $4606.''36T$ писать $4606.''46T$, так как он пользовался величиной юлианского столетия, а не тропического. Однако он мог не брать этой величины и, хотя его уравнение было ошибочно, результат не ухудшился бы.
5. Plummer H. C., Dynamical Astronomy, The Univ. Press, Cambridge, 1918.
6. Crawford R. T., Determination of Orbits of Comets and Asteroids, McGraw-Hill, New York, 1930.
7. Newcomb S., Compendium of Spherical Astronomy, MacMillan, New York, 1906.
8. The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the Year 1940, H. M. Stationery Office, London, 1938, p. 812—822.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДИНАМИКА. ВАРИАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ. ОБЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

4.1. Лагранжевы уравнения движения

Эту главу мы начнем с краткого изложения некоторых общих принципов динамики, имеющих применения в астрономии. За полным и строгим изложением классической динамики мы отсылаем читателя к «Аналитической динамике» Уиттекера [1]. Сначала мы получим уравнения движения Лагранжа. Пусть прямоугольные координаты системы N частиц будут x_i, y_i, z_i , где $i=1, 2, \dots, N$. Пусть они являются функциями n независимых величин q_j , $j=1, 2, \dots, n$ и, возможно, времени t . Эти величины q называются *обобщенными координатами*. Говорят, что система, в которой возможны произвольные бесконечно малые изменения координат q , называется *голономной*. Будем рассматривать только такие системы. Производная по времени координаты x произвольной частицы массы m , находящейся в точке (x, y, z) , равна

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial x}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial x}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r}}{\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial q_r}} = \frac{\partial x}{\partial q_r}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = m \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_r} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_r} + m\dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_r} = \\
 &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_r} + m\dot{x} \left[\sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 x}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_r} \right] = \\
 &= m\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_r} + m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r};
 \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = X \frac{\partial x}{\partial q_r} + \frac{\partial}{\partial q_r} \frac{m}{2} \dot{x}^2,$$

поскольку $\ddot{m\dot{x}} = X$, где X есть x -я компонента силы, действующей на m . Обозначим через T кинетическую энергию всей системы

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

и просуммируем выведенное выше уравнение по всем координатам и частицам. Легко получить

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_{i=1}^N \left[X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right].$$

Это уравнение можно записать также в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r, \quad (4.1.1)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n).$$

Величины Q имеют простой смысл. Если обобщенная координата q_r возрастет на δq_r , то работа, совершенная над системой всеми силами, равна

$$\delta q_r \sum_{i=1}^n \left[X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right] = Q_r \delta q_r.$$

Следовательно, в случае общего перемещения ($\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$) работа, совершаемая над системой всеми силами, равна

$$dW = \sum_1^n Q_r \delta q_r.$$

При суммировании можно пренебречь силами притяжения и отталкивания между частицами данной системы, поскольку эти силы не совершают работы и, следовательно, не изменяют dW . В отличие от них силы, действующие на систему и совершающие работу, называются *внешними* силами. Таким образом, $Q_r \delta q_r$ есть работа, совершаемая внешними силами на перемещении, которое соответствует изменению одной обобщенной координаты от q_r до $q_r + \delta q_r$; при этом другие обобщенные координаты не меняются. В общем случае Q_r является функцией всех q_i и t .

Уравнения (4.1.1) есть наиболее общая форма уравнений Лагранжа для голономных систем; Q_r называется компонентой *обобщенной силы*, действующей на систему и соответствующей обобщенной координате q_r .

Если внешние силы таковы, что работа, которую они совершают при переходе динамической системы из одного состояния в другое, зависит только от начального и конечного состояний и не зависит от пути, то говорят, что силы являются *консервативными*. Мы видели, что силы тяготения являются силами именно такого типа. Тогда существует функция $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$, называемая *потенциальной энергией* состояния, такая, что $Q_r = -(\partial V / \partial q_r)$, где V — работа, совершаемая силами при переходе из состояния q_1, \dots, q_n в некоторое стандартное состояние, аналогичное состоянию на бесконечности. Следовательно, если мы введем функцию

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = T - V,$$

называемую *кинетическим потенциалом*, то уравнение (4.1.1) может быть для консервативных систем записано в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.1.2)$$

Уравнения Лагранжа всегда, когда существует функция V , такая, что обобщенные компоненты силы Q_r , равны $-(\partial V / \partial q_r)$ (если даже мы не в состоянии интерпретировать V как потенциальную энергию), принимают форму уравнений (4.1.2).

Величина $\partial L / \partial \dot{q}_r$, называется *обобщенным импульсом*, соответствующим координате q_r . Если координата q_s не входит явно в L , хотя \dot{q}_s входит явно, тогда q_s называется *циклической координатой*, и из уравнения (4.1.2) следует, что соответствующий импульс $\partial L / \partial \dot{q}_s = \beta_s$ есть величина постоянная во время движения.

4.2. Интеграл энергии

Если t не входит явно в L , то

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{r=1}^n \left(\ddot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial q_r} \right) = \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\ddot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \dot{q}_r \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{r=1}^n \left(\dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right), \end{aligned}$$

так что

$$\sum_{r=1}^n \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = h \quad (4.2.1)$$

есть величина постоянная во время движения. Это уравнение является интегралом системы (4.1.2) и называется *интегралом энергии*. Если система является «натуральной», для которой $L = T - V$, где T — однородная квадратичная форма скоростей q_s , а V — функция только q_i , то

$$h = \sum_{r=1}^n \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - T + V = \\
 &= 2T - T + V = T + V
 \end{aligned}$$

и сумма кинетической и потенциальной энергии есть величина постоянная.

4.3. Пример: эйлеровы углы. Влияние нутации на время

Выбрав начало в центре масс Земли, возьмем не врачающуюся прямоугольную правую систему эклиптических координат, в которой ось OZ направлена к северному полюсу эклиптики, а ось OX — к среднему весеннему равноденствию 1900,0. Связем с вращающейся Землей другую правую систему координат с тем же началом и осями x, y, z , где ось Oz направлена на север вдоль земной оси вращения, ось Ox лежит в плоскости гринвичского меридиана. Тогда положение Земли относительно осей X, Y, Z определяется тремя эйлеровыми углами θ, ϕ и ψ , где θ — угол ZOz , ϕ — угол между плоскостями ZOX и ZOz , а ψ — угол между плоскостями ZOz и zOx . Эти углы можно рассматривать как лагранжевые координаты. Пусть C — момент инерции Земли относительно главной оси инерции Oz и пусть A обозначает момент инерции относительно любой экваториальной оси, также являющейся главной осью инерции. Угловая скорость $\dot{\theta}$ направлена по нормали к плоскости ZOz . Угловая скорость $\dot{\phi}$ имеет компоненту $\dot{\phi} \cos \theta$, направленную вдоль Oz и компоненту $\dot{\phi} \sin \theta$ вдоль экваториальной оси в плоскости ZOz . Угловая скорость $\dot{\psi}$ направлена вдоль оси Oz . Следовательно, кинетическая энергия движения Земли относительно ее центра масс равна

$$T = \frac{1}{2} C (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta).$$

Поскольку Земля совершает также и поступательное движение, то выражение для ее полной энергии будет содержать член $\frac{1}{2} M v^2$, где M — ее масса, а v — скорость

центра O в какой-либо системе координат, движущейся без ускорения. Однако ни сами эйлеровы углы, ни их производные не войдут в этот дополнительный член в T .

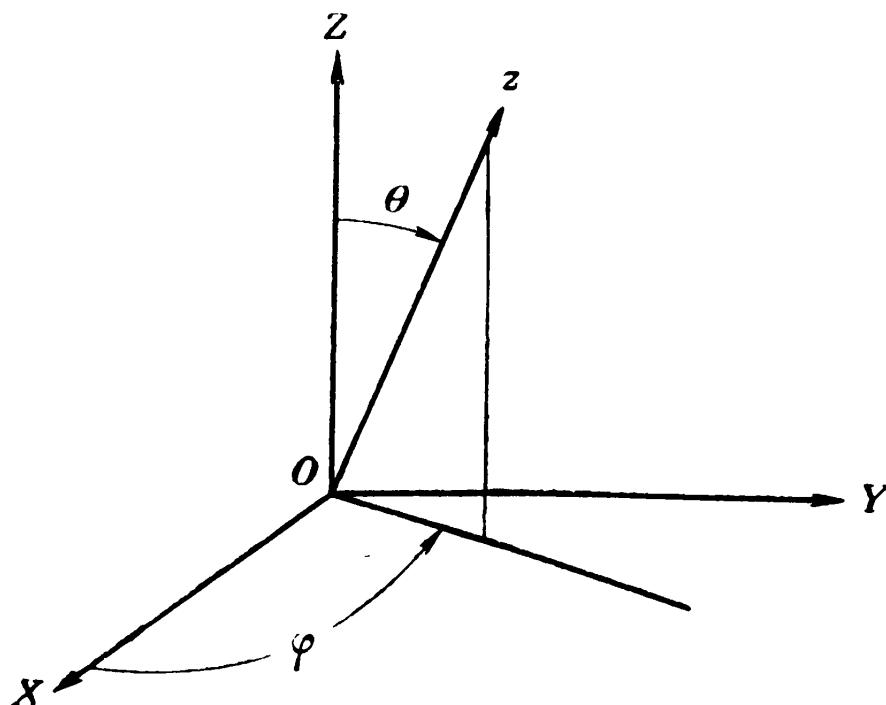


Рис. 4

Далее, компонента Q_ψ обобщенной силы, соответствующая координате ψ , должна быть равна нулю, поскольку при изменении ψ не совершается работы. Таким образом, ψ — циклическая координата, и из уравнения (4.1.2) имеем:

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \omega, \quad (4.3.1)$$

где ω — величина постоянная во все время движения.

Солнце и Луна оказывают воздействие на сферические гармоники гравитационного потенциала Земли, что приводит к появлению компонент Q_θ и Q_φ обобщенной силы, вызывающих движения оси Oz , — нутацию и лунно-солнечную прецессию. Эти движения здесь выводиться не будут; согласно [2] они определяются выражениями

$$\varphi = \varphi_m + \Phi$$

и

$$\theta = \theta_m + \Theta,$$

где $90^\circ - \varphi_m$ — полная лунно-солнечная прецессия относительно фиксированной эклиптики 1900,0 и θ_m — наклонение среднего экватора к эклиптике в эпоху 1900,0. Углы Φ и Θ называются соответственно нутацией по долготе и нутацией по наклонению. Они состоят из периодических членов, наибольший из которых в Φ равен $17'',23\sin\Omega$, а в $\Theta = 9'',21\cos\Omega$ с периодами 18,613 лет, где Ω — долгота среднего восходящего узла Луны. Наклонение θ_m равно $\theta_0 + 0'',0607 T^2$, где T берется в юлианских столетиях, отсчитываемых от 1900,0; таким образом, T возрастает только на $6''$ за 1000 лет.

При помощи точного соотношения (4.3.1) интересно исследовать вызванную нутацией нерегулярность скорости возрастания гринвичского часового угла экваториальной звезды, не имеющей собственного движения. Ясно, что прямое восхождение звезды не может изменить общую природу нерегулярности, и мы для простоты будем считать, что звезда расположена на оси X . В момент, когда эйлеровы углы равны θ , φ и ψ , гринвичский часовой угол звезды $\gamma = \psi - \psi_0$, где ψ_0 есть величина ψ , соответствующая тем значениям θ и φ , при которых вращающаяся координата y становится равной нулю. Из соотношений между направляющими косинусами, связывающими системы X, Y, Z и x, y, z , имеем

$$\operatorname{tg} \psi_0 = -\sec \theta \operatorname{tg} \varphi.$$

В данном случае φ близко к 90° , а ψ к -90° , так что

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \psi_0) = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) \cos \theta$$

с точностью $0'',1$ для промежутков времени в пределах столетия

$$90^\circ + \psi_0 = (90^\circ - \varphi) \cos \theta.$$

Поэтому с учетом (4.3.1) имеем с большой точностью

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_0 = \omega - \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi} \cos \theta + (90^\circ - \varphi) \dot{\theta} \sin \theta = \\ &= \omega + (90^\circ - \varphi_m) \dot{\Theta} \sin \theta_m - \Phi \dot{\Theta} \sin \theta_0,\end{aligned}$$

поскольку по существу $\theta = \theta_0 + \Theta$, а Θ меньше $10''$. Произведение $(90^\circ - \varphi_m) \sin \theta_m$ называется *общей прецессией по наклонению* и согласно [3] имеет величину

$$20'',047t - 4'',3 \cdot 10^{-5}t^2,$$

где t отсчитывается в тропических годах от 1900,0.

Интегрируя приведенное выше уравнение, получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \omega t + 6^s, 0 \cdot 10^{-5}(t \cos \Omega - 2,96 \sin \Omega) + \\ &+ 3^s,4 \cdot 10^{-6}(t - 1,48 \sin 2\Omega) + \text{члены более высокого} \\ &\quad \text{порядка.} \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Последнее уравнение показывает, что, несмотря на нутацию, часовой угол экваториальной звезды, не имеющей собственного движения, возрастает со скоростью, незначительно отличающейся от постоянной. Более точно, небольшое непостоянство скорости, вызванное нутацией, пренебрежимо мало по сравнению с нерегулярностями во вращении Земли, упомянутыми ранее и вызванными изменениями момента инерции Земли C .

Однако, если повторить предыдущий анализ для неэкваториальной звезды и не принимать во внимание нутацию, то мы уже не обнаружим равномерного увеличения часового угла. Далее, как показал Пламмер [2] из анализа формулы (4.3.1), истинное звездное время изменяется не с постоянной скоростью. Геометрически угол ψ точно на 90° меньше, чем гринвичское звездное время, отсчитываемое от точки равноденствия на истинном экваторе относительно фиксированной эклиптики 1900,0. Если учесть медленное перемещение эклиптики и если τ является обычным истинным гринвичским звездным временем, то

$$\tau = 90^\circ + \psi - \lambda.$$

Согласно [3] величина λ , называемая прецессией от планет в экваторе, равна

$$12'',47T - 2'',38T^2.$$

Отсюда, применяя (4.3.1), получаем

$$\dot{\tau} = \omega - \dot{\lambda} - (\dot{\varphi}_m + \dot{\Phi}) \cos(\theta_m + \Theta) =$$

$$= \omega - \dot{\lambda} - \dot{\Phi}_m \cos \theta_m + \dot{\Phi}_m \Theta \sin \theta_m - \dot{\Phi} \cos \theta_0,$$

где θ в последнем члене заменено на θ_0 . Ошибка от такой замены будет меньше $2 \cdot 10^{-5}$. Величина $-\dot{\Phi} \cos \theta_m - \dot{\lambda}$ называется в [3] общей годичной прецессией по прямому восхождению и обычно обозначается через m . Величина $-\dot{\Phi}_m \sin \theta_m$ обычно обозначается через n и равна примерно 10^{-4} ; поэтому член $-n\Theta$ периодичен и по величине меньше $0'',001$ в год, так что интеграл от этой величины меньше $0'',003$. После подстановки величины m согласно [3] и интегрирования находим

$$\tau = \tau_0 + \omega t + 3^s,0723t + 9^s,27 \cdot 10^{-6}t^2 - \Phi \cos \theta_0. \quad (4.3.3)$$

Таким образом, истинное звездное время, кроме вековых эффектов прецессии, содержит последний член в уравнении (4.3.3), наибольшая величина которого будет $1^s,2$, а максимальная периодическая составляющая имеет амплитуду $1^s,05$ с периодом 19 лет. Член $-\Phi \cos \theta$ называется нутацией по прямому восхождению и значения его приведены в Ежегоднике.

4.4. Гамильтонова форма уравнений движения

Пусть в голономной динамической системе, не обязательно консервативной, но имеющей кинетический потенциал, величины q_1, q_2, \dots, q_n обозначают обобщенные координаты, а $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ — кинетический потенциал, так что лагранжевы уравнения движения суть уравнения (4.1.2). Определим систему n новых переменных p уравнениями:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4.1)$$

Переменная p_r называется *обобщенным импульсом*. Из уравнений (4.1.2) следует, что

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4.2)$$

Уравнения (4.4.1) выражают p как функции q , t и \dot{q} и позволяют выразить \dot{q} в виде функций от q , p и t . Пусть δF — приращение любой функции F переменных q , \dot{q} и t или q , p и t , соответствующее малым изменениям аргументов (исключая время). Если q и \dot{q} изменяются на произвольные малые величины δq , и $\delta \dot{q}$, а δp — соответствующие изменения p согласно (4.4.1), где время t считается постоянным, то с учетом (4.4.1) и (4.4.2)

$$\begin{aligned} \delta \left(\sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - L \right) &= \sum_{r=1}^n (p_r \delta \dot{q}_r + \dot{q}_r \delta p_r - \\ &- \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r) = \sum_{r=1}^n (\dot{q}_r \delta p_r - \dot{p}_r \delta q_r). \end{aligned}$$

Это равенство справедливо для любых малых изменений δq , $\delta \dot{q}$, а следовательно, для любых малых изменений δq , δp . Обозначим через H величину $\sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - L$, которая считается зависящей от переменных q , p и t :

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) = \sum_{r=1}^n p_r \dot{q}_r - L. \quad (4.4.3)$$

Тогда, поскольку для любых малых изменений δq_r и δp_r ,

$$\delta H(q, p, t) = \sum_{r=1}^n (\dot{q}_r \delta p_r - \dot{p}_r \delta q_r),$$

то

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}. \quad (4.4.4)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

$2n$ дифференциальных уравнений (4.4.4) первого порядка называются *каноническими уравнениями* или *гамильтон*

точковыми уравнениями движения; H называется *функцией Гамильтона*.

Если кинетический потенциал L не содержит явно времени t , то t не может входить явно и в H , и тогда из (4.4.1) и (4.2.1) следует, что

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = h,$$

где h — величина постоянная во время движения. Таким образом, когда t не входит явно в H , тогда H является интегралом энергии для «натуральных» систем, где H есть сумма кинетической и потенциальной энергий. В общем случае, однако, единственный путь получения H — это использование уравнения (4.4.3).

4.5. Контактные преобразования

Если $2n$ переменных $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$, являющиеся функциями $2n$ переменных $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, таковы, что выражение

$$\sum_{r=1}^n (p_r dq_r - P_r dQ_r),$$

где dQ и P выражены в зависимости от q , p и их дифференциалов, является полным дифференциалом некоторой функции W' переменных q , p или q , Q , тогда преобразование q , p в Q , P называется *контактным*. Если Q являются функциями только q , то преобразование называется *расширенным точечным преобразованием*. W' может также зависеть от времени t .

Пусть функция W' , выраженная в зависимости от q , Q и t , обозначается через $W(q, Q, t)$. Если равенство

$$\sum_r (p_r dq_r - P_r dQ_r) = dW(q, Q, t) \quad (4.5.1)$$

справедливо для всех вариаций dq и dQ , то отсюда следует

$$P_r = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_r}, \quad p_r = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q_r}, \quad (4.5.2)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

и уравнения (4.5.2) составляют $2n$ уравнений преобразования. Они позволяют выразить любые две из четырех систем переменных q, p, Q, P через две оставшиеся. Выражение для dW не содержит изменения t . Вообще говоря, равенство (4.5.1) не обязательно должно удовлетворяться для любых вариаций dq, dQ и, таким образом, условия (4.5.2) являются не необходимыми, а только достаточными для того, чтобы преобразование было контактным.

4.5.1. Бесконечно малые контактные преобразования

Ясно, что результат двух последовательных контактных преобразований есть снова контактное преобразование и что преобразование, обратное контактному преобразованию, также является контактным (например, переход от Q, P к q, p). Таким образом, контактные преобразования обладают свойством группы. Рассмотрим преобразование, в котором новые переменные Q, P отличаются от первоначальных переменных q, p на бесконечно малые величины

$$\begin{aligned} Q_r &= q_r + \varphi_r(q, p) \Delta t, \\ P_r &= p_r + \psi_r(q, p) \Delta t. \end{aligned} \tag{4.5.1.1}$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

Это преобразование будет контактным, если выражение

$$\sum_r (p_r dq_r - P_r dQ_r)$$

есть полный дифференциал некоторой функции W переменных q и p , или если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \sum_r p_r dq_r - \sum_r (p_r + \psi_r \Delta t) (dq_r + d\varphi_r \Delta t) &= \\ &= dW(q, p) \end{aligned}$$

и

$$\Delta t \sum_r (p_r d\varphi_r + \psi_r dq_r) = -dW(q, p).$$

Следовательно, dW должно содержать множитель Δt ; путем замены dW на $dU(q, p) \Delta t$ условию можно придать вид

$$\sum_r (p_r d\varphi_r + \psi_r dq_r) = -dU(q, p)$$

или

$$\begin{aligned} \sum_r (\psi_r dq_r - \varphi_r dp_r) &= -d(U + \sum_r p_r \varphi_r) = \\ &= -dK(q, p), \end{aligned}$$

где

$$K = U + \sum_r p_r \varphi_r.$$

Следовательно, условие того, что преобразование является контактным, состоит в том, что существует некоторая функция $K(q, p)$ такая, что

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{\partial K}{\partial p_r}, \\ \psi_r &= -\frac{\partial K}{\partial q_r}. \end{aligned} \tag{4.5.1.2}$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} Q_r &= q_r + \dot{q}_r \Delta t, \\ P_r &= p_r + \dot{p}_r \Delta t, \\ (r) &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

состоящее в переходе от переменных q и p в некоторый момент t к их значениям Q и P через промежуток времени Δt . Если переменные удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{q}_r &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_r}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_r}, \\ (r &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}$$

то из (4.5.1.1) и (4.5.1.2) ясно, что преобразование является бесконечно малым контактным преобразованием с $\varphi_r = \dot{q}_r$ и $\psi_r = \dot{p}_r$. В силу группового свойства преобразование начальных значений q, p в их величины в любой последующий момент времени является тоже контактным преобразованием, поэтому вся эволюция гамильтоновых систем эквивалентна последовательной эволюции конечных контактных преобразований.

4.5.2. Преобразование динамических систем

За строгим доказательством следующей теоремы мы отсылаем читателя к книге Уиттекера [4]. Если переменные (q, p) , удовлетворяющие уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{q}_r &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \\ (r &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\tag{4.5.2.1}$$

заменить с помощью контактного преобразования

$$\begin{aligned}P_r &= -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_r}, \\ p_r &= \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q_r}, \\ (r &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\tag{4.5.2.2}$$

новыми переменными (Q, P) , то полученные таким образом переменные будут удовлетворять новым уравнениям в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned}\dot{Q}_r &= \frac{\partial K}{\partial P_r}, \\ \dot{P}_r &= -\frac{\partial K}{\partial Q_r}, \\ (r &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\tag{4.5.2.3}$$

где

$$K = H + \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t}.\tag{4.5.2.4}$$

При этом предполагается, что новая функция Гамильтона выражена в зависимости от переменных (Q, P, t) .

4.5.3. Дифференциальное уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби

Для любой динамической системы, которая может быть записана в гамильтоновой форме, интегрирование дифференциальных уравнений движения можно свести к нахождению решения уравнения в частных производных. Для этого мы ищем функцию преобразования $W(q, Q, t)$, переводящую переменные q и p в такие Q и P , которые являются постоянными, не зависящими от времени. Если такая функция может быть найдена, то $2n$ уравнений (4.5.2.2.) определяют связь q, p с Q, P и t и, таким образом, дадут решение динамической задачи через квадратуры. Уравнения (4.5.2.2) являются алгебраическими, а не дифференциальными уравнениями. Для того чтобы Q и P были постоянными во время движения, \dot{Q} и \dot{P} должны быть нулями, и из (4.5.2.4) следует, что достаточным условием для этого является равенство нулю функции K . Поскольку из (4.5.2.2) $p_r = \partial W(q, Q, t)/\partial q_r$, то это условие можно записать в виде

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0,\tag{4.5.3.1}$$

где первоначальная функция Гамильтона есть $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$ и где W — функция от переменных $(q_1, \dots, q_n, Q_1, \dots, Q_n, t)$. Уравнение (4.5.3.1)

называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Предположим, что может быть найдено решение W уравнения (4.5.3.1), выражающее W как функцию (q_1, \dots, q_n, t) и n произвольных постоянных a_1, a_2, \dots, a_n . Тогда эта функция служит решением динамической задачи, поскольку a могут рассматриваться как Q и, если обозначить P через постоянные $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то $2n$ уравнений (4.5.2.2), а именно

$$-\beta_r = \frac{\partial W(q, a, t)}{\partial a_r} \quad (4.5.3.2)$$

и

$$p_r = \frac{\partial W(q, a, t)}{\partial q_r}$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

дают q и p в конечном виде в зависимости от $2n$ канонических постоянных $(a_1, a_2, \dots, a_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и времени.

В специальном случае, когда время t не входит явно в H , величина H есть постоянная, равная h , и если система «натуральная», то H равно сумме кинетической и потенциальной энергий. Положим $h=a_1$ и $W=W'(q_1, \dots, q_n)$, где W' не содержит явно t . Тогда уравнение (4.5.3.1) принимает вид:

$$H\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}\right) = a_1, \quad (4.5.3.3)$$

что является специальной формой уравнения Гамильтона—Якоби. Если найдено какое-либо решение W' , где W' — функция q , но не t , и содержит $n-1$ произвольных постоянных (a_2, a_3, \dots, a_n) , кроме a_1 , то решение динамической задачи определяется уравнениями, выводимыми из (4.5.3.2),

$$p_r = \frac{\partial W'(q, a, t)}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

$$t - \beta_1 = \frac{\partial W'(q, a, t)}{\partial a_1}, \quad (4.5.3.4)$$

$$-\beta_r = \frac{\partial W'}{\partial a_r} \quad (r = 2, 3, \dots, n).$$

4.5.3.1. Задача

Если $n=1$ и функция Гамильтона равна $p^2/2$, найдите $W'(q, Q)$ и $W(q, Q, t)$ методами разд. 4.5.3. Каковы будут уравнения, соответствующие уравнениям (4.5.2.2) или (4.5.3.2), определяющим контактное преобразование? Каковы будут уравнения, выражающие зависимость Q, P от q, p, t ?

Выпишите уравнения Гамильтона и отсюда найдите \dot{p} и \dot{q} . Из основных соотношений дифференциального исчисления

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial P}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

найдите \dot{P} и \dot{Q} . Будут ли P и Q постоянными?

По $W(q, Q, t)$ найдите $K(Q, P, t)$ из (4.5.2.4). Определите \dot{Q}, \dot{P} при помощи уравнений (4.5.2.3).

Покажите, что

$$pdq - PdQ = dW(q, Q, t),$$

используя уже найденное выражение W .

4.5.4. Возмущения

Предположим, что динамические переменные $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона:

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r},$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r},$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

где

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + H_1(q, p, t),$$

и что уравнение Гамильтона — Якоби, соответствующее H_0 ,

$$H_0\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (4.5.4.1)$$

или, если t не входит явно в H_0 , уравнение

$$H_0\left(q_1, \dots, q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}\right) = a_1, \quad (4.5.4.2)$$

уже решено. Тогда, по теореме разд. 4.5.2, функция $W(q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n, t)$ определяет контактное преобразование динамических переменных q, p в новые динамические переменные α, β , которые удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{\alpha}_r = \frac{\partial K}{\partial \beta_r},$$

$$\dot{\beta}_r = -\frac{\partial K}{\partial \alpha_r},$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

где

$$K = H_0 + H_1 + \frac{\partial W(q, \alpha, t)}{\partial t} = H_1,$$

поскольку W удовлетворяет уравнению (4.5.4.1). Предполагается, что здесь функция H_1 выражена в зависимости от α, β и времени при помощи уравнений (4.5.3.2) и (4.5.3.4).

Таким образом, канонические постоянные, появляющиеся при решении уравнения Гамильтона—Якоби, обладают важными и специальными свойствами. Предположим, что уравнение Гамильтона—Якоби (4.5.3.1) или (4.5.3.3.), соответствующее некоторой функции Гамильтона $H_0(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$, называемой *невозмущенным гамильтонианом*, решено и что появившиеся при этом канонические постоянные будут $(a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$. Решение задачи с H_0 , называемое *не-*

возмущенным решением, будет иметь форму (4.5.3.2) или (4.5.3.4), где q и p выражены как функции α , β и времени. Тогда можно это же самое решение рассматривать как решение некоторой другой динамической задачи, функция Гамильтона которой

$$H(q, p, t) = H_0(q, p, t) + H_1(q, p, t)$$

и которая имеет то же самое число степеней свободы, при условии, что α и β уже не рассматриваются более как постоянные, а считаются новыми динамическими переменными, которые удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_r &= \frac{\partial H_1}{\partial \beta_r}, \\ \dot{\beta}_r &= -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_r} \quad (4.5.4.3) \\ (r &= 1, 2, \dots, n).\end{aligned}$$

В уравнении (4.5.4.3.) H_1 должно рассматриваться как функция α , β , и t , получающихся в результате подстановки вместо q , p величин α , β и t . Гамильтониан H_1 называется *возмущающим гамильтонианом*, а решение задачи с H называется *возмущенным решением*.

4.5.4.1. Пример

Предположим, что для случая прямолинейного движения частицы единичной массы в бессиловом поле невозмущенный гамильтониан равен $\frac{1}{2} p^2$. Уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W'}{\partial q} \right)^2 = a.$$

Решением этого уравнения будет $W' = 2 \sqrt{aq}$. Поскольку система имеет всего одну степень свободы, нет необходимости приписывать α и β индексы. Следовательно, общее невозмущенное решение, определяемое уравнениями (4.5.3.4), имеет вид

$$p = \sqrt{2a}, \quad t - \beta = \frac{q}{\sqrt{2a}}.$$

Второе уравнение равносильно следующему:

$$q = \sqrt{2a}(t - \beta). \quad (4.5.4.11)$$

Ясно, что оно соответствует движению с постоянной скоростью $\sqrt{2a}$ вдоль прямой линии; β является значением t , когда $q=0$. Предположим теперь, что нас интересует случай движения, когда имеется восстанавливающая сила $-q$, действующая на частицу, так что $V=q^2/2$; поэтому кинетический потенциал будет

$$L = (\dot{q}^2 - q^2)/2,$$

и полный гамильтониан

$$H = p^2/2 + q^2/2.$$

Однако мы можем рассматривать возмущенное решение как решение, точно определяемое уравнением (4.5.4.11) при условии, что a и β теперь рассматриваются как динамические переменные, изменяющиеся в соответствии с (4.5.4.3), где возмущающий гамильтониан $H_1=q^2/2$ и выражен через a , β , t соотношением: $a(t-\beta)^2$. Уравнения имеют вид

$$\dot{a} = -2a(t - \beta),$$

$$\dot{\beta} = -(t - \beta)^2.$$

Легко найти, что эти уравнения имеют точное решение

$$a = a \cos^2(t - b),$$

$$\beta = t - \operatorname{tg}(t - b),$$

где a и b — постоянные. Таким образом, возмущенное решение имеет вид:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2a} \cos(t - b), \\ q &= \sqrt{2a} \sin(t - b), \end{aligned} \quad (4.5.4.12)$$

что соответствует простому гармоническому движению с периодом 2π , амплитудой $\sqrt{2a}$ и моментом b , соответствующим прохождению через начало координат. Конечно, возмущенное решение (4.5.4.12) могло бы быть найдено прямо из H ; легко проверить, что выражения (4.5.4.12) удовлетворяют уравнениям Гамильтона $\dot{q} = p$, $p = -q$.

4.5.4.2. Решение уравнений в виде рядов

В задачах, решаемых при помощи метода возмущений, уравнения (4.5.4.3) иногда могут быть решены методом последовательных приближений, в котором используется эффективная процедура, применяемая в небесной механике.

Пусть будет сделано такое преобразование, что все начальные значения величин α и β в момент t_0 равны нулю; обозначим новые переменные через (x_1, \dots, x_{2n}) . Тогда уравнения (4.5.4.3) примут вид

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{2n}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 2n),$$

где f — известные функции. Разложим f в ряд Тейлора в точке $(0, 0, \dots, 0, t)$; тогда

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\sum_{s=1}^{2n} x_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right)^j f_i(0, 0, \dots, 0, t).$$

Пусть

$$x_i = x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} + \dots, \quad (4.5.4.21)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 2n)$$

тогда

$$\dot{x}_i = \dot{x}_{i,1} + \dot{x}_{i,2} + \dot{x}_{i,3} + \dots$$

Следовательно, мы можем положить

$$\dot{x}_{i,1} = f_i(0, \dots, 0, t),$$

откуда

$$x_{i,1} = \int_{t_0}^t f_i(0, 0, \dots, 0, t) dt$$

могут быть получены как функции t для всех i от 1 до $2n$. Далее, можно положить

$$\dot{x}_{i,2} = \sum_{s=1}^{2n} \left(x_{s,1} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) f_i(0, 0, \dots, 0, t),$$

откуда

$$x_{i,2} = \int_{t_0}^t \dot{x}_{i,2}(t) dt$$

могут быть получены как функции времени t , поскольку все $x_{s,1}(t)$ уже известны.

Далее, положим

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,3} &= \sum_{s=1}^{2n} \left(x_{s,2} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) f_i(0, 0, \dots, 0, t) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\sum_{s=1}^{2n} x_{s,1} \frac{\partial}{\partial x_s} \right)^2 f_i(0, 0, \dots, 0, t), \end{aligned}$$

откуда

$$x_{i,3} = \int_{t_0}^t \dot{x}_{i,3}(t) dt$$

и т. д.

В конечном счете формула (4.5.4.21) определяет $x_i(t)$ в виде ряда. Отметим, что если каждая функция f_i имеет вид

$$c_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, t),$$

то $x_{i,s}$ является однородной функцией степени s относительно всех c .

4.5.5. Задача n тел

Как мы видели, задача двух тел может быть точно решена в элементарных функциях. В общем случае, когда $n > 2$, задача n тел не может быть решена в таком

виде. В астрономии задача *n* тел, имеющая большой исторический и значительный практический интерес, является задачей о движении планет солнечной системы, для которой описанный выше метод возмущений дает решение с большой степенью точности. За более полным и общим осуждением динамической задачи *n* тел мы отсылаем читателя к книге «Теория планет» Броуна и Шука [5].

Предположим, что мы интересуемся движением какой-либо планеты с массой m . Возьмем невращающиеся оси ξ, η, ζ с началом в центре масс солнечной системы и параллельные им гелиоцентрические оси x, y, z . Обозначения для координат и масс различных тел приведены в табл. 3. Обозначим через r гелиоцентрическое расстояние планеты m , через ρ_i — гелиоцентрическое расстояние *i*-й планеты, а через Δ_i — расстояние *i*-й планеты от планеты m . Тогда, пользуясь ньютоновскими уравнениями движения и законом тяготения, получаем

$$\ddot{\xi} = -\frac{xk^2}{r^3} - k^2 \sum_i m_i \frac{x - x_i}{\Delta_i^3},$$

$$\ddot{\xi}_s = \frac{mxk^2}{r^3} + k^2 \sum_i m_i \frac{x_i}{\rho_i^3};$$

но $x = \xi - \xi_s$, поэтому

Таблица 3

Координаты и массы различных тел

Объект	Масса	Координаты
Изучаемая планета	m	x, y, z — относительно Солнца ξ, η, ζ — относительно центра масс солнечной системы
Другие планеты	m_i	x_i, y_i, z_i — относительно Солнца ($i = 1, 2, \dots, n - 2$)
Солнце	1	ξ_s, η_s, ζ_s — относительно центра масс солнечной системы

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} - \ddot{\xi}_s = -\frac{\mu x}{r^3} - k^2 \sum_i m_i \left[\frac{x - x_i}{\Delta_i^3} + \frac{x_i}{\rho_i^3} \right]. \quad (4.5.5.1)$$

Аналогичные уравнения будут для y и z . В этих уравнениях

$$\begin{aligned} \mu &= k^2(1+m), \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \rho_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \\ \Delta_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что уравнения (4.5.5.1) можно записать в форме

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ и т. д.,} \quad (4.5.5.2)$$

где потенциальная функция равна

$$V = -\frac{\mu}{r} - R,$$

причем

$$R = k^2 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left[\frac{1}{\Delta_i} - \frac{1}{\rho_i^3} (xx_i + yy_i + zz_i) \right] \quad (4.5.5.3)$$

называется *возмущающей функцией*. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что три уравнения (4.5.5.2) являются просто лагранжевыми уравнениями движения с кинетическим потенциалом

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V,$$

хотя функция V , поскольку она содержит зависящие от времени x_i , y_i , z_i , и не может быть интерпретирована как потенциальная энергия. На основе разд. 4.4 уравнения движения могут быть записаны в гамильтроновой форме

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x},$$

$$\dot{p}_x = - \frac{\partial H}{\partial x},$$

и аналогичные уравнения для y и z ; здесь

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\mu}{r} - R(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}). \quad (4.5.5.4)$$

В выражении для H координаты других планет x_i , y_i , z_i не являются обобщенными лагранжевыми координатами, а представляют собой параметры, зависящие от времени. Уравнение (4.5.5.4) может быть записано в виде

$$H = H_0(x, y, z, p_x, p_y, p_z) + H_1(x, y, z, t), \quad (4.5.5.5)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{\mu}{r},$$

$$H_1 = -R(x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}).$$

Все члены в R содержат множитель вида $m_i k^2$. Поскольку масса наибольшей планеты, а именно Юпитера, равна примерно 0,001, то этот множитель никогда не превышает 0,001 μ . При помощи уравнений (4.5.5.1) найдено, что наибольшее притяжение из планет на Землю оказывает Юпитер, причем это притяжение не более 1/17000 величины солнечного притяжения, в то время как наибольшее притяжение Юпитером Марса равно 1/6000 солнечного, Юпитером Сатурна 1/250 солнечного, а Сатурном Юпитера 1/2300 солнечного. Таким образом, мы должны ожидать, что влияние H_1 на движение планеты будет незначительным, и движение в основном будет определяться членом H_0 .

В принципе движения всех планет солнечной системы могли бы быть изучены одновременно. Для каждой планеты существует свой гамильтониан (4.5.5.5). При идеальном рассмотрении нужно решить задачи с H_0 для всех $n-1$ планет, а затем выписать $6(n-1)$ дифференциальных уравнений первого порядка, соответствующих уравнениям (4.5.4.3), правые части которых

будут содержать координаты всех планет. Затем необходимо решать эти уравнения совместно, используя для значений возмущенных координат во всех H_1 их приближенные величины из невозмущенных решений. Это даст приближенную зависимость от времени для α и β в виде членов, имеющих множителями m_i , в первой степени. В следующем приближении, в H_1 подставляются координаты, полученные из изменившихся значений α и β . При этом мы получаем зависимость величин α и β от времени в виде членов, имеющих множителями квадраты m_i и их произведения. Исторически рассматриваемая процедура иногда применялась аналитически к одной планете; координаты других планет, подставляемые в H_1 , на каждой стадии брались из имеющихся наблюдений. Последовательные приближения получались описанным выше методом без пересчета уже полученных членов. Выяснилось, что необходимо включить члены с квадратами масс, иногда даже с третьими степенями масс или, как в случае с Сатурном, еще более высокого порядка. Быстрое уменьшение порядка величины членов при таких расчетах является следствием малости отношения сил притяжения планет и притяжения Солнца. Для Земли невозмущенное решение даже в течение года может иметь точность около $10''$.

В дальнейшем нам необходимо получить решение задачи с $H = H_0$ в зависимости от канонических постоянных.

4.5.6. Невозмущенное решение

Если бы массы других планет были равны нулю, то возмущающая функция (4.5.5.3) обратилась бы в нуль и остался бы один гамильтониан H_0 . Движение стало бы движением того же простого типа, как в задаче двух тел, которое мы уже изучали, а в гелиоцентрических координатах было бы движением типа движения в задаче об одном притягивающем центре. Таким образом, нам известно, что невозмущенное решение представляет собой обычное эллиптическое движение с постоянными элементами орбиты. Однако мы должны найти решение задачи об одном притягивающем центре, решая уравнение Гамильтона—Якоби, чтобы найти канонические

постоянны и затем связать их с обычными элементами орбиты, описанными в гл. 3. Только тогда мы можем применить теорию возмущений. Фактически эта процедура не обязательна, поскольку уравнения для производных по времени от обычных элементов могут быть найдены методом вариации произвольных постоянных, что и было сделано до работ Гамильтона. Однако метод Гамильтона проще и имеет более глубокий динамический смысл.

Мы используем гелиоцентрическую систему координат, взяв за полярные координаты r, β, λ , где β , дополнение полярного расстояния до 90° , соответствует астрономической широте, а λ — астрономической долготе; последняя отсчитывается от оси Ox в плоскости xOy . Элемент расстояния ds в таких координатах равен

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \beta d\lambda^2 + r^2 d\beta^2;$$

скорость v дается выражением

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta + r^2 \dot{\beta}^2.$$

Изучение кинетического потенциала в предыдущем разделе показывает, что в данном случае

$$L = \left(\frac{1}{2} \right) v^2 + \frac{\mu}{r}$$

или

$$L_0 = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \beta + r^2 \dot{\beta}^2) + \mu \cdot \frac{1}{r};$$

поэтому

$$p_r = \dot{r}; \quad p_\lambda = r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \beta; \quad p_\beta = r^2 \dot{\beta} \quad (4.5.6.1)$$

и

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\lambda^2}{r^2 \cos^2 \beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r}. \quad (4.5.6.2)$$

Уравнение Гамильтона—Якоби (4.5.3.3) принимает вид

$$\left(\frac{\partial W'}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W'}{\partial \beta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \beta} \left(\frac{\partial W'}{\partial \lambda} \right)^2 = 2a_1 + 2 \frac{\mu}{r}$$

и может быть решено методом разделения переменных. При этом появятся три независимых a_i :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W'}{\partial r} &= \sqrt{2a_1 + 2\frac{\mu}{r} - \frac{a_2^2}{r^2}}, \\ \frac{\partial W'}{\partial \lambda} &= a_3, \\ \frac{\partial W'}{\partial \beta} &= \sqrt{a_2^2 - a_3^2 \sec^2 \beta},\end{aligned}$$

поэтому решение запишется в удобной форме

$$W' = \int_{r_0}^r \frac{L}{r} dr + \int_0^\beta N d\beta + a_3 \lambda, \quad (4.5.6.3)$$

где через L и N обозначено

$$\begin{aligned}L &= \sqrt{2r^2 a_1 + 2\mu r - a_2^2}, \\ N &= \sqrt{a_2^2 - a_3^2 \sec^2 \beta}\end{aligned}$$

и где нижние пределы интегрирования в (4.5.6.3) могут быть выбраны произвольно.

Таким образом, полное невозмущенное решение будет

$$\begin{aligned}t - \beta_1 &= \int_{r_0}^r \frac{r}{L} dr, \\ -\beta_2 &= - \int_{r_0}^r \frac{a_2}{rL} dr + \int_0^\beta \frac{a_2}{N} d\beta, \\ \lambda &= -\beta_3 + \int_0^\beta \frac{a_3}{N} \sec^2 \beta d\beta, \\ p_r &= \frac{L}{r},\end{aligned} \quad (4.5.6.4)$$

$$p_\beta = N,$$

$$p_\lambda = a_3,$$

где α и β — канонические постоянные. Теперь мы должны выразить их через обычные элементы орбиты. За r_0 возьмем перигелийное расстояние. Тогда, поскольку $t - \beta_1 = 0$ при $r = r_0$, то постоянная β_1 представляет собой момент T прохождения через перигелий. В *апсидальных точках* (перигелии или афелии) $\dot{r} = 0$ и из четвертого соотношения (4.5.6.4) имеем $L = 0$. Следовательно, мы можем записать L^2 , которое зависит от квадрата r , в виде

$$L^2 = 2r^2\alpha_1 + 2\mu r - \alpha_2^2 = -2\alpha_1(r - r_1)(r_2 - r),$$

где r_1 и r_2 — перигелийное и афелийное расстояния¹, равные $a(1-e)$ и $a(1+e)$ соответственно. Сравнивая коэффициенты, находим, что

$$\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2^2 = \mu a (1 - e^2),$$

так что α_1 — постоянная интеграла энергии, а α_2 — постоянная площадей, ранее обозначавшаяся через c и соответствующая орбитальному моменту количества движения. Обозначим отношение α_3/α_2 через $\cos i$, где i — постоянная. Тогда второй интеграл во втором выражении (4.5.6.4) можно вычислить подстановкой

$$\sin \beta = \sin i \sin u, \tag{4.5.6.5}$$

откуда

$$u = f(r) - \beta_2. \tag{4.5.6.6}$$

Третье уравнение системы может быть проинтегрировано подстановкой

$$\sin \psi = \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} \beta,$$

¹ Мы пользуемся различными обозначениями r_0 и r_1 для перигелийного расстояния, потому что r_0 в уравнениях (4.5.6.4) есть истинная постоянная, в то время как r_1 и r_2 — значения динамических переменных, зависящих от времени из-за воздействия возмущений на соответствующие канонические постоянные. Когда возмущения действуют на β_1 , эта величина не является моментом прохождения перигелия, а просто моментом, когда $r = r_0$.

что совместно с (4.5.6.5) дает

$$\operatorname{tg} \psi = \cos i \operatorname{tg} u$$

и приводит к равенству

$$\lambda = \psi - \beta_3$$

или

$$\operatorname{tg}(\lambda + \beta_3) = \cos i \operatorname{tg} u. \quad (4.5.6.7)$$

Формулы (4.5.6.5) и (4.5.6.7) показывают, что движение происходит в плоскости, имеющей наклонение i к основной плоскости xOy и что u является аргументом широты. Поскольку интеграл $f(r)$ обращается в нуль в перигелии, то $-\beta_2$ есть просто угол ω , отсчитываемый в плоскости орбиты от узла к перигелию, или угол $\tilde{\omega} - \Omega$. Формула (4.5.6.7) показывает, что $-\beta_3$ равно долготе узла Ω . Постоянная a_3 является постоянным моментом количества движения p_λ , соответствующим циклической координате λ , не входящей в кинетический потенциал, и может рассматриваться как z -компоненты (c_z) постоянной площадей a_2 . Таким образом, канонические постоянные принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\mu}{2a} & \beta_1 &= T, \\ a_2^2 &= \mu a (1 - e^2), & \beta_2 &= -\omega, \\ a_3^2 &= \mu a (1 - e^2) \cos^2 i, & \beta_3 &= -\Omega, \end{aligned} \quad (4.5.6.8)$$

откуда путем обращения найдем

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\mu}{2a_1}, \\ e &= \sqrt{1 + 2a_1 \frac{a_2^2}{\mu^2}}, \\ i &= \arccos \frac{a_3}{a_2}, \\ \Omega &= -\beta_3, \end{aligned} \quad (4.5.6.9)$$

$$\tilde{\omega} = -\beta_2 - \beta_3,$$

$$\varepsilon = -\beta_2 - \beta_3 + (t_0 - \beta_1) (-2\alpha_1)^{3/2} \mu^{-1}.$$

Подводя итоги, мы заключаем, что невозмущенное решение — это обычное эллиптическое движение вокруг Солнца, а канонические постоянные α и β связаны с обычными элементами орбиты материальной точки под действием неподвижного притягивающего центра формулами (4.5.6.8) и (4.5.6.9). Координаты r , β , λ являются функциями канонических постоянных и времени t , определяемые тремя первыми выражениями (4.5.6.4); таким образом,

$$\mu = k^2 (1 + m),$$

$$n^2 a^3 = \mu,$$

$$M = \varepsilon + n(t - t_0) - \tilde{\omega} = n(t - T),$$

$$M = E - e \sin E,$$

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (4.5.6.10)$$

$$u = \omega + \tilde{\omega} - \Omega,$$

$$\sin \beta = \sin i \sin u,$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tg} u.$$

4.5.7. Возмущенное решение.

Оскулирующие элементы

Согласно разд. 4.5.4 точное решение общей задачи, определяемой гамильтонианом H , выражается формулами (4.5.6.4). В этих формулах величины α и β рассматриваются не как постоянные, а как динамические переменные, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4.5.4.3) с возмущающим гамильтонианом $H_1 = -R$, где R — возмущающая функция;

$$\dot{\alpha}_s = -\frac{\partial R}{\partial \beta_s}, \quad \dot{\beta}_s = \frac{\partial R}{\partial \alpha_s}. \quad (4.5.7.1)$$

(s = 1, 2, 3)

Здесь R должна рассматриваться как функция от α , β и времени t . Переменные r определяются тремя последними выражениями (4.5.6.4), когда канонические параметры задаются их мгновенными значениями. Необходимо специально отметить, что формулы (4.5.6.1), связывающие r с координатами и их производными по времени, справедливы как для задачи с возмущениями, так и для задачи без возмущений, так что мгновенные значения скоростей r , β и λ могут быть получены при помощи формул (4.5.6.4) и (4.5.6.1) из мгновенных величин α и β или из мгновенных значений элементов орбиты, связанных с ними соотношениями (4.5.6.8) и (4.5.6.9). Это является следствием отсутствия r в возмущающем гамильтониане задачи n тел; поэтому половина уравнений системы уравнений Гамильтона $\dot{q}_s = -\partial H / \partial p_s$ общей задачи — те же самые, что и соответствующие уравнения

$$\dot{q}_s = -\partial H_0 / \partial p_s$$

в задаче без возмущений.

Отсюда следует, что процедура разд. 3.4, при помощи которой элементы орбиты были выведены из мгновенных значений координат и скоростей, дает элементы орбиты, которые связаны с каноническими параметрами посредством формул (4.5.6.8) и (4.5.6.9). Элементы, которые таким образом связаны с координатами и скоростями, называются *оскулирующими элементами*; хотя они и являются функциями времени, но в каждый момент времени они дают точные значения координат по (4.5.6.10) и точные значения скоростей по (4.5.6.4) и (4.5.6.1).

Ясно, что существует бесконечное множество различных систем эллиптических элементов, которые определяют точное положение тела в некоторый момент, но существует только одна система, которая дает точные значения скоростей и координат в любой момент;

это и есть система оскулирующих элементов. Если бы притяжение всех других планет, действующее на Солнце и рассматриваемую планету, обратилось бы в нуль в некоторый момент, называемый *моментом оскуляции*, и в дальнейшем оставалось бы равным нулю, то траекторией тела с этого момента был бы *оскулирующий эллипс*, определяемый оскулирующими элементами. Такой эллипс является абстракцией, полезной для предсказания и анализа движения; однако обычно он не представляет реальную орбиту в течение значительного интервала времени. Это делает *среднюю орбиту* с элементами, которые или постоянны, или зависят линейно от времени; средняя орбита может быть подобрана так, что она будет близко аппроксимировать реальную орбиту в течение длительного промежутка времени. Простой пример ясно показывает разницу между ними. Если бы рассматриваемая планета была наиболее удаленной от центра, а остальные находились бы вблизи Солнца, то средняя орбита, которая хорошо представляла бы движение удаленной планеты, соответствовала бы движению в задаче двух тел вокруг Солнца, масса которого равнялась бы сумме массы Солнца и всех близких к нему планет. Оскулирующий эллипс удаленной планеты в любой момент давал бы точное положение и скорость, но давал бы заметно меньшее среднее движение, чем правильное значение для средней орбиты, вследствие неучета притяжения близких к Солнцу планет. Следовательно, положение и скорость, предсказанные при помощи оскулирующего эллипса с заданным моментом оскуляции, отличались бы на все возрастающую величину от истинного положения и скорости удаленной планеты. Пример линейного осциллятора, приведенный в разд. 4.5.4.1, также показывает, что в динамике в общем случае невозмущенное движение может иметь мало общего с возмущенным движением и даже иметь совершенно другой характер.

Иногда оскулирующие элементы объекта заданы; тогда должен быть указан момент оскуляции, причем он может отличаться как от эпохи t_0 для средней долготы, так и от эпохи равноденствия, которая определяет систему координат.

4.5.8. Вариация элементов

Уравнения (4.5.7.1) определяют производные по времени от канонических параметров, но часто удобнее заменить их уравнениями, дающими производные по времени от обычных оскулирующих элементов. Обозначим эти элементы ($a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon$) через c_i ($i=1, 2, \dots, 6$). Тогда из уравнений (4.5.7.1) имеем

$$\begin{aligned}\dot{c}_i &= \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_i}{\partial a_s} \dot{a}_s + \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} \dot{\beta}_s \right) = \sum_{s=1}^3 \left(-\frac{\partial c_i}{\partial a_s} \frac{\partial R}{\partial \beta_s} + \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} \frac{\partial R}{\partial a_s} \right) = \\ &= \sum_{s=1}^3 \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial a_s} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial c_i}{\partial a_s} \sum_{s=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial \beta_s} = \\ &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial a_s} \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} - \frac{\partial c_j}{\partial \beta_s} \frac{\partial c_i}{\partial a_s} \right)\end{aligned}$$

или

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial R}{\partial c_j} \{c_j, c_i\}, \quad (4.5.8.1)$$

где

$$\{c_j, c_i\} = \sum_{s=1}^3 \left(\frac{\partial c_j}{\partial a_s} \frac{\partial c_i}{\partial \beta_s} - \frac{\partial c_j}{\partial \beta_s} \frac{\partial c_i}{\partial a_s} \right)$$

и называются скобками Пуассона. Здесь предполагается, что возмущающая функция выражена в зависимости от c_i и от времени. Скобки Пуассона вида $\{c_i, c_i\}$ всегда равны нулю и

$$\{c_i, c_j\} = -\{c_j, c_i\}.$$

Ввиду этого из всех многочисленных соотношений только пятнадцать могут быть независимыми и отличными от нуля. Фактически из формул (4.5.6.9) следует, что существует всего шесть не равных нулю соотношений

$$\{a, \varepsilon\} = -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}},$$

$$\{e, \tilde{\omega}\} = (\mu a)^{-1/2} \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\{e, \varepsilon\} = (\mu a)^{-1/2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi \cos \varphi,$$

$$\{i, \Omega\} = \frac{\sqrt{\mu a} \cos \varphi}{\sin i},$$

$$\{i, \tilde{\omega}\} = \operatorname{tg} \frac{i}{2} / \sqrt{\mu a} \cos \varphi,$$

$$\{i, \varepsilon\} = \operatorname{tg} \frac{i}{2} / \sqrt{\mu a} \cos \varphi,$$

а шесть других получаются перестановкой аргументов; в этих выражениях $\sin \varphi = e$.

Теперь из уравнений (4.5.8.1) и приведенных выражений для скобок Пуассона получаются следующие точные уравнения для производных по времени от обычных оскулирующих элементов:

$$\frac{da}{dt} = 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{de}{dt} = - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} - \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \varphi}{\sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{di}{dt} = - \frac{1}{\sin i \cos \varphi \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} i}{\cos \varphi \sqrt{\mu a}} \left(\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \quad (4.5.8.2)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\sin i \cos \varphi \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\cos \varphi \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial i},$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \varphi}{\sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{\cos \varphi \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial i}.$$

Уравнения (4.5.8.2) даны в форме, мало отличающейся от принятой в обычной теории планет, в которой возмущающая функция R вводится в виде ряда по косинусам, аргументы которых являются линейными функциями времени, содержащими множителями среднюю аномалию $nt + \epsilon - \omega$, где $n^2 a^3 = \mu$ и где t отсчитывается от эпохи t_0 средней долготы. Однако, поскольку вариация a связана с вариацией n , то частная производная $\partial R / \partial a$ содержит тригонометрические члены, каждый из которых множится на t . Присутствие таких членов в ϵ было бы неудобным. Поэтому предпочтительнее ввести в рассмотрение n , поскольку эта величина входит в аргументы указанных членов в качестве особой переменной. Тогда

$$\left(\frac{\partial R}{\partial n} \right)_{a=\text{const}} = t \left(\frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right)$$

и с учетом первого уравнения системы (4.5.8.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_{n=\text{const}} + \frac{dn}{da} \left(\frac{\partial R}{\partial n} \right)_{a=\text{const}} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_{n=\text{const}} + t \frac{dn}{da} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_{n=\text{const}} + t \frac{dn}{da} \frac{da}{dt} \frac{1}{2} \sqrt{\mu a}. \end{aligned}$$

При помощи последнего уравнения системы (4.5.8.2) имеем

$$\frac{d\epsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt} = -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left(\frac{\partial R}{\partial a} \right)_{n=\text{const}} + \dots, \quad (4.5.8.3)$$

где члены в правой части те же самые, что и в последнем уравнении (4.5.8.2), кроме первого члена, в котором n , входящее в аргументы R , не должно варьироваться при варьировании a , входящего в разложении R

в коэффициенты членов с косинусами. Если мы определим новый элемент ε' , где

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \frac{de}{dt} + t \frac{dn}{dt},$$

так что средняя долгота дается выражением

$$\varepsilon' + \int_{t_0}^t n dt = \varepsilon + n(t - t_0),$$

то тогда $\partial R/\partial e = \partial R/\partial \varepsilon'$. Система переменных $a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \varepsilon'$ используется гораздо чаще, чем система $a, e, i, \Omega, \varepsilon, \omega$ оскулирующих элементов в задаче n тел. Новые переменные удовлетворяют той же самой системе уравнений (4.5.8.2), что и первоначальные оскулирующие элементы, только ε в уравнениях (4.5.8.2) повсюду заменяется на ε' . Но при образовании $\partial R/\partial a$ в последнем уравнении системы (4.5.8.2) n в аргументах тригонометрических функций не варьируется, и третье соотношение (4.5.6.10), определяющее среднюю аномалию

$$M = \varepsilon + n(t - t_0) - \tilde{\omega}$$

заменено уравнением

$$M = \varepsilon' + l - \tilde{\omega}. \quad (4.5.6.10a)$$

В последнем уравнении l обозначает интеграл

$$\begin{aligned} l &= \int_{t_0}^t n dt = V\bar{\mu} \int_{t_0}^t a^{-\frac{3}{2}} dt = \\ &= V\bar{\mu} \int_{t_0}^t \left[a_0^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t a^{-\frac{5}{2}} \frac{da}{dt} dt \right] dt = \\ &= n_0(t - t_0) - 3 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{1}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon'} dt dt, \end{aligned}$$

где n_0 — значение n при $t=t_0$. Нетрудно показать, что введение новых переменных эквивалентно тому, что R рассматривается как функция $(a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \epsilon' + lt)$, когда образуются члены правой части новых уравнений (4.5.8.2).

4.5.9. Вариация элементов, вызванная возмущающими силами

Вариации элементов могут быть в явном виде выражены в зависимости от возмущающих сил. Пусть вместо уравнений (4.5.5.2) уравнения движения заданы в виде

$$\ddot{x} = -\frac{x}{r^3} + X \quad \text{и т. д.} \quad (4.5.9.1)$$

Ускорение, компоненты которого суть X, Y, Z , обычно называют *возмущающей силой*, хотя, более точно, оно является ускорением относительно Солнца в системе невращающихся гелиоцентрических координат. Если бы возмущающие силы отсутствовали, то решением динамической задачи было бы невозмущенное эллиптическое движение, описываемое формулами (4.5.6.10). В этом разделе нас не будет интересовать, имеет ли возмущающая сила потенциал, или нет. Разложим возмущающую силу на прямоугольные компоненты: S в направлении радиуса-вектора, T в плоскости орбиты перпендикулярно радиусу-вектору в направлении движения, и W перпендикулярно плоскости орбиты в направлении, относительно которого орбитальное движение положительно (против часовой стрелки. — Ред.). Сначала рассмотрим влияние компонент S и T , действующих на планету в течение бесконечно малого промежутка времени δt . Поскольку S — центральная компонента, то она не вызывает изменения постоянной площадей c . Эту постоянную меняет компонента T , и согласно закону Ньютона

$$\delta c = rT\delta t.$$

Поэтому

$$2crT\delta t = \delta c^2 = \mu(1-e^2)\delta a - 2\mu e a \delta e. \quad (4.5.9.2)$$

Приращение энергии равно

$$\delta \left(-\frac{\mu}{2a} \right) = (\dot{r}S + r\dot{\theta}T) \delta t = \left(\dot{r}S + cT \frac{1}{r} \right) \delta t$$

или

$$\frac{\mu}{2a^2} \delta a = \frac{\mu}{c} [eS \sin \omega + T(1 + e \cos \omega)] \delta t, \quad (4.5.9.3)$$

где для угловой скорости мы использовали обозначение $\dot{\theta}$ вместо $\dot{\omega}$ (поскольку возмущение может вызвать смещение перигелия); мы также использовали формулы для эллиптического движения, полученные в предыдущих главах. Если мы разрешим (4.5.9.2) и (4.5.9.3) относительно δa и δe , поделим на δt и положим $\delta t \rightarrow 0$, то мы получим

$$\dot{a} = 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [S \operatorname{tg} \varphi \sin \omega + T \sec \varphi (1 + e \cos \omega)],$$

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \varphi [S \sin \omega + T (\cos \omega + \cos E)],$$

где, как обычно, $\sin \varphi$ обозначает эксцентриситет e .

Силы S и T лежат в плоскости орбиты, поэтому они не могут изменить ориентацию плоскости орбиты в пространстве и, следовательно, не могут вызвать изменения наклонения i или изменения долготы Ω восходящего узла. Однако они изменяют углы ω и $\tilde{\omega}$, поскольку они изменяют a и e и потому вызывают изменение истинной аномалии, не обусловленное движением планеты. Рассматривая все величины, кроме μ , как переменные, проинферируем по времени полярное уравнение эллипса

$$c^2 = \mu r [1 + e \cos(u - \omega)],$$

где u — аргумент широты. Узел и наклонение не меняются, поэтому

$$\dot{u}r^2 = c$$

и

$$\dot{e} \cos \omega + \dot{\omega} e \sin \omega = 2cT \frac{1}{\mu} - \frac{c^2 \dot{r}}{r^2 \mu} + \frac{ec \sin \omega}{r^2}.$$

Поскольку элементы оскулирующие,

$$\dot{r} = \mu e \sin \omega \frac{1}{c},$$

откуда

$$\dot{e} \cos \omega + \dot{\omega} e \sin \omega = 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} T \sqrt{1 - e^2}.$$

Так как $d\Omega/dt = 0$, $\dot{\tilde{\omega}} = \dot{\omega}$. Используя уже полученное выражение для e , мы найдем после упрощения

$$\dot{\tilde{\omega}} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{\mu a}} [-aS \cos \omega + rT \sec^2 \varphi \sin \omega (2 + e \cos \omega)].$$

Элемент ε' входит посредством соотношения

$$\varepsilon' + \int_{t_0}^t n dt - \tilde{\omega} = M,$$

поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}' &= \dot{M} - n + \dot{\tilde{\omega}} = \\ &= (1 - e \cos E) \dot{E} - \dot{e} \sin E - n + \dot{\tilde{\omega}}, \end{aligned} \quad (4.5.9.4)$$

если подставить вместо \dot{M} величину, полученную дифференцированием уравнения Кеплера по времени. Дифференцируя выражение $r = a(1 - e \cos E)$ по времени, где все величины должны рассматриваться как функции времени, легко найти, что

$$\dot{a}(1 - e \cos E) - a\dot{e} \cos E + ae\dot{E} \sin E = \dot{r} = \frac{nae \sin E}{1 - e \cos E},$$

поскольку элементы оскулирующие. Разрешая последнее уравнение относительно \dot{E} и подставляя полученное выражение в (4.5.9.4), с учетом соотношения для эллипса

$$\sin \omega = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

из найденных выражений для \dot{a} , \dot{e} и $\dot{\tilde{\omega}}$, получим

$$\begin{aligned}\dot{e}' &= -\sqrt{1-e^2} \frac{1-e \cos E}{ae \sin w} \dot{a} + \dot{e} \operatorname{ctg} w \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} + \dot{\tilde{\omega}} = \\ &= -\frac{2rS}{\sqrt{\mu a}} + 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \dot{\tilde{\omega}}.\end{aligned}$$

До сих пор мы не рассматривали компоненту W возмущающей силы. Поскольку W перпендикулярна плоскости орбиты, она не совершает работы и, следовательно, не изменяет a . Более того, W не изменяет величины вектора момента количества движения c , поскольку W параллельна ему, и, следовательно, модуль вектора c не меняется. Момент W относительно оси OP , проходящей через Солнце и лежащей в плоскости орбиты в направлении $i=90^\circ$, равен $-rW \cos i$. Следовательно, вектор c вращается в положительном направлении относительно линии узлов ON со скоростью, равной произведению $1/c$ на величину момента, так что

$$\frac{di}{dt} = rW \frac{\cos i}{\cos \varphi \sqrt{\mu a}}.$$

Момент W относительно линии узлов равен $rW \sin i$ и заставляет вектор c вращаться в положительном направлении относительно OP с угловой скоростью, равной произведению $1/c$ и момента, и таким образом вызывает рост Ω со скоростью, равной произведению $1/\sin i$ и момента, откуда

$$\dot{\Omega} = rW \frac{\sin i}{\cos \varphi \sin i \sqrt{\mu a}}.$$

Чтобы найти изменение $\dot{\omega}$, вызываемое компонентой W , которое, очевидно, пропорционально W , проще всего рассмотреть действие очень большого W в течение очень короткого времени δt . В пределе, когда $W\delta t$ конечно, а δt стремится к нулю, изменение орбиты будет импульсным и приведет только к повороту плоскости орбиты на конечный угол относительно радиуса-вектора планеты, который считается неподвижным. Следова-

тельно, u изменится на некоторую величину δu , но истинная аномалия w не может измениться, поскольку a , r и e не меняются, и поэтому δw должно быть равно δu . Рассмотрим сферический треугольник, основание которого расположено на эклиптике от старого узла до нового, две другие стороны, пересекаясь в местоположении планеты, равны u и $u + \delta u$, а углы при основании равны i и $i + \delta i$. Из теоремы синусов имеем

$$\sin(u + \delta u) = \sin i \frac{\sin u}{\sin(i + \delta i)}.$$

Отсюда

$$\delta \omega = \delta u = -\operatorname{tg} u \operatorname{ctg} i \delta i;$$

поэтому

$$\dot{\omega} = -\operatorname{tg} u \operatorname{ctg} i \frac{di}{dt}.$$

Поскольку

$$\dot{\tilde{\omega}} = \dot{\omega} + \dot{\Omega},$$

то легко получить, что

$$\dot{\tilde{\omega}} = rW \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \frac{\sin u}{\cos \varphi \sqrt{\mu a}}.$$

Мы имеем

$$\delta e' + n \delta t - \delta \tilde{\omega} = \delta M,$$

но в течение импульсного вращения орбиты величины a , e , r , w и M должны быть постоянны, поэтому $\delta M = 0$, поскольку $n \delta t$ стремится к нулю вместе с δt , имеем

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\tilde{\omega}}$$

при условии, что изменения вызываются компонентой W возмущающей силы, а не S или T . Если мы сложим вместе все приращения для разных вариаций, то получим для них следующие уравнения:

$$\frac{da}{dt} = 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [S \operatorname{tg} \varphi \sin w + T \sec \varphi (1 + e \cos w)],$$

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \varphi [S \sin \omega + T (\cos \omega + \cos E)], \\
 \frac{di}{dt} &= rW \frac{\cos u}{\cos \varphi \sqrt{\mu a}}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= rW \frac{\sin u}{\cos \varphi \sin i \sqrt{\mu a}}, \\
 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} &= \left[-aS \cos^2 \varphi \cos \omega + rT \sin \omega (2 + e \cos \omega) + \right. \\
 &\quad \left. + rW \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin u \right] \frac{1}{\sqrt{\mu a \sin \varphi \cos \varphi}}, \\
 \frac{de'}{dt} &= -\frac{2rS}{\sqrt{\mu a}} + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \frac{d\tilde{\omega}}{dt} + \\
 &\quad + 2 \cos \varphi \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\Omega}{dt}.
 \end{aligned} \tag{4.5.9.5}$$

Точно такие же уравнения были получены Пламмером [2] другим способом, в котором принималось, что возмущающие силы являются производными потенциала или возмущающей функции. Однако ясно, что форма уравнений (4.5.9.5) не зависит от того, имеют силы S , T , W потенциал или нет.

4.6. Общие возмущения в задаче об n планетах

Уравнения (4.5.5.1) в задаче n тел или уравнения (4.5.8.2) для вариаций элементов могут быть решены численным интегрированием. Такие решения, которые мы будем называть *специальными возмущениями*, будут описаны в следующей главе. Можно также решить уравнения (4.5.8.2) аналитически при помощи метода последовательных приближений в соответствии с разд. 4.5.4.2 или иначе, чтобы получить решения в аналитической форме, которая даст координаты или возмущения для любого момента времени t . Полученные таким способом возмущения называются *общими* или *абсолютными возмущениями*.

В таких методах играет важную роль представление возмущающей функции R в соответствующей форме. Мы отсылаем читателя к работе Пламмера [2] за описанием многих изящных и тонких методов, которые были развиты для получения R в задаче n тел. В разработку этих методов внесли вклад такие ученые, как Лаплас, Бессель, Якоби, Леверье, Тиссеран, Коуэл, Стильес, Кэли, Ньюком, Пуанкаре, Ганзен, Делоне и многие другие.

Для двух планет возмущающая функция имеет вид

$$\begin{aligned} R = & \sum F(a, a', e, e', i, i') \cos T, \\ T = & h(\varepsilon + nt) + h'(\varepsilon' + n't') + g\tilde{\omega} + g'\tilde{\omega}' + \\ & + f\Omega + f'\Omega', \end{aligned}$$

где оскулирующие элементы возмущенной орбиты суть a , e , i , Ω , ω и ε , а возмущающей орбиты a' , e' , i' , Ω' , ω' и ε' . Величины h_i , g_i и f_i являются целыми числами, которые могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения и величина которых характеризует различные члены в сумме. В соответствии с соглашением, принятым в разд. 4.5.8, n в аргументе компоненты T не рассматривается как функция a , когда берется частная производная $\partial R/\partial a$, и средняя долгота определяется как

$$\varepsilon + \int n dt = \varepsilon + l,$$

если n изменяется вместе с a . Простые три уравнения для оскулирующих элементов имеют вид

$$\frac{da}{dt} = \sum C_1 \sin T,$$

$$\frac{de}{dt} = \sum C_2 \sin T,$$

$$\frac{di}{dt} = \sum C_3 \sin T,$$

а три последние

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sum C_4 \cos T,$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \sum C_5 \cos T,$$

$$\frac{de}{dt} = \sum C_6 \cos T.$$

Все правые части этих уравнений, данные в форме, рассмотренной в разд. 4.5.4.2, содержат множителем m' — массу возмущающей планеты. Так же, как в разд. 4.5.4.2, можно написать

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

и т. д., а для средней долготы

$$L = (\varepsilon_0 + n_0 t) + (\varepsilon_1 + l_1) + (\varepsilon_2 + l_2) + \dots,$$

где a_0 , e_0 и т. д. — величины оскулирующих элементов в некоторую начальную эпоху, а $n_0 = n(a_0)$. Тогда общие возмущения $(a_1, e_1, \dots, \varepsilon_1)$ первого порядка относительно возмущающих масс получаются интегрированием правых частей по времени, причем элементы определяются их начальными значениями. Эти возмущения имеют вид:

$$a_1 = - \sum C_1 \frac{\cos T}{hn_0 + h'n'_0}, \quad \text{и т. д.}$$

$$\Omega_1 = \sum C_4 \frac{\sin T}{hn_0 + h'n'_0} \quad \text{и т. д.}$$

и

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_0^5}} \sum C_1 \int \int \sin T dt dt = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_0^5}} \sum C_1 \frac{\sin T}{(hn_0 + h'n'_0)^2} + Ct + D, \end{aligned}$$

где постоянная интегрирования C определяется из условия, чтобы $dl_1/dt = n_1$ обращалось в нуль в начальную

эпоху, а вторая постоянная D — из условия обращения в нуль l_1 в начальную эпоху. Чтобы получить полную систему возмущений первого порядка, в R нужно включить все возмущающие планеты.

Мы замечаем, что члены в R , в которые не входят h и h' , не зависят от времени и потому дадут члены типа At , называемые *вековыми*. Эти члены входят во все элементы, за исключением a . Если $c=0$, то $\partial T/\partial e=0$ и потому не дает никакого вклада в da_1/dt ; значит a_1 не содержит членов типа At , т. е. среднее расстояние в первом приближении не содержит вековых возмущений. Все другие члены, входящие в R , приводят к появлению в первом приближении *периодических* возмущений типа

$$A \cos[(hn + h'n')t + \text{const}].$$

Следующее приближение, состоящее в получении общих возмущений $(a_2, e_2, \dots, \varepsilon_2)$ второго порядка относительно масс в соответствии с процедурой разд. 4.5.4.2, включает не только определенные ранее возмущения a_1, e_1 и т. д., но также и возмущения первого порядка a'_1, e'_1 и т. д., оказывающие воздействие на возмущающую планету m' ; оно включает как члены первого порядка относительно массы m возмущенной планеты, так и члены первого порядка относительно масс m_i каждой другой планеты. Тогда, в соответствии с процедурой разд. 4.5.4.2, общие возмущения второго порядка относительно масс могут быть получены интегрированием уравнений типа

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} = & \sum \left[a_1 \frac{\partial C_1}{\partial a_0} \sin T + e_1 \frac{\partial C_1}{\partial e_0} \sin T + \right. \\ & + i_1 \frac{\partial C_1}{\partial i_0} \sin T + \Omega_1 C_1 f \cos T + \tilde{\omega}_1 C_1 g \cos T + \\ & \left. + (\varepsilon_1 + l_1) C_1 h \cos T \right] + \sum', \end{aligned}$$

где Σ' — сумма, в которую входят вариации вида $a'_1(\partial/\partial a_0')$ и т. д. После выполнения необходимых перемножений рядов и после того, как элементам при-

даны их начальные значения в соответствии с разд. 4.5.4.2, правая часть этого уравнения может быть проинтегрирована. Поскольку учитываются не две планеты, а в принципе все планеты, то появится большое количество членов, но вычисления, хотя и громоздкие, в принципе просты. Возмущения второго порядка возмущенной планеты m включают члены, содержащие множителями tt_i , t^2_i , $t_i t_j$. Можно считать, что члены, содержащие tt_i , появляются в возмущении планеты m от планеты i из-за влияния возмущенной планеты m на планету i ; члены с t^2_i можно рассматривать как появляющиеся из-за возмущений планеты i , оказывающих воздействие на m ; наконец, члены $t_i t_j$ можно рассматривать как эффект воздействия на планету i планеты j , а также эффект воздействия на планету j планеты i .

Рассматриваемый процесс продолжается до тех пор, пока не достигается желаемая точность. На практике для очень точного представления движения планет достаточно одного или двух приближений, за исключением нескольких членов, которые должны быть посчитаны с высокой точностью из-за малости делителя $hn+h'n'$. Такие члены могут быть заметны потому, что $hn+h'n'$ появляются как делители в интегралах от тригонометрических функций. Мы видели, что в первом порядке возмущения элементов имеют вид At и $A \cos(ct+d)$. Для более высоких порядков они принимают вид At^s , $At^s \cos(ct+d)$ и $A \cos(ct+d)$. Таким образом, в добавление к периодическим членам появляются вековые члены, включающие более высокие степени t , а также смешанные члены, состоящие из тригонометрических функций, умноженных на степень времени t . Сходимость возникающих рядов была предметом многих исследований; за некоторыми мы отсылаем читателя к книгам Пуанкаре [6, 7]. Ряды могут расходиться, но в этом случае они могут быть асимптотическими, так что несколько членов уже дают хорошую точность.

Сказанное только что касается вопроса сходимости рядов по степеням масс, и по мнению автора, возможно, является следствием смешения математического вопроса о сходимости ряда с динамическим вопросом о

поведении планет солнечной системы в течение больших промежутков времени. Говорят, что ряды, скажем типа ряда, дающего среднее расстояние Земли, сходятся, если сумма S_n первых n членов стремится к пределу, когда n стремится к бесконечности. В противоположность тому, что высказывали некоторые авторы, присутствие чисто вековых членов At^s или смешанных членов $At^s \cos(ct+d)$ не может показать, будут ли ряды сходиться или солнечная система будет претерпевать существенные изменения типа утери планеты. Так, например, каждый член бесконечного ряда

$$t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$. Однако ряд сходится для всех значений t и на самом деле представляет ограниченную и плавно изменяющуюся функцию $\sin t$. Аналогично, бесконечный ряд смешанных членов

$$\sin t + at \cos t - \frac{a^2 t^2}{2!} \sin t - \frac{a^3 t^3}{3!} \cos t + \dots$$

сходится для всех t и представляет ограниченную и плавно меняющуюся функцию $\sin(1+a)t$, хотя некоторые авторы выражали мнение, что неограниченно растущие чисто вековые члены и даже смешанные члены, которые описывают колебание все увеличивающейся амплитуды, приводят к расходимости или «неустойчивости». Автор считает, что существование вековых или смешанных членов вообще ничего не говорит ни о сходимости, ни об «устойчивости» на больших интервалах времени.

Рассматривая поведение солнечной системы в течение длительного времени, можно представить себе случай, когда тело попадает в нее из бесконечности со скоростью, немного большей, чем параболическая, и при соответствующем близком прохождении около планеты потеряет энергию и на продолжительное время останется в солнечной системе. Поскольку динамически возможно движение с обратными (по знаку) скоростями, можно равным образом представить себе солнеч-

ную систему, из которой планета, долгое время бывшая постоянным членом системы, уйдет на бесконечность. Более того, можно считать, что движение этой планеты дано в виде ряда, который сходится для всех значений времени, включая время, когда планета будет вне системы. Таким образом, сходимость разложений в принципе не является несовместимой с существованием солнечной системы, претерпевающей значительные изменения. Обратно, представим себе солнечную систему, не подверженную любым значительным изменениям, прошлым или будущим, с движениями, представленными рядами, сходящимися для всех значений времени. Для хорошего математика было бы нетрудно выбрать в комплексной временной плоскости функцию времени с такими особенностями, что соответственно преобразованный ряд имел бы только ограниченный радиус сходимости. Такой ряд сходился бы для t , меньших некоторого t' , и расходился бы для t , больших этого t' , даже в отсутствие какого-либо динамического изменения. Таким образом, не существовало бы необходимой связи между математической сходимостью (независимо от того, доказана она или не доказана) и динамическим поведением солнечной системы на большом интервале времени.

В заключение отметим, что мы не знаем, сходятся ли ряды, применяемые в небесной механике, и не считаем, что поведение солнечной системы на большом интервале времени с необходимостью связано с вопросом о сходимости. В частности, существование чисто вековых членов или смешанных членов общего типа само по себе ничего не говорит ни о сходимости, ни о поведении солнечной системы на больших интервалах времени.

4.7. Теории Луны

Прежде чем закончить эту главу, мы кратко упомянем о теориях Луны. В планетарной задаче n тел возмущающие силы претерпевают значительные изменения по величине и направлению вследствие изменения направлений и расстояний между возмущающими планетами, но возмущающие силы в общем очень малы по

сравнению с притяжением Солнца. Наибольшая возмущающая сила, действующая на Землю, это притяжение Юпитера, которое составляет всего примерно $5 \cdot 10^{-5}$ притяжения Солнца. Наибольшее притяжение планеты другой планетой — это притяжение, которое испытывает Сатурн со стороны Юпитера; оно достигает величины $4 \cdot 10^{-3}$ от притяжения Солнцем Сатурна и приводит к осложнению движения Сатурна, сравнимому в некоторых отношениях со сложностями, появляющимися в теории Луны. Типичная задача Луны представляет собой задачу системы Земля—Луна—Солнце. Луна обращается вокруг Земли, а обе обращаются вокруг Солнца и испытывают с его стороны возмущения. Радиальное ускорение Земли, вызванное притяжением Солнца, равно $-k^2/R^2$, и разность между радиальными гелиоцентрическими ускорениями Земли и Луны составляет, следовательно, примерно $2k^2r/R^3$, где R — расстояние от Земли до Солнца, а r — расстояние от Луны до Земли. Поскольку радиальное геоцентрическое ускорение Луны равно $-mk^2/r^2$, где m — масса Земли, то отношение возмущающей силы, действующей на Луну вследствие притяжения Солнца, к притяжению Землей Луны составляет величину порядка $(2/m)(r/R)^3$, или около 0,01. С другой стороны, не существует таких больших изменений в расстоянии до Солнца, какие есть в расстоянии до возмущающей планеты в планетарной задаче. Выяснилось, что методы планетарного типа не подходят для точного представления движения Луны из-за гораздо больших величин возмущающих сил. Динамические методы, специально развитые для того, чтобы преодолеть возникающие очень большие трудности, известны как *теории Луны*. Мы отсылаем читателя за разбором теорий Луны к книгам «Небесная механика» Тиссерана [8] и «Теория Луны» Броуна [9]. Основные теории Луны были разработаны Ганзеном, Делоне, Хиллом и Броуном.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker E. T., A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927; Dover, New York, 1944.

2. Plummer H. C. *Dynamical Astronomy*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1918, chap. XXII.
3. The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the Year 1940, H. M. Stationery Office, London, 1938, p. 822.
4. См. ссылку [1], гл. XI, разд. 126, 127, 128, 137 и 138, содержащие билинейные ковариантные и дифференциальные формы. Очень краткое доказательство, приведенное в книге Пламмера (см. ссылку [2], разд. 125), представляется неверным, так как Пламмер спутал частные и полные производные. В более поздних учебниках есть доказательства, основанные на принципе Гамильтона, которые как будто неверны вследствие предположения, что если все $\delta q=0$ на концах траектории, то δQ также должны быть равны нулю.
5. Brown E. W., Shook C. A., *Planetary Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933.
6. Poincaré H., *Leçons de mécanique céleste*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
7. Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1892.
8. Tisserand F., *Traité de mécanique céleste*, vol. III, Gauthier-Villars, Paris, 1894.
9. Brown E. W., *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1896.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ОБЩИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ АТМОСФЕРЫ

5.1. Введение

Искусственные спутники Земли (ИСЗ) связаны с интересной динамической проблемой, исследование которой возможно с применением как традиционных, так и новых методов. Силы, действие которых испытывают подобные объекты, включают притяжение Земли, притяжение других небесных тел и сопротивление атмосферы Земли. Притяжение Земли обычно значительно превосходит силу сопротивления воздуха и во много раз больше сил притяжения других небесных тел. Сначала мы рассмотрим характер движения близкого ИСЗ, которое определяется только притяжением, исключив влияние сопротивления воздуха и учитывая только два главных члена в разложении потенциала Земли по сферическим гармоникам. Мы представим два различных решения: первое, аналогичное обычным теориям планет, и второе (новое), имеющее некоторое сходство с теорией Луны, разработанной Делоне. Затем мы рассмотрим влияние сопротивления воздуха на движение ИСЗ.

Полезно сделать ряд кратких замечаний об отношении теории движения ИСЗ к теориям движения планет и Луны. Если ИСЗ столь же далек от Земли, как Луна, его гравитационное движение было бы столь же сложным. Однако, когда среднее расстояние сравнимо с радиусом Земли, величина $(2/m)(r/R)^3$ равна примерно $5 \cdot 10^{-8}$; влияние Солнца на близкий ИСЗ незначительно, может быть легко учтено, если требуется, путем определения возмущений и проявляется в появлении периодических членов, коэффициенты которых порядка

всего $0'',01$. Аналогично, притяжение Луны оказывается во введении возмущающей силы порядка $1,2 \cdot 10^{-7}$ от притяжения ИСЗ Землей и включении периодических членов с коэффициентами порядка $0'',02$. В этом случае ничто не требует привлечения методов теории Луны. С другой стороны, возмущения за счет несферичности Земли составляют примерно $\frac{1}{600}$ от силы притяжения. Это в 6 раз меньше, чем возмущение Солнцем движения Луны, но больше максимального взаимного возмущения планет. Таким образом, задача о движении близкого ИСЗ с точки зрения возмущающих сил лежит как бы между теорией планет и теорией Луны, и поэтому можно надеяться на возможность применять как теорию движения планет, так и теорию Луны. В отличие от теории Луны и от теории планет возмущающая функция от сжатия Земли имеет простое выражение и не зависит от движения внешних тел.

5.2. Применение методов теории планет (без учета сопротивления воздуха)

Формула (2.5.3) для гравитационного потенциала Земли на внешнюю точку дает

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \frac{J}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\ \left. + \frac{K}{30} \left(\frac{a}{r} \right)^4 (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \right] + \text{члены более высокого порядка,}$$

где член, содержащий J , составляет примерно 10^{-3} , а член, содержащий K , 10^{-6} по отношению к члену $1/r$ для точек, близких к поверхности Земли. Для более далеких точек эти члены еще меньше. Член, пропорциональный $1/r$, обусловливает обычное эллиптическое движение, а член, пропорциональный $1/r^3$, определяет наиболее существенные и интересные возмущения. Член, содержащий K , настолько мал, что не вносит существенно нового в характер движения. Поэтому мы будем рассматривать движение ИСЗ в поле притяжения, потенциал которого содержит только члены, пропорцио-

нальные $1/r$ и $1/r^3$, пренебрегая членом, содержащим K . Конечно, член, содержащий K , может быть учтен при вычислении возмущений тем же способом, которым мы будем пользоваться при учете члена, содержащего J .

Гамильтониан невозмущенного движения имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2 \cos^2 \beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r},$$

а гамильтониан возмущенного движения

$$H_1 = -\frac{\mu B}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \beta), \quad (5.2.1)$$

где $\mu = GM$, β — геоцентрическое склонение, θ — прямое восхождение, величина $Ja^2/3$ обозначена через B для простоты и для того, чтобы можно было использовать символ a , обозначающий в (2.5.3) экваториальный радиус Земли, для обозначения другой величины. Возмущенное движение в геоцентрических экваториальных координатах описывается обычными уравнениями эллиптического движения с элементами $a, e, i, \Omega, \tilde{\omega}, \epsilon$, которые определяются уравнениями возмущенного движения (4.5.8.2), где возмущающая функция R равна $-H_1$. Однако удобнее вместо перечисленных элементов использовать следующие: $a, e, i, \Omega, \omega, \beta'$, где $-\beta'$ есть средняя аномалия $\epsilon - \tilde{\omega}$ в эпоху $t=0$. Если мы обозначим функцию R , зависящую от старых элементов, через R_1 , а зависящую от новых элементов через R_2 , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \Omega} &= \frac{\partial R_2}{\partial \Omega} - \frac{\partial R_2}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial R_1}{\partial \tilde{\omega}} &= \frac{\partial R_2}{\partial \beta'} + \frac{\partial R_2}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial R_1}{\partial \epsilon} &= -\frac{\partial R_2}{\partial \beta'}. \end{aligned}$$

Так как

$$\dot{\beta}' = \dot{\tilde{\omega}} - \epsilon,$$

$$\dot{\omega} = \dot{\tilde{\omega}} - \dot{\Omega},$$

то уравнения возмущенного движения (4.5.8.2) примут вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial \beta'}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial \beta'} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sin i \sqrt{\mu a} \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{\sin i \sqrt{\mu a} \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a} \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\beta'}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e \sqrt{\mu a}} \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{d^2 l}{dt^2} &= \frac{3}{a^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \beta'}
 \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

при обычном условии, что n не зависит от $\partial R/\partial a$ и средняя аномалия определяется выражением

$$\int n dt - \beta' = l - \beta',$$

а не соотношением $nt - \beta'$. Элементы меняются с изменением времени, положение и скорость в некоторый момент времени t определяются уравнениями

$$E - e \sin E = l - \beta',$$

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\
 \sin \beta &= \sin i \sin(\omega + w),
 \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

$$\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + w),$$

и уравнениями, полученными дифференцированием этих уравнений по времени, если считать элементы постоянными величинами. Конечно, в этих уравнениях следует

брать мгновенные значения элементов. Как было отмечено, функция $R = -H_1$ зависит только от элементов a , e , i , ω , $nt - \beta'$, а от элемента Ω не зависит, поскольку H_1 не зависит от θ .

Частные производные R по элементам могут быть найдены, если учесть, что R есть функция r , β (причем r зависит от элементов a , e , β' , а β — от элементов i , ω) и переменной w , которая зависит только от элементов e и β' . Используя соотношения, справедливые для эллиптического движения,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos w, \\ \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial e} &= \frac{\sin w (2 + e \cos w)}{1 - e^2},\end{aligned}$$

найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial a} &= -\frac{3}{a} R, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{3\mu B}{(1 - e^2) r^3} [\cos w (1 + e \cos w) (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) - \\ &\quad - \sin^2 i \sin 2u \sin w (2 + e \cos w)], \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= -\frac{6\mu B}{r^3} \sin i \cos i \sin^2 u, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= -\frac{3\mu B}{r^3} \sin^2 i \sin 2u, \\ \frac{\partial R}{\partial \beta'} &= -\frac{1}{n} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{n} \frac{dR}{dt},\end{aligned}$$

где последнее уравнение вытекает из того, что R есть функция координат и их производных по времени, точные значения которых в момент оскуляции определяются оскулирующим эллипсом.

Чтобы найти возмущения первого порядка относительно B , мы применим метод, изложенный в разд. 4.5.4.2, подставляя начальные значения элементов (a_0 , e_0 и т. д.) в правые части уравнений возмущенного движения, которые получены из (5.2.2) после подстановки найденных в настоящем разделе выражений для частных производных. Затем мы проинтегрируем правые части уравнений по времени и найдем возмущения первого порядка элементов (a_1 , e_1 и т. д.).

В задаче о движении планет R можно представить в виде бесконечного ряда, каждый член которого есть косинус величины, кратной времени. Этот ряд легко интегрируется почленно. Получать в нашем случае R тем же способом, что и в теории планет, было бы неразумно. Гораздо более простой способ заключается в переходе от интегралов по времени к интегралам по w (истинной аномалии невозмущенного движения) путем использования точного соотношения

$$n_0 dt = (1 - e_0^2)^{3/2} (1 + e_0 \cos w)^{-2} dw. \quad (5.2.4)$$

Можно показать, что интегралы для возмущений первого порядка относительно B все легко могут быть вычислены точно в виде конечных выражений, зависящих от начальных значений элементов и от упомянутой выше величины w . Более того, оказывается, что метод разд. 4.5.4.2 может быть при желании успешно использован для получения возмущений высшего порядка в виде конечных выражений, зависящих от тех же величин. Если возмущающая функция R представлена в таком виде и если интегралы по времени, входящие в возмущения, вычислены при помощи подстановки (5.2.4) в виде выражений, содержащих невозмущенную истинную аномалию w , то в рассматриваемой задаче не появятся малые делители, вызывающие определенные трудности в традиционной теории планет.

Дифференциальное уравнение для оскулирующего элемента a имеет вид

$$\frac{da}{dt} = 2 \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{n} \frac{dR}{dt} = 2a^2 B \frac{d}{dt} \frac{1 - 3 \sin^2 \beta}{r^3}.$$

Это — точное уравнение. Поэтому, заменив в правой части a на a_0 и проинтегрировав уравнение, мы найдем возмущение первого порядка a_1 , согласно формальному методу разд. 4.5.4.2,

$$a_1 = \frac{2B}{a_0} \left[\left(\frac{a_0}{r} \right)^3 (1 - 3 \sin^2 \beta) \right]_0^t.$$

Очевидно, уравнение для da/dt можно проинтегрировать точно

$$-\left(\frac{\mu}{2a} \right) - \left(\frac{\mu B}{r^3} \right) (1 - 3 \sin^2 \beta) = \text{const}, \quad (5.2.5)$$

откуда оскулирующий элемент a определяется соотношением

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a},$$

где v — скорость. Мы видим, что формула (5.2.5) есть интеграл энергии для возмущенного движения. Величины других оскулирующих элементов не могут быть найдены точно, как величина a , а находятся только отдельные возмущения различных порядков. Приведенные ниже выражения (5.2.6) определяют возмущенные элементы a , e , i , Ω , ω с точностью до членов первого порядка относительно B . Постоянные K являются невозмущенными значениями начальных величин a_0 , e_0 , i_0 , Ω_0 , ω_0 , а ω есть истинная аномалия эллиптического движения, при которых элементы и среднее движение сохраняют свои начальные оскулирующие значения a_0 , e_0 , i_0 , Ω_0 и ω_0 при $n_0^2 a_0^3 = \mu$. Вместо величины β' мы вводим величину $l - \beta'$, которая определяется одним из соотношений (5.2.3).

$$\begin{aligned} a &= K_a + \frac{6B}{a_0 (1 - e_0^2)^3} \left\{ e_0 \left(1 + \frac{1}{4} e_0^2 \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \cos \omega + \right. \\ &\quad + \frac{3}{4} e_0 \left(1 + \frac{1}{4} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + \omega) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} e_0^3 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 - \omega) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} e_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \cos 2w + \\
& + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 2w) + \\
& + \frac{1}{12} e_0^3 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \cos 3w + \\
& + \frac{3}{4} e_0 \left(1 + \frac{1}{4} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 3w) + \\
& + \frac{3}{8} e_0^2 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 4w) + \\
& + \frac{1}{16} e_0^3 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 5w) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e = K_e + & \frac{3B}{a_0^2 (1 - e_0^2)} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4} e_0^2 \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \cos w + \right. \\
& + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{11}{4} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + w) + \\
& + \frac{1}{16} e_0^2 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 - w) + \frac{1}{2} e_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \cos 2w + \\
& + \frac{5}{4} e_0 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 2w) + \frac{1}{12} e_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \cos 3w + \\
& + \frac{1}{12} \left(7 + \frac{17}{4} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 3w) + \\
& + \frac{3}{8} e_0 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 4w) + \\
& \left. + \frac{1}{16} e_0^2 \sin^2 i_0 \cos (2\omega_0 + 5w) \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i = K_i + & \frac{3B \sin 2i_0}{4a_0^2 (1 - e_0^2)^2} \left[e_0 \cos (2\omega_0 + w) + \right. \\
& \left. + \cos (2\omega_0 + 2w) + \frac{1}{3} e_0 \cos (2\omega_0 + 3w) \right];
\end{aligned}$$

$$\Omega = K_\Omega - \frac{3B \cos i_0}{2a_0^2(1-e_0^2)^2} \left[2\omega + 2e_0 \sin \omega - e_0 (2\omega_0 + \omega) - \sin (2\omega_0 + 2\omega) - \frac{1}{3} e_0 \sin (2\omega_0 + 3\omega) \right];$$

$$\begin{aligned} \omega = K_\omega + & \frac{3B}{2a_0^2(1-e_0^2)^2} \left\{ (4 - 5 \sin^2 i_0) \omega + \right. \\ & + \frac{1}{e_0} \left[(2 - 3 \sin^2 i_0) + e_0^2 \left(\frac{7}{2} - \frac{17}{4} \sin^2 i_0 \right) + \right. \\ & + \frac{1}{4} e_0^2 \sin^2 i_0 \cos 2\omega_0 \left. \right] \sin \omega - \\ & - \frac{1}{e_0} \left[e_0^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{4} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \right] \sin (2\omega_0 + \omega) + \\ & + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \sin 2\omega - \left(1 - \frac{5}{2} \sin^2 i_0 \right) \sin (2\omega_0 + 2\omega) + \\ & + \frac{1}{6} e_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \sin 3\omega - \\ & - \frac{1}{3e_0} \left[e_0^2 - \left(\frac{7}{2} + \frac{19}{8} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \right] \sin (2\omega_0 + 3\omega) + \\ & \left. + \frac{3}{4} \sin^2 i_0 \sin (2\omega_0 + 4\omega) + \frac{1}{8} e_0 \sin^2 i_0 \sin (2\omega_0 + 5\omega) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l - \beta' = K_M + n_r t + & \frac{3B}{a_0^2 e_0 (1 - e_0^2)^{3/2}} \left\{ - \left[\left(1 - \frac{1}{4} e_0^2 \right) \times \right. \right. \\ & \times \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) + \frac{1}{8} e_0^2 \sin^2 i_0 \cos 2\omega_0 \left. \right] \sin \omega + \\ & + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2} e_0^2 \right) \sin^2 i_0 \sin (2\omega_0 + \omega) - \\ & - \frac{1}{2} e_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \sin 2\omega - \\ & - \frac{1}{12} e_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i_0 \right) \sin 3\omega - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{12} \sin^2 i_0 \left(7 - \frac{1}{4} e_0^2 \right) \sin (2\omega_0 + 3\omega) - \\
 & -\frac{3}{8} e_0 \sin^2 i_0 \sin (2\omega_0 + 4\omega) - \\
 & -\frac{1}{16} e_0^2 \sin^2 i_0 \sin (2\omega_0 + 5\omega) \}, \tag{5.2.6}
 \end{aligned}$$

где среднее аномалистическое движение равно

$$n_r = n_0 \left[1 + \frac{3B}{a_0^2} \left(\frac{a}{r} \right)_0^3 (1 - 3 \sin^2 \beta_0) \right]. \tag{5.2.7}$$

В (5.2.3) величина ω относится к возмущенному движению и, вообще говоря, отличается от величины ω в невозмущенном движении, которая применяется при вычислении элементов возмущенного движения.

Из (5.2.6) видно, что при учете возмущений первого порядка относительно B выражения для элементов a , e , i состоят из постоянных и периодических членов и не содержат вековых возмущений первого порядка относительно B . Элементы Ω и ω содержат, кроме постоянных и периодических членов, вековые вариации

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega}_{\text{век}} &= -\frac{3Bn_0}{a_0^2 (1 - e_0^2)^2} \cos i_0, \\
 \dot{\omega}_{\text{век}} &= \frac{3Bn_0}{a_0^2 (1 - e_0^2)^2} \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i_0 \right),
 \end{aligned}$$

в то время как ω (истинная аномалия невозмущенного движения) равна $n_0 t$ плюс периодические члены.

Самые существенные эффекты влияния сжатия Земли на движение близкого ИСЗ проявляются в экваториальной регрессии (обратном движении. — Ред.) узла орбиты и в том, что угловое расстояние перигея от узла имеет прямое или попятное движение в зависимости от знака выражения $4 - 5 \sin^2 i$ и оказывается постоянной величиной при $i = 63^\circ 26'$. Для близких ИСЗ вариации $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ имеют величины порядка 5° в сутки.

Возмущенная средняя аномалия $l - \beta'$ содержит, очевидно, вековой член $n_r t$, где величина n_r , определяемая (5.2.7), отличается от невозмущенного среднего движения n_0 . Величина ω в возмущенном движении отличается от истинной аномалии невозмущенного движения, при котором $\omega \neq 0$, если $l - \beta' = 0$. Аномалистический период P , (от одного прохождения перигея до следующего) меняется под влиянием периодических членов невозмущенной истинной аномалии ω , и среднее аномалистическое движение n_r надо понимать как среднее от величины $2\pi/P$, за большое число оборотов. Можно показать, что величина n_r не зависит (при учете членов только первого порядка относительно B) от момента оскуляции, так как оскулирующие элементы удовлетворяют соотношению (5.2.5). Среднее движение, определяемое по драконическому периоду, определяется средней скоростью изменения аргумента широты и равно

$$n_B = \dot{\omega}_{век} + n_r,$$

а среднее сидерическое движение равно

$$n_0 = \dot{\Omega}_{век} + \dot{\omega}_{век} + n_r.$$

Вычисление возмущений, особенно высших порядков, методом разд. 4.5.4.2 включает разложение в ряд Тейлора, который расходится, если возмущения достаточно велики, как это обычно бывает для ω . Вековое движение узла не вызывает затруднений, потому что возмущающая функция и ее производные не зависят от Ω . Что касается ω , то здесь положение другое. Расходимости не будет при $i = 63^\circ 26'$, потому что вековой член в ω отсутствует и возмущения ω_1 малы; но, с другой стороны, в этом случае вместо элементов $(a, e, i, \Omega, \omega, \beta')$ целесообразно рассматривать новые элементы $(a, e, i, \Omega, \omega', \beta')$, где

$$\omega' = \omega - K\omega,$$

причем ω является истинной аномалией невозмущенного движения, а

$$K = \frac{3}{2} B \frac{1}{p_0^2} (4 - 5 \sin^2 i_0),$$

$$p_0 = a_0 (1 - e_0^2).$$

У других оскулирующих элементов в первом порядке нет вековых членов, и преобразованные дифференциальные уравнения для них могут быть решены последовательными приближениями согласно методу разд. 4.5.4.2. Как было показано, наиболее существенное изменение этого метода для первого приближения состоит в замене ω_0 на $\omega_0 + K\omega$ в правых частях уравнений (5.2.6) для возмущенных элементов. При интегрировании уравнений по ω перед некоторыми периодическими членами возникают добавочные множители вида $1/(1 + 1/2K)$, но они мало отличаются от единицы и поэтому здесь не приводятся.

Аналогичные трудности возникают при разложении $l_1 - \beta'$, если не ограничиваться членами первого порядка, так как n_0 отличается от n_r . Их можно обойти, если разложить функцию f в разд. 4.5.4.2 в ряд Тейлора по начальным значениям оскулирующих элементов, но при этом заменить невозмущенное среднее движение n_r , определяемое (5.2.7), на среднее аномалистическое движение n_0 , так что вместо соотношения (5.2.4) мы будем для замены переменных при интегрировании пользоваться следующим:

$$n_r dt = (1 - e_0^2)^{3/2} (1 + e_0 \cos \omega)^{-2} d\omega. \quad (5.2.4')$$

Если это сделано, формулы (5.2.3) и (5.2.6) еще справедливы при предусмотренном ограничении, что в правых частях (5.2.6) величина ω_0 заменена на $\omega_0 + K\omega$, но теперь величина ω в правых частях должна пониматься как истинная аномалия на *промежуточной* орбите, элементы которой равны начальным значениям оскулирующих элементов a_0 , e_0 и т. д., а среднее движение равно n_r . Для этой промежуточной орбиты третий закон Кеплера не применим, но это и не важно, так как эта орбита является просто математическим средством для интегрирования дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов.

Возмущения высших порядков относительно B могут быть получены методом разд. 4.5.4.2, но найденное выше приближение первого порядка с учетом допущений для K и n , является достаточно точным приближением. После одного оборота это приближение дает для средней аномалии значение, согласующееся с точностью до $0^s ,016$ со значением, полученным численным интегрированием. Такое численное интегрирование для случая $i_0=75^\circ$, $e_0=0,2$ при полном периоде обращения, близком к 6000 сек, было проведено Каннингэмом. Использование соотношения

$$n_r = n_0 \left[1 + \frac{2B}{a_0^2} \left(\frac{a}{r} \right)_0^3 (1 - 3 \sin^2 \beta_0) \right]^{3/2},$$

принятого Каннингэмом вместо формулы (5.2.7) на основании точного соотношения (5.2.5), дало результаты, согласующиеся с проведенным численным интегрированием на одном обороте в пределах $0^s ,001$.

5.3. Применение нового метода (без учета сопротивления воздуха)

В теориях планет принято брать за H_0 такую функцию Гамильтона, потенциальный член в которой пропорционален $1/r$, так что невозмущенное движение будет эллиптическим, а в возмущающий гамильтониан H_1 включать все остальные члены гравитационного потенциала. Это оправдывалось тем, что невозмущенное движение оказывалось простым, а возмущения нетрудно было найти. Однако, как мы видели выше, быстрые движения узлов и перигея у орбит близких ИСЗ приводят к тому, что возмущения первого порядка элементов Ω и ω неограниченно растут.

В этом разделе мы опишем новую трактовку [1], связанную с невозмущенным гамильтонианом H_0 , путем которой можно получить точное решение методом Гамильтона—Якоби, причем H_0 уже содержит основную часть эффектов сжатия гравитационного потенциала Земли. Невозмущенное решение получается более точным, чем для любого эллиптического движения, даже

для орбит с большими наклонениями и эксцентриситетами; оно асимметрично, непериодично, с различными и близкими к точным сидерическим, драконическим и аномалистическим периодами. Возмущающий гамильтониан H_1 в первом порядке не вызывает вековых возмущений ни в одном из канонических элементов, хотя приводит к изменению в среднем движении.

Брауэр [2] предложил для изучения орбиты спутника сжатой планеты способ, отличающийся от общепринятого и основанный на изучении почти круговых экваториальных орбит. Этот метод возник путем рассмотрения некруговых экваториальных орбит, для которых давно известно, что точные аналитические решения могут быть найдены всегда, какой бы вид ни имела потенциальная функция, лишь бы она зависела только от радиуса-вектора.

Гарфинкелем [3] был предложен новый метод; в нем применяется функция H_0 , уравнение Гамильтона—Якоби для которой оказывается с разделяющими переменными, что приводит всего к двум эллиптическим интегралам, хотя и ценой появления в возмущающем гамильтониане дополнительного члена, содержащего $1/r$.

Применив переменные Делоне, Брауэр разработал еще более новый метод, который к июню 1959 г. еще не был опубликован и любезно сообщен мне автором.

Возьмем гамильтониан H_0+H_1 в виде такой же суммы, как и в предыдущем разделе, но с другими слагаемыми:

$$\begin{aligned} H_0 = & \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2 \cos^2 \beta} + \frac{p_\beta^2}{r^2} \right) - \\ & - \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) - \right. \\ & \left. - \frac{3B}{ra(1-e^2)} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \right], \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

$$H_1 = 3\mu B \left[\sin^2 \beta - \frac{1}{2} \sin^2 i \right] \cdot \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{ar^2(1-e^2)} \right]. \quad (5.3.2)$$

Здесь i — величина постоянная, равная максимальному наклонению, достигаемому материальной точкой в не-

возмущенном движении, а $a(1-e^2)$ — постоянная, равная удвоенному произведению апоцентрического иperiцентрического расстояний, деленному на их сумму, тоже в невозмущенном движении, определяемом функцией H_0 .

Уравнение Гамильтона—Якоби, соответствующее H_0 , может быть решено разделением переменных, так что невозмущенное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} t - \beta_1 &= J(a_1, a_2, r), \\ -\beta_2 &= G(a_2, a_3, \beta) - j(a_1, a_2, r), \\ \theta &= -\beta_3 + g(a_2, a_3, \beta), \\ p_r = \dot{r} &= \frac{1}{r} L(a_1, a_2, r), \\ p_\beta = r^2 \dot{\beta} &= N(a_2, a_3, \beta), \\ p_\theta &= r^2 \dot{\theta} \cos^2 \beta = a_3, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

где a_1, a_2, a_3 — канонические постоянные, а именно: полная энергия; величина момента количества движения при $B=0$; осевая компонента момента количества движения соответственно (все на единицу массы материальной точки). Канонические постоянные $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ означают соответственно время прохождения через periцентр; величину углового расстояния перигея от узла при $B=0$; прямое восхождение восходящего узла экватора. Функции L и N имеют вид

$$L^2 = 2r^2 a_1 + 2\mu r + \frac{2\mu B'}{r} - a_2^2, \quad (5.3.4)$$

$$N^2 = a_2'^2 - a_3^2 \sec^2 \beta - \frac{6\mu B}{p} \sin^2 \beta, \quad (5.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} B' &= B \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right), \\ a_2'^2 &= a_2^2 + \frac{3\mu B}{p} \sin^2 i, \\ p &= a(1-e^2). \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Функции J , G , j и g в формулах (5.3.3) суть следующие определенные интегралы:

$$J = \int_{r_0}^r \frac{r}{L} dr,$$

$$G = \int_0^\beta \frac{a_2}{N} d\beta,$$

$$j = \int_{r_0}^r \frac{a_2}{rL} dr,$$

$$g = \int_0^\beta \frac{a_3}{N} \sec^2 \beta d\beta,$$

где через r_0 обозначено расстояние в перигее, полученное из уравнения $L=0$ при условии $r=0$. Мы говорили выше, что если $B=0$, то решение совпадает с приведенным в разд. 4.5.6 и является обычным эллиптическим движением. Здесь, как обычно, (5.3.3) можно рассматривать как точное решение возмущенной задачи, если канонические параметры a и β удовлетворяют уравнениям (4.5.4.3) при H_1 , определяемом (5.3.2). Важно отметить, что при вычислении частных производных H_1 по каноническим параметрам подразумевают, что функция H_1 зависит только от этих параметров и времени (а не от динамических переменных), величины же a , e и i в H_1 постоянны.

Рассмотрим полученное решение (5.3.3). Первое выражение (5.3.3) дает r как функцию трех канонических параметров и времени t , а J можно представить в виде

$$J = \frac{1}{\sqrt{-2a_1}} \int_{r_0}^r \frac{r^{3/2} dr}{\sqrt{(r-c)(r-r_0)(r_1-r)}},$$

где r_1 — расстояние в апоцентре, а c — меньший третий корень, всегда действительный (но иногда отрицатель-

ный), кубического уравнения $rL^2=0$ относительно r . Как покажет дальнейшее рассмотрение, три корня r_0 , r_1 и r являются функциями a_1 , a_2 и B' : интеграл J можно свести к эллиптическому интегралу, если умножить и числитель и знаменатель подынтегрального выражения на \sqrt{r} . Представление J в виде эллиптического интеграла третьего рода неудобно для вычисления, но можно получить быстро сходящееся разложение заменой переменного

$$r = a(1 - e \cos E),$$

что определяет угловую переменную E ; постоянные a и e находятся из уравнений

$$r_0 = a(1 - e)$$

и

$$r_1 = a(1 + e),$$

так что в конечном счете a и e зависят от a_1 , a_2 и B' . Если $B=0$, то a , e и E являются просто средним расстоянием, эксцентриситетом и эксцентрической аномалией эллиптического движения, $c=0$, а первое выражение системы (5.3.3) переходит в уравнение Кеплера. После замены переменного рассматриваемый интеграл принимает вид

$$J = a \frac{1}{\sqrt{(-2a_1)}} \int_0^E \frac{1 - e \cos EdE}{\sqrt{1 - \frac{c}{a(1 - \cos E)}}}.$$

Подынтегральное выражение может быть разложено в ряд и проинтегрировано почленно, что дает

$$\begin{aligned} J = & \frac{a}{\sqrt{-2a_1}} \left\{ E \left(1 + \frac{c}{2a} \right) - e \sin E + \frac{3}{8} \left(\frac{c}{a} \right)^2 \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} + \right. \\ & + \left. \frac{5}{16} \left(\frac{c}{a} \right)^3 \left[\frac{e \sin E}{(1 - e^2)(1 - e \cos E)} + \frac{q}{(1 - e^2)^{3/2}} \right] + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

где

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} q = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E.$$

Рассмотрим пример реальной орбиты с $a=1,13$ земного радиуса, $e=0,067$, $c/2a=10^{-4}$. Для такой орбиты член порядка $(c/a)^3$, даже при его вековом характере, может рассматриваться как пренебрежимо малый: он равен всего $0'',000004$ за оборот. После одного оборота E увеличится на 2π , и согласно (5.3.7) время возрастает на аномалистический период, равный $2\pi/n_r$, где

$$n_r = \frac{\sqrt{-2a_1}}{a} \left[1 + \frac{c}{2a} + \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right]^{-1}. \quad (5.3.8)$$

Первое выражение (5.3.3) может быть представлено также в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_r(t - \beta_1) = & \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right] E - \\ & - e' \sin E + \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \frac{q}{\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Если принять во внимание, что периодические ошибки меньше $0'',0003$ и отбросить члены порядка $(c/a)^2e$, это уравнение примет еще более простой вид:

$$n_r(t - \beta_1) = E - e' \sin E, \quad (5.3.10)$$

где

$$e' = e \left[1 + \frac{c}{2a} + \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right]^{-1}.$$

Любое из этих уравнений может быть использовано для нахождения E , а по нему r .

Применяя подстановку

$$\sin^2 \frac{1}{2} w = \frac{(r_1 - c)(r - r_0)}{(r_1 - r_0)(r - c)},$$

мы преобразуем интеграл j к стандартному виду эллиптического интеграла, который представим в виде быстро сходящегося ряда:

$$\begin{aligned} j(w) = & \frac{\Delta j}{2\pi} \left[w - \left(\frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8} \right) \sin w + \right. \\ & \left. + \frac{3}{128} k^4 \sin 2w + \dots \right], \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

где

$$k^2 = \frac{c(r_1 - r_0)}{r_0(r_1 - c)},$$

а Δj (приращение j при возрастании w на 2π) определяется по формуле

$$\frac{\Delta j}{2\pi} = \frac{a_2}{\sqrt{-2a_1 r_0 (r_1 - c)}} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right).$$

У реальной орбиты периодический член порядка k^4 составляет примерно $0'',000004$. Точная зависимость между w и E , определяемая выражением

$$\tg \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{1 + e - \frac{c}{a}}{1 - e - \frac{c}{a}}} \tg \frac{1}{2} E, \quad (5.3.12)$$

дает возможность легко найти w и j по E . Угловая переменная w аналогична истинной аномалии и является таковой, когда $B=0$.

Замена $x=\sin \beta$ дает возможность записать интеграл G в виде

$$G = a_2 \int_0^{\sin \beta} X^{-1} dx,$$

где

$$X^2 = a_2'^2 - a_3^2 - \left(a_2'^2 + 6\mu \frac{B}{p} \right) x^2 + 6\mu \frac{B}{p} x^4$$

и G можно преобразовать в обычный эллиптический интеграл заменой $x=x_1 \sin u$, где $\pm x_1$ и $\pm x_2$ суть корни уравнения $X^2=0$, причем $x_1 < x_2$ для положительных корней, а величина x_1/x_2 мала и составляет для реальной орбиты величину около 0,036. Величины x_1 и x_2 за-

висят от всех a и от B . Интеграл G можно разложить в ряд:

$$\begin{aligned} G(u) = & \frac{\Delta G}{2\pi} \left\{ u - \frac{1}{8} \left[\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^4 \right] \sin 2u + \right. \\ & \left. + \frac{3}{256} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^4 \sin 4u + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

где $\sin \beta = x_1 \sin u$, а ΔG (приращение при возрастании u на 2π) дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G}{2\pi} = & x_1 a_2 (a_2'^2 - a_3^2)^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{9}{64} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^4 + \frac{25}{256} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^6 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что значение склонения β в невозмущенном решении заключено в пределах $\sin \beta = \pm x_1$, так что x_1 соответствует $\sin i$ для обычной эллиптической орбиты и $x = \sin i$ при $B=0$. Величина $\sin i$ в выражениях для H_0 и H_1 есть просто x_1 . Для рассматриваемой невозмущенной орбиты угол, под которым спутник пересекает экватор, равен $\arccos(a_3/a_2)$, что следует из последних двух формул (5.3.3). Этот угол отличается от угла, равного $\arcsin x_1$. У реальной орбиты максимальное наклонение равно точно 45° , а угол, под которым пересекается экватор, равен $44^\circ 57' 45'', 74$.

Когда $B=0$, u становится равной обычному аргументу широты, т. е. углу от восходящего узла до спутника по орбите, а $G(u)=u$.

Интеграл g , определяющий прямое восхождение, отсчитываемое от обычного восходящего узла, является эллиптическим интегралом, преобразование которого в обычную форму сопряжено с известными трудностями. Подстановка

$$\sin \psi = \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1} \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{1-x_1^2} \operatorname{tg} u,$$

приводит g к виду

$$g = \frac{a_3}{|a_3|} \int_0^\psi \left[1 + \frac{\epsilon}{1 + \left(\frac{x_1^2}{1 - x_1^2} \right) \sin^2 \psi} \right]^{-1/2} d\psi,$$

откуда

$$\begin{aligned} g(u) = & \frac{a_3}{|a_3|} \left[\arctg \sqrt{1 - x_1^2} \operatorname{tg} u - fu + \right. \\ & \left. + \frac{3}{32} \epsilon^2 x_1^2 \sqrt{1 - x_1^2} \sin 2u + \dots \right], \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

где

$$f = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 - x_1^2} \left[1 - \frac{3\epsilon}{4} \left(1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) \right],$$

а

$$\epsilon = 1/(x_2^2 - 1)$$

— малая величина.

За один период u или β величина $g(u)$ и прямое восхождение θ возрастают на величину Δg , равную $\pm 2\pi(1-f)$, где знак плюс берется при прямом движении (a_3 положительно), а знак минус при обратном движении. В нашем примере реальной орбиты величина $\epsilon = 2,6 \cdot 10^{-3}$ и поэтому член с ϵ^2 дает по прямому восхождению примерно $1'',7$ за драконический период. Периодический член с ϵ^2 , зависящий от $2u$, имеет амплитуду $0'',05$, член с ϵ^3 , вероятно, не превышает нескольких тысячных секунды дуги. Если $B=0$, то $\epsilon=0$, и $g(u)$ определяется первым членом уравнения (5.3.14).

5.3.1. Новое решение. Невозмущенное движение

Если канонические постоянные μ и B известны, положение и скорость ИСЗ в некоторый момент времени могут быть найдены по (5.3.3). Сначала определяются промежуточные параметры a , e , c , i по значениям α ; затем (5.3.9) или (5.3.10) даст значение E ; затем найдем $r=a(1-e \cos E)$; формула (5.3.12) определяет ω , и,

наконец, (5.3.11) даст $j(\omega)$. Вторая формула (5.3.3) определит затем $G(u)$, а (5.3.13) даст u . Склонение может быть найдено теперь из равенства

$$\sin \beta = \sin i \sin u,$$

а $g(u)$ — из (5.3.14); затем из третьей формулы (5.3.3) находим прямое восхождение θ . Скорости \dot{r} , $\dot{\beta}$, $\dot{\theta}$ определяются из последних трех формул (5.3.3).

Аномалистический период $P_r = 2\pi/n_r$. Драконический период есть время, за которое u возрастет на 2π , т. е. время, за которое $G(u)$ увеличится на ΔG и $j(\omega)$ увеличится на Δj .

Согласно (5.3.11) величина $j(\omega)$ возрастет на Δj в среднем за то же самое время, за которое ω возрастет на $2\pi\Delta G/\Delta j$, а из (5.3.12) и (5.3.10) следует, что ω возрастает со средней скоростью n_r . Поэтому драконический период определяется как $2\pi/n_\beta$, где

$$n_\beta = n_r \frac{\Delta j}{\Delta G}.$$

Сидерическим периодом называется время, за которое θ изменится на 2π ; это есть время, необходимое для того, чтобы $g(u)$ возросло на 2π . За это время u увеличится в среднем на величину $2\pi/(1-f)$. Поэтому сидерический период определяется как $2\pi/n_\theta$, где

$$n_\theta = n_\beta (1-f).$$

Вековые изменения обычных экваториальных элементов, которые соответствуют полученному невозмущенному решению, находятся легко. За один аномалистический период $2\pi/n_r$ величина $G(u)$ увеличится на Δj и поэтому u возрастет в среднем на $2\pi\Delta j/\Delta G$, что превышает один оборот на $2\pi(\Delta j/\Delta G - 1)$. Отсюда в среднем

$$\dot{\omega} = n_\beta - n_r. \quad (5.3.1.1)$$

За один драконический период $2\pi/n_\beta$ величина u возрастает на 2π , а θ на Δg или на $\pm 2\pi(1-f)$. Это превышает $\pm 2\pi$ на $\mp 2\pi f$. Поэтому в среднем

$$\dot{\Omega} = \mp f n_\beta = \pm (n_\theta - n_\beta), \quad (5.3.1.2)$$

где верхний знак справедлив для прямого, а нижний — для обратного движения. Для прямого движения в среднем

$$\dot{\tilde{\omega}} = n_0 - n_r. \quad (5.3.1.3)$$

Оскулирующими значениями канонических постоянных являются такие их значения, которые определяют невозмущенное решение, соответствующее гамильтониану H_0 согласно (5.3.1). Эти значения канонических постоянных определяют координаты и скорости в момент оскуляции. В работе [1] описан метод нахождения оскулирующих значений канонических постоянных, соответствующих заданным координатам и компонентам скорости в момент оскуляции. В качестве примера рассмотрим движение, заданное такими начальными значениями координат и компонент скорости:

$$\begin{aligned} r &= 1,0504624, & \dot{r} &= 0, \\ \beta &= 0, & r\dot{\beta} &= 0,7130711, \\ \theta &= 0, & r\dot{\theta} &= 0,7130711. \end{aligned}$$

За единицу расстояния примем величину 6 378 388 м, единицу времени выберем так, чтобы $\mu=1$. В этой системе единиц $B=0,0005458$.

Оскулирующие значения канонических постоянных и промежуточных параметров таковы:

$$\begin{aligned} -2\alpha_1 &= 0,8878799, & \beta_1 &= 0, \\ \alpha_2^2 &= 1,121435651, & \beta_2 &= 0, \\ \alpha_3^2 &= 0,5610825, & \beta_3 &= 0, \\ a &= 1,126156241, & e &= 0,0672143, \\ c &= 0,000244406, & \sin^2 i = x_1^2 &= 0,499349205. \end{aligned}$$

Три рассмотренных выше средних движения, периоды и скорости векового изменения элементов ω , Ω и $\tilde{\omega}$,

соответствующие оскулирующему невозмущенному решению, имеют следующие значения:

$$n_r = 0,8366260, \quad P_r = 100^m 59^s ,401,$$

$$n_\beta = 0,8374450, \quad P_\beta = 100^m 53^s ,475,$$

$$n_\theta = 0,8366739, \quad P_\theta = 100^m 59^s ,054,$$

$$\dot{\omega} = 5^\circ 01' 30'' \text{ за сутки},$$

$$\dot{\Omega} = 4^\circ 43' 52'' \text{ за сутки},$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = 0^\circ 17' 38'' \text{ за сутки}$$

(единица времени равна 806^s , 8284).

5.3.2. Новое решение. Возмущения

Для нахождения возмущений удобнее вместо пары канонических параметров α_1 и β_1 рассматривать α и β_1' . Прежний параметр α_1 заменяется в решении дифференциального уравнения Гамильтона—Якоби величиной $-\mu^2/2\alpha^2$, а уравнение должно быть записано в форме (4.5.3.1) вместо (4.5.3.3). Невозмущенное решение остается прежним, за исключением первой формулы (5.3.3), которую надо заменить такой:

$$nt - \beta_1' = nJ, \quad (5.3.3')$$

где $n = \mu^2/\alpha^3$, что равносильно величине $(-2\alpha_1)^{3/2}/\mu$. Поэтому члены в левой части (5.3.9) и (5.3.10) следует заменить на $nt - \beta_1'$, а члены правых частей умножить на n/n_r , так что (5.3.10) примет вид

$$nt - \beta_1' = \frac{n}{n_r} (E - e' \sin E). \quad (5.3.10')$$

Новый набор канонических параметров ($\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1', \beta_2, \beta_3$) удовлетворяет обычным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_s &= \frac{\partial H_1}{\partial \beta_s}, \\ \dot{\beta}_s &= - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_s} \end{aligned} \quad (5.3.2.1)$$

при естественном условии, что n не является переменной при вычислении $\partial H_1/\partial a$ и что левая часть (5.3.10') заменена на $\int n dt - \beta'_1$, причем канонические параметры при этом считаются переменными.

В [1] показано, что возмущения канонических параметров можно рассчитать точно через члены порядка B , если преобразовать правые части уравнений (5.3.2.1), выбрав для этого подходящую эллиптическую орбиту

$$n, t - \beta'_1 = E - e \sin E,$$

$$r = a(1 - e \cos E),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E,$$

$$u = (1 + K) w - \beta_2,$$

$$\sin \beta = \sin i \sin u,$$

где a достаточно близко к $-\mu/2\alpha_1$ и где $1+K=\Delta j/\Delta G$, т. е. K — величина порядка 0,001 для реальной орбиты ИСЗ.

Мы не будем выводить здесь полных выражений для всех возмущений канонических переменных, даже первого порядка относительно B , и найдем только вековые члены, влияние которых может стать значительным по прошествии достаточно большого времени. Если начальное значение n при $t=0$ обозначить через n_0 , то

$$n = n_0 + \int_0^t \frac{dn}{dt} dt = n_0 - 3\mu^2 \int_0^t \frac{\dot{a}}{a^4} dt =$$

$$= n_0 - 3\mu^2 \int_0^t a^{-4} \frac{\partial H_1}{\partial \beta'_1} dt =$$

$$= n_0 + 3\mu^2 \int_0^t a^{-4} \frac{\partial H_1}{n dt} dt = n_0 + 3 \int_0^t \frac{dH_1}{a dt} dt.$$

Это — точные выражения, поскольку $\partial/n \partial t = -\partial/\partial \beta'_1$ и поскольку оскулирующий характер канонических пере-

менных позволяет считать частную производную по времени ∂/dt от некоторой функции координат, когда канонические переменные не меняются, равной полной производной по времени d/dt . Отсюда с точностью до членов первого порядка относительно B

$$\int_0^t n dt = n_0 t + 3n_0^{1/3} \mu^{-2/3} \int_0^t [H_1(t) - H_1(0)] dt,$$

так что возмущение величины $\int n dt$ выражается через интеграл. Функция $H_1(t)$ зависит от w и r ; r есть функция w , поэтому приведенное выше выражение можно интегрировать, используя для замены переменных соотношение (5.2.4). Если проделать выкладки, то мы найдем, что интеграл по времени от $H_1(t)$ содержит только малую постоянную, периодические члены порядка $8''$ для реальной орбиты ИСЗ и не содержит вековых членов. Однако член $H_1(0)$ вносит в выражение $\int n dt$ вековой член вида $F n_0 t$, где

$$\begin{aligned} F &= -3(-2a_1)^{-1} H_1(0) = \\ &= -9B \left[\left(\sin^2 \beta - \frac{1}{2} x_1^2 \right) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(\frac{a}{r} - \frac{11}{1-e^2} \right) \frac{1}{a^2} \right]_{t=0} \end{aligned} \quad (5.3.2.2)$$

с точностью до членов первого порядка относительно B . Простые вычисления показывают, что у β_1' нет вековых возмущений в членах первого порядка относительно B . Поэтому левую часть формулы (5.3.10'), исправленную с учетом вековых возмущений первого порядка относительно B , следует записать в виде

$$n_0 t (1 + F) + \text{const.} \quad (5.3.2.3)$$

Чтобы найти возмущенные значения левых частей (5.3.9) и (5.3.10), мы должны умножить выражение (5.3.2.3) на n_r/n . Формула (5.3.8) показывает, что n_r есть функция a , поэтому n_r/n тоже зависит от a . Докажем, что отношение n_r/n отличается от единицы только членами второго и выше порядков относительно B . Из (5.3.4) следует, что сумма корней кубического уравне-

ния $rL^2=0$ равна $\mu/(-a_1)$; но она равна также $2a+c$, и поэтому имеем точное равенство

$$\frac{\mu}{-2aa_1} = 1 + \frac{c}{2a},$$

и из (5.3.8) найдем

$$\frac{n_r}{n} = 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{c}{2a} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \dots$$

Но c есть величина порядка B , откуда получаем, что n_r/n отличается от единицы только членами второго порядка и выше относительно B . Поэтому для вековых членов порядка B справедливо, что единственный эффект от возмущающего гамильтониана H_1 в (5.3.9) и (5.3.10), из которых определяются E и r , сводится к тому, что в этих уравнениях среднее аномалистическое движение, определяемое согласно (5.3.8), возрастает на постоянную величину $n_r F$. Если учесть это, то первоначальный канонический параметр β_1 можно определить как вековую постоянную в (5.3.9) и (5.3.10).

Канонический параметр β_1' не содержит вековых членов в первом порядке относительно B , но содержит долгопериодический член вида

$$-\frac{3B}{4a^2(1-e^2)^{3/2}} x_1^2 [\sin 2(K\omega - \beta_2) - \sin 2(K\omega_0 - \beta_2)].$$

Какой бы ни была величина K , будет ли наклонение отличаться от «критического» значения $63^\circ 26'$, при котором $K=0$, или будет близким к нему, амплитуда этого долгопериодического члена остается умеренной и просто пропорциональной $\sin^2 i$. У реальной орбиты близкого ИСЗ эта амплитуда равна примерно $33''$, период — около 36 суток, наибольшее изменение члена за одни сутки составляет около $6''$.

Каноническая переменная β_2 не имеет вековых возмущений в членах первого порядка, но имеет такой же долгопериодический член, как и β_1' , только имеющий обратный знак и дополнительный множитель $1/\sqrt{1-e^2}$. Численно эти члены почти одинаковы.

Канонические переменные β_3 , a , a_2 не имеют векторных возмущений в членах первого порядка, а a_3 не имеет никаких возмущений в любом порядке и является интегралом движения, аналогичным циклической координате θ .

5.4. Сопротивление атмосферы

Прежде чем перейти к учету влияния сопротивления атмосферы на движение спутника по орбите, необходимо сделать несколько замечаний о природе возникающих при этом сил.

Сопротивление воздуха движущемуся телу имеет, вообще говоря, шесть компонент: три составляющих силы и три момента этих сил. В совокупности все это делает движение асимметричного тела очень сложным. Для невращающейся сферы с площадью поперечного сечения A , движущейся со скоростью v в среде с плотностью ρ сопротивление определяется единственной составляющей, направленной против v и равной

$$\frac{1}{2} C_D A \rho v^2.$$

Это — так называемое *лобовое сопротивление*. Безразмерная величина C_D , которая называется *аэродинамическим коэффициентом лобового сопротивления*, зависит от таких безразмерных величин, как число Маха и число Рейнольдса, а также от отношения радиуса сферы к средней длине свободного пробега молекул среды. Если радиус сферы велик по сравнению со средней длиной свободного пробега, то C_D может быть найден экспериментально и является величиной порядка единицы. Но когда сфера, захватывающая или отражающая ударяющиеся молекулы, мала по сравнению с длиной их свободного пробега, величина C_D близка к 2. Для вытянутых тел вращения, какими являются некоторые ИСЗ и все обычные ракеты, основной составляющей сопротивления является не лобовое сопротивление, а *подъемная сила*, перпендикулярная к направлению движения и зависящая от угла между осью симметрии тела и направлением движения. По величине она часто

превышает лобовое сопротивление. Кроме общего момента этих сил, в случае вращения тела появляются еще и другие моменты, влияющие на ориентацию тела и отсюда на лобовое сопротивление и на подъемную силу. Точное предсказание движения такого тела по орбите невозможно из-за отсутствия достаточной информации об ориентации и вращении тела вдоль всей орбиты, а также из-за отсутствия достаточного знания о функциональной зависимости шести компонент аэrodинамической силы от физических и геометрических параметров.

В некоторых задачах о несферических искусственных спутниках лучше всего оказывается учитывать среднее лобовое сопротивление и пренебрегать подъемной силой. В среднем за продолжительное время движения подъемная сила может иметь тенденцию статистически стремиться к нулю, так как ориентация меняется, а лобовое сопротивление, осредненное по всем положениям, будет конечной величиной. Но следует иметь в виду, что движения, предсказанные таким способом, будут содержать статистическую неопределенность, что может сделать бесполезным тонкий динамический анализ. Лобовое сопротивление определяется, как и раньше, выражением

$$\frac{1}{2} C_D A \rho v^2,$$

но A должно браться как осредненная величина. Если все положения принимаются спутником с одинаковой частотой, как при случайному бросании или как при определенных типах прецессионного движения, когда у орбит изменяется Ω , то соответствующая осредненная величина площади A равна $1/4$ площади внешней поверхности спутника. Можно показать, что площадь поперечного сечения любого выпуклого тела, осредненная по всем направлениям геометрической проекции, равна $1/4$ полной внешней поверхности этого тела¹. Действительно, малый элемент площади внешней поверхности dS в проекции на направление, определяемое углом

¹ Автор не знает, кто первым доказал общую теорему.

θ к внешней нормали, равен $\cos \theta dS$. Проекция dS , осредненная по всем направлениям, равна

$$\frac{1}{2\pi} dS \int_0^{\pi/2} 2\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} dS.$$

Суммируя по всем dS , найдем величину, равную $\frac{1}{2}$ общей площади внешней поверхности. Так как каждый элемент поверхности тела при этом брался дважды, то средняя проекция площади поперечного сечения выпуклого тела равна половине полученной величины, т. е. $\frac{1}{4}$ площади внешней поверхности. Заметим, что выпуклым телом называется тело, поверхность которого прямая линия пересекает только дважды.

5.5. Влияние сопротивления воздуха. Плоская орбита

Уравнения (4.5.9.5) определяют зависимость оскулирующих элементов от времени под действием любой возмущающей силы и могут служить основой для анализа влияния сопротивления воздуха на движение близкого ИСЗ. Однако поучительно поставить задачу в более простом виде.

Рассмотрим сферическую планету, окруженную стационарной атмосферой, плотность которой $\rho(r)$ является функцией расстояния от центра планеты. Уравнения Лагранжа для движения спутника сферической формы с массой m , малой по сравнению с массой планеты, имеют вид

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + F_r,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta,$$

где μ — произведение массы планеты на постоянную тяготения, r и θ — планетоцентрические полярные координаты спутника в плоскости его движения относительно неподвижных осей, а F_r и F_θ — составляющие силы сопротивления на единицу массы спутника, соответ-

вующие координатам r и θ . Движение происходит в неподвижной плоскости, поскольку силы расположены в этой же плоскости. Как было отмечено, сила сопротивления воздуха определяется для сферического тела величиной $(1/2)C_D A \rho v^2$, где C_D (при условии, что сфера мала по сравнению с длиной свободного пробега молекул воздуха) имеет значение, близкое к 2. В этом случае

$$F_r = -b r \dot{v} \rho(r),$$

$$F_\theta = -b r^2 \dot{\theta} v \rho(r),$$

где

$$b = C_D A / 2m.$$

Если r заменить на $1/u$, а $r^2\dot{\theta}$ на c , уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

$$\frac{dc}{c d\theta} = -\frac{b\rho}{u} \sqrt{1 + \left(\frac{du}{u d\theta}\right)^2}, \quad (5.5.1)$$

поскольку скорость

$$v = cu \sqrt{1 + (du/u d\theta)^2}.$$

Из первого уравнения (5.5.1) получаем

$$u = [1 + e \cos(\theta - \tilde{\omega})] \frac{1}{a(1 - e^2)}, \quad (5.5.2)$$

где

$$c^2 = \mu a (1 - e^2).$$

Принимается, что первые производные по θ от a , e и $\tilde{\omega}$, обозначаемые a' , e' и $\tilde{\omega}'$, связаны двумя линейными соотношениями, которые можно записать в виде

$$a' \frac{\partial u}{\partial a} + e' \frac{\partial u}{\partial e} + \tilde{\omega}' \frac{\partial u}{\partial \tilde{\omega}} = 0,$$

$$a' \frac{\partial u'}{\partial a} + e' \frac{\partial u'}{\partial e} + \tilde{\omega}' \frac{\partial u'}{\partial \tilde{\omega}} = 0,$$

так что величина $du/d\theta = u'$ равна

$$u' (a, e, \tilde{\omega}, \theta) = - \frac{e \sin (\theta - \tilde{\omega})}{a (1 - e^2)},$$

а

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = - \frac{e \cos (\theta - \tilde{\omega})}{a (1 - e^2)}.$$

Зная выражение для $du/d\theta$, можно выражение для скорости v записать в виде

$$v = \frac{c \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos (\theta - \tilde{\omega})}}{a (1 - e^2)},$$

откуда с учетом (5.5.2) и соотношения $c = r^2 \dot{\theta}$ получаем, что a, e, ω являются мгновенными значениями оскулирующих эллиптических элементов, т. е. элементами обычного кеплеровского эллипса, по которому двигался бы спутник, если бы сопротивление воздуха в данный момент обратилось бы в нуль и в дальнейшем движение было бы невозмущенным.

Линейные соотношения между a', e' и $\tilde{\omega}'$ совместно с (5.5.2) и второй формулой (5.5.1) дают возможность выразить производные по θ от a, e и ω (т. е. a', e' и $\tilde{\omega}'$) как умноженные на $b\rho(r)$ функции от $a, e, \tilde{\omega}, \theta$. Легко найти, что

$$\tilde{\omega}' = - 2b\rho(r) a \frac{1 - e^2}{e} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos (\theta - \tilde{\omega})}}{[1 + e \cos (\theta - \tilde{\omega})]^2} \sin (\theta - \tilde{\omega}). \quad (5.5.3)$$

Производная $d\tilde{\omega}/d\theta$ является нечетной функцией от $\theta - \tilde{\omega}$, так как $\rho(r)$ тоже нечетная функция этого аргумента. Поэтому в первом порядке относительно b величина $\tilde{\omega}$ испытывает только периодические возмущения, малые по величине, так как $b\rho(r)$ очень мало. Производные по θ от a и e определяются точными равенствами

$$a' = - 2b\rho(r) a^2 \frac{[1 + e^2 + 2e \cos (\theta - \tilde{\omega})]^{3/2}}{[1 + e \cos (\theta - \tilde{\omega})]^2}, \quad (5.5.4)$$

$$e' = -2b\rho(r)a(1-e^2)[e + \cos(\theta - \tilde{\omega})] \times \\ \times \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos(\theta-\tilde{\omega})}}{[1+e\cos(\theta-\tilde{\omega})]^2}, \quad (5.5.5)$$

из которых видно, что a и e претерпевают вековое уменьшение при возрастании θ , так как правые части этих соотношений зависят только от $\theta - \tilde{\omega}$. Вековое уменьшение a и e является основным эффектом влияния сопротивления атмосферы на движение близкого ИСЗ.

Интересно найти порядок величины изменений элементов и подробно выяснить их природу. Рассмотрим сферический ИСЗ радиусом 25 см и массой 10 кг, орбита которого расположена между высотами 300 км (перигей) и 700 км (апогей). Поскольку на высоте 300 км средняя длина свободного пробега составляет около 10 км, то коэффициент C_D близок к 2, а $b \approx 0,2$.

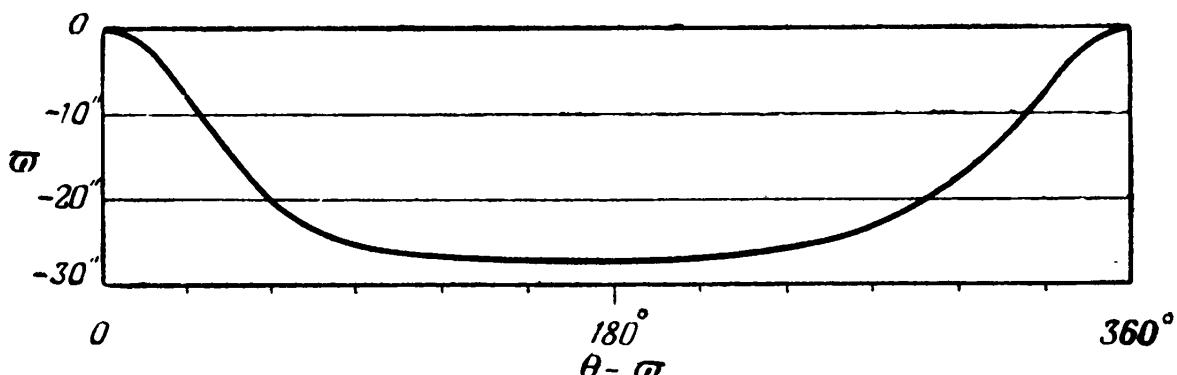


Рис. 5.

Плотность ρ в перигее согласно [4] равна примерно $5 \cdot 10^{-14} \text{ г/см}^3$, а в апогее примерно $2 \cdot 10^{-16} \text{ г/см}^3$. Среднее расстояние от центра Земли a равно около $6,9 \cdot 10^8 \text{ см}$, а эксцентриситет орбиты e равен примерно 0,029. Распределение плотности по высоте было определено экспериментально и для интересующего нас диапазона высот представлено в табл. 4. Приближенное численное интегрирование уравнения (5.5.3), в правой части которого величины a и e заданы начальными значениями, а $\tilde{\omega}$ принято равным нулю, дает для ω величины, показанные на рис. 5, из которого видно,

что изменение $\tilde{\omega}$ достигает примерно $26''$. Если пренебречь указанным изменением $\tilde{\omega}$, то это приведет к ошибке в долготе не более чем на $2e \cdot 13''$, что составляет примерно $1''$ или $0^s,004$ по времени, в то время как орбитальный период равен примерно 94,6 мин. Полученное здесь возмущение $\tilde{\omega}$ является возмущением первого порядка, т. е. величиной $\tilde{\omega}_1$, поскольку элементы в правой части (5.5.3) задаются своими начальными значениями. Возмущение второго порядка $\tilde{\omega}_2$, возникающее из-за присутствия $\tilde{\omega}$ в правой части уравнения, может быть найдено, если заменить множитель $\sin \theta$ на $\tilde{\omega}_1 \cos \theta$ и снова проинтегрировать уравнение, приняв,

Таблица 4
Зависимость плотности атмосферы
от высоты

Высота, км	Плотность, g/cm^3	Высота, км	Плотность, g/cm^3
200	$5,91 \cdot 10^{-13}$	500	$2,28 \cdot 10^{-15}$
250	$1,47 \cdot 10^{-13}$	550	$1,21 \cdot 10^{-15}$
300	$4,84 \cdot 10^{-14}$	600	$6,68 \cdot 10^{-16}$
350	$1,90 \cdot 10^{-14}$	650	$3,71 \cdot 10^{-16}$
400	$8,74 \cdot 10^{-15}$	700	$2,04 \cdot 10^{-16}$
450	$4,35 \cdot 10^{-15}$		

что $\tilde{\omega}_1$ можно грубо представить в виде

$$\tilde{\omega}_1 = 13'' (\cos \theta - 1).$$

Оказывается, что $\tilde{\omega}_2$ содержит вековой член, составляющий $0'',3$ в сутки или около $10''$ в месяц, что приводит к ошибке в положении спутника на орбите $0'',6$ после месяца обращения по орбите или к ошибке во времени $0^s,002$. Для спутников на низких высотах рассматривать такого рода эффекты не имеет смысла, так как польза от их учета ничтожна по сравнению с неуверен-

ностью данных о плотности атмосферы и параметрах сопротивления.

Интегрирование уравнения (5.5.4) дает изменение a , представленное на рис. 6 для одного оборота. Вековое уменьшение за один оборот a составляет $20 \cdot 10^{-6}$. На вековое изменение накладываются периодические вариации с периодом обращения по орбите и амплитудой около 35 м , или $5 \cdot 10^{-6}$ от a .

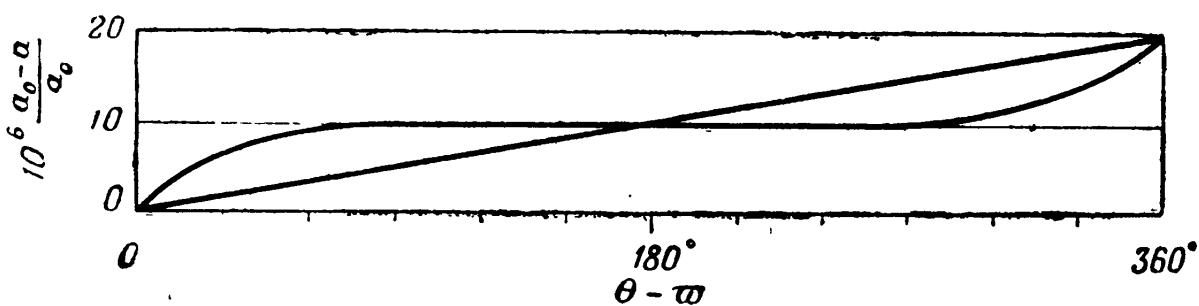


Рис. 6

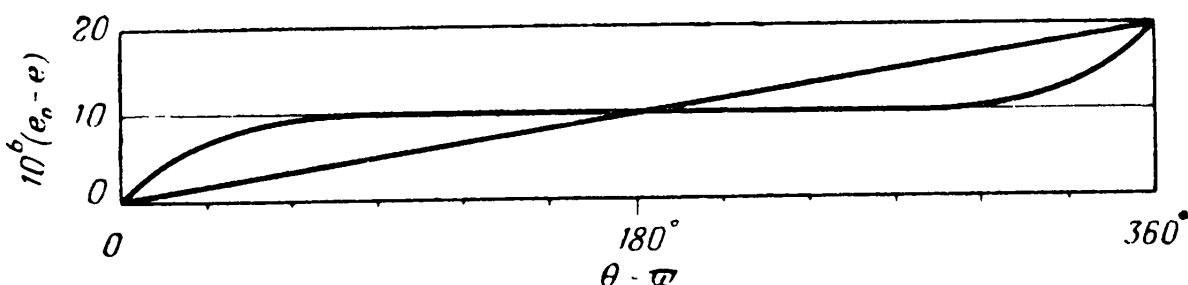


Рис. 7

Интегрирование уравнения (5.5.5) дает изменение e , представленное на рис. 7. Вековое уменьшение составляет примерно $17 \cdot 10^{-6}$ за один оборот. На него накладываются периодические вариации с амплитудой около $5 \cdot 10^{-6}$ и периодом обращения по орбите. Совершенно ясно, что для всех оскулирующих элементов возмущения второго порядка возникают от периодических изменений элементов в правых частях уравнений (5.5.3) — (5.5.5). Это, однако, не относится к элементам a и e . Вековые возмущения a и e , найденные выше, приводят к снижению высоты перигея на 17 м за оборот и к снижению высоты апогея примерно на 260 м . За месяц это снижение составит 8 км и 120 км соответственно, а за три месяца орбита существенно изменится. Отсюда возникает необходимость решать уравнения (5.5.4)

и (5.5.5) методом последовательных приближений, причем вековые вариации a и e учитывать одновременно. Существует ряд удобных для этой цели форм, в которых могут быть записаны уравнения. Однако необходимо отметить, что даже для быстро эволюционирующих орбит низких ИСЗ периодические возмущения оскулирующих элементов несущественны. Из практических расчетов ясно, что, пренебрегая периодическими изменениями a , e и ω , мы допускаем при определенных значениях θ ошибку в r меньше 10 м, а во времени меньше 0^s,001.

Если умножить обе части уравнений (5.5.3) — (5.5.5) на $\dot{\theta} = c/r^2$, то мы найдем

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -2b\rho(r)na^2(1+e^2+2e\cos\omega)^{3/2}(1-e^2)^{-3/2}, \\ \dot{e} &= -2b\rho(r)na\sqrt{1+e^2+2e\cos\omega}\frac{e+\cos\omega}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \dot{\tilde{\omega}} &= -2b\rho(r)na\sqrt{1+e^2+2e\cos\omega}\frac{\sin\omega}{e\sqrt{1-e^2}},\end{aligned}\quad (5.5.6)$$

где ω — истинная аномалия возмущенного движения и, как обычно, равна $\theta - \tilde{\omega}$. Чтобы получить аналогичное уравнение для изменения средней долготы в эпоху ε , можно положить в последней формуле (4.5.9.5)

$$S = -b\rho\dot{r}v,$$

$$T = -b\rho r\dot{\theta}v,$$

откуда

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 2b\rho(r)na\sin\omega\sqrt{1+e^2+2e\cos\omega} \times \\ &\times \left[\frac{e}{1+e\cos\omega} - \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{1-e^2}} \right].\end{aligned}$$

В уравнениях (5.5.3) — (5.5.6) функция $\rho(r)$ считается заданной эмпирически, поэтому общего аналитического решения этих уравнений получить нельзя. Однако эти уравнения можно записать в других формах, которые позволяют быстро получать решение методом последовательных приближений с очень большой точно-

стью, причем шаги по времени превышают сотни оборотов. Формально этот метод, вероятно, следует считать методом, определяющим скорее специальные, чем общие возмущения; но допустимые шаги по времени в тысячи раз больше шагов, применяемых в точном интегрировании уравнений движения, а интегрирование можно довести до конца аналитическими приближениями. Наконец, таким методом можно дать общую динамическую интерпретацию, не ограничивающуюся особыми случаями. Рассмотренный выше конкретный числовой пример будет использован и при дальнейшем изложении.

5.6. Методы интегрирования. Плоские орбиты с учетом сопротивления среды

Члены в правых частях (5.5.3)–(5.5.5) при заданной функции плотности атмосферы $\rho(r)$ являются функциями a , e и ω . Можно взять за независимую переменную истинную или эксцентрическую аномалию возмущенного движения, но в тех случаях, когда e мало, это приводит к трудностям, так как $\tilde{\omega}$ является величиной, периодические возмущения которой имеют амплитуду, пропорциональную $1/e$; поэтому, когда e мало (порядка 10^{-5}), величины $d\tilde{\omega}/dt$ и dE/dt могут изменяться в широких пределах. Поэтому истинная и эксцентрическая аномалии возмущенного движения не пригодны в качестве независимых переменных для дифференциальных уравнений движения. Вместо них лучше использовать в качестве независимой переменной истинную долготу θ' , отсчитываемую отperiцентра

$$\theta' = \theta - \tilde{\omega}_0 t$$

или еще более удобную эксцентрическую переменную E , определяемую равенством

$$\cos \theta' = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} , \quad (5.6.1)$$

в котором не возникает особенностей при $e \rightarrow 0$.

Дифференцируя (5.6.1) по E , найдем

$$\frac{d\theta'}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} + \frac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}(1-e \cos E)} \frac{de}{d\theta'} \frac{d\theta'}{dE},$$

откуда

$$\frac{d\theta'}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E} \left(1 - \frac{de}{d\theta'} \frac{\sin E}{1-e \cos E} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right)^{-1}.$$

Разложим правую часть (5.5.4) в ряд Тейлора по степеням $\tilde{\omega}_1$ вблизи $\theta' = \theta - \tilde{\omega}_0$, причем $\tilde{\omega}_1$ есть просто $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0$, т. е. возмущение $\tilde{\omega}$. В результате получим

$$\begin{aligned} a'(a, e, \theta - \tilde{\omega}) &= \\ &= a'(a, e, \theta') \left[1 + e \tilde{\omega}_1 \frac{\sin E (1 - 2e \cos E)}{1 + e \cos E} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Умножая обе части на $d\theta'/dE$, найдем

$$\begin{aligned} \frac{da}{dE} &= -2b\rho(r) a^2 \frac{(1+e \cos E)^{3/2}}{\sqrt{1-e \cos E}} \times \\ &\quad \times \left[1 + \tilde{\omega}_1 \frac{e \sin E (1 - 2e \cos E)}{\sqrt{1-e^2}(1+e \cos E)} + \dots \right] \frac{1}{D}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D &= 1 - \frac{de}{d\theta'} \frac{\sin E}{1-e \cos E} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \\ &= 1 + 2b\rho a \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} \sin E \cos E, \end{aligned}$$

что справедливо с точностью до членов второй степени относительно ρ . Множитель $1/D$ равен единице минус сумма периодических членов с амплитудой $7 \cdot 10^{-6}$ для приведенного выше примера ИСЗ с малой высотой орбиты; для больших высот этот множитель еще меньше. Произведение величины $1/D$ и множителя перед квадратными скобками есть нечетная функция E , интеграл от которой за один оборот равен нулю независимо от величины амплитуды. Возмущение первого порядка $\tilde{\omega}_1$, найденное выше, должно быть такой же функцией с амплитудой (в рассматриваемом примере) около 10^{-4} .

Член, на который умножается это возмущение, есть нечетная функция с амплитудой $4 \cdot 10^{-6}$ для нашего примера, практически не зависящая от e . Произведение этого слагаемого на множитель перед квадратными скобками есть нечетная функция E , и интеграл от нее за один оборот равен нулю. Поэтому в a нет вековых членов во втором порядке относительно функции плотности. В третьем порядке есть вековые члены, но они по величине меньше $(0,1)^{10}$ полной величины da/dE , которая сама мала. С большой степенью точности имеем

$$\frac{da}{dE} = -2b\rho(r)a^2 \frac{(1+e\cos E)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e\cos E}}. \quad (5.6.2)$$

Тем же способом найдем из (5.5.5) с очень хорошим приближением

$$\begin{aligned} \frac{de}{dE} &= -2b\rho(r)a(1-e^2) \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \cos E \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\omega}_1 \frac{\sin E (1-2e^2\cos^2 E)}{\sqrt{1-e^2}\cos E (1+e\cos E)} + \dots \right] \frac{1}{D} = \\ &= -2b\rho(r)a(1-e^2) \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \cos E, \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

а из (5.5.3)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\omega}}{dE} &= -2b\rho(r)a \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \sin E \left[1 - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\omega}_1 \frac{\operatorname{ctg} E}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1-e^2+2e^2\sin^2 E}{1+e\cos E} + \dots \right] \frac{1}{D}, \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

где сохранены члены второго порядка относительно $\rho(r)$, так как они порождают слабое вековое движение перигея, отсутствующее при учете членов только первого порядка.

Из уравнения $r^2\dot{\theta}=c$ получим

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{n[1+e\cos(\theta-\tilde{\omega})]^2},$$

откуда тем же методом, что и выше, найдем

$$\frac{dt}{dE} = \frac{1 - e \cos E}{n} \left[1 - \tilde{\omega}_1 \frac{2e \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} \right] \frac{1}{D}. \quad (5.6.5)$$

Множитель $1/D$ и член, содержащий $\tilde{\omega}_1$, определяют вековое влияние t на E , составляющее несколько единиц 10^{-11} , но они же порождают периодические вариации t в зависимости от E , которые могут иметь амплитуду, доходящую до $0^s,003$. Основное влияние сопротивления среды оказывается на величине n , которая растет пропорционально ρ , так как $n^2 a^3 = \mu$. Интегрирование уравнений (5.6.2) — (5.6.5) дает величины a , e , $\tilde{\omega}$ и t как функции E . Долгота θ получается просто из равенства

$$\theta = \tilde{\omega}_0 + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E,$$

а радиус-вектор

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(\theta - \tilde{\omega})} = a(1-e \cos E) \times \\ \times \left[1 + e \tilde{\omega}_1 \sin E \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \dots \right],$$

где влияние $\tilde{\omega}_1$ на изменение r меньше 10^{-6} . Следует заметить, что член с $\tilde{\omega}_1$ равен нулю в перигалактике, где влияние сопротивления больше всего, и подынтегральная функция, включающая плотность, принимают наибольшие значения. Именно поэтому, а также потому, что неуверенность в величине $\rho(r)$ сама по себе велика, аргумент функции $\rho(r)$ на практике можно брать просто в виде $a(1-e \cos E)$. Интегрирование уравнений легко дает возможность получить следующие результаты.

Уравнения (5.6.2) и (5.6.3) можно проинтегрировать численно по переменной E и получить изменения величин a и e за один оборот, т. е. Δa и Δe :

$$\Delta a = -2b \int_{-\pi}^{\pi} \rho(r) a^2 \frac{(1+e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e \cos E}} dE, \quad (5.6.6)$$

$$\Delta e = -2b \int_{-\pi}^{\pi} \rho(r) a(1-e^2) \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} \cos E dE, \quad (5.6.7)$$

С большой степенью точности можно ограничиться первым порядком относительно плотности ρ , так как вторая степень ρ является пренебрежимо малым множителем и не меняет значения интегралов. Поскольку вековые изменения за один оборот величин a и e составляют весьма незначительные величины — порядка $20 \cdot 10^{-6}$, то можно пренебречь изменением a и e во время интегрирования, и при вычислении подынтегрального выражения могут быть использованы значения a и e в перицентре ($E=0$), причем ошибка от такого приближения составляет около 10^{-10} . Далее из соображений симметрии следует, что интегрировать надо только на половине оборота. На практике получается, что достаточно вычислить 13 значений подынтегрального выражения (через 15°) или 7 (через 30°) для получения надежных значений Δe и Δa , если пользоваться формулой Симпсона или другой, более точной квадратурной формулой.

Можно считать, что величины a и e имеют следующие средние скорости изменения в зависимости от E , т. е. от θ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dE} &= \frac{\Delta a}{2\pi}, \\ \frac{de}{dE} &= \frac{\Delta e}{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

Средние скорости изменения da/dE и de/dE являются функциями a и e . Поэтому уравнения (5.6.8) можно решать методом последовательных приближений по способу, который будет описан в следующей главе, но с шагами по E порядка сотен оборотов. Находя a и e для различных E , лучше умножать их на 2π . Уравнение (5.6.5) можно проинтегрировать обычным способом за полный оборот по E и найти изменение t , т. е. сидерический период, который был определен выше. Он равен просто

$$\Delta t = \frac{2\pi}{n},$$

потому что ни члены, содержащие $\cos E$, ни множители второго порядка в уравнении (5.6.5) не изменяют величины интеграла за полный оборот, а если n принять за постоянную величину, равную значению n в перицентре, то ошибка от такого приближения будет составлять всего $(0,1)^9$ для орбиты, рассматриваемой нами в качестве примера. Таким образом, промежуток времени от некоторого начального перицентра $E=0$ до какого-то более позднего $E=2\pi N$ с очень большой степенью точности равен величине

$$t = \int_0^{2\pi N} \frac{dE}{n},$$

которую можно затащить в виде таблицы, дающей $1/n = \sqrt{a^3/\mu}$ от E и интегрировать функцию $1/n$ по E при помощи формулы Симпсона или другой подходящей квадратурной формулы. Значения E надо умножать на 2π , но они могут сильно различаться при шагах по E порядка десятков и сотен оборотов. Для промежуточных перицентров t можно найти интерполяцией. Чтобы найти t для E , которое не соответствует перицентру, можно просто прибавить к значению t для ближайшего предыдущего периода $2\pi N'$ интеграл

$$\int_{2\pi N'}^E \frac{1 - e \cos E}{n} dE = \frac{1}{n} (E - e \sin E);$$

здесь n и e заданы своими значениями для середины интервала интегрирования, т. е. для $(2\pi N' + E)/2$, что приводит к допустимой ошибке по времени порядка нескольких тысячных секунды. После большого числа оборотов спутника из-за неуверенности в данных по атмосфере эти ошибки могут, вероятно, быть еще допустимыми, но если это не так, то можно учесть периодические вариации n (возникающие от периодических вариаций a) и e и сохранить множители второго порядка в полных правых частях уравнений (5.6.5).

Мы видим, как движение сферического спутника, обращающегося в атмосфере, плотность которой определяется некоторой эмпирической функцией от r , может быть точно и быстро предсказано на много десятков и даже на сотни оборотов. Для этого надо только вычислить численно несколько определенных интегралов.

Плотность атмосферы ρ скорее является функцией высоты над сфероидальной планетой, чем расстояния от центра планеты. Высота спутника над сфероидальной планетой равна

$$a(1 - e \cos E) - a_e [1 - f \sin^2 i \sin^2(\omega + \Omega)],$$

где ω — истинная аномалия, которую можно найти по обычным формулам эллиптического движения, a_e и b_e — экваториальный и полярный радиусы планеты, f — сжатие, равное $(a_e - b_e)/a_e$, i — наклонение орбиты к экватору планеты, а Ω — угловое расстояние перигея от узла. При заданных i и Ω плотность является функцией a и E . Если предположить, что плотность задается точным значением, рассуждения и выводы разд. 5.5 и 5.6 остаются в силе, только ρ не является теперь функцией одного лишь E . Формулы (5.6.6) и (5.6.7) справедливы с большой степенью точности, и процедура, описанная в настоящем разделе, вполне применима.

5.6.1. Вывод распределения плотности атмосферы по движению спутников

Поскольку период P пропорционален $a^{3/2}$, производная P по времени определяется формулой

$$\dot{P} = \frac{3P}{2a} \dot{a} = \frac{3}{2a} \Delta a,$$

где Δa дается (5.6.6), так что

$$\dot{P} = -\frac{3}{2} C_D \frac{A}{m} a \int_{-\pi}^{+\pi} \rho r \frac{(1 + e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - e \cos E}} de. \quad (5.6.1.1)$$

Уравнение (5.6.1.1) можно использовать для вывода плотности атмосферы по элементам орбиты ИСЗ a и e , физическим параметрам спутника C_D , A и m и данным наблюдений об уменьшении орбитального периода. Модель атмосферы, имеющая свободные параметры, может быть выбрана так, чтобы предвычисление значение \dot{P} согласовывалось с наблюдениями. В принципе два свободных параметра могут быть определены по значениям \dot{P} , соответствующим двум достаточно отличающимся друг от друга орбитам. Этот способ теоретически обоснован и способен при достаточном различии орбит дать высокую точность; однако аналитическое приближение упрощает выкладки и позволяет получить желаемую физическую наглядность.

Хотя интеграл в уравнении (5.6.1.1) учитывает все слои атмосферы междуperiцентром и апоцентром, но, если e не очень малая величина, наиболее существенными будут величины подынтегрального выражения вблизиperiцентра, поскольку с увеличением высоты плотность быстро уменьшается. Можно принять экспоненциальный закон изменения ρ

$$\rho = \rho_\pi \exp(Kz),$$

где ρ_π — плотность в periцентре, z — высота над periцентром, а K — величина, равная значению $-(d/dz) \ln \rho$ в periцентре [5]. Для малых эксцентриситетов это приближение близко к действительности для всех высот в пределах интегрирования, а для больших эксцентриситетов это приближение близко к действительности в области, дающей основной вклад в интеграл.

Так как $z = ae(1 - \cos E)$, уравнение (5.6.1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{P} = & -3C_D \frac{A}{m} a \rho_\pi \exp(-c) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(c \cos E) \times \\ & \times \frac{(1 + e \cos E)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - e \cos E}} dE, \end{aligned} \quad (5.6.1.2)$$

где $c = Kae$. Известно [6], что бесселева функция $I_0(c)$ нулевого порядка от чисто мнимого аргумента равна

$$I_0(c) = J_0(ic) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(c \cos E) dE.$$

Дифференцируя последовательно обе части этой формулы по c и используя известные соотношения между величинами $I_0(c)$, $I_1(c)$ и их производными, найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(c \cos E) \cos^n E dE &= I_0(c) && (n = 0), \\ &= I_1(c) && (n = 1), \\ &= I_0(c) - \frac{1}{c} I_1(c) && (n = 2). \\ &= -\frac{1}{c} I_0(c) + \left(1 + \frac{2}{c^2}\right) I_1(c) \\ &&& (n = 3). \end{aligned}$$

Множитель при экспоненте в подынтегральном выражении (5.6.1.2) может быть разложен в ряд по степеням e

$$\frac{(1 + e \cos E)^2}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 E}} = 1 + 2e \cos E + \frac{3}{2} e^2 \cos^2 E + e^3 \cos^3 E + \dots$$

с точностью до членов порядка e^3 . Уравнение (5.6.1.2) можно теперь записать так:

$$\begin{aligned} \dot{P} = -3C_D \frac{A}{m} a \pi \rho \exp(-c) \left\{ \left[1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{c} e^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots \right] I_0(c) + e \left[2 - \frac{3e}{2c} + \left(1 + \frac{2}{c^2}\right) e^2 + \dots \right] I_1(c) \right\} \\ (5.6.1.3) \end{aligned}$$

с точностью до членов порядка e^3 .

Уравнение (5.6.1.3) справедливо для всех значений c , а практически должно использоваться при малых c ; это может быть только тогда, когда e очень мало и когда

достаточно ограничиться разложением до членов порядка e^3 . Выражение в фигурных скобках может быть разложено в ряд по степеням c :

$$\left\{ \quad \right\} = 1 + \frac{3}{4} e^2 + ce \left(1 + \frac{3}{8} e^2 \right) + \frac{1}{4} c^2 \left(1 + \frac{9}{8} e^2 \right) + \\ + c^3 \frac{e}{8} \left(1 + \frac{5}{12} e^2 \right) + \frac{1}{64} c^4 \left(1 + \frac{5}{4} e^2 \right) + \dots$$

и стремится к единице, когда $c \rightarrow 0$ и $e \rightarrow 0$, что, конечно, ясно видно и из уравнения (5.6.1.2). Когда c велико, асимптотические ряды для бесселевых функций можно использовать при получении приближенного выражения \dot{P} , но полученный результат ограничен точностью разложения по степеням e . Точнее будет произвести замену переменного $\cos E = 1 - y^2/c$ в (5.6.1.2). Уравнение примет вид

$$\dot{P} = -3C_D \frac{A}{m} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e}} a \rho_\pi \sqrt{\frac{2}{c}} \times \\ \times \int_0^{\sqrt{2c}} \exp(-y^2) \left[1 - \frac{e}{c(1+e)} y^2 \right]^2 \left[1 + \frac{2e^2}{1-e^2} \frac{y^2}{c} - \right. \\ \left. - \frac{e^2}{1-e^2} \frac{y^4}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{y^2}{2c} \right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Подынтегральное выражение можно разложить в ряд как функцию $\exp(-y^2)$, умноженную на степенной ряд по y^2 , а затем почленно проинтегрировать. Получается следующее асимптотическое разложение

$$\dot{P} \approx -3C_D \frac{A}{m} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e}} a \rho_\pi \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \left[1 + \frac{1}{8c} f_1 + \right. \\ \left. + \frac{9}{128} \frac{f_2}{c^2} + \dots \right], \quad (5.6.1.4)$$

где

$$f_1(e) = (1 - 8e + 3e^2) \frac{1}{1 - e^2},$$

$$f_2(e) = (3 - 16e + 50e^2 + 16e^3 - 5e^4) \frac{1}{3(1 - e^2)^2}.$$

Уравнение (5.6.1.4) дает исковую величину с достаточно хорошей точностью при условии, что $c > 2$. Это практически имеет место, когда e , а следовательно c , велико, поскольку уравнение справедливо для всех значений e .

Любое из уравнений (5.6.1.3) и (5.6.1.4) определяет скорость изменения периода, т. е. \dot{P} , в зависимости от двух параметров плотности атмосферы: ρ_π и K . Следовательно, наблюденные значения \dot{P} дают информацию о ρ_π и K . Из наблюдений движения двух или более спутников с различными высотами перигея или из наблюдений движения одного спутника в моменты, когда высоты перигея отличаются друг от друга на 25 км и более, можно вывести зависимость плотности от высоты. Метод проб и ошибок, при последовательном сравнении с временно выбранной функцией плотности, представляется столь же правомерным методом, как и другие.

5.6.2. Учет вращения атмосферы и сжатия планеты

В предыдущих разделах принималось, что атмосфера планеты не вращается. Следующим приближением к действительности является учет того факта, что атмосфера как целое вращается вместе с планетой. Тангенциальная составляющая скорости вращения Земли на экваторе составляет около $1/20$ от скорости на орбите близкого спутника, а так как сопротивление среды пропорционально квадрату скорости спутника относительно воздуха, эффект вращения можетказываться на величине сопротивления, а следовательно и на величине

плотности, определяемой по \dot{P} , причем влияние этого эффекта достигает 10%.

Если атмосфера планеты вращается с круговой скоростью ω_s относительно оси вращения планеты, то можно показать [7], что уравнение (5.6.1.1) должно быть заменено следующим:

$$\dot{P} = -\frac{3}{2} C_D \frac{A}{m} a (1-d)^2 \times \\ \times \int_{-\pi}^{+\pi} \rho \frac{\left(1 + \frac{1+d}{1-d} e \cos E\right)^2}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 E}} dE, \quad (5.6.2.1)$$

где

$$d = \frac{\omega_s}{n} \cos i \sqrt{1-e^2},$$

а величина i — наклонение плоскости орбиты к экватору планеты.

Как отмечалось в разд. 5.6, правильнее считать, что плотность есть скорее функция высоты над сфериодальной планетой, чем функция радиуса-вектора. Если за аргумент функции ρ в (5.6.2.1) взять выражение для высоты, которое было приведено выше, то получится уравнение, в котором будут учтены оба интересующие нас фактора — и вращение атмосферы и сжатие планеты. Если принять то же экспоненциальное приближение для плотности

$$\rho = \rho_\pi \exp(-Kz),$$

которое взято в разд. 5.6.1, но теперь считать, что z есть разность между высотой спутника над поверхностью планеты и высотой перицентра над поверхностью планеты, мы получим вместо уравнения (5.6.1.3) следующее:

$$\dot{P} = -3C_D \frac{A}{m} (1-d)^2 a \rho_\pi \exp(-c) \pi \times \\ \times [B_0 I_0(c) + B_1 I_1(c)], \quad (5.6.2.2)$$

где ρ_π теперь обозначает плотность на высоте перицентра

$$\rho_\pi = a(1 - e) - a_e(1 - f \sin^2 i \sin^2 \omega)$$

и где

$$q = K a_e f \sin^2 i,$$

$$q_1 = (1 - e^2)(-q \cos 2\omega + \frac{1}{2} q^2 \sin^2 2\omega),$$

$$q_2 = \frac{1}{2} (1 - e^2)^2 q^2 \cos 4\omega,$$

$$j = \frac{1+d}{1-d}, \quad k = \frac{1+d}{1-d+e+de},$$

$$B_0 = 1 + e^2 \left(j^2 + \frac{1}{2} \right) - e^3 \frac{j}{c} + q_1 \frac{e}{c} \left[2(j+1) - 3 \frac{e}{c} \left(j^2 + 4j + \frac{7}{2} \right) \right] + q_2 \frac{3}{c^2} \left[1 - 8 \frac{e}{c} (j+2) \right],$$

$$B_1 = 2ej - \frac{e^2}{c} \left(j^2 + \frac{1}{2} \right) + \left(1 + \frac{2}{c^2} \right) je^3 + q_1 \frac{1}{c} \left[1 - 4 \frac{e}{c} (j+1) + e^2 \left(1 + \frac{6}{c^2} \right) \left(j^2 + 4j + \frac{7}{2} \right) \right] - q_2 \frac{6}{c^2} \left[\frac{1}{c} - \left(1 + \frac{8}{c^2} \right) e (j+2) \right]$$

с точностью до членов порядка e^3 , $q_1 e^2$ и $q_2 e$, которые достаточно малы.

Приближенный ряд (5.6.1.4) в этом случае заменится на следующий:

$$\begin{aligned} \dot{P} \approx & -3C_D \frac{A}{m} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e}} \left[1 - d \frac{1-e}{1+e} \right]^2 a \rho_\pi \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \times \\ & \times \left[1 + \frac{1}{8c} f_1 + \frac{9}{128c^2} f_2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (5.6.2.3)$$

где

$$f_1 = 1 - 8ek - 4e^2 \frac{1}{1-e^2} + \frac{8q_1}{(1-e)^2},$$

$$\begin{aligned}
 f_2 = 1 + \frac{8}{3} e^2 \frac{1+5e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{16}{3} ek \frac{5e^2-1}{1-e^2} + \\
 + \frac{32}{3} e^2 k^2 - \frac{16}{3} q_1 (1+10e+8ek) + \\
 + \frac{128}{3} q_2 (1+4e).
 \end{aligned}$$

Членами порядка $q_1 e^3$ и $q_2 e^2$ можно пренебречь в f_1 , а членами порядка $q_1 e^2$ и $q_2 e^2$ — в f_2 , поскольку эти члены могут быть большими, если только e велико, а в этом случае c велико и влияние отбрасываемых членов, умноженных соответственно на $1/8c$ и на $9/128 c^2$, очень мало.

5.6.3. Время существования искусственных спутников Земли

Для изучения эволюции орбиты ИСЗ можно воспользоваться методом разд. 5.6, но выяснилось, что вместо того, чтобы вычислять изменения величин a и e , более простым и дающим большую информацию методом является вычисление изменений, которым подвержены расстояния до перигея $q=a(1-e)$ и до апогея $Q=a(1+e)$.

Из уравнений (5.6.2) и (5.6.3) находим

$$\begin{aligned}
 \frac{dq}{dE} = (1-e) \frac{da}{dE} - a \frac{de}{dE} = \\
 = -2b(1-e)a^2 \rho \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} (1-e \cos E),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dE} = (1+e) \frac{da}{dE} + a \frac{de}{dE} = \\
 = -2b(1+e)a^2 \rho \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} (1+e \cos E).
 \end{aligned}$$

Отсюда средние величины производных по времени от q и Q

за оборот равны

$$\dot{q} = -C_D \frac{A}{2m} (1-e) \sqrt{\mu a} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(r) \times \\ \times \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} (1-e \cos E) dE, \quad (5.6.3.1)$$

$$\dot{Q} = -C_D \frac{A}{2m} (1+e) \sqrt{\mu a} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(r) \times \\ \times \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} (1+e \cos E) dE. \quad (5.6.3.2)$$

При экспоненциальном законе изменения плотности, принятом в предыдущем разделе, эти уравнения могут быть выражены через функции Бесселя

$$\dot{q} = -n C_D \frac{A}{m} (1-e) a^2 \rho_\pi \exp(-c) \times \\ \times \left\{ \left[1-e + \frac{1}{2} e^2 \left(1 + \frac{1}{c} \right) + \dots \right] I_0(c) - \right. \\ \left. - \left[1-e \left(1 + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} e^2 \left(1 + \frac{1}{c} + \frac{2}{c^2} \right) + \dots \right] I_1(c) \right\},$$

$$\dot{Q} = -n C_D \frac{A}{m} (1+e) a^2 \rho_\pi \exp(-c) \times \\ \times \left\{ \left[1+e + \frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \dots \right] I_0(c) + \right. \\ \left. + \left[1+e \left(1 - \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{1}{c} + \frac{2}{c^2} \right) + \dots \right] I_1(c) \right\}$$

с точностью до членов порядка e^2 . Если c велико, эти уравнения можно записать в виде приближенных рядов

$$\dot{q} \approx -n C_D \frac{A}{m} \sqrt{1-e^2} a^2 \rho_\pi \sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2c} \right)^{\frac{3}{2}}} \times \\ \times \left[1 + \frac{3}{8c} f_3 + \frac{45}{128c^2} f_4 + \dots \right],$$

$$\dot{Q} \approx -2nC_D \frac{A}{m} \frac{(1+e)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-e}} a^2 \rho_{\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi c}} \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{8c} f_5 - \frac{3}{128c^2} f_6 + \dots \right],$$

где

$$f_3(e) = (1 - 4e - e^2) \frac{1}{1 - e^2},$$

$$f_4(e) = \frac{3 - 8e + 10e^2 + 40e^3 + 3e^4}{3(1 - e^2)^2},$$

$$f_5(e) = \frac{1 + 4e - e^2}{1 - e^2},$$

$$f_6(e) = \frac{1 - 8e - 18e^2 - 24e^3 + e^4}{(1 - e^2)^2}.$$

Величины a и e могут быть найдены в любой момент по q и Q из следующих соотношений:

$$a = \frac{Q + q}{2}, \quad e = \frac{Q - q}{Q + q}.$$

Очевидно, производная

$$\frac{dQ}{dq} = \frac{\dot{Q}}{\dot{q}} \tag{5.6.3.3}$$

является просто функцией двух переменных (q, Q). Уравнение (5.6.3.3), обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с одной независимой переменной, можно проинтегрировать методом, изложенным в следующей главе. Поэтому эволюцию орбиты можно быстро рассчитать до тех пор, пока спутник не снизится в плотные нижние слои атмосферы. При таких расчетах не имеет смысла добиваться высокой точности, поскольку незнание точного значения плотности, меняющейся со временем, или влияние несферичности формы и т. п., делают эту точность иллюзорной. Время существования ИСЗ можно найти путем квадратуры, если знать величину q .

В примере, который рассматривался выше, высота перигея уменьшалась на 17 м за оборот, а высота апо-

геля — на 260 м. Постепенно уменьшение высоты перигея и возрастание плотности атмосферы в перигее происходят со все возрастающей скоростью, и в конце концов спутник столкнется с Землей. Уравнение (5.6.3.1) и (5.6.3.2) должны давать результаты, достаточно близкие к действительности (хотя и не такие близкие, как результаты интегрирования уравнений (5.6.2) и (5.6.3), до тех пор, пока изменения a и e за один оборот не станут такими большими, что их уже нельзя будет не учитывать при интегрировании; такая ситуация возникнет незадолго до конца снижения. Затем a быстро уменьшается до значения, равного примерно половине земного радиуса; другие оскулирующие элементы меняются так, что апогей снижается. Из уравнения (5.5.5) следует, что e начинает возрастать; наконец, спутник или то, что от него осталось, падает подобно авиационной бомбе на поверхность Земли¹.

5.7. Движение искусственного спутника Земли с учетом вращения атмосферы и сжатия Земли

Мы теперь займемся общей теорией движения ИСЗ под действием притяжения вращающейся сплюснутой Земли и сопротивления воздуха. Эта теория справедлива с точностью до членов первой степени относительно J или B (см. разд. 5.2) или до членов первой степени относительно плотности ρ , но не до членов, содержащих произведение $B\rho$. Следует принять во внимание, что мы можем получить разложения до более высоких степеней и учесть произведение $J\rho$. Если сделать такое исследование, оно может дать новые результаты.

Чтобы получить изменения оскулирующих эллиптических элементов, вызванные совместным влиянием сопротивления и сжатия, надо к правым частям уравнений (5.2.2), определяющих изменения, вызванные сжатием Земли, прибавить изменения (4.5.9.5), обусловленные

¹ См. также Охочимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования ИСЗ и исследование вековых возмущений его орбиты, Успехи физ. наук, 63, вып. 1, 33—50 (1957). — Прим. перев.

сопротивлением атмосферы. Однако сначала надо произвести замену для элементов $\tilde{\omega}$ и ε' , которые определяются уравнениями (4.5.9.5), в то время как уравнения (5.2.2) определяют элементы ω и β' . Поэтому последние два уравнения (4.5.9.5) должны быть заменены двумя новыми при помощи следующей подстановки:

$$\begin{aligned}\omega &= \tilde{\omega} - \Omega, \\ \beta' &= \omega + \Omega - \varepsilon'.\end{aligned}$$

После того, как это сделано, уравнения, определяющие изменения элементов из-за влияния сопротивления атмосферы, принимают вид

$$\begin{aligned}\left(\frac{da}{dt}\right)_d &= 2 \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [S \operatorname{tg} \varphi \sin \omega + T \sec \varphi (1 + e \cos \omega)], \\ \left(\frac{de}{dt}\right)_d &= \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cos \varphi [S \sin \omega + T (\cos \omega + \cos E)], \\ \left(\frac{di}{dt}\right)_d &= rW \cos u \frac{1}{\sqrt{\mu a} \cos \varphi}, \\ \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_d &= rW \frac{\sin u}{\cos \varphi \sin i} \frac{1}{\sqrt{\mu a}}, \\ \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_d &= [-aS \cos^2 \varphi \cos \omega + rT \sin \omega \times \\ &\times (2 + e \cos \omega) - rW \sin \varphi \operatorname{ctg} i \sin u] \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\mu a}}, \\ \left(\frac{d\beta'}{dt}\right)_d &= \frac{2rS}{\sqrt{\mu a}} + \cos \varphi (\dot{\Omega} \cos i + \dot{\omega}).\end{aligned}\tag{5.7.1}$$

Изменения da/dt , de/dt и т. д., определяемые уравнениями (5.2.2) и вызванные только сжатием Земли, мы будем обозначать теперь $(da/dt)_f$, $(de/dt)_f$ и т. д. Тогда общие изменения под влиянием обоих факторов опреде-

ляются уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{da}{dt} \right)_f + \left(\frac{da}{dt} \right)_d.$$

$$\frac{de}{dt} = \left(\frac{de}{dt} \right)_f + \left(\frac{de}{dt} \right)_d,$$

• • • • • • • • • • • • •

$$\frac{d\beta'}{dt} = \left(\frac{d\beta'}{dt} \right)_f + \left(\frac{d\beta'}{dt} \right)_d.$$

Нам остается только использовать выражение для составляющих возмущающей силы сопротивления на единицу массы спутника S, T, W , полученные в [7].

В разд. 5.2 мы использовали геоцентрические экваториальные координаты. Компоненты орбитальной скорости в направлениях S , T и W суть \dot{r} , $r\dot{\omega}$ и 0 соответственно. Угловая скорость вращения планеты и ее атмосферы ω_s имеет компоненту $\omega_s \cos i$, нормальную к плоскости орбиты, и компоненту $\omega_s \sin i$, лежащую в плоскости орбиты и перпендикулярную линии узлов. Первая компонента угловой скорости дает компоненты скорости атмосферы $(0, \omega_s r \cos i, 0)$ по осям S , T , W , а вторая — компоненты $(0, 0, -\omega_s r \sin i \cos u)$ на тех же осях. Отсюда следует, что скорость v спутника относительно воздуха имеет компоненты $(\dot{r}, r\dot{\omega} - \omega_s r \cos i, \omega_s r \sin i \cos u)$ и что v определяется следующим равенством:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\omega}^2 - 2r^2\omega_s \dot{\omega} \cos i + \omega_s^2 r^2 (\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2 u).$$

Сумма первых двух членов в правой части этого равенства есть просто квадрат орбитальной скорости, равный

$$\frac{\mu}{a} \frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}.$$

Более того, величина $r^2\dot{\omega}$ есть не что иное, как постоянная площадей, квадрат которой равен $\mu a(1-e^2)$.

Поэтому

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \left\{ 1 - d \frac{1-e\cos E}{1+e\cos E} + \right. \\ + \omega_s^2 \frac{1}{2n^2} \left[\frac{1-e\cos E}{1+e\cos E} \right]^2 \times \\ \times [\sin^2 i \cos^2 u (1-e^2 \cos^2 E) + e^2 \cos^2 i \sin^2 E] + \\ \left. + \text{члены высших порядков} \right\},$$

где

$$d = \frac{\omega_s}{n} \sqrt{1-e^2} \cos i.$$

Для близких ИСЗ отношение ω_s/n равно примерно $1/15$; поэтому третий член в фигурных скобках равен всего около $1/500$ от главного члена и им можно пренебречь. Для далеких ИСЗ это отношение может быть велико, но тогда плотность атмосферы, на которую умножается это выражение, настолько мала, что их произведение можно не принимать во внимание. Таким образом, мы имеем

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \left[1 - d \frac{1-e\cos E}{1+e\cos E} \right].$$

Так как сила лобового сопротивления равна

$$\frac{1}{2} C_D A \rho v^2,$$

ее составляющие в декартовых координатах равны величине $\frac{1}{2} C_D A \rho v$, помноженной на соответствующую составляющую скорости спутника относительно воздуха со знаком минус; поэтому составляющие силы сопротивления на единицу массы спутника должны быть таковы:

$$S = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} a e \rho v \sin E \cdot \dot{E},$$

$$T = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \sqrt{1-e^2} a \rho v \left[1 - d \frac{(1-e\cos E)^2}{1-e^2} \right] \dot{E},$$

$$W = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} a \rho \omega_s v \frac{1}{n} (1 - e \cos E)^2 \sin i \cos u \cdot \dot{E}.$$

В теории возмущений первого порядка мы вычисляем возмущения оскулирующих элементов, исходя из невозмущенной орбиты. С этой точки зрения уравнения (5.2.6) и (5.2.7) определяют основные возмущения, вызванные сжатием, без учета сопротивления воздуха. Подобным же образом добавочные возмущения, вызванные сопротивлением воздуха, можно вычислить, исходя из невозмущенной орбиты или (что еще лучше) на основе орбиты, в которой учтены вековые возмущения от сопротивления воздуха. Прибавляя эти возмущения к уже найденным возмущениям, вызванным сжатием Земли, мы получим теорию возмущений первого порядка, результаты которой справедливы до членов первой степени относительно плотности или первой степени B . Характерно, что эти результаты могут быть справедливы до членов более высоких степеней плотности. Такая теория будет общей, так как влияние сжатия может быть учтено аналитически, но она будет специальной в том смысле, что для учета сопротивления воздуха мы должны численно подсчитать ряд определенных интегралов. Квадратуры, подобные рассмотренным в разд. 5.6, требуется выполнить только для достаточно разделенных дат. После того как значительные вековые изменения a и e определены, можно при помощи таких же квадратур найти в аналитическом виде периодические вариации a и e и общие возмущения всех остальных элементов, вызванные сопротивлением воздуха. Это можно сделать тем же методом, а также с учетом влияния членов второго порядка, содержащих произведение B и плотности воздуха. В общем не видно, как можно разработать более близкую к действительности стандартную общую теорию возмущений искусственного спутника, движущегося в атмосфере, плотность которой задана эмпирическими формулами. Возможно, следует считать общей теорией такую теорию, в которой квадратуры используются для нахождения вековых возмущений a и e , а также для переменных коэффициентов в аналитических выражениях,

которые определяют другие возмущения, вызванные сопротивлением воздуха.

Из первых двух уравнений системы (5.7.1), подставив найденные значения для S и T , мы получим для вызванных сопротивлением изменений a и e :

$$\left(\frac{da}{dE} \right)_d = -2b\rho a^2 \frac{(1+e\cos E)^{3/2}}{\sqrt{1-e\cos E}} \left[1 - d \frac{1-e\cos E}{1+e\cos E} \right]^2, \quad (5.7.2)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{de}{dE} \right)_d = & -2b\rho a (1-e^2) \sqrt{\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}} \times \\ & \times \left[1 - d \frac{1-e\cos E}{1+e\cos E} \right] \left\{ \cos E - \frac{d}{2} \frac{1}{1-e^2} (1-e\cos E) \times \right. \\ & \left. \times (2\cos E - e - e\cos^2 E) \right\}, \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

что совпадает с уравнениями (5.6.2) и (5.6.3) при $d=0$. Здесь E — эксцентрическая аномалия возмущенного движения, определяемая (5.2.3). Подробное исследование показывает, что уравнения (5.7.2) и (5.7.3) являются неточными в нечетных членах второй степени относительно плотности, которые обращаются в нуль при интегрировании на полном обороте, а также в членах третьей степени относительно плотности, которые не обращаются в нуль при интегрировании. Все это незначительные эффекты, исключая близкие к концу существования спутника моменты; в последнем случае и уравнения (5.2.6), вероятно, также неточны.

В рассматриваемом нами конкретном примере, для которого $a_0=1,0784$ радиуса Земли, а $e_0=0,029$, сделав дальнейшее предположение, что $i_0=45^\circ$, мы можем проинтегрировать уравнения (5.7.2) и (5.7.3) численно при помощи квадратурной формулы Симпсона или формулы трапеций на одном обороте по E от $E=0$ до $E=2\pi$. Это интегрирование показывает, что a имеет вековое убывание порядка $18 \cdot 10^{-6} a_0$ за оборот, на которое накладываются периодические изменения, приближенно описываемые формулой $-4,5 \cdot 10^{-6} a \sin E$; вековое уменьшение e равно $16 \cdot 10^{-6}$ за оборот, а на него накладываются периодические колебания вида $-5 \cdot 10^{-6} \sin E$.

Как было показано в разд. 5.6, периодические изменения a и e , вызванные сопротивлением, создают незначительные эффекты высшего порядка в правых частях уравнений; это уже несправедливо для вековых изменений за большое число оборотов. За один оборот изменениями a и e в правых частях уравнений можно пренебречь, если принята их величина при некотором среднем значении E . Аналогично возмущения a и e , обусловленные сжатием Земли и определяемые уравнениями (5.2.6), являются периодическими и четными и не влияют заметно на возмущения a и e , вызванные сопротивлением воздуха. В рассматриваемом примере периодические возмущения, обусловленные сжатием, значительно больше периодических возмущений, вызванных сопротивлением; изменения за оборот составляют примерно $1 \cdot 10^{-3}$ в a и $0,001$ в e .

Анализ, проведенный в разд. 5.2, и уравнения (5.2.6) показывают, что вековые возмущения ω , обусловленные сжатием, вызывают в перигее появление пропорциональных $\cos 2\omega$ членов в разложениях a и e . Обнаружено, что возникающее от этого изменение расстояния до перигея, равного $a(1-e)$, имеет порядок всего 10^{-4} земного радиуса и едва ли влияние плотности в перигее на эту величину столь же велико, как и фактическая неопределенность ее значения. Однако такие влияния накапливаются и могут в принципе создать долгопериодические возмущения в a и e с амплитудой, пропорциональной произведению B_0 и с периодом, равным половине периода изменения ω .

Так же как и в разд. 5.6, мы можем найти изменения Δa и Δe за период изменения E в виде интегралов, которые можно подсчитать численно

$$\Delta a = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{da}{dE} \right)_d dE, \quad \Delta e = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{de}{dE} \right)_d dE;$$

величины $(da/dE)_d$ и $(de/dE)_d$ определяются уравнениями (5.7.2) и (5.7.3). Тогда средние значения производных за один оборот

$$\frac{da}{dE} = \frac{\Delta a}{2\pi}, \quad \frac{de}{dE} = \frac{\Delta e}{2\pi} \quad (5.7.4)$$

являются функциями a и e в перигее. Как и в разд. 5.6, нужные интегралы могут быть вычислены на одном обороте, если подставить в (5.7.2) и (5.7.3) величины a и e в перигее и пренебречь изменением a и e при интегрировании на одном обороте. Уравнения (5.7.4) можно рассматривать как два дифференциальных уравнения первого порядка, в которых значения a и e в перигее являются зависимыми переменными, а E — независимая переменная; эти уравнения могут быть решены методом, описанным в следующей главе.

Поэтому, как и в разд. 5.6, используемые здесь квадратуры уравнений (5.7.2) и (5.7.3) на одном обороте дают возможность найти вековые изменения a и e в функции E на интервалах, составляющих десятки или сотни оборотов. Периодические изменения этих элементов, обусловленные сопротивлением воздуха, могут быть при желании тоже найдены для тех же оборотов, по которым проводилось интегрирование. Складывая вековые и периодические возмущения a и e , вызванные сжатием и сопротивлением воздуха, мы учтем все возмущения первого порядка этих элементов, а также некоторые возмущения более высоких порядков. Для тех моментов времени, которые не были использованы при квадратурах, вековые изменения a и e и их периодические возмущения, вызванные сопротивлением воздуха, могут быть найдены интерполяцией, а периодические возмущения, обусловленные сжатием, могут быть найдены для любых моментов прямо из уравнения (5.2.6).

Зная W и используя третье уравнение (5.7.1), найдем для изменения i , вызванного сопротивлением атмосферы,

$$\begin{aligned} \left(\frac{di}{dE} \right)_a &= -\frac{1}{2} b \rho a \omega_s \frac{\sin i}{n} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \times \\ &\times (1 + \cos 2u) (1 - e \cos E)^{\frac{5}{2}} \times \\ &\times \sqrt{1 + e \cos E} \left[1 - d \frac{1 - e \cos E}{1 + e \cos E} \right]. \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

Множитель, содержащий u , равен

$$1 + \cos 2u = 1 + \cos 2\omega \cos 2\omega - \sin 2\omega \sin 2\omega;$$

поэтому третье слагаемое ничего не вносит в интеграл на одном обороте, так как оно является нечетной функцией E . Приближенное численное интегрирование уравнения (5.7.5) за один аномалистический период в нашем примере показывает, что величина i_d (изменение i , вызванное сопротивлением воздуха) содержит периодические члены, которые приблизительно можно представить в виде:

$$-0'',01 \sin E - 0'',006 \cos 2\omega \sin 2E + 0'',005 \sin 2\omega (1 - \cos E)$$

(при необходимости можно обеспечить гораздо большую точность). Кроме того, i_d уменьшается за аномалистический период на величину $0'',04 + 0'',02 \cos 2\omega$. Это последнее выражение есть средняя величина скорости $-2\pi(d\omega/dE)_d$, вычисленная за один оборот по E . По уравнению (5.2.6) ω возрастает со средней скоростью $d\omega/dE$, равной 0,00105, так что последние члены в разложении $(d\omega/dE)_d$ при получении i_d составляют

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_0^E [0'',04 + 0'',02 \cos(2\omega_0 + 0,0021E)] dE = \\ & = -0'',04 \frac{E}{2\pi} - \frac{0'',02}{2\pi (0,0021)} \sin 2\omega. \end{aligned}$$

Теперь мы получили выражение для i_d в окрестности начальных данных

$$\begin{aligned} i_d = & -0'',04 \frac{E}{2\pi} - 1'',5 \sin 2\omega - 0'',01 \sin E - \\ & - 0'',006 \cos 2\omega \sin E + 0'',005 \sin 2\omega \cdot (1 - \cos E). \end{aligned}$$

Коэффициенты в предыдущем выражении являются медленно изменяющимися функциями E , поэтому их можно при помощи простых квадратур осреднить за один оборот по E и взять значения этих коэффициентов

для некоторого среднего значения E . Малый долгопериодический член с коэффициентом $1'',5$ имеет период около 31 суток. Есть вековые и долгопериодические члены.

Подставив выражение для W в четвертое уравнение (5.7.1), найдем, что изменение Ω , вызванное сопротивлением воздуха, имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dE} \right)_d = & -\frac{1}{2} b \rho a \omega_s \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} (\sin 2\omega \cos 2\omega + \\ & + \cos 2\omega \sin 2\omega) \times \\ & \times \frac{5}{(1-e \cos E)^2 \sqrt{1+e \cos E}} \times \\ & \times \left[1 - d \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E} \right]. \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

Интегрируя это уравнение за один оборот по E с учетом изменения ω , обусловленного сжатием, получим, как и при выводе i_d , выражение для Ω_d , т. е. для изменения Ω , обусловленного сопротивлением воздуха. Для рассматриваемого нами примера выражение для Ω_d в окрестности начальных данных будет таким:

$$\begin{aligned} \Omega_d = & 2'',1 \cos 2\omega - 0'',01 \sin 2\omega \sin E - \\ & - 0'',008 \cos 2\omega (1 - \cos E). \end{aligned}$$

Отметим, что i_d и Ω_d очень малы и что в выражении для Ω_d действительно нет векового члена, пока i не равно $63^\circ 26'$.

Сходным образом находится выражение для изменения ω , вызванного сопротивлением воздуха,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dE} \right)_d = & -\cos i \left(\frac{d\Omega}{dE} \right)_d - 2 b \rho a \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \sin E \times \\ & \times \sqrt{\frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}} \left[1 - d \frac{1-e \cos E}{1+e \cos E} \right] \times \\ & \times \left[1 - d \frac{(1-e \cos E)(2-e^2-e \cos E)}{2(1-e^2)} \right], \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

в согласии с уравнением (5.6.4) при $\omega_s = 0$. Второй член дает не только периодическую составляющую в ω_d . Можно вычислить полное возмущение ω_d для рассматриваемого нами примера и найти, что в окрестности начальных данных это возмущение выражается приближенно в виде

$$\begin{aligned}\omega_d = & -18'' + 11'' \cos E + 5'' \cos 2E - 1'',5 \cos 2\omega + \\ & + 0'',006 \sin 2\omega \sin E + 0'',005 \cos 2\omega (1 - \cos E).\end{aligned}$$

Для изменения β' , вызванного сопротивлением воздуха, из (5.7.1) и (5.7.7) можно найти выражение

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\beta'}{dE} \right)_d = & -2b\rho a \frac{1}{e} (1 - e^3 \cos E) \sqrt{\frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}} \times \\ & \times \sin E \left[1 - d \frac{1 - e \cos E}{1 + e \cos E} \right] \times \\ & \times \left[1 - d \frac{(1 - e \cos E)(2 - e^2 - e \cos E)}{2(1 - e^3 \cos E)} \right], \quad (5.7.8)\end{aligned}$$

откуда получаем, что сопротивление воздуха приводит только к периодическим изменениям β'_d . Это возмущение β'_d величины β' можно вычислить полностью с помощью простых квадратур, как это делалось выше, и для рассматриваемого нами примера это возмущение в окрестности начальных данных имеет вид

$$\beta'_d = -18'' + 11'' \cos E + 5'' \cos 2E.$$

В разд. 5.2 величина l определялась равенством

$$l = \int n dt.$$

Изменение этой величины, обусловленное сопротивлением воздуха, можно вычислить по формуле

$$l_d = \int (n - n_0) dt,$$

где $n = \sqrt{\mu/a^{3/2}}$. Так как a уже определено в функции от E , то n известно как функция E , т. е. $n(E)$. Кроме того, дифференцируя по E обе части уравнения

$$\int n dt - \beta' = E - e \sin E,$$

получим

$$\frac{dt}{dE} = \frac{1 - e \cos E}{n} F,$$

где

$$F = 1 + \frac{1}{1 - e \cos E} \left(\frac{d\beta'}{dE} \right)_d - \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \left(\frac{de}{dE} \right)_d;$$

отсюда

$$l_d = \int_0^E \frac{1}{n} (n - n_0) (1 - e \cos E) F dE. \quad (5.7.9)$$

Поскольку $n - n_0$ зависит от плотности атмосферы, то F отличается от единицы только на малые периодические члены, являющиеся нечетными функциями E и пропорциональные плотности. Эти члены не входят в выражение для l_d , полученное осреднением за один оборот. С другой стороны, даже когда $n - n_0$ заметно отличается от нуля, эти члены вносят смешанные члены в l_d , которые не превышают несколько тысячных долей секунды времени для нашего числового примера. Поэтому при интегрировании на полном обороте величину F надо брать равной единице, так же как при вычислении t в разд. 5.6 мы могли положить величину $1 - e \cos E \approx 1$ в подынтегральном выражении. Таким образом, с большой точностью для промежутка времени от некоторого начального перигея $E = 0$ до более позднего перигея $E = 2\pi N$ величина l_d равна

$$l_d = \int_0^{2\pi N} \frac{n - n_0}{n} dE$$

и ее можно вычислить, табулируя подынтегральное выражение по E и применяя для вычисления интеграла по E формулу Симпсона или другую подходящую формулу для квадратур. Значения E надо умножать на 2π , но они могут сильно различаться при шагах в десятки или сотни оборотов. Для других значений перигея величину l_d можно найти интерполяцией, а для значения E , не

совпадающего с перигеем, можно к значению l_d в предыдущем перигее $2\pi N'$ прибавить интеграл

$$\int_{2\pi N'}^E \frac{n - n_0}{n} (1 - e \cos E) dE,$$

где n и e задаются величинами в средней точке $(2\pi N' + E)/2$; ошибка после интегрирования составит несколько тысячных секунды времени. Если же ошибка окажется большой, можно учесть множитель F в подынтегральном выражении, а также учесть изменения n и e в подынтегральном выражении.

Прибавив $l_d - \beta'_d$ к правым частям последнего уравнения (5.2.6), мы найдем полное значение величины $l - \beta'$, входящей в уравнение (5.2.3). Прибавляя к e , найденному интегрированием в настоящем разделе, величину e_f , определяемую вторым уравнением (5.2.6), найдем полное возмущение e , которое можно использовать в первом уравнении (5.2.3). Из него теперь можно определить значение E на возмущенной орбите, соответствующее некоторому заданному значению t . Аналогично, прибавляя найденные здесь возмущения к найденным в разд. 5.2, можно найти полные возмущения всех элементов. Наконец, из уравнений (5.2.3) можно определить положение спутника на орбите и компоненты его орбитальной скорости, справедливые с точностью до первого порядка относительно J и плотности.

Для величины $l - \beta'$ в возмущенном движении, которая используется в (5.2.3), имеем соотношение

$$n = n_0 + \int \frac{dn}{da} \left(\frac{da}{dt} \right)_f dt + \int \frac{dn}{da} \left(\frac{da}{dt} \right)_d dt,$$

так что

$$\begin{aligned} l - \beta' &= \left[n_0 t - \beta'_0 + \iint \frac{dn}{da} \left(\frac{da}{dt} \right)_f dt dt - \beta'_f \right] + \\ &\quad + \left[\iint \frac{dn}{da} \left(\frac{da}{dt} \right)_d dt dt - \beta'_d \right]; \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

пределы интегрирования очевидны. Поскольку величина в первых скобках дается точно, за исключением учета

влияния сопротивления на член dn/da , то в соответствии с последним уравнением (5.2.6) эта величина может быть представлена в виде

$$K_M + P_f + n_0 \left[1 + \frac{3B}{a_0^2} \left(\frac{a}{r} \right)_0^3 (1 - 3 \sin^2 \beta_0) \right] t,$$

где для краткости через P_f обозначена совокупность периодических членов в последнем уравнении (5.2.6). В разд. 5.2 отмечалось, что, как следствие интеграла энергии, величина коэффициента при t в приведенном выше уравнении почти¹ не зависит от момента оскуляции во время движения относительно сплюснутой Земли. Поэтому этот коэффициент достаточно вычислить только в перигее, и для простоты мы предположим, что n_0 отвечает какому-либо моменту прохождения перигея. Двойной интеграл во вторых скобках формулы (5.7.10) есть просто l_d . Оценивая коэффициент при t в перигее, опуская индекс «нуль» всюду, кроме n_0 , и учитывая вековое влияние сопротивления воздуха на первое выражение в (5.7.10), найдем

$$\begin{aligned} l - \beta' &= K_M + P_f + n_0 t + \\ &+ 3B \int \frac{n}{a^2} \frac{1}{(1-e)^3} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \omega) dt + l_d - \beta'_d. \quad (5.7.11) \end{aligned}$$

Интеграл, который умножается на малую величину B , можно легко вычислить при помощи подстановки

$$n dt = dE \frac{1}{1 - e \cos E},$$

где под E понимается эксцентрисическая аномалия движения, возмущенного только сопротивлением, а зависимость от этого E величин a и e известна.

В подынтегральном выражении нужно учесть вековые изменения ω , обусловленные сжатием Земли, при-

¹ В переменных, введенных Каннингэмом, совершенно не зависит.

чем лучше всего применить подстановку

$$\omega = \omega_0 + KE;$$

величина K была найдена в разд. 5.2, а вместо w взято E , что совершенно равносильно. Интеграл, описывающий эффекты сжатия, можно теперь вычислить последовательными квадратурами с шагом в несколько сотен оборотов, взяв средние значения a и e . Это позволяет на каждом таком шаге вычислять интеграл аналитически. Оказывается, что влияние периодических изменений i и его малых вековых изменений, обусловленных сопротивлением врачающейся атмосферы, на величину интеграла совершенно несущественно. В нашем примере после 400 оборотов величина интеграла составит около 0,52 rad.

Для того, чтобы применять формулу (5.7.11), необходимо представить величину l_d как функцию времени, тогда как уравнение (5.7.9) определяет величину l_d в зависимости от эксцентриситической аномалии E движения, возмущенного сопротивлением воздуха. Эту трудность легко обойти. Для движения, возмущаемого только сопротивлением воздуха, уравнение Кеплера имеет вид

$$n_0 t + l_d(E) - \beta'_d = E - e(E) \sin E,$$

и поскольку $l_d(E)$ и $e(E)$ известны, а величину β'_d либо можно определить, либо можно ею пренебречь, то легко найти $n_0 t$, соответствующее выбранным значениям E , и таким путем найти t , а интерполяцией получить E и $l_d(E)$, соответствующие любому нужному t . Однако кажется, что в этой части работы трудно гарантировать высокую точность. Или l_d мало и, следовательно, слабо зависит от t , или же l_d велико и физически мало достоверно из-за накапливающегося влияния различных вариаций плотности атмосферы, о чем в момент написания книги не было уверенных данных. Наличие таких непредсказываемых изменений может вызвать сомнение, оправдана ли большая формальная точность l_d , чем несколько тысячных долей. В нашем примере после 400 оборотов t примерно равно около 2796,60 единиц

времени (по $806^s,8$), тогда как $n_0 t$ примерно равно $2497,24 \text{ rad}$, l_d около $16,04 \text{ rad}$, а β'_d порядка 10^{-5} rad .

Соответствующая форма для (5.7.11) может быть получена объединением третьего, четвертого и пятого членов его правой части

$$\begin{aligned} l - \beta' = & K_M + P_f + \\ & + \int n \left[1 + \frac{3B}{a^2} (1 - e)^{-3} \times \right. \\ & \left. \times (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \omega) \right] dt - \beta'_d. \end{aligned} \quad (5.7.12)$$

Чтобы закончить обсуждение совместного влияния сжатия Земли и сопротивления воздуха, нам остается сделать еще несколько замечаний. Для учета векового уменьшения p и соответствующего ему ускорения Ω , вызванных сопротивлением воздуха, вековой член в Ω , равный

$$- 3Bp_1^{-2}\omega \cos i_0,$$

и входящий в четвертое уравнение системы (5.2.6), должен быть теперь заменен на

$$- 3B \cos i_0 \int p^{-2} dw,$$

где

$$p = a(1 - e^2)$$

с очевидными пределами интегрирования. Легко вычислить этот интеграл за целое число оборотов, если считать w равным значению E в перигее, и использовать величины подынтегрального выражения, взятые в сильно отличающихся перигеях. Если последний оборот не целый, то можно использовать среднее значение p^{-2} в подынтегральном выражении. Вследствие уменьшения орбитального периода ускорение Ω по времени будет большим по величине и более заметным, чем ускорение по w .

Аналогичным образом вековой член в ω

$$\frac{3}{2} Bp_0^{-2} (4 - 5 \sin^2 i_0) w,$$

входящий в пятое уравнение системы (5.2.6), должен

быть теперь заменен на

$$\frac{3}{2} B (4 - 5 \sin^2 i_0) \int p^{-2} d\omega,$$

где интеграл тот же, как и в случае Ω .

Сделанное в конце разд. 5.2 замечание о вековых изменениях ω в правых частях системы (5.2.6) следует теперь пересмотреть в связи с влиянием сопротивления на вековое уменьшение величины K . Вместо замены ω_0 в правых частях уравнений (5.2.6) на $\omega_0 + K_w$, мы должны теперь заменять ω_0 на величину

$$\omega_0 + \frac{3}{2} B (4 - 5 \sin^2 i_0) \int p^{-2} d\omega.$$

Этим можно закончить рассмотрение совместного влияния сжатия Земли и сопротивления атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sterne T. E., Astron. J., 63, 28 (1958).
2. Brouwer D., Astron. J., 51, 223 (1946).
3. Garfinkel B., Astron. J., 63, 88 (1958).
4. Kallmann H. K., Juncosa M. L., A Preliminary Model Atmosphere Based on Rocket and Satellite Data, U. S. Air Force Project Rand Research, Mem. No. RM-2286 (1958), ASTIA Document No. AD 207752.
5. Более детальное изучение показывает, что наиболее точная величина интеграла будет получена, если для K взять величину логарифмической производной где-то выше перицентра, поскольку высоты над перицентром включаются в интеграл, в то время как высоты ниже перицентра в интеграл не входят. Численные расчеты показывают, что близкие значения интеграла при высоте перигея 300 км получаются, если взять величину K такой, как она дана, при точном значении ρ_π , точном значении плотности в апогее или на высоте порядка 100 км над перигеем и любой высоте ниже.
6. См., например, Whittaker E. T., Watson G. N., Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927, разд. 17, 23 и 17.7. (Русский перевод: Виттекер Э. Г., Ватсон Дж., Курс современного анализа, 2-е изд., Физматгиз, 1962.)
7. Sterne T. E., J. Amer. Rocket Soc., 29, 777 (1959).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

6.1. Общие замечания

Когда решение уравнений движения выражено в аналитической форме, так что для любого заданного момента времени можно получить значения координат, элементов или возмущений, то возмущения называются *общими* или *абсолютными*. Когда решение получено в численном виде путем численного интегрирования уравнений движения, тогда возмущения называются *специальными*. В отличие от общих, для получения специальных возмущений обычно не требуется обширное аналитическое и динамическое исследование, и в основном дело сводится к искусному использованию техники вычислений, причем расчет может быть проведен либо вручную, либо на моделирующих или цифровых вычислительных машинах. Иногда специальные возмущения делают более ясными теоретические проблемы, например, в некоторых исследованиях задачи трех тел. На практике они обычно просто используются для получения координат на ограниченном интервале времени от некоторой начальной даты, для которой определены значения координат и скоростей, до некоторой другой даты, когда интегрирование прекращается. На всем интервале численного интегрирования приходится получать координаты на каждом шаге вне зависимости от того, нужны они или нет, но вне интервала интегрирования мы, как правило, не можем сделать никаких выводов. Достоинство численного интегрирования состоит в том, что оно всегда может быть выполнено.

6.2. Численное интегрирование

Опишем кратко методы численного интегрирования. Пусть x_n будет затабулированная функция от аргумента $t_n = a + nw$, где a — постоянная, n — целое число, а w — величина шага по t . Разностный оператор Δ определяется как

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

так что $\Delta t = w$. Имеем далее

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$$

и т. д. Можно представить разности в виде следующей таблицы:

t_{n-1}	x_{n-1}	Δx_{n-1}		
t_n	x_n		$\Delta^2 x_{n-1}$	
		Δx_n		$\Delta^3 x_{n-1}$
t_{n+1}	x_{n+1}		$\Delta^2 x_n$	$\Delta^4 x_{n-1}$
		Δx_{n+1}		$\Delta^3 x_n$
t_{n+2}	x_{n+2}		$\Delta^2 x_{n+1}$	

так что операция Δ представляет смещение направо на один столбец и вниз на половину строки. Если оператор D обозначает d/dt , то из теоремы Тейлора имеем

$$\Delta = \exp(wD) - 1.$$

Символ ∇ определяется как

$$\nabla x_n = x_n - x_{n-1},$$

таким образом,

$$\nabla = 1 - \exp(-wD) = \Delta(1 + \Delta)^{-1}.$$

Разности Δ называются разностями назад, а разности ∇ — разностями вперед. Эти операторы и их степени подчиняются коммутативному закону, и с ними легко выполнять алгебраические операции. Например, если

нам нужно найти x в момент $t_n + h\omega$, где h может быть дробным числом, нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned} x_{n+h\omega} &= \exp(h\omega D) x_n = (1 + \Delta)^h x_n = \\ &= x_n + h x_n + \frac{h(h-1)}{2!} \Delta^2 x_n + \\ &\quad + \dots + \frac{h!}{(h-s)! s!} \Delta^s x_n + \dots , \end{aligned}$$

которое называется интерполяционной формулой Ньютона (более точно — формулой Грекори—Ньютона); она использует разности назад и часто применяется на практике.

Оператор K обозначает произведение $\Delta\nabla = \nabla\Delta$ и обладает тем свойством, что он передвигает величину, на которую воздействует, вправо на два столбца, но оставляет ее в той же строке. Таким образом

$$Kx_n = \Delta^2 x_{n-1}.$$

Оператор k определяется как

$$kx_n = \frac{1}{2} (\Delta x_n + \nabla x_n)$$

и вызывает смещение на столбец вправо в той же строке со средними значениями разностей, ближайших к новому положению в новом столбце. Операторы k и K называются центральными разностными операторами, поскольку разности, входящие в них, расположены в той же самой строке, что и величины, на которые они действуют; таким образом,

x_{n-1}

$$\begin{array}{cccccc} & \nabla x_n & & \nabla Kx_n & & \nabla K^2 x_n \\ x_n & [kx_n] & Kx_n & [kKx_n] & K^2 x_n & [kK^2 x_n] \\ & \Delta x_n & & \Delta Kx_n & & \Delta K^2 x_n \end{array}$$

x_{n+1}

где средние разности заключены в скобки, чтобы отличить их от обычных разностей Δ , ∇ и K . Легко видеть, что

$$k = \Delta \left(1 + \frac{1}{2} \Delta \right) (1 + \Delta)^{-1}$$

и что все эти операторы подчиняются коммутативному закону; кроме того,

$$k^2 = K + \frac{1}{4} K^2$$

и

$$\Delta = k + \frac{1}{2} K.$$

В новых обозначениях можно получить центрально-разностные интерполяционные формулы. Как пример приведем формулу Ньютона—Стирлинга

$$\begin{aligned} x_{n+h\omega} &= (1 + \Delta)^h x_n = \\ &= \left(1 + k + \frac{1}{2} K \right)^h x_n = \\ &= \left(x_n + h k x_n + \frac{h^2}{2!} \right) K x_n + \frac{h(h^2 - 1^2)}{3!} k K x_n + \\ &\quad + \frac{h^2(h^2 - 1^2)}{4!} K^2 x_n + \frac{h(h^2 - 1^2)(h^2 - 2^2)}{5!} k K^2 x_n + \dots \end{aligned}$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка $Dx = f(x, t)$, можно пользоваться *открытой* формулой

$$\begin{aligned} \Delta x_n &= \left[1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \frac{251}{720} \nabla^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{95}{288} \nabla^5 + \dots \right] \omega D x_n. \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Она получается из соотношения

$$\omega D = -\ln(1 - \nabla),$$

откуда, поскольку

$$\Delta = \nabla (1 - \nabla)^{-1}$$

и

$$\Delta = -\frac{\nabla}{(1 - \nabla) \ln(1 - \nabla)} wD,$$

немедленно следует уравнение (6.2.1). Таким же путем можно получить замкнутую формулу разложением правой части выражения

$$\nabla = -\frac{\nabla}{\ln(1 - \nabla)} wD,$$

откуда

$$\nabla = \left[1 - \frac{1}{2} \nabla - \frac{1}{12} \nabla^2 - \frac{1}{24} \nabla^3 - \frac{19}{720} \nabla^4 - \dots \right] wD. \quad (6.2.2)$$

Предположим, что интегрирование дошло до t_n с x_n , wDx_n и известны все разности назад wDx_n

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_{n-3} & x_{n-3} & wDx_{n-3} & & & & \\
 & & & \nabla wDx_{n-2} & & & \\
 & & & & \nabla^2 wDx_{n-1} & & \\
 t_{n-2} & x_{n-2} & wDx_{n-2} & & & & \nabla^3 wDx_n \\
 & & & \nabla wDx_{n-1} & & & \\
 & & & & \nabla^2 wDx_n & & \\
 t_{n-1} & x_{n-1} & wDx_{n-1} & & & & \\
 & & & \nabla wDx_n & & & \\
 t_n & x_n & wDx_n & & & &
 \end{array}$$

Тогда формула (6.2.1) дает $x_{n+1} - x_n$ и, таким образом, позволяет найти x_{n+1} , после чего из дифференциального уравнения можно найти wDx_{n+1} , которое даст Dx как функцию t и x ; далее могут быть выписаны разности назад x_{n+1} , и весь процесс неограниченно продолжается. Аналогичным способом может быть решено любое число совместных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом каждая зависимая переменная должна рассчитываться по схеме, аналогичной схеме для одного переменного. Если, например, заданы

три зависимые переменные x, y, z , то будет три системы разностей назад, из которых по (6.2.1) можно найти Δ_s для самых последних значений x_i, y_i, z_i ; затем три дифференциальных уравнения, каждое из которых дает первую производную одной из переменных x, y, z в функции от x, y, z, t , позволяют найти wD_s для x, y, z , после чего можно делать следующий шаг. Любая система обыкновенных дифференциальных уравнений более высокого, чем первый, порядка может быть сведена введением новых переменных, которые обозначают все производные более высокого порядка, к системе дифференциальных уравнений первого порядка, к которой можно применить описанный выше процесс.

Было бы неуместным давать здесь больше, чем принципы, которыми пользуются при интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако будут более подробно рассмотрены начальная стадия интегрирования, выбор формул, учитываемое число разностных членов и выбор величины шага w интегрирования.

Интегрирование может начинаться с любого момента t_0 , для которого известно значение x , с определения величины wDx из дифференциального уравнения и величин разностей назад от wDx . Производные более высоких порядков $D^n x_0$ могут быть найдены дифференцированием исходного уравнения, а разности назад для x находятся по значениям производных по формулам вида

$$\begin{aligned}\nabla &= 1 - \exp(-wD) = \\ &= wD - \frac{1}{2!} w^2 D^2 + \frac{1}{3!} w^3 D^3 - \frac{1}{4!} w^4 D^4 + \dots\end{aligned}$$

$$\nabla^2 = w^2 D^2 \left(1 - wD + \frac{7}{12} w^2 D^2 - \frac{1}{2} w^3 D^3 + \dots \right),$$

$$\nabla^3 = w^3 D^3 \left(1 - \frac{3}{2} wD + \frac{5}{4} w^2 D^2 - \dots \right),$$

$$\nabla^4 = w^4 D^4 (1 - 2wD + \dots),$$

$$\nabla^5 = w^5 D^5 (1 - \dots),$$

которые читатель может вывести сам при помощи простых алгебраических операций. Для случая двух или более зависимых переменных начальная стадия интегрирования мало отлична от изложенного выше.

Можно также получить несколько первых значений зависимой переменной x , пользуясь теоремой Тейлора

$$x_{n+1} = \left[1 + wD + \frac{1}{2!} w^2 D^2 + \frac{1}{3!} w^3 D^3 + \dots \right] x_n,$$

где производные могут быть найдены из дифференциального уравнения и из уравнений, полученных последовательным дифференцированием исходного уравнения по времени t . Отправляясь от x_0 , находим x_1 , затем, применяя уравнение к x_1 , находим x_2 и т. д. После того, как найдено достаточное количество значений x_n , можно, составляя разности, найти ∇_s от wD и затем может быть начата стандартная схема интегрирования по шагам.

Вместо формулы (6.2.1) можно использовать формулу (6.2.2). Она имеет следующий недостаток: чтобы по x_n найти x_{n+1} , должно быть получено промежуточное значение x_{n+1} или wDx_{n+1} ; из разностей назад находится улучшенная величина x_{n+1} , улучшенное значение wDx_{n+1} и процесс продолжается до тех пор, пока итерации не перестанут давать дальнейшего изменения x_{n+1} . Преимущество, если оно и возникает при использовании уравнения (6.2.2), состоит в том, что коэффициенты при разностях от wD в (6.2.2) меньше, чем коэффициенты в (6.2.1). Можно также комбинировать схемы, пользуясь уравнением (6.2.1) для получения промежуточных величин, а уравнением (6.2.2) для их улучшения. Однако использование уравнения (6.2.1) с меньшими значениями w для точности будет более выгодным, чем использование уравнения (6.2.2). Для систем уравнений первого порядка не существует общего совета, который можно дать относительно преимущества той или другой схемы. Можно только сказать, что процедура, которая будет описана ниже для изучения ошибок, связанных с округлением и отбрасыванием чисел, даст возможность вычислителю предска-

зать ошибки любого способа интегрирования, который он пожелает применить.

Вместо (6.2.1) и (6.2.2) могут быть получены центрально-разностные формулы, но для систем первого порядка они оказываются громоздкими и требуют итераций.

На выборе шага ω независимой переменной следует остановиться несколько подробнее. Если оставить только первый член в (6.2.1) или (6.2.2), то наибольший член, которым мы пренебрегаем на каждом шаге, будет порядка $(1/2)\omega^2 D^2 x$, так что накопленная ошибка после интегрирования от 0 до t примерно равна $-(1/2)\omega [Dx]_0^t$ и уменьшается примерно пропорционально ω . Если оставить три члена, то накопленная ошибка будет примерно равна $-(3/8)\omega^3 [D^3 x]_0^t$; в этом случае ошибка уменьшается с уменьшением ω примерно пропорционально ω^3 , а не линейно, как в предыдущем случае. Обычно советуют оставлять среднее число членов (3, 4 или 5) в уравнении (6.2.1) или (6.2.2), а затем, прежде чем применять схему интегрирования, выбрать такое ω , чтобы отбрасываемые разности были не больше половины единицы последнего десятичного знака. Если в процессе интегрирования отброшенные члены становятся существенными, то не рекомендуется вводить большее число членов, а лучше уменьшить ω . Сходимость рядов, определяемых уравнениями (6.2.1) и (6.2.2), зависит от сходимости разложения в ряд Тейлора; если ω достаточно мало, то ряды эти практически всегда сходятся, но при достаточно большом ω они всегда могут быть сделаны расходящимися, так что учет даже бесконечного числа членов тогда не ограничит ошибку. Хотя окончательное решение о числе членов и величине ω должно быть основано на формальном анализе ошибки и обычно включает элемент прикидки, причина, по которой следует с самого начала включать достаточное число членов, видна из следующего рассуждения: если появляется необходимость уменьшить шаг ω , то, поскольку ошибка меняется как высокая степень ω , при включении большего числа членов будет достаточно меньшего изменения шага, чем при включении малого числа членов.

Имеются методы, которые используют полиномы и которые внешне отличаются от описанных выше методов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Однако все такие полиномиальные формулы могут быть получены из разностных формул разных типов, которые мы описали, если подставить вместо разностей различных порядков их выражения в зависимости от первоначальных wDx_s . Для данной разностной формулы могут быть получены разнообразные полиномиальные формулы, каждая из которых соответствует удержанию различного числа разностных членов. При ручной работе разности дают лучший способ проверки роста ошибок, чем полиномы, но полиномы могут быть лучше приспособлены для работы на некоторых автоматических цифровых машинах, имеющих ограниченный объем памяти. Замкнутая формула (6.2.2) дает «замкнутые» полиномы, каждый из которых выражает $x_{n+1} - x_n$ как линейную функцию от wDx_{n+1} , wDx_n , wDx_{n-1} и т. д. Открытая формула (6.2.1) дает «открытые» полиномы, выражающие $x_{n+1} - x_n$ как линейные функции wDx_s , ни одна из которых не будет иметь индекса, превышающего wDx_n .

6.3. Специальные методы для уравнений второго порядка, не содержащих членов с первой производной

Для случая, когда дифференциальное уравнение имеет второй порядок, причем члены с первой производной отсутствуют,

$$D^2x = f(x, t)$$

были разработаны специальные формулы, которые дают очень быструю сходимость разностных рядов и где не нужно вычислять первые производные. Из определения оператора K следует, что

$$\begin{aligned} K &= \exp(wD) + \exp(-wD) - 2 = \\ &= w^2 D^2 + \frac{1}{12} w^4 D^4 + \frac{1}{360} w^6 D^6 + \frac{1}{20160} w^8 D^8 + \dots; \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

откуда, обращая, получаем

$$w^2 D^2 = K - 2 \frac{1^2}{4!} K^2 + 2 \frac{1^2 \cdot 2^2}{6!} K^3 - 2 \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{8!} K^4 + \dots .$$

Здесь

$$K = \left(\frac{K}{w^2 D^2} \right) w^2 D^2,$$

и если в знаменатель выражения для K вместо $w^2 D^2$ подставить ряд и разложить дробь в степенной ряд, то получим

$$K = \left(1 + \frac{1}{12} K - \frac{1}{240} K^2 + \frac{31}{60\,480} K^3 - \dots \right) w^2 D^2$$

или, как обычно пишут,

$$\begin{aligned} 1 = & \left(K^{-1} + \frac{1}{12} - \frac{1}{240} K + \frac{31}{60\,480} K^2 - \frac{289}{3\,628\,800} K^3 + \right. \\ & \left. + \frac{317}{22\,809\,600} K^4 - \dots \right) w^2 D^2, \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

где K^{-1} — оператор, обратный K , т. е. такой, что $KK^{-1}=1$, и представляет собой смещение в таблице разностей $w^2 D^2$ на два столбца влево от столбца $w^2 D^2$, а в той же самой строке — двойное суммирование.

Используем уравнение (6.3.2) и предположим, что процесс интегрирования представлен следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} t_{n-3} & x_{n-3} & K^{-1} w^2 D^2 x_{n-3} & w^2 D^2 x_{n-3} & & & K w^2 D^2 x_{n-3} & & \\ & & & & & & \nabla w^2 D^2 x_{n-2} & & \\ t_{n-2} & x_{n-2} & K^{-1} w^2 D^2 x_{n-2} & w^2 D^2 x_{n-2} & & & & K w^2 D^2 x_{n-2} & \\ & & & & & & \nabla w^2 D^2 x_{n-1} & & \\ t_{n-1} & x_{n-1} & K^{-1} w^2 D^2 x_{n-1} & w^2 D^2 x_{n-1} & & & & K w^2 D^2 x_{n-1} & \\ & & & \Delta K^{-1} w^2 D^2 x_{n-1} & & & & & \\ t_n & x_n & K^{-1} w^2 D^2 x_n & w^2 D^2 x_n & & & \nabla w^2 D^2 x_n & & [K w^2 D^2 x_n] \\ & & & (\Delta K^{-1} w^2 D^2 x_n) & & & & & \\ t_{n+1} & (x_{n+1}) & (K^{-1} w^2 D^2 x_{n+1}). & & & & & & \end{array}$$

Величины в квадратных скобках приближенные, а в круглых скобках пока не известны. Величина $\omega^2 D^2 x_n$ находится из дифференциального уравнения по t_n и x_n и, конечно, равна $\Delta^2 K^{-1} \omega^2 D^2 x_{n-1}$. Таким образом, добавляя $\omega^2 D^2 x_n$ к $\Delta K^{-1} \omega^2 D^2 x_{n-1}$, получим $\Delta K^{-1} \omega^2 D^2 x_n$, а добавляя эту величину к $K^{-1} \omega^2 D^2 x_n$, получим $K^{-1} \omega^2 D^2 x_{n+1}$. Из приближенно известного значения $K \omega^2 D^2 x_n$ и точно известной величины $\nabla \omega^2 D^2 x_n$ найдем приближенное значение $\omega^2 D^2 x_{n+1}$, а из общего хода разностей или другим способом получаем приближенную оценку для $K \omega^2 D^2 x_{n+1}$. Затем уравнение (6.3.2) дает приближенное значение x_{n+1} , зная которое и используя дифференциальное уравнение, находим значение $\omega^2 D^2 x_{n+1}$, которое при подходящим образом выбранном ω может быть окончательным и дает окончательное значение $K \omega^2 D^2 x_n$. Далее может быть найдена улучшенная оценка $K \omega^2 D^2 x_{n+1}$ по разностям или иным способом, и затем можно произвести окончательное вычисление x_{n+1} с использованием уравнения (6.3.2). Теперь таблица находится в таких же условиях, с которых начался счет, но сдвинута на один шаг, и поэтому весь цикл можно повторить.

Отметим, что суммирование столбцов никогда не проверяется. Время от времени, если необходимо, весь процесс может быть проверен применением уравнения (6.3.2) к последовательным строкам в таблице, в которой к тому времени стоят только «окончательные» значения. Процесс был описан для ручного счета, при котором желательно так выбирать ω , чтобы величина $\omega^2 D^2 x_{n+1}$, рассчитанная с помощью дифференциального уравнения, имела бы ошибку не более половины единицы последнего десятичного знака, сохраняемого при вычислениях. При счете на цифровых вычислительных машинах иногда могут быть использованы более тщательно разработанные схемы итераций и использованы разности более высокого порядка от $\omega^2 D^2 x$, чем $K \omega^2 D^2 x$.

Вместо уравнения (6.3.2) может быть использована введенная Штермером «открытая» центрально-разностная формула. Она может быть получена независимо или выведена из (6.3.2) подстановкой центральных разностей и их выражения через нисходящие разности.

Эта формула имеет вид

$$1 = \left(1 + \frac{1}{12} \nabla^2 + \frac{1}{12} \nabla^3 + \frac{19}{240} \nabla^4 + \frac{3}{40} \nabla^5 + \frac{863}{12\,096} \nabla^6 + \right. \\ \left. + \frac{275}{4032} \nabla^7 + \frac{37\,553}{518\,400} \nabla^8 + \dots \right) K^{-1} w^2 D^2. \quad (6.3.3)$$

Она используется в основном так же, как (6.3.2), но не требует итераций; ее коэффициенты уменьшаются гораздо медленнее, чем коэффициенты (6.3.2), и для фиксированного порядка разностей и фиксированной допустимой ошибки формула (6.3.3) требует применения значительно меньшего шага w . Она может быть использована для получения первого вспомогательного значения x_{n+1} с последующим улучшением при помощи (6.3.2).

Чтобы начать считать по схеме интегрирования уравнений второго порядка, которая годится как для случая одного зависимого переменного, так и для случая многих переменных, необходимо вычислить $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3$ с помощью ряда Тейлора с начальными значениями x и Dx ; из дифференциального уравнения найти $w^2 D^2$; затем найти $K^{-1} w^2 D^2 x_0$ из (6.3.2), где $x=x_0$ и аналогичным способом найти $K^{-1} w^2 D^2 x_1$. Разность $\Delta K^{-1} w^2 D^2 x_0$ позволяет суммировать два столбца слева от $w^2 D^2 x$. Далее можно найти из дифференциального уравнения начальные производные и тогда начинать суммирование по формулам:

$$K^{-1} w^2 D^2 = 1 - \frac{1}{12} w^2 D^2 + \frac{1}{240} w^4 D^4 - \frac{1}{6048} w^6 D^6 + \dots ,$$

$$\Delta K^{-1} w^2 D^2 = wD + \frac{1}{2} w^2 D^2 + \frac{1}{12} w^3 D^3 - \frac{1}{720} w^5 D^5 + \\ + \frac{1}{30\,240} w^7 D^7 \dots ,$$

которые читатель может без труда получить сам. Существуют также другие способы начинать интегрирование.

6.4. Точность численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Можно так выбрать величину шага ω независимой переменной и число оставляемых при вычислениях десятичных знаков, что при численном интегрировании любой системы обыкновенных дифференциальных уравнений будет достигнута любая точность, необходимая на заданном интервале изменения аргумента. Такое интегрирование может быть полностью спланировано заранее. Опишем общий метод анализа ошибок, который можно использовать при таком планировании; он был развит [1] на основе сообщения, сделанного автору Ч. Морреем-младшим. Аналогичное общее изучение проблемы осуществил Томас; Брауэр [2] провел специальное исследование роста ошибки при численном интегрировании уравнений движений планет; Радемахер рассмотрел некоторые системы уравнений.

Сначала каждое дифференциальное уравнение порядка $S > 1$ должно быть заменено системой s дифференциальных уравнений первого порядка введением вместо производных порядка $s-1, s-2, \dots, 1$ новых переменных. В результате получится совместная система дифференциальных уравнений, каждое из которых есть уравнение первого порядка. Если независимую переменную обозначить через t , а зависимые переменные через z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то система может быть записана в виде

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, z_2, \dots, z_n, t). \quad (6.4.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Если z_i будут решением, удовлетворяющим некоторым начальным или граничным условиям, а $z_i + x_i$ является «соседним» решением, удовлетворяющим немного отличающимся начальным условиям, то тогда, если x_i очень малы, мы имеем

$$\dot{z}_i + \dot{x}_i = f_i + \sum_s \frac{\partial f_i}{\partial z_s} x_s$$

или

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.4.2)$$

где

$$a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}$$

являются функциями $a_{i,j}$, вычисленными совместно с решением z_i уравнения (6.4.1). Уравнения (6.4.2) могут быть названы уравнениями в вариациях, соответствующими системе уравнений (6.4.1). Однако полезнее рассмотреть несколько более общие уравнения

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6.4.3)$$

где n^2 коэффициентов $a_{i,j}$ и n величин b_i зависят от t . Если бы в процессе решения исходной системы уравнений (6.4.1) по безошибочной схеме интегрирования была бы сделана одна ошибка, то решение было бы совершенно точным до момента, когда была сделана ошибка, но для последующих значений t решение, все еще точно удовлетворяя исходным уравнениям (6.4.1), соответствовало бы измененным начальным условиям. Следовательно, если x_i обозначает разность между точным значением z_i и \hat{z}_i , найденным с помощью численного интегрирования, то величина x_i равняется нулю до совершения ошибки и растет после того, как ошибка сделана, в соответствии с уравнениями (6.4.3), где все b_i равны нулю всюду, кроме интервала, в котором была сделана ошибка.

Пусть λ_i представляет собой систему переменных, удовлетворяющих системе n дифференциальных уравнений первого порядка, сопряженной системе (6.4.3):

$$-\dot{\lambda}_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} \lambda_j. \quad (6.4.4)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i \right) &= \sum_1^n \dot{x}_i \lambda_i + \sum_1^n x_i \dot{\lambda}_i = \\ &= \sum_{i,j} a_{i,j} x_j \lambda_i - \sum_{i,j} a_{j,i} x_i \lambda_j + \sum_i b_i \lambda_i = \sum_i b_i \lambda_i, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^n x_i(A) \lambda_i(A) = \sum_i x_i(0) \lambda_i(0) + \int_0^A \sum_i b_i \lambda_i dt. \quad (6.4.5)$$

Если из-за несовершенства методов вычисления или по какой-нибудь другой причине в i -й переменной x_i появилась ошибка $\varepsilon_i(t)$ на каком-либо шаге (скажем, на шаге $t-w, t$) в решении исходной системы дифференциальных уравнений (6.4.1), то можно считать, что эти ошибки вводятся через b_i в формулы (6.4.3) так, что t

$$\varepsilon_i(t) = \int_{t-w}^t b_i(t) dt$$

и равны нулю вне интервала $(t-w, t)$. Приближенно можно считать, что

$$b_i(t) = \frac{1}{w} \varepsilon_i(t)$$

на всем интервале и поэтому приближенно

$$\int_{t-w}^t b_i(t) \lambda_i(t) dt = \varepsilon_i(t) \lambda_i(t).$$

Таким образом, при помощи (6.4.5) находим, что результирующая конечная ошибка (скажем, в момент $t = A$) в переменной x_1 равна

$$x_1(A) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \lambda_i(t)$$

и, если ошибки введены во всех шагах,

$$x_1(A) = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{шагам}}} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \lambda_i(t) \quad (6.4.6)$$

при условии, что λ_i — любое решение уравнения (6.4.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$\lambda_1(A) = 1,$$

$$\lambda_j(A) = 0 \quad (j \neq 1).$$

Формулы (6.4.5) и (6.4.6) дают возможность предсказания ошибок численных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На практике достаточно грубого решения уравнений (6.4.4), основанного на приближенном аналитическом или численном решении исходных уравнений. Ошибки округления обычного ручного или машинного счета описываются распределением, среднее которого равно нулю, а индивидуальные значения распределены от $-1/2$ до $+1/2$ единицы последнего оставляемого знака; таким образом, дисперсия (среднее квадратичное значение) таких ошибок составляет $1/12$ единицы последней оставляемой цифры. Например, при счете с восемью десятичными знаками дисперсия в рассматриваемом случае равна $1/12 \cdot 10^{-16}$; при счете с 32 двоичными цифрами, оставленными справа от запятой в двоичном числе, дисперсия ошибок округления равна $1/12 \cdot 2^{-64}$. Суммарная дисперсия конечного значения дается в виде

$$\sigma_{x_1(A)}^2 = \sigma_1^2 \sum \lambda_1^2(t) + \dots + \sigma_n^2 \sum \lambda_n^2(t), \quad (6.4.7)$$

где σ_i^2 — дисперсия ошибок округления, появляющихся в переменных x_i на каком-либо шаге, и суммы взяты по всем шагам.

Другой источник ошибок при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений за-

ключается в том обстоятельстве, что сами формулы, используемые для интегрирования, всегда отчасти неточны. Какая бы формула ни использовалась, с применением итераций или без их применения, любой частный метод интегрирования, примененный к частной системе дифференциальных уравнений, всегда больше соответствует точному решению системы разностных уравнений, чем исходным дифференциальным уравнениям. Таким образом, выбранный частный метод интегрирования соответствует точному решению системы дифференциальных уравнений, немного отличных от исходных дифференциальных уравнений, решение которых ищется. Ошибки, возникающие таким образом, называются *ошибкой вследствие отбрасывания членов*. Всегда можно оценить приближенно разность между исходными дифференциальными уравнениями и уравнениями, которые фактически решаются, затем найти соответствующие b_i , в уравнениях в вариациях в форме (6.4.3) и, наконец, применить выражение (6.4.5), чтобы вычислить конечную ошибку вследствие отбрасывания членов по формуле

$$x_s(A) = \int_0^A \sum_i b_i(t) \lambda_i(t) dt, \quad (6.4.8)$$

где, как обычно, λ_i должны быть выбраны так, чтобы удовлетворять граничным условиям вида

$$\lambda_s(A) = 1,$$

$$\lambda_j(A) = 0. \quad (j \neq s)$$

Затем можно найти соответствующие ошибки $\varepsilon_i(t)$, а затем использовать уравнение (6.4.6).

6.5. Пример анализа ошибок: численное интегрирование уравнений движения близкого спутника Земли

Рассмотрим в качестве примера анализа ошибок численное интегрирование уравнений движения близкого спутника вокруг сплюснутой Земли. В невращающихся

геоцентрических прямоугольных осях эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{x}{r^3} + X, \\ \ddot{y} &= -\frac{y}{r^3} + Y, \\ \ddot{z} &= -\frac{z}{r^3} + Z;\end{aligned}\tag{6.5.1}$$

где координаты спутника x, y, z , а X, Y, Z обозначают компоненты ускорения, возникающего за счет сил, отличных от сил притяжения, обратно пропорциональных квадрату расстояния. Единицы времени и расстояния были выбраны так, что коэффициенты главных членов типа x/r^3 равны единице; при этом известно, что члены X, Y, Z примерно в 600 раз меньше основных членов. Правые части уравнений (6.5.1) являются функциями x, y, z и t . Зависимость от t возникает из-за притяжения Солнца, Луны и планет. Вследствие малости членов X, Y, Z по сравнению с главными членами представляется разумным пренебречь ими при анализе ошибки и рассмотреть точность численного интегрирования уравнений, получающихся, когда X, Y, Z в уравнениях (6.5.1) положены равными нулю. Таким образом, мы рассмотрим численное интегрирование уравнений движения задачи одного притягивающего центра, чтобы получить строгие требования к размеру шага и числу десятичных знаков, которым они должны удовлетворять, когда уравнения (6.5.1) решаются численно.

Сначала мы сведем уравнения движения к системе шести дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_3 &= z_4, & \dot{z}_5 &= z_6, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{z_1}{r^3}, & \dot{z}_4 &= -\frac{z_3}{r^3}, & \dot{z}_6 &= -\frac{z_5}{r^3},\end{aligned}$$

где $r^2 = z_1^2 + z_3^2 + z_5^2$; здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}x &= z_1, & y &= z_3, & z &= z_5, \\ \dot{x} &= z_2, & \dot{y} &= z_4, & \dot{z} &= z_6,\end{aligned}$$

а затем частным дифференцированием получим шесть уравнений в вариациях, соответствующих уравнению (6.4.2):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + b_1, \\ \dot{x}_2 &= (3\cos^2 t - 1) x_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot x_3 + \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot x_5 + b_2, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + b_3, \\ \dot{x}_4 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot x_1 + \left(\frac{3}{2} \sin^2 t - 1 \right) x_3 + \frac{3}{2} \sin^2 t \cdot x_5 + b_4, \\ \dot{x}_5 &= x_6 + b_5, \\ \dot{x}_6 &= \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot x_1 + \frac{3}{2} \sin^2 t x_3 + \left(\frac{3}{2} \sin^2 t - 1 \right) x_5 + b_6.\end{aligned}\tag{6.5.2}$$

Возьмем начальные условия

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \dot{z} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

так что точное движение будет круговым со средним расстоянием, равным единице, периодом 2π и наклонением $i = 45^\circ$. При вычислении коэффициентов $a_{i,j}$ в (6.4.3) было использовано точное решение уравнений движения, а именно

$$x = \cos t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t.$$

Если бы точное решение уравнений движения было неизвестно, нам бы пришлось получать величины $a_{i,j}$ в уравнениях (6.5.2) следующим способом: грубым численным интегрированием уравнений движения определить значения z_i , используя которые можно затабулировать приближенную зависимость $a_{i,j}$ от t . Таким

образом, присоединенные уравнения, соответствующие системе (6.4.4), имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -3(\cos^2 t - 1)\lambda_2 - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot \lambda_4 - \\ &\quad - \frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot \lambda_6, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot \lambda_2 - \left(\frac{3}{2} \sin^2 t - 1\right) \lambda_4 - \frac{3}{2} \sin^2 t \cdot \lambda_6, \\ \dot{\lambda}_4 &= -\lambda_3, \\ \dot{\lambda}_5 &= -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin t \cos t \cdot \lambda_2 - \frac{3}{2} \sin^2 t \cdot \lambda_4 - \left(\frac{3}{2} \sin^2 t - 1\right) \lambda_6, \\ \dot{\lambda}_6 &= -\lambda_5.\end{aligned}\tag{6.5.3}$$

Если мы пожелаем рассмотреть точность переменной y в любой момент A после начала интегрирования, нам будет нужна система λ_i , удовлетворяющих системе (6.5.3) и таких, что $\lambda_1(A) = \lambda_2(A) = \lambda_4(A) = \lambda_5(A) = \lambda_6 = 0$, тогда как $\lambda_3(A) = 1$. Если A есть целое число оборотов, то решение уравнений (6.5.3) имеет вид¹

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} \sin t - \sin 2t + \frac{3}{2} (t - A) \cos t \right], \\ \lambda_2 &= \sqrt{2} \left[\frac{3}{2} - \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{3}{2} (t - A) \sin t \right],\end{aligned}$$

¹ Самым легким способом получения системы независимых решений в настоящем примере является нахождение изменений первого порядка величин x_l на эллиптической орбите, вызванных малым возрастанием величины ε , последовательно в каждом из начальных значений величин x , \dot{x} , y , \dot{y} , z и \dot{z} . Исходя из этого, мы можем найти шесть независимых систем величин x_l . Учитывая, что уравнения (6.5.2) (без членов b_i) переходят в уравнения (6.5.3) подстановкой $x_1 = \lambda_2$, $x_2 = -\lambda_1$, $x_3 = \lambda_4$, $x_4 = -\lambda_3$, $x_5 = \lambda_6$, $x_6 = -\lambda_5$, мы можем при помощи таких подстановок определить все шесть линейно независимых решений уравнений (6.5.3).

$$\lambda_3 = \cos 2t + \frac{3}{2} (t - A) \sin t,$$

$$\lambda_4 = -\frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{3}{2} (t - A) \cos t,$$

$$\lambda_5 = -\cos t + \cos 2t + \frac{3}{2} (t - A) \sin t,$$

$$\lambda_6 = -\frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{3}{2} (t - A) \cos t,$$

что читатель может проверить. Исходное уравнение имеет шесть линейно независимых решений, одним из которых является система (6.5.4). Если A не является целым числом оборотов, то придется использовать линейную комбинацию шести решений, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Чтобы избежать слишком длинного анализа, предположим, что нас интересует точность по y после целого числа оборотов. Интуитивно можно ожидать, что изучение этого частного случая даст полезные сведения при отсутствии полного анализа, поскольку предполагается, что y при анализе ошибки ничем не отличается от любой другой зависимой переменной и что ограничение, связанное с целым числом оборотов, вряд ли исказит картину.

Мы предполагаем, что численное интегрирование должно быть проведено на быстродействующей автоматической цифровой машине с использованием формулы центральных разностей (6.3.2) разд. 6.3, при сохранении членов $K^3\omega^2D^2$ и использовании такого количества цифр справа от запятой в десятичных или двоичных числах, чтобы единица на последнем месте имела бы величину d , и с использованием итераций на каждом шаге, если это необходимо; интегрирование ведется так, чтобы использовать практически самые большие значения ω и, таким образом, не брать больше шагов, чем необходимо. Зададимся вопросом, какого порядка должны быть d и ω , чтобы мы могли сохранять точность в шесть десятичных знаков после 600 суток движения спутника, что

из расчета 15 оборотов за сутки составляет $A = 5,4 \cdot 10^4$ единиц времени. Точность 10^{-6} в x, y, z соответствует угловой ошибке порядка $0'',2$ геоцентрической дуги, около $2''$ в истинном движении, а во времени ошибка составит $0^s,001$; это сравнимо, таким образом, с точностью лучших наблюдений.

Ошибка округления η в $\omega^2 D^2 x$ вызывает появление накапливающейся ошибки округления в \dot{x} . Таким образом в \dot{x} вводится ошибка η/ω . Существует еще ошибка, вводимая в x , но она не накапливается; те же самые рассуждения относятся к y и z . Поскольку дисперсия ошибки η равна $d^2/12$, то для ошибки η/ω она равна $d^2/12\omega^2$. Отсюда мы заключаем, что в (6.4.7) $\sigma_1^2 = \sigma_3^2 = \sigma_5^2 = 0$, тогда как $\sigma_2^2 = \sigma_4^2 = \sigma_6^2 = d^2/12\omega^2$; поэтому из уравнения (6.4.7) получаем в момент времени A

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sigma_{x_3(A)}^2 = \frac{d^2}{12\omega^3} \int_0^A (\lambda_2^2 + \lambda_4^2 + \lambda_6^2) dt = \\ &= \frac{d^2}{12\omega^3} \int_0^A \frac{9}{2} (t - A)^2 dt = \frac{d^2 A^3}{8\omega^3}, \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

если удерживать только наиболее важные члены. Сумма в уравнении (6.4.7) была заменена на интеграл, помноженный на $1/\omega$, поскольку в сумме имеется $1/\omega$ членов на единицу времени.

В случае возникновения ошибки, вызванной отбрасыванием членов, пренебрежение членами $K^4 \omega^2 D^2$ в x, y, z вызывает появление ошибки на каждом шаге

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\omega^{10}}{70\,000} \cos t,$$

$$\varepsilon_3(t) = \varepsilon_5(t) = \frac{\omega^{10}}{70\,000 \sqrt{2}} \sin t,$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_4(t) = \varepsilon_6(t) = 0,$$

поэтому из уравнения (6.4.6) конечная ошибка в y равна

$$x_3(A) = \frac{1}{\omega} \int (\varepsilon_1 \lambda_1 + \varepsilon_3 \lambda_3 + \varepsilon_5 \lambda_5) dt = \frac{3\omega^9 A^2}{140\,000 \sqrt{2}}. \quad (6.5.6)$$

Если величина y по прошествии времени t должна быть точной до шестого десятичного знака ($E=10^{-6}$), то отсюда следует, что мы должны выбрать ω и d такими, чтобы

$$\frac{d^2t^3}{8\omega^3} \leq \frac{E^2}{12}, \quad (6.5.7)$$

$$\frac{3\omega^9t^2}{140\ 000\sqrt{2}} \leq \frac{E}{2}. \quad (6.5.8)$$

Поскольку $A = 5,4 \cdot 10^4$, из (6.5.8) находим, что $\omega \leq \leq 0,0606$, а затем из (6.5.7), что $d \leq 10^{-15}$. Ради удобства выберем точно $\omega = 0,06$; тогда из (6.5.7) найдем, что по-прежнему $d \leq 10^{-15}$. Таким образом, величина шага с необходимостью равна 0,06 и счет должен вестись с 15 десятичными знаками. Число шагов во всем интервале интегрирования будет равным $5,4 \cdot 10^4 / 0,06 = = 9 \cdot 10^5$. Быстродействующая автоматическая вычислительная машина IBM 704 во время написания книги (весна 1959 г.) затрачивала четверть секунды для одного такого шага. Таким образом, для интегрирования необходимо время, равное $2,25 \cdot 10^5$ сек, и если машина работает по 40 час в неделю, то 1,6 недели или около 11 календарных дней.

Отметим, что для заданного E число шагов будет меняться как $t^{1/6}$. Величина d , согласно (6.5.7), тогда будет меняться как $t^{-11/6}$. За 10 лет движения спутника число шагов было в 9 раз больше, чем в рассмотренном примере, а d было бы в 27 раз меньше и потребовало бы 17 десятичных знаков. Нужно было бы свыше трех месяцев времени счета. Тому, кто пожелает исследовать численное интегрирование орбитального движения Земли с точностью до 6 десятичных знаков, интересно узнать, что 10 лет движения спутника соответствуют по времени 54 000 лет орбитального движения Земли.

6.6. Специальные возмущения. Метод Коуэла и Кроммелина

Этот метод является одним из самых простых, но самых грубых методов получения специальных возмущений, и хотя он не дает никакой выгоды по сравне-

нию с тем, что мы называем приближенной орбитой, он часто оказывается весьма эффективным. Впервые этот метод был разработан и применен Коуэлом и Кроммелином при расчете траектории кометы Галлея, но та же самая общая процедура применима к любой динамической задаче. Уравнения движения планеты или кометы решались прямо в прямоугольных координатах x, y, z с началом отсчета в центре масс солнечной системы:

$$\ddot{x} = -k^2 \sum_i m_i \frac{(x - x_i)^2}{r_i^3} \quad (6.6.1)$$

со сходными уравнениями для y и z ; в этих уравнениях k — гауссова постоянная притяжения. Суммирование идет по всем планетам и Солнцу; m_i обозначает массу i -й планеты, r_i — расстояние i -го тела от рассматриваемого, так что

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2.$$

Уравнения решались численно первым методом, описанным в разд. 6.3. Величины x_i известны из предыдущих вычислений и обычно объект, траектория которого ищется, имеет пренебрежимо малую массу. При удалении кометы от Солнца становится возможным рассматривать Меркурий, Венеру, а позже Землю и Марс вместе с Солнцем как точечную массу, сосредоточенную в центре их масс.

Метод может быть также использован в гелиоцентрических прямоугольных координатах x, y, z , и тогда он применим для планет с большой массой m . Мы видели в разд. 4.5.5, что в этом случае

$$\ddot{x} = -k^2(1+m) \frac{x}{r^3} - k^2 \sum_i m_i \left[\frac{x - x_i}{\Delta_i^3} + \frac{x_i}{\rho_i^3} \right] \quad (6.6.2)$$

со сходными уравнениями для y и z . Здесь m_i — масса i -й планеты и где сумма берется по всем планетам; ρ_i — гелиоцентрическое расстояние i -й планеты; Δ_i — расстояние от i -й планеты до рассматриваемой; r — гелиоцентрическое расстояние рассматриваемой планеты

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\Delta_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

$$\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2.$$

Когда метод применяется для искусственных спутников Земли, обладающих пренебрежимо малой массой, то лучше выбрать, как обычно, оси x, y, z с центром в центре масс Земли, и в этом случае первое уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -\frac{k^2 x}{r^3} - k^2 \sum_i m_i \left[\frac{x - x_i}{\Delta_i^3} + \frac{x_i}{\rho_i^3} \right] - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.6.3)$$

(аналогичные уравнения для y и z), где масса Земли принята за единицу и k^2 имеет соответствующее этому значение; суммирование включает Солнце, Луну и планеты (без Земли), r — геоцентрическое расстояние спутника, а ρ_i — расстояние i -го объекта от Земли и где Δ_i — расстояние от i -го объекта до спутника. Функция ψ представляет внешний гравитационный потенциал Земли, за исключением основного члена с $1/r$. Другой главный член в сумме появляется для близких ИСЗ из-за влияния Луны; он имеет величину порядка 10^{-7} от x/r^3 ; следующий большой член дает Солнце, его величина порядка $5 \cdot 10^{-8}$ от x/r^3 ; вклад от Юпитера составляет около 10^{-5} величины члена от Солнца. Таким образом, преобладающее значение имеют члены x/r^3 и ψ . Если происходит учет членов от притяжения Луны и Солнца, тогда при расчете ψ необходимо учитывать сферические гармонические функции, связанные с вращением земной оси, подверженной влиянию нутации и прецессии, поскольку они дают в члене ψ величину, сравнимую с влиянием членов от Луны и Солнца.

6.7. Специальные возмущения. Метод Энке

При решении уравнений (6.6.2) может быть использовано известное невозмущенное решение в виде эллиптического движения, которое имеет место, если не учи-

тывать притяжение планет. Удобнее выбрать гелиоцентрические координаты с фиксированным равноденствием, так что оси не врачаются, и принять в качестве начальных координат и скоростей невозмущенного движения координаты и скорости реального движения в некоторый заданный момент. Тогда невозмущенное движение с координатами x_0 , y_0 , z_0 будет представлять оскулирующий эллипс в этот момент. Такие координаты удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{x}_0 = -k^2(1+m) \frac{x_0}{r_0^3}, \quad (6.7.1)$$

так что если ε , ζ , η суть возмущения

$$\varepsilon = x - x_0,$$

то путем вычитания уравнений получим

$$\ddot{\epsilon} = k^2(1+m)\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right) + k^2 \sum m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{\rho_i^3}\right) \quad (6.7.2)$$

где возмущения обычно очень малы по величине. Поскольку t_i очень малы (масса Юпитера, имеющая наибольшую величину, равна примерно 0,001), то сумма также мала по величине и может быть вычислена очень точно, если принять для x невозмущенное значение x_0 . Этот член уравнения называется прямым, и когда происходит интегрирование, можно принять приближенные значения для величин возмущений, чтобы получить его с необходимой точностью. Первый член правой части уравнений (6.7.2) содержит разность почти равных величин и называется непрямым членом. Ясно, что интегрирование может быть проведено просто применением методов разд. 6.3 как в случае метода Коуэла—Кроммелина, но обычно полезно провести преобразование, чтобы избавиться от трудности при оценке непрямого члена.

Величины q и функция $f(q)$, которая затабулирована, определяются так

$$1 + 2q = \frac{r^2}{r_0^2},$$

$$1 - f q = \frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} q &= \left[\left(x_0 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \varepsilon + \left(y_0 + \frac{1}{2} \zeta \right) \zeta + \left(z_0 + \frac{1}{2} \eta \right) \eta \right] \frac{1}{r_0^2}, \\ f &= 3 \left(1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \dots \right), \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

где q очень мало. Уравнение (6.7.2) тогда принимает вид

$$\ddot{\omega^2 \varepsilon} = h(fqx - \varepsilon) + X_d, \quad (6.7.4)$$

где

$$h = \frac{\omega^2 k^2 (1 + m)}{r_0^3},$$

$$X_d = \omega^2 k^2 \sum_i m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{\rho_i^3} \right)$$

со сходными уравнениями для ζ и η .

Из уравнения (6.3.2) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(K^{-1} + \frac{1}{12} - \frac{K}{240} + \dots \right) \ddot{\omega^2 \varepsilon} = \\ &= \left[\left(K^{-1} - \frac{K}{240} \right) \ddot{\omega^2 \varepsilon} + \frac{X_d}{12} \right] + \frac{1}{12} h f q x - \frac{1}{12} h \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.7.5)$$

поэтому

$$\varepsilon \left(1 + \frac{h}{12} \right) = X_d' + \frac{1}{12} h f q x, \quad (6.7.6)$$

где

$$X_d' = \left(K^{-1} - \frac{K}{240} \right) \ddot{\omega^2 \varepsilon} + \frac{X_d}{12}$$

и т. д.

Теперь в схеме интегрирования, аналогичной схеме разд. 6.3 (но уже с ϵ , ζ , η вместо x , y , z), величина $K^{-1} \omega^2 \ddot{\epsilon}_{n+1}$ известна, $(K/240) \omega^2 \ddot{\epsilon}_{n+1}$ легко получается экстраполированием, а прямой член X_d известен заранее с хорошей точностью, так что значение X'_d уже приближенно имеется для момента t_{n+1} . Хотя f_{n+1} может быть легко проэкстраполирована, но для q_{n+1} экстраполяцию нельзя сделать непосредственно, и значение q_{n+1} может быть найдено из уравнения

$$q \left[r_0^2 \left(1 + \frac{h}{12} \right) - \frac{hf}{12} \sum x \left(x_0 + \frac{1}{2} \epsilon \right) \right] = \sum X'_d \left(x'_0 + \frac{1}{2} \epsilon \right),$$

которое получается из трех уравнений (6.7.6) и из уравнения (6.7.3), где суммирование производится по всем трем координатам.

Из уравнений (6.7.4) и (6.7.6) следует

$$\omega^2 \ddot{\epsilon} = X_d + \frac{h}{1 + \frac{h}{12}} (fqx - X'_d),$$

откуда можно найти $\omega^2 \ddot{\epsilon}_{n+1}$, а затем из (6.7.5) находится ϵ_{n+1} . После итераций можно сделать следующий шаг.

Интегрирование по методу Энке содержит вычисления, выполняемые весьма специальным образом, при этом различаются величины, известные точно и неточно, на каждом этапе используются величины и из формулы, определяющей q , и из формулы интегрирования (6.3.2). Автор не знает, насколько сложной будет реализация на практике при помощи современной быстродействующей вычислительной машины сложной и тонкой процедуры разд. 6.3 по сравнению с прямым решением (6.7.2) или (6.6.2). Однако при ручном счете по сравнению с другими методами вычисления метод Энке очень быстрый и его большая сложность представляется оправданной.

6.8. Специальные возмущения. Другие методы

Кроме прямого численного интегрирования дифференциальных уравнений, содержащих координаты или их возмущения, как в методах Энке и Коуэла—Кроммелина, существуют другие методы. Одним из самых быстрых, дающих некоторые сведения для определенных целей, методов является способ, состоящий в том, что необходимо решать шесть дифференциальных уравнений первого порядка (4.5.8.2), которые определяют производные по времени от оскулирующих элементов орбиты как функции этих элементов и времени. Правые части этих уравнений могут быть вычислены в зависимости от невозмущенной орбиты и численно проинтегрированы в течение большого интервала времени, чтобы получить возмущения первого порядка элементов на этом интервале. При таком счете необходимо вычислять определенные интегралы, но при этом можно пользоваться лишь формулами типа формулы Симпсона или трапеций, а не использовать методы, описанные в настоящей главе для решения дифференциальных уравнений. Далее правые части уравнений (4.5.8.2) пересчитываются в зависимости от получившихся возмущенных элементов, и уравнения интегрируются вновь, чтобы получить элементы, включающие их возмущения второго порядка. Этот процесс может быть продолжен до тех пор, пока не будет получена достаточная точность.

В качестве примера можно рассматривать наш расчет влияния сопротивления атмосферы в предыдущей главе.

Сходная процедура состоит в том, что уравнения (4.5.8.2) решаются способом, описанным в разд. 6.2, чтобы получить конечные значения возмущенных элементов на каждом шаге. Метод предшествующего раздела как будто лучше приспособлен для моделирующих вычислительных машин типа дифференциального анализатора, а второй метод — для цифровых машин. Этот процесс не требует выдерживания большой точности при вычислениях, чтобы получить желаемую степень точности, что приходится делать в случае прямого чис-

ленного интегрирования уравнений движения в исходных координатах.

Существуют и другие специальные методы вычисления возмущений, где вычисления проводятся в полярных координатах, за разбором которых мы отсылаем читателей к книге Пламмера [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Sterne T. E., Mathematical Tables and other Aids to Computation, 7, 159 (1953).
2. Brouwer D., Astron. J., 46, 149 (1937).
3. См., например, Plummer, Dynamical Astronomy, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1918, chap. 18.

Т. Штерн

ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

Редакторы Л. В. Самсоненко

и Г. И. Кузьменко

Художник Н. К. Сапожников

Художественный редактор

Е. И. Подмаркова

Технический редактор

Л. П. Кондюкова

Сдано в производство 5.VIII—63 г. Подписано к печати 7.I—64 г. Бумага 84×108 32.
Бум. л. 3.8 Печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 10,3
Изд. № 27/1958. Зак № 649. Цена 91 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «М И Р»

Москва, 1-й Рижский пр., 2

Типография Изд-ва МГУ, Москва,

Ленинские горы